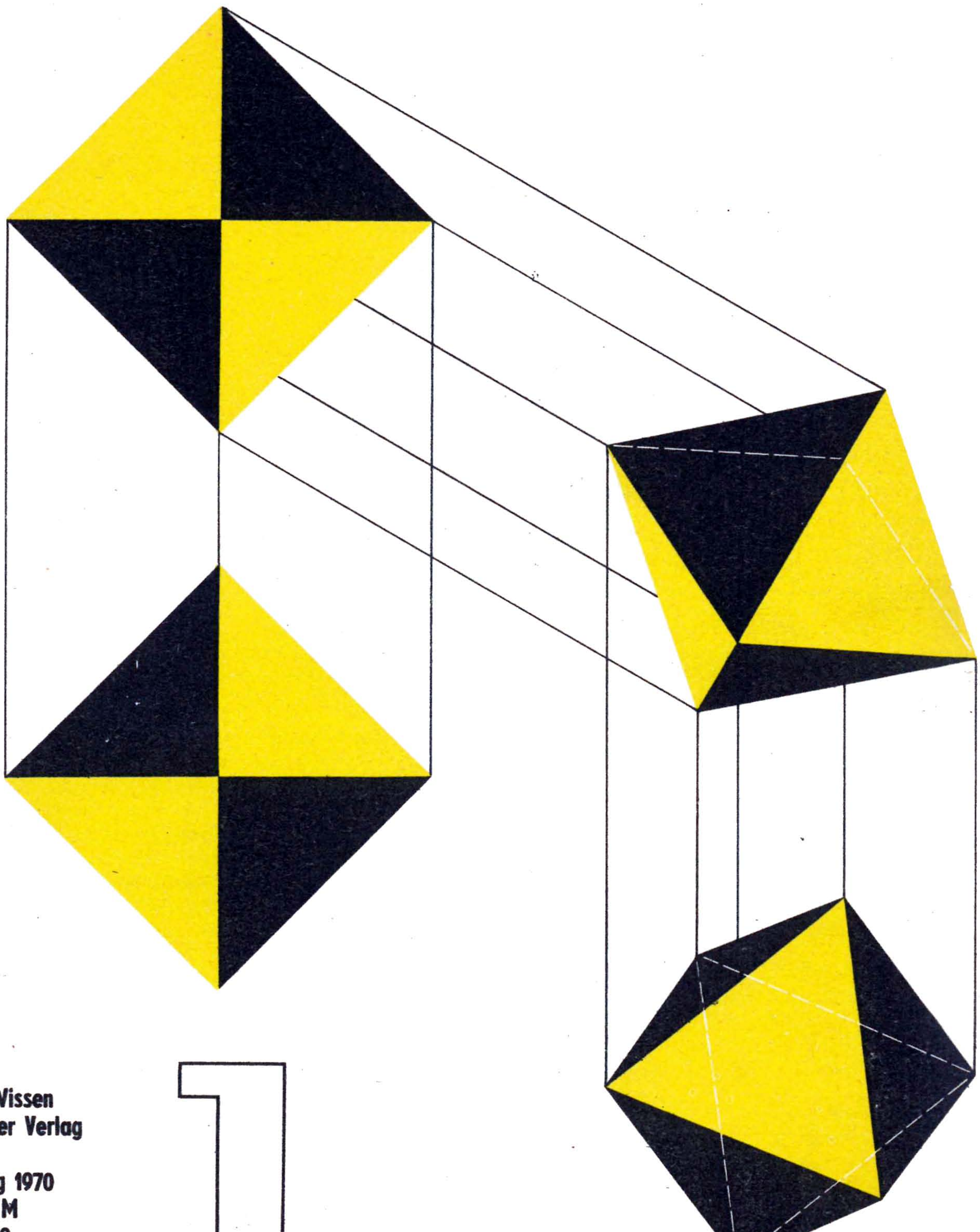
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
4. Jahrgang 1970
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: M. Naumann, Leipzig (S. 5); Vignetten: H.-J. Jordan, Leipzig (S. 22/23); Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig; Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 25. November 1969

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Über die Anfänge der Mathematik

Die menschliche Arbeit enthielt schon frühzeitig mathematische Elemente. Die handwerklichen Erzeugnisse der damaligen Zeit, wie z. B. Räder mit und ohne Speichen, die Bauwerke, die Anlage von Feldern, ferner Ornamente auf Waffen, in Webereierzeugnissen, an Bauten usw. verraten die Vertrautheit mit den geometrischen Grundtatsachen schon zum Zeitpunkt des Entstehens der Klassengesellschaften: Gleichseitiges und gleichschenkliges Dreieck, Quadrat, Würfel usw., Symmetrieeigenschaften sind erfaßt worden.

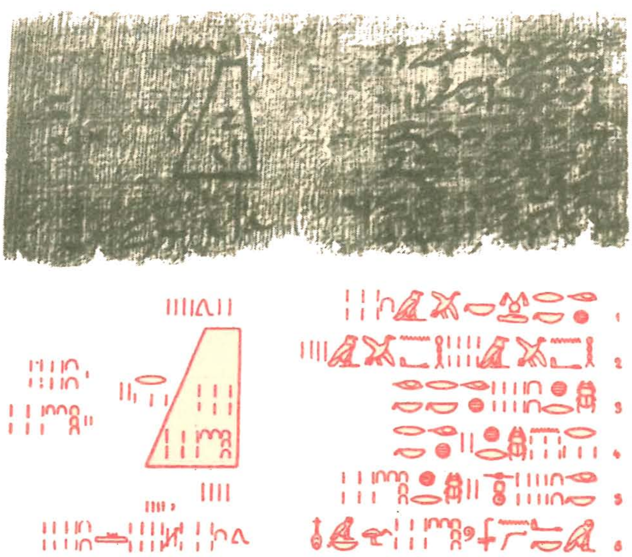


Abb. 1 Zwei Spalten des Moskauer Papyrus mit der Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes mit den Seiten 2 und 4 und der Höhe 6 Ellen. (Oben hieratischer Text, unten Umschrift in Hieroglyphen.)

Für die Ausbildung und Weiterführung der Zahlreihe haben die erste gesellschaftliche Arbeitsteilung, die Trennung in Ackerbauer und Viehzüchter, und das Aufkommen von Privateigentum die bestimmende Rolle gespielt. Aus der Notwendigkeit, Viehherden zu zählen, Tausch- und Geldgeschäfte zu betreiben, entwickelte sich die Fähigkeit zum Zählen. Es lassen sich mit philologischen Methoden und an ökonomisch und kulturell wenig entwickelten Völkern solche Stufen der Verwendung von Zahlwörtern nachweisen, wo die verwendeten Zahlworte, etwa die „Drei", von der Art der gezählten Gegenstände abhängen. Eine große Rolle haben in Europa noch bis zum Mittelalter Fingerzahlen gespielt, in einigen Teilen der Erde werden sie noch heute verwendet. Die Zahlsysteme wurden meist auf dezimaler Grundlage ausgebildet (10 Finger!), daneben tritt noch die 20 als Grundzahl auf, wie z. B. bei den Kelten und Mayas. Französisch 80 = quatre-vingt erinnert noch daran. Vereinzelt wurde auch die 12, d. i. die Zahl der Knöchel, verwendet. Allgemein sind die Worte für Hand und Finger in die Zahlworte eingegangen: „Hand" fällt fast überall mit „fünf" zusammen, 10 mit „beide Hände", 20 mit „ein Mensch".

Die philologischen Untersuchungen haben nachgewiesen, daß die gesamte indoeuropäische Sprachfamilie vor der Trennung in einzelne Völker im Besitz der Zahlworte bis 100 war, z. B. deutsch zwei, lat. duo, griech. δύο, sanskrit dvi (dve), ostgotisch twa, engl. two, dänisch to, schwedisch tva, irisch da, russisch два, franz. deux, ital. due usw. Die Erweiterung der Zahlreihe setzte erst nach der Trennung in die einzelnen Völkerstämme ein.

Eine weitere Haupttriebkraft zur Entwicklung menschlicher mathematischer Fähigkeiten bestand in der Notwendigkeit, sich in Raum und Zeit zu orientieren. Die Bestimmung von Entfernungen, die Abschätzung von Flächen- und Rauminhalten, die Bestimmung landwirtschaftlicher Termine zur Aussaat, Ernte, Viehzucht — all das führte zur Ausbildung der Zeitrechnung, des Kalenderwesens. Astronomische Perioden wurden gefunden. In diesem Sinne, als Ansammlung eines gewaltigen Beobachtungsmaterials, von Dutzenden von Generationen geduldiger Beobachter akkumuliert, ist die Astronomie die älteste Wissenschaft. Beispielsweise datierten die ägyptischen Astronomen nach der Entdeckung der Sothis-Periode* ihre Zeitrechnung bis 4228 v. u. Z. zurück.

Die Entwicklung des ursprünglichen mathematischen Denkens, das Herausarbeiten der direkt mit der Praxis zusammenhängenden mathematischen Probleme — bis etwa zur Bruchrechnung —, des Erfahrungsschatzes der elementaren Geometrie — ebene Figuren, deren Flächeninhalt; einfache Volumenberechnungen — usw. hat sich bei vielen Völkern unter ähnlichen gesellschaftlichen Bedingungen fast gleichartig und voneinander unabhängig vollzogen. So besaßen die Chinesen und Inder schon zwischen 3000 v. u. Z. und 500 v. u. Z. beträchtliche mathematische Kenntnisse.

* Der erste Aufgang des Sirius am Morgenhimmel fiel für die Gegend von Memphis (Mittelägypten) mit dem Anschwellen des Nils zusammen. Aus dem Aufgang des hellen Sterns, der leicht zu beobachten war, folgte eine Jahreslänge von 365 Tagen. Der Aufgang des Sirius verschob sich, und zwar in 4 Jahren um 1 Tag, so daß nach 1460 Jahren der Jahresanfang wieder auf den Siriusaufgang fiel. Diese sog. Sirius- oder Sithis-Periode ermöglichte den ägyptischen Astronomen die Rückdatierung des Kalenders und die Fixierung der ägyptischen Chronologie.

Aus Indien sind für diese Zeit geometrische Flächenverwandlungen, der Pythagoreische Lehrsatz, die Verwendung der aus der Ähnlichkeit von Dreiecken folgenden Eigenschaften nachgewiesen. Mit Hilfe der arithmetisch-geometrischen Mittelwertbildungen wurde z. B. die Näherung

$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 17}$ gefunden;

für die Kreisquadratur wurde die Näherung

$\sqrt{\frac{\pi}{4}} \approx \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 8}\right) \cdot \frac{1}{8 \cdot 29}$, für die Quadratzirkulatur $\sqrt{\frac{4}{\pi}} \approx \frac{2+2}{3}$ benutzt.

Abb. 2 Altindisches Zahlensystem
Ein Vierersystem wird überkreuzt von einem Dezimalsystem

Aus China sind uns seit 2800 v. u. Z. kontinuierliche astronomische Beobachtungen überliefert, um 2700 v. u. Z. wurde eine Sonnenfinsternis wissenschaftlich beschrieben. Um 1200 v. u. Z. entstand ein Lehrbuch der Kombinatorik: noch früher hatte die chinesische Tradition der magischen Quadrate begonnen. Diese standen im Mittelpunkt eines Zahlenkults ähnlich wie in der Sekte der Pythagoreer — ein erneuter Hinweis darauf, daß ähnliche gesellschaftliche Zustände ähnliche Erscheinungen auch auf geistigem Gebiet hervorbringen. Um 1100 v. u. Z. ist der Lehrsatz des Pythagoras für das Dreieck 3, 4, 5 nachgewiesen, Möglicherweise bereits um 1000 v. u. Z. wurde ein systematisches Lehrbuch des Rechnens, „Arithmetik in neun Teilen", verfaßt: Teil 1 — Berechnung von Dreieck, Trapez, Kreis; Teil 2 — Verhältnisse und Proportionen; Teil 3 — Regeldetri; Teil 4 — Quadrat- und Kubikwurzeln; Teil 5 — Volumenberechnungen; Teil 6 — Bewegungsprobleme; Teil 7 — Auflösung einfacher Gleichungen; Teil 8 — Auflösungen quadratischer Gleichungen; Teil 9 — pythagoreisches Dreieck. Die chinesischen sog. Bambusziffern werden auf das 6. Jahrhundert v. u. Z. datiert.

Hunderter wie Einer usw.

Abb. 3 Chinesische Bambusziffern

Mit diesen wenigen Tatsachen wollen wir es bewenden lassen. Sie zeigen deutlich, daß die Chinesen und Inder eine gleiche oder ähnliche Höhe der mathematischen Entwicklung aufweisen, wie sie die anderen Völker des Altertums besaßen und daß sie jedenfalls zu den frühesten Wegbereitern der Mathematik gehören.

Infolge des fanatischen Zerstörungswillens der spanischen und portugiesischen christlichen Eroberer sind fast alle schriftlichen Unterlagen über die frühen amerikanischen Kulturkreise verlorengegangen. Bekannt sind nur wenige Einzelheiten z. B. das Zahlensystem der Mayas, ein unreines 20er System, später als Positionssystem mit Nullzeichen, das in ganz engem Zusammenhang mit einem komplizierten Kalender steht. Jedoch ist die Datierung schwierig, sie schwankt zwischen dem 3. Jahrtausend v. u. Z. und den Jahrhunderten kurz vor und nach dem Beginn unserer Zeitrechnung.

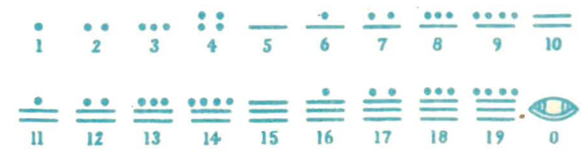


Abb. 4 Zahlzeichen der Mayas

Der Stand der Mathematik in Asien, Amerika und Afrika in dieser frühen Zeit ist jedoch relativ wenig erforscht — eine Folge des europazentristischen Standpunktes. Man wird für die nächste Zeit sehr viel neue Ergebnisse zu erwarten haben, wenn die von kolonialer Ausbeutung und innerer Unterdrückung befreiten Völker selbst ihre eigene kulturelle Vergangenheit studieren. *aus: H. Wußing: Die Mathematik in der Antike BG Teubner — Verlagsgesellschaft, Preis 18,— M*

Lenin über die Logik. Die Denkformen der Logik sind durchaus nicht vom Himmel gefallen, sondern auf das engste mit der Tätigkeit des Menschen verknüpft. Kennzeichnend für den Menschen zum Unterschied vom Tier sind die Fähigkeit zu Begriffs- und Urteilsbildungen und die Fähigkeit zur Arbeit, d. h. die im planvollen Handeln verwirklichte Einheit von Theorie und Praxis. Im und am Arbeitsprozeß entwickelt sich das Denken als ein gesellschaftlicher Prozeß. Die Menschen gewinnen im Laufe der Auseinandersetzung mit der Natur allgemeine Denkerfahrungen.
Die Logik entwickelt sich als das

„Fazit, die Summe, die Schlußfolgerung aus der Geschichte der Erkenntnis der Welt". „Die Gesetze der Logik sind die Widerspiegelungen des Objektiven im subjektiven Bewußtsein des Menschen." „Die praktische Tätigkeit des Menschen mußte milliardenmal das Bewußtsein des Menschen zur Wiederholung der verschiedenen logischen Figuren führen, damit diese Figuren die Bedeutung von Axiomen erhalten konnten." „Diese Figuren haben gerade (und nur) kraft dieser milliardenmaligen Wiederholung die Festigkeit eines Vorurteils und axiomatischen Charakter."

Eine Aufgabe, ausgewählt von Prof. Dr. rer. nat. habil.
Hans Wußing

Leiter der Abteilung Geschichte der Naturwissenschaften des Karl-Sudhoff-Instituts, Karl-Marx-Universität Leipzig

▲ 500 Es ist sehr schwierig, die Lebenszeit von Diophantos anzugeben. Sichere Grenzen nach unten und oben sind 150 v. u. Z. und 350 u. Z. Heute bestimmt man mit Hilfe vieler indirekter Schlüsse als Anhaltspunkt für seine Lebenszeit meist das Jahr 250 u. Z. Dagegen sind wir über einige seiner persönlichen Lebensumstände wie Alter, Zeitpunkt der Eheschließung u. a. bestens unterrichtet, und zwar durch gerade solch ein der damaligen Mode entsprechendes arithmetisches Gedicht. Es lautet:

Hier dies Grabmal deckt Diophantos. Schaut das Wunder!
Durch dies Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;
Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart;
Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe,
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.
Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.
Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer
Von sich scheuchend auch er kam an das irdische Ziel.

Entnommen aus: H. Wußing: Mathematik in der Antike

Mathematik — einst und jetzt

Als Kolumbus lossegelte, um den Seeweg nach dem reichen Indien zu suchen (und dabei einen ganz neuen Erdteil, Amerika, entdeckte) —, wie fand er auf dem weiten Ozean den Weg nach Westen? Wie wußte er, wo er sich befand? Hatte er seinen Reiseweg vorher auf der Karte konstruiert? Hatte er Zirkel und Lineal bei sich? Konnte man damals überhaupt schon Dreiecke konstruieren? Seit wann gibt es überhaupt Zirkel, seit wann gibt es überhaupt Geometrie als Wissenschaft?
Wer hat die Menschen das Rechnen gelehrt? Die Lehrer natürlich. Aber von wem lernten sie es? Von ihren Lehrern natürlich. Aber wer hat zuerst gefunden, daß $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$ ist? Wer gab zuerst die allgemeine Regel für die Addition von Brüchen? Wie kommt es, daß alle gebildeten Menschen auf der Erde die Zahl acht durch das Zeichen 8 ausdrücken? Wer hat die Schreibweise unserer zehn Ziffern erfunden? Warum sind es gerade zehn und nicht zwölf oder neun?
Fragen über Fragen. Mit ihnen beschäftigen sich die Historiker der Mathematik. Das ist eine schwierige aber zugleich auch eine sehr interessante Arbeit. Man muß sehr viel Mathematik können, man muß viele Sprachen lesen können und viel Geduld aufbringen, alte Dokumente der Mathematik zu entziffern und zu verstehen. Warum haben die Menschen überhaupt die Mathematik als eine solch großartige Wissenschaft geschaffen, wie taten sie es, wer tat es? Wer schuf beispielsweise die Mathematik, mit der man die Bahnen der Sputniks berechnen kann? Seit wann verfügen die Mathematiker über ihre fabelhaften Rechenautomaten?

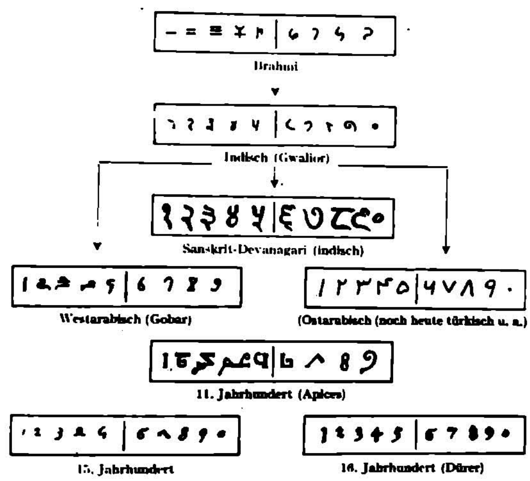


Abb. 5 Stammbaum unserer Ziffern (aus: Menninger: Zahlwort und Ziffer)

Wie in vielen Ländern der Erde beschäftigt man sich auch in der DDR mit der Geschichte der Wissenschaften. In Leipzig, an der Karl-Marx-Universität, gibt es das Karl-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften; dort lehrt und erforscht man die Geschichte der Medizin, der Naturwissenschaften (z. B. der Physik, der Chemie) und der Mathematik.
Aus diesem Institut stammen beispielsweise auch die Beiträge zur Geschichte der Mathematik in unseren Schulbüchern. Wenn ihr sie aufmerksam lest, wird euch klarwerden, wie schwierig und langwierig es war, die Mathematik zu einer so schönen Wissenschaft mit den vielfältigsten Anwendungen zu machen. Ihr werdet erkennen, daß viele Mathematiker in früheren Zeiten mit größter Anstrengung gearbeitet haben, um das zu entdecken, was man jetzt erlernen kann, und daß es keinen Stillstand in der Entwicklung der Mathematik gibt. Vieles wurde schon erforscht, viele interessante Aufgaben stehen den Mathematikern von heute und morgen noch bevor. Die Geschichte der Mathematik zeigt den Weg der Mathematik aus der Vergangenheit in die Zukunft.

Rechnen mit Resten
Teil 5

Wie man Rechnungen durch das Rechnen mit Resten bzw. Restklassen überprüft, soll uns zunächst ein Beispiel zeigen, bei dem mit Restklassen modulo 7 gearbeitet wird.

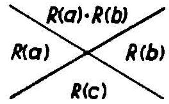
▲ B 12 Zu überprüfen sei die Multiplikation $779 \cdot 356 = 276\,324$. Die Siebenerreste der beiden Faktoren sind, wie man sofort übersieht, 2 und 6; die Faktoren liegen also in den Restklassen ${}^7K_2$ und ${}^7K_6$. Das Produkt von ${}^7K_2$ und ${}^7K_6$ ist nun aber ${}^7K_5$. Falls unser Produkt richtig berechnet ist, muß es also den Siebenerrest 5 haben. Versuchen wir aber, 276 324 durch 7 zu dividieren, so stellen wir fest, daß sich der Rest 6 und nicht 5 ergibt. Unsere Rechnung muß also einen Fehler enthalten, das richtige Produkt lautet auch 277 324.

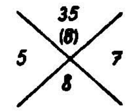
Nun ist allerdings diese Probe eine recht zweifelhafte Erleichterung, denn das Ermitteln des Siebenerrestes ist ja ziemlich umständlich. So einfach wie hier bei 779 und 356 geht es längst nicht immer — da bleibt uns dann nichts weiter übrig, als die schrittweise Division durch 7 zu versuchen. Beim Produkt mußten wir das ja schon in unserem Beispiel so machen. Es fehlt eben eine bequeme Teilbarkeitsregel für 7. Deshalb macht man solche Probe in der Praxis auch nicht mit 7, sondern mit 9 oder mit 11, wo wir die Reste einfach über fortgesetzte Quersummen- oder Querdifferenzbildung ermitteln können.

▲ B 13 Betrachten wir einmal eine „Neunerprobe" für die Multiplikation $7826 \cdot 952 = 7\,450\,352$:

Aufgabe	Quersumme	Neunerrest
7826	23	5
· 952	16	· 7
7 450 352	$26 \equiv 8$	$35 \equiv 8$

Allerdings wird man, wenn man wirklich eine Rechnung, zu überprüfen hat, das nicht in einer so ausführlichen schriftlichen Form machen; die Probe würde ja dabei zu viel Zeit kosten. Wer die Probe nicht gänzlich im Kopf machen will, kann eine Form benutzen, die schon im Mittelalter üblich war. Dabei werden die Neunerreste R in die von einem liegenden Kreuz erzeugten Felder eingetragen, für die Multiplikation $a \cdot b = c$ folgendermaßen:



, im Beispiel B 13 also


Der Rechenmeister *Adam Ries* (1492 bis 1559) führte in seinem Wappen das Kreuz

; wegen $2 \cdot 2 = 2 + 2$ kann es sich hier sowohl um die Probe für eine Additions- als auch für eine Multiplikationsaufgabe handeln. In unseren Beispielen soll die ausführlichere Darstellung den Gang der Rechnung deutlicher machen.

Schließen wir gleich noch ein Beispiel mit einer Subtraktion an. Dabei ist besonders das Reduzieren auf das „einfache" Restsystem zu beachten, weil die Subtraktion der Reste ja zu einem negativen Ergebnis führen kann:

▲ B 14

Aufgabe	Quersumme	Neunerrest
26 447	23	5
− 19 258	25	− 7
7 189	$25 \equiv 7$	$-2 \equiv 7$

Nun haben diese Probleme allerdings noch einen „Haken": Wenn die Neunerprobe „nicht aufgeht", wissen wir zwar mit Sicherheit, daß wir uns verrechnet haben. Wenn sie aufgeht, haben wir aber noch keine hundertprozentige Gewißheit, daß die zu überprüfende Rechnung auch wirklich stimmt. Beispielsweise wären wir ja zur gleichen Quersumme gekommen, wenn wir einige Ziffern des Ergebnisses vertauscht hätten, also etwa im Beispiel 14 statt 7 189 die Differenz 7 198 gelautet hätte. Allgemein macht es sich für die Neunerprobe nicht bemerkbar, wenn wir uns um das Vielfache von 9 verrechnet haben. Natürlich kann man hier als zusätzliche Sicherung noch die Elferprobe anschließen. Auch für diese Probe soll ein Beispiel als Erläuterung dienen, diesmal für eine Addition:

▲ B 15

Aufgabe	Querdifferenz	Elferrest
5 392	−9	2
+ 7 263	−8	+ 3
+ 4 639	8	+ 8
17 194	$-10 \equiv 1$	$13 \equiv 2$

Das zeigt, daß die Addition einen Fehler enthalten muß. So kann das Rechnen mit Restklassen also dazu dienen, die Sicherheit zu erhöhen. Kenntnisse über das Rechnen mit Restklassen oder Kongruenzen sind aber manchmal auch gut, um eine besondere Schnelligkeit zu erreichen. Berufsmäßige Schnellrechner — also Rechenkünstler, wie sie in Varietés auftreten — glänzen immer besonders mit ihren Leistungen im Wurzelziehen. Dabei ist das — weil es sich immer um „aufgehende" Wurzeln handelt — gar nicht so schlimm. Unter dieser Voraussetzung, wenn wir uns also nur wirkliche Quadratzahlen, Kubikzahlen usw. vorlegen lassen, können wir das bei einiger Übung auch: Generell gilt ja für jede natürliche Zahl n und jedes natürliche k, daß die letzte Ziffer von n auch die letzte Ziffer der k-ten Potenz von n festlegt. Für Quadrate, $k=2$, ist das wohl allen bekannt: Wir wissen, daß 57^2 auf die Ziffer 9 enden muß. Wenn wir von 6084 wissen, daß es eine Quadratzahl ist, so wissen wir auch, daß für die Basis nur 2 oder 8 als letzte Ziffer in Frage kommen. Aus $70^2=4\,900$ und $80^2=6\,400$ ergibt sich nun sofort $\sqrt{6\,084}=78$ (72^2 wäre 5184).

Das gilt nicht nur für Quadrate ($k=2$), sondern für beliebiges k: Aus $n \equiv a$ (10) folgt $n^k \equiv a^k$ (10) für jede natürliche Zahl n. Besonders bequem ist nun das Ziehen von dritten oder fünften Wurzeln, weil alle Endziffern von 0 bis 9 bei den Kubikzahlen und den fünften Potenzen genau je einmal auftreten. Solch ein Fall wie beim Quadratwurzelziehen mit der Entscheidung zwischen 2 und 8, 3 und 9, 4 und 6 als letzte Ziffer der Wurzel kann hier also nicht vorkommen.

Für das Folgende brauchen wir nun eine Tabelle der dritten und fünften Potenzen der Zahlen von 1 bis 10. In dieser Tabelle hier sind gleich die Elferreste der dritten Potenzen mit aufgenommen worden; der Grund dafür wird uns später klar werden.

n	n^3	(Elferrest)	n^5
1	1	(1)	1
2	8	(8)	32
3	27	(5)	243
4	64	(9)	1024
5	125	(4)	3125
6	216	(7)	7776
7	343	(2)	16807
8	512	(6)	32768
9	729	(3)	59049
10	1000	(10)	100000

Diese Tabelle müssen wir kennen, brauchen sie uns allerdings nicht bis in alle Einzelheiten einzuprägen. Für viele Zahlen, beispielsweise 7^5, 8^5, 9^5, genügt die Größenordnung. Das Lernen der Elferreste können wir uns auch ersparen, wenn wir die dritten Potenzen genau kennen, um im Kopf aus der Querdifferenz den Elferrest schnell berechnen zu können. Ganz genau müssen wir aber nun jeweils die letzten Ziffern im Kopf haben. Für die 5. Potenzen ist das offensichtlich besonders einfach, denn es gilt, wie man sieht, $n \equiv n^5$ (10); die letzte Ziffer einer fünften Potenz stimmt mit der letzten Ziffer der Basis überein.

Mit diesen Kenntnissen ausgerüstet, können wir nun zunächst aus jeder Kubikzahl bis zu einer Million die dritte Wurzel ziehen, aus jeder Zahl bis zu 10 Milliarden, die wirklich 5. Potenz ist, die fünfte Wurzel:

▲ B 16 Versuchen wir es zuerst mit $z=\sqrt[3]{185\,193}$. Die letzte Ziffer 3 zeigt uns, daß die letzte Ziffer der Wurzel nur 7 sein kann. 185 Tausender ($185 \cdot 10^3$) weisen uns darauf hin, daß wegen $125<185<216$ die Zahl der Zehner in der Wurzel 5 sein muß, also $\underline{\underline{z=57}}$.

▲ B 17 Wie steht es nun mit $z=\sqrt[5]{3\,707\,398\,432}$? Zunächst sehen wir, daß die letzte Ziffer der Wurzel 2 sein muß. Und nun kommt es auf die Zahl der Hunderttausender (10^5) an:

37073 liegt zwischen 8^3 und 9^3, also erhalten wir $\underline{\underline{z=82}}$. Mit solchen Leistungen kann man schon die Zuschauer verblüffen! Ärgerlich ist es nur, daß wir uns bei den dritten Wurzeln bisher auf Radikanden bis zu einer Million beschränken müssen. Aber mit nur geringem Mehraufwand können wir hier unsere Fähigkeiten noch beträchtlich erweitern. Wir beachten dazu außer den Kuben selbst auch noch deren Elferreste. Wie wir sehen, kommt auch bei diesen Elferresten jede Zahl von 1 bis 10 genau einmal vor. Das hilft uns jetzt dazu, unsere Kubikwurzelkünste bis zu einer Milliarde ($1\,000^3$) auszudehnen.

Wie wir dabei vorgehen, wollen wir uns im nächsten Beitrag, der den Abschluß unserer Betrachtungen über das „Rechnen mit Resten" bildet, an einem Beispiel anschauen.

G. Lorenz

Das sind sie, die Korrektoren von rund 32000 eingesandten Wettbewerbslösungen des *alpha*-Wettbewerbs 1967/69 — W. Unze, J. Lehmann (beide Leipzig), G. Schulze (Herzberg) v.l.n.r. — hier bei der Auswertung des *alpha*-Wettbewerbs 1969.

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

EDV Teil 7

Der Vorteil der Festkommaarithmetik ist es, daß der technische Aufwand, verglichen mit der im Folgenden zu erläuternden Gleitkommadarstellung, ungleich geringer ist. Man kann auf diese Weise hohe Rechengeschwindigkeiten erzielen. Auch genügt ein derartiger Rechner für viele Zwecke vollauf. Man denke etwa an Lohnabrechnungen. Bruchteile von Pfennigen kommen nicht vor, so daß man durchweg $k = 100$ zu setzen hat, falls es ein Automat des Typs (2) ist wie die Anlage *Robotron 300* (kurz: R 300), die wir bei den folgenden Betrachtungen vorwiegend im Auge haben wollen. Es gibt aber auch nicht weniger Probleme, bei denen, wie vorher schon erwähnt, die Lage des Kommas aller vorkommenden Zahlen vorher schwer, ja oft erst nach langer mühseliger Arbeit zu überblicken ist. Das einfache Gleichungssystem

$$0{,}1x + 0{,}2y = 0{,}63$$
$$0{,}3x - 0{,}1y = 0{,}56$$

könnte in dieser Form weder ein Automat des Typs (1) noch einer des Typs (2) unmittelbar verarbeiten, da einerseits die Koeffizienten und Absolutglieder kleiner als 1 sind, die Lösung aber

$$x = 2{,}5 \quad ; \qquad y = 1{,}9$$

lautet. An diesem Beispiel möge sich der Leser die Schwierigkeiten ausmalen, die bei den um viele Grade komplizierteren Aufgaben der Rechenpraxis in diesem Zusammenhang auftreten. Aus diesem Grunde werden größere Anlagen (wie etwa R 300) im allgemeinen zusätzlich mit einer zweiten Arithmetik ausgestattet, die es erlaubt, innerhalb eines größeren Stellenbereiches ganze *und* gebrochene Zahlen unmittelbar zu verarbeiten. Es ist die oben schon genannte

1.6.3. Gleitkommadarstellung

Als Vorbetrachtung mache sich der Leser folgendes klar: Jede Bewegung des Kommas einer Dezimalzahl kann durch Multiplikation mit einer Zehnerpotenz so ausgeglichen werden, daß sich der Wert nicht ändert. Beispiel:

$$67\,034{,}715 = 670{,}34715 \cdot 10^2 = 0{,}67034715 \cdot 10^5$$
$$= 67\,034\,715 \cdot 10^{-3}.$$

Insbesondere können dadurch stets die beiden im vorigen Abschnitt besprochenen Kommalagen (1) (vor der höchsten Stelle) und (2) (vor der niedrigsten Stelle) erreicht werden. Man beachte aber den wesentlichen Unterschied: die Festkommaarithmetik arbeitet mit im allgemeinen falschen und später zu korrigierenden Zahlenwerten, während hier der Fehler bei jeder Zahl durch das Hinzufügen der Zehnerpotenz *sofort* berichtigt wird. Wir befassen uns im Folgenden nur mit der Darstellung (2), da diese im R 300 — auch im Gleitkommabetrieb — angewendet wird. Als Beispiel diene die Zahl

$$67\,034\,715\,000 = 67\,034\,715 \cdot 10^3,$$

wobei man sich also das Komma hinter der 5 zu denken hat. Die Zahl ist durch zwei Angaben vollständig gekennzeichnet:

1. die Ziffernfolge 67 034 715, genannt *Mantisse*,
2. die Zahl 03, genannt *Exponent*.

Letzterer wird gleich zweistellig angesetzt, um einen Variabilitätsbereich von -99 bis $+99$ und damit ein Gleiten des Kommas über rund 200 Dezimalstellen zu ermöglichen. Wir stellen nun Mantisse und Exponent zu einer einzigen Ziffernfolge, nämlich

$$6\,703\,471\,503$$

zusammen. Diese ist vom Automaten in obiger Weise zu deuten, also die letzten beiden Ziffern als *Exponententeil*, der Rest als *Mantissenteil*. Eine solche Darstellung nennt man *halblogarithmisch*. Unsere Zahlendarstellung bedarf noch einer Ergänzung für den Fall, daß der Exponent negativ ist. Wir vereinbaren vorläufig: Negative Exponenten werden durch einen Querstrich über der Einerziffer des Exponenten gekennzeichnet. Beispiel:

$$48{,}74653 = 4\,874\,653 \cdot 10^{-5} \rightarrow 487\,465\,30\bar{5}.$$

In gleicher Weise können wir auch die Einerziffer der Mantisse kennzeichnen und haben damit eine

Zahl	Ziffernfolge im Automaten	
	Mantissenteil	Exponententeil
5 761 073	5 7 6 1 0 7 3	0 0
57 610 730 000	5 7 6 1 0 7 3	0 4
5 761,073	5 7 6 1 0 7 3	0 $\bar{3}$
$-576\,107\,300$	5 7 6 1 0 7 $\bar{3}$	0 2
$-57{,}61073$	5 7 6 1 0 7 $\bar{3}$	0 $\bar{5}$

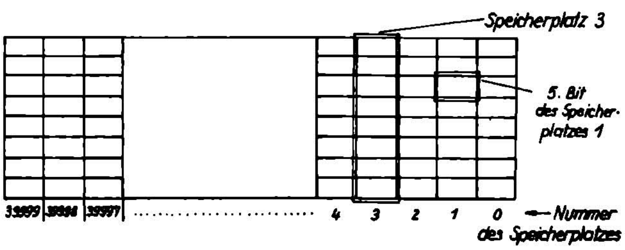
Möglichkeit, negative Zahlen in die Rechnungen einzubeziehen. Steht also ein Querstrich über der drittletzten Stelle, so soll das bedeuten, daß die dargestellte Zahl negativ ist. Zur Erläuterung einige Beispiele:

Aufgaben: Welche Zahlen werden durch die Ziffernfolgen

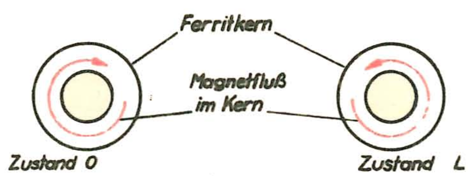
146 812 — 50 371 $\bar{6}$08 — 1 278 91$\bar{0}$ — 36 800 $\bar{1}$00 — 7 390 $\bar{4}$1$\bar{3}$ dargestellt?

(Man schreibe, wo es sich anbietet, die Ergebnisse mit abgespaltenen Zehnerpotenzen!)

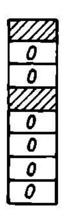
Kommen wir nun zur technischen Realisierung dieser Gleitkommadarstellung im Robotron 300! Der *Speicher* dieser Anlage (Hauptspeicher) ist eine Anordnung von 40 000 · 8 bistabilen Schaltelementen (Ferritkernen) zu einem rechteckigen Schema:



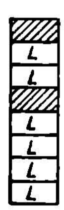
Jede Spalte des Speichers heißt *Speicherplatz* und besteht aus acht übereinanderliegenden *Bits*. Hinter jedem Bit denke man sich also einen (ringförmigen) Ferritkern mit folgenden beiden möglichen Magnetisierungszuständen:



Werden nun die acht Bits eines Speicherplatzes mit den Informationen O beziehungsweise L *belegt*, so wird ein *Zeichen* repräsentiert. Schließt man aus nicht näher erläuterten Gründen das fünfte und das achte Bit von unten (weil diese für besondere Zwecke vorgesehen sind) aus der Betrachtung aus, so sind, wenn man alle Kombinationen der Belegungen L und O auf den übrigen Speicherplätzen zuläßt, insgesamt $2^6 = 64$ verschiedene Zeichen möglich. Sie bilden das *Maschinenalphabet*. Es beginnt mit

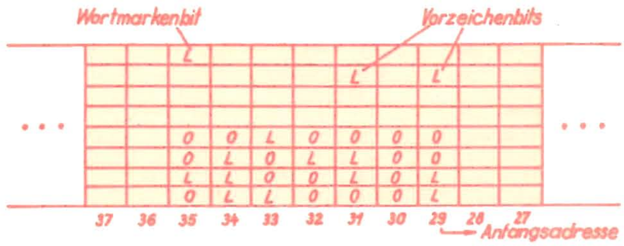


und endet mit



Bedeutet das Zeichen (und das interessiert uns hier nur) eine *Ziffer*, so stellt man diese in den unteren vier Bits als *Tetrade* dar (siehe 1.5.!). Darüberliegende Bits kann man für zusätzliche Kennzeichen benutzen, und zwar das siebente Bit als Vorzeichenbit, wenn es sich um die Einerstelle des Exponenten — oder des Mantissenteils handelt:

O bedeutet +, L bedeutet −. Das achte Bit heißt Wortmarkenbit und wird über der höchsten Stelle der Mantisse (und nur dort) mit L belegt als Markierung, daß hier die Zahl — genauer: die die Zahl darstellende Zeichenreihe* — links zu Ende ist. Das rechte Ende der Zahl, also die Einerziffer des Exponententeils, wird schon im Programm erfaßt durch die Angabe der sogenannten *Anfangsadresse* der Zahl. Das ist die Nummer des Speicherplatzes, auf dem die Einerstelle des Exponententeils untergebracht ist. Nehmen wir als Beispiel die Zahl −27,946:



Die unterste Stelle jeder Tetrade ist also die Einerstelle. Der Leser mache sich an diesem Beispiel nochmal genau den Aufbau der Zahlendarstellung klar, prüfe jede Belegung nach und übe anschließend derartige Aufstellungen an Hand folgender

Aufgaben: Stelle in dieser Weise die Zahlen

48,94361 −6 374 006 000 − 0,00463518 dar!

Was das *Rechnen* im Gleitkommabetrieb betrifft, so sollen hier nur einige *Regeln* ohne größeren Kommentar aufgeschrieben werden. Einem Leser, der mit Potenzen rechnen kann (Stoff der 9. Klasse) wird es nicht schwerfallen, diese Regeln zu beweisen. Doch damit beschäftigen wir uns im nächsten Beitrag.

J. Frormann

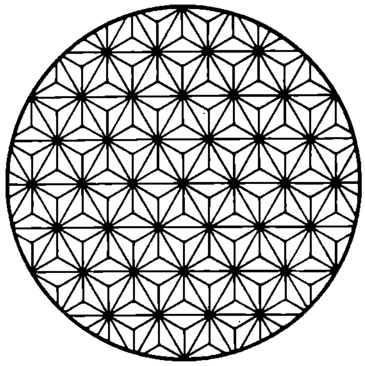
* Für eine solche Zeichenreihe sagt man auch *Maschinenwort*. Es gibt also Maschinenwörter, die Zahlen darstellen, und solche, die irgendwelche anderen Informationen bedeuten. Erstere werden hier nur behandelt.

Jugend und EDV

Im Betrieb Radeberg des Kombinats Robotron gibt es gegenwärtig 75 sozialistische Brigaden, welche mit Schulklassen Patenschaftsverträge abgeschlossen haben.

Aus den Reihen der ingenieurtechnischen Mitarbeiter und erfahrenen Facharbeiter werden Leiter für Schularbeitsgemeinschaften auf mathematischem, naturwissenschaftlichem und technischem Gebiet zur Verfügung gestellt.

Die FDJ-Grundeinheit begann eine enge Zusammenarbeit mit der TH Dresden, der Ingenieurschule und der EOS „Wilhelm Pieck" in Radeberg.



Auch ein Schlußlicht hat es in sich

Im Alltag machen wir von vielen technischen Hilfsmitteln Gebrauch, ohne uns dabei nach den mathematisch-physikalischen oder auch chemischen Grundlagen der Wirkungsweise dieser Dinge zu fragen. Damit soll nicht auf so kompliziert gebaute Gegenstände wie Fernsehempfänger, Kühlschrank, Farbfilm oder Fotoapparat angespielt werden. Schon bei recht einfachen Gebrauchsgegenständen bestehen vielfach nur verschwommene Vorstellungen über deren Wirkungsweise, und selbst in einem Fachlexikon findet man darüber nicht immer eine klare Auskunft.
An dem uns allgemein vertrauten Gebrauchsgegenstand „Fahrrad" soll lediglich einmal der Rückstrahler (auch „Schlußlicht" genannt, s. o.) auf seine Wirkungsweise untersucht werden. Der Effekt des Rückstrahlers besteht doch darin, daß er bei Anstrahlung des Fahrrades von hinten — etwa durch die Scheinwerfer eines Autos — selbst eine Art Lichtquelle wird und rotes Warnlicht nach dem Auto hin reflektiert. Damit wird der Autofahrer bei Dunkelheit auf den anderen Verkehrsteilnehmer aufmerksam gemacht. In einem völlig abgedunkelten Raum sieht man von dem Rückstrahler nichts. Er stellt keine selbständige Lichtquelle dar, sondern sendet erst Strahlen aus, wenn er in geeigneter Weise angestrahlt wird. Als Besonderheit ist dabei zu vermerken, daß das Licht von dem Rückstrahler in Einfallsrichtung zurückgeworfen wird. Nur so erweckt es die Aufmerksamkeit des hinter den Scheinwerfern sitzenden Autofahrers.
Den gleichen Effekt kann ein Kraftfahrer beobachten, wenn ihm bei nächtlicher Fahrt eine Katze in die Lichtkegel der Scheinwerfer läuft. Die Augen des Tieres scheinen zu funkeln, als wären es selbständige Lichtquellen. Im Sprachgebrauch hat sich daher auch das Wort „Katzenauge" auf den am Fahrrad gebräuchlichen Rückstrahler übertragen.
Wir wollen zunächst die Bau- und Wirkungsweise des Rückstrahlers untersuchen und anschließend prüfen, inwieweit der Vergleich mit einem Katzenauge berechtigt ist. Um einen einfachen ebenen Spiegel handelt es sich offenbar dabei nicht, denn ein solcher würde nur bei Anstrahlung senkrecht zur Spiegelebene den oben beschriebenen Effekt abgeben. Nehmen wir einmal ein solches „Katzenauge" auseinander. Dabei stellen wir fest, daß sich hinter einer roten Glasscheibe ein Mosaik von Spiegeltripeln befindet. Je drei Spiegel sind zu einer räumlichen Ecke derart zusammengefaßt, daß jede Spiegelebene senkrecht auf den beiden anderen steht. Wir vermuten, daß ein Lichtstrahl nach einmaliger Reflexion an jedem der drei Spiegel eines solchen Tripels parallel zum einfallenden Lichtstrahl zurückgeworfen wird. Diese Vermutung wollen wir unter Anwendung elementarer Sätze aus der Optik und Geometrie beweisen.
Es ist sinnvoll, die zur Beweisführung notwendigen Gesetze unserer Untersuchung voranzustellen und dann im Bedarfsfall auf sie zu verweisen.

Sätze aus der Optik:

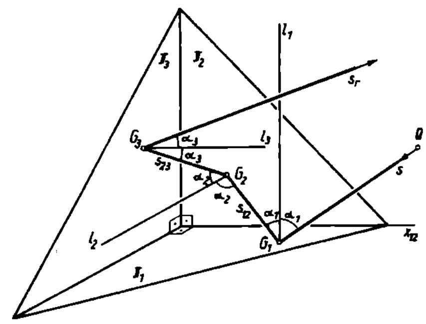
1. Ein Lichtstrahl s, der in einem Punkt G auf einen ebenen Spiegel trifft, wird in G derart reflektiert, daß einfallender und reflektierter Strahl s_r eine Ebene aufspannen, welche das in G auf der Spiegelebene errichtete Lot l enthält.
2. Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel, d. h. es gilt

$$\sphericalangle sl = \sphericalangle l s_r.$$

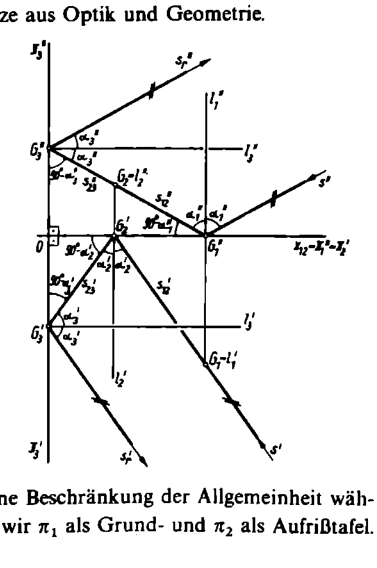
Sätze aus der Geometrie:

3. Entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen ergänzen sich zu 180°.
4. Die Summe der Innenwinkel im ebenen Dreieck beträgt 180°.
5. Sind die Grundrisse und die Aufrisse von je zwei Geraden p und q paarweise zueinander parallel, so sind die Geraden auch im Raum parallel. (Orthogonal zur Rißachse liegende Geraden sind hierbei auszuschließen.)
6. Bei Normalprojektion zweier sich schneidender Geraden p und q auf eine Bildebene π geht eine Symmetriegerade m von p und q im Bild wieder in eine Symmetriegerade m' von p' und q' über, wenn m in der von p und q aufgespannten Ebene entweder eine Höhenlinie oder eine Fallinie bezüglich π darstellt.

Als Vorbetrachtungsfigur für die Beweisführung dient uns das Schrägbild eines Tripels von paarweise aufeinander senkrecht stehenden Spiegeln. Durch die drei Spiegelebenen mit ihren spiegelnden Flächen wird



ein Oktant des Raumes festgelegt, in dem die Lichtquelle Q beliebig anzunehmen ist. Ein von Q ausgehender Strahl s treffe die Ebene π_1 des ersten Spiegels in G_1. Der reflektierte Strahl s_{12} trifft anschließend π_2 in G_2. Endlich wird s_{23} in G_3 nach einer zunächst noch unbekannten Richtung s_r zurückgeworfen. In den Spurpunkten G_i errichten wir auf π_i die Lote l_i ($i = 1, 2, 3$). Für unsere Darstellung ist lediglich vorauszusetzen, daß die Lichtquelle Q in dem vorgegebenen Oktanten liegt und der von Q ausgehende Lichtstrahl s von jedem Spiegel je einmal reflektiert wird. Dies ist sicher erreichbar, wenn man von hinreichend großen Spiegelebenen ausgeht und Strahlen parallel zu einer der drei Ebenen von der Betrachtung ausschließt. Nun gehen wir von der Darstellung des Spiegelungsvorganges vom Schrägbild in zugeordnete Normalrisse über. Bei Konstruktion der Bilder beachten wir die oben angeführten Sätze aus Optik und Geometrie.



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir π_1 als Grund- und π_2 als Aufrißtafel.

Die Schnittgerade der beiden Ebenen wird in dieser Darstellung zur Rißachse x_{12}. Die Ebene π_3 des dritten Spiegels ist bei unserer Anordnung erst- und zweitprojizierend. Ein Lichtstrahl s trifft, entsprechend den Annahmen aus Bild 2, in G_1 unter einem Winkel α_1 gegen das Lot l_1 die Ebene π_1. Die Grundrisse von einfallendem und reflektiertem Strahl (s' und s_{12}') bilden nach Satz 1 eine Gerade. Die Aufrisse s'' und s_{12}'' der beiden Strahlen schließen mit l_1'' den gleichen Winkel α_1'' ein. Dies folgt aus den Sätzen 2 und 6, denn l_1 ist parallel π_2.

Der reflektierte Strahl s_{12} trifft in G_2 auf die Ebene π_2 und schließt mit dem Lot l_2 den Winkel α_2 ein. Nach Satz 1 liegen s_{12}'' und s_{23}'' in einer Geraden. Da l_2 parallel π_1 ist, gilt nach den Sätzen 2 und 6

$$\sphericalangle s_{12}' l_2' = \sphericalangle s_{23}' l_2' = \alpha_2'.$$

Der an π_2 reflektierte Strahl s_{23} trifft π_3 in G_3 und schließt mit dem Lot l_3 den Winkel α_3 ein. Da l_3 parallel zu beiden Bildebenen ist, können die Sätze 2 und 6 bei Konstruktion der Bilder des zurückfallenden Strahles s_r angewandt werden. Es gilt ... ...

$$\sphericalangle l_3' s_r' = \alpha_3' \text{ und } \sphericalangle l_3'' s_r'' = \alpha_3''.$$

Aus dem Dreieck $OG_1'' G_3''$ ist nach Satz 4 abzulesen: $\alpha_1'' + \alpha_3'' = 90°$.

Da die Winkel $2\alpha_1''$ und $2\alpha_3''$ eine Gerade als gemeinsamen Schenkel besitzen und sich außerdem zu 180° ergänzen, handelt es sich um entgegengesetzt liegende Winkel an Parallelen. s'' und s_r'' sind nach Satz 3 zueinander parallel. Ganz analog läßt sich zeigen, daß auch s' und s_r' parallel sind. Aus dem Dreieck $OG_3' G_2'$ ist nach Satz 4 abzulesen:

$\alpha_2' + \alpha_3' = 90°$. Da die Winkel $2\alpha_2'$ und $2\alpha_3'$ eine Gerade als gemeinsamen Schenkel besitzen und sich außerdem zu 180° ergänzen, handelt es sich wieder um entgegengesetzt liegende Winkel an Parallelen. s' und s_r' sind nach Satz 3 zueinander parallel.

Aus diesen Ergebnissen kann man endlich nach Satz 5 den Schluß ziehen, daß der einfallende Strahl s und der zurückgeworfene Strahl s_r zueinander parallel sind, was zu beweisen war. Es ist noch leicht zu zeigen, daß Strahlen, die parallel zu einer der Spiegelebenen einfallen, nach zweimaliger Reflexion an den beiden anderen Spiegeln parallel zur Einfallsrichtung zurückgeworfen werden.

Abschließend soll nur vermerkt werden, daß mit Festlegung der Reihenfolge der Spiegelungen an π_1, π_2, π_3 dem Beweisgedanken nichts an Allgemeingültigkeit genommen wurde. Durch zyklische Vertauschung der Spiegelebenen oder eine Spiegelung des gesamten Vorganges an einem weiteren Spiegel kann man alle möglichen Arten von Reflexionen an dem Tripel auf einen Fall zurückführen, der dem von uns behandelten äquivalent ist.

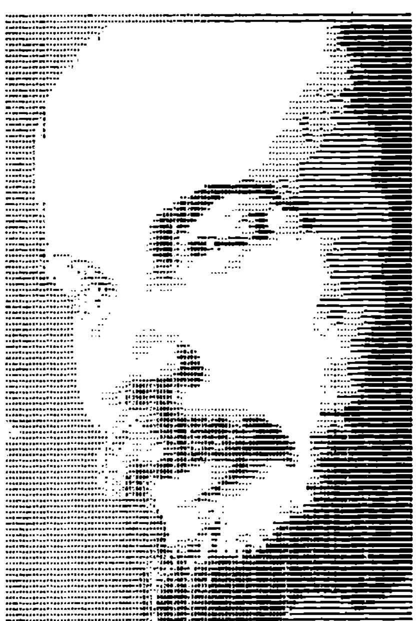
Dem hier einmal genauer betrachteten Tripelspiegel oder Zentralspiegel kommt eine sehr aktuelle wissenschaftliche und auch praktische Bedeutung zu. Die Entdeckung der Laserstrahlen* eröffnete diesem Spiegelsystem neue Perspektiven der Anwendung, mit deren Erschließung man noch in den Anfängen steht. Da man diese Strahlen über größere Entfernungen hinweg außerordentlich scharf zu bündeln vermag, sind sie zum Zweck der Vermessung und Steuerung in vielfältigster Weise anwendbar. Tunnelvortriebmaschinen werden bei längeren Tunnelbauten durch Laserstrahlen in Verbindung mit dem hier behandelten Spiegelungsprinzip mit höchster Präzision gesteuert. Beim Bau von Fernsehtürmen und hohen Schornsteinen lassen sich die geringsten Abweichungen von der Lotrechten mit diesen Strahlen registrieren. Auch die Justierung von Großtankern, Flugzeugen und Schiffen kann durch Laserstrahlen mit einer auf anderem Wege nicht erreichbaren Genauigkeit erfolgen. Die Anwendung des Impulszeitlaufverfahrens auf diese Strahlen ermöglicht in Verbindung mit Tripelspiegeln eine Präzision und Schnelligkeit in der Entfernungsmessung, wie sie im Zeitalter der Astronautik unentbehrlich ist.

Die Bezeichnung des hier besprochenen technischen Hilfsmittels als „Katzenauge“ bestärkt manchen in der Annahme, daß zu jeder Erfindung des Menschen in der Natur ein Vorbild existiere und der Mensch seine Ideen diesen Vorbildern entlehnt habe. Beim Aufschneiden eines Katzenauges würde man vergeblich nach Spiegelsystemen suchen. Die Lichtreflexion beruht bei diesem organischen Gebilde auf einem anderen Prinzip. Aus gewissen Ähnlichkeiten eines äußeren Effektes an verschiedenen Dingen kann man also nicht auf Analogien im inneren Aufbau und in der Wirkungsweise schließen.

Bem.: Für das Verständnis dieses Beweises ist das Studium der Aufsätze zur darstellenden Geometrie aus den Heften 6/67, 1/68, 2/68 und 4/68 zu empfehlen.

E. Schröder

* Worterklärung: Laser — Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation



Ein Patenschaftsvertrag

Seit zwei Jahren besteht an der 29. Oberschule in Leipzig eine rege Zusammenarbeit zwischen dem *alpha*-Klub (5 Arbeitsgemeinschaften Mathematik) und dem *Elektron*-Klub (eine Physik-Arbeitsgemeinschaft). Beide Klubs nutzen ihre Veranstaltungen und gemeinsame Exkursionen auch dazu, berufsorientierend und berufswerbend zu wirken. Alle Mitglieder wurden vor allem mit Schwerpunktberufen im Bauwesen, in der Elektronischen Datenverarbeitung, im Maschinenbau und in der Elektrotechnik vertraut gemacht. Zahlreiche Werktätige unterstützten uns vorbildlich. Um diese Arbeit noch systematischer und vor allem mathematikintensiver zu gestalten, nahmen wir Verbindung zu einer Brigade des Zentralinstituts für Metallurgie, Abteilung Elektronische Rechenanlage, auf. (Der Vater einer Teilnehmerin des *alpha*-Klubs ist Mitglied dieser Brigade.) Anfang November haben wir mit dieser Brigade, welche im Kampf um den Titel „Kollektiv der sozialistischen Arbeit“ steht, einen Patenschaftsvertrag abgeschlossen.

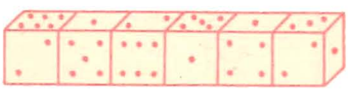
- Wir werden gemeinsam mit der Brigade Klub-Nachmittage durchführen und die Lenin-Gedenkstätten Leipzigs besuchen.
- In festgelegten Abständen berichten Klubmitglieder über ihre Arbeit und über ihre Erfolge. – Die Brigade gibt einen Einblick in ihren Kampf um den Titel „Kollektiv der sozialistischen Arbeit“.
- Mitglieder des *alpha*- und des *Elektron*-Klubs gestalten laufend eine Wandzeitung im Arbeitsbereich der Brigade und stellen ihre Arbeitsergebnisse in einer Vitrine aus.
- Die Patenbrigade unterstützt uns beim Bau von Lehrmitteln für den Mathematik- und Physikunterricht.
- Im Rahmen unseres Programms „EDV“ unterstützen uns die Mitglieder der Brigade durch Vorträge. Mehrere AG-Nachmittage verlegen wir an den Arbeitsplatz der Brigade.
- Mitglieder der Patenbrigade werden uns begleiten und fachlich beraten, wenn wir unsere Exkursion nach Berlin zum Fernsehturm, nach Jena zur Zeiß-Ausstellung und nach der Volkssternwarte Hartha durchführen.

Durch die engen Patenschaftsverbindungen wird unsere außerschulische Arbeit verbessert und ein noch engerer Kontakt zur gesellschaftlichen Praxis geschaffen. *S. Duryn*

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade (7. 12. 1969)

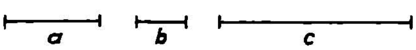
■ 5 ■ 1. Auf einem Tisch sind sechs gleichgroße Spielwürfel so übereinandergesetzt, wie es die Abb. zeigt. Auf der obersten Fläche ist die Augenzahl 1 zu sehen. Ermittle die Summe der Augenzahlen der verdeckten Flächen dieser Würfel!



Beachte dabei, daß die Augenzahl von je zwei gegenüberliegenden Würfelflächen eines jeden Spielwürfels stets 7 beträgt.

2. In einem HO-Bekleidungshaus kauften drei Kunden von dem gleichen Stoff. Der erste kaufte genau 3 m, der zweite genau 5 m und der dritte genau 9 m. Der zweite Kunde bezahlte 30,— M mehr als der erste. Wieviel Mark hatten die drei Kunden insgesamt für den Stoff zu bezahlen?

3. Gegeben seien drei Strecken mit den Längen a, b und c (siehe Abb.).



Konstruiere eine Strecke mit der Länge

$2(2a+3b-c)$!

(Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung ist nicht verlangt.)

4. Ermittle *alle* natürlichen Zahlen z, für die die nachfolgenden Bedingungen gleichzeitig gelten:

(a) z ist ungerade;

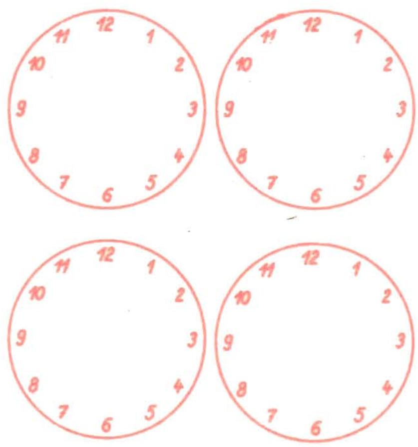
(b) z ist durch 3, 5 und 7 teilbar;

(c) $500 < z < 1\,000$.

■ 6 ■ 1. Klaus nahm als Mitglied der Sektion Radsport einer Betriebssportgemeinschaft an einem Bahnrennen teil. Nach dem Rennen wurde Klaus von seinem Bruder Reiner nach dem Ausgang des Rennens gefragt. Klaus sagte: „Als ich den Zielstrich überfuhr, war kein Fahrer neben mir; genau ein Drittel der beteiligten Fahrer hatte das Ziel schon erreicht, und genau die Hälfte aller Teilnehmer lag noch hinter mir."

Gib an, welchen Platz Klaus in diesem Rennen belegte und wieviel Fahrer insgesamt an dem Rennen teilnahmen!

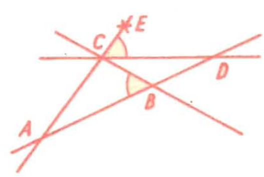
2. Auf dem Arbeitsblatt sind wie auf dem Ziffernblatt einer Uhr die Zahlen 1 bis 12 aufgetragen.



Untersuche, ob sich diese vier Kreisscheiben durch Einzeichnen von Linien (z. B. Geraden), die keine der Ziffern treffen, so in Teilstücke zerlegen lassen, daß die Summen der auf jedem Teilstück derselben Kreisscheibe liegenden Zahlen jeweils untereinander gleich sind!

Dabei ist die erste Kreisscheibe in 2 Teile, die zweite in 3 Teile, die dritte in 4 Teile und die vierte in 6 Teile zu zerlegen.

3. Die Abb. zeigt drei verschiedene Geraden durch einen Punkt C und eine vierte Gerade, die nicht durch C geht. Diese möge die drei erstgenannten Geraden in den Punkten A, B bzw. D schneiden, wobei B zwischen A und D liegen möge. Punkt E liege auf der Geraden durch A und C so, daß C zwischen A und E liegt.



Ferner gelte $\sphericalangle ECD \cong \sphericalangle ABC$.

Beweise, daß $\sphericalangle BCD \cong \sphericalangle BAC$ ist!

4. Jürgen und seine jüngere Schwester Elke haben den gleichen Schulweg. Elke braucht vom Elternhaus bis zum Schultor genau 30 Minuten, Jürgen genau 20 Minuten. An einem Tage ging Elke genau 5 Minuten vor Jürgen aus dem Haus. Nach wieviel Minuten holte Jürgen seine Schwester ein?

(Es sei angenommen, daß jeder von beiden mit gleichbleibender Geschwindigkeit ging.)

■ 7 ■ 1. Vater und Sohn gehen nebeneinander. In der gleichen Zeit, in der der Vater 4 Schritte macht, macht der Sohn jedesmal 5 Schritte, und in dieser Zeit legen beide jedesmal genau den gleichen Weg zurück. Die durchschnittliche Schrittlänge des Vaters beträgt 80 cm.

a) Wie groß ist die durchschnittliche Schrittlänge des Sohnes?

b) Wir nehmen an, daß beide gleichzeitig mit dem rechten Fuß beginnen. Nach dem wievielten Schritt des Vaters treten beide erstmalig gleichzeitig mit dem linken Fuß auf?

2. Wir wollen eine Ecke eines Dreiecks „ausgezeichnet" nennen, wenn bei dieser Ecke Innen- und Außenwinkel einander gleich sind. Ermittle die größtmögliche Anzahl „ausgezeichneter" Ecken, die in einem Dreieck auftreten können!

3. Ein Tourist war an drei aufeinanderfolgenden Tagen jeweils genau die gleiche Zeit unterwegs.

Am ersten Tag ging er zu Fuß mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 6 km/h. Am zweiten Tag benutzte er ein Moped mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h. Am dritten Tag benutzte er ein Auto mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h.

Der an den drei Tagen zurückgelegte Gesamtweg betrug 520 km. Ermittle die Zeit, die er an jedem einzelnen der Tage unterwegs war, und die Anzahl der am ersten, zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegten Kilometer.

4. Gegeben sei ein Dreieck ΔABC. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt der Seite BC. Beweise, daß dann die Punkte B und C von der Geraden g den gleichen Abstand haben!

■ 8 ■ 1. Klaus und Horst spielen mit Würfeln. Sie benutzen bei jedem Wurf genau zwei verschieden große Würfel und addieren jedesmal die beiden Augenzahlen.

Klaus meint, daß unter allen möglichen

verschiedenen Würfen solche mit der Summe 7 am häufigsten auftreten. Zwei Würfe heißen dabei genau dann gleich, wenn die Augenzahlen gleich großer Würfel jeweils übereinstimmen. Begründe die Richtigkeit dieser Meinung!

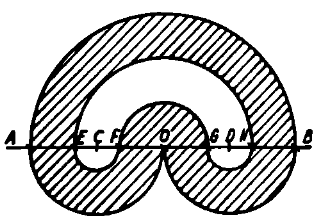
2. Auf einer Geraden seien die Punkte A, E, C, F, O, G, D, H, B in dieser Reihenfolge so gelegen, daß gilt:

$\overline{AB} = 6$ cm;

$\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FO} = \overline{OG} = \overline{GH} = \overline{HB} = 1$ cm;

$\overline{EC} = \overline{CF} = \overline{GD} = \overline{DH} = 0{,}5$ cm.

Über den Strecken AB, EH und FG seien Halbkreise in die eine Halbebene und über den Strecken AO, OB, EF und GH Halbkreise in die andere Halbebene bezüglich der Geraden durch A und B gezeichnet. Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche (siehe Abb.)



3. a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?
b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr!

4. Beweise folgenden Satz: In jedem Dreieck ΔABC teilt jede Halbierende eines Innenwinkels dessen Gegenseite im Verhältnis der beiden anderen Seiten.

■ 9 ■ 1. Bei einem Klassenfest stellen die Schüler ihrem Mathematiklehrer die folgende Aufgabe:
Die Schüler teilen ihrem Lehrer mit, daß sie sich insgeheim so in drei Gruppen aufgeteilt haben, daß jeder Schüler der Klasse genau einer Gruppe angehört. Die Schüler der ersten Gruppe nennen sich die „Wahren", weil sie jede Frage wahrheitsgemäß beantworten. Die Schüler der zweiten Gruppe nennen sich die „Unwahren", weil sie jede Frage falsch beantworten. Die Schüler der dritten Gruppe schließlich nennen sich die „Unbeständigen", weil jeder von ihnen Serien aufeinanderfolgender Fragen alternierend (abwechselnd) wahr und falsch beantwortet; dabei ist aber ungewiß, ob er jeweils die erste Frage einer Serie wahr oder falsch beantwortet. Jeder Schüler antwortet auf eine gestellte Frage nur mit ja oder nur mit nein; Fragen, die andere Antworten erfordern, werden nicht zugelassen. Der Lehrer soll nun von einem beliebigen Schüler der Klasse durch Fragen, die er an diesen Schüler richtet und die sich nur auf die Zugehörigkeit zu einer der genannten Gruppe beziehen, feststellen, ob der Schüler ein „Wahrer", ein „Unwahrer" oder ein „Unbeständiger" ist.
a) Welches ist die kleinste Anzahl von Fragen, die dazu ausreicht?
b) Geben Sie eine Möglichkeit an, die Zugehörigkeit eines Schülers mit dieser kleinsten Anzahl von Fragen zu ermitteln!

2. Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a_1 und dem Volumen V_1 sowie ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a_2 und dem Volumen V_2. Für die Kantenlängen gelte

$a_1 : a_2 = 1 : \sqrt{2}$

Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2$!

3. Jemand hat sieben Kärtchen mit jeweils einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7.
Man zeige, daß sich unter allen denjenigen siebenstelligen Zahlen, die unter Verwendung jeweils genau dieser sieben Kärtchen gelegt werden können (wobei ein z. B. durch Umdrehen bewirktes „Verwandeln" der 6 in eine 9 verboten ist), keine zwei befinden, deren eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist!

4. Es ist zu beweisen:
Verbindet man in einem Parallelogramm $ABCD$ den Eckpunkt C mit den Mittelpunkten der Seiten AB und AD, so teilen diese Verbindungsstrecken die Diagonale BD in drei gleich lange Teilstrecken.

■ 10 ■ 1. Ermitteln Sie ohne Verwendung der Logarithmentafel den Quotienten

$\dfrac{[\lg 3\,790]}{[\lg 0{,}0379]}$!

Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die x nicht übertrifft.

2. Gesucht sind vier natürliche Zahlen $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ so, daß jede der Zahlen
$d_1 = a_4 - a_3$, $d_2 = a_3 - a_2$, $d_3 = a_2 - a_1$,
$d_4 = a_4 - a_2$, $d_5 = a_3 - a_1$, $d_6 = a_4 - a_1$
eine Primzahl ist, wobei auch gleiche Primzahlen auftreten dürfen.

3. Gegeben sind zwei Strecken der Längen m und n (mit $n < m$).
a) Führen Sie folgende Konstruktionen aus: Um einen beliebigen Punkt Y einer Geraden g werde ein Kreis k_1 mit dem Radius m geschlagen. Einer der Schnittpunkte von g und k_1 sei A genannt, der andere E. Von A aus werde die Strecke AB mit $\overline{AB} = n$ so auf g abgetragen, daß B zwischen A und Y liegt (das ist wegen $n < m$ möglich). Von B aus werde auf g die Strecke BC mit $\overline{BC} = m$ so abgetragen, daß A zwischen B und C liegt (das ist wieder wegen $n < m$ möglich).
Um C werde ein Kreis k_2 mit dem Radius $\overline{BC}$ geschlagen. Einer der Schnittpunkte von k_1 und k_2 sei D genannt.
b) Ermitteln Sie die Länge x der Strecke AD!

4. Mit welchen der folgenden Bedingungen (1), ..., (5) ist die Bedingung $3x^2 + 6x > 9$ äquivalent?
(1) $-3 < x < 1$; (2) $x > -3$; (3) $x < 1$;
(4) $x < 1$ oder $x > -3$; (5) $x > 1$ oder $x < -3$

■ 11/12 ■ 1. Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ durch die (indepedente) Darstellung
(1) $a_n = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$,
wobei c_0, c_1, c_2 reelle Zahlen sind.
Als erste Differenzenfolge bezeichnet man die Folge
$D_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n$ und als zweite Differenzfolge die Folge
$D_n^{(2)} = D_{n+1}^{(1)} - D_n^{(1)}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
a) Es seien $c_0 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$.
Unter dieser Voraussetzung sind a_n, $D_n^{(1)}$, $D_n^{(2)}$ für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5 zu berechnen.
b) Es ist allgemein zu beweisen, daß für (1) die Folge $D_n^{(2)}$ konstant ist.

2. In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H und der Kantenlänge a seien FB, FG und FE die drei von F ausgehenden Kanten. Ferner sei ε die Ebene durch G, B, E.
Es ist zu beweisen, daß die Körperdiagonale FD senkrecht auf der Ebene ε steht und von ihr im Verhältnis 1 : 2 geteilt wird.

3. Es sind alle reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems anzugeben:
$x + y = az$ (1)
$x - y = bz$ (2)
$x^2 + y^2 = cz$ (3) Dabei sind a, b, c reelle Zahlen. (Fallunterscheidung!)

4. Gegeben seien natürliche Zahlen k und n mit $0 < k < n$. In einer Schachtel liegen (offen sichtbar, so daß ihre Anzahl festgestellt werden kann) genau n Kugeln. Zwei Spieler spielen ein Spiel nach der folgenden Regel:
Die Spieler nehmen abwechselnd Kugeln aus der Schachtel heraus, und zwar sind jeweils mindestens eine und höchsten k Kugeln zu entnehmen. Wer die letzte Kugel aus der Schachtel entnehmen muß, hat verloren.
Welche Beziehung zwischen k und n muß erfüllt sein, damit
a) der anziehende Spieler,
b) der nachziehende Spieler
den Gewinn erzwingen kann?

Unser Glückwunsch

dem Vorsitzenden für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang Engel
zu seiner Auszeichnung mit dem Vaterländischen Verdienstorden in Bronze

Wer löst mit? alpha -Wettbewerb

Letzter Einsendetermin . Mai 1970

W 5 ▪ 480 In einer Kleinstadt werden in einem unterteilten Gehege insgesamt 37 Tiere gehalten, und zwar Fasanen, Hirsche, Brieftauben und Füchse. Frank, der durch das Gehege geht, stellt fest, daß zweimal soviel Füchse wie Hirsche, viermal soviel Brieftauben wie Füchse und eine Brieftaube mehr als Fasanen im Gehege vorhanden sind. Wieviel Tiere jeder Art besitzt dieser Kleinstadtzoo? Löse die Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle.

Dietmar Engelmann, Thomas-Müntzer-Oberschule, Klasse 7b, Limbach-Oberfrohna III

W 5 ▪ 481 Mit welchen natürlichen Zahlen müssen die Variablen a, b, c, d und e belegt werden, damit wir aus den Gleichungen

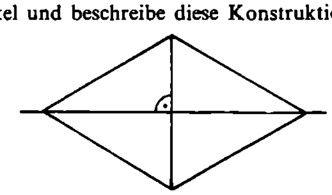
$$1 \cdot a = e, \quad 2 + c = e,$$
$$12 : b = e, \quad 5 - d = e$$

vier wahre Gleichheitsaussagen erhalten, wenn $a > b > c > d$ gelten soll?

Volker Schmidt, 1901 Dessow, Kreis Kyritz, Klasse 3

W 6 ▪ 482 Hans will Schrippen zu 5 Pf das Stück oder Knüppel zu 7 Pf das Stück einkaufen; ihm stehen dafür genau 23 Pf zur Verfügung.
a) Beweise, daß Hans diesen Geldbetrag von 23 Pf nicht voll ausgeben kann, wenn er dafür Schrippen und Knüppel kaufen will!
b) Beweise, daß Hans jeden höheren Geldbetrag als 23 Pf voll ausgeben kann, wenn er dafür Schrippen und Knüppel kaufen will! 23 Pf ist also der größte Geldbetrag, mit dem ein solcher Einkauf nicht möglich ist, wenn der Betrag voll ausgegeben werden soll. *T.*

W 6 ▪ 483 Zeichne auf Pappe ein gleichseitiges Dreieck und schneide es zur Verwendung als Zeichendreieck aus. Konstruiere mit Hilfe dieses selbstgefertigten Zeichendreiecks und eines Lineals einen rechten Winkel und beschreibe diese Konstruktion! *T.*



W 7 ▪ 484 An unseren Tankstellen kostet ein Liter Benzin (Oktanzahl 88) 1,50 M, ein Liter Motorenöl hingegen 3,00 M. Wieviel Liter Kraftstoffgemisch, bei dem je 33 l Benzin mit je 1 l Öl gemischt werden, erhält ein Kraftfahrer für 20,00 M? *T.*

W 7 ▪ 485 Der russische Mathematiker *Leonti Filippowitsch Magnizki* (1669 bis 1738) stellte in seinem Buch *Arithmetik* (1709) die folgende Aufgabe:
Ein Vater fragt den Lehrer seines Sohnes, wieviel Kinder er unterrichte. Der Lehrer antwortet: „Hätte ich noch einmal soviel Schüler, wie ich jetzt habe, und dann noch die Hälfte und dazu ein Viertel und dann noch deinen Sohn, so wären es genau 100." Wieviel Schüler unterrichtet der Lehrer?

W 8 ▪ 486 Der neu eingesetzte Expreßzug Ex 2 von Berlin nach Leipzig fährt in Berlin-Schönefeld um 8,26 Uhr ab und trifft in Leipzig-Hbf. um 9.56 Uhr ein. Der Schnellzug D 273 fährt in Leipzig um 8.19 Uhr ab und trifft in Berlin-Schönefeld um 10.14 Uhr ein.
a) Wann begegnen sich diese beiden Züge, wenn eine konstante Geschwindigkeit auf der Strecke Berlin-Schönefeld – Leipzig vorausgesetzt wird? (Diese Annahme ist in der Praxis mit einer guten Annäherung erfüllt, obwohl D 273 in Bitterfeld, Wittenberg und Jüterbog je 1 min hält.) Bei der Lösung dieser Teilaufgabe soll die Entfernung zwischen Berlin-Schönefeld und Leipzig nicht als bekannt vorausgesetzt werden.
b) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit (in km/h) dieser beiden Züge, wenn die Entfernung zwischen Berlin-Schönefeld und Leipzig 162,7 km beträgt?
c) In welcher Entfernung von Berlin-Schönefeld begegnen sich die beiden Züge?
d) Die Teilaufgaben a) und c) sollen graphisch gelöst werden. *L.*

W 8 ▪ 487 Bei einem 100-m-Lauf starteten gleichzeitig die sechs Schüler Axel, Bruno, Christian, Dieter, Ernst und Fred. Genau zwei von ihnen liefen mit der gleichen Zeit als Sieger durchs Zielband. Auf die Frage, welche beiden Schüler sich den Sieg teilten, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

a) Axel und Christian;
b) Bruno und Fred;
c) Axel und Fred;
d) Bruno und Ernst;
e) Axel und Dieter.

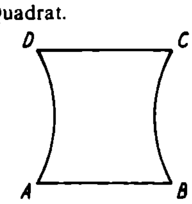
Nun wissen wir daß in genau einer Antwort beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier Antworten jeweils genau eine Angabe richtig und genau eine Angabe falsch ist. Wie heißen die beiden siegreichen Schüler? *Sch.*

W 9 ▪ 488 Einem spitzwinkligen Dreieck ABC soll ein Quadrat $PQRS$ so einbeschrieben werden, daß die Punkte P und Q auf der Seite $\overline{AB}$, der Punkt R auf der Seite $\overline{BC}$ und der Punkt S auf der Seite $\overline{CA}$ liegt.
Die Konstruktion ist allein mit dem Zirkel und dem Lineal durchzuführen.

Wolfgang Riedel, Karl-Marx-Stadt, EOS Friedrich Engels, Kl. 10 R

W 9 ▪ 489 Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
A wählt eine einstellige natürliche Zahl und schreibt sie auf. Dann wählt B eine einstellige Zahl und schreibt sie links daneben; darauf wählt B noch eine einstellige Zahl, die größer als 0 und kleiner als 5 ist, und schreibt sie wieder links daneben. Zum Schluß wählt A drei einstellige Zahlen und schreibt sie links daneben.
Wie muß A spielen, damit unabhängig von der Wahl der beiden Zahlen durch B die entstandene sechsstellige Zahl durch 1 334 teilbar ist? *L.*

W 10 ▪ 490 Ein Stück Stahlblech von der *abgebildeten Form* hat die Dicke 3 mm. Der verwendete Stahl hat die Dichte 7,85 g/cm^{-3}. Das Blechstück ist von zwei Strecken von der Länge $a = 120$ mm und zwei Kreisbögen von dem Radius $a = 120$ mm begrenzt. Die vier eingezeichneten Punkte A, B, C, D bilden ein Quadrat.



Es ist die Masse dieses Blechstücks zu berechnen. *Ulrike Weise, Wüstenbrand*

W 10 ▪ 491 Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die die Gleichung

$$x(x+2)(x+4)(x+6)$$
$$=(x+1)(x+3)^2(x+5)$$ erfüllt ist. *L.*

Die vier besten Schulen in der Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb wurden für ihre vorbildlichen Leistungen mit einer Ehrenurkunde ausgezeichnet. Der Chefredakteur überbrachte persönlich die Glückwünsche des Redaktionskollegiums. Maßstab für die Plazierung waren: Anzahl der erworbenen Urkunden sowie die Schülerzahl der Schulen (Kl. 5 bis 10):

1. Oberschule Mittelstille (29 Urkunden)
2. Oberschule Fambach (30 Urkunden)
3. Oberschule Steinbach-Hallenberg (47 Urkunden) — alle Kr. Schmalkalden
4. 29. Oberschule Leipzig (30 Urkunden)

Redaktion *alpha*

Prüfungsaufgaben (Auswahl)

Island, Tanzania

Abschlußprüfung, Klasse 8

Island

▲ 492 $\left(4\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{14}:3\frac{4}{7}\right):2\frac{6}{13}=x$

▲ 493 $5:\frac{1}{5}=x \qquad \frac{1}{5}:5=x$

▲ 494 Ermittle die Summe aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen, die kleiner als 100 sind!

▲ 495 Drei Personen A, B und C haben gemeinsam 4 ha Baugrund erworben. Von der Bodenfläche wurden 25 % für die Anlage einer Zufahrtstraße verwendet. Die danach verbliebene Grundstücksfläche wurde im Verhältnis $\frac{11}{10}:1:\frac{2}{5}$ aufgeteilt. Wieviel Quadratmeter erhielt jeder zur Nutzung?

▲ 496 Der Rauminhalt einer geraden quadratischen Pyramide mit einer Grundkante von 6 cm Länge ist um 25 % kleiner als der Rauminhalt eines geraden Kreiszylinders, dessen Durchmesser 8 cm und dessen Höhe 21 cm beträgt. Berechne die Höhe der Pyramide.

▲ 497 a) Eine Kanne, die mit $4\frac{1}{2}$ kg Waschmittel gefüllt ist, wird zum Preise von 253,50 Kronen verkauft. Wie teuer stellt sich 1 kg dieses Waschmittels?
b) Nach einer Preiserhöhung von 12 % wurde das Waschmittel in größeren Kannen angeboten, deren Fassungsvermögen um den dritten Teil größer war als das der ursprünglichen. Welcher Preis war nunmehr für eine Kanne Waschmittel zu zahlen?

▲ 498 Die Zahl 10,5 ist durch alleinige, aber mehrfache Verwendung der Ziffer 7 darzustellen. Dabei dürfen Zeichen für Rechenoperationen und Klammern gesetzt werden.

▲ 499 Wieviel vierstellige natürliche Zahlen lassen sich mit Hilfe der Ziffern 1, 2, 3 und 4 schreiben, wenn in jeder der Zahlen jede der zu verwendenden Ziffern genau einmal vorkommen soll?

Wir danken unserem Leser *G. O. Gestsson*, Reykjavik, welcher uns das Material übersandte. Aus den 12 gestellten Prüfungsaufgaben haben wir die vorliegenden ausgewählt.

Abschlußprüfung, Klasse 10

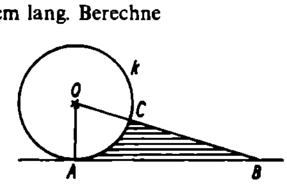
Tanzania

▲ 501 Eine gerade Pyramide $SABCD$ besitzt die quadratische Grundfläche $ABCD$. Jede Grundkante ist 10 cm lang, und die Höhe der Pyramide beträgt 12 cm. Berechne
a) die Höhe eines Dreiecks, das eine Seitenfläche bildet,
b) den Flächeninhalt einer Seitenfläche,
c) das Volumen der Pyramide.

▲ 502 Die folgenden beiden sprachlichen Formulierungen sind als Gleichungen zu schreiben:
a) Addiert man zu einer Zahl x ihren zehnten Teil, quadriert man danach die erhaltene Summe, so erhält man die Zahl z.
b) Wenn man das Produkt aus a^2, b und c durch die Quadratwurzel aus p dividiert, so erhält man als Ergebnis t.
c) Bestimme den Wert von t, wenn $a=3$, $b=-4$, $c=5$ und $p=16$ ist.

▲ 503 Die Differenz aus den Quadraten zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen beträgt 81. Um welche Zahlen handelt es sich?

▲ 504 In der nachstehend abgebildeten Zeichnung ist die Gerade AB Tangente an den Kreis k. Der Mittelpunktswinkel $\sphericalangle AOC$ beträgt 72°, und der Radius $\overline{AO}$ des Kreises k ist 5 cm lang. Berechne

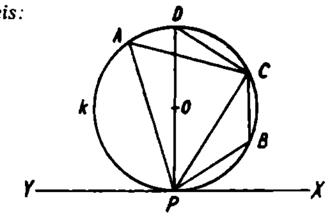


a) die Länge des Tangentenabschnittes $\overline{AB}$,
b) die Länge der Strecke $\overline{OB}$,
c) die Länge des kleineren Kreisbogens $\widehat{AC}$,
d) den Inhalt der in der Zeichnung schraffiert dargestellten Fläche.

▲ 505 Eine Schule möchte für die Fahrt ins Naturschutzgebiet „Serengeti" einen Autobus mieten. Die Unkosten betragen 2 352 Schillinge. Da acht Sitzplätze unbesetzt blieben, mußte jeder der Reiseteilnehmer 7 Schillinge mehr bezahlen, als ursprünglich bei besetztem Bus vorgesehen war. Wieviel Sitzplätze hatte der Autobus?

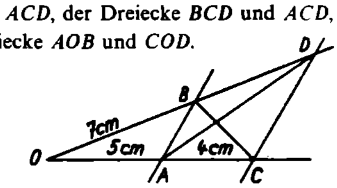
▲ 506 Die Entfernung zwischen zwei Orten A und B beträgt genau eine Meile. Auf einer Landkarte (Maßstab 1 : 100 000) wurde die Entfernung $\overline{AB}$ mit 1,63 cm gemessen.
a) Wieviel Yards Unterschied ergeben sich aus der wirklichen und aus der mit Hilfe der Karte ermittelten Länge der Strecke AB?
b) Es sei AB die Länge der Seite eines Quadrates. Wieviel Hektar Flächeninhalt besitzt dieses Quadrat in Wirklichkeit? Welcher Flächeninhalt ergibt sich für das Quadrat aus den Ablesungen an Hand der Karte?
(1 Yard ≙ 0,9144 m; 1 acre ≙ 0,4047 ha; 640 acres ≙ 1 Quadratmeile)

▲ 507 Der Beweis für den Satz „Jeder Peripheriewinkel ist kongruent zu dem zugehörigen Sehnentangentenwinkel" wird in seinen einzelnen Schritten nachstehend in Kurzform wiedergegeben. Es sind in die vorgesehenen Zeilen jeweils die Begründungen für die Gleichheitsaussagen einzutragen.
In der nachstehenden Abbildung ist die Gerade XY Tangente an den Kreis k; sie berührt den Kreis im Punkte P. $\overline{DP}$ ist Durchmesser des Kreises, O sein Mittelpunkt.
Beweis:



$\sphericalangle DPX=90°$	(1)	....
$\sphericalangle CPX+\sphericalangle DPC=90°$	(2)	....
$\sphericalangle DCP=90°$	(3)	....
$\sphericalangle PDC+\sphericalangle DPC=90°$	(4)	....
$\sphericalangle PAC=\sphericalangle PDC$	(5)	....
Folglich		
$\sphericalangle PAC=\sphericalangle CPX$	(6)	....
$\sphericalangle CPX+\sphericalangle CPY=180°$	(7)	....
$\sphericalangle CBP+\sphericalangle PAC=180°$	(8)	....
$\sphericalangle PAC=\sphericalangle CPX$	(9)	....
Folglich		
$\sphericalangle CBP=\sphericalangle CPY$	(10)	....

▲ 508 Die Schenkel des Winkels $\sphericalangle DOC$ werden von zwei parallelen Geraden AB und CD geschnitten (siehe Zeichnung).
a) Ermittle die Länge der Strecke $\overline{BD}$.
b) Bestimme das Verhältnis aus den Maßzahlen der Flächeninhalte der Dreiecke OAD und ACD, der Dreiecke BCD und ACD, der Dreiecke AOB und COD.



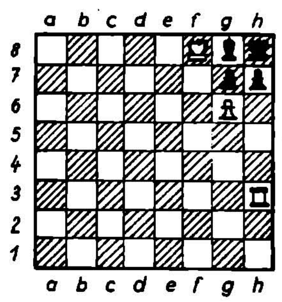
Am 3. Juni 1969 wurden in allen Regionen (vergleichbar unseren Bezirken) Tanzanias Prüfungsarbeiten geschrieben: Arbeit in Gruppen A und B; reine Arbeitszeit: 150 Minuten; gestellte Aufgaben: 20; erreichbare Punkte: 100. Dieser Abschluß ist vergleichbar dem unseres 10. Schuljahres. Sechs der 20 Aufgaben veröffentlichen wir. Fachlehrer aus der DDR unterrichten jeweils zwei Jahre in Tanzania. Dies ist ein echtes Zeichen zielstrebiger und freundschaftlicher Zusammenarbeit zwischen beiden Staaten. Wir danken dem Mathematikfachlehrer *S. Wengel*, z. Z. Moshi (Tanzania), für die Übersendung des Materials.

Rund um das Schachbrett, Teil 2

Matt in zwei Zügen

Wir finden in Zeitungen und Zeitschriften öfters Schachaufgaben der Typen „Matt in zwei Zügen", „Matt in drei Zügen" u. s. f. In diesem Beitrag erfahren wir, wie solche Aufgaben zu lösen sind. Aus Platzgründen wird vorausgesetzt, daß die zulässigen Züge der einzelnen Schachsteine sowie die Begriffe „einen Stein schlagen", „dem König Schach bieten" und „den König mattsetzen" bekannt sind. Bei einer Aufgabe „Matt in zwei Zügen" hat stets Weiß, der Spieler mit den weißen Figuren, den ersten Zug auszuführen. Dabei muß Weiß unter allen möglichen ersten Zügen denjenigen bzw. diejenigen auswählen, daß — bei jeder denkbaren Spielweise seines Gegners Schwarz — Weiß mit einem geeigneten zweiten Zug stets Schwarz mattsetzen kann.

Wir lösen die folgende Aufgabe gemeinsam:



Matt in zwei Zügen:
Weiß: Kf8, Th3, g6 (3 Steine)
Schwarz: Kh8, Lg8, h7, g7 (4 Steine)

Es ist üblich, die Ausgangsposition einer solchen Aufgabe in der Zeichnung und nochmals schriftlich zu fixieren. Dabei werden für die Schachsteine König, Dame, Turm, Läufer und Springer die Anfangsbuchstaben als Abkürzungen verwendet. Die Spalten des Schachbrettes werden mit den Buchstaben *a* bis *h* und die Zeilen mit den Ziffern 1 bis 8 bezeichnet. Somit bedeutet die Angabe „Kf8": „Der König steht auf dem Feld der Spalte f und der Zeile 8". Eine Angabe wie „g6" ohne Symbol eines Schachsteines bedeutet: „Ein Bauer steht auf dem Feld der Spalte g und der Zeile 6". Wir nehmen ein Schachspiel zur Hand und stellen die in der Aufgabe genannten Steine in der angegebenen Weise auf das Schachbrett.

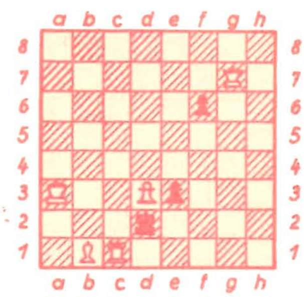
Als erstes überprüfen wir, daß Weiß genau die folgenden Anfangszüge ausführen kann: Th3 — a3, Th3 — b3, Th3 — c3, Th3 — d3, Th3 — e3, Th3 — f3, Th3 — g3, Th3 : h7†, Th3 — h6, Th3 — h5, Th3 — h4, Th3 — h2, Th3 — h1, Kf8 — e8, Kf8 — e7 und g6 : h7.

Dabei bedeutet z. B. „Th3 — a3" „Der Turm wird vom Feld h3 auf das Feld a3 gezogen", „g6 : h7" „Der Bauer auf dem Feld g6 schlägt den gegnerischen Stein auf dem Feld h7" und „Th3 : h7†" „Der Turm auf dem Feld h3 schlägt den gegnerischen Stein auf dem Feld h7 und bietet Schach".

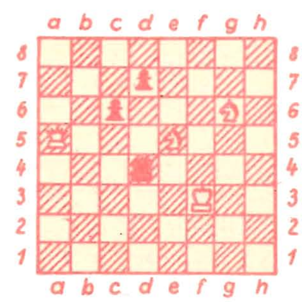
Als zweites versuchen wir, möglichst viele der für Weiß zulässigen Anfangszüge gemäß Aufgabenstellung auszuschalten: Mit dem Bauernzug „g6 : h7" kann Weiß das Ziel, mit seinem zweiten Zuge Schwarz mattzusetzen, nicht mit Sicherheit erreichen. Ein Gegenzug von Schwarz, der Weiß dieses Ziel nicht erreichen läßt, ist hier z. B. „Lg8 — a2". Denn jetzt könnte Weiß mit seinem zweiten Zuge nicht einmal Schach bieten, also erst recht nicht mattsetzen. Auch die beiden Königszüge scheiden als Eröffnungszüge für Weiß aus: Zur Begründung genügt es, für Schwarz einen Gegenzug anzugeben, durch den Weiß das Ziel der Aufgabe nicht erreichen kann. Ein solcher Zug ist für Schwarz „Lg8 — a2". Nur mit einem einzigen seiner möglichen zweiten Züge kann Weiß Schach bieten. Es ist dies „Th3 : h7†". Da Schwarz jetzt durch „Kh8 — g8" seinen König aus dem Schach ziehen kann, kann also Weiß mit keinem zweiten Zug mattsetzen. Falls unsere Aufgabe eine Lösung besitzt, muß der erste Zug von Weiß also ein Turmzug sein. Doch auch von Turmzügen können wir alle bis auf „Th3 : h7†" und „Th3 — h6" sofort ausscheiden. Denn bei allen anderen Turmzügen könnte Schwarz mit „h7 — h6" antworten. Steht dabei der weiße Turm nicht mehr auf der Spalte h, so kann Weiß mit keinem zweiten Zug Schach bieten. Steht hingegen der weiße Turm noch auf der Spalte h, so kann Weiß nur durch den zweiten Zug „Th. : h6†" Schach bieten. Dies ist jedoch keine Mattstellung, denn Schwarz kann durch „g7 : h6" die Schachdrohung beseitigen. Von den beiden für Weiß verbliebenen Anfangszügen scheidet weiterhin „Th3 : h7†" aus.

Denn wenn Schwarz mit „Lg8 : h7" pariert, kann Weiß im zweiten Zug nicht einmal Schach bieten.
Als drittes weisen wir nach, daß der eine für Weiß verbliebene Anfangszug „Th3 — h6" Lösung ist. Auf unserem Schachbrett führen wir diesen Zug aus. Es muß gezeigt werden, daß bei *jedem* Gegenzug von Schwarz Weiß mit seinem zweiten Zug das Matt erzwingen kann. Die sämtlichen Gegenzüge von Schwarz sind Lg8 — a2, Lg8 — b3, Lg8 — c4, Lg8 — d5, Lg8 — e6, Lg8 — f7 und g7 : h6.
Der zweite Zug von Weiß hängt von dem von Schwarz ausgeführten Zuge ab. Führt Schwarz einen Läuferzug aus, so setzt Weiß mittels „Th6 : h7 + " seinen Gegner matt. (Das Zeichen + bedeutet „matt".) Führt hingegen Schwarz den Bauernzug aus, so pariert Weiß mittels „g6 — g7 + " erfolgreich. Also lautet der Lösungszug der Aufgabe „Th3 — h6".

Wir lösen selbständig:



Aufgabe 1: Matt in zwei Zügen
Weiß: Ka3, Dg7, Tc1, Lb1, d3 (5 Steine)
Schwarz: Kd2, e3, f6 (3 Steine)



Aufgabe 2: Matt in zwei Zügen
Weiß: Kf3, Da5, Se5, Sg6 (4 Steine)
Schwarz: Kd4, c6, d7 (3 Steine)

Abschließend lassen wir uns noch mitteilen:
1. Bei einer Aufgabe „Matt in drei Zügen" hat ebenfalls Weiß den ersten Zug auszuführen. Weiß hat so zu spielen, daß er spätestens mit seinem dritten Zug seinen Gegner mattsetzt, und zwar bei beliebiger Spielweise von Schwarz.

2. Nicht unbedingt muß bei Aufgaben „Matt in drei Zügen", „Matt in vier Zügen" u.s.w. die Zahl der Züge angegeben sein. Oftmals lautet unter Nichtangabe der Maximalzahl zulässiger Züge die Aufgabenstellung nur „Weiß zieht und gewinnt". Eine solche Aufgabe hat ebenfalls entweder keine, eine oder mehrere Lösungen (geeignete, erste Züge für Weiß). Hat eine Aufgabe „Weiß zieht und gewinnt" keine Lösung, so kann zur gleichen Ausgangsposition auf dem Schachbrett die Problemstellung „Weiß zieht und hält remis" betrachtet werden. Ein Schachspieler *S* oder ein für das Schachspielen programmierter Rechenautomat *R*, der zu jeder Ausgangsposition die Problemstellung „Weiß zieht und gewinnt" und gegebenenfalls auch „Weiß zieht und hält remis" überblickt, würde die Theorie des Schachspiels vollständig beherrschen. Man würde dann sagen, *S* bzw. *R* können mit optimaler Strategie Schach spielen. Jedoch gibt es heute noch keinen Schachspieler und auch noch keinen für das Schachspiel programmierten Rechenautomaten, die die Theorie des Schachspieles vollständig beherrschen. Es ist nicht anzunehmen, daß der vom Schachexweltmeister Dr. Botwinnik laut Zeitungsmeldung programmierte Rechenautomat mit optimaler Strategie Schach spielen wird. Denn für die Bewältigung einer solchen Aufgabe dürften die heutigen Rechenautomaten zu langsam arbeiten, und ihr Speicherwerk dürfte zu klein sein. Der Botwinniksche Rechenautomat dürfte jedoch laut Ankündigung in der Lage sein, menschliche Weltklassespieler zu schlagen.

3. Von Spielen mit einfacheren Spielregeln als dem Schachspiel ist die vollständige Theorie bekannt. Die *alpha*-Leser werden in dem Beitrag „Wir spielen mit optimaler Strategie" die Theorie einiger einfacher Spiele kennen lernen.

Abschlußbemerkung: Die drei Aufgaben „Matt in zwei Zügen" dieses Beitrags sind entnommen aus I. L. Maiselis u. M.M. Judowitsch: Lehrbuch des Schachspieles, Sportverlag 1969 und aus der Zeitschrift „Schach" des DSV.

Die erste Partie seines Lebens

José Raoul Capablanca y Graupera (19. November 1888 in Havanna geb., 8. März 1942 in New York gest.) war der dritte Schachweltmeister (1921 bis 1927).
Die erste Partie seines Lebens spielte José bereits als Vierjähriger! Capablanca senior, ebenfalls ein großer Schachliebhaber, spielte damals eine Partie mit seinem Nachbarn. Der kleine José beobachtete schweigend das Kampfgeschehen. Plötzlich aber mischte er sich ein: „Du hast falsch gezogen, Papa!"
— „Waas!?" — „Ja, du bist mit dem Springer von einem weißen Feld auf ein anderes weißes Feld gegangen. So zieht ein Springer nicht!" — Der Steppke hatte recht. Zur Belohnung für seine Aufmerksamkeit spielte der Vater eine Partie mit dem Söhnchen und — verlor ...

XI. Internationale Mathematikolympiade

Lösungen der Aufgaben

Die Lösungen wurden von Dr. habil. Helmut Bausch und Dr. Rolf Lüders bearbeitet

1. Wir geben hier die Lösung von *Jürgen Schefter* wieder.
Es sei $a=4k^4$, wobei k eine natürliche Zahl ist, die größer als 1 ist. Dann gilt

$$z=n^4+a=n^4+4k^4=(n^2+2k^2)^2-4n^2k^2$$
$$=(n^2+2k^2+2nk)(n^2+2k^2-2nk),$$
$$z=[(n+k)^2+k^2]\,[(n-k)^2+k^2]. \qquad (1)$$

Nun gilt wegen $k>1$
für alle natürlichen Zahlen n

$$(n+k)^2>0,\quad (n-k)^2\geqq 0 \quad \text{und}$$
$$(n+k)^2+k^2>1,\quad (n-k)^2+k^2>1. \qquad (2)$$

Beide Faktoren auf der rechten Seite der Gleichung (1) sind also größer als 1.
Die Zahl $z=n^4+a$ mit $a=4k^4$ und $k>1$ ist also für alle natürlichen Zahlen n eine zusammengesetzte Zahl.
Nun gibt es unendlich viele natürliche Zahlen k, die größer als 1 sind, also auch unendlich viele natürliche Zahlen $a=4k^4$, so daß für alle natürlichen Zahlen n die Zahl $z=n^4+a$ keine Primzahl ist, womit die Behauptung bewiesen ist.
Bemerkung: Diese elementare zahlentheoretische Aufgabe, eine Verallgemeinerung des *Satzes von Sophie Germain* (1776 bis 1831), wonach n^4+4 für keine natürliche Zahl n, die größer als 1 ist, eine Primzahl ist, wurde von sieben Teilnehmern unserer Mannschaft vollständig gelöst. Diese Schüler lösten die Aufgabe im Prinzip in derselben Weise, wie oben dargestellt. Nur ein Schüler konnte die Aufgabe nicht vollständig lösen.

2. Wir geben hier die Lösung von *Andreas Felgenhauer* wieder.
Zunächst soll bewiesen werden, daß die Funktion $f(x)$ nicht identisch gleich Null ist.
Es existiert eine reelle Zahl x_0, so daß $\cos(a_1+x_0)=1$. Ferner gilt wegen
$\cos(a_i+x)\geqq -1$ für alle reellen x

$$\frac{1}{2}\cos(a_2+x)+\frac{1}{2^2}\cos(a_3+x)+\ldots$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x)\geqq -\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\ldots-\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$\geqq -1+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Daraus folgt

$$f(x_0)\geqq\cos(a_1+x_0)-1+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}},$$

also $f(x_0)\neq 0$,
womit die obige Behauptung bewiesen ist.
Durch die Anwendung der Additionstheoreme erhalten wir ferner

$$f(x)=\cos x\cos a_1+\frac{1}{2}\cos x\cos a_2+\ldots$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}}\cos x\cos a_n-\sin x\sin a_1$$
$$-\frac{1}{2}\sin x\sin a_2-\ldots-\frac{1}{2^{n-1}}\sin x\sin a_n;$$
$$f(x)=\cos x\left(\cos a_1+\frac{1}{2}\cos a_2+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n\right)-\sin x\left(\sin a_1+\frac{1}{2}\sin a_2+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n\right).$$

Setzt man

$$\cos a_1+\frac{1}{2}\cos a_2+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n=b, \qquad (1)$$
$$\sin a_1+\frac{1}{2}\sin a_2+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n=c, \qquad (2)$$

wobei b und c Konstanten sind, so erhält man

$$f(x)=b\cos x-c\sin x. \qquad (3)$$

Gilt nun $f(x_1)=f(x_2)=0$, so gilt auch

$$b\cos x_i-c\sin x_i=0 \quad (i=1{,}2). \qquad (4)$$

Nun ist aber $b^2+c^2\neq 0$; denn aus $b^2+c^2=0$ würde $b=c=0$, also wegen (3) $f(x)=0$ für alle x folgen, was, wie oben bewiesen wurde, nicht möglich ist.
Daher können wir in der Gleichung (4) durch $\sqrt{b^2+c^2}$ dividieren und erhalten

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\cos x_i-\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}\sin x_i=0. \qquad (5)$$

Wegen $\left|\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\right|\leqq 1$, $\left|\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}\right|\leqq 1$

und $\frac{b^2}{b^2+c^2}+\frac{c^2}{b^2+c^2}=1$ können wir eine reelle Zahl z so wählen, daß

$\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}=\cos z$ und $\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=\sin z$ gilt.

Wir erhalten dann aus (5)

$$\cos z\cos x_i-\sin z\sin x_i=0,$$
$$\cos(x_i+z)=0,$$

also
$$x_1+z=\frac{\pi}{2}+t_1\pi \qquad (6)$$
und
$$x_2+z=\frac{\pi}{2}+t_2\pi, \qquad (7)$$

wobei t_1 und t_2 ganze Zahlen sind. Aus (6) und (7) erhalten wir durch Subtraktion
$x_2-x_1=(t_2-t_1)\pi=m\pi$, wobei
$m=t_2-t_1$ eine ganze Zahl ist, w.z.b.w.
Bemerkung: Diese goniometrische Aufgabe wurde von drei Schülern unserer Mannschaft vollständig gelöst. Ein weiterer Schüler erhielt 6 Punkte, da der Nachweis dafür, daß die Funktion $f(x)$ nicht identisch gleich Null ist, lückenhaft war. Die weiteren Schüler konnten nur Teillösungen bringen (5 Punkte bzw. in zwei Fällen 4 Punkte), da die notwendigen Begründungen — insbesondere für das nicht identische Verschwinden von $f(x)$ — unvollständig waren.

3. Wir geben hier die Lösung von *Klaus Neumann* wieder.
Es werden der Reihe nach die Fälle $k=1$, $k=5$, $k=2$, $k=4$ und $k=3$ behandelt.
1. Fall: $k=1$.
O.B.d.A. können wir annehmen, daß, falls ein Tetraeder $ABCD$ mit den geforderten Eigenschaften existiert,
$\overline{AB}=a$ und $\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=1$
gilt. Wegen der Dreiecksungleichung erhalten wir zunächst die notwendige Bedingung $a<2$.
Es sei nun M die Mitte der Kante AB. Dann gilt

$$\overline{CM}=\overline{DM}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}.$$

Wegen der Dreiecksungleichung (in dem Dreieck CMD) gilt ferner

$$\overline{CM}+\overline{DM}>\overline{CD},\ \text{also}$$
$$2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}>1,\quad 4-a^2>1,\quad a^2<3;$$

wir erhalten also die weitere notwendige Bedingung $a<\sqrt{3}$. (1)
Ist nun diese Bedingung erfüllt, so gilt auch
$\overline{CM}+\overline{CD}>\overline{DM}$ und $\overline{DM}+\overline{CD}>\overline{CM}$,
d. h. es existiert ein Dreieck CMD mit den oben angegebenen Seitenlängen.
Daraus folgt, daß ein Punkt D außerhalb der durch A, B, C bestimmten Ebene existiert, so daß $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=1$ ist. Die angegebene Bedingung $a<\sqrt{3}$ ist also auch *hinreichend* für die Existenz des Tetraeders $ABCD$.
2. Fall: $k=5$.
Dieser Fall läßt sich auf den Fall $k=1$ zurückführen, wobei nur die Kantenlängen a und 1 zu vertauschen sind. Man erhält die *notwendige und hinreichende* Bedingung

$$\frac{1}{a}<\sqrt{3},\quad \text{also}\quad a>\frac{1}{3}\sqrt{3}. \qquad (2)$$

3. Fall: $k=2$.
3.1. Die beiden Kanten der Länge a mögen in einem Dreieck liegen. O.B.d.A. können wir dann $\overline{AC}=\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=1$ annehmen.
Wegen der Dreiecksungleichung erhalten wir die notwendige Bedingung $2a>1$, d. h. $a>\frac{1}{2}$.

Es sei wieder M die Mitte der Kante AB. Dann gilt

$$\overline{CD}+\overline{DM}>\overline{CM},$$

also $1+\frac{1}{2}\sqrt{3}>\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$,

$$1+\sqrt{3}+\frac{3}{4}>a^2-\frac{1}{4},$$

$$a^2<2+\sqrt{3},\ \text{d. h. } a<\sqrt{2+\sqrt{3}}. \qquad (3)$$

Andererseits gilt aber auch

$$\overline{DM}+\overline{CM}>\overline{CD},$$

also $\frac{1}{2}\sqrt{3}+\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}>1$,

$$\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}>1-\frac{1}{2}\sqrt{3}>0,$$

also $a^2-\frac{1}{4}>1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}$,

$$a^2>2-\sqrt{3}$$

$$\text{d. h. } a>\sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad (4)$$

Man erhält also die notwendige Bedingung

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}. \qquad (5)$$

Ist aber diese Bedingung erfüllt, so existiert das Dreieck DMC, also auch das Tetraeder $ABCD$. Die Bedingung (5) ist also im Falle 3.1. *notwendig und hinreichend.*

3.2. Die beiden Kanten der Länge a mögen nicht in einem Dreieck liegen. O.B.d.A. können wir dann $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ annehmen.

Wir erhalten wieder die notwendigen Bedingungen $a>2$

und wegen $\overline{CM}=\overline{DM}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$, $\quad \overline{CD}=a$

$$2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}>a,\quad 4-a^2>a^2,\quad 2a^2<4,$$

also $\quad a<\sqrt{2}. \qquad (6)$

Diese Bedingung ist aber im Falle 3.2. auch hinreichend; denn in diesem Falle läßt sich stets ein Tetraeder mit den geforderten Eigenschaften konstruieren.

Aus (5) und (6) folgt, daß im Falle $k=2$ notwendig und hinreichend für die Existenz eines Tetraeders mit den geforderten Eigenschaften die Bedingung

$$a<\sqrt{2+\sqrt{3}}\ \text{ist.} \qquad (7)$$

4. Fall: $k=4$.

Auch dieser Fall läßt sich auf den Fall $k=2$ zurückführen, indem die Kantenlängen a und 1 vertauscht werden.

Man erhält die notwendige und hinreichende Bedingung

$$\frac{1}{a}<\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

also

$$a>\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}. \qquad (8)$$

5. Fall: $k=3$.

5.1. Es sei $a>\frac{1}{3}\sqrt{3}$. $\qquad (9)$

Dann existiert ein Tetraeder mit $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=1$ und $\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}=a$; denn, wenn S der Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks ABC ist, so hat man nur eine Senkrechte SD auf der Ebene dieses Dreiecks zu errichten mit $\overline{SD}=\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2}$,

was wegen $a>\frac{1}{3}\sqrt{3}$ immer möglich ist.

5.2. Es sei $a<\sqrt{3}$. $\qquad (10)$

Dann existiert ein Tetraeder mit $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=a$ und $\overline{DA}=\overline{BD}=\overline{DC}=1$; denn analog wie in 5.1. wählt man den Punkt D so, daß $\overline{SD}=\sqrt{1-\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2}$,

was wegen $a<\sqrt{3}$ immer möglich ist. Da die durch die Bedingungen (9) und (10) festgelegten Intervalle einander überschneiden, ist im Falle $k=3$ für alle reellen positiven a die Existenz des Tetraeders mit den geforderten Eigenschaften nachgewiesen.

Zusammenfassung: Notwendig und hinreichend für die Existenz eines Tetraeders mit den geforderten Eigenschaften sind die folgenden Bedingungen:

im Falle

$k=1$: $0<a<\sqrt{3}$,

$k=2$: $0<a\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$,

$k=3$: $0<a$,

$k=4$: $\quad a>\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$,

$k=5$: $\quad a>\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Bemerkung: Fünf Teilnehmer unserer Mannschaft haben diese Aufgabe vollständig gelöst. Zwei Teilnehmer konnten nicht alle Fälle richtig begründen und erhielten daher nur 5 bzw. 4 Punkte. Ein Teilnehmer hat diese Aufgabe wegen Zeitmangel nicht mehr behandelt.

4. Es seien M_i die Mittelpunkte und r_i die Radien der Kreise γ_i $(i=1,2,3)$. N_i seien die Projektionen von M_i auf AB, O sei der Mittelpunkt von γ (vgl. die Abb.).

Ferner setzen wir $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$,

$$\overline{AD}=p,\quad \overline{DB}=q=c-p,\quad \frac{a+b+c}{2}=s.$$

O.B.d.A. können wir annehmen, daß N_2 auf der Strecke AD liegt. Wir berechnen zunächst die Radien r_2 und r_3.

Da N_2 der Berührungspunkt des Kreises γ_2 mit AB ist, gilt in dem rechtwinkligen Dreieck OM_2N_2

$$\overline{N_2O}=\overline{N_2D}+\overline{DB}-\overline{OB}=r_2+q-\frac{c}{2},$$

$$\overline{M_2N_2}=r_2$$

und, da der Kreis γ_2 den Kreis γ mit dem Radius $\frac{c}{2}$ von innen berührt,

$$\overline{OM_2}=\frac{c}{2}-r_2,$$

also nach dem Satz des Pythagoras

$$\left(r_2+q-\frac{c}{2}\right)^2+r_2^2=\left(\frac{c}{2}-r_2\right)^2.\ \text{Daraus}$$

folgt $\quad (r_2+q)^2-cq-cr_2+\frac{c^2}{4}+r_2^2$

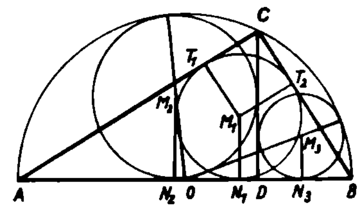
$$=\frac{c^2}{4}-cr_2+r_2^2,\ (r_2+q)^2=cq=a^2$$

und hieraus wegen $r_2+q>0$, $a>0$

$$r_2+q=a,\ \text{also } r_2=a-q. \qquad (1)$$

Analog erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ON_3M_3

$$r_3=b-p. \qquad (2)$$



Nun berechnen wir den Radius r_1 des Kreises γ_1. Bezeichnet man die Berührungspunkte dieses Kreises mit den Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ABC mit T_1 und T_2, so ist das Viereck $CT_1M_1T_2$ ein Quadrat. Nach einem Satz über den Abstand eines Eckpunktes eines Dreiecks von den Berührungspunkten des Inkreises gilt $\overline{CT_1}=s-c$, also in dem vorliegenden Fall $r_1=s-c$.

Ferner erhält man wegen (1) und (2)

$$\frac{1}{2}(\overline{M_2N_2}+\overline{M_3N_3})=\frac{1}{2}(r_2+r_3)$$
$$=\frac{1}{2}(a-q+b-p)=\frac{1}{2}(a+b-c)$$
$$=s-c=r_1=\overline{M_1N_1}, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}(\overline{BN_2}+\overline{BN_3})=\frac{1}{2}(q+r_2+q-r_3)$$
$$=\frac{1}{2}(2q+a-q-b+p)=\frac{1}{2}(a+c-b)$$
$$=s-b=\overline{BN_1}, \qquad (4)$$

was wieder nach dem obigen Satz gilt, weil N_1 der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks ABC mit der Seite AB ist.

Aus (3) und (4) folgt nun, daß M_1 der Mittelpunkt der Strecke M_2M_3 ist. Die drei Punkte M_1, M_2, M_3 liegen also auf einer Geraden. Daher berührt die zu AB bezüglich der Geraden M_2M_3 symmetrisch gelegene Gerade ebenfalls die drei Kreise γ_1, γ_2 und γ_3, womit bewiesen ist, daß diese Kreise außer der Tangente AB noch eine zweite gemeinsame Tangente haben.

Bemerkung: Diese Aufgabe wurde von drei Schülern unserer Mannschaft vollständig gelöst. Allerdings gelang es den Schülern nicht, eine einfache elementargeometrische Lösung, wie sie oben gegeben wurde, zu finden; sie stützten sich auf die Koordinatengeometrie, berechneten die Koordinaten der Punkte M_1, M_2, M_3 und wiesen dann nach, daß diese drei Punkte auf einer Geraden liegen, ein Verfahren, das mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden ist.

Drei Schüler konnten die Lösung nicht vollständig angeben; sie erhielten 5 bzw. 4 Punkte. Die übrigen beiden Schüler kamen kaum über einen allgemeinen Ansatz hinaus. (2 Punkte bzw. 1 Punkt).

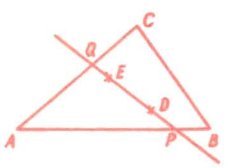
Es zeigte sich, daß unsere Schüler auf dem Gebiete der elementaren Geometrie noch nicht über genügend sichere Fertigkeiten verfügen. Es ist daher notwendig, auch den Problemen der Elementargeometrie in den mathematischen Zirkeln und Arbeitsgemeinschaften mehr Aufmerksamkeit zu widmen.

5. Wir geben hier die Lösung von *Wolfgang Burmeister* mit geringfügigen Veränderungen und Ergänzungen wieder.

Es wird zunächst der Fall $n=5$ untersucht.

Hierbei sind genau drei Unterfälle möglich:

1. Die fünf Punkte sind Eckpunkte eines konvexen Fünfecks. Dann ist die Behauptung bereits bewiesen, da beliebige vier von diesen fünf Punkten ein konvexes Viereck bilden.
2. Vier der fünf Punkte sind Eckpunkte eines konvexen Vierecks, in dessen Innern der fünfte Punkt liegt. Auch in diesem Falle trifft die Behauptung zu.
3. Drei Punkte A, B, C bilden ein Dreieck, in dessen Innern die übrigen beiden Punkte D und E liegen (vgl. die Abb.).



Die Gerade DE hat dann mit zwei Seiten des Dreiecks ABC je einen inneren Punkt P bzw. Q gemeinsam; denn nach Voraussetzung kann DE nicht durch einen der Eckpunkte des Dreiecks ABC gehen.

O.B.d.A. können wir annehmen, daß P auf AB und Q auf AC liegt. Dann ist aber das Viereck $BCED$ ein konvexes Viereck, da die beiden Diagonalen BE und CD im Innern dieses Vierecks liegen. Zu fünf beliebigen Punkten einer Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, gibt es also wenigstens ein konvexes Viereck, dessen Eckpunkte unter den gegebenen Punkten vorkommen.

Sind nun n Punkte mit $n>4$ gegeben, so kann man aus ihnen $\binom{n}{5}$ verschiedene Teilmengen von je 5 Punkten bilden. In jeder dieser Teilmengen gibt es aber, wie oben bewiesen wurde, vier Punkte, die ein konvexes Viereck bilden. Andererseits kann ein solches Viereck höchstens zu $n-4$ dieser Teilmengen von je 5 Punkten gehören. Die Gesamtzahl aller dieser konvexen Vierecke ist daher größer oder gleich

$$f(n)=\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}. \qquad (1)$$

Es ist jetzt nur noch zu zeigen, daß für alle n, die größer als 4 sind,

$$f(n)=\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}\geqq g(n)=\binom{n-3}{2}. \qquad (2)$$

Zunächst erhalten wir $f(5)=g(5)$ und $f(6)=g(6)$. Für $n\geqq 7$ gilt

$$\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot 2}{120\cdot(n-3)(n-4)}=\frac{n(n+1)+6}{60}$$
$$+\frac{2}{5(n-4)}>\frac{n(n+1)+6}{60}\geqq\frac{62}{60}>1,$$

also $f(n)>g(n)$. (3)

Damit ist bewiesen, daß man wenigstens $\binom{n-3}{2}$ konvexe Vierecke finden kann, deren Eckpunkte unter den gegebenen n Punkten vorkommen.

Wegen $f(n)>g(n)$ für $n>6$ stellt die Gleichung (1) sogar eine Verschärfung der zu beweisenden Behauptung dar, d. h., es gibt sogar mindestens $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$ konvexe Vierecke.

Bemerkung: Diese geometrisch-kombinatorische Aufgabe wurde von fünf Schülern unserer Mannschaft vollständig gelöst. Zwei von diesen Schülern gelang der Nachweis einer *Verschärfung* der zu beweisenden Relation; man kann nämlich sogar, wie oben gezeigt wurde, mindestens $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$ konvexe Vierecke der geforderten Eigenschaft finden. Für diese Erkenntnis erhielten sie, wie auch einige andere Teilnehmer der Olympiade, eine besondere Anerkennung für die gute Lösung einer Aufgabe.

Die drei anderen Schüler erhielten nur 5 bzw. 4 Punkte, da die Beweisführung im Falle $n>5$ nicht vollständig war bzw. fehlte.

6. Setzt man $D_1=x_1y_1-z_1^2>0$, $D_2=x_2y_2-z_2^2>0$, so erhält man

$$x_1y_1=D_1+z_1^2,\quad x_2y_2=D_2+z_2^2.$$

Für den Nenner der linken Seite der behaupteten Ungleichung (s. Heft 5, S. 100) ergibt sich dann die Abschätzung (1)

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2$$
$$=D_1+D_2+x_1y_2+x_2y_1-2z_1z_2$$
$$=D_1+D_2+\frac{x_1}{x_2}x_2y_2+\frac{x_2}{x_1}x_1y_1-2z_1z_2$$
$$=D_1+D_2+\frac{x_1}{x_2}(D_2+z_2^2)+\frac{x_2}{x_1}(D_1+z_1^2)-2z_1z_2$$
$$=D_1+D_2+\left(\frac{x_1}{x_2}D_2+\frac{x_2}{x_1}D_1-2\sqrt{D_1D_2}\right)$$
$$+\left(\frac{x_1}{x_2}z_2^2+\frac{x_2}{x_1}z_1^2-2z_1z_2\right)+2\sqrt{D_1D_2}$$
$$=(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})^2+\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}D_2-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}D_1\right)^2$$
$$+\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}z_2-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}z_1\right)^2\geqq(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})^2. \qquad (2)$$

Folglich gilt $\dfrac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}$

$$\leqq\frac{8}{(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})^2}. \qquad (3)$$

Ferner gilt wegen $\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2}\geqq 2\sqrt[4]{D_1D_2}$ und $\frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2}\geqq\frac{2}{\sqrt{D_1D_2}}$

$$\frac{8}{(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})^2}\leqq\frac{2}{\sqrt{D_1D_2}}\leqq\frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2}. \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) ergibt sich unmittelbar die zu beweisende Ungleichung (1).

Nun gilt das Gleichheitszeichen in (2) genau dann, wenn

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}D_2=\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}D_1,\text{ d. h. } x_1\sqrt{D_2}=x_2\sqrt{D_1}, \qquad (5)$$

und wenn

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}z_2=\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}z_1,\text{ d. h. } x_1z_2=x_2z_1. \qquad (6)$$

Ferner gilt das Gleichheitszeichen in (4) genau dann, wenn

$$D_1=D_2. \qquad (7)$$

Wegen (5), (6) und (7) gilt daher das Gleichheitszeichen in (1) genau dann, wenn $D_1=D_2$ und $x_1=x_2$ und $z_1=z_2$.

Das ist aber genau dann der Fall, wenn $x_1=x_2$ und $y_1=y_2$ und $z_1=z_2$.

Diese Bedingungen sind daher notwendig und hinreichend für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der bewiesenen Ungleichung (1).

Bemerkung: Die vorliegende Aufgabe war die schwierigste unter den sechs gestellten Aufgaben. Keinem unserer Schüler gelang der vollständige Nachweis für die Richtigkeit der gegebenen Ungleichung. Es konnten nur Teilergebnisse erreicht werden, z. B. der Nachweis der Ungleichung für den Fall $(x_1-x_2)(y_1-y_2)\leqq 0$.

Zwei Schüler erhielten je 5 Punkte, zwei weitere je 4 Punkte, drei Schüler je 3 Punkte und ein Schüler nur 2 Punkte. Da Ungleichungen dieser Art in der Analysis gelegentlich auftreten, ist es notwendig, das Lösen auch solcher Ungleichungen, bei denen die Anwendung der bekannten Methoden nicht unmittelbar zum Ziel führt, häufiger zu üben.

Fortsetzung zur Aufgabe von Prof. Dr. H. Sachs (4/69)

Beachten wir, daß für die in der Aufgabe genannten Figuren aufgrund von (IV) $s=1$ gilt, so erhalten wir aus (2) sogleich die behauptete Beziehung

$$f=n+2.$$

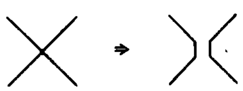
3. Betrachten wir zunächst den Fall $n=0$; die Figur F hat dann keinen Knotenpunkt, jede ihrer s Komponenten ist eine einfach geschlossene Kurve.

Erste Induktion nach der Anzahl s der Komponenten:

Im Falle $n=0$ und $s=1$ sind die Behauptungen (A) und (B) offenbar richtig, denn dann haben wir eine einzige geschlossene Kurve, welche die Ebene in zwei getrennte Gebiete zerlegt. Nun nehmen wir an, die Behauptungen seien schon bewiesen für $n=0$ und $s=1, 2, \ldots, S$ $(S\geqq 1)$; wir wollen zeigen, daß sie dann auch für $n=0$ und $s=S+1$ zutreffen. F sei eine Figur mit $n=0$ und $s=S+1$; F besteht also aus $S+1$ einfach geschlossenen, sich gegenseitig nicht schneidenden Kurven. Unter diesen gibt es gewiß (mindestens) eine, etwa C, in deren Innerem keine weitere der Kurven liegt. Diese denken wir uns gelöscht und erhalten so eine Figur F' mit $n=0$ und $s=S$, für die also nach Induktionsannahme die Behauptungen (A) und (B) gelten. Fügen wir C wieder hinzu, so wachsen f und s je um 1, während n ungeändert bleibt (nämlich $n=0$ in beiden Fällen). Außerdem gewinnen wir eine Zweifärbung der Gebiete von F in der verlangten Art, indem wir eine solche Zweifärbung der Gebiete von F' vornehmen, die Kurve C hinzufügen und das Innere von C „umfärben".

Der Induktionsschluß sichert nun, daß die Behauptungen (A) und (B) für jede Figur F mit $n=0$ gelten.

4. Nachdem wir die Gültigkeit der Behauptungen für den Fall $n=0$ gesichert haben, führen wir nun eine *zweite Induktion* nach der Anzahl n der Knotenpunkte (bei beliebigem s) durch. Wir nehmen an, die Behauptungen seien schon bewiesen für $n=0, 1, 2, \ldots, N$ ($N \geqq 0$) und alle s; wir wollen zeigen, daß sie dann auch für $n=N+1$ und alle s zutreffen. Dazu nehmen wir eine Figur F mit $n=N+1$ her, wählen einen beliebigen ihrer Knotenpunkte aus und „schneiden ihn durch" (siehe Abb. 1).



(Diese Durchschneidung kann auf zwei verschiedene Weisen erfolgen; es ist gleichgültig, welche der beiden wir wählen.)

Man überlegt sich leicht, daß die entstandene Figur F'' ebenfalls durch Zeichnen einer Anzahl geschlossener Linien erzeugt werden kann und daß sie den Bedingungen (II) und (III) genügt. Da F'' genau N Knotenpunkte besitzt, gelten nach Induktionsannahme für F'' die Aussagen (A) und (B). Kehren wir nun von F'' zu F zurück, indem wir die Durchschneidung rückgängig machen, so ist sofort zu sehen, wie sich aus einer Zweifärbung der Gebiete von F'' auch eine Zweifärbung der Gebiete von F ergibt — die Aussage (B) trifft also auch für F zu. Um zu sehen, daß auch (A) zutrifft, bezeichnen wir die zu F'' gehörigen mit f'', n'', s''; nach Induktionsannahme gilt dann

(3) $\quad f''=n''+s''+1.$

Nun können, wie man sich leicht klarmacht, bei der Durchschneidung des Knotenpunktes zwei Fälle auftreten:

Entweder nimmt die Anzahl der Komponenten um 1 zu; dann ändert sich die Anzahl der Gebiete nicht, und wir haben

(4) $\quad f''=f,\ n''=n-1,\ s''=s+1,$

oder die Anzahl der Komponenten ändert sich nicht; dann vermindert sich die Anzahl der Gebiete um 1, und es gilt

(5) $\quad f''=f-1,\ n''=n-1,\ s''=s.$

Sowohl aus (4) als auch aus (5) folgt wegen (3) die behauptete Relation

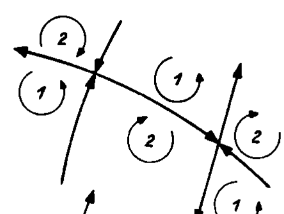
$$f=n+s+1,$$

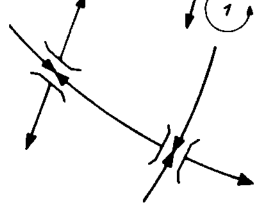
die Aussage (A) trifft also auch auf F zu. Induktion nach n liefert damit die Gültigkeit der Aussagen (A) und (B) für alle betrachteten Figuren F.

5. Wir wollen für die Behauptung (B) noch einen weiteren, besonders eleganten Beweis angeben. Dazu setzen wir zunächst zusätzlich voraus, daß keine Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_m$ sich selber schneidet. Dann zerlegt jede dieser Kurven C_μ die Ebene in zwei getrennte Teile: in das Innere von C_μ und das Äußere von C_μ. G bezeichne ein Gebiet der Figur F, und $\lambda(G)$ sei die Anzahl derjenigen unter den Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_m$, die G im Innern enthalten. Dann ist klar: Beim Überschreiten einer der Kurven C_μ (nicht gerade in einem der Knotenpunkte) ändert sich $\lambda(G)$ genau um 1. Daraus folgt:

Geben wir allen Gebieten G, für die $\lambda(G)$ ungerade ist, die Farbe 1, und allen Gebieten G' für die $\lambda(G')$ gerade ist, die Farbe 2, so haben benachbarte Gebiete gewiß verschiedene Farben, und damit haben wir eine Zweifärbung der verlangten Art schon gewonnen. — Die Ausdehnung des Beweises auf den allgemeinen Fall möge dem Leser überlassen bleiben.

6. Schließlich bleibt noch die in der Aufgabe formulierte Behauptung c) zu beweisen. Dazu nehmen wir zunächst eine Zweifärbung der Gebiete gemäß (B) vor. Allen Gebieten der Farbe 1 ordnen wir nun den positiven, allen Gebieten der Farbe 2 den negativen Umlaufsinn zu; dadurch ist zugleich, wie in Abb. 2 dargestellt, jeder der Kanten eindeutig eine Richtung zugeordnet, und in einem Knotenpunkt treffen stets die beiden Spitzen oder die beiden Enden der beiden zur gleichen





Straße gehörigen Pfeile zusammen. Darauf bauen wir die Brücken so, daß eine Straße dort, wo zwei auf ihr gezeichnete Pfeilspitzen zusammentreffen, auf der Brücke verläuft, während sie dort, wo zwei auf ihr gezeichnete Pfeilenden zusammentreffen, unter der Brücke hindurchgeht (Abb. 3). Daß das so gebaute Straßensystem die in der Behauptung c) formulierten Eigenschaften hat, ist unmittelbar einzusehen; es wird besonders deutlich, wenn wir annehmen, daß sich die Brücken über die Ebene erheben. Die Richtung des Pfeiles stimmt dann jeweils mit der Richtung, in der die Straße ansteigt, überein.

▲ 421 Im ungünstigsten Falle werden dem Korb bei dreimaligem Hineingreifen abwechselnd je eine rote, eine grüne und eine blaue Kugel entnommen. Nachdem 27 Kugeln aus dem Korb genommen wurden, sind im ungünstigsten Falle 9 rote, 9 grüne und 9 blaue Kugeln vorhanden. Erst nachdem man dem Korb 28 Kugeln entnommen hat, erhält man mit Sicherheit 10 Kugeln der gleichen Farbe.

▲ 422 Unsere Untersuchung beschränkt sich auf die Zahlen 29, 38, 47 und 56. Die Zahl 65 scheidet bereits aus, da $2 \cdot 65-20=110$ bereits eine dreistellige Zahl ergibt.

n	29	38	47	56
$2 \cdot n$	58	76	94	112
$2 \cdot n-20$	38	56	74	92

Aus der Tabelle erkennen wir, daß es genau eine Lösung gibt; die Zahl heißt 47.

▲ 423 Aus $19+4=23$ und $23-13=10$ und $10:2=5$ folgt, daß die gedachte Zahl 5 lautet. *Oder:* Es sei n die gedachte Zahl, dann gilt $n \cdot 2+13-4=19$, $n \cdot 2+9=19$, $n \cdot 2=10$, also $n=5$.

W 5 ■ 424 Birgit sei gegenwärtig n Jahre alt; dann ist ihr Bruder Wolfram $(n+10)$ Jahre alt.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n+10$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Aus der Tabelle erkennen wir:

Nur für die Zahlen 5 und 15 trifft der Sachverhalt der Aufgabe zu, daß Wolfram dreimal so alt wie Birgit ist. Deshalb ist Birgit gegenwärtig vier Jahre alt. In sechs Jahren ist Wolfram zweimal so alt wie Birgit.

W 5 ■ 425 Es seien m und n die beiden Summanden; die größtmöglichen Summanden und ihr Produkt sind in der nachstehenden Tabelle erfaßt.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
$m \cdot n$	0	18	34	48	60	70	78	84	88	90

Das Produkt ist in jedem Fall eine zweistellige Zahl.

▲ 426 Es sei n die von Bernd gedachte Zahl; dabei gelte $n=2, 3, 4, \ldots, 9$. Bernd hat folgende Rechenoperationen auszuführen: $n \cdot 27 \cdot 37=n \cdot 999=1\,000n-n$.

n	2	3	. . .	9
$1000n-n$	1998	2797	. . .	8991
letzte Ziffer	8	7	. . .	1

Aus der Tabelle erkennen wir, daß die Summe aus der gedachten Zahl und der letzten Ziffer des Ergebnisses stets 10 beträgt. Also hat sich Bernd die Zahl 3 gedacht.

▲ 427 Die erste Stelle der zu ermittelnden Zahl ist offensichtlich 1, die zweite Stelle 0. Wählen wir für die verbleibenden Stellen die Ziffern 2, 3, 4 und 5, so erhalten wir die Zahl 102 345. Die Quersumme dieser Zahl beträgt 15. Damit die gesuchte Zahl durch 9 teilbar ist, muß ihre Quersumme aber 18 betragen. Die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist demnach 102 348.

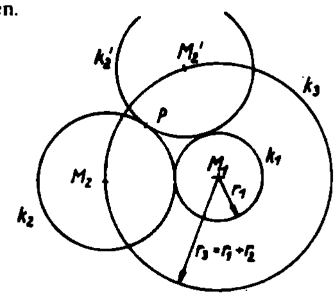
▲ 428 Aus $120 \cdot 25 = 3000$ und $3000 : 5 = 600$ folgt, daß bisher 600 Kannen mit einem Fassungsvermögen von je 20 Litern verwendet wurden. Die Molkerei verarbeitet demnach täglich $600 \cdot 20$ Liter, das sind 12 000 Liter Milch. Nach der Umstellung auf 25-Liter-Kannen waren nur noch 480 Kannen erforderlich, denn $480 \cdot 25 = 12000$.

W 6 ■ 429 Für die Seiten eines Dreiecks gilt stets $a+b>c$. Die möglichen Maßzahlen der Längen der Dreiecksseiten sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

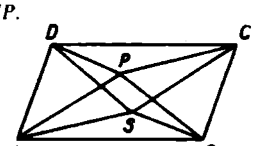
a	1	2	2	3	3	3	4	4	5
b	5	4	5	3	4	5	4	5	5
c	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Es gibt also genau neun verschiedene Dreiecke mit den verlangten Eigenschaften.

W 6 ■ 430 Nachdem der Kreis k_1 gezeichnet und der Punkt P festgelegt wurde, zeichnet man um M_1 als Mittelpunkt einen Kreis k_3 mit dem Radius $r_3 = r_1 + r_2 = 5$ cm. Der Kreis um P mit $r_2 = 3$ cm schneidet den Kreis k_3 in den Punkten M_2 und M_2'. Es gibt genau zwei Lösungen; die beiden Kreise um M_2 und M_2' als Mittelpunkt mit dem Radius $r_2 = 3$ cm erfüllen die gestellten Bedingungen.

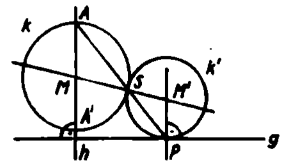


▲ 431 Das Viereck $DSBP$ ist auf Grund der Konstruktion ein Parallelogramm, und es gilt deshalb $\overline{SB} = \overline{DP}$, $SB \parallel DP$. Aus $AB \parallel CD$ und $SB \parallel DP$ folgt $\sphericalangle SBA = \sphericalangle PDC$. Wegen $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{SB} = \overline{DP}$ und $\sphericalangle SBA = \sphericalangle PDC$ gilt $\Delta ABS \cong \Delta CDP$. Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt $\overline{AS} = \overline{CP}$ und $\sphericalangle SAB = \sphericalangle PCD$. Aus $AB \parallel CD$ und $\sphericalangle SAB = \sphericalangle PCD$ folgt $AS \parallel CP$.



In analoger Weise läßt sich die Parallelität der Geraden AP und CS nachweisen. Folglich ist das Viereck $ASCP$ ein Parallelogramm.

▲ 432 Wir konstruieren die Gerade h, die durch M geht und senkrecht auf der Geraden g steht. Die Schnittpunkte der Geraden h mit dem Kreis k seien A und A'. Die Verbindungsgerade AP schneidet den Kreis k in S. Durch P zeichnen wir die Senkrechte zu g. Die Gerade MS schneidet diese Senkrechte in M'. Der Punkt M' ist Mittelpunkt des Kreises k', sein Radius ist $r' = \overline{PM'} = \overline{SM'}$.



Begründung der Konstruktion:
Da das Dreieck AMS gleichschenklig ist, gilt $\sphericalangle SAM = \sphericalangle ASM$. Ferner gilt $\sphericalangle ASM = \sphericalangle PSM'$ (Scheitelwinkel) und $\sphericalangle SAM = \sphericalangle SPM'$ (Wechselwinkel an den Parallelen MA und $M'P$). Daraus folgt $\sphericalangle PSM' = \sphericalangle SPM'$. Also ist auch das Dreieck SPM' gleichschenklig, und es gilt $\overline{SM'} = \overline{PM'}$. Der Kreis k um M' mit dem Radius $\overline{SM'}$ geht daher durch die Punkte S und P! Er berührt den Kreis k von außen, weil die Verbindungsgerade der Mittelpunkte M und M' durch den gemeinsamen Punkt S der Kreise k und k' geht. Er berührt ferner die Gerade g im Punkt P, weil $PM' \perp g$ laut Konstruktion gilt.

▲ 433 Aus $13x + 5y = 82$ folgt durch Umformung $y = 16 - 2x - \frac{3x-2}{5}$. Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt, daß die Differenz $3x - 2$ nach einer Belegung der Variablen x durch 5 teilbar sein soll; das trifft zu für $x = 4, 9, 14, 19, \ldots$.
Nur für $x = 4$ wird y positiv. Das Zahlenpaar (4, 6) ist das einzige, das die Bedingungen erfüllt.

W 7 ■ 434 Axel habe a Mark, Bernd b Mark gespart. Aus $(a+b)+(a-b) = 2a$ und $2a = 50$ folgt $a = 25$, das heißt, Axel hat 25 M gespart. Aus $(a-b)+a-b = 2 \cdot (a-b)$ und $2 \cdot (a-b) = 10$ folgt $a-b = 5$. Aus $a = 25$ und $a-b = 5$ folgt $b = 20$, das heißt, Bernd hat 20 M gespart. Axel hat also mehr gespart.

W 7 ■ 435 Es gilt $\frac{2a+b}{a} = 2 + \frac{b}{a}$ und $\frac{a+2b}{b} = 2 + \frac{a}{b}$. Aus $a<b$ folgt $\frac{a}{b} < 1$ und $\frac{b}{a} > 1$, also $\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$ und damit auch $2 + \frac{a}{b} < 2 + \frac{b}{a}$.
Als Ergebnis erhalten wir $\frac{2a+b}{a} > \frac{a+2b}{b}$.

▲ 436 A sei gegenwärtig a Jahre, B sei b Jahre und C sei c Jahre alt; die in der Aufgabe formulierten Angaben sind wie folgt in einer Tabelle (unten) zusammengestellt:

Man erhält aus (1) $2a + 2b - 6c = 0$ (4)
und durch Subtraktion
aus (4) und (2) $5b - 7c = 0,$ (5)
aus (3) und (2) $2b - 2c = 24,$ (6)
$b - c = 12,$ (7)
$b = 12 + c$ (8)

Daraus folgt wegen (5)
$60 + 5c - 7c = 0, \quad c = 30,$
und weiter aus (8) und (1) $b = 42$,
$a = 48$.

Vor x Jahren waren A $48 - x$, B $42 - x$ und C $30 - x$ Jahre alt.
Aus $(48-x)+(42-x)+(30-x) = 48$ folgt $x = 24$. Vor 24 Jahren waren A 24, B 18 und C 6 Jahre alt.

▲ 437 Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt für die in der beigefügten Zeichnung angegebenen Größen h, r, s und b:

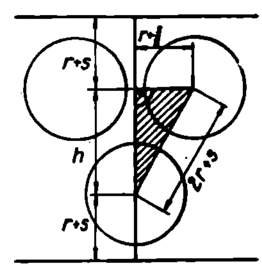
$$h^2 + \left(r + \frac{s}{2}\right)^2 = (2r+s)^2,$$

$$h^2 + \left(r + \frac{s}{2}\right)^2 = 4\left(r + \frac{s}{2}\right)^2,$$

$$h^2 = 3\left(r + \frac{s}{2}\right)^2,$$

$$h = \sqrt{3}\left(r + \frac{s}{2}\right). \qquad (1)$$

Ferner gilt $\quad b = 2r + 2s + h. \qquad (2)$



Aus (1) und (2) folgt für die gesuchte Breite b des Blechstreifens

$$b = 2r + 2s + \sqrt{3}\left(r + \frac{s}{2}\right).$$

Mit $\sqrt{3} \approx 1{,}732$ ergibt sich die Näherungsformel

$$b \approx 3{,}732r + 2{,}866s.$$

W 8 ■ 438 Angenommen, es existieren zwei solche Zahlen x und y. O.B.d.A. können wir $x > y$ annehmen. Dann gilt
$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 455 = 1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$.
Daraus ergeben sich nur die folgenden vier Möglichkeiten:

* Tabelle zu ▲ 436

Zeitpunkt	Lebensalter (in vollen Jahren) von A	von B	von C	Gleichungssystem	
gegenwärtig	a	b	c	$a+b-3c = 0$	(1)
nach $\frac{a}{2}$ Jahren	$\frac{3}{2}a$	$\frac{a}{2}+b$	$\frac{a}{2}+c$	$2a-3b+c = 0$	(2)
nach $\left(\frac{a}{2}+12\right)$ J.	$\frac{3}{2}a+12$	$\frac{a}{2}+b+12$	$\frac{a}{2}+c+12$	$2a-b-c = 24$	(3)

1.	2.	3.	4.
$x-y=1$	$x-y=5$	$x-y=7$	$x-y=13$
$x+y=455$	$x+y=91$	$x+y=65$	$x+y=35$

Denn wegen $x-y<x+y$ kann $x-y$ nicht gleich 35, 65, 91 oder 455 sein.
Durch Addition erhält man aus (1), (2), (3) und (4) die folgenden vier Lösungen:
$x_1=228$, $x_2=48$, $x_3=36$, $x_4=24$,
$y_1=227$. $y_2=43$. $y_3=29$. $y_4=11$.
Für alle diese Zahlenpaare ist wegen (1), (2), (3) und (4) die Gleichung $x^2-y^2=455$ erfüllt.

Lösungen zu Prüfungsaufgaben aus Island:

▲492 $x=1\frac{1}{5}$

▲493 a) $x=25$ b) $x=\frac{1}{25}$

▲494 $0+3+6+\ldots+93+96+99$
$=(0+99)+(3+96)+(6+99)+\ldots+(48+51)$
$=99\cdot 17=1683$

▲495 75 % von 4 ha sind 3 ha;
$\frac{11}{10}x+x+\frac{2}{5}x=3;\; x=12$
A erhält $1{,}1\cdot 1{,}2$ ha $=1{,}32$ ha,
C erhält $0{,}4\cdot 1{,}2$ ha $=0{,}48$ ha, ...
B erhält 1,20 ha.

▲496 $V_Z=\pi\cdot 4^2\cdot 21\ \text{cm}^3=336\,\pi\,\text{cm}^3$;
$V_P=\frac{3}{4}\cdot V_Z=252\,\pi\,\text{cm}^3$
$\frac{1}{3}\cdot 6^2 h=252\,\pi;\quad h=21\,\pi\,\text{cm}\approx 66\ \text{cm}.$

▲497 a) $253{,}5:4{,}5=56\frac{1}{3}$, d.h. 1 kg des Waschmittels kostet 56,33 kr.
b) $4{,}5:3=1{,}5$; $4{,}5+1{,}5=6$; die neuen Kannen fassen 6 kg Waschmittel. Der alte Preis für 6 kg beträgt $6\cdot 56\frac{1}{3}$ kr. $=338$ kr.
$x:112=338:100$; $x=378{,}56$.
Nach der Preiserhöhung mußten für eine größere Kanne 378,56 kr. bezahlt werden.

▲498 $(777-7\cdot 7+7):(77-7)=10{,}5$ ist eine mögliche Lösung.

▲499 Es lassen sich 24 Zahlen bilden;
sie lauten

1 234	2 134	3 124	4 123
1 243	2 143	3 142	4 132
1 324	2 314	3 214	4 213
1 342	2 341	3 241	4 231
1 423	2 413	3 412	4 312
1 432	2 431	3 421	4 321

Lösungen zu den Prüfungsaufgaben aus Tanzania

▲501 a) $h'=13$ cm b) $A=65\ \text{cm}^2$
c) $V=400\ \text{cm}^3$

▲502 a) $(x+0{,}1\,x)^2=z$ b) $(a^2bc):\sqrt{p}=t$
c) $t=-45$

▲503 Die Zahlen lauten 40 und 41.

▲504 a) $\overline{BD}=5{,}6$ cm
b) $A_{OAD}:A_{ACD}=5:4$; $A_{TCD}:A_{ACD}=1:1$;
$A_{AOB}:A_{COD}=25:18$

▲505 56 Sitzplätze

▲506 a) Die mit Hilfe der Karte ermittelte Entfernung $\overline{AB}$ ist um rund 23 Yards länger als die wirkliche Entfernung.
b) Der Flächeninhalt beträgt in Wirklichkeit 259 ha; aus den Ablesungen der Karte ergibt sich eine Fläche von 266 ha.

Lösungen zu „Matt in zwei Zügen"

Jede beider Aufgaben hat eine Lösung:
Aufgabe 1:

	Weiß	Schwarz
1. Zug	Dg7 – g3	a) Kd2 : c1 oder f6 – f5
		b) e3 – e2
		c) Kd2 – e2
2. Zug	a) Dg3 – e1 ╪	
	b) Dg3 – f4 ╪	
	c) Dg3 – g2 ╪	

Aufgabe 2:

	Weiß	Schwarz
1. Zug	Sg6 – e7	a) c6 – c5
		b) d7 – d6 oder d7 – d5
2. Zug	a) Da5 – a1 ╪	
	b) Se7 : c6 ╪	

Mitarbeiter gesucht

Wer sendet uns: Aufgaben (mit Lösungen) für den *alpha*-Wettbewerb, Berichte über die Arbeit in den Arbeitsgemeinschaften, Beiträge für *alpha*-heiter, lustige Begebenheiten aus Unterricht und Mathematik-Zirkel?

Redaktion *alpha*

Lösungen zu alpha-heiter

Nicht im Netz verfitzen

Beweis: Gerade benachbarte Paare von Quadraten auf einem Schachbrett sind entweder beide weiß oder beide schwarz. Wir nehmen an, daß die von uns ausgezeichneten Quadrate beide schwarz sind. Dann läuft die gestellte Aufgabe darauf hinaus, mit 31 Dominosteinen 32 weiße und 30 schwarze Felder des Schachbretts abzudecken. Da man mit jedem Dominostein jedoch immer nur ein weißes und ein schwarzes Quadrat zugleich abdecken kann, gibt es für die gestellte Aufgabe keine Lösung.
Jedes rechteckige Netz von Quadraten läßt sich mit einer schachbrettartigen Musterung versehen. Gemäß den getroffenen Voraussetzungen hat das aus den mn Quadraten bestehende Netz $\frac{mn}{2}$ weiße und ebensoviel schwarze Felder. Da ein Paar von gerade benachbarten Quadraten stets zur gleichen Gruppe gehören und man mit jeder Rechtecktafel nur zwei Quadrate aus verschiedenen Gruppen abdecken kann, ist unsere Behauptung bewiesen.

Rätseleien

Klavier, Übermacht, Umkreisung, Sachte! Vierlinge, Kreisel

Doppelbedeutung

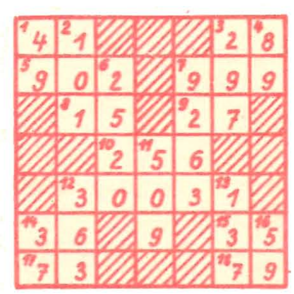
Delta, Operation, Drehung, Element, Kegel, Achse, Ebene, Doppelbruch, Endlich, Rechenstab — DODEKAEDER

Wer sucht mit?

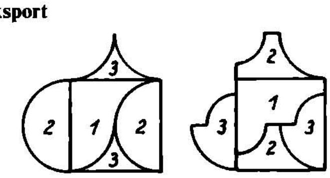
a) Ist die kleinere Zahl durch 6, die größere durch 7 teilbar, so sieht man gleich, daß 600 und 700 ein solches Zahlenpaar ist und weiter, daß die beiden Zahlen um ein gemeinsames Vielfaches von 6 und 7, d.h. um 42 größer oder kleiner sein können, also z.B. 642 und 742 — dies ist das Zahlenpaar, das eine Lösung der Aufgabe darstellt (oder 558 und 658 usw.).
b) Wenn aber die kleinere Zahl durch 7, die größere durch 6 teilbar sein soll, so findet man nach ein wenig Nachdenken, daß $602=7\cdot 86$ und $702=6\cdot 117$ die gesuchten Zahlen sind. 644 und 744 sind den unter a) genannten Zahlenpaaren am nächsten.
Also verkehren auf den Straßen von Lvov Wagenpaare, die ein arithmetisches Geheimnis in sich tragen.

Prof. N. Tschajkovskyj

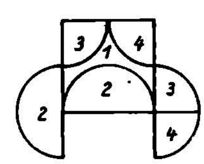
Kreuzzahlenrätsel



Denksport



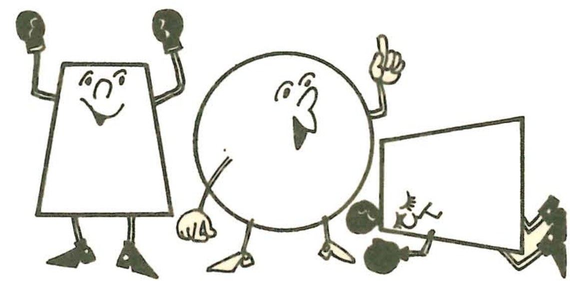
a b



Zahlenrätsel

$$\begin{array}{ccccc} 378 & : & 9 & = & 42 \\ : & & : & & : \\ 18 & : & 3 & = & 6 \\ \hline 21 & : & 3 & = & 7 \end{array}$$

In freien Stunden alpha heiter



... 8 — 9 — 10 ... aus!

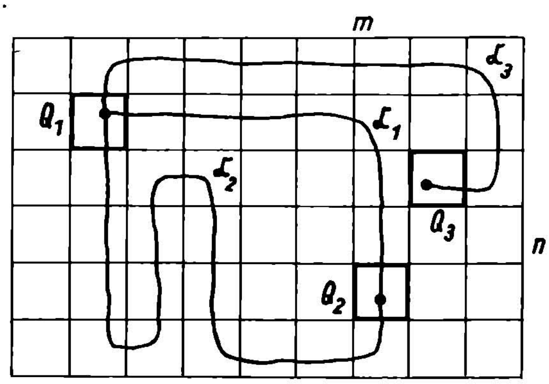
OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Nicht im Netz verfitzen!

Gegeben ist ein rechteckiges Netz von *mn* Quadraten. Dabei soll wenigstens eine der beiden Zahlen *m*, *n* gerade sein.

Wir bezeichnen zwei Quadrate des Netzes als unmittelbar benachbart, wenn sie genau eine Quadratseite gemeinsam haben. Ferner heißen zwei Quadrate des Netzes gerade benachbart, wenn sich von einem Punkt aus dem Inneren des einen Quadrates zu einem inneren Punkt des anderen Quadrates eine Verbindungslinie ziehen läßt, die eine gerade Zahl von Quadratseiten des Netzes schneidet. (Die Verbindungslinie soll keine Knotenpunkte des Netzes treffen.)

Außerdem stehen $\frac{mn}{2} - 1$ kongruente rechteckige Täfelchen von der Art zur Verfügung, daß man mit jedem dieser Täfelchen genau zwei unmittelbar benachbarte Quadrate des Netzes ganz überdecken kann.



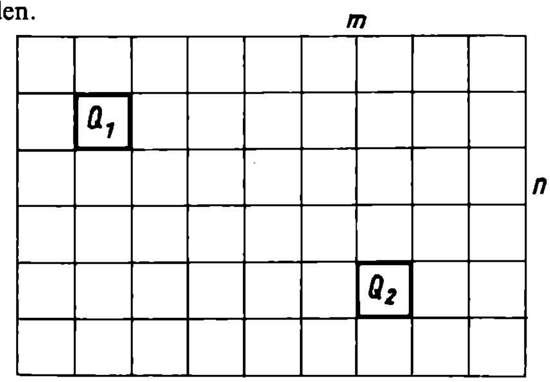
Die Quadrate Q_1 und Q_2 sind gerade benachbart.

Es gilt dann die folgende *Behauptung*:

Für ein Netz von *mn* Quadraten ist keine Überdeckung durch $\frac{mn}{2} - 1$ rechteckige Täfelchen mit der oben vorausgesetzten Eigenschaft in der Weise möglich, daß aus dem Netz zwei gerade benachbarte Quadrate von der Überdeckung ausgeschlossen werden.

Anleitung: Versuche etwa, das Spielfeld eines Schachbretts mit Hilfe von 31 Dominosteinen derart zu überdecken, daß zwei gerade benachbarte Quadrate von der Überdeckung ausgeschlossen werden. Mißerfolge bei diesen Versuchen können auf den allgemeinen Beweisgedanken für die obige Behauptung führen.

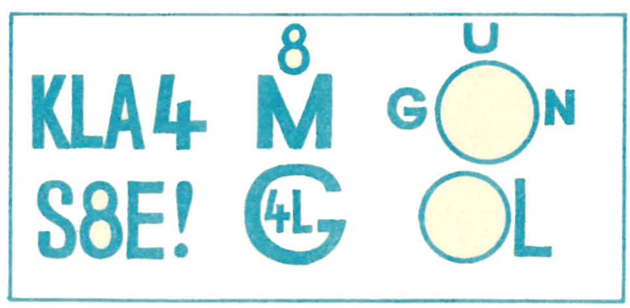
Aufgabe: Versuche, das vorliegende Netz von Quadraten mit 26 rechteckigen Papierstücken von 1 mal 2 cm Größe in der Weise zu überdecken, daß die Quadrate Q_1 und Q_2 von der Überdeckung ausgeschlossen werden.



Die Quadrate Q_1 und Q_3 sind nicht gerade benachbart.

Dr. E. Schröder, TH Dresden

Rätseleien



Ing. H. Decker, Köln

Ungerade Doppelziffern: 11 — 33 — 55 — 77 — 99

Im Leben von *Karl Friedrich Gauß* spielten Doppelziffern eine besondere Rolle!

1777 wurde *Gauß* geboren
1799 Doktorgrad erworben
1833 *Gauß* entwickelt gemeinsam mit *Weber* den ersten elektromagnetischen Telegraphen
1855 starb *Gauß*
11 bedeutende mathematische Werke von *Gauß* wurden veröffentlicht

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Übrigens ...

muß man manchmal mehr überlegen, als man denkt

E. Cz. (aus Eulenspiegel)

Aus Klasse 1 berichtet

Lehrer: Nenne das Gesetz der Addition natürlicher Zahlen!
Schüler: Summand plus Summand gleich Summavit!

Zur Tg. der Math. Ges. Febr. 1969 berichtet

Doppelbedeutung

Die Wörter der folgenden Bedeutung haben in einem anderen Sinn sämtlich etwas mit Mathematik zu tun. Ihre Anfangsbuchstaben ergeben einen geometrischen Körper.

1. Form einer Flußmündung
2. medizinischer Eingriff
3. Bewegung beim Tanzen
4. chemischer Grundstoff
5. hölzernes Zubehör für eine Sportart
6. Teil des Rades
7. Landschaftsform
8. zweifache Verletzung z. B. des Armes
9. Ausruf beim Eintreten eines langersehnten Ereignisses
10. Teil eines Gartengerätes

Zur Erleichterung geben wir die benötigten Silben an: ach – be – bruch – chen – del – dop – dre – e – e – end – gel – hung – ke – le – lich – ment – ne – o – on – pe – pel – ra – re – se – stab – ta – ti.

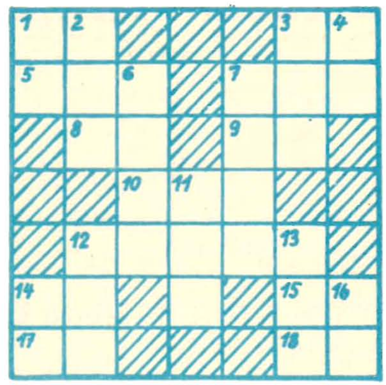
OStR K.-H. Lehmann, V.l.d.V., Berlin

Wer sucht mit?

In der ukrainischen Stadt Lvov verkehren neue, elegante Straßenbahnen. Jeder Zug besteht aus zwei zusammengekoppelten Wagen, die mit dreiziffrigen Zahlen numeriert sind: Die Nummer des ersten Wagens ist um 100 kleiner als die des zweiten. Einmal habe ich bemerkt, daß auf einem Wagenpaar die erste Nummer durch 6, die andere durch 7 teilbar ist. Da fiel mir eine Aufgabe ein: „Es sind alle dreiziffrigen Zahlenpaare zu finden, deren Differenz 100 beträgt und deren eine durch 6, die andere durch 7 teilbar ist. Wer sucht mit?

Prof. Dr. N. Tschaykovskyj, Lvov

Kreuzzahlenrätsel



Waagerecht:

1. Teiler von $(10^5 - 1)$
3. Eine „vollkommene Zahl"
5. Vielfaches von 1. waagerecht
7. Produkt von 9. waagerecht und 14. senkrecht
8. Produkt von 2 Primzahlen
9. Kubikzahl
10. Vierte Potenz einer ganzen Zahl
12. Das um 1 vermehrte Produkt der ersten 6 Primzahlen
14. Quadrat der Quersumme von 8. waagerecht
15. Produkt von 2 Primzahlen
17. Teiler von $(10^4 + 1)$
18. Teiler von $(10^{13} - 1)$

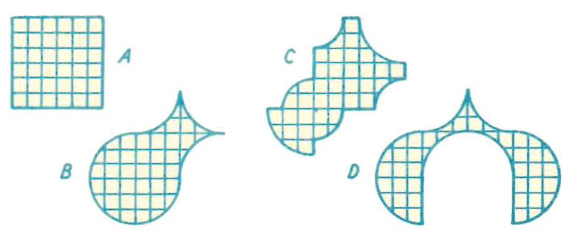
Senkrecht:

1. Quadrat der Quersumme von 12. waagerecht
2. Teiler von $(10^4 - 1)$
3. Vielfaches von 9. waagerecht
4. Primzahl
6. Kleinstes gemeinsames Vielfaches der ganzen Zahlen 1 bis 10
7. Eine um 2 vermehrte Kubikzahl
11. Ein Faktor von 12. waagerecht
12. Vielfaches einer Quadratzahl
13. Teiler von $(10^4 + 1)$
14. Primzahl
16. Teiler von 7. senkrecht (oder: Teiler von 12. waagerecht)

Mathematikfachlehrer F. Sandring, Stendal

Denksport

Gegeben sei die Figur *A*. Zerlege die Figuren *B*, *C* und *D* durch gerade Schnitte so, daß jede dieser Figuren mit *A* zur Deckung gebracht werden kann!



aus: Spiele und Unterhaltungen von A. P. Domerjad

Zahlenrätsel

$$\begin{array}{rcl} ACF : G & = & BE \\ : \quad\;\; : & & : \\ DF : A & = & H \\ \hline ED : A & = & C \end{array}$$

Schüler Ekkehard Skirl, Velten bei Berlin (Kl. 9)

Mathematik-Kalender

März 1970

So 1
Mo 2
Di 3 — * 1845 Georg Cantor. Wirkte in Halle. Schöpfer der Mengenlehre († 6. 1. 1918)
Mi 4
Do 5 — † 1827 Piere Simon Laplace. Lehrte an der Militär-Akademie in Paris (* 28. 3. 1749)
Fr 6
Sa 7

So 8
Mo 9
Di 10
Mi 11 — * 1822 Joseph Bertrand. Wirkte in Paris. Bekannt hauptsächlich als Verfasser von Lehrbüchern.
Do 12
Fr 13 — * 1879 Albert Einstein. Schöpfer der Relativitätstheorie. († 18. 4. 1955)
Sa 14 — * 1864 Josef Kürschák. Wirkte in Budapest. Arbeiten zur Variationsrechnung. Jährlich werden ihm zu Ehren Mathematikwettbewerbe für Schüler in der UVR durchgeführt. († 26. 3. 1933)

So 15 — † 1897 Joseph James Sylvester. Wirkte u. a. in London. Bedeutende Arbeiten zur Theorie d. algebr. Gleichungen, d. Determinanten und Matrizen. (* 3. 9. 1814)
Mo 16
Di 17 — † 1782 Daniel Bernoulli
Mi 18 — * 1796 Jakob Steiner. Wirkte in Berlin. († 1. 4. 1863)
Do 19
Fr 20
Sa 21 — * 1768 Joseph Fourier. Wirkte in Paris. Einer der Begründer der mathematischen Physik. († 16. 5. 1830)

So 22 — Beginn der DDR-Olympiade Mathematik. † 1953 Gustav Herglotz. Wirkte in Leipzig und Göttingen.
Mo 23 — * 1882 Emmy Noether. Wirkte hauptsächlich in Göttingen. († 14. 4. 1935)
Di 24
Mi 25
Do 26 — Ende der DDR-Olympiade Mathematik.
Fr 27 — * 1832 Carl Neumann. Wirkte in Leipzig. (†7. 5. 1925)
Sa 28 — * 1749 Pierre Simon Laplace († 5. 3. 1827)

So 29
Mo 30 — * 1892 Stefan Banach. Wirkte in Lwow. († 31. 8. 1945) † 1559 Adam Ries. Deutscher Rechenmeister. (* um 1492)
Di 31 — * 1596 René Descartes († 11. 2. 1650) † 1727 Isaac Newton (* 4. 1. 1643)

April 1970

Mi 1
Do 2
Fr 3 — † 1900 Joseph Bertrand (* 11. 3. 1822)
Sa 4 — † 1829 Nils Henrik Abel. Lebte in Christiana. Trotz der Kürze seiner Lebenszeit und des Ausbleibens rechtzeitiger Förderung hat er bahnbrechend gewirkt, vor allem auf dem Gebiet der Algebra. (* 25. 8. 1802)

So 5
Mo 6 — † 1528 Albrecht Dürer (* 21. 5. 1471)
Di 7
Mi 8
Do 9 — † 1869 Élie Cartan. Wirkte in Paris. Grundlegende Arbeiten zur Gruppentheorie. († 6. 5. 1951)
Fr 10 — † 1920 Moritz Kantor. Berühmt durch seine Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik (Heidelberg) (* 23. 8. 1829)
Sa 11

So 12 — † 1794 Pierre Dandelin. Wirkte in Frankreich. Beschäftigte sich mit Kegelschnitten. († 15. 2. 1847)
Mo 13
Di 14 — † 1935 Emmy Noether (* 23. 3. 1882) * 1629 Christian Huygens († 8. 7. 1695)
Mi 15 — * 1707 Leonhard Euler († 18. 9. 1783) * 1452 Leonardo da Vinci († 2. 5. 1519)
Do 16
Fr 17
Sa 18 — † 1955 Albert Einstein (* 14. 3. 1879)

So 19 — † 1567 Michael Stifel. Wirkte in Jena (* 1487)
Mo 20 — † 1932 Guiseppe Peano. Wirkte in Torino. Grundlegende Arbeiten zur mathematischen Logik und zur Axiomatik d. nat. Zahlen. (* 27. 8. 1858)
Di 21
Mi 22 — * 1811 Otto Hesse († 4. 8. 1874) * 1887 Harald Bohr († 22. 1. 1951)
Do 23
Fr 24
Sa 25 — * 1849 Felix Klein. Fundamentale Arbeiten in Geometrie, Algebra und Funktionentheorie Konzeption über Geometrie im „Erlanger Programm" niedergelegt. († 22. 6. 1925)

So 26
Mo 27
Di 28
Mi 29 — * 1854 Henri Poincaré. Wirkte in Paris. Bahnbrechende Arbeiten auf versch. Gebieten der Math. († 17. 7. 1912)
Do 30 — * 1777 Carl Friedrich Gauß († 23. 2. 1855) † 1957 Conrad Knopp. Verfasser zahlreicher Lehrbücher (* 22. 3. 1882)

Wissen, wo ...

Eine Anleitung zum Selbststudium

alpha (Zeitschrift alpha)

alpha-Wettbewerb

Ähnlichkeitslehre

Berichte

Berufe

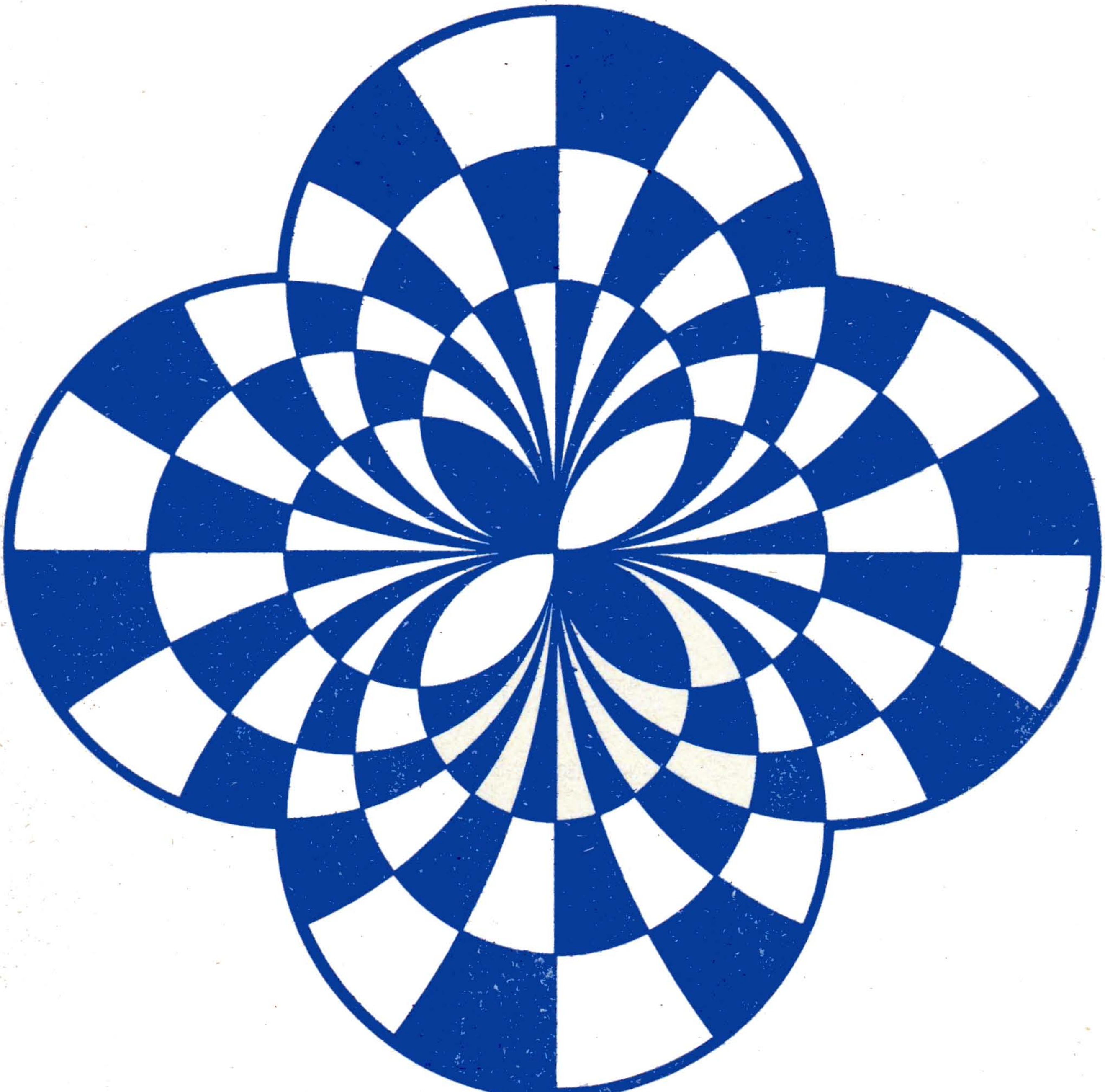
Beweise

Biographien

Geometrie, darstellende

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
4. Jahrgang 1970
Preis 0,50 M
Index 31059

2

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41 Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16 Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Reproduktion W. I. Lenin, Kurzer biographischer Abriß, Dietz Verlag Berlin (S. 25); A. Nitzsche, Erfurt (S. 27); Foto Zentralbild (S. 31); Vignetten: H. Stügelmeier, Berlin (S. 34); aus Frösi-Knobelmagazin (S. 35); Zeichnungen: E. Berger, Döbeln (S. 34/35); Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 27. Januar 1970

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Mathematik in der Familie W. I. Lenins

Wladimir Iljitsch Lenin zeigte in seinem gesamten Leben ein lebhaftes Interesse an der Mathematik. Seit seiner frühesten Jugend befand er sich unter Menschen, die die Mathematik gut kannten und ihn dafür begeisterten. Seine Mutter, *Maria Alexandrowna*[1], bestand im Jahre 1863 erfolgreich das erste Volksschullehrerexamen. Sie war sehr an der Musik interessiert und spielte gut Klavier. Dabei machte sie bereits den fünf- bis sechsjährigen *Lenin* mit einfachen Brüchen bekannt, indem sie ihm ganze und halbe Noten sowie Viertelnoten und andere vorspielte.

Unter der Leitung seines Vaters, *Ilja Nikolajewitsch*[2], beschäftigte sich *Lenin* erstmals ernsthaft mit der Mathematik. Durch ihn erfuhr er von *Lobatschewski.* Sein Vater machte ihn auch mit dem tschuwaschischen[3] Mathematiker *Ochotnikow* und mit dem Mathematiker *Jakowlew* bekannt.

Im Jahre 1853 verteidigte *Ilja Nikolajewitsch* erfolgreich seine Dissertation „Die Methode von Olbers und ihre Anwendung zur Bahnbestimmung eines Kometen von Klinkerfues". Dafür wurde ihm der wissenschaftliche Grad eines Kandidaten der mathematischen Wissenschaften verliehen. *Ilja Nikolajewitsch* lehrte danach etwa 15 Jahre in den Fächern Mathematik und Physik am Adelsinstitut in Pensa und im Knabengymnasium von Nishni-Nowgorod (seit 1932 Gorki); 17 Jahre arbeitete er als Volksschulinspektor. Vor den Augen des jungen Lenin vollzog sich die aufopferungsvolle Bildungsarbeit des Vaters im Simbirsker Gouvernement. Nach zahlreichen Besuchen in tschuwaschischen Schulen hatte *Ilja Nikolajewitsch* regelmäßig Berichte zu verfassen, in denen er auf wesentliche Mängel im damaligen Arithmetikunterricht hinwies, z. B.: Die Schüler „werden nur oberflächlich mit den Längenmaßen bekannt gemacht und können nur schlecht arithmetische Berechnungen im Kopf durchführen; sehr schlecht steht es um die Entwicklung von Fertigkeiten bei den einzelnen Rechentätigkeiten; es existieren unklare Vorstellungen über die ‚Desjatine'[4], sowie allgemein über Flächenmaße; es gibt Lücken in den notwendigen Rechenfertigkeiten." *Ilja Nikolajewitsch* kritisierte, daß einige Lehrer im Arithmetikunterricht „die Schüler das selbständige Lösen von zusammengesetzten Aufgaben nur wenig üben lassen und die Kinder auch nicht an die schriftliche Fixierung des Lösungsweges arithmetischer Aufgaben gewöhnen."

Ilja Nikolajewitsch empfahl, beim Vermitteln der Grundbegriffe der Geometrie von geometrischen Figuren auszugehen, die aus Papier oder Pappe modelliert werden können, damit die Schüler alle räumlichen Begriffe möglichst konkret erlernen können. Er half den Lehrern bei der Auswahl von Lehrbüchern und Aufgabensammlungen; er versorgte sie mit Anschauungsmitteln und mit Geräten.

Familie Uljanow, Foto 1879 (rechts vorn, sitzend: *Wladimir*)

Ein enger Freund der Familie *Uljanow* wurde der Mathematiklehrer *Jakowlew.* Er unterrichtete, wenn man von kleineren Unterbrechungen absieht, von 1868 bis 1922 Mathematik, Logik und Pädagogik.

[1] *Maria Alexandrowna Uljanowna* (1835 bis 1916) stammte aus einer Petersburger Arztfamilie.

[2] *Ilja Nikolajewitsch Uljanow* (1831 bis 1886) war tätig als Pädagoge, Inspektor und Direktor von Volksschulen im Simbirsker Gouvernement.

[3] Die Tschuwaschische ASSR (Autonome Sozialistische Sowjetrepublik) liegt am Mittellauf der Wolga.

[4] Die „Desjatine" ist ein altes russisches Flächenmaß. Die Größe dieses Maßes änderte sich im Laufe der Jahrhunderte und war auch örtlich verschieden. Das am weitesten verbreitete Maß der Desjatine entsprach 1,0925 ha.

Ilja Nikolajewitsch besprach ständig seine Berichte mit *Jakowlew*. *Lenin* hörte mehrmals die hitzigen Gespräche der beiden Lehrer über die Verbesserung des Arithmetikunterrichts, wenn sie von den gemeinsamen Inspektionsreisen durch die Schulen des Gouvernements zurückgekehrt waren.

In dieser Zeit verfolgte der Vater bei seinen Kindern aufmerksam die mathematische Entwicklung, die er durch zusätzliche mathematische Beschäftigungen förderte.

Der ältere Bruder und die jüngere Schwester von *Lenin*, *Alexander* und *Anna*, trieben leidenschaftlich Mathematik. Von den gemeinsamen mathematischen Interessen des Vaters und der beiden Söhne zeugt auch folgender Auszug aus einem Brief *Alexanders*: „Ich schickte Vater die Broschüre ‚Mathematische Sophismen', die er sich sehr wünschte. Ich denke, sie kann auch für *Wolodja* (Rufname für *Wladimir*) sehr nützlich sein, wenn er diese Sophismen selbständig untersucht." *Lenins* Cousin und Freund aus der Kindheit, *N. Weretennikow*, teilte mit ihm das Interesse für Mathematik. Später wurde er Lehrer für die Fächer Mathematik und Physik. Manchmal gab es in Kokuschkino (heute Lenino) zwischen *Lenin* und *Weretennikow* regelrechte „Mathematische Wettstreite", bei denen die Aufgaben vom Vater in einer faßlichen und verständlichen Form gestellt wurden. *Ilja Nikolajewitsch* benutzte bei seinem Sohn das Dorf, den Wald, den Fluß, das Feld sowie das ganze bäuerliche Leben zur Entwicklung der Fähigkeit, das tägliche Leben durch eine „mathematische Brille" zu sehen, wie *N. K. Krupskaja*[5] es einmal formulierte.

Während sich *Jakowlew* mit *Lenin* unterhielt, lehrte er ihn das Zählen, stellte einfache Scherzaufgaben und vertrieb die Zeit mit solchen Sätzen wie „Ein Fisch und ein halber Fisch kosten anderthalb Kopeken. Wie teuer sind drei Fische?"

Später erinnerte sich *Jakowlew*: „Vom Vater erbte *Wladimir* unter anderem auch die mathematische Begabung."

Lenin war der beste Schüler in seiner Klasse; besonders erfolgreich war er in Mathematik.

M. F. Kusnezow, der mit *Lenin* dieselbe Klasse besuchte, erzählte später, daß es *Lenin* liebte, sich mit mathematischen Problemen zu beschäftigen. Mit Vergnügen half er seinen Klassenkameraden und konnte ohne Schwierigkeiten Aufgaben aus der Aufgabensammlung für die Reifeprüfung lösen. Interessant ist auch noch folgende Stelle aus den Erinnerungen *Kusnezows*: „Auf Initiative von *Wladimir Iljitsch* entstand ein Mathematikzirkel, der eine erfolgreiche Arbeit leistete. Unser Mathematiklehrer *Fedotschenko* verstand es nicht, uns durch seine passive Unterrichtsmethode für sein Fach zu interessieren. Er handelte eine Theorie ab, ohne auch entsprechende Aufgaben lösen zu lassen. Unter der Leitung *Wolodjas* wurde eine große Anzahl schwieriger Aufgaben gelöst."

Lenin liebte es, seinen Schulkameraden untypische und etwas ausgefallene Aufgaben zu stellen. Er erfand sie selbst oder suchte sie aus den Büchern seines Vaters zusammen. Seine Aufgaben werden in den genannten Erinnerungen als interessant bezeichnet.

Solche Aufgaben findet man heute vom Aufbau her in Aufgabensammlungen zum Geometrieunterricht. In jener Zeit waren sie aber den Kindern unbekannt. Interessant ist das folgende Beispiel, das *Weretennikow* anführt:

„*Wolodja* wies ... darauf hin, wie man das Quadrieren einer auf 5 endenden Zahl vereinfachen kann. Er gab zwei Beispiele, überließ es aber mir selbst, diese Regel abzuleiten und allgemein zu beweisen:

(1) $65^2 = 6 \cdot 7 \cdot 100 + 25;$

(2) $105^2 = 10 \cdot 11 \cdot 100 + 25.$

Heute kann man diese Überlegungen in einem elementaren Lehrbuch finden. Damals waren sie nicht so verbreitet. Wenn ich sie anführe, so deshalb, weil an unserem Gymnasium mit ihnen große Erfolge errungen wurden."

Lenin hatte nicht nur vorzügliche Kenntnisse auf dem Gebiet der Mathematik. Er beschäftigte sich nicht nur begeistert mit ihr. Er zeigte auch ein ständiges Interesse für Lehrpläne in Mathematik. Er sorgte dafür, daß Lehrbücher ausgearbeitet wurden und empfahl die Verbesserung und Vervollkommnung der Lehrmethoden. In ihren Erinnerungen beschreibt *Krupskaja*, wie sich *Lenin* einmal mit Schülern unterhielt. Er fragte sie, was sie in der Schule machen. „Was hattet ihr in der ersten Stunde?" — „Arithmetik. Wir behandelten die Multiplikation von Dezimalbrüchen." „Und danach?", fragte *Lenin* weiter. Er fragte solange, bis ihm die Schüler auch über die letzte Unterrichtsstunde des Tages erzählten. Auf der Grundlage solcher Gespräche bildete er sich eine Meinung darüber, welche Probleme es in der neuen sowjetischen Schule gibt. Als Zeugnis dafür, daß sich *Lenin* auch beständig und aufmerksam um die Verbesserung der Lehrpläne und der Schulbücher für Mathematik kümmerte, kann auch die Tatsache angesehen werden, daß in seiner persönlichen Bibliothek außer den ersten Auflagen der Mathematiklehrbücher auch die berichtigten und überarbeiteten Auflagen standen. Lenins mathematischen Studien zeugen von jenem Niveau der harmonischen Entwicklung der Persönlichkeit, das Bestandteil des Antlitzes der heutigen und der zukünftigen Generationen ist und sein wird.

G. N. Wolkow, (gekürzt aus: Matematik w schkole)

[5] *Nadeshda Konstantinowna Krupskaja* (1869 bis 1939) war die Lebens- und Kampfgefährtin *Lenins*.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. phil. et rer. nat. habil.

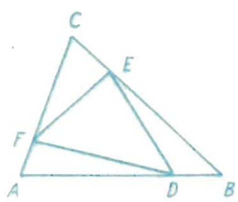
Theo Glocke

1. Prorektor der Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor Neubauer" Erfurt/Mühlhausen

▲ 509 Auf den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ des Dreiecks ΔABC seien die Punkte D, E, F so konstruiert, daß gilt:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}}.$$

Zeige: Der Schwerpunkt des Dreiecks ΔDEF fällt mit dem Schwerpunkt des Dreiecks ΔABC zusammen.



Berufsbild: Diplomlehrer für Mathematik

Liebe Freunde!

Wir möchten Euch den Beruf eines *Diplomlehrers für Mathematik* (und ein Zweitfach) an der allgemeinbildenden Oberschule vorstellen.

Es gehört wohl zu den schönsten und interessantesten Aufgaben, unsere Jugend auf die Meisterung der Wissenschaft und Technik von morgen vorzubereiten. Neuartige Energiequellen, vollautomatische Betriebe, Weltraumstationen gewaltigen Ausmaßes u.a.m. werden unser sozialistisches Leben im Jahr 2000 bestimmen. Wie bekannt, ist gerade die Mathematik eine entscheidende Grundlage für solch gewaltige Leistungen. Sie findet in zunehmendem Maße in allen Bereichen von Wissenschaft und Technik Anwendung und ist schon heute zu einer unmittelbaren Produktivkraft geworden. Im Zuge unseres weiteren sozialistischen Aufbaues und der technischen Revolution brauchen wir deshalb eine Vielzahl von Lehrern gerade für Mathematik, die ihre Aufgabe darin sehen, bei ihren Schülern das Interesse an der Mathematik und die Liebe zur Mathematik zu wecken, und sie zu lebensfrohen und tüchtigen Menschen unserer sozialistischen Gemeinschaft zu erziehen.

Wenn Ihr, liebe Freunde, Euch heute begeistert der Mathematik widmet, so verdankt Ihr das nicht zuletzt Eurem Mathematiklehrer. In den meisten Fällen war er es, der Euch den Weg zu dieser Wissenschaft wies und ebnete, der Eure Begabung entdeckte und förderte. Bei ihm habt Ihr gelernt, Eure Umwelt mathematisch zu erfassen, um sie dadurch besser verstehen und verändern zu können. Der Mathematiklehrer ist es, der durch seine Arbeit wesentliche Voraussetzungen für ein Studium mathematisch-naturwissenschaftlicher, technischer und ökonomischer Disziplinen schafft. Er ist es, der seine Schüler befähigt, daß sie in ihrer künftigen verantwortungsvollen Tätigkeit in der Gesellschaft Probleme und Zusammenhänge erkennen, deren Lösung die Anwendung mathematischer Gesetzmäßigkeiten erfordert. Gerade in den nächsten Jahren und Jahrzehnten steht vor dem Mathematiklehrer eine vielseitige, interessante und schöne Aufgabe, die inhaltliche und methodische Neugestaltung des Mathematikunterrichts entsprechend den Forderungen unserer sozialistischen Praxis, die Realisierung der neuen Lehrpläne und die Mitarbeit an ihrer ständigen Verbesserung.

Die Ausbildung von Diplomlehrern für die allgemeinbildende Oberschule erstreckt sich über 4 Jahre. Sie umfaßt neben der Ausbildung im ersten und zweiten Unterrichtsfach auch Marxismus/Leninismus, Pädagogik/Psychologie, Methodik, Sport und einige andere Fächer. Das Studium gliedert sich in Grund- und Fachstudium. Das Grundstudium umfaßt die beiden ersten Studienjahre. In den Hauptdisziplinen der Mathematik, so u. a. in Analysis, Algebra und Arithmetik, Geometrie und in numerischer Mathematik, wird ein gut fundiertes Grundlagenwissen vermittelt, und es werden spezifische Arbeitsmethoden und Verfahren der Mathematik deutlich gemacht. Das Grundstudium soll wesentliche Voraussetzungen für die Erteilung eines wissenschaftlich einwandfreien Mathematikunterrichtes schaffen.

Das Fachstudium, das im dritten und vierten Studienjahr absolviert wird, gibt die Möglichkeit, sich in einer spezifischen Disziplin der Mathematik vertiefte Kenntnisse zu erarbeiten und aktuelle Forschungsprobleme kennenzulernen, vielleicht sogar an ihrer Lösung mitzuarbeiten.

In den letzten beiden Studienjahren erhält der Student auch eine fachmethodische Ausbildung, die ihn in Verbindung mit den anderen Ausbildungsdisziplinen befähigen soll, die heutigen und die künftigen Anforderungen an einen niveauvollen wissenschaftlich einwandfreien modernen Mathematikunterricht zu erfüllen.

R. Mildner

1953 wurden wie in einigen anderen Städten auch in Erfurt und Mühlhausen Pädagogische Institute gegründet. Sie bildeten in zweijährigem, später in drei- und vierjährigem Studium Fachlehrer für die Klassen 5 bis 10 der allgemeinbildenden Oberschulen aus. Auf Grund des hohen Niveaus der Ausbildung, der Entwicklung der wissenschaftlichen Qualifikation des Lehrkörpers und der materiell-technischen Voraussetzungen des Studiums konnte am 1. 9. 1969 dem Pädagogischen Institut Erfurt der Status einer Pädagogischen Hochschule verliehen und das Pädagogische Institut Mühlhausen mit der neuen Hochschule vereinigt werden.

In diesem Studienjahr erhalten hier ungefähr 700 künftige Lehrer eine Ausbildung im Fach Mathematik.

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

Teil 8

Als Ergänzung der im vorigen Teil behandelten Gleitkommadarstellung einer Zahl sollen jetzt noch einige Regeln — wie bereits angekündigt — aufgeschrieben werden.

Multiplikation und Division

Zwei Gleitkommazahlen werden multipliziert (dividiert), indem man die Mantissen multipliziert (dividiert) und die Exponenten addiert (subtrahiert).

Geht eine Division nicht ganzzahlig auf, so rechnet der Automat über das Komma hinaus bis zu einer festgesetzten Dezimalstelle weiter, wobei jeder Überlauf über das Maschinenkomma eine Verschiebung nach links, verbunden mit einer Verminderung des Exponenten um 1, nach sich zieht. Bei der Divisionsaufgabe

12 : 7 = 1,714 würden also die Teilergebnisse, jedes wieder als Ziffernfolge geschrieben, der Reihe nach so aussehen:

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0 \\ 1\ 7\ 0\ \bar{1} \\ 1\ 7\ 1\ 0\ \bar{2} \\ 1\ 7\ 1\ 4\ 0\ \bar{3}\,. \end{array}$$

Addition und Subtraktion:

Zwei Gleitkommazahlen werden addiert (subtrahiert), indem man zunächst gleiche Exponenten schafft (Gleichnamigmachen): Man vermindert den größeren Exponenten und verschiebt gleichzeitig die Mantisse um die nötige Stellenzahl nach links. Dann werden die Mantissen addiert (subtrahiert), und der Exponent wird beibehalten. Beispiel:

$$\begin{array}{rl} 2\,6\,3\,6\,0\,3 + 9\,7\,8\,1\,5\,4\,7\,0\,\bar{2} & \\ \downarrow & \text{Verschiebung um 5 Stellen} \\ 2\,6\,3\,6\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,\bar{2} & \\ +\quad 9\,7\,8\,1\,5\,4\,7\,0\,\bar{2} & \\ = 2\,7\,3\,3\,8\,1\,5\,4\,7\,0\,\bar{2}\,. & \end{array}$$

Bei allen Rechenoperationen müssen noch

1. die Vorzeichen berücksichtigt,
2. eventuell nötige Rundungen durchgeführt werden.

Darauf wollen wir aber nicht weiter eingehen.

2. Schaltfunktionen — Funktionsschaltungen

2.0. Vorbetrachtung

Aus dem Mathematikunterricht ist uns der *Funktionsbegriff* bekannt. Wir denken dabei an Funktionen wie $y=3x+4$, $y=6x^2$, die älteren Schüler vielleicht auch an $y=\sin x$ oder $y=\log x$ usw. In der Rechentechnik kommen neben diesen Funktionen noch andere vor. Um diese näher kennenzulernen, sollen zunächst einige Merkmale aufgezählt werden, durch die sich diese Funktionen von denen des Schulunterrichts unterscheiden:

1. Während bei den schulischen Funktionen sowohl die unabhängige Veränderliche (unabhängige Variable) x als auch die abhängige Variable y gewöhnlich unendlich viele Werte annehmen können, ist bei den hier zu besprechenden Funktionen jede Variable nur zweier Werte fähig, nämlich O und L. Also: entweder $x=\mathrm{O}$ oder $x=\mathrm{L}$ und andrerseits entweder $y=\mathrm{O}$ oder $y=\mathrm{L}$.
2. In der Schule werden meistens nur Funktionen von *einer* (unabhängigen) Veränderlichen betrachtet, allgemein mit $y=f(x)$ (lies: $y=f$ von x) bezeichnet. Jetzt treten auch Funktionen mit zwei und mehr unabhängigen Variablen auf, also $y=f(x_1, x_2)$ beziehungsweise $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
3. Die Funktionen des Schulunterrichts werden — wie bei den obigen Beispielen — im allgemeinen durch eine Funktionsgleichung dargestellt, wobei der Funktionswert y aus dem jeweiligen Wert der unabhängigen Variablen mit Hilfe von arithmetischen Operationen berechnet wird. Jetzt werden wir Funktionen durch *Tabellen* definieren.

2.1. Konjunktion, Diskonjunktion und Negation

Die in diesem und in den nächsten Abschnitten beschriebenen Funktionen heißen *Schaltfunktionen* oder *logistische Funktionen*. Eine dieser Funktionen haben wir bereits im Abschnitt 1.4. kennengelernt, und zwar in Form des dualen Einmaleins:

$$\mathrm{O}\cdot\mathrm{O}=\mathrm{O} \qquad \mathrm{O}\cdot\mathrm{L}=\mathrm{L}\cdot\mathrm{O}=\mathrm{O} \qquad \mathrm{L}\cdot\mathrm{L}=\mathrm{L}\,.$$

Wie man sieht, ist es eine Funktion mit den oben beschriebenen Merkmalen, nämlich eine Funktion von zwei Veränderlichen x_1 und x_2, die durch die Tabelle

x_1	O	O	L	L
x_2	O	L	O	L
y	O	O	O	L

definiert werden kann. Die Veränderlichen dieser Schaltfunktion sind die Multiplikandenziffer x_1 und die Multiplikatorziffer x_2. Wir können auch schreiben:

$f(x_1, x_2)=\mathrm{L}$, wenn $x_1=\mathrm{L}$ *und* $x_2=\mathrm{L}$, sonst O.

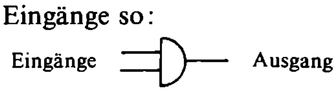
Wir nennen diese Funktion *Konjunktion*, auf deutsch UND-Funktion. Die UND-Funktion läßt sich auf drei und mehr unabhängige Variable ausdehnen. Allgemein definieren wir:

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\mathrm{L}$, wenn $x_1=x_2=\ldots=x_n=\mathrm{L}$, sonst O.

Wir verwenden für die Konjunktion auch das Zeichen $\wedge$, schreiben also zum Beispiel $\mathrm{O}\wedge\mathrm{L}=\mathrm{O}$.

Der durch eine Schaltfunktion dargestellte theoretische Sachverhalt muß nun im Automaten praktisch realisiert werden. Dies geschieht durch eine geeignete Verdrahtung von Schaltelementen zu einer sogenannten Funktionsschaltung. Woraus diese im einzelnen besteht (Relais, Röhren, Transistoren, Kondensatoren, Spulen, Ferritkerne ... — je nach Automatentyp verschieden) und welche elektrischen, magnetischen oder mechanischen Vorgänge sich darin abspielen, möge die Physiker und Techniker interessieren. Uns genügt folgendes:

Jede Funktionsschaltung hat einen oder mehrere *Eingänge* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ für die unabhängigen Variablen und genau einen *Ausgang* A für die abhängige Variable, also für den Funktionswert. Eingänge und Ausgang sind die bereits besprochenen bistabilen Schaltelemente, deren Zustände (Wertbelegungen) O und L man sich etwa durch zwei verschiedene Spannungen — zum Beispiel L positiv und O negativ — realisiert denken kann. Die Konjunktionsschaltung, auch UND-Glied genannt, symbolisieren wir für zwei Eingänge so:



Den mathematischen Sachverhalt schreiben wir

$$A = E_1 \wedge E_2$$

oder mit den anderen Bezeichnungen

$$y = x_1 \wedge x_2 \ .$$

Eine weitere grundlegende Schaltfunktion ist die *Disjunktion*, auch ODER-Funktion genannt. Zeichen: $\vee$.

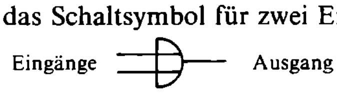
Wir tabellieren sie für zwei Variable:

x_1	O	O	L	L
x_2	O	L	O	L
$y = x_1 x_2$	O	L	L	L.

Es ist also diesmal $f(x_1, x_2) = \mathrm{L}$, wenn $x_1 = \mathrm{L}$ oder* $x_2 = \mathrm{L}$, sonst O, allgemein:

$f(x_1, x_2 \ldots c\, x_n) = \mathrm{L}$, wenn ein $x_i = \mathrm{L}$ existiert, sonst O.

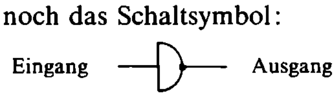
Hier das Schaltsymbol für zwei Eingänge:



Als drittes führen wir die *Negation*, auch NEIN-Funktion genannt, ein. Es ist eine Funktion von nur einer Veränderlichen. Sie kehrt jeden Wert in den anderen um. Wir kennzeichnen diese Funktion durch einen Querstrich, also:

x	O	L
$y = \bar{x}$	L	O

Hier noch das Schaltsymbol:



J. Frormann

* In der Mathematik unterscheidet man zwischen dem einfachen *oder*, bei dem auch beide Bedingungen zugleich erfüllt sein dürfen, und dem strengeren *entweder — oder*, wo immer nur genau eines gelten soll. Hier ist es das einfache *oder*.

Rechnen mit Resten

Teil 6

▲ B 18 Zu bestimmen ist $z = \sqrt[3]{35\,287\,552}$. Zunächst sehen wir, daß es sich bei z um eine dreistellige Zahl handeln muß, weil der Radikand zwischen $100^3 = 1\,000\,000$ und $1\,000^3$ liegt. Die letzte Ziffer von z muß 8 sein, und die erste ist offensichtlich 3 wegen $3^3 = 27 < 35 < 64 = 4^3$.

Die Elferreste benutzen wir nun, um die mittlere Ziffer zu bestimmen. Schreiben wir für diese noch zu ermittelnde Ziffer zunächst x, so würde die Darstellung der Zahl z im Dezimalsystem lauten 3×8. Dafür ergäbe sich der Elferrest $11 - x$. Der Elferrest des Radikanden ist aber 3 wegen

$(2+5+8+5) - (5+7+2+3) = 3$, und dieser Rest ist nach unserer Tabelle die dritte Potenz des Restes 9. Also muß auch die gesuchte Zahl $3x8$ bei Division durch 11 den Rest 9 lassen:

$11 - x = 9$, also $x = 2$. Demzufolge ist $\underline{\underline{z = 328}}$.

Es liegt auf der Hand, daß all diese Rechnungen ohne Schwierigkeiten im Kopf auszuführen sind — bis auf die Ermittlung des Elferrestes des Radikanden. Aber das Publikum gestattet uns gewiß, den Radikanden zu notieren — schließlich fehlt uns das phänomenale Gedächtnis der berufsmäßigen Rechenkünstler. Pech haben wir allerdings mit unserer Vorführung, wenn das Publikum, das die Aufgaben stellt, sich bei der Berechnung der Kubikzahlen oder fünften Potenzen verrechnet hat. Peinlich ist es, wenn man dann beispielsweise dazu kommt, für

$z = \sqrt[3]{423\,473\,625}$ anzugeben 735, obwohl doch z eine Irrationalzahl ist, beginnend mit 750,94 .... Der Aufgabensteller wollte sicherlich $\sqrt[3]{413\,493\,625} = 745$ bestimmen lassen. Man empfehle daher dem Publikum, vor Stellen der Aufgabe Neuner- und Elferprobe anzuwenden, um eventuelle Rechenfehler vorher aufzudecken. Zum Abschluß noch eine Aufgabe, mit der man sich auf das erste „öffentliche Auftreten" präparieren kann:

▲ A 12 Man versuche, folgende Wurzeln im Kopf zu bestimmen: $a = \sqrt[3]{39\,304}$ $\quad c = \sqrt[3]{205\,962\,976}$

$b = \sqrt[3]{493\,039}$ $\quad d = \sqrt[3]{99\,252\,847}$.

Weitere drei Aufgaben mit Lösungen sowie auch die Lösungen zu den anderen in dieser Artikelserie gestellten Aufgaben findet der Leser im nächsten Heft.

G. Lorenz

Wie löst man eine Konstruktionsaufgabe?

Bei mathematischen Wettbewerben findet man oft Aufgaben, bei denen die Konstruktion einer geometrischen Figur aus gegebenen Stücken unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal verlangt wird. Im folgenden soll an dem Beispiel der von vielen Teilnehmern als recht schwer lösbar bezeichneten Aufgabe 6, Olympiadeklasse 10, VII. OJM, 3. Stufe, gezeigt werden, wie man etwa an die Lösung eines solchen Problems herangehen kann und welche Schritte zu einer vollständigen und exakten Lösung gehören.

Die Aufgabe lautet:

6. a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_c - h_b = 3$ cm; $b - c = 3{,}5$ cm und $a = 8$ cm! Dabei sei h_c die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe und a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC und c die der Seite AB und es sei $a < b$.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Man beginnt am besten mit einer Planfigur, die nach Möglichkeit die gegebenen Stücke enthalten soll. Hierbei handelt es sich noch um keine Konstruktion, doch muß man bestimmte Besonderheiten der Aufgabe beachten. So muß in unserem Falle z. B. $h_c > h_b$ und $b > c$ sein. Außerdem ist wegen $a < b$ der $\sphericalangle CAB$ spitz. Damit erhält man etwa folgendes Bild:

Abb. 1

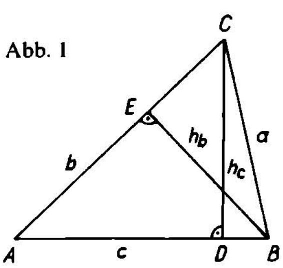
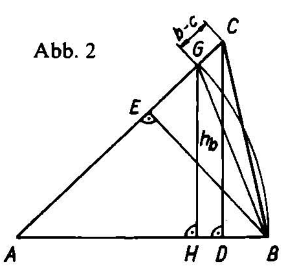


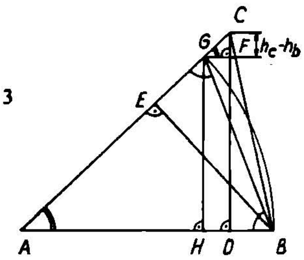
Abb. 2



In dieser Planfigur ist nur a gegeben. Die Differenzen $b - c$ bzw. $h_c - h_b$ sind nicht enthalten. Es kommt also jetzt darauf an, solche Hilfslinien einzuzeichnen, daß man ein Teildreieck mit den gegebenen Stücken erhält. Es liegt nun nahe, von A aus auf AC die Strecke AB abzutragen. Wegen $\overline{AB} < \overline{AC}$ liegt der Endpunkt G zwischen A und C. Laut Konstruktion ist also $\overline{AG} = \overline{AB} = c$. Damit ist aber ΔABG gleichschenklig und das von G auf AB gefällte Lot (mit dem Fußpunkt H) hat die Länge h_b.

Es fehlt uns jetzt nur noch eine Strecke von der Länge $h_c - h_b$. Man erhält sie leicht, indem man von G das Lot auf CD (Fußpunkt sei F) fällt. Damit ist aber ein Teildreieck gefunden, nämlich ΔCGF, das sich aus zwei Seiten und dem rechten Winkel bei F eindeutig konstruieren läßt. Gleichzeitig haben wir mit $\sphericalangle CGF$ einen Winkel erhalten, der genau so groß ist wie $\sphericalangle CAB$. Es gilt also: $\sphericalangle CGF = \sphericalangle CAB$*.

Abb. 3



Nun suchen wir nach einer Konstruktionsmöglichkeit für den Punkt B. Er liegt auf dem Kreis mit a um Punkt C. Es fehlt aber noch eine zweite Angabe. Ein Blick auf die Figur zeigt, daß er außerdem auf der Geraden durch G und B liegen muß. Für diese Gerade läßt sich aber die Richtung konstruieren, denn offensichtlich ist GB Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle FGA$. Jetzt können wir den 1. Teil der Lösung formulieren:

(I) Angenommen, ΔABC sei ein Dreieck der geforderten Art (Abb. 3) mit $\overline{CD} = h_c$ und $\overline{BE} = h_b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ und $\overline{AC} = b$. Auf AC trage man von A aus c mit dem Endpunkt G ab. Dann ist ΔABG gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{AG} = c$ (1) und

$\overline{\sphericalangle ABG} = \overline{\sphericalangle AGB} = R - \frac{1}{2} \sphericalangle CAB$ und es gilt:

$\overline{CG} = b - c$.

Das von G auf AB gefällte Lot schneide AB in H. Dann gilt: $\overline{GH} = \overline{BE} = h_b$.

Das von G auf CD gefällte Lot schneide CD in F. Dann gilt: $\overline{CF} = h_c - h_b$ ($HDFG$ ist ein Rechteck) und $\sphericalangle CGF = \sphericalangle CAB = \alpha$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen. Da ferner $\sphericalangle FGA = 180° - \alpha$ ist, ist GB Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle FGA$.

Das ist der erste Teil unserer Lösung; die *Analyse des Problems*. Nun folgt der zweite Teil, die *Konstruktionsbeschreibung*. Sie beginnt mit einer wichtigen Feststellung. Wir sind natürlich nicht in der Lage, sämtliche Konstruktionsmöglichkeiten zu analysieren, wir können aber feststellen, daß sich unser gesuchtes Dreieck nur dann konstruieren läßt, wenn das mit Hilfe unserer Konstruktionsbeschreibung möglich ist. Damit ist nicht gesagt, daß es nicht auch

* $\sphericalangle ABC$ bedeutet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

anders ginge. Wir sind aber sicher, daß es überhaupt keine Konstruktion gibt, wenn es auf die angegebene Art nicht geht. Darum formulieren wir:

„(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck ΔABC höchstens dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Das Teildreieck ΔFGC wird aus $b-c$, h_c-h_b und dem rechten Winkel bei F konstruiert, und das Teildreieck ΔCGB danach aus a, $b-c$ und

$\overline{\sphericalangle CGB} = \overline{\sphericalangle CGF} + \frac{1}{2}\overline{\sphericalangle FGA}$: (Abb. 4)

Man zeichnet $\overline{CF} = h_c - h_b$. Punkt G liegt:

1. Auf dem Kreisbogen mit $b-c$ um C,
2. auf der Senkrechten, errichtet auf CF in F.

Punkt B liegt:

1. Auf dem Kreisbogen mit a um C,
2. auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle G_1GF$, wobei G_1 ein Punkt auf der Verlängerung von CG über G hinaus ist. (Der Punkt A ist ja noch nicht konstruiert.)

Punkt A liegt:

1. auf der Verlängerung von CG über G hinaus,
2. auf der Parallelen durch B zu GF."

Damit ist die Konstruktionsbeschreibung gegeben. Nun muß der *Beweis* geführt werden, daß ein so konstruiertes Dreieck ΔABC auch wirklich die gegebenen Stücke enthält. Es folgt also der dritte Teil der Lösung:

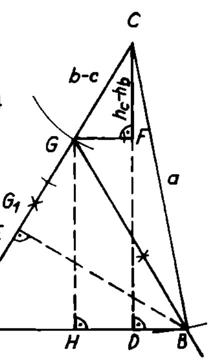


Abb. 4

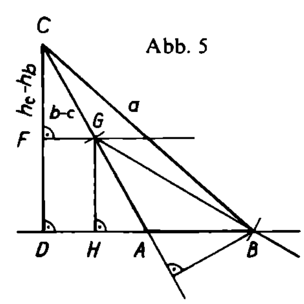


Abb. 5

(III) Weiter gilt: Wird ein Dreieck ΔABC durch diese Konstruktion gewonnen, so entspricht es den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion ist $\overline{CB} = a$. Ferner ist $\sphericalangle AGB = \sphericalangle BGF$ (nach Konstruktion) $= \sphericalangle ABG$ (Wechselwinkel), also ΔABG gleichschenklig mit (1); daher ist $\overline{CG} = b - c$. Aus dem gleichen Grunde ist $\overline{BE} = \overline{GH} = h_b$. Das Viereck $GHDF$ ist nach Konstruktion ein Rechteck, und daher ist auch $\overline{GH} = \overline{FD} = h_b$. Also ist $\overline{CF} = h_c - h_b$.

Als letzter Teil unserer Lösung muß schließlich noch untersucht werden, ob mit den gegebenen Größen die Konstruktion durchführbar ist, ob sie ein eindeutiges Ergebnis liefert bzw. welche Bedingungen bei den gegebenen Stücken eingehalten werden müssen. Da in unserem Falle die einzelnen Stücke auch zahlenmäßig gegeben wurden, ist die *Diskussion der Lösung* verhältnismäßig einfach. Wir schreiben:

(IV) Durch die gegebenen Stücke ist das Dreieck ΔABC eindeutig (bis auf Kongruenz) bestimmt, da die gegebenen Stücke die Bedingungen $b-c > h_c - h_b$ und $a > b - c$ erfüllen. Ist (mindestens) eine dieser Bedingungen verletzt, so existiert kein Dreieck ΔABC, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.*

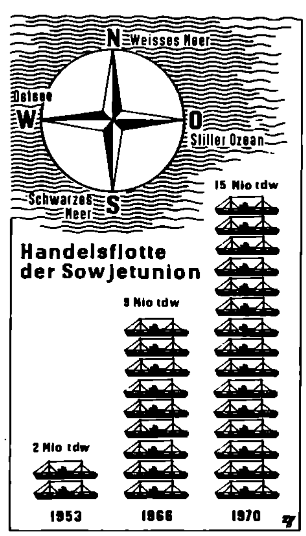
Damit ist die vollständige Lösung der Aufgabe gefunden. Man sieht, daß man auch schwierige Probleme lösen kann, wenn man systematisch herangeht und konsequent Schritt für Schritt durchdenkt. Den prinzipiellen Aufbau der hier dargelegten Lösung wollen wir uns einprägen:

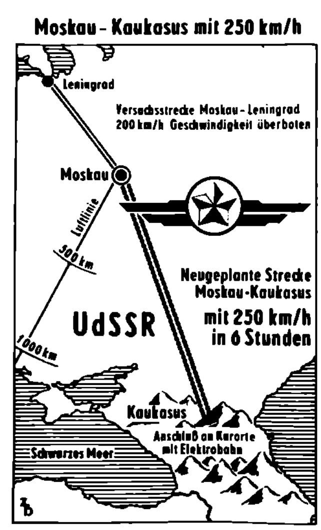
1. Schritt: Analyse (Skizze, Bezeichnungen, Hilfslinien)
2. Schritt: Konstruktion mit Beschreibung
3. Schritt: Beweis
4. Schritt: Diskussion (Lösbarkeit, Eindeutigkeit).

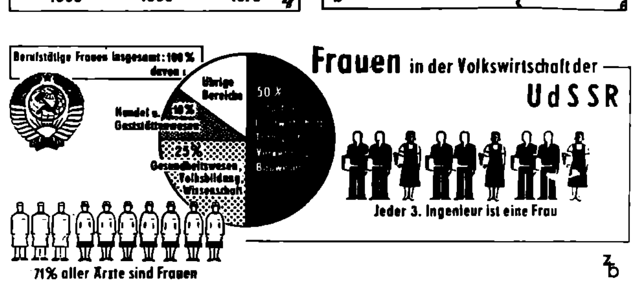
Das kann uns bei der Lösung entsprechender Aufgaben sehr nützlich sein. *H. Titze*

* Verzichtet man auf die Bedingung $a < b$, dann lassen sich mit den gegebenen Stücken zwei verschiedene Dreiecke (mit $\sphericalangle CAB$ spitz bzw. $\sphericalangle CAB$ stumpf) konstruieren. Die Überlegungen laufen dabei analog (Abb. 5).

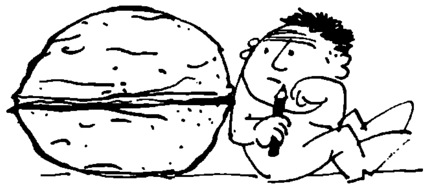
Lenins Vermächtnis wird erfüllt







Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 4. Juli 1970

5 ▲ 509 Ein Würfel wird so in kleinere Würfel zerschnitten, daß die Kantenlänge jedes kleineren Würfels den vierten Teil der Kantenlänge des größeren Würfels beträgt. Wieviel kleinere Würfel erhält man aus dem großen Würfel? Vergleiche die Summe der Oberflächen aller kleinen Würfel mit der Oberfläche des großen Würfels! *P.*

5 ▲ 510 Addiert man die ganzen Zahlen, die das Lebensalter eines Vaters und dessen Sohnes angeben, so erhält man 41. Addiert man hingegen die des Vaters und des Großvaters, so erhält man 96. Addiert man schließlich alle drei Zahlen, so erhält man 100. Wie alt ist jeder? *P.*

W 5 ■ 511 Hans hat beim Einkauf von Schreibheften 2,55 M ausgegeben. Er hat nur Hefte zum gleichen Preis gekauft. Wieviel Hefte können es gewesen sein, und wieviel Pfennig hat ein Heft gekostet, wenn es nur Hefte gibt, die mehr als 4 Pf und weniger als 20 Pf das Stück kosten? *P.*

W 5 ■ 512 Auf einem Campingplatz haben insgesamt 140 Personen ihre Zelte aufgebaut. Unter diesen Erholungssuchenden sind 38 Erwachsene mehr als Kinder und 7 Männer mehr als Frauen. Wieviel Frauen, Männer und Kinder waren es? *Sch.*

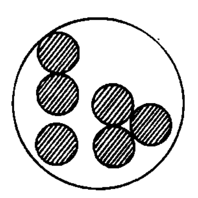
6 ▲ 513 Es sind alle natürlichen Zahlen n anzugeben, für die die Zahl $z=\frac{n+17}{n-3}$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist. *Sch.*

6 ▲ 514 In einem Dreieck ABC mit den Winkeln α, β und γ sind die drei Winkelhalbierenden $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ eingezeichnet. In A wurde auf $\overline{AD}$, in B auf $\overline{BE}$ und in C auf $\overline{CF}$ jeweils die Senkrechte errichtet. Diese drei Senkrechten bestimmen ein Dreieck $A'B'C'$.
Die Winkel α', β' und γ' des Dreiecks $A'B'C'$ sind formelmäßig durch die Winkel α, β und γ des Dreiecks ABC auszudrücken! *T.*

W 6 ■ 515 An einer Geburtstagsfeier nahmen genau sieben Ehepaare teil. Die Nachnamen der Männer waren: Anders, Bauer, Conrad, Dahlke, Ebert, Frey und Göbel. Die Frauen hießen mit Vornamen Hilde, Inge, Karin, Luise, Maria, Nora und Olga. Im Verlaufe des Abends tanzte Herr Anders mit Inge und Luise, Herr Frey mit Maria und Luise, Herr Göbel mit Inge und Nora, Herr Conrad mit Inge, Herr Dahlke mit Luise und Herr Ebert mit Nora. Später wurde zu viert Domino gespielt. Zuerst beteiligten sich Herr Conrad, Herr Anders, Nora und Olga am Spiel. Die beiden männlichen Mitspieler wurden nach einer Weile von den Herren Dahlke und Frey abgelöst. Zum Schluß lösten Hilde und Inge die beiden Frauen vom Spiel ab. Merkwürdigerweise hat kein Ehemann mit seiner Frau getanzt oder am Dominotisch gesessen. Es ist herauszufinden, wer mit wem verheiratet ist. *Sch.*

W 6 ■ 516 An mehrere Schüler wurden 100 Murmeln so verteilt, daß jeder folgende Schüler eine Murmel mehr erhielt als sein Vorgänger. Wieviel Schüler können es gewesen sein, wenn jeder Schüler mindestens eine Murmel erhalten hat? *P.*

7 ▲ 517 Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius $R = 1$ km. Im Innern dieses Kreises befinden sich n kongruente Kreisscheiben mit dem Radius $r = 1$ cm, die sich gegenseitig nicht „überlappen", das heißt, die paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben. Es ist eine obere Schranke N für die Anzahl n dieser Kreisscheiben anzugeben, das heißt, eine Zahl N, für die sicher $N \geq n$ gilt. *T.*

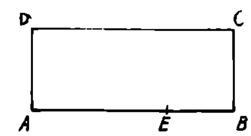


7 ▲ 518 Die Afrikanischen Strauße, die größten lebenden, flugunfähigen Vögel, machen im schnellen Lauf Schritte von 4 m Länge und erreichen bei großer Gefahr die Fluchtgeschwindigkeit $70\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wieviel 4 m lange Schritte macht bei großer Gefahr ein Strauß in der Sekunde? *T.*

W 7 ■ 519 Von drei von Null verschiedenen natürlichen Zahlen a, b und c sind die größten gemeinsamen Teiler je zweier dieser Zahlen bekannt:
$(a, b) = 4$; (lies: der g. g. T. der Zahlen a
$(a, c) = 6$; und b ist 4)
$(b, c) = 10$.
Welche kleinsten von Null verschiedenen natürlichen Zahlen a, b und c genügen diesen Bedingungen? *T.*

W 7 ■ 520 Das Produkt dreier natürlicher Zahlen ist fünfmal so groß wie die Summe aus diesen Zahlen. Dabei ist die Differenz aus der zweiten und der ersten dieser Zahlen nicht negativ und gleich der Differenz aus der dritten und der zweiten Zahl. Um welche Zahlen handelt es sich? Hat die Aufgabe mehr als eine Lösung? *Sch.*

8 ▲ 521 Das abgebildete Rechteck $ABCD$ ist in ein flächengleiches Rechteck zu verwandeln, dessen eine Seite gleich der eingezeichneten Strecke $\overline{AE}$ ist.



Wie kann man die andere Seite des gesuchten Rechtecks allein mit dem Bleistift und dem Lineal konstruieren?
Dr. E. Schröder, TU Dresden

8 ▲ 522 Es seien m und n zwei verschiedene teilerfremde ganze Zahlen. Ferner sei p eine Primzahl, die sowohl Teiler der Summe $m+n$ als auch Teiler der Differenz $m-n$ dieser beiden ganzen Zahlen ist. Es ist zu beweisen, daß dann $p=2$ gilt. *T.*

W 8 ■ 523 In einem alten Rechenbuch finden wir die folgende Aufgabe: Fünf volle, elf halbvolle und acht leere Weinfässer der gleichen Art und Größe sollen so an drei Brüder verteilt werden, daß jeder von ihnen die gleiche Menge Wein und die gleiche Anzahl von Fässern erhält. Beim Aufteilen darf der Wein nicht aus einem Faß in ein anderes gegossen werden.
Wie kann die Verteilung erfolgen?
Es sollen alle Möglichkeiten der Verteilung angegeben werden. *P.*

W 8 ■ 524 Einem Kreis k sei ein Rechteck $ABCD$ einbeschrieben. Die Mitten E, F, G, H der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ dieses Rechtecks bilden ein Viereck $EFGH$. Es ist zu beweisen, daß der Umfang dieses Vierecks für alle dem Kreis einbeschriebenen Rechtecke gleich ist; ferner ist der Umfang des Vierecks $EFGH$ aus dem Durchmesser d des Kreises k zu berechnen. *Sch.*

9 ▲ 525 Es sind alle Primzahlen p anzugeben, für die die Zahl
$$z = p^6 + 3p^2 - 3p^4 - 1$$
nicht durch 13824 teilbar ist.
Ekkehard Kuhrt, EOS Zella-Mehlis, Kl. 10

W 9 ■ 526 Bei den Europa-Leichtathletikmeisterschaften in Athen im September 1969

erhielten die DDR, die UdSSR, Großbritannien, Frankreich und Polen zusammen 31 Goldmedaillen. Jedes dieser Länder erhielt mehr Goldmedaillen als jedes der in der angegebenen Reihenfolge folgenden Länder. Die DDR erhielt ebensoviel Goldmedaillen wie Großbritannien, Frankreich und Polen zusammen. Die UdSSR erhielt ebensoviel Goldmedaillen wie Großbritannien und Frankreich zusammen. Großbritannien erhielt doppelt so viel Goldmedaillen wie Frankreich.
Wieviel Goldmedaillen erhielt jedes der angegebenen Länder? *L.*

W 9 ■ 527 Es sei $ABCD$ ein beliebiges konvexes Viereck, und es seien M_1, M_2, M_3, M_4 die Mitten der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$.
Es ist zu beweisen, daß dann die Strecken $\overline{M_1M_3}$ und $\overline{M_2M_4}$, die sogenannten Mittellinien des Vierecks $ABCD$, einander halbieren, d. h., daß $\overline{M_1S} = \overline{SM_3}$ und $\overline{M_2S} = \overline{SM_4}$ gilt, wobei S der Schnittpunkt dieser Mittellinien $\overline{M_1M_3}$ und $\overline{M_2M_4}$ ist. *Sch.*

10/12 ▲ 528 Ein Punkt P im Innern eines Quadrates $ABCD$ habe von den Eckpunkten A, B und C dieses Quadrates die Abstände $\overline{PA} = 1$ cm, $\overline{PB} = 2$ cm, $\overline{PC} = 3$ cm.
Es ist die Seite $\overline{AB}$ dieses Quadrates
a) zu konstruieren,
b) aus den gegebenen Abständen $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ und $\overline{PC}$ zu berechnen. *L.*

10/12 ▲ 529 Es sind alle ungeraden natürlichen Zahlen a und b mit $a < b$ zu bestimmen, für die die folgende Eigenschaft erfüllt ist:
Die Summe aller natürlichen Zahlen, die größer als a und kleiner als b sind, ist gleich 1000. (Falls es nur eine solche Zahl gibt, ist unter der Summe diese Zahl selbst zu verstehen.)

Hans-Dietrich Gronau, stud. math.
Träger eines 3. Preises bei der IMO 1969

W 10 ■ 530 Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{x+\sqrt{2x}}+\sqrt{x-\sqrt{2x}}=x \quad \text{zu ermitteln.}$$

Prof. Tschajkowsky, Lwow, UdSSR

W 10 ■ 531 Es sei $ABCD$ ein Rhombus. Ferner seien E, F, G, H die Mitten der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. Die vier Geraden AF, BG, CH, DE mögen sich in den Punkten P, Q, R, S schneiden. Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$, wenn der Flächeninhalt des Rhombus $ABCD$ gleich A ist? *L.*

Merke!

Jede Lösung auf ein Blatt für sich! —
Postleitzahl nicht vergessen! —
Die Lösung nicht erst kurz vor dem letzten Einsendetermin absenden!
(Das bringt der Post und der Redaktion technische Schwierigkeiten, verzögert außerdem den Beginn der Korrektur.)

Redaktion *alpha*

Mathematik-Olympiaden in der ČSSR

Im Jahre 1951 wurden in unserem Lande erstmals Mathematikolympiaden durchgeführt. Mit Beginn des XIX. Jahrgangs ist das System der Olympiaden (MO) in einigen Punkten geändert worden. Darüber wollen wir berichten.
Für die Teilnehmer an der MO gibt es drei Kategorien (A, B, Z) sowie beim Ablauf drei Runden. Zur *Kategorie A* gehören die Schüler der Klassenstufe 3 und 4 der Mittelschulen bzw. Gymnasien, diese entsprechen den Klassenstufen 11/12 der Erweiterten Oberschulen in der DDR. Zur *Kategorie B* gehören die Schüler der Klassenstufen 1 und 2 (entspricht den Kl. 9/10 der EOS in der DDR). Die *Kategorie Z* ist für Schüler der Klassenstufe 9 der 9klassigen Grundschule (entspricht der 9. Klasse der Oberschulen in der DDR) bestimmt. Es ist möglich, daß jüngere Schüler auch in höheren Klassenstufen (Kategorien) teilnehmen können. Nach Beginn eines neuen Schuljahres werden in den Schulen zunächst die sogenannten *Vorbereitungsaufgaben* ausgegeben. Diese Aufgaben sind von den Bewerbern für die MO durchzuarbeiten und die Lösungen beim Fachlehrer für Mathematik abzugeben; sie werden korrigiert, mit den Teilnehmern ausgewertet, aber nicht benotet.
Die Aufgaben der **1. Runde** der MO (Schulausscheid) sind bei allen Kategorien von den Schülern im Selbststudium zu bearbeiten und die Lösungen termingerecht bei dem Beauftragten für MO an den Schulen abzugeben. In der Kategorie Z wird gefordert, daß von vier vorgelegten Aufgaben mindestens drei (im wesentlichen) richtig gelöst werden, d. h. daß der Schüler die Note 1 oder 2 erhält. Bei der Kategorie A und B wird verlangt, daß aus den vorgelegten zwei Gruppen von Aufgaben (1, 2, 3; 4, 5, 6) mindestens vier vom Schüler selbst ausgewählte Aufgaben (je zwei aus beiden Gruppen) bearbeitet werden. Ein Schüler hat die 1. Runde bestanden, wenn er mindestens drei Aufgaben (im wesentlichen) richtig gelöst hat.
Die **2. Runde** wird als Kreisausscheid für Schüler der Grundschulen (Kategorie Z) bzw. als Bezirksausscheid für die Schüler der Mittelschulen und Gymnasien (Kategorie A und B) als Klausur durchgeführt. Die **3. Runde** findet nur in der Kategorie A statt und wird in Prag ausgetragen. An ihr nehmen die besten Schüler aus der ganzen Republik teil.

St. Horák

Vorbereitungsaufgaben

Kategorie Z

■ 1 ■ Zdeněk hat folgende Brüche wie angeführt gekürzt:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4};\quad \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5};\quad \frac{1\cancel{99}}{\cancel{99}5}=\frac{1}{5}.$$

Dem Lehrer gefällt diese Art natürlich nicht, aber Zdeněk verteidigt sein Verfahren damit, daß alle Ergebnisse richtig sind. Bestimme alle Brüche
a) mit 2ziffrigen Zählern und Nennern,
b) mit 3ziffrigen Zählern und Nennern,
die – auf diese Art gekürzt — ein richtiges Ergebnis liefern!

■ 2 ■ Mit einem Lastauto sollen m Tonnen Baustoffe über eine Entfernung von d km auf einer nahezu waagerechten Straße befördert werden. Das Lastauto hat eine Masse von m_0 Tonnen. Bei gleichbleibender Motorleistung ist die Fahrzeuggeschwindigkeit umgekehrt proportional der Gesamtmasse des Fahrzeugs bzw. der Lademasse. Die annähernd gleiche Belade- bzw. Entladezeit ist direkt proportional der zu befördernden Lademasse. Die vorhandene Baustoffmenge kann nicht auf einmal aufgeladen werden, sondern es muß mehrmals gefahren werden. Entscheide durch Berechnung, was zeitgünstiger ist:
entweder jeweils kleinere Mengen aufzuladen, dafür schneller (aber öfter) zu fahren, oder jeweils größere Mengen aufzuladen und dafür langsamer (aber weniger oft) zu fahren! (Die Anfahr- und Bremszeit ist bei der Berechnung nicht zu berücksichtigen.)

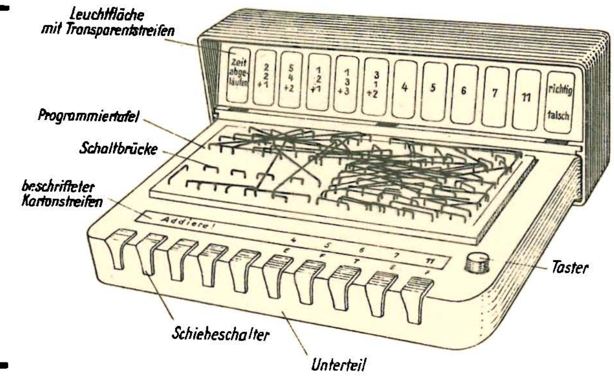
■ 3 ■ Es sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 10$ cm gegeben. Jede der beiden Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ werde durch 9 Punkte in 10 kongruente Strecken unterteilt. Der Mittelpunkt K der Seite $\overline{AB}$ und irgendein Teilpunkt X der auf der Seite $\overline{BC}$ festgelegten Teilpunkte bestimmen eine Gerade. Der Eckpunkt B und irgendein Teilpunkt Y der auf der Seite $\overline{CD}$ festgelegten Teilpunkte bestimmen eine weitere Gerade. Welche Teilpunkte X, Y muß man auswählen, damit die Geraden KX und BY aufeinander senkrecht stehen?

■ 4 ■ Es sei ein Rechteck $ABCD$ gegeben, dessen Seitenlängen sich wie 2:1 verhalten. Diesem Rechteck wurde ein Halbkreis k über der größeren Seite $\overline{AB}$ als Durchmesser einbeschrieben. Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ schneiden k in dieser Reihenfolge in den Punkten E und F.
Bestimme den Flächeninhalt der durch den Kreisbogen $\widehat{EF}$ und die Strecken $\overline{EC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DF}$ begrenzten Figur!

aus: Matematika ve škole Jg. 68/69, H. 10 und 69/70, H. 1
Bearbeitete Übersetzung: O. Langer

Logisch denken — spielend erlernt

PIKO dat — eine Kombination von Rechenautomat und Lernmaschine



Zur vorjährigen Herbstmesse in Leipzig fand im Messehaus *Petershof* ein Erzeugnis den ungeteilten Beifall von Einkäufern und Besuchern: „der Spielzeugcomputer PIKO dat" aus dem VEB PIKO Sonneberg. Es ist der Beginn unserer traditionsreichen Spielwarenindustrie, verstärkt Computerspielzeug und Elektronikbaukästen zu entwickeln und zu produzieren.

„PIKO dat", eine Kombination von Rechenautomat und Lernmaschine in Baukastenform, wurde in sieben Monaten von Pädagogen, Wissenschaftlern, Ingenieuren und Technikern gemeinsam entwickelt. Dieses Spielzeug, das unserer Zeit entspricht, regt zum schöpferischen Spielen an und vermittelt Erkenntnisse der naturwissenschaftlichen und gesellschaftlichen Entwicklung. Der „Spielzeugcomputer PIKO dat" ist in der Lage,

- die grundsätzliche Wirkungsweise eines Elektronenrechners zu vermitteln,
- erste Einsichten in die vielen Anwendungsbereiche der elektronischen Datenverarbeitung zu zeigen,
- bei der Überprüfung und Wiederholung von Kenntnissen zu helfen
- und als Unterhalter zu dienen.

„PIKO dat" ist ein Spielzeug, das auf vorhandene Kenntnisse aufbaut und mit dem neues Wissen im Spiel erworben wird. Bereits durch den Zusammenbau lernt der Besitzer den Mechanismus des Gerätes kennen. Im beigefügten Anleitungsbuch werden dem Monteur durch Text und Zeichnungen die einzelnen Schritte erläutert. Nach einem Schaltplan muß er das Gerät selbst verdrahten und anschließend alle Schiebe- und Festkontakte überprüfen. Als Energiequelle dienen entweder eine 4,5-V-Flachbatterie oder drei Monozellen zu je 1,5 V.

Der Vorderrand des Gehäuses trägt 10 Schiebeschalter, die von 0 bis 9 numeriert sind. Rechts davon befindet sich der Taster, ein roter Knopf. Den hinteren Teil des Gehäuses begrenzt das Lampenfeld mit 13 Leuchtfeldern. In der Mitte ist die Programmiertafel angeordnet: Sie besteht aus 110 rechteckigen Tastenfeldern, von denen 100 mit zwei Ziffern beschriftet sind (die erste bezeichnet die Zeile, die zweite die Spalte des jeweiligen Feldes). 10 Tastenfelder der obersten Reihe tragen eine Buchstaben-Zahlen-Kombination. Am rechten und linken Rand jedes Feldes befinden sich je drei Löcher, die die Programmierdrähte aufnehmen.

Die wichtigsten Funktionselemente des „PIKO dat" sind die Schiebeschalter, die die Stellungen *A* und *E* einnehmen können. Die Schaltkontakte (jeder Schalter hat fünf) verbinden jeweils die linke mit der rechten Dreierkombination jedes Tastfeldes. In der Schalterstellung *A* sind die Dreierkombinationen der Tastenfelder mit geraden Ziffern überbrückt (00; 20; 40), in der Schalterstellung *E* sind die Tastenfelder einer Spalte überbrückt, die ungerade Ziffern tragen (10; 30; 50). Hat man sich für ein Programm entschieden, wird es — vorerst noch nach Vorlage — gesteckt.

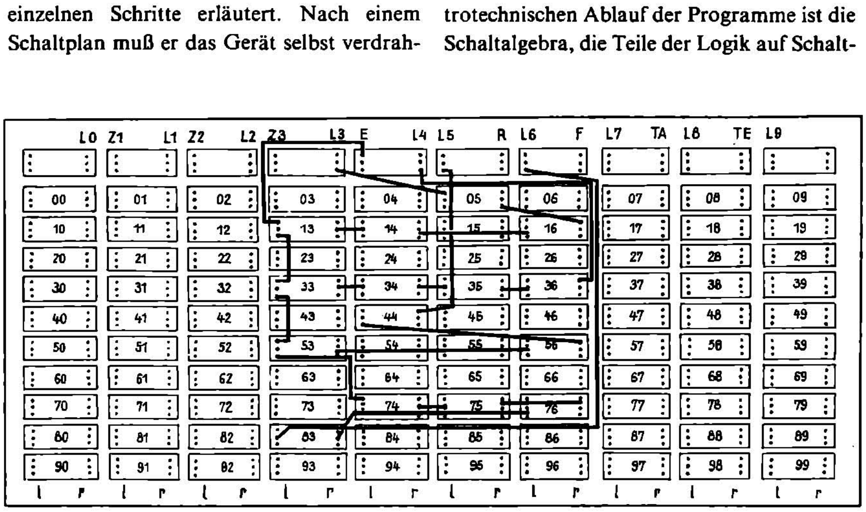
Die mathematische Grundlage für den elektrotechnischen Ablauf der Programme ist die Schaltalgebra, die Teile der Logik auf Schaltsysteme anwendet. Bekanntlich beschäftigt sich die Wissenschaft von der Logik mit dem folgerichtigen Denken, mit der Wahrheit oder Falschheit von Aussagen. Der „PIKO dat" hat ein solches Schaltsystem, das zwischen den beiden Werten „wahr" oder „falsch" unterscheidet. Diesen beiden Werten werden die Dualzahlen L und O zugeordnet, mit denen die Schaltungen berechnet werden können. Schritt für Schritt werden die grundlegenden logischen Schaltungen (Konjunktion, Disjuktion, Negation, Antivalenz) vermittelt.

Nach diesen Grundkenntnissen über logische Schaltungen ist es möglich, Daten zu verarbeiten, d. h. das Rechnen mit den Rechenhilfsmitteln unserer Zeit, den Datenverarbeitungsanlagen, nachzugestalten. Programmgesteuerte Ziffernrechenautomaten rechnen nach einem vorgegebenen Programm mit Zahlen, die verschlüsselt sind. Die Ziffern von 0 bis 9 des Dezimalsystems werden dual verschlüsselt (durch die Ziffern L (= 1) und O). So wie im Dezimalsystem eine Zahl aus Zehnerpotenzen zusammengesetzt wird, wird sie im Dualsystem durch die Addition von Zweierpotenzen zusammengesetzt. Mit Hilfe des Sonneberger Rechenautomaten kann das dezimale Addieren und Subtrahieren, die Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen sowie die duale Addition und Subtraktion geübt werden.

Auch für den Einsatz des Sonneberger Erzeugnisses als Lernmaschine sollen die vorbereiteten Programme als Anregung gelten, selbständig Fragenkomplexe zu programmieren. Für den Anfang stehen 350 Fragen aus den Wissensgebieten Mathematik, Geographie, Physik/Chemie, Literatur/Musik/Sport und Straßenverkehr zur Verfügung. Das Wechseln der Programme bereitet keine großen Schwierigkeiten.

Weiterhin besteht die Möglichkeit, das moderne Spielzeug aus Sonneberg für Unterhaltungsspiele zu benutzen.

Mit dem „Spielzeugcomputer PIKO dat" ist ein Gerät entstanden, das den internationalen Vergleich mit ähnlichen Erzeugnissen nicht zu scheuen braucht.



G. Scholz, Berlin
stark gekürzt aus: Urania 12/69

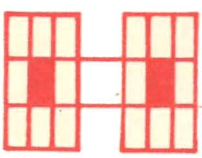
Frösi-Knobelmagazin

Wie groß ist das Grundstück?

Um ein Schulgrundstück einzuzäunen, wurde eine Anzahl Pfähle besorgt. Wählt man die Entfernung zwischen zwei benachbarten Pfählen 5 m lang, fehlen sieben Pfähle, wenn man die benachbarten Pfähle jeweils im Abstand von 6 m setzt, reichen die gekauften Pfähle aus. Welchen Umfang hat das einzuzäunende Grundstück?

Zahlenrätsel

Die Zahlen 1 bis 17 sollst du derart in die leeren Felder einsetzen, daß die Summe jeder waagerechten und senkrechten Reihe 26 ergibt.



Stimmt das?

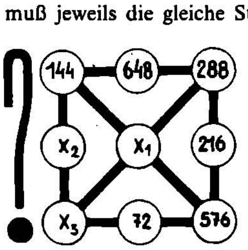
Karin und Bernd wollen von Klimpelhausen nach Rätselhagen. Von Klimpelhausen nach Rätselhagen sind es genau 40 Kilometer. Bernd hat ein Fahrrad. Großzügig bietet er Karin an, das Fahrrad zu schieben und mit ihr zu Fuß zu gehen.

Karin aber macht einen anderen Vorschlag. Sie schlägt Bernd vor, daß er eine Stunde lang fährt, dann das Fahrrad in einer Raststätte unterstellt und zu Fuß weitergeht. Nachher wollte sie das Rad nehmen und eine Stunde fahren. So wollten sie sich ablösen, bis sie am Ziel seien. Karin behauptet sogar, sie wären viel eher am Ziel.

Stimmt das? (Ein Fußgänger legt 5 km in der Stunde, ein Radfahrer 10 km zurück.)

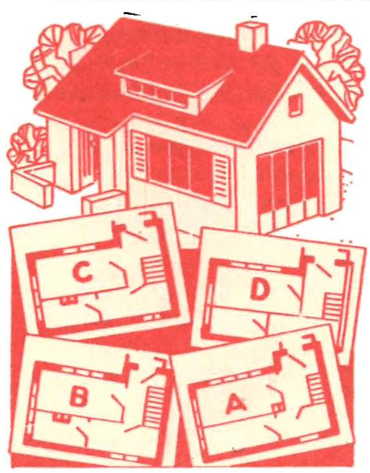
Magische Zahlenspielerei

Ersetzt x durch natürliche Zahlen. In den waagerechten, senkrechten und diagonalen Linien muß jeweils die gleiche Summe entstehen. Wie groß sind x_1, x_2, x_3 und wie groß ist die Summe? Wer ein bißchen nachdenkt, findet bald eine Lösung.



Hallo, Baumeister!

Ein Haus wird zuerst auf dem Reißbrett gebaut, d. h. es werden viele Zeichnungen angefertigt. Nach diesen Zeichnungen errichten Maurer und Zimmerleute das Haus. Eine von den Zeichnungen auf dem Bild stellt den Grundriß des Häuschens dar. Welche ist es?



Tiefste Tiefe

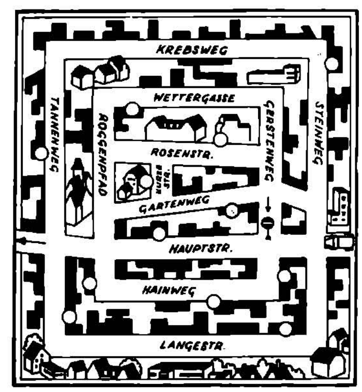
Die größte Tiefe des *Atlantischen Ozeans* beträgt 8,5 km, die größte Tiefe des *Stillen Ozeans* 2,3 km mehr als die des *Atlantischen Ozeans*. Die größte Tiefe des *Nördlichen Eismeers* ist die Hälfte der Tiefe des *Stillen Ozeans*. Welche größte Tiefe hat das *Nördliche Eismeer?*

Krawuttke kombinierte richtig

Herr Müller schlägt im Zug einen Denksportwettbewerb vor: „Von den vier schwarzen und drei weißen Federn stecke ich jedem ungesehen eine Feder ins Haar. Zwei Federn kommen wieder in die Tasche. Wer kann mir nun sagen, welche Farbe die Feder hat, die er in seinem Haar trägt?" Oberleutnant Krawuttke überlegt nicht lange und sagt: „Meine Feder ist weiß!" Woher wußte Oberleutnant Krawuttke, daß seine Feder weiß war?

Kein Problem

Hier siehst du einen Ausschnitt des Stadtteils, den ein Kraftfahrer der Molkerei täglich mit seinem Milchauto zu fahren hat. An den mit einem Punkt gekennzeichneten Stellen befinden sich Milchverkaufsstellen, die er beliefern muß. Im Laufe der Zeit hat er sich natürlich den kürzesten Fahrweg ausgeknobelt, denn er muß ja noch andere Verkaufsstellen beliefern. Er durchfährt keine Straße zweimal. Besonders beachtet er, daß der Gerstenweg Einbahnstraße ist und nur in einer Richtung befahren werden darf (Pfeilrichtung). Welchen Weg fährt er täglich?



Wie hoch ist die Produktivität?

In einer Abteilung standen 36 Maschinen. Bei Rekonstruktion der Abteilung wurden die Maschinen so aufgestellt, daß jede Maschine einen Platz von 6 m² statt der früheren 8 m² einnahm. Auf der frei gewordenen Fläche wurden neue Maschinen aufgestellt. Wieviel Maschinen stellte man nach der Rekonstruktion in der Abteilung auf? (Um wieviel Prozent erhöhte sich dadurch die Produktivität der Abteilung?)

Wie dick ist die Seite?

Ein *Frösi*-Sonderheft hatte 120 Seiten, einschließlich Umschlag. Wenn nun ein Stoß von 400 solchen Heften 1,80 m hoch ist, wie dick ist das Papier einer Seite?

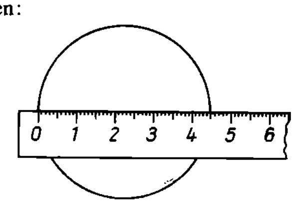
Die 10 Probleme wurden aus dem *Frösi-Knobelmagazin*, Verlag *Junge Welt*, Berlin 1969, 157 Seiten, Preis: 3,50 M, ausgewählt. Von den im Magazin gebotenen 163 Problemen sind ca. ein Drittel für Arbeitsgemeinschaftsnachmittage (Klasse 4 bis 7), Ring-frei-Veranstaltungen und Wandzeitungen geeignet.

Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen

Teil I:
Wir erfahren, was ein Nomogramm ist

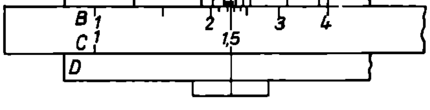
Wir orientieren uns zunächst an einem Beispiel: Da wir ab Klasse 7 Berechnungen nach der Formel $A=\frac{\pi}{4}d^2$ für den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser d oft auszuführen haben, lohnt es sich, über diese Berechnung nachzudenken. Um zu gezeichneten Kreisen den Flächeninhalt zu ermitteln, muß zunächst durch geeignetes Anlegen eines Zentimetermaßes sein Durchmesser gemessen werden:

Abb. 1



Anschließend ist jeweils zu den gemessenen Werten der Durchmesser der Flächeninhalt zu berechnen. Die Ergebnisse dieser Berechnungen können wir durch geeignetes Einstellen des Rechenstabes schnell und mit für die Praxis ausreichender Genauigkeit ablesen. Zu diesem Zweck ermitteln wir zunächst mittels Stab den bei jeder Kreisflächenberechnung unveränderlichen Faktor $\frac{\pi}{4}$, indem wir unter die Kote π der Skale A die Kote 4 der Skale B stellen. Mit dieser Stabeinstellung wäre auf der Skale A über der Kote 1 der Skale B genähert der Wert $\frac{\pi}{4}$ abzulesen, der in der Abbildung 2 durch einen Pfeil markiert ist:

Abb. 2



Wir lesen den Wert $\frac{\pi}{4}$ am Stab nicht ab, verschieben aber bei unserem Rechenstab auch nicht mehr die Zunge gegenüber dem Stabkörper. Die gewünschten Ergebnisse werden wir nunmehr allein durch jeweiliges geeignetes Stellen des Läufers ablesen: Auf der Skale C wird die Maßzahl des jeweiligen Durchmessers aufgesucht und der Strich des Läufers auf diese Kote (1,5 in Abbildung 2) gestellt. Auf Skale A wird nunmehr auf dem Läuferstrich die zugehörige Maßzahl (1,77 in Abbildung 2) des Flächeninhaltes abgelesen. Zur Begründung dieses Verfahrens genügt es festzustellen, daß bei der gewählten Läuferstellung auf Skale B die Maßzahl (2,25 in Abbildung 2) des Quadrates des Kreisdurchmessers auf dem Läuferstrich steht. Die anfangs hergestellte gegenseitige Stellung der Skalen A und B garantiert, daß auf der Skale A der Läuferstrich die Maßzahl des Flächeninhaltes des zugehörigen Kreises markiert.

Mit der gleichen Einstellung des Rechenstabes werden auch umgekehrt zu gegebenen Werten des Flächeninhaltes die zugehörigen Werte der Kreisdurchmesser ermittelt. So gehört z. B. zu $A=5\,\text{cm}^2$ $d=2{,}25$ cm. In dieser Weise abgelesene Wertepaare werden in einer Tabelle zusammengestellt:

A in cm²	1	2	3	4	5	…	40	45	50	…
d in cm	1,13	1,60	1,95	2,26	2,52	…	7,14	7,57	7,98	…

Abb. 3

Die Berechnungen der zu gegebener Maßzahl A des Flächeninhaltes gehörigen Maßzahl d des Kreisdurchmessers hätte nach der Formel zu erfolgen, die durch Umstellen von $A=\frac{\pi}{4}d^2$ nach d erhalten wird:

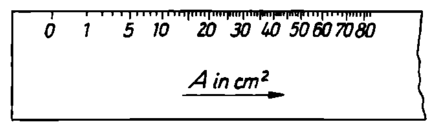
$$A=\frac{\pi}{4}d^2 \qquad \Big|\cdot\frac{4}{\pi}$$

$$d^2=\frac{4A}{\pi} \qquad \Big|\text{ Radizieren}$$

$$d=\sqrt{\frac{4A}{\pi}} \qquad *$$

Die bisherigen Betrachtungen legen es nahe, ein einfaches zeichnerisches Hilfsmittel zum Lösen derartiger Aufgaben anzufertigen: Auf dem gemäß Abbildung 1 benutzten Lineal mit Zentimetereinteilung, mit dem ja die Werte der Kreisdurchmesser abgelesen wurden, könnten anstelle der einzelnen Werte der Kreisdurchmesser die zugehörigen Werte der Flächeninhalte der entsprechenden Kreise angeschrieben werden. So wäre z. B. laut Tabelle der Abbildung 3 die Kote 5 jetzt anzuschreiben an der Stelle, an der bisher 2,52 zu stehen hätte. Durch ein derartiges Umkotieren entsteht der folgende Anlegestreifen, mit dem durch Anlegen gemäß Abbildung 1 der Flächeninhalt eines jeweils gezeichneten Kreises unmittelbar abgelesen werden kann.

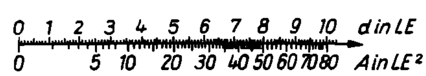
Abb. 4



Mit diesem Anlegestreifen, der Berechnungen durch Ablesen zu ersetzen gestattet und den sich jeder Schüler aus einem Pappstreifen anfertigen sollte, haben wir das erste Nomogramm kennengelernt.

Das Nomogramm der Abbildung 4 leidet noch an einem Nachteil: Es kann nur benutzt werden zur Ermittlung von Flächeninhalten gezeichneter Kreise. Oftmals ist jedoch der Kreis, dessen Fläche ermittelt werden soll, nicht gezeichnet, sondern nur sein Durchmesser gegeben. Dieser Mangel unseres Nomogrammes wird sofort aufgehoben, wenn wir neben den Anlegestreifen der Abbildung 4 einen Streifen mit Zentimetereinteilung legen, wie es die folgende Abbildung zeigt:

Abb. 5



Natürlich lohnt es sich, diese Doppelskale neu zu zeichnen. Dabei dürfen nachträglich die Benennungen cm und cm² gleichzeitig ersetzt werden durch LE (Längeneinheit) und LE^2.

Zwei Anwendungsbeispiele des Nomogrammes der Abbildung 5 sollen noch angegeben werden: Laut diesem Nomogramm besitzt ein Kreis mit dem Durchmesser $d=7{,}5$ cm den Flächeninhalt $A=44\,\text{cm}^2$ und ein Kreis mit dem Flächeninhalt $A=3{,}8\,\text{km}^2$ besitzt den Durchmesser $d=2{,}2$ km.

Bevor wir weitere Nomogramme kennenlernen, müssen der Begriff Nomogramm wir künftighin Funktionsleiter) und Funktion definiert werden.

Die Tabelle der Abbildung 3 bringt zum Ausdruck, daß jeder positiven Zahl A als Maßzahl des Flächeninhaltes eines Kreises eine positive Zahl d als Maßzahl des zugehörigen Kreisdurchmessers zugeordnet ist.

* $\sqrt{x}$ (gelesen: Wurzel aus x) ist die nichtnegative Zahl, die mit sich selbst multipliziert, x ergibt: $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$. Für jede nichtnegative reelle Zahl x existiert stets $\sqrt{x}$.

Die Tabelle der Abbildung 3 enthält natürlich nur einige der durch diese Zuordnung bestimmten Zahlenpaare $(A; d)$ wie $(1; 1{,}13)$, $(2; 1{,}60)$ usf. Bei diesen Zahlenpaaren steht an erster Stelle die Maßzahl des Flächeninhaltes, an zweiter Stelle die Maßzahl des zugehörigen Kreisdurchmessers. Beim Vertauschen der beiden zu einem solchen Paar gehörigen Zahlen trifft im allgemeinen diese Deutung der beiden Zahlen nicht mehr zu. Zahlenpaare wie diese, bei denen es auf die Reihenfolge ankommt, nennt man geordnete Zahlenpaare.

Definition: Zahlenpaare, bei denen die Reihenfolge der zu einem Paar gehörigen Zahlen festgelegt ist, heißen *geordnete Zahlenpaare*.

Die Menge der geordneten Zahlenpaare $(A; d)$, wobei A eine beliebige positive reelle Zahl ist und d die zugehörige, durch die Rechenvorschrift $d=\sqrt{\frac{4A}{\pi}}$ bestimmte ebenfalls positive reelle Zahl ist, hat eine für uns wichtige Eigenschaft: Da alle Kreise mit gleichem Flächeninhalt kongruent sind, ist bei gegebenem Flächeninhalt der Kreisdurchmesser eindeutig bestimmt. Also haben von den geordneten Zahlenpaaren $(A; d)$ keine zwei die erste Zahl gemeinsam.

Definition: Eine Menge geordneter Zahlenpaare $(x; y)$, von denen keine zwei Paare in der ersten Zahl übereinstimmen, heißt *Funktion***: Die Menge der Zahlen x, die bei diesen Paaren an erster Stelle stehen, heißt *Definitionsbereich*. Die Menge der Zahlen y, die bei diesen Paaren an zweiter Stelle stehen, heißt *Wertebereich*.

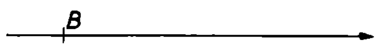
Gemäß dieser Definition bilden die Zahlenpaare $(A; d)$, bei denen A die Maßzahl des in LE^2 gemessenen Flächeninhaltes und d die Maßzahl des in LE gemessenen zugehörigen Kreisdurchmessers bedeuten, eine Funktion: Die Maßzahl d des Kreisdurchmessers ist eine Funktion der Maßzahl A des Flächeninhaltes. Als Zahlen A kommen alle nichtnegativen reellen Zahlen in Frage, also ist der Definitionsbereich dieser Funktion die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen. Als Zahlen d kommen ebenfalls alle nichtnegativen reellen Zahlen in Frage, also ist bei dieser Funktion der Wertebereich wiederum die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen.

Die Rechenvorschrift $d=\sqrt{\frac{4A}{\pi}}$, kurz Formel genannt, nach der zu gegebenem A das zugehörige d berechnet wird, nennt man die Gleichung dieser Funktion.

Definition: Eine Formel der Gestalt $y=f(x)$ [gelesen: y ist gleich f von x], deren rechte Seite ein die Variable x enthaltender Rechenausdruck (Term) ist und der alle geordneten Zahlenpaare $(x; y)$ einer Funktion genügen, heißt *Gleichung der Funktion*.

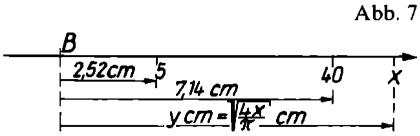
Um den Begriff der Funktionsleiter einzuführen, betrachten wir nochmals das Zeichnen der Abbildung 4: Zunächst muß eine Gerade gewählt werden. Diese Gerade muß orientiert werden. Weiterhin muß auf ihr der Bezugspunkt B gewählt werden. Schließlich haben wir als Längeneinheit 1 cm gewählt.

Abb. 6



Um mittels dieser Festsetzungen zur Funktion mit der Gleichung $y=\sqrt{\frac{4x}{\pi}}$***, von der die Tabelle der Abbildung 3 einige geordnete Zahlenpaare wie $(5; 2{,}52)$ angibt, eine Skale zu zeichnen, wird die Zahl $x=5$ im Abstand y cm $=2{,}52$ cm vom Bezugspunkt auf der orientierten Geraden angeschrieben. Entsprechend ist (siehe Abbildung 3) die Zahl $x=40$ im Abstand y cm $=7{,}14$ cm vom Bezugspunkt auf der orientierten Geraden anzuschreiben. Allgemein ist die positive Zahl x im Abstand y cm $=\sqrt{\frac{4x}{\pi}}$ cm vom Bezugspunkt B an die orientierte Gerade anzuschreiben.

Abb. 7



Definition: Eine *Funktionsleiter* zur Funktion mit der Gleichung $y=f(x)$ entsteht, wenn auf einer gewählten, orientierten Geraden mit Bezugspunkt B und gewählter Längeneinheit 1 LE jeweils der dem Definitionsbereich von $y=f(x)$ entnommene x-Wert dem Punkt P der gewählten Geraden zugeordnet wird, für den gilt: $\overline{BP}=f(x)\,LE$.

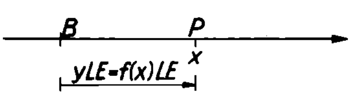


Abb. 8

Bei einer Funktionsleiter nennt man die Zahlen x des Definitionsbereiches der zur Leiter gehörigen Funktion, die der gewählten Geraden zugeordnet sind, *Koten*. (Singular: die Kote)

Das Nomogramm der Abbildung 5 ist eine zeichnerische Darstellung des durch die Formel $d=\sqrt{\frac{4A}{\pi}}$ festgelegten Zusammenhanges zwischen den Variablen d und A, der durch diese Gleichung definierten Funktion. Es gestattet Berechnungen nach dieser Formel durch einfaches Ablesen der Ergebnisse zu ersetzen.

Definition: Ein *Nomogramm* ist die zeichnerische Darstellung des durch eine Formel definierten funktionalen Zusammenhanges zwischen den in der Formel vorkommenden Variablen. Es gestattet, Berechnungen nach der Formel zu ersetzen durch unmittelbares Ablesen der Ergebnisse am Nomogramm.

Wir wollen im folgenden lernen, warum gewisse Nomogramme Rechenprozesse nach bestimmten Formeln zeichnerisch zu lösen gestatten und wie solche Nomogramme anzufertigen sind. Es leuchtet ein, daß der Aufwand zum Anfertigen eines Nomogrammes sich für solche Rechenprozesse lohnt, die von uns Schülern oft auszuführen sind. Denn mittels Nomogramm wird die Lösung dann viel schneller und einfacher gefunden mit einer für die Praxis meist ausreichenden Genauigkeit. Unsere Mathematiklehrer werden uns natürlich im allgemeinen nicht erlassen können, Berechnungen nach einer bestimmten Formel auszuführen, weil wir diese Rechenprozesse ja auch beherrschen müssen. Sie werden aber sehr erfreut sein, wenn wir unsere Berechnungen mittels Nomogramm kontrollieren. Daraus ergibt sich, daß wir dann, wenn ein wichtiger Rechenprozeß im Unterricht geübt wird, bereits ein zugehöriges Nomogramm besitzen sollten.

W. Träger

Aus drucktechnischen Gründen konnten die Abb. 4, 5 und 7 nur in einem Maßstab, der kleiner als 1 ist, gedruckt werden.

Für Leser, welche sich intensiver mit *Nomogrammen* beschäftigen wollen, empfehlen wir folgende Literatur:

Ostrowski/Kordemski

zeichnen hilft rechnen

VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1964, 8,50 M

Kolosow

kreuz und quer durch die Mathematik

Verlag Volk und Wissen, Berlin 1964, 6,75 M

Stamberger

Nomogramme

VEB Verlag Technik, Berlin 1966, 18,50 M

** Die Funktion kann auch als eindeutige Abbildung erklärt werden. Über den Begriff der Abbildung, insbesondere den der eindeutigen Abbildung, orientieren wir uns im Artikel „Wir untersuchen Abbildungen" in *alpha* 4/1967.

*** Jetzt wurde A durch x und d durch y ersetzt.

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade (7./8. 2. 1970)

Klassenstufe 7

1. Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 2555, jede genau einmal, aufgeschrieben.
Ermittle die Anzahl der Ziffern 9, die dabei insgesamt geschrieben werden müßten!

2. Die Maßzahlen a, b, c der Seitenlängen eines Dreiecks sollen die Bedingungen
(I) $a+b=38$, (II) $b+c=46$,
(III) $a+c=42$ erfüllen.
Ermittle unter Berücksichtigung dieser Bedingungen
a) die Maßzahl jeder der Seitenlängen!
b) Weise nach, daß ein Dreieck existiert, das den Bedingungen (I), (II), (III) genügt!
(Gleiche Maßeinheiten seien wie üblich vorausgesetzt.)

3. Beweise folgenden Satz:
Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, so ist seine Fläche inhaltsgleich der Fläche jedes Dreiecks, bei dem zwei Seiten gleichlang den Diagonalen des Vierecks sind und als Winkel einen der Schnittwinkel der Diagonalen einschließen.

4. Bei einer Subtraktionsaufgabe betrage der Subtrahend $\frac{2}{5}$ des (von Null verschiedenen) Minuenden.
a) Wieviel Prozent des Minuenden beträgt die Differenz?
b) Wieviel Prozent des Minuenden beträgt die Summe aus Minuend und Subtrahend?

5. Beweise folgenden Satz: Zieht man durch jeden Eckpunkt eines Rechtecks die Parallele zu derjenigen Diagonale, auf der der betreffende Eckpunkt nicht liegt, so bilden die Schnittpunkte dieser vier Parallelen die Ecken eines Rhombus.

6. Konstruiere einen Rhombus $ABCD$ aus $\overline{\sphericalangle BAD}=110°$ und $\overline{AC}+\overline{BD}=15\,\text{cm}$!
($\overline{\sphericalangle BAD}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle BAD$)

Klassenstufe 8

1. Die Altersangaben (in vollen Lebensjahren ausgedrückt) einer Familie — Vater, Mutter und ihre zwei leiblichen Kinder — haben folgende Eigenschaften: Das Produkt aller vier Lebensalter beträgt 44950; der Vater ist 2 Jahre älter als die Mutter. Wie alt sind die vier Familienmitglieder?

2. Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ΔABC seien ähnliche Vielecke V_a, V_b, V_c konstruiert, und zwar so, daß die Dreiecksseiten BC, AC, AB jeweils einander entsprechende Seiten von V_a, V_b bzw. V_c sind.
Beweise: Der Flächeninhalt des Vielecks über der Hypothenuse ist gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Vielecke über den Katheten.

3. Beweise die Richtigkeit der folgenden Teilbarkeitsregel: Eine drei- oder mehrstellige natürliche Zahl ist stets dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl, vermehrt um die Hälfte der Anzahl der Einer, eine durch 4 teilbare ganze Zahl ist!
Beispiel: 37528 ist zu untersuchen
$52+4=56$ ist durch 4 teilbar, also ist 37528 durch 8 teilbar.

4. Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 vier konzentrische Kreise, für deren Radien r_1, r_2, r_3 und r_4 $r_4-r_3=r_3-r_2=r_2-r_1=r_1$ gilt.
Ermittle das Verhältnis des Flächeninhalts von K_1 zu den Flächeninhalten der drei von K_1 und K_2 bzw. K_2 und K_3 bzw. K_3 und K_4 gebildeten Kreisringe!

5. Aus 77prozentigem und 87prozentigem Spiritus und nur daraus soll durch Mischen genau 1000 g 80prozentiger Spiritus hergestellt werden. Ermittle die dafür genau benötigten Massen! (Die Prozentangaben beziehen sich auf die Massen.)

6. Im ebenen Gelände seien genau alle diejenigen Punkte zugänglich, die auf einem Rechteck $ABCD$ einschließlich seines Inneren gelegen sind. In dieser Rechtecksfläche führe ein Kreisbogen von A nach B, dessen zugehöriger Mittelpunkt nicht zugänglich sei.
Auf dem Kreisbogen liege der Punkt P (mit $P\neq A$ und $P\neq B$). Konstruiere die Tangente in P an den Kreisbogen, ohne daß bei Durchführung der Konstruktion das Rechteck $ABCD$ verlassen wird!

Klassenstufe 9

1. Es sei $ABCDEFGH$ ein regelmäßiges Achteck. Man denke sich alle Dreiecke gebildet, deren Ecken je drei der Punkte A, B, C, D, E, F, G, H sind. Jemand will nun einige dieser Dreiecke aufschreiben, und zwar so, daß keine zwei der aufgeschriebenen Dreiecke einander kongruent sind.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die er unter dieser Bedingung aufschreiben kann!

2. Konstruieren Sie ein Dreieck ΔABC aus $s_a=9{,}6\,\text{cm}$, $s_b=12{,}6\,\text{cm}$ und $s_c=11{,}1\,\text{cm}$!
Dabei sind s_a, s_b und s_c die Längen der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks.
Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

3. Für eine bestimmte Arbeit benötigt A eine genau m mal so lange Zeit wie B und C zusammen; B benötigt genau n mal so lange wie C und A zusammen und C genau p mal so lange wie A und B zusammen.
Berechnen Sie p in Abhängigkeit von m und n!

4. Beweisen Sie: Wenn zwei ganze Zahlen a und b die Bedingung erfüllen, daß die Zahl $11a+2b$ durch 19 teilbar ist, dann ist auch die Zahl $18a+5b$ durch 19 teilbar.

5. Die Fläche des Dreiecks ΔABC werde durch eine Parallele zur Seite AB in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie das Verhältnis, in dem die zur Seite AB gehörende Höhe des Dreiecks durch die Parallele geteilt wird!

6. Es sei $f(x)$ die für alle reellen x definierte Funktion $f(x)=\frac{(x-1)x}{2}$. Ferner sei x_0 eine beliebig gegebene von 0 verschiedene reelle Zahl.
Wie üblich seien die Funktionswerte der Funktion $f(x)$ an den Stellen x_0+1 und x_0+2 mit $f(x_0+1)$ bzw. mit $f(x_0+2)$ bezeichnet. Beweisen Sie, daß dann $f(x_0+2)=\frac{(x_0+2)\,f(x_0+1)}{x_0}$ gilt!

Klassenstufe 10

1. Geben Sie alle durch 11 teilbaren natürlichen dreistelligen Zahlen an, die bei Division durch 5 den Rest 1 und bei Division durch 7 den Rest 3 ergeben!

2. Ein regelmäßiges Oktaeder soll durch Ebenen so geschnitten werden, daß ein konvexer Restkörper entsteht, dessen Oberfläche sich aus genau einer Dreiecksfläche, genau drei Quadratflächen, genau drei nicht quadratförmigen Trapezflächen, genau drei Fünfeckflächen und genau einer Sechseckfläche zusammensetzt. Geben Sie eine Möglichkeit für die Lage der Schnitte an!

3. Geben Sie a) eine notwendige und hinreichende, b) eine notwendige und nicht hinreichende sowie c) eine hinreichende und nicht notwendige Bedingung dafür an, daß $\sqrt{1-|\log_2|5-x||}>0$ gilt!

Die anzugebenden Bedingungen sind dabei jeweils so zu formulieren, daß sie in der Forderung bestehen, x solle in einem anzugebenden Intervall oder in einem von mehreren anzugebenden Intervallen liegen.

4. Man ermittle alle Paare reeller Zahlen a und b ($b<a$), für die die Summe beider Zahlen, das Produkt beider Zahlen und eine der Differenzen der Quadrate beider Zahlen untereinander gleich sind.

5. Gegeben seien ein Dreieck ΔABC und auf AB ein Punkt D. Konstruieren Sie einen Punkt E auf einer der beiden anderen Dreieckseiten so, daß DE die Dreieckfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt!

6. Von einer quadratischen Funktion $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) denke man sich die Tabelle

x	1	2	3	4
y	1	2	n_1	n_2

gebildet.

Ermitteln Sie alle reellen Koeffizienten a, b, c, für die n_1 und n_2 einstellige natürliche Zahlen sind!

Klassenstufe 11/12

1. a) Es ist zu beweisen, daß die Zahl

$$z=\frac{65533^3+65534^3+65535^3+65536^3}{32765\cdot 32766+32767\cdot 32768}$$
$$\frac{+65537^3+65538^3+65539^3}{+32768\cdot 32769+32770\cdot 32771}$$

ganzrational ist!
b) Die Zahl z ist zu berechnen!

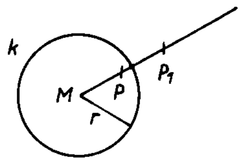
(Bruchstrich wurde aus drucktechnischen Gründen getrennt.)

2. Vier Freunde, Axel, Bodo, Christian und Dieter, kauften sich ein Boot! Sie einigten sich, daß jeder von ihnen eine der ersten vier Fahrten mit dem Boot durchführen solle. Bei der Festlegung der Reihenfolge dieser Fahrten äußerten sie folgende Wünsche:
a) Für den Fall, daß Dieter als Erster fahren sollte, wollte Christian als Dritter fahren.
b) Wenn Axel oder Dieter als Zweiter fahren sollte, dann wollte Christian als Erster fahren.
c) Dann und nur dann, wenn Axel als Dritter fahren sollten, wollte Bodo als Zweiter fahren.
d) Falls Dieter als Dritter fahren sollte, so wollte Axel als Zweiter fahren.
e) Wenn Dieter als Letzter fahren sollte, dann wollten Christian als Dritter und Axel als Erster fahren.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für die Reihenfolge, in der die ersten vier Fahrten durchgeführt werden können, so daß diese Wünsche erfüllt sind!

3. Gegeben sei in der Ebene ε ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ein Punkt P_1 der Ebene heiße Spiegelpunkt eines Punktes P ($P \neq M$) bezüglich k, wenn P_1 auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl liegt und $\overline{MP}\cdot\overline{MP_1}=r^2$ ist.

Es sei k_1 ein Kreis der gleichen Ebene ε, der k orthogonal schneidet, d. h. die Tangenten der beiden Kreise in den Schnittpunkten stehen senkrecht aufeinander. Welches ist der geometrische Ort aller Spiegelpunkte der auf k_1 gelegenen Punkte P bezüglich k?



4. Beweisen Sie, daß das Produkt

$$p=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdots\frac{2499}{2500}$$

(n natürliche Zahl)
kleiner als 0,02 ist!

5. Die Ebene ε eines gegebenen Dreiecks ΔABC wird in dessen Eckpunkten derart von drei Kugeln berührt, daß die Kugeln außerdem paarweise einander von außen berühren.
Ermitteln Sie die Radien der drei Kugeln in Abhängigkeit von den Seitenlängen des gegebenen Dreiecks!

6. a) Ermitteln Sie den Wertevorrat W der für alle reellen x durch $y=\sin x+\cos x$ erklärten Funktion (d. h. alle diejenigen y, zu denen ein x mit $y=\sin x+\cos x$, x reell, existiert)!
b) Zeigen Sie, daß es eine ganzrationale Funktion $g(y)$ mit folgender Eigenschaft gibt:
Gehört y zu W und ist x eine Zahl mit $\sin x+\cos x=y$, so ist $\sin^7 x+\cos^7 x=g(y)$.

Lösungen

Fortsetzung: VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
Lösungen zu Aufgaben der DDR-Olympiade
Zu Aufgabe 2:

Bemerkung: Auf die Voraussetzung $a \neq b$ kann man verzichten, für $a=b$ ist $s=1$.
Weitere sehr klare Lösungen lieferten die Schüler Reinhard Wobst, 22. OS Dresden, Kl. 10, Dietmar Soyka, EOS „Karl Marx", Spremberg, Kl. 9, und Dietmar Müller, EOS Herzberg, Kl. 10. Die volle Punktzahl erreichten 13 von 110 Teilnehmern. Die meisten Schüler führten die Fallunterscheidung überhaupt nicht oder nur unvollständig durch. Häufig war zu beobachten, daß mit Ungleichungen nicht einwandfrei gearbeitet wurde.

Aufgabe 3

Für jedes $i=1, \ldots, n$ gilt: c_i und c_{n-i}' haben beide den Durchmesser $d_i=i\cdot\frac{2r}{n}$. Der Flächeninhalt der von je einem dieser Halbkreise und dem zugehörigen Durchmesserabschnitt begrenzten Fläche ist daher $A_i=\frac{\pi}{2}i^2\frac{r^2}{n^2}$.

Setzt man noch $A_0=0$, so sind die gesuchten Flächeninhalte

$$\begin{aligned} F_i &= A_i-A_{i-1}+A_{n-(i-1)}-A_{n-i}\\ &=\frac{\pi r^2}{2n^2}\left[i^2-(i-1)^2+\{n-(i-1)\}^2-(n-i)^2\right]\\ &=\frac{\pi r^2}{2n^2}\left[2i-1+2(n-i)+1\right]\\ &=\frac{\pi r^2}{2n^2}\cdot 2n=\frac{1}{n}\pi r^2 \end{aligned}$$

Die Flächeninhalte sind also untereinander gleich.

III. Auswertung

a) Ergebnisse: Von 6 möglichen Punkten wurden erreicht: 6 bzw. 5, 4, 3, 2 und nicht mehr als ein Punkt von 22 bzw. 46, 9, 9, 11 und 13 Schülern. Dabei wurde bewußt auch bzgl. Kleinigkeiten ein strenger Maßstab angelegt. Das begründet, warum soviele Schüler einen Abzug von einem Punkt erhielten.
b) Besondere Fälle.
1. Man glaubt, einen induktiven Beweis zu führen, obwohl in Wirklichkeit direkt bewiesen wird.
2. Viele Schüler haben nur Spezialfälle betrachtet, d. h. nur die ersten und letzten Flächenstücke berechnet.
3. Zum Teil wurde das Problem überhaupt nicht erfaßt (0 und 1 Punkt).
4. Man griff eine i-te Teilfläche heraus, ohne genauer zu sagen, in welchen Grenzen i variiert.
5. Einige Schüler verwendeten eine falsche Formel für den Inhalt eines Halbkreises.
6. Es gab relativ viele Flüchtigkeitsfehler.

Dr. G. Burosch, Universität Rostock

Aufgabe 4:

Lösung in Anlehnung an den Vorschlag der Aufgabenkommission: Für jede natürliche Zahl n treffen wir folgende Wahl der Parallelen und Lote:
Auf AD trage man von A aus eine Strecke der Länge $\frac{a}{2n}$ ab, sodann $(n-1)$-mal hintereinander Strecken der Länge $\frac{a}{n}$ und daran anschließend erneut eine Strecke der Länge $\frac{a}{2n}$. Der Endpunkt dieser letzten Teilstrecke fällt mit D zusammen, denn es ist

$$\frac{a}{2n}+(n-1)\frac{a}{n}+\frac{a}{2n}=a.$$

Durch die zwischen A und D liegenden Teilpunkte ziehe man Parallelen zu AB.

Sodann fälle man von jedem der 288 Punkte das Lot auf diejenige Parallele, von der er den kleinsten Abstand hat, bzw. falls er genau in der Mitte zwischen 2 Parallelen liegt, auf eine der beiden. Bei der angegebenen Wahl der Parallelen und Lote kann keines dieser Lote länger als $\frac{a}{2n}$ sein.

Für die Summe der Längen dieser Lote gilt also $\quad L_1 \leqq 288 \cdot \frac{a}{2n} = \frac{144a}{n}$.

Das Gleichheitszeichen wird genau dann realisiert, wenn jedes der Lote die Länge $\frac{a}{2n}$ hat.

Da die Summe der Längen der Parallelstrecken im Inneren des Quadrates

$$L_2 = n \cdot a$$

beträgt, erhält man

$$L = L_1 + L_2 \leqq \frac{144a}{n} + n \cdot a = \frac{a}{n}(n^2+144) =$$

$$= \frac{a}{n}(n^2 - 24n + 144 + 24n) =$$

$$= a\left[\frac{(n-12)^2}{n} + 24\right]$$

Ist nun $n = 12$, so folgt

$$L \leqq 24a.$$

Wenn hierbei sogar $L < 24a$ gilt, so ist die angegebene Verteilung der Parallelen und Lote von der in der Aufgabenstellung geforderten Art.

Gilt dagegen $L = 24a$, so liegt jeder der 288 Punkte genau in der Mitte zwischen 2 Parallelstrecken, so daß auf die erste und letzte keine Lote gefällt zu werden brauchen. Entfernt man nun diese beiden Parallelstrecken aus der angegebenen Verteilung, so wird $L_2 = 10a$ und damit erneut $L < 24a$.

Bemerkungen zu den Schülerlösungen:

Etwa ein Viertel aller Schüler löste die Aufgabe vollständig. Bei den meisten anderen Schülern fehlte die Diskussion des Falles, daß alle 288 Punkte genau in der Mitte zwischen zwei der angegebenen Parallelstrecken liegen.

Andere Schüler schränkten die Allgemeingültigkeit ihrer Beweise dadurch ein, daß AD in gleichgroße Strecken unterteilt oder eine ganz spezielle Verteilung der Punkte angenommen wurde. Zur Ermittlung der Anzahl der zu ziehenden Parallelstrecken benutzten einige Schüler eine Extremwertuntersuchung der Funktion

$f(x) = a \cdot x + \frac{144a}{x}$ mit Hilfe der Differentialrechnung.

Dr. M. Müller, Humboldt-Universität zu Berlin

Aufgabe 5:

Im wesentlichen wurde der von der Aufgabenkommission vorgesehene Lösungsweg beschritten, der auch im folgenden dargestellt wird.

Falls eine Lösung existiert, muß

(2) $\quad x > 0$ sein,

da sonst $\log_4 x$ nicht erklärt ist. Wegen

(3) $\quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1)$

wird aus der Gleichung (1)

$$\frac{4}{\log_x 4} + 3 = 2\log_x 2 \quad \text{und mit}$$

$$\log_x 4 \quad = 2\log_x 2 \quad \text{schließlich}$$

$$\frac{2}{\log_x 2} + 3 = 2\log_x 2.$$

Setzt man $u = \log_x 2$, so erfüllt u die quadratische Gleichung

$$u^2 - \frac{3}{2}u - 1 = 0 \quad \text{mit den Lösungen}$$

$$u_1 = 2, \quad u_2 = -\frac{1}{2}.$$

Aus $u = \log_x 2$ folgt $x^u = 2$. Mit den soeben ermittelten Werten für u bekommt man $x^2 = 2$ und hieraus $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, bzw. $x^{-\frac{1}{2}} = 2$ und hieraus $x_3 = \frac{1}{4}$. Wegen (2) ist x_2 keine Lösung der gegebenen Gleichung. Die Proben mit x_1 und x_3 zeigen, daß x_1 und x_3 die Gleichung (1) erfüllen.

Häufig wird der Lösungsweg etwas variiert. Man setze $z = \log_4 x$, d. h.

(4) $\quad 4^z = x$

Wegen $\log_x 2 = \frac{1}{2\log_4 x}$

geht die Gleichung (1) in eine quadratische Gleichung für z über:

$$4z^2 + 3z - 1 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$z_1 = \frac{1}{4}, \quad z_2 = -1, \quad \text{d. h. mit (4)}$$

$$x_1 = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}, \quad x_2 = 4^{-1} = \frac{1}{4}.$$

Bemerkungen: Vollständige Lösungen lieferten 43 Teilnehmer, in besonders übersichtlicher Darstellung die Schüler *Günter Schwalbe*, EOS Brand-Erbisdorf, Kl. 10 und *Thomas Jentzsch*, EOS „August Hermann Francke", Halle, Kl. 10. Die Lösungswege unterscheiden sich im wesentlichen nur durch die Wahl der Basen der Logarithmen. Viele Schüler verwarfen richtige Lösungen mit der Begründung, daß die Logarithmusfunktion keine negativen Werte annehmen könne. Hier wurde offensichtlich Definitionsbereich und Wertevorrat verwechselt.

Die hohe Zahl vollständiger Lösungen spricht dafür, daß diese Aufgabe doch recht einfach war.

Dr. K. Zacharias, Deutsche Akademie der Wissenschaft zu Berlin

Aufgabe 6:

Lösung des Schülers Thomas Jentsch, EOS „August Hermann Francke", Halle, Kl. 10

I. Aus der Aufgabenstellung ergibt sich

$$V_W = a^3$$

und $\quad V_R = V_W - 3V_Q + 2V_{Wi} = a^3 - 3ax^2 + 2x^3$

(V_W ... Volumen des Würfels W

V_R ... Volumen des Restkörpers

V_Q ... Volumen eines der drei herausgeschnittenen Quader

V_{Wi} ... Volumen des Würfels im Innern von W, den die drei Quader gemeinsam haben).

Nun soll $\quad V_R = \frac{V_W}{2}$,

d. h. $\quad a^3 - 3ax^2 + 2x^3 = \frac{a^3}{2}$ sein.

II. Es gilt, diese Gleichung zu lösen. Eine Äquivalenzumformung ergibt

$$x^3 - \frac{3ax^2}{2} + \frac{a^3}{4} = 0.$$

Dieser Gleichung ist folgende äquivalent, wie man sich leicht durch Ausmultiplizieren überzeugt:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - (1+\sqrt{3})\frac{a}{2}\right)\left(x - (1-\sqrt{3})\frac{a}{2}\right) = 0.$$

Nun ist ein Produkt genau dann Null, wenn es mindestens einer der Faktoren ist. Daher sind

$$x_1 = \frac{a}{2}, \quad x_2 = (1+\sqrt{3})\frac{a}{2}, \quad x_3 = (1-\sqrt{3})\frac{a}{2}$$

die Lösungen dieser Gleichung, und damit der Ausgangsgleichung. Die Lösungen x_2 und x_3 liefern keine Lösung der gestellten Aufgabe, da der geometrische Sachverhalt Werte für x, die größer als a bzw. kleiner als 0 sind, verbietet.

Ergebnis: Für $x = \frac{a}{2}$ und nur für diesen Wert von x hat der Restkörper das halbe Volumen des ursprünglichen Würfels.

Ergänzung zu dieser Lösung:

Will man die Lösungen der Gleichung

(1) $\quad x^3 - \frac{3ax^2}{2} + \frac{a^3}{4} = 0$

bestimmen, so wird man (auf Grund der Aufgabenstellung) probieren, ob $x = \frac{a}{2}$ eine Lösung ist. Man stellt fest, daß dies der Fall ist, und erhält wegen

$$\left(x^3 - \frac{3ax^2}{2} + \frac{a^3}{4}\right) : \left(x - \frac{a}{2}\right) = x^2 - ax - \frac{a^2}{2}$$

die übrigen Lösungen von (1) in den Lösungen von

$x^2 - ax - \frac{a^2}{2} = 0$. Auf diesem Wege gelangt man auch zu der Zerlegung

$$x^3 - \frac{3ax^2}{2} + \frac{a^3}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - (1+\sqrt{3})\frac{a}{2}\right)\left(x - (1-\sqrt{3})\frac{a}{2}\right),$$

die von Schüler *Thomas Jentsch*, EOS „August Hermann Francke", Halle, Kl. 10 angegeben wurde.

Ein Schüler weist auf folgendes hin:

Kommt man nicht sofort darauf, zu probieren ob $x = \frac{a}{2}$ eine Lösung von (1) ist, dann sollte man so vorgehen:

Durch die Substitution

$$x = z - \frac{p}{3}$$

in der kubischen Gleichung

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

entsteht eine kubische Gleichung in z, welche die Potenz z^2 nicht enthält. Das wende man hier an, setze also

$$x=z+\frac{a}{2}$$

in (1) ein, und man erhält die Gleichung

$$z^3-\frac{3a^2z}{4}=0\,,\text{ d. h. } z\left(z^2-\frac{3a^2}{4}\right)=0\,,$$

aus der man sofort die Lösungen

$$z_1=0,\quad z_2=\frac{a\sqrt{3}}{2},\quad z_3=\frac{-a\sqrt{3}}{2}$$

ablesen kann. Lösungen von (1) müssen daher

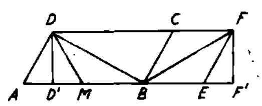
$x_1=z_1+\frac{a}{2},\quad x_2=z_2+\frac{a}{2},\quad x_3=z_3+\frac{a}{2}$ sein.

Allgemeine Bemerkungen:

Die kubische Gleichung (1), die gelöst werden muß, wurde von etwa 90 % der Schüler aufgestellt. Zum Teil geschah dies jedoch ohne jegliche erläuternde Bemerkung. Über diesen Abschnitt kamen dann aber $\frac{1}{3}$ der Schüler nicht hinaus. Von den übrigen erreichten etwa $\frac{1}{3}$ (genau 20 Schüler) die volle Punktzahl 6. Bei vielen anderen fehlte zur Vollständigkeit die Betrachtung der beiden von $x=\frac{a}{2}$ verschiedenen Lösungen der Gleichung (1).

Dipl.-Math. K.-D. Drews, Universität Rostock

W 8 ■ 439 Es scheint zunächst, daß die Strecke $\overline{BD}$ länger als die Strecke $\overline{BF}$ ist. Die geometrische Untersuchung führt aber zu dem folgenden Ergebnis:



Es seien D' und F' die Fußpunkte der von D und F auf die Gerade AB gefällten Lote. Ferner sei M die Mitte der Strecke $\overline{AB}$. Die Länge der Seite $\overline{AD}$ sei gleich a. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\overline{AM}=\overline{MB}=a\,,\ \overline{BE}=a\,,\ \overline{BC}=\overline{EF}=a\,.$$

Aus $\overline{DD'}=\overline{FF'}$ folgt daher $\Delta AD'D\cong\Delta EF'F$, also $\overline{AD'}=\overline{EF'}$. Ferner ist wegen $\sphericalangle DAM=60°$ und $\overline{AD}=\overline{AM}$ das Dreieck AMD gleichseitig, also $\overline{AD'}=\overline{D'M}$. Daraus folgt $\overline{D'B}=\overline{D'M}+\overline{MB}=\overline{EF'}+\overline{BE}=\overline{BF'}$.

Daher gilt $\Delta\, DD'B\cong\Delta\, FF'B$, also $\overline{BD}=\overline{BF}$. Damit haben wir bewiesen, daß die Diagonale $\overline{BD}$ des Parallelogramms $ABCD$ *ebenso lang* ist wie die Diagonale $\overline{BF}$ des Rhombus $BEFC$.

Es liegt hier also eine *optische Täuschung* vor, die Diagonale des „lang gestreckten" Parallelogramms erscheint länger als die des Rhombus.

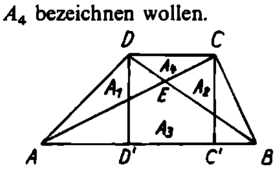
Die Länge der Strecke $\overline{BD}$ und damit auch die Strecke $\overline{BF}$ läßt sich leicht berechnen:

Es gilt nämlich $\overline{DD'}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ und $\overline{D'B}=\frac{3}{2}a$,

also $\overline{BD}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{3}{2}a\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{9}{4}a^2}$

$$=\sqrt{3a^2}=a\sqrt{3}\,.$$

▲ 440 Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, das durch die beiden Diagonalen in die Dreiecke AED, BCE, ABE und CDE zerlegt wird, deren Flächeninhalte wir mit A_1, A_2, A_3 bzw. A_4 bezeichnen wollen.



a) 1. Es sei $ABCD$ ein *Trapez* mit $AB \parallel CD$. Dann hat der Punkt D den gleichen Abstand von der Geraden AB wie der Punkt C, d. h. $\overline{DD'}=\overline{CC'}$.

Daraus folgt, daß die Dreiecke ABD und ABC flächengleich sind, also gilt $A_1+A_3=A_2+A_3$. Daraus folgt $A_1=A_2$, *d. h.* zwei sich gegenüberliegende Dreiecke sind flächengleich.

2. Zwei sich gegenüberliegende Dreiecke seien flächengleich: $A_1=A_2$. Dann gilt $A_1+A_3=A_2+A_3$, d. h. die Dreiecke ABD und ABC sind flächengleich. Da diese Dreiecke die gemeinsame Grundseite $\overline{AB}$ haben, haben sie also auch gleichlange Höhen: $\overline{DD'}=\overline{CC'}$. Der Punkt D hat daher den gleichen Abstand von der Geraden AB wie der Punkt C, d. h. $CD \parallel AB$.

Das Viereck $ABCD$ ist daher ein Trapez.

b) 1. Es sei $ABCD$ ein *Parallelogramm*.

Dann folgt aus a) 1. wegen $AB \parallel CD$ $A_1=A_2$.

Ferner folgt wegen $BC \parallel AD$ $\quad A_3=A_4$.

Da die Diagonalen im Parallelogramm sich halbieren, gilt aber auch $A_1=A_3$. Also gilt $A_1=A_2=A_3=A_4$, d. h. die vier Dreiecke sind flächengleich.

2. Es sei $A_1=A_2=A_3=A_4$.

Aus $A_1=A_2$ folgt wegen *a)* 2. $\quad AB \parallel CD$.

Ferner folgt aus $A_3=A_4$ $\quad BC \parallel AD$.

Das Viereck $ABCD$ ist daher ein Parallelogramm.

▲ 441 Es seien c die Maßzahl der Länge der Hypotenuse (in cm), b und a die der Katheten; dann gilt:

$$c-b\ =b-a\,, \tag{1}$$

$$\frac{a\cdot b}{2}\ =294\,, \tag{2}$$

$$a^2+b^2=c^2\,. \tag{3}$$

Durch Substitution erhalten wir daraus $a^2+b^2=(2b-a)^2$ bzw. $3b^2=4ab$,

Weiter erhalten wir

$$ab=588 \qquad \text{bzw.}\quad 4ab=4\cdot 588\,.$$

$3b^2=4\cdot 588$, also $b=28$, $a=\frac{588}{b}=21$, $c=2b-a=35$.

Die Längen der Seiten des Dreiecks betragen somit 21 cm, 28 cm und 35 cm.

W 9 ■ 442 Nimmt man an, daß sich in dem Raum x Bänke und y Personen befinden, so erhält man folgende Gleichungen:

$$6(x-1)+3=y\,, \tag{1}$$

$$5x+4\ \ =y\,. \tag{2}$$

Man erhält aus (1) und (2) $6x-6+3=5x+4$, also $\underline{x=7}$ und danach aus (2) $\underline{y=39}$.

In dem Aufenthaltsraum befinden sich daher 39 Personen und 7 Bänke.

W 9 ■ 443 Es seien n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ die vier gesuchten natürlichen Zahlen; dann gilt

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=57\,120\,,$$

also $\qquad n^4<57\,120\,.$

Wegen $\qquad 239^2=57\,121$

folgt hieraus $\qquad n^2\leqq 239\,,$

ferner wegen $15^2=225$ und $16^2=256$ schließlich $n\leqq 15$. Nun gilt

$$57\,120=10\cdot 16\cdot 357=10\cdot 16\cdot 17\cdot 21$$

$=14\cdot 15\cdot 16\cdot 17$, also ist $n=14$. Die vier gesuchten Zahlen sind 14, 15, 16 und 17.

▲ 444 Da die reellen Zahlen a, b, c, d von Null verschieden sind, gilt wegen $abcd=1$

$\frac{1}{ab}=cd,\ \frac{1}{ac}=bd,\ \frac{1}{ad}=bc$. Nun gilt für alle positiven reellen Zahlen x

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geqq 0,\ \text{also}\ x-2+\frac{1}{x}\geqq 0,$$

d. h. $x+\frac{1}{x}\geqq 2$. Daher ergibt sich

$$ab+cd=ab+\frac{1}{ab}\geqq 2\,, \tag{1}$$

$$ac+bd=ac+\frac{1}{ac}\geqq 2\,, \tag{2}$$

$$ad+bc=ad+\frac{1}{ad}\geqq 2\,. \tag{3}$$

Außerdem gilt stets

$$(a-b)^2\geqq 0,\ \text{also}\ a^2-2ab+b^2\geqq 0,$$

d. h. $a^2+b^2\geqq 2ab$, ferner $c^2+d^2\geqq 2cd$.

Daraus folgt $a^2+b^2+c^2+d^2$

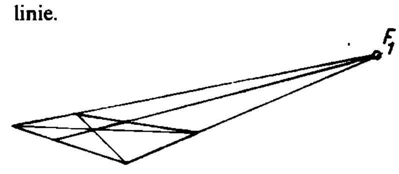
$$\geqq 2(ab+cd)=2\left(ab+\frac{1}{ab}\right)\geqq 4\,. \tag{4}$$

Aus (1), (2), (3) und (4) folgt also

$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd$

$\geqq 4+2+2+2=10$, w.z.b.w.

▲ 445 Durch Einzeichnen der Diagonalen in das Viereck erhält man zunächst das Bild des Mittelpunktes des Spielfeldes. Die Verlängerungen der beiden kürzeren Seiten des Spielfeldes schneiden sich in F_1, dem Fluchtpunkt der beiden Seiten. Da die Mittellinie parallel zu den beiden kürzeren Seiten des Spielfeldes verläuft, haben ihre Bilder F_1 als gemeinsamen Fluchtpunkt. Daher ergibt die Verbindung von F_1 mit dem Bild des Mittelpunktes das gesuchte Bild der Mittellinie.



W 10/12 ■ 446 a) Da die in der Gleichung (1) auftretenden Radikanden nicht negativ sein dürfen, gilt für die Lösungen x dieser Gleichung

$$2x+3\geqq 0,\ \text{also}\ x\geqq -\frac{3}{2},\ \text{und}\ 6-x\geqq 0,$$

$$\text{also}\quad x\leqq 6,\ \text{d. h.}\ -\frac{3}{2}\leqq x\leqq 6\,. \tag{5}$$

Wegen $\sqrt{2x+3}=(2x+3)^{\frac{1}{2}}$,

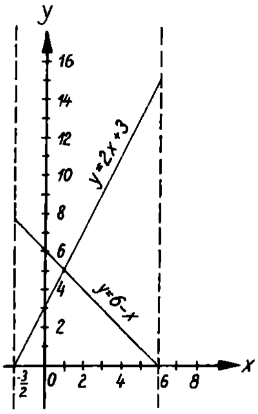
$\sqrt{\sqrt{2x+3}}=(2x+3)^{\frac{1}{4}}$ usw. ist die Gleichung (1) genau dann erfüllt, wenn

$(x+3)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=(6-x)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}$,

d. h. $\quad (2x+3)^{\frac{15}{16}}=(6-x)^{\frac{15}{16}}$ gilt. (1*)

Diese Gleichung ist aber nur dann erfüllt, wenn

$2x+3=6-x$, d. h. $x=1$ gilt. Da in diesem Fall die Bedingung (5) erfüllt ist, hat die Gleichung (1) *genau eine reelle Lösung*, nämlich $\underline{x=1}$.



b) Analog erhält man aus der Gleichung (2)

$$(2x+3)^{\frac{15}{16}}, =(2x+1)^{\frac{15}{16}}, \qquad (2^*)$$

also $2x+3=2x+1$, d. h. $3=1$. Das ist aber eine falsche Aussage. Die Gleichung (2) hat daher *keine reelle Lösung.*

c) Die Gleichung (3) ist genau dann erfüllt, wenn

$$(2x+3)^{\frac{15}{16}}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{16}}. \qquad (3^*)$$

Daraus folgt

$$2x+3=x+\frac{1}{2}, \quad \text{also } x=-\frac{5}{2}.$$

Nun müssen aber noch die Bedingungen

$$2x+3 \geqq 0, \text{ d. h. } x \geqq -\frac{3}{2} \textit{ und } x+\frac{1}{2} \geqq 0,$$

d. h. $x \geqq -\frac{1}{2}$, erfüllt sein. Das ist aber für $x=-\frac{5}{2}$ nicht der Fall; die Gleichung (3) hat daher ebenfalls *keine reelle Lösung.*

d) Die Gleichung (4) ist genau dann erfüllt, wenn

$$(2x+3)^{\frac{15}{16}}=2^{\frac{15}{16}}\left(x+\frac{3}{2}\right)^{\frac{15}{16}}. \qquad (4^*)$$

Daraus folgt

$2x+3=2\left(x+\frac{3}{2}\right)$, also $2x+3=2x+3$,

was für alle reellen Zahlen x zutrifft.

Außerdem muß aber die Bedingung $x \geqq -\frac{3}{2}$ erfüllt sein, da sonst die Radikanden in (4) negativ sind.

Die Gleichung (4) ist daher *für alle reellen Zahlen* x mit $x \geqq -\frac{3}{2}$ erfüllt.

Bemerkung: Man kann die obigen Gleichungen auch *graphisch* lösen.

Im Falle der Gleichung (1) stellt man z. B. die Funktionen

$$y=2x+3 \quad \text{und} \quad y=6-x$$

mit dem Definitionsbereich $-\frac{3}{2} \leqq x \leqq 6$ durch zwei Strecken graphisch dar und erhält den Schnittpunkt dieser Strecken mit den Koordinaten $x=1$, $y=5$ (vgl. die Abb.) in Übereinstimmung mit der oben rechnerisch erhaltenen Lösung.

Im Falle der Gleichung (2) sind die Geraden $y=2x+3$ und $y=2x+1$ parallel; man erhält keinen Schnittpunkt.

Im Falle der Gleichung (3) schneiden sich die Geraden $y=2x+3$ und $y=x+\frac{1}{2}$ außerhalb des Definitionsbereiches $x \geqq -\frac{1}{2}$.

Im Falle der Gleichung (4) fallen die Geraden zusammen.

W 10/12 ■ 447 Bezeichnet man die Länge des Radius des Grundkreises des Kegels mit R und die des Radius der Kugel mit r, so gilt

$$r^3=R^2h. \qquad (1)$$

Aus dem Satz des Thales und dem Höhensatz erhält man (vgl. die Abb.)

$$R^2=h(2r-h). \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$r^3-2rh^2+h^3=0. \qquad (3)$$

Als erste Lösung erkennt man sofort $r_1=h$, was bereits aus (1) zu erkennen war.

Spaltet man den Linearfaktor $r-h$ ab, so erhält man aus (3)

$$(r-h)(r^2+rh-h^2)=0,$$

also die weiteren Lösungen

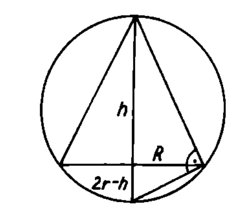
$$r_2=-\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\sqrt{5}$$

und $\quad r_3=-\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\sqrt{5}$, von denen

wegen $r_2>0$ und $r_3<0$ nur die Lösung

$$r_2=\frac{h}{2}(\sqrt{5}-1)$$

den Bedingungen der Aufgabe entspricht.



Die Aufgabe hat also genau zwei Lösungen.

Im ersten Fall ist wegen $r_1=h$

$$\underline{V_1=\frac{4}{3}\pi h^3},$$

im zweiten Fall ist wegen $r_2=\frac{h}{2}(\sqrt{5}-1)$

$$\underline{V_2=\frac{4}{3}\pi h^3(\sqrt{5}-2).}$$

▲ 452

20	15	40
45	25	5
10	35	30

▲ 453 Wir nehmen an, Peter habe m Hefte zu 7 Pf und n Hefte zu 10 Pf je Stück gekauft; dann gilt $7 \cdot m+10 \cdot n=261$. Alle Vielfachen von 10 enden auf die Ziffer 0. Aus den Vielfachen der 7 sind diejenigen auszuwählen, die auf die Ziffer 1 enden. Alle Lösungsmöglichkeiten sind aus der nachstehenden Tabelle ersichtlich.

m	n	$7 \cdot m$	$10 \cdot n$	$7 \cdot m+10 \cdot n$
3	24	21	240	261
13	17	91	170	261
23	10	161	100	261
33	3	231	30	261

Unter den von Peter gekauften Heften sind entweder 3 oder 13 oder 23 oder 33 zum Preise von 7 Pf das Stück.

▲ 454 Es sei a die Breite und b die Länge eines solchen Rechtecks; dann gilt $2 \cdot (a+b)=a \cdot b$. Wir nehmen an, daß $a<b$ gilt, und erhalten die folgende Tabelle:

a	b	$a+b$	$2(a+b)$	$a \cdot b$
1	1	2	4	1
1	2	3	6	2
1	3	4	8	3
1	4	5	10	4
1	5	6	12	5
1	6	7	14	6
2	2	4	8	4
2	3	5	10	6
2	4	6	12	8
2	5	7	14	10
2	6	8	16	12
3	3	6	12	9
3	4	7	14	12
3	5	8	16	15
3	6	9	18	18
4	4	8	16	16
4	5	9	18	20
4	6	10	20	24
5	5	10	20	25
5	6	11	22	30
6	6	12	24	36

Der abgebildeten Tabelle ist zu entnehmen, daß es genau zwei verschiedene Rechtecke gibt, die die gestellten Bedingungen erfüllen.

$a_1=3$ cm; $b_1=6$ cm;
$a_2=4$ cm; $b_2=4$ cm.

W 5 ■ 455 Aus $82-22=60$ und $60:3=20$ folgt, daß das billigste Stück Kuchen 20 Pf kostet. Aus $82+23=105$ und $105:3=35$ folgt, daß das teuerste Stück Kuchen 35 Pf kostet. Aus $82-20-35=27$ folgt, daß das dritte Stück Kuchen 27 Pf kostet.

W 5 ■ 456 Beim Frühstück verzehrten die drei Freunde $3 \cdot 2$ Stullen, also 6 Stullen. Dadurch verringerte sich die Anzahl der vorhandenen Stullen auf ein Drittel. Die Freunde hatten somit zwei Drittel aller Stullen verzehrt. Zwei Drittel waren 6 Stück, ein Drittel sind demnach 3 Stück. Folglich hatten Bernd und Dieter zusammen $3 \cdot 3$ Stullen, also 9 Stullen mitgebracht.

▲ 457 Da die Gerade AE den Winkel α halbiert, gilt $\sphericalangle EAB=\frac{\alpha}{2}$. Nach dem Außenwin-

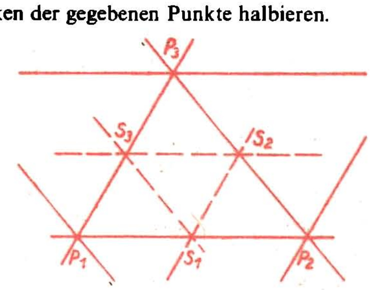
kelsatz gilt $\frac{\alpha}{2}=\delta-\beta=83°-60°=23°$ und damit $\alpha=46°$. Aus $\alpha+\beta+\gamma=46°+60°+\gamma=180°$ folgt $\gamma=74°$. Für das Dreieck ADS gilt ferner $\frac{\alpha}{2}+90°+\varphi=180°$, also
$\varphi=180°-90°-23°=67°$.

▲ 458 Da die gesuchte dreistellige Zahl durch 3, 4 und 5 teilbar sein soll, muß sie wegen $3\cdot4\cdot5=60$ ein Vielfaches von 60 sein, also 120, 180, 240, ..., 900, 960.
Da die gesuchte Zahl nicht durch 9 teilbar ist, entfallen aus der angegebenen Zahlenfolge alle Zahlen, deren Quersumme durch 9 teilbar ist; es entfallen also die Zahlen 180, 360, 540, 720 und 900. Von den verbleibenden Zahlen sind diejenigen zu streichen, die durch 25 teilbar sind; das sind die Zahlen 300 und 600. Die Zahl 780 ist durch 13 teilbar; sie ist ebenfalls zu streichen. Für die nunmehr verbleibenden Zahlen gilt:

$$\begin{aligned}120&=11\cdot10+10,\\240&=11\cdot21+\ \ 9,\\420&=11\cdot38+\ \ 2,\\480&=11\cdot43+\ \ 7,\\660&=11\cdot60+\ \ 0,\\840&=11\cdot76+\ \ 4,\\960&=11\cdot87+\ \ 3.\end{aligned}$$

Die zu ermittelnde Zahl heißt 840.

▲ 459 Eine Gerade mit der geforderten Eigenschaft wird folgendermaßen konstruiert:
Wir zeichnen die Verbindungsgerade von zwei der gegebenen Punkte und zeichnen durch den dritten gegebenen Punkt die Parallele zu der Verbindungsgeraden. Die nun zu konstruierende Mittellinie zu den beiden gezeichneten parallelen Geraden erfüllt die geforderte Eigenschaft. Es gibt also genau drei solcher Geraden. Diese drei Geraden schneiden sich paarweise in den Punkten S_1, S_2 und S_3, die die Verbindungsstrecken der gegebenen Punkte halbieren.



W 6 ■ 460 Aus d) folgt unmittelbar: Der Tischler wohnt in Plauen. Aus e) folgt unmittelbar: Herr Fischer wohnt in Plauen. Folglich ist Herr Fischer von Beruf Tischler.
Aus a) folgt unmittelbar: Der Ingenieur wohnt in Zwickau.
Aus f) folgt: Der Kraftfahrer wohnt nicht in Aue.
Also wohnt der Kraftfahrer in Werdau; damit wohnt der Klempner in Aue.
Aus b) und c) folgt: Der Kraftfahrer heißt weder Conrad noch Fischer noch Meier. Der Kraftfahrer heißt demnach Lange.
Aus b) folgt: Der Ingenieur heißt nicht Conrad. Folglich heißt er Meier. Dann heißt der Klempner Conrad.

Name	Beruf	Wohnort
Fischer	Tischler	Plauen
Lange	Kraftfahrer	Werdau
Meier	Ingenieur	Zwickau
Conrad	Klempner	Aue

W 6 ■ 461 Alle gemeinen Brüche $\frac{n}{1024}$ mit $0<n<1024$ haben den Nenner $1024=2^{10}$. Durch Erweitern dieser Brüche mit 5^{10} gewinnen wir daraus Brüche von der Form

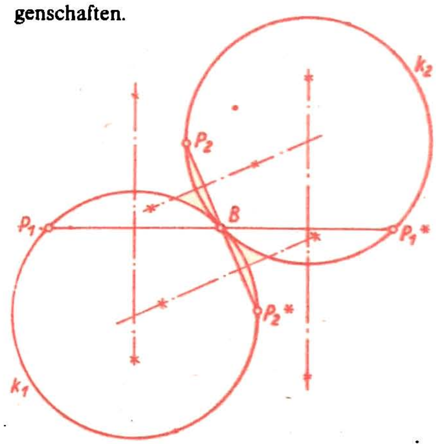
$$\frac{5^{10}\cdot n}{5^{10}\cdot 2^{10}}=\frac{5^{10}\cdot n}{10^{10}},$$

deren Nenner eine Zehnerpotenz ist und die sich deshalb stets als endlicher Dezimalbruch schreiben lassen.
Beispiel: Für $n=3$ erhalten wir

$$\frac{3}{1024}=\frac{5^{10}\cdot3}{10^{10}}=\frac{9\,765\,625\cdot3}{10^{10}}=\frac{29\,296\,875}{10^{10}}$$
$$=0{,}0029296875.$$

▲ 462 Die einzige gerade Primzahl ist die Zahl 2; aus $p=2$ folgt $p+2=4$; das widerspricht der Bedingung, daß $p+2$ eine Primzahl sein soll. Aus $p=3$ folgt $p+2=5$ und $p+4=7$. Alle weiteren Primzahlen sind nicht durch 3 teilbar; sie sind also von der Form $3m+1$ oder $3m+2$, da sie bei der Division durch 3 den Rest 2 oder 1 lassen. Es sei $p=3m+1$ eine Primzahl; dann ist $p+2=3m+3$ keine Primzahl, da diese Zahl durch 3 teilbar ist. Es sei $p=3m+2$ eine Primzahl; dann ist $p+4=3m+6$ keine Primzahl, da diese Zahl durch 3 teilbar ist. Es gibt also genau einen sogenannten „Primzahldrilling", er besteht aus den Zahlen 3, 5 und 7.

▲ 463 Wir drehen den Punkt P_1 um B als Drehpunkt im positiven Sinn um 180° und erhalten bei dieser Drehung $P_1{}^*$ als Bildpunkt von P_1. Wir drehen ferner den Punkt P_2 um B als Drehpunkt im positiven Sinn um 180° und erhalten $P_2{}^*$ als Bildpunkt von P_2. Auf Grund der vorliegenden Symmetrieeigenschaften (k_1 und k_2 sollen sich berühren und gleiche Radien besitzen) geht k_2 durch $P_1{}^*$ und k_1 durch $P_2{}^*$. Es sind also nur die Umkreise der beiden Dreiecke $BP_1P_2{}^*$ und $P_2BP_1{}^*$ in der bekannten Weise zu konstruieren; diese besitzen die geforderten Eigenschaften.



▲ 464 Jedes konvexe n-Eck besitzt $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen. Bezeichnet man die Anzahl der Diagonalen des ersten Vielecks mit $A=\frac{x(x-3)}{2}$, so gilt für die des zweiten Vielecks
$B=\frac{(21-x)(18-x)}{2}$, und wir erhalten für

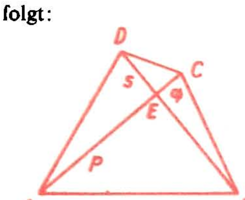
$$x\leqq 8:\quad A\leqq\frac{8\cdot5}{2}=20,\quad B\leqq\frac{13\cdot10}{2}=65;$$
$$x=9:\quad A=\frac{9\cdot6}{2}=27,\quad B=\frac{12\cdot9}{2}=54;$$
$$x\geqq10:\quad A\geqq\frac{10\cdot7}{2}=35,\quad B\geqq\frac{11\cdot8}{2}=44.$$

Die Bedingung $2A=B$ ist daher nur für $x=9$ erfüllt; es handelt sich also um ein 9eck und wegen $21-9=12$ um ein 12eck.

W 7 ■ 465 Die erste Ziffer der vierstelligen Zahl sei a und die dritte b; dann läßt sich die vierstellige Zahl wie folgt darstellen:
$1000a+100a+10b+b=1100a+11b$
$=11(100a+b)$. Da die Zahl eine Quadratzahl sein soll, muß sie durch 11^2 teilbar sein. Das trifft zu, wenn 11 Teiler von $100a+b$ ist. Wegen $100a+b=99a+a+b$ ist diese Zahl durch 11 teilbar, wenn $a+b$ durch 11 teilbar ist.
Wegen $0<a<10$ und $0\leqq b<10$ ist dann aber $a+b=11$, also $11(100a+b)$
$=11(99a+11)=11^2(9a+1)$, wobei $9a+1$ eine Quadratzahl ist. Das trifft aber nur für $a=7$ zu. Wir erhalten $b=4$, also die Kraftfahrzeugnummer $7744=88^2$.

W 7 ■ 466 Aus $adfc=befc$ folgt $ad=be$; aus $adeb=cfeb$ folgt $ad=cf$; es gilt demnach $ad=be=cf$. Aus $adbe=144$ und $ad=be$ folgt $ad=be=cf=12$. Die Zahl 12 läßt sich auf dreifache Weise als Produkt darstellen, nämlich durch $1\cdot12=2\cdot6=3\cdot4=12$. Eine Lösung der Aufgabe ist somit durch $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=12$, $e=6$ und $f=4$ gegeben.

▲ 467 Es seien $ABCD$ das gegebene Viereck und E der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Wir bezeichnen die Längen der Diagonalen und der Abschnitte der Diagonalen wie folgt:



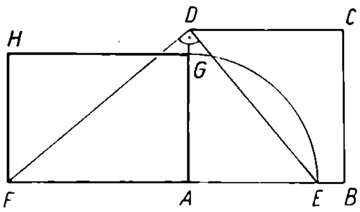
$\overline{AC}=d$, $\overline{AE}=p$, $\overline{EC}=q$, $\overline{BD}=f$,
$\overline{BE}=r$, $\overline{ED}=s$.

Durch die beiden Diagonalen wird das Viereck in vier rechtwinklige Dreiecke zerlegt (vgl. die Abb.). Daher beträgt der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$

$$A=\frac{pr}{2}+\frac{qr}{2}+\frac{ps}{2}+\frac{qs}{2}=\frac{p}{2}(r+s)+\frac{q}{2}(r+s)$$
$$=\frac{(p+q)(r+s)}{2},\quad A=\frac{ef}{2}.$$

Der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ ist also gleich dem halben Produkt der Längen der Diagonalen, w.z.b.w.

▲ 468 Wir verbinden D mit E und errichten in D auf $\overline{DE}$ die Senkrechte, die die Verlängerung von $\overline{AB}$ über A hinaus im Punkt F schneidet. Dann ist $\overline{AF}$ die gesuchte Rechteckseite.



Da das Dreieck FED rechtwinklig ist, gilt nämlich nach dem Höhensatz

$$\overline{AD}^2=\overline{AF}\cdot\overline{AE}\ ;$$

das Quadrat $ABCD$ ist also dem in der Abbildung dargestellten Rechteck $AGHF$ mit den Seiten $\overline{AF}$ und $\overline{AG}=\overline{AE}$ flächengleich.

W 8 ■ 469 a) Bezeichnet man die Zeitdifferenz (in Stunden) zwischen der Moskauer Zeit und der Japanischen Zeit mit x, so gilt

$$\left|\left(15\frac{50}{60}-x\right)-\left(4\frac{40}{60}+x\right)\right|<1,$$

also $\left|11\frac{10}{60}-2x\right|<1,$

d.h. $11\frac{1}{6}-2x<1,\quad 2x>10\frac{1}{6},\quad x>5\frac{1}{12}$

und $11\frac{1}{6}-2x>-1,\quad 2x<12\frac{1}{6},\quad x<6\frac{1}{12};$

daraus folgt, weil x ganzzahlig ist, $x=6$.
Die Zeitdifferenz zwischen der Moskauer und der Japanischen Zeit beträgt also 6 h.
Wir erhalten daher für die Zeit des Hinfluges wegen

$15\frac{50}{60}-6=9\frac{50}{60}$ 9 h 50 min

und für die Zeit des Rückfluges wegen

$4\frac{40}{60}+6=10\frac{40}{60}$ 10 h 40 min.

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt daher für den Hinflug

$$\frac{8000}{9\frac{5}{6}}\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}=\frac{8000\cdot 6}{59}\approx 814\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$$

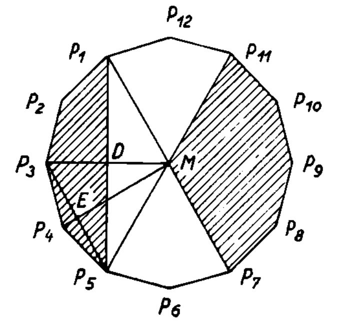
und für den Rückflug

$$\frac{8000}{10\frac{2}{3}}\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}=\frac{8000\cdot 3}{32}\approx 750\,\mathrm{km\cdot h^{-1}},$$

W 8 ■ 470 Bei der *1. und 2. Wägung* werden auf jede Waagschale je eine von vier der sechs Kugeln gelegt, so daß jede dieser vier Kugeln nur einmal auf der Waage liegt:

1. Fall: Bei beiden Wägungen ist die Waage nicht im Gleichgewicht: Durch den Ausschlag der Waage wird bei jeder der beiden Wägungen je eine Kugel als leichtere erkannt. Da es laut Aufgabenstellung nur zwei leichtere Kugeln gibt, sind die vier übrigen Kugeln sämtlich die schwereren.

2. Fall: Nur bei einer der beiden Wägungen ist die Waage nicht im Gleichgewicht: Eine Kugel ist damit als schwerere und eine



andere als leichtere erkannt worden. Weiterhin sind zwei weitere Kugeln als Kugeln gleicher Masse erkannt worden. Die beiden Kugeln gleicher Masse können keine leichteren Kugeln sein, weil es sonst im Widerspruch zur Aufgabenstellung mindestens drei leichtere Kugeln gäbe. Die beiden bei der 1. und 2. Wägung noch nicht aufgelegten Kugeln sind eine leichtere und eine schwerere. Der Entscheid, welche von beiden die leichtere ist, wird mittels der 3. Wägung gefällt.

3. Fall: Bei beiden Wägungen ist die Waage im Gleichgewicht: Es sind damit zwei Paare von Kugeln mit jeweils gleicher Masse bekannt. Bei der dritten Wägung wird je eine Kugel beider Paare auf die Waage gelegt. Ist jetzt die Waage im Gleichgewicht, so haben alle vier Kugeln beider Paare gleiche Masse. Diese vier Kugeln sind damit die schwereren und die beiden übrigen Kugeln die leichteren. Ist bei der dritten Wägung die Waage nicht im Gleichgewicht, so wird durch den Ausschlag der Waage eine der aufgelegten Kugeln und damit gleichzeitig die mit ihr massegleiche als leichtere Kugel erkannt. Die übrigen vier Kugeln sind die schwereren.

▲ 471 Wegen $r=ab-d$ und $q=\frac{m}{d}$ erhält man

$$1+4rq=1+4\,(ab-d\frac{m}{d}=1+4\frac{ab}{d}m-4m.$$

$$1+4rq=1+4\,(ab-d)\frac{m}{d}=1+4\frac{ab}{d}m-4m.$$

Nun ist aber $\frac{ab}{d}=m$; denn das Produkt zweier natürlicher Zahlen a und b ist gleich dem Produkt aus ihrem g.g.T. und ihrem k.g.V. Setzt man nämlich $a=da_1$ und $b=db_1$, so ist $m=da_1b_1$, und man erhält $ab=da_1db_1=d\,(da_1b_1)=dm$. Man erhält daher weiter

$1+4rq=1+4m^2-4m=4m^2-4m+1$
$=(2m-1)^2.$

Damit ist bewiesen, daß die Zahl $1+4rq$ stets gleich dem Quadrat der natürlichen Zahl $2m-1$ ist.
Für $a=8$, $b=6$ erhält man

$$d=2,\quad m=24,\quad r=8\cdot 6-2=46,\quad q=\frac{24}{2}=12,$$

also $1+4rq=1+4\cdot 46\cdot 12=2209=47^2.$

▲ 472 Wir bezeichnen die Eckpunkte des regelmäßigen Zwölfecks mit $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{12}$, den Mittelpunkt seines Umkreises mit M und die Mitte der Strecke $\overline{P_3M}$ mit D. Ferner bezeichnen wir den Flächeninhalt des regelmäßigen Zwölfecks mit A und der linken Teilfigur $P_1P_2P_3P_4P_5$ mit A_1,
mittleren Teilfigur $P_1P_5P_6P_7MP_{11}P_{12}$ mit A_2,
rechten Teilfigur $MP_7P_8P_9P_{10}P_{11}$ mit A_3.
Den Radius des Umkreises bezeichnen wir mit r.
Dann ist wegen $\sphericalangle P_5MP_3=60°$ und wegen $\overline{MP_5}=\overline{MP_3}$ das Dreieck P_5MP_3 gleichseitig mit den Seitenlängen r und der Höhe $\overline{P_5D}=\frac{r}{2}\sqrt{3}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks MP_1P_5 beträgt also $\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$.
Ferner ist, wenn man den Schnittpunkt der Strecken $\overline{MP_4}$ und $\overline{P_5P_3}$ mit E bezeichnet, $\overline{P_5E}=\frac{r}{2}$ und $\overline{MP_4}=r$, also der Flächeninhalt des Dreiecks MP_4P_5 und aller anderen elf gleichschenkligen Dreiecke, deren Basis eine Zwölfeckseite ist und deren Spitze in M liegt, gleich $\frac{r^2}{4}$. Wir erhalten daher

$$A_1=4\cdot\frac{r^2}{4}-\frac{r^2}{4}\sqrt{3}=\frac{r^2}{4}(4-\sqrt{3})\approx 0{,}567\,r^2,$$

$$A_2=4\cdot\frac{r^2}{4}+\frac{r^2}{4}\sqrt{3}=\frac{r^2}{4}(4+\sqrt{3})\approx 1{,}433\,r^2,$$

$$A_3=4\cdot\frac{r^2}{4}=r^2.$$

Daraus folgt $A_1+A_3\approx 1{,}567\,r^2$,
also $A_1+A_3>A_2$, (1)
d.h. der Flächeninhalt der mittleren Teilfigur ist etwas *kleiner* als die Summe der Flächeninhalte der beiden äußeren Teilfiguren. Dieses Ergebnis erscheint überraschend; denn die meisten Leser haben sicher zunächst angenommen, daß der Flächeninhalt der mittleren Teilfigur größer ist. Es handelt sich um eine optische Täuschung, da der Flächeninhalt einer weißen Figur im allgemeinen größer erscheint als der Flächeninhalt einer flächengleichen schwarzen Figur.

Bemerkung: Die Ungleichung (1) läßt sich noch einfacher herleiten, wobei man nicht die Flächeninhalte der einzelnen Teilfiguren zu berechnen braucht.
Bezeichnet man nämlich den Flächeninhalt des Dreiecks MP_1P_5 mit A_4, so gilt

$$A_1>A_4,$$

$$A_2=\frac{4A}{12}+A_4,$$

$$A_3=\frac{4A}{12},$$

also $A_1+A_3>A_4+\frac{4A}{12}=A_2$, w.z.b.w.

W 9 ■ 473 a) Es sei $a\neq 0$, $a\neq 1$ und $a\neq -1$. Angenommen, (x, y, z) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungsystems. Dann folgt aus (1)

$ay=2-x$, also wegen $a\neq 0$ $\quad y=\frac{2-x}{a}$, (4)

und aus (3)

$az=3-x$, also wegen $a\neq 0$ $\quad z=\frac{3-x}{a}$. (5)

Setzt man in (2) ein, so erhält man

$$\frac{2-x}{a}-\frac{a^2(3-x)}{a}=1,\quad 2-x-3a^2+a^2x=a,$$

$$x(a^2-1)=3a^2+a-2. \qquad (6)$$

Hieraus folgt wegen $a^2 \neq 1$

$$x=\frac{3a^2+a-2}{a^2-1}=\frac{3a^2+3a-2a-2}{(a+1)(a-1)}$$

$$=\frac{(3a-2)(a+1)}{(a+1)(a-1)},$$

$$x=\frac{3a-2}{a-1}. \qquad (7)$$

Ferner erhält man aus (4) und (5)

$$y=\frac{2-x}{a}=\frac{1}{a}\left(2-\frac{3a-2}{a-1}\right)=\frac{2a-2-3a+2}{a(a-1)}$$

$$=\frac{1}{1-a}, \qquad (8)$$

$$z=\frac{3-x}{a}=\frac{1}{a}\left(3-\frac{3a-2}{a-1}\right)=\frac{3a-3-3a+2}{a(a-1)}$$

$$=\frac{1}{a(1-a)}. \qquad (9)$$

Setzt man die durch (7), (8) und (9) ermittelten Werte für x, y, z in (1), (2) und (3) ein, so stellt man fest, daß diese Gleichungen erfüllt sind.
Im Falle $a \neq 0$, $a \neq 1$ und $a \neq -1$ hat also das Gleichungssystem *genau eine Lösung*, nämlich

$$x=\frac{3a-2}{a-1},\quad y=\frac{1}{1-a},\quad z=\frac{1}{a(1-a)}.$$

b) Es sei $a=0$. Dann folgt aus (1) $x=2$ und aus (3) $x=3$. Das ist ein Widerspruch, das Gleichungssystem hat also in diesem Falle *keine Lösung*.

c) Es sei $a=1$. Dann folgt aus (6)

$$0=3+1-2=2;$$

das ist ebenfalls ein Widerspruch; das Gleichungssystem hat auch in diesem Falle *keine Lösung*.

d) Es sei $a=-1$. Dann ist $a^2-1=0$ und $3a^2+a-2=0$, d. h., die Gleichung (6) ist für alle reellen Zahlen x erfüllt. Das Gleichungssystem hat in diesem Falle unendlich viele Lösungen, nämlich

$x=t$, wo t eine beliebige reelle Zahl ist,
$y=t-2$,
$z=t-3$.

In diesem Fall sind nämlich die Gleichungen (1), (2) und (3) erfüllt.

W 9 ■ 474 a) Von jedem der 8 Punkte kann man genau 7 Verbindungsgeraden ziehen, die diesen Punkt mit den übrigen 7 Punkten verbinden. Man erhält daher $8 \cdot 7=56$ solcher Geraden. Dabei ist aber jede dieser Geraden doppelt gezählt worden. Die Anzahl der Verbindungsgeraden beträgt daher in diesem Falle $\frac{8 \cdot 7}{2}=\frac{56}{2}=28$.

b) In diesem Falle kann man von jedem der n Punkte $n-1$ Verbindungsgeraden ziehen, wobei jede Gerade wieder doppelt gezählt ist. Man erhält daher in diesem Falle

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ Verbindungsgeraden.}$$

c) In diesem Falle erhält man die Gleichung

$$\frac{n(n-1)}{2}=45, \text{ also } n(n-1)=90.$$

Daraus folgt $n^2>90$, d. h. $n>9$ und $(n-1)^2<90$, d. h. $n-1 \leqq 9$, also $n \leqq 10$. Also ist $n=10$. Es sind also genau 10 Punkte gegeben; denn man erhält

$$\frac{10 \cdot 9}{2}=45 \text{ Verbindungsgeraden.}$$

Man kann aber auch die Gleichung $n(n-1)=90$ mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen lösen und erhält

$$n^2-n-90=0,$$

$$n=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+90}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{361}{4}}=\frac{1+19}{2}=10,$$

da nur die positive Lösung der quadratischen Gleichung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Lösungen zu Ärbsi-Knobelmagazin

1 Das einzuzäunende Grundstück hat einen Umfang von 210 m.

2	4	8	14		16	3	7
	17		2	15	9		6
	5	11	10		1	12	13

3 Karin hat recht. Wenn sie zu Fuß gingen, wäre sie erst nach 8 Stunden in Rätselhagen. Wenn sie aber abwechselnd fahren und gehen, sind sie bereits nach sechs Stunden zusammen in Rätselhagen, obwohl jeder von ihnen die Hälfte des Weges zu Fuß zurücklegt.

4 $x_1=360$ $x_2=504$ $x_3=432$;
Die Summe beträgt 1080.

5 Das Haus wurde nach dem Bauplan (Grundriß) B gebaut.

6 Die größte Tiefe des Nördlichen Eismeers beträgt 5,4 km.

7 Krawuttke kombiniert folgendermaßen: Zwei Federn liegen wieder in der Tasche. Wenn nun zwei weiße Federn in der Tasche liegen, weiß Frau Schulze sofort, daß sie eine weiße Feder auf dem Kopf trägt, dann haben die restlichen Mitspieler eine schwarze Feder im Haar, und mehr als vier schwarze Federn sind ja nicht vorhanden. Da sich Frau Schulze ruhig verhielt, mußte Krawuttke annehmen, daß er eine weiße Feder im Haar trug.

8 Der Fahrer des Milchautos fährt täglich folgende Route: Er kommt von der Molkerei rechts im Bild und biegt gleich zu Beginn der Hauptstraße, Ecke Steinweg, links in die Lange Straße. Hat er diese durchfahren, fährt er auf der Hauptstraße zurück und biegt rechts in den Hainweg ein. Danach überquert er die Hauptstraße und fährt in den Roggenpfad. Von hier ist es dann kein Problem mehr, den kürzesten Weg zu finden. Vergleicht: Wettergasse, Gerstenweg, Rosenstraße, Kurze Straße, Gartenweg, Krebsweg, Tannenweg und zurück zur Hauptstraße, wo es in Pfeilrichtung zum nächsten Stadtteil geht.

9 48 Maschinen wurden aufgestellt. (Die Produktion stieg um 33,3 %)

10 Ein Blatt Papier ist 0,07 mm dick.

Lösungen zu alpha-heiter

Anglerglück

Jeder hat die Chance, 20 Karpfen zu fangen.

Katten, kroezen, bloempotten en maiskolven

Sinngemäße Übersetzung aus dem Niederländischen:
Wieviel Krüge müssen wir auf die rechte Waagschale der Waage (rechts unten) setzen, um zwischen beiden Waagschalen Gleichgewicht zu erhalten?
Antwort: Auf die Waagschale müssen 5 Krüge gestellt werden. (Op de schaal moeten 5 Kroezen worden gezet.)

Schwierige Sache

Eine der möglichen Lösungen:
$139+4=143$; $86+57=143$

Stimmt das?

$$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}}{a^n-1}}=a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}$$

Silbenrätsel

Mittel, Ober, Schnitt, Kreis, Ab, Un;
M O S K A U

Kartenfaltübungen

Abb. 1: man halte den Bogen mit der beschrifteten Seite nach unten:
2 3 5 6
1 8 7 4
Nun falte man die rechte Hälfte des Bogens nach links, so daß die 5 über 2, die 6 über 3, die 4 über der 1 und die 7 über der 8 liegt. Die untere Hälfte falte man nun nach oben, so daß die 4 über der 5 und die 7 über der 6 liegt. Anschließend falte man 4 und 5 zwischen 6 und 3 und falte 1 und 2 unter das Paket.
Abb. 2: Der zweite Bogen wird zuerst in der Mitte parallel zur längeren Seite so gefaltet, daß die Zahlen außen sind und so gehalten, daß 4 5 3 6 oben liegt. Dann falte man 4 auf 5. Das rechte Ende des Streifens (Quadrate 6 und 7) wird zwischen 1 und 4 gesteckt und dann um die gefaltete Kante von 4 umgelegt, so daß 6 und 7 zwischen 8 und 5 kommen und 3 und 2 zwischen 1 und 4.

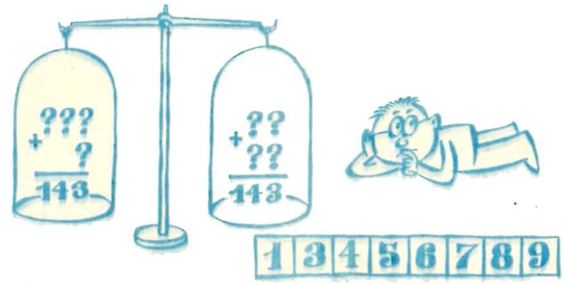
Kleiner Begriffskatalog

Äußeres Rechteck: Limes, Seite, eta, Route, Ellipse, elf, Funktion, Normale, Euklid, Dreieckswinkel, Limes, Seite;
Inneres Rechteck: Logarithmus, Summe, Exponent, Trapez, Zoll, Leibniz, Zahl.

Eineindeutig

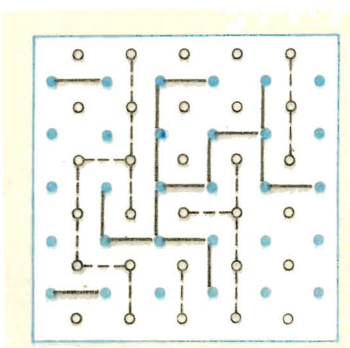
$6+10-1=15$; allgemein: der x-te von links, der m-te von rechts; $x+m-1$ Schüler

In freien Stunden alpha heiter



Punktverbindespiel

Der Mathematikprofessor *David Gale* (Brown-Universität) erfand folgendes Spiel:
Das Spielfeld besteht aus senkrechten Reihen von schwarzen Punkten, die sich mit ähnlichen Reihen von blauen Punkten abwechseln. Spieler *A* benutzt einen Schwarzstift, Spieler *B* einen Blaustift. Ist *A* an der Reihe, so verbindet er zwei benachbarte Punkte entweder durch eine waagerechte, oder durch eine senkrechte Linie. Sein Ziel ist ein zusammenhängender Linienzug, welcher die linke mit der rechten Seite des Feldes verbindet (*B* muß so spielen, daß er die obere mit der unteren Seite verbindet.) Die Spieler machen abwechselnd jedesmal eine Linie.



Sieger ist derjenige, der zuerst eine kontinuierliche Linie zwischen seinen beiden Seiten herstellt. (Die Abb. gibt ein Spiel wieder, bei dem Blau der Gewinner ist.) — Das Spiel kann auf beliebig großen Feldern gespielt werden.

Ging's in der Schule mal nicht gut,
macht *alpha*-heiter neuen Mut!

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Anglerglück

An einem Teich sitzen vier Angler. Zwei von ihnen haben sogar zwei Angeln ausgelegt. Wieviel Karpfen kann jeder fangen, wenn 20 Karpfen im Teich sind?

Schüler Christian Engelmann, Limbach-Oberfr., Kl. 8 a

Einige kuriose Relationen

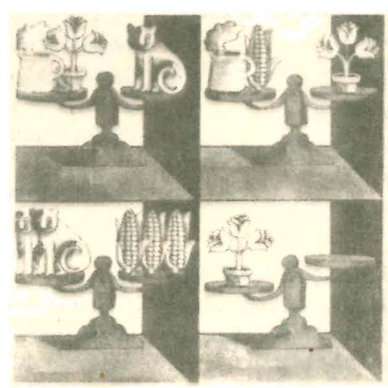
1. sin 1 800° + sin 170° = sin 1 970°
(Vergleiche 1 800 + 170 = 1 970)
2. 5 sin 360° + sin 170° = sin 1 970°
(Vergleiche 5 · 360 + 170 = 1 970)
3. 10 tan 180° + tan 170° = tan 1 970°
(Vergleiche 10 · 180 + 170 = 1 970)
4. 2 cos 720° + 2 cos 180° + cos 170° = cos 1 970°
(Vergleiche 2 · 720 + 2 · 180 + 170 = 1 970)
5. 10 cot 45° + 10 cot 135° + cot 170° = cot 1 970°
(Vergleiche 10 · 45 + 10 · 135 + 170 = 1 970)

Wer findet ähnliche interessante Relationen? Sendet sie an die Redaktion *alpha*!

Mathematikfachlehrer S. Gottesmann Tschernowzy, UdSSR

Katten, kroezen, bloempotten en maiskolven

Hoeveel kroezen moeten we op de rechterschaal von de laateste weegschaal zetten om aan beide kauten hetzelfde gewicht te krijgen?



aus: Pythagoras 2/69—70 (Niederlande)

Arabisch

Ein Schüler der Klasse 5 soll die Zahl 25 an die Tafel schreiben. Er beginnt bei den Einern, schreibt also zuerst die Fünf. Daraufhin der Lehrer: „Wieso schreibst du denn von rechts nach links? Das tun doch nur die Araber."
„Es sind ja auch arabische Ziffern", verteidigte sich der Getadelte.

Friedrich Kaden, Großschirma, aus DLZ 27/66

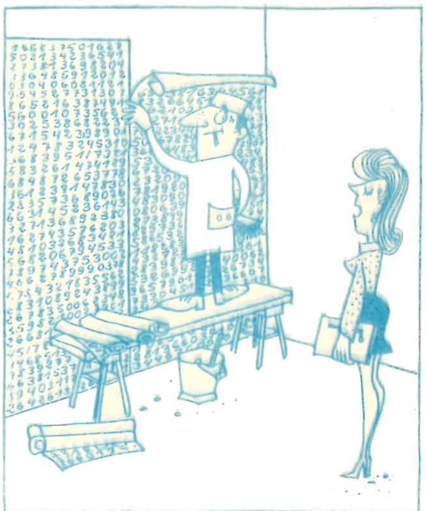
Denke nicht, wenn Du denkst, Du denkst!
Denn wenn Du denkst, Du denkst, dann denkst Du nicht,
dann denkst Du nur, Du denkst!

Wolfgang Reichel, Rübeland/Harz, aus: Eulenspiegel 42/69

Schwierige Sache!

Setzt die unter der Zeichnung (neben der Überschrift) stehenden Ziffern statt der Fragezeichen ein. Das Ergebnis muß aber auf beiden Waagschalen gleich sein.

Horst Moese, aus: Trommel 59/60, 69



„Bei meinem Studium der Kybernetik möchte ich keinesfalls durch ein albernes Blumenmuster abgelenkt werden.“

Horst Alisch, aus: Resümee 2

Stimmt das?

$$\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}} \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{4\frac{4}{63}} = 4\sqrt[3]{\frac{4}{63}}$$

Wer findet eine allgemeine Beziehung?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz (nach Lietzmann)

Silbenrätsel

Die Wörter jeder Zeile werden durch Davorsetzen eines Wortes oder einer Silbe zu mathematischen Begriffen. Die Anfangsbuchstaben der davor gesetzten Wörter bzw. Silben ergeben den Namen einer Stadt, die die Heimat vieler bedeutender Mathematiker ist.

.... -punkt, -senkrechte, -linie
.... -fläche, -begriff, -menge
.... -punkt, -fläche, -gerade
.... -sektor, -tangente, -mittelpunkt
.... -stand, -wicklung, -runden
-endlich, -gleich, -regelmäßig

OStR K.-H. Lehmann, V. L. d. V., Berlin

Kartenfaltübungen

Unterteile einen rechteckigen Bogen Papier in acht Quadrate und numeriere diese auf einer Seite (siehe Abb. 1). Falte nun den Bogen so, daß die Quadrate in ihrer natürlichen Reihenfolge zu liegen kommen, wobei die 1 oben liegen soll.

1	8	7	4
2	3	6	5

Abb. 1

1	8	2	7
4	5	3	6

Abb. 2

Wesentlich schwieriger ist es, das gleiche zu tun mit einem anderen Bogen, numeriert nach dem Muster der Abb. 2.

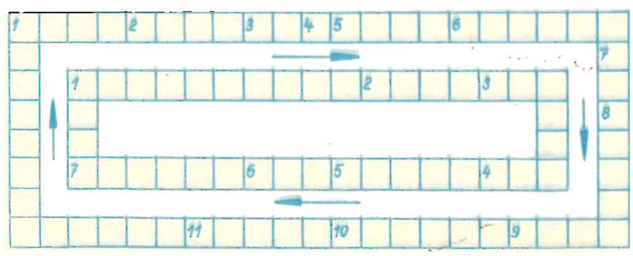
Kleiner Begriffskatalog

Äußeres Rechteck:

1— 2 Grenzwert
2— 3 Verbindungsstrecke
3— 4 griech. Buchstabe
4— 5 Flächenmaß
5— 6 Rhombus
6— 7 Kegelschnitt
7— 8 Zahl
8— 9 Menge geordn. Paare
9—10 besondere Form d. Geraden
10—11 griech. Mathematiker
11— 1 Bestimmungsgrößen eines Dreiecks

Inneres Rechteck:

1—2 besonderer Exponent
2—3 Ergebnis einer Addition
3—4 Hochzahl
4—5 Viereck
5—6 engl. Längeneinheit (0,0254 m)
6—7 deutscher Mathematiker (1646 bis 1716)
7—1 grundlegender Begriff d. Mathematik



Mathematikfachlehrer W. Weber, EOS Schkeuditz

Eineindeutig?

Bei der Preisverteilung nach einer Mathematikolympiade stehen alle Preisträger nebeneinander auf der Bühne.
Karl: „Der sechste von links hat als einziger Schüler seiner Klassenstufe die volle Punktzahl von 40 Punkten erreicht.“
Annerose: „Das stimmt, es ist genau der zehnte von rechts!“
Wieviel Preisträger waren es? Verallgemeinere!

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Kundin: „Gestern habe ich meinen Sohn einkaufen geschickt. Er sollte $2\frac{1}{2}$ Kilogramm Äpfel kaufen. Als ich die Tüte zu Hause abwog, waren nur 2 Kilogramm drin.“
Verkäuferin: „Vielleicht hätten Sie Ihren Sohn mal wiegen sollen!“ *Aus NBI*

Mathematik-Kalender

Mai 1970

Fr 1 Internationaler Kampf- und Feiertag der Werktätigen
Sa 2

So 3
Mo 4
Di 5 † 1859 Peter Gustav Dirichlet. Wirkte in Deutschland. Richtungweisende Arbeiten zur Zahlentheorie (* 13. 2. 1805)
Mi 6 † 1961 Elie Cartan (* 9. 4. 1869)
Do 7 * 1832 Carl Neumann. Wirkte in Leipzig. († 27. 3. 1925)
Fr 8 † 1951 Gilbert Ames Bliss. Wirkte hauptsächlich in Chicago. Grundlegende Untersuchung zur Variationsrechnung (* 9. 5. 1876)
Sa 9

So 10
Mo 11
Di 12
Mi 13
Do 14 † 1893 Ernst Eduard Kummer. Wirkte in Breslau und Berlin. Seine tiefangelegten zahlentheoretischen Untersuchungen zählen zu den glänzendsten Leistungen der mathem. Forschung (* 29. 1. 1810)
Fr 15
Sa 16 † 1830 Joseph Fourier (* 21. 3. 1768)
* 1821 Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff. Wirkte in Moskau und Petersburg. Begründer und bedeutender Vertreter der Petersburger mathematischen Schule († 8. 12. 1894)

So 17
Mo 18
Di 19
Mi 20
Do 21 * 1471 Albrecht Dürer († 6. 4. 1528)
Fr 22
Sa 23 † 1857 Augustin Cauchy. Wirkte in Paris. Er ist einer der bedeutendsten Vertreter der Analysis (* 21. 8. 1789)

So 24
Mo 25
Di 26
Mi 27
Do 28
Fr 29 * 1882 Henry Bateman. Wirkte in England. Grundlegende Beiträge zur Theorie der Transformationen († 21. 1. 19[illegible])
Sa 30

So 31 † 1832 Evariste Galois. Siehe *alpha* 1/69 (* 25. 10. 1811)

Juni 1970

Mo 1 Internationaler Tag des Kindes
Di 2
Mi 3
Do 4
Fr 5 * 1819 John Couch Adams († 21. 1. 1892)
Sa 6 † 1892 Ossian Bonnet (* 22. 12. 1819)
† 1928 Luigi Bianchi (* 18. 1. 1856)
* 1857 Alexander Michailowitsch Ljapunow. Wirkte in Charkow und Petersburg. Richtungweisende Arbeiten zur Theorie der Differentialgleichungen († 3. 11. 1918)

So 7
Mo 8
Di 9
Mi 10 † 1836 André-Marie Ampère. Wirkte in Paris. Von Haus aus Physiker, hat er von der mathematischen Physik her die Mathematik befruchtet. (* 22. 1. 1775)
Do 11
Fr 12 Tag des Lehrers
Sa 13

So 14 * 1856 Andrei Andrejewitsch Markow. Wirkte in Petersburg. Grundlegende Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung († 20. 7. 1922)
Mo 15
Di 16
Mi 17 * 1894 Alexander Jakowlewitsch Chintschin. Siehe *alpha* Heft 5/67 († 19. 11. 1959)
Do 18
Fr 19
Sa 20

So 21
Mo 22 † 1825 Felix Klein (* 25. 9. 1849)
Di 23
Mi 24
Do 25
Fr 26
Sa 27

So 28
Mo 29
Di 30

Dieser Kalender wird bis Dezember 1970 fortgesetzt. Tragt eure AG-Nachmittage, Mathematik-Klassenarbeiten, Exkursionen, mathematischen Fachaufträge usf. ein!

Literatur

D.-E. Mickeleit

Magische Spielereien

167 S., zahlreiche Abb. 4,00 M (ab 10 Jahre)
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin 1969

Sammelband

Buntes Telejahrbuch

224 Seiten, 9,80 M (ab 10 Jahre)
Kinderbuchverlag Berlin 1970

Ernöné Lucács

Wie groß, wie spät, wie weit?

40 Seiten, 4,80 M (ab 10 Jahre)
Kinderbuchverlag 1970

Gyula Mackássy

Zwei plus zwei gleich vier

40 Seiten, 4,80 M (ab 8 Jahre)
Kinderbuchverlag Berlin 1970

Gerhard Niese

Spiele und Experimente

200 Seiten, 5,80 M (ab 12 Jahre)
Kinderbuchverlag Berlin 1969

Meyers Taschenlexikon

Raketentechnik — Raumfahrt

426 S., 48 Bildtafeln, 215 Abb., 15,00 M
(ab 14 Jahre)
VEB Bibliographisches Institut, Leipzig

Autorenkollektiv

Wissenschaft und Menschheit

6. Band 1969, 391 S., zahlr. Abb., 18,00 M
(ab 15 Jahre)
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin 1969

Gilde/Altrichter

Die optimale Lösung

240 S., 6,80 M (ab 15 Jahre)
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin 1969

Meyers Taschenlexikon

Schiffbau — Schiffahrt

347 S., 85 Abb., 80 Fotos, 7,00 M
(ab 12 Jahre)
VEB Bibliographisches Institut, Leipzig

Meyers Taschenlexikon

Luftfahrt

930 S., 20 Fototafeln, 105 Abb., 8,00 M
(ab 12 Jahre)
VEB Bibliographisches Institut, Leipzig

Dr. R. Ogrissek

Geographie für jedermann

356 Seiten, 45 Farbfotos, Graphiken
16,80 M (ab 12 Jahre)
VEB Hermann Haack, Geographisch-kartographische Anstalt Gotha/Leipzig 1969

Dieter Stempell

Programmierte Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

160 Seiten, 10,00 M (ab 16 Jahre)
Verlag Die Wirtschaft Berlin 1969

Fachwörterbuch

Begriffe und Sinnbilder der Datenverarbeitung

196 Seiten, zahlr. Abb., 5,00 M (ab 16 Jahre)
Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1968

Dieter Stempell

Handbuch der Netzplantechnik

296 S., 12,80 M (ab 16 Jahre)
Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1969

Wissensspeicher

Grundlagen der Datenverarbeitung

160 S., 59 graf. Darst., 5,00 M (ab 16 Jahre)
Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1969

W. Lietzmann

Wo steckt der Fehler?

Mathematische Trugschlüsse und Warnzeichen
192 S., 95 Abb., 4,80 M (ab 12 Jahre)
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1969

H. Melcher

Relativitätstheorie

in elementarer Darstellung mit Aufgaben und Lösungen, 237 S., 12,80 M (ab 16 Jahre)
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969

Autorenkollektiv

Kompendium der Mathematik

Bestell-Nr. 001807, 319 S., 7,50 M
(ab 12 Jahre)
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Rudolf Dietze

Was spielen wir?

299 S., zahlr. Abb., 9,00 M (ab 10 Jahre)
Tribüne, Verlag und Druckereien des FDGB Berlin 1969

Autorenkollektiv

Container-Taschenbuch

77 S., zahlr. Abb., 3,80 M (ab 14 Jahre)
Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin 1969

Arthur Suhle

Die Münze

von den Anfängen bis zur Europäischen Neuzeit
227 S., zahlr. Abb., 18,00 M (ab 14 Jahre)
Verlag Koehler und Amelang, Leipzig 1969

Heinz Joswig

Das Geld

188 S., zahlr. Bildtafeln, 12,00 M (ab 14 Jahre)
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin 1969

N. N. Vorobjoff

Grundfragen der Spieltheorie und ihre praktische Bedeutung

85 Seiten, 6,80 M (ab 16 Jahre)
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969

Jürgen Flachsmeyer

Kombinatorik

Eine Einführung in die mengentheoretische Denkweise
mit 45 Abb., 15,00 M (ab 16 Jahre)
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969

Institut für Datenverarbeitung Dresden

Lehrschau, Teil 1 bis 3
Maschinelle Datenverarbeitung

Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1969/70
Die drei Mappen enthalten Anschauungstafeln aus der EDV

Leser schreiben an alpha

● Sechs Mädchen und drei Jungen des 2. Lyzeums der Stadt Sighisoara (SR Rumänien) nehmen am *alpha*-Wettbewerb teil. Sie sind begeistert von der Vielseitigkeit von *alpha*. Besonderes Interesse fanden die Beiträge: EDV, Rechnen mit Resten und Berufsbild: Hochbauzeichner. *d. Red.*

● Seit über eineinhalb Jahren bin ich regelmäßiger Leser der Zeitschrift *alpha*. Ich glaube, daß sie mir viel geholfen hat. Ohne *alpha* wäre ich jetzt wahrscheinlich nicht zweimaliger Kreissieger der Mathematikolympiade, dafür Lob und Dank!

Yvonne Kruber, OS Stolpen, Kl. 8b

● Seit Heft 1/69 schreibt Ihr Artikel über elektronische Datenverarbeitung. Ich interessiere mich sehr für diesen Zweig der Industrie. Durch Eure Beiträge kann ich mein Wissen in der Schule gut anwenden.

Heike Busch, Greifswald

● *alpha* half mir schon in verschiedenen Fällen. So bekam ich z. B. einen Auftrag, einen mathematischen Gruppennachmittag zu gestalten. Da gefielen am meisten die Aufgaben aus „*alpha*-heiter“. Meine Mitschüler waren begeistert, sobald sie eine Aufgabe gelöst hatten...

Martin Baumgart, Zerbst

● Vielen, vielen Dank für die *alpha*-Aufgaben und auch für die fachlichen Beiträge... Ich versichere, daß ich auch 1970 aktiv am Wettbewerb teilnehme.

Bärbel Ortmann, Schiller-OS, Radebeul, Kl. 8

● ...Interessant fand ich die Beiträge über Mathematikolympiaden, über EDV und den Mathematisch-Physikalischen Salon. Doch vermisse ich bei Euch Erläuterungen zu schwierigen Begriffen...

Euer eifriger alpha-Leser
Christine Adolph, Neugersdorf

● ...Das Lösen der Wettbewerbsaufgaben macht mir sehr viel Spaß... Besonders begrüße ich, daß auch eine Antwort erfolgt, wenn die eingesandte Lösung falsch ist. Die Beiträge über EDV finde ich sehr interessant und vor allem für uns Schüler gut verständlich. Die *alpha*-Aufgaben sind auch als Vorbereitung auf die Mathematikolympiaden sehr von Nutzen. Ein herzliches Dankeschön allen Mitarbeitern!

Erdmute Kriebel, Freital, Kl. 8

● Zwischen meiner Schulzeit und jetzt liegen bereits drei Jahre. Dennoch beziehe ich auch weiterhin *alpha*. Durch sie kann ich stets mein Gedächtnis auffrischen und mich überprüfen, ob ich noch allen Aufgaben gewachsen bin. Ihre Zeitschrift ist sehr interessant; machen Sie weiter so!

Frau Barbara Geißenhöner, Mühlhausen

● ...Vielleicht könnten Sie von Zeit zu Zeit einmal eine komplizierte Aufgabe ausführlich besprechen, überhaupt das Herangehen an solche „Brocken“.

Guido Bimberg, Halle/Saale

● Nicht nur der *alpha*-Wettbewerb macht mir viel Freude; der Abdruck der Aufgaben und Lösungen von Mathematik-Olympiaden gibt viele Anregungen. Die Berufsbilder helfen mir, mich für einen interessanten aber auch volkswirtschaftlich wichtigen Beruf zu entscheiden.

Klaus Schönefeld, Weimar, Kl. 11

● In diesem Jahr habe ich erstmalig am *alpha*-Wettbewerb teilgenommen und gestehe, daß mir die Beschäftigung einiges Kopfzerbrechen, aber auch viel Freude bereitet hat. Durch die Aufgaben wurde ich gezwungen, mich intensiv mit ganz bestimmten Problemen zu befassen.

Gert Wanka, Döbeln

● Ich bin seit zwei Jahren Leser Ihrer Zeitschrift, und freue mich jedesmal, wenn *alpha* erscheint. *alpha* hat mir viel Übungsmaterial geboten. Mit den Aufgaben bereitete ich mich auf die Kreis- und Bezirksolympiade vor und konnte dort gut abschneiden. *Jenny Tennert, Tutow*

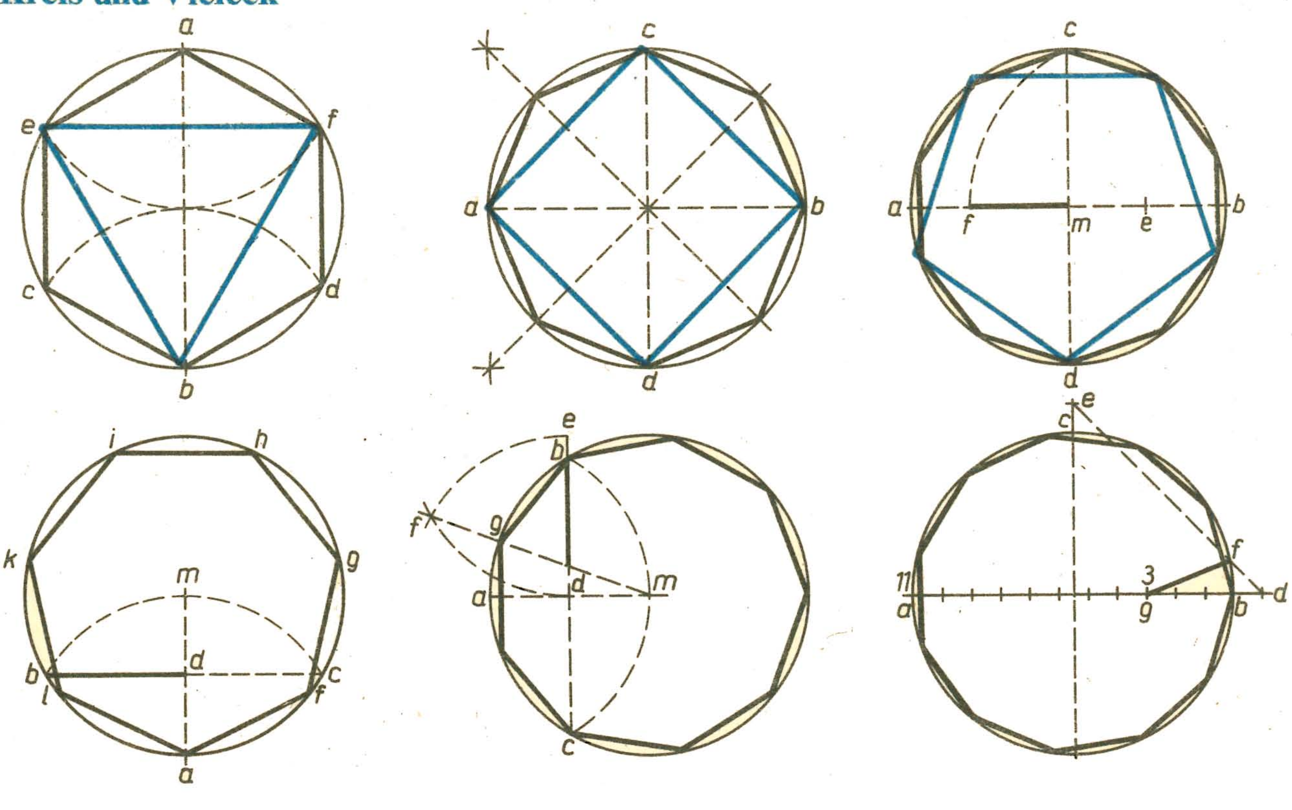
● Ich bin eifriger Leser der *alpha*. Mir gefällt an ihr natürlich der Wettbewerb, mir gefallen die Berichte aus aller Welt, *alpha*-heiter und die verschiedenen Mathematikzirkel. *alpha* sollte mehr Aufgaben aus dem Gebiet des Sports bringen!

Hendrike Meyer, Schmalkalden, Kl. 7

● Hiermit möchte ich mich recht herzlich bei Dir, liebe *alpha*, für die vielen Aufgaben bedanken sowie bei den Korrektoren für die viele aufgewandte Mühe beim Korrigieren der Lösungen... Besonders begrüße ich persönlich, daß auch die Olympiadeaufgaben in den Wettbewerb einbezogen werden...

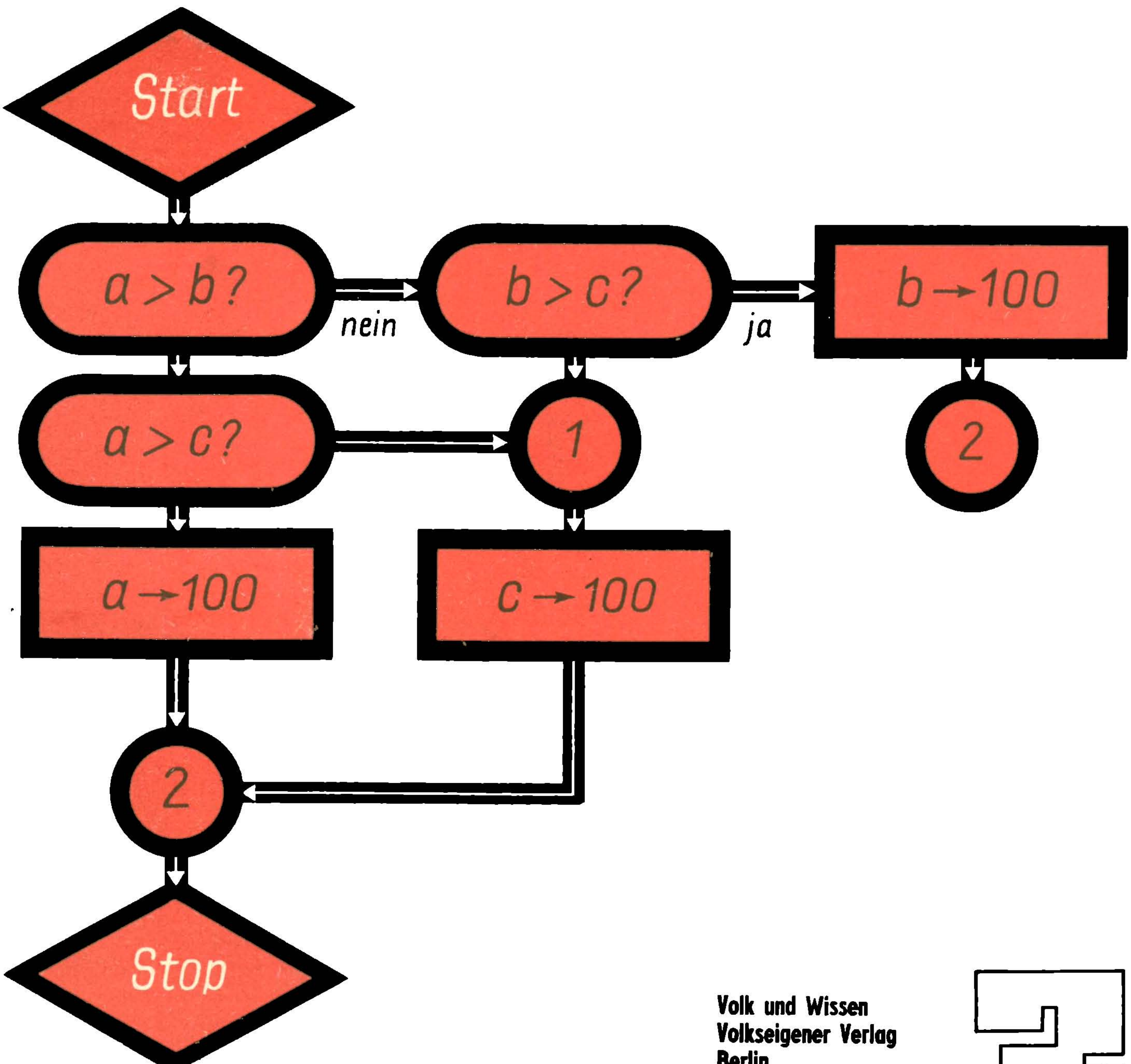
Wulf Holowenko, Bad Klosterlausmitz

Kreis und Vieleck



Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
4. Jahrgang 1970
Preis 0,50 M
Index 31059

3

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41 Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Junge Welt, W. Schulze, Berlin (S. 49); Stat. Jahrbuch der Volksrepublik Ungarn (S. 53); J. Lehmann, Leipzig (S. 51, S. 61); Zeichnungen: E. Berger, Döbeln (S. 58/59); Technische Zeichnungen: G. Gruß (Leipzig) Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 20. März 1970

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

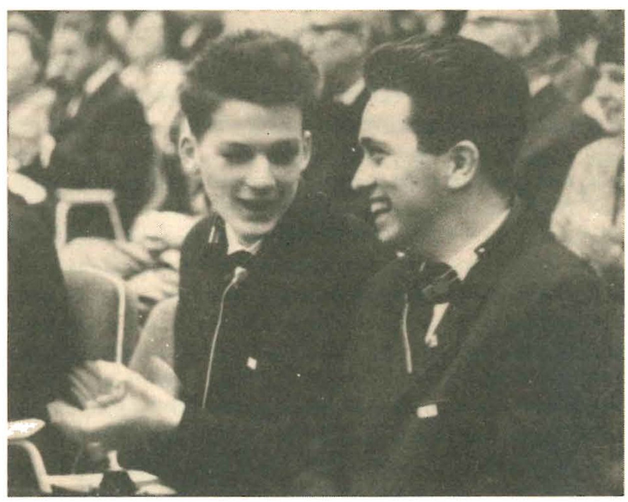
Wir waren 1965 dabei

Im Sommer 1965, als wir mit dem Expreß Budapest–Berlin zur VII. Internationalen Mathematikolympiade nach Berlin fuhren, zählten wir bereits zu den Veteranen der Mathematikolympiaden. Diese war unsere dritte. Im Zuge haben uns zahlreiche Fragen beschäftigt: Wie sieht es in der DDR aus? Wie wird die Organisation, wie das Programm, wie werden die anderen jugendlichen Teilnehmer, wie die Aufgaben sein? Und vielleicht am aufregendsten von allen Fragen: Wie werden wir abschneiden?

Auf die erste Frage erhielten wir bald eine Antwort, als der Zug in Bad Schandau das Territorium der DDR erreichte. Wir alle betrachteten die kleinen bunten Häuser jenseits der Elbe, die das ohnehin herrliche Elbtal verschönten. Bis Berlin verflog die Zeit sehr schnell. Mit S-Bahn und Bus waren wir schnell am etwa 30 km entfernten Bogensee. Hier wohnten wir während des Wettbewerbs im Internat der Jugendhochschule. An zwei aufeinanderfolgenden Tagen schrieben wir zwei Klausuren, je 3 Aufgaben waren zu lösen. Nach dem zweiten Wettbewerbstag haben wir es so empfunden, daß die Lösung der Aufgaben verhältnismäßig gut ging und konnten jetzt entspannt auf den Sportplätzen der Hochschule Fußball oder Basketball spielen. Mit afrikanischen Studenten, welche an der Hochschule studierten, haben wir spannende Tischtenniskämpfe ausgefochten.

Noch vor dem Wettbewerb hatte man für alle IMO-Teilnehmer eine Dampferfahrt auf der Spree organisiert. Berliner Schülerinnen waren unsere Reisegefährtinnen. Bald begann eine rege Unterhaltung und zum Schluß wurde Tanz daraus (man hat dabei die Verständigungsschwierigkeiten weniger empfunden). Nach dem Wettstreit besuchten wir in Potsdam die historischen Stätten Cecilienhof und Schloß Sanssouci. Am anderen Tage ging es mit dem Bus weiter. Unsere erste Station war Naumburg, wo uns der mittelalterliche Markt und der Dom sehr beeindruckt haben. Über Jena fuhren wir nach Weimar weiter. Dort besichtigten wir die Wohnhäuser von Goethe und Schiller. Sehr erschüttert hat uns der Besuch im ehemaligen Konzentrationslager Buchenwald, in dem man so viele unschuldige Menschen umgebracht hat. Nach Weimar kamen Karl-Marx-Stadt und Dresden an die Reihe. Hier haben wir einen halben Tag im Zwinger verbracht, aber wir wären gerne noch länger dort geblieben.

Nach Berlin zurückgekehrt, bereiteten wir uns mit etwas Aufregung auf die Bekanntgabe der Ergebnisse in der Kongreßhalle vor. Als wir dann erfuhren, daß wir beide einen ersten Platz belegt hatten, war die Freude um so größer (siehe Foto) und sie wuchs noch, denn mit *Endre Makai* erreichte ein weiterer Ungar ebenfalls einen 1. Platz. Außer uns belegten noch fünf sowjetische Jungen erste Plätze. Wir kehrten mit einem recht schönen Ergebnis nach Budapest zurück. Was geschah seit dieser Zeit? Im Jahre 1966 nahmen wir noch einmal an der IMO in der VR Bulgarien teil. Es gelang uns wieder, erste Plätze zu belegen. Auch das Abitur brachten wir hinter uns und wurden Studenten der Mathematischen Fakultät der Eötvös-Universität zu Budapest. Noch heute haben wir in vielen Fällen gemeinsame Interessengebiete, besonders Kombinatorik, Graphentheorie und abstrakte Algebra. Gemeinsam haben wir ein Buch für Mittelschüler über die Kombinatorik verfaßt.



Zum Abschied überreichen wir den *alpha*-Lesern eine Aufgabe aus diesem Buch:

Auf einer Insel leben 10 Indianerstämme. Jeder Stamm hat $\frac{1}{10}$ der Insel als Jagdrevier (die Jagdreviere sind freilich nicht ineinandergreifend). Durch einen glücklichen Zufall gibt es auf der Insel 10 verschiedene Schildkrötenarten, die je $\frac{1}{10}$ der Insel bevölkern, und auf der Insel gibt es überall Schildkröten. Die einzelnen Indianerstämme wollen je eine Schildkrötenart zum Totemtier wählen, und zwar jeder Stamm eine andere Art, jedoch eine solche, die in seinem Jagdrevier vorkommt.

Beweien Sie, daß dies stets möglich ist!

László Lóvasz/József Pelikán

Mathematische Schülerwettstreite in Ungarn

Der ungarische Physiker Baron *Lóránd von Eötvös* (1848 bis 1919) – Erfinder der nach ihm benannten Drehwaage, die zum Aufsuchen der Lagerstätten wichtiger Rohstoffe (Erze, Salze, Kohle, Erdöl usw.) dient – der damalige Präsident der *Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft* Ungarns – wurde 1894 zum Minister für Religions- und Unterrichtswesens ernannt. Diese Berufung des Wissenschaftlers zum Minister war der Anlaß seitens der Gesellschaft, als bleibendes Denkmal der Freude über die ihrem Präsidenten zuteil gewordene Ehrung zum ersten mathematischen Schülerwettstreit aufzurufen.

Die Gesellschaft veranstaltet seitdem jedes Jahr im Herbst für solche Schüler, die im Sommer desselben Jahres ihre Reifeprüfung ablegen, mathematische Wettstreite. In den Jahren 1919, 1920 und 1921 sowie 1944, 1945 und 1946 kam es zu keinen Wettbewerben. Nach der Befreiung Ungarns vom Faschismus wurde im Jahr 1947 die Mathematische Gesellschaft *János Bolyai* gegründet. Die Physikalische Gesellschaft trägt den Namen Baron *Lóránd von Eötvös*. Beide Institutionen sind also die Nachfolger der 1894 gegründeten Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft. Als solche setzen sie die guten Traditionen fort.

Die neugegründete Mathematische Gesellschaft begann gleich im Jahre 1947 mit neuen Wettbewerben. Ihre Organisation und Abwicklung ist keine schulische Angelegenheit, sondern Anliegen der Mathematischen Gesellschaft der VR Ungarn. Daraus folgt, daß die Mitglieder — damit insbesondere die Hochschullehrer — ständig Kontakt mit den Schulen haben, indem sie aus den Leistungen der mathematischen Talente auf die Leistungen der Schule schließen und — wenn erforderlich — die schulische Entwicklung beeinflussen können. Zu Ehren des Professors *József Kürschák* (TH Budapest), der bis zu seinem Lebensende (* 1864, † 1933) mit viel Sorgfalt und Liebe an der Entwicklung der mathematischen Schülerwettstreite mitgearbeitet hatte, tragen diese seit 1949 seinen Namen.

Die mathematische Gesellschaft tritt nicht nur als Organisator der Wettbewerbe auf, sondern schafft durch ständigen Einfluß auf die Schüler der Mittelschulen (vergleichbar unseren EOS) das ganze Jahr über ein mathematisches Klima.

Diese Einflußnahme geschieht vor allem durch die wissenschaftliche Zeitschrift *Mathematische Blätter für die Mittelschulen (Lapok)*. Sie bietet verschiedene Abhandlungen über mathematische Probleme, die zwar häufig außerhalb des Schulstoffes liegen, jedoch mit entsprechenden Schulkenntnissen verstanden und gelöst werden können. So kommt es, daß Schüler, die für Mathematik besonderes Interesse haben, durch die Zeitschrift angeregt, über ein Wissen verfügen, das sie zum guten Abschneiden bei den Schülerwettstreiten auch im internationalen Maßstab befähigt. In *Lapok* werden auch zahlreiche Aufgaben gestellt, die den einzelnen Altersstufen entsprechen. Diese sind mit Schulkenntnissen — was die Fertigkeiten betrifft — zu lösen, erfordern jedoch eine hohe Denkleistung. Außerdem gibt es Aufgaben, die eben mehr als Schulkenntnisse verlangen, z. B. Kenntnisse aus der Zahlentheorie, der Graphentheorie u. a., die aber die Schüler durch die Zeitschrift kennenlernen und womit sie sich dann beschäftigen. Die zahlreichen Einsendungen richtiger Lösungen zeugen davon, daß die Mitarbeit rege ist. Die besten Lösungen werden (mit Namensangabe) veröffentlicht. Am Ende jedes Schuljahres findet man die fleißigsten und erfolgreichsten Einsender — sie erhalten Geldprämien — abgebildet. *Lapok* leistet damit eine gründliche Vorarbeit für die Wettstreite und trägt zur mathematischen Bildung der Schüler wesentlich bei.

Ursprünglich fanden die Wettbewerbe nur für Abiturienten statt. Gegenwärtig können auf Landesebene Schüler von 13 bis 18 Jahren teilnehmen. In zwei Runden werden Klausuren geschrieben. In der ersten Runde kann man im allgemeinen aus mehreren Aufgaben auswählen. In der zweiten Runde müssen drei Aufgaben gelöst werden. Die im Jahre 1894 begonnene Wettstreitfolge hat auch weiterhin eine Runde.

Das ungarische Schulsystem ist gegenwärtig so beschaffen, daß die Talente leichter in Erscheinung treten können. Deshalb dienen die Wettstreite nicht in erster Linie der Talentsuche, sondern im Vordergrund steht ihr propagandistischer Charakter. Sie tragen wesentlich dazu bei, daß für viele Jugendliche die Mathematik nicht nur Unterrichtsfach, sondern auch Unterhaltung und Hobby ist. Beinahe jede der gestellten Aufgaben weist auf eine schöne Besonderheit der Mathematik hin. So tragen die Wettstreite auch viel dazu bei, daß die Beschäftigung mit der Mathematik für viele ein ästhetisches Erlebnis bedeutet. *I. Reiman/M. Walter*

Die gestellten Aufgaben in den vergangenen 76 Jahren geben uns ein interessantes Bild von der Entwicklung und des Umfangs der Mathematik wieder. Wir geben die Wettbewerbsaufgaben der Jahre 1894 und 1947 wieder:

1894

▪ 1 ▪ Ist $2x + 3y$ bei ganzzahligen Werten von x und y durch 17 ohne Rest teilbar, so ist auch $9x + 5y$ bei denselben Werten von x und y durch 17 ohne Rest teilbar. Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung!

▪ 2 ▪ Es sind zwei Punkte P und Q innerhalb des Kreises K gegeben. Konstruieren Sie ein dem Kreis einbeschriebenes rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete durch P und dessen andere Kathete durch Q geht! Bei welcher Lage von P und Q ist diese Aufgabe unlösbar?

▪ 3 ▪ Die Seiten eines Dreiecks bilden eine arithmetische Folge, deren Differenz d ist; die Fläche des Dreiecks beträgt F Flächeneinheiten.
Wie groß sind die Seiten und Winkel des Dreiecks?
Welche Werte erhalten Sie, wenn $d = 1$ und $F = 6$ beträgt?

1947

fand der erste Wettbewerb nach der durch den II. Weltkrieg hervorgerufenen Zwangspause mit folgenden Aufgaben statt:

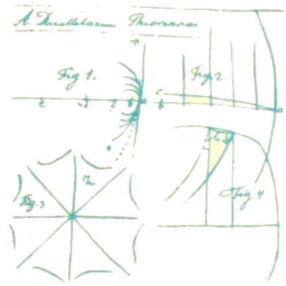
▪ 1 ▪ Ist n eine ungerade Zahl, so läßt sich $46^n + 296 \cdot 13^n$
durch 1947 ohne Rest teilen. Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung!

▪ 2 ▪ Beweisen Sie, daß es in einer sechsköpfigen Gesellschaft stets drei solche Personen gibt, die sich gegenseitig kennen, oder drei solche, die sich gegenseitig nicht kennen! (Zwei Personen A und B kennen sich gegenseitig, wenn A B kennt und B A kennt.)

▪ 3 ▪ Eine Kreisscheibe soll mit Hilfe anderer Kreisscheiben von halbsogroßem Durchmesser bedeckt werden. Wie läßt es sich mit möglichst wenig Scheiben durchführen?

Die Sieger des ersten mathematischen Wettstreits im Jahre 1894 waren *M. Seidner* und *P. Pap*. In der Liste der Sieger finden wir Namen bekannter Mathematiker wie *Fejér*, *Riesz*, *von Krbek*, *Kálmár*, *von Kármán*, *König*.

János Bolyai



Aus einer Handschrift
János Bolyais zur Theorie
der Parallelen (1820)

Man hält *János (Johann) Bolyai* bis heute für den größten ungarischen Mathematiker. Er wurde am 15. 12. 1802 in Klausenburg (heute Cluj) in Siebenbürgen geboren. Daß er Mathematiker wurde, verdankte er in erster Linie seinem Vater *Farkas (Wolfgang) Bolyai.* Dieser wurde bereits in János' ersten Lebensjahren auf das Interesse seines Sohnes für die Mathematik und auf sein ausgezeichnetes logisches Denkvermögen aufmerksam. Er war noch keine fünf Jahre alt, als er sich den Kopf darüber zerbrach, wie es möglich sei, daß die Sterne sich, von zwei verschiedenen Städten aus betrachtet, in derselben relativen Lage zueinander befinden. Er kam darauf, daß dies nur möglich sein kann, da sie sehr weit von der Erde entfernt sind. János besaß ein ausgezeichnetes Sprachgefühl und spielte virtuos Geige.

Von seinem 16. Lebensjahr an bereitete er sich an der *Technischen Militärakademie* in Wien auf seinen Beruf als Militäringenieur vor. Während seiner militärischen Ausbildung und auch danach im Dienst als Offizier fand er noch Zeit dafür, sich mit Mathematik zu beschäftigen, mit solchen Problemen, deren Lösung seit zweitausend Jahren niemand gelang. Sein Streben war nicht vergeblich. Mit einundzwanzig Jahren, am 3. November 1823, schrieb er seinem Vater den berühmt gewordenen Brief, in dem er ankündigt, daß er am Ziel angelangt sei: „Aus dem Nichts habe ich eine neue, andere Welt geschaffen."

Was ist diese neue Welt? Wenig poetisch würden wir sagen, daß die Entdeckung *Bolyais* eine neue Betrachtungsweise der Welt, eine neue Untersuchungsmethode ermöglicht. Er stellte fest, daß die Welt nicht notwendigerweise so beschaffen sein muß, wie man es bisher auf Grund der Arbeiten von *Euklid* glaubte. *Bolyais* Bedeutung in der Wissenschaftsgeschichte besteht also in erster Linie darin, daß er darauf hingewiesen hat, daß der Raum nicht notwendigerweise euklidisch sein muß. Er hat gezeigt, daß eine derart aufgebaute Geometrie genauso zur Beschreibung der uns umgebenden Welt geeignet ist wie die euklidische.

Seine Arbeiten über diese Probleme wurden erst 1831 als Anhang (Appendix) eines Mathematikbuches seines Vaters veröffentlicht. In dieser Zeit hatte *J. Bolyai* schon unter Krankheiten zu leiden. Frühzeitig pensioniert, lebte er zurückgezogen in Maros-Vásárhely bis zu seinem Tode am 27. 1. 1860.

I. Reimann

Zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie

Es ist eine vielfach zu beobachtende Erscheinung, daß ein bestimmtes Problem, um das die Gelehrten lange Zeit vergeblich gerungen haben, plötzlich von mehreren Wissenschaftlern unabhängig voneinander gelöst wird. So war es auch um die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie bestellt.

Seit dem Altertum hatten die Mathematiker erfolglos *Euklids* Parallelenpostulat, nach dem durch einen Punkt außerhalb einer Geraden nur eine Parallele zu dieser Geraden gezogen werden kann, zu beweisen versucht. Erst zu Beginn des 19. Jh. erkannte man die Unbeweisbarkeit jenes Postulates, und indem man es beiseite ließ, wurde die *nichteuklidische Geometrie* geschaffen. Diese stellt sich die Aufgabe, die Lehrsätze der gewöhnlichen euklidischen Geometrie, die sie als Spezialfall enthält, unter der Voraussetzung abzuändern, daß es durch einen Punkt zu einer vorgegebenen und diesen Punkt nicht enthaltenden Geraden unendlich viele Parallelen oder überhaupt keine parallele Gerade gibt. Daraus folgt beispielsweise, daß die Winkelsumme in einem geradlinigen Dreieck kleiner oder größer π ist (hyperbolische bzw. elliptische Geometrie). Mit jenen umwälzenden Theorien sind wesentlich die Namen von *Gauß, Bolyai, Lobatschewski* und *Riemann* verbunden.

nach Informationen aus Wi. und Fo.

Bolyai, Farkas (Wolfgang) * 9. 2. 1775, † 20. 11. 1856, ungarischer Mathematiker, Studiengenosse und Freund von *Gauß*, unternahm den Versuch, die Analysis und die Geometrie neu zu begründen. In einem Buch vertritt er eine ganz moderne Auffassung über die Begriffe: Grenzwert, Funktion, Integral und spricht — wenn auch nicht in der heutigen Form — das Prinzip der Permanenz der Grundrechnungsarten aus. In einem originellen Beitrag zur Geometrie zeigt er, daß zwei inhaltsgleiche Polygone immer in kongruente Teilpolygone zerlegt werden können.

Eine Aufgabe von Endre Hódi*

Technischer Berater
Ungarische Optische Werke, Budapest

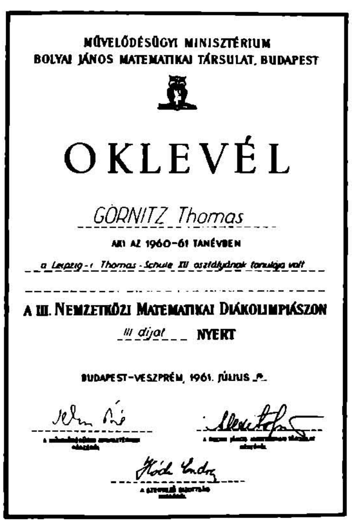
▲ 533 a) a und b sollen beliebige natürliche Zahlen bezeichnen. Beweise, daß $(a+b)^{2k}+a^{2k}+b^{2k}$ dann durch $a^2+2ab+b^2$ teilbar ist, wenn k eine nicht durch 3 teilbare natürliche Zahl ist!

▲ 533 b) Beweise die Richtigkeit der Ungleichung

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$$

▲ 533 c) Bestimme im Inneren oder auf der Oberfläche von irgendeinem Würfel 3 Punkte derart, daß der kleinste ihrer Abstände voneinander möglichst groß wird. Wie groß ist dieses Maximum?

* Herr *Endre Hódi* ist seit Gründung der Internationalen Mathematikolympiaden Delegationsleiter der ungarischen Mannschaft. Er ist der einzige Wissenschaftler, der 12 Jahre hintereinander seine Mannschaft zur IMO begleitete.



MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTÉRIUM
BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT, BUDAPEST

OKLEVÉL

GÖRNITZ Thomas

AKI AZ 1960–61 TANÉVBEN

a Leipzig-i Thomas-Schule XII osztályának tanulója volt

A III. NEMZETKÖZI MATEMATIKAI DIÁKOLIMPIÁSZON

III díjat NYERT

BUDAPEST–VESZPRÉM, 1961. JÚLIUS

Hódi Endre

Thomas Görnitz errang 1961 einen 3. Preis (Bild oben) und wurde damit zum ersten DDR-Preisträger einer Internationalen Mathematikolympiade. T. G. studierte an der Karl-Marx-Universität Leipzig *Theoretische Physik* und ist dort im Kollektiv „Theorie der Hochenergiephysik" als Wissenschaftler tätig.

Ich war 1961 dabei

Der Autor ist Mitglied des Jugend-Objektes Nord, dessen Vignette wir hier wiedergeben.

Das große Erlebnis der III. Internationalen Mathematikolympiade war eigentlich ein guter Ausgangspunkt für die Aufnahme des Studiums in der Fachrichtung Mathematik an der Humboldt-Universität zu Berlin im September 1961. Aber Erfolge in der DDR-Mathematikolympiade und die daraus resultierenden Vorschußlorbeeren garantieren noch keine weitere erfolgreiche Entwicklung. Diese Erfahrung mußte auch ich in den ersten beiden Studienjahren sammeln. Erst mit dem Einzug zweier neuer Mitarbeiter in die Universität, dem Analogrechner Endim 2000 und dem Digitalrechner ZRA 1 änderte sich das Bild grundsätzlich. Das Fachgebiet der maschinellen Informationsverarbeitung war für mich der Ansatzpunkt für den Kampf um gute Studienergebnisse, für das Streben zur Vervollkommnung meines Wissens auf allen Gebieten.
Im Jahre 1966 schloß ich das Studium mit dem Prädikat „sehr gut" ab.
Im Rechenzentrum des VEB Kernkraftwerksbau Berlin wurde ich bei meiner Tätigkeit als Problemanalytiker mit sehr interessanten Problemen der friedlichen Nutzung der Kernenergie konfrontiert. Die rechentechnische Lösung dieser Probleme stellt durchaus ernste Anforderungen an den Mathematiker.
Zu Beginn des Jahres 1968 wurde ich zum Zentralen Jugendobjekt Kernkraftwerk Nord delegiert. Hier übernahm ich im Rahmen der kurzfristigen Einsatzvorbereitung für eine Elektronische Datenverarbeitungsanlage auf dieser Baustelle den Aufbau und die Leitung der Abteilung Problemanalyse und Programmierung. Wir sind ein sehr junges Kollektiv. Das große Vertrauen, das uns entgegengebracht wird, ist uns Ansporn im Kampf um Spitzenleistungen und d. h. für uns ganz konkret Reduzierung des Zeitaufwandes für die Einsatzvorbereitung der EDV auf ein Drittel des sonst in der DDR üblichen Durchschnittswertes. Diese Aufgabe ist für uns alle eine Bewährungsprobe, aber auch eine gute Schulung der Persönlichkeit. Ende dieses Jahres wird meine Aufgabe im Zentralen Jugendobjekt KKW-Nord erfüllt sein. In Berlin wartet eine noch verantwortungsvollere Aufgabe auf ihre Lösung, die Einsatzvorbereitung für den Großrechner des VEB Kombinat Kraftwerksanlagenbau. Andere Probleme, wie z. B. Automatisierung der technischen Vorbereitung, werden im Mittelpunkt der Einsatzvorbereitung stehen. Eine ähnliche Leitungsaufgabe, wie hier im Zentralen Jugendobjekt ist in diesem Rahmen für meine zukünftige Tätigkeit vorgesehen. Bei allen diesen Aufgaben darf man natürlich in der persönlichen Qualifizierung nicht stehen bleiben. Der erfolgreiche Abschluß meiner außerplanmäßigen Aspirantur, in der ich einige mathematische Probleme der Regelungstheorie bearbeite, ist deshalb eines meiner Hauptziele in den nächsten Jahren.

K. Zipperer

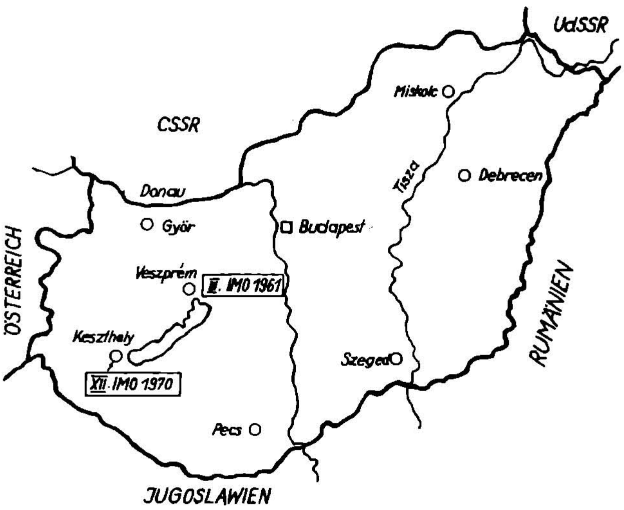
Wir stellen vor: István Reiman

unseren langjährigen ungarischen Korrespondenten. Seit vielen Jahren betreut er die an den internationalen Mathematikolympiaden teilnehmenden ungarischen Mannschaften. Er ist als Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Akademie der Wissenschaften Budapest tätig.

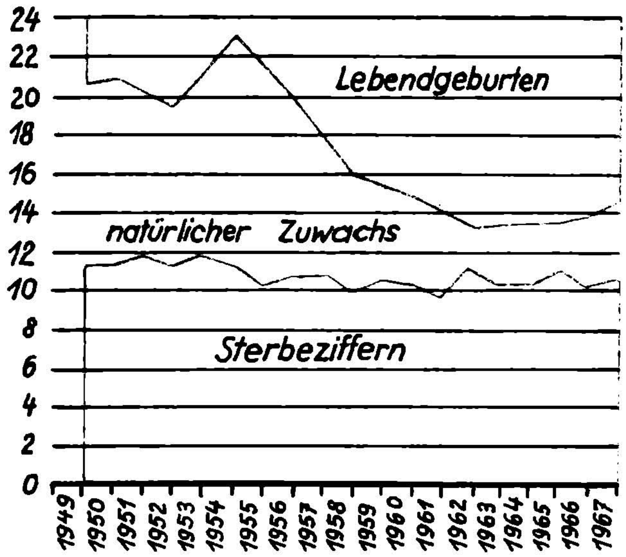
Die Seiten 49 bis 54, 70/71 sowie die III. Umschlagseite wurde zu Ehren der XII. IMO (10. bis 22. 7. 1970, VR Ungarn) gestaltet.

Wir danken für aktive Mitarbeit: Endre Hódi, István Reiman, Lászlo Lóvasz, Jósef Pelikán (alle Budapest), Dipl.-Ing. M. Walter (Meiningen), L. Boll (Berlin), Dr. R. Hofmann, H. Kästner, Dr. habil. G. Eisenreich, Th. Görnitz (alle Leipzig), K. Zipperer (Greifswald), Th. Scholl (Berlin)
Idee und Gestaltung: J. Lehmann (Leipzig)

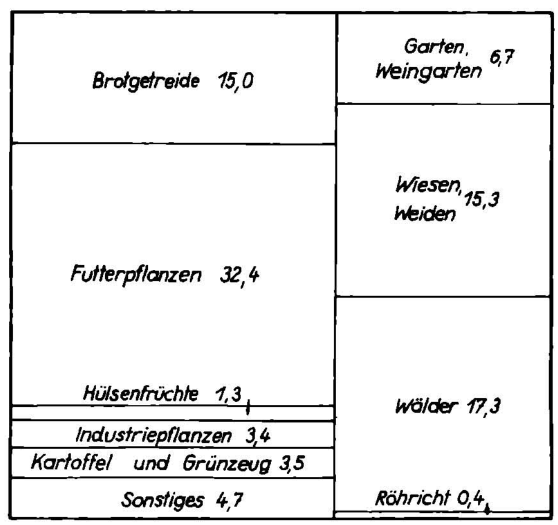
Volksrepublik Ungarn

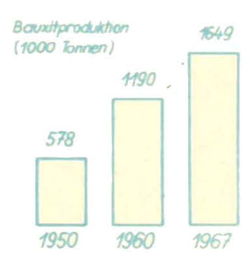


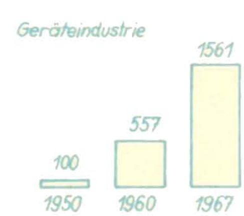
Kezthely — Austragungsort der XII. IMO (10. bis 23. 7. 1970): größter Ort am Balaton, Balatonmuseum, gotische Kirche aus d. 14. Jh., Geburtsort des Komponisten *K. Goldmark* (1830), älteste Landwirtschaftsschule Europas (1797), Landwirtschafts-Akademie (Ackerbau-Ingenieur-Ausbildung), Schloß Festeties, Barockbau mit bed. Bibliothek (40 000 Bände), 6 km von K. entfernt das bedeutendste Thermalbad Ungarns, das *Heilbad Heviz* — 35 m tiefer Quellenkrater, aus dem täglich 86 Mio Liter (28 °C bis 38 °C) Wasser (Kalk, Erde, Schwefel, Radon) in den 6 ha großen, am Boden mit Torfmoor bedeckten Teich einfließen.



Verteilung der landwirtschaftlichen Nutzfläche nach Bewirtschaftungszweigen und Pflanzengruppen





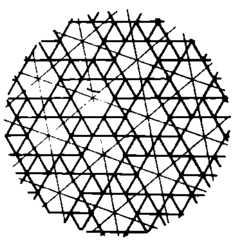


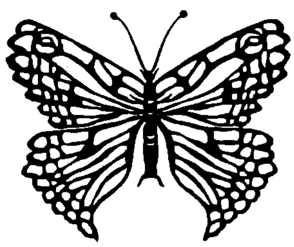
Zahlenspiegel

Fläche: 93 060 km² (1 % des Gebietes von Europa)
Bevölkerung: 10,2 Mill. Einw., pro km² 110 Einw.
Länge der Grenze: 2 242 km
Größte Breite: ost–west: 528 km, nord–süd: 268 km
Höchster Berg – Kékes: 1 015 m
Hauptstadt: Budapest: 1,99 Mill. Einwohner
Bedeutendste Außenhandelspartner: UdSSR 34,7 %, DDR 10,3 %, ČSSR 8,3 %, VR Polen 6,1 %, Westdeutschland 5,1 %, übrige Partner 35,5 %
Schulen: 5 866, Lehrkräfte: 62 340, Schüler: 1 331 100, Lehrlinge: 194 591
Balaton (Plattensee): Fläche: 591 km², Länge: 78 km, größte Breite: 15 km, durchschnittl. Tiefe: 3 m, Uferlänge: 197 km

Ornamente Teil 1

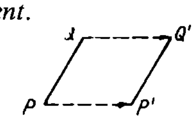
An Gebäuden, Maschinen und anderen Gegenständen sind häufig regelmäßig angebrachte Gebilde zu beobachten. Auch die Natur bringt regelmäßige Figuren hervor.



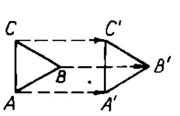


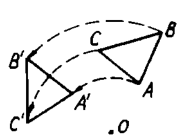
▲ A 1 a) Nenne verschiedene Gegenstände, die gewisse Regelmäßigkeiten aufweisen! Beschreibe diese Regelmäßigkeiten!
b) Nenne regelmäßige Gebilde, die die Natur geschaffen hat! Beschreibe diese Regelmäßigkeiten!
Wir wollen bestimmte Gesetzmäßigkeiten regelmäßiger Figuren untersuchen. Wir beschränken uns dabei auf ebene Figuren. Für die Untersuchung benötigen wir mathematische Begriffe, die wir zunächst erläutern werden.

Bewegungen
Jede eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich, bei der jede Bildstrecke ihrer Originalstrecke kongruent ist, nennen wir eine *Bewegung*. Ist also zum Beispiel die Strecke $\overline{P'Q'}$ das Bild einer Strecke $\overline{PQ}$ bei einer Bewegung, so sind die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{P'Q'}$ *kongruent.*



Beispiele für Bewegungen sind Verschiebungen, Drehungen um einen Punkt und Spiegelungen an einer Geraden. Diese Bewegungen nennen wir *elementare Bewegungen.*





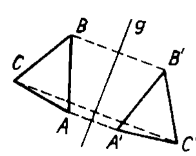


Abb. 4: Δ $A'B'C'$ ist Bild von Δ ABC bei der Verschiebung $\overrightarrow{AA'}$.
Abb. 5: Δ $A'B'C'$ ist Bild von Δ ABC bei der Drehung um O mit dem Winkel AOA'.
Abb. 6: Δ $A'B'C'$ ist Bild von ABC bei der Spiegelung an g.

Auch die *identische Abbildung* oder Identität, bei der jeder Punkt der Ebene in Ruhe bleibt, oder — mit anderen Worten — auf sich selbst abgebildet wird, ist eine Bewegung. Wir sagen dafür, daß bei der Indentität jeder Punkt der Ebene Fixpunkt (lat *fixus*, fest, unabänderlich) ist.

Übersicht

Eine Bewegung	ohne Fixpunkte, bei der jede Bildgerade zu ihrer Originalgeraden parallel ist	heißt	Verschiebung
Eine Bewegung	mit genau einem Fixpunkt	heißt	Drehung um einen Punkt
Eine Bewegung	deren Fixpunkte auf einer Geraden liegen	heißt	Spiegelung an einer Geraden

Bewegungen lassen sich nacheinander ausführen. Das Ergebnis der Nacheinanderausführung zweier Bewegungen ist wieder eine Bewegung.
Jede Bewegung ergibt sich durch Nacheinanderausführung elementarer Bewegungen.

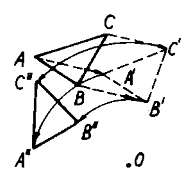


Abb. 7: Δ $A''B''C''$ ist Bild von Δ ABC bei der Bewegung, die sich aus der Verschiebung $\overrightarrow{AA'}$ und der Drehung um O mit dem Winkel $B'OB''$ zusammensetzt.

Ist das Ergebnis der Nacheinanderausführung zweier Bewegungen die Indentität, so nennen wir jede dieser Bewegungen die *Inverse* der anderen.
Bewegungen, die sich aus der Spiegelung an einer Geraden g und einer Verschiebung in Richtung von g zusammensetzen, nennen wir *Gleitspiegelungen.*

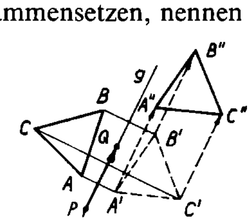


Abb. 8: Δ $A''B''C''$ ist Bild von Δ ABC bei der Gleitspiegelung mit der Spiegelachse g und der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$.

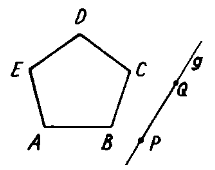
▲ A 2 a) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC! Bestimme sein Bild $A'B'C'$ bei der Verschiebung $\overrightarrow{AB}$! Bestimme das Bild des Bilddreiecks $A'B'C'$ bei derselben Verschiebung usw.!
(*Anmerkung:* Eine Verschiebung ist offenbar durch Angabe eines Punktes und dessen Bild eindeutig bestimmt.)
b) Erzeuge verschiedene Muster mit Hilfe von Verschiebungen!
c) Zeichne ein Viereck $ABCD$ und außerhalb des Vierecks einen Punkt O mit dem Drehwinkel $\alpha = 120°$!

Bestimme das Bild des Bildvierecks bei derselben Drehung usw.!

d) Erzeuge verschiedene Muster mit Hilfe von Drehungen!

e) Zeichne ein regelmäßiges Sechseck und bestimme seine Bilder bei den Spiegelungen an den Seiten des Sechsecks!

f) Zeichne ein Fünfeck und eine Gerade g entsprechend Bild 9! Wähle auf g zwei Punkte P und Q! Bestimme das Bild des Fünfecks bei der Gleitspiegelung, die sich aus der Spiegelung an g und der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$ zusammensetzt!



g) Überlege, ob es beim Hintereinanderausführen von Bewegungen auf die Reihenfolge des Hintereinanderausführens ankommen kann!
(*Anleitung:* Untersuche das Ergebnis des Hintereinanderausführens einer Drehung um einen Punkt und einer Spiegelung in verschiedener Reihenfolge.

Symmetrie

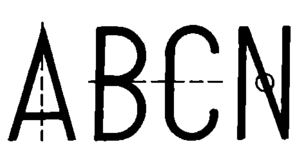
Bei einer Bewegung kann es vorkommen, daß eine Figur auf sich selbst abgebildet wird, d. h. jeder Punkt der Figur hat als Bild wieder einen (nicht notwendig denselben!) Punkt dieser Figur.

▲ A 3 a) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck und bestimme sein Bild bei der Spiegelung an einer Höhe des Dreiecks!

b) Zeichne ein Parallelogramm und bestimme sein Bild bei der Drehung um den Schnittpunkt der Diagonalen mit dem Drehwinkel $\alpha = 180°$!

c) Stelle alle Bewegungen zusammen, bei denen ein Quadrat $ABCD$ auf sich selbst abgebildet wird!

Definition: Eine Bewegung, bei der eine Figur auf sich selbst abgebildet wird, nennen wir eine *Symmetrieoperation* dieser Figur.



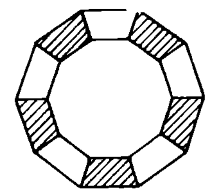
▲ A 4 a) Nenne Symmetrieoperationen für Geraden, Strahlen, Strecken und Streifen!

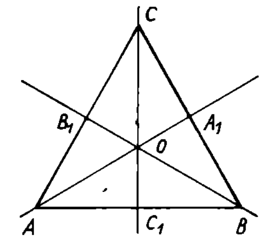
b) Nenne Symmetrieoperationen für Kreise und andere geometrische Figuren!

c) Begründe, daß jede Figur mindestens eine Symmetrieoperation besitzt!

Besitzt eine Figur Symmetrieoperationen, die von der Identität verschieden sind, so nennen wir die Figur *symmetrisch.* Eine Figur, die nur die Identität als Symmetrieoperation besitzt, heißt *asymmetrisch.*

▲ A 5 Definiere die Begriffe axialsymmetrisch bzw. zentralsymmetrische Figuren!





Beispiele für Symmetriegruppen

In den folgenden Tabellen sind alle Symmetrieoperationen eines gleichseitigen Dreiecks ABC angegeben (siehe Abb. rechts oben).

Symmetrieoperationen	Abkürzung	Zuordnungen
Identität	e	$A\to A$; $B\to B$; $C\to C$
Drehung um O; $\alpha = 120°$	d_1	$A\to B$; $B\to C$; $C\to A$
Drehung um O; $\alpha = 240°$	d_2	$A\to C$; $B\to A$; $C\to B$
Spiegelung an AA_1	s_1	$A\to A$; $B\to C$; $C\to B$
Spiegelung an BB_1	s_2	$A\to C$; $B\to B$; $C\to A$
Spiegelung an CC_1	s_3	$A\to B$; $B\to A$; $C\to C$

Für die Symmetrieoperationen eines gleichseitigen Dreiecks gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

I. Die Nacheinanderausführung zweier Symmetrieoperationen ist eine Symmetrieoperation.

Wir führen dazu zwei Beispiele an; dabei soll z. B. die Schreibweise „$s_1 \circ s_2$“ die Nacheinanderausführung (der Symmetrieoperationen s_1 und s_2 in dieser Reihenfolge) bedeuten.

Beispiel 1:

s_1	o s_2	Ergebnis
$A\to A$	$A\to C$	$A\to C$
$B\to C$	$C\to A$	$B\to A$
$C\to B$	$B\to B$	$C\to B$

Beispiel 2:

s_1	o d_1	Ergebnis
$A\to A$	$A\to B$	$A\to B$
$B\to C$	$C\to A$	$B\to A$
$C\to B$	$B\to C$	$C\to C$

Das Ergebnis im Beispiel 1 ist die Symmetrieoperation d_2. Das Ergebnis im Beispiel 2 ist die Symmetrieoperation s_3.

II. Zu jeder Symmetrieoperation gibt es die Inverse.

s_1	o s_1	e
$A\to A$	$A\to A$	$A\to A$
$B\to C$	$C\to B$	$B\to B$
$C\to B$	$B\to C$	$C\to C$

d_1	o d_2	e
$A\to B$	$B\to A$	$A\to A$
$B\to C$	$C\to B$	$B\to B$
$C\to A$	$A\to C$	$C\to C$

▲ A 6 Stelle in einer Tabelle alle Symmetrieoperationen für ein Quadrat zusammen! Überprüfe, ob die Eigenschaften I und II gelten!

Gewisse Symmetriegruppen der Ebene werden Ornamentgruppen genannt. Dabei unterscheidet man Rosettengruppen, Friesgruppen und Wandmustergruppen.

Mit ihnen wollen wir uns im nächsten Heft beschäftigen.

R. Bittner

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

EDV Teil 9

2.2. Eigenschaften der drei Grundschaltungen, Zusammenhänge und Kombinationen

Zunächst seien einige (für beliebige x_1, x_2, x geltende) Formeln kommentarlos hingeschrieben. Der Leser mache sich jede einzelne klar und überzeuge sich von der Richtigkeit, auch um dadurch mit diesen Funktionen besser vertraut zu werden.

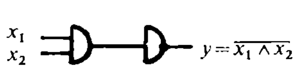
(1) $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$
(2) $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$
(3) $x \wedge \mathrm{O} = \mathrm{O}$
(4) $x \wedge \mathrm{L} = x$
(5) $x \vee \mathrm{O} = x$
(6) $x \vee \mathrm{L} = \mathrm{L}$
(7) $(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
(8) $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$
(9) $\overline{\overline{x}} = x$
(10) $x \wedge \bar{x} = \mathrm{O}$
(11) $x \vee \bar{x} = \mathrm{L}$

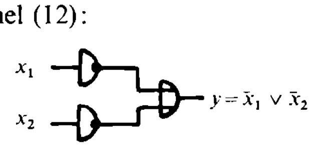
(1) und (2) zeigen, daß diese Funktionen kommutativ, (7) und (8) zeigen, daß sie assoziativ sind. Diese Eigenschaften teilen sie also mit den Rechenoperationen Multiplikation und Addition. Durch (7) und (8) kommt man zur Ausdehnung der Konjunktion und Disjunktion auf mehr als zwei Eingangsgrößen.

Die nächsten Formeln verlangen vom Leser etwas mehr Überlegung und werden deshalb ausführlicher erläutert:

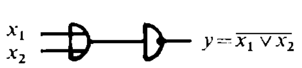
(12) $\overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$
(13) $\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$.

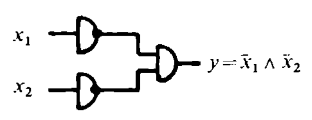
Sie zeigen einerseits, daß man durch Kombination von Grundschaltungen neue Funktionsschaltungen definieren kann, und andererseits, daß man in manchen Fällen eine Kombinationsschaltung durch eine andere ersetzen kann, die das gleiche leistet. Wir veranschaulichen die Formel (12):





und auch die Formel (13):





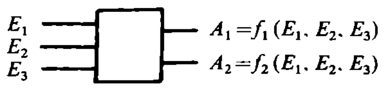
In Worten: (12) Die Negation der Konjunktion zweier Schaltgrößen ist gleich der Disjunktion ihrer Negationen.
(13) Die Negation der Disjunktion zweier Schaltgrößen ist gleich der Konjunktion ihrer Negationen.

Aufgabe: Tabellieren Sie die beiden durch (12) und (13) definierten Schaltfunktionen!
Diese beiden neuen Tabellen, zusammen mit denen für die Konjunktion und die Disjunktion, drängen uns folgende Fragen auf:
1. Wieviel verschiedene Schaltfunktionen lassen sich mit zwei Eingangsgrößen überhaupt bilden?
2. Lassen sie sich *alle* aus den drei Grundbausteinen, das heißt aus UND-Glied, ODER-Glied und NEIN-Glied, durch geeignete Kombinationen darstellen?
Die erste Frage ist schnell beantwortet. Da es genau 16 verschiedene Kombinationen der Größen O und L zu je vieren gibt (von OOOO bis LLLL), existieren auch genau 16 verschiedene Schaltfunktionen dieser Art:

Eingänge	x_1	O	O	L	L	x_1	O	O	L	L
	x_2	O	L	O	L	x_2	O	L	O	L
Ausgang	y_1	O	O	O	O	y_9	L	O	O	O
	y_2	O	O	O	L	y_{10}	L	O	O	L
	y_3	O	O	L	O	y_{11}	L	O	L	O
	y_4	O	O	L	L	y_{12}	L	O	L	L
	y_5	O	L	O	O	y_{13}	L	L	O	O
	y_6	O	L	O	L	y_{14}	L	L	O	L
	y_7	O	L	L	O	y_{15}	L	L	L	O
	y_8	O	L	L	L	y_{16}	L	L	L	L

y_2 ist die Konjunktion, y_8 die Disjunktion, und aus der Lösung der letzten Aufgabe findet der Leser auch die Indizes der Funktionen (12) und (13).
Die zweite Frage kann bejaht werden. Man kommt dabei sogar mit Konjunktion und Negation beziehungsweise mit Disjunktion und Negation aus. Beispiele, wie man die Disjunktion durch die Konjunktion und umgekehrt die Konjunktion durch die Disjunktion unter Zuhilfenahme der Negation ausdrücken kann, zeigen wiederum die Beziehungen (12) und (13).
Zur Übung wird empfohlen, nach Belieben verschiedene Grundschaltungen zu kombinieren und hernach

festzustellen, welche der 16 Schaltfunktionen man gefunden hat, ohne Rücksicht darauf, ob die jeweilige Funktion rechentechnisch von Bedeutung ist oder nicht.
In der Praxis werden nun häufig Schaltungen benötigt, die nicht nur mehrere Eingänge, sondern auch mehr als einen Ausgang haben. Man kann sie nicht als Funktionsschaltungen bezeichnen, da der Funktionsbegriff bekanntlich die Eindeutigkeit des Funktionswertes einschließt. Vielmehr ist ein solches System eine Vereinigung von mehreren, zum Beispiel von zwei Funktionsschaltungen. Für drei Eingänge und zwei Ausgänge sei es so symbolisiert:



Ein spezielles System dieser Art werden wir gleich kennenlernen.

2.3. Das Addierwerk

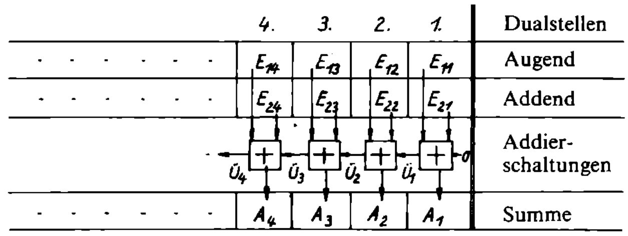
Wir wollen nun die Wirkungsweise der genannten Grundschaltungen und ihrer Kombinationen in einem Rechenautomaten näher betrachten. Natürlich kann hier nicht die Fülle sämtlicher Anwendungsmöglichkeiten besprochen werden. Wir begnügen uns mit *einem* besonders wichtigen Beispiel, nämlich einer Schaltung zur *Addition zweier Dualzahlen* in einem reinen Dualrechner. Addiert man zwei Dualzahlen ziffernweise (siehe Abschnitt 1.4.!), so muß man, um jeweils eine Ergebnisziffer zu finden, dreierlei berücksichtigen: erstens die Augendenziffer, zweitens die entsprechende Addendenziffer und drittens den Übertrag (auch O gilt als Übertrag) aus der vorherigen Dualstelle. Das sind — schalttechnisch betrachtet — drei Eingänge. Sie liefern erstens die Ergebnisziffer und zweitens den Übertrag für die nächste Dualstelle. Das sind zwei Ausgänge. Wir brauchen also gerade eine Schaltung der zuvor beschriebenen Art. Sie muß so arbeiten, wie die folgende Tabelle zeigt:

Eingänge	E_{1i}	O	O	O	O	L	L	L	L
	E_{2i}	O	O	L	L	O	O	L	L
	$Ü_{i-1}$	O	L	O	L	O	L	O	L
Ausgänge	A_i	O	L	L	O	L	O	O	L
	$Ü_i$	O	O	O	L	O	L	L	L

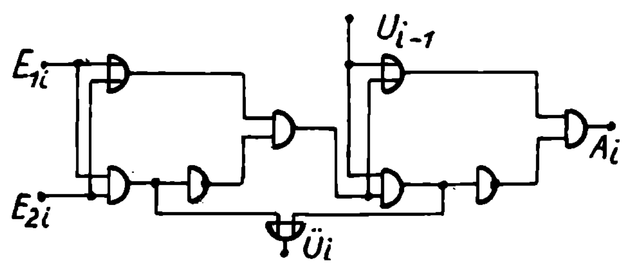
Hierbei bedeuten (positive ganze Dualzahlen vorausgesetzt) die Symbole:

E_{1i} = Augendenziffer der i-ten Stelle
E_{2i} = Addendenziffer der i-ten Stelle
$Ü_{i-1}$ = Übertrag aus der $(i-1)$-ten Stelle
A_i = Ergebnisziffer der i-ten Stelle
$Ü_i$ = in der i-ten Stelle anfallender Übertrag, der dann in der $(i+1)$-ten Stelle als Eingang verwendet wird.

Denken wir uns die beiden zu addierenden Dualzahlen im Automaten gespeichert und bezeichnen wir die erläuterte Additionsschaltung mit ⊞, so läßt sich der Vorgang wie folgt darstellen:



Man muß sich vorstellen, daß über die Verbindungsleitungen die Impulse O bzw. L nahezu gleichzeitig laufen.* Der Rechner benötigt, wenn er elektronisch arbeitet, für die gesamte – vielleicht über zwanzig und mehr Dualstellen laufende – Rechnung nur einen mehr oder weniger kleinen Bruchteil einer Sekunde. Ein Relaisrechner arbeitet natürlich wesentlich langsamer. Man beachte noch die O als dritten Eingang des ersten Addiergliedes. Sie muß als fiktiver Übertrag, das heißt als Anfangsbedingung, mit eingegeben werden, da die Schaltung, wenn eine Eingangsstelle leer ist, nicht arbeitet.
Als letzte Aufgabe dieses Kapitels bleibt uns noch die Überlegung, wie eine solche Addierschaltung praktisch herzustellen, das heißt aus UND-Glied, ODER-Glied und NEIN-Glied aufzubauen ist. Es gibt viele Möglichkeiten, von denen hier nur eine gezeigt wird:



Sie erscheint dem Anfänger vielleicht schwierig. Man wird damit vertraut, wenn man sie in einigen oder besser in allen acht Kombinationsmöglichkeiten der drei Eingänge auf Grund der obigen Tabelle ausprobiert. Wir schließen damit das Kapitel über logistische Funktionen ab. Wer mehr darüber erfahren will, dem sei als Literatur empfohlen:

1. *Günter Schubert:* Digitale Kleinrechner,
2. *Dieter Bär:* Schaltalgebra,

beides aus der Reihe *Automatisierungstechnik* VEB Verlag Technik Berlin.

J. Frommann

* Ein Rechner der genannten Art heißt *Parallelrechner.* Ein *Serienrechner* würde die einzelnen Ziffern nacheinander abarbeiten. Er benötigt dadurch für alle Dualstellen nur *eine* Addierschaltung. Man muß dann aber eine sog. *Verzögerungsschaltung* einbauen, die jeweils den Übertrag für den nächsten (zeitlich späteren) Arbeitsschritt aufspart. Wir wollen aber darauf und erst recht auf die in der Praxis auftretenden Kombinationen von Parallel- und Serienrechnern nicht weiter eingehen.

Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen

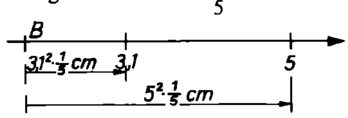
Teil 2
Wir üben das Zeichnen von Funktionsleitern

Wie das Nomogramm der Abbildung 5 bestehen alle Nomogramme, die wir kennenlernen werden, aus Funktionsleitern. Deshalb üben wir in diesem Abschnitt das Zeichnen solcher Funktionsleitern, die uns später fast alle als Teile von Nomogrammen wieder begegnen.

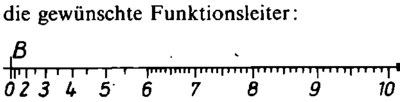
Zunächst wollen wir eine Funktionsleiter zur Funktion mit der Gleichung $y=x^2$ zeichnen. Durch diese Rechenvorschrift $y=x^2$ wird jeder reellen Zahl x ihr Quadrat $x^2=y$, also eine nichtnegative reelle Zahl zugeordnet. So gehört z. B. zu $x=3{,}1$ der y-Wert $y=3{,}1^2=9{,}61$ (Wir benutzen gegebenenfalls die Tafel der Quadratzahlen oder den Rechenstab!). Einige der durch diese Zuordnungsvorschrift bestimmten geordneten Wertepaare $(x;\ y)=(x;\ x^2)$, die in ihrer Gesamtheit die jetzt zu betrachtende Funktion bilden, sind in der folgenden Wertetabelle zusammengestellt:

x	0	1	2	3	...	3,1	...	-1	...
y	0	1	4	9		9,61		1	...

Um schließlich eine Funktionsleiter zu $y=x^2$ zu erhalten, wählen wir eine beliebige, orientierte Gerade, auf ihr einen Bezugspunkt B und als Längeneinheit $1\ \mathrm{LE}=\frac{1}{5}$ cm.



Gemäß der Definition einer Funktionsleiter sind die Koten 5 bzw. 3,1 den Punkten der orientierten Geraden zuzuordnen, die vom Punkte B die orientierten Abstände 5^2 LE $=5^2\cdot\frac{1}{5}\,\mathrm{cm}=5$ cm bzw. $1\ \mathrm{LE}=3{,}1^2\cdot\frac{1}{5}$ cm $=1{,}92$ cm besitzen. In dieser Weise entsteht die gewünschte Funktionsleiter:



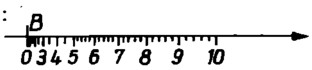
Da die Funktion $y=x^2$ keine negativen Funktionswerte annimmt (Ihr Wertebereich ist die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen), liegen alle Koten auf dem einen der beiden von B auslaufenden Strahlen der gewählten Geraden. Da wir von der Leitergeraden nur ein endliches Stück zeichnen können, kann diese Funktionsleiter nur für einen Teil des Definitionsbereiches dieser Funktion (Menge aller reellen Zahlen) gezeichnet werden.

Da schließlich der gleiche Funktionswert von der Funktion $y=x^2$ im allgemeinen für zwei x-Werte angenommen wird, nämlich für x und für $-x$, tragen die mit Koten versehenen Punkte außer dem mit der Kote 0 jeweils zwei Koten. Der Übersichtlichkeit wegen kann nur ein Teil der Koten markiert werden, wie wir das vom Zentimetermaß und vom Rechenstab her gewohnt sind.*

Auch auf dem Zentimetermaß und auf dem Rechenstab sind, wie wir jetzt erkennen, Funktionsleitern aufgetragen.

1. Aufgabe: Zeichne eine Funktionsleiter zu $y=x^2$ für $0\leqq x\leqq 10$ und $1\ \mathrm{LE}=1$ mm.

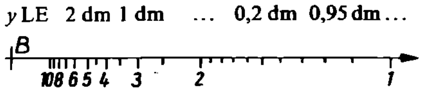
Lösung:



2. Aufgabe: Zeichne für $1\leqq x\leqq 10$ und $1\ \mathrm{LE}=2$ dm zu $y=\frac{1}{x}$ eine Funktionsleiter!

Lösung: Eine Wertetabelle wird mittels Rechenstab oder der Tafel der reziproken Werte aufgestellt.

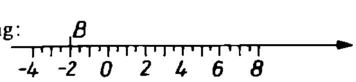
x	1	2	...	10	2,1	...
y	1	0,5	...	0,1	0,4762	...
y LE	2 dm	1 dm	...	0,2 dm	0,95 dm	...



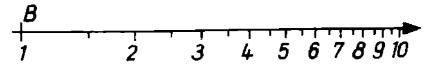
Bemerkungen: Auch durch Erweitern des Bereiches $1\leqq x\leqq 10$ kann dem Bezugspunkt B keine Kote zugeordnet werden, denn die Zahl 0 gehört nicht zum Wertebereich der Funktion $y=\frac{1}{x}$, d. h. diese Funktion nimmt den Wert $y=0$ nicht an. Alle positiven reellen Zahlen x sind als Koten den Punkten des einen der beiden von B auslaufenden Strahlen unserer Leitergeraden zugeordnet, die negativen reellen Zahlen den Punkten des anderen Strahles.

3. Aufgabe: Zeichne eine Leiter der Funktion $y=\frac{x}{2}+1$ für $-4\leqq x\leqq 8$ und $1\ \mathrm{LE}=2$ cm!

Lösung:

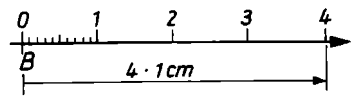


4. Aufgabe: (ab Klasse 9) Zeichne zu $y=\lg x$ für $1\leqq x\leqq 10$ und $1\ \mathrm{LE}=2$ dm eine Funktionsleiter unter Benutzung der Tafel der Briggschen Logarithmen! Lösung:



Teil 3
Wir zeichnen weitere Nomogramme, die aus einer Funktionsleiter bzw. einer Doppelleiter bestehen.

Die Skale eines Zentimetermaßes kann aufgefaßt werden als eine Funktionsleiter der Funktion mit der Gleichung $y=x$ und der Längeneinheit 1 cm:

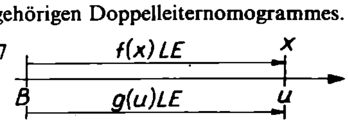


Mit dieser Interpretation besteht das Nomogramm der Abbildung 5 aus zwei Funktionsleitern, die die Leitergerade, den Bezugspunkt und die Längeneinheit gemeinsam haben. Eine solche Funktionsleiter wollen wir eine Doppelleiter nennen:

Definition: Zwei Funktionsleitern, die die orientierte Gerade, den Bezugspunkt und die Längeneinheit gemeinsam haben, heißen *Doppelleiter*. Mit jedem Nomogramm, das aus einer Doppelleiter besteht, soll analog gearbeitet werden wie mit dem der Abbildung 5:

Definition: Als *Lösung eines aus einer Doppelleiter zu den Funktionen mit den Gleichungen $y=f(x)$ und $v=g(u)$ bestehenden Nomogrammes* wird jedes geordnete Zahlenpaar $(x;\ u)$ bezeichnet, dessen Zahlen als Koten einem Punkt der Leitergeraden zugeordnet sind. Gemäß der folgenden, unter Beachtung der Definition der Funktionsleiter angefertigten Abbildung (Abb. 17) genügt jede Lösung $(x;\ u)$ eines solchen Nomogrammes der Gleichung $f(x)=g(u)$ und umgekehrt ist jedes geordnete Zahlenpaar $(x;\ u)$, das der Gleichung $f(x)=g(u)$ genügt, Lösung des zugehörigen Doppelleiternomogrammes.

Abb. 17

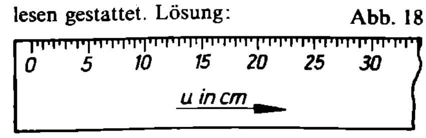


Jede Lösung des zu den Funktionen mit den Gleichungen $y=f(x)$ und $v=g(u)$ gehörigen Doppelleiternomogrammes genügt der Schlüsselgleichung $f(x)=g(u)$. Dabei wurde in naheliegender Weise festgesetzt:

Definition: Eine Formel, der alle Lösungen eines Nomogramms genügen, heißt *Schlüsselgleichung* des Nomogrammes.

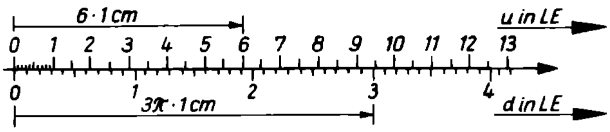
5. Aufgabe: Ein Lineal ist so zu kotieren, daß es beim Anlegen an einen Kreis gemäß Abbildung 1 den Umfang des Kreises abzulesen gestattet. Lösung:

Abb. 18



6. *Aufgabe:* Zur Formel $u=\pi d$ für den Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser d ist ein Doppelleiternomogramm zu zeichnen.

Lösung: Mittels der naheliegenden Festsetzung $d=x$ und durch Vergleich mit der Schlüsselgleichung $f(x)=g(u)$ können die Funktionsgleichungen $y=f(x)$ und $v=g(u)$ gewählt werden zu $y=\pi x$ und $v=u$. Bei Wahl von 1 LE = 1 cm ergibt sich hiermit das folgende Nomogramm:



Auch Rechenprozesse nach den Formeln

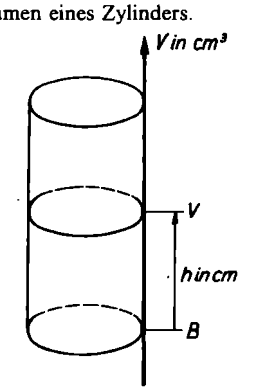
$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ (Volumen einer Kugel mit Radius r)

und $s=\frac{g}{2}t^2$ (Weg-Zeitgesetz des freien Falles mit $g=9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

und anderen mit zwei Variablen lassen sich ersetzen durch unmittelbares Ablesen der Ergebnisse an entsprechenden Nomogrammen, die jeweils aus einer Doppelfunktionsleiter analog zu den Abb. 5 und 17 bestehen. Gemeinsam besprechen wollen wir noch das Zeichnen eines weiteren einfachen Nomogrammes, der Eichskale eines Meßzylinders:

7. *Aufgabe:* Ein Meßzylinder mit dem Innendurchmesser 2 cm ist mit einer Volumenskale von 0 cm³ bis 50 cm³ auszustatten. Diese Funktionsleiter ist zu zeichnen.

Lösung: Als Leitergerade wählen wir natürlich eine Mantellinie des Meßzylinders und als Bezugspunkt B den am Gefäßboden gelegenen Punkt der Leitergeraden. In der Volumenformel $V=\pi r^2 h$ sollen r und h die Maßzahlen des in cm gemessenen Radius bzw. der in cm gemessenen Höhe sein. Dann ist V die Maßzahl des in cm³ gemessenen Volumen eines Zylinders.



Wegen $r=1$ vereinfacht sich diese Formel zu $V=\pi h$.

Die V-Werte von 0 bis 50 sollen als Koten an der Funktionsleiter ablesbar sein. Also entspricht in der Definition der Funktionsleiter unser V dem x und unser h dem dortigen y. Die Gleichung $V=\pi h$ ist also nach h umzustellen:

$$h=\frac{V}{\pi}$$

Zu der durch diese Gleichung definierten Funktion ist für $0\leq V\leq 50$ etwa mittels Rechenstab eine Wertetabelle aufzustellen und anschließend ist für 1 LE = 1 cm die zugehörige Funktionsleiter zu zeichnen. Diese stimmt überein mit der auf dem Anlegestreifen der Abbildung 18 gezeichneten Funktionsleiter, sofern man sich diese genau bis zur Kote 50 gezeichnet denkt.

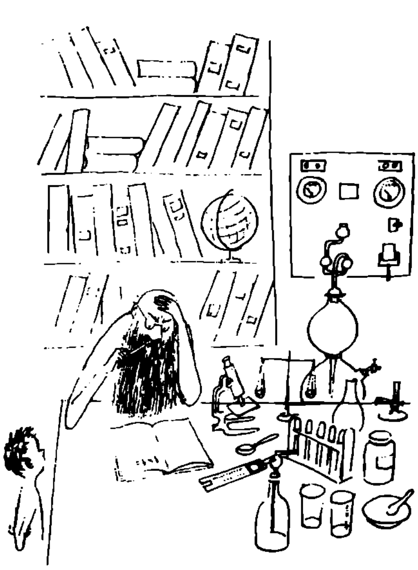
Schüler ab Klasse 9 können in analoger Weise die Eichskale eines Meßtrichters (Kegelstumpf) errechnen.

W. Träger

Aus drucktechnischen Gründen konnten verschiedene Abbildungen nur in einem Maßstab, der kleiner als 1 ist, gedruckt werden.

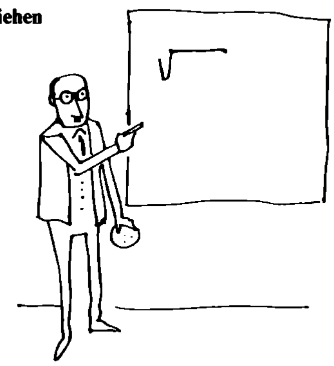
* Die nicht markierten Koten lassen sich durch Abschätzen fixieren. Ein solches Abschätzen ist nur möglich, falls die zugehörige Funktion zwei wichtige Eigenschaften besitzt: Sie muß stetig sein, d. h. einer kleinen Änderung des x-Wertes entspricht stets eine kleine Änderung des zugehörigen y-Wertes und sie muß eigentlich monoton steigend oder monoton fallend sein, d. h. zu dem größeren von zwei x-Werten gehört stets der größere oder kleinere y-Wert. Nur die zu stetigen und zumindest stückweise eigentlich monotonen Funktionen gehörigen Funktionsleitern, haben praktische Bedeutung.

Ungarische Unterhaltungsmathematik



László Réber, Budapest
(aus: Hokuspokus, Eulenspiegelverlag Berlin)

Wurzelziehen



Nachdem Herr Lehrer *Göböl* der Klasse schon gründlich das Wurzelziehen beigebracht hatte, wartete er seinen Schülern mit einem Rätsel auf. Das Rätsel zeigte ein Schema des Wurzelziehens, in dem sich nur zwei Ziffern auf ihrem Platz befanden, während die übrigen durch Punkte (x) angedeutet waren.

Das Bild sah folgendermaßen aus:

√ x x x 5 x x = x x x
x x
x x 5 : x x · x
x x
x x x x : x x x · x
2 x x x
0

Herr Lehrer *Göböl* forderte seine Schüler auf, so an Stelle der Punkte Ziffern zu schreiben, daß auf der Tafel schließlich ein vollständiges Wurzelziehschema steht.

Auch wir wollen das tun!

Mathematical Journal for Secondary Schools

In der ungarischen Schülerzeitschrift *Lapok* werden in jedem Heft gleichlautende Aufgaben in ungarischer, russischer und englischer Sprache veröffentlicht. Hier geben wir ein Beispiel für unsere Leser (aus Heft 2/70):

● Folytassuk az alábbi táblázat mindegyik sorát mindkét irányban úgy, hogy az oszlopokban álló 3–3 szám összege továbbra is 8 legyen és négyzetösszegük köbszám legyen.

	...86,	26,	14,	50,	134, ...	
(*)	...–130,	–18,	–2,	14,	126, ...	
	...52,	0,	–4,	–56,	–252, ...	

● Развивать ряды таблицы (*) чтобы в каждом столбце сумма чисел 8 и сумма квадратов чисел полный куб.

● Extend every line in table (*) in both directions so that the sum of the three numbers in any column remain eight and the sum of the squares of the same numbers be a cubic number.

Ergebnis: x = 10

Aus einem ungarischen Unterhaltungsbuch haben wir folgende Aufgabe zum „Knobeln" entnommen:

$$x=\frac{6\cdot 27^{12}+2\cdot 81^{9}}{8\,000\,000^{2}}\cdot\frac{80\cdot 32^{3}\cdot 125^{4}}{9^{19}-729^{6}}$$

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

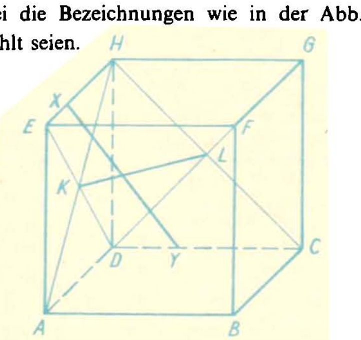
DDR-Olympiade (22. 3. bis 26. 3. 1970) Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. Zu ermitteln sind alle Paare natürlicher Zahlen derart, daß jedes der Paare zusammen mit der Zahl 41 ein Tripel bildet, für das sowohl die Summe der drei Zahlen des Tripels als auch die Summe von je zwei beliebig aus dem Tripel ausgewählten Zahlen Quadrate natürlicher Zahlen sind.

2. Zu den reellen Zahlen a, b mit $a>0$, $b>0$ und $a \neq 1$, $b \neq 1$ ermittle man alle reellen Zahlen x, die die Gleichung $(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b$ erfüllen.

3. A, B, C, D, E, F, G, H seien die Ecken eines Würfels, und X sei ein Punkt der Strecke EH, wobei die Bezeichnungen wie in der Abb. gewählt seien.



K sei der Schnittpunkt der Strecken AH und ED, und L sei der Schnittpunkt der Strecken HC und DG. Schließlich sei Y derjenige auf der Strecke DC gelegene Punkt, für den $\overline{DY} = \overline{EX}$ ist. Man beweise, daß der Mittelpunkt von XY auf KL liegt.

4. Beweisen Sie folgenden Satz:
Wenn s und t von Null verschiedene reelle Zahlen und a, b und c drei paarweise voneinander verschiedene Lösungen der Gleichung $sx^2(x-1)+t(x+1)=0$ sind, so gilt: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = -1$.

5. Es seien k' und k'' zwei voneinander verschiedene Kreise durch die Eckpunkte A und B des Dreiecks ΔABC, deren Mittelpunkte M' bzw. M'' beide auf dem Umkreis k von ΔABC liegen.
Beweisen Sie, daß der Mittelpunkt des Inkreises von ΔABC entweder auf k' oder auf k'' liegt!

6. Man beweise folgenden Satz:
Wenn in einer quadratischen Gleichung
(1) $\quad ax^2+bx+c=0$
die Koeffizienten a, b, c sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat die Gleichung (1) keine rationale Lösung.

Olympiadeklasse 11/12

1. An einem internationalen Zeltlager nimmt eine Gruppe von 30 Freunden teil, von denen ein Teil Deutsch, ein Teil Russisch und ein Teil Französisch beherrschen, und zwar beherrschen einige Freunde nur eine Sprache, einige zwei Sprachen und einige sogar drei Sprachen.
Die Anzahl der Freunde, die genau zwei Sprachen beherrschen, ist mehr als doppelt so groß, jedoch weniger als dreimal so groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen. Die Anzahl der Teilnehmer, die alle drei Sprachen beherrschen, ist ebenso groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen.
Die Anzahl der Freunde, die nur Deutsch beherrschen, ist größer als die Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen, aber kleiner als die Anzahl derjenigen, die nur Französisch beherrschen. Die Anzahl derjenigen, die nur Deutsch beherrschen, ist kleiner als das Dreifache der Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen.
Geben Sie jeweils die Anzahl aller Teilnehmer dieser Gruppe an, die nur Deutsch, nur Russisch, nur Französisch, alle drei Sprachen beherrschen!

2. Gegeben sei eine Gerade g und eine Strecke AB, die nicht in derselben Ebene liegen. Unter allen Punkten C von g ist ein solcher zu finden, für den der Umfang des Dreiecks ΔABC möglichst klein ist.

3. Es ist zu beweisen, daß für jedes ganzzahlige $n \geqq 1$ die Funktion
$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ höchstens eine reelle Nullstelle haben kann.

4. Die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt M seien der Reihe nach mit $P_1, P_2, \ldots P_n$ bezeichnet.
a) Es ist zu beweisen: Die Strecken MP_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) können parallel zu sich selbst so verschoben werden, daß sie nach der Verschiebung die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks bilden.
b) Es ist zu beweisen (z. B. mit Hilfe des Satzes unter a)), daß folgende Beziehungen für alle natürlichen Zahlen n größer als 2 gültig sind:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{n\,2\pi}{n} = 0 \qquad (1)$$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{n\,2\pi}{n} = 0 \qquad (2)$$

5. Es sind alle reellen Zahlen λ anzugeben, für die die Gleichung
$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda\,(\tan^4 x - \cos^4 x)$

a) keine c) genau zwei
b) genau eine d) mehr als zwei

reelle Lösungen im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ hat.

6. Es ist zu beweisen, daß für jedes Quadrupel positiver reeller Zahlen a, b, c, d die Beziehung

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \leqq \sqrt[3]{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$$

gilt, und es ist zu untersuchen, in welchen Fällen Gleichheit eintritt.



Erste Preise wurden vergeben:

BERND HOFMANN
EOS Zittau
(Olympiadeklasse 10, Vorbereitungsklasse)

WOLFGANG BURMEISTER
EOS Dresden-Süd
(Olympiadeklasse 11)

Ursula Tyl, EOS Heinrich Hertz, Berlin, erfolgreichstes Mädchen der IX. OJM (Kl. 11/12) und Kandidat der XII. IMO (3. Preis)

Zweite Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Jürgen Roßmann, Antonin-Zapotocky-OS Neubrandenburg (Schüler einer 9. Klasse); Hartmut Strese, EOS Dr.-Theodor-Neubauer, Cottbus; Harald Loose, Erw. Spezialoberschule Kleinmachnow (aus Kl. 9); Albrecht Heß, 49. OS Dresden (aus Kl. 8); Rolf Haftmann, OS Olbersdorf (Bez. Dresden); Bernd Donath, EOS Rudolph Rotkegel, Forst; Günter Hempel, EOS Markranstädt (Bez. Leipzig); Heidrun Seidel, Spezialschule f. elektron. Industrie Martin-Andersen-Nexö, Dresden; Ottmar Langer, EOS Lessingschule, Döbeln; Frank Täubner, EOS Georg Schumann, Calau

In Olympiadeklasse 11 an: Christoph Winter, EOS Gerhart-Hauptmann Wernigerode; Olaf Böhme, EOS Dresden-Reick (aus Kl. 10); Jürgen Schefter, EOS Wladimir Komarow, Elsterwerda (aus Kl. 10)

In Olympiadeklasse 12 an: Manfred Krzikalla, Spezialsch. phys.-techn. Richtung, Frankfurt (Oder); Peter Oswald, EOS Dresden-Süd; Andreas Felgenhauer, Spezialkl. der TH Otto von Guericke, Magdeburg

Dritte Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Hans Siepel, EOS Luckenwalde; Bernd Riedel, EOS Winckelmann, Stendal; Guntram Pausch, EOS Wilhelm Pieck, Borna (Bez. Leipzig); Volkmar Scheffel, Goethe-OS, EOS Sebnitz (Bez. Dresden); Reinhard Karge, Goetheschule, EOS Bad Doberan; Bernd Krause, EOS Schmölln (Bez. Leipzig); Hans-Jürgen Fischer, EOS Adolph Diesterweg, Plauen; Klaus-Peter Jerzynek, EOS Geschwister Scholl, Löbau (Bez. Dresden), Harald Lieske, BS Automobilwerk Eisenach

In Olympiadeklasse 11 an: Gerhard Spens und Ludwig Schäfer, beide EOS Alexander von Humboldt, Erfurt; Harald Englisch EOS Karl-Marx, Leipzig (aus Kl. 10); Michael Schulze, TH Karl-Marx-Stadt, Spezialkl. an der Sektion Mathematik; Thomas Jentsch und Arnulf Möbius, beide Spezialkl. Mathematik/Physik der Martin-Luther-Universität Halle; Ursula Tyl, EOS Heinrich Hertz, Berlin

In Olympiadeklasse 12 an: Fredy Reimann, Fontane-Schule, EOS Neuruppin (Bez. Potsdam); Michael Josch, Erw. Spezialoberschule Kleinmachnow; Gerhard Noack, Kaufmännische Berufsschule Cottbus

Anerkennungsurkunden für sehr gute Leistungen erhielten:

Klasse 10: Helmut Roßmann, Antonin-Zapotocky-OS Neubrandenburg (aus Kl. 7); Martin Rohde, Maxim-Gorki-OS Berlin; Reiner Creutzburg, Pestalozzi-OS Wismar; Bernd Zaddach, 10. OS Cottbus (aus Kl. 7); Winfried Kung, Friedrich-Engels-OS Rostock; Axel Hintze, Clara-Zetkin-OS Magdeburg (aus Kl. 9); Rainer Staudte, EOS Artur Becker, Wilkau-Haßlau; Albrecht Böttcher, EOS Johannes R. Becher, Annaberg-Buchholz; Bernd Worel, Atonin-Zapotocky-OS Neubrandenburg (aus Kl. 9); Reiner Vanselow, EOS Wilhelm-Pieck-Stadt Guben; Hans-Dieter Sparing EOS II, Gera; Michael Schwarzer, EOS Georg Schumann, Calau (Bez. Cottbus); Wilfried Kröger, EOS Ernst Thälmann, Rostock; Wolf-Rüdiger Müller, EOS Freital; Gerit Schrade, EOS Alexander Puschkin, Neubrandenburg; Frank Loesdau, EOS Nikolaus Kopernikus, Torgelow (Bez. Neubrandenburg); Brigitte Prawitz, EOS Heinrich Hertz, Berlin (aus Kl. 9); Harry Niepel, EOS Lobenstein (Bez. Gera); Norbert Hennig, BBS des VEB Schwermaschinenbau S. M. Kirow, Leipzig; Michael Salewski, BS d. soz. Konsumgüter-Binnenhandels Löbau (Bez. Dresden)

Klasse 11: Günter Schwalbe, EOS Brand-Erbisdorf (Bez. Karl-Marx-Stadt); Reinhard Wobst, TH Karl-Marx-Stadt; Joachim Voigt und Stephan Wolf, beide EOS Heinrich Hertz, Berlin

Klasse 12: Werner Nagel und Inge Reimann, beide Spezialoberschule Carl Zeiss, Jena; Frank Galeski, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Ludwig Hoy, TH Karl-Marx-Stadt; Roland Müller, ABF Walter Ulbricht, Martin-Luther-Universität Halle; Ullrich Semmler und Achim Nötzold, beide TH Karl-Marx-Stadt; Volkmar Olbrich, Spezialkl. der TH Otto von Guericke, Magdeburg; Joachim Puls, BS Halbleiterwerk Frankfurt (Oder)

Losung der IX. OJM

Lernt, arbeitet und lebt im Geiste Lenins — vollbringt hohe Leistungen zu Ehren der DDR

Kandidaten zur XII. IMO (10. bis 22. Juli 1970) VR Ungarn

Wolfgang Burmeister, Peter Oswald, Olaf Böhme (alle Dresden); Andreas Felgenhauer und Christoph Winter (beide Magdeburg); Manfred Krzikalla, Frankfurt (Oder); Jürgen Schefter, Cottbus; Fredy Reimann, Potsdam; Thomas Jentsch, Halle; Gerhard Spens, Erfurt; Ursula Tyl, Berlin

Wir stellen vor (v. l. n. r.)
Dr. habil. Helmut Bausch, Vorsitzender der Jury und Delegationsleiter der DDR-Mannschaft für die XII. IMO;
Prof. Dr. habil. Wolfgang Engel, Vorsitzender des Zentralen Komitees für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR;
Oberstudienrat Herbert Titze, Sekretär des ZKOJM

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin 15. September 1970

Achtung!
Alle Antwortkarten des Wettbewerbs 1969/70 (H. 5/69 bis Heft 3/70) sind zwischen dem 1. und 10. Oktober 1970 geschlossen an die Redaktion alpha, 7027 Leipzig, Postfach 14, einzusenden. Bei Einsendung von mindestens 7 richtigen Antwortkarten gibt es Abzeichen und Urkunden. Schüler, welche bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1969/70 einsenden, erhalten das *alpha-Abzeichen in Gold* (und die Urkunden zurück).

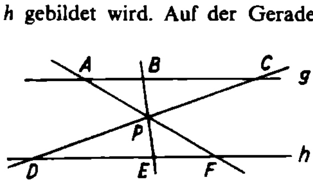
5 ▲ 534 Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 10. Die Summe aus dem Fünffachen des ersten Summanden und dem Dreifachen des zweiten Summanden beträgt 44. Wie heißen die Summanden? Löse diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle.
Sigrun Geyer, Sansibar/Tanzania

5 ▲ 535 Mit welcher Zahl sind alle aus gleichen Ziffern bestehenden zweistelligen natürlichen Zahlen zu multiplizieren, wenn das Produkt jeweils eine vierstellige, aus den gleichen Ziffern bestehende natürliche Zahl sein soll? *Sch.*

W 5 ■ 536 Eine Flasche Brause kostet 0,21 M. Für eine leere Flasche werden 0,30 M Pfand erhoben. Wieviel leere Flaschen muß Heinz zur Konsumverkaufsstelle mitnehmen, wenn er ohne zu zahlen zehn Flaschen Brause erhalten möchte? *P.*

W 5 ■ 537 Wieviel Möglichkeiten gibt es, in der Ungleichung $a < b$ die Variablen a und b durch die natürlichen Zahlen von 0 bis 20 so zu ersetzen, daß die Ungleichung dabei stets erfüllt wird? *T.*

6 ▲ 538 Die nachstehende Figur stellt einen Streifen dar, der von den parallelen Geraden g und h gebildet wird. Auf der Geraden g



sind drei Punkte A, B und C, auf der Geraden h drei Punkte D, E und F so festgelegt, daß $\overline{AB} = \overline{EF}$ und $\overline{BC} = \overline{DE}$ gilt.
Beweise, daß sich die drei Verbindungsgeraden AF, BE und CD in genau einem Punkt schneiden. *T.*

6 ▲ 539 Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl, die die folgenden Bedingungen erfüllt:
a) Addiert man die Quadrate der den beiden Ziffern der gesuchten Zahl entsprechenden Zahlen, so erhält man 100.
b) Multipliziert man diese beiden Zahlen, so erhält man 48.
Hans-Jürgen Bartscherer, Freiberg/Sa.

6 ▲ 540 Zeichne ein unregelmäßiges Dreieck ABC mit den Seiten $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{BC} = a$, verlängere die Seite $\overline{AB}$ über A hinaus um b und über B hinaus um a, verbinde die erhaltenen mit D und E benannten Endpunkte jeweils mit dem Punkt C. Beweise, daß dann $\sphericalangle\ DCE = 90° + \frac{\gamma}{2}$ gilt, wobei $\gamma = \sphericalangle\ ACB$ ist! *T.*

W 6 ■ 541 Jürgen fährt mit konstanter Geschwindigkeit auf seinem Motorroller vom Ort A nach dem Ort B. Nachdem Jürgen den vierten Teil der Fahrstrecke zurückgelegt hatte, zeigte seine Armbanduhr die Uhrzeit 6.45 an. Um 6.55 Uhr hatte Jürgen bereits den dritten Teil der Fahrstrecke zurückgelegt.
a) Um wieviel Uhr startete Jürgen in A?
b) Um wieviel Uhr traf er in B ein? *Sch.*

W 6 ■ 542 Für sechs von Null verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, d, e und f gelte $a + 3b + 5c = 12$ und $d + 3e + 5f = 20$. Wie groß ist die Summe $a + b + c$, wenn $d + e + f = a + b + c$ gilt? Löse diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle! *P.*

7 ▲ 543 Heinz berichtet über das Lebensalter seiner Eltern und zweier seiner Großeltern folgendes:
Meine Mutter ist gegenwärtig dreimal so alt wie ich. Vor zwei Jahren war mein Vater viermal so alt wie ich. Meine Großmutter war vor drei Jahren siebenmal so alt wie ich. Vor einem Jahr war mein Großvater doppelt so alt wie meine Mutter. Addiert man die Zahlen, die das gegenwärtige Alter von mir, meinen Eltern, meinem Großvater und meiner Großmutter angeben, so erhält man als Summe 248. Wie alt ist jedes der Familienmitglieder? (Das Lebensalter jeder der fünf Personen sei stets durch eine ganze Zahl angegeben.)
Ehrenfried Zschech, Bautzen

7 ▲ 544 In dem Wort „alpha" ist jeder Buchstabe durch eine der Ziffern von 1 bis 9 so zu ersetzen, daß die erhaltene fünfstellige Zahl das Quadrat einer dreistelligen Primzahl ist. Die Quersumme dieser Primzahl soll wiederum eine Primzahl sein und der Zahl „ap" entsprechen. Für gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben dagegen verschiedene Ziffern einzusetzen. *Ing. H. Decker, Köln*

7 ▲ 545 Bestimme alle rationalen Zahlen x, die die Gleichung $|x| + 2 - 2x = 0$ erfüllen! (Löse die Aufgabe mit einer geeigneten Fallunterscheidung!) *T.*

W 7 ■ 546 Nach einer Mitteilung des „Neuen Deutschland" vom 29. September 1968 ist in der Volksrepublik Polen für die Jahre 1969 und 1970 eine Zunahme der Produktion im Maschinenbau um je 14 % gegenüber dem jeweils vorhergehenden Jahr vorgesehen. Um wieviel Prozent wird die geplante Produktion im Maschinenbau des Jahres 1970 größer sein als die des Jahres 1968? *T.*

W 7 ■ 547 Ein Kreis, der eine Dreieckseite und die Verlängerungen der beiden anderen Dreieckseiten in je einem Punkt berührt, wird Ankreis des Dreiecks genannt. Ein innerer Punkt E der Seite $\overline{BC}$ eines Dreiecks ABC sei der Berührungspunkt des Ankreises.
Beweise, daß die Summe aus den Längen der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BE}$ gleich dem halben Umfang des Dreiecks ABC ist. *Sch.*

8 ▲ 548 Im Leipziger Schnellbahnverkehr (elektrischer Betrieb) fährt ein Fahrgast um 14.50 in Markkleeberg-West ab und trifft nach einer Fahrt rund um Leipzig um 15.43 Uhr in Gaschwitz ein.
a) Wieviel Züge des Schnellverkehrs, die von Gaschwitz nach Markkleeberg-West in Abständen von 20 min fahren, begegnen ihm auf seiner Fahrt, wenn der letzte ihm begegnende Zug um 15.34 Uhr in Gaschwitz abfährt und die Züge in dieser Richtung dieselbe Fahrzeit haben wie der Zug des Fahrgastes?
b) Zu welcher Uhrzeit begegnet dem Fahrgast der erste Gegenzug? (Dabei soll eine konstante Reisegeschwindigkeit angenommen werden, eine Annahme, die trotz der häufigen Haltepunkte mit guter Annäherung zutrifft.) *L.*

8 ▲ 549 Es ist der Flächeninhalt eines Rhombus zu bestimmen, von dem der Umfang $2s$ und die Summe m der Längen der Diagonalen gegeben sind.
Gerhard Zinn, Schleusingen
EOS „Max Greil", Klasse 9 I

W 8 ▪ 550 Es seien x, y, z drei natürliche Zahlen, deren Produkt 30 beträgt und deren Summe durch 4 teilbar ist. Ferner sei $x \leqq y \leqq z$.

a) Es sind alle natürlichen Zahlen x, y, z zu bestimmen, die die obigen Eigenschaften haben.

b) Es sind diejenigen natürlichen Zahlen x, y, z anzugeben, die die obigen Eigenschaften haben und bei denen eine Zahl kleiner als jede der beiden anderen sowie Teiler der beiden anderen Zahlen ist. *T.*

W 8 ▪ 551 Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Ist das Viereck $ABCD$ ein Tangentenviereck, dessen Winkel $\sphericalangle\, DAB = \alpha$ und $\sphericalangle\, BCD = \gamma$ rechte Winkel sind, so gilt für die Längen der Seiten $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$
$a = b$ und $c = d$,
d. h., das Tangentenviereck $ABCD$ ist ein Drachenviereck, dessen Symmetrieachse auf der Diagonalen $\overline{BD}$ liegt. *T.*

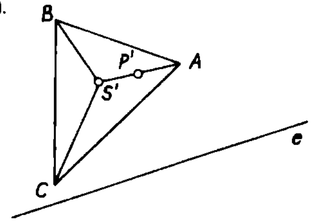
9 ▲ 552 Mit Hilfe der modernen Technik kann man Drähte aus Metall herstellen, die nur eine Dicke von 2μm (2 Mikrometer), d. s. 0,002 mm, haben.
Welche Länge besitzt ein Draht von kreisförmigem Querschnitt und einem Querschnittsdurchmesser von 0,002 mm, der aus einer Masse von 2 g Silber hergestellt worden ist?

9 ▲ 553 Die Zahl 1 000 000 soll so mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bzw. 9 dargestellt werden, daß jeweils immer nur eine dieser Ziffern in der Darstellung auftritt, und zwar höchstens siebenmal. Dabei dürfen Additions-, Multiplikations-, Subtraktions- und Divisionszeichen, die Potenzschreibung, das Zeichen für die Quadratwurzel, Klammern und die Schreibweise im dekadischen Positionssystem in beliebiger Weise benutzt werden.
Wer kann die Zahl 1 000 000 auf diese neun verschiedenen Arten darstellen?
Diese schon sehr alte, aber verhältnismäßig wenig bekannte Aufgabe wurde uns von *Regina Oberwinter*, Potsdam-Bornstedt, Schülerin einer 10. Klasse und Mitglied des Potsdamer *Klubs Junger Mathematiker* „Alexej Leonow", mitgeteilt.

W 9 ▪ 554 a) Der Betrag der Differenz der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen sei gleich 211.
Wie lauten diese Zahlen?
b) Der Betrag der Differenz der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen sei gleich 1 000 001.
Wie lauten diese Zahlen?
c) Der Betrag der Differenz der Kuben zweier aufeinanderfolgender ungerader natürlicher Zahlen sei gleich 153 602.
Wie lauten diese Zahlen?
Schüler Egbert Lindner, Dresden

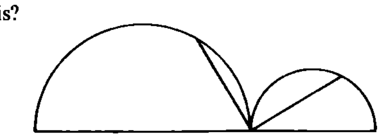
W 9 ▪ 555 Es ist zu beweisen, daß die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch 9 teilbar ist. *Sch.*

10/12 ▲ 556 Gegeben sei der Grundriß einer auf der Bildebene stehenden dreiseitigen Pyramide mit dem Basisdreieck ABC und der Spitze S. Eine Ebene ε schneide die Pyramidenkante $\overline{AS}$ in dem Punkt P und die Grundrißebene in der Geraden e (vgl. die Abbildung).



Es sind die Grundrisse der Schnittpunkte Q und R von ε mit den Pyramidenkanten $\overline{BS}$ und $\overline{CS}$ zu konstruieren.
Dr. E. Schröder, Dresden

10/12 ▲ 557 Welche der beiden Sehnen in den Halbkreisen der beigefügten Abbildung ist länger, die Sehne in dem größeren Halbkreis oder die Sehne in dem kleineren Halbkreis?



Dabei wird vorausgesetzt, daß die Flächeninhalte der beiden sich berührenden Halbkreise sich wie 3 : 1 verhalten, daß die beiden Sehnen aufeinander senkrecht stehen und daß die Sehne in dem größeren Halbkreis mit dem Begrenzungsdurchmesser dieses Halbkreises einen Winkel von 60° bildet.
Erst schätzen, dann messen, dann berechnen! *L.*

W 10/12 ▪ 558 Von einem Viereck $ABCD$ seien die folgenden Stücke gegeben:
$\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{AD} = 3$ cm, $\sphericalangle\, DAB = 60°$,
$\overline{CD} = 3{,}5$ cm, $\sphericalangle\, DBC = 30°$.
a) Das Viereck $ABCD$ ist zu konstruieren.
b) Die Länge der Seite $\overline{BC}$ und die Länge der Diagonale $\overline{BD}$ sind zu berechnen.
c) Es ist zu beweisen, daß die Lösung eindeutig ist, d. h., daß es bis auf kongruente Vierecke genau ein Viereck $ABCD$ gibt, das die gegebenen Stücke enthält.
Wolfgang Burmeister, Dresden
Träger eines 2. Preises bei der IMO 1969

W 10/12 ▪ 559 Es ist die Basis m desjenigen Positionssystems zu ermitteln, in dem die Gleichung

$(46)_m \cdot (3)_m = (162)_m$ erfüllt ist.

Bemerkung: In dem Positionssystem mit der Basis m, wobei m eine natürliche Zahl bedeutet, die größer als 1 ist, gilt

$$(46)_m = 4m + 6,$$
$$(3)_m = 3,$$
$$(162)_m = 1\,m^2 + 6m + 2.$$

U.

Aus ungarischen Mathematik-Lehrbüchern

▪ 5 ▪ Ein Kunde kaufte 3 m, ein zweiter 5 m, ein dritter 9 m desselben Stoffes. Der zweite Kunde hatte 120 Forint mehr als der erste zu bezahlen. Wieviel Forint zahlte jeder dieser drei Käufer?

▪ 5 ▪ Viele Jungen und Mädchen verbringen jährlich am Plattensee ihre Ferientage; in einem Feriendurchgang waren es 957 Jungen, und Mädchen waren es 387 mehr als Jungen. Die Regierung der Volksrepublik Ungarn gab für jeden Schüler 435 Forint als Ferienzuschuß aus. Welcher Geldbetrag mußte für die Schüler dieses Durchgangs aufgewandt werden?

▪ 7 ▪ In 70 Budapester Filmtheatern wurden an einem Abend genau 15 verschiedene Filme gezeigt. Beweise, daß mindestens einer dieser 15 Filme an diesem Abend gleichzeitig in mindestens fünf verschiedenen Filmtheatern lief.

▪ 6 ▪ Karl wollte sich 20 Glaskugeln kaufen. Es waren jedoch nur Tonkugeln vorrätig. Eine Tonkugel war 10 Filler billiger als eine Glaskugel. Karls Geld reichte genau für den Kauf von 30 Tonkugeln. Wieviel Filler kostete eine Glaskugel, wieviel eine Tonkugel? Welcher Geldbetrag stand Karl beim Einkauf zur Verfügung?

▪ 7 ▪ Die Summe zweier rationaler Zahlen beträgt 410. Wenn man von der größeren dieser beiden Zahlen 10 subtrahiert und danach die so erhaltene Differenz durch die kleinere der beiden Zahlen dividiert, so erhält man 7. Um welche Zahlen handelt es sich?

▪ 6 ▪ Ein Personenzug fuhr 3 Stunden und 24 Minuten mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km $\cdot$ h^{-1} (d. i. Kilometer pro Stunde), ein Güterzug hingegen fuhr 6 Stunden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30,4 km $\cdot$ h^{-1}. Welcher der beiden Züge hat dabei die längere Fahrtstrecke zurückgelegt?

▪ 8 ▪ Die Erde ist fast kugelförmig; der Erdradius beträgt rund 6400 km. Etwa 70% der Oberfläche der Erde wird vom Meer eingenommen. Die Fläche der Sowjetunion beträgt etwa $\frac{1}{6}$ der Fläche des Festlandes der Erde. Wie groß ist die Fläche der Sowjetunion?

▪ 8 ▪ Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften: Ihre Quersumme beträgt 10. Vertauschen wir die Ziffern dieser Zahl, so erhalten wir eine Zahl, die um 1 kleiner ist als das Zweifache der ursprünglichen Zahl.

Leseprobe aus

Mathematische Logik für Anfänger

Was ist mathematische Logik?

Hänschens Schluß

„Wenn ich hundert Meter unter 10,2 Sekunden laufe“, sagte Hänschen, „werde ich zur Olympiade delegiert. Leider laufe ich aber die hundert Meter nicht unter 10,2 Sekunden, folglich werde ich nicht zur Olympiade delegiert.“

Von Hänschen kann man sagen, daß er ein guter Sportler, besonders ein guter Kugelstoßer ist. Zu seinem Bedauern läuft er aber die Hundertmeterstrecke nicht unter 10,2 Sekunden. Daraus zieht er einen logisch falschen Schluß.

Wer das nicht glaubt, wer der Meinung ist, daß man mit dieser Schlußweise doch zu einem richtigen Ergebnis gelangt, betrachte das folgende Beispiel.

Wenn das Benzin ausgeht, so bleibt das Auto stehen.
Das Benzin geht nicht aus.
___
Das Auto bleibt nicht stehen.

Das Wort „folglich“ wird hier durch den langen horizontalen Strich vertreten. Die über dem Strich stehenden Aussagen, aus denen wir schließen, nennen wir *Prämissen*, die unter dem Strich stehende Aussage, auf die wir schließen, *Konklusion*.

Freilich kann man aus diesen Prämissen nicht auf die niedergeschriebene Konklusion schließen, denn, auch wenn das Benzin nicht ausgegangen ist, kann das Auto stehenbleiben, zum Beispiel, wenn der Fahrer anhält oder das Auto gegen einen Baum prallt. Hat der Leser herausgefunden, daß dieser Schluß auf demselben Fehler beruht wie Hänschens Schluß?

Nur wer sehr aufmerksam war, fand heraus, was beiden Schlüssen gemeinsam war. Beide Schlüsse hatten die Form:

Wenn ..., so ...
Nicht ...
___
Nicht ...

Aus Beispielen können wir erkennen, daß diese Schlußfigur fehlerhaft und unzuverlässig war. (Von einer Schlußfigur sprechen wir dann, wenn es sich nur um die äußere Form, das Schema, das Skelett des Schlusses handelt, das ähnlich einem Formular in mannigfaltiger Form ausgefüllt werden kann.)

Es ist möglich, daß jemand die folgende Meinung vertritt: Ich schließe im täglichen Leben sehr schnell und habe mich an diese Art gewöhnt, ohne Fehler gemacht zu haben. Aber dieses Argument hat den gleichen Wert wie der Traum der alten Frau, die im Lotto fünf Richtige hatte. In ihrem Traum sah sie ein geflügeltes Schaf mit Tupfen auf den Flügeln. Sie erzählte: „Vier Beine hatte das Schaf und sieben Tupfen auf den Flügeln, gerade wie ein Marienkäfer. Ich kreuzte folgende Zahlen auf dem Lottoschein an: die 4, die 7, die 47, dann die 11, wegen $4+7=11$, und weiter die 32, weil doch $4 \cdot 7=32$ ist.“ Als jemand zu ihr sagte: „Gute Frau, $4 \cdot 7$ ist doch 28“, antwortete sie: „Nein, $4 \cdot 7$ ist 32, denn mit der 32 habe ich doch das viele Geld gewonnen.“

Der Gebrauch der Buchstaben

Was wollen wir damit ausdrücken, wenn wir in der vorangegangenen Schlußfigur an manche leeren Stellen Punkte, an anderen Stellen Linien setzten?

Der Leser wird sicherlich auf Grund der Beispiele verstehen, daß gleiche Zeichen für gleiche Sachverhalte stehen. In der Mathematik haben wir uns daran gewöhnt, derartige Sachverhalte mit Hilfe von Buchstaben darzustellen. Zum Beispiel benutzt man oft den folgenden Schluß:

$$\begin{array}{c} a>b \\ \underline{c>0} \\ ac>bc\,. \end{array}$$

(In Worten: Wenn ich zwei verschiedene Zahlen mit ein und derselben positiven Zahl multipliziere, so ist das Produkt aus der größeren Zahl und der positiven Zahl größer als das aus der kleineren Zahl und der positiven Zahl.)

Das soll so verstanden werden, daß a, b und c an beiden Stellen jeweils dieselben Zahlen bedeuten. Wir können das zum Beispiel auch so schreiben:

. . . > – – –
– . – . > 0
___
. . . mal – . – . > – – – mal – . – .

Diese Schreibweise ist länger und unübersichtlicher als die vorangegangene. Dieselben Gesichtspunkte sind die Ursache dafür, daß man nicht nur für Zahlen, sondern auch an Stelle von Aussagen Buchstaben gebraucht.

(1) *Wenn A, so B*
Nicht A
___
Nicht B.

Das verstehen wir ebenfalls so, wie oben bereits angegeben. Übereinstimmende Buchstaben bedeuten übereinstimmende Aussagen beziehungsweise Zahlen. Aber verschiedene Buchstaben bedeuten nicht unbedingt verschiedene Aussagen beziehungsweise Zahlen. Warum sollten wir die Ungleichung $5>3$ nicht zum Beispiel mit 5 multiplizieren können?

Würden a, b und c verschiedene Zahlen bedeuten, so könnte man die Schlußfigur

$$\begin{array}{c} a>b \\ \underline{c>0} \\ ac>bc \end{array}$$

in diesem Fall nicht anwenden.

Eine zweite Schlußfigur

Wir modifizieren die Schlußfigur (1) jetzt folgendermaßen:

(2) *Wenn A, so B*
Nicht B
___
Nicht A

Es ist gegenüber (1) nichts weiter verändert worden, als daß das zweite A und das zweite B gegeneinander ausgetauscht wurden. Ist diese Schlußfigur nun richtig oder ist sie immer noch fehlerhaft?

Sehen wir uns einige Beispiele an:

Wenn Paul die 100-m-Strecke unter 10 Sekunden läuft, so wird er zur Olympiade geschickt.
Paul wird nicht zur Olympiade geschickt.
___
Paul läuft die 100-m-Strecke nicht unter 10 Sekunden.

Ist dieser Schluß richtig?

Ein weiteres Beispiel:

Wenn das Benzin ausgeht, so bleibt das Auto stehen.
Das Auto bleibt nicht stehen.
___
Das Benzin ist nicht ausgegangen.

Hierauf sagte mir mein Freund, der selbst Kraftfahrer ist: „Das ist eine völlig falsche Schlußfolgerung. Es ist doch durchaus möglich, daß das Auto nicht stehenbleibt, obwohl das Benzin ausgegangen ist, denn auf glatter Strecke, besonders, wenn sie etwas Gefälle hat, kann das Auto auch ohne Benzin noch eine ganze Strecke rollen.“

Hatte mein Freund recht? Was das Weiterrollen des Autos betrifft, ja. Was aber die Schlußfolgerung betrifft, darin hatte er nicht recht.
Er vergaß einfach die erste Prämisse. Und so stellte er sich vor, daß wir allein aus der zweiten Prämisse auf die Konklusion schließen könnten (darauf, daß das Benzin nicht ausgeht). Das wäre freilich eine falsche Schlußweise, denn es gibt auch eine erste Prämisse!
Mein Freund, der Kraftfahrer, hat recht, an der Gültigkeit der ersten Prämisse zu zweifeln, wenn er sich auf die Trägheit (das Beharrungsvermögen) oder beim Gefälle auf die Massenanziehung (Gravitation) bezieht. Man kann die Richtigkeit einer Prämisse bezweifeln, es ist aber eine andere Frage, daran zu zweifeln, daß aus einer gegebenen Prämisse eine gegebene Konklusion folgt.

Die vorliegende Leseprobe wurde entnommen aus: *T. Varga*: Mathematische Logik für Anfänger — Aussagenlogik, Volkseigener Verlag Volk und Wissen Berlin 1964, Bestell-Nr. 001 804, Preis 6,40 M. Titel der ungarischen Originalausgabe: MATEMATIKAI LOGIKA.

Lösungen

▲ 345 Der Schüler *Heinz Marbes* (Bernau) und Herr *Werner Schmidt* (Apolda) haben besonders gut aufgepaßt. Sie fanden heraus, daß die Aufgabe 345 (1/69) nicht wie angegeben (2/69) genau 6 Lösungen, sondern genau 13 Lösungen besitzt. Die von ihnen gefundenen weiteren sieben Lösungen lauten:

33 728	33 728	33 728	33 728
3 901	3 901	3 901	3 901
405	415	425	435
38 034	38 044	38 054	38 064

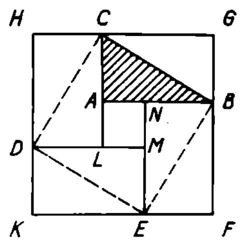
33 728	33 728	33 728
3 901	3 901	3 901
445	455	465
38 074	38 084	38 094

▲ Magischer Würfel (*alpha*-heiter 3/69): Die Schülerin *Karin Vetter* (Weinböhla) stellt fest: Die Summe der Zahlen von Grund-, Deck- und jeder Seitenfläche ist gleich:
Grundfläche: 6 – 1 – 8 – 3
Deckfläche: 7 – 4 – 5 – 2 (links vorn begonnen, im mathem. Drehsinn). Durch Drehung des Würfels sind mehrere Lösungen möglich.

▲ 504 Zu dieser Aufgabe wurde die Lösung einer anderen geboten. Es muß richtig heißen:
a) $\overline{AB} = 15{,}39$ cm   c) $\widehat{AC} = 6{,}28$ cm
b) $\overline{OB} = 16{,}18$ cm   d) $A = 22{,}8$ cm^2

Lösung der Aufgabe
„Ein Satz von Diophant von Alexandrien".

▲ 448a) Es seien ABC das in der nebenstehenden Figur schraffiert gezeichnete rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $\overline{AB} = a$ und $\overline{AC} = b$ und $BCDE$ das über der Hypotenuse dieses Dreiecks errichtete Quadrat, das auf derselben Seite der Hypotenuse wie der Punkt A liegen möge.



Ferner mögen sich die Parallelen durch B und D zu AC und durch C und E zu AB in den Punkten F, G, H und K schneiden. Endlich seien L der Schnittpunkt von AC mit der Parallelen durch D zu AB, M der Schnittpunkt von DL mit der Parallelen durch E zu AC und N der Schnittpunkt von AB und EM. Dann sind die Dreiecke ABC, GCB, LCD, HDC, MDE, KED, NEB, FBE sämtlich rechtwinklig und einander kongruent, da sie in der Hypotenuse und in den Winkeln übereinstimmen. Daher ist das Viereck $FGHK$ ein Quadrat, denn die Winkel dieses Vierecks sind sämtlich rechte Winkel und die Seitenlängen sind gleich $a + b$. Auch das Viereck $ALMN$ ist ein Quadrat; seine Seitenlänge ist gleich der Differenz der Längen der Katheten des Dreiecks ABC; denn
$\overline{AN} = \overline{AB} - \overline{NB} = a - b$.
Bezeichnet man mit
A_1 den Flächeninhalt des Dreiecks ABC,
A_2 den Flächeninhalt des Quadrats $BCDE$,
A_3 den Flächeninhalt des Quadrats $FGHK$,
A_4 den Flächeninhalt des Quadrats $ALMN$,
so gilt, wie man aus der obigen Figur entnehmen kann,

$$A_2 + 4A_1 = A_3 \quad \text{und} \qquad (1)$$
$$A_2 - 4A_1 = A_4, \quad \text{w.z.b.w.} \qquad (2)$$

b) Wie unter a) gezeigt wurde, beträgt die Seitenlänge des Quadrats $FGHK$ $a + b$ und die Seitenlänge des Quadrats $ALMN$ $a - b$ oder $b - a$, je nachdem, ob $a > b$ oder $b > a$ ist. Ist aber $a = b$, so fallen die Punkte A, L, M und N zusammen, und es wird $A_4 = 0$.
c) Wenn a, b, c natürliche Zahlen sind, so sind auch a^2, b^2, $c^2 = a^2 + b^2$, $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$ und $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$ natürliche Zahlen.
Beispiele:
$a=4$, $b=3$, $c=5$; $c^2=25$, $(a-b)^2=1$, $(a+b)^2=49$;
$a=8$, $b=6$, $c=10$; $c^2=100$, $(a-b)^2=4$, $(a+b)^2=196$;
$a=12$, $b=5$, $c=13$; $c^2=169$, $(a-b)^2=49$, $(a+b)^2=289$;
$a=15$, $b=8$, $c=17$; $c^2=289$, $(a-b)^2=49$, $(a+b)^2=529$.
Hinweise: 1) Natürliche Zahlen a, b, c, für welche die Beziehung $c^2=a^2+b^2$ gilt, werden auch pythagoreische Zahlen genannt (Pythagoras, etwa 580 bis 500 v.u.Z.).
2) Bereits *Leonardo Fibonacci von Pisa* (um 1180 bis um 1250) und *Geronimo Cardano* (1501 – 1576) beschäftigten sich mit der Aufgabe, zu einer Quadratzahl q^2 (q natürliche Zahl) eine ganze Zahl y so zu bestimmen, daß auch (q^2+y) und (q^2-y) Quadratzahlen sind.
3) Mit Hilfe des in der Aufgabe zitierten und vermutlich auf *Diophant* zurückgehenden Satzes kann der Lehrsatz des Pythagoras (der schon etwa 1500 Jahre vor *Pythagoras* z. B. den Babyloniern bekannt gewesen sein soll) bewiesen werden (vgl. etwa *W. Lietzmann*, Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen, 5. A. S. 222). Man erhält nämlich wegen $A_1 = \frac{ab}{2}$, $A_2 = c^2$ und $A_3 = (a+b)^2$ aus (1)

$$c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = (a+b)^2,$$
$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab,$$
$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ womit}$$

der Satz des Pythagoras bewiesen ist.

▲ 449 Aus Platzgründen muß zunächst auf die ausführliche Lösung dieser Aufgabe verzichtet werden.

K L E I N
+ V I E T A
N E W T O N

Es gibt genau 6 Lösungen:

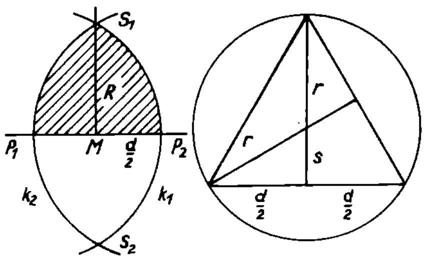
37 291	87 291	45 321
+ 89 250	+ 39 250	+ 92 360
126 541	126 541	137 681
95 321	74 631	94 631
+ 42 360	+ 93 620	+ 73 620
137 681	168 251	168 251

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. W. Engel

▲ 450 1. Seien P_1 und P_2 zwei Punkte, die die Entfernung d voneinander haben. Der Punkt P_3 muß dann im Durchschnitt der beiden Kreisflächen mit den Mittelpunkten P_1 und P_2 sowie dem Radius d liegen (s. Fig. 1). Der Kreis um den Mittelpunkt M von P_1P_2 durch S_1 umfaßt P_1, P_2, P_3. Für seinen Radius R ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras

$$R^2 = d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}d^2 \qquad R = \frac{d}{2}\sqrt{3}.$$

2. Der so gefundene Kreis läßt sich durch einen kleineren ersetzen. Man kann sich aus Symmetriegründen auf den Fall beschränken, in dem P_3 im schraffierten Teil der Figur liegt. Ist $P_3 = S_1$, hat also P_3 auch die Entfernung d von P_1 und P_2, so ist der Umkreis des Dreiecks $P_1P_2P_3$ der gesuchte Kreis. Er enthält bei beliebiger Lage von P_3 alle drei Punkte. Für seinen Radius r gilt (Fig. 2)



$$(r+s)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = d^2$$
$$s^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = r^2$$
$$2rs = d^2 - 2r^2$$
$$r^2 s^2 = \left(\frac{d^2}{2} - r^2\right)^2$$
$$r^2\left(r^2 - \frac{d^2}{4}\right) = \frac{d^4}{4} - r^2 d^2 + r^4$$
$$\frac{3}{4} r^2 = \frac{d^2}{4}$$
$$r = \frac{d}{3}\sqrt{3}$$

$r = \frac{d}{3}\sqrt{3}$ ist also der Radius des kleinsten Kreises, der die geforderten Bedingungen erfüllt. Bei besonderen Lagen der drei Punkte läßt sich der Kreis noch verkleinern, z. B. wenn P_3 auf P_1P_2 liegt, enthält ein Kreis vom Radius $\frac{d}{2}$ schon alle drei Punkte.

Das Problem läßt sich verallgemeinern auf Punktmengen von n Punkten. Auch dann gibt es einen Kreis vom Radius $\frac{d}{3}\sqrt{3}$, der alle gegebenen Punkte enthält. Das ist ein Satz von Prof. Dr. *H. W. E. Jung* (1876–1953), der an der Universität Halle wirkte.

▲ 475 Zur Lösung der Aufgabe empfiehlt es sich, die in der Gleichung auftretenden Logarithmen durch Logarithmen zur Basis x zu ersetzen. Nun gilt für alle positiven reellen Zahlen a und x mit $x \neq 1$ und alle positiven ganzen Zahlen n

$log_{x^n} a = log_x a^{\frac{1}{n}}$;
denn aus $log_{x^n} a = z$ folgt $(x^n)^z = a$,
also $x^{nz} = a$, $x^z = a^{\frac{1}{n}}$, d. h. $log_x a^{\frac{1}{n}} = z$.
Daher gilt

$$log_x 4 + log_{x^2} 8 + log_{x^3} 16 + log_{x^4} 32 =$$
$$log_x 2^2 + log_x 2^{\frac{3}{2}} + log_x 2^{\frac{4}{3}} + log_x 2^{\frac{5}{4}}$$
$$= 2 log_x 2 + \frac{3}{2} log_x 2 + \frac{4}{3} log_x 2 + \frac{5}{4} log_x 2$$
$$= \left(2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4}\right) log_x 2 = \frac{73}{12} log_x 2.$$

Die gegebene Gleichung ist also genau dann erfüllt, wenn $\frac{73}{12}\, log_x 2 = \frac{73}{12}$, d. h. $log_x 2 = 1$ gilt. Das ist aber nur für $x = 2$ der Fall.
Die gegebene Gleichung hat also genau eine Lösung, nämlich $x = 2$.

▲ 476 Wegen $(a-b)^2 \geqq 0$ gilt stets $a^2 - 2ab + b^2 \geqq 0$, also

$$a^2 + b^2 \geqq 2ab. \text{ Ferner gilt}$$
$$b^2 + c^2 \geqq 2bc$$
$$\text{und}\quad a^2 + c^2 \geqq 2ac,$$
$$\text{also}\quad 2(a^2+b^2+c^2) \geqq 2(ab+bc+ac). \tag{1}$$

Weiter gilt

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \leqq 3(a^2+b^2+c^2). \tag{2}$$

Daraus folgt wegen $a+b+c \geqq 1$

$$a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{1}{3} \tag{3}$$

Andererseits gilt

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = a^4+b^4+c^4 + 2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2). \tag{4}$$

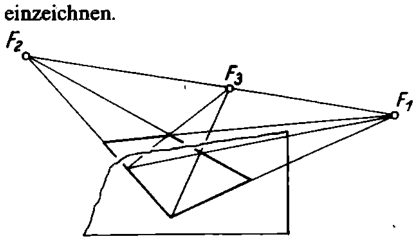
Nun ist wegen (1)

$$2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \leqq 2(a^4+b^4+c^4),$$
$$\text{also}\quad (a^2+b^2+c^2)^2 \leqq 3(a^4+b^4+c^4). \tag{5}$$

Daraus folgt wegen (3)

$$a^4+b^4+c^4 \geqq \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2$$
$$\geqq \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{27}, \text{ w.z.b.w.}$$

W 10 ■ 477 Die Verlängerungen der Bilder der parallelen Spielfeldseiten schneiden sich in den Fluchtpunkten F_1 bzw. F_2. Die Verbindungsgerade $[F_1F_2]$ liefert daher den Horizont des Bildes. Auf dem Horizont müssen sich auch die Bilder der parallelen Diagonalen beider Spielfeldhälften schneiden. Die eine Diagonale schneidet den Horizont in F_3. Folglich geht auch das Bild der parallelen Diagonalen der anderen Hälfte durch F_3. Damit läßt sich dann auch das Bild der vierten Seite des Spielfeldes leicht einzeichnen.



W 10 ■ 478 Man erkennt leicht, daß der Zähler und der Nenner des gegebenen Terms symmetrisch aufgebaut sind. Daher ist es zweckmäßig, den Mittelwert der im Zähler vorkommenden Zahlen durch eine Variable zu ersetzen: $x = 38\,795\,685$.
Dann erhält man

$$z = \frac{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1) - (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+3)^2 + (x+1)^2 + (x-1)^2 + (x-3)^2} = \frac{u}{v}$$

Im Zähler dieses Terms verbleiben nach der Berechnung der Produkte nun die Glieder mit x^3 und x. Daher erhält man

$$u = 2x^3(4+3+2+1) + 2x(4\cdot3\cdot2 + 4\cdot3\cdot1 + 4\cdot2\cdot1 + 3\cdot2\cdot1)$$
$$= 20x^3 + 100x = 20x(x^2+5).$$

Im Nenner verbleiben nur die Glieder mit x^2 und die Absolutglieder; man erhält

$$v = x^2 + 9 + x^2 + 1 + x^2 + 1 + x^2 + 9$$
$$= 4x^2 + 20 = 4(x^2+5).$$

Es ergibt sich daher

$$z = \frac{u}{v} = \frac{20x(x^2+5)}{4(x^2+5)} = 5x.$$

Wegen $x = 38\,795\,685$ erhält man daher

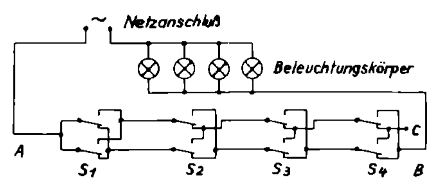
$$z = 193\,978\,425.$$

Durch die Einführung der Variablen konnte also die Berechnung wesentlich vereinfacht werden.

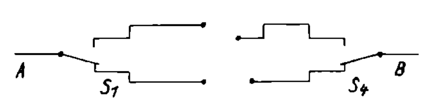
Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. H. Rohleder

▲ 479 Folgende Schaltung mit vier Schaltstellen leistet das Verlangte, s. unten:
Sämtliche Schalter sind in Ruhestellung gezeichnet. Zwischen A und B besteht eine leitende Verbindung. Genau dann, wenn eine gerade Anzahl von Schaltern sich in der anderen Stellung (Arbeitsstellung) befindet, ist A mit B leitend verbunden. Ist eine ungerade Anzahl von Schaltern betätigt, so ist A mit C, aber nicht A mit B, leitend verbunden.

Anmerkung: Die Schalter S_1 und S_4 können auch durch einfache Umschalter ersetzt werden:



Selbstverständlich können zwischen S_1 und S_4 auch mehr oder weniger als zwei derartige Wechselschalter eingefügt werden. In der Schaltalgebra, einer mathematischen Disziplin zur Beschreibung solcher durch Reihen- oder Parallelschaltung von Kontakten aufgebauten Schaltungen, wird jeder solchen Schaltung in umkehrbar eindeutiger Weise ein Ausdruck des Aussagenkalküls zugeordnet. Durch Umformungsregeln können diese Ausdrücke in andere äquivalente Ausdrücke umgeformt werden. Äquivalente Ausdrücke beschreiben Schaltungen, die das gleiche Schaltverhalten zeigen, die also die gleiche Schaltfunktion ausüben. Ist eine Schaltfunktion vorgegeben (etwa wie in der vorliegenden Aufgabe), so kann man unter den diese



Schaltfunktion repräsentierenden äquivalenten Ausdrücken einen geeigneten aussuchen, der noch gewisse Zusatzbedingungen erfüllt (z. B. möglichst wenig Kontakte enthält oder, wie in diesem Beispiel, auf durch industrielle

Fertigung bedingte Kontaktzusammenstellungen Rücksicht nimmt), und danach die Schaltung entwerfen.

■ 480 Anzahl der

Hirsche	Füchse	Brieft.	Fasanen	Tiere
1	2	8	7	18
2	4	16	15	37
3	6	24	23	56

Nur die Zahlen der zweiten Zeile der Tabelle erfüllen die Bedingungen der Aufgabe. In diesem Kleinstadtzoo befinden sich demnach 2 Hirsche, 4 Füchse, 16 Brieftauben und 15 Fasanen.

■ 481 Wenn $d=0$. so $e=5$ wegen $5-d=e$; das widerspricht aber der Gleichung $12 : b=e$. denn es gibt keine natürliche Zahl b für die $12 : b=5$ gilt.
Wenn $d=1$. so $e=4$ wegen $5-d=e$. Dann gilt ferner $c=2$ wegen $2+c=e$ und $b=3$ wegen $12:b = e$ und $a = 4$ wegen $1 \cdot a = e$.
Wenn $d = 2$, so $e = 3$ wegen $5 - d = e$. Dann gilt ferner $c = 1$ wegen $2 + c = e$. Das widerspricht aber der Bedingung $a > b > c > d$. Die Aufgabe besitzt genau eine Lösung, und zwar $a = e = 4, b = 3, c = 2, d = 1$.

■ 482 Es sei m die Anzahl der Schrippen, n die Anzahl der Knüppel, die Hans einkauft; dann gilt $5 \cdot m + 7 \cdot n = 23$, wobei m und n natürliche Zahlen sind.

a)

m	n	$5 \cdot m + 7 \cdot n$
0	3	21
0	4	28
1	2	19
1	3	26
2	1	17
2	2	24
3	1	22
3	2	29
4	0	20
4	1	27
5	0	25

Aus der Tabelle wird ersichtlich, daß es keine natürlichen Zahlen m und n gibt, die die Gleichung $5 \cdot m + 7 \cdot n = 23$ erfüllen, das heißt Hans kann den Geldbetrag von 23 Pf nicht voll ausgeben.

b)

	$27 = 4 \cdot 5 + 1 \cdot 7$
$24 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7$	$28 = 0 \cdot 5 + 4 \cdot 7$
$25 = 5 \cdot 5 + 0 \cdot 7$	$29 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7$
$26 = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 7$	$30 = 6 \cdot 5 + 0 \cdot 7$

Alle weiteren Zahlen größer als 30 lassen sich wegen $24 + 7 = 31$ in der gleichen Weise darstellen, das heißt, Hans kann jeden höheren Geldbetrag als 23 Pf voll ausgeben.

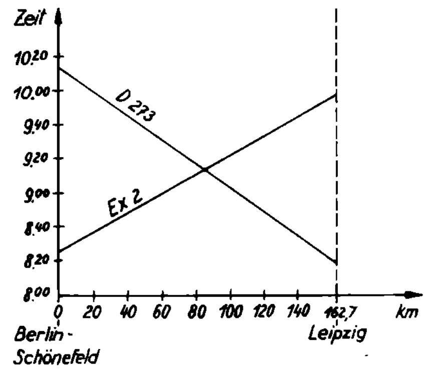
■ 483 Mit Hilfe des selbstgefertigten Zeichendreiecks zeichnen wir zwei gleichseitige Dreiecke so, daß zwei Eckpunkte des ersten Dreiecks mit genau zwei Eckpunkten des zweiten zusammenfallen (siehe Zeichnung zur Aufgabe). Die so entstandene Figur stellt einen Rhombus dar. Mit Hilfe eines Lineals zeichnen wir die zweite, noch fehlende Diagonale dieses Rhombus. Da im Rhombus die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, erhalten wir im Schnittpunkt der Diagonalen vier rechte Winkel.

■ 484 33 l Benzin kosten $33 \cdot 1{,}50$ M, das sind 49,50 M. Aus $49{,}50 + 3{,}00 = 52{,}50$ folgt, daß 34 l Kraftstoffgemisch 52,50 M kosten.
Dann gilt $x : 34 = 20 : 52{,}5$ also $x = 12\frac{20}{21}$.
Der Kraftfahrer erhält für 20 M rund 13 l Kraftstoffgemisch.

■ 485 Angenommen, der Lehrer unterrichte x Schüler, dann läßt sich auf Grund des Aufgabentextes folgende Gleichung aufstellen:
$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100,$$
$$\frac{11}{4}x = 99,$$
$$x = 36.$$
Der Lehrer unterrichtet genau 36 Schüler.

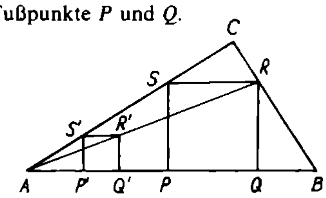
■ 486 a) Ex 2 möge von Schönefeld bis zur Begegnung der Züge x min gefahren sein; dann ist D 273 von Leipzig $(x + 7)$ min gefahren, da dieser Zug in Leipzig 7 min früher abfährt. Ferner betrage die Entfernung von Berlin-Schönefeld nach Leipzig a km. Dann beträgt die Geschwindigkeit von Ex 2 $\frac{a}{90}$ km/min, da die Fahrzeit 90 min beträgt. Ex 2 hat also bis zur Begegnung $\frac{x \cdot a}{90}$ km zurückgelegt.
Die Geschwindigkeit von D 273 beträgt $\frac{a}{115}$ km/min; daher hat dieser Zug bis zur Begegnung $\frac{(x + 7)a}{115}$ km zurückgelegt.
Wir erhalten daher die Gleichung
$$\frac{x\,a}{90} + \frac{(x + 7)a}{115} = a$$
und nach Division durch a
$$\frac{x}{90} + \frac{x + 7}{115} = 1. \text{ Daraus folgt}$$
$$115x + 90x + 630 = 10\,350,$$
$$205x = 9\,720,$$
$$x = \frac{9\,720}{205} \approx 47{,}4.$$
Die Fahrzeit von Ex 2 bis zur Begegnung beträgt also rd. 47 min, d. h., die beiden Züge begegnen sich um 9.13 Uhr.
b) Die mittleren Geschwindigkeiten betragen
für Ex 2 $v_1 = \frac{162{,}4 \cdot 60}{90}$ km/h $\approx 108{,}5$ km/h,
für D 273 $v_2 = \frac{162{,}7 \cdot 60}{115}$ km/h $\approx$ 84,9 km/h.
Man erkennt, daß der Expreßzug Ex 2 eine sehr hohe Geschwindigkeit hat.
c) Ex 2 hat bis zur Begegnung die Strecke $47{,}4 \cdot \frac{162{,}7}{90}$ km $\approx$ 85,7 km zurückgelegt.
Daher treffen sich die beiden Züge in einer Entfernung von 85,7 km von Berlin-Schönefeld.
d) Aus der beigefügten graphischen Darstellung können wir unmittelbar ablesen, daß die beiden Züge sich um 9.13 Uhr in einer Entfernung von rd. 86 km von Berlin-Schönefeld begegnen.

Mit solchen graphischen Darstellungen, den sog. graphischen Fahrplänen, wird bei der Deutschen Reichsbahn gearbeitet. Diese graphischen Fahrpläne enthalten alle Züge, die auf einer bestimmten Strecke verkehren. Aus technischen Gründen wird dabei in Abweichung von der beigefügten Zeichnung die Zeit unterhalb der Entfernungs-Achse eingetragen. Mit Hilfe dieser Fahrpläne lassen sich die gesuchten Zeiten schneller ermitteln als mit Hilfe des üblichen Kursbuches; ferner können Sonderzüge leichter eingeplant werden.



■ 487 Wenn in Antwort a) beide Angaben falsch sind, so muß aus Antwort e) die Angabe Dieter und aus Antwort c) die Angabe Fred richtig sein. Das steht aber im Widerspruch zur Antwort d). Wenn in Antwort b) beide Angaben falsch sind, so muß aus Antwort c) die Angabe Axel und aus Antwort d) die Angabe Ernst richtig sein. Diese Annahme führt auch bei den Antworten a) und e) zu keinem Widerspruch. Die beiden Sieger heißen Axel und Ernst. Weitere Annahmen, daß in den Antworten c), d) oder e) beide Angaben falsch sind, führen zu Widersprüchen. Daher sind Axel und Ernst die beiden Sieger.

■ 488 Wir konstruieren ein Quadrat $P'Q'R'S'$, wobei die Punkte P' und Q' auf dem Schenkel AB und der Punkt S' auf dem Schenkel AC des Winkels $\sphericalangle CAB$ liegen (vgl. die Abbildung). Das ist immer möglich, weil der Winkel $\sphericalangle CAB$ spitz ist. Dann verbinden wir A mit R' und erhalten den Schnittpunkt R dieser Verbindungsgeraden mit der Seite $\overline{BC}$. Wir ziehen die Parallele durch R zu AB, die die Seite $\overline{AC}$ in S schneidet. Dann fällen wir die Lote von R und S auf AB und erhalten die Fußpunkte P und Q.



Wir behaupten nun, daß das Viereck $PQRS$ ein Quadrat ist und daher das gesuchte Quadrat.
Wegen der Konstruktion ist $PQRS$ ein Rechteck; wir haben also nur noch zu zeigen, daß $\overline{RQ} = \overline{RS}$ gilt.

Aus dem Strahlensatz folgt

$\overline{RQ} : \overline{R'Q'} = \overline{AR} : \overline{AR'}$ und

$\overline{RS} : \overline{R'S'} = \overline{AR} : \overline{AR'}$,

also $\overline{RQ} : \overline{R'Q'} = \overline{RS} : \overline{R'S'}$,

$\overline{RQ} : \overline{RS} = \overline{R'Q'} : \overline{R'S'} = 1 : 1$,

weil nach der Konstruktion $P'Q'R'S'$ ein Quadrat ist. Mithin gilt $\overline{RQ} = \overline{RS}$, w.z.b.w. Wir bemerken noch, daß wir in dem vorliegenden Falle eine Ähnlichkeitstransformation durchgeführt haben; wir haben nämlich das Quadrat $P'Q'R'S'$ in die ähnliche Figur $PQRS$ übergeführt, die daher ebenfalls ein Quadrat ist.

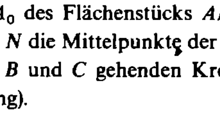
■ 489 Die entstandene sechsstellige Zahl z muß gerade sein, da sie durch 1 334 teilbar sein soll. Ferner muß z wegen $1\,334 = 2 \cdot 667$ durch 667 teilbar sein.

Nun gilt $3 \cdot 667 = 2001$. Wenn also A so spielt, daß die entstehende Zahl z durch 2 001 teilbar ist, so ist z, weil eine gerade Zahl, auch durch 1 334 teilbar.

Nun kann aber A stets erreichen, daß die Zahl z durch 2 001 teilbar ist. A wählt nämlich zunächst eine gerade einstellige Zahl, z. B. 2. Dann wählt B zwei weitere einstellige Zahlen, so daß eine dreistellige Zahl x entsteht, die auf Grund der Spielbedingungen kleiner als 500 ist. Schließlich wählt A drei einstellige Zahlen so, daß sie die dreistellige Zahl $2x$ bilden. Es ergibt sich die sechsstellige Zahl $z = 1\,000 \cdot 2x + x = 2\,001 \cdot x$, wobei x eine gerade Zahl ist. Die Zahl z ist also durch 2 001 und daher auch durch 667 teilbar und, weil sie gerade ist, auch durch 1 334. Damit hat A sein Ziel erreicht. Zur Veranschaulichung geben wir noch ein Beispiel:

A wählt zunächst die Zahl 2; dann wählt B die Zahlen 7 und 3; es ergibt sich die Zahl 372. Nun wählt wieder A die Zahlen 4, 4 und 7, und es ergibt sich die Zahl $z = 744\,372$. Diese Zahl ist aber, wie man leicht nachweist, durch 1 334 teilbar.

■ 490 Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt A_0 des Flächenstücks $ABCD$. Es seien M und N die Mittelpunkte der durch A und D bzw. B und C gehenden Kreise (vgl. die Abbildung).



Ferner seien A_1 der Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$, A_2 der Flächeninhalt des Kreissektors MAD, A_3 der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks MAD.

Dann gilt $A_0 = A_1 - 2(A_2 - A_3)$.

Ferner gilt $A_1 = a^2$, $A_2 = \frac{\pi}{6} a^2$,

da der Flächeninhalt des Kreissektors gleich $\frac{1}{6}$ des Flächeninhalts eines Kreises vom Radius a ist. Weiter gilt für den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks MAD mit der Seitenlänge a

$$A_3 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

Es ergibt sich daher

$$A_0 = a^2 - 2\left(\frac{\pi}{6}a^2 - \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right)$$
$$= a^2\left(1 - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \approx 0{,}819\,a^2.$$

Setzen wir $a = 12$ cm ein, so erhalten wir $A_0 \approx 117{,}9\ cm^2$. Da die Dicke des Stahlblechs 0,3 cm und seine Dichte 7,85 gcm^{-3} beträgt, ergibt sich die Masse des Blechstücks

$$M \approx 117{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 7{,}85\ \text{g} \approx 278\ \text{g}.$$

■ 491 Weil die Terme auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung

$$x(x+2)(x+4)(x+6) = (x+1)(x+3)^2(x+5) \quad (1)$$

symmetrisch bezüglich $x+3$ sind, können wir diese Gleichung wesentlich vereinfachen, indem wir $x+3 = z$, also $x = z-3$ setzen. Wir erhalten die äquivalenten Gleichungen

$$(z-3)(z-1)(z+1)(z+3) = (z-2)z^2(z+2), \quad (2)$$
$$(z^2-9)(z^2-1) = (z^2-4)z^2, \quad (3)$$
$$z^4 - 10z^2 + 9 = z^4 - 4z^2, \quad (4)$$
$$6z^2 = 9, \quad (5)$$
$$z^2 = \frac{3}{2}. \quad (6)$$

Nun hat die Gleichung (6) genau zwei reelle Lösungen, nämlich

$$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{6} \text{ und } z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

Da die Gleichungen (2) bis (6) äquivalent sind und da $x = z-3$ gilt, hat die Gleichung (1) ebenfalls genau zwei reelle Lösungen, nämlich

$$x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 3 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{6} - 3.$$

Zunächst geben wir noch drei Aufgaben für das erste „öffentliche Auftreten":

▲ A 13 Man hat für eine Rechnung Neuner- und Elferprobe gemacht, und beide sind „aufgegangen". Steht jetzt mit Sicherheit fest, daß die Rechnung richtig ist?

▲ A 14 Gesucht ist eine vierstellige Zahl aus aufeinanderfolgenden Ziffern, die bei Vertauschen der ersten beiden Ziffern eine Quadratzahl ergibt.

▲ A 15 Eine gewisse natürliche Zahl schreibt sich im Dezimalsystem mit Hilfe von 3 000 Einsen und einer gewissen Anzahl Nullen. Kann sie eine Quadratzahl sein?

Lösungen zu A 1 bis A 15:

1 Peter habe p Streichhölzer in die Hand genommen, sein Vater v. Dann sind übriggeblieben $60 - p - v$ Streichhölzer, wobei Peter nur v unbekannt ist. Je nachdem, ob p gerade oder ungerade ist, ist auch $60 - p$ gerade oder ungerade, weil 60 selbst eine gerade Zahl ist. Ob nun n gerade oder ungerade ist, läßt sich angeben, wenn man weiß, ob v gerade oder ungerade ist:

p	gerade	gerade	ungerade	ungerade
v	gerade	ungerade	gerade	ungerade
n	gerade	ungerade	ungerade	gerade

2 Die Anzahl der Streichhölzer in der linken Hand sei l, die in der rechten r. Dann ist zu bilden $2l + 3r$, und dafür gilt

$2l + 3r$ ist

gerade, falls l ungerade und r gerade

ungerade, falls l gerade und r ungerade.

3 $z = 2^n + 2^{n+1} = 2^n(1+2) = 2^n \cdot 3$
$= 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 3 = 2^{n-1} \cdot 6$

Wegen $n \geqq 1$ ist 2^{n-1} eine natürliche Zahl k, also $z = k \cdot 6$, d. h. z ist durch 6 teilbar.

4 Es ist $9 \equiv 9$ (100); $9^2 \equiv 81$ (100); $9^3 \equiv 29$ (100); $9^4 \equiv 61$ (100); $9^5 \equiv 49$ (100); $9^6 \equiv 41$ (100); $9^7 \equiv 69$ (100); $9^8 \equiv 21$ (100); $9^9 \equiv 89$ (100); $9^{10} \equiv 1$ (100); $9^{11} \equiv 9$ (100), und nun wiederholen sich die Reste, d. h. es gilt

(*) $9^{10k+i} \equiv 9^i$ (100) für alle natürlichen i und k.

Üblicherweise faßt man 9^{9^9} auf als $9^{(9^9)}$. Wegen $9^9 \equiv 9$ (10) und (*) gilt $9^{(9^9)} \equiv 9^9$ (100). Also endet $9^{(9^9)}$ auf die Ziffern 89. Betrachtet man hingegen $(9^9)^9 = 9^{9 \cdot 9} = 9^{81}$, so ist wegen (*) $9^{81} \equiv 9^1$ (100). Also endet $(9^9)^9$ auf 09.

5 Bei jedem Zerschneiden eines Papierbogens in 4 Teile wird die Anzahl der Bögen um 3 vermehrt, so daß am Schluß $s = 20 + 3k$ (mit natürlichem k) Bögen entstanden sein müssen. Nun ist $s \equiv 20$ (3), also $s \equiv 2$ (3). Andererseits ist aber $451 \equiv 1$ (3). Also kann die Gesamtzahl s der Bögen niemals 451 sein.

6

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

7 a) $m = 7$; Restklasse ${}^7R_4$

b) Gewinnzahlen sind die Zahlen der Restklassen ${}^7R_5$

c) Bei $1 \leqq s \leqq 5$ ist $m = 6$

$z = 50$: Die Gewinnzahlen sind wegen $49 \equiv 1$ (6) die Zahlen aus ${}^6R_1$ (Wer 50 oder mehr sagen muß, verliert.) bzw. wegen $50 \equiv 2$ (6) die Zahlen aus ${}^6R_2$ (Wer 50 sagen kann, gewinnt.).

$z = 75$: Gewinnzahlen aus ${}^6R_2$ bzw. ${}^6R_3$

$z = 100$: Gewinnzahlen aus ${}^6R_3$ bzw. ${}^6R_4$

Bei $1 \leqq s \leqq 10$ ist $m = 11$

$z = 50$: Gewinnzahlen aus ${}^{11}R_5$ bzw. ${}^{11}R_6$

$z = 75$: Gewinnzahlen aus ${}^{11}R_8$ bzw. ${}^{11}R_9$

$z = 100$: Gewinnzahlen aus ${}^{11}R_0$ bzw. ${}^{11}R_1$

Bei $1 \leqq s \leqq 12$ ist $m = 13$

$z = 50$: Gewinnzahlen aus ${}^{13}R_{10}$ bzw. ${}^{13}R_{11}$

$z = 75$: Gewinnzahlen aus ${}^{13}R_9$ bzw. ${}^{13}R_{10}$

$z = 100$: Gewinnzahlen aus ${}^{13}R_8$ bzw. ${}^{13}R_9$

d) Der Fall $1 \leqq s \leqq 10$, $z = 100$, wobei derjenige verliert, der zuerst 100 oder mehr sagen muß.

e) ja, denn der Nachziehende ist nur in folgenden zwei Fällen im Vorteil: 1. $z \equiv 1$ (m) und 2. $z \equiv 0$ (m) und wer zuerst z erreicht, gewinnt. In beiden Fällen sind die Gewinnzahlen die Zahlen der Restklasse ${}^mR_0$.

8 a) Gewinnzahlen sind die Vielfachen von 7, also die Zahlen aus ${}^7R_0$, und demzufolge ist der Nachziehende im Vorteil. Da bei einem normalen Spielwürfel die Augenzahlen auf einander gegenüberliegenden Seiten zusammen 7 ergeben, braucht er nur nach jedem Setzen des Anziehenden selbst zu setzen, indem er den Würfel umdreht. Freilich ist es unklug, gleich von Anfang an so zu verfahren und damit dem Spielpartner sofort den Kniff zu verraten. Je nachdem, wie weit man das Vorausdenken des Gegners einschätzt, wird man die Folge der Gewinnzahlen erst früher oder später ansteuern. Dabei muß man freilich das Risiko in Kauf nehmen, daß der Spielpartner den Sachverhalt durchschaut und selbst die Gewinnzahlenfolge früher „beschlagnahmt".
b) Das Spiel ist bei beiden Versionen für den Anziehenden günstig. Er gewinnt mit Sicherheit, falls er stets so viel Hölzchen nimmt, daß sich zusammen mit den im vorangegangenen Zug vom Nachziehenden genommenen Hölzchen 4 ergeben. Beginnen muß er mit 2 Hölzchen, falls derjenige verliert, der das letzte Hölzchen nehmen muß, andernfalls mit 3 Hölzchen.

9 Weil für jede ganze Zahl a gilt
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. In den Restklassen modulo m ist neutrales Element der Multiplikation die Restklasse ${}^mR_1 = \overline{1}$, denn für jede Restklasse a gilt $\overline{a} \cdot \overline{1} = \overline{1} \cdot \overline{a} = \overline{a}$.

10 Das ist nicht möglich. Setzt man z. B. im Restklassenring modulo 7 fest, daß $\overline{a} < \overline{b}$ genau dann gelten soll, wenn $a < b$ ist, so gilt nicht etwa $\overline{a} + \overline{c} < \overline{b} + \overline{c}$ für jede Restklasse $\overline{c}$: Es wäre dann z. B. $\overline{2} < \overline{5}$, aber wegen $\overline{2} + \overline{4} = \overline{6}$ und $\overline{5} + \overline{4} = \overline{2}$ würde gelten $\overline{2} + \overline{4} > \overline{5} + \overline{4}$. Man sieht sofort, daß auch eine andere Festsetzung nicht zum Ziel führt.

11 Nicht lösbar im Restklassenring modulo 10 sind (außer allen Divisionen durch $\overline{0}$) folgende Divisionsaufgaben:
$\overline{1} : \overline{2}$; $\overline{3} : \overline{2}$; $\overline{5} : \overline{2}$; $\overline{7} : \overline{2}$; $\overline{9} : \overline{2}$; $\overline{1} : \overline{4}$; $\overline{3} : \overline{4}$; $\overline{5} : \overline{4}$; $\overline{7} : \overline{4}$; $\overline{9} : \overline{4}$; $\overline{1} : \overline{5}$; $\overline{2} : \overline{5}$; $\overline{3} : \overline{5}$; $\overline{4} : \overline{5}$; $\overline{6} : \overline{5}$; $\overline{7} : \overline{5}$; $\overline{8} : \overline{5}$; $\overline{9} : \overline{5}$; $\overline{1} : \overline{6}$; $\overline{3} : \overline{6}$; $\overline{5} : \overline{6}$; $\overline{7} : \overline{6}$; $\overline{9} : \overline{6}$; $\overline{1} : \overline{8}$; $\overline{3} : \overline{8}$; $\overline{5} : \overline{8}$; $\overline{7} : \overline{8}$; $\overline{9} : \overline{8}$
$\overline{a} : \overline{b}$ $(\overline{b} \neq \overline{0})$ ist genau dann nicht lösbar, wenn b einen Primfaktor p von 10 (also 2 oder 5) als Teiler hat und $a \not\equiv 0\ (p)$ gilt.

12 $a = 34$; $b = 89$; $c = 46$; $d = 463$

13 nein; man kann sich noch um Vielfache von $9 \cdot 11 = 99$ verrechnet haben.

14 In Frage kommen die Zahlen 1 234, 2 345, 3 456, 4 567, 5 678, 6 789. Bei Zuhilfenahme einer Quadrattafel ist die Aufgabe natürlich sofort gelöst. Ohne eine solche Tafel führt folgende Überlegung schnell zum Ziel:
Die gesuchte Zahl habe die Dezimaldarstellung $(abcd)$ mit $1 \leqq a \leqq 6$, $b = a + 1$, $c = a + 2$, $d = a + 3$. Vertauschen der ersten und zweiten Ziffer liefert dann $z = (bacd)$, also

$$z = 1\,000b + 100a + 10c + d$$
$$= 1\,000a + 1\,000 + 100a + 10a + 20 + a + 3$$
$$= 1\,111a + 1\,023.$$

Wegen $1\,111a \equiv 0\ (11)$ und $1\,023 \equiv 0\ (11)$ folgt daraus $z \equiv 0\ (11)$, also auch $\sqrt{z} \equiv 0\ (11)$. Wegen $2\,134 \leqq z \leqq 7\,689$ kommen für $\sqrt{z}$ nur die Zahlen 55, 66, 77 in Betracht. Daß 55^2 und 77^2 ausscheiden, kann man sogar ohne Quadrieren sehen: Wegen $77^2 \equiv 9\ (10)$ einerseits und $77^2 < 7\,689$ andererseits scheidet 77^2 aus, wegen $3\,245 \equiv 0\ (5)$, aber $3\,245 \not\equiv 0\ (25)$, und $55^2 \not\equiv 5\ (10)$ bleibt nur 66^2 übrig. Es ist $66^2 = 4\,356$, die gesuchte Zahl mithin 3 456.

15 Die Quersumme der Zahl ist 300. Da 300 durch 3, aber nicht durch 9 teilbar ist, ist die Zahl selbst auch durch 3, aber nicht durch 9 teilbar, folglich keine Quadratzahl.

Lösungen zu: Aus ungarischen Mathematik-Lehrbüchern

■ Aus $5 - 3 = 2$ und $120 : 2 = 60$ folgt, daß 1 Meter dieses Stoffes 60 Forint kostet. Demnach hatte der erste Kunde 180 Ft, der zweite 300 Ft und der dritte 540 Ft zu zahlen.

■ Aus $957 + 387 = 1\,344$ folgt, daß es 1 344 Mädchen waren. Aus $957 + 1\,344 = 2\,301$ folgt, daß insgesamt 2 301 Schüler dem Durchgang angehörten. Aus $2\,301 \cdot 435 = 1\,000\,935$ folgt, daß als Ferienzuschuß 1 000 935 Forint aufgewandt wurden.

■ Eine Glaskugel möge x Filler kosten; dann gilt $20x = 30(x - 10)$. Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir $x = 30$. Eine Glaskugel kostete demnach 30 Filler, eine Tonkugel 20 Filler. Karl besaß 600 Filler beim Einkauf.

■ Der Personenzug hat $3{,}4 \cdot 60$ km, also 204 km zurückgelegt; der Güterzug hingegen hat $6 \cdot 30{,}4$ km, also nur 182,4 km zurückgelegt.

■ Angenommen, diese Behauptung wäre falsch, dann könnte einer dieser 15 verschiedenen Filme in höchstens 4 verschiedenen Filmtheatern vorgeführt werden, also alle 15 Filme in höchstens $15 \cdot 4 = 60$ Filmtheatern. Das würde aber der Voraussetzung widersprechen, wonach diese 15 Filme in 70 Filmtheatern gezeigt werden.

■ Die größere der beiden gesuchten Zahlen sei x, dann lautet die kleinere $410 - x$ und es gilt die Beziehung $(x - 10) : (410 - x) = 7$. Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir $x = 360$. Es handelt sich also um die Zahlen 360 und 50.

■ Oberfläche der Erde:
$A_0 = 4\pi \cdot 6\,400^2\ \text{km}^2 \approx 514\,457\,600\ \text{km}^2$
Oberfläche der Sowjetunion:
$$A_s = \frac{1}{20} \quad A_0 \approx 25\,700\,000\ \text{km}^2$$
$$\left(\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{6} A_0 = \frac{1}{20} A_0\right)$$

■ Wir lösen diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle.

n	$2n$	$2n-1$	k
19	38	37	91
28	56	55	82
37	74	73	73
46	92	91	64
55	110	109	55
64	128	127	46
73	146	145	37
82	164	163	28
91	182	181	19

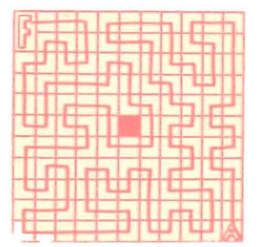
In der Tabelle sei k die Zahl, die aus der Zahl n durch Vertauschen der Ziffern hervorgeht. Es gibt genau eine solche Zahl, nämlich 37.

Lösungen zu alpha-heiter

Die merkwürdige Waage

4 Kegel = 1 Würfel + 1 Kugel
(ausführliche Lösung siehe Heft 4/70)

Fortuna

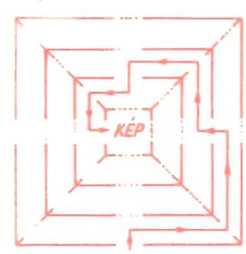


Knobelei im Strandbad

19	5	15	10	16
8	22	11	21	3
6	20	12	9	18
7	17	14	23	4
25	1	13	2	24

Detektive gesucht!

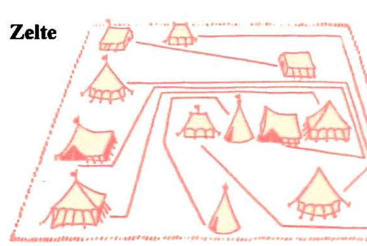
Mit Schlüssel Nr. 2, den Weg zum mittleren Raum zeigt die Abb.



Aus „Füles"

$$\begin{array}{r} 586\,140 \\ 586\,950 \\ +972\,048 \\ \hline 2\,145\,138 \end{array}$$

Zelte

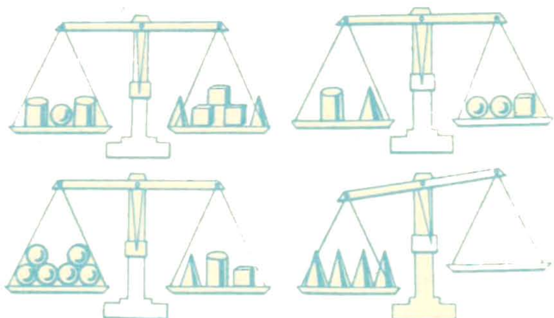


In freien Stunden alpha heiter

(Ungarischer Bilderbogen)

Die merkwürdige Waage

Auf dem Bild ist die bekannte Balkenwaage zu sehen. In den Waagschalen befinden sich aber keine Wägestücke. Vielerlei geometrische Körper — Kugel, Würfel, Zylinder und Kegel — halten einander im Gleichgewicht. Die ersten drei Abbildungen zeigen Körper im Gleichgewicht. Auf der vierten Skizze haben wir die das Gleichgewicht haltenden Körper „vergessen".



Mit wieviel und mit welchen Körpern kann man mit den im vierten Bild in der linken Waagschale zu sehenden vier Kegeln so das Gleichgewicht halten, daß möglichst wenig Körper verwendet werden?

Fortuna

Fortuna ist ein Wort aus der lateinischen Sprache, das auf deutsch *Glück* bedeutet. Das vorliegende Amulett ist folgendermaßen verfertigt: Man ging von dem in

F	O	R	T	A	F	O	R	U	N	A
	O	F	U	N	U	T	T	T	R	F
T	R	A	N	A	F	R	U	N	O	O
U	R	T	U	N	O	O	F	A	F	R
N	O	U	T	R	R	T	A	N	U	T
A	F	N	A	O		U	T	U	N	A
T	R	O	F	F	A	N	R	O	O	F
U	F	O	R	T	A	F	A	F	R	T
N	A	R	O	U	N	O	N	U	T	U
N	U	T	F	A	N	R	N	A	R	N
A	F	O	R	T	U	T	U	F	O	A

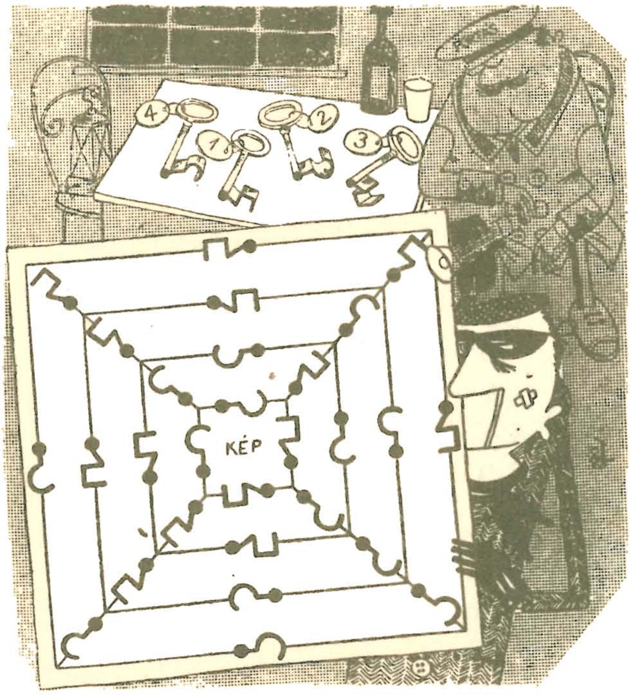
der linken oberen Ecke sichtbaren Buchstaben F aus und mußte so zu dem in der rechten unteren Ecke gezeichneten Buchstaben A gelangen, daß dabei alle kleinen Quadrate der Abbildung durchlaufen werden, aber nur einmal. Unterwegs darf man jedoch nur solche Buchstaben berühren, die nacheinander das Wort Fortuna bzw. seine Wiederholung ergeben. (Dem Leser garantieren wir nicht, daß er im Lotto einen Fünfer erzielt!)

Knobelei im Strandbad

In den in den Sand gezeichneten Ringen müssen alle Zahlen von 1 bis 25 vorkommen. Auf dem Kreisradius und längs der Peripherie der 5 Kreise soll die Summe der Zahlen stets 65 sein. Welche Zahlen muß man in die leer gelassenen Ringe eintragen, wenn man beiden Forderungen genügen will?

Detektive gesucht!

Ein Dieb fertigt sich einen Lageplan eines Gebäudes an, in dem Kunstschätze verwahrt werden. Im innersten Raum (KÉP), der von Gängen umgeben ist, befindet sich ein Gemälde von hohem Wert. Auf dem Tisch neben dem schlafenden Pförtner liegen vier Schlüssel. Der Dieb weiß, daß er sich nur einen von den vier Schlüsseln zu verschaffen braucht, um dorthin zu gelangen, wo das Gemälde ist.



Auch unsere Leser sollen herausfinden, mit welchem der vier Schlüssel man diejenigen Türen öffnen kann, durch die man schließlich zum mittleren Raum gelangen kann.

Sieben

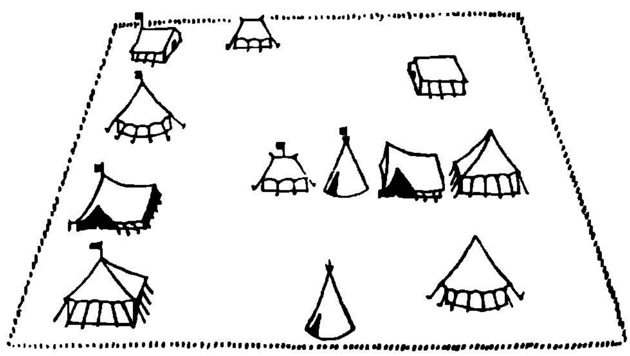
Paust die sechs Teile (auf der linken Seite der Abb.) ab, schneidet sie aus und setzt aus ihnen eine nach dem Muster der Abbildung rechts gezeigten *Sieben* zusammen.

Aus Füles

Eine der beliebtesten ungarischen Rätselzeitschriften ist „Füles". Aus ihr haben wir das folgende Kryptogramm ausgeschnitten (Schüler + Lehrer + Schule = Kultur). Jeder Buchstabe ist durch eine Grundziffer zu ersetzen, so daß eine (im dekadischen System) richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Die Zuordnung zwischen Buchstaben und Ziffern soll eindeutig sein; d. h. gleiche Buchstaben entsprechen gleichen Ziffern, verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.

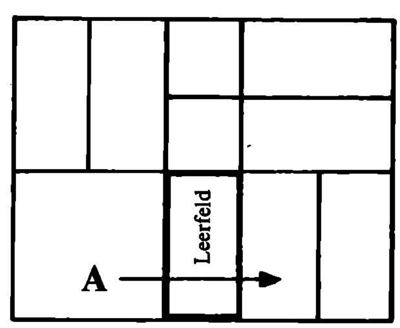
Zelte

Auf dem Bilde sind sechsmal je zwei Zelte gleicher Form zu sehen. Man verbinde die Zelte gleicher Form so je durch eine Linie, daß diese sich nicht kreuzen.



Geschicklichkeitsspiel

Ungarische Mathematik-Methodiker übergaben dem Chefredakteur von *alpha* ein Unterhaltungsspiel für die Heimfahrt von Budapest nach Leipzig. Es ist ein Kästchen mit 9 geometrischen Figuren aus Plaste. Das mit *A* gekennzeichnete Quadrat ist so zu verschieben, daß es in die rechte untere Ecke zu liegen kommt. Dem Leser ist es überlassen, weitere eigene Spielvarianten zu erdenken!



Mathematik-Kalender

Juli 1970

Mi 1 * 1646 Gottfried Wilhelm Leibniz, studierte in Leipzig seit 1661 Philosophie, seit 1664 die Rechte, promoviert 1667 in Altdorf. Er ist trotz unzureichender Fachausbildung mathematisch interessiert: Infinitesimalrechnung, Vorführung seiner Rechenmaschine in London (1673) († 14. 11. 1716)

Do 2

Fr 3 * 1866 Henry Frederik Baker († 17. 3. 1956)

Sa 4 Beginn der Sommerferien

So 5 † 1932 René Baire. Wirkte in Frankreich, darf als einer der Begründer der modernen Theorie der reellen Funktionen bezeichnet werden (* 21. 1. 1874)

Mo 6 * 1436 Johannes Regiomontanus (eigentl. Müller). R. ging 1448 an die Univ. Leipzig (neuart. Ber. einer Planetentafel) dann 1450 nach Wien (Hofastronom, Kalenderreformer † 1476)

Di 7

Mi 8 * 1629 Christiaan Huygens. Widerlegt die zeitgen. Ansicht, die Parabel sei zugleich Kettenlinie, beschäftigt sich mit Quadratur, Logarithmen, Kurvendiskussionen († 1695)

Do 9

Fr 10 1970 Beginn der XII. Internationalen Mathematik-olympiade in der VR Ungarn

Sa 11

So 12

Mo 13

Di 14

Mi 15

Do 16 † 1931 Wladyslaw Bartkiewicz. Arbeitsgebiete: Mathematische Statistik und Versicherungsmathematik
† 1801 Julius Plücker. Wirkte in Bonn. Neuaufbau der analytischen Geometrie

Fr 17 † 1912 Henri Poincaré (* 29. 4. 1854)

Sa 18

So 19

Mo 20 † 1866 Bernhard Riemann. Wirkte in Göttingen. Seine Schöpfungen, die Riemannsche Fläche und die Riemannsche Geometrie zählen zu den größten Errungenschaften mathematischen Denkens. (* 17. 9. 1826)
† 1922 Andrei Andrejewitsch Markow (* 14. 6. 1856)

Di 21

Mi 22 * 1784 Friedrich Wilhelm Bessel, Astronom († 17. 3. 1846)
Ende der XII. IMO

Do 23

Fr 24

Sa 25

So 26 † 1941 Kazimierz Bartel. Wirkte in Lwow. Arbeiten üb. Darst. Geometrie und malerische Perspektive.

Mo 27

Di 28

Mi 29

Do 30

Fr 31

August 1970

Sa 1

So 2

Mo 3 * 1905 Sir William Hamilton. Wirkte in Dublin. Bed. Beiträge zur Algebra.

Di 4 † 1874 Otto Hesse (* 22. 4. 1811)

Mi 5

Do 6

Fr 7

Sa 8

So 9

Mo 10

Di 11

Mi 12

Do 13

Fr 14 † 1886 Edmond Laguerre. Wirkte in Paris. Beiträge z. höheren Geometrie (* 9. 4. 1834)

Sa 15

So 16

Mo 17

Di 18

Mi 19

Do 20

Fr 21 * 1789 Augustin Cauchy († 23. 5. 1857)

Sa 22

So 23 * 1829 Moritz Cantor. († 10. 4. 1920)

Mo 24

Di 25 * 1802 Nils Henrik Abel. († 4. 4. 1829)

Mi 26

Do 27 * 1858 Guiseppe Peano († 20. 4. 1932)

Fr 28

Sa 29 † 1937 Otto Hölder. Wirkte in Leipzig. Grundlegende Arbeiten zur Algebra (* 22. 12. 1859)

So 30 * 1856 Carl Runge. Wirkte in Berlin, Hannover und Göttingen. Grundlegende Arbeiten zur numerischen Anw. math. Methoden

Mo 31 † 1945 Stefan Banach (* 30. 3. 1892)
* 1821 Hermann v. Helmholtz († 8. 9. 1894)

Literatur

Ungarische Literatur in deutscher Sprache

Karla Lukács

Wie groß, wie spät, wie weit?

Kinderbuchverlag Berlin/Corvina-Verlag Budapest 1970
40 Seiten, zahlreiche Illustrationen, 5,80 M (ab 4. Klasse)
Aus dem Inhaltsverzeichnis: Ein wenig Geschichte · Wirrnis und Ordnung · Milch in der Kürbisschale? Wie entstanden die Zeiteinheiten? Die Sonne · Wie lang ist eigentlich ein Tag? Stunde, Minute, Sekunde · Das Wetter · Das Lichtjahr · Tabelle der Maßeinheiten

Gyula Mákassy

Zwei plus zwei gleich vier

Kinderbuchverlag Berlin 1970
40 Seiten, 5,40 M (ab 3. Klasse)
Dieses Kinderbuch führt den jungen Leser durch mehrere 10000 Jahre Menschheitsgeschichte, in denen mit der Entwicklung der Kultur auch die Wissenschaft Mathematik geboren wurde. Die humorvollen Illustrationen in Verbindung mit einem knappen Text werden Freude und Interesse an der Mathematik wecken.

T. Varga

Mathematische Logik für Anfänger
Aussagenlogik

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1964
Bestell-Nr. 001804, 6,40 M
(siehe unseren Beitrag auf Seite 64)
(ab Klasse 9)

István Szava

Der Gigant von Syrakus
Ein Archimedes-Roman

Prisma-Verlag, Berlin, 9,40 M (ab Klasse 8)
Archimedes war einer der berühmtesten Wissenschaftler der Antike. Seinen Namen und seine Gesetze kennt jedes Schulkind. Aber weißt Du auch, wie er den Auftrieb schwimmender Körper, den Flächeninhalt des Kreises, den Rauminhalt der Kugel, des Zylinders und andere Körper berechnete? Kennst Du die Wasserschraube? Ist Dir bekannt, daß Archimedes auch ein hervorragender Feldherr war? Das Buch ist ein interessanter Roman, der uns mit dem Altertum auf spannende, unterhaltsame und lehrreiche Art bekannt macht.

J. Gy. Obádovics

Taschenbuch der Elementarmathematik
Mit praktischen Anwendungen

G. Teubner – Verlagsgesellschaft Leipzig 1962
868 S., zahlr. Abb., 12,— M (ab Klasse 7)
Das Buch ist ein umfassendes Nachschlagewerk für Schüler der Mittel- und Oberstufe

Alfréd Rényi

Briefe über die Wahrscheinlichkeit

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969
94 Seiten, 7,80 M (ab Klasse 10)

Rózsa Péter

Das Spiel mit dem Unendlichen

Teubner, Leipzig
278 S., zahlr. Abb., 9,80 M (ab Klasse 9)
Leseprobe: *Der Zauberlehrling*
Der Begriff der Teilbarkeit birgt noch so manches Interessante, womit es sich lohnt zu spielen. Dazu gehört z. B. die Entdeckung, daß es *befreundete Zahlen* gibt.
Zwei Zahlen sind befreundet, wenn die Summe der echten Teiler der einen die andere Zahl ergibt und umgekehrt. Die Zahl selbst wird nicht zu ihren echten Teilern gerechnet. (Die echten Teiler von 10 z. B. sind 1, 2 und 5.) Solche befreundete Zahlen sind z. B. 220 und 284, denn

$$220=\begin{cases}1\cdot 220\\ 2\cdot 110\\ 4\cdot 55\\ 5\cdot 44\\ 10\cdot 22\\ 11\cdot 20\end{cases} \text{und } 284=\begin{cases}1\cdot 284\\ 2\cdot 142\\ 4\cdot 71;\end{cases}$$

die Summe der echten Teiler von 220 ist also:
$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$,
und die Summe der echten Teiler von 284 ist:
$1+2+4+71+142=220$.
Die Alten schrieben diesen Zahlen gewisse magische Eigenschaften zu, und deshalb ging man auf die Suche nach vollkommenen Zahlen....

Hochschulliteratur

Wir danken an dieser Stelle Frau *Ziegler*, Verantw. Lektor für Mathematik BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Herrn *Boll*, Cheflektor im VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, sowie den Werbeabteilungen beider Verlage für die langjährige Beratung und umfassende Unterstützung der Redaktion *alpha*, wodurch es uns ermöglicht wurde, verdienstvollen Mitarbeitern unserer Zeitschrift als Anerkennung einige der genannten Hochschulbücher zu überreichen.

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

J. Aczél: Ein Blick auf Funktionalgleichungen und ihre Anwendung
J. Aczél: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen
P. Turán: Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis, zur Erinnerung an Edmund Landau
G. Alexits: Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen
G. Freud: Orthogonale Probleme
B. Krekó: Lehrbuch der linearen Optimierung
A. Rényi: Wahrscheinlichkeitsrechnung
F. Riesz / B. Sz.-Nagy: Vorlesungen über Funktionalanalysis
E. T. Schmidt: Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen
J. Surányi: Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe
L. Rédei: Lückenhafte Polynome (in Vorbereitung)
I. Pál: Darstellende Geometrie in Raumbildern

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

A. Császár: Grundlagen der allgemeinen Topologie
Fejes Tóth: Reguläre Figuren
A. Kertész: Vorlesungen über Artinsche Ringe
L. Rédei: Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien nach F. Klein
L. Rédei: Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen
G. Szász: Einführung in die Verbandstheorie
G. Hajós: Einführung in die Geometrie

B. A. Kordemski

Köpfchen, Köpfchen

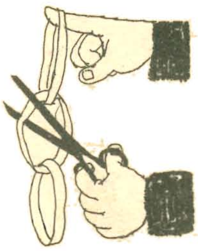
8. Auflage 1970, 332 Seiten,
493 zweifarbige Zeichnungen,
Ganzgewebe 12,– M.

Freude am Denksport ist eine Vorstufe mathematischer Arbeit. Aus allen dafür geeigneten Gebieten, Zahlenrätseln, Verschiebungsaufgaben, Gesellschaftsspielen, Bewegungsaufgaben, Zerlegungen und Zusammensetzungen geometrischer Figuren, planimetrischen und arithmetrischen Besonderheiten, magischen Quadraten und vielen anderen hat der Autor 323 Aufgaben zusammengestellt, die von einfachsten Denkübungen bis zu mittelschweren mathematischen Problemen reichen. Die meisten Beispiele sind mit ein- oder zweifarbigen Skizzen versehen. Im Anhang sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen gegeben.

Übergeben Sie die Bestellung bitte Ihrer Buchhandlung!

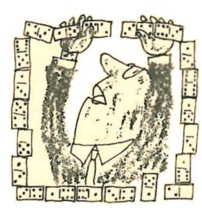
URANIA-VERLAG

Leipzig · Jena · Berlin
Verlag für populärwissenschaftliche Literatur
701 Leipzig, PF 969



Wer hat Geschick zum Konstruieren?

1. Wie muß man eine Kette zu drei Gliedern aus drei Streifen bilden, damit beim Durchschneiden eines einzigen beliebigen Gliedes die ganze Kette in drei Teile zerfällt? Die übliche Verkettung, die in der Abb. dargestellt ist, eignet sich offensichtlich nicht dazu, weil die Kette in diesem Falle nur dann in drei Teile zerfällt, wenn das mittlere Glied durchschnitten wird und nicht, wenn ein beliebiges durchschnitten wird, wie die Bedingung fordert.
2. Wie muß man eine Kette zu fünf Gliedern aus fünf Streifen bilden, damit sie in fünf Teile zerfällt, wenn man ein bestimmtes Glied durchschneidet?
3. Wie muß man eine Kette zu fünf Gliedern aus fünf Streifen bilden, damit beim Durchschneiden eines beliebigen Gliedes die ganze Kette in die fünf Teile zerfällt?



Der Rahmen

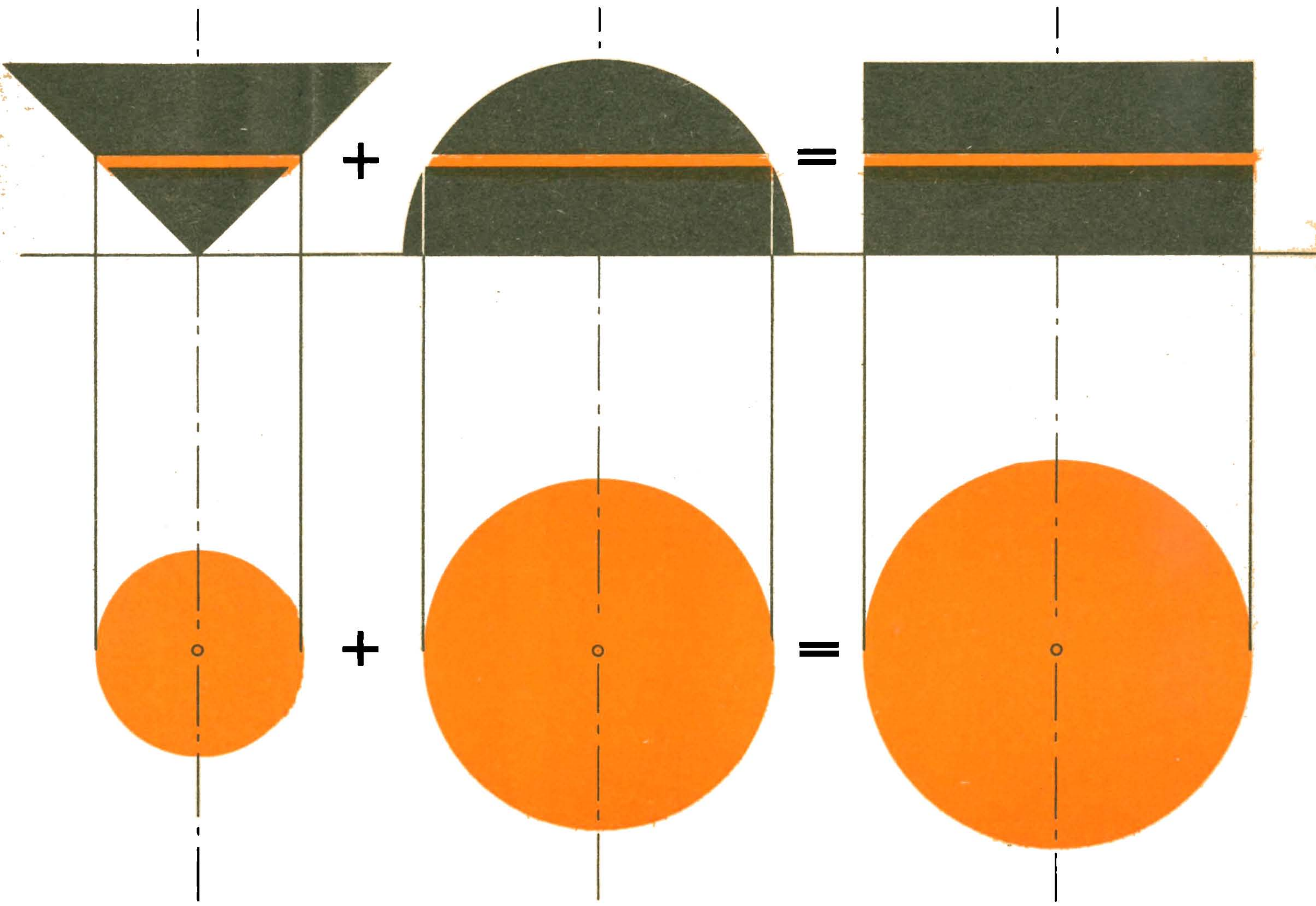
Legt die Dominosteine nach der üblichen Spielregel aneinander, so daß ein quadratischer Rahmen entsteht. Verwendet dabei alle 28 Steine und ordnet sie so, daß in jeder Seite des Quadrats die Summe der Augen 44 ist!

Mit gesundem Menschenverstand

Eine Studentin bereitet sich auf ihren „Probeunterricht“ in Mathematik in der 8. Klasse vor.
„Sag mir doch, welche Aufgabe du deinen Schülern stellen willst?“ fragte interessiert ihr Vater, ein ausgezeichneter Maschinist. „Das Alter eines Kindes, vermehrt um 3 Jahre, ergibt eine Zahl, aus der sich genau die Quadratwurzel ziehen läßt, diese Wurzel ergibt das um 3 Jahre verminderte Alter des Kindes. Wie alt ist das Kind?“
„Nun eine ganz gute Aufgabe für mündliche Übungen. Aufgeweckte Kinder lösen sie in einer Minute.“

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
4. Jahrgang 1970
Preis 0,50 M
Index 31059

4

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Aus: L. Kolbros: J. Steiner, Birkhäuser-Verlag, Zürich (S. 73/75); J. Lehmann (S. 75, 86, 87); N. N. Schuckow, Moskau 1966 (S. 76); Aus Fejes Tóth: Reguläre Figuren (S. 79); B. Bruhn, Berlin (S. 83); Briefmarkenentwürfe von einem Graphikerkollektiv Herzberg/Cottbus (S. 84); Technische Zeichnungen: E. Berger (S. 80/81), Döbeln; Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 22. Mai 1970

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

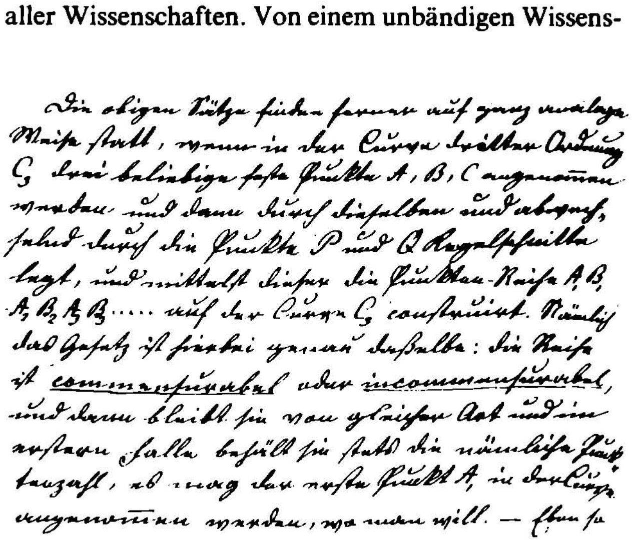
Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Auf den Spuren Jakob Steiners

Die gegenwärtig sehr intensiv betriebenen Leistungswettbewerbe Junger Mathematiker auf nationaler und internationaler Ebene lassen manchmal die Meinung aufkommen, daß eine solche Art des Testens von Jugendlichen auf ihr mathematisches Wissen und Können eine Erfindung aus jüngster Zeit sei. Wer jedoch Biographien über Mathematiker gelesen hat, wird feststellen können, daß die Erteilung von Aufgaben und Problemen schon früher als Prüfstein für angehende Talente diente. Von Interesse sind in diesem Zusammenhang z. B. der Lebensweg des Schweizer Geometers Jakob Steiner (1796—1863) und eine jener Aufgaben, mit deren spontaner Lösung er als Schüler die Aufmerksamkeit seiner Lehrer auf sich zog.

Jakob Steiner wurde am 18. März 1796 in Utzenstorf in der Schweiz als fünftes Kind einer Kleinbauernfamilie geboren. Auf dem bescheidenen Landgut seiner Eltern mußte er von Kind auf mitarbeiten. So blieb keine Zeit für einen geregelten Schulbesuch. Das Schreiben lernte er nicht vor seinem vierzehnten Lebensjahr. Später half er den Bauern beim Aufstellen ihrer Rechnungen. Als Jugendlicher verbrachte er ganze Nächte damit, den gestirnten Himmel zu betrachten. Die Astronomie erschien ihm als die schönste aller Wissenschaften. Von einem unbändigen Wissensdrang getrieben, verließ er im Mai 1814 als Achtzehnjähriger gegen den Willen seiner Eltern sein Heimatdorf und wandte sich an Pestalozzi in Iferten. Dieser nahm den jungen Steiner kostenlos in seine Bildungsstätte, und sehr schnell wurden die Mathematiklehrer Maurer und Leuzinger auf die außerordentlichen Fähigkeiten ihres neuen Zöglings aufmerksam. Als ihm dort z. B. die Aufgabe gestellt wurde, ein regelmäßiges Fünfeck durch eine Seitenparallele in zwei flächengleiche Teile zu zerlegen, gab er hierfür sofort die einfachste Konstruktion an. Waren die Aufgaben schwieriger, so ließ er mit seinen Bemühungen um die Lösung nicht früher ab, als bis er das Ergebnis gefunden hatte. Er führte darüber ein Tagebuch. So findet sich etwa zur Lösung einer Aufgabe die folgende Eintragung: „Gefunden Samstag, den 10. Christmonat 1814, nachts ein Uhr; 3+3+4 Stunden daran gesucht.“ Als Einleitung zu einem seiner Tagebücher ist der Satz zu lesen: „Arbeitet und suchet, damit ihr findet und nicht in Nachbetung verfallet!“



Aus einem Manuskript von J. Steiner

Nach eineinhalbjähriger Zeit des Lernens wurde Steiner als Mathematiklehrer an Pestalozzis Schule eingestellt. Drei Jahre später, im Herbst 1818, wandte er sich mit einem Zeugnis von Pestalozzi zum Studium an die Universität Heidelberg. Sein Lebensziel stand nun fest, sich für die Zukunft ganz der Mathematik zu verschreiben.

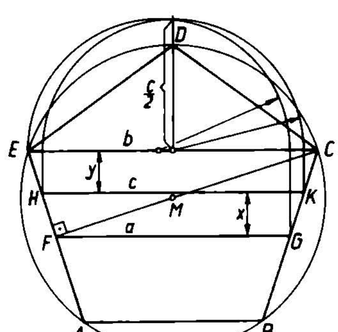
In seinen zahlreichen wissenschaftlichen Veröffentlichungen zu Gegenständen aus der Geometrie bediente er sich fast ausschließlich synthetischer Methoden. Von den Themen seiner ideenreichen mathematischen Beiträge sei hier nur eines aus dem Jahre 1833 genannt. Es lautet: „Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises.“ In diesem Aufsatz weist Steiner nach, daß sich alle geometrischen Probleme ersten und zweiten Grades in der Zeichenebene allein unter Verwendung des Lineals lösen lassen, wenn in der Ebene ein Kreis beliebiger Lage und Größe vorgegeben ist.

Seinen außerordentlichen Fähigkeiten weniger entsprechend war zunächst der berufliche Wirkungskreis als Lehrer an der Berliner Gewerbeschule. Auf Vorschlag der Mathematiker Bessel und Neumann wurde ihm Ende 1832 von der Königsberger Universität die Doktorwürde übertragen, und bald darauf erhielt er durch „Allerhöchste Cabinetsordre vom 20. April 1833“ das Prädikat eines Professors verliehen. Wenig später öffneten sich auch die Hörsäle der Berliner Universität für seine Lehrtätigkeit. Es ist hier nicht der Ort, auf die wissenschaftlichen Leistungen Steiners einzugehen. Wir wollen deshalb zu der eingangs angeführten Aufgabenstellung zurückkehren, durch deren verblüffende Lösung die überragenden Fähigkeiten des jungen Steiner mit offenbar wurden.

Aufgabe: Ein regelmäßiges Fünfeck ist durch eine Seitenparallele dieses Polygons in zwei flächengleiche Teile zu zerlegen. Ferner ist nachzuweisen, daß der Mittelpunkt M des Fünfecks innerhalb des bei der Teilung entstehenden Trapezes liegt. (Dieser Nachweis wurde von Steiner nicht extra gefordert, aber man kann als sicher annehmen, daß er sich bei Lösung der Aufgabe klar über die Lage von M bezüglich der Teilungslinie war.)

Lösung: Das regelmäßige Fünfeck $(ABCDE)$ liege gezeichnet vor. (Bild 1) Wie die Aufgabenstellung schon besagt, scheidet eine Seitenparallele durch M als Teilungslinie aus. Ein erster Schritt zur Lösung besteht darin, zunächst einmal eine Symmetrale (CF) in das Fünfeck einzuzeichnen. Diese halbiert sicher die Fläche, erfüllt jedoch noch nicht die Bedingung, zu einer der Polygonseiten parallel zu sein. Eine Parallele zu (AB) durch

Bild 1



F schneidet (BC) in G. Wir betrachten jetzt das innerhalb des Fünfecks liegende Trapez $(CEFG)$ und bezeichnen darin die parallelen Seiten mit $\overline{FG}=a$ und $\overline{CE}=b$. Ferner zerlegt die Diagonale (CF) das Trapez in das Dreieck (CFG) mit dem Flächeninhalt I_1 und das Dreieck (CEF) mit dem Flächeninhalt I_2. Offensichtlich gilt die Proportion

$$I_1 : I_2 = a : b \tag{1}$$

Die eingangs gestellte Aufgabe ist nun auf das Problem zurückgeführt, das Trapez $(CEFG)$ durch eine Parallele zu (AB) im Verhältnis der anliegenden Seiten, d. h. im Verhältnis $a : b$ zu teilen.

Wir bezeichnen die Endpunkte der gesuchten Teilungslinie mit H und K und setzen $\overline{HK}=c$. Außerdem sind die noch unbekannten Abstände der parallelen Strecken a, c mit x und c, b mit y einzuführen. (Vgl. Bild 1) Jetzt kommt es darauf an, die von der Teilungslinie (HK) zu erfüllenden Forderungen mit den hier eingeführten Größen analytisch zu fassen. Für die Inhalte I_1, I_2 der Teiltrapeze gilt:

$$2\,I_1=(a+c)x,\quad 2\,I_2=(b+c)y. \tag{2}$$

Aus Gleichung (1) und (2) folgt weiter:

$$a : b=(a+c)x : (b+c)y$$

Diese Proportion läßt sich leicht in eine Gleichung folgender Gestalt überführen:

$$(a+c)bx-(b+c)ay=0 \tag{3}$$

Gleichung (3) ist *linear* in den unbekannten Größen x und y. Zu einer weiteren linearen Gleichung gelangen wir durch Anwendung eines Strahlensatzes auf das Trapez. Danach gilt die Proportion

$$x : y=(c-a) : (b-c).$$

Für unsere weiteren Überlegungen bringen wir sie auf die Form

$$(b-c)x+(a-c)y=0. \tag{4}$$

Auch diese Gleichung ist linear in x und y. Die Gleichungen (3) und (4) sollen uns zu einer konstruktiven Lösung für c verhelfen. Wir stellen sie deshalb nochmals zusammen:

$$\begin{aligned}(a+c)bx-(b+c)ay&=0\\(b-c)x+(a-c)y&=0\end{aligned} \tag{5}$$

Unbekannt sind uns in diesem Gleichungssystem (5) die drei Größen c, x und y, während nur zwei Gleichungen zur Verfügung stehen. Dies ist jedoch kein Grund, den Bleistift entmutigt aus der Hand zu legen. Bei genauerer Betrachtung stellen wir nämlich fest, daß diese Gleichungen nur lineare Glieder in x und y, jedoch kein absolutes Glied enthalten. Man sagt: *das Gleichungssystem (5) ist homogen und linear in x und y.* Von diesem System erwarten wir, daß es für x und y von Null verschiedene Lösungen liefert, denn die Trapezseiten a, b und c haben sicher keine verschwindenden Abstände voneinander. Wir betrachten zweckmäßig zunächst zwei Zahlenbeispiele. Das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}3x+4y&=0\\6x+7y&=0\end{aligned} \tag{6}$$

läßt lediglich $x=0$ und $y=0$ als Lösung zu. Wir ändern jetzt einen der Koeffizienten des Systems (6) und schreiben:

$$\begin{aligned}3x+4y&=0\\6x+8y&=0\end{aligned} \tag{7}$$

Auch in diesem Fall ist $x=0$ und $y=0$ eine Lösung von (7). Dies ist jedoch nicht mehr das einzige Zahlenpaar; z. B. würden auch die Zahlen $x=4$ und $y=-3$ die Gleichungen (7) erfüllen. Man könnte beliebig viele weitere Zahlenpaare angeben, die beide Gleichungen (7) befriedigen. Von dieser zweiten Art muß also das vorliegende homogene lineare Gleichungssystem (5) sein. Eine wesentliche Eigenschaft von (7) besteht darin: Bringt man durch Linearkombination der beiden Gleichungen den Koeffizienten von x zum Verschwinden, dann verschwindet auch der Koeffizient von y und umgekehrt. Man sagt im mathematischen Sprachgebrauch: *Die beiden Gleichungen sind voneinander linear abhängig.* Lautet das Gleichungssystem allgemein

$$\begin{aligned}a_1x+b_1y&=0\\a_2x+b_2y&=0,\end{aligned}$$

so muß die Proportion

$$a_1 : a_2=b_1 : b_2 \tag{8}$$

gelten, wenn für x und y von Null verschiedene Lösungen vorhanden sein sollen.

Diese Erkenntnis wenden wir jetzt auf das Gleichungssystem (5) an. Gemäß (8) hat das Gleichungssystem (5) genau dann von Null verschiedene Lösungen für x und y, wenn die Proportion

$$(a+c)b : (b-c)=(b+c)a : (c-a) \tag{9}$$

besteht. In dieser Proportion ist lediglich die Größe c (Länge der gesuchten Teilstrecke) als Unbekannte enthalten. Aus (9) folgt ein Ausdruck für c, der uns den Schlüssel zu einer konstruktiven Lösung liefert. Durch Ausmultiplizieren von (9) findet man zunächst

$(b^2-c^2)a+(a^2-c^2)b=0$. Eine kurze Zwischenrechnung führt auf die Formel

$$c=\sqrt{ab}. \tag{10}$$

Die Länge c der gesuchten Teilungslinie (HK) ist also gleich dem *geometrischen Mittel* der Trapezseiten a und b. Die Konstruktion dieses Mittelwertes wird zweckmäßig auf die halben Strecken der parallelen Trapezseiten bezogen, wie es Bild 1 zeigt. Nach dem Höhensatz wird aus $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$ das geometrische Mittel $\frac{c}{2}$ gefunden.

Nun steht die zweite Frage der Aufgabenstellung noch offen. Aus der Zeichnung allein ist nicht eindeutig abzulesen, ob der Mittelpunkt M des Polygons innerhalb oder außerhalb des Trapezes $(ABKH)$ oder gar auf der Teilungslinie (HK) liegt. Wir wollen die Antwort durch einen Streckenvergleich finden. Hierzu werde das Trapez $(CEFG)$ gesondert herausgezeichnet und eine Seitenparallele m durch M gelegt. (Bild 2) Ebenso wie c läßt sich auch m durch a und b ausdrücken. Für $c>m$ liegt M innerhalb und für $c<m$ liegt M außerhalb des Trapezes $(ABKH)$. Gilt $m=c$, liegt M auf der Teilungslinie (HK). Um die Mittellinie m durch a und b auszudrücken, bezeichnen wir den Abstand zwischen a und m mit u, zwischen b und m mit v. Mit den Strahlensätzen folgen die Proportionen

$$u : v=a : b \quad \text{und}$$

$$u : v=(m-a) : (b-m). \tag{11}$$

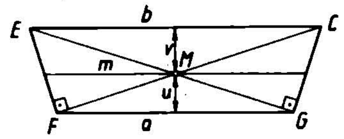
Durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (11) erhält man weiter:

$$a : b=(m-a) : (b-m)$$

Über eine elementare Zwischenrechnung findet man für die Länge der Mittellinie m:

$$m=\frac{2ab}{a+b} \qquad (12)$$

Bild 2



Auch dieser Mittelwert von a und b hat in der Mathematik eine grundlegende Bedeutung. Der für m gefundene Wert ist das *harmonische Mittel* von a und b. Es ist in folgender Weise definiert:

Das harmonische Mittel m zweier Zahlen a, b nennt man den reziproken Wert des arithmetischen Mittels ihrer reziproken Werte, also gilt

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right). \qquad (13)$$

Durch geeignete Umformung zeigt man die Übereinstimmung des hier definierten harmonischen Mittels mit dem in (12) gefundenen Wert von m. Da $m \neq c$ ist, kann zunächst gefolgert werden, daß M nicht auf der Teilungslinie (HK) liegt.

Die Behauptung, daß der Mittelpunkt M des Fünfecks innerhalb des Trapezes $(ABKH)$ liegt, ist gleichwertig mit der Aussage

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab} \qquad \text{(Behauptung)}$$

Diese Behauptung soll nun indirekt bewiesen werden. Hierzu gehen wir von der Annahme aus:

$$\frac{2ab}{a+b}>\sqrt{ab} \qquad \text{(Annahme)}$$

Wegen $a, b>0$ kann aus der Annahme weiter gefolgert werden:

$$2\sqrt{ab}>(a+b)$$

Beim Quadrieren der linken und rechten Seite ändert sich nach den geltenden Voraussetzungen nichts an der Orientierung des Ungleichheitszeichens, also

$$4ab>a^2+2ab+b^2$$

oder

$$0>a^2-2ab+b^2$$

$$0>(a-b)^2 \qquad \text{(Widerspruch)}$$

Das Quadrat einer reellen Zahl kann nicht negativ sein. Also war die getroffene Annahme falsch und die ursprüngliche Behauptung wahr.

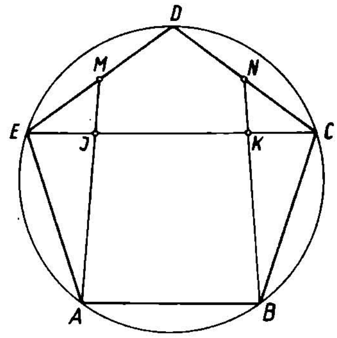
Damit ist gezeigt, daß M innerhalb des Trapezes $(ABKH)$ liegt. Als wichtiges Nebenergebnis haben wir eine Relation zwischen dem harmonischen, geometrischen und arithmetischen Mittel zweier Zahlen gefunden. Es gilt: Aus $0<a<b$ folgt

$$a<\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b. \qquad (14)$$

Die blitzartigen Gedankengänge, mit denen der junge und unverbildete Jakob Steiner zu seinen Lösungen gelangte, kann man nicht mehr rekonstruieren. Wir haben uns bemüht, mit handwerklicher Gründlichkeit und etwas Ausdauer einen möglichen Weg zur Lösung dieser Aufgabe zu beschreiten. Hierbei war die gelegentliche Anwendung analytischer Methoden nicht ganz im Sinne Steiners. Wer Gefallen an solchen Aufgaben gefunden hat, kann sich an einem weiteren Problem versuchen, das sich in einem Tagebuch Jakob Steiners aus der Schulzeit in Iferten fand:

Aufgabe: In einem regelmäßigen Fünfeck $(ABCDE)$ verbinde man den Punkt A mit dem Mittelpunkt M der Seite (DE), den Punkt B mit dem Mittelpunkt N der Seite (CD). Die zwei Verbindungsgeraden (AM) und (BN) schneiden auf der Diagonalen (CE) den Abschnitt (IK) aus. (Bild 3)

Bild 3



Es ist zu zeigen, daß die Strecke $\overline{IK}$ kleiner ist als die Strecke $\overline{AI}=\overline{BK}$.

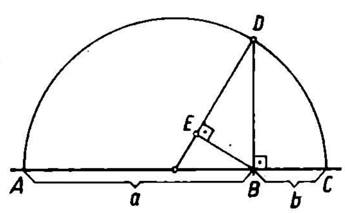
Viel Spaß bei dieser Aufgabe, an deren Lösung Jakob Steiner 10 Stunden geknobelt hat.

Aufgabe zur Bildung von Mittelwerten:

In Bild 4 ist $\overline{AB}=a$ und $\overline{BC}=b$. Man zeige, daß die Strecke $\overline{DE}$ gleich dem harmonischen Mittel von a und b ist.

E. Schröder

Bild 4



Wir stellen vor: Dr. E. Schröder

Herr Dr. E. Schröder ist Hochschuldozent für Mathematik an der Technischen Universität Dresden. Seit Gründung der Zeitschrift *alpha* arbeitet er als Redaktionsmitglied aktiv mit. In enger Zusammenarbeit mit dem Chefredakteur entstanden die neuen Titelblätter unserer Zeitschrift (Jahrgang 1970 ff.). In seinen zahlreichen Beiträgen zu Problemen der Geometrie bewies er pädagogische Meisterschaft und leistete damit einen wertvollen Beitrag zu unserem Schwerpunkt: Geometrie.

Redaktion *alpha*

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Olympiadeklasse 11/12

1. In einer Klassenelternversammlung waren genau 18 Väter und genau 24 Mütter anwesend, von jedem Schüler und jeder Schülerin dieser Klasse wenigstens ein Elternteil. Von genau 10 Jungen und genau 8 Mädchen waren jeweils beide Eltern da, von genau 4 Jungen und genau 3 Mädchen jeweils nur die Mutter, während von genau einem Jungen und genau einem Mädchen jeweils nur der Vater anwesend war.
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Kinder in dieser Klasse, die in derselben Klasse Geschwister haben! (Es gibt in dieser Klasse keine Kinder, die Stiefeltern oder Stiefgeschwister haben.)

2. In ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a seien 4 Kugeln von gleichem Radius so einbeschrieben, daß jede von ihnen die drei anderen von außen und drei der Tetraederflächen (von innen) berührt.
Ermitteln Sie den Radius r dieser Kugeln in Abhängigkeit von a! *Anmerkung*: Für jedes reguläre Tetraeder gilt: Die vier Höhen des Tetraeders schneiden sich in einem Punkt und teilen einander im Verhältnis 3 : 1, wobei der längere Abschnitt von der Ecke bis zum Schnittpunkt reicht.

3. Beweisen Sie: Für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a+b=1$ gilt:
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}.$$

4. Es seien a, b, c reelle Zahlen; für jede reelle Zahl x sei ferner $f(x)=ax^2+bx+c$ gesetzt.
a) Man beweise, daß folgender Schluß richtig ist:
Voraussetzung: $f(0)$, $f(1)$ und $f(-1)$ sind ganze Zahlen.
Behauptung: Für jede ganze Zahl c ist $f(x)$ ebenfalls eine ganze Zahl.
b) Man untersuche, ob ein richtiger Schluß entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(0)$, $f(2)$ und $f(-1)$ seien ganze Zahlen.
c) Man gebe mindestens drei weitere Tripel (p, q, r) ganzer Zahlen mit der Eigenschaft an, daß ein richtiger Schluß entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(p)$, $f(q)$ und $f(r)$ seien ganze Zahlen.

Einige Ungleichungen für Fakultäten

Ungleichungen spielen in der Mathematik eine bedeutende Rolle. Sie werden in Beweisen verschiedener Sätze benutzt oder für Abschätzungen komplizierter Ausdrücke verwendet. Es handelt sich dabei um sogenannte identische Ungleichungen, d. h. Ungleichungen, die in ganzen Zahlensystemen gelten z. B. für alle positiven reellen, oder gar für alle reellen Zahlen erfüllt sind.

Sehr viele Ungleichungen stammen von der „Ur-Ungleichung" $x^2 \geqq 0$ ab, die für alle reellen x gilt. Wenn wir, um ein einfaches Beispiel anzuführen, $x=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ setzen, wo a und b positive reelle Zahlen sind, so erhalten wir: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$ oder $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$; diese Ungleichung, in der Form $\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ geschrieben, ist die Ausgangsform der berühmten AG-Ungleichung — der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel. Den Verallgemeinerungen und verschiedenen Beweisen der AG-Ungleichung sind viele Arbeiten gewidmet, die größtenteils ganz elementar, aber trotzdem sehr ideenreich und mathematisch interessant sind. Wir müssen aber für unseren Zweck hier eine andere berühmte Ungleichung geben, die von *Jakob Bernoulli* (1689) stammt, und Folgendes behauptet: ist u eine reelle Zahl, die größer als -1 und nicht gleich 0 ist, so gilt für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ die Ungleichung

$$(1+u)^n > 1+nu. \tag{1}$$

Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion, mit $n=2$ anfangend. In der Tat, für $n=2$ ist die Behauptung richtig, da $(1+u)^2=1+2u+u^2>1+2u$ ist. Wenn aber die Ungleichung (1) für irgendein $n \geqq 2$ schon bewiesen ist, so folgt daraus, daß auch

$$(1+u)^{n+1}=(1+u)^n(1+u)>(1+nu)(1+u)$$
$$=1+(n+1)u+nu^2>1+(n+1)u$$

ist, d. h. die Behauptung (1) gilt auch für $n+1$. Damit ist die Bernoullische Ungleichung (1) für alle $n=2, 3, \ldots$ bewiesen.

[Wenn Ihr diese einfache Beweisführung aufmerksam verfolgt habt, so könnt Ihr leicht auf die folgende Frage antworten: wo haben wir die Voraussetzungen $u \neq 0$ und $u>-1$ benutzt?]

In den Elementen der mathematischen Analysis und auch beim Studium von elementaren Funktionen, insbesondere der exponentiellen und der logarithmischen Funktion, spielt die Zahlenfolge*

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n=1, 2, \ldots$, eine außerordentlich wichtige Rolle. Diese Zahlenfolge strebt mit wachsendem n einem Grenzwert zu, der von *Leonhard Euler* (1736) mit e bezeichnet worden ist. Daß dieser Grenzwert

$$e=2.7182818284590\ldots$$

existiert und mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden kann, wird mit viel feineren Mitteln begründet als wir zur Verfügung haben. Wir brauchen aber nur eine viel einfachere Tatsache, nämlich daß die Folge a_n beschränkt ist, und zwar werden wir mit ganz elementaren Mitteln zeigen, daß $a_n \geqq 3$ ist.

Zu diesem Zweck beweisen wir.

1° Die Zahlenfolge $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ wächst mit n, d. h. $a_{n+1}>a_n$;

2° Die Zahlenfolge $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n=1, 2, \ldots$, nimmt ab mit wachsendem n, d. h. $b_{n+1}<b_n$.

Der Beweis wird mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung (1) geführt. Zuerst betrachten wir das Verhältnis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{2n+1}}$$
$$=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{(n^2+2n)^n}{(n+1)^{2n}}=\frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n$$
$$=\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n$$

und wenden die Ungleichung (1) mit $u=-\frac{1}{n^2+2n+1}$ an. Wir bekommen somit die Abschätzung

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right)$$
$$=\frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2+2n+1)}=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}>1,$$

aus der sofort $a_n+1>a_n$ folgt.

In genau derselben Weise formen wir $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ um und wenden die Bernoullische Ungleichung an:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}}$$
$$=\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{(n^2+2n)^{n+1}}=\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$$
$$>\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)=\frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{(n+2)(n^2+2n)}$$
$$=\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}>1$$

was auch zu beweisen war. [Streng genommen, haben wir die Behauptung 1° nur für $n \geqq 2$ bewiesen, aber für $n=1$ ist sie offenbar auch richtig: $a_1=2$ und $a_2=2.25$

Um nun den Beweis der Beschränktheit der a_n, $a_n \leqq 3$, zu Ende zu führen, bemerken wir, daß es genügt $a_n \leqq 3$ für $n \geqq 10$ zu beweisen (da die a_n wachsen). Wegen $1<1+\frac{1}{n}$ gilt $a_n<a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)=b_n$, und da die b_n abnehmen, ist $b_n \leqq b_{10}$ für alle $n \geqq 10$, folglich

$$a_n<b_n \leqq b_{10}=1.1^{11}$$

für $n \geqq 10$.

Wenn wir nachrechnen, so erhalten wir:

$$1.1^{11}=1.1\cdot(1.1^5)^2<1.1\cdot(1.62)^2$$
$$<1.1\cdot 2.7<3.$$

Wir haben eigentlich eine etwas schärfere Abschätzung als $a_n \leqq 3$ bekommen, aber das ist für uns belanglos.

Jetzt können wir zu unserem eigentlichen Ziel — der *Abschätzung von Fakultäten* — übergehen. Bekanntlich ist

$$m!=1\cdot 2\ldots m,$$

so daß $1!=1$, $2!=2$, $3!=6$, $4!=24$, $5!=120$, $6!=720$ usw.

[Es wird noch definitionsgemäß $0!=1$ gesetzt.]

Die Fakultäten $m!$ lassen sich schwer abschätzen, wenn man von trivialen Abschätzungen

$$2^{m-1} \leqq m! \leqq m^{m-1}$$

absieht, die man erhält, wenn man die in $m!$ auftretenden (von 1 versch.) Faktoren einmal sämtlich durch 2, zum anderen sämtlich durch m ersetzt. Eine etwas feinere Abschätzung bekommt man, wenn man die AG-Ungleichung anwendet (allerdings für $m-1$ Zahlen):

$$(x_1\ldots x_{m-1})^{\frac{1}{m-1}} \leqq \frac{x_1+\ldots+x_{m-1}}{m-1},$$

wo $x_1, \ldots, x_{m-1}$ positive Zahlen sind. Setzt man hierin $x_k=k+1$, $k=1, \ldots, m-1$, ein, so bekommen wir die Abschätzung

$$(m!)^{\frac{1}{m-1}} \leqq \frac{2+3+\ldots+m}{m-1}=\frac{m+2}{2},$$

oder $\quad m! \leqq \left(\frac{m+2}{2}\right)^{m-1}$,

die ungefähr um den Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$ besser ist als die obige Abschätzung m^{m-1}. Beachten wir aber, daß die AG-Ungleichung für eine beliebige Anzahl von Zahlen keine allzu

* Zum Begriff der Zahlenfolge siehe H. Lohse in *alpha* 3 bis 6/68

leicht beweisbare mathematische Tatsache ist!**

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel bereit, um eine ziemlich gute untere Abschätzung für $m!$ abzuleiten (u. zw. eine viel bessere als 2^{m-1}). Zu diesem Zweck schreiben wir die bewiesene Ungleichung $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqq 3$ für $n=1, 2, \ldots, m$ auf und multiplizieren diese m Ungleichungen miteinander. Dann erhalten wir die Ungleichung

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\cdots\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \leqq 3^m,$$

oder, da das Produkt auf der linken Seite gleich

$$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{m+1}{m}\right)^m=\frac{(m+1)^m}{m!}$$

ist, die Ungleichung

$$\frac{(m+1)^m}{m!}\leqq 3^m,$$

woraus die untere Abschätzung von $m!$ folgt, die unser Hauptziel ist:

$$m!\geqq\left(\frac{m+1}{3}\right)^m,$$

eine, wie gesagt, viel schärfere Abschätzung als 2^{m-1}. Es lohnt sich noch, anstatt der oberen Abschätzung $m!\leqq\left(\frac{m+2}{2}\right)^{m-1}$, die wir durch die AG-Ungleichung abgeleitet und somit im Rahmen unserer Betrachtungen hier nicht bewiesen haben, eine etwas weniger scharfe obere Abschätzung abzuleiten, die nun fast umsonst erhalten werden kann. Aus dem Wachstum der Folge $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ schließen wir, daß $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqq a_1=2$ für $n\geqq 1$ ist. Stellen wir diese Ungleichungen für $n=1, 2, \ldots, m$ auf, und multiplizieren wir sie miteinander, so bekommen wir wie oben:

$$\frac{(m+1)^m}{m!}\geqq 2^m.$$

Es gilt also die Abschätzung

$$m!\leqq\left(\frac{m+1}{2}\right)^m$$

(die der Größenordnung nach etwas schwächer ist, als die eben erwähnte). Somit haben wir ziemlich symmetrische Schranken für die Fakultät:

$$\left(\frac{m+1}{3}\right)^m\leqq m!\leqq\left(\frac{m+1}{2}\right)^m.$$

Diese Schranken sind schon nicht so schlecht, denn in der Tat (was viel schwerer zu beweisen ist) kann für genügend große m im Nenner der linken Seite anstatt der 3 jede Zahl, die größer als e ist, gesetzt werden, und im Nenner der rechten Seite kann anstatt der 2 jede positive Zahl, die kleiner als e ist, gesetzt werden. In anderen Worten, und das ist eine tiefliegende analytische Aussage, gilt für beliebige λ und μ, die den Bedingungen $0<\lambda<e<\mu$ genügen:

$$\left(\frac{m+1}{\mu}\right)^m\leqq m!\leqq\left(\frac{m+1}{\lambda}\right)^m$$

für alle m, die größer sind als eine gewisse natürliche [von λ und μ abhängige] Zahl.

Wir können jetzt schließlich eine verhältnismäßig schwere Aufgabe lösen, die erst vor einigen Jahren vorgeschlagen wurde. Es handelt sich um den Beweis der Ungleichung

$$(M!)!\geqq[(M-1)!]^M,$$

$M=1, 2, \ldots$. Sie folgt sofort aus der Abschätzung $m!\geqq\left(\frac{m+1}{3}\right)^m>\left(\frac{m}{3}\right)^m$, die wir für $m=M!$ anwenden und somit die Ungleichung

$$(M!)!=\left(\frac{M!}{3}\right)^M\geqq[(M-1)!]^{M!}$$

bekommen, wenn wir beachten, daß für $M\geqq 3$

$$\frac{M!}{3}\geqq(M-1)!$$

ist. Was $M=1$ und $M=2$ betrifft, so kann für diese Werte die zu beweisende Ungleichung direkt verifiziert werden.

Zum Schluß einige Aufgaben für interessierte Leser.

▪ 1 ▪ Man zeige, daß

$$(M!)!\geqq M[(M-1)!]^M$$

für alle natürlichen M.

[Man gehe etwas sorgfältiger mit den Abschätzungen vor, und die schärfere Ungleichung ist da!]

▪ 2 ▪ Man zeige für $m=1, 2, \ldots$, daß die Ungleichung

$$(2m)!\geqq\frac{(2^m m!)^2}{m+1} \text{ gilt.}$$

[Vollständige Induktion, oder ein anderer Weg?]

▪ 3 ▪ Es ist zu beweisen, daß für $m=1, 2, \ldots$ die Ungleichung

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2m)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}>\sqrt{m} \text{ erfüllt ist.}$$

▪ 4 ▪ Für $m=2, 3, \ldots$ gilt die Ungleichung

$$2!4!6!\ldots(2m)!>[(m+1)!]^m.$$

V. I. Lewin

** siehe z. B. P. P. Korowkin, Ungleichungen Deutscher Verlag d. Wissenschaften (Band IV, 2.45 M)

Lenin als Gymnasiast

Mit 9 Jahren wurde *Lenin* Schüler des Simbirsker Gymnasiums. Er war ein fleißiger und disziplinierter Schüler. Seine Schulkameraden hatten ihn gern, weil er immer hilfsbereit war und viele lustige Einfälle hatte. Im Sommer ging er gern schwimmen, im Winter lief er Schlittschuh und spielte Schach. Am Schuljahresende wurde er stets mit Auszeichnung in die nächste Klasse versetzt. Unser Bild zeigt *W. I. Lenin* als Abiturient. Daneben sehen wir einen Auszug aus seinem Abschlußzeugnis in deutscher Sprache.

Abschluß-Zeugnis

Wladimir Uljanow, rechtgläubig, Sohn eines Beamten, geboren in Simbirsk am 10. April 1870, der acht Jahre in dem Simbirsker Gymnasium gelernt hat, ausgehändigt und bestätigt:

erstens, daß auf Grund der Beobachtungen während seiner Lehrzeit im Simbirsker Gymnasium sein Betragen im allgemeinen ausgezeichnet war, die Pünktlichkeit des Stundenbesuches und Ausführung der Schularbeiten, wie auch der schriftlichen Arbeiten waren ausgezeichnet, Fleiß — ausgezeichnet und die Wißbegier in allen Fächern war groß, besonders in allen Sprachen, und zweitens, daß bei ihm folgende Kenntnisse festgestellt wurden:

Russische Sprache und Sprachkunde	5
Lateinische Sprache	5
Griechische Sprache	5
Mathematik	5
Geschichte	5
Geographie	5
Physik und mathematische Geographie	5
Deutsche Sprache	5
Französische Sprache	5

Zur Würdigung des ausgezeichneten Betragens und Fleißes und der ausgezeichneten Erfolge in den Wissenschaften, besonders in den alten Sprachen, beschließt der Pädagogische Rat, ihn — *Uljanow* — mit der Goldenen Medaille auszuzeichnen.

(Die Note 5 in der Abschrift des Zeugnisses von *W. I. Lenin* entspricht unserer Note 1.)

Ornamente

Teil 2

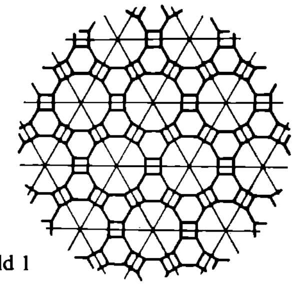


Bild 1

▲ A 6 Stelle in einer Tabelle alle Symmetrieoperationen für ein Quadrat zusammen! Überprüfe, ob die in unserem letzten Beitrag (*alpha*, Heft 3) genannten Eigenschaften I und II gelten!

Definition: Eine Menge von Bewegungen mit den folgenden Eigenschaften a) und b) nennen wir eine *Bewegungsgruppe*.

a) Die Nacheinanderausführung zweier Bewegungen aus der Menge ist wieder eine Bewegung aus derselben Menge.

b) Mit jeder Bewegung ist auch ihre Inverse aus der gegebenen Menge.

Satz: Die Symmetrieoperationen einer Figur bilden eine Bewegungsgruppe.

Die Bewegungsgruppe einer Figur wird auch ihre *Symmetriegruppe* genannt.

Beispiele:

1. Die Symmetriegruppe des Buchstaben A besteht aus zwei Elementen: aus der Identität und aus der Spiegelung an der Symmetrieachse des Buchstabens. Die Symmetriegruppe des Buchstabens Q enthält nur die Identität.
2. Die Symmetriegruppe eines gleichschenkligen Dreiecks ABC besteht aus 6 Elementen: aus der Identität, aus den Drehungen d_1, d_2, und aus den Spiegelungen s_1, s_2, s_3.
3. Die Symmetriegruppe eines Kreises besitzt unendlich viele Elemente.

Gewisse Symmetriegruppen der Ebene werden *Ornamentgruppen* genannt. Dabei unterscheidet man Rosettengruppen, Friesgruppen und Wandmustergruppen.

Mit ihnen wollen wir uns nun beschäftigen.

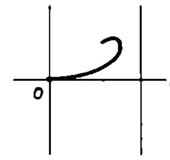
Beispiele für Rosettengruppen

▲ A 7 a) Zeichne eine Figur entsprechend Bild 2! Bestimme das Bild der Figur bei der Drehung um 0 mit einem Drehwinkel von 180°!

b) Wende auf die Figur im Bild 2 zweimal nacheinander die Drehung um 0 mit einem Drehwinkel von 120° an!

c) Wende auf die Figur im Bild 2 Drehungen um den Punkt 0 an, deren Drehwinkel $\alpha = \frac{360°}{n}$ ($n = 4, 5, 6$) beträgt!

Bild 2



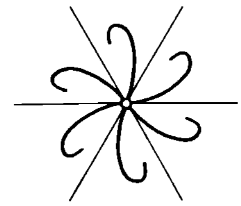


Bild 3

Die Bewegungsgruppen in den Aufgaben 7a) bis 7c) sind Beispiele für Rosettengruppen. Diese Gruppen bestehen aus Drehungen um einen gegebenen Punkt, deren Drehwinkel

$\alpha = k \cdot \frac{360°}{n}$ ($n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ $1 \leqq k \leqq n$; k natürliche Zahl) betragen.

Weitere Rosettengruppen ergeben sich, wenn außer den Drehungen geeignete Geradenspiegelungen betrachtet werden. Die Spiegelachsen dieser Spiegelungen gehen dabei durch das Drehzentrum und halbieren jeweils den Drehwinkel.

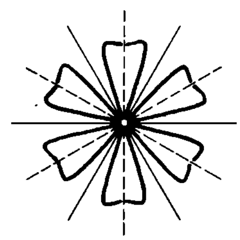


Bild 4

▲ A 8 a) Wiederhole die Aufgaben 7a) bis 7c) und bestimme außerdem bei jeder Aufgabe die Bilder bei den Spiegelungen an den geeigneten Winkelhalbierenden!

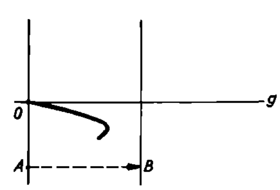
b) Entwirf weitere Rosetten!

Rosettengruppen sind Ornamentgruppen, die entweder nur aus Drehungen um einen festen Punkt mit Drehwinkel $\alpha = k \cdot \frac{360°}{n}$ oder aus Drehungen und gewissen Geradspiegelungen entstehen.

Beispiele für Friesgruppen

▲ A 9 a) Zeichne entsprechend Bild 5 einen Streifen mit einer beliebigen Figur und wende darauf mehrmals nacheinander die Verschiebungen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ an!

Bild 5



b) Wende auf die Figur in Bild 5 die Verschiebungen $2 \cdot \overrightarrow{AB}$ und $2 \cdot \overrightarrow{BA}$ an und außerdem noch Drehungen um den Punkt 0 mit $\alpha = 180°$ als Drehwinkel!

c) Wende auf die Figur in Bild 5 die Verschiebungen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ an! Bestimme außerdem die Bilder der Figuren bei der Spiegelung an der Geraden g!

d) Untersuche die Figur in Bild 6 auf ihre Symmetrieoperationen! Denke dir dabei die Figur nach links und rechts in entsprechender Weise beliebig weit gezeichnet!

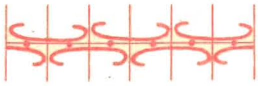


Bild 6

Ornamentgruppen, die nur aus gleich oder entgegengesetzt orientierten Verschiebungen, geeigneten Drehungen mit $\alpha = 180°$ als Drehwinkel bzw. geeigneten Geradenspiegelungen bestehen, werden Friesgruppen genannt.

▲ A 10 Bei den Rosetten- bzw. Friesgruppen werden bestimmte Teile der Ebene ständig wiederholt. Ein derartiges Teilgebiet der Ebene wird *Grundbereich* genannt. Überlege, welche Eigenschaft je zwei Grundbereiche eines Ornaments besitzen!

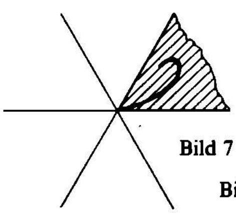


Bild 7

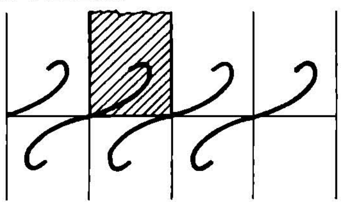
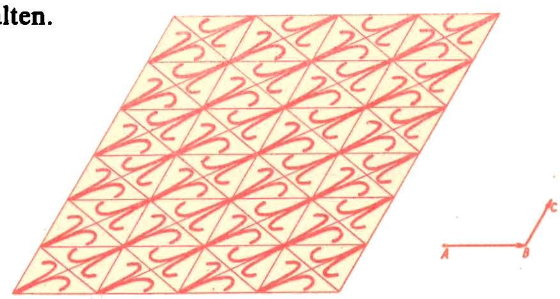


Bild 8

Beispiele für Wandmustergruppen

Die interessantesten Ornamentgruppen sind die sogenannten Wandmustergruppen. Die Grundbereiche, die ständig wiederholt werden, sind endlich. Wandmustergruppen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie zwei Verschiebungen mit verschiedenen Verschiebungsrichtungen enthalten. Die einfachsten Wandmustergruppen sind diejenigen, die keine Drehung enthalten.

Bild 9

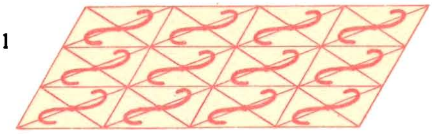


▲ A 11 Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$ und in seinem Innern eine geeignete Figur! Wende auf diesen Grundbereich geeignete Verschiebungen an!

Bild 10

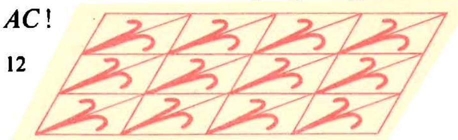
Eine zweite Wandmustergruppe ergibt sich, wenn in Aufgabe 11 außer geeigneten Verschiebungen auch die Drehung um den Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms mit einem Winkel von 180° als Drehwinkel zugelassen wird.

Bild 11



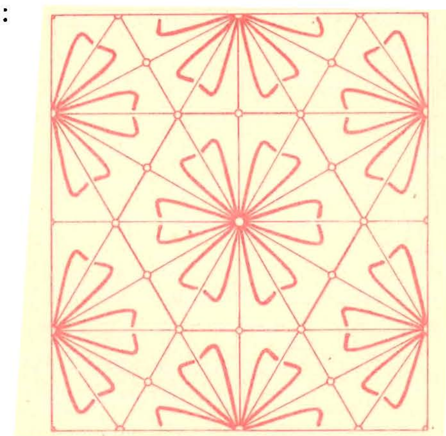
■ A 12 Wiederhole Aufgabe 11 und bestimme außerdem das Bild bei der Spiegelung an der Diagonalen AC!

Bild 12



Durch die folgende Vorschrift ergibt sich ein Wandmuster, das eine Vielzahl von Symmetrieoperationen besitzt:

Bild 13



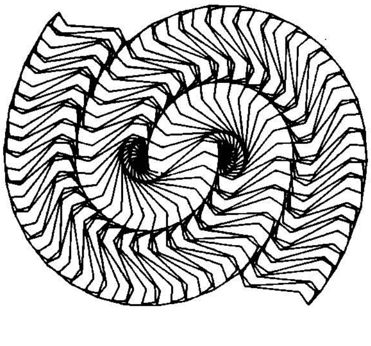
1. Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck und zeichne sämtliche Symmetrieachsen!
2. Wähle entsprechend Bild 13 ein Dreieck und zeichne innerhalb des Dreiecks eine beliebige Figur!
3. Spiegle die Figur an den Seiten des Dreiecks!
4. Führe den Prozeß der Spiegelung entsprechend der Teilvorschrift 3. beliebig fort!

Wandmustergruppen waren bereits im Altertum bekannt. Die systematische Untersuchung der Wandmustergruppen mit mathematischen Methoden erfolgte am Ende des vergangenen Jahrhunderts.

R. Bittner

Literatur: Coxeter: Unvergängliche Geometrie,
Fejes-Tóth: Reguläre Figuren

Parkettierung von *Vonderberg* (1936, 1937): Die neuneckigen Parkettplatten sind so angeordnet, daß sie eine Spirale mit zwei Polen bilden.



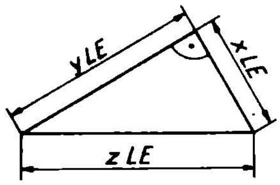
Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen

Teil 2

Wir lernen das Anfertigen von Nomogrammen mit drei parallelen Funktionsleitern

Die jetzt zu betrachtenden Nomogramme gehören zu Formeln, die drei Variable enthalten. Wir wollen uns zunächst an einem Beispiel orientieren: In der Klasse 8 lernten beziehungsweise lernen wir noch den Lehrsatz des Pythagoras kennen: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat. (Im rechtwinkligen Dreieck nennt man die dem rechten Winkel anliegenden Seiten Katheten, die ihm gegenüberliegende Seite Hypotenuse.):

$$x^2+y^2=z^2$$



Diese sogenannte *Pythagoreische Gleichung* wird im Unterricht oft benutzt, um in einem rechtwinkligen Dreieck mit zwei bekannten Seitenlängen die fehlende dritte Seite zu berechnen. Als Beispiel sei hierzu die folgende Aufgabe gelöst: Berechne die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 8,4 cm und 5,2 cm!

Rechnerische Lösung:

$z^2=8{,}4^2+5{,}2^2$	Errechnen der Quadrate bzw. Benutzen der Tafel der Quadratzahlen
$z^2=70{,}56+27{,}04$	Ausführen der Addition
$z^2=97{,}60$	Radizieren bzw. Benutzen der Tafel der Quadratwurzeln (Da z die Maßzahl einer Strecke ist, gilt $\lvert z\rvert=z$.)
$\lvert z\rvert=9{,}879$	

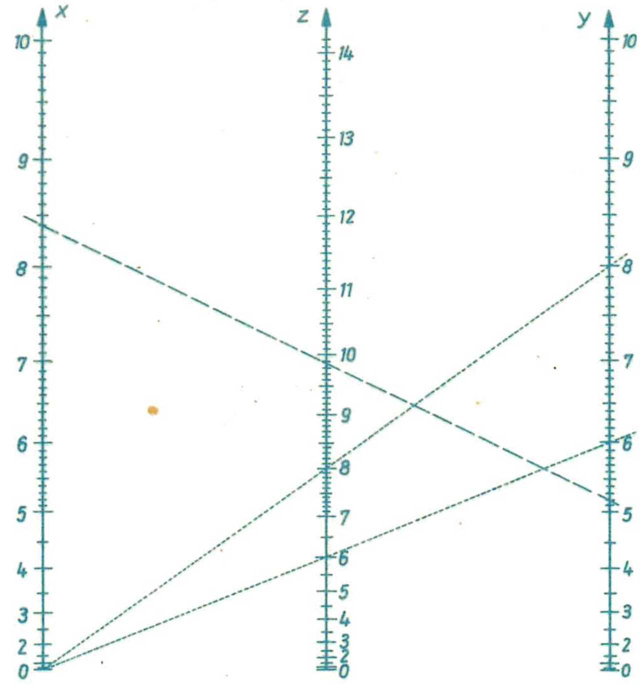
Die Hypotenuse dieses Dreiecks hat die Länge 9,9 cm.

b) Lösung mittels Nomogramm:

Ein Lineal wird so auf das abgedruckte Nomogramm gelegt, daß auf der Ablesekante des Lineals die Punkte mit den Koten 8, 4 der x-Leiter und 5, 2 der y-Leiter liegen. (Siehe gestrichelte Gerade der Zeichnung!) Die Ablesekante eines so angelegten Lineals schneidet die z-Leiter im Punkt mit der Kote 9, 9. Mithin ist 9,9 cm die gesuchte Länge der Hypotenuse.

Die x-Leiter und die y-Leiter dieses Nomogramms sind offenbar zueinander kongruent und zu der laut Aufgabe 1 gezeichneten Funktionsleiter ähnlich.

Diese Bemerkungen zeigen, daß es offenbar nicht schwer ist, ein derartiges Nomogramm zu zeichnen. Um genauer ablesen zu können, wollen wir das oben gezeichnete Nomogramm vergrößert selbständig nach der angegebenen Vorschrift zeichnen:



8. Aufgabe:

1.) Zeichne drei parallele, gleichorientierte Geraden, x-, y- und z-Leiter genannt, von denen zwei benachbarte den Abstand 7 cm haben. Benenne die Schnittpunkte dieser Geraden mit einer zu ihnen senkrechten Geraden mit A, B und C!

2.) Zeichne auf der x-Leiter mit Bezugspunkt A eine Funktionsleiter zu $\xi=x^2$ *) für $0\leqq x\leqq 10$ und $1\ \text{LE}=\frac{1}{4}\ \text{cm}$!

3.) Zeichne auf der y-Leiter mit Bezugspunkt B eine Funktionsleiter zu $\eta=y^2$ *) für $0\leqq y\leqq 10$ und $1\ \text{LE}=\frac{1}{4}\ \text{cm}$!

4.) Zeichne auf der z-Leiter mit Bezugspunkt C wenigstens teilweise**) eine Funktionsleiter zu $\zeta=\frac{z^2}{2}$ *) für $0\leqq z\leqq 14{,}2$ und $1\ \text{LE}=\frac{1}{4}\ \text{cm}$!

Das gemäß Aufgabe 8 gezeichnete Nomogramm legen wir mit einer kurzen Gebrauchsanweisung versehen

*) In allen drei Fällen handelt es sich um die Funktionen $y=x^2$ bzw. $y=\frac{x^2}{2}$. Es sind lediglich, um Verwechslungen auszuschließen, Umbenennungen vorgenommen worden. ξ (Ksi), η (Eta) und ζ (Zeta) sind griechische Buchstaben.

**) Durch die Bemerkung „wenigstens teilweise“ soll darauf hingewiesen werden, daß für $0\leqq z\leqq 10$ diese Leiter ohne Berechnung später auf zeichnerischem Wege kotiert werden kann.

unserer Tafel bei, damit wir es bei Bedarf stets zur Verfügung haben. Doch vorher lösen wir mittels dieses Nomogramms noch die folgende Aufgabe:

9. Aufgabe:

In einem rechtwinkligen Dreieck hat die eine Kathete die Länge 6,30 cm und die Hypotenuse die Länge 11,2 cm. Ermittle die Länge der zweiten Kathete

a) mittels Nomogrammes,

b) durch Berechnung mittels Pythagoreischer Gleichung und

c) durch Konstruktion des Dreiecks und Messen seiner zweiten Kathete!

Natürlich muß der Nachweis, daß das laut Aufgabe 8 gezeichnete Nomogramm die Ergebnisse von Berechnungen nach der Pythagoreischen Gleichung durch direktes Ablesen zu finden gestattet, noch geführt werden. Aus diesem Grunde beweisen wir den folgenden Satz:

Bezeichnet man als Lösung des in Aufgabe 8 gezeichneten Nomogramms jedes Zahlentripel $(x;\ y;\ z)$, dessen zugeordnete Leiterpunkte P, Q und R in einer Geraden liegen, so gilt $x^2+y^2=z^2$.

Voraussetzung: Die den Zahlen x, y und z im Nomogramm der Aufgabe 8 zugeordneten Leiterpunkte P, Q und R liegen in einer Geraden.

Behauptung: $x^2+y^2=z^2$

Beweis: Wegen $AP \parallel CR \parallel BQ$ und $\overline{AC}=\overline{BC}$ ist CR Mittellinie im Trapez $ABQP$. Also gilt:

$$\overline{CR}=\frac{\overline{AP}+\overline{BQ}}{2}$$

Gemäß Aufgabe 8 und der Definition der Funktionsleiter sind die Maßzahlen der in $1\ \text{LE}=\frac{1}{4}$ cm gemessenen Strecken AP, BQ und CR gleich x^2, y^2 und $\frac{z^2}{2}$.

Also besteht zwischen diesen Maßzahlen die Beziehung

$$\frac{z^2}{2}=\frac{x^2+y^2}{2}.$$

Durch Multiplizieren beider Seiten dieser Gleichung mit 2 folgt $z^2=x^2+y^2$, *w.z.b.w.*

Wie in Fußnote ** angekündigt, können wir nunmehr die z-Leiter sehr einfach kotieren. Für $x=0$ folgt aus $x^2+y^2=z^2$ die Gleichung $y^2=z^2$. Wegen $y \geqq 0$ und $z \geqq 0$ folgt hieraus weiter $y=z$. Das bedeutet, daß alle Geraden durch den Punkt der x-Leiter mit der Kote 0 die y- und z-Leiter jeweils in Punkten mit gleichen Koten schneiden müssen (Siehe punktierte Geraden obiger Abb.!). Mittels dieser Eigenschaft läßt sich die z-Leiter teilweise kotieren.

Jetzt wollen wir natürlich lernen, wie weitere Nomogramme mit drei parallelen Leitern anzufertigen sind. Als wichtige Vorbereitung dazu beantworten wir die folgende Frage:

Welcher Gleichung genügen die Lösungstripel $(x;y;z)$ eines Nomogramms des folgenden Typs?

1.) Die drei Leitern des Nomogramms sind parallel und gleichorientiert und benachbarte Leitern haben den gleichen Abstand voneinander.

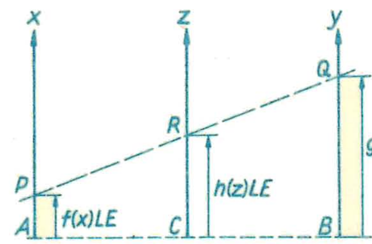
2.) Die Bezugspunkte aller drei Leitern liegen auf einer Senkrechten zu den drei Leitern.

3.) Für alle drei Funktionsleitern wird die gleiche Längeneinheit 1 LE gewählt.

4.) Die den drei Funktionsleitern zugeordneten Funktionen haben die Gleichungen:

x-Leiter: $\xi=f(x)$ y-Leiter: $\eta=g(y)$ z-Leiter: $\zeta=h(z)$.

5.) Ein Zahlentripel $(x;\ y;\ z)$ heißt Lösung dieses Nomogrammes, falls die den drei Koten x, y und z zugeordneten Leiterpunkte P, Q und R in einer Geraden liegen.



Wir erarbeiten uns die Antwort: $(x;\ y;\ z)$ sei ein Lösungstripel. Dann liegen die den Zahlen x, y und z zugeordneten Leiterpunkte P, Q und R auf einer Geraden. Unter der zusätzlichen Annahme $f(x)>0$, $g(y)>0$ und $h(z)>0$ ist CR Mittellinie im Trapez $ABQP$.

Mithin gilt analog zu oben:

$$\overline{CR}=\frac{\overline{AP}+\overline{BQ}}{2}$$

Für die Maßzahlen der in LE gemessenen Strecken AP, BQ und CR gilt also:

$$h(z)=\frac{f(x)+g(y)}{2}$$

Die hieraus folgende „Schlüsselgleichung" unseres Nomogrammtypes gilt, wie aus zusätzlichen Überlegungen folgt, nicht nur für $f(x)>0$, $g(y)>0$ und $h(z)>0$, sondern allgemein.

Damit lautet die Antwort auf die gestellte Frage: Die Lösungen $(x;\ y;\ z)$ eines Nomogramms des zu betrachtenden Typs genügen der Schlüsselgleichung $2h(z)=f(x)+g(y)$.

W. Träger

In Anerkennung hervorragender Verdienste bei der Entwicklung des Sozialismus und bei der Festigung und Stärkung der Deutschen Demokratischen Republik wurden anläßlich des VII. Pädagogischen Kongresses in Berlin mit dem

Orden Banner der Arbeit

ausgezeichnet:

Leitung des Klubs „Junger Mathematiker" in Cottbus

Oberlehrer Manfred Mäthner, Oberstudienrat Gerhard Schulze (Mitglied des Redaktionskollegiums unserer Zeitschrift), Oberlehrer Erwin Wenzel, Verdienter Lehrer des Volkes.

Die Redaktion *alpha* gratuliert im Namen des Redaktionskollegiums und ihrer Leser aufs herzlichste und wünscht weitere Erfolge in der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik.

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

EDV Teil 10

3. Programmierung und Flußdiagramme
3.0. Einleitung

Auf die Frage, was ein Mathematiker sei, hörte ich einmal die Antwort: „... jemand, der mit großen Zahlen schnell rechnen kann.“ Eine solche naive Vorstellung ist nicht nur unvollständig, sie ist sogar falsch. Man denke an einen Mathematikdozenten, der mühelos seitenlange Formelableitungen vorträgt, aber in Bedrängnis gerät, wenn er $14 \cdot 38$ im Kopf bewältigen soll. Das erscheint paradox und liefert Stoff für Anekdoten, ist aber, genauer betrachtet, durchaus verständlich. Der Mathematiker hat andere Aufgaben als das einfache Rechnen. Versuchen wir, die Tätigkeit eines praktisch arbeitenden Mathematikers allgemein zu nennen. Er muß

1. das in der Praxis auftretende Problem *mathematisch formulieren,*
2. einen geeigneten *Weg zur Lösung* des Problems suchen,
3. *allgemeine Aussagen* über ein Problem machen, z. B. über Lösbarkeitsbedingungen usw.

Diese Arbeit entspricht dem, was die meisten Schüler bei den sogenannten „Textaufgaben“ fürchten. Die in der Praxis zu lösenden Probleme sind nun einmal — meistens sehr komplizierte — Textaufgaben. Das mathematische Formulieren eines Problems und das Finden eines Lösungsweges sind *schöpferische*, mit *Denken* verbundene Tätigkeiten. Sie hören dort auf, wo die Fortsetzung des Lösungsweges nur noch ein *Algorithmus* ist, also ein mechanisch ablaufendes Verfahren, von einem (menschlichen) *Rechner*, der mit den nötigen mathematischen „Handgriffen“ vertraut ist, auch dann ausführbar, wenn ihm das tiefere Verständnis fehlt, er also in diesem Sinne kein „Mathematiker“ ist.

Beispiel: Das Problem enthielt eine unbekannte Größe x, und es ist gelungen, eine quadratische Gleichung

$$x^2+px+q=0 \quad (p \text{ und } q \text{ seien bekannt})$$

anzugeben, von der man weiß, daß sie eine positive und eine negative Lösung besitzt, wobei aus praktischen Gründen die negative Lösung ausscheidet.

Oder: Die Aufgabe enthielt drei unbekannte Größen, und man hat ein lineares System von drei Gleichungen mit diesen drei Unbekannten gefunden sowie mit Hilfe eines Kriteriums festgestellt, daß das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

Wir unterscheiden also bei der Lösung mathematischer Aufgaben die

1. Stufe, die intellektuelle, schöpferische Tätigkeit, das *Denken*, von der weniger anspruchsvollen
2. Stufe, bei der nur *Algorithmen* ablaufen. Zu dieser Stufe gehören auch die Grundrechenoperationen, füllen sie aber nicht aus, denn (siehe das letzte Beispiel!) auch *Entscheidungen* verschiedener Art gehören dazu. Häufig ist z. B. an einer bestimmten Stelle des Lösungsweges zu ermitteln, ob eine Zahl positiv oder negativ ist, oder ob sie größer bzw. kleiner als eine vorgegebene Zahl ist, oder welche von zwei Zahlen die größere ist usw. Vom Ausfall solcher Entscheidungen, d. h. von der Antwort auf *Fragen*, die im Algorithmus einbegriffen sind, hängt dann der weitere Verlauf der Rechnung ab. Die späteren Beispiele werden das noch genauer zeigen.

Welche Rolle spielt nun in diesem Zusammenhang der *Rechenautomat*? Für ihn trifft zum Teil die eingangs genannte naive Definition zu. Er kann nämlich mit „großen“ Zahlen (gemeint sind meistens Dezimalzahlen mit großer Stellenzahl) rasend schnell rechnen, ist also Experte für einen Unterbereich der 2. Stufe. Er leistet einerseits weniger als ein menschlicher Rechner, denn er kann ja, wie die vorigen Abschnitte hoffentlich hinreichend klar gezeigt haben, entsprechend den eingebauten Funktionsschaltungen nur verhältnismäßig einfache Vorgänge wie etwa die duale Addition physikalisch realisieren, diese aber um so schneller; damit leistet er andererseits wesentlich mehr als ein menschlicher Rechner.

Um also eine mathematische Aufgabe für einen Automaten zugänglich zu machen, muß ein Bindeglied geschaffen werden, das am Ende der 1. Stufe beginnt und dort endet, wo der Lösungsweg nur in solche Schritte aufgespalten ist, die der Automat bewältigen kann. Es geht also um das Zerlegen eines vorgegebenen Algorithmus in *automatengerechte Teiloperationen.* Diese von Menschen auszuführende Tätigkeit, mit der wir uns im Folgenden ein wenig beschäftigen wollen, nennt man *Programmieren*, und die Programmierungsvorschrift, d. h. die Folge von Anweisungen, welche Teiloperationen der Reihe nach auszuführen sind, heißt *Programm*. Dabei ist von vornherein zu beachten, daß ein bestehendes Programm nicht für jeden Automaten gleichermaßen geeignet ist. Für einen bestimmten Automatentyp kann ein individuelles Programm hergestellt werden. Das ist dann mit einem weiteren Auflösen von Operationen in automatengerechte Rechenschritte verbunden. Wir werden uns bei den folgenden Beispielen wieder von den durch die Anlage ROBOTRON 300 gegebenen Möglichkeiten leiten lassen. Folgende Fragen werden uns dabei besonders beschäftigen:

1. Wie löst man einen mathematischen Lösungsweg oder eine Formel überhaupt in Teilschritte auf? Wir werden sehen, daß hier schon bei ganz einfach scheinenden Aufgaben einiges zu bedenken ist.
2. Wie bringt man den gefundenen Weg möglichst kurz, übersichtlich und eindeutig verständlich zu Papier? Welche Symbole benutzt man?
3. Wie gibt man das fertige Programm in den Automaten ein? — und im Zusammenhang damit die letzte, dennoch nicht ganz unwichtige Frage: In welcher Form liefert uns der Automat die Rechenergebnisse?

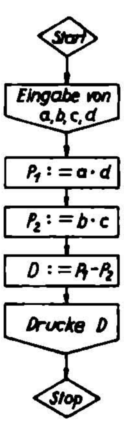
3.1. Das Flußdiagramm

Wir behandeln die ersten beiden Fragen gleichzeitig, und zwar am besten an Hand einiger *Beispiele*.

Beispiel 1: Gegeben seien die Zahlen a, b, c, d, und es ist $ad-bc=D$ *
zu berechnen. Die drei in bestimmter Reihenfolge auszuführenden Teilschritte — in diesem Fall sind sie bereits automatengerecht — nämlich

1. die Multiplikation $a \cdot d$,
2. die Multiplikation $b \cdot c$,
3. die Subtraktion der beiden Produkte,

ergeben das Programm. Dessen Ablauf stellen wir in einem *Flußdiagramm* wie folgt dar:

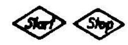


* $ad-bc$ läßt sich auch als zweireihige *Determinante* schreiben:

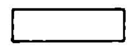
$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Der fortgeschrittene Leser weiß, daß Determinanten ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel sind und u. a. bei der Lösung von Gleichungssystemen angewendet werden können.

Der Begriff Flußdiagramm bedarf kaum einer Erklärung, (Fluß=Ablauf, zeitliches Nacheinander). Dieses und die folgenden Flußdiagramme sind Kästchendiagramme. Die Kästchenmethode ist eine Methode zur Darstellung von Flußdiagrammen. Die verwendeten Symbole sind durch TGL-Vorschriften standardisiert worden. Vorerst haben wir benutzt:



Organisationskästchen für Programmanfang und Programmende


Operationskästchen (sie enthalten Anweisungen, Befehle)

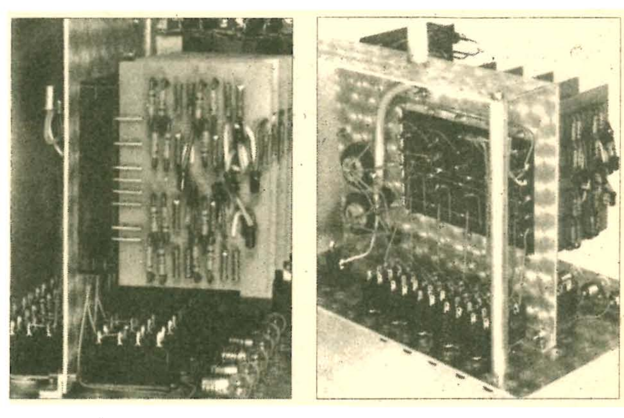

Kästchen für die Eingabe bzw. Ausgabe von Informationen


Folgelinien (sie müssen nicht immer, wie in unserem Beispiel, von oben nach unten verlaufen, sondern können z. B. auch Programmverzweigungen darstellen.)

$:=$ Ergibtzeichen

(Dieses Zeichen ist nicht mit dem bisher bekannten Gleichheitszeichen zu identifizieren. Schreibt man $P_1=a \cdot d$, so sind beide Seiten gleichberechtigt, und man sagt nichts aus über das Zustandekommen der einen oder anderen Größe. Das Zeichen $:=$, gelesen „ergibt sich aus", soll einen Vorgang darstellen. $P:=a \cdot b$ heißt: bilde durch Multiplikation aus den vorhandenen Werten der Größen a und b die neue Größe P_1!
Hinter a, d und P_1 stehen Speicherplätze im Automaten. Die unter den Bezeichnungen a und d gerade vorhandenen Werte werden zur Berechnung von P_1 verwendet.) *J. Frormann*

Wir stellen vor: Bernd Bruhn und sein Modell eines elektronischen Addierwerkes



Der Schüler *Bernd Bruhn*, bis August 1970 Schüler der EOS Klement-Gottwald, jetzt Mathematik-Student an der Humboldt-Universität zu Berlin, baute vergangenes Jahr ein Modell zur Erläuterung der Wirkungsweise eines elektronischen Addierwerkes. Das Addierwerk wurde bereits im Abschnitt 2.3 des Beitrages EDV (Heft 2/70) beschrieben. Nebenstehend zeigen wir zwei Abbildungen des Modells, mit dem zwei (höchstens fünfstellige) Dualzahlen addiert bzw. subtrahiert werden können. Es wurde die duale Direktverschlüsselung angewandt; die Eingabe der beiden Zahlen erfolgt mit je 5 Kippschaltern; das Ergebnis der Rechnung kann als Dualzahl an Glühlampen abgelesen werden (Lampe leuchtet: L, Lampe leuchtet nicht: O). *alpha* stellt interessierten Lesern weiteres Material über Wirkungsweise, Aufbau und die Bedienung zur Verfügung. Kennwort: EDV-Modell (dazu 2,00 M in Briefmarken).

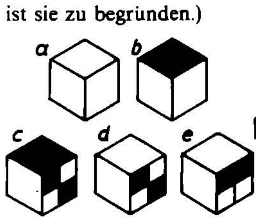
X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.
Die Lösungen sowie die Punktbewertungstabellen werden am 21. Oktober veröffentlicht, (siehe Trommel, JW und DLZ).

Olympiadeklasse 5

1. Die Abbildung A 5;1 zeigt unter a bis e von fünf Würfeln je ein Schrägbild. Die Abbildung A 5;1a zeigt ein Netz, aus dem genau ein Würfel hergestellt werden kann, wenn die Seite mit den gefärbten Flächen nach außen kommen soll. Beantworte für jedes der fünf Schrägbilder die Frage, ob es den aus dem abgebildeten Netz hergestellten Würfel darstellen kann oder nicht! (In den Fällen, in denen die Antwort „Ja" lautet, genügt die Angabe dieser Antwort. In den Fällen, in denen die Antwort „Nein" lautet, ist sie zu begründen.)



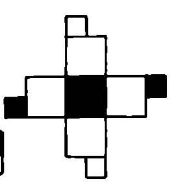


Abb. A 5; 1 *Abb. A 5; 1a*

2. In einem alten Buch mit lustigen mathematischen Knobeleien fand Annerose folgenden Vers:

Eine Zahl hab' ich gewählt,
107 zugezählt,
dann durch 100 dividiert
und mit 11 multipliziert,
endlich 15 subtrahiert,
und zuletzt ist mir geblieben
als Resultat die Primzahl 7.

Gibt es wenigstens eine Zahl, die den gegebenen Bedingungen genügt? Wenn ja, ermittle alle diese Zahlen!

3. Gib eine Möglichkeit an, die Zahlen 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8 so in die Felder des abgebildeten quadratischen Netzes (Abb. A 5;3) einzutragen, daß als Summe der Zahlen jeder Zeile (waagerecht), jeder Spalte (senkrecht), jeder der beiden Diagonalen (von links oben nach rechts unten und von rechts oben nach links unten) und als Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern die Zahl 18 erhalten wird! (Keine Begründung erforderlich)

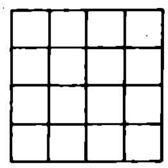


Abb. A 5; 3

4. Hans und Günter wollen Briefmarken tauschen. Auf die Frage nach der Anzahl seiner Tauschmarken antwortet Günter: „Ich habe heute polnische, sowjetische und bulgarische Briefmarken und sonst keine anderen zum Tausch anzubieten. Es sind insgesamt 30 Stück. Die Anzahl der sowjetischen Marken ist größer als die der polnischen, aber kleiner als die der bulgarischen. Die Anzahl der bulgarischen Marken dagegen ist größer als das Vierfache, aber kleiner als das Fünffache der Anzahl meiner sowjetischen Marken." Gib alle Möglichkeiten an, die folgende Tabelle so auszufüllen, daß diese Bedingungen erfüllt sind!

Anzahl der polnischen Marken	
Anzahl der sowjetischen Marken	
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der polnischen Marken	
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der bulgarischen Marken	
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Vierfachen der Anzahl der sowjetischen Marken	
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Fünffachen der Anzahl der sowjetischen Marken	

größeren Flächeninhalt? Um wieviel Ar unterscheiden sich die beiden Flächen?

2. Untersuche, welche der in der Abbildung A 6;2 dargestellten Figuren A bis F sich auf wenigstens eine Weise durch einen einzigen geraden Schnitt so in zwei Teilflächen zerlegen läßt, daß sich diese beiden zur gleichen Figur gehörenden Teilflächen jeweils zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen!

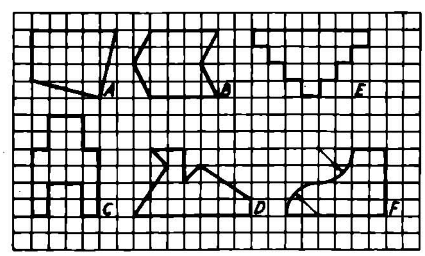


Abb. A 6; 2

Als Lösung genügt in den Fällen, in denen eine Zerlegung der genannten Art möglich ist, je eine entsprechende Zeichnung oder die jeweils zum Quadrat zusammengesetzten aufgeklebten Teilflächen. In den Fällen dagegen, in denen eine Zerlegung und Zusammensetzung der genannten Art nicht möglich ist, genügt als Lösung eine entsprechende Angabe (ohne Begründung).

Olympiadeklasse 6

1. Eine LPG hatte auf zwei Feldern Kartoffeln angebaut. Vom ersten Feld wurden insgesamt 810 t, vom zweiten insgesamt 640 t Kartoffeln geerntet. Auf dem ersten Feld wurde ein Durchschnittsertrag von 180 dt je ha, auf dem zweiten von 200 dt je ha erzielt. Welches von den beiden Feldern hat den

3. Es seien a, b, c, d, e, f, g, h sämtlich paarweise untereinander verschiedene einstellige natürliche Zahlen ungleich Null, und es gelte: $a+b=10$, $c+d+e=16$, $f+g+h=14$. Welche einstellige natürliche Zahl (ungleich Null) würde in diesen drei Aufgaben nicht verwendet? Gib für a, b, c, d, e, f, g, h eine mögliche Lösung an!

4. An 15 Teilnehmer am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift „*alpha*" wurden insgesamt 25 Antwortkarten „sehr gut gelöst" von der Redaktion geschickt, und zwar erhielt jeder dieser Teilnehmer mindestens eine solche Antwortkarte. Außerdem ist über diese 15 Teilnehmer bekannt, daß mindestens ein Teilnehmer genau 2 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 3 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 4 Antwortkarten und mindestens ein Teilnehmer genau 5 Antwortkarten erhielten. An einige der 15 Teilnehmer wurde je genau eine Antwortkarte geschickt. Ermittle die Anzahl dieser Teilnehmer!

Olympiadeklasse 7

1. Bei einem Sportfest soll zwischen Jungen Pionieren und FDJlern ein Wettlauf nach folgenden Regeln ausgetragen werden:
Auf den Mittelpunkt einer der kürzeren Seiten eines rechteckigen Spielfeldes (50 m × 70 m) stellt sich ein FDJler, auf den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite ein Pionier. Beide sollen auf ein Kommando auf dem kürzesten Wege von ihren Startplätzen zu der gleichen, auf dem Spielfeld aufgestellten Fahne laufen. Zu diesem Zweck soll die Fahne, wenn die beiden Läufer auf ihren Startplätzen stehen, so aufgestellt werden, daß sie von dem FDJler 50 m, von dem Pionier 25 m entfernt ist. Gib die Anzahl aller Möglichkeiten an, die Fahne gemäß den Bedingungen auf dem Spielfeld aufzustellen!

2. Die Zahl 17 soll als Summe von Quadraten natürlicher, von 0 verschiedener Zahlen dargestellt werden. Gib alle voneinander verschiedenen Möglichkeiten an! (Zwei Darstellungen dieser Art gelten genau dann als verschieden voneinander, wenn wenigstens ein Summand in der einen Darstellung nicht ebenso oft auftritt wie in der anderen Darstellung.)

3. a) Beweise folgenden Satz: Wenn vier natürliche Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.
b) Untersuche, ob für jede gerade Anzahl von natürlichen Zahlen der folgende Satz gilt:
Wenn diese natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.

4. $ABCD$ sei in der üblichen Bezeichnungsweise ein Rechteck, und es gelte $\overline{AB} \geqq \overline{BC}$. A_1 sei der Fußpunkt des Lotes von A auf die Diagonale DB. A_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle DAB$ mit DB, C_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle BCD$ mit DB und C_1 sei der Fußpunkt des Lotes von C auf DB. Man beweise, daß unter diesen Bedingungen $\sphericalangle A_1AA_2 \cong \sphericalangle A_2AC \cong \sphericalangle ACC_2 \cong \sphericalangle C_2CC_1$ gilt. Dabei sind folgende Fälle zu betrachten:
a) $\overline{AB} = \overline{BC}$
b) $\overline{AB} > \overline{BC}$.

Olympiadeklasse 8

1. Ermittle die Anzahl aller sechsstelligen natürlichen Zahlen, in denen die Ziffernfolge 1970 (d.h. die Grundziffern 1, 9, 7, 0 in dieser Reihenfolge und ohne dazwischenstehende andere Ziffern) auftritt!
Wie lautet die kleinste und wie die größte dieser sechsstelligen Zahlen?

2. Ermittle alle rationalen Zahlen x mit $x \neq 2$, die die folgende Gleichung erfüllen:
$$\frac{3x}{x-2}+1+\frac{4}{x-2}=2+\frac{3(x+1)}{x-2}+\frac{1}{x-2}$$

3. Es sei ΔABC ein beliebiges Dreieck, und es sei D der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks ΔABC mit der Seite AB.
Beweise: Die Länge der Strecke AD ist gleich der Differenz aus dem halben Umfang des Dreiecks und der Länge der Seite BC.

4. Ein Würfel werde von allen denjenigen Ebenen geschnitten, die durch die Mittelpunkte jeweils der drei von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten verlaufen. Dabei entsteht ein Restkörper.
a) Stelle diesen Würfel mit der Kantenlänge $a = 6$ cm und den Restkörper in einem Schrägbild $\left(\alpha = 60°; q = \frac{1}{3}\right)$ dar!
b) Ermittle die Anzahl aller Eckpunkte und die Anzahl aller Kanten des Restkörpers!
c) Gib die Form und die Anzahl aller Teilflächen der Oberfläche des Restkörpers an!

Olympiadeklasse 9

1. Auf die Frage nach seinem Alter sagte Herr X: „Die Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre beträgt genau ein Drittel dieser Anzahl. Das Quadrat der Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre ist genau dreimal so groß wie die Anzahl meiner Lebensjahre."
Können die Angaben von Herrn X zutreffen? Wenn ja, wie alt ist Herr X? (Angabe in vollen Lebensjahren)

2. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$.
Ferner sei S ein Punkt der in A auf ε errichteten Senkrechten, wobei $\overline{AS} = c$ gelte.
Man beweise, daß es dann genau eine Kugel gibt, auf der die Punkte A, B, C, D, S liegen, und berechne aus den gegebenen Längen a, b, c die Länge des Durchmessers dieser Kugel!

3. Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 fortlaufend auf folgende Weise hintereinander geschrieben:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ... 998 999 1000.
Es ist zu beweisen, daß die so entstandene Zahl nicht durch 1971 teilbar ist.

4. In einer alten Aufgabensammlung wird das „Urteil des Paris" folgendermaßen beschrieben:
Die Göttinnen *Hera*, *Aphrodite* und *Athene* fragen den klugen *Paris*, wer von ihnen die Schönste sei. Sie machen dabei folgende Aussagen:

Aphrodite: „Ich bin die Schönste" (1)
Athene: „Aphrodite ist nicht die Schönste" (2)
Hera: „Ich bin die Schönste" (3)
Aphrodite: „Hera ist nicht die Schönste" (4)
Athene: „Ich bin die Schönste" (5)

Paris, der am Wegrand ausruht, hält es nicht der Mühe wert, das Tuch, das seine Augen vor den Sonnenstrahlen schützt, zu entfernen. Er soll aber genau eine der drei Göttinnen als die Schönste feststellen. Dabei setzt er voraus, daß alle Aussagen dieser Schönsten wahr, alle Aussagen der beiden anderen Göttinnen jedoch falsch sind. Kann *Paris* unter dieser Voraussetzung die von ihm geforderte Feststellung erhalten? Wenn ja, wie lautet diese?

Olympiadeklasse 10

1. Zwei Schüler A und B spielen miteinander folgendes Spiel. Von einem Haufen mit genau 150 Streichhölzern müssen beide jeweils nacheinander Streichhölzer entnehmen, und zwar jeweils mindestens 1 Streichholz, aber höchstens 10 Streichhölzer, wobei A beginnt. Sieger ist derjenige, der das letzte Streichholz fortnehmen kann. Entscheiden Sie, wer von beiden seinen Sieg erzwingen kann, und geben Sie an, auf welche Weise er mit Sicherheit zum Ziel gelangt!

2. Ist n eine positive ganze Zahl, so bezeichne s_n die Summe aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.
a) Für welche positive ganze Zahl n erhält man $s_n = 2415$?
b) Für welche positive ganze Zahl m ist s_m genau 69 mal so groß wie m?
Hinweis: Die positiven ganzen Zahlen bilden eine arithmetische Folge. Eine Formel für die Summe der ersten n Glieder einer solchen Folge findet sich im Tafelwerk auf Seite 58.

3. Die Abbildung A 10; 3 zeigt einen konvexen durch ebene Flächen begrenzten Körper im Grund-, Auf- und Kreuzriß. Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in den drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a.
a) Zeichnen Sie einen Schrägriß eines derartigen Körpers ($\alpha = 60°$, $q = 1:3$)!
b) Berechnen Sie sein Volumen!

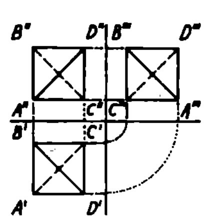


Abb. A 10; 3

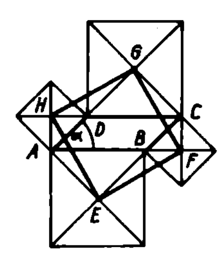


Abb. A 10; 4

4. Über jeder der vier Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ sei nach außen je ein Quadrat errichtet. Die Mittelpunkte E, F, G, H dieser Quadrate bilden ein Viereck $EFGH$. Man beweise, daß $EFGH$ ein Quadrat ist.

Olympiadeklasse 11/12 Siehe Seite 75!

Früh übt sich ...

An der IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (DDR-Ausscheid) nahmen 227 Schüler (davon 25 Mädchen) teil. *alpha* stellt die Teilnehmer vor, die auf Grund hervorragender Leistungen in den Olympiadeklassen 11 bzw. 10 starten konnten, obwohl sie diese Klassenstufen noch nicht besuchen.

In Klassenstufe 11 starteten:

Jürgen Schefter Kl. 10
Elsterwerda (2. Preis — IMO-Kandidat)

Olaf Böhme Kl. 10
Dresden (2. Preis)
IMO-Kandidat

Harald Englisch Kl. 10
Leipzig (2. Preis)

Pawel Kröger Kl. 5
Leipzig

Steffen Kossert Kl. 10
Berlin

In Klassenstufe 10 starteten:

Jürgen Roßmann Kl. 9
Neubrandenburg (2. Preis)

Harald Loose Kl. 9
Potsdam-Babelsberg (2. Preis)

Albrecht Heß Kl. 8
Dresden (2. Preis)

Axel Hintze Kl. 9
Magdeburg (Anerkennung)

Albrecht Böttcher Kl. 9
Annaberg-Buchholz I

Bernhard Worel Kl. 9
Neubrandenburg
(Anerkennung)

Brigitte Prawitz Kl. 9
Berlin (Anerkennung)

Helmut Roßmann Kl. 7
Neubrandenburg
(Anerkennung)

Bernd Zaddach Kl. 7
Cottbus (Anerkennung)

Volker Rössel Kl. 9
Karl-Marx-Stadt

Evelyn Fensch Kl. 9
Trebbin

Konrad Engel Kl. 8
Rostock

Kurt Oppitz Kl. 9
Kleinmachnow/Potsdam

Volkmar Rosenthal Kl. 9
Berlin

Norbert Ziechner Kl. 9
Frankfurt (Oder)

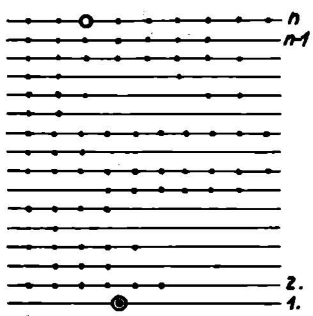
Antje Keller Kl. 9
Stralsund

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Hans Freudenthal

Mathematisches Institut, Universität Utrecht, Niederlande

▲ 560 Jürgen geht zu seinem Freund. Er hat sich ein neues Spiel ausgedacht. Auf einem Blatt Papier hat er eine Anzahl — n — paralleler Linien gezogen und sie — von unten beginnend — durchnumeriert von 1 bis n.

Auf jeder Linie sind kleine Kreisscheiben aufgezeichnet, r_i ist die Anzahl der auf der i. Linie gezeichneten Kreise ($i=1, 2, \ldots, n$).



Diese sind schwarz bis auf zwei. Genau ein Kreis der obersten (n.) Linie ist grün, und auf der untersten Linie befindet sich nur ein Kreis, dieser ist rot ($r_1 = 1$).

Jürgen erläutert die Spielregeln: Die Spieler wechseln sich ab. Jeder Zug besteht im Streichen eines noch nicht gelöschten Kreises, der sich aber nicht auf einer Linie befinden darf, die niedriger ist als die Linie, auf der beim unmittelbar vorangehenden Zug ein Kreis gelöscht worden war. Wer auf den grünen Kreis auf der obersten Linie setzt, hat verloren.

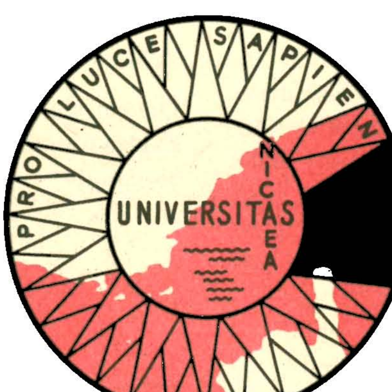
Jürgen sagt: „Ich beginne das Spiel und werde gewinnen, wie du auch spielst. Auch ist mein sicherer Sieg völlig unabhängig von der Anzahl n der Linien und der Anzahl r_i der auf der i. Linie gezeichneten Kreise ($i=2, 3, \ldots, n$); auf der 1. Linie sei allerdings nur ein Kreis gezeichnet."

Ist das möglich? Wie muß Jürgen spielen, um zu siegen?

IMC

Das französische Komitee der Mathematiker hat die Ehre, den nächsten *Internationalen Mathematiker-Kongreß* anzukündigen, welcher vom 1. bis 10. September 1970 in Nizza stattfindet. (Nizza liegt am Mittelmeer, 25 km von der italienischen Grenze und 900 km von Paris entfernt.) Die täglichen Kongreßzusammenkünfte werden morgens im großen Ausstellungspalast, nachmittags in Hörsälen der Universität abgehalten. Am Morgen sind je zwei Konferenzen von einer Stunde für alle Kongreßteilnehmer bestimmt. Die Nachmittagstagungen sind für ungefähr 250 Fachkonferenzen von je 50 Minuten Dauer vorgesehen, gefolgt von Diskussionen.

Im Jahre 1893 fand anläßlich der Weltausstellung in Chikago ein Internationaler Mathematikerkongreß statt. Als ersten Internationalen Mathematikerkongreß pflegt man allerdings erst Zürich 1897 zu zählen.. Es folgen Paris 1900 (D. Hilbert trug dort seine berühmten *Pariser Probleme* vor), Heidelberg 1904, Rom 1908, Cambridge (England) 1912, Straßburg 1920, Toronto 1924, Bologna 1928, Zürich 1932, Oslo 1936, Cambridge (Vorort v. Boston, USA) 1950, Amsterdam 1954, Edinburg 1958, Stockholm 1962, Moskau 1966.



In Chikago (1893) wurden 43 Teilnehmer, in Moskau (1966) hundertmal soviel gezählt.

IMU

Die IMU ist die *Internationale Mathematiker-Union.* Sie vereint interessierte Mathematiker aus allen Ländern der Welt.

IMUK

Die IMUK ist eine *Kommission der IMU.* Sie beschäftigt sich mit der internationalen Zusammenarbeit auf dem Unterrichtsgebiet in der Mathematik. Sie organisiert Kolloquien und Kongresse. Sie gibt Bulletins heraus, letzthin z. B. eins über die Entwicklung von Mathematikolympiaden in den Ländern der Welt, welche bisher solche austrugen.

Der Präsident der IMUK, Prof. Dr. Freudenthal, nahm an der XI. Internationalen Olympiade 1969 in der SR Rumänien teil. Nicht nur die ständig wachsende Zahl von Teilnehmern aus nichtsozialistischen Ländern, sondern auch die Wertschätzung der IMO durch die IMUK zeigen die weiter steigende Bedeutung dieses Leistungsvergleichs. Die Redaktion *alpha* dankt Herrn Prof. Dr. Freudenthal für die Übergabe von umfassendem Material, aus dem wir diese Seite gestalteten

1. IMUK-Kongreß

Unter der Schirmherrschaft des französischen Unterrichtsministers fand im Palais de Congrès in Lyon der erste internationale IMUK-Kongreß statt (24. bis 30. 8. 1969, Gesamtleitung Prof. Dr. Freudenthal).

Auch eine Delegation der DDR nahm an dem Kongreß teil.

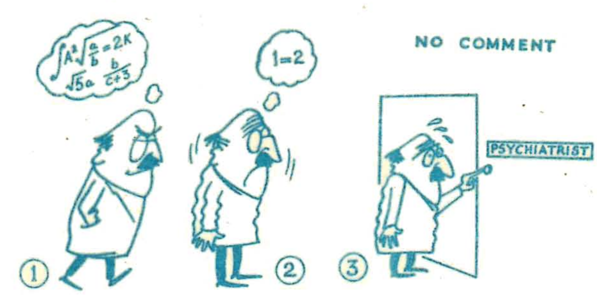
Schwerpunkte: Ausbildungsprogramme für Lehrer und Lehrerstudenten, Schülerpersönlichkeit und Mathematikunterricht, neue Programme und neue Formen des Unterrichts, das Lehrer-Schülerverhältnis, differenzierter Unterricht, programmierter Unterricht, Prüfungen, Aktivität und Passivität der Schüler, Methoden zur Anregung des Schülers zum Entdecken, Abstrahieren und Entwickeln von Theorien und Modellen.

Die Vertreter der UdSSR berichteten über das neue Schulprogramm, das nach fünfjähriger Arbeit erstellt worden und im Schuljahr 1969/70 in Kraft getreten ist.

In den ersten acht Schuljahren sind pro Woche je 6 Stunden Mathematik, im 9. und 10. Schuljahr je 5 Stunden angesetzt. Talentierte Schüler erhalten vom 4. Schuljahr an zusätzlichen Mathematikunterricht. Großer Wert wird auf das numerische Rechnen gelegt, die Schüler müssen imstande sein, algebraische und arithmetische Aufgaben fehlerlos zu lösen. Für sehr wichtig hält man die Anwendungen der Mathematik auf die Naturwissenschaften (wie Physik, Chemie, Biologie). Durch den Unterricht soll dem Schüler ein richtiges Verständnis für Wissenschaft und Praxis vermittelt werden.

Großes Interesse fand eine überaus reichhaltige Buchausstellung mit Titeln aus allen fünf Erdteilen. Eine Lehrmittelausstellung zeigte, wie man sich in einzelnen Ländern bemüht, den Übergang vom Konkreten zum Abstrakten zu erleichtern.

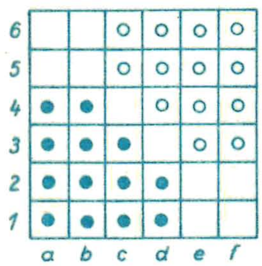
In freien Stunden alpha heiter

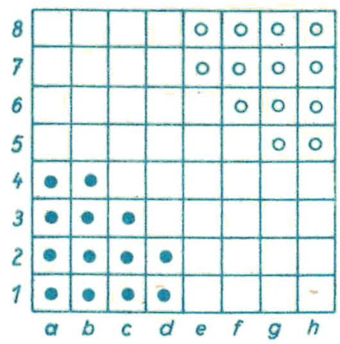


aus: mathematical pie 5/67

Halma-Solo

Halma, das meist zu zweit, dritt oder viert gespielt wird, bietet auch einem einzelnen Zerstreuung. Die Bewegungsart der Steine darf bei den Lesern als bekannt vorausgesetzt werden.



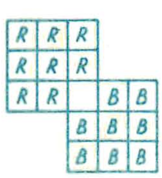


Das Ziel der ersten, leichteren Aufgabe (siehe Abb. links) ist, die auf den schwarzen Punktfeldern stehenden 13 Steine mit möglichst wenigen Zügen auf die weißen Punktfelder zu bringen. Wer das in weniger als 20 Zügen erreicht, kann mit dem Anfangserfolg zufrieden sein. Man suche die beste Lösung in 13 Zügen zu finden. Wenn die beiden „Höfe" in diagonaler Richtung um zwei Felder auseinandergerückt sind, wie die rechte Abb. zeigt, wird die Aufgabe etwas schwieriger. Zur besten Lösung braucht man 19 Züge.

aus: du bist dran; 42 Spiele am Tisch v. B. Rüger, (VEB F. Hofmeister, Leipzig 1962, 5,80 M

mathematics

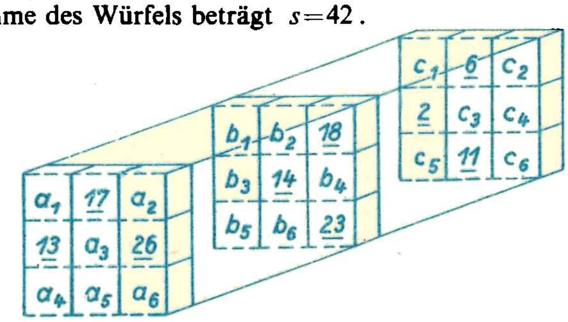
This is a puzzle for one person. — You need 8 red and 8 blue counters. — Place the red counters on the squares marked *R*, and the blue counters on the



squares marked *B*. *Objekt*: to exchange the positions of the red and blue counters. *Rules*: pieces can move to an adjacent empty square, or jump over one counter to an empty square. Diagonal moves are not allowed.

Magischer Würfel

Von einem magischen Würfel mit 27 Feldern ist nur die Stellung von neun Zahlen bekannt, die nachstehende Darstellung zeigt. Die fehlenden Elemente sind durch Buchstaben gekennzeichnet. Die Reihensumme des Würfels beträgt $s=42$.



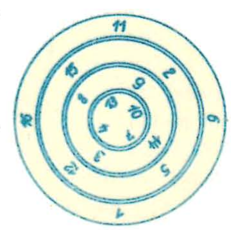
Vervollständige den Würfel durch Einsetzen der fehlenden Zahlen! (Von den Flächendiagonalen weisen nur die sechs in den drei aufeinander senkrecht stehenden mittleren Quadrate die Summe 42 auf!)

Dipl.-Hütteningenieur K. Oertel, Zschornewitz (Bez. Halle)

Zahlenscheibe

Die einzelnen Kreisringe sind so zu drehen, daß vier Zahlen übereinander zu stehen kommen, deren Summe 34 beträgt.

aus: „Füles", Budapest



Eine interessante Zahl

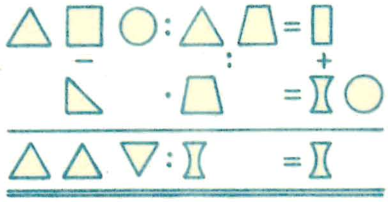
Übersetze folgende mathematischen Termini aus dem Russischen ins Deutsche:

1. Множество	4. Логарифм
2. Характер	5. Ось обсцисс
3. Одночлен	6. произвольный

Die Anfangsbuchstaben der ins Deutsche übersetzten Wörter von oben nach unten gelesen ergeben eine interessante Zahl.

Mathematikfachlehrer S. Gottesmann, Tschernowzy, UdSSR

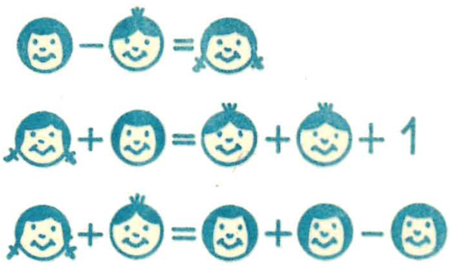
Figurenrätsel



Elke Raubach, Pestalozzi-OS, Karl-Marx-Stadt (Kl. 8)

Pfiffige Mädchen

Sieh dir die drei Mädchen an! Wenn du für die gleichen Mädchenköpfe stets die gleichen Ziffern einsetzt, erhältst du die Lösungen.



Für alpha aus „Die Trommel" ausgewählt von René Brunsch, Wüstenbrand, Bez. Karl-Marx-Stadt (Kl. 5)

Mathematische Begriffe

1. bekannter ital. Mathematiker (1175 bis 1250)
2. wichtiger Begriff der Differentialrechnung
3. einfachste Kurve
4. Beruf, der immer mehr an Bedeutung gewinnt
5. Darstellung einer Funktion
6. griechischer Mathematiker
7. eine „Berührende"
8. Anschauungsmittel
9. bekannter Satz von Viëta
10. berühmter deutscher Mathematiker (1777 bis 1855)
11. Ergebnis einer Aufgabe
12. Satz der Trigonometrie
13. Kongruenztransformation
14. Rechenoperation
15. Mathematischer Körper

Notiere die 15 gefundenen Begriffe! Die dritten Buchstaben ergeben, von oben nach unten gelesen, den Namen eines bekannten englischen Mathematikers und Philosophen, der in diesem Jahr starb.

Oberlehrer H. Pätzold, Waren/Müritz

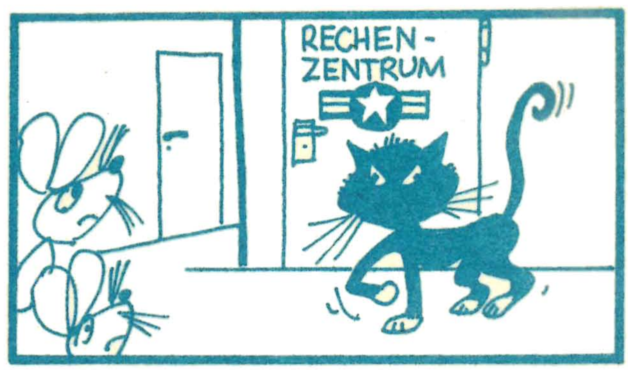
1970

Unter Benutzung von Rechen- und Vorzeichen sollen die angegebenen Ziffern in dieser Reihenfolge zu Termen verbunden werden, welche die ganzen Zahlen von 0 bis 20 darstellen. Zwischen je zwei Ziffern soll mindestens ein mathematisches Zeichen stehen. Erlaubt sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und das Quadratwurzelziehen. Außerdem darf das Klammersymbol [ ] verwendet werden. Dabei bedeute $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist; z. B. ist $[1{,}5]=1$, $[-1{,}5]=-2$, $[\pi]=3$.
Zusatzfrage: Für welche Zahlen ist die Verwendung der oben genannten Klammer notwendig?
Welche ist die größte derart darstellbare Zahl?
(Beispiel: $4=1+\sqrt{9}+7\cdot 0$; $2=1\cdot 9-7-0$)

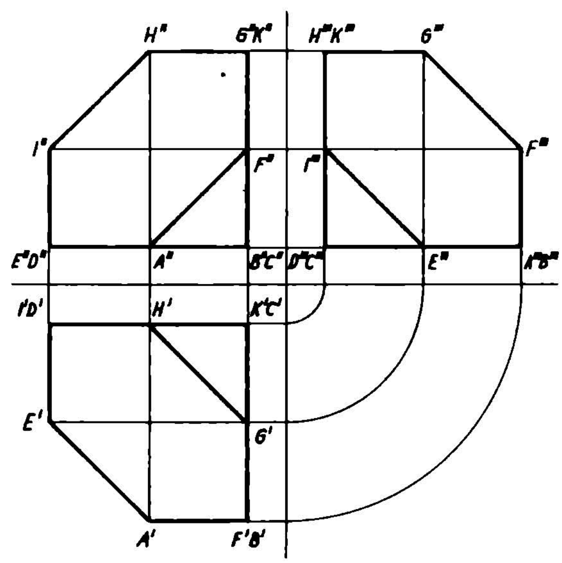
Ottmar Langer, EOS Lessing, Döbeln (Kl. 10)

Ein Kater

schützt im Auftrage des amerikanischen Raketenkonzerns *Lockhead Propulsion Corp.* die elektronischen Kontrollgeräte vor Mäusen, die vorher durch das Zerbeißen von Drähten Schaden von mehreren tausend Dollar verursacht haben.



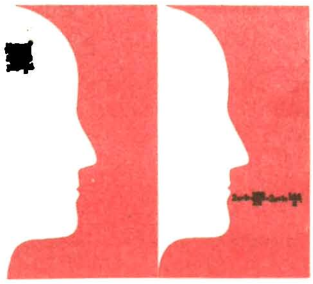
Restkörper gesucht



Die Abbildung zeigt einen konvexen Körper, der durch ebene Flächen begrenzt ist, im Grund-, Auf- und Kreuzriß.
Baue einen solchen Körper! Viel Erfolg wünscht

Mathematikfachlehrer Adolf Marquardt, Kühlungsborn

Mathematische Wettbewerbe in Schweden



Mathematik-Wettbewerbe für Schulen werden seit 1961 jährlich von der *Schwedischen Mathematischen Gesellschaft* und der Zeitung *Svenska Dagbladet* für Schüler der oberen Klassen der Gymnasien (entspricht unseren EOS) ausgetragen.
Der Wettbewerb findet jedes Jahr in zwei Runden statt, einer Qualifikationsrunde, an der Tausende von Schülern teilnehmen, und einer Endrunde für die 12 bis 15 besten Schüler. (Die Qualifikationsrunde ist gleichzeitig ein Mannschaftswettbewerb für Dreiermannschaften.)
Der Zweck des Wettbewerbs ist nicht in erster Linie eine Wissensprüfung, sondern es soll versucht werden, die Schüler für die Mathematik zu interessieren — nicht nur für die Schulmathematik — indem man ihnen Aufgaben stellt, die ihre mathematische Phantasie und ihr Vermögen zum logischen Denken anregen. Die Aufgaben unterscheiden sich daher wesentlich von den Aufgaben, die bei den Klassenarbeiten und in den Lehrbüchern der Oberschulen vorkommen. Diese müssen ja aus ganz natürlichen Gründen normbetont sein. Die Aufgaben wurden auch so gewählt, daß der Oberschüler, der vielleicht im Universitätslehrbuch gelesen hat, nicht allzu viel Hilfe durch die Kenntnis haben soll, die er sich dabei erworben hat. Aber er hat natürlich einen Nutzen durch die Erfahrungen und die Übung bei mathematischen Gedankengängen, die er sich verschafft hat. Bei bestimmten Aufgaben wird der Lösende in eine Situation versetzt, die für einen großen Teil der mathematischen Forschung typisch ist, dadurch, daß er sich in gewissem Maße die Aufgaben selbst stellen kann. In einigen Fällen kann die Problemstellung verallgemeinert oder Voraussetzungen können variiert werden, so daß neue Probleme entstehen. Auch das ist typisch für mathematische Forschung.

Wie werden Probleme gelöst? Hierüber ist viel geschrieben worden, besonders von dem ungarisch-amerikanischen Mathematiker *G. Polya*. Zuerst muß man einmal das Problem verstehen. Das klingt selbstverständlich, muß aber doch immer wieder betont werden. Man muß tatsächlich in das Problem eindringen, nachdenken, was gegeben ist, was man sieht, was es an Voraussetzungen gibt, die die Schlußfolgerung glaubhaft machen.
Der nächste Schritt müßte sein, daß man das Problem mit früherem Erfahrungsmaterial vergleicht. Man kennt einen Satz, der mit dem Problem zu tun hat, oder man hat vielleicht früher schon ein Problem gelöst, das an das vorliegende erinnert. Es ist oftmals ratsam, mit dem Studieren von einfachen Fällen zu beginnen. Wenn ein Problem in drei oder mehr Dimensionen angegeben ist, kann es sich vielleicht lohnen, es in ein oder zwei Dimensionen zu studieren. Wenn ein Problem Dreiecke betrifft, kann man damit beginnen, zu sehen, was bei gleich-dreiseitigen oder gleichschenkligen Dreiecken geschieht. Vielleicht kommt man so zu einer Lösung, die auch im allgemeinen Fall Gültigkeit hat, oder zumindest zu weiterer Arbeit anregt.
Es verdient, daß man darauf hinweist, daß mathematische Problemlösungen (und Forschungen) oftmals eine ganz experimentelle Beschäftigung sind. Man „prüft sich vorwärts", untersucht verschiedene Spezialfälle, studiert Analogien, und auf diese Art schafft man sich mehr oder weniger plausible Grundlagen, um auf einen bestimmten Schlußsatz zu bauen. Der logisch unantastbare Gedankengang kommt in einem späteren Stadium und der fertige Beweis kann sich ganz wesentlich von dem Gedankengang unterscheiden, der zuvor zur Lösung führte.
Wenn man auf eine Methode kommt, um ein Problem zu lösen, sollte man sie in allen Einzelheiten ordentlich durchführen, und nachträglich noch einmal jede Stufe durchgehen, um zu kontrollieren, daß sie richtig ist. Zur weiteren Kontrolle kann man eventuelle andere Konsequenzen des Gedankenganges untersuchen und sehen, ob diese wahrscheinlich sind.
Zum Schluß sollte man seine Lösung durchdenken, versuchen, sie in ihrer Gesamtheit zu verstehen, sehen, ob man das Ziel nicht auf eine kürzere und einfachere Art erreichen kann. Man sollte sich auch fragen: kann die Methode auch angewandt werden, um etwas anderes zu beweisen? Kann ich das Ergebnis verallgemeinern? Was geschieht, wenn ich die Voraussetzung auswechsle?
Es ist natürlich sehr anregend zu versuchen, das Problem mit anderen Kameraden zu lösen. Zahlreiche Aufgaben dürften auch Material für Diskussionen in mathematischen Zirkeln der Schulen geben können.

Lars Inge Hedberg
Stark gekürztes Vorwort zu dem Buch (Aufgabensammlung): Travelingsproblem i matematik Bokförlaget Prima Stockholm 1969

Seit drei Jahren nimmt eine schwedische Mannschaft an den Internationalen Mathematikolympiaden teil. Wir haben mit diesem Beitrag unseren Lesern einen Einblick in einen Teil außerunterrichtlicher Arbeit im Fach Mathematik geboten. Wir danken Herrn Prof. Dr. *Ake H. Samuelsson*, Chalmers University of Technology and University of Göteborg für die Übersendung dieses Informationsmaterials. Die Aufgaben der 1. Stufe des Wettbewerbs 1969 lauteten:

Qualifikationsrunde (1. Stufe — 16. 10. 1969)

▪ 1 ▪ In einer normalen schwedischen Schulklasse waren 21.7% der Schüler rothaarig, wobei nach den Rundungsvorschriften korrekt auf volle Zehntel Prozent gerundet worden ist.
Kann man daraus mit Sicherheit schließen, wieviel Schüler in der Klasse waren?
(Unter einer „normalen schwedischen Schulklasse" sei eine Klasse zu verstehen, die nicht mehr als 40 Schüler hat.)

▪ 2 ▪ Wieviel n-dimensionale Vektoren $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit x_i gleich 0 oder 1 gibt es, so daß die Zahl

$$x_1+b_2x_2+b_3x_3+\ldots+b_nx_n$$

eine ungerade ganze Zahl ist?
Dabei sind die Zahlen b_i ($i=2, 3, \ldots, n$) gegebene ganze Zahlen.

▪ 3 ▪ Es seien a, b und c drei reelle Zahlen mit $a^2+b^2+c^2=1$.
Man beweise, daß dann stets

$$-\frac{1}{2}\leqq ab+bc+ac\leqq 1 \text{ gilt.}$$

Man beweise ferner, daß es sowohl solche Zahlen a, b, c gibt, so daß

$$ab+bc+ac = -\frac{1}{2},$$

als auch solche, so daß

$ab+bc+ac = 1$ gilt, wobei in beiden Fällen wieder die Bedingung

$a^2+b^2+c^2 = 1$ erfüllt sein soll.

▪ 4 ▪ Gegeben sei die Menge aller ganzzahligen Punkte der Ebene, d. h. die Menge aller Punkte (p,q), deren Koordinaten im rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem ganze Zahlen sind.
Eine Partikel kann sich zwischen diesen Punkten bewegen, jedoch nur so, daß sie von einem beliebigen Punkt (p,q) zu dem Punkt $(p+1, q+1)$ oder zu dem Punkt $(p+1, q-1)$ gelangen kann.

Fortsetzung siehe Seite 95!

Lösungen

▲ 509 Jeder kleine Würfel habe die Kantenlänge a; dann besitzt der große Würfel die Kantenlänge $4a$.
Rauminhalt des großen Würfels: $V_1 = 64a^3$
Rauminhalt eines kleinen Würfels: $V_2 = \quad a^3$
Aus dem großen Würfel erhält man 64 kleinere Würfel
Oberfläche des großen Würfels: $O_1 = 96a^2$
Oberfläche eines kleineren Würfels: $O_2 = 6a^2$
Gesamtoberfläche aller kleinen Würfel: $O_3 = 384a^2$
Wegen $384 : 96 = 4$ ist die Gesamtoberfläche aller kleineren Würfel viermal so groß, wie die des großen Würfels.

▲ 510 Aus $100 - 41 = 59$ und $96 - 59 = 37$ und $41 - 37 = 4$ folgt: der Großvater ist 59, der Vater 37 und der Sohn 4 Jahre alt.

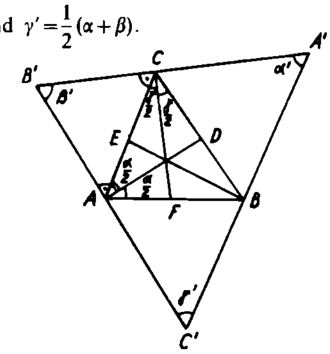
▲ 511 Die Zahl 255 läßt sich durch 1, 3, 5, 15, 17, 51, 85 und 255 teilen. Nur die Teiler 5, 15 und 17 sind größer als 4 und kleiner als 20, $255 : 5 = 51$; $255 : 15 = 17$; $255 : 17 = 15$
Die Aufgabe besitzt genau drei Lösungen: Es könnten 51 Hefte zu 5 Pf oder 17 Hefte zu 15 Pf oder 15 Hefte zu 17 Pf das Stück gewesen sein.

▲ 512 Aus $140 - 38 = 102$ und $102 : 2 = 51$ folgt, daß sich unter den Anwesenden 51 Kinder und wegen $140 - 51 = 89$ demnach 89 Erwachsene befanden. Aus $89 - 7 = 82$ und $82 : 2 = 41$ folgt, daß sich die Erwachsenen aus 41 Frauen und wegen $89 - 41 = 48$ aus 48 Männern zusammensetzen.

▲ 513 $z = \frac{n+17}{n-3} = \frac{n-3+20}{n-3} = 1 + \frac{20}{n-3}$;
da z eine natürliche Zahl sein soll, muß 20 Vielfaches von $n-3$ sein, und $\frac{20}{n-3}$ muß gleich oder größer als -1 sein. Nun ist $\frac{20}{n-3} = -1$ für $n = -17$.
Diese Zahl entspricht aber, weil sie negativ ist, nicht den Bedingungen der Aufgabe. Daher erfüllen nur die in der folgenden Tabelle angegebenen natürlichen Zahlen n die Bedingungen der Aufgabe. (Beginne mit $n = 4$!)

n	4	5	7	8	13	23
z	21	11	6	5	3	2

▲ 514 $\sphericalangle ACB'$ und $\frac{\gamma}{2}$ sind Komplementwinkel, also gilt $\sphericalangle ACB' = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Analog ergibt sich $\sphericalangle CAB' = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Unter Anwendung des Satzes über die Winkelsumme des Dreiecks folgt hieraus für das Dreieck ACB' $\beta' = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$. Anlog erhält man $\alpha' = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ und $\gamma' = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.



▲ 515 Vor dem Lösen der Aufgabe fertigen wir uns die abgebildete Tabelle an, in deren Rahmen wir untereinander die Nachnamen der Herren und nebeneinander die Vornamen der Damen eintragen. In die verbleibenden Leerfelder tragen wir danach „nein" ein, wenn wir mit Sicherheit wissen, daß der betreffende Herr mit der betreffenden Dame nicht verheiratet ist. Aus dem vierten Satz der Aufgabe folgt:
Herr Anders ist weder mit Inge noch mit Luise verheiratet, Herr Frey ist weder mit Maria noch mit Luise verheiratet, Herr Göbel ist weder mit Inge noch mit Nora verheiratet, Herr Conrad ist nicht mit Inge verheiratet, Herr Dahlke nicht mit Luise und Herr Ebert nicht mit Nora.
Aus dem 6. Satz der Aufgabe folgt:
Herr Conrad ist weder mit Nora noch mit Olga verheiratet, Herr Anders ist weder mit Nora noch mit Olga verheiratet.
Aus dem 7. Satz der Aufgabe folgt:
Herr Dahlke ist weder mit Nora noch mit Olga verheiratet, Herr Frey ist weder mit Nora noch mit Olga verheiratet.
Aus dem 8. Satz der Aufgabe folgt:
Herr Dahlke ist weder mit Hilde noch mit Inge verheiratet, Herr Frey ist weder mit Hilde noch mit Inge verheiratet.
In der Spalte „Nora" sind nun sechs Felder mit „nein" ausgefüllt; in das noch leere zweite Feld von oben dieser Spalte tragen wir „ja" ein. Alle leeren Felder der Zeile „Bauer" müssen dann durch „nein" gekennzeichnet werden. In der Zeile „Frey" ist nur noch das dritte Feld von links leer; wir tragen „ja" ein. In alle leeren Felder der Spalte „Karin" ist danach „nein" einzutragen. In das einzige freie fünfte Feld von oben der Spalte „Inge" tragen wir „ja" ein. In die noch leeren Felder der Zeile „Ebert" ist wieder „nein" einzutragen. Dieses Verfahren setzen wir fort, bis alle Felder ausgefüllt sind; die ausgefüllte Tabelle sieht dann wie folgt aus:
Der ausgefüllten Tabelle ist zu entnehmen, daß Herr Anders mit Hilde, Herr Bauer mit Nora, Herr Conrad mit Luise, Herr Dahlke mit Maria, Herr Ebert mit Inge, Herr Frey mit Karin und Herr Göbel mit Olga verheiratet ist.

▲ 516 Die 100 Murmeln seien an x Schüler aufgeteilt worden; der erste Schüler habe y Murmeln erhalten. Dann hat
der zweite Schüler $(y+1)$ Murmeln,
der dritte Schüler $(y+2)$ Murmeln,
der vierte Schüler $(y+3)$ Murmeln erhalten und so fort.
In der folgenden Tabelle ist jeder Schülerzahl die Anzahl der Murmeln zugeordnet:

Schülerzahl	Anzahl der Murmeln
1	y
2	$2y+1$
3	$3y+3$
4	$4y+6$
5	$5y+10$
6	$6y+15$
7	$7y+21$
8	$8y+28$
9	$9y+36$
10	$10y+45$
11	$11y+55$
12	$12y+66$
13	$13y+78$

Nur die Gleichung $5y + 10 = 100$ und $8y + 28 = 100$ haben eine Lösung. Für die erste Gleichung erhalten wir $y = 18$, für die zweite $y = 9$. Aus $18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100$ und $9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 100$ folgt, daß die Murmeln entweder unter fünf oder unter acht Schülern aufgeteilt wurden.

▲ 517 Die Summe der Flächeninhalte der n Kreisscheiben mit dem Radius $r = 1$ cm ist kleiner als der Flächeninhalt des Kreises mit dem Radius $R = 1$ km. Also gilt:
$n\pi r^2 < \pi R^2$, $nr^2 < R^2$, $n \cdot (1\text{ cm})^2 < (1\text{ km})^2$,
$n\text{ cm}^2 < (100\,000\text{ cm})^2$, $n < 100\,000^2$,
$n < 10\,000\,000\,000$.
Als obere Schranke für n kann daher die Zahl $N = 10^{10}$ gewählt werden.

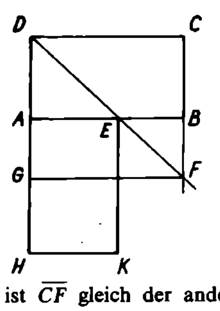
	Hilde	Inge	Karin	Luise	Maria	Nora	Olga
Anders	ja	nein	nein	nein	nein	nein	nein
Bauer	nein	nein	nein	nein	nein	ja	nein
Conrad	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein
Dahlke	nein	nein	nein	nein	ja	nein	nein
Ebert	nein	ja	nein	nein	nein	nein	nein
Frey	nein	nein	ja	nein	nein	nein	nein
Göbel	nein	nein	nein	nein	nein	nein	ja

▲ 518 $70\frac{\text{km}}{\text{h}}=\frac{70\,000\text{ m}}{3\,600\text{ s}}\approx 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$; da ein Strauß bei großer Gefahr in einer Sekunde rund 20 m zurücklegt, macht er wegen $20:4=5$ in der Sekunde 5 Schritte von 4 m Länge.

▲ 519 Aus $(a, b)=4$ folgt $a=n\cdot 4$ für $n=1, 2, 3, \ldots$; aus $(a, c)=6$ folgt
$a=k\cdot 6$ für $k=1, 2, 3, \ldots$.
Nun sind $n=3$ und $k=2$ die kleinsten Zahlen, die diese Gleichungen erfüllen, also $a=12$.
Aus $(a, b)=4$ folgt $b=p\cdot 4$ und aus $(b, c)=10$ folgt $b=q\cdot 10$. Wegen $p=5$ und $q=2$ gilt $b=20$.
Aus $(a, c)=6$ folgt $c=r\cdot 6$ und aus $(b, c)=10$ folgt $c=s\cdot 10$. Wegen $r=5$ und $s=3$ gilt $c=30$.
Die kleinsten von Null verschiedenen natürlichen Zahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen, sind 12, 20 und 30.

▲ 520 Aus $abc=5(a+b+c)$ und
$b-a=c-b$ folgt durch Substitution
$ab(2b-a)=15b$. Diese Gleichung ist erfüllt für $b=0$. Dann ist aber auch $a=0$ und $c=0$, weil $a+b+c=0$ ist. Eine Lösung bildet daher das Zahlentripel (0, 0, 0); es gilt $0\cdot 0\cdot 0=5(0+0+0)$.
Ist $b\neq 0$, so erhalten wir aus $ab(2b-a)=15b$ nach Division durch b die Gleichung
$a(2b-a)=15$. Man erhält also, weil a ein Teiler von 15 sein muß,
$a=1,\quad 2b-a=15,\quad b=8,\quad c=15;$
$a=3,\quad 2b-a=5,\quad b=4,\quad c=5;$
$a=5,\quad 2b-a=3,\quad b=4$
$a=15,\quad 2b-a=1,\quad b=8.$
Die beiden letzten Lösungen entfallen, da $a\leqq b$ sein muß. Wir erhalten daher nur noch die weiteren beiden Lösungen
(1, 8, 15), und es gilt $1\cdot 8\cdot 15=5(1+8+15)$;
(3, 4, 5), und es gilt $3\cdot 4\cdot 5=5(3+4+5)$.

▲ 521 Wir zeichnen die Verbindungsgerade der Punkte D und E, verlängern die Strecke $\overline{CB}$ über B hinaus und erhalten den Schnittpunkt F (vgl. die Abb.).



Dann ist $\overline{CF}$ gleich der anderen Seite des gesuchten Rechtecks, das dem ursprünglichen Rechteck $ABCD$ flächengleich ist.
Zeichnen wir nämlich durch F zu AB die Parallele, die die Verlängerung von $\overline{DA}$ in G schneidet, so gilt nach dem Strahlensatz
$\overline{AE}:\overline{GF}=\overline{DA}:\overline{DG}$,
also wegen $\overline{GF}=\overline{AB}$, $\overline{DA}=\overline{BC}$, $\overline{DG}=\overline{CF}$
$\overline{AE}:\overline{AB}=\overline{BC}:\overline{CF}$,
d. h. $\overline{AE}\cdot\overline{CF}=\overline{AB}\cdot\overline{BC}$.
Das ursprüngliche Rechteck $ABCD$ ist also dem Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AE}$ und $\overline{CF}$ flächengleich. Dieses Rechteck $AHKE$ ist zur Veranschaulichung in der beigefügten Abb. noch einmal gezeichnet worden.
Wir bemerken noch, daß die Konstruktion der Seite $\overline{CF}$ allein mit dem Lineal (ohne Benutzung des Zirkels) möglich war. Hätten wir zur Konstruktion wie üblich den Höhensatz benutzt, so wäre zur Konstruktion auch die Benutzung des Zirkels notwendig gewesen.

▲ 522 Da sowohl $m+n$ als auch $m-n$ durch die Primzahl p teilbar ist, ist auch die Summe $(m+n)+(m-n)=2m$ sowie die Differenz $(m+n)-(m-n)=2n$ durch p teilbar.
Ist nun $p=2$, so ist diese Bedingung erfüllt.
Wäre aber $p\neq 2$, so wären $2m$ und $2n$ —, also auch m und n, durch p teilbar; die Zahlen m und n hätten also den gemeinsamen Teiler p, was der Voraussetzung widerspricht, wonach die Zahlen m und n teilerfremd sind.
Damit ist bewiesen, daß $p=2$ gilt.
Zur Veranschaulichung geben wir noch ein Beispiel:
Es sei $m=35$, $n=9$. Dann sind diese Zahlen teilerfremd, und ihre Summe 44 sowie ihre Differenz 26 sind durch die Primzahl 2 teilbar. Jedoch sind die Zahlen 44 und 26 durch keine andere Primzahl gleichzeitig teilbar.

▲ 523 Einer der Brüder erhalte x_1 volle, y_1 halbvolle und z_1 leere ...
Ein anderer der Brüder erhalte x_2 volle, y_2 halbvolle und z_2 leere ...
Der dritte Bruder erhalte x_3 volle, y_3 halbvolle und z_3 leere ...
Fässer.
An jeden Bruder sind nach den Bedingungen der Aufgabe
$\frac{5+11+8}{3}=\frac{24}{3}=8$ Fässer und
$\frac{1}{3}\left(5+\frac{11}{2}\right)=\frac{21}{2\cdot 3}=\frac{7}{2}$ Faß Wein zu verteilen.
Man erhält daher die folgenden Gleichungen:

$$x_1+y_1+z_1=8, \quad (1)$$
$$x_2+y_2+z_2=8, \quad (2)$$
$$x_3+y_3+z_3=8, \quad (3)$$
$$x_1+x_2+x_3=5, \quad (4)$$
$$y_1+y_2+y_3=11, \quad (5)$$
$$z_1+z_2+z_3=8. \quad (6)$$

Ferner folgt aus $x_1+\frac{y_1}{2}=\frac{7}{2}$, $x_2+\frac{y_2}{2}=\frac{7}{2}$, $x_3+\frac{y_3}{2}=\frac{7}{2}$

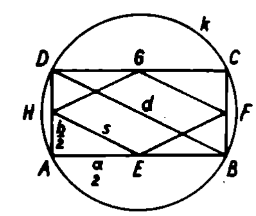
$$y_1=7-2x_1, \quad (7)$$
$$y_2=7-2x_2, \quad (8)$$
$$y_3=7-3x_3. \quad (9)$$

Dabei sind x_i, y_i, z_i natürliche Zahlen.
Aus (7) und (1) folgt $x_1+7-2x_1+z_1=8$,
also $z_1-x_1=1$ (10)
und analog aus (8) und (2) bzw. (9) und (3)

$$z_2-x_2=1 \quad (11)$$
$$z_3-x_3=1. \quad (12)$$

Wegen (7) gilt, da $y_i\geqq 0$, $0\leqq x_1\leqq 3$
und analog $0\leqq x_2\leqq 3$
$0\leqq x_3\leqq 3$.
O.B.d.A. können wir nun $x_1\leqq x_2\leqq x_3$ annehmen. Wir erhalten dann wegen (4) die folgenden drei Möglichkeiten:
1) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=3$;
2) $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=3$;
3) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=2$.
Aus (7), (8), (9) erhalten wir dann die Werte für z_1, z_2, z_3 und aus (10), (11), (12) die Werte für x_1, x_2, x_3, die die Tabelle zeigt (s. unten).
Durch Einsetzen in die Gleichungen (1) bis (9) überzeugen wir uns davon, daß in diesen drei Fällen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.
Es gilt daher *genau drei verschiedene Möglichkeiten* der Verteilung der Fässer:

▲ 524 Wir führen zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen für die Streckenlängen ein:
$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BD}=d$, $\overline{EH}=s$ (vgl. die Abb.).



Da der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ gleichzeitig der Mittelpunkt des Kreises k und der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$ ist, ist d gleich dem Durchmesser des Kreises k, und es gilt nach dem Satz des Pythagoras
$d^2=a^2+b^2$. Ferner sind die rechtwinkligen Dreiecke AEH, BFE, CGF, DHG kongruent, da sie jeweils in den Längen der Katheten übereinstimmen.
Daraus folgt $\overline{EH}=\overline{FE}=\overline{GF}=\overline{HG}=s$.

	x_1	x_2	x_3	$x_1+x_2+x_3$	y_1	y_2	y_3	$y_1+y_2+y_3$	z_1	z_2	z_3	$z_1+z_2+z_3$
1)	0	2	3	5	7	3	1	11	1	3	4	8
2)	1	1	3	5	5	5	1	11	2	2	4	8
3)	1	2	2	5	5	3	3	11	2	3	3	8

	Fall 1)			Fall 2)			Fall 3)		
	volle F.	halbv. F.	leere F.	volle F.	halbv. F.	leere F.	volle F.	halbv. F.	leere F.
Einer der Brüder erhält	0	7	1	1	5	2	1	5	2
Ein anderer Bruder erhält	2	3	3	1	5	2	2	3	3
Der dritte Bruder erhält	3	1	4	3	1	4	2	3	3
Summe	5	11	8	5	11	8	5	11	8

Der Umfang des Vierecks $EFGH$ ist also gleich $4s$. Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras in dem Dreieck AEH

$s^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$ und wegen

$d^2=a^2+b^2$

$s^2=\frac{d^2}{4}$, also $s=\frac{d}{2}$, $4s=2d$.

Der Umfang des Vierecks $EFGH$ ist also stets gleich dem doppelten Durchmesser des Kreises k, er ist daher für alle dem Kreis k einbeschriebenen Rechtecke gleich groß, w.z.b.w.

▲ 525 Wir formen zunächst um und erhalten

$$\begin{aligned} z&=p^6+3p^2-3p^4-1\\ &=p^6-p^4-2p^4+2p^2+p^2-1\\ &=p^4(p^2-1)-2p^2(p^2-1)+(p^2-1)\\ &=(p^2-1)(p^4-2p^2+1)\\ &=(p+1)(p-1)(p^2-1)^2,\\ z&=(p-1)^3(p+1)^3. \end{aligned}$$

Ferner erhalten wir die folgende Zerlegung in Primfaktoren

$13\,824=8\cdot 8\cdot 8\cdot 27=8^3\cdot 3^3=2^9\cdot 3^3$.

Ist nun $p=2$, so ist $p-1=1$, $p+1=3$, also $z=3^3$. In diesem Falle ist also z nicht durch 13 824 teilbar. *Ist* $p=3$, so ist $p-1=2$, $p+1=4$, also $z=2^3\cdot 4^3$. Auch in diesem Falle ist also z nicht durch 13 824 teilbar.

Ist aber $p>3$, so ist p als Primzahl nicht durch 3 teilbar. Daher ist entweder die vorhergehende Zahl $p-1$ oder die folgende Zahl $p-1$ durch 3 teilbar, also entweder $(p-1)^3$ oder $(p+1)^3$ durch 3^3 teilbar.

Da p eine Primzahl ist, läßt p bei Division durch 4 entweder den Rest 1 oder den Rest 3, also ist entweder

$p-1$ durch 4 und $p+1$ durch 2 teilbar oder $p-1$ durch 2 und $p+1$ durch 4 teilbar.

In jedem Falle ist also $(p-1)(p+1)$ durch 8 teilbar, also $z=(p-1)^3(p+1)^3$ ist durch $8^3=2^9$ teilbar.

Daraus folgt aber, daß im Falle $p>3$ die Zahl z stets durch $3^3\cdot 2^9=13\,824$ teilbar ist.

Die Zahl $z=p^6+3p^2-3p^4-1$ ist also nur für $p=2$ und $p=3$ nicht durch 13 824 teilbar.

▲ 526 Es seien x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 die Anzahl der Goldmedaillen, die die DDR, die UdSSR, Großbritannien, Frankreich bzw. Polen erhielten. Dann gelten auf Grund der Bedingungen der Aufgabe die folgenden Gleichungen:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=31, \quad (1)$$
$$x_1=x_3+x_4+x_5, \quad (2)$$
$$x_2=x_3+x_4, \quad (3)$$
$$x_3=2x_4. \quad (4)$$

Ferner gilt $x_1>x_2>x_3>x_4>x_5$ (5)

Aus (1) und (2) folgt

$x_1+x_2+x_1=31$, also $2x_1+x_2=31$. (6)

Hieraus folgt wegen $x_2<x_1$

$31=2x_1+x_2<3x_1$, also $x_1>10$

und $2x_1<31$, also $x_1\leqq 15$.

Wir erhalten also die folgenden Fälle:

1. $x_1=11$, $x_2=31-2x_1=9$;
2. $x_1=12$, $x_2=31-2x_1=7$;
3. $x_1=13$, $x_2=31-2x_1=5$;
4. $x_1=14$, $x_2=31-2x_1=3$;
5. $x_1=15$, $x_2=31-2x_1=1$.

Nun folgt aus (3) und (4) $x_2=2x_4+x_4=3x_4$, d. h., x_2 ist durch 3 teilbar.

Daher scheiden die *Fälle 2, 3 und 5* aus.

Im *Falle 4* wäre $x_1=14$, $x_2=3x_4=3$, also $x_4=1$ und $x_3=2x_4=2$. Daraus würde wegen (1) folgen

$$x_5=31-x_1-x_2-x_3-x_4=11,$$

was wegen $x_5<x_4$ zu einem Widerspruch führt.

Daher kann nun der Fall 1 eintreten; wir erhalten $x_1=11$, $x_2=9$, $x_4=3$, $x_3=6$, $x_5=31-29=2$.

Für diese Zahlen sind die Gleichungen (1), (2), (3), (4) und die fortlaufende Ungleichung (5), also die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Daher erhielten die DDR 11, die UdSSR 9, Großbritannien 6, Frankreich 3 und Polen 2 Goldmedaillen.

Lösungen zu alpha-heiter

Halma-Solo

1) 1. c3–d4. 2. a1–c3–e5. 3. b1–d3–d5–f5. 4. a4–c4–e4–e6. 5. c1–e3. 6. d1–d3–d5. 7. a3–c5. 8. a2–c4–c6. 9. b4–d6–f6. 10. b2–b4–d6. 11. b3–d1–d3–f3. 12. c2–e2–e4. 13. d2–f4.

2) 1. c3–d4. 2. a1–c3–e5. 3. a4–c4–e4–e6. 4. d1–d3–d5–f7. 5. a3–c5. 6. b4–d6–f6–f8. 7. e6–g8–e8–g6. 8. a2–c4–e4–e6–g8–e8. 9. b1–d3–d5–f5–h7. 10. b2–b4–d6. 11. c5–e7–g7–g5. 12. c1–e3. 13. b3–d1–d3–d5–f5–h5. 14. c2–e2–e4–e6–g8. 15. d2–f4–h6–h8. 16. e3–c5–e7–g7. 17. d6–e7 usw.

Magischer Würfel

Die Elemente $b_3=42-(13+2)=27$, $a_3=3$, $c_3=25$, $b_4=1$, $b_1=5$, $b_5=10$, $b_2=19$, $b_6=9$ und $a_5=22$ sind nacheinander mit Hilfe der Reihensumme als Elemente einer waagerechten, senkrechten oder diagonalen Reihe leicht zu finden.

Damit sind die Felder besetzt bis auf die vier Eckfelder der beiden äußeren Quadrate.

Die fehlenden acht Zahlen bilden vier Paare mit der Summe 28, nämlich 4, 24; 7, 21; 8, 20; 12, 16.

Für die Körperdiagonalen gilt auch die Reihensumme 42. Mithin

$a_1+14+s_6=a_2+14+c_5\;3a_4+14+c_2$
$=a_6+14+c_1=42$

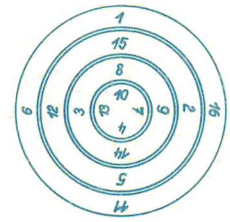
$a_1+c_6=a_2+c_5=a_4+c_2=a_6+c_1=28$

Da $a_1+a_2=42-17=25$ (waager. Reihe im linken Quadrat) sein muß, kann nur $a_1=21$ und $a_2=4$ sein. Damit folgt $c_6=28-a_1=7$ und $c_a=28-a_2=24$; ferner $a_4=42-(13+a_1)=8$, $a_6=42-(26+a_2)=12$, $c_2=28-a_4=20$ und $c_1=28-a_6=16$.

Die nachfolgende Abbildung zeigt den vervollständigten magischen Würfel, in dem alle waagerechten, senkrechten, körperdiagonalen, sowie die flächendiagonalen Reihen der drei aufeinander senkrecht stehenden mittleren Flächen gleich 42 sind.

21	17	4	5	19	18	16	6	20
13	3	26	27	14	1	2	25	15
8	22	12	10	9	23	24	11	7

Zahlenscheibe



Eine interessante Zahl

1. Menge
2. Charakter (moderner Begriff aus der Mengenlehre)
3. Monom
4. Logarithmus
5. x-Achse
6. x-beliebig

MCMLXX → 1970

Figurenrätsel

120	:	15	=	8
—	:	+		
6		5		30
114	:	3	=	38

Pfiffige Mädchen

=5 =3 =2

$5-3=2$
$2+5=3+3+1$
$2+3=5+5-5$

Mathematische Begriffe

Fibonacci — Grenzwert — Gerade — Mathematiker — Kurve — Thales — Tangente — Modell — Wurzelsatz — Gauß — Lösung — Kosinussatz — Drehung — Multiplikation — Zylinder = BERTRAND RUSSELL

1970

Lösungsbeispiele

$0=1\cdot 9\cdot 7\cdot 0$
$1=1+9\cdot 7\cdot 0$
$2=1\cdot 9-7-0$
$3=1+9-7-0$
$4=1+\sqrt{9}+7\cdot 0$
$5=1+\sqrt{9+7}+0$
$6=-1+9-[\sqrt{7}]+0$
$7=1\cdot 9-[\sqrt{7}]+0$
$8=-1+9+7\cdot 0$
$9=1\cdot 9+7\cdot 0$
$10=1+9+7\cdot 0$
$11=1+\sqrt{9}+7+0$
$12=1+9+[\sqrt{7}]+0$
$13=1+9-[-\sqrt{7}]+0$
$14=[\sqrt{-1+9}]\cdot 7+0$
$15=-1+9+7+0$
$16=1\cdot 9+7+0$
$17=1+9+7+0$
$18=1\cdot 9\cdot[\sqrt{7}]+0$
$19=1+9\cdot[\sqrt{7}]+0$
$20=-1+\sqrt{9}\cdot 7+0$

Zur Darstellung der Zahlen 5; 7; 12; 13; 14; 18; 19 benötigt man unbedingt die Klammer

Größte Zahl: $64=1+9\cdot 7+0$

Abschlußprüfung im Fach Mathematik der Primary School in Tanzania

speziell für Klasse 5 und 6

Etwa zwei Fünftel aller Kinder in Tanzania haben die Möglichkeit, eine Schule zu besuchen. Entsprechend dem Plan der Regierung steigt die Zahl der Schüler in jedem Jahr. Jedoch fehlen eine große Zahl von Lehrern und Schulgebäuden. Das kann nur ganz systematisch und schrittweise verändert werden. Z. Z. sieht es noch so aus, daß die Eltern für die ersten sieben Schuljahre — die *Primary School* — zu zahlen haben. Es gibt wenige Schulen im Lande, an denen der Besuch kostenlos ist. — Der größte Teil dieser *Primary Schools* sind Tagesschulen, d. h. die Schüler kommen morgens gegen 8.00 Uhr in die Schule und verlassen sie gegen 17.00 Uhr. Manchmal haben Schüler 10 km und mehr Schulweg zurückzulegen. — Unterrichtsfächer sind Swahili, Englisch, Mathematik, Erdkunde, Geschichte und ein Fach, in welchem Grundkenntnisse der Fächer Biologie, Physik und Chemie vermittelt werden. Großer Wert wird auf Feld- bzw. Gartenarbeit gelegt. Dazu kommen Sportspiele.
Am Ende von sieben Schuljahren haben die Schüler eine schriftliche Prüfung in allen Fächern abzulegen, die vom Erziehungsministerium zentral gestellt wird. Die besten Schüler werden dann für die *Secondary School* ausgewählt. Manchmal sind das nur 2 bis 3 von 30 bis 40 Schülern einer siebenten Klasse.
Die Unterrichtssprache in der *Primary School* ist Swahili. Die Prüfungsaufgaben werden ebenfalls in der Landessprache gestellt. Später, in der *Secondary School*, wird in englischer Sprache unterrichtet.
Der Aufgabenzettel 1968 war in drei Spalten unterteilt — nämlich: Aufgabe, Platz zum Rechnen und ein Kästchen für das Ergebnis. Die folgenden 50 Fragen mußten in 75 Minuten beantwortet werden. *S. Wengel*

50 Aufgaben

■ 1 ■ $(1\,089+143):7=x$

■ 2 ■ $348\cdot 25=x$

■ 3 ■ Wie oft ist der dritte Teil eines Dutzend in 144 Stück enthalten?

■ 4 ■ $1\frac{3}{8}-\frac{2}{3}=x$

■ 5 ■ $3\frac{1}{3}+1\frac{4}{7}\cdot 1\frac{2}{5}=x$

■ 6 ■ $4\frac{4}{9}:1\frac{1}{3}=x$

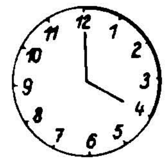
■ 7 ■ $\frac{1}{4}\cdot 0.5^2=x$ (Gib die Lösung für x als Dezimalbruch an!)

■ 8 ■ $17{,}6+9{,}6+23{,}4+4{,}02=x$

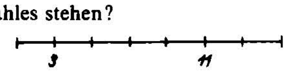
■ 9 ■ $17.34-8.009=x$

■ 10 ■ $48{,}75:0{,}05=x$

■ 11 ■ Die Fläche des kreisförmigen Ziffernblattes einer Uhr beträgt 154 cm^2. Wieviel cm^2 beträgt die hervorgehobene Fläche des verkleinert abgebildeten Ziffernblattes?



■ 12 ■ Die Abbildung stellt einen unvollständigen Zahlenstrahl dar. Welche Zahl muß am Anfang dieses unvollständigen Zahlenstrahles stehen?



■ 13 ■ Schreibe $\frac{2}{8}$ als Prozentsatz!

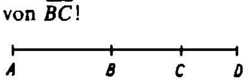
■ 14 ■ Wieviel Stunden und Minuten sind von 5.55 Uhr bis 8.40 Uhr vergangen?

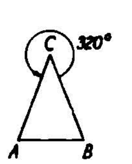
■ 15 ■ Bestimme den Nenner x der Gleichung $\frac{7}{x}\cdot\frac{4}{5}=\frac{7}{10}$!

■ 16 ■ Bestimme das arithmetische Mittel von 48, 80, 75, 63, 29!

■ 17 ■ Dividiere 864 durch 16 und multipliziere den erhaltenen Quotienten mit $\frac{1}{4}$. Wie lautet das Ergebnis?

■ 18 ■ Es sei $\overline{AB}=7$ cm, $\overline{CD}=4$ cm, $\overline{AD}=16$ cm (siehe Abbildung). Bestimme die Länge von $\overline{BC}$!

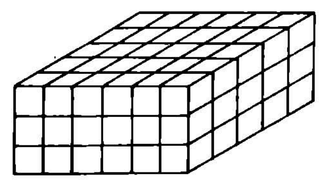




■ 19 ■ Die Abbildung stellt ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ dar. Bestimme die Größe eines Basiswinkels dieses Dreiecks!

■ 20 ■ Schreibe 33,3% als gemeinen Bruch!

■ 21 ■ Wieviel Ziegelsteine enthält der abgebildete geschichtete Stapel?

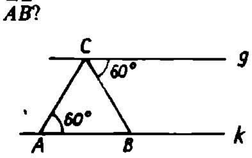


■ 22 ■ Welcher Geldbetrag ist größer: 10% von 71 Schillingen oder 7.50 Schillinge?

■ 23 ■ $\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=x$

■ 24 ■ In einem Dreieck ABC sei $\sphericalangle CAB=\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ACB$. Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ACB$?

■ 25 ■ In dem abgebildeten Dreieck ABC sei $\overline{AC}=30$ cm und $g \parallel k$. Wie lang ist die Seite $\overline{AB}$?

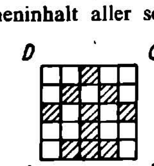


■ 26 ■ $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}=x$

■ 27 ■ Ein Auto legte eine Fahrstrecke von 120 km in $2\frac{1}{2}$ h zurück. Wieviel km Fahrstrecke legte dieses Auto in einer halben Stunde zurück, wenn die Geschwindigkeit als konstant angenommen wird?

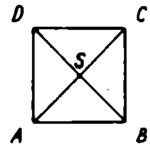
■ 28 ■ Bestimme alle natürlichen Zahlen x, für die gilt:
$160<x<180$ und 17 ist Teiler von x.

■ 29 ■ Wieviel Prozent der Fläche des abgebildeten Quadrates $ABCD$ beträgt der Flächeninhalt aller schraffierten Quadrate?



■ 30 ■ Der Preis für 1 m Stoff beträgt 45 Schillinge. Wieviel Schillinge kosten $\frac{2}{5}$ m dieses Stoffes?

■ 31 ■ Die Abbildung stellt ein Quadrat dar. Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle CSB$!



■ 32 ■ *Athuman* erhielt die Auskunft, daß der Zug eine halbe Stunde nach 18 Uhr in Dodoma ankommen werde. Wie läßt sich die Ankunftszeit des Zuges noch anders ausdrücken?

■ 33 ■ Ein Garten, der die Gestalt eines Rechtecks hat, ist dreimal so lang wie breit. Der Garten wurde ringsherum eingezäunt; dabei wurden 304 laufende Meter Maschendraht verbraucht. Berechne Länge und Breite des Gartens!

■ 34 ■ Wieviel Tage entfielen im Jahre 1968 auf die Zeit vor dem 15. April?

■ 35 ■ Der erste März eines bestimmten Jahres fiel auf einen Freitag. Auf welchen Wochentag fiel im gleichen Jahr der 27. März?

■ 36 ■ Ein bestimmtes Radiogerät kostet 700 Schillinge. Wieviel Schillinge beträgt der Kaufpreis für dieses Rundfunkgerät bei Barzahlung, wenn in diesem Falle 20% Rabatt gewährt werden?

■ 37 ■ *Hamis* sollte 240 Apfelsinen verkaufen. Am ersten Tag verkaufte er den dritten Teil aller Apfelsinen; am zweiten Tag verkaufte er fünf Achtel der ursprünglich zum Verkauf vorgesehenen Apfelsinen; am dritten Tag verkaufte er die verbliebenen restlichen Apfelsinen. Wieviel Apfelsinen hat er an jedem der drei Tage verkauft?

■ 38 ■ $\frac{4}{100}+\frac{7}{10000}=x$

(Gib die Lösung als Dezimalbruch an!)

■ 39 ■ $\sqrt{2.25}=x$

■ 40 ■ Den Zahlen 1, 2, 3, 4 sind – wie durch Pfeile gekennzeichnet – nach einer bestimmten Vorschrift jeweils genau eine Zahl zugeordnet.

$1 \longrightarrow 4$
$2 \longrightarrow 7$
$3 \longrightarrow 10$
$4 \longrightarrow x$

Wie lautet die Zahl x, die der Zahl 4 zugeordnet ist?

■ 41 ■ Ein quaderförmiges, oben offenes Gefäß, das 40 cm lang, 30 cm breit und 50 cm hoch ist, soll bis zum Rande mit Milch gefüllt werden. Wieviel Liter Milch faßt dieses Gefäß?

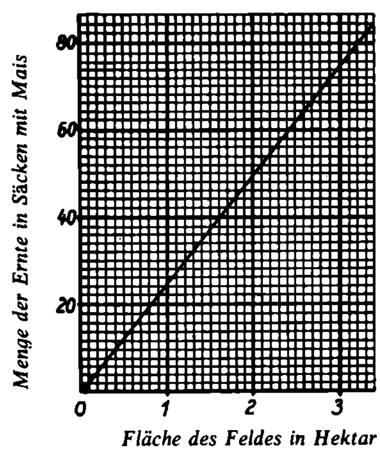
■ 42 ■ *Hubert* bringt 200 Schillinge zur Sparkasse. Wieviel Geld wird er einschließlich der Zinsen nach drei Jahren zur Verfügung haben, wenn die Sparkasse einen Zinssatz von $2\frac{1}{2}\%$ gewährt?

■ 43 ■ Eine bestimmte Arbeit wurde von 15 Arbeitern in 8 Tagen erledigt. Welche Zeit hätten 5 Arbeiter für die gleiche Arbeit benötigt, wenn eine gleiche Arbeitsintensität angenommen wird?

■ 44 ■ Nimm an, du hättest den Buchstaben C mit Tinte geschrieben und sofort danach mit einem Löschblatt abgedeckt. Wie wird der Buchstabe C auf der Seite des Löschblattes aussehen, mit der die Tinte getrocknet wurde?

■ 45 ■ Vier Jungen legten ihr Taschengeld zusammen und errechneten das arithmetische Mittel daraus; es betrug 3.50 Schillinge. Ein fünfter Junge besaß 6 Schillinge Taschengeld. Welches arithmetische Mittel würde man erhalten, wenn alle fünf Jungen das Taschengeld zusammenlegen?

Die folgenden Aufgaben 46, 47 und 48 sind unter Benutzung der abgebildeten graphischen Darstellung zu lösen:

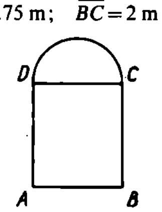


■ 46 ■ Wieviel Sack Mais wird ein Farmer voraussichtlich ernten, wenn er 2 ha Mais anbaut?

■ 47 ■ Wieviel ha Land müssen mit Mais bebaut werden, um 60 Sack Mais zu ernten?

■ 48 ■ Auf wieviel ha Land müssen zusätzlich Mais angebaut werden, wenn die ursprünglich vorgesehene Ernte von 30 Sack Mais auf 45 Sack Mais erhöht werden soll?

■ 49 ■ Die abgebildete Figur setzt sich aus einem Rechteck und einem Halbkreis zusammen. Berechne den Flächeninhalt der Figur, wenn folgende Maße zugrunde liegen: $\overline{AB}=1.75$ m; $\overline{BC}=2$ m



(Hinweis: $0.875^2=0.765625$; $\pi\approx\frac{22}{7}$)

■ 50 ■ An vier Arbeiter soll der Lohn ausgezahlt werden. Dabei sollen so wenig wie möglich Geldscheine oder Münzen verwendet werden. Die Löhne der vier Arbeiter betragen 153.20 Schillinge, 162.50 Schillinge, 202.10 Schillinge, 235 Schillinge.
Wieviel Zehn-Schilling-Scheine werden benötigt, wenn es außerdem noch Zwanzig-Schilling-Scheine und Fünfzig-Schilling-Scheine gibt?

Fortsetzung von S. 90
(Mathematische Wettbewerbe in Schweden)

a) Es sind Lagen der Punkte $A(p, q)$ und $B(r, s)$ anzugeben, bei denen sich eine Partikel von A nach B bewegen kann.
b) Es ist zu zeigen, daß, wenn $qs>0$, die Anzahl der Wege, die eine Partikel wählen kann, um von $A'(0, -q)$ nach $B(r, s)$ zu gelangen, gleich der Anzahl der Wege ist, die eine Partikel wählen kann, um von $A(0, q)$ nach B zu gelangen, wobei ein Punkt der x-Achse zu passieren ist.

■ 5 ■ Es sei f eine im Intervall $(-\infty, +\infty)$ zweimal stetig-differenzierbare Funktion, und es sei $f(x)\leq 1$ im Intervall $[0, 1]$ sowie $f(0)=f(1)=1$.
Ferner gebe es eine ebenfalls in $(-\infty, +\infty)$ definierte Funktion a mit $a(x)>0$, so daß
$$a(x)f''(x)+f(x)=0$$
für alle x gilt.
Es ist zu beweisen, daß es dann eine reelle Zahl y mit $0<y<1$ gibt, so daß $f(y)<0$ gilt.
Ferner ist zu beweisen, daß die Bedingung $f(x)\leq 1$ durch die folgende Bedingung ersetzt werden kann: Es gibt eine reelle Zahl z mit $0<z<1$, so daß $f(z)\leq 1$ gilt.

■ 6 ■ Es wird die folgende Behauptung aufgestellt:
Wenn A ein Punkt am Strande eines Sees ist, so gibt es zwei andere Punkte B und C am Strand, so daß das Dreieck ABC gleichseitig ist.
a) Es ist zu zeigen, daß diese Behauptung nicht immer richtig ist.
b) Es ist zu zeigen, daß diese Behauptung immer richtig ist, wenn man annimmt, daß der See genau konvex ist (d. h., daß jede Gerade den Strand in höchstens zwei Punkten schneidet) und daß der Strand in jedem Punkt eine eindeutig bestimmte Tangente hat.
c) Es ist zu beweisen, daß die Behauptung mit anderen, schwächeren Bedingungen als den unter b) angegebenen richtig ist. Diese Bedingungen sollen Eigenschaften des Sees, des Strandes oder der Lage des Punktes A betreffen.

Finale (2. Stufe, 23. 11. 1969)

Aus Platzgründen müssen wir auf eine Veröffentlichung der 9 gestellten Aufgaben verzichten. d. Red.

Mathematik-Kalender

September 1970

Di 1	Beginn des Schuljahres 1970/71
Mi 2	* 1865 Sir William Rowan Hamilton. Wirkte in Dublin. Bedeutende Beiträge zur Algebra (Hamiltonsches Sechseck, Hamiltonsche Gruppe) und zur Vektorrechnung. († 3. 8. 1905)
Do 3	
Fr 4	
Sa 5	† 1906 Ludwig Boltzmann. Wirkte in Wien. B. ist einer der Begründer der statistischen Mechanik (* 20. 2. 1844)
So 6	
Mo 7	
Di 8	
Mi 9	
Do 10	Beginn der Schulolympiade (X. MO), siehe in diesem Heft S. 84
Fr 11	
Sa 12	
So 13	* 1873 Constantin Carathéodory. Wirkte in Göttingen, Berlin, Smyrna, Athen und München. Fundamentale Arbeiten zur Variationsrechnung, zu den Differentialgleichungen. († 2. 2. 1950)
Mo 14	
Di 15	
Mi 16	
Do 17	* 1826 Bernhard Riemann († 20. 7. 1866)
Fr 18	† 1783 Leonhard Euler. Studiert in Basel Philosophie und Theologie, geht 1727 nach Petersburg, wird Prof. für Physik und Mathematik. Fundamentale Arbeiten zu Variationsrechnung, Integral- und Differentialrechnung (* 15. 4. 1707)
Sa 19	
So 20	* 1874 Michael Bauer. Wirkte in Budapest. Bed. Arbeiten zur Theorie der Zahlkörper. († Februar 1945)
Mo 21	
Di 22	
Mi 23	
Do 24	* 1801 Michail Wassiljewitsch Ostrogradski. Wirkte in Petersburg, Arbeitsgebiete Integralrechnung, Variationsrechnung. († 1. 1. 1862)
Fr 25	† 1777 Heinrich Johann Lambert. Macht sich als Autodidakt mit der zeitgenössischen Mathematik bekannt. Sein Ziel: bei möglichst sparsamem Gebrauch der Rechen- und Denkmittel ein Höchstmaß von Genauigkeit erreichen. (* 26. 8. 1728 in Mühlhausen)
Sa 26	† 1868 August Ferdinand Möbius. Wirkte in Leipzig. Grundlegende Arbeiten zur Geometrie und zur theor. Mechanik (* 17. 11. 1790)
So 27	
Mo 28	
Di 29	
Mi 30	

Oktober 1970

Do 1	
Fr 2	
Sa 3	
So 4	
Mo 5	* 1781 Bernhard Bolzano. Wirkte in Praha. Fundamentale Arbeiten über Grundlagen der Analysis. († 18. 12. 1848)
Di 6	* 1831 Richard Dedekind. Fundamentale Arbeiten zur Zahlentheorie († 12. 2. 1916)
Mi 7	
Do 8	
Fr 9	
Sa 10	Beginn der Herbstferien
So 11	
Mo 12	
Di 13	
Mi 14	
Do 15	
Fr 16	
Sa 17	
So 18	† 1871 Charles Babbage. Wirkte in Cambridge. Erfinder der ersten Rechenmaschine, die mit ganzen Zahlenspalten zu rechnen vermag. (* 26. 12. 1762) Ende der Herbstferien
Mo 19	
Di 20	Abgabe der Lösungen zur Schulolympiade
Mi 21	
Do 22	
Fr 23	
Sa 24	
So 25	* 1811 Evariste Galois († 31. 5. 1832)
Mo 26	
Di 27	
Mi 28	† 1703 John Wallis. Wirkte in Oxford. Verdienste um Algebra und Arithmetik. (* 23. 11. 1616)
Do 29	
Fr 30	† 1626 Willebrord van Royen, Snell. Wirkte in Leiden. Entdecker des Berechnungsgesetzes des Lichtes und Begründer der geometrischen Optik (* 1580)
Sa 31	* 1815 Karl Weierstraß († 19. 2. 1892)

Dabeisein ...
beim Fortschritt der Technik
als Verkehrsteilnehmer
als Leser

HANS KADNER

Ich fahre ein Kleinkraftrad

Fahrzeugvorstellung, Fahrhinweise, Pflege-, Kontroll- und Reparaturtips
Etwa 120 Seiten, 16 Abbildungen, 5 Tabellen, Broschur cellophaniert etwa 4,60 Mark

Aus dem Inhalt:
Fahrzeugvorstellung und Einschätzung / Welches Rad für wen? / Fahrerlaubnis — oder nicht? / Bestimmend ist das Drehmoment / Stets überlegt schalten / Fahrbahn und Haftreibung / Bremsen und Bremsweg / Fahren in der Praxis / Pflege-, Kontroll- und Reparaturtips / Kupplung / Getriebe / Lenkung / Räder / Bereifung / Bremsen / Störungssuche an der elektrischen Anlage / Periodische Kontroll- und Pflegearbeiten / Mögliche Umbauten / Sicherung gegen unbefugtes Benutzen / Hinweise für die systematische Beseitigung von Störungen: Motor springt nicht an oder bleibt stehen, Motor zieht nicht, Motor knallt oder patscht, Motor wird zu heiß / Verhalten bei Verkehrsunfällen

Wir stellen vor: KR 51 — „Schwalbe"

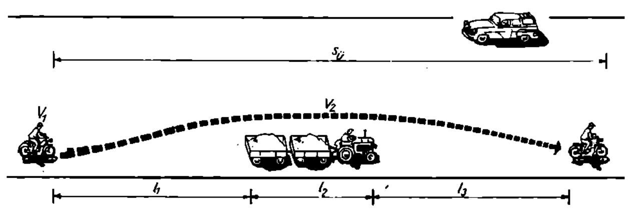
Leistung: 2,5 kW (3,4 PS) bei 6 500 U $\cdot$ min^{-1}
max. Drehmoment: 0,38 kpm bei 6 000 U $\cdot$ min^{-1}
Hubraum: 49,6 cm^3
Höchstgeschwindigkeit: 60,0 km $\cdot$ h^{-1}
Inhalt des Kraftstofftanks: 6,8 l
Kraftstoffverbrauch: 2,7 l pro 100 km
Anzahl der Gänge: 3
Bereifung: 20 × 2.75
Leermasse: 80,0 kg
Nutzlast: 150,0 kg
Gesamtmasse: 230,0 kg
Sitzplätze: 2
Anhängelast: 60,0 kg

Der Überholvorgang

Ein Kleinkraftrad-Fahrer möchte einen Traktor mit zwei Anhängern überholen. Das Kleinkraftrad fährt 50 km $\cdot$ h^{-1}, der Traktor 30 km $\cdot$ h^{-1}. Beide Fahrzeuge fahren während des Überholvorgangs mit gleicher Geschwindigkeit weiter. Der Überholweg berechnet sich dann nach folgender Formel

$$s_{ü} = \frac{L \cdot v_1}{v_1 - v_2}$$

Die verwendeten Zeichen bedeuten:
$s_{ü}$ = Gesamtüberholweg für das überholende Fahrzeug in Metern
v_1 = Geschwindigkeit des Kleinkraftrades in km $\cdot$ h^{-1}
v_2 = Geschwindigkeit des Traktors in km $\cdot$ h^{-1}
L = $l_1 + l_2 + l_3$ in Metern; dabei ist
l_1 = Sicherheitsabstand vor dem Überholen zum vorausfahrenden Fahrzeug in Metern
l_2 = Länge des zu überholenden Fahrzeugs in Metern
l_3 = Sicherheitsabstand, den das überholende Fahrzeug vor dem Wiedereinordnen zum überholten Fahrzeug herausfahren muß, in Metern



Nehmen wir an, daß der Sicherheitsabstand des Kleinkraftrades zum vorausfahrenden Traktor der Hälfte der gefahrenen Geschwindigkeit in Metern entspricht, so sind das 25 m. Das Kleinkraftrad weist eine Länge von 2 m und der Traktorzug eine Gesamtlänge von 20 m auf. Zum Überholen des Traktorzuges werden 180 m benötigt, denn

$$s_{ü} = \frac{72 \cdot 50}{50-30} = \frac{3\,600}{20} = 180\,.$$

Zahlreiche Tabellen, Graphiken und umfassendes Faktenmaterial sind geeignet für praktische Arbeit in Mathematik-Arbeitsgemeinschaften. Wir wünschen viel Erfolg!

transpress
VEB Verlag für Verkehrswesen
108 Berlin

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
19	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	5
20	55	82	81	80	79	78	77	76	75	74	43	4
21	56	83	102	101	100	99	98	97	96	73	42	3
22	57	84	103	ZIEL				110	95	72	41	2
23	58	85	104	105	106	107	108	109	94	71	40	1
24	59	86	87	88	89	90	91	92	93	70	39	S T
25	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	38	A
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	R T

Zahlenspirale

Es wird mit 2 Würfeln reihum gewürfelt. Die Anzahl der Mitspieler ist beliebig.

Nach jedem Wurf darf man mit beliebigen Spielsteinen so viele Schritte nach vorn gehen, wie das Produkt der Augenzahlen der beiden Würfel angibt.

bisher erreichtes Feld: z. B. 33
gewürfelt: 3 und 4 $3 \cdot 4 = 12$
zu rechnen: $33 + 12 = 45$ Stein auf 45 setzen!

Gewonnen hat, wer zuerst das Ziel erreicht.

Wer beim ersten Würfeln das Feld 1 erreicht, darf sofort auf Feld 10 setzen! Wer beim ersten Würfeln das Feld 2 erreicht, geht zum Start zurück! Wer eine Zahl auf einem Quadratzahlfeld erreicht, darf die Differenz der erreichten und vorhergehenden Quadratzahl an Schritten nach vorn gehen!

bisher erreichtes Feld: z. B. 25
Berechnung der Differenz: $25 - 16 = 9$
zu rechnen: $25 + 9 = 34$, Stein auf 34 setzen!

Wer eine Zahl auf einem Primzahlfeld erreicht, muß auf das vorhergehende Primzahlfeld zurück!

bisher erreichtes Feld: z. B. 29
vorhergehendes Primzahlfeld: 23 Stein auf 23 setzen!

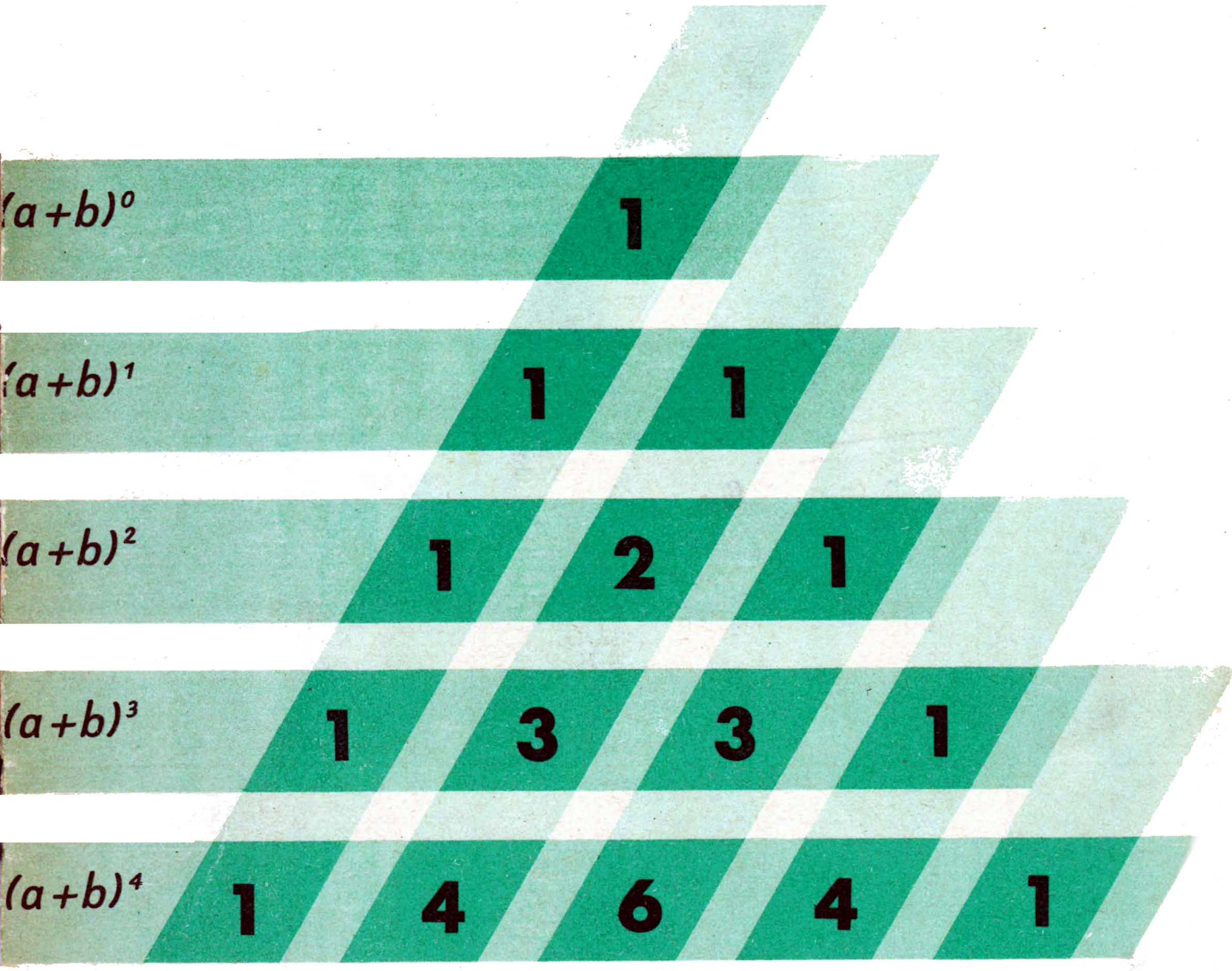
Wer ein schon besetztes Feld erreicht, schickt den bisherigen Benutzer an den Start zurück!

Viel Freude am Spiel wünscht

Mathematikfachlehrer W. Weber,
EOS Schkeuditz (Bez. Leipzig)

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
4. Jahrgang 1970
Preis 0,50 M
Index 31059

5

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import BmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos: Presseagentur Nowosti, APN (S. 97); Archiv *alpha* (S. 99); F. Nickel, Leipzig (S. 107); Zentralbild (S. 107); W. Stoye, Berlin (S. 108) J. Lehmann, Leipzig (113);
Die Vignetten auf S. 112 fertigte während der XII. IMO an: Prof. Constantin Ottescu, Bukarest (Stellv. Delegationsleiter – Sekretär der Math. Gesellschaft der SR Rumänien)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 28. Juli 1970

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Wir stellen vor:

Leninpreisträger Lew Semjonowitsch Pontrjagin

Am 3. September 1970 wurde *Lew Semjonowitsch Pontrjagin* 62 Jahre alt. Er gehört zu den wenigen Mathematikern der Welt, die zu Lebzeiten verdientermaßen als Klassiker der Weltwissenschaft anerkannt wurden.

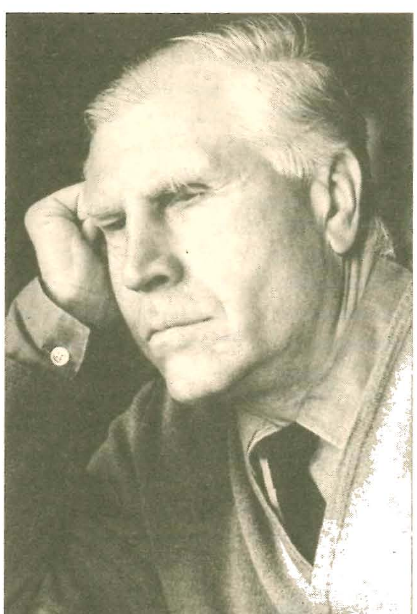
Die Arbeiten von Akademiemitglied *L. S. Pontrjagin* betreffen nicht ein einzelnes Gebiet der Mathematik, sondern eine ganze Reihe ihrer Teilgebiete. Er ist ein Wissenschaftler großen Formats und eines umfassenden mathematischen Gesichtskreises. Grundlegende wissenschaftliche Resultate, die von *Lew Semjonowitsch* stammen, kann man in der Algebra und der Geometrie, in der Topologie und der Theorie der Differentialgleichungen, in der Theorie der Steuerung und Regelung sowie in der Spieltheorie finden. Und jedesmal sind mit seinem Namen sehr wichtige, tiefgehende und grundlegende Resultate verknüpft.

Mehrere tausend Arbeiten, die in der ganzen Welt erschienen sind (nicht nur mathematische Arbeiten, sondern auch Arbeiten auf dem Gebiet der angewandten technischen Wissenschaften), enthalten bedeutende Resultate und Methoden, die auf *L. S. Pontrjagin* zurückgehen. Es ist jetzt schon nicht mehr möglich, alle Werke, in denen Hinweise auf die Forschungen *Lew Semjonowitschs* enthalten sind, zu verfolgen. Einen besonders großen Teil der Arbeiten nehmen die Untersuchungen auf dem Gebiet der mathematischen Theorie der optimalen Steuerung ein, die von *Lew Semjonowitsch* und seinen Schülern durchgeführt wurden. Der Name *Pontrjagins* wurde auf diesem Gebiet schon zum Symbol. Überaus kennzeichnend ist, daß die Internationale Astronautische Akademie *L. S. Pontrjagin* zum Ehrenmitglied wählte (gemeinsam mit *J. Gagarin* und *W. Tereschkowa*).

L. S. Pontrjagin, der Begründer zweier großer mathematischer Schulen ist (einer Schule für algebraische Topologie und einer Schule für die mathematische Theorie optimaler Steuerung), erzog eine ganze Generation sowjetischer Wissenschaftler. Als sowjetischer und russischer Patriot vertritt er auf großen internationalen mathematischen Kongressen die sowjetische Wissenschaft würdig und eindrucksvoll. Die Heimat würdigte die wissenschaftlichen Leistungen *L. S. Pontrjagins*: er wurde zweimal mit dem Leninorden ausgezeichnet und erhielt weitere hohe Orden und Auszeichnungen. Für seine Arbeiten erhielt er ferner den Leninpreis, den Staatspreis sowie den Lobatschewskipreis.

***L. S. Pontrjagin* wurde in einer armen Familie** geboren. Sein Vater, *Semjon Akimowitsch Pontrjagin*, ein kleiner Angestellter aus der Stadt Trubtschewska des Orlowski Gouvernements, starb im Jahre 1927. *Lew Semjonowitschs* Mutter, ***Tatjana Andrejewna* (geboren im Jahre 1879), kommt aus einem Dorf des Jaroslawski Gouvernements; in Moskau arbeitete sie als Schneiderin.**

Die materielle Lage der Familie schloß die Möglichkeit aus, den Jungen auf das Gymnasium oder auch nur auf eine Realschule zu schicken — die allererste Schulbildung erhielt *L. S. Pontrjagin* in der Städtischen Schule. Im Alter von 14 Jahren ereilte ihn ein Unglück: infolge einer Explosion verlor er das Augenlicht. Von diesem Augenblick an fielen alle Sorgen, die die Regelung des Lebens ihres Sohnes betrafen, auf *Tatjana Andrejewna*. Ungeachtet der großen Schwierigkeiten, die sie überwinden mußte, beschloß sie, die Aufgabe zu übernehmen, mit der sie zu Recht die Dankbarkeit der sowjetischen



und der Weltwissenschaft erwarb. Im Laufe vieler Jahre war sie faktisch die Privatsekretärin *Lew Semjonowitschs*, las ihm wissenschaftliche Literatur vor, setzte Formeln in seine wissenschaftlichen Manuskripte ein, las die Korrekturen seiner Arbeiten usw. Dafür mußte sie insbesondere Fremdsprachen lernen.

Abgesehen davon, daß *T. A. Pontrjagina Lew Semjonowitsch* half, umhegte sie ihn auch in allen anderen Beziehungen mit größter Sorge und Aufmerksamkeit.

Eine kleine Skizze zeigt anschaulich, welche Schwierigkeiten auftraten und von *Tatjana Andrejewna* und ihrem talentierten Sohn überwunden werden mußten.

Wir, die Mathematiker, benutzen stets die Zeichen $\cap$, $\cup$, $\supset$, $\subset$. Trotz äußerlicher Ähnlichkeit sind sie für uns dem Sinn nach völlig verschieden und werden verschieden benannt. Aber für *Tatjana Andrejewna* sagten die Termini *Durchschnitt, Vereinigung, Inklusion* nichts. Sie dachte sich zum Aussprechen von Formeln und zum Korrekturlesen eine Spezialsprache aus: das Zeichen für den Durchschnitt nannte sie „Schwänzchen nach unten", das Zeichen $\subset$ nannte sie „Schwänzchen nach rechts" usw.

Im Jahre 1925 wurde *L. S. Pontrjagin* Student der Moskauer Universität. Seine hervorragenden mathematischen Fähigkeiten und das große wissenschaftliche Interesse lenkten sofort die Aufmerksamkeit seiner Lehrer auf ihn; er lernte ausgezeichnet. Der überraschendste Eindruck war, daß der Student *L. S. Pontrjagin* komplizierteste Rechnungen (z. B. in der Tensor-Analysis) im Gedächtnis behielt, obwohl er nichts niederschrieb.

Den Studenten der Physik und Mathematik jener Zeit (wie auch jetzt in der Mechanik und Mathematik) schlug man die Auswahl einer Reihe von Spezialkursen und Seminaren vor, in denen vielfältigste mathematische Fragen betrachtet wurden. Bei der Auswahl der Probleme für die selbständige wissenschaftliche Arbeit spielte nicht nur die Thematik eine bedeutende Rolle, sondern auch die Persönlichkeit des Professors. *Lew Semjonowitsch* erinnert sich, daß es für ihn in den Vorlesungen *A. J. Chintschins* über analytische Zahlentheorie kalt und ungemütlich war. In den Vorlesungen und Seminaren *Pawel Sergejewitsch Alexandroffs* dagegen konnte er leicht und frei atmen, er fühlte sich dort „wie zu Hause".

Die Persönlichkeit *P. S. Alexandroffs*, seine Aufmerksamkeit und Hilfe spielten eine unwahrscheinlich große Rolle bei der Herausbildung der wissenschaftlichen Interessen *L. S. Pontrjagins*, der persönlichen Begabungen und Neigungen des jungen Wissenschaftlers.

gekürzt aus: ***uspechi matematitscheskich nauk*** 6 (144) 1968, übersetzt von Renate Schönberg, VdW

Ein kleiner Dreh führt zum Ziel

Anschaulich und maßtreu auf einem Blatt

Bei der IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (I. Stufe) wurde die folgende Aufgabe gestellt:
Ein ebenflächig begrenzter konvexer Körper ist durch Grund-, Auf- und Kreuzriß wiedergegeben. Seine drei scheinbaren Umrisse stellen Quadrate der Seitenlänge a dar. Dieser Körper ist zu beschreiben, als Modell zu basteln und sein Volumen durch a auszudrücken. Vergl. *alpha* 4/69 S. 85. (Bild 1)

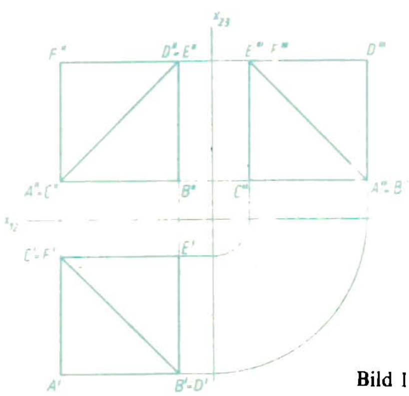


Bild 1

Um von einem durch mehrere Risse dargestellten Körper der vorliegenden Art ein räumliches Modell anfertigen zu können, müssen zwei Voraussetzungen erfüllt sein:
1. Die Körpermaße (Kantenlängen und Kantenwinkel) sind bekannt oder aus den Bildern rekonstruierbar.
2. Mit den Bildern muß man eine anschauliche Vorstellung über die Gestalt des dargestellten Körpers verknüpfen können.

Aus der hier vorliegenden Darstellung des Körpers sind zwar sämtliche Kantenlängen und Winkel ablesbar bzw. rekonstruierbar. Wird allerdings die Anfertigung eines Modells oder seine Beschreibung gefordert, bleiben alle Längen- und Winkelmaße nur ein Stückwerk, wenn man von dem Körper selbst keine anschauliche Vorstellung besitzt. Eine geeignete Abbildungsmethode, die unter Verzicht auf eine maßtreue Wiedergabe bestimmter Kanten und Winkel unser Vorstellungsvermögen besser anzusprechen vermag, kann bei der Lösung dieser Aufgabe helfen. Zunächst erhebt sich die Frage, warum das hier durch drei Risse dargestellte räumliche Objekt vorstellungsmäßig so schwer erfaßbar ist. Die Begründung ist sehr einfach. Verschiedene Kanten und damit auch Begrenzungspolygone stehen lotrecht auf den Bildebenen. Die Körperkanten erscheinen in den entsprechenden Rissen als Punkte und die ebenen Begrenzungspolygone als Strekken. Zum Beispiel stehen die beiden Dreiecke (ACF) und (BDE) lotrecht auf Grund- und Aufrißtafel. Sie erscheinen daher in diesen Rissen als Strecken.
Im Kreuzriß sieht man diese Dreiecke in wahrer Gestalt, wobei das Dreieck (ACF) sichtbar und das Dreieck (BDE) verdeckt ist. Ferner liegen die Dreiecke (ABC) und (DEF) horizontal. Folglich bilden sie sich in Auf- und Kreuzriß als Strecken ab. Erschwerend kommt noch hinzu, daß sich in allen drei Rissen je eine sichtbare und eine verdeckte Kante aus verschiedenen Seitenpolygonen überlagern. Im Grundriß fällt die sichtbare Kante (FD) mit der verdeckten Kante (BC) zusammen. Analoges läßt sich für die Kanten (AF) und (BE) im Kreuzriß feststellen. Wer sich aus Grund- und Aufriß allein keine anschauliche Vorstellung des Körpers ableiten kann, dem hilft hier auch der Kreuzriß nicht weiter.
Es kommt uns jetzt darauf an, aus den Bildern des Körpers unter einem möglichst geringen Konstruktionsaufwand ein neues Bild zu gewinnen, das weder projizierende Kanten und Seiten noch sich überdeckende Kanten enthält. Die geforderte Einfachheit der Konstruktion wird mittels einer Parallelprojektion erfüllt, weil hierbei parallele Kanten in parallele Bildstrecken übergeführt werden und Streckenverhältnisse auf parallelen Geraden erhalten bleiben.
Aus vorgegebenem Grund- und Aufriß läßt sich ein solcher Parallelriß wenig aufwendig nach einem von L. Eckhart eingeführten Einschneideverfahren gewinnen. Hierbei schneidet man zunächst diese beiden Bilder des Objektes auseinander und klebt sie in einer neuen Anordnung auf das Zeichenblatt. Ferner gibt man noch zwei Ordnerrichtungen beliebig vor und bringt die Ordnungslinien durch zugeordnete Punktepaare, z. B. A' und A'', miteinander zum Schnitt. Auf diesem Wege erhält man von sämtlichen Eckpunkten A, B, C, D, E, F je einen Bildpunkt. Nun bedarf es noch einiger Überlegungen, um die Punkte richtig miteinander zu verbinden und über die Sichtbarkeit der Kanten zu entscheiden. (Bild 2) Vorstellungsmäßig ist der Körper leicht zu erfassen, wenn man ihn in einen Würfel der Kantenlänge a einbettet. Führt man dann einen Schnitt durch die Eckpunkte A, D, F, wird eine dreiseitige Pyramide von dem Würfel abgeschnitten, deren Volumen ein Sechstel des Würfelvolumens ausmacht. Der gleiche Volumenabzug erfolgt, wenn man eine Schnittebene durch die Punkte B, C, E legt. Mit a als Kantenlänge des umschließenden Würfels hat der hier dargestellte Restkörper das Volumen $\frac{2}{3}a^3$. Wie man weiter erkennt, besteht das Netz dieses Polyeders aus zwei gleichseitigen und sechs gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecken. (Bild 3)

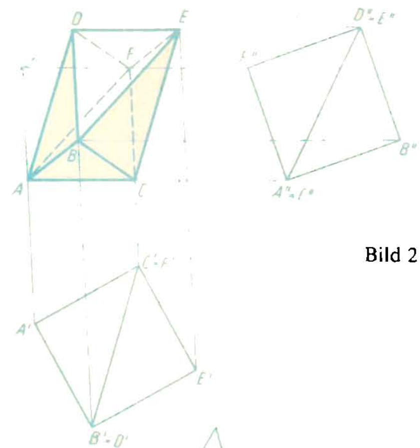


Bild 2

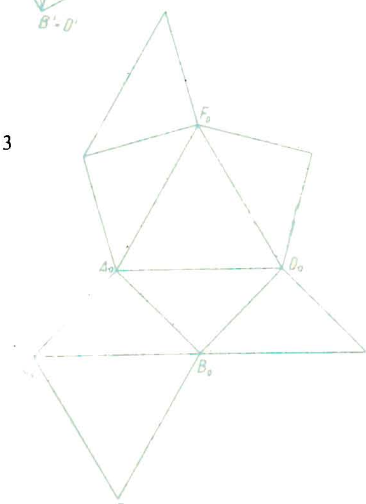


Bild 3

Für die anschauliche Erfassung dieses konvexen Körpers kann auch der Eulersche Polyedersatz mit herangezogen werden. (Vgl. *alpha* 2/69 S. 30). Bild 1 zeigt, daß der Körper 6 Ecken besitzt. Etwas mehr Überlegung erfordert die Abzählung der Kanten. Man findet $k = 12$. Aus dem Eulerschen Polyedersatz folgt für die Anzahl der Flächen $f = 8$. Damit ist unsere Vorstellung von dem Netz des Körpers auch von dieser Seite gestützt.
Die Anordnung der beiden Bilder in der Zeichenebene sowie die Wahl der Einschneiderichtungen bedarf bei dem Eckhartschen

Verfahren einiger Erfahrungen, um zu einem wenig verzerrten, anschaulichen Bild des räumlichen Objektes zu gelangen. Es läßt sich nachweisen, daß man in jedem Fall als Bild irgendeine Parallelprojektion des Polyeders auf die Zeichenebene erhält. Das entstehende Bild bezeichnet man auch als axonometrisches Bild des Körpers. Die Forderung der Anschaulichkeit ist jedoch nicht für jeden Fall gesichert. Ein weiterer Nachteil besteht darin, daß man Grund- und Aufriß trennen oder neu zeichnen muß, um ein axonometrisches Bild nach dieser Methode konstruieren zu können. Eine Anwendung des Einschneideverfahrens unmittelbar auf zugeordnete Normalrisse ergibt stark verzerrte Bilder, was für die Anschauung keinen Gewinn bedeutet. Diese Nachteile sollen durch eine kleine Abwandlung der Konstruktion beseitigt werden.
Ausgehend von einer in zugeordneten Normalrissen vorliegenden Körperdarstellung (Bild 4) wird zunächst der Grundriß um einen Winkel von 60° bezüglich einer erstprojizierenden Drehachse d gedreht. Diese Drehung läßt sich mit Hilfe eines Zirkels konstruktiv sehr einfach durchführen. Der zu jedem Punkt des Grundrisses gehörige Drehradius ϱ wird einfach auf dem einzuzeichnenden Kreisbogen von der Ausgangslage her im Drehsinn abgetragen. Nun sind der Aufriß und der um 60° gedrehte Grundriß die Ausgangsbilder, auf die wir das Einschneideverfahren anwenden. Die Einschneiderichtung für den gedrehten Grundriß wählen wir lotrecht oder nur wenig abweichend von der Lotrechten. Die Einschneiderichtung durch den Aufriß wird leicht geneigt gegen die Waagerechte angenommen. Die Bildpunkte finden sich wieder in den Schnittpunkten einander zugeordneter Einschneidstrahlen.

Der Vorzug dieser Konstruktion besteht darin, daß man, von Grund- und Aufriß eines räumlichen Objektes ausgehend, mit geringem Zeit- und Konstruktionsaufwand ein anschauliches axonometrisches Bild des Körpers neben den zugeordneten Normalrissen erhält. Die sich zwanglos ergebende Vereinigung beider Bilder auf einem Zeichenblatt vermag die Verständigung zwischen Konstrukteur und Hersteller sowie Hersteller und Verbraucher über den räumlichen Gegenstand zu erleichtern.

E. Schröder

Aufgabe:

Von dem durch Grund- und Aufriß dargestellten Hausmodell ist nach dem Drehschnittverfahren ein anschauliches axonometrisches Bild zu konstruieren. (Bild 5)

Bild 5

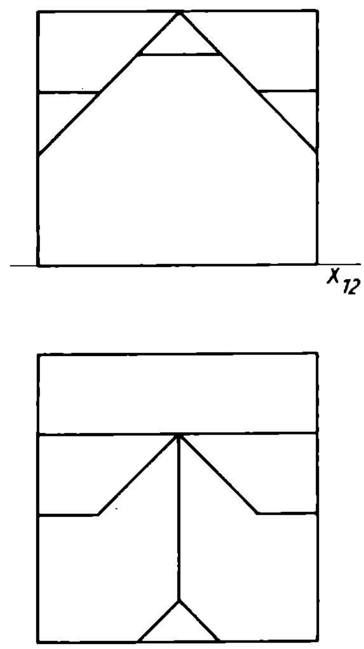
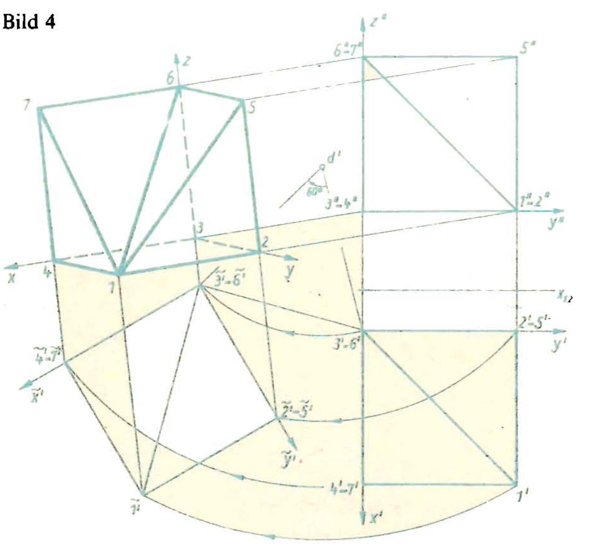


Bild 4



Wir stellen vor:

Nationalpreisträger Oberstudienrat **Dr. R. Lüders**, Fachlehrer für Mathematik am Institut für Lehrerbildung Berlin-Köpenick
Studienrat **Th. Scholl**, Fachreferent für Mathematik in der Hauptabteilung Lehrerbildung des Min. f. Volksbildung
Mit Umsicht, Exaktheit, großer Sachkenntnis und unermüdlichem Fleiß haben beide Mitarbeiter seit Gründung der Schülerzeitschrift *alpha* rund 600 Aufgaben und Lösungen für unsere Leser bearbeitet, z. T. selbst gestellt. Dafür sagen wir herzlichsten Dank.

Red. *alpha*

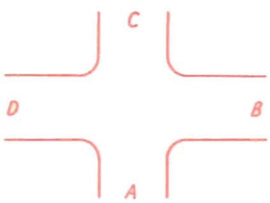
Achtung Kreuzung–Vorfahrt beachten!

Kleine Übung im logischen Schließen

Bild 1
Vorfahrt auf der Hauptstraße beachten!

Das Verkehrsaktiv einer Schule führt in Zusammenarbeit mit der Volkspolizei an verschiedenen Tagen sowie zu verschiedenen Tageszeiten eine Verkehrsdichteermittlung über die Zufahrt von Fahrzeugen auf eine Kreuzung wie die des Bildes 2 durch: Mittels Bleistift, Zettel und Uhr sowie durch Zählen werden die Anzahlen der pro Stunde von jeder Zufahrtstraße aus über die Kreuzung rollenden Fahrzeuge ermittelt.

Bild 2



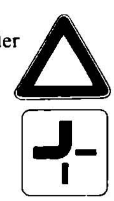
Verkehrsschilder an der Einmündung der Straße *X* in die Kreuzung des Bildes 2

Straße *X*

A

entweder

B



oder

entweder

C

oder

D

Das Ergebnis lautet:
Pro Stunde rollen, aus den Straßen *B*, *C* und *D* kommend, fast gleich viele Fahrzeuge über die Kreuzung, während aus der Straße *A* pro Stunde eine erheblich größere Zahl von Fahrzeugen über die Kreuzung fährt.
Auf Grund dieser Verkehrsdichteuntersuchung macht sich eine Neubeschilderung dieser Kreuzung mit die Vorfahrt regelnden Verkehrszeichen notwendig. Die VP erteilt dem Verkehrsaktiv den Auftrag:

Aufgabe 1: Alle vier zu einer Kreuzung des Bildes 2 führenden Straßen sind in beiden Richtungen zu befahren. Über die Kreuzung fährt keine Straßenbahn. Welche Verkehrszeichen müssen an dieser Kreuzung aufgestellt werden, damit bei jeder denkbaren Verkehrssituation an der Kreuzung jeweils das auf der Straße *A* anfahrende Fahrzeug die Vorfahrt hat?
Bei der nächsten Tagung des Verkehrsaktivs in der Schule wird eine Skizze der Kreuzung (Bild 2) aufgezeichnet, und die die Vorfahrt durch Verkehrszeichen an Kreuzungen und Einmündungen regelnden Vorschriften des § 13 der Straßenverkehrsordnung (StVO) werden bereitgelegt:

§ 13 der StVO:

Absatz 1: An Kreuzungen und Einmündungen von gleichrangigen Straßen hat Vorfahrt, wer von rechts kommt, unabhängig davon, ob die Fahrtrichtung beibehalten wird oder nicht.
Absatz 2: Der Benutzer der Hauptstraße (Bild 3) hat Vorfahrt vor dem Benutzer der Nebenstraße (Bild 1 und 4). Bei abbiegender Hauptstraße wird durch ein Zusatzschild (Bild 5) unter den vorfahrtregelnden Verkehrszeichen der Verlauf der Hauptstraße angezeigt. Der Benutzer des Kreisverkehrs (Bild 6) hat die Vorfahrt. Feld-, Wald- und andere Wege, die auf Straßen einmünden oder diese kreuzen, sind untergeordnet.
Absatz 3: Wer nach links abbiegen will, hat die entgegenkommenden Fahrzeuge aller Art vorfahren zu lassen. Das gilt nicht, wenn ein Vorfahrtfall nach Absatz 1 vorliegt oder der Linksabbieger Benutzer der abbiegenden Hauptstraße ist, unabhängig davon, ob er auf der Hauptstraße verbleibt oder diese verläßt. Straßen mit mehreren voneinander getrennten Fahrbahnen gelten als dieselben Straßen.

Absatz 4: Straßenbahnen haben an den mit dem Verkehrszeichen des Bildes 7 gekennzeichneten Stellen die Vorfahrt.

Die Absätze dieses Paragraphen 13 werden von jedem Aktivmitglied nochmals gründlich durchgelesen. In der anschließenden Aussprache über diese Regeln wird besonders herausgestellt: An einer Straßenkreuzung oder Einmündung, die nicht Teil eines Kreisverkehrs ist und an der der Verkehr zur Zeit nicht durch einen Verkehrsposten der VP oder durch Verkehrsampeln geregelt wird, sind entweder alle einmündenden Straßen gleichrangig oder zumindest teilweise sind die einmündenden Straßen gleichrangig. Der erste Fall liegt vor, wenn an einer Kreuzung oder Einmündung keine vorfahrtregelnden Verkehrszeichen stehen. Im zweiten Fall bilden genau zwei zur Kreuzung oder Einmündung führende Straßen eine nichtabbiegende oder abbiegende Hauptstraße. Die beiden die Hauptstraße bildenden Straßen sind also gleichrangig. Weiterhin sind in diesem Falle alle übrigen zur Kreuzung oder Einmündung führenden Straßen Nebenstraßen, also ebenfalls untereinander gleichrangig.
Als erfahrene Mitarbeiter eines Verkehrsaktivs erinnern sich unsere Pioniere auch daran, daß es Verkehrssituationen an Kreuzungen und Einmündungen gibt, für die

Bild 3
Hauptstraße

Bild 4
Halt!
Vorfahrt auf der Hauptstraße beachten

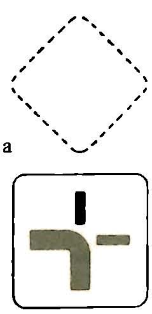


Bild 5a

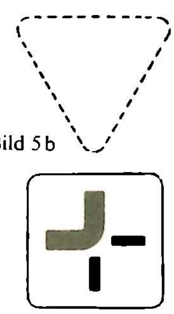
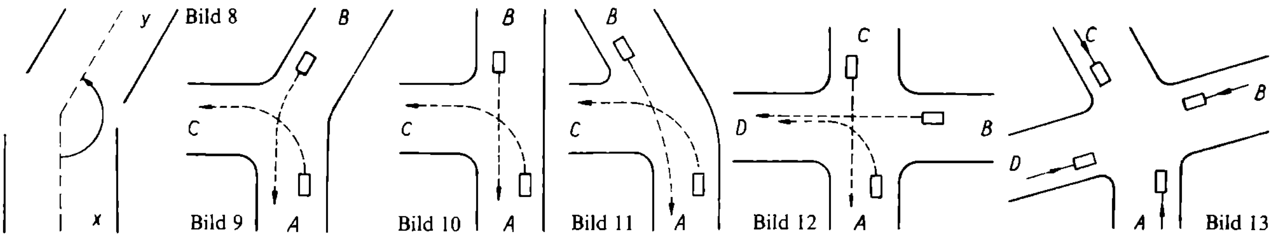


Bild 5b

5a: Zusatzschild „Abbiegende Hauptstraße“ zum Verkehrszeichen Bild 3
5b: Zusatzschild „Abbiegende Hauptstraße“ zu den Bildern 1 und 4

Bild 6
Kreisverkehr

Bild 7
Vorfahrt der Straßenbahn beachten



keiner der Absätze des § 13 der StVO die Vorfahrt regelt. Als Beispiel sei erwähnt: Kommt auf jeder der vier Straßen *A*, *B*, *C* und *D* einer Kreuzung des Bildes 2, an der jetzt keine vorfahrtregelnden Verkehrszeichen stehen sollen, fast gleichzeitig ein Fahrzeug gefahren, so versagt der jetzt zuständige Absatz 1 des § 13. Denn jedes der vier Fahrzeuge müßte warten, bis das von rechts kommende über die Kreuzung gefahren ist. In einem solchen Fall müssen die Fahrzeugführer durch gegenseitiges Verständigen festlegen, ob sie, ohne sich gegenseitig zu behindern, gleichzeitig weiterfahren können (Dies könnte in unserem Beispiel der Fall sein, wenn alle vier Fahrzeuge nach rechts abbiegen wollen.), oder wer als erster die Kreuzung passiert. Im Eifer der Beschäftigung mit dem § 13 der StVO wird im Aktiv nochmals mitgeklärt, was im Sinne des Absatz 1 dieses Paragraphen „ein von rechts Kommender" ist: Für ein auf der Straße *X* zur Kreuzung oder Einmündung *K* fahrendes Fahrzeug ist ein auf der Straße *Y* ebenfalls zu *K* fahrendes Fahrzeug ein von rechts kommendes, falls der Mittelstrahl (siehe Bild 8) der Straße *X* durch eine Drehung um seinen Anfangspunkt im Gegenuhrzeigersinn mit einem Drehwinkel, der kleiner als 180° ist, auf den Mittelstrahl der Straße *Y* abgebildet wird.

Falls die Abschätzung eines derartigen Drehwinkels in der Nähe von 180° liegt, muß jeder Fahrer beachten, daß die nach § 13 der StVO festgelegte Vorfahrtsregelung sich u. U. ändert, falls dieser Drehwinkel als gleich oder verschieden von 180° angesprochen wird. Bei einer Kreuzung oder Einmündung mit abbiegender Hauptstraße dürften in dieser Beziehung von seiten der Kraftfahrer kaum Fehlinterpretationen auftreten, weil hier das Zusatzschild „abbiegende Hauptstraße" eindeutig zu entscheiden gestattet, ob der fragliche Drehwinkel gleich, kleiner als oder größer als 180° ist. Nach diesen Vorbereitungen geht das Verkehrsaktiv an das Lösen der Aufgabe 1:

Als erste Verkehrssituation betrachten die Pioniere auf den Straßen *A* und *B* gleichzeitig zur Kreuzung des Bildes 1 fahrende Fahrzeuge. Wären die Straßen *A* und *B* gleichrangig, so hätte gemäß Absatz 1 des § 13 das Fahrzeug auf *B* die Vorfahrt vor dem Fahrzeug auf *A*. Da jedoch stets das Fahrzeug auf *A* die Vorfahrt haben soll, können die Straßen *A* und *B* nicht gleichrangig sein. Also muß die eine von beiden Teil der Hauptstraße und die andere Nebenstraße sein. Weiterhin kann *B* nicht Teil der Hauptstraße und *A* Nebenstraße sein, weil sonst bei der gleichen Verkehrssituation wie oben jetzt gemäß Absatz 2 des § 13 wiederum der Benutzer von *B* Vorfahrt vor dem Benutzer von *A* hätte. Also muß die Straße *A* Teil der Hauptstraße und *B* Nebenstraße sein.

Schließlich kann der zweite Teil der Hauptstraße nicht *C* sein. Denn sonst hätte im folgenden Falle gemäß Absatz 3 des § 13 das Fahrzeug auf *C* die Vorfahrt vor dem Fahrzeug auf *A*: Gleichzeitig fahren Fahrzeuge auf *A* und *C* zur Kreuzung der Abb. 1. Das Fahrzeug auf *C* will geradeaus weiterfahren in die Straße *A* und das Fahrzeug *A* will nach links abbiegen in die Straße *D*. – Also müssen die Straßen *A* und *D* die (abbiegende) Hauptstraße bilden und die Straßen *B* und *C* müssen Nebenstraßen sein.

Damit ergeben sich die folgenden Beschilderungen für die vier Straßen (siehe Abb. S. 100 links unten).

Daß umgekehrt bei allen vier ermittelten Ausschilderungen in jeder Verkehrssituation an der Kreuzung der Abb. 1 stets das Fahrzeug auf der Straße *A* die Vorfahrt hat, bestätigt das Verkehrsaktiv anschließend. (Der Leser führe diese Betrachtung selbständig durch.)

Das Verkehrsaktiv der Schule hat damit die ihm gestellte Aufgabe gelöst. Wenige Tage später wird die Neubeschilderung der Straßenkreuzung gemäß der erzielten Ergebnisse vorgenommen. Da die Sicht für die aus den neuen Nebenstraßen *B* und *C* auf die Kreuzung fahrenden Fahrzeuge nicht erschwert ist, wird an den Einmündungen der neuen Nebenstraßen nur das Zeichen „Vorfahrt auf der Hauptstraße beachten" des Bildes 1 aufgestellt.

Da viele Verkehrsunfälle mit schweren körperlichen und materiellen Schäden die Folge von Unkenntnis bzw. falschen Anwendens der Regeln der Vorfahrt sind, wollen wir uns weiter in der Anwendung dieser Regeln durch das selbständige Lösen der folgenden Aufgaben üben, damit wir nicht eines Tages als Verkehrsteilnehmer durch falsches Verhalten an einer Kreuzung oder Einmündung einen Verkehrsunfall verursachen.

Aufgabe 2: Gib in Form einer Skizze eine geeignete Kreuzung oder Einmündung mit der zugehörigen Ausschilderung an und gib weiterhin zu dieser eine solche Verkehrssituation an, für die die Regeln des § 13 der StVO nicht die Reihenfolge des Passierens der beteiligten Fahrzeuge festlegen.

Aufgabe 3: Alle zu den Einmündungen der Bilder 9, 10 und 11 führenden Straßen sind unbeschildert. Gib an, in welcher Reihenfolge die mit ihrer Zielrichtung eingezeichneten Fahrzeuge die Kreuzung passieren! Begründe deine Entscheidung!

Aufgabe 4: Über die Kreuzung des Bildes 12 fährt keine Straßenbahn. Die Zielrichtung der gleichzeitig auf den Straßen *A*, *B* und *C* zur Kreuzung fahrenden Fahrzeuge sind im Bild 12 markiert. Welche vorfahrtregelnden Verkehrszeichen stehen an dieser Kreuzung, wenn ...

a) zunächst das auf der Straße *B* anfahrende Fahrzeug über die Kreuzung fährt, danach das auf *A* und zuletzt das auf C anfahrende,
b) zunächst das auf C anfahrende über die Kreuzung fährt, dann das auf *B* und zuletzt das auf *A* anfahrende.

Aufgabe 5: An eine Kreuzung des Bildes 13, auf der für Straßenbahnen keine Sonderregelung gilt, fahren gleichzeitig auf allen einmündenden Straßen *A*, *B*, *C* und *D* Fahrzeuge heran. Unabhängig davon, wie jedes einzelne Fahrzeug weiterfahren will, hat stets das Fahrzeug auf *A* die Vorfahrt vor allen anderen. Welche beiden Straßen bilden die Hauptstraße?

Wir nehmen zur Kenntnis:
Auch für die Verkehrssituation an Kreuzungen gelten die Grundregeln für das Verhalten im Straßenverkehr, die im § 1 der StVO festgelegt sind:

§ 1 der StVO:

Absatz 1: Vorsicht und gegenseitige Rücksichtnahme aller Verkehrsteilnehmer sind Grundregeln für das Verhalten im Straßenverkehr.

Absatz 2: Jeder Teilnehmer am öffentlichen Straßenverkehr hat sich so zu verhalten, daß er Personen oder Sachwerte nicht gefährdet oder beschädigt und Personen nicht mehr als unvermeidbar behindert oder belästigt werden.

W. Träger

Achtung! Wettbewerb!

In diesem Beitrag sind 4 Aufgaben gestellt. Wir fordern alle *alpha*-Leser auf, zu ihnen Lösungen einzusenden. Die *Hauptabteilung Verkehrserziehung beim Ministerium des Innern der DDR* und die Redaktion *alpha* überreichen den erfolgreichsten Einsendern wertvolle Preise! Wir wünschen viel Erfolg! (Kennwort: Vorfahrt beachten! Redaktion *alpha*, 7027 Leipzig, Postfach 14).

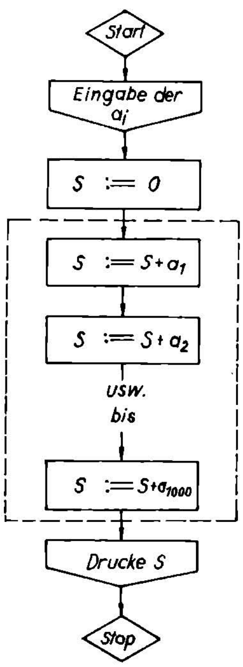
Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

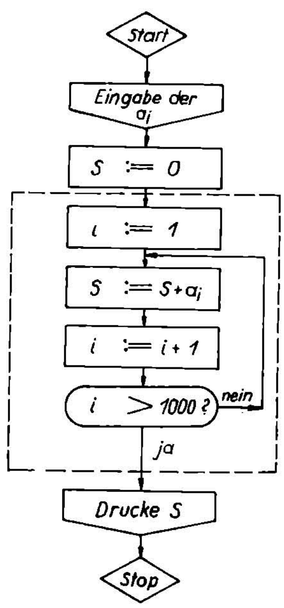
EDV Teil 11

Beispiel 2: In 1000 aufeinanderfolgende Speicherplätze eines Automaten werden die Zahlen a_i ($i=1,2,3, \ldots, 1000$) eingegeben mit dem Ziel,

$$S=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{1000}=\sum_{v=1}^{1000} a_v{}^*$$

zu berechnen. Entsprechend dem vorigen Flußdiagramm würde man programmieren:





Man beachte bei diesem Beispiel, daß eine Unterscheidung der Zwischensummen durch Indizes nicht nötig ist. Es handelt sich um eine *laufende* Zwischensumme, der trotz Veränderung des Wertes stets das gleiche Symbol zukommt. Für solche Größen benötigt der Automat einen Anfangswert. Der Schritt $S:=0$ ist also bei diesem Programm nicht überflüssig.

Wir wollen an der Programmdarstellung noch etwas verbessern. Es wäre doch sehr zeit- und platzraubend, das durch „usw. bis" Beschriebene ausführlich hinzuschreiben. Andrerseits würde es nichts wesentlich Neues ergeben, da es sich um eine Vielzahl gleichartiger Schritte handelt, sich also ein gewisser Prozeß, nämlich das Hinzufügen des nächsten Summanden, ständig wiederholt. Die Darstellung mit Hilfe eines laufenden Index, ausgedrückt durch das Symbol i, gestattet es, das Programm rationeller zu gestalten. i beginnt mit dem Wert 1 (Anfangswert), erhöht sich bei jeder Teiladdition um 1 (Schrittweite) und endet mit dem Wert 1000 (Endwert). Hier das Diagramm, wobei die gestrichelt eingerahmten Teile in diesem und dem vorigen Ablauf einander entsprechen, s. oben. Das Neue hieran ist der in das Programm eingebaute *Test* in Form einer Entscheidungsfrage (Alternative): $i>1000$? Dabei wird ein

Programmverzweigungskästchen (Alternativkästchen) 

verwendet. Es ist klar, daß jede Entscheidungsfrage eine Programmverzweigung nach sich zieht. Hier wiederholt sich bei negativer Antwort ein bestimmter Schritt, nämlich das Addieren des nächsten Summanden zwecks Bildung der neuen Zwischensumme S, während bei positiver Antwort die Rechnung abzubrechen ist.

Die Relationen

$$\underset{\text{neue Zwischensumme}}{S} := \underset{\text{alte Zwischensumme}}{S+a_i} \qquad \text{bzw.} \qquad \underset{\text{neuer Index}}{i} := \underset{\text{alter Index}}{i+1}$$

zeigen nochmals deutlich, daß das Zeichen $:=$ von einem Gleichheitszeichen wesensverschieden ist, denn

„$S=S+a_i$" ($a_i \neq 0$) oder „$i=i+1$"

wäre offensichtlich falsch.

Die beiden Programmabläufe des Beispiels 2 unterscheiden sich dadurch, daß letzterer einen *Zyklus*, eine *Schleife* enthält. Es ist ein *zyklisches Programm*. Fehlen solche Schleifen, wie im Beispiel 1 und in der ersten Fassung des Beispiels 2, so spricht man von einem *Geradeausprogramm*.

J. Frormann

* Das hier benutzte Symbol $\sum$ ist dem fortgeschritteneren Leser als Summenzeichen bekannt. Wenn nicht, so hat das keinen Einfluß auf das Verständnis des folgenden.

Arbeitsgemeinschaften haben das Wort

Arbeitsgemeinschaft EDV — Magdeburg

In der Klasse 10v der Clara-Zetkin-Oberschule Magdeburg lesen alle Schüler regelmäßig die *alpha*. Besonderes Interesse widmen sie den Beiträgen „Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung". Der Grund: Seit 1967 existiert eine Arbeitsgemeinschaft für die Datenverarbeitung an dieser Schule, deren Schirmherr *Prof. Dr. Roder* von der Technischen Hochschule Otto von Guericke Magdeburg ist. 1967 fand der erste Kursus statt, an dem sich 10 Schüler der Klasse beteiligten.
Als erstes befaßten wir uns mit einer Aufgabe, die das Ordnen eines Zahlentripels beinhaltete. Das Flußdiagramm sowie das Feinprogramm wurden teilweise selbständig erarbeitet. Die Kodierung erledigten einige Schüler vollkommen selbständig, ebenso die Eingabe in den Kleinrechner SER 2c, der sich in der Technischen Hochschule Otto v. Guericke Magdeburg befindet und den wir freundlicherweise benutzen durften. Dieser Kursus wurde mehrmals wiederholt, um möglichst vielen Schülern einige Grundkenntnisse der EDV zu vermitteln.
Inzwischen wurde bereits ein zweiter Kursus durchgeführt. Unter der Leitung der Assistentin Frau *Felgenträger* beschäftigten wir uns mit der Funktion $y=ax+b$. Diesmal war der Anteil der selbständigen Arbeit der Schüler am Flußdiagramm und Feinprogramm bedeutend größer als beim ersten Kursus. Kodierung und Eingabe in den Kleinrechner erfolgten diesmal ebenfalls wieder selbständig.

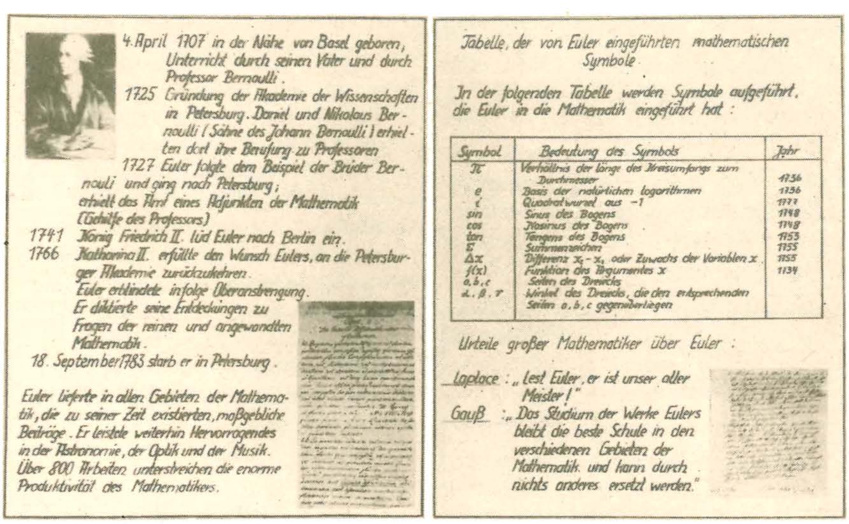
AG-EDV, Clara-Zetkin-OS Magdeburg

AG Mathematik Lucka

Vor sechs Jahren wurde an der Peter-Göring-Oberschule in Lucka (Kreis Altenburg) die erste Arbeitsgemeinschaft Mathematik gegründet. Zur Zeit gibt es drei Arbeitsgemeinschaften: je eine für die Klassenstufe 5 (20 Mitglieder), Klassenstufe 9 (33 Mitglieder) und Klassenstufe 10 (24 Mitglieder). Die Schüler der 5. Klassen treffen sich wöchentlich einmal, die Schüler der 9. und 10. Klassen monatlich dreimal.
Es besteht ein wesentlicher Unterschied zu anderen Arbeitsgemeinschaften, denn im Mittelpunkt vieler Zusammenkünfte steht die *Geschichte der Mathematik*. Wir haben uns vorgenommen, im Leninjahr das Buch von Wußing „Mathematik in der Antike" (Teubner-Verlag Leipzig) mit der 9. Klasse systematisch zu studieren. Dabei haben schon jetzt alle begriffen: die Mathematik, wie sie heute gelehrt wird, ist das Ergebnis eines langen historischen Prozesses, der u. a. durch den Einfluß der ökonomischen und gesellschaftlichen Verhältnisse geprägt wurde. Die Beschäftigung mit der Geschichte der Mathematik ist keine nutzlos vertane Zeit. Sie hilft jedem Schüler beim Erwerb eines wissenschaftlichen Weltbildes. Auch im Staatsbürgerkundeunterricht kommt den Schülern das in der Arbeitsgemeinschaft erworbene Wissen zugute.

Und so arbeiten wir mit alpha!
Unsere Arbeit wird durch *alpha* erleichtert, weil wir Artikel dieser Zeitschrift auswerten. Ein Exemplar je Heft wird in unsere Schülerbücherei aufgenommen und jeder Schüler, der *alpha* nicht von Anfang an abonniert hat, kann sich die Hefte ausleihen. Die Geschichte der Mathematik wird in der AG der Klasse 10 fortgesetzt. Alle AG-Mitglieder kennen den Arbeitsplan und bereiten sich mit unterschiedlicher Intensität vor. Wie bereitete sich *Monika Hebel* zum Thema „Leonhard Euler – Leben und Werk" vor? Sie berichtete: „In *alpha* 4/1967 fand ich einen Beitrag über *Leonhard Euler*, der mich sofort interessierte. Ich studierte den Artikel und suchte mir weitere Literatur. Als ich völlige Klarheit besaß, fertigte ich eine Wandzeitung (siehe Bild) an. Die Wandzeitung sollte eine Vororientierung auf den AG-Nachmittag sein und lenkte nicht nur die Aufmerksamkeit der AG-Mitglieder auf sich."
Zum AG-Nachmittag würdigte *Monika* mit einer ausführlichen Biographie das Leben *Eulers*. Im Anschluß an die Biographie bewies der AG-Leiter den Eulerschen Polyedersatz. Eine gute Mitarbeit war zu verzeichnen, weil sich die Mehrzahl der Mitglieder mit *alpha* 2/1969 vorbereiteten. Und nochmals verwendeten wir an diesem Nachmittag *alpha*. Aus Heft 4/1967 rechneten wir die Aufgaben aus *Eulers* Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra".
Zusammenfassend kann man feststellen: *alpha* hilft jedem Schüler, sein Wissen zu festigen und zu erweitern. Es liegt an jedem Schüler selbst, die gebotene Hilfe zu nutzen. Die Mitglieder der Mathematik-Arbeitsgemeinschaften der Peter-Göring-Oberschule Lucka nutzen diese Hilfe und werden auch in Zukunft mit dieser Zeitschrift arbeiten.

AG-Leiter K.-H. Gentzsch



◀ Mathematikwandzeitung der Peter-Göhring-Oberschule Lucka

Um den Pokal der FdJ-Kreisleitung Teterow

Im Jahre 1969 hat im Kreis Teterow ein Wettbewerb um den *Pokal der FdJ-Kreisleitung* für die beste Schulmannschaft im Fach Mathematik begonnen. Im Mai 1969 wurde bereits die Vorrunde durchgeführt. Alle Schulen durften Mannschaften aufstellen. Die zehn besten Mannschaften der Vorrunde nahmen am 3. 10. 1969 am 1. Wettbewerb teil. Zu jeder Mannschaft gehörte je ein Schüler aus der 5., 6., 7. und 8. Klasse. Sieger des 1. Wettbewerbs wurde die Mannschaft der OS Teterow I. Mit diesem Wettstreit soll die „wettbewerbsarme" Zeit überbrückt werden. Ziel ist, daß alle Teilnehmer noch mehr Freude am Knobeln haben sollen. Diese Form der außerunterrichtlichen Arbeit soll bei uns zur Tradition werden.

Schülerin Carola Kuhnt, OS I, Teterow

Liebe Freunde!
Wenn dieser Beitrag erscheint, werdet Ihr bereits in der 2. Etappe Eures Pokalwettbewerbs sein. Bitte sendet uns einen weiteren Bericht, vor allem aber die Aufgaben! Viel Erfolg wünscht

Redaktion *alpha*

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 31. Dezember 1970

5 ▲ 561 Mit welchen natürlichen Zahlen können die Variablen a, b, c, d belegt werden, damit man aus den Gleichungen
$48:a=b, \quad 24:c=a, \quad 56-(c\cdot d)=50$
drei wahre Gleichheitsaussagen erhält, wenn außerdem $a>c$ und $(a+b+c):d=6$ gelten soll?

Carsten Schmidt, 1901 Dessow

5 ▲ 562 In dem nachstehenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß die waagerecht und senkrecht angeordneten Rechenaufgaben richtig gelöst sind Gleiche Buchstaben bedeuten dabei gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben hingegen verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{ccccc} aabc & : & ac & = & de \\ - & & \cdot & & + \\ fg & + & he & = & aai \\ \hline aaaj & - & dac & = & cie \end{array}$$

Peter Wekel, 925 Mittweida

W 5 ■ 563 Ein Autobus fährt täglich (auch sonn- und feiertags) zweimal mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 40 km in der Stunde von der Kreisstadt A in das Dorf B und zurück. Innerhalb des Dorfes B wurde die Zufahrtsstraße für den Autobus erneuert und zugleich begradigt, wodurch sie um 200 m kürzer wurde. Wieviel Fahrkilometer und wieviel Fahrstunden werden durch die Straßenverkürzung in einem Jahr eingespart?

Karl-Heinz Seidel, 6521 Rockau OS „Maxim Gorki", Kl. 5c

W 5 ■ 564 Die Summe aus einer zweistelligen natürlichen Zahl und deren Quersumme beträgt 100. Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die diese Bedingung erfüllen! Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen?

Sch.

* 5 * 565 Setzt man die Ziffer Null zwischen zwei gleiche zweistellige natürliche Zahlen, dann erhält man eine fünfstellige Zahl, die bei Division durch 91 einen Quotienten ergibt, der elfmal so groß ist wie die ursprüngliche zweistellige Zahl. Begründe diese Aussage!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6 ▲ 566 Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB}=a$; es seien ferner E der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ und F der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks AEF durch die Seitenlänge a des Quadrates $ABCD$ auszudrücken!

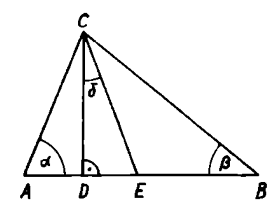
Guido Bimberg, Halle

6 ▲ 567 Von vier äußerlich gleich aussehenden Kugeln sind zwei schwerer als die beiden anderen. Die beiden schwereren sowie die beiden leichteren Kugeln sind jeweils untereinander massegleich. Mit nur zwei Wägungen ist mittels einer Tafelwaage ohne Wägestücke festzustellen, welches die schwereren und welches die leichteren Kugeln sind.

T.

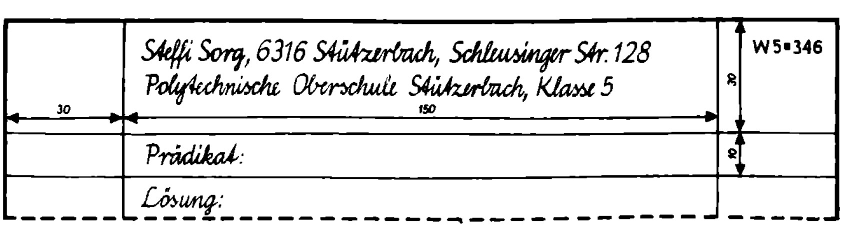
W 6 ■ 568 In dem abgebildeten Dreieck ABC ist $\overline{CD}$ Höhe zur Seite $\overline{AB}$ und $\overline{CE}$ die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB=\gamma$. Der Winkel $\sphericalangle DCE=\delta$ ist durch die Winkel $\sphericalangle CAB=\alpha$ und $\sphericalangle CBA=\beta$ auszudrücken!

Sch.



W 6 ■ 569 Wie groß sind die Innenwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks, bei dem die Winkelhalbierende eines Basiswinkels das gegebene Dreieck in zwei gleichschenklige Teildreiecke zerlegt?

* 6 * 570 Ein mit Farbe angestrichener Holzwürfel soll so zersägt werden, daß wiederum gleichgroße Würfel entstehen; es



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h., für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben, mit * versehen, gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe oder die entsprechenden in Heft 1/71, 2/71, 3/71 veröffentlichten Aufgaben der Kreis-, Bezirks- bzw. DDR-Olympiade einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 gekennzeichnet sind oder veröffentlichte Olympiadeaufgaben 11/12.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder das Endergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 70/71 läuft von Heft 5/70 bis Heft 3/71. Zwischen dem 1. und 10. Oktober 1971 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/70 bis 3/71 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/71 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/70 bis 3/71) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, welche bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1970/71 einsenden, erhalten das *alpha-Abzeichen in Gold* (und die Urkunden zurück).

Redaktion *alpha*

soll kein Holzteil dabei übrig bleiben, und die anfallenden Sägespäne seien unberücksichtigt. Man möchte nun mindestens 30 möglichst große und rauminhaltgleiche Würfel erhalten, die völlig ohne Farbanstrich sind. Welche Kantenlänge besitzen diese Würfel (in cm), wenn der angestrichene Holzwürfel ein Volumen von 27 dm^3 hat? Erläutere deine Überlegungen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7 ▲ 571 Für welche rationalen Zahlen gilt die folgende Beziehung? Das Produkt aus dieser rationalen Zahl und ihrem absoluten Betrag ist gleich der Summe aus dieser rationalen Zahl und ihrem absoluten Betrag.
Anleitung: Beachte die Definition des absoluten Betrages einer Zahl; nimm eine Fallunterscheidung vor! *T.*

7 ▲ 572 In dem Schema

$$\begin{array}{r} \text{OMA} \\ +\ \text{OPA} \\ \hline \text{PAAR} \end{array}$$

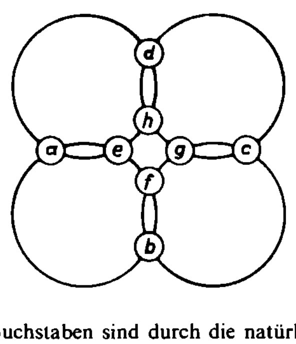
sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition (im dekadischen System) zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Ferner darf die Ziffer 0 nicht am Anfang einer Zahl stehen. Wieviel Lösungen hat diese Aufgabe?

Jochen Heinecke, Altenburg

W 7 ■ 573 „Warum halten Sie die vorgeschriebene Geschwindigkeitsbegrenzung nicht ein? Sie fuhren mit einer Geschwindigkeit von $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$ durch die Ortschaft," kritisierte eine Verkehrskontrolle der Volkspolizei einen Kraftfahrer. Welche Zeit (in Sekunden) hatte die Volkspolizei gestoppt, um diese Aussage treffen zu können, wenn die Meßstrecke 100 m betrug?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

W 7 ■ 574 Die nachstehend abgebildete Figur stellt vier einander kongruente Kreise dar, deren Schnittpunkte durch kleinere Kreise markiert und in die die Buchstaben *a, b, c, d, e, f, g, h* eingetragen wurden. Diese



acht Buchstaben sind durch die natürlichen Zahlen 1, 2, ..., 7, 8 so zu ersetzen, daß die vier Summen der jeweils auf einem Kreis liegenden Zahlen sämtlich gleich sind. *T.*

* 7 * 575 Zeichne drei kongruente Kreise k_1, k_2 und k_3 mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 so, daß die drei Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen und die Kreise paarweise keinen Punkt gemeinsam haben! Konstruiere danach einen vierten Kreis k mit dem Mittelpunkt M, der die Kreise k_1, k_2 und k_3 sämtlich von außen berührt. *T.*

8 ▲ 576 Es ist die folgende Behauptung zu beweisen: Es gibt keine Quadratzahl, deren Nachfolger durch 3 teilbar ist.

R. Schulz, Rotta, Fachlehrer für Mathematik

8 ▲ 577 Der Kapitän eines Schiffes beobachtet genau 45° voraus (d. h. in genau nordöstlicher Richtung) an Steuerbord (rechts) ein Leuchtfeuer. Das Schiff steuert nord und läuft 12 Knoten (d. h. 12 sm/h). Nach 30 min Fahrt beobachtet der Kapitän das Leuchtfeuer genau querab, d. h. unter einem Winkel von 90°, also in genau östlicher Richtung.
Wieviel Seemeilen ist das Schiff zur Zeit der zweiten Beobachtung von dem Leuchtfeuer entfernt?
Es ist eine Zeichnung anzufertigen; die Antwort ist zu begründen. *K.-H. Krüger, Wustrow, Fachlehrer für Mathematik*

W 8 ■ 578 Es ist die folgende Behauptung zu beweisen:
Vertauscht man bei einer beliebigen n-stelligen natürlichen Zahl (in dekadischer Darstellung), wobei $n>2$ gilt, die erste und die letzte Ziffer miteinander, bildet aus beiden Zahlen die Differenz und dividiert diese Differenz durch 9, so erhält man entweder Null oder eine Zahl, die aus lauter gleichen Ziffern besteht.

W 8 ■ 579 Einem Quadrat sei ein Kreis einbeschrieben und ein Kreis umbeschrieben. Wie verhalten sich die Flächeninhalte dieser beiden Kreise zueinander?

Sektion Mathematik der TU Dresden

* 8 * 580 Es seien g eine Gerade, P ein Punkt, der nicht auf g liegt, und P' der zu P in bezug auf die Gerade g symmetrisch gelegene Punkt in der Ebene. Ferner sei A ein weiterer Punkt der Ebene, der nicht auf g liegt, nicht mit P zusammenfällt und von der Geraden g einen größeren oder kleineren Abstand als P hat. Es soll der zu A in bezug auf die Gerade g symmetrisch gelegene Punkt A' nur mit dem Lineal (also ohne Zirkel) konstruiert werden.
Anleitung: Unterscheide die beiden Fälle:
a) A liegt auf derselben Seite von g wie P;
b) A liegt auf der anderen Seite von g!

Yvonne Kruber, POS Stolpen, Kl. 8b (jetzt 9)

9 ▲ 581 Es ist das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$x(y+z)=810$, (1)
$y(x+z)=680$, (2)
$z(x+y)=572$. (3)

K. Krause, Mansfeld, Lehrer i. R.

W 9 ■ 582 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die $x^3 > -x^2$ gilt.

Sektion Mathematik der TU Dresden

W 9 ■ 583 Es seien A und B zwei Punkte mit $\overline{AB}=9$ cm. Ferner sei S ein Punkt auf der Geraden AB zwischen A und B mit $\overline{AS}=7$ cm. D sei ein Punkt außerhalb der Geraden AB, der von S und B den gleichen Abstand von 9 cm hat. Es ist die Länge der Strecke $\overline{AD}$ zu berechnen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

* 9 * 584 Die Rechenaufgabe
$x=(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 1)^3-1\cdot 2\cdot 3\cdot(1+2+3)^3$
löst ein Schüler unzulässigerweise wie folgt:
$x=1^3\cdot 2^3+2^3\cdot 3^3+3^3\cdot 1^3-1\cdot 2\cdot 3\cdot(1^3+2^3+3^3)=251-216=35$ und erhält dennoch ein richtiges Ergebnis.
Man beweise, daß man bei einer solchen Aufgabe durch dieses Verfahren stets zu einer richtigen Gleichung kommt, d. h., daß für alle reellen Zahlen x, y, z gilt:

$$(xy+yz+zx)^3-xyz(x+y+z)^3$$
$$=x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3-xyz(x^3+y^3+z^3).$$

W. Burmeister, Dresden

10/12 ▲ 585 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Ungleichung $\frac{x^2+2x-15}{x+1}<0$ erfüllt ist. *S. H.*

W 10/12 ■ 586 Ein Würfel sei in ein Gefäß, das die Form eines geraden Kreiszylinders mit dem Durchmesser 30 cm hat, so hineingestellt, daß eine Kante des Würfels den Boden des Gefäßes berührt und vier Ecken des Würfels, die nicht auf dieser Kante liegen, die Gefäßwand in gleicher Höhe über dem Boden berühren. Wieviel Liter Wasser muß man in das Gefäß gießen, damit die höchstgelegene Kante des Würfels genau in der Wasseroberfläche liegt?

W 10/12 ■ 587 In einem Gefäß befinden sich weiße, schwarze, rote und blaue Kugeln, und zwar genau 100 Kugeln von jeder Farbe. Eine Versuchsperson soll mit verbundenen Augen aus diesem Gefäß Kugeln ziehen.
a) Wieviel Kugeln muß die Versuchsperson mindestens ziehen, um mit Sicherheit wenigstens 4 Kugeln von der gleichen Farbe zu erhalten?
b) Wieviel Kugeln muß die Versuchsperson mindestens ziehen, um mit Sicherheit wenigstens 10 Kugeln von einer Farbe und außerdem wenigstens 10 Kugeln von einer anderen Farbe zu erhalten?
c) Wieviel Kugeln muß die Versuchsperson mindestens ziehen, um mit Sicherheit wenigstens 10 Kugeln von jeder der vier Farben zu erhalten?
Bemerkung: Die Aufgabe a) ist sehr bekannt und schon häufig gestellt worden. Dagegen sind die Aufgaben b) und c) kaum bekannt und haben auch ein überraschendes Ergebnis. *L.*

* 10/12 * 588 Es sind alle linearen Polynome von der Form $f(x)=ax+b$ anzugeben, wobei a und b reelle Zahlen sind, so daß für alle reellen x die Gleichung

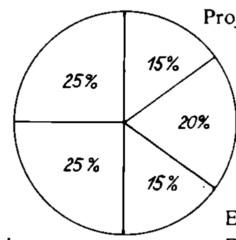
$f[f(x)]=2x+1$ erfüllt ist.

W. Burmeister, Dresden

Berufsbild: Bauingenieur

Die Gestaltung des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus in der Deutschen Demokratischen Republik ist auf das engste mit der Durchführung umfangreicher Bauaufgaben verbunden.
Dem Bauwesen obliegt die Aufgabe, für die Volkswirtschaft und die Bereiche unseres sozialen und kulturellen Lebens komplette Bauwerke und Anlagen zu errichten und sie planmäßig in kürzester Bauzeit mit niedrigsten Kosten und in hoher Qualität fertigzustellen und nutzungsfähig zu übergeben.

Das Bauwesen nimmt bei der Entwicklung unserer nationalen Wirtschaft eine Schlüsselstellung ein. Auf der Grundlage einer umfassenden Industrialisierung und unter den Bedingungen der wissenschaftlich-technischen Revolution hat es entscheidenden Anteil an der Durchsetzung und Mitbestimmung des wissenschaftlich-technischen Höchststandes in allen Industriezweigen und an der Sicherung eines hohen Nutzeffektes der Investitionen.
Die bereits vollzogenen bzw. sich vollziehenden Veränderungen innerhalb des Bauwesens führen auch zu einer grundlegenden Wandlung des Berufsbildes. Während früher der Bauingenieur über ein gutes, größtenteils handwerkliches Allgemeinwissen auf vielen Fachgebieten verfügte, muß er heute neben diesem Allgemeinwissen noch großes Spezialwissen auf seinem Fachgebiet haben, um die geforderten Aufgaben erfüllen zu können. Durch die ständig zunehmende Industrialisierung muß sich heute der Bauingenieur stärker mit Fragen und Aufgaben beschäftigen, die früher nur im Maschinenbau benötigt wurden. Zu denken ist hier insbesondere an die angestrebte vollautomatische Fertigung von Bauelementen sowohl des Beton- als auch des Stahlbaues, die vom Bauingenieur hohe technologische Kenntnisse und Erfahrungen verlangen.
Die dringend notwendige Senkung der Baukosten stellt an einen Bauingenieur weitere hohe Aufgaben. Er muß in der Lage sein, die Bauprozesse, beginnend von der Projektierung bis zur Vorfertigung und Montage, ökonomisch günstig zu gestalten. Dies erfordert ein hohes Maß an volkswirtschaftlichem Denken und ökonomischem Wissen. Große Hilfe hierbei leisten die mathematischen Methoden der Operationsforschung und Optimierung, die durch den Einsatz von elektronischen Rechenanlagen voll praxiswirksam werden. Für die Ausbildung erwächst hieraus die Aufgabe, dem Bauingenieur hohe mathematische Kenntnisse zu vermitteln, die es ihm gestatten, die vorhandenen mathematischen Hilfsmittel maximal im Rahmen der geforderten Aufgaben anzuwenden. Der Einsatz der Bauingenieure entsprechend der vorhandenen Aufgaben des Bauwesens ist im Prognosezeitraum wie folgt vorgesehen:



Die vom Bauingenieur zu lösenden Aufgaben sollen am Beispiel des Hochhauses der Karl-Marx-Universität, einem der bedeutendsten Bauwerke der Stadt Leipzig, dargestellt werden.

1. Phase Planung:
In dieser Phase ist der Bauingenieur maßgeblich an der Festlegung des Standortes eines neu zu errichtenden Bauwerkes beteiligt. Dieser muß sowohl den städteplanerischen Gesichtspunkten entsprechen, als auch die Möglichkeiten zur Errichtung eines derartigen Bauwerkes zulassen. Insbesondere muß hier geklärt werden, ob der vorhandene Baugrund eine genügende Tragfähigkeit aufweist, um die Bauwerkslasten zu übernehmen.

2. Phase Projektierung:
In kollegialer Zusammenarbeit von Architekt und Bauingenieur werden die statische Berechnung und alle zum Bau notwendigen Zeichnungen angefertigt. Im Rahmen der technologischen Vorbereitung werden Fertigungsmethode und Fertigungsablauf des Bauwerkes festgelegt. In dieser Phase ist das Bauwerk in den „Köpfen" der Projektanten bereits fertig.

3. Phase Bauausführung:
Über die Bauausführung gibt es bei baufremden Personen die wenigsten Unklarheiten. Durch die Vielzahl der Baustellen in unserer Republik ist fast jeder mit den einzelnen Phasen der Bauausführung sehr gut vertraut. Das schnelle Wachstum unserer Wohn- und Industriebauten begeistert immer wieder und zeugt vom großen Wissen und Können der Bauarbeiter und Ingenieure. Der Bauingenieur muß jetzt mithelfen, die in der Projektierungsphase erarbeiteten

Pläne in die Baupraxis umzusetzen. Insbesondere muß er die Arbeit auf der Baustelle so organisieren, daß die vorgegebenen Bauzeiten und Baukosten nicht überschritten werden. Auch ist die zeichnungsgerechte Bauausführung in der geforderten Qualität zu überwachen.

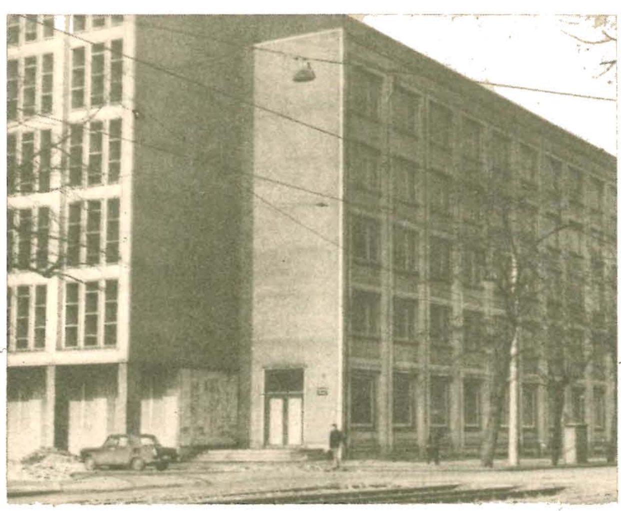
Die hier angegebenen Aufgaben des Bauingenieurs stellen jedoch nur einen sehr kleinen Einblick in sein interessantes Wirken dar. Bei allen Aufgaben muß sich der Bauingenieur immer darüber im klaren sein, daß seine Produkte über mindestens 50 Jahre von allen Menschen begutachtet und kritisiert werden. Er wird daher immer bestrebt sein, sich eine gute „Visitenkarte“ zu schaffen.

Über die Bauingenieurausbildung an der Hochschule für Bauwesen, Leipzig:

Die III. Hochschulreform hat auch an der Hochschule für Bauwesen Leipzig zu wesentlichen strukturellen und inhaltlichen Veränderungen geführt. Ausgehend von den gesellschaftlichen Notwendigkeiten und den Bedürfnissen der Baukombinate wurden 2 Sektionen gebildet, die in entsprechenden Fachstudien Studenten fachspezifisch ausbilden. Die Ausbildungsdauer beträgt 4 Jahre und schließt mit dem akademischen Grad eines Diplomingenieurs ab. Diese 4 Studienjahre gliedern sich in ein für alle Studenten gemeinsames 2jähriges Grundstudium und ein sektionsspezifisches 2jähriges Fernstudium.

Die Sektion Technologie bildet im Rahmen des Fachstudiums Technologie Bauingenieure aus, die für folgende Tätigkeitskomplexe vorgesehen sind:

- Verfahrensgestaltung für Produktionsprozesse der zentralen und nichtstationären Bauproduktion
- Systemgestaltung für komplexe Prozesse der Bauproduktion
- Arbeitsgestaltung in allen Bereichen der zentralen und nichtstationären Produktion.

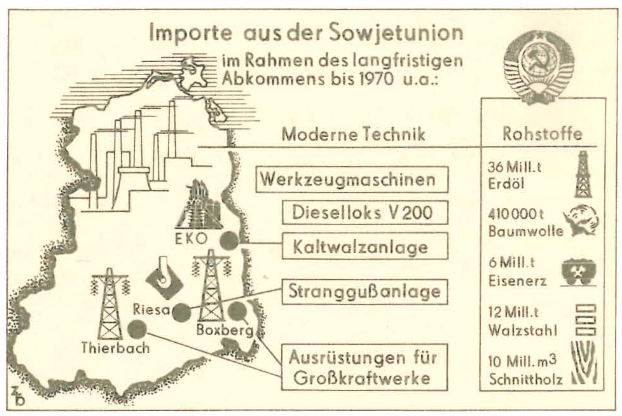


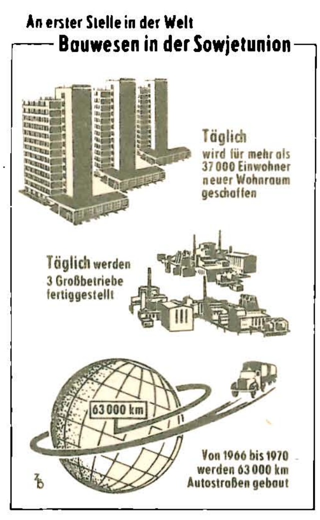
Die Sektion Ingenieurbau bildet im Rahmen des Fachstudiums Ingenieurbau (Ingenieurtiefbau in Vorbereitung) Bauingenieure aus, die für folgende Tätigkeitskomplexe vorgesehen sind.

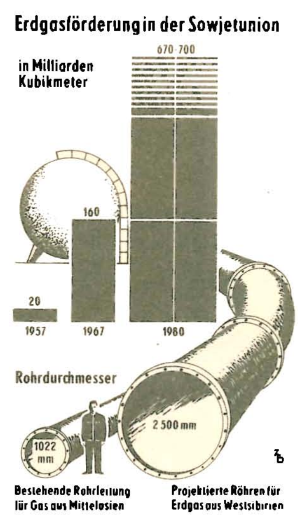
- Projektierung von baulichen Anlagen aller Art (Wohngesellschafts- und Industriebauten, Brücken und Sonderkonstruktionen) aus den zur Zeit bekannten Baustoffen.

W. Wittig

Lenins Vermächtnis wird erfüllt



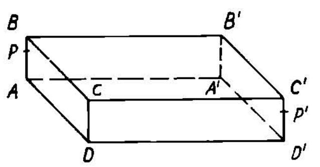




Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. Herbert Frank

Direktor der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin

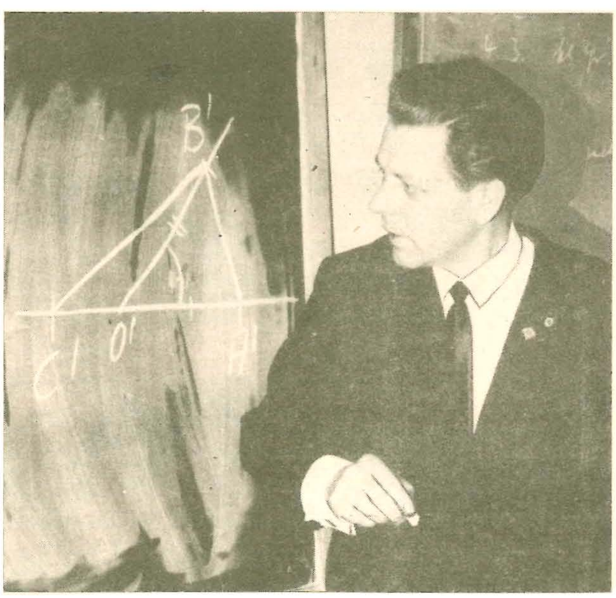
▲ 589 Es sei ein Quader $ABCDA'B'C'D'$ gegeben und auf seinen diagonal gegenüberliegenden Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{D'C'}$ je ein Punkt P bzw. P', wobei P näher zur Ecke B als zur Ecke A und P' näher zur Ecke C' als zur Ecke D' liegt (s. Abb.).



Konstruiere die kürzeste Verbindungslinie zwischen den Punkten P und P', die ganz auf der Oberfläche des Quaders liegt!

Hinweis: In der Ebene ist die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten P und P' die Strecke $\overline{PP'}$.

Bemerkung: Die gesuchte kürzeste Verbindungslinie zwischen den Punkten P und P' kann auch experimentell ermittelt werden, indem man auf der Oberfläche des Quaders einen Faden von P nach P' spannt. Aus der höheren Mathematik ist bekannt, daß der gespannte Faden die Lage der kürzesten Verbindungslinie einnimmt.



Wir stellen vor:

Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin

Mathematische Forschung und Lehre bauen an der Humboldt-Universität zu Berlin auf langjährigen und großen Traditionen auf. In der Vergangenheit wirkten an der Humboldt-Universität solche bekannten Mathematiker, wie *Weierstraß, Landau, Schur, v. Neumann.* Heute wird an der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität vor allem auf den Gebieten „Mathematische Kybernetik und Rechentechnik" und „Mathematische und statistische Methoden der Operationsforschung", aber auch auf den Gebieten „Analysis", „Algebra", „Geometrie" und „Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik" ausgebildet. Einen besonderen Schwerpunkt stellt in der Arbeit der Sektion die Ausbildung von Diplom-Lehrern für Mathematik und Physik dar.

In jeder Studienrichtung wird darauf geachtet, daß die Studenten sowohl in ihrer gesellschaftlichen als auch in ihrer fachlichen Entwicklung die höchsten Anforderungen erfüllen. Der ständig wachsende Bedarf an hochqualifizierten Diplom-Mathematikern und Diplom-Lehrern und die damit verbundene steigende Anzahl von Studenten an der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität führten zu einer weitgehenden Veränderung des Studienganges. In einem 4jährigen Studium erhalten unsere Studenten die für ihren späteren Beruf notwendigen Kenntnisse und Fähigkeiten vermittelt. Die gesellschaftlich aktivsten und fachlich besten Studenten haben darüber hinaus die Möglichkeit, in weiteren 3 Jahren als Forschungsstudenten den Titel „Dr. rer. nat." an unserer Sektion zu erwerben. Es ist das besondere Anliegen unserer Ausbildung, begabte und interessierte Studenten frühzeitig in die mathematische Forschung an unserer Sektion einzubeziehen.

Unsere Sektion unterhält vielfältige Beziehungen zum mathematischen Leben der DDR. Über Weiterbildungsveranstaltungen, die Förderung der Mathematik-Olympiaden und die direkte Unterstützung von Großforschungszentren sind fruchtbare Kontakte hergestellt, die weit über Berlin hinausreichen.

Allen bekannt sind die Arbeiten unseres Bereichs „Schulmathematik und Methodik des Mathematikunterrichts". Die Mitarbeiter dieses Bereiches waren und sind aktiv an der Entwicklung der Lehrpläne und Lehrbücher für den Mathematikunterricht von der 1. bis zur 12. Klasse beteiligt.

Ich wünsche allen *alpha*-Lesern weiterhin viel Freude und Erfolg beim Lösen mathematischer Probleme. Beide sind Quellen für das Interesse an der Mathematik. Das Studium an unserer Sektion wird ihnen weitere Schätze der Mathematik erschließen.

Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen

10. Aufgabe:

Für $1 \leqq R_1,\ R_2 \leqq 10$ ist ein Nomogramm mit drei parallelen Funktionsleitern zur Formel $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ (Formel für Ersatzwiderstand zweier parallel geschalteter Widerstände) zu zeichnen!

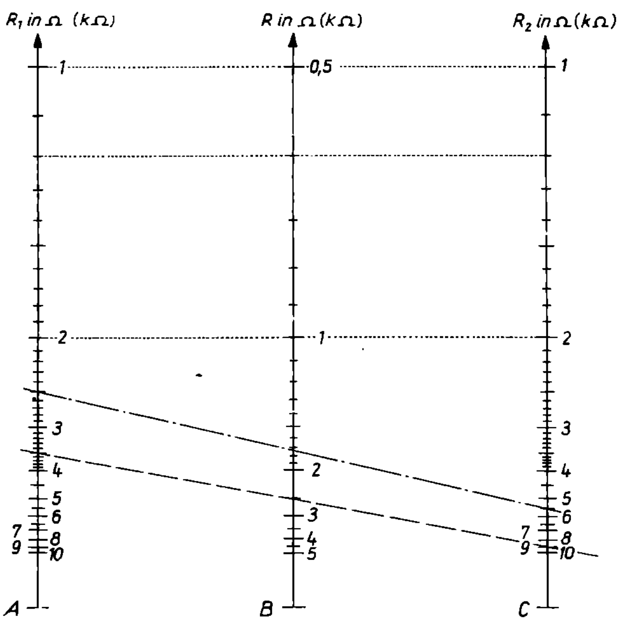
Lösung: In naheliegender Weise wird gesetzt: $R_1 = x\Omega$, $R_2 = y\Omega$ und $R = z\Omega$. Dann gilt

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

Hieraus folgt durch einfache Umformungen

$$2\cdot\frac{1}{2z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

Diese Gleichung geht durch die Festsetzung $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(y)=\frac{1}{y}$ und $h(z)=\frac{1}{2z}$ in die Schlüsselgleichung $2h(z)=f(x)+g(y)$ über. Mit den drei Funktionen $\xi=\frac{1}{x}$, $\eta=\frac{1}{y}$ (Vergleiche Aufgabe 2!) und $\zeta=\frac{1}{2z}$ können



wir bei geeigneter Wahl der Längeneinheit und des Abstandes der drei parallelen Leiter das Nomogramm zeichnen. Die Kotierung der z-Leiter kann dabei auf Grund der folgenden Bemerkung zeichnerisch festgelegt werden: Für $R_1 = R_2$ folgt aus $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ die einfachere Gleichung $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R}=\frac{2}{R_1}$.

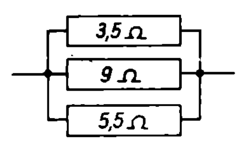
Hieraus folgt weiter $R=\frac{R_1}{2}$.

Dies bedeutet, daß jede Gerade, die durch zwei Punkte der R_1- und R_2-Leiter mit gleichen Koten (also parallel zur Geraden durch die Punkte A, B und C verläuft, den R-Leiter in einem Punkte schneiden muß, dessen Kote halb so groß ist wie die der ersten beiden Schnittpunkte (Siehe punktiert markierte Geraden der Abb.).

Den Nachweis, daß jede Lösung des angefertigten Nomogramms der Gleichung $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ genügt, führen wir analog zu dem auf Seite 81 geführten Beweis selbständig.

11. Aufgabe:

Ermittle mit dem gemäß Aufgabe 10 angefertigten Nomogramm den Gesamtwiderstand R dreier parallel geschalteter Widerstände von 3,5Ω, 9Ω und 5,5Ω!



Lösung: Zunächst wird der Gesamtwiderstand von zwei parallel geschalteten Widerständen, etwa von 3,5Ω und 9Ω zu 2,5Ω (Gestrichelt markierte Gerade der obigen Abb.) ermittelt. Anschließend wird noch der Gesamtwiderstand der parallel geschalteten Widerstände von 2,5Ω und 5,5Ω zu $R = 1{,}7\Omega$ (Durch Punkte und Striche markierte Gerade der obigen Abb.) bestimmt.

Wir überblicken, daß zu den Formeln

$R = R_1 + R_2$ (Ersatzwiderstand zweier hintereinander geschalteter Widerstände) und

$A=\frac{a+b}{2}$ (Arithmetisches Mittel A zweier reeller Zahlen a und b) sehr einfach anzufertigende Nomogramme des von uns betrachteten Typs gehören. Diese würde man mit Vorteil auf Millimeterpapier zeichnen. Doch auch zu Formeln, denen man es nicht unmittelbar ansieht, gehören Nomogramme mit drei parallelen Funktionsleitern. Neben Formeln wie $H=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ (Harmonisches Mittel H zweier positiver reeller Zahlen) und

$A=\pi R^2-\pi r^2$ (Fläche A eines Kreisringes mit den Radien R und r) gehören hierzu auch die Formeln $w:g=p:100$ (Grundgleichung der Prozentrechnung), $m=\varrho V$ (Beziehung zwischen Masse, Dichte und Volumen eines homogenen Körpers) und $U=IR$ (Ohmsches Gesetz).

12. Aufgabe:
Zu der Formel $w:g=p:100$ ist ein Nomogramm mit drei parallelen Funktionsleitern zu zeichnen!

Lösung: Schüler (ab Klasse 9), die die Logarithmusfunktion kennen, können diese Aufgabe wie folgt anpacken: Die gegebene Formel wird zunächst umgestellt zu $w=\frac{p}{10}\cdot\frac{g}{10}$.

Mittels der Festsetzungen $w=z$, $p=x$ und $g=y$ und Logarithmieren der gegebenen Gleichung folgt

$$lg z = lg\frac{x}{10}+lg\frac{y}{10}.$$

Der hieraus folgenden, der Schlüsselgleichung unseres Nomogrammtyps angepaßten Gleichung

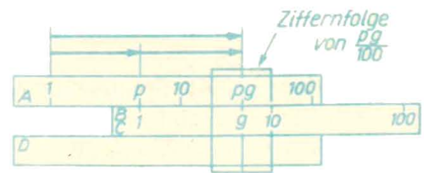
$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot lg z = lg\frac{x}{10}+lg\frac{y}{10}$$

sind die Gleichungen der drei Leiterfunktionen zu entnehmen:

$\xi = lg\frac{x}{10}$; $\eta = lg\frac{y}{10}$; $\zeta=\frac{1}{2}\,lg z$ (Siehe Aufgabe 4!)

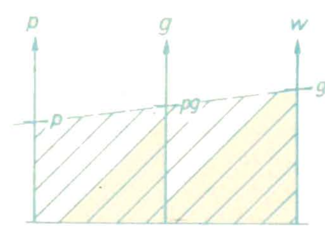
Schüler (ab Klasse 7), die mit dem Rechenstab umgehen können, werden die Aufgabe wie folgt lösen: die beiden äußeren Funktionsleitern des gesuchten Nomogrammes werden versuchsweise kongruent zu der auf der Zunge des Rechenstabes markierten Skale *B* gezeichnet und mit *p*- bzw. *g*-Leiter benannt. Diese beiden Leitern sind durch Anlegen der Stabzunge und Übertragen der Koten der Skale *B* sehr einfach und schnell zu zeichnen.

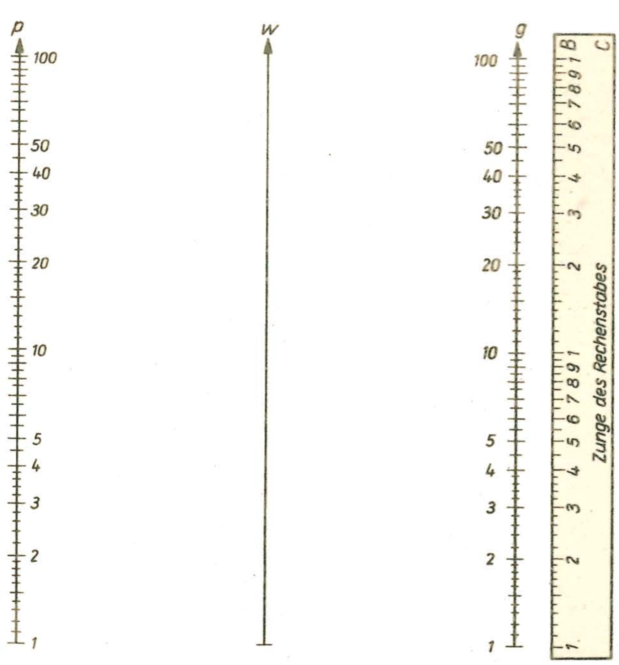
Natürlich muß gezeigt werden, daß dieser Ansatz zum Ziele führt, d. h. es ist möglich, die *w*-Leiter so zu kotieren, daß jede Lösung des entstehenden Nomogrammes der Gleichung $w:g=p:100$ genügt. Mit Rechenstab finden wir das zu gegebenen *p* und *g*, die der Einfachheit halber beide der Zusatzbedingung $1\leqq p;\ g\leqq 10$ genügen sollen, gehörige *w*, das durch die Formel $w=\frac{pg}{100}$ bestimmt ist, mittels der folgenden Stabeinstellung. Da der Nenner 100 bei dieser Stabeinstellung unberücksichtigt bleibt, gestattet diese Einstellung nur die Ziffernfolge des als Dezimalbruch geschriebenen Ergebnisses von $\frac{pg}{100}$ abzulesen.

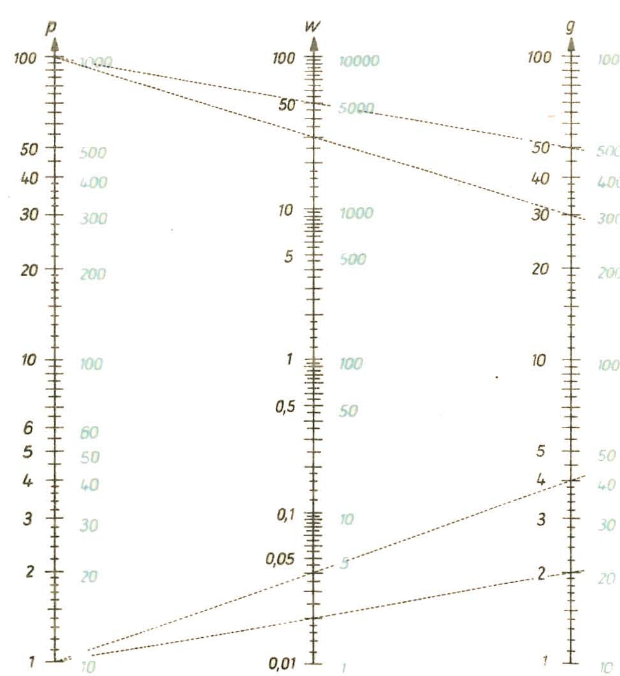


Die Strecke, die die Punkte mit den Koten 1 und *pg* der Skale *A* zu Endpunkten hat, ist gleich der Summe der Strecken, die die Punkte mit den Koten 1 und *p* der Skale *A* bzw. mit den Koten 1 und *g* der Skale *B* zu Endpunkten haben. Diese Streckenrelation benutzen wir zum Nachweis, daß unser Ansatz zum Ziele führt: Wir ergänzen die obige Abb. durch eine *w*-Leiter, die ein Bild der schon gezeichneten *p*- und *g*-Leiter im Maßstab 1:2 ist.

Auf dieser *w*-Leiter trägt der Punkt die Kote *pg*, der mit den Punkten mit den Koten *p* und *g* der *p*- bzw. *g*-Leiter in einer Geraden liegt. Dies folgt aus der am Rechenstab als gültig abgelesenen Streckenrelation, aus der schon früher benutzten Beziehung zwischen







Mittellinie und Grundseiten eines Trapezes (In der Abb. S. 110, Mitte, schraffiert.) sowie daraus, daß die w-Leiter ein Bild der Skale B des Rechenstabes im Maßstab 1:2 ist.
Damit ist gezeigt, daß die getroffene Wahl der p- und g-Leiter zum Ziele geführt hat. Die Unschönheit, daß die jetzige w-Leiter nur die richtige Ziffernfolge des Ergebnisses liefert, läßt sich durch einfaches Umkotieren beseitigen: Jede bisherige Kote der w-Leiter wird durch ihren hundertsten Teil ersetzt.
Natürlich wird man bei der praktischen Ausführung die Kotierung der w-Leiter zeichnerisch vornehmen. Dabei stützt man sich etwa auf die beiden folgenden Bemerkungen:
Für $p=100$ folgt aus $w:g=p:100$ die einfache Beziehung $w=g$. Gerade, die durch den Punkt der p-Leiter mit der Kote 100 verlaufen, schneiden die g- und w-Leiter in Punkten mit gleichen Koten. Geraden, die durch den Punkt der p-Leiter mit der Kote 1 verlaufen, schneiden wegen $w:g=1:100$ die w- und g-Leiter in Punkten, deren Koten sich wie 1:100 verhalten. Wie auf Grund dieser beiden Bemerkungen die w-Leiter kotiert wird, zeigen die punktiert markierten Geraden der Abbildung (Abb. S. 110 unten).

Eine zweite Kotierung (Diese Koten sind rot gedruckt) der drei Leitern dieses Nomogrammes ist zweckmäßig: Wir multiplizieren alle Koten der g- und p-Leiter mit dem Faktor 10. Gemäß der Formel $w=\frac{gp}{100}$ sind dann alle Koten der w-Leiter mit dem Faktor 100 zu multiplizieren.
Anschließend lassen wir uns noch mitteilen, daß dieses Nomogramm vorteilhaft auf das in Fachgeschäften erhältliche logarithmische Papier gezeichnet wird.

V. Schlußbemerkung

Nomogramme, die wir zu wichtigen komplizierten Formeln des Schulstoffes in größerem Format angefertigt haben, können wir auf eine feste Unterlage aufgezogen und durch glasklare Kunststoffolie vor Beschädigung und Verschmutzung geschützt, unserer Schule bei besonderen Anlässen als Geschenke überreichen. Diese Nomogramme stehen dann, an entsprechenden Stellen in den Fachkabinetten ausgehängt, bei Bedarf zur Benutzung bereit.
Viel Erfolg bei der Anfertigung und viel Freude bei der Verwendung von Nomogrammen wünscht

W. Träger

Freitag, der 13.

Aberglaube oder nicht: Das Problem, wie oft ein „Freitag, der 13." in einem bestimmten Jahr auftritt, hat die folgende elegante Lösung:
Ob ein „Freitag, der 13." im Januar vorkommt, hängt von zwei Dingen ab: Erstens vom Wochentag, auf den der 13. im vorherigen Monat, im Dezember, fällt; und zweitens von der Anzahl der Tage im Monat Dezember. Wenn zum Beispiel der 13. im Dezember auf einen Montag fällt, so wird der 13. im Januar auf einen Donnerstag fallen, da ja der Dezember 31 Tage hat. Ob ein „Freitag, der 13." im Februar auftritt, hängt entsprechend davon ab, auf welchen Wochentag der 13. im Januar fällt und wie viele Tage der Januar hat, oder auf welchen Tag der 13. im Dezember fällt und wie viele Tage Dezember und Januar zusammen haben.
Wir haben jetzt ein Modell und brauchen zur Lösung nur noch einige mathematische Begriffe. Wir betrachten die Folge der Monate eines Jahres, die mit Dezember beginnend in der gewöhnlichen Reihenfolge angeordnet sind:

$$\{\text{Dezember, Januar, ..., November}\}.$$

D_i sei die Anzahl der Tage des i-ten Monats in der obigen Folge, und wir definieren

$$d_i \equiv D_i \pmod 7,*$$

wobei $0 \leqq d_i < 7$ ist. Dann ist d_i die Anzahl der Wochentage, um die sich der 13. nach vorn bewegt, wenn wir von einem Monat mit D_i Tagen zum nächsten Monat übergehen.
Jetzt definieren wir

$$\delta_i \equiv \sum_{k=1}^{i} d_k \pmod 7 \text{ für } i=1, 2, \ldots, 12,$$

wobei $0 \leqq \delta_i < 7$.
Die Zahlen $\{\delta_i\} = \{d_1 \pmod 7), d_1+d_2 \pmod 7), \ldots, d_1+d_2+ \ldots d_{12} \pmod 7)\}$ geben die Gesamtzahl der Wochentage (mod 7) an, um die sich der 13. im i-ten Monat gegenüber der Stellung im vorhergehenden Dezember vorwärts bewegt.
Wir betrachten jetzt ein Nichtschaltjahr:

$\{D_i\} = \{31,31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30\}$
$\{d_i\} = \{3,3,0,3,2,3,2,3,3,2,3,2\}$
$\{\delta_i\} = \{3,6,6,2,4,0,2,5,1,3,6,1\}$.

Die Folge $\{\delta_i\}$ enthält alle Zahlen zwischen 0 und 6, und folglich gibt es in jedem Nichtschaltjahr mindestens einen „Freitag, den 13.". Da die Zahl 6 als einzige dreimal auftritt, fällt in einem Nichtschaltjahr der 13. dreimal auf einen Freitag, genau dann, wenn der 13. im vorherigen Dezember auf einem Sonnabend lag. Es wird dann einen „Freitag, den 13." im Februar, März und November geben, denn die 6 steht in der Folge $\{\delta_i\}$ an der zweiten, dritten und elften Stelle.
Für ein Schaltjahr gilt:

$\{D_i\} = \{31,31,29,31,30,31,30,31,31,30,31,30\}$
$\{d_i\} = \{3,3,1,3,2,3,2,3,3,2,3,2\}$
$\{\delta_i\} = \{3,6,0,3,5,1,3,6,2,4,0,2\}$

Das Ergebnis ist ähnlich. In einem gegebenen Schaltjahr gibt es mindestens einen und höchstens drei „Freitag, den 13.", und nur, wenn der 13. im vorhergehenden Dezember auf einen Dienstag fällt, werden wir drei „Freitage, den 13." haben.
Eine Betrachtung der Folge $\{\delta_i\}$ liefert in beiden Fällen (Schaltjahr oder Nichtschaltjahr) das Ergebnis, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau ein „Freitag, der 13." in einem gegebenen Jahr vorkommt, $\frac{3}{7}$ ist. Die Wahrscheinlichkeit für genau zwei „Freitage, den 13." ist ebenfalls $\frac{3}{7}$ und die für genau drei ist $\frac{1}{7}$. Um die „unglücklichen" Jahre (jene Jahre mit drei „Freitag, den 13.") zu bestimmen, wurde das folgende berechnet.
Für $1800 < x \leqq 1900$ ist das Jahr x genau dann ein „unglückliches", wenn $x \equiv 9$, 12, 15 oder 26 (mod 28) ist.
Für $1900 < x \equiv 2000$ gilt: Das Jahr x ist dann und nur dann ein „unglückliches", wenn $x \equiv 10, 21, 24$ oder 27 (mod 28) ist. So sind die einzigen „unglücklichen" Jahre, die noch in unserem Jahrhundert vorkommen, die Jahre 1970, 1981, 1984, 1987 und 1998.
Als Übungsaufgabe kann nun berechnet werden, wie oft in einem gegebenen Jahr der 21. auf einen Donnerstag fällt.

Nach einem Artikel von William T. Bailey, Buffalo (aus: The Mathematics Teacher 5/69) übersetzt und bearbeitet von Gerald Hofmann, Student im 2. Studienjahr, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig.

* Über die Bedeutung einer Kongruenz $a \equiv b \pmod p$ könnt Ihr Euch in *alpha* 3/69 bis 2/70 informieren.

XII. Internationale Mathematikolympiade

Budapest/Keszthely 1970

1. M sei ein beliebiger innerer Punkt auf der Seite AB eines Dreieckes ABC. r_1, r_2, r seien entsprechend die Inkreisradien der Dreiecke AMC, BMC, ABC. ϱ_1, ϱ_2, ϱ seien die Radien der Ankreise dieser Dreiecke, die im Inneren des Winkels $\sphericalangle ACB$ liegen. Man beweise, daß

$$\frac{r_1}{\varrho_1}\cdot\frac{r_2}{\varrho_2}=\frac{r}{\varrho} \text{ gilt.}$$

(VR Polen, 5 Punkte)

2. Gegeben seien natürliche Zahlen a, b, n ($a>1$, $b>1$, $n>1$). A_{n-1} und A_n seien Zahlen im Zahlensystem mit der Basis a, B_{n-1} und B_n seien Zahlen im Zahlensystem mit der Basis b.
A_n und B_n haben die Ziffern $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0$, A_{n-1} und B_{n-1} haben die Ziffern x_{n-1}, $x_{n-2}, \ldots, x_0$ (wobei $x_n \neq 0$ und $x_{n-1} \neq 0$ ist), also
$A_{n-1}=x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_0$,
$A_n=x_n x_{n-1} x_{n-2}\ldots x_0$
(Ziffernschreibweise im System mit der Basis a)
$B_{n-1}=x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_0$, $B_n=x_n x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_0$
(Ziffernschreibweise im System mit der Basis b)
Man zeige, daß

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$$

dann und nur dann gilt, wenn $a>b$ ist.
(SR Rumänien, 7 Punkte)

3. Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ reelle Zahlen mit
$1=a_0 \leqq a_1 \leqq \ldots \leqq a_n = \ldots$ (1)
Wir betrachten die Folge $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, die durch

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

definiert ist.

Man beweise:
I. Für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ gilt
$0 \leqq b_n < 2$.
II. Für ein beliebiges c aus $0 \leqq c < 2$ existieren solche Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ mit der Eigenschaft (1), daß
$b_n > c$
für unendlich viele natürliche Zahlen n erfüllt ist.
(Schweden, 8 Punkte)

4. Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft:
Die Menge $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ läßt sich in zwei elementfremde nicht leere Teilmengen so zerlegen, daß das Produkt aller Elemente der einen Teilmenge gleich dem Produkt aller Elemente der anderen Teilmenge ist.
(ČSSR, 6 Punkte)

5. In einem Tetraeder $ABCD$ sei der Winkel $\sphericalangle BDC$ ein rechter. Der Fußpunkt des von D auf die Ebene ABC gefällten Lotes sei identisch mit dem Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ABC. Es ist zu beweisen, daß
$(AB+BC+AC)^2 \leqq 6\cdot(AD^2+BD^2+CD^2)$
ist.
Für welche Tetraeder gilt das Gleichheitszeichen?
(VR Bulgarien, 6 Punkte)

6. In einer Ebene seien 100 Punkte gegeben, wobei keine drei dieser Punkte auf einer Geraden liegen. Wir betrachten alle möglichen Dreiecke, deren Eckpunkte unter den gegebenen Punkten vorkommen.
Man beweise, daß höchstens 70 Prozent dieser Dreiecke spitzwinklig sind.
(UdSSR, 8 Punkte)

- Preise wurden für folgende Punktzahlen vergeben:

1. Preis 40 bis 37 Punkte
2. Preis 35 bis 30 Punkte
3. Preis 28 bis 19 Punkte

36 und 29 Punkte erreichte kein Teilnehmer. Sonderpreise wurden für die *elegante Lösung einer Aufgabe* vergeben.

DDR-Teilnehmer der XII. IMO

Wolfgang Burmeister — 1. Preis
dazu: Sonderpreis für die elegante Lösung der 3. Aufgabe
Erweiterte Oberschule Dresden-Süd, Klasse 11

Jürgen Schefter — 2. Preis
Erweiterte Oberschule „Wladimir Komarow", Elsterwerda, Klasse 10

Andreas Felgenhauer — 2. Preis
Spezialklasse für Mathematik an der Technischen Hochschule „Otto von Guericke" Magdeburg, Klasse 12

Olaf Böhme — 3. Preis
dazu: Sonderpreis für die elegante Lösung der 4. Aufgabe
Erweiterte Oberschule Dresden-Reick, Klasse 10

Peter Oswald — 3. Preis
Erweiterte Oberschule Dresden-Süd, Klasse 12

Sie waren mit dabei

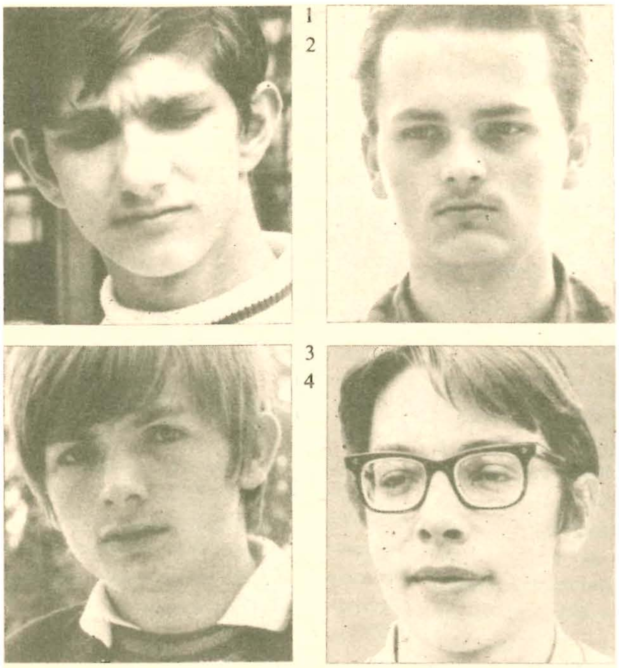
Delegationsleiter Dr. habil. H. Bausch
Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin

Delegationssekretär Dr. habil. G. Burosch
Universität Rostock

Päd. Betreuer Oberlehrer M. Mäthner
Rat des Bezirkes, Abt. Volksbildung, Cottbus

Sonderberichterstatter der *Jungen Welt*
Dipl.-Journalist Irma Weinreich, Berlin

Chefredakteur *alpha*
StR J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig

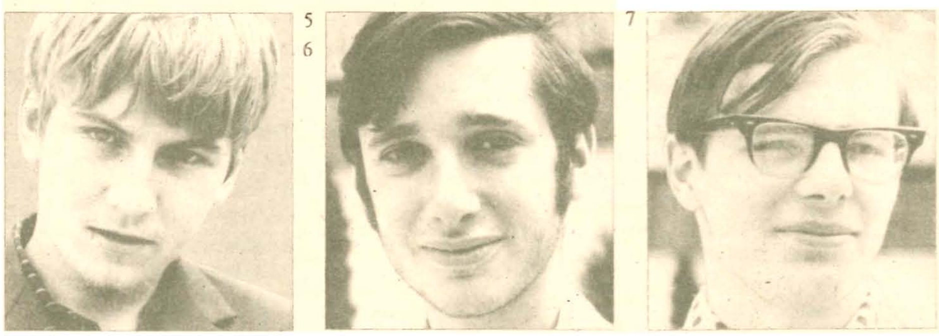


1
2
3
4

Preisträger der XII. IMO

	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Sonderpreis	Gesamtpunktz.
VR Ungarn	3	1	3	4	233
DDR	1	2	4	2	221
UdSSR	2	1	3		221
SFR Jugoslawien		3	3		209
SR Rumänien		3	4		208
England	1		6		180
ČSSR			4	1	150
VR Bulgarien			3		145
Frankreich		1	4		141
Schweden			2		110
Polen			1		105
Österreich			1		104
Niederlande			1		87
Mongolische VR			1		78
	7	11	40	7	2192*

* von 4480 möglichen Punkten



5
6
7

alpha stellt vor

Einen *ersten Preis* erhielten:

1. Imre Ruzsa, Budapest
2. Ervin Bajmóczy, Budapest
3. István Gönczi, Miscolc (VR Ungarn)
4. Klimov Arkagyji, Arsamas
5. Hoduljev Andrej, Kalinin (4. und 5. UdSSR)
6. Bernard Silverman, London
7. Wolfgang Burmeister, Dresden

Thomas Jentsch 3. Preis
Spezialklasse für Mathematik/Physik der Martin-Luther-Universität Halle, Klasse 11

Fredy Reimann 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Theodor Fontane", Neuruppin, Klasse 12

Ursula Tyl
Erweiterte Oberschule „Heinrich Hertz", Berlin, Klasse 11

● Alle Teilnehmer erhielten vom Ministerium für Volksbildung und von der Mathematischen Gesellschaft der DDR Ehrenurkunden, Geld- und Buchprämien.

● Der Zentralrat zeichnete aus: W. Burmeister mit der *Artur-Becker-Medaille in Gold*, J. Schefter mit der *Artur-Becker-Medaille in Silber*, O. Böhme, P. Oswald, T. Jentsch, F. Reimann mit der *Artur-Becker-Medaille in Bronze*. A. Felgenhauer erhielt die *Ehrenurkunde des Zentralrates* und U. Tyl ein *Anerkennungsschreiben* des 1. Sekretärs des Zentralrates Dr. G. Jahn.
Die Auszeichnung nahmen vor (am 22. 7. 1970 im Interhotel „Unter den Linden"): Dr. G. Herger (Zentralrat der FdJ), OStR S. Tielmann (Min. f. Volksbildung), Prof. Dr. W. Engel (stellv. Vorsitzender der Mathematischen Gesellschaft und Vorsitzender des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR). Die Glückwünsche des ZK der SED überbrachte im Namen von Prof. Dr. K. Hager die Genossin Dr. Sonja Müller.

● F. Reimann studiert ab September Mathematik an der Universität Budapest, P. Oswald in der Sowjetunion.

● An der XII. IMO nahmen 6 Mädchen teil. *alpha* stellt sie in Heft 1/71 vor.

● Österreich führte im vergangenen Schuljahr erstmals eine Mathematikolympiade durch, nahm an der XII. IMO erstmals teil.

● Die XII. IMO wurde vom stellv. Minister für Kultur der VR Ungarn und vom Vorsitzenden der Jury, Prof. Dr. G. Hájos (Universität Budapest) in der *Hochschule für Agrarwirtschaft* in Keszthely (Plattensee) eröffnet.

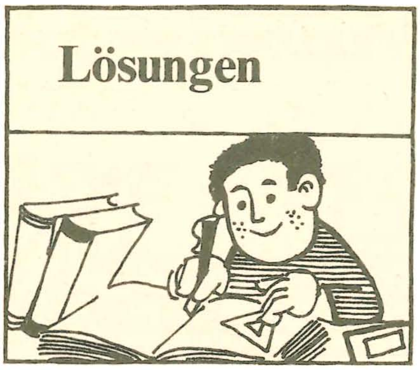
● Die beiden Klausuren (Arbeitszeit je 4 Stunden) fanden am 13. und 14. Juli in der *Fachschule für Gastronomie* in Keszthely statt.

● Koordinatoren haben die Aufgabe, die von den 14 Delegationsleitern für die Lösung der Aufgaben ihrer Schüler erteilten Punktzahlen in Hinsicht auf alle Teilnehmer in Übereinstimmung zu bringen. Von den 12 (für jede Aufgabe zwei) eingesetzten ungarischen Koordinatoren waren 5 ehemalige Teilnehmer an IMOs.

● Die Abschlußfeier der XII. IMO fand in der Aula der *TU Budapest* statt. Prof. Dr. J. Vyšin, Delegationsleiter der ČSSR-Mannschaft, dankte im Namen aller Teilnehmer den ungarischen Freunden für die große Gastfreundlichkeit und lud für 1971 zur XIII. IMO nach Zilina/Bratislava ein.

● Unsere ungarischen Freunde zeigten uns Budapest bei Tage und bei Nacht (Stadtrundfahrten). Wir besichtigten das Thermalbad Heviz, unternahmen eine Ganztagsexkursion mit zwei Sonderschiffen auf dem Plattensee zum Badacsony. Alle Mannschaften machten ausgiebig Gebrauch vom Baden im Balaton bei 35° Luft- und 27° Wassertemperatur. Die gemeinsame Unterkunft von Jury und Mannschaften in der Fachschule für Gastronomie sowie drei Empfänge gaben umfassend Gelegenheit zum Erfahrungsaustausch. Zahlreiche Freundschaften wurden geschlossen und werden noch lange an die erlebnisreichen Tage in der VR Ungarn erinnern.

J. Lehmann



Lösung der Aufgabe, ausgewählt von Prof. Dr. H. Wußing

▲ 500 $x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$

$x=84$

Der griechische Mathematiker *Diophant* wurde 84 Jahre alt.

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. Th. Glocke

▲ 509 *1. Lösung:* Zum Beweis soll die Tatsache verwendet werden, daß der Schwerpunkt eine Schwerlinie oder Seitenhalbierende in einem bestimmten Verhältnis teilt. Als Hilfslinie wird die Gerade durch E parallel zu AC benutzt, die AB in E' schneide. M sei die Mitte der Strecke AB, P' die Mitte von DE und S der Schnittpunkt von CM und FP'.

Vor.: $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{BE}:\overline{EC}=\overline{CF}:\overline{FA}$,
$EE' \parallel AC$, $\overline{AM}=\overline{MB}$, $\overline{DP'}=\overline{P'E}$

Beh.: Der Schwerpunkt des Dreiecks ABC fällt mit dem Schwerpunkt des Dreiecks DEF zusammen.

Bew.: $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{BE}:\overline{BC}=\overline{CF}:\overline{CA}$ nach Voraussetzung (1).
$\overline{BE}:\overline{BC}=\overline{BE'}:\overline{BA}$ n. V.
$\overline{BE}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{AB}$ n. (1),
also $\overline{BE'}:\overline{BA}=\overline{AD}:\overline{AB}$,
also $\overline{BE'}=\overline{AD}$, folglich M auch Mitte von $\overline{DE'}$ (2)
$\overline{DM}:\overline{DE'}=\overline{DP'}:\overline{DE}=1:2$ n. V. und (2), also $MP' \parallel EE'$ und $\overline{DM}:\overline{DE'}=\overline{MP'}:\overline{E'E}=1:1$ (Strahlensatz und Umkehrung).
Wegen $\overline{BE'}:\overline{BA}=\overline{BE}:\overline{BC}=\overline{CF}:\overline{CA}$ ist $E'F \parallel BC$, das Viereck $ECFE'$ also ein Parallelogramm. Es ist also auch $\overline{EE'}=\overline{CF}$ und damit $\overline{MP'}:\overline{FC}=1:2$.
Wegen $MP' \parallel EE' \parallel FC$ gilt:
$\overline{SM}:\overline{SC}=\overline{SP'}:\overline{SF}=1:2$.
Der Punkt S ist also Schwerpunkt sowohl des Dreiecks ABC als auch des Dreiecks DEF, weil er je eine Seitenhalbierende dieser Dreiecke im Verhältnis 1 : 2 teilt.

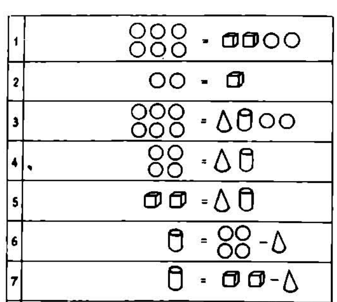
2. Lösung: Durch die Abbildung von A auf B, B auf C, C auf A ist eine ebene Affinität festgelegt oder aufgespannt. Diese sog. *Anschlußaffinität* ist zyklisch von 3. Ordnung. Sie hat u. a. folgende Eigenschaften:
1) Der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist Fixpunkt der Affinität, andere Fixpunkte existieren nicht.
2) Dieser Fixpunkt ist Schwerpunkt aller Schließungsdreiecke der Affinität.
Durch die Affinität werden die Strecken AB auf BC, BC auf CA, CA auf AB abgebildet und wegen der Teilverhältnistreue der Affinität auch D auf E, E auf F, F auf D.
Wegen 1) und 2) fällt der Schwerpunkt des Dreiecks DEF mit dem Schwerpunkt des Dreiecks ABC zusammen.

Lösung zu „Wurzelziehen"
(Heft 3/70, Seite 59)

Das Quadrat der ersten Ziffer der Wurzel ist zweistellig, das Doppelte von ihr ist dagegen einstellig, d. h., die erste Ziffer ist kleiner als 5, kann aber nicht kleiner als 3 sein weil deren Quadrat einstellig ist. Die erste Ziffer kann somit nur 4 lauten. Der erste Subtrahend ist also 16. Die zweite Ziffer der Wurzel besitzt folgende Eigenschaft: Wenn man sie hinter 8 schreibt und danach die zweistellige Zahl mit ihr multipliziert, kommt wieder eine zweistellige Zahl heraus. Die zweite Ziffer der Wurzel ist also 1. Die dritte Ziffer der Wurzel ist eine Zahl mit folgender Eigenschaft: Schreibt man sie hinter 82 und multipliziert mit ihr, so ergibt sich eine vierstellige Zahl, deren zweite Ziffer $5-1=4$ lautet, denn auf der vierten Zeile steht $1\cdot 81=81$. Dieser Forderung genügen zwei Zahlen, die 3 und 9. Die Werte der noch unbekannten Ziffer ergeben sich, indem man die Wurzel wirklich auszieht.
Wir haben also zwei Lösungen erhalten
$\sqrt{170\,569}=413$ und $\sqrt{175\,561}=419$.

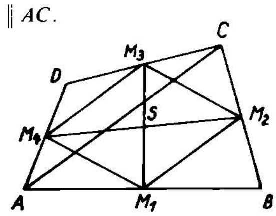
Lösung zu „Die merkwürdige Waage"
(*alpha*-heiter, Heft 3/70, S. 70)

Auf der dritten Skizze halten zwei Kugeln und ein Würfel einem Zylinder und einem Kegel das Gleichgewicht. Am Gleichgewicht ändert sich nichts, wenn wir in beide Waagschalen je einen Würfel legen. Dann ist auf der linken Seite ein Zylinder, ein Kegel und ein Würfel, dasselbe wie auf der zweiten Abbildung in der rechten Waagschale.



Durch Vergleich der zweiten und dritten Skizze erhalten wir somit:
6 Kugeln = 2 Würfel + 2 Kugeln.
Hieraus folgt
4 Kugeln = 2 Würfel, d. h.
2 Kugeln = 1 Würfel.
Wir legen jetzt in der zweiten Abbildung an Stelle des Würfels 2 Kugeln in die rechte Waagschale. Dann gilt
6 Kugeln = 1 Kegel + 1 Zylinder + 2 Kugeln,
d. h. 4 Kugeln = 1 Kegel + 1 Zylinder
2 Würfel = 1 Kegel + 1 Zylinder.
Hieraus folgt
1 Zylinder = 2 Würfel − 1 Kegel, und
2 Zylinder = 4 Würfel − 2 Kegel.
Aus der ersten Skizze ergibt sich:
2 Zylinder + 1 Kugel = 2 Kegel + 3 Würfel.
Unter Benutzung der obigen Gleichung folgt:
4 Würfel − 2 Kegel + 1 Kugel
= 2 Kegel + 3 Würfel,
8 Kugeln − 2 Kegel + 1 Kugel
= 2 Kegel + 3 Würfel,
9 Kugeln − 2 Kegel = 2 Kegel + 6 Kugeln.
Von beiden Waagschalen nehmen wir 6 Kugeln weg und legen 2 Kegel dazu, dann ist
3 Kugeln = 4 Kegel.
Damit liegt bereits das Ergebnis vor, da gerade 4 Kegel das Gleichgewicht zu halten war. Die Anzahl der das Gleichgewicht haltenden Körper läßt sich noch vermindern, weil 2 Kugeln = 1 Würfel ist und somit
4 Kegel = 1 Würfel + 1 Kugel gilt.

■ 527 Wir beweisen zunächst, daß das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ein Parallelogramm ist (vgl. Abb.). Nach der Aufgabenstellung ist M_1 die Mitte der Seite $\overline{AB}$ und M_2 die Mitte der Seite $\overline{BC}$; daraus folgt
$\overline{BM_1}:\overline{M_1A}=1:1$ und $\overline{BM_2}:\overline{M_2C}=1:1$, also $\overline{BM_1}:\overline{M_1A}=\overline{BM_2}:\overline{M_2C}$. Aus der Umkehrung des Strahlensatzes folgt daher $M_1M_2 \parallel AC$.



Aus $\overline{DM_3}:\overline{M_3C}=\overline{DM_4}:\overline{M_4A}$ folgt ferner $M_3M_4 \parallel AC$. Daher gilt $M_1M_2 \parallel M_3M_4$.
Analog beweist man, daß auch $M_2M_3 \parallel M_4M_1$ gilt.
Das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ist daher ein Parallelogramm.
Da in jedem Parallelogramm die Diagonalen einander halbieren, halbieren auch die Diagonalen $\overline{M_1M_3}$ und $\overline{M_2M_4}$ einander, d. h., es gilt $\overline{M_1S}=\overline{SM_3}$ und $\overline{M_2S}=\overline{SM_4}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

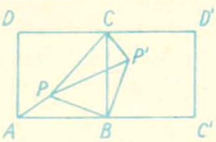
▲ 528 Bei der vorliegenden Aufgabe ist es wie auch bei vielen anderen geometrischen Konstruktionsaufgaben zweckmäßig, eine

Drehung durchzuführen, bei der man ein Dreieck erhält, dessen Seiten man aus den gegebenen Stücken konstruieren und berechnen kann.

Drehen wir nämlich das Quadrat $ABCD$ um den Punkt B im negativen Drehsinn um einen Winkel von 90°, so bleibt der Punkt B fest, und es werden die Punkte A in C, C in C', D in D' und P in P' übergeführt (s. Abb.).

Ferner gilt $\overline{PA}=\overline{P'C}=1$ cm,

$\overline{PB}=\overline{P'B}=2$ cm, $\sphericalangle PBP'=90°$.



a) Nun läßt sich das Viereck $PBP'C$ aus diesen Stücken leicht konstruieren. Wir konstruieren nämlich zunächst das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck PBP' aus den bekannten Stücken und dann das Dreieck $PP'C$ aus $\overline{PP'}$, $\overline{PC}=3$ cm, $\overline{P'C}=1$ cm. Wir erhalten das Viereck $PBP'C$, dessen Diagonale $\overline{BC}$ gleich der gesuchten Seite des Quadrats $ABCD$ ist.

b) Bei der Berechnung der gesuchten Seitenlänge x des Quadrats $ABCD$ können wir analog verfahren. Wir erhalten zunächst

$\overline{PP'}^2=\overline{PB}^2+\overline{P'B}^2=4\text{ cm}^2+4\text{ cm}^2=8\text{ cm}^2$.

Ferner gilt

$\overline{PP'}^2+\overline{P'C}^2=8\text{ cm}^2+1\text{ cm}^2=9\text{ cm}^2=\overline{PC}^2$,

also $\sphericalangle PP'C=90°$ und wegen $\sphericalangle BP'P=45°$, $\sphericalangle BP'C=135°$. Daher gilt nach dem Kosinussatz

$$x^2=\overline{BC}^2=\overline{P'B}^2+\overline{P'C}^2-2\overline{P'B}\cdot\overline{P'C}\cdot\cos 135°,$$

$$x^2=4\text{ cm}^2+1\text{ cm}^2+2\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\text{ cm}^2$$

$$=(5+2\sqrt{2})\text{ cm}^2,$$

$$x=\sqrt{5+2\sqrt{2}}\text{ cm}\approx 2{,}80\text{ cm}.$$

Das Quadrat $ABCD$ hat also die Seitenlänge $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ cm, d. s. rd. 2,80 cm.

▲ 529 Angenommen, a und b seien zwei ungerade natürliche Zahlen mit der verlangten Eigenschaft. Dann gilt für die Summe aller natürlichen Zahlen, die größer als a und kleiner als b sind,

$$s=(a+1)+(a+2)+\ldots+(b-2)+(b-1)$$
$$=1000. \qquad (1)$$

Zur leichteren Berechnung schreiben wir noch einmal die Summe in der umgekehrten Reihenfolge der Summanden und erhalten $s=(b-1)+(b-2)+\ldots+(a+2)+(a+1)$.

Durch Addition erhalten wir

$2s=(a+b)+(a+b)+\ldots+(a+b)+(a+b)$.

Diese Summe hat genau $b-a-1$ Summanden, daher gilt $2s=(a+b)(b-a-1)=2000$. (2)

Wer bereits die Summenformel für die arithmetische Reihe kennt, kann schneller rechnen und erhält aus (1), da das Anfangsglied gleich $a+1$, das letzte Glied gleich $b-1$, die Anzahl der Glieder gleich $b-a-1$ ist, unmittelbar $2s=(b-a-1)(a+1+b-1)$

$=(b-a-1)(a+b)$. Nun gilt $2000=2^4\cdot 5^3$; die Zahl 2000 hat also nur die ungeraden Teiler 1, 5, 25 und 125. Andererseits sind nach Voraussetzung a und b ungerade, also $a+b$ gerade und $b-a-1$ ungerade.

Daher ist $b-a-1$ gleich einer der Zahlen 1, 5, 25, 125. Dann ist wegen (2) $a+b$ gleich 2000, 400, 80 bzw. 16. Wir erhalten daher folgende Fälle:

1.) $b-a-1=1$, d. h. $b-a=2$ und $b+a=2000$; also $b=1001$, $a=999$.

2.) $b-a-1=5$, d. h. $b-a=6$ und $b+a=400$; also $b=203$, $a=197$.

3.) $b-a-1=25$, d. h. $b-a=26$; und $b+a=80$; also $b=53$, $a=27$.

4.) $b-a-1=125$, d. h. $b-a=126$ und $b+a=80$; also $2a=-46$, $a=-23$,

was der Voraussetzung widerspricht, wonach a eine natürliche Zahl ist.

Wir überzeugen uns durch die Probe, daß die in den Fällen 1, 2 und 3 angegebenen Zahlen a und b tatsächlich die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

1.) $a=999$, $b=1001$; $s=1000$.

2.) $a=197$, $b=203$;

$s=198+199+200+201+202=1000$.

3.) $a=27$, $b=53$;

$s=28+29+30+\ldots+50+51+52=$

$=(28+52)+(29+51)+(30+50)+\ldots$

$+(39+41)+40=12\cdot 80+40=1000$.

Daher hat die Aufgabe nur die unter 1.), 2.) und 3.) angegebenen Lösungen.

▲ 530 Angenommen, die reelle Zahl x sei eine Lösung der Gleichung

$$\sqrt{x+\sqrt{2x}}+\sqrt{x-\sqrt{2x}}=x, \qquad (1)$$

dann gilt $x\geqq 0$ und $x\geqq\sqrt{2x}$, also $x^2\geqq 2x$, d. h., $x=0$ oder $x\geqq 2$, da nur die Quadratwurzel aus einer nicht negativen Zahl reell ist. Ist nun die Gleichung (1) erfüllt, so gilt, wie man durch Quadrieren feststellt,

$$x+\sqrt{2x}+x-\sqrt{2x}+2\sqrt{(x+\sqrt{2x})(x-\sqrt{2x})}$$
$$=x^2,$$
$$2x+2\sqrt{x^2-2x}=x^2,$$
$$2\sqrt{x^2-2x}=x^2-2x. \qquad (2)$$

Daraus folgt durch nochmaliges Quadrieren

$$4(x^2-2x)=(x^2-2x)^2,$$

also $(x^2-2x)(x^2-2x-4)=0$,

$$x(x-2)(x^2-2x-4)=0. \qquad (3)$$

Die Gleichung (3) hat genau vier reelle Lösungen, nämlich

$x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=1+\sqrt{1+4}=1+\sqrt{5}$, $x_4=1-\sqrt{5}$.

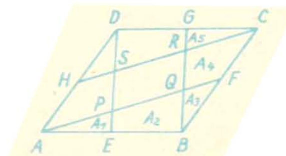
Die gegebene Gleichung (1) hat also, wenn überhaupt, höchstens die vier Lösungen x_1, x_2, x_3, x_4.

Nun ist die Gleichung (1), wie man durch Probe feststellt, für $x_1=0$ und $x_2=2$ erfüllt. Sie ist aber auch für $x_3=1+\sqrt{5}>2$ erfüllt; denn für diesen Wert ist die Gleichung (3) erfüllt und, weil $x_3^2-2x_3>0$ ist, auch die Gleichung (2). Dann ist aber wegen $x_3>0$ und $x_3-\sqrt{2x_3}>0$ auch die Gleichung (1) erfüllt.

Dagegen ist für $x_4=1-\sqrt{5}<0$ die Gleichung (1) nicht erfüllt, weil eine Lösung dieser Gleichung nicht negativ sein kann. Die gegebene Gleichung (1) hat also genau drei reelle Lösungen, nämlich

$$x_1=0,\quad x_2=2,\quad x_3=1+\sqrt{5}.$$

▲ 531 Aus $\Delta ABF\cong\Delta CDH$ folgt $AF\parallel CH$. Analog ergibt sich $BG\parallel DE$. Ferner ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABF gleich $\frac{A}{4}$, weil das Viereck $ABCD$ in die vier flächengleichen Dreiecke ABF, AFC, HFC, DHC zerlegt werden kann. (vgl. die Abb.).



Wir bezeichnen nun den Flächeninhalt
des Dreiecks AEP mit A_1,
des Vierecks $EBQP$ mit A_2,
des Dreiecks BFQ mit A_3,
des Vierecks $FCRQ$ mit A_4,
des Dreiecks CGR mit A_5. Dann gilt

$$A_1+A_2+A_3=A_3+A_4+A_5=\frac{A}{4}, \qquad (1)$$

weil die Dreiecke ABF und BCG flächengleich sind. Daraus folgt

$$A_1+A_2=A_4+A_5. \qquad (2)$$

Nun ist aber $A_1=A_5$, weil die entsprechenden Dreiecke kongruent sind. Wir erhalten daher aus (2)

$$A_2=A_4. \qquad (3)$$

Ferner gilt wegen $\overline{QB}:\overline{PE}=\overline{AB}:\overline{AE}=2:1$

$$A_2=3A_1 \text{ und analog } A_4=3A_3. \qquad (4)$$

Daraus folgt wegen (3)

$$A_1=A_3. \qquad (5)$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABF ist also gleich

$$A_1+A_2+A_3=A_1+3A_1+A_1=5A_1=\frac{A}{4};$$

daraus folgt

$$A_1=\frac{A}{20}. \qquad (6)$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABQ ist also gleich

$$A_1+A_2=4A_1=4\cdot\frac{A}{20}=\frac{A}{5}. \qquad (7)$$

Deshalb gilt für den Flächeninhalt des kongruenten Dreiecks CDS. Der Flächeninhalt des Dreiecks BCR (und auch des kongruenten Dreiecks DAP) ist gleich

$$A_3+A_4=4A_3=4A_1=\frac{A}{5}. \qquad (8)$$

Der gesuchte Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ ist also gleich

$$A-4\cdot\frac{A}{5}=\frac{A}{5},$$

er ist also gleich dem fünften Teil des Flächeninhalts des Rhombus $ABCD$.

Lösungen zu: Abschlußprüfung im Fach Mathematik, Tanzania

1. $1232:7=x$; $x=176$
2. $34800:4=x$; $x=8700$
3. $144:12\cdot 3=36$; der dritte Teil eines Dutzend ist in 144 Stück 36mal enthalten.

4. $\frac{11}{8}-\frac{2}{3}=x$; $\frac{33-16}{24}=x$; $x=\frac{17}{24}$
5. $3\frac{1}{3}+\frac{11\cdot 7}{7\cdot 5}=x$; $3\frac{1}{3}+2\frac{1}{5}=x$; $x=5\frac{8}{15}$
6. $\frac{40\cdot 3}{9\cdot 4}=x$; $x=3\frac{1}{3}$
7. $0.25:4=x$; $x=0{,}0625$
8. $x=54{,}62$
9. $x=9{,}331$
10. $4875:5=x$; $x=975$
11. $154\ \text{cm}^2:3=51\frac{1}{3}\ \text{cm}^2$; die schraffierte Fläche des Ziffernblattes beträgt $51\frac{1}{3}\ \text{cm}^2$.
12. $11-3=8$; $8:4=2$; $3-2=1$; der Anfang des unvollständigen Zahlenstrahls muß mit der Zahl 1 bezeichnet werden.
13. $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0{,}25$; $\frac{2}{8}\mathrel{\widehat{=}}25\%$
14. Es sind 2 Stunden und 45 Minuten vergangen.
15. $x=8$
16. $(48+80+75+63+29):5=x$;
$295:5=x$; $x=59$
17. $x=(864:16):4$; $x=54:4$; $x=13{,}5$
18. $\overline{BC}=\overline{AD}-\overline{AB}-\overline{CD}$;
$\overline{BC}=16\ \text{cm}-7\ \text{cm}-4\ \text{cm}$; $\overline{BC}=5\ \text{cm}$
19. $\sphericalangle ACB=360^\circ-320^\circ=40^\circ$;
$\sphericalangle CAB=\frac{1}{2}\cdot(180^\circ-40^\circ)=70^\circ$
20. $33{,}3:100=0{,}333=\frac{333}{1000}$
21. $x=6\cdot 5\cdot 3$; $x=90$; der Stapel enthält 90 Ziegelsteine.
22. 10% von 71 Schillingen sind 7,10 Schillinge; $7{,}1<7{,}5$; der größere der beiden Beträge beträgt 7,50 Schillinge.
23. $\frac{1}{2{,}5}=\frac{10}{25}=x$; $x=0{,}4$
24. Es gilt $\sphericalangle CAB=\sphericalangle ACB$; das Dreieck ist gleichwinklig und damit auch gleichseitig
25. $\sphericalangle ABC=60^\circ$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) und damit auch $\sphericalangle ACB=60^\circ$. Das Dreieck ist somit gleichseitig, also $\overline{AB}=\overline{AC}=30$ cm.
26. $x=\frac{27+9+3+1}{81}$; $x=\frac{40}{81}$
27. $2\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=5$; $120:5=24$; das Auto legte in einer halben Stunde 24 km zurück
28. Aus $9\cdot 17=153$ und $10\cdot 17=170$ und $11\cdot 17=187$ folgt wegen $160<x<180$ somit $x=170$. Es gibt nur eine solche Zahl.
29. $A_1=5^2$ Flächeneinheiten $=25$ Flächeneinheiten; $A_2=10$ Flächeneinheiten; $25:100=10:x$; $x=40$; Der Flächeninhalt der schraffierten Quadrate beträgt 40% des Flächeninhaltes des Quadrates *ABCD*.
30. $45\cdot\frac{2}{5}=18$, $\frac{2}{5}$ m des Stoffes kosten 18 Schillinge.
31. Die Diagonalen eines Quadrates stehen senkrecht aufeinander, also $\sphericalangle CSB=90^\circ$.
32. Der Zug kommt um 18.30 Uhr an.
33. $2\cdot(x+3x)=304$; $x=38$; der Garten ist 114 m lang und 38 m breit.
34. Der Januar hat 31 Tage, der Februar 28 Tage, der März 31 Tage, im April sind 14 Tage vergangen; insgesamt sind 104 Tage vergangen.
35. Der 27. März dieses Jahres war ein Mittwoch.
36. $80:100=x:700$; $x=560$; bei Barzahlung kostet das Rundfunkgerät 560 M.
37. $240:3=80$; $240\cdot\frac{5}{8}=150$;
$240-230=10$; Hamis verkaufte am ersten Tag 80, am zweiten 150, am dritten 10 Apfelsinen.
38. $0{,}04+0{,}0007=x$; $x=0{,}0407$
39. $x=1{,}5$
40. $x=13$; allgemein $x=3n+1$ für $n=1, 2, 3, 4, \ldots$
41. $V=40\cdot 30\cdot 50\ \text{cm}^3=60\,000\ \text{cm}^3=60\ \text{l}$
42. $z=\frac{200\cdot 2{,}5\cdot 3}{100}=15$; nach drei Jahren besitzt Hubert 215 Schillinge.
43. $3\cdot 8=24$; für die Arbeit hätten 5 Arbeiter 24 Tage benötigt.
44. Das C erscheint in Spiegelschrift als Ɔ.
45. $3{,}50\cdot 4=14$; $14+6=20$; $20:5=4$; das arithmetische Mittel beträgt im letzteren Fall 4 Schillinge.
46. Auf 2 ha Anbaufläche ist mit einer Ernte von 50 Sack Mais zu rechnen.
47. Es müssen 2,4 ha Mais angebaut werden, um 60 Sack Mais zu ernten.
48. $45-30=15$; es müssen zusätzlich auf 0,6 ha Land Mais angebaut werden.
49. $A=1{,}75\cdot 2\ \text{m}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{22}{7}\cdot 0{,}765625\ \text{m}^2$;
$A\approx 4{,}760268\ \text{m}^2$
50. Da nur nach der benötigten Anzahl der Zehn-Schilling-Scheine gefragt wird, brauchen die Teilbeträge, die kleiner als 10 Schillinge sind, nicht betrachtet zu werden. Es werden zwei Zehn-Schilling-Scheine benötigt.

▲ 533 Der Autobus spart täglich eine Fahrstrecke von $4\cdot 200\ \text{m}=800\ \text{m}$ ein, also im Jahr $365\cdot 800\ \text{m}=292\,000\ \text{m}$ bzw. 292 km. Aus $292:40=7{,}3$ folgt, daß 7,3 Stunden bzw. 7 Stunden und 18 Minuten jährlich an Fahrzeit eingespart wird.

▲ 534 Der erste Summand sei a, der zweite b; wir erhalten folgende Tabelle:

a	b	$5\cdot a$	$3\cdot b$	$5a+3\cdot b$
0	10	0	30	30
1	9	5	27	32
2	8	10	24	34
3	7	15	21	36
4	6	20	18	38
5	5	25	15	40
6	4	30	12	42
7	3	35	9	44
8	2	40	6	46
9	1	45	3	48
10	0	50	0	50

Es gibt genau eine Lösung, nämlich $a=7$ und $b=3$. Der erste Summand heißt 7, der zweite 3.

▲ 535 Die zweistellige Zahl sei $n=10a+a=11a$ und die vierstellige Zahl sei $z=1\,000a+100a+10a+a=1\,111a$. Dann gilt $x\cdot 11a=1\,111a$, und wegen $a\neq 0$ gilt somit $x=101$.
Probe $11\cdot 101=1\,111$
$22\cdot 101=2\,222$
$33\cdot 101=3\,333$
. . . .
$99\cdot 101=9\,999$

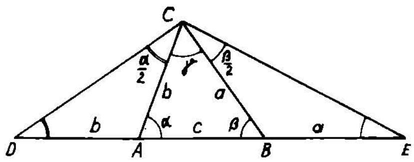
▲ 536 Aus $0{,}21+0{,}30=0{,}51$ und $10\cdot 0{,}51=5{,}10$ folgt, daß zehn Flaschen Brause einschließlich Pfand 5,10 M kosten. Aus $510:30=17$ folgt, daß Heinz 17 leere Flaschen dafür abgeben muß.

▲ 537 In der Zahlenfolge $0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20$ ist die Zahl 0 kleiner als jede der folgenden 20 Zahlen. Es lassen sich also 20 verschiedene Ungleichungen bilden, in denen stets $a=0$ ist und für b die Zahlen von 1 bis 20 eingesetzt werden können. Wenn $a=1$, so kann b durch die Zahlen von 2 bis 20, also durch 19 verschiedene Zahlen ersetzt werden. Diese Überlegungen führen wir fort. Für $a=19$ gibt es genau eine Möglichkeit, nämlich $b=20$. Wegen
$20+19+18+\ldots+3+2+1=$
$(20+1)+(19+2)+(18+3)+\ldots+(11+10)$
$=21\cdot 10=210$
gibt es genau 210 Möglichkeiten zum Ersetzen der beiden Variablen a und b der Ungleichung durch die vorgegebenen Zahlen.

▲ 538 Wir zeichnen die Verbindungsgerade $\overline{BE}$ und halbieren die Strecke $\overline{BE}$; ihr Mittelpunkt sei P. Danach drehen wir die Gerade h um P als Drehpunkt im positiven Sinn um einen Winkel von 180°. Bei Ausführung dieser Drehung fällt das Bild h' der Geraden h mit der Geraden g zusammen, und das Bild E' des Punktes E fällt mit dem Punkte B zusammen. Wegen $\overline{AB}=\overline{EF}$ fällt das Bild F' von F mit A, wegen $\overline{BC}=\overline{DE}$ fällt das Bild D' von D mit C zusammen. Da bei einer Drehung um einen Winkel von 180° Original-, Bild- und Drehpunkt auf einer Geraden liegen, schneiden die beiden Verbindungsgeraden *AF* und *CD* die Verbindungsgerade *BE* im Drehpunkt *P*, das heißt, alle drei Verbindungsgeraden schneiden sich in genau einem Punkt.

▲ 539 Die Zahl 48 ist nur durch die folgenden einstelligen Zahlen teilbar: 1, 2, 3, 4, 6 und 8. Sie läßt sich daher nur in der folgenden Weise als Produkt zweier einstelliger Zahlen schreiben:
$48=6\cdot 8$ oder $48=8\cdot 6$.
Nun gilt $6^2+8^2=36+64=100$ und $8^2+6^2=100$.
Wir erhalten daher zwei Lösungen; die gesuchte Zahl ist entweder 68 oder 86.

▲ 540 Die Dreiecke *CDA* und *ECB* sind nach Konstruktion gleichschenklig, sie besitzen somit gleich große Basiswinkel. Nach dem Außenwinkelsatz gilt $\sphericalangle DCA = \frac{\alpha}{2}$ und $\sphericalangle ECB = \frac{\beta}{2}$, folglich $\sphericalangle DCE = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma$ $= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$.



▲ 541 Von 6.45 Uhr bis 6.55 Uhr sind zehn Minuten vergangen. Wegen $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ hat Jürgen in dieser Zeit den zwölften Teil der Fahrstrecke zurückgelegt. Für die gesamte Fahrstrecke benötigte er demnach $12 \cdot 10$ Minuten, das sind 120 Minuten oder 2 Stunden. Um drei Viertel der Strecke $\overline{AB}$ zu durchfahren, werden 90 Minuten benötigt. Um 6.45 Uhr hatte Jürgen ein Viertel der Strecke $\overline{AB}$ geschafft; 90 Minuten später, also um 8.15 Uhr erreichte er sein Ziel B. Jürgen startete demnach um 6.15 Uhr in A.

▲ 542 Aus der nachstehenden Tabelle ist ersichtlich, welche von Null verschiedenen natürlichen Zahlen a, b, c bzw. d, e, f die Gleichung $a+3b+5c=12$ bzw. die Gleichung $d+3e+5f=20$ erfüllen.

a	b	c	$a+b+c$	d	e	f	$d+e+f$
1	2	1	4	1	3	2	6
4	1	1	6	2	1	3	6

In allen anderen Fällen ist $d+e+f>6$. Die Summe $a+b+c$ ist also gleich 6, und wir erhalten zwei Lösungen:
$a_1=4$, $b_1=1$, $c_1=1$, $d_1=1$, $e_1=3$, $f_1=2$;
$a_2=4$, $b_2=1$, $c_2=1$, $d_2=2$, $e_2=1$, $f_2=3$.

▲ 543 Heinz sei gegenwärtig x Jahre alt; aus der nachstehenden Tabelle werden die Beziehungen zwischen den Lebensaltern der Familienmitglieder ersichtlich.

Personen	gegenwärtiges Alter in Jahren	Alter vor 2 Jahren	Alter vor 3 Jahren	Alter vor 1 Jahr
Heinz	x	$x-2$	$x-3$	
Mutter	$3x$			$3x-1$
Vater	$4(x-2)+2$ $=4x-6$	$4(x-2)$		
Großmutter	$7(x-3)+3$ $=7x-18$		$7(x-3)$	
Großvater	$2(3x-1)+1$ $=6x-1$			$2(3x-1)$

Aus $x+3x+(4x-6)+(7x-18)+(6x-1)=248$ folgt $x=13$. Heinz ist 13, seine Mutter 39, sein Vater 46, seine Großmutter 73 und sein Großvater 77 Jahre alt.

▲ 544 Es sei $100x+10y+z$ die dreistellige Primzahl, dann gilt für ihre Quersumme $x+y+z \leqq 27$. Diese Quersumme soll eine zweistellige Primzahl der Form „*ap*" sein; es kommen also nur die Zahlen 13, 17, 19, 23 in Frage. Wäre „*ap*" die Zahl 23, so wäre $a=2$ und die Zahl „alpha" würde auf 2 enden. Es gibt aber keine Quadratzahl, die auf 2 endet; somit entfällt die Zahl 23, und es ist $a=1$. Setzen wir $a=1$ in „alpha" ein, so erhalten wir die Zahl 1ph1. In der dreistelligen Primzahl muß demnach an der Hunderterstelle die Ziffer 1, an der Einerstelle die Ziffer 1 oder 9 stehen. Die in Frage kommenden Primzahlen, deren Quersumme 13, 17 oder 19 ist, lauten 139, 179, 199. Aus $142^2 > 20\,000$ folgt, daß die dreistellige Primzahl 139 ist. Aus „alpha" erhalten wir die Zahl 19 321.

▲ 545 Es sind bei der Lösung der Aufgabe zwei Fälle zu unterscheiden.
1. Fall: Es sei $x \geqq 0$; wegen $|x| = x$ gilt dann $x+2-2x=0$, und wir erhalten daraus $x=2$.
2. Fall: Es sei $x<0$; wegen $|x| = -x$ gilt dann $-x+2-2x=0$, und wir erhalten daraus $x=\frac{2}{3}$. Dieser Wert erfüllt jedoch nicht die Bedingung $x<0$ und entfällt somit als Lösung. Die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung ist demnach $\{2\}$.

Lösungen zu alpha heiter

Gans und Gänserich

$2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100 \qquad x=36$

Es kamen 36 Gänse vom nahen Teich geflogen.

Der Mathematiker als Detektiv

Die Anzahl der Ballen sei x, dann beträgt der Preis jedes Ballens $\frac{1\,800}{x}$. Einen Tag früher hätte er $(x+30)$ Ballen erhalten und jeder Ballen wäre um 3 M billiger gewesen:

$$\frac{1\,800}{x+30} + 3 = \frac{1\,800}{x}$$

$x^2+30x-1\,800=0 \qquad x=20$

Es fehlen demnach 20 Ballen.

Damespiel in Mini-Format

Es sind acht Züge notwendig.

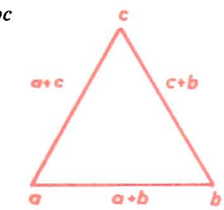
Mathematische Zeichen

1.	W	W	-	S	S
2.	W		W	S	S
3.	W	S	W		S
4.	W	S	W	S	
5.	W	S		S	W
6.		S	W	S	W
7.	S		W	S	W
8.	S	S	W		W
9.	S	S		W	W

Gleichung: größer als, Limes, entspricht, ist gleich, Kosinus, höchstens gleich, (kleiner oder gleich), unendlich, $n!$ Fakultät, genau dann, wenn. *Integral*: identisch gleich, nicht gleich, Tangens, enthalten in, größer oder gleich, rechtwinklig zu, Altgrad, liegt vor, *Alpha*: angenähert (rund), leere Menge, Promille, höchstens gleich, abgeschlossenes Intervall a b. (Vgl. Tafelwerk S. 49)

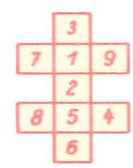
Leicht zu durchschauen

$a+b+c=a+b+c=a+b+c$ oder
$abc=abc=abc$



Kennst Du das griechische Alphabet?

Summe gesucht

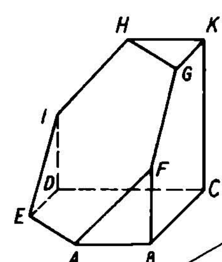


Geschichte der Mathematik

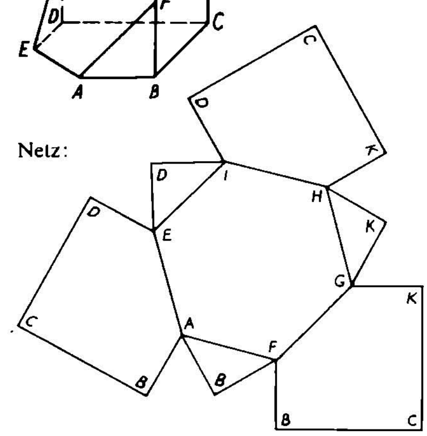
1. Alcuin, 2. Russel, 3. Cantor, 4. Hypatia, 5. Infeld, 6. Mueller, 7. Examen, 8. Dioptra, 9. Euklid, 10. Syrakus: *Archimedes*.

Restkörper gesucht (aus Heft 4/70)

Schrägbild:



Netz:



In freien Stunden alpha heiter

aus: Magazin 1/68 (F. Leuchte)

Gans und Gänserich

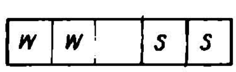
Ein Gänsrich watschelte in Ruh
in einem Erlgesträuche;
Da kam ein Gänseschwarm hinzu
Von einem nahen Teiche.
Der Gänsrich sprach: „Ich grüß Euch schön!
Fürwahr ich bin verwundert,
Euch insgesamt allhier zu sehn,
Ihr seid gewiß an Hundert.“
Ein kluges Gänslein drauf versetzt:
„Wird viel zu hundert fehlen!
Du hast zu hoch die Zahl geschätzt,
Drum magst Du selber zählen.
Verdopple unsre Zahl, dann sei
Die Hälfte noch genommen,
Ein Viertel und Du, Freund, dabei,
Wirst hundert dann bekommen.

Der Mathematiker als Detektiv

Um die Jahrhundertwende passierte Folgendes: Ein Kaufmann hatte für 1 800,– M Tuchballen gekauft und stirbt plötzlich. Der Verwalter schickt den Erben 100 Ballen. Diese erinnern sich, daß der Kaufmann sagte, hätte er das Geschäft einen Tag früher abgeschlossen, hätte er für das gleiche Geld 30 Ballen mehr bekommen und jeder Ballen wäre um 3,— M billiger gewesen. Ein Freund der Familie, ein Mathematiker, kann aus diesen Angaben errechnen, um wieviel Ballen der Verwalter die Erben betrogen hat.

Damespiel im Mini-Format

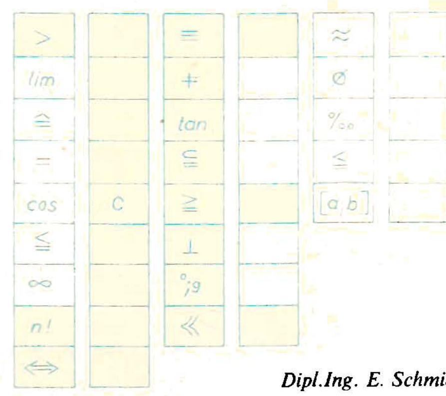
Auf 5 Feldern (siehe Abb.) stehen 2 weiße und 2 schwarze Damesteine.



Wieviel Züge sind nötig, damit die Steine die Plätze wechseln?
Ein Zug besteht entweder darin, daß ein Stein um ein Feld gerückt wird oder daß ein Stein über einen anderen springt. W: weiß; S: schwarz).

Mathematische Zeichen

Bestimme die vorgegebenen mathematischen Zeichen. Trage die Anfangsbuchstaben der Begriffe in die danebenstehenden freien Felder ein. Bei richtiger Begriffsbestimmung ergeben die Anfangsbuchstaben, jeweils von oben nach unten gelesen, einen mathematischen Begriff.



Dipl.Ing. E. Schmidt, Potsdam

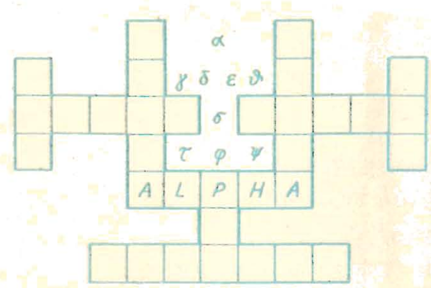
Leicht zu durchschauen!

Zeichne ein Dreieck und schreibe an jede Ecke eine beliebige Zahl, dann addiere je zwei benachbarte Zahlen und schreibe sie an die entsprechende Seite! Jetzt addiere die so erhaltenen Zahlen und die Zahl der gegenüberliegenden Ecke. Man erhält stets das gleiche Resultat für die möglichen Endsummen. Wie kommt das? Mit der Multiplikation geht es auch!

Kennst Du das griechische Alphabet?

Es sind die Namen der dargestellten griechischen Buchstaben gesucht!

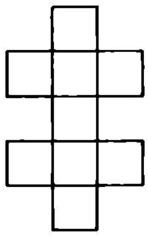
Mathematikfachlehrer W. Weber, EOS Schkeuditz b. Leipzig



Summe gesucht

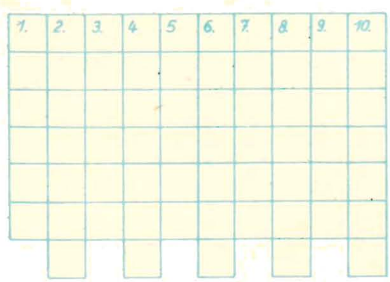
Die Zahlen von 1 bis 9 sind in das Netz so einzutragen, daß jeweils waagerecht sowie senkrecht die gleiche Summe erscheint.

Schüler P. Stöckert, Leipzig



Geschichte der Mathematik

Heute sollen alle *alpha*-Leser ihre Kenntnisse in Geschichte der Mathematik überprüfen. Zu diesem Gebiet waren in unserer Zeitschrift interessante Beiträge zu finden, so daß die Aufgabe nicht zu schwer sein wird.



In die Spalten sind die folgenden Wörter einzutragen:

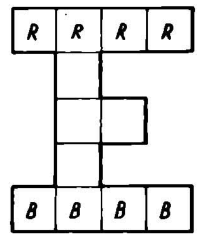
1. Mathematiker (735 bis 804) am Hofe Karls des Großen
2. Mathematiker und Friedenskämpfer, geb. 1872
3. Begründer der Mengenlehre
4. Tochter Theons, die 415 der Heidenverfolgung zum Opfer fiel
5. Verfasser des Romans „Wen die Götter lieben"
6. ein anderer Name des Regimontan (ü als ue schreiben!)
7. Prüfung
8. Vermessungsinstrument im Altertum
9. Verfasser der „Elemente"
10. Vaterstadt des Archimedes

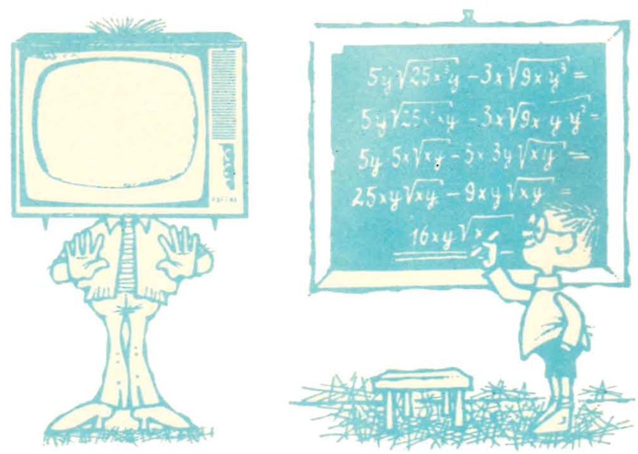
Bei richtiger Lösung erscheint in der ersten Zeile der Name eines bekannten Mathematikers aus dem Altertum.

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, OS Lucka (Krs. Altenburg)

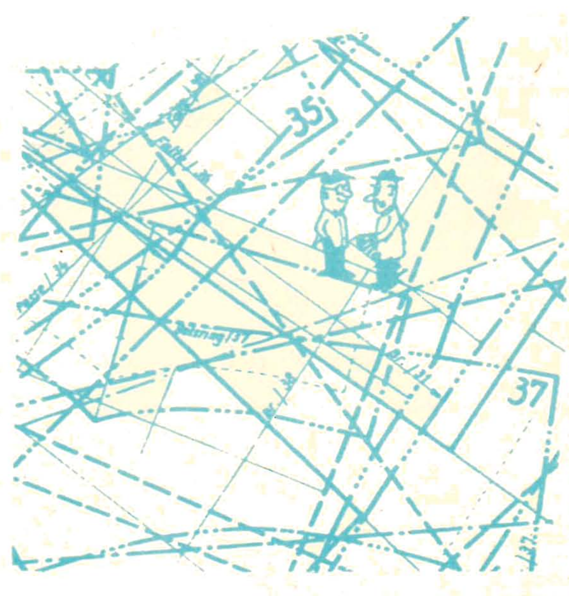
Peg Puzzle

This is a puzzle for one person. You need: 4 red and 4 blue counters. – Put the red counters on the squares marked *R*, and the blue counters on the squares marked *B*. – Object: to change the positions of the red and blue counters. – Rules: any counter can move backwards, forwards or sideways to any adjacent square. A counter can move several squares at a time. Diagonal moves are not allowed. Jumping over counters is not allowed.





„Nee, hab keine Zeit für ein Hobby!"
aus: ZB, Febr. 1967 (H.-J. Starke)



„Verzeihung, fährt hier die Linie 87?"
aus: Eulenspiegel 19/70 (Franz Fricke)

Mit *alpha* bringt man gut in Schwung,
die mathematische Wandzeitung.

Mathematik-Kalender

November 1970

So 1

Mo 2 * 1815 Georges Boole. Wirkte in Cork. Begründer der mathematischen Logik († 8. 12. 1869)

Di 3 † 1918 Alexander Michailowitsch Ljapunow Wirkte in Charkow und Petersburg. Richtungweisende Arbeiten zur Theorie der Differentialgleichungen. (* 6. 6. 1857)

Mi 4

Do 5

Fr 6

Sa 7

So 8 * 1868 Felix Hausdorff. Wirkte hauptsächlich in Bonn. Grundlegende Arbeiten zur Mengenlehre und Topologie († 26. 1. 1942)

Mo 9

Di 10

Mi 11

Do 12 † 1944 Georg David Birkhoff (* 21. 3. 1884)

Fr 13

Sa 14 † 1716 Gottfried Wilhelm Leibniz (* 1. 7. 1646)

So 15 † 1630 Johannes Kepler. Astronom und Mathematiker (* 27. 12. 1571)

Mo 16 * 1717 Jean Lerond d'Alembert († 1783)

Di 17 * 1790 August Ferdinand Möbius († 26. 9. 1868)

Mi 18

Do 19 † 1959 Alexander Jakowlewitsch Chintschin. Siehe *alpha*, Heft 5/67. (* 19. 7. 1894)

Fr 20 † 1856 Wolfgang Bolyai. Siehe *alpha*, Heft 3/70 (* 9. 2. 1775)

Sa 21

So 22

Mo 23

Di 24

Mi 25 Kreisolympiade Mathematik

Do 26

Fr 27

Sa 28

So 29 † 1953 Ernst William Barnes. Wirkte in Cambridge. (* 1. 4. 1874)

Mo 30

Dezember 1970

Di 1 * 1792 Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski († 4. 2. 1856)

Mi 2

Do 3 † Francesko Bonaventura Cavalieri. Italienischer Mathematiker (geb. um 1598)

Fr 4

Sa 5

So 6

Mo 7 * 1823 Leopold Kronecker. Wirkte in Berlin. Fundamentale Arbeiten auf den Gebieten der Algebra und Zahlentheorie († 29. 12. 1891)

Di 8 † 1869 Georges Boole (* 2. 11. 1815)
† 1894 Pafnuti Levowitsch Tschebyscheff. Wirkte in Moskau und Petersburg. Begründer und bedeutender Vertreter der Petersburger mathematischen Schule (* 16. 5. 1821)

Mi 9

Do 10 * 1804 Carl Gustav Jakob Jacobi († 18. 2. 1851)

Fr 11

Sa 12

So 13 † 1603 François Vieta. Französischer Mathematiker und Jurist. (* 1540)
† 1921 Max Noether (* 24. 9. 1844)

Mo 14

Di 15 * 1802 Johann Bolyai. Siehe *alpha* Heft 3/70. († 17. 1. 1860)

Mi 16

Do 17 * 1842 Sophus Lie († 18. 2. 1899)

Fr 18 * 1848 Bernard Bolzano (* 5. 10. 1781)

Sa 19 Beginn der Weihnachtsferien

So 20

Mo 21

Di 22 * 1859 Otto Hölder († 29. 8. 1937)
* 1819 Ossian Bonnet († 26. 6. 1892)

Mi 23

Do 24 * 1822 Charles Hermite. Wirkte in Paris. Bed. und vielseitige Arbeiten zur Arithmetik, Algebra, Analysis. († 14. 1. 1902)

Fr 25

Sa 26 * 1792 Charles Babbage († 18. 10. 1871)

So 27 * 1591 Johannes Kepler († 15. 11. 1630)

Mo 28 * 1903 John von Neumann († 6. 2. 1957)

Di 29 † 1891 Leopold Kronecker (* 7. 11. 1823)

Mi 30

Do 31

Az "alpha" fiatal olvasóinak sok sikert kívánok matematikai tanulmá-
-nyaikhoz. Rényi Alfréd

Ich wünsche den jungen Lesern von „alpha" viel Erfolg bei ihren mathematischen Studien.

ALFRÉD RÉNYI * 1921, † 1970

Dialoge über Mathematik

1967, 123 S., Broschur, 9,60 M

Briefe über die Wahrscheinlichkeit

1969, 107 S., Broschur, 7,80 M

(Für beide Titel: Vertrieb nur in der DDR und den anderen sozialistischen Staaten mit Ausnahme der VR Ungarn gestattet.)

DVW

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

Im 49. Lebensjahr, mitten in seiner vollen Schaffenskraft, wurde A. Rényi durch eine schwere Krankheit aus unserer Mitte gerissen. Sein Tod wird von Wissenschaftlern ebenso wie von den für den Mathematikunterricht interessierten Erwachsenen und Schülern betrauert. A. R. war Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, der Mathematischen Gesellschaft der VR Ungarn und Professor an der Universität Budapest, von mehr als zehn mathematischen Zeitschriften Chefredakteur oder Redakteur.
Unter seiner äußerst vielseitigen mathematischen Tätigkeit wäre die Gründung und Förderung der ungarischen wahrscheinlichkeitstheoretischen Schule an erster Stelle zu nennen. Obgleich er von Anfang an in der Oberstufe der Universität unterrichtete – bereits im Alter von 28 Jahren war er Hochschullehrer – widmete er auch der Schule seine Aufmerksamkeit. Er begnügte sich nicht damit, die Mathematiker und die zukünftigen Mathematiker zu lehren, sondern er verstand auch ausgezeichnet durch Vorträge oder seine populärwissenschaftliche Literatur, die Schönheit und Nützlichkeit der Mathematik denen zu zeigen, die sie nicht als Beruf gewählt haben. A Rényi war der erste ausländische Wissenschaftler, der mit *alpha* kurz nach ihrer Gründung in Verbindung trat. Wir schätzten besonders an ihm: seinen unerschütterlichen Optimismus, seine beschwingte Phantasie und seine stete Hilfsbereitschaft.

Redaktion *alpha*

POSTKARTE

Gebühren-
frei!

Postamt

....

(PLZ)

Sofort an den zuständigen
Postzeitungsvertrieb weiterleiten.

VLV Spremberg Ag 310 69 DDR 2761
I 20 8 986 Z 6

Leser schreiben an alpha

Seit über einem Jahr lese ich nun schon die Zeitschrift *alpha*. Ich beteilige mich seit September 1969 am Wettbewerb. Ich finde diese Art des Wettbewerbs einfach Klasse.

Schüler Wolfram Eid, Zeitz

Beim Rücklauf der Stöße von Antwortkarten im September 1969 wurde unser langjähriger und erfolgreicher Wettbewerbsteilnehmer *Ehrenfried Zech*, Bautzen, versehentlich in Klassenstufe 6, statt in Klassenstufe 7 eingereiht. *Bernd Kutnik*, Teterow, nahm in Klasse 8 am *alpha*-Wettbewerb teil, wurde aber nicht unter den Preisträgern, zu denen er durch seine Leistung gehört, in Heft 5/69 genannt. Er erhielt nachträglich eine Buchprämie. *Redaktion alpha*

Die Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb und das Lösen weiterer Aufgaben hat dazu beigetragen, daß ich in diesem Schuljahr bei der Kreisolympiade den 1. Platz erreichte und bei der Bezirksolympiade mit einem 3. Preis ausgezeichnet wurde.

Angela Rohrbeck, Franzburg (Bez. Rostock)

Ich bin eifriger Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb. Das Lösen dieser Aufgaben macht mir sehr viel Spaß. Mir helfen diese Aufgaben auch im Mathematikunterricht weiter.

Sigrid Wegener, Ziesar

Durch ein Leserforum des Chefredakteurs von *alpha* wurde ich angeregt, Aufgaben für den *alpha*-Wettbewerb zusammenzustellen und übersende sie hiermit.

Harald Loose, Potsdam-Babelsberg

Ich finde die Schülerzeitschrift sehr interessant. Besondere Freude macht mir das Lösen verschiedener Aufgaben. Da sie oft über den im Unterricht behandelten Stoff hinausgehen, regt mich *alpha* zum Studium anderer Bücher und Zeitschriften an. Seit ich die *alpha* habe, interessiere ich mich verstärkt für die Mathematik.

Schüler C. Kempfe, Berlin

Im März 1970 bestand unsere Arbeitsgemeinschaft Mathematik drei Jahre. Ich begann mit 5 Schülern. Im Laufe der Zeit wurden es zwei Arbeitsgemeinschaften. Im Zirkel II habe ich auch talentierte Schüler des 4. bzw. 3. Schuljahres. Die Besten nehmen schon am *alpha*-Wettbewerb teil.

Arbeitsgemeinschaftsleiter
Hannelore Jurack, Burkau

Lieber alpha-Leser!
Immer wieder erreicht uns Post, daß Schüler und Erwachsene „durch Zufall" ein *alpha*-Heft in die Hände bekommen und begeisterte Leser wurden. Uns wurde auch mitgeteilt, daß aktive *alpha*-Leser in ihrer Klasse geworben haben, um weiteren interessierten Mitschülern die Möglichkeit zu schaffen, sich neben dem Mathematikunterricht durch aktives außerunterrichtliches Selbststudium weiter zu qualifizieren. Wir haben daher einen Bestellzettel abgedruckt. Schneide ihn aus und gib ihn den Schülern, die bestellen wollen! Sollte diese Bestellkarte nicht ausreichen, so wird jedes Postamt helfen.
Berichtet uns, wie Ihr geworben habt, welche Erfolge Ihr hattet.

Eure Redaktion *alpha*

In diesem Jahr ist die Zahl der *alpha*-Abonnenten in der Klasse 5b der Peter-Göring-Oberschule Lucka (Kreis Altenburg) um fünf gestiegen. Bei der Zeugnisausgabe im Februar wurden fünf Schüler mit einem *alpha*-Jahresabonnement durch die Patenbrigade ausgezeichnet.

AG-Leiter K.-H. Gentzsch

Ich kann Ihnen verraten, daß das Erscheinen von *alpha* stets die ganze Familie auf den Plan ruft .... Im übrigen sind alle Beiträge der Zeitschrift auch für „Nichtmathematiker" sehr interessant.

Erika Rahnefeld, Karl-Marx-Stadt
(als Mutter der Tochter Bärbel)

... Spaß macht mir auch das Lösen der *alpha*-Wettbewerbsaufgaben. ... Leider mußte ich schon zweimal erfahren, daß ich eine Aufgabe falsch gelöst habe. Trotzdem lasse ich mich nicht entmutigen und löse fleißig weiter. Auch versuche ich mich an Aufgaben höherer Klassenstufen, oft mit Erfolg. Auf Ihr „Inserat" in 1/70 — Mitarbeiter gesucht — sende ich zwei Aufgaben.

Roland Borch, Cottbus, Kl. 8

Ich finde *alpha* einfach Klasse. Mir macht das Lösen der Aufgaben sehr viel Spaß. Ich versuche, jede Aufgabe zu lösen, auch wenn sie nicht meiner Klassenstufe entspricht. Ich habe den Wunsch, später einmal Mathematik zu studieren. Deshalb ist es für mich gut, mich mit Problemen zu beschäftigen, die über den Lehrplan des Mathematikunterrichts hinausgehen.

Udo Braun, Crimmitschau

Bestellschein

Empfangsstellennummer des PZV	Zustellbezirk	Einziehbezirk

Artikelnummer	WGr

Karteinummer

Ich bestelle hiermit ab ______________ zur Zustellung/Abholung *)
Überwiesen wird

____
Stück — Titel der Zeitung/Zeitschrift

zu den Bezugsbedingungen lt. Postzeitungsliste zum Abonnementspreis von ________ M

In Blockschrift ausfüllen:

Name, Vorname: ______________

Anschrift: ______________
(Postleitzahl, Wohnort, Straße, Hausnummer, Gebäudeteil, Stockwerk)

Das Abonnementsgeld wird bar bezahlt *)
ist abzubuchen vom Konto Nr. ______________ beim ______________
*) Nichtzutreffendes streichen
(Postscheckamt, Bankinstitut u. a.)

Ich versichere, daß ich den obengenannten Bezieher geworben habe

____
(Unterschrift des Werbers)

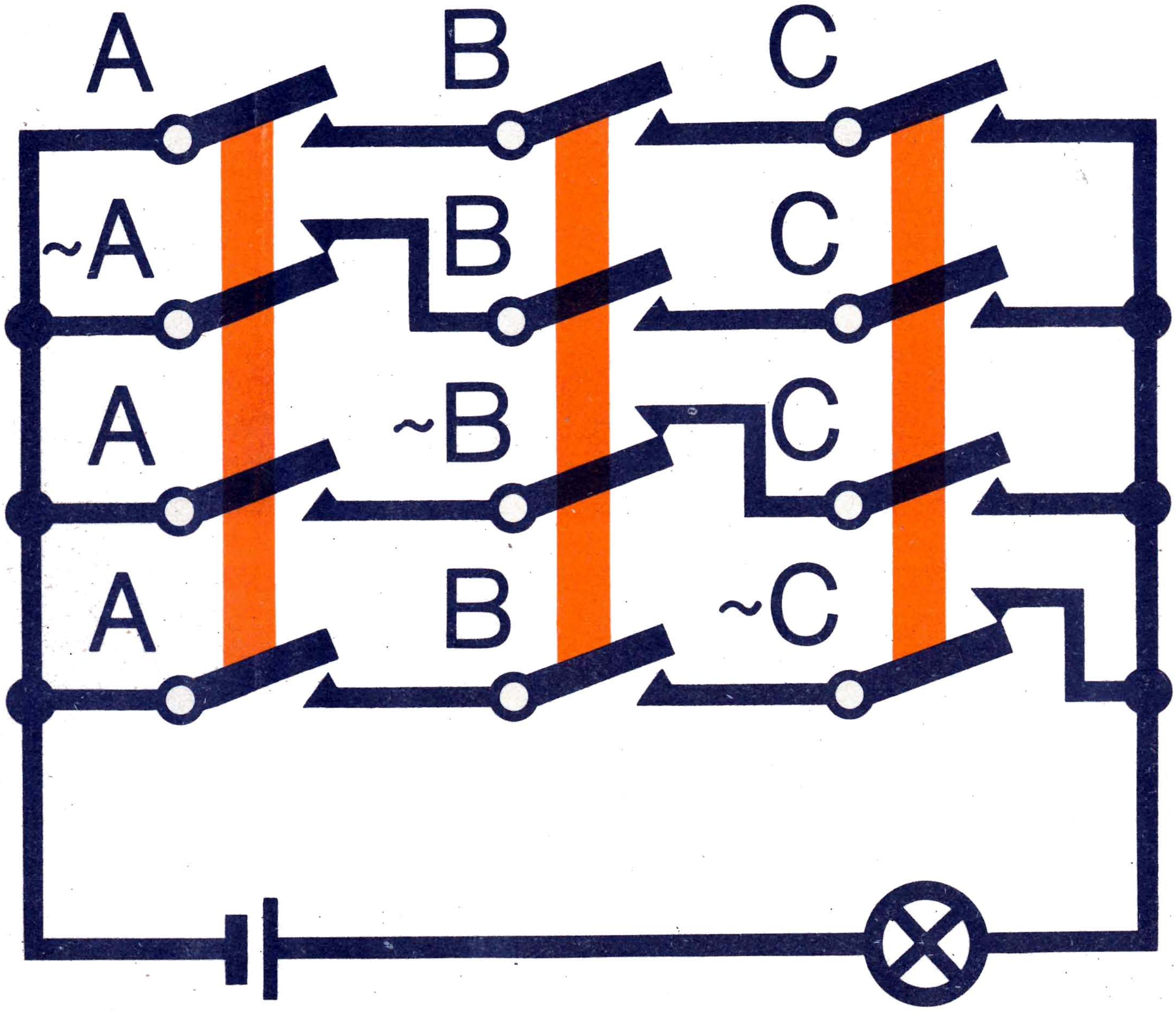
____
(Eigenhändige Unterschrift des Bestellers)

Die stark umrandeten Felder werden von der Deutschen Post ausgefüllt

Bezieherkarte/ Kundenkarte berichtigt	Adreßplatte geprägt/ Z 47 ausgefertigt	Bestellvermerk	Verteilkarte berichtigt	Vermerke

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
4. Jahrgang 1970
Preis 0,50 M
Index 31059

6

die die Menschheit bis dahin erlebt hatte, eine Zeit, die Riesen brauchte und Riesen zeugte, Riesen an Denkkraft, Leidenschaft und Charakter, an Vielseitigkeit und Gelehrsamkeit". Einen Eindruck von den Fortschritten dieser Zeit möge die Gegenüberstellung zweier Weltkarten aus den Jahren 1470 bzw. 1527 vermitteln. Diese Karten fußten auf dem jeweils jüngsten Forschungsstand der geographischen Wissenschaften, und die Jahre ihrer Herausgabe umspannen etwa die Lebenszeit Albrecht Dürers.

Die noch dem Mittelalter zuzurechnende Grundkonzeption der älteren Karte ordnete die bis zu dieser Zeit erkundete Welt in das Innere eines Kreises, dessen Mittelpunkt sich mit Jerusalem, dem Ausgangspunkt der christlichen Glaubenslehre, deckt. Trotz der ungewohnten Orientierung (Afrika liegt oben, Europa unten, Asien links) erkennt man die Konturen der Mittelmeerländer, einige Städte, Flüsse und Gebirge Europas, den Nil mit seiner Delta-Mündung sowie das Schwarze und das Rote Meer. Diese in der Zeitzer Stiftsbibliothek aufbewahrte Karte war ursprünglich — gemäß der Vorstellung von der Welt als einer Scheibe — kreisförmig und wurde später beim Einpassen in einen Atlas links und rechts ein wenig angeschnitten.

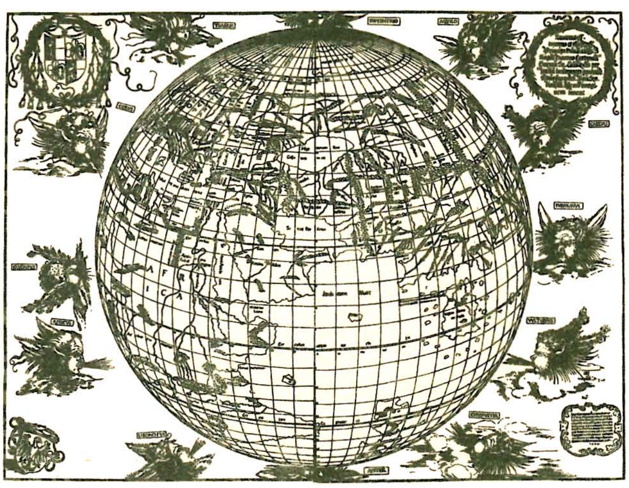
Die zweite Karte aus der Thüringischen Landesbibliothek in Weimar stammt von dem portugiesischen Kartographen Diogo Ribeiro. Ihre Entstehung führt auf politische Motive zurück. Die bei der Eroberung der Neuen Welt rivalisierenden Spanier und Portugiesen wollten auch in den neu erworbenen Gebieten eine klare Grenzziehung herbeiführen. Außerdem beabsichtigte Kaiser Karl V. mit dieser

Karte vor den Fürsten die Weltmacht seines Reiches zu demonstrieren. Die Küsten des Atlantik, des Indischen Ozeans, des Mittelmeeres und des Schwarzen Meeres weisen schon eine weitgehende Übereinstimmung mit neuzeitlichen Darstellungen auf.

In der Zeit zwischen der Entstehung beider Karten liegen die Entdeckungsfahrten von Christoph Kolumbus, Vasco da Gama sowie die Weltumsegelung durch Magellan. Die Behauptung von der Kugelgestalt der Erde war nicht mehr eine Hypothese, sondern wurde jetzt von seemännischer Erfahrung gestützt. Karl V. verwies mit Stolz auf die Größe seines Reiches, in dem die Sonne nicht untergehe.

Die Fortschritte der geographischen Kenntnisse kann man nicht losgelöst von den Zeiterscheinungen des Humanismus und der Renaissance betrachten. Durch das Vordringen der Türken im östlichen Mittelmeer, im Donaugebiet, am Schwarzen und Roten Meer vom 14. bis 16. Jahrhundert waren die einträglichen Handelsverbindungen vor allem der Venezianer und Genuesen nach Indien, China und Japan unterbrochen. (Byzanz fiel endgültig im Jahre 1453 dem erobernden Sultan Mohammed II in die Hände.) Die Suche nach neuen Wegen zur Wiederherstellung der alten Beziehungen lenkte das Interesse auf die geographische und kartographische Erfassung bekannter und noch unbekannter Weltteile. Durch die Flucht zahlreicher Gelehrter vor den eindringenden Türken aus Byzanz, Alexandrien und verschiedenen griechischen Städten nach Italien waren viele antike, arabische und griechische Schriften und Bücher in italienische Bibliotheken gelangt. Vermittelnd zwischen Süd und Nord trat u. a. der Humanist und Gelehrte Regiomontanus (1436—1476) auf. Von seinen Studienreisen brachte er große Mengen schriftlicher Überlieferungen von Philosophen und Gelehrten des Altertums vornehmlich mit nach Nürnberg. Auch Dürers Meister Michael Wolgemut betätigte sich als ein Vermittler antiken Schrifttums und führte von seinen Italienreisen solche Schätze mit in die Heimat. So wurde das Interesse für den Wissensstand der Antike in breiten Kreisen neu belebt. Eine kritische und schöpferische Auseinandersetzung mit dem Weltbild der Antike führte zur Überwindung vieler das ganze Mittelalter über herrschender Glaubensdogmen. Luthers Thesenanschlag an der Schloßkirche zu Wittenberg im Jahre 1517 machte auch die inneren Widersprüche der katholischen Glaubenslehre vor aller Welt offenbar. Das Aufbegehren der Bauern gegen die drückende Belastung durch die Fürsten und den Klerus griff wie ein Lauffeuer um sich, wurde jedoch von den Ritter- und Berufsheeren der Fürsten mit brutaler Gewalt niedergeschlagen.

An der spontanen Erweiterung des Weltbildes waren Nürnberger Gelehrte und Kosmographen nicht unwesentlich beteiligt (Schöner, Behaim, Stabius, Werner, Regiomontanus, Pirckheimer u. a. m.). Die Stadt war zu dieser Zeit eine Hochburg von Kartographen und ein Sammelpunkt kosmologischen und kartographischen Wissens. Der Nürnberger Martin Behaim nahm 1484 an einer Entdeckungsreise nach Afrika teil und schuf 1492 den ersten Erdglobus. Dürer beteiligte sich an der graphischen und künstlerischen Gestaltung von Kartenwerken des Geographen Stabius und entwickelte in seiner „Underweysung“ Vorschläge für die Übertragung von Karten auf Globen.



Die weitreichenden Handelsverbindungen Nürnberger Unternehmungen sowie der hohe Entwicklungsstand des Handwerks und der Buchdruckerkunst trugen zur schnellen Anwendung von Erfindungen und Verbreitung wissenschaftlicher Kenntnisse bei. Der Schlosser Peter Henlein stellte um 1510 in seiner Nürnberger Werkstatt die ersten mit Federantrieb und Unruh (Drehschwinger) laufenden Uhren (Nürnberger Eier) her. Damit schuf er die Grundvoraussetzung für die Ortsbestimmung von Schiffen bei längerer Fahrt auf hoher See.

Die Vorstellung von Nürnberg in der Zeit eines Hans Sachs und Albrecht Dürer als Stadt biederer oder gar einfältiger Handwerker, deren geistiger Horizont nicht wesentlich über die Regeln ihrer Zunft und die Mauern der Stadt hinausreicht, ist nach diesen überlieferten Zeugnissen gewiß als ein Trugbild zu werten. Das von Dürer verfaßte Lehrbuch „Underweysung“ fand eine schnelle Ausbreitung und erfuhr zehn Jahre nach seinem Tod von seinen Freunden unter Einarbeitung vieler nachgelassener Manuskripte eine zweite Auflage (Formschneider-Auflage). Dürer vereinigte in diesem Werk einiges von dem aus der griechischen Antike und von Italien überlieferten mathematischen Wissen, verschiedene an mittelalterlichen Bauhütten gepflegte Konstruktionsregeln und einen reichen eigenen Erfahrungsschatz zu einer auf künstlerische Belange zugeschnittenen Konstruktionslehre. Diese Leistung allein würde es bereits rechtfertigen, ihn ebenbürtig neben die großen Humanisten seiner Zeit zu stellen.

Im folgenden Heft werden wir auf einige Einzelheiten von Dürers „Underweysung“ eingehen, ohne dabei die große Linie und sein künstlerisches Schaffen aus dem Auge zu verlieren. Wir werden sehen, daß dieses Werk nicht allein ein mathematisch-künstlerisches, sondern auch ein sprachliches Dokument aus der Zeit des Humanismus darstellt.

E. Schröder

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die BRD und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und Import GmbH. DDR 701 Leipzig, Leninstraße 16

Fotos: Die Abbildungen zum Beitrag: Albrecht Dürer (S. 122/123) sind entnommen aus: W. Becker — Vom alten Bild der Welt — Koehler u. Amelang, Leipzig; Vignetten: K.-H.Guckuk, Leipzig (S. 128/129); Presseagentur Nowosti, M. Kulešova, APN (S. 137); Vignetten nach Originalen bearbeitet von F. Fricke, Berlin (III. Umschlageseite); M. Naumann, Leipzig (IV. Umschlagseite)
Technische Zeichnungen: G. Gruß (Leipzig)
Typograph:
H. Tracksdorf, Leipzig

Die sechs Titelbilder der Hefte 1 bis 6/70 gestaltete nach Vorlagen von Dozent Dr. E. Schröder (TU Dresden): W. Fahr, Berlin

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes des Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Gesamtherstellung: Staatsdruckerei der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 30. September 1970

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

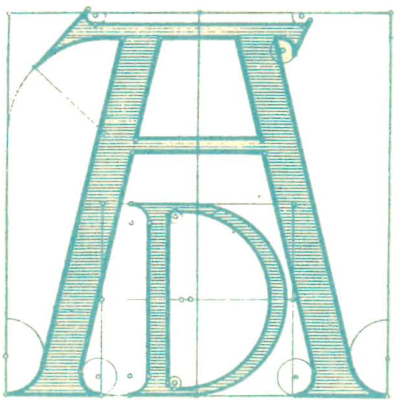
Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Albrecht Dürer

ein Künstler, Humanist und Geometer

Teil 1



Wenn von dem Zeitalter des Humanismus oder der Renaissance gesprochen wird, so verbindet man mit diesem für die Neuzeit so wichtigen Entwicklungsabschnitt nicht unbedingt eine klare Vorstellung.

Gewiß können wir einige Hauptvertreter dieser Epoche, wie Petrarca, Reuchlin, Erasmus von Rotterdam, Ulrich von Hutten oder Philipp Melanchton nennen. Ein Bild jenes Lebensgefühles, das die Humanisten wenigstens zeitweise beherrschte, vermittelt der begeisterte Ausruf Ulrich von Huttens (1488 bis 1523): „Oh Jahrhundert! Oh Wissenschaften! Es ist eine Lust zu leben!" Der umwälzende Inhalt und Charakter humanistischer Ideen ist jedoch nur über ein umfassendes Quellen- und Literaturstudium voll verständlich, was wiederum vertiefte Sprach- und Geschichtskenntnisse voraussetzt. Wir wollen versuchen, dem Lebensgefühl und Gedankengut des Humanismus näher zu kommen, indem wir Leben und Werk eines Menschen betrachten, der dieser Epoche durch sein künstlerisches Schaffen zu einem einzigartigen, noch in unsere Tage hinein wirkenden Glanz verholfen hat: Albrecht Dürer.

Der in Daten erfaßbare Lebensweg Dürers läßt sich schnell umreißen. Albrecht Dürer wurde vor 500 Jahren, am 21. Mai 1471, in Nürnberg als Sohn eines Goldschmiedes geboren. Zunächst sollte er, wie sein Vater, das Handwerk eines Goldschmiedes erlernen. Da er sich jedoch mehr zum Maler berufen fühlte, wechselte er 1486 auf eine vierjährige Lehrzeit in die Werkstatt des namhaften Nürnberger Malers Michael Wolgemut über. Die Wanderjahre von 1490 bis 1494 führten ihn zu nicht mehr im einzelnen nachweisbaren Malern, Holzschneidern und Kupferstechern in Baden, im Elsaß und in der Schweiz.

Nach kurzem Zwischenaufenthalt in seiner Heimatstadt zog es ihn nach dem Süden, da er sich von der italienischen Malerei viele Anregungen für sein eigenes künstlerisches Schaffen versprach. Seit 1495 entwickelte er die in seinen Wander- und Reisejahren aufgenommenen Kenntnisse und Fertigkeiten in seiner künstlerischen Arbeit selbständig und schöpferisch weiter. Seinen kühnen fortschrittlichen Ideen verlieh er mit dem Geschick seiner Hände als Maler, Zeichner, Holzschneider, Kupferstecher, Baumeister und Theoretiker eine die Mit- und Nachwelt zutiefst beeindruckende Gestalt. Für Dürer war die künstlerische Bewältigung seiner Aufgaben untrennbar mit dem mathematischen Erfassen des ästhetisch Schönen und Harmonischen durch Proportionen, Konstruktionen und geschickte Kompositionen verknüpft.

Auch die Problematik der Abbildung eines räumlichen Objektes auf eine Ebene nach den Gesetzen der Perspektive ließ ihn zeitlebens nicht los.

Von 1505 bis 1507 reiste er ein zweites Mal nach Italien. Einen weiteren Markstein seines Lebens stellte die Reise von 1520 bis 1521 nach den Niederlanden dar. Als gefeierter und allgemein anerkannter Künstler empfing er auf dieser Reise höchste Ehrungen und durch das Studium der holländischen Meister letzte Ausreifung seines Werkes. Der materiellen Sicherstellung seines Lebens gewiß, wandte sich Dürer in der Folgezeit einem von ihm schon lange bevorzugten Themenkreis zu. Es ging ihm nun um eine exakte theoretische Fundierung seines künstlerischen Schaffens mit vorzugsweise mathematischen Hilfsmitteln. Neben hervorragenden Werken der Malerei entstanden in diesem letzten Lebensabschnitt die Manuskripte für die Bücher:

1 „Underweysung der messung/mit dem zirckel und richtscheyt/in Linien ebnen und gantzen corporen/durch Albrecht Dürer zusammen getzoge/und zu nutz alle kunstlieb habenden mit zugehörigen figuren im Truck gebracht/in Jar. MDXXV"
2 „Etliche underricht zu befestigung der Stett Schloss und flecken"
3 „Hierin sind begriffen vier bücher von menschlicher Proportion durch Albrechten Dürer von Nürenberg erfunden und beschriben zu nutz allen denen, so zu dieser kunst lieb tragen; MDXXVIII"

Seit seiner Reise in die Niederlande stellten sich bei Dürer immer häufiger Fieberanfälle ein. Noch vor Ablauf seines 57-sten Lebensjahres starb der Meister am 6. April 1528, ein reiches, aber nach immer weiterer Vollendung drängendes Lebenswerk hinterlassend.

Jene Epoche der Renaissance, deren höchste Blütezeit Albrecht Dürer mitgestaltend erlebte, nannte später Friedrich Engels „die größte progressive Umwälzung,

Was ist eine Funktion? Teil 1

In diesem Aufsatz wird die moderne allgemeine Auffassung des Wortes „Funktion" erläutert. Der Artikel ist nicht leicht zu lesen: wiewohl er keinerlei über den Rahmen der Mittelschule hinausgehende Spezialkenntnisse voraussetzt, verlangt er doch, daß der Leser auf jedes Wort achtet. Er rechnet auch damit, daß der Leser mit den Worten „Menge" und „Element einer Menge" umgehen kann.

1. Einführung

Auf die Frage „Was ist eine Funktion" erhält man von Schülern häufig zur Antwort: „Eine Funktion kann durch eine Tabelle, eine graphische Darstellung oder eine Formel gegeben werden". Es ist klar, daß das *keine Definition* darstellt. Indessen haben die Schüler, die sich um die Formulierung einer klaren Definition drücken und statt dessen sogleich beschreiben, wie Funktionen vorgegeben werden, auch nicht so ganz unrecht. Die Mathematik kann nicht von Definitionen ihren Ausgang nehmen. Formulieren wir nämlich die Definition eines gewissen Begriffes, so gebrauchen wir in dieser Definition selbst notgedrungen irgendwelche andere Begriffe. Solange wir den Sinn irgendwelcher Begriffe nicht verstehen, kommen wir nicht voran und können keine einzige Definition in Worte fassen. Daher beginnt die Darstellung einer beliebigen mathematischen Theorie damit, daß gewisse *Grundbegriffe* ohne Definition akzeptiert werden. Mit ihrer Hilfe lassen sich dann die weiteren *abgeleiteten Begriffe* genau definieren.

Auf welche Weise machen sich nun die Leute einander klar, was ihre Auffassung von der Bedeutung der Grundbegriffe ist? Hierzu gibt es kein anderes Verfahren, als die Sache an Beispielen zu erklären und die charakteristischen Eigenschaften der zu definierenden Dinge eingehend zu beschreiben. Diese Beschreibungen brauchen in den Einzelheiten nicht völlig klar und zunächst auch nicht erschöpfend zu sein. Trotzdem zeichnet sich hieraus der Sinn des Begriffs allmählich immer deutlicher ab. Auf diese Weise wollen wir zum Begriff der *Funktion* gelangen, den wir als einen formal undefinierbaren mathematischen Grundbegriff ansehen.

Es wird zwar im folgenden gesagt werden, daß eine Funktion nichts anderes als eine *Abbildung* einer Menge auf eine andere (des *Definitionsbereichs* der Funktion auf ihren *Wertevorrat*) ist. Das Wort *Abbildung* erscheint hierbei jedoch einfach als *Synonym* des Wortes *Funktion*. Es handelt sich um zwei Bezeichnungen für ein und denselben Begriff. Die Erklärung eines Wortes durch ein anderes gleichbedeutendes macht die Definition des durch sie ausgedrückten Begriffs nicht überflüssig.

Beispiel 1: Wir wollen annehmen, daß die Buchstaben x und y *reelle Zahlen* bezeichnen. $\sqrt{\ }$ sei das Zeichen für das Ausziehen der arithmetischen (d. h. mit positivem Vorzeichen genommenen) Quadratwurzel. Die Gleichheit

$$y=\sqrt{1-x^2} \qquad (1)$$

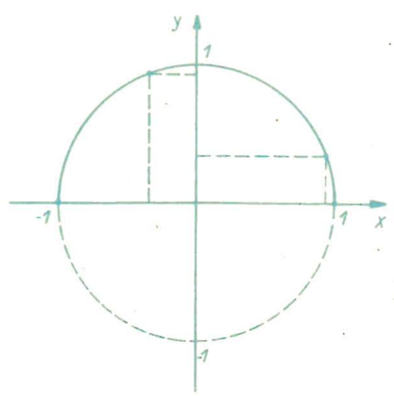
bedeutet, daß die Bedingungen

$$x^2 \leqq 1,\quad y \geqq 0,\quad x^2+y^2=1 \qquad (2)$$

erfüllt sind.

Die Punkte, deren Koordinaten diesen Bedingungen genügen, bilden einen Halbkreis, der in Bild 1 durch eine gestrichelte Linie dargestellt ist.

Bild 1 veranschaulicht die folgenden Tatsachen, die ihr auch auf rein algebraischem Wege beweisen könnt:



1) Formel (1) gestattet, für beliebiges x, das den Bedingungen

$$-1 \leqq x \leqq 1 \qquad (3)$$

genügt, ein ihm entsprechendes y zu berechnen, das die Ungleichungen

$$0 \leqq y \leqq 1 \qquad (4)$$

befriedigt;

2) Jedem y, das der Ungleichung (4) genügt, entspricht wenigstens ein solches x, dem dieses vorgegebene y nach Formel (1) entspricht.

Man kann sagen, die Formel (1) legt eine *Abbildung* der Menge der Zahlen x, die die Ungleichungen (3) befriedigen, auf die Menge der den Ungleichungen (4) genügenden Zahlen y fest. Die Mathematiker gebrauchen zur Bezeichnung von Abbildungen (besonders in letzter Zeit) oft einen Pfeil. Mittels eines Pfeils läßt sich die uns interessierende Abbildung folgendermaßen schreiben:

$$x \to \sqrt{1-x^2}. \qquad (5)$$

Beispielsweise gilt:

$$-1 \to \sqrt{1-(-1)^2}=0,\quad -\frac{4}{5} \to \sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5},$$

$$\frac{3}{5} \to \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5},\quad 0 \to \sqrt{1-0^2}=1. \qquad (6)$$

Haltet fest: *Eine Abbildung ist vollständig definiert, wenn*

a) *die Menge E vorgegeben ist, die abgebildet wird,*

b) *für jedes Element x dieser Menge E das Element y vorgegeben ist, auf das das Element x abgebildet wird.*

Die Menge aller y-Werte wollen wir mit dem Buchstaben M bezeichnen. Im Beispiel 1 ist E die Menge aller Zahlen, die der Bedingung (3) genügen, M dagegen die Menge der Zahlen, die die Bedingung (4) befriedigen*).

Beispiel 2: Die Regeln

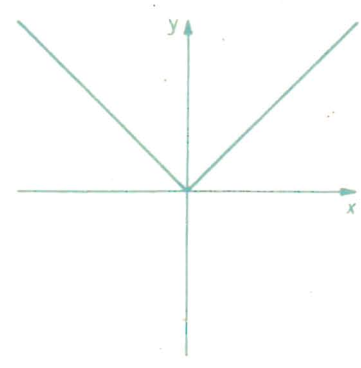
1) $x \to \sqrt{x^2}$,

2) $x \to \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geqq 0, \\ -x, & \text{wenn } x < 0, \end{cases}$

definieren *ein und dieselbe* Abbildung

$$x \to |x| \qquad (7)$$

der reellen Zahlen x auf ihre Beträge (Absolutwerte) $|x|$ (Bild 2).



*) Eine Menge kann mit einem beliebigen Buchstaben bezeichnet werden. Hier sind die Buchstaben E (vom französischen Wort *ensemble* — Menge) und M (das deutsche *Menge*; zufällig beginnt das russische Wort „množestvo" mit diesem selben Buchstaben) gewählt, das muß aber nicht so sein: bereits im folgenden Beispiel bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen wie üblich mit dem Buchstaben R (französisch *réel* — reell, wirklich).

Durch die Abbildung (7) wird die Menge

$$R = (-\infty, \infty)$$

aller reeller Zahlen auf die Menge

$$R_+ = (0, \infty)$$

der nichtnegativen reellen Zahlen abgebildet. An Stelle des Wortes *Abbildung* kann man *Funktion* sagen und die Abbildung (5) folgendermaßen schreiben:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}. \qquad (8)$$

die Abbildung (7) dagegen in der Form:

$$f(x) = |x|. \qquad (9)$$

Die bei den Formeln (6) aufgezählten speziellen Werte der Funktion (8) schreibt man dann auf folgende Weise:

$$f(-1)=0,\ f\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5},\ f\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5};\ f(0)=1.$$

Der Definitionsbereich der Funktion (9) ist die Menge R aller reellen Zahlen. Ihr Wertevorrat ist die Menge R_+ der nichtnegativen reellen Zahlen.

Beispiel 3: Petja, Kolja, Sascha und Wolodja wohnen in einem Zimmer des Wohnheims. Im Februar haben sie für ihren Dienst folgende graphische Darstellung aufgestellt:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	28
Pelja	■				■				■				■	...	
Kolja		■				■				■				...	
Sascha			■				■				■			...	
Wolodja				■				■				■		...	■

Die Ähnlichkeit dieser Tabelle mit den euch aus dem Algebraunterricht in der Schule bekannten graphischen Darstellungen von Funktionen springt sogleich in die Augen. Hat diese Analogie eine exakte logische Bedeutung? Haben die Jungen hier eine *Abbildung* einer Menge auf die andere aufgestellt, d. h., eine gewisse *Funktion* definiert? Und haben sie nicht eine *graphische Darstellung* dieser Funktion aufgezeichnet? (Achtet auf die Alltagsformulierung „sie haben eine *graphische Darstellung* der Dienste aufgestellt"!)

A. N. Kolmogorow

Übersetzt und bearbeitet von Prof. Dr. habil. G. Eisenreich, Karl-Marx-Universität Leipzig

In Heft 2/71 (Teil 2) erscheint: Der allgemeine Begriff einer Funktion; umkehrbare Funktion; 20 Aufgaben für den Leser, d. Red.

Mitarbeiter gesucht

Wer sendet uns: Aufgaben für den *alpha*-Wettbewerb (mit Lösungen), Berichte und Pläne über die Arbeit in den AGs, Beiträge für *alpha*-heiter, lustige Begebenheiten aus Unterricht und AG?

Redaktion *alpha*

Научно-популярный физико-математический

квант

1

1970

журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

„Quant" — eine neue physikalisch-mathematische Schülerzeitschrift

Ab Januar 1970 erscheint die populärwissenschaftliche physikalisch-mathematische Schülerzeitschrift *Quant* (Chefredakteur: Akademiemitglied I. K. Kikoin). Zum Redaktionskollegium gehören die ordentlichen Mitglieder der Akademie der Wissenschaften der UdSSR und der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der UdSSR L. A. Arzimowitsch, W. G. Subow, P. L. Kapiza, W. A. Kirillin, A. N. Kolmogorow, A. I. Markuschewitsch, M. D. Millionschtschikow, W. A. Fabrikant und andere bekannte Wissenschaftler.

Weshalb wurde diese neue Zeitschrift gegründet?

... Heute durchdringen die exakten Wissenschaften alle Kenntnisbereiche. Nicht zufällig wird an den philosophischen Fakultäten ein Mathematiklehrgang eingeführt ... Doch in die Wissenschaft muß man schon von Jugend an eindringen. Die heutigen Schüler werden am Ende dieses Jahrhunderts Leiter großer Institute sein. Natürlich darf es den heutigen Wissenschaftlern nicht gleichgültig sein, wer nach ihnen ihren Platz einnehmen wird.

Welches Grundanliegen hat „Quant"?

Einen bedeutenden Teil des in der Zeitschrift enthaltenen Materials muß man mit dem Bleistift in der Hand lesen. In einer Reihe von Artikeln sollen Fragen der modernen Physik und Mathematik behandelt werden. In den mehreren Nummern werden Artikel zu finden sein, deren Titel mit den Überschriften von Abschnitten der Schullehrbücher übereinstimmen. Sie enthalten bedeutendes Zusatzmaterial und bereichern so die Lehrbuchabschnitte mit neuen Angaben. Man bezeichnet diese Sparte mit: „Eine neue Art von Lehrmaterialien". In der Zeitschrift werden die Schüler auch interessante Mitteilungen aus der Geschichte der Wissenschaft finden. Den jungen Lesern soll die Liebe zum Experimentieren anerzogen werden. Die Rubrik „Experimentelle Technik" wird vorschlagen, eine Reihe von Versuchen bei sich zu Hause oder im Schullaboratorium durchzuführen. Die Rubrik „Bibliographie" wird Lektüre-Hinweise geben. Es ist zu hoffen, daß *Quant* auch für die Hochschulbewerber zum aktiven Hilfsmittel wird. Die Schüler werden in dieser Zeitschrift immer Mathematik- und Physikaufgaben finden und natürlich auch solche Dinge wie lustige Anekdoten und Kurzinformationen.

Die Zeitschrift ist für Schüler der 8. bis 10. Klassen gedacht. Für die Zukunft ist auch die Reservierung einiger spezieller Seiten für Schüler der 5. bis 7. Klassen geplant.

Aus Heft 1/70: Prof. S. Somorchinski eröffnet mit dem Artikel: „Die Erzählung über *Quant*". Akademiemitglied Kolmogorow schlägt den älteren Schülern die Lektüre der Ausführungen „Was ist eine Funktion?" vor. Über die Quantenelektronik informieren das Akademiemitglied Pochorov und der Kandidat der mathematisch-physikalischen Wissenschaften Karlow die jungen Leser.

Aus Heft 2/70: Akademiemitglied Kolmogorow behandelt den Begriff der Funktion und des Graphen einer Funktion von modernen Standpunkt aus und erläutert seine Ausführungen durch schöne Illustrationen. Er geht dabei auch auf geometrische Abbildungen und Vektoren ein. (14 Aufgaben sind beigefügt.) *alpha* übernimmt die beiden Artikel über Funktionen. Weitere Themen sind u. a.: „Laser"; „Geometrische Ungleichungen"; „Wie wurde das Atom gewogen?" In Heft 2/70 wurde eine Grußadresse der Schülerzeitschrift *alpha* veröffentlicht und eine kurze Einschätzung unserer Zeitschrift beigefügt.

Über Gleichungen mit absoluten Beträgen*

Aus dem Mathematikunterricht der Klasse 7 sind uns die Begriffe *Gleichung* sowie *zur Gleichung gehörige Grundmenge* und *Lösungsmenge* geläufig. Einige Beispiele von Gleichungen, bei denen die Variable x eine beliebige Zahl der jeweils angegebenen Grundmenge ist, seien mit ihren Lösungsmengen angegeben:

lfd. Nr.	Gleichung	Grundmenge	Lösungsmenge
1	$2\|x\|+1=6$	Menge der reellen Zahlen	$\{-2{,}5;\ 2{,}5\}$
2	$2\|x\|+1=6$	Menge der ganzen Zahlen	$\emptyset$
3	$\|x\|=x-2$	Menge der reellen Zahlen	$\emptyset$
4	$\|x\|=x-2$	Menge der ganzen Zahlen	$\emptyset$
5	$7+x=7+x$	Menge der natürlichen Zahlen	$\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$
6	$2\|x\|+1=6$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen	$\{2{,}5\}$
7	$2\|x\|+1=6$	Menge der negativen reellen Zahlen	$\{-2{,}5\}$
8	$x^2=x^2-4x+4$	Menge der reellen Zahlen	$\{1\}$

Bei den Beispielen 1, 2, 6 und 7 sowie 3 und 4 wird jeweils die gleiche Gleichung betrachtet. Jedoch sind die zugehörigen Grundmengen andere. So sind die Grundmengen bei den Beispielen 2 und 4 gegenüber den Beispielen 1 und 3 eingeengt. Während in den Beispielen 3 und 4 die gleiche Lösungsmenge auftritt, ist die Lösungsmenge im Beispiel 2 eine echte Untermenge** der Lösungsmenge im Beispiel 1: Die Lösungsmenge aus Beispiel 2 ist die Durchschnittsmenge** der Lösungsmenge aus Beispiel 1 mit der Grundmenge aus Beispiel 2. Allgemein gilt:

Lehrsatz 1: Besitzt die Gleichung $f(x)=g(x)$ in bezug auf die Grundmenge G die Lösungsmenge L und in bezug auf die Grundmenge G_* mit $G_*\subseteq G$ die Lösungsmenge L_*, so gilt $L_*=L\cap G_*$.

Unseren Beispielen 1, 6 und 7 liegt ebenfalls die gleiche Gleichung zugrunde, jedoch ist hier die Vereinigungsmenge** der Grundmengen aus den Beispielen 6 und 7 gleich der Grundmenge aus Beispiel 1. Wir ersehen aus der Tabelle, daß der gleiche Zusammenhang zwischen den Lösungsmengen besteht: $\{2{,}5\}\cup\{-2{,}5\}=\{-2{,}5;\ 2{,}5\}$. Auch dieser Sachverhalt ist allgemeingültig:

Lehrsatz 2: Besitzt die Gleichung $f(x)=g(x)$ in bezug auf die Grundmenge G_1 die Lösungsmenge L_1 und in bezug auf die Grundmenge G_2 die Lösungsmenge L_2, so besitzt $f(x)=g(x)$ in bezug auf die Grundmenge $G=G_1\cup G_2$ die Lösungsmenge $L=L_1\cup L_2$.

Auch zwischen unserem 3. Beispiel mit der Gleichung $|x|=x-2$ und dem 8. Beispiel mit der Gleichung $x^2=x^2-4x+4$, zu denen jeweils die gleiche Grundmenge, nämlich die Menge der reellen Zahlen gehört, besteht ein Zusammenhang: Die zuletzt angegebene Gleichung ist für jede reelle Zahl x eine Folgerung der ersten. Denn aus $|x|=x-2$ folgt durch Quadrieren beider Seiten für jede reelle Zahl x: $|x|^2=(x-2)^2$. Unter Benutzung einer binomischen Formel*** und mittels $|x|^2=x^2$ folgt schließlich $x^2=x^2-4x+4$. Die Lösungsmengen in unserem 3. und 8. Beispiel stehen in der Beziehung $\emptyset\subseteq\{1\}$. Auch hier gilt allgemein:

Lehrsatz 3: Folgt für alle reellen Zahlen $x\in G$ die Gleichung $f_*(x)=g_*(x)$ aus der Gleichung $f(x)=g(x)$, so ist die Lösungsmenge L_* der Gleichung $f_*(x)=g_*(x)$ in bezug auf G eine Obermenge** der Lösungsmenge L von $f(x)=g(x)$ in bezug auf G: $L_*\supseteq L$.

* Dieser Beitrag ist eine Fortsetzung von „Über Funktionsgleichungen mit absoluten Beträgen" aus *alpha* 6/69.

** Über die Begriffe Untermenge, Obermenge, Durchschnitts- und Vereinigungsmenge sowie die zugehörigen Symbole orientieren wir uns in den Beiträgen „Mit Mengen fängt es an" aus *alpha* 1, 2 und 3/1967

*** Für beliebige reelle Zahlen a und b gilt $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Eine einfache Folgerung aus Lehrsatz 5 sei angegeben:

Lehrsatz 4: Folgt für alle reellen Zahlen $x\in G$ die Gleichung $f_*(x)=g_*(x)$ aus der Gleichung $f(x)=g(x)$ und umgekehrt, so haben die Gleichungen $f_*(x)=g_*(x)$ und $f(x)=g(x)$ in bezug auf G die gleiche Lösungsmenge.

***Wir arbeiten gemeinsam:** Es sind alle Zahlen zu bestimmen, die einer gegebenen Menge G angehören und gleichzeitig einer gegebenen Gleichung genügen.*

▲ Aufgabe: Bestimme alle reellen Zahlen, die der Gleichung $|x-2|-2x=5$ genügen! Zunächst soll diese Aufgabe rechnerisch gelöst werden: Aus $|x-2|-2x=5$ folgt nach einer bekannten Umformungsregel für Gleichungen für jede reelle Zahl x:

I $\quad |x-2|=2x+5$

Um das störende Betragszeichen vermeiden zu können, unterscheiden wir die Fälle $x\geqq 2$ und $x<2$ (Diese Bedingungen sind äquivalent mit $x-2\geqq 0$ bzw. $x-2<0$):

1. Fall: $x\geqq 2$ $\qquad$ *2. Fall:* $x<2$

Laut Definition des absoluten Betrages gilt:

II $\quad |x-2|=x-2 \qquad |x-2|=-(x-2)=-x+2.$

Durch Einsetzen von II in I und durch anschließendes Umformen nach bekannten Umformungsregeln für Gleichungen folgt schrittweise:

$$x-2=2x+5 \qquad |-x-5$$
$$\underline{x=-7}$$

$$-x+2=2x+5 \qquad |+x-5$$
$$3x=-3 \qquad |:3$$
$$\underline{x=-1}$$

Mit den angegebenen Schlußketten ist auf Grund der Lehrsätze 2 und 3 die folgende Aussage bewiesen: Als Lösungen der gegebenen Gleichung kommen nur die Zahlen -7 und -1 in Frage. Da durch einen solchen Auflösungsprozeß laut Satz 3 im allgemeinen nur eine Obermenge der gesuchten Lösungsmenge L gefunden wird, d. h. es gilt $L\subseteq\{-7;\ -1\}$, ist noch für beide als Lösung in Frage kommenden Zahlen die Probe zu machen:

Probe für $x=-7$:
Linke Seite: $|-7-2|-2\cdot(-7)=23$;
Rechte Seite: 5 $\qquad$ *Vergleich:* $23\neq 5$

Probe für $x=-1$:
Linke Seite: $|-1-2|-2\cdot(-1)=5$;
Rechte Seite: 5; $\qquad$ *Vergleich:* $5=5$.

Tatsächlich scheidet durch die Probe eine der beiden als Lösung in Frage kommenden Zahlen aus: -1 ist die einzige Lösung dieser Gleichung. Dafür kann man auch sagen: Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $L=\{-1\}$. Kann bei dieser Aufgabe auf die Probe verzichtet werden? Im ersten Fall $x\geqq 2$ kann die Zahl -7, die hier als eine

Lösung in Frage kommt, sehr einfach ausgeschieden werden: Da $x=-7$ die Zusatzannahme $x\geqq 2$ nicht erfüllt, besitzt die gegebene Gleichung keine der Bedingung $x\geqq 2$ genügende reelle Zahl als Lösung. Auch im zweiten Fall $x<2$ könnte man laut Satz 4 dadurch auf die Probe verzichten, daß man sich überlegt, daß alle Schlüsse, durch die aus $|x-2|-2x=5$ die Beziehung $x=-1$ gefolgert wurde, umkehrbar sind. (Im ersten Falle $x<2$ sind die entsprechenden Schlüsse nicht umkehrbar, hier kann aus $x=-7$ nicht $|x-2|-2x=5$ gefolgert werden.)

Nun wenden wir uns der zeichnerischen Lösung der gegebenen Gleichung $|x-2|-2x=5$ zu. Betrachten wir zunächst die durch die Gleichungen $y=|x-2|-2x$ und $y=5$ für alle reellen Zahlen x erklärten Funktionen. Wir zeichnen deren kartesische Bilder: Die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung enthält genau die Abszissen aller gemeinsamen Punkte beider kartesischen Bilder (siehe Bild 1).

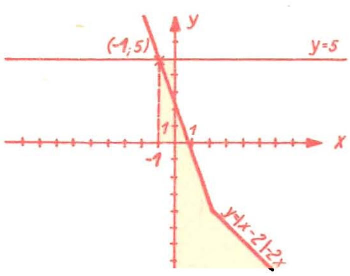


Bild 1

Da unsere Gleichung $|x-2|-2x=5$ mit $|x-2|=2x+5$ äquivalent ist (Weil jede beider Gleichungen aus der anderen folgt, besitzen beide laut Satz 4 die gleiche Lösungsmenge und heißen deshalb äquivalent.), kann die gesuchte Lösungsmenge auch bestimmt werden durch das Zeichnen der kartesischen Bilder von $y=|x-2|$ und $y=2x+5$ und anschließendes Ablesen der Abszissen ihrer gemeinsamen Punkte (siehe Bild 2):

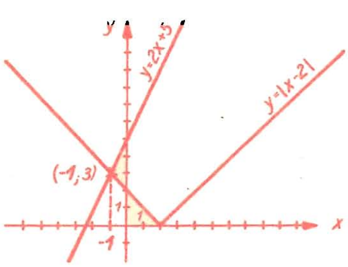


Bild 2

▲ Aufgabe: Bestimme a) alle reellen Zahlen und b) alle ganzen Zahlen x, die der Gleichung $|x|+\frac{1}{2}|x-3|-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$ genügen!

Alle der Bedingung $0\leqq x\leqq 3$ genügenden reellen Zahlen sind Lösungen.

Lösung von b): Gemäß Lehrsatz 1 besteht die jetzt gesuchte Lösungsmenge aus allen der Bedingung $0\leqq x\leqq 3$ genügenden ganzen Zahlen. Es gilt also jetzt: $L=\{0;1;2;3\}$.

Rechnerische Lösung zu a):

Aus $|x|+\frac{1}{2}|x-3|-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$ folgt im ...

1. Fall mit $x<0$:

$-x-\frac{1}{2}(x-3)-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

$-x-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

$-2x=0 \qquad |:(-2)$

$\underline{\underline{x=0}}$

Wegen $x<0$ scheidet $x=0$ als Lösung aus. Die Probe entfällt.

2. Fall mit $0\leqq x<3$:

$x-\frac{1}{2}(x-3)-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

$x-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

$\underline{\underline{0=0}}$

Jede der Bedingung $0\leqq x<3$ genügende reelle Zahl x kommt als Lösung in Frage.

Probe:

Linke Seite:

$|x|+\frac{1}{2}|x-3|-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

$=x-\frac{1}{2}(x-3)-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

$=0$

Rechte Seite: 0

Vergleich: $0=0$

3. Fall mit $3\leqq x$:

$x+\frac{1}{2}(x-3)-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

$x+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

$x-3=0 \qquad |+3$

$\underline{\underline{x=3}}$

$x=3$ kommt als Lösung in Frage.

Probe:

Linke Seite:

$|3|+\frac{1}{2}|3-3|-\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{3}{2}$

$=3-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}$

$=0$

Rechte Seite: 0

Vergleich: $0=0$

Zeichnerische Lösung von a):

Die Lösungen der gegebenen Gleichung sind die Abszissen der sämtlichen gemeinsamen Punkte der kartesischen Bilder von

$y=|x|+\frac{1}{2}|x-3|-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ und $y=0$

(Bild 3):

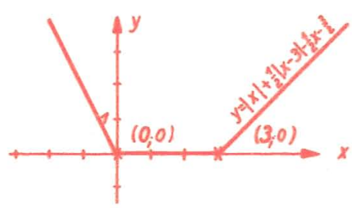


Bild 3

Wir arbeiten selbständig:

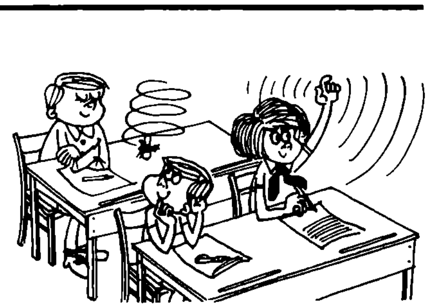
▲ Aufgabe (Klasse 8): Bestimme a) alle reellen Zahlen und b) alle ganzen Zahlen, die der Gleichung $2|x+3|+\frac{x}{2}+2=0$ genügen!

▲ Aufgabe (Klasse 9): Bestimme a) alle reellen Zahlen und b) alle ganzen Zahlen, die der Gleichung $2|x|-|x-3|-x-3=0$ genügen!

W. Träger

Mit großer Freude empfing die Redaktion *alpha* zwei Hefte der mathematischen Schülerzeitschrift „Jugend und Mathematik“, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft der Demokratischen Republik Vietnam. Wir grüßen unsere vietnamesischen Freunde. *alpha* wird ausführlich über „Jugend und Mathematik“ berichten.

Relationen
Teil 1



müßte man fortfahren: „...als gestern“ oder „...als vorige Woche“. Aber der andere weiß meistens, was gemeint ist. Diese unvollständige Sprechweise im täglichen Sprachgebrauch kommt sehr häufig vor bei Benutzung des Komparativs (der Steigerungs- oder Vergleichsform), obgleich es sich in jedem Falle um eine Beziehung handelt („ist größer als“, „ist höher als“, „ist schwieriger als“, ...).

Aufgaben:

■ 1 ■ Suche selbst Beziehungen aus der Mathematik und aus dem täglichen Leben und bilde je ein Beispiel!

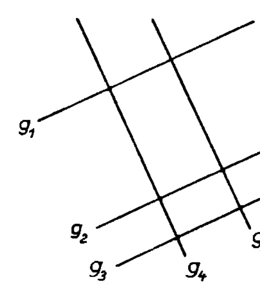
■ 2 ■ Ergänze folgende Beziehungen so, daß ein sinnvoller und vollständiger Satz entsteht, der eine richtige Aussage darstellt!

a) Beziehungen aus dem täglichen Leben:

——— wohnt in derselben Straße wie ———.
——— geht in dieselbe Klasse wie ———.
——— ist älter als ———.
——— ist jünger als ———.
——— ist Schwester von ———.
——— ist befreundet mit ———.

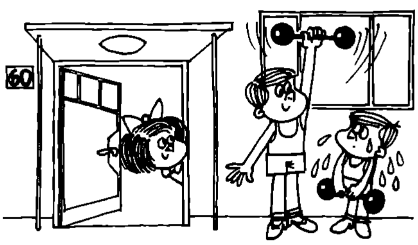
b) mathematische Beziehungen:

——— steht senkrecht auf ———.
——— hat dieselbe Richtung wie ———.
——— ist ein Teiler von ———.
——— ist ein Vielfaches von ———.
——— ist größer als ———.
——— ist kleiner als ———.
——— ist Vorgänger von ———.
——— ist Nachfolger von ———.
——— ist gleich ———.



1. Überall Beziehungen

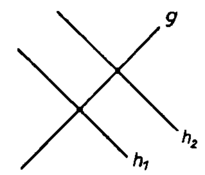
Fritz sagte neulich zu seinen Mitschülern und brüstete sich dabei:
„Ich habe gute Beziehungen zu meinem großen Freund Peter“! Seine Mitschüler waren neugierig und forderten Fritz auf, diese Beziehungen näher zu erläutern. Daraufhin antwortete er prahlerisch:
„Ich *bin Freund von* Peter“ und
„Ich *bekomme oft Bastelmaterial von* Peter“ und
„Peter *verteidigt* mich“, denn
„Peter *ist stärker als* ich“ und
„Peter *ist größer als* ich“ und außerdem wißt ihr,
„Peter und ich *wohnen in demselben Haus*“.



Wir sehen, daß die Beziehungen zwischen Fritz und Peter vielseitig sind. Peter und Fritz gehören durch diese Beziehungen in gewisser Weise zusammen. Diejenigen Satzteile, die diese Beziehungen ausdrücken, sind in Schrägschrift gedruckt.
Merke dir: Wenn wir von *Beziehungen* zwischen Menschen sprechen, so meinen wir stets mindestens *zwei* Menschen, die in dieser Beziehung zueinander stehen.
In der Mathematik gibt es ebenfalls eine Fülle von Beziehungen. Ihr kennt manche sogar seit der ersten Klasse. Allerdings sind es nicht Beziehungen zwischen Menschen, sondern Beziehungen zwischen mathematischen Objekten, also etwa zwischen Zahlen oder zwischen geometrischen Figuren. Einige Beispiele sind:

2<3

„2 *ist kleiner als* 3“
„0 *ist Vorgänger von* 1“
„5 *ist ein Teiler von* 10“
„g *steht senkrecht auf* h_1“
„h_1 *verläuft parallel zu* h_2“
„25 *ist das Quadrat von* 5“



Die schräggedruckten Satzteile drücken wiederum die entsprechende Beziehung aus. Sie stehen meist zwischen den beiden in Beziehung stehenden Objekten.
Für einige dieser Beziehungen benutzt man in der Mathematik bestimmte Zeichen, z. B. $2<3$, $5 \mid 10$, $g \perp h_1$, $h_1 \parallel h_2$. Man ersetzt also z. B. „ist kleiner als“ durch das Zeichen „<“ und schreibt entsprechend die kleinere der beiden in dieser Beziehung stehenden Zahlen davor, die größere dahinter.
Wird die Beziehung „ist kleiner als“ z. B. durch den Buchstaben K ersetzt, so könnte man für $2 < 3$ auch schreiben 2K3, d. h. 2 und 3 stehen in der Beziehung K: „ist kleiner als“.
Wir wollen im folgenden Beziehungen oft durch große Buchstaben ersetzen, und zwar vornehmlich durch R oder R_1 oder R_2 usw. Damit ersparen wir uns lange Schreibarbeiten. Diese Abkürzungen sind auch in der Mathematik üblich. Der Buchstabe „R“ kommt von dem Wort „Relation“ (deutsch: Beziehung). Man spricht in der Mathematik nicht von Beziehungen, sondern von Relationen. Und nun verstehst du auch die Überschrift!
Aus den mathematischen Beispielen erkennen wir wieder, daß jeweils *zwei* Zahlen oder geometrische Gebilde in einer bestimmten Beziehung miteinander stehen. Würden wir eine der beiden Zahlen oder Figuren weglassen, entstünde ein unvollständiger Satz. Wenn wir nur sagen: „5 ist ein Teiler“, so fragen wir sofort: „Wovon?“. Schau dir daraufhin die zuerst genannten Sätze noch einmal an! Da spürst du bei einigen deutlich, daß diese erst Sinn haben, wenn außer Fritz noch eine Person genannt wird. In unserem Falle ist es Peter.
Beim Suchen von Beziehungen in der Umgangssprache wirst du merken, daß oft Beziehungen in obiger Weise unvollständig formuliert werden. Wenn man z. B. über das Wetter spricht, so sagt man oft: „Heute ist das Wetter viel schöner“. Eigentlich

2. Grundmenge

Wenn du zu einer gegebenen Beziehung weitere in dieser Beziehung stehende Elemente suchst, dann wählst du sicher „passende Elemente“ aus, d. h. der entstehende Satz muß sinnvoll und richtig sein. Du wirst also nicht sagen: „8 ist parallel zu 3“, denn die Parallelität ist nicht für Zahlen erklärt, sondern für Geraden oder Ebenen. Du wirst auch nicht sagen: „2,4 ist Vorgänger von 2,5“, denn 2,5 ist eine rationale Zahl, und diese hat keinen Vorgänger. Die „Vorgänger-Beziehung“ ist z. B. für natürliche Zahlen erklärt.
Merke dir: Eine Beziehung ist stets in einer bestimmten Menge erklärt und außerhalb dieser eventuell sinnlos. Wir wollen diese Menge jeweils *Grundmenge* der Beziehung nennen.*

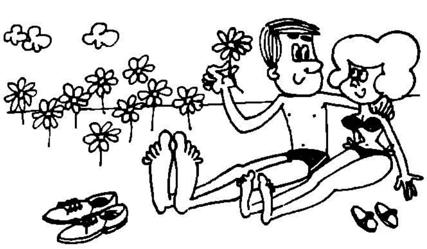
Wenn du von einer bestimmten Beziehung sprichst, mußt du also zunächst ihre Grundmenge angeben, d. h., du mußt sagen, welcher Menge die in Beziehung stehenden Elemente angehören sollen. Die aus dem Mathematikunterricht her bekannte Beziehung „steht senkrecht auf" hat im allgemeinen als Grundmenge eine Menge von Geraden. Sie kann auch als Grundmenge eine Menge von Ebenen oder eine Menge von Geraden und Ebenen haben.
Für die „Kleiner-als-Beziehung" kann man ebenfalls verschiedene Mengen als Grundmengen wählen: entweder die Menge der natürlichen Zahlen oder die Menge der gebrochenen Zahlen oder die Menge der rationalen Zahlen oder die Menge der reellen Zahlen (bzw. eine geeignete Teilmenge), denn in all diesen Zahlbereichen ist eine „Kleiner-als-Beziehung" definiert. Sie beschreibt die Ordnung der Zahlen im entsprechenden Zahlbereich, daher nennen wir sie „Ordnungsbeziehung" oder „Ordnungsrelation". Welche Besonderheiten eine solche Beziehung hat, werden wir später untersuchen. Wir wollen noch einmal auf die auf Seite 128 bereits benutzte vereinfachte kurze Schreibweise für Beziehungen hinweisen, da sie im folgenden oft verwendet wird. Wenn die „Kleiner-als-Beziehung" durch K abgekürzt werden soll, so bedeutet „aKb": „a ist kleiner als b". (a und b stehen für Elemente der Grundmenge der Beziehung K.)

3. Geordnete Paare

Beziehungen können also bestehen zwischen *zwei* Menschen oder Zahlen oder Dreiecken, also zwischen *zwei* Elementen einer entsprechenden Grundmenge.

$$[2;3] \neq [3;2]$$

Merke dir: Die beiden in Beziehung stehenden Elemente bilden ein *geordnetes Paar*.
Es ist nicht unbekannt, daß *zwei* zusammengehörige Dinge ein Paar bilden (Ehepaar, Liebespaar, Paar Schuhe usw.). Aber warum bilden zwei in Beziehung stehende Elemente ein *geordnetes* Paar?



Bei einem geordneten Paar müssen wir ein erstes und ein zweites Element unterscheiden. Wenn wir das Beispiel „2 ist kleiner als 3" betrachten, dann bilden 2 und 3 das geordnete Paar [2; 3]**. Das Paar [2; 3] ist zu unterscheiden von dem Paar [3; 2], denn für das letztgenannte Paar trifft die „Kleiner-als-Beziehung" nicht zu. „3 ist kleiner als 2" ist eine falsche Aussage. Dieses geordnete Paar gehört zu einer anderen Beziehung, nämlich zu „ist größer als". Es ist also nicht gleichgültig, in welcher Reihenfolge du zwei Elemente einer Menge in eine Beziehung einsetzt. Sollte für die Beziehung ein Zeichen existieren, ist also nicht gleichgültig, welches der beiden in dieser Beziehung stehende Element vor dem Zeichen und welches hinter dem Zeichen steht (z. B. gilt $2 < 3$ aber nicht $3 < 2$).
Wenn du die Beispiele am Anfang aufmerksam anschaust, wirst du allerdings Beziehungen finden, bei denen die Vertauschung der beiden in Beziehung stehenden Elemente keine falsche Aussage ergibt. Du kannst sagen: „Fritz ist Freund von Peter" und „Peter ist Freund von Fritz". Beide Sätze sind richtig. Ebenso kannst du sagen: „Peter wohnt im selben Haus wie Fritz" und auch „Fritz wohnt im selben Haus wie Peter". Da der erste Satz eine richtige Aussage ist, ist auch der zweite Satz eine richtige Aussage. Diese Beziehungen haben also eine besondere Eigenart, die sie vor anderen auszeichnet. Darüber werden wir später nachdenken.

Unser nächster Beitrag befaßt sich mit: *Beziehung als Menge von geordneten Paaren* (1/71).

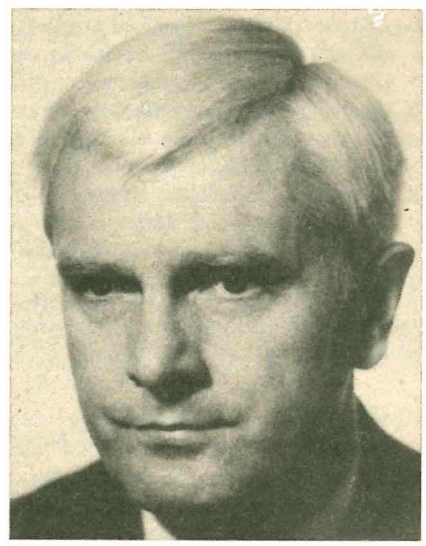
R. Herrmann

Aufgabe zu Abschnitt 3.

▪ 3 ▪ a) Gib einige geordnete Paare zu folgenden Beziehungen an:
„ist größer als"
„ist ein Teiler von"
„ist das Dreifache von"
„ist um 7 kleiner als"
„ist doppelt so groß wie"
„ist das Quadrat von"
b) Entscheide, ob die angegebenen Paare zu der entsprechenden Beziehung gehören oder nicht! Begründe deine Antwort! (Führe die Beispiele entsprechend den Musterbeispielen durch!)
Hinweis zu b): Versucht doch mal zu begründen, warum z. B. „$5 < 360$" eine wahre Aussage ist, ihr müßt dabei auf die Definition der „Kleiner-als-Beziehung" zurückgehen! Macht es ähnlich bei den folgenden Aufgaben! Wiederholt dazu die Definition der Beziehungen „ist ein Teiler von" bzw. „ist ein Vielfaches von"!

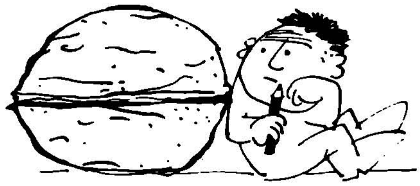
Beziehung	[a; b]	ja oder nein	Begründung
„ist kleiner als"	[5; 360]	ja	„$5 < 360$" ist eine wahre Aussage
„ist kleiner als"	[360; 5]	nein	„$360 < 5$" ist eine falsche Aussage
„ist ein Teiler von"	[27; 297]		
„ist ein Teiler von"	[3; 561]		
„ist ein Teiler von"	[0; 5]		
„ist ein Teiler von"	[5; 0]		
„ist ein Vielfaches von"	[280; 70]		
„ist ein Vielfaches von"	[993; 3]		
„ist ein Vielfaches von"	[0; 5]		
„ist ein Vielfaches von"	[5; 0]		

* Über Mengen kannst du dich noch einmal im Heft 1/4 1967 informieren!
** Man setzt bei geordneten Paaren die Elemente in eckige Klammern und trennt sie durch ein Semikolon, damit man nicht die Dezimalzahl 2,3 liest.



alpha gratuliert
Unser Redaktionsmitglied Dr. habil. *W. Walsch* wurde im Oktober 1970 zum Professor und als Korrespondierendes Mitglied in die Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR berufen.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin 1. März 1971

5 ▲ 590 Die Schüler der 6. Klasse einer Schule spendeten zur „Woche der Solidarität mit dem vietnamesischen Volk" 44 M. Die Schüler der 5. Klasse spendeten 2,50 M weniger als die der 6. Klasse. Die Schüler der 7. Klasse brachten 8,50 M mehr auf als die der 5. Klasse. Die Schüler der 8. Klasse spendeten die Hälfte des Betrages, der von den Klassen 5 und 6 zusammen abgeliefert wurde. Der Spendenbetrag der Schüler der 9. Klasse war um 25 Pf größer als der der 8. Klasse. Die Schüler der 10. Klasse spendeten den gleichen Betrag wie die der 6. Klasse. Welcher Gesamtbetrag konnte dem Solidaritätskonto zugeführt werden?

Karl-Heinz Gentzsch, Mathematiklehrer, 7404 Meuselwitz

5 ▲ 591 Mit welchen natürlichen Zahlen müssen die Variablen a, b, c, d belegt werden, damit wir aus den drei Gleichungen

$$a \cdot b = 18, \quad c = a - 6 \text{ und } d = 2 \cdot b$$

wahre Gleichheitsaussagen erhalten?

Marlies Lattke, Klasse 5, 8601 Rackel

W 5 ■ 592 In drei Bücherregalen befinden sich zusammen 120 Bücher. Entnehmen wir dem ersten Regal zwei Bücher und stellen sie in das zweite, entnehmen wir danach dem zweiten Regal drei Bücher und stellen diese in das dritte Regal, so befinden sich in jedem Regal gleich viel Bücher. Wie waren die Bücher zuvor auf die einzelnen Regale verteilt?

W 5 ■ 593 Ein Mathematiklehrer stellt erfreut fest, daß sich gegenwärtig sechs Schüler mehr als im vergangenen Jahr am *alpha*-Wettbewerb beteiligen. Die Anzahl der Schüler, die gegenwärtig die Wettbewerbsaufgaben lösen, ist gleich der Anzahl der Schüler, die sich im vergangenen Jahr nicht am Wettbewerb beteiligten. Wieviel der 28 Schüler dieser Klasse nehmen gegenwärtig am *alpha*-Wettbewerb teil?

Karl-Heinz Gentzsch, Mathematiklehrer, 7404 Meuselwitz

* 5 * 594 Drei Schüler stellen fest, daß jeder von ihnen genau 2,— M gespart hat. Die Ersparnis eines jeden besteht aus 5-, 10-, 20- und 50-Pfennigstücken, von denen jede Geldstückart bei jedem Sparer mindestens einmal, aber nicht häufiger als dreimal vertreten ist. Regine, die das hört, behauptet: „Mindestens zwei Schüler besitzen die gleiche Anzahl an Geldstücken." Begründe Regines Behauptung!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6 ▲ 595 Herr L. wohnt in Leipzig und arbeitet in Halle (Saale). In Halle kostet eine Fahrt mit der Straßenbahn 15 Pf, in Leipzig dagegen 20 Pf. Wieviel Fahrten mit der Straßenbahn könnte Herr L. für 2,00 M in Halle und Leipzig unternehmen?

Karl-Heinz Gentzsch

6 ▲ 596 Vor vielen Jahren erzählte ein Forscher: „Ich legte auf meiner letzten Forschungsreise 3 040 km zurück. Davon $3\frac{1}{2}$ mal so viel zu Wasser als zu Pferde und $2\frac{1}{3}$ mal so viel zu Fuß als zu Wasser." Wieviel Kilometer Wegstrecke legte der Forscher zu Fuß, zu Pferde bzw. mit dem Boot zurück?

P.

W 6 ■ 597 *Monika* belegte beim *Hans-Beimler*-Wettkampf im Luftgewehrschießen den dritten Platz. Die Siegerin, *Bärbel*, erzielte vier Ringe mehr als *Monika* und zwei Ringe mehr als *Margit*, die auf den zweiten Platz kam. *Monika* erreichte $\frac{4}{5}$ der Anzahl aller möglichen Ringe. Addiert man die von diesen drei Mädchen erreichten Ringzahlen, so erhält man das $2\frac{1}{2}$fache der Anzahl aller möglichen Ringe. Wie groß ist diese Anzahl? Welche Ringzahlen erzielten die drei Mädchen?

Ulrike Weise, Kl. 10, SIII EOS „Friedrich Engels", Karl-Marx-Stadt

W 6 ■ 598 Fünf Kugeln, und zwar drei weiße und zwei schwarze, werden so an drei Personen *A*, *B* und *C* verteilt, daß jede dieser Personen wenigstens eine, jedoch höchstens zwei Kugeln erhält. Nach der Verteilung der Kugeln sagen diese drei Personen folgendes aus:

A: „Ich habe nur Kugeln der gleichen Farbe in der Hand."

B: „Ich erhielt Kugeln mit unterschiedlicher Farbe."

C: „Ich habe genau zwei Kugeln erhalten."

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha, 7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h., für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben, mit * versehen, gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe oder die entsprechenden in Heft 1/71, 2/71, 3/71 veröffentlichten Aufgaben der Kreis-, Bezirks- bzw. DDR-Olympiade einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 gekennzeichnet sind oder veröffentlichte Olympiadeaufgaben 11/12.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm), denn jede Aufgabe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder das Endergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 70/71 läuft von Heft 5/70 bis Heft 3/71. Zwischen dem 1. und 10. Oktober 1971 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/70 bis 3/71 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/71 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/70 bis 3/71 erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, welche bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1970/71 einsenden, erhalten das *alpha-Abzeichen in Gold* (und die Urkunden zurück).

Redaktion *alpha*

Wie wurden die Kugeln verteilt, wenn wir wissen, daß alle von diesen drei Personen gemachten Aussagen falsch sind? *T.*

* 6 * 599 Das Beispiel $P \cdot PQP \cdot P = RPRP$ einer Multiplikation ist zu entschlüsseln. Dabei entspricht jedem Buchstaben eine Ziffer. Gleichen Buchstaben entsprechen gleichen, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Ferner sei $P \neq 0$ und $R \neq 0$. Wie lautet diese Multiplikationsaufgabe?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7 ▲ 600 Von drei von Null und Eins verschiedenen natürlichen Zahlen a, b, c sind die kleinsten gemeinsamen Vielfachen je zweier dieser Zahlen bekannt:

$k(a, b) = 12$; (lies: das k. g. V. der Zahlen a und b ist 12)

$k(b, c) = 108$;

$k(a, c) = 27$.

Welche Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen genügen diesen Bedingungen? *T.*

7 ▲ 601 Wieviel dreistellige natürliche Zahlen gibt es, die die folgenden vier Bedingungen zugleich erfüllen? Sie sollen bei Division durch

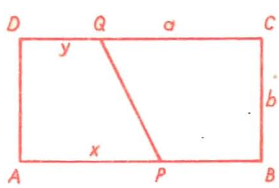
a) 8 den Rest 7, b) 6 den Rest 5,

c) 4 den Rest 5, d) 10 den Rest 1 lassen. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

W 7 ■ 602 Multipliziert man die Summe von drei natürlichen Zahlen mit je einer von ihnen, so erhält man die Produkte 240, 270 und 390. Um welche Zahlen handelt es sich?

Karl Krause, 4274 Mansfeld

W 7 ■ 603 Das abgebildete Rechteck $ABCD$ wird durch die Gerade PQ so in



zwei Trapeze zerlegt, daß sich die Flächeninhalte A_1 und A_2 der Trapeze $APQD$ und $PBCQ$ wie $2:3$ verhalten. Die Summe der Strecken $\overline{AP} = x$ und $\overline{DQ} = y$ ist durch die Seite $\overline{AB} = a$ des Rechtecks $ABCD$ auszudrücken. *T.*

* 7 * 604 Ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ besitzt die folgende Eigenschaft:

Der Mittelpunkt M der Seite $\overline{AB}$ hat vom Fußpunkt D der Höhe $\overline{CD}$ zur Seite $\overline{AB}$ den gleichen Abstand wie von der Halbierungslinie des Winkels $\sphericalangle ABC = \beta$. Es ist die Größe der beiden spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks ABC zu ermitteln.

Ing. H. Decker, Köln

8 ▲ 605 Es sei p eine Primzahl, die größer als 3 ist. Es ist zu beweisen, daß dann die Zahl $p^2 - 1$ stets durch 24 teilbar ist.

Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden

8 ▲ 606 Der Kapitän eines Schiffes beobachtet genau 20° voraus an Steuerbord ein Leuchtfeuer (d. h., der Strahl von dem Schiff zu dem rechts von dem Schiff liegenden Leuchtfeuer bildet mit der Fahrtrichtung des Schiffes einen Winkel von 20°). Das Schiff steuert west (fährt also in genau westlicher Richtung) und läuft 15 Knoten (15 Seemeilen in einer Stunde). Nach 20 Minuten Fahrt beobachtet der Kapitän das Leuchtfeuer genau 40° voraus an Steuerbord.

Wieviel Seemeilen ist das Schiff zur Zeit der zweiten Beobachtung von dem Leuchtfeuer entfernt?

Die Antwort ist zu begründen, und es ist eine maßstäbliche Zeichnung anzufertigen.

K.-H. Krüger, Fachlehrer für Mathematik, Wustrow

W 8 ■ 607 Es sind alle geordneten Paare von zweistelligen natürlichen Zahlen anzugeben, die die folgenden Eigenschaften haben.

1. Ihre Summe ist gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl.

2. $\frac{1}{5}$ der ersten Zahl ist gleich $\frac{6}{25}$ der zweiten Zahl. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

W 8 ■ 608 Wie lautet diejenige vierstellige natürliche Zahl, die gleich

$a^a(100 - a^a)$

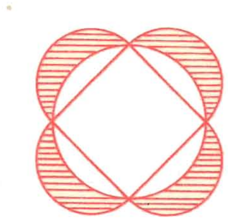
ist, wobei a eine von Null verschiedene natürliche Zahl darstellt?

Ing. H. Decker, Köln

* 8 * 609 Einem Quadrat $ABCD$ sei ein Kreis k umbeschrieben. Ferner seien über den vier Quadratseiten nach außen die Halbkreise gezeichnet.

a) Es ist zu entscheiden, ob der Flächeninhalt des Quadrats größer, kleiner oder gleich der Summe der Flächeninhalte der in der beigefügten Abbildung schraffierten „Mondsicheln" ist, d. h. der jeweils von einem Kreisbogen des Kreises k und einem der Halbkreise begrenzten Flächenstücke.

b) Diese Summe ist durch die Seitenlänge a des Quadrats $ABCD$ auszudrücken.



Thomas Feigel, OS Hirschberg (Saale), Kl. 9

9 ▲ 610 Übungsaufgaben
9 ▲ 611 siehe IV. Umschlagseite

W 9 ■ 612 Es ist zu entscheiden, ob die Zahl

$$z = \frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} - \frac{10}{23}\sqrt{2}$$

eine rationale Zahl ist oder nicht.

Bemerkung: Eine Zahl ist rational genau dann, wenn sie sich in der Form $\frac{p}{q}$ darstellen läßt, wobei p und q teilerfremde ganze Zahlen mit $q \neq 0$ sind. *TU Dresden*

W 9 ■ 613 Einem Würfel sei eine Kugel einbeschrieben und eine Kugel umbeschrieben. Wie verhalten sich die Rauminhalte dieser beiden Kugeln zueinander?

TU Dresden

* 9 * 614 a) Von einem Dreieck $A_1A_2A_3$ seien die Mittelpunkte der Seiten M_1, M_2, M_3 gegeben, wobei M_1 der Mittelpunkt der Seite $\overline{A_1A_2}$, M_2 der Mittelpunkt der Seite $\overline{A_2A_3}$ und M_3 der Mittelpunkt der Seite $\overline{A_3A_1}$ ist.

Es ist das Dreieck $A_1A_2A_3$ zu konstruieren.

b) Von einem Viereck $A_1A_2A_3A_4$ seien die Mittelpunkte der Seiten M_1, M_2, M_3, M_4 gegeben, wobei M_1 der Mittelpunkt der Seite $\overline{A_1A_2}$, M_2 der Mittelpunkt der Seite $\overline{A_2A_3}$ usw. ist.

Es ist das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ zu konstruieren.

10/12 ▲ 615 Übungsaufgabe, siehe IV. Umschlagseite.

W 10/12 ■ 616 Ein Steilwandzelt vom Typ „Puck 8" hat die Form eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfes, dessen Grundkanten die Längen $a = 3{,}30$ m und $b = 2{,}15$ m haben und dessen Höhe die Länge $h_1 = 1{,}70$ m hat, mit aufgesetzter gerader quadratischer Pyramide, deren Höhe die Länge $h_2 = 0{,}50$ m hat.

Es ist der Rauminhalt dieses Zeltes zu berechnen, wobei der Rauminhalt V_1 des pyramidenstumpfförmigen Teils

a) mit Hilfe der Näherungsformel für das Volumen des Pyramidenstumpfes

$$V_1' = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot h_1$$

b) mit Hilfe der genauen Formel

$V_1 = \frac{h_1}{3}(a^2 + ab + b^2)$ berechnet werden soll. *L.*

W 10/12 ■ 617 Es sind alle ganzen rationalen Zahlen k anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$kx - 3y = 18, \qquad (1)$$

$$\frac{x}{k} + 5y = 2 \qquad (2)$$

negative rationale Lösungen x und y hat.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

* 10/12 * 618 Es sei $ABCA'B'C'$ ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge a ist und dessen Höhe die Länge h hat. A' liege über A, B' über B und C' über C.

Für welches Verhältnis $h : a$ ist der Winkel $\sphericalangle AC'B$ genau gleich 45°?

Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

Berufsbild: Hochschulingenieur

Ein neuer Bildungsweg für junge Facharbeiter

An der Ingenieurhochschule Leipzig werden in 7 Semestern Hochschulingenieure in den Sektionen „Technische Kybernetik" und „Polygrafie" ausgebildet

In Weiterführung der 3. Hochschulreform entstand mit Beginn des Studienjahres 1969/70 in der DDR ein neuer Typ von wissenschaftlichen Hochschulen für strukturbestimmende Bereiche der Volkswirtschaft. Die Ingenieurhochschulen — so lautet ihre Bezeichnung — stellen einen neuen Bildungsweg für die in der Praxis tätigen jungen Facharbeiter dar. Die Möglichkeiten für die Ausbildung von Ingenieuren mit Hochschulabschluß werden beträchtlich erweitert und das Gesamtsystem des Bildungswesens in der DDR um einen wesentlichen Bestandteil ergänzt.

Sicherlich ist die Tatsache bekannt, daß jeder dritte Schulabgänger in der DDR 1970 ein Hoch- oder Fachschulstudium aufnehmen mußte, um die Aufgaben im Zuge der wissenschaftlich-technischen Revolution zu meistern. Im Bereich des Hoch- und Fachschulwesens werden in diesem Jahr die Investitionen auf fast das Doppelte erhöht. Auf dieser Grundlage ist es möglich, auch die Zulassungsquote an den Hoch- und Fachschulen weiter zu steigern.

Die Bewerber für ein Studium an der Ingenieurhochschule Leipzig müssen zwei Voraussetzungen erfüllen. Neben der Hochschulreife benötigen sie den Abschluß der Facharbeiterprüfung in einem einschlägigen Beruf. Es ist typisch für die Ingenieurhochschulen, daß sie in wesentlichem Umfang auch hervorragende Absolventen der Berufsschulen als den Kadern der Arbeiterklasse beim Erwerb der Hochschulreife unterstützen und nach einer entsprechenden Prüfung immatrikulieren. Die Facharbeiterprüfung soll in einem technischen Grundberuf erfolgt sein, vorzugsweise in der elektrotechnischen Industrie, der Metallindustrie, der chemischen Industrie oder in der polygrafischen Industrie.

An der Ingenieurhochschule Leipzig bestehen gegenwärtig die Sektionen „Technische Kybernetik" und „Polygrafie". An beiden Sektionen werden in einem Studium von sieben Semestern Hochschulingenieure ausgebildet, ein neuer Typ von Ingenieuren mit Hochschulabschluß, der sich vor allem durch eine enge Verbindung zur Praxis auszeichnet.

Der Hochschulingenieur auf dem Gebiet der Technischen Kybernetik hat im Rahmen der Volkswirtschaft eine wichtige und verantwortungsvolle Tätigkeit auszuüben, die hohe Anforderungen an ihn stellt. Er nimmt entscheidenden Einfluß auf die Entwicklung automatisierungsgerechter Technologien und Verfahren zur Gestaltung ökonomisch und technisch optimaler Prozesse im gesamten Bereich der Volkswirtschaft.

Nach der Vermittlung eines breiten Grundlagenwissens erfolgt im Fachstudium die Ausbildung in den einzelnen Lehrkomplexen. Dazu zählen die Komplexe Technische Stoffe, Technische Systeme, Grundlagen der Technologie, Systemgestaltung und Sozialistische Betriebswirtschaftslehre. Eine gewisse Akzentuierung und zugleich die Vorbereitung auf das Ingenieurpraktikum wird durch wahlobligatorische Vorlesungen in der letzten Ausbildungsphase erreicht. Anschließend erfolgt im 7. Semester mit einem halbjährigen Ingenieurpraktikum eine spezielle Fachausbildung für den späteren Arbeitsbereich. Aus den konkreten Einsatzbedingungen ergeben sich diejenigen Gebiete, in denen erweiterte und vertiefte Fähigkeiten und Kenntnisse für eine erfolgreiche Tätigkeit unabdingbar sind.

Der Hochschulingenieur auf dem Gebiet der Polygrafie muß in der Lage sein, die neuesten naturwissenschaftlichen Erkenntnisse im Industriezweig anzuwenden und den Produktions- und Reproduktionsprozeß ständig zu intensivieren. Den Anforderungen der wissenschaftlich-technischen Revolution entsprechend wird er u. a. dazu beitragen, daß die manuelle Tätigkeit verringert wird, zu automatisierten Arbeitsverfahren übergegangen und automatisch gesteuerte Produktionssysteme angewandt werden.

Nach der Vermittlung eines breiten Grundlagenwissens erfolgt ebenfalls im Fachstudium die Ausbildung in industriebezogenen Stoffkomplexen, so z. B. in Technische Stoffe, Technische Systeme, Grundlagen der Technologie, Prozeßgestaltung. Ebenso wie in der Sektion „Technische Kybernetik" erfolgt im 7. Semester eine spezielle Fachausbildung im Ingenieurpraktikum.

Der Einsatz der Hochschulingenieure erfolgt entsprechend der jeweiligen Ausbildung. Die aus der Sektion „Technische Kybernetik" kommenden technologisch orientierten Hochschulingenieure können u. a.

— in Entwicklungs- und Projektierungsbetrieben
— in Zentralstellen für Rationalisierung
— in verantwortlichen Funktionen von Betriebskontrollen, Wärmestellen und Meßwarten
— in der Wartung und Instandhaltung komplex automatisierter Produktionsanlagen

eingesetzt werden.

Die Hochschulingenieure der Sektion „Polygrafie" können u. a.

— in Führungsfunktionen für den technologischen Prozeß polygrafischer Industriebetriebe
— in Leitungsorganen von Betrieben der Verpackungsmittelindustrie sowie in den Verlagen
— als Mitarbeiter in Instituten, Projektierungsbüros und in Außenhandelsorganen

eingesetzt werden.

Nach erfolgreicher ein- bis eineinhalbjähriger Tätigkeit in der Praxis hat der Hochschulingenieur die Möglichkeit, den wissenschaftlichen Grad eines Diplomingenieurs an der Ingenieurhochschule Leipzig zu erlangen. Damit wird deutlich, daß die Ingenieurhochschulen der DDR vollwertig in die Reihe der Technischen Hochschulen treten, wobei sie sich durch besonders enge Praxisverbindungen auszeichnen.

G. Burucker

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. techn. Detlef Schmidt

Rektor der Ingenieurhochschule Leipzig

▲ 619 Vier Facharbeiter A, B, C und D einer Brigade betreuen je einen Lehrling a, b, c und d. Sowohl Facharbeiter als auch Lehrlinge produzieren gleiche Gegenstände und verabreden folgenden Wettstreit:
Jeder erhält für jeden von ihm gefertigten Gegenstand soviel Pfennige aus der Brigadekasse, wie er Gegenstände abgeliefert hat.
Am Ende ergibt sich folgende Abrechnung: $A(B, C)$ lieferten 37 (11,9) Gegenstände mehr ab als a (b, c). Jeder Facharbeiter erhält 1,05 M mehr als sein ihm zugeordneter Lehrling.
Welcher Facharbeiter hat welchen Lehrling zu betreuen?

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Kreis-, Bezirks- und DDR-Olympiade

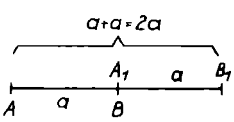
Kreisolympiade

Olympiadeklasse 5

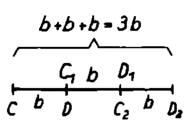
1. Bei genau 5 Würfeln sind je zwei gegenüberliegende Würfelflächen verdeckt. Die Summe ihrer Augenzahlen beträgt daher $5 \cdot 7 = 35$. Bei dem obersten Würfel ist nur die der Fläche mit der Augenzahl 1 gegenüberliegende Fläche verdeckt. Sie hat aus dem in der Aufgabe genannten Grunde die Augenzahl 6. Mithin beträgt die Summe der Augenzahlen aller verdeckten Flächen $35 + 6 = 41$.

2. Der zweite Kunde kaufte genau 2 m Stoff mehr als der erste; denn 5 m − 3 m = 2 m. Für diese 2 m Stoff hatte er 30,— M zu bezahlen. Jedes Meter Stoff kostete daher die Hälfte davon, das sind 15,— M. Die drei Kunden kauften zusammen 17 m Stoff; folglich hatten sie insgesamt $17 \cdot 15$ M = 255 M zu bezahlen.

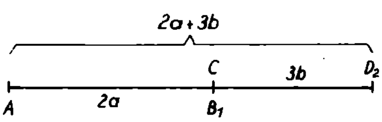
3.



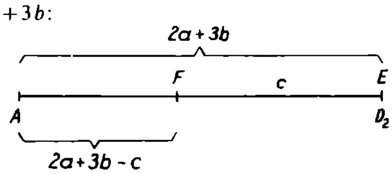
(1) Konstruktion einer Strecke der Länge $2a$:



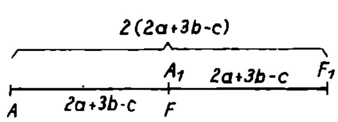
(2) Konstruktion einer Strecke der Länge $3b$:



(3) Konstruktion einer Strecke der Länge $2a + 3b$:



(4) Konstruktion einer Strecke der Länge $2a + 3b - c$:



(5) Konstruktion einer Strecke der Länge $2(2a + 3b - c)$:

4. Die Zahlen 3; 5 und 7 sind paarweise teilerfremd. Daher ist wegen $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ eine Zahl genau dann sowohl durch 3 als auch durch 5 als auch durch 7 teilbar, wenn sie ein ganzzahliges Vielfaches von 105 ist. Nun gilt

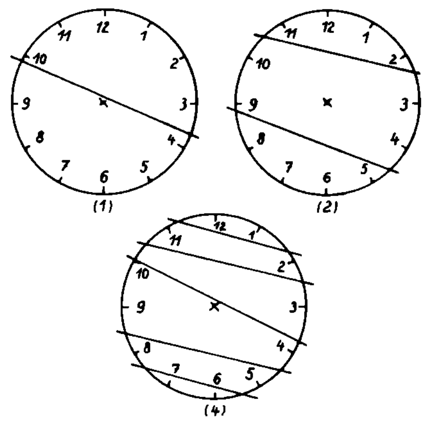
$4 \cdot 105 = 420 \quad 5 \cdot 105 = 525 \quad 6 \cdot 105 = 630$
$7 \cdot 105 = 735 \quad 8 \cdot 105 = 840$
$9 \cdot 105 = 945 \quad 10 \cdot 105 = 1\,050,$

Die Bedingungen (b) und (c) werden daher von den Zahlen 525; 630; 735; 840; 945 und nur von diesen erfüllt; denn jedes Vielfache von 105 mit einer kleineren ganzen Zahl als 5 ist kleiner als 500 und jedes Vielfache von 105 mit einer größeren ganzen Zahl als 9 ist größer als 1 000.
Von diesen Zahlen erfüllen 525; 735 und 945 und nur diese auch die Bedingung (a).
Die gesuchten Zahlen sind daher 525; 735 und 945 und nur diese.

Olympiadeklasse 6

1. (I) Nach Aufgabenstellung waren (wegen $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$) alle Fahrer außer Klaus so viel wie $\frac{5}{6}$ aller teilnehmenden Fahrer. Klaus stellte daher $\frac{1}{6}$ aller Teilnehmer dar. Das ist nur möglich, wenn die Teilnehmerzahl 6 betrug.
(II) Daher erreichten wegen $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ genau 2 der Teilnehmer vor Klaus das Ziel, so daß Klaus den 3. Platz belegte.

2. Die Summe der auf jeder Kreisscheibe aufgetragenen Zahlen beträgt jeweils 78. Die Kreisscheibe läßt sich daher höchstens dann in die laut Aufgabe geforderten Teile zerlegen, wenn die verlangte Teilanzahl (also 2; 3; 4; 6) ein Teiler von 78 ist. Das gilt für 2; 3 und 6, für 4 dagegen nicht. Daher lassen sich höchstens die erste, die zweite und die vierte Kreisscheibe in der geforderten Weise zerlegen.
Eine Zerlegung in 4 derartige Teile (Kreisscheibe 3) ist nicht möglich. Wie die Abb. L 6;2 zeigt, können die genannten Kreisscheiben tatsächlich der Aufgabe entsprechend geteilt werden. Dabei beachten wir, daß für die Zahlen 1, 2, ..., 12 gilt:
$1 + 12 = 2 + 11 = 3 + 10 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7 = 13$.



3. Die Summe der Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle ECD$ wird von $\sphericalangle BCD$ zu 180° ergänzt. Die nach Voraussetzung ihr gleiche Summe der Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle ABC$ wird von $\sphericalangle BAC$ zu 180° ergänzt (Winkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$). Daraus folgt die Behauptung

$$\sphericalangle BCD \cong \sphericalangle BAC.$$

Anmerkung: Die Lösung kann auch mit Hilfe des Außenwinkelsatzes oder der Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen erfolgen. In diesem Fall wäre z. B. die Parallele zu BC durch den Punkt A zu ziehen, usw.

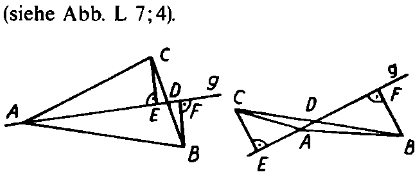
4. Laut Aufgabe legt Elke in jeder Minute genau $\frac{1}{30}$ des Schulweges, Jürgen in jeder Minute genau $\frac{1}{20}$ des gleichen Weges zurück. Da Elke 5 Minuten vor Jürgen losgegangen ist, hat sie vor Jürgen in dieser Zeit einen Vorsprung von $\frac{5}{30} = \frac{10}{60}$ des Weges.
Wegen $\frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60}$ verringert sich dieser Vorsprung in jeder Minute um $\frac{1}{60}$ des Gesamtweges. Die gesuchte Anzahl der Minuten bis zum Einholen kann also nur diejenige Zahl sein, mit der man $\frac{1}{60}$ multiplizieren muß, um $\frac{10}{60}$ zu erhalten. Das ist die Zahl 10.
Jürgen holt unter den angegebenen Umständen seine Schwester in genau 10 Minuten ein.

Olympiadeklasse 7

1. a) Mit 4 Schritten legt der Vater 320 cm zurück; denn $4 \cdot 80\,\text{cm} = 320\,\text{cm}$. Da der Sohn für die gleiche Strecke 5 Schritte braucht, beträgt wegen $320 : 5 = 64$ seine durchschnittliche Schrittlänge 64 cm.
b) Genau dann, wenn der Vater ein (positives ganzzahliges) Vielfaches von 4 als Schrittzahl beendet hat, hat der Sohn gleichzeitig mit dem Vater eine ganzzahlige Schrittzahl beendet, treten also Vater und Sohn gleichzeitig auf. Dies geschieht genau dann mit dem linken Fuß, wenn sie eine gerade Anzahl von Schritten beendet haben. Bei dem Vater ist dies für jedes Vielfache von 4 der Fall, bei dem Sohn genau für alle geradzahligen Vielfachen von 5. Das kleinste (positive) geradzahlige Vielfache von 5 ist aber das Zweifache.
Daher treten Vater und Sohn erstmalig nach dem 8. Schritt des Vaters gleichzeitig mit dem linken Fuß auf.
2. Da die Summe je eines Innenwinkels und eines zugehörigen Außenwinkels 180° beträgt, ist eine Ecke genau dann „ausgezeichnet", wenn der Innenwinkel bei dieser Ecke 90° beträgt. Nun gibt es Dreiecke mit *genau einem* rechten Innenwinkel, aber es gibt keine Dreiecke mit *mehr als einem* solchen. Daher ist die einzige und mithin auch größte mögliche Anzahl 1.

3. Die an den einzelnen Tagen zurückgelegten Wege sind proportional den jeweiligen Durchschnittsgeschwindigkeiten. Der am zweiten bzw. dritten Tag zurückgelegte Weg ist also das 5- bzw. 10fache des am ersten Tag zurückgelegten Weges.
Wegen $1+5+10=16$ ist somit der Gesamtweg, nach Aufgabenstellung 520 km, das 16fache des am ersten Tage zurückgelegten Weges. Dies ist nur möglich, wenn der am ersten Tage zurückgelegte Weg $520\,\text{km} : 16 = 32{,}5\,\text{km}$ und folglich der am zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegte Weg $5 \cdot 32{,}5\,\text{km} = 162{,}5\,\text{km}$ bzw. $10 \cdot 32{,}5\,\text{km} = 325\,\text{km}$ betrugen. Daraus ergibt sich wegen
$\frac{32{,}5}{6} = \frac{65}{12}\left(=5\frac{25}{60}\right)$ die am ersten Tage (und nach Aufgabenstellung an jedem der drei Tage) aufgewendete Zeit als $\frac{65}{12}$ h
($=5$ h 25 min).

4. Der Mittelpunkt der Seite BC sei D, das Lot von C bzw. von B auf g sei CE bzw. BF (siehe Abb. L 7;4).



Fällt E mit D zusammen, dann fällt auch F mit D zusammen, und es gilt $\overline{AD} \perp \overline{CB}$ und damit wegen $\overline{CE} = \overline{CD}$ und $\overline{BF} = \overline{BD}$ auch $\overline{CE} = \overline{BF}$. Fällt E nicht mit D zusammen, so fällt auch F nicht mit D zusammen. Dann stimmen die Dreiecke $\triangle CDE$ und $\triangle BDF$ in den Seitenlängen $\overline{CD}$, $\overline{BD}$, den Größen der anliegenden Winkel $\sphericalangle CDE$, $\sphericalangle BDF$ (Scheitelwinkel) und denen der gegenüberliegenden (rechten) Winkel $\sphericalangle CED$, $\sphericalangle BFD$ überein.
Also gilt $\triangle CDE \cong \triangle BFD$, und daraus folgt $\overline{CE} = \overline{BF}$ w.z.b.w.

Olympiadeklasse 8

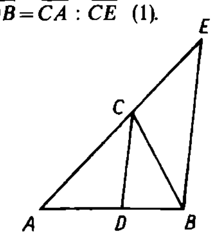
1. Ordnet man z. B. die möglichen Würfe und die zugehörigen Summen der jeweiligen beiden Augenzahlen in Form nachstehender Tabelle an, so erkennt man, daß in der Tat die Summe 7 am häufigsten auftritt.

kleiner Würfel	großer Würfel 1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2. Der gesuchte Flächeninhalt A ist gleich der Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über AB, FG, AO und OB vermindert um die Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über EH, EF und GH.
Wegen $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\overline{FG} = 2\,\text{cm}$, $\overline{AO} = \overline{OB} = 3\,\text{cm}$, $\overline{EH} = 4\,\text{cm}$, $\overline{EF} = \overline{GH} = 1\,\text{cm}$ gilt daher:
$A = \frac{\pi}{8}(36+4+9+9-16-1-1)\,\text{cm}^2$
$= 5\,\pi\,\text{cm}^2$.
Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt $5\,\pi\,\text{cm}^2$, das sind angenähert $15{,}71\,\text{cm}^2$.

3. (I) Im Zeitraum von je einem Übereinanderstehen der beiden Zeiger bis zum nächsten nimmt der Winkel zwischen den Zeigern (gemessen im Uhrzeigersinn vom Stundenzeiger bis zum Minutenzeiger) alle Werte von 0° bis 360° an, jeden genau einmal. Unter diesen Zeigerstellungen befinden sich genau zwei der gesuchten, nämlich die mit den Winkeln 90° und 270°.
(II) In der Zeit von 0 Uhr bis 12 Uhr führt der Minutenzeiger genau 12 volle Umdrehungen aus, der Stundenzeiger genau eine in gleicher Richtung. Daher wird dieser Zeitraum durch die Zeitpunkte des Übereinanderstehens der beiden Zeiger in 11 Teile geteilt (und zwar wegen der Gleichförmigkeit der Bewegungen in gleichlange).
(III) Aus (I) und (II) folgt zunächst: Die Zeit von 0 Uhr bis 24 Uhr wird durch die Zeitpunkte des Übereinanderstehens in 22 Teile geteilt, und in jedem dieser Teilzeiträume befinden sich genau 2 gesuchte Zeitpunkte. Deren Gesamtzahl beträgt somit 44.
(IV) Aus (I), (II) und der Gleichförmigkeit der Bewegungen folgt ferner: Der Zeitraum von 0 Uhr bis 12 Uhr wird durch diejenigen Zeitpunkte, die den Winkeln 0°, 90°, 180°, 270° entsprechen, in 44 gleichlange Teile geteilt. Diese Zeitpunkte ergeben sich somit als die ersten 43 positiven ganzzahligen Vielfachen von $\frac{12}{44}\,\text{h} = \frac{3}{11}\,\text{h}$. Die Zeitpunkte mit den Winkeln 90° und 270° sind dabei die ungeradzahligen unter diesen Vielfachen. Von diesen liegen zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr genau diejenigen $n \cdot \frac{3}{11}\,\text{h}$ (n ungerade), bei denen n die Ungleichungen $4 < n \cdot \frac{3}{11} < 5$ oder, gleichbedeutend hiermit, $\frac{44}{3} < n < \frac{55}{3}$ erfüllt, d. s. die Zeitpunkte
$15 \cdot \frac{3}{11}\,\text{h} = 4\frac{1}{11}\,\text{h} = 4\,\text{h}\;5\frac{5}{11}\,\text{min}$ und
$17 \cdot \frac{3}{11}\,\text{h} = 4\frac{7}{11}\,\text{h} = 4\,\text{h}\;38\frac{2}{11}\,\text{min}$.
(Auf weitere Lösungswege muß verzichtet werden, d. Red.)

4. Im Dreieck $\triangle ABC$ schneide die Halbierende des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ die Gegenseite AB im Punkt D.
(Weil eine Aussage über Streckenverhältnisse bewiesen werden soll, ist es naheliegend, das Dreieck $\triangle ABC$ mit der Winkelhalbierenden CD zu einer Strahlensatzfigur zu ergänzen.)
Man konstruiere die Parallele durch B zur Winkelhalbierenden CD und verlängere AC über C hinaus. Der Schnittpunkt, der in jedem Fall existiert (denn der Winkel $\sphericalangle ACD$ ist stets kleiner als 90°), sei E (vgl. Abb. L 8;4).
Nach einem der Strahlensätze gilt:
$\overline{DA} : \overline{DB} = \overline{CA} : \overline{CE}$ (1).



Außerdem ist $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle CEB$ (Stufenwinkel an geschn. Parallelen)
und $\sphericalangle DCB \cong \sphericalangle CBE$, und weil (Wechselwinkel an geschn. Parallelen)
$\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle DCB$ vorausgesetzt war,
folgt $\sphericalangle CEB \cong \sphericalangle CBE$. Also ist das Dreieck $\triangle CEB$ gleichschenklig mit $\overline{CE} = \overline{CB}$.
Setzt man dies in (1) ein, so erhält man
$\overline{DA} : \overline{DB} = \overline{CA} : \overline{CB}$, w.z.b.w.
Anmerkung: Diese Hinführung zum Beweismotiv ist nicht für einen vollständigen Lösungstext erforderlich.
Ein anderer Beweisweg besteht darin, E auf der Verlängerung von AC über C hinaus durch $\overline{CE} = \overline{CB}$ zu definieren und *dann* $EB \parallel CD$ *zu beweisen.*

Olympiadeklasse 9

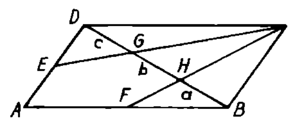
1. Eine Frage reicht nicht aus, da der Lehrer wegen der Aufteilung der Schüler in drei Gruppen und wegen des Vorhandenseins nur zweier Antwortmöglichkeiten (ja, nein) auf jede beliebige (nach den Regeln zulässige) Frage von Angehörigen mindestens zweier Gruppen die gleiche Antwort erhalten würde. („Schubfachprinzip"). Mit der Angabe des

folgenden Beispiels zeigen wir gleichzeitig, daß zwei Fragen ausreichen. Der Lehrer kann z. B. die Fragen „Bist du ein Unbeständiger?" stellen; denn dann erhält er von einem „Wahren" die Antworten nein, nein, von einem „Unwahren" die Antworten ja, ja und von einem „Unbeständigen" die Antworten ja, nein oder nein, ja. Damit ist aber eine Identifizierung möglich.

2. Es ist $V_1 = a_1^3$.
Ferner beträgt die Höhe einer Seitenfläche des Tetraeders $h = \frac{1}{2} a_2 \sqrt{3}$, die Höhe des Tetraeders $h' = \sqrt{a_2^2 - \left(\frac{2}{3} h\right)^2} = \frac{1}{3} a_2 \sqrt{6}$, der Flächeninhalt einer Seitenfläche des Tetraeders
$F = \frac{1}{2} a_2 h = \frac{1}{4} a_2^2 \sqrt{3}$, also das Volumen des Tetraeders
$V_2 = \frac{1}{3} F \cdot h' = \frac{1}{12} a_2^3 \sqrt{2}$. (Kann evtl. der Zahlentafel entnommen werden.)
Nun ist laut Aufgabenstellung $a_2 = a_1 \sqrt{2}$.
Daraus folgt $V_2 = \frac{1}{3} a_1^3 = \frac{1}{3} V_1$.
Das gesuchte Verhältnis ist also $V_1 : V_2 = 3 : 1$.

3. Angenommen, es gäbe zwei solche Zahlen a und b (mit $b < a$) und es sei $a : b = n$ (n natürlich).
Dann gilt $n > 1$ sowie $1234567 \leqq a, b \leqq 7654321$, also $n \leqq \frac{7654321}{1234567} < 7$.
Deshalb kann n nur eine der Zahlen 2, 3, 4, 5 oder 6 sein.
Angenommen, es sei $n = 3$ oder $n = 6$.
Dann ergibt sich folgender Widerspruch: Einerseits ist $a = 3b$ oder $a = 6b$, also a durch 3 teilbar. Andererseits hat a die Quersumme 28, kann also nicht durch 3 teilbar sein.
Angenommen, es sei $n = 2$. Da in b die Ziffer 4 vorkommt, müßte bei der Multiplikation der entsprechenden Stelle mit 2 in a eine 8 oder (falls der bei Multiplikation einer Ziffer 1, ..., 7 mit 2 und eventuellem Hinzufügen eines vorangegangenen Übertrags größtmögliche Übertrag 1 hinzukommt) eine 9 entstehen, im Widerspruch dazu, daß diese Ziffern in a nicht vorkommen.
Angenommen, es sei $n = 5$.
Der bei Multiplikation einer der Ziffern 1, ..., 7 mit 5 und eventuellem Hinzufügen eines früheren Übertrags größtmögliche Übertrag ist dann 3. Da die Vielfachen von 5 auf 0 oder 5 enden, kann in a keine 4 auftreten, im Widerspruch dazu, daß a die Ziffer 4 enthält.
Angenommen, es sei $n = 4$.
Da in b eine 7 enthalten ist, müßte wegen $7 \cdot 4 = 28$ in a entweder eine 8, 9 oder 0 enthalten sein; denn der größtmögliche Übertrag aus den übrigen Stellen beträgt 2. Da in a keine dieser Ziffern auftritt, liegt auch in diesem Falle ein Widerspruch vor. Da in allen möglichen Fällen ein Widerspruch auftrat, kann es Zahlen mit der angegebenen Bedingung nicht geben.

4. Es seien:
E der Mittelpunkt der Seite AD,
F der Mittelpunkt der Seite AB,
G der Schnittpunkt der Strecken EC und BD und
H der Schnittpunkt der Strecken FC und BD.
Ferner gelte: $\overline{HB} = a$, $\overline{HG} = b$, $\overline{GD} = c$, und $\overline{BD} = d$.
Nach dem Hauptähnlichkeitssatz folgt:
$\triangle FBH \sim \triangle CHD$ (Übereinstimmung in Scheitelwinkeln und Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen).
Wegen $\overline{FB} : \overline{DC} = 1 : 2$ muß gelten
$a : (b + c) = 1 : 2$. Hieraus und aus
$a + (b + c) = d$ folgt $a = \frac{d}{3}$.
Nach dem Hauptähnlichkeitssatz folgt:
$\triangle EGD \sim \triangle CGB$ (wie oben).
Wegen $\overline{ED} : \overline{BC} = 1 : 2$ muß gelten
$c : (a + b) = 1 : 2$,
also $c = \frac{d}{3}$.
Daraus folgt $b = d - a - c = \frac{d}{3}$.
Also gilt $a = b = c$, was zu beweisen war.

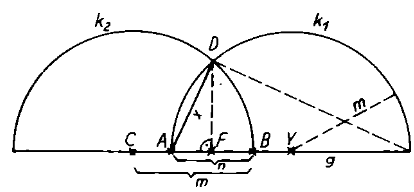


Olympiadeklasse 10

1. Wegen $10^3 < 3\,790 < 10^4$ ist $3 < \lg 3\,790 < 4$, also $[\lg 3\,790] = 3$.
Wegen $10^{-2} < 0.0379 < 10^{-1}$ ist $-2 < \lg 0.0379 < -1$,
also $[\lg 0.0379] = -2$.
Daher beträgt der gesuchte Quotient
$\frac{3}{-2} = -1.5$.

2. Angenommen, $a_1, \ldots, a_4$ seien vier Zahlen der gesuchten Art. Dann gelten für die nach Aufgabenstellung gebildeten Zahlen $d_1, \ldots, d_6$ die Gleichungen
$d_4 = d_1 + d_2$, $d_5 = d_2 + d_3$, $d_6 = d_1 + d_2 + d_3$.
Nun sind höchstens folgende Fälle möglich:
I. d_1, d_2, d_3 sind ungerade Primzahlen. Dann ergibt sich der Widerspruch, daß d_4 und d_5 gerade und größer als 2, also keine Primzahlen sind. Daher scheidet dieser Fall aus.
II. d_1, d_2, d_3 sind gerade Primzahlen (also ist jede gleich 2), dann ergibt sich derselbe Widerspruch.
III. Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 ist genau eine gerade (also gleich 2). Dann ergibt sich der Widerspruch, daß d_6 gerade und größer als 2 ist.
IV. Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 sind genau zwei gerade (also ist jede gleich 2).
a) unter diesen befindet sich d_2. Dann ergibt sich, daß entweder d_4 oder d_5 gerade und größer als 2 ist.
b) $d_1 = d_3 = 2$; d_2 ungerade Primzahl. Dann folgt $d_4 = d_5 = d_2 + 2$ und $d_6 = d_2 + 4$. Nun ist von drei ganzen Zahlen der Form d_2, $d_2 + 2$, $d_2 + 4$ stets eine durch 3 teilbar.
(*Beweis:* Beim Teilen von natürlichen Zahlen durch 3 können nur die Reste 0, 1 oder 2 auftreten.
Tritt beim Teilen von d_2 der Rest 0 auf, ist d_2 durch 3 teilbar. Tritt der Rest 1 auf, ist (wegen $1 + 2 = 3$) $d_2 + 2$ durch 3 teilbar. Tritt der Rest 2 auf, ist (wegen $2 + 4 = 6$) $d_2 + 4$ durch 3 teilbar.) Die einzige Primzahl, die durch 3 teilbar ist, ist die 3. Da aber ($d_2 > 1$ ist, also) $d_2 + 2$ und $d_2 + 4$ größer als 3 sind, verbleibt nur die Möglichkeit $d_2 = 3$.
Hiernach folgt weiter
$a_2 = a_1 + d_3 = a_1 + 2$,
$a_3 = a_2 + d_2 = a_1 + 5$,
$a_4 = a_3 + d_1 = a_1 + 7$.
Daher können $a_1, \ldots, a_4$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie von der Form
(*) $a_1 = n$, $a_2 = n + 2$, $a_3 = n + 5$, $a_4 = n + 7$
mit einer natürlichen Zahl n sind.
Umgekehrt genügen je vier Zahlen der Form (*) in der Tat den Bedingungen der Aufgabe; denn für sie ist jede der Zahlen
$d_1 = a_4 - a_3 = 2$, $d_2 = a_3 - a_2 = 3$,
$d_3 = a_2 - a_1 = 2$, $d_4 = a_4 - a_2 = 5$,
$d_5 = a_3 - a_1 = 5$, $d_6 = a_4 - a_1 = 7$ Primzahl.

3. a) Verfährt man wie angegeben, so entsteht folgendes Bild: (s. Abb. L 10;3)



b) Aus der Konstruktion folgt:
$\overline{AB} = n \quad \overline{AY} = \overline{DY} = \overline{EY} = m$
Ferner ist $\overline{AD} = x$ ($= \overline{BD}$).
Nach einem Satz der Elementargeometrie halbiert das von D auf g gefällte Lot die Strecke AB. Sein Fußpunkt sei F. Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck $\triangle AED$ rechtwinklig. In ihm gilt nach dem Satz des Euklid (Kathetensatz):
$$x^2 = \frac{n}{2}(2m) = m \cdot n, \text{ also}$$
$$x = \sqrt{m \cdot n}.$$

4. Folgende Ungleichungen sind der gegebenen äquivalent $x^2 + 2x - 3 > 0$,
$(x+1)^2 > 4$.
(1. Fortsetzung:) $|x + 1| > 2$
(2. Fortsetzung:) $(x+1)^2 - 2^2 > 0$,
$(x-1)(x+3) > 0$.
Nach Fallunterscheidung erhält man (in jeder der beiden Fortsetzungen) als äquivalent mit der letzten Bedingung: $x > 1$ oder $x < -3$.
Damit ist gezeigt, daß von den Bedingungen (1) bis (5) nur die Bedingung (5) der gegebenen äquivalent ist.

Bezirksolympiade

Olympiadeklasse 7

1. I. In der *Tausenderstelle* der aufgeschriebenen Zahlen kommt die Ziffer 9 nicht vor.

II. Die Anzahl der Ziffern 9, die in der *Hunderterstelle* der aufgeschriebenen Zahlen vorkommen, beträgt

$$\left.\begin{array}{l}\text{für die Zahlen von 1 bis 1000}\\ \text{für die Zahlen von 1001 bis 2000}\end{array}\right\}\text{(2 Gruppen)}$$

je genau 100 (da bei der ersten Gruppe die 9 in der Hunderterstelle genau der Zahlen 900, ..., 999 vorkommt und bei der zweiten Gruppe genau der Zahlen 1900, ..., 1999).

Bei den Zahlen von 2001 bis 2555 kommt in der Hunderterstelle die Ziffer 9 nicht vor.

III. Die Anzahl der Ziffern 9, die in der *Zehnerstelle* der aufgeschriebenen Zahlen vorkommen, beträgt

$$\left.\begin{array}{l}\text{für die Zahlen von 1 bis 100}\\ \text{für die Zahlen von 101 bis 200}\\ \text{usw.}\\ \text{für die Zahlen von 2401 bis 2500}\end{array}\right\}\text{(25 Gr.)}$$

je genau 10 (bei der ersten Gruppe genau in 90, ..., 99, bei der zweiten Gruppe genau in 190, ..., 199 usw.).

Bei den Zahlen von 2500 bis 2555 kommt in der Zehnerstelle die 9 nicht vor.

IV. Die Anzahl der Ziffern 9 in der *Einerstelle* der Zahlen beträgt

$$\left.\begin{array}{l}\text{für die Zahlen von 1 bis 10}\\ \text{für die Zahlen von 11 bis 20}\\ \text{usw.}\\ \text{für die Zahlen von 2541 bis 2550}\end{array}\right\}\text{(255 Gr.)}$$

je genau 1. Bei den Zahlen von 2551 bis 2555 kommt in der Einerstelle die 9 nicht vor.

Daher beträgt die gesuchte Zahl

$2\cdot 100+25\cdot 10+255=705$

2. a) Wenn die Bedingungen (I), (II), (III) erfüllt sind, so folgt (durch irgend eine Eliminationsmethode, z. B. durch Addition von (I), (II), (III), Division durch 2 und anschließende Subtraktion je einer der Gleichungen (I), (II), (III)

$a=17,\quad b=21,\quad c=25.$

b) Ein Dreieck mit diesen Maßzahlen existiert; denn die Dreiecksgleichungen sind erfüllt. Es ist nämlich

$17+21>25$, also $a+b>c$,
$21+25>17$, also $b+c>a$,
$17+25>21$, also $a+c>b$.

Jedes Dreieck mit diesen Maßzahlen seiner Seitenlängen erfüllt auch die Bedingungen (I), (II), (III). Es ist nämlich

$17+21=38$, also $a+b=38$,
$21+25=46$, also $b+c=46$,
$17+25=42$, also $a+c=42$.

Zu a) Man kann auch folgendermaßen schließen:

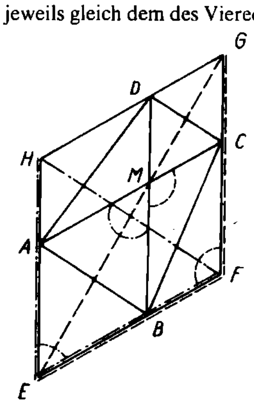
Aus $b+c=46$ und $a+c=42$ folgt, daß b um 4 größer ist als a.

Also gilt $b=a+4$ (1)

Setzt man das in (I) ein, so erhält man $a+a+4=38$, woraus $a=17$ folgt.

Aus (1) folgt dann $b=21$ und daraus sowie aus (III) $c=25$ ... usw.

3. Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen. Man zieht die Parallelen zu den Diagonalen durch die Punkte A, B, C und D. Sie mögen sich in den Punkten E, F, G, H schneiden. Dann ist $EFGH$ laut Konstruktion ein Parallelogramm, dessen Fläche bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen E, F, G, H aus den Flächen der vier Parallelogramme $AMDH$, $BMAE$, $CMBF$ und $DMCG$ zusammengesetzt ist. Da diese Teilparallelogramme durch die Strecken AB, BC, CD und DA halbiert werden, ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $EFGH$ doppelt so groß wie der des Vierecks $ABCD$. Daher ist der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht und folglich einem der Dreiecke $\triangle EFG$, $\triangle EFH$ kongruent ist, jeweils gleich dem des Vierecks $ABCD$.



4. a) Bezeichnet man den Minuenden mit m ($m\neq 0$), dann ist der Subtrahend $\frac{2}{5}m$.

Die Differenz ist $m-\frac{2}{5}m=\frac{3}{5}m$.

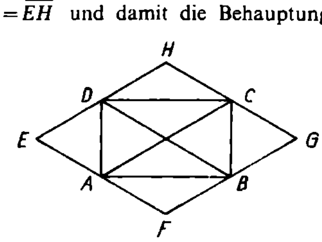
Wegen $\frac{3}{5}m=\frac{60}{100}m$ beträgt die Differenz 60% des Minuenden.

b) Die Summe aus Minuend und Subtrahend ist $m+\frac{2}{5}m=\frac{7}{5}m$. Wegen $\frac{7}{5}m=\frac{140}{100}m$ beträgt diese Summe 140% des Minuenden.

5. *Voraussetzung:* $ABCD$ ist ein Rechteck, E, F, G, H sind so gelegen, daß A auf EF, B auf FG, C auf GH, D auf HE liegt und $FG \parallel AC \parallel EH$ sowie $EF \parallel DB \parallel HG$ gilt.

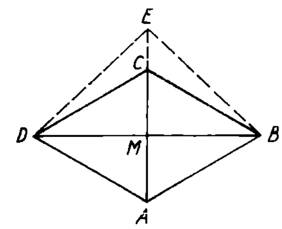
Behauptung: $EFGH$ ist ein Rhombus.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $EFBD$ ein Parallelogramm, also gilt $\overline{EF}=\overline{DB}$. Ebenso erhält man: $\overline{HG}=\overline{DB}$, $\overline{FG}=\overline{AC}$, $\overline{EH}=\overline{AC}$. Da im Rechteck $ABCD$ ferner $\overline{AC}=\overline{DB}$ gilt, folgt aus den vorigen Gleichungen $\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{HG}=\overline{EH}$ und damit die Behauptung.



6. I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Rhombus, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht, M sei sein Mittelpunkt. Dann ist AM die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAD$, ferner gilt $AM \perp BD$ sowie $\overline{MB}=\overline{MD}$. Schließlich ist $\overline{AM}+\overline{MB}=\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})$.

Der Punkt E sei so auf der Verlängerung von AM über M hinaus gelegen, daß $\overline{ME}=\overline{MB}$ ist. Dann ist $\triangle MBE$ gleichschenklig-rechtwinklig, also $\sphericalangle MEB=45°$. Ebenso ist auch $\sphericalangle MED=45°$.



II. Daraus folgt, daß ein Rhombus nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet einen Winkel von 110°, dessen Scheitel A genannt sei, und seine Winkelhalbierende.

(2) Auf ihr trägt man von A aus eine Strecke von 7,5 cm Länge ab. Der zweite Endpunkt dieser Strecke sei E genannt.

(3) An den von E durch A gehenden Strahl trägt man in E nach beiden Seiten Winkel von 45° an. Schneiden ihre freien Schenkel die Schenkel der unter (1) genannten Winkel, so seien die Schnittpunkte B und D.

(4) Schneidet der Kreis um D mit dem Radius $\overline{AD}$ den von A durch E gehenden Strahl außer in A in einem weiteren Punkt, so sei dieser C genannt.

III. Beweis, daß diese Konstruktion zu einem Rhombus der gesuchten Art führt:

Nach Konstruktion wird $\triangle AEB\cong\triangle AED$ (wsw), also $\overline{AB}=\overline{AD}$. Hieraus folgt, wenn M der Schnittpunkt von AE und BD ist, $\triangle AMB\cong\triangle AMD$ (sws), also $\sphericalangle BMA=\sphericalangle DMA=90°$.

Demnach gilt $\triangle DMA\cong\triangle DMC$ (ssw; $\overline{AD}>\overline{MD}$), also $\overline{AD}=\overline{CD}$, $\overline{AM}=\overline{CM}$ und somit schließlich $\triangle AMB\cong\triangle CMB$ (sws), $\overline{AB}=\overline{CB}$.

Daher ist $ABCD$ ein Rhombus.

In diesem gilt nach Konstruktion $\sphericalangle BAD=110°$. Ferner ist $\sphericalangle BME=90°$ und nach Konstruktion $\sphericalangle BEM=45°$, also $\triangle MBE$ gleichschenklig-rechtwinklig mit $\overline{BM}=\overline{EM}$. Somit auch $\overline{AC}+\overline{BD}=2\cdot(\overline{AM}+\overline{BM})=2\cdot(\overline{AM}+\overline{EM})=2\cdot\overline{AE}=15$ cm, wie verlangt.

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2) sind (bis auf Kongruenz) eindeutig durchführbar. Dasselbe gilt für (3), da $\frac{110°}{2}<90°$ ist.

Olympiadeklasse 8

1. Die Zerlegung von 44950 in Primfaktoren lautet $44950=2\cdot 5\cdot 5\cdot 29\cdot 31$. Daher gibt es genau die folgenden Möglichkeiten, 44950 in ein Produkt aus genau 4 natürlichen Zahlen zu zerlegen:

(1) $(2\cdot 5)\cdot 5\cdot 29\cdot 31 = 10\cdot 5\cdot 29\cdot 31$,
(2) $(2\cdot 29)\cdot 5\cdot 5\cdot 31 = 58\cdot 5\cdot 5\cdot 31$,
(3) $(2\cdot 31)\cdot 5\cdot 5\cdot 29 = 62\cdot 5\cdot 5\cdot 29$,
(4) $(5\cdot 5)\cdot 2\cdot 29\cdot 31 = 25\cdot 2\cdot 29\cdot 31$,
(5) $(5\cdot 29)\cdot 2\cdot 5\cdot 31 = 145\cdot 2\cdot 5\cdot 31$,
(6) $(5\cdot 31)\cdot 2\cdot 5\cdot 29 = 155\cdot 2\cdot 5\cdot 29$,
(7) $(29\cdot 31)\cdot 2\cdot 5\cdot 5 = 899\cdot 2\cdot 5\cdot 5$.

Da die Altersdifferenz der beiden Eltern 2 Jahre beträgt, können höchstens die Fälle (1) und (4) Lösung sein.
Von ihnen ist der Fall (4) nicht real; denn nach ihm müßte die 29jährige Mutter ein 25jähriges Kind haben. Somit verbleibt nur die Möglichkeit (1); d. h. die gesuchten Altersangaben können nur 31, 29, 10, 5 sein. Umgekehrt erfüllen diese Angaben auch tatsächlich alle Bedingungen der Aufgabe.

2. Wie üblich sei $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ gesetzt; AB sei die Hypotenuse von $\triangle ABC$. Die Flächeninhalte von V_a, V_b, V_c seien F_a, F_b bzw. F_c genannt.
Da nun BC und AB in den ähnlichen Vielecken V_a, V_c einander entsprechende Seiten sind, gilt

$$F_a : F_c = a^2 : c^2, \text{ also}$$
$$F_a = \frac{a^2}{c^2} F_c. \text{ Ebenso erhält man}$$
$$F_b = \frac{b^2}{c^2} F_c.$$

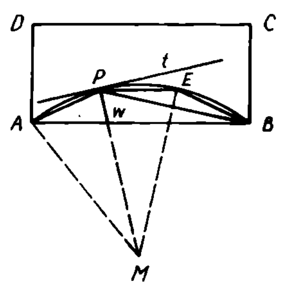
Nach dem Satz des Pythagoras gilt
$$a^2+b^2=c^2.$$
Durch Multiplikation mit $\frac{F_c}{c^2}$ folgt hieraus
$$\frac{a^2}{c^2}F_c+\frac{b^2}{c^2}F_c=F_c,$$
d. h. $F_a+F_b=F_c$, w.z.b.w.

3. Sind a, b, c die Einer-, Zehner- bzw. Hunderterziffer einer natürlichen Zahl n, so läßt sich diese in der Form $n=1000d+100c+10b+a$ mit einer ganzen Zahl d darstellen. Vermehrt man dann die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl um die Hälfte der Anzahl der Einer, so ergibt sich die Zahl $m=10c+b+\frac{1}{2}a$.
Ist nun voraussetzungsgemäß m durch 4 teilbar, so ist $10c+b+\frac{1}{2}a=4k$ mit einer ganzen Zahl k. Daraus folgt
$$20c+2b+a=8k, \text{ also ist dann}$$
$$n=8k+1000d+80c+8b$$
$$=8(k+125d+10c+b)$$
durch 8 teilbar, w.z.b.w.

4. Aus den Gleichungen für die Radien folgt
$$r_2=2r_1 \quad r_3=3r_1 \quad r_4=4r_1.$$
Der Flächeninhalt A_1 des inneren Kreises K_1 beträgt:
$$A_1=\pi r_1^2. \text{ Der Flächeninhalt } A_2$$
des ersten Kreisringes:
$$A_2=\pi[(2r_1)^2-r_1^2]=3\pi r_1^2.$$
Der Flächeninhalt A_3 des zweiten Kreisringes:
$$A_3=\pi[(3r_1)^2-(2r_1)^2]=5\pi r_1^2.$$
Der Flächeninhalt A_4 des dritten Kreisringes:
$$A_4=\pi[(4r_1)^2-(3r_1)^2]=7\pi r_1^2.$$
Daraus folgt
$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = \pi r_1^2 : 3\pi r_1^2 : 5\pi r_1^2 : 7\pi r_1^2$,
$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = 1 : 3 : 5 : 7$.
Die vier Flächeninhalte verhalten sich zueinander wie
$$1:3:5:7.$$

5. Wenn es eine Lösung der Aufgabe gibt, dann sei für diese x die Maßzahl der Masse des 77prozentigen Spiritus. Dann ist $(1000-x)$ die Maßzahl der Masse des 87prozentigen Spiritus, und es gilt:
$$\frac{77}{100}x+\frac{87}{100}(1000-x)=\frac{80}{100}\cdot 1000, \text{ also}$$
$$77x+87000-87x=80000, \text{ woraus man } x=700 \text{ erhält.}$$
Folglich kommen als Lösung der Aufgabe nur die Massen 700 g 77prozentiger und 300 g 87prozentiger Spiritus in Frage. Diese Massen haben tatsächlich die geforderte Eigenschaft; denn 700 g von 77prozentigem Spiritus enthalten genau 539 g reinen Spiritus; 300 g von 87prozentigem Spiritus enthalten genau 261 g reinen Spiritus. Das sind zusammen 800 g reiner Spiritus.
Laut Definition bezeichnet man 1000 g einer Mischung, die 800 g Spiritus und 200 g Wasser enthält, als 80prozentigen Spiritus, der laut Aufgabe herzustellen war.

6. Es sei o. B. d. A. $\overline{AP}\leqq\overline{BP}$. Der Kreis um P mit dem Radius $\overline{PA}$ schneidet den gegebenen Kreis außer in A in E. Wegen $\overline{AP}\leqq\overline{BP}$ ist E zugänglich, ebenso ein Stück der Winkelhalbierenden w des Winkels $\sphericalangle APE$.
Behauptung: Die Senkrechte t durch P auf w ist die gesuchte Tangente.

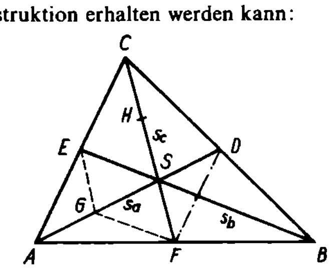


Beweis: Ist M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, so ist $\triangle AMP\cong EMP$ (sss), also $\sphericalangle APM\cong\sphericalangle EPM$; daher liegt M auf w. Die gesuchte Tangente steht somit senkrecht auf w; sie fällt also mit der konstruierten Geraden t zusammen.

Olympiadeklasse 9

1. Jedes Dreieck, dessen Ecken drei der Punkte A, B, C, D, E, F, G, H sind, ist kongruent zu (mindestens) einem der Dreiecke, unter deren Ecken der Punkt A auftritt. Die letztgenannten Dreiecke sind genau die folgenden: $\triangle ABH$,
$\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ABE$, $\triangle ABF$, $\triangle ABG$,
$\triangle ACD$, $\triangle ACE$, $\triangle ACF$, $\triangle ACG$, $\triangle ACH$,
$\triangle ADE$, $\triangle ADF$, $\triangle ADG$, $\triangle ADH$,
$\triangle AEF$, $\triangle AEG$, $\triangle AEH$,
$\triangle AFG$, $\triangle AFH$,
$\triangle AGH$.
Zwischen diesen Dreiecken bestehen genau die folgenden Kongruenzbeziehungen:
(1) $\triangle ABC\cong\triangle ABH\cong\triangle AGH$,
(2) $\triangle ABD\cong\triangle ABG\cong\triangle ACD\cong\triangle ACH\cong\triangle AFG\cong\triangle AFH$,
(3) $\triangle ABE\cong\triangle ABF\cong\triangle ADE\cong\triangle ADH\cong\triangle AEF\cong\triangle AEH$,
(4) $\triangle ACE\cong\triangle ACG\cong\triangle AEG$,
(5) $\triangle ACF\cong\triangle ADF\cong\triangle ADG$.
Das in der Aufgabenstellung genannte Aufschreiben von Dreiecken ist daher nur so möglich, daß aus jeder der Zeilen (1) bis (5) höchstens ein Dreieck aufgeschrieben wird. Die größtmögliche Anzahl aufgeschriebener Dreiecke wird erreicht, wenn aus jeder dieser Zeilen genau ein Dreieck aufgeschrieben wird. Demnach beträgt diese größtmögliche Anzahl 5.

2. I. Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Es seien D, E, F die Mittelpunkte der Seiten BC, AC bzw. AB. Dann schneiden sich die drei Seitenhalbierenden AD, BE, CF in einem Punkt S, und es gilt
$\overline{AS}=\frac{2}{3}s_a$, $\overline{SE}=\frac{1}{3}s_b$ sowie $\overline{SF}=\frac{1}{3}s_c$.
Ferner sei G der Mittelpunkt von $\overline{AS}$; dann gilt $\overline{GS}=\frac{1}{3}s_a$ und $\overline{AG}:\overline{AS}=\overline{AF}:\overline{AB}$, also nach der Umkehrung des einen Strahlensatzes $GF \parallel SB$, ebenso auch $\overline{AG}:\overline{AS}=\overline{AE}:\overline{AC}$, also analog $GE \parallel SC$.
Daher ist $GFSE$ ein Parallelogramm und folglich $\overline{GF}=\frac{1}{3}s_b$.
II. Hieraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



Man zeichne eine Strecke GS der Länge $\frac{1}{3}s_a$. Schneiden sich nun der Kreis um G mit dem Radius $\frac{1}{3}s_b$ und der Kreis um S mit dem Radius $\frac{1}{3}s_c$, so sei F einer ihrer Schnittpunkte. Sodann verlängere man die Strecke SG über G hinaus um ihre eigene Länge bis zum Punkt A,
die Strecke GS über S hinaus um ihre eigene Länge bis zum Punkt D,
die Strecke FS über S hinaus um das Doppelte ihrer eigenen Länge bis zum Punkt C.
Schneiden sich schließlich die Verlängerungen der Strecken CD und AF über D bzw. F hinaus, so sei B ihr Schnittpunkt.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach Konstruktion wird

$\overline{AD}=3\overline{GS}=s_a$, $\overline{CF}=3\overline{SF}=s_c$ sowie
$\overline{SD}:\overline{SA}=\overline{SF}:\overline{SC}=1:2$, also

$DF \parallel AC$ und $\overline{DF}:\overline{AC}=1:2$. Hieraus folgt $\overline{BF}:\overline{BA}=1:2$ und $\overline{BD}:\overline{BC}=1:2$, also ist

CF Seitenhalbierende im $\triangle ABC$ und
AD Seitenhalbierende im $\triangle ABC$.

Der Schnittpunkt von *AC* mit der Verlängerung von *BS* über *S* hinaus werde mit *E* bezeichnet.

Dann ist *BE* Seitenhalbierende im $\triangle ABC$, und für sie gilt $\overline{BS}=\frac{2}{3}\overline{BE}$. Andererseits gilt (nach Konstruktion und da *F* schon als Mittelpunkt von *AB* nachgewiesen ist)

$\overline{AG}:\overline{AS}=\overline{AF}:\overline{AB}=1:2$, also

$FG \parallel BS$ und $\overline{FG}:\overline{BS}=1:2$, und hieraus schließlich erhält man

$\frac{2}{3}\overline{BE}=\overline{BS}=2\overline{FG}=\frac{2}{3}s_b$, also $\overline{BE}=s_b$.

3. Angenommen, *p* sei eine Zahl, durch die bei gegebenem *m* und *n* die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Nach Aufgabenstellung sind *m*, *n* und *p* positiv. In einer Zeiteinheit verrichtet *A* die Arbeitsmenge *x*, *B* die Arbeitsmenge *y*, *C* die Arbeitsmenge *z*. Dabei sind auch *x*, *y* und *z* positiv anzunehmen.

Dann verrichtet *A* in *m* Zeiteinheiten einerseits die Arbeitmenge *mx*, andererseits nach Aufgabenstellung die Arbeitsmenge $y+z$. Daher gilt

(1) $mx=y+z$. Ebenso erhält man
(2) $ny=x+z$,
(3) $pz=x+y$.

Aus (1), (2), (3) folgt, indem man zwei der Größen *x*, *y*, *z* eliminiert – wobei sich herausstellt, daß die dritte eliminiert wird –, die Gleichung

(4) $(mn-1)\,p=m+n+2$. Hierzu ein Beispiel für mögliche Eliminationswege:

Aus (2) folgt $x=ny-z$; dies in (1) und (3) eingesetzt ergibt

(5) $(mn-1)\,y=(m+1)\,z$ und
(6) $(p+1)\quad z=(n+1)\,y$.

Nach Multiplikation von (5) und (6) und anschließender Division durch *yz* (dies ist lt. Aufgabenstellung ungleich 0) ergibt sich $(mn-1)(p+1)=(m+1)(n+1)$ und daraus (4). (2. Weg und Schluß der Aufgabe siehe *alpha* 1/71)

4. Es gibt mehrere Möglichkeiten für Lösungswege. Gruppen solcher Möglichkeiten entsprechen den Eliminationsverfahren bei linearen Gleichungssystemen. Als Beispiel für ein Vorgehen, das dem Einsetzungsverfahren entspricht, diene der folgende Lösungsweg:

Ist $11a+2b$ durch 19 teilbar, so ist $2b=19k-11a$ mit einer ganzen Zahl *k*, also

(1) $2\cdot(18a+5b)=36a+5\cdot(19k-11a)=19\cdot(5k-a)$. Daher ist einerseits $5k-a$, d. h. $5k-a=2n$ mit einer ganzen Zahl *n*, andererseits folgt dann aus (1) weiter $18a+5b=19n$, w. z. b. w.

Eine andere Gruppe der Möglichkeiten besteht darin, durch Bildung ganzzahliger Vielfacher von einem der beiden Summanden $11a$, $2b$ bis auf ein Vielfaches von 19 den entsprechenden Summanden $18a$ bzw. $5b$ der anderen Summe zu erreichen.

5. Es bezeichne h_1 die Länge der Höhe des Teildreiecks, das die Parallele vom gesamten Dreieck abschneidet, und zwar die zu dieser Parallelen senkrechte Höhe. Die Länge des anderen Abschnitts auf der zur Seite *AB* gehörenden Höhe sei h_2 genannt. Dann sind (h_1+h_2) und h_1 die Längen entsprechender Seiten in zwei ähnlichen Dreiecken vom Flächenverhältnis 2 : 1. Daher gilt

$(h_1+h_2)^2 : h_1{}^2=2:1$, also $\frac{h_1+h_2}{h_1}=\frac{\sqrt{2}}{1}$,

woraus sich durch Subtrahieren von 1 das gesuchte Verhältnis

$\frac{h_2}{h_1}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}$ ergibt.

6. Aus den Voraussetzungen folgt

$\frac{(x_0+2)\cdot f(x_0+1)}{x_0}=\frac{(x_0+2)\cdot x_0(x_0+1)}{x_0\cdot 2}=\frac{(x_0+1)(x_0+2)}{2}=f(x_0+2)$, w. z. b. w.

Olympiadeklasse 10

1. Angenommen, *z* sei eine natürliche Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Da *z* dreistellig ist, gilt

$z=a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0$ mit natürlichen Zahlen a_i und (1)

$1\leqq a_2\leqq 9;\ 0\leqq a_1\leqq 9;\ 0\leqq a_0\leqq 9.$ (2)

a_0 kann nur 1 oder 6 sein, da *z* bei Division durch 5 den Rest 1 läßt (3)

Nach dem Satz über die Teilbarkeit durch 11 folgt aus (1) unter Berücksichtigung von (2)

$a_2+a_0-a_1=11n$, *n* natürliche Zahl. (4)

Hieraus folgt, daß *n* nur 0 oder 1 sein kann. (5)

Nach (1) läßt sich *z* auch folgendermaßen darstellen

$z=a_2\cdot 98+a_2\cdot 2+a_1\cdot 7+a_1\cdot 3+a_0\cdot$ (6)

Da *z* bei Division durch 7 den Rest 3 läßt, folgt aus (6)

$2a_2+3a_1+a_0=7m+3$; *m* natürliche Zahl. (7)

Nach (4) gilt:

$3a_2-3a_1+3a_0=33n.$ (8)

Aus den letzten beiden Aussagen folgt $5a_2+4a_0=33n+7m+3$ und damit

$33n-4a_0+3=5a_2-7m.$ (9)

Fallunterscheidung: Nach (3) und (5) kommen nur folgende Fälle in Betracht:

a_0	n	$33n-4a_0+3$	Damit gilt nach (9)
1	0	−1	$7m=5a_2+1$
6	0	−21	$7m=5a_2+21$
1	1	32	$7m=5a_2-32$
6	1	12	$7m=5a_2-12$

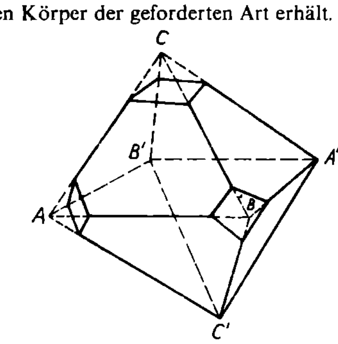
Hieraus und aus (2) folgen als einzige Möglichkeit für a_2	Hieraus und aus (4), (2) folgen als einzige Möglichkeit für a_1
4	5
7	keine
5	keine
1	keine
8	3

Hieraus folgt, daß nur 451 und 836 den Bedingungen der Aufgabe entsprechen können. Wie die Probe zeigt, ist dies der Fall. (Aus Platzgründen wird auf weitere zwei Lösungswege verzichtet, d. Red.)

2. Da die Anzahl der ebenen Begrenzungsflächen nach der Ausführung der Schnitte 11 betragen soll, und da ein Oktaeder ein konvexer Körper ist, muß man mindestens 3 Schnitte ausführen. Das gegebene Oktaeder habe die Eckpunkte *A*, *B*, *C*, *A'*, *B'*, *C'* (*A'* liege *A* gegenüber usw.).

Da u. a. 3 Quadrate als Schnittfiguren entstehen sollen, liegt es nahe, zu untersuchen, was für ein Restkörper entstehen kann, wenn man die Schnitte parallel zu zweien oder dreien der Quadrate *ABA'B'*, *ACA'C'*, *BCB'C'* legt, und zwar so nahe bei den hierdurch abgeschnittenen Eckpunkten (C oder *C'* bzw. *B* oder *B'* bzw. *A* oder *A'*), daß die Schnittflächen sich gegenseitig nicht treffen. Dabei werden drei vierseitige Pyramiden abgeschnitten. Da auch eine Sechseckfläche entstehen soll, wähle man die drei abzuschneidenden Pyramiden so, daß unter deren Spitzen keine zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Oktaeders vorkommen, also etwa die Eckpunkte *A*, *B*, *C* als Spitzen auftreten.

Man überzeugt sich leicht, daß man damit einen Körper der geforderten Art erhält.



3. Die gegebene Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn

$|\log_2|5-x||<1$, d. h., $-1<\log_2|5-x|<1$

gilt. Letzteres ist äquivalent mit

$0{,}5<|5-x|<2.$ (1)

Fallunterscheidung:

1. $x\geqq 5$: Dann ist (1) äquivalent mit $5{,}5<x<7$ (2)
2. $x<5$: Dann ist (1) äquivalent mit $3<x<4{,}5$ (3)

Notwendig und hinreichend dafür, daß *x* die gegebene Ungleichung erfüllt, ist also, daß *x* in einem der durch (2) oder (3) charakterisierten Intervalle liegt.

Eine notwendige und nicht hinreichende Bedingung ist etwa, daß *x* im Intervall $3<x<7$ liegt. Eine hinreichende und nicht notwendige Bedingung ist etwa, daß *x* im

Intervall $5{,}5<x<7$ liegt. Natürlich kann man auch beliebig viele andere Bedingungen von dieser Art angeben.

4. Angenommen, a und b seien Zahlen der verlangten Art. Dann folgt $a \neq -b$; denn wäre $a=-b$, so erhielte man nach Aufgabenstellung $0=a+b=ab=-b^2$, also $b=0$, $a=0$, im Widerspruch dazu, daß nach Aufgabenstellung $b<a$ sein müßte.

Nach Aufgabenstellung ist ferner entweder $a+b=a^2-b^2$ oder $a+b=b^2-a^2$. Die letzte Gleichung würde wegen $a+b \neq 0$ auf $1=b-a$ und somit ebenfalls auf einen Widerspruch zu $b<a$ führen. Daher verbleibt nur die Möglichkeit $a+b=a^2-b^2$, woraus wegen $a+b \neq 0$ weiter $1=a-b$, also $a=b+1$ folgt. Setzt man dies in $a+b=ab$ ein, so erhält man die Gleichung $2b+1=b^2+b$, d. h. $b^2-b-1=0$, die die Lösungen

$b_{1.2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}$, d. h. $b_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

$b_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, und nur diese hat.

Wegen $a=b+1$ erhält man als zu b_1 bzw. b_2 gehörige Werte für a

$$a_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\quad a_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Somit können höchstens die Paare (a_1, b_1) und (a_2, b_2) Lösungen der Aufgabe sein. Die folgende Probe zeigt, daß sie dies tatsächlich sind:

Erstens gilt $b_{1.2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}<\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}=a_{1.2}$.

Zweitens ist

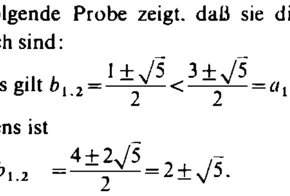
$$a_{1.2}+b_{1.2}=\frac{4\pm 2\sqrt{5}}{2}=2\pm\sqrt{5}.$$

$$a_{1.2}\cdot b_{1.2}=\frac{3\pm\sqrt{5}\pm 3\sqrt{5}+5}{4}=2\pm\sqrt{5}.$$

$$a_{1.2}{}^2-b_{1.2}{}^2=\frac{(9\pm 6\sqrt{5}+5)-(1\pm 2\sqrt{5}+5)}{4}=2\pm\sqrt{5}$$

oberes Vorzeichen stets für a_1, b_1, unteres Vorzeichen stets für a_2, b_2).

5. *Erster Lösungsweg:* Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\overline{AD}\leqq\overline{DB}$ vorausgesetzt. Der Mittelpunkt von BC sei M. Dann hat $\triangle ABM$ halb so großen Flächeninhalt wie $\triangle ABC$. *Beweis:* Beide Dreiecke stimmen in der Seite AB überein. Die zu dieser Seite gehörende Höhe ist im Dreieck $\triangle ABM$ nach einem der Strahlensätze halb so groß wie die entsprechende Höhe im Dreieck $\triangle ABC$.



I. Kein von C verschiedener Punkt E' auf AC kann der Aufgabenstellung genügen; denn für jeden solchen Punkt ist der Flächeninhalt von $\triangle ADE'$ kleiner als der von $\triangle ADC$ und somit stets kleiner als die Hälfte des Flächeninhalts von $\triangle ABC$.

Also kann es höchstens auf BC einen Punkt der gesuchten Art geben. Angenommen, ein Punkt E auf BC habe die verlangte Eigenschaft. Dann sind $\triangle ABM$ und $\triangle DBE$ flächengleich, also liegt M zwischen E und B, und es sind auch $\triangle ADM$ und $\triangle DME$ flächengleich. Hieraus folgt $AE \parallel DM$.

II. Daher kann ein Punkt E nur dann der Aufgabenstellung genügen, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann: Man konstruiere den Mittelpunkt M von BC. Schneidet die Parallele durch A zu DM die Strecke BC, so sei E der Schnittpunkt.

III. Der *Beweis*, daß diese Konstruktion zu einem Punkt E der gesuchten Art führt, folgt durch Umkehrung der in I. genannten Schlüsse.

IV. Die Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar. Sei nämlich E zunächst als der (stets existierende) Schnittpunkt der Parallelen durch A zu DM mit dem von B durch C gehenden Strahl definiert. Dann gilt $\overline{EM}:\overline{MB}=\overline{AD}:\overline{DB}\leqq 1:1$, also liegt E auf der Strecke BC (im Falle $\overline{AD}=\overline{DB}$ und nur in diesem so, daß E mit C zusammenfällt).

Einen *zweiten Lösungsweg* erhält man, indem man die Parallele durch A zu DC mit der Geraden durch B und C zum Schnitt S bringt und dann das zu $\triangle ABC$ flächengleiche $\triangle DBS$ durch seine Seitenhalbierende DE halbiert.

6. Aus den gegebenen Wertepaaren erhält man die Gleichungen

(1) $a+b+c=1$
(2) $4a+2b+c=2$
(3) $9a+3b+c=n_1$
(4) $16a+4b+c=n_2$.

Durch Subtraktion ergibt sich aus (2) und (1), (3) und (2) bzw. (4) und (3)

$3a+b=1$
$5a+b=n_1-2$
$7a+b=n_2-n_1$. Daraus folgt
$2a=n_1-3$
$2a=n_2-2n_1+2$

und schließlich $3n_1-5=n_2$.

Da n_1 und n_2 einstellige natürliche Zahlen sein sollen, kann n_1 nur die Werte 2, 3 und 4 annehmen.

Es sei $n_1=2$.
Dann ist $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$, $c=-1$

Es sei $n_1=3$.
Dann ist $a=0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es sei $n_1=4$.
Dann ist $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=1$. Daher können nur die quadratischen Funktionen

$$\text{(I)}\quad y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-1$$

und

$$\text{(II)}\quad y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$$

die gestellten Bedingungen erfüllen.

Durch Aufstellen der vorgeschriebenen Tabelle stellt man fest, daß sie dies auch tun.

Zu I:

x	1	2	3	4
y	1	2	2	1

Zu II:

x	1	2	3	4
y	1	2	4	7

DDR-Olympiade

Olympiadeklasse 10

(Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission des ZKOJM)

1. Angenommen, die Aufgabe hat eine Lösung. Die beiden gesuchten natürlichen Zahlen seien a und b. Dann gilt:

(1) $a+b=u^2$ (2) $a+41=v^2$
(3) $b+41=w^2$ (4) $a+b+41=x^2$

mit natürlichen Zahlen u, v, w und x.

Aus (4) und (1) folgt durch Subtraktion $41=x^2-u^2=(x+u)(x-u)$.

Da 41 Primzahl ist und u und x natürliche Zahlen sind, also $x+u\geqq 0$ ist, kommt als einzige Zerlegung $x+u=41$ und $x-u=1$ in Frage, woraus (5) $x=21$ und $u=20$ folgt. Aus (2) und (3) folgt durch Subtraktion (6) $a-b=v^2-w^2$ und aus (1), (5) und (6) durch Addition

$$2a=400+v^2-w^2, \text{ also}$$

$$a=200+\frac{v^2-w^2}{2}. \text{ Da } a \text{ eine}$$

natürliche Zahl ist, gilt $2\mid v^2-w^2$.

Das bedeutet, daß v und w entweder beide gerade oder beide ungerade sind. In jedem Falle gilt dann

$2\mid v+w$ und $2\mid v-w$ und,
wegen $v^2-w^2=(v+w)(v-w)$, $4\mid v^2+w^2$.

Daher erhält man $a=2\left(100+\frac{v^2-w^2}{4}\right)$ und mithin $2\mid a$ und aus (1) und (5) auch $2\mid b$.

Wegen (2) und (3) und der Geradzahligkeit von a und b sind v und w ungerade.

Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl hat als letzte Ziffer eine der Zahlen 1, 5 oder 9.

Daher endet wegen (2) und (3) jede der Zahlen a und b auf 0, 4 oder 8. Wegen $a+b=400$ folgt daraus:

a und b enden auf 0; v^2 und w^2 enden auf 1.

Ferner folgt aus $a+b=400$, daß a, $b\leqq 400$ gilt. Nach (2), (3) ergibt sich daraus

$$\left.\begin{array}{l}41\leqq v^2\leqq 441,\\ 41\leqq w^2\leqq 441,\end{array}\right. \text{ also } \left\{\begin{array}{l}7\leqq v\leqq 21\\ 7\leqq w\leqq 21.\end{array}\right.$$

Somit können v und w nur gleich 9, 11, 19 oder 21 sein, und für das Paar (v^2, w^2) verbleiben als Möglichkeiten nur diejenigen Paare, die sich aus den Zahlen 81, 121, 361 und 441 bilden lassen und die Summe $v^2+w^2=a+b+82=482$ ergeben. Das einzige derartige (ungeordnete) Paar ist $\{121, 361\}$. Daraus folgt, daß als v, w nur die Zahlen 11, 19 und folglich als a, b nur die Zahlen 80, 320 in Frage kommen. Tatsächlich erfüllen diese Zahlen alle Bedingungen der Aufgabe; denn es gilt

(1) $320+80=20^2$ (2) $320+41=19^2$
(3) $80+41=11^2$ (4) $80+320+41=21^2$

2. *Lösung* (nach dem Vorschlag der Aufgabenkommission): Angenommen, eine reelle Zahl x erfülle die Gleichung.

Wegen $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$ und

$$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b} \text{ gilt dann}$$

$(\log_a x)\,\frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_a b$, also

$(\log_a x)^2 = (\log_a b)^2$.

Daraus folgt entweder

(1) $\log_a x = \log_a b$ oder

(2) $\log_a x = -\log_a b = \log_a \frac{1}{b}$.

Aus (1) folgt $x = b$, aus (2) folgt $x = \frac{1}{b}$. Daher können nur die Zahlen b und $\frac{1}{b}$ die vorgegebene Gleichung erfüllen. Probe: Diese beiden Zahlen sind Lösungen der gegebenen Gleichung, denn es gilt:

$(\log_a b)\,(\log_b b) = (\log_a b) \cdot 1 = \log_a b$ und

$\left(\log_a \frac{1}{b}\right)\left(\log_b \frac{1}{b}\right) = (-\log_a b) \cdot (-1) = \log_a b$.

Bemerkungen zu den Schülerlösungen:

Fast alle Schüler beschritten den o. g. Weg. Die meisten Fehler wurden bei der Lösung der quadratischen Gleichung begangen. (Es wurde in der Regel nur *eine* Lösung angegeben.) *Ingeborg Bartsch, Universität Rostock*

3. (Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission) Da jede Seitenfläche des Würfels Quadratfläche ist, gilt $\overline{DK} : \overline{DE} = 1 : 2 = \overline{DL} : \overline{DG}$ und daher nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes

$EG \parallel KL.$ (1)

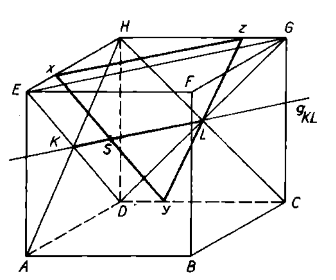
Bezeichnet Z denjenigen Punkt von GH, für den $\overline{HZ} = \overline{HX}$ ist, so gilt $\overline{HX} : \overline{HE} = \overline{HZ} : \overline{HG}$ und daher

$XZ \parallel EG,$ (2)

wenn man einmal jede zu einem Punkt ausgeartete Strecke als zu jeder anderen Strecke parallel ansieht. Aus (1) und (2) folgt

$XZ \parallel KL,$ (3)

da EG nicht zu einem Punkt ausgeartet ist. Folglich liegen K, L, X und Z in derselben Ebene ε. G und H liegen nicht auf derselben Seite von ε, desgl. D und G sowie C und H, weil jede der Strecken GH, DG und CH mit ε einen Punkt (Z bzw. L) gemeinsam hat. Daher liegen C und D nicht auf derselben Seite von ε, so daß CD mit der Ebene ε einen Punkt Y' gemeinsam hat.



Wegen $CD \parallel GH$ gilt nach dem 2. Strahlensatz bzw. im Fall $Z = G$ trivialerweise $\overline{GZ} : \overline{GL} = \overline{DY'} : \overline{DL}$, woraus wegen $\overline{GL} = \overline{DL}$ die Beziehung $\overline{DY} = \overline{GZ}$ folgt. Daher fallen auf Grund der Definition von Y die Punkte Y und Y' zusammen. Mithin liegt Y in ε. Nach dem 1. Strahlensatz gilt wegen $CD \parallel GH$

$\overline{YL} : \overline{YZ} = \overline{DL} : \overline{DG} = 1 : 2$ und, (4)

wenn S den Mittelpunkt von XY bezeichnet,

$\overline{YS} : \overline{SX} = 1.$ (5)

Aus (4) und (5) folgt entweder $L = S$ oder nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes $LS \parallel XZ$, woraus sich wegen (3)

$S \varepsilon g_{KL}$ (6)

ergibt. Da jeder Würfel konvex ist, liegt XY und damit S im Würfelkörper. Da von g_{KL} nur die Strecke KL im Würfelkörper liegt, folgt in Verbindung mit (6)

$S \in KL$

Diese Aufgabe erwies sich als Wettbewerbsaufgabe insofern gut geeignet, als sie das Feld der Bewerber gut differenzierte. 28 % der Schüler erreichten von 8 Punkten 8, 7 oder 6 Punkte, andererseits erhielten 35 % der Schüler keinen oder nur einen Punkt. Viele Schüler erkannten, daß man 2 Teilprobleme betrachten konnte:

1. Nachweis der Existenz des Schnittpunktes,
2. Nachweis des Teilungsverhältnisses.

Nahm man dabei die Existenz eines Schnittpunktes zunächst an, so war das 2. Problem (etwa durch Projektion) leicht zu bewältigen. Bei diesem Vorgehen erhielt der Schüler von den Korrektoren 3 Punkte. Das 1. Problem bereitete den Schülern weitaus mehr Schwierigkeiten. Im Prinzip wurde von den Schülern häufig der oben dargestellte Lösungsweg beschritten, aber auch mit den Methoden der darstellenden Geometrie gearbeitet. Da es bei der Anwendung der darstellenden Geometrie (Zwei-Tafel-Verfahren) darauf ankommt, zu beweisen, daß der Schnittpunkt der Aufrisse und der Schnittpunkt der Grundrisse auf einer Ordnungslinie liegen, kamen einige Schüler auf die Idee, den Würfel so zu legen, daß die Projektion von KL mit einer Ordnungslinie übereinstimmt und damit zu dem verblüffenden Ergebnis, daß auch im Falle $\overline{EX} \neq \overline{DY}$ ein Schnittpunkt existiert! Wo steckt der Fehler?

H. J. Sprengel,
Pädagogische Hochschule Potsdam

4. Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission) Da $t \neq 0$ gilt, sind auch die drei Lösungen a, b, c der Gleichung sämtlich von Null verschieden.

Das Polynom

$sx^2(x-1) + t(x+1) = 0$ ist wegen $s \neq 0$ äquivalent mit

$x^2(x-1) + \frac{t}{s}(x+1) = 0$, und es gilt:

$(x-a)(x-b)(x-c) = x^2(x-1) + \frac{t}{s}(x-1)$,

also $x^3 - x^2(a+b+c) + x(ab+bc+ac) - abc =$

$= x^3 - x^2 + \frac{t}{s}x + \frac{t}{s}$

als Identität zweier Polynome in x.

Durch den Koeffizientenvergleich erhält man

(1) $a+b+c = 1$ (2) $ab+bc+ac = \frac{t}{s}$

(3) $abc = -\frac{t}{s}$.

Aus (2) und (3) folgt durch Division

$\frac{bc+ac+ab}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -1$,

und daher wegen (1)

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = -1$.

5. Der Lösungsvorschlag (geometrisches Problem), eingesandt von Dozent Dr. *E. Schröder*, TH Dresden, wird auf einer gesonderten Seite in Heft 2/71 veröffentlicht, d. Red.

6. Die Aufgabe war für die Schüler der Klassenstufe 10 nicht schwierig. Das zeigten die Ergebnisse: 54 % der Schüler der Zehnklassigen Allgemeinbildenden Polytechnischen Oberschule, 51,8 % der Schüler der Vorbereitungsklassen und 28,6 % der Schüler der Berufsschulen erhielten 6 oder 7 der möglichen 7 Punkte. 19,1 % aller Beteiligten erzielten weniger als 3 Punkte und nur 4,5 % konnten keinen Lösungsansatz finden.

Der Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission, der die Annahme einer rationalen Lösung der Gleichung (1) $x_1 = \frac{p}{q}$, p und q teilerfremd, $q \neq 0$, in drei Fällen (p und q beide ungerade, p gerade und q ungerade oder umgekehrt, p und q beide gerade) über das Einsetzen der Lösung x_1 in Gleichung (1) zum Widerspruch führt, wurde von den Schülern selten angegeben. Als Beispiel sei im folgenden eine Lösung in Anlehnung an die Bearbeitung der Aufgabe von *Hans-Jürgen Fischer* aus dem Bezirk Karl-Marx-Stadt angeführt.

Da a, b, c ungerade Zahlen sein sollen, sind sie von Null verschieden. Notwendig dafür, daß die Lösung einer quadratischen Gleichung rational ist, ist die Rationalität der Quadratwurzel aus der Diskriminante $b^2 - 4ac$. Da a, b und c ganze Zahlen sind, ist auch $b^2 - 4ac$ ganzzahlig. Wenn also $\sqrt{b^2 - 4ac}$ rational ist, muß diese Zahl sogar eine ganze sein, also ist $b^2 - 4ac$ eine Quadratzahl.

Das ist aber bei ungeraden a, b, c nicht der Fall.

Beweis: Ist b ungerade, dann ist $b \equiv \pm 1$ (8) oder $b \equiv \pm 3$ (8), also $b^2 \equiv 1$ (8)

Für gerade Zahlen z gilt: $z \equiv 0$ (8), $z \equiv 4$ (8) oder $z \equiv \pm 2$ (8), also $z^2 \equiv 0$ (8) oder $z^2 \equiv 4$ (8).

Sind a und c ungerade, dann ist auch ihr Produkt ungerade, es gilt also $ac \equiv \pm 1$ (8) oder $ac \equiv \pm 3$ (8), folglich $4ac \equiv 4$ (8).

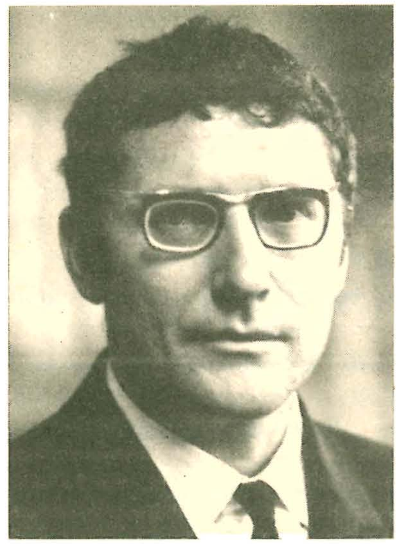
Für $b^2 - 4ac$ ergibt sich dann $b^2 - 4ac \equiv 1 - 4 \equiv 5$ (8), also kann $b^2 - 4ac$ für ungerade a, b, c keine Quadratzahl sein.

Hans-Jürgen Vogel,
Pädagogische Hochschule Potsdam

Die Lösungen zu den Aufgaben der DDR-Olympiade, Klassenstufe 11/12, wurden in der Fachzeitschrift: „Mathematik in der Schule“, Heft 10/70 veröffentlicht, d. Red.

Wir stellen vor:

Die Leninpreisträger Jurij Rozanov und Jurij Prochorov



Jurij Rozanov, Doktor der mathematischen Wissenschaften und Professor, wurde 1934 in Moskau als Sohn eines Angestellten geboren. 1952 absolvierte er die Mittelschule und ging an die mechanisch-mathematische Fakultät der Moskauer Staatlichen Universität. Mit Abschluß des Universitätsstudiums erhielt er 1957 eine Aspirantur am Steklov-Institut für Mathematik. Er verteidigte vorfristig seine Dissertation und erhielt 1959 den Kandidatengrad. 1963 verteidigte er erfolgreich die Doktordissertation, zwei Jahre darauf wurde ihm der Professorentitel verliehen.

Nach der Aspirantur arbeitete er am Steklov-Institut für Mathematik zunächst als jüngerer wissenschaftlicher Mitarbeiter. Gegenwärtig ist er höherer wissenschaftlicher Mitarbeiter der Abteilung für Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sein Name ist im Ausland wohlbekannt. Häufig war er aktiver Teilnehmer verschiedener wissenschaftlicher Konferenzen.

Die Frau von J. Rozanov — Nina — ist jüngere wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut der Völker Asiens.

1970 wurde J. Rozanov für eine Reihe von Arbeiten zu den Grenzwertsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung der *Leninpreis* verliehen.

Jurij Prochorov — korrespondierendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR und Professor — wurde 1929 in Moskau als Sohn eines Ingenieurs geboren. Von Kindheit an begeisterte er sich für die Mathematik. 1944 absolvierte Jurij das Externat (entsprechend dem Programm der Mittelschule) in Moskau und ging dann an die höhere technische Schule (Baumann-Schule). Vom zweiten Studienjahr ab wurde er auf persönliche Bitte hin an die mechanisch-mathematische Fakultät der Moskauer Staatlichen Universität (MGU) versetzt. 1949 absolvierte Jurij die MGU und arbeitete von da ab am Steklov-Institut für Mathematik der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. 1952 verteidigte er die Kandidatendissertation und vier Jahre darauf die Doktordissertation. Seit 1956 arbeitet er als Lehrer am Moskauer Institut für Ingenieurphysik, bekleidet seit 1957 das Amt des stellvertretenden Direktors des Mathematischen Instituts und ist gleichzeitig Leiter der Abteilung für Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1958 wurde Jurij Prochorov der Professorentitel verliehen. Zur Zeit ist er Professor an der mechanisch-mathematischen Fakultät der Moskauer Universität. Jurij hat die Abenduniversität für Marxismus-Leninismus absolviert, er beherrscht die englische Sprache, liest und übersetzt aus dem Französischen und Deutschen. Häufig nahm er an wissenschaftlichen Konferenzen teil (1954 in der DDR, 1956 in der ČSSR, 1958 war er Teilnehmer am Internationalen Mathematikerkongreß in Edinburgh). Die Frau von Jurij — Svetlana — ist Dozentin am Moskauer Institut für Ingenieurphysik, die Tochter Marie ist zwei Jahre alt.

1966 wurde J. Prochorov zum korrespondierenden Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR ernannt. 1970 wurde ihm für eine Reihe von Arbeiten zu den Grenzwertsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung der *Leninpreis* verliehen.

Nach einer Information von APN/Novosti

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

Teil 12 (Schluß)

Auf ein etwas aufwendigeres zyklisches Programm führt uns das

Beispiel 3: Hier soll es darum gehen, die Zahl e auf eine gewisse Anzahl von Dezimalstellen zu berechnen. Für den mathematisch weniger fortgeschrittenen Leser sei erläutert: Die Zahl e ist eine „berühmte" Zahl ähnlich wie die Zahl π. So wie letztere für Kreis-, Kugelberechnungen usw. benutzt wird, braucht man die Zahl $e = 2{,}7183\ldots$ für vielerlei Zwecke. Sie tritt u. a. beim *Gesetz des organischen Wachstums*, beim Laden und Entladen eines Kondensators und in der Wärmelehre auf. Ebenso wie π ist e eine irrationale Zahl, d. h. sie ergibt eine unendliche nicht periodische Dezimalbruchentwicklung, kann also in dieser Form immer nur näherungsweise (approximativ) dargestellt werden. Es gibt mehrere Möglichkeiten zur iterativen Berechnung von e. Wir benutzen die unendliche Reihe

$$e = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

(Zur Erklärung: $n!$, gelesen „n Fakultät", bedeutet $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$, also ist $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ usw. Man hat ferner vereinbart: $0! = 1$.) Man erkennt, daß in der obigen Reihe die Glieder sehr rasch kleiner und kleiner werden. Es ist bereits $\frac{1}{10!} = \frac{1}{3\,628\,800} < 0{,}000001$. Je mehr Glieder man addiert, desto mehr nähert man sich dem wahren Wert von e, d. h. desto mehr Dezimalstellen sind richtig und werden durch Hinzufügen beliebig vieler weiterer Glieder der Reihe nicht geändert.

▲ Aufgabe: Bestätige den genannten Sachverhalt, indem du die ersten zehn Glieder der Reihe auf acht Dezimalen berechnest und sie schrittweise addierst!

Nun wieder zum Automaten! Setzen wir eine zehnstellig arbeitende Anlage voraus, so bedeutet das, daß ein zu addierendes Glied nur noch solange ins Gewicht fällt, wie es spätestens in der neunten Dezimale eine von 0 verschiedene Ziffer hat. Mathematisch formuliert hieße das, daß

$$\frac{1}{n!} < 10^{-8} \quad \text{ist.}$$

Diese Genauigkeitsforderung benutzen wir beim Aufbau des Algorithmus als Abbruchbedingung für den Zyklus, der iterativ den Wert der Summe berechnet. Ist die Frage $\frac{1}{n!} < 10^{-8}$? mit *ja* entschieden, so soll die Rechnung abbrechen, und wir können annehmen, daß die ersten neun Stellen hinter dem Komma dann stimmen.*

Um das Programm aufstellen zu können, benötigen wir noch ein paar Überlegungen: In unserer Reihe

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \quad \text{fassen wir}$$

$1 + 1 = 2$ als Anfangswert der Summe auf. Die Summanden nennen wir Q. Ist $S = 2$ erste Zwischensumme, betrachten wir also die Reihe nur bis zum zweiten Glied, so ist der Wert des letzten Summanden $Q = 1$. Da

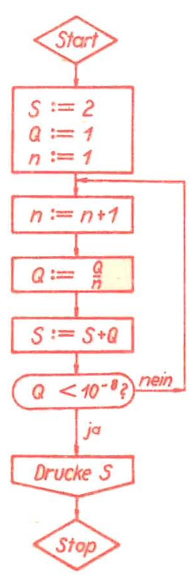
$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)! \cdot n}$$

ist, ergibt sich der n-te Summand aus dem $(n-1)$-ten durch Division durch n. Für den laufenden Summanden Q gilt also beim Übergang zum nächsten: $Q := \frac{Q}{n}$.

Ausführlich:

$$Q := 1$$
$$Q := \frac{Q}{2}\left(Q = \frac{1}{2}\right)$$
$$Q := \frac{Q}{3}\left(Q = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}\right)$$
$$Q := \frac{Q}{4}\left(Q = \frac{1}{6 \cdot 4} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}\right)$$
$$\vdots$$

Jetzt wird dem Leser das Verständnis des Diagramms nicht schwerfallen:



* Diese Folgerung läßt sich nicht für beliebige unendliche Reihen verallgemeinern. Es gibt durchaus Fälle, wo von einem bestimmten Glied an die von 0 verschiedenen Ziffern erst rechts von einer gewissen Dezimalstelle auftreten, diese aber beim Addieren unter Umständen mehrere Stellen nach links übergreifen. In diesem Beispiel ist das aber nicht der Fall.

Man beachte noch den Unterschied zwischen diesem zyklischen Programm und dem vorigen. Beim vorigen stand schon zu Beginn der Rechnung fest, wie oft der Zyklus zu durchlaufen war, nämlich 999mal. Beim letzten Programm ist am Anfang die Zahl der

Durchläufe noch nicht bekannt; sie wird durch die Rechnung selbst entschieden. Für das nächste *Beispiel 4* sollen hier nur einige Anleitungen gegeben werden. Die Aufstellung des Flußdiagramms sei dem Leser überlassen. Es ist ein Programm für das Ziehen einer Quadratwurzel anzufertigen. Da es sich um eine nicht automatengerechte Operation handelt, müssen wir nach einer mathematischen Methode suchen, mit der das Radizieren auf die vier Grundoperationen zurückgeführt wird. Das gelingt iterativ nach der hier ohne Beweis mitgeteilten Formel

$$(1) \qquad x_{i+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(x_i+\frac{a}{x_i}\right).$$

Darin ist a der Radikand (eine beliebige positive Zahl), x_i ein *Näherungswert* für $\sqrt{a}$ und x_{i+1} ein *besserer Näherungswert.* Geht man von einem beliebigen positiven Anfangswert x_0 aus und berechnet man nach obiger Formel schrittweise x_1, x_2, x_3 usw., so kommt man mit dieser Folge der Zwischenergebnisse dem wahren Wurzelwert immer näher.

Aufgaben

■ 1 ■ Probiere das Verfahren mit $a=2$ und $x_0=2$ (man kann durchaus als Anfangswert den Radikanten selbst nehmen) aus! Wieviel Glieder braucht man, um $\sqrt{2}$ auf fünf Dezimalstellen genau zu berechnen?

■ 2 ■ Schreibe den Ablauf (mit allgemeinem Radikanden a) als zyklisches Programm mit der Abbruchbedingung

$$(2) \qquad \left|\frac{x_{i+1}-x_i}{x_i}\right|<10^{-6} \;!$$

Beachte: Für die in den Formeln (1) und (2) vorkommenden Zwischenergebnisse sind (siehe Beispiel 1!) gesonderte Symbole einzuführen. Jedes Operationskästchen soll nur *eine* Teiloperation enthalten.

3.2. Programmiersprachen — Maschinenprogramme

Die bisher behandelten Diagramme kann man als *Strukturdiagramme* bezeichnen, weil sie die logische Struktur des Programmablaufs darstellen. Das bedeutet noch nicht, daß ein Automat solche Diagramme „versteht". Die Arbeit des Programmierers ist also an dieser Stelle noch nicht beendet. Was weiter geschieht, soll in dieser Artikelserie nicht mehr ausführlich behandelt, sondern nur kurz umrissen werden:

Es ist heute üblich, Programme in einer international vereinbarten problemorientierten *Programmiersprache* zu formulieren. Eine solche künstliche Sprache besteht aus den üblichen Alphabetzeichen, Ziffern und einigen Sonderzeichen. Am bekanntesten ist die Programmiersprache ALGOL (*Algo*rithmic *L*anguage). Ohne näher auf diese Sprache einzugehen, wollen wir den im Beispiel 2 (zweite Fassung) dargestellten Ablauf in ALGOL-Notation angeben. Die Darstellung wird nach dem Vorangegangenen unmittelbar verständlich sein: $S:=0;$ $\quad i:=1;$

Wiederholung: $S:=S+a[i]$; $i:=i+1$;

$\underline{i}$ | $i \leqq 1000$ ***then go to*** **Wiederholung.**

Letzteres ist noch kein vollständiges ALGOL-Programm. Die Zeilen entsprechen aber dem arithmetischen Sachverhalt dieses Beispiels.

Ein solches Programm wird anschließend auf ein sogenanntes *Eingabemedium* übertragen. Als Medien dienen im wesentlichen *Lochkarten* und *Lochstreifen.* Von diesen Eingabemedien wird das Programm in den Automaten übernommen. Technisch muß man sich diesen Vorgang etwa so vorstellen: Die auf einer leitenden Fläche liegende Lochkarte wird zeilenweise mit einer metallischen Bürste abgetastet. Zwischen Bürste und Unterlage besteht eine elektrische Spannung. Jedes Loch bewirkt beim Überstreichen einen kurzfristigen Kontakt und somit einen vom Automaten registrierten Stromstoß.

Das in der Programmiersprache abgefaßte Programm — nehmen wir als Beispiel das ALGOL-Programm — muß nun noch für den betreffenden Maschinentyp übersetzt werden. Das geschieht durch ein besonderes Programm, in unserem Fall durch einen *ALGOL-Übersetzer.* Er bewirkt im Automaten die Übertragung in das *individuelle Maschinenprogramm.* Dieses führt dann die Rechnung explizit aus.

Die Ergebnisse können über einen *Schnelldrucker* ausgegeben werden und sind dann für den Menschen unmittelbar lesbar. Sie können aber auch in Lochstreifen oder Lochkarten eingestanzt oder auf Magnetbändern gespeichert werden, um für weitere Auswertungen in maschinenlesbarer Form unmittelbar zur Verfügung zu stehen. Fassen wir zum Abschluß den Inhalt des dritten und letzten Abschnitts der EDV-Serie noch stichwortartig zusammen:

Problem — mathematische Formulierung — Auflösen in Teiloperationen — Strukturdiagramm — ALGOL-Programm — ALGOL-Übersetzer — individuelles Maschinenprogramm — Rechnung — Ergebnis.

J. Formann

Wir empfehlen dem interessierten Leser für ein weiterführendes Studium folgende populärwissenschaftliche *Literatur:*

Arbeitsweise von Rechenanlagen:

1. Schubert, Digitale Kleinrechner, Verlag Technik, Berlin (1967)
2. Götzke, Programmgesteuerte Rechenautomaten, VEB Fachbuchverlag Leipzig

Programmierung: 3. Huhn, Grundlagen der Datenverarbeitung, Verlag Die Wirtschaft, Berlin (1970)

4. Paulin, Programmierung elektronischer Datenverarbeitungsanlagen, Berlin, Verlag Die Wirtschaft (erscheint 1970)

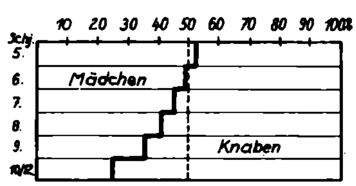
Nachschlagewerke: 5. Murphy, Elektronische Ziffernrechner, VEB Technik, Berlin (1965)

6. Paulin, Kleines Lexikon der Rechentechnik und Datenverarbeitung, VEB Verlag Technik, Berlin (1969)

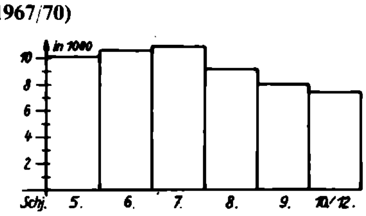
alpha-Wettbewerb 1969/70

Rund 25 000 Lösungen gingen im vergangenen Schuljahr ein. In Kleinarbeit wurden alle zwischen dem 1. und 10. 10. an die Redaktion eingesandten Briefe (mit Antwortkarten) bearbeitet. Bis zum 1. November haben wir an unsere aktiven Leser versandt:
72 Urkunden und Abzeichen, Preise (Wert: 950 M) für unsere Preisträger.
151 Urkunden, Abzeichen für „vorbildliche Leistungen".
150 Urkunden, Abzeichen in Gold für dreijährige und erfolgreiche Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb. (Die Namen dieser Schüler sowie die Preisträger veröffentlichen wir in Heft 1/71.)
1 227 Urkunden und Abzeichen für erfolgreiche Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb 1969/70.
45 Schulen nahmen als Kollektive am *alpha*-Wettbewerb teil (s. Heft 1/71).
12 Verlage überreichten für über 1 500 M Bücher für die Auszeichnung (s. Heft 1/71).

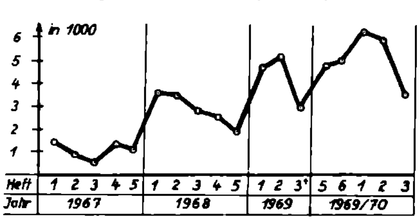
Beteiligung — aufgeschlüsselt nach Jungen/Mädchen (1967/70)



Beteiligung — aufgeschlüsselt nach Schuljahren (1967/70)



4 Jahre alpha-Wettbewerb (absolut)



*umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr

alpha-Wettbewerb 1969/1970 — Einsendung von Lösungen

Klassenstufe 5

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
5/69	424	204	265	469	(—12)
	425	208	267	475	(—15)
6/69	455	248	265	513	(—16)
	456	211	247	458	(—115)
1/70	480	276	290	566	(—4)
	481	250	320	570	(—3)
2/70	511	275	276	551	(—18)
	512	261	256	517	(—6)
3/70	536	198	225	423	(—12)
	537	168	189	357	(—43)
zus.		2299	2600	4899	

Klassenstufe 6

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
5/69	429	198	205	403	(—122)
	430	175	195	370	(—75)
6/69	460	219	231	450	(—3)
	461	122	154	276	(—22)
1/70	482	146	183	329	(—10)
	483	150	135	285	(—7)
2/70	515	341	287	628	(—2)
	516	280	233	513	(—47)
3/70	541	183	207	390	(—16)
	542	111	124	235	(—19)
zus.		1925	1954	3879	

Klassenstufe 7

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
5/69	434	275	251	526	(—52)
	435	250	230	480	(—174)
6/69	465	256	245	501	(—80)
	466	230	205	435	(—54)
1/70	484	307	304	611	(—88)
	485	423	415	838	(—84)
2/70	519	257	295	552	(—20)
	520	160	179	339	(—241)
3/70	546	187	173	360	(—57)
	547	66	60	126	(—23)
zus.		2411	2357	4768	

Klassenstufe 8

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
5/69	438	103	72	175	(—90)
	439	170	110	280	(—42)
6/69	469	206	141	347	(—121)
	470	254	173	427	(—37)
1/70	486	85	66	151	(—56)
	487	328	298	626	(—76)
2/70	523	298	287	585	(—164)
	524	92	62	154	(—6)
3/70	550	231	179	410	(—78)
zus.		1868	1468	3336	

Klassenstufe 9

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
5/69	442	394	297	691	—
	443	315	242	557	(—7)
6/69	473	110	62	172	(—14)
	474	223	150	373	(—15)
1/70	488	142	126	268	(—49)
	489	70	53	123	(—13)
2/70	526	327	275	602	(—8)
	527	93	32	125	(—23)
3/70	554	152	99	251	(—42)
	555	122	63	185	(—26)
zus.		1948	1399	3347	

Klassenstufe 10/12

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
5/69	446	165	32	197	(—34)
	447	111	30	141	(—69)
6/69	477	181	76	257	(—56)
	478	235	125	360	(—25)
1/70	490	262	95	357	(—28)
	491	221	116	337	(—24)
2/70	530	117	46	163	(—45)
	531	144	45	189	(—12)
3/70	558	119	49	168	(—4)
	559	145	61	206	(—4)
zus.		1700	675	2375	

Eingesandte Lösungen zur IX. Olympiade Jg. Mathematiker der DDR

Kreisolympiade

Klassenstufe	Knaben	Mädchen	gesamt	davon falsch
5	60	109	169	11
6	106	70	176	6
7	148	97	245	26
8	80	54	134	14
9	100	22	122	9
10	92	29	121	9
11/12	140	12	152	6
zus.	726	393	1119	81

Bezirksolympiade

Klassenstufe	Knaben	Mädchen	gesamt	davon falsch
7	132	98	230	24
8	140	63	203	9
9	128	24	152	20
10	116	29	145	10
11/12	135	41	176	14
zus.	651	255	906	77

DDR-Olympiade

Klassenstufe	Knaben	Mädchen	gesamt	davon falsch
10	61	13	74	2
11/12	55	6	61	6
zus.	116	19	135	8

Es wurden außerdem 5 Lösungen zur XI. IMO eingesandt.

Preisträger

Vorbildliche Leistungen

Die im Druck hervorgehobenen Schüler erhielten Buchprämien.

Klassenstufe 5

Bernd Derlich 205 Teterow; **Carola Kuhnt** 205 Teterow; **Heidrun Köpcke** 205 Teterow; **Astrid Rösel** 205 Teterow (aus Klasse 3); **Sven-Thorsten Freitag** 95 Zwickau; **Norbert Heß** 8019 Dresden; **Achim Bobeth** 806 Dresden; **Birgit Kuhmstedt** 5001 Erfurt; **Elke Kühne** 427 Hettstedt; **Kirsten Helbig** 1321 Schöneberg; **Monika Juppe** 8301 Markersbach; **Andreas Letzel** 15 Potsdam; **Heike Rommel** 62 Bad Salzungen; **Claus Scheffler** 88 Zwickau; **Wilfried Carl** 402 Halle; **Heike Anders** 1636 Dahlewitz; Holger Kuchling 110 Berlin; Ute Wittat 9507 Ebersbrunn; Marlies Englisch 7022 Leipzig; Beate Brandtner 7295 Schildau; Angelika Müller 22 Greifswald; Ursula Barth 5101 Kleinfahner; Jörg Schubert 9331 Pfaffroda; Andreas Hochhaus 57 Mühlhausen; Frank Richter 793 Herzberg; Heidrun Scheinhardt 4203 Bad Dürrenberg; Ulf Hutschenreiter 8020 Dresden; Ulrike Brandemer 92 Freiberg; Thomas Kischel 22 Greifswald; Peter-Michael Anders 128 Bernau; Andreas Näther 925 Mittweida; Ute Minow 2723 Warin; Birgit Lorenz 83 Pirna-Copitz; Christine Fründt 2723 Warin; Wolfhard Spiewok 22 Greifswald; Elvira Neubauer 9413 Schönheide; Angela Richter 2723 Warin; Torsten Waldeck 90 Karl-Marx-Stadt; Holger Jurack 8502 Burkau (aus Kl. 4); Christine Dehmel 205 Teterow; Regina Lewe 205 Teterow; Jutta Langmeier 205 Teterow; Roland Herdmann 6081 Mittelstille; Gerlind Koch 6081 Trusetal; Ulrike Grauck 8502 Burkau (aus Kl. 4); Heidrun Weichler 6081 Fambach; Heiko Wolff 6084 Floh; Ulrike Claußnitzer 14 Oranienburg; Birgit Sievert 14 Oranienburg; Thomas Fischer 6221 Kranlucken; Astrid Schulz 4401 Rotta; Kerstin Tamm 6083 Brotterode; Elke Gernath 6088 Steinbach-Hallenberg; Dietmar Huhn 4401 Radis; Steffi Bittorf 6085 Oberschönau; Annemarie Heldt 2561 Parkentin; Renate Daniel 262 Bützow.

Klassenstufe 6

Uwe Löbus 801 Dresden; **Arndt Petzold** 9034 Karl-Marx-Stadt; **Martina Römer** 128 Bernau; **Karl-Heinz Hering** 50 Erfurt; **Detlef Snaga** 128 Bernau; **Michael Schnelle** 754 Calau; **Reiner Lindemann** 75 Cottbus; **Uwe Risch** 327 Burg; **Sibylle Rohrbeck** 2302 Franzburg; **Birgit Volkert** 62 Bad Salzungen; **Brigitte Hildenbrandt** 6316 Stützerbach; **Barbara Wettengel** 992 Oelsnitz; Hans-Peter Tams 2851 Domsühl; Karl-Heinz Schubert 9331 Pfaffroda; Bärbel Rahnefeld 901 Karl-Marx-Stadt; Frank Kolwe 128 Bernau; Jörg Löschner 9201 Dorfchemnitz; Ulrike Huste 8502 Burkau; Peter Heumann 90 Karl-Marx-Stadt; Herbert Forst 62 Bad Salzungen; Eva Clauß 9501 Culitzsch; Thomas Rudolph 92 Freiberg; Peter-Michael Anders 128 Bernau; Jens Haupt 90 Karl-Marx-Stadt; Petra Hanisch 8502 Burkau; Volkmar Wagner 6081 Fambach; Burkhard Schneider 6081 Fambach; Barbara König 9215 Sayda; Margit Schneider 9201 Dorfchemnitz; Angela Brandt 9014 Karl-Marx-Stadt; Angelika Stephan 8502 Burkau; Jutta Storch 6081 Fambach; Birgit Ludwig 2051 Altkalen; Silva Schäfer 2051 Kleverhof; Bernd Richter 7261 Liptitz; Bernd Behnke 5403 Greußen; Zita Morgenstern 22 Greifswald; Gabriele Weisheit 6087 Seligenthal; Lutz Spiegel 3282 Güsen; Christina Wilhelm 6081 Mittelstille; Cornelia Müller 9215 Sayda; Lothar Jenning 2031 Gülzowshof; Uwe Löser 6801 Goßwitz; Marlene Möller 62 Bad Salzungen; Bärbel Anders 75 Cottbus.

Klassenstufe 7

Horst Kohlschmidt 801 Dresden; **Thomas Wolf** 655 Schleiz; **Gernot Förster** 757 Forst; **Harry Reimann** 104 Berlin; **Roland Maerz** 285 Parchim; **Siegfried Marg** 1501 Neu-Töplitz; **Christina Feige** 57 Mühlhausen; **Stefan Pfeifer** 74 Altenburg; **Regina Hildenbrandt** 6316 Stützerbach; **Andreas Schlosser** 95 Zwickau; **Frank-Günter Krause** 784 Senftenberg; Elke Mietzsch 21 Pasewalk; Regina Rau 9412 Schneeberg; Irene Hauske 8507 Putzkau; Andreas Popp 95 Zwickau; Angela Petzold 115 Berlin; Christian Hofmann 7404 Meuselwitz; Clemens Schlechte 808 Dresden; Manfred Bartsch 5501 Hesserode; Joachim Krautz 75 Cottbus; Horst Theel 1034 Berlin; Andreas Schneider 8512 Großröhrsdorf; Birgit Starke 703 Leipzig; Bärbel Hamm 60 Suhl; Carola Wobst 8502 Burkau; Martina Huste 8502 Burkau; Reiner Wagner 8502 Burkau; Jutta Rauer 608 Schmalkalden; Regina Schubert 6403 Neuhaus-Schierschnitz; Sabine Mark 608 Schmalkalden; Peter Segelek 301 Magdeburg; Claudia Neumann 9402 Bernsbach; Jörg Wehage 1802 Kirchmöser; Norbert Littig 8501 Lichtenberg.

Klassenstufe 8

Steffen Löbus 801 Dresden; **Egbert Lindner** 801 Dresden; **Anita Paul** 608 Schmalkalden; **Bernd Hanke** 8708 Großschweidnitz; **Ulf Brüstel** 7401 Ziegelhain; **Rolf Dietmar Regel** 75 Cottbus; **Bernd Ziemdars** 209 Templin; **Roland Nehrig** 55 Nordhausen; **Hans-Gert Gräbe** 50 Erfurt; **Reinhard Schuster** 703 Leipzig; **Ute Winkler** 153 Teltow; **Roland Borch** 75 Cottbus; **Bernd Kutnik** 205 Teterow; **Karin Schuster** 6575 Pausa; Yvonne Kruber 835 Stolpen; Reinhard Lehmann 79 Falkenberg; Manfred Pokrandt 75 Cottbus; Andreas Stern 22 Greifswald; Gert Hantsche 8142 Radeberg; Uwe Stitz 801 Dresden; Bernd Reddemann 36 Halberstadt; Hubert Sanik 2151 Rattey; Jutta Schuster 27 Schwerin; Andreas Fleischer 8027 Dresden; Peter Linhart 7305 Waldheim; Ulrich König 6081 Zillbach; Andreas Zimmermann 90 Karl-Marx-Stadt; Steffi Größel 9522 Reinsdorf; Monika Seiler 53 Weimar; Viola Eichler 8302 Bad Gottleuba; Hartmut Häfner 6088 Steinbach-Hallenberg.

Klassenstufe 9

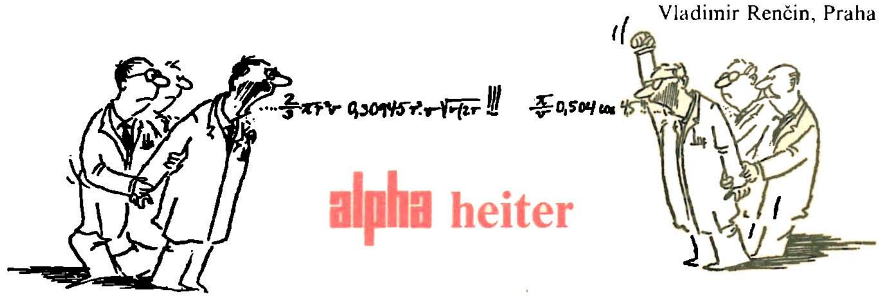
Albrecht Böttcher 9314 Neudorf; **Lothar Wenzel** 111 Berlin; **Michael Hoffmann** 238 Barth; **Bärbel Schulz** 75 Cottbus; **Wolfram Heimbrodt** 1055 Berlin; **Klaus-Peter Schemmel** 1055 Berlin; **Jörg Vogel** 55 Nordhausen; **Wolfgang Zahn** 532 Apolda; **Detlef Hantke** 42 Merseburg; **Volker Schneider** 9302 Annaberg-Buchholz; **Manfred Riemer** 83 Pirna; **Helga Däweritz** 7291 Neußen; Volker Warstat 323 Oschersleben; Bernd Droge 7541 Kalkwitz; Wolfgang Herrmann 9306 Elterlein; H.-Jürgen Weinberger 222 Wolgast; Elke Wiemann 8245 Glashütte; Sabine Dittrich 9402 Bernsbach; Dieter Garling 286 Lübz; Dietmar Mauersberger 57 Mühlhausen; Joachim Selle 5401 Großfurra; Carmen Hauptmann 8245 Glashütte; Kordula Obereigner 291 Perleberg; Burkhard Thiele 3018 Magdeburg; Bettina Belitz 68 Saalfeld; Eberhard Häfner 6088 Steinbach-Hallenberg; Eberhard Recknagel 6088 Steinbach-Hallenberg.

Klassenstufe 10/12

Uli Klaus 50 Erfurt; **Bärbel Kurz** 724 Grimma; **Matthias Heine** 8601 Schwarznaußlitz; **Rolf Dieckmann** 24 Wismar; **Rüdiger Nützmann** 2031 Trittelwitz; **Manfred Reißig** 9933 Bad Elster; **Brigitte Prawitz** 119 Berlin; **Karl Heym** 6202 Bad Liebenstein; **Stefan Ackermann** 725 Wurzen; **Gottfried Meisel** 965 Klingenthal 1; **Eberhard Paschkowski** 48 Naumburg; **Thomas Winkler** 9933 Bad Elster; Christoph Clauß 9163 Gornsdorf; Andreas Heß 794 Jessen; Roland Möller 58 Gotha; Lutz-Peter Klotz 9414 Sosa; Winfried Helwig 3018 Magdeburg; Rolf Sommer 993 Adorf; Klaus Schönefeld 53 Weimar; Angele Babenhauserheide 3501 Uchtspringe; Ottmar Langer 73 Döbeln; Knut Taeger 45 Dessau; Ulrike Weise 9274 Wüstenbrand; Hans-Peter Schneider 432 Aschersleben; Wolfgang Häfner 6088 Steinbach-Hallenberg; Johannes Gerth 5211 Singen; Bernd Ahrens 301 Magdeburg; Dieter Buchmann 1407 Lehnitz.

In freien Stunden

Vladimir Renčin, Praha



Zum Jahreswechsel: ganz international

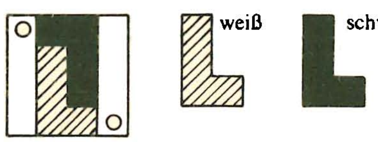
Das L-Spiel

„Ich bin Mathematiklehrer, beziehe die *alpha* schon das zweite Jahr und habe so manche interessante Anregung aus Ihrer Zeitschrift entnommen. Aus unserer *Nauka i shisn* (7/70) sende ich Ihnen das *L-Spiel.*"

Oberlehrer L. Dimenstein, Leningrad

Das Spielfeld ist ein Quadrat mit 4 mal 4 Karos. Es spielen zwei Partner (weiß und schwarz), von denen jeder eine L-Figur besitzt. Außerdem gibt es zwei gemeinsame Spielmarken. Die Ausgangsstellung ist auf *Bild 1* gezeigt. Die Partner ziehen abwechselnd. Jeder Zug besteht aus einem *unbedingten* Versetzen des L's im Bereich der freien Spielfelder und einem möglichen (aber nicht unbedingten) Versetzen einer Spielmarke (*nach* dem L-Zug). Verloren hat der, der keinen Zug für sein L hat.
Als Beispiel sei eine Partie angeführt (*Bild 2*). Würde schwarz im 3. Zug die Spielmarke anders gesetzt haben, etwa wie in *Bild 3*, so würde das Spiel weitergehen.

Bild 1



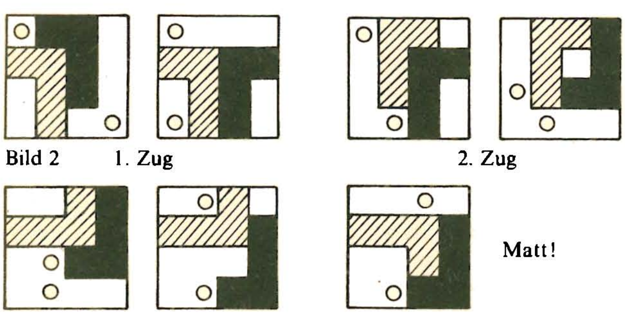


Bild 2

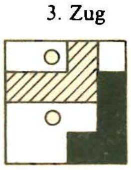


Bild 3

Fällt das Studieren Dir mal schwer,
dann nimm Dir *alpha*-heiter her!

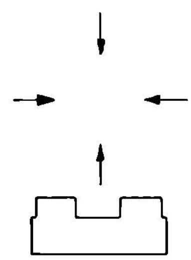
Oberlehrer H. Pätzold, Waren Müritz

Kleine Knobelei

Setze natürliche Zahlen ($0 < n < 10$) in die leeren Felder so ein, daß wahre Aussagen entstehen!

Aus: mame – mamu – ka, Sofia (6/68)

4	×		−		= 1
×		×		+	
	×		−		= 1
−		+		−	
	×		−		= 2
= 6		= 7		= 2	



Von oben wie? ▲

so fragt der Generalsekretär der Mathematischen Gesellschaft der SR Rumänien, Prof. *C. Ottescu* (Bukarest) und grüßt damit alle *alpha*-Leser.

Gereimte Mathematik

Unser Leser *G. O. Gestsson,* Mathematiklehrer in Reykjavík (Island), sandte uns ein Formelheft. Damit sich die Schüler Formeln besser merken, werden sie in Gedicht- oder Liedform dargeboten:

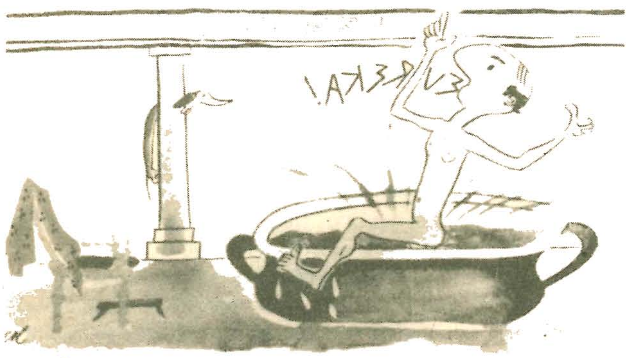
Tvíliða stærð öðru veldi í,
ávallt reiknast sama sem:
Tvíveldi tveggja liðanna því,
og tvöfalt margfeldi þeirra. — Nem.

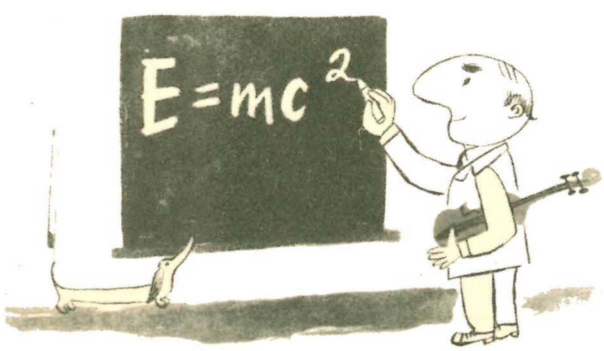
$$(A+B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2.$$

Rätsel um Otek

Auf unseren Bildern sehen wir *Otek*, eine bekannte polnische Figur, spitzbübisch, liebenswürdig — ironisch mit seinem Dackel *Taky*. *Otek* hat sich verwandelt und fragt: Wer bin ich?

Aus: Rätsel um Otek, Eryk Lipinski, Warschau (erschienen im Eulenspiegelverlag, Berlin)





Schwieriges Problem

In dem Schema

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D\,E \\ +E\,D\,C\,B\,A \\ \hline F\,F\,F\,F\,F \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition (im dekadischem System) zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.

Szepan Jeleński, Warschau

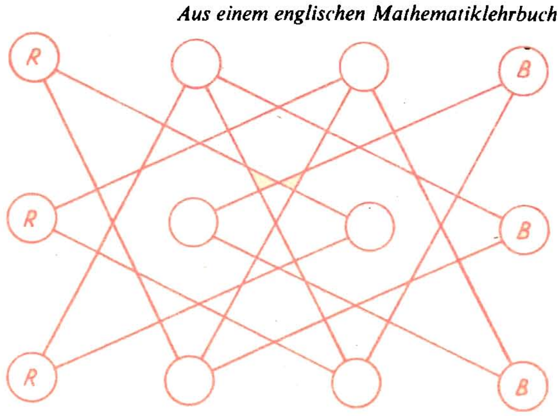
Ein wenig Logik

Die in der Abbildung gezeigten Figuren sind in einer bestimmten logischen Reihenfolge geordnet. Man finde den logischen Zusammenhang. Aus ihm ergibt sich die fehlende Figur. *Aus: Füles 28/70, Budapest*

Coloured Counter Puzzle

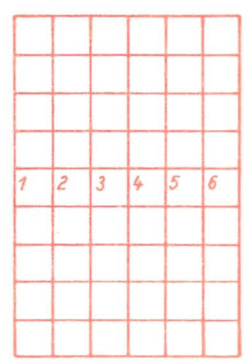
This is a puzzle for one person. — You need: 3 red and 3 blue counters. — Put three red counters on the positions marked R, and three blue counters on the positions marked B. —
Objekt: to change the positions of the red and the blue counters. — *Rules:* any counter can move along a straight line to an unoccupied position. Counters can move in any order, and backward moves are allowed.

Aus einem englischen Mathematiklehrbuch



Kreuzworträtsel

In die Felder der untenstehenden Figur sind, von den numerierten Feldern beginnend, nach oben und unten fünfbuchstabige Wörter der folgenden Bedeutung einzutragen. Die Buchstaben in den (numerierten) Mittelfeldern ergeben einen mathematischen Begriff.



Nach oben:
1. gekrümmte Linie
2. Oberbegriff zu Gerade und Kreis
3. unbewiesener Grundsatz
4. Teil einer Sekante
5. Zahlwort
6. Stellenwert;

nach unten:
1. geometrischer Körper
2. Hohlmaß
3. Name der Schülerzeitschrift
4. eine Winkelfunktion
5. Einteilung, z. B. auf dem Rechenstab
6. berühmter Schweizer Mathematiker.

OStR K.-H. Lehmann, V.L.d.V., Berlin

Lösungen

W 7 ■ 546

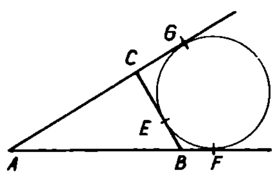
Jahr	Produktion im polnischen Maschinenbau, in Prozenten und bezogen auf das Jahr	
	1968	1969
1968	100 %	
1969	114 %	100 %
1970	x %	114 %

Aus der Tabelle läßt sich die Proportion $x : 114 = 114 : 100$ ablesen; daraus folgt

$$x = \frac{114^2}{100} = 129{,}96 \approx 130.$$

Im Maschinenbau der Volksrepublik Polen ist demnach für das Jahr 1970 eine Steigerung der Produktion um rund 30 % gegenüber der des Jahres 1968 geplant.

W 7 ■ 547 Auf Grund des Satzes „Für die von einem Punkt an einen Kreis gelegten Tangenten sind die Tangentenabschnitte zwischen Tangentenschnittpunkt und den Berührungspunkten gleich lang" gilt $\overline{AF} = \overline{AG}$, $\overline{BF} = \overline{BE}$, $\overline{CE} = \overline{CG}$. Demzufolge gilt $u = \overline{AF} + \overline{AG} = 2 \cdot \overline{AF}$. Daraus folgt $\overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AF} = \frac{1}{2}u$.



8 ▲ 548 a) Die zu den folgenden Zeiten in Gaschwitz abfahrenden Züge treffen nach jeweils 53 min in Markkleeberg-West ein und begegnen daher unterwegs dem Fahrgast, der um 14.50 Uhr in Markkleeberg-West abgefahren ist.

15.34, 15.14 14.45, 14.34, 14.14 Uhr

(jedoch nicht mehr der um 13.54 Uhr abfahrende Zug, da dieser bereits um 14.47 Uhr in Markkleeberg-West eintrifft.)

Dem Fahrgast begegnen also genau 5 Züge des Schnellverkehrs.

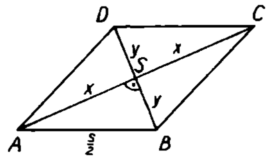
b) Es seien x die Anzahl der Minuten, die von der Abfahrt des Fahrgastes (um 14.50 Uhr in Markkleeberg-West) bis zur Begegnung mit dem ersten Gegenzug vergangen ist, und v die Maßzahl der durchschnittlichen Reisegeschwindigkeit (in km/min) der Züge.

Dann hat der Fahrgast bis zur Begegnung mit dem ersten Gegenzug die Strecke xv km und der Gegenzug die Strecke $(36+x)v$ km zurückgelegt, da er bereits um 14.14 Uhr, also 36 min früher, abgefahren ist. Da die Gesamtstrecke eine Länge von $53v$ km hat, ergibt sich die Gleichung

$$xv + (36+x)v = 53v \text{ und wegen } v \neq 0$$
$$x + 36 + x = 53,$$
$$2x = 17, \quad x = 8{,}5.$$

Der erste Gegenzug begegnet dem Fahrgast also bereits nach 8,5 Minuten, d. h. um etwa 14.59 Uhr.

8 ▲ 549 Es seien $ABCD$ ein Rhombus und S der Schnittpunkt seiner Diagonalen (vgl. die Abbildung).



Bezeichnet man mit x bzw. y die halben Längen der Diagonalen dieses Rhombus, so gilt $\overline{AS} = \overline{SC} = x$ und $\overline{BS} = \overline{SD} = y$.

Da die Diagonalen des Rhombus aufeinander senkrecht stehen, beträgt der Flächeninhalt des Rhombus

$$A = 2 \cdot \frac{2x \cdot y}{2} = 2xy. \qquad (1)$$

Nun ist der Umfang des Rhombus gleich $2s$; jede Seite hat also die Länge $\frac{s}{2}$. Nach dem Satz des Pythagoras erhalten wir daher aus dem rechtwinkligen Dreieck ABS

$$x^2 + y^2 = \frac{s^2}{4}. \qquad (2)$$

Andererseits gilt, da die Summe der Längen der Diagonalen m beträgt,

$$2x + 2y = m, \text{ also } x + y = \frac{m}{2}.$$

Hieraus erhält man durch Quadrieren

$$x^2 + y^2 + 2xy = \frac{m^2}{4}. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) erhalten wir durch Subtrahieren $2xy = \frac{m^2}{4} - \frac{s^2}{4} = \frac{m^2 - s^2}{4}$

Wegen (1) beträgt also der Flächeninhalt des Rhombus $A = \frac{m^2 - s^2}{4}$.

W 8 ■ 550 a) Die Zahl 30 läßt sich nur auf die folgenden Arten in Faktoren $x \cdot y \cdot z$ zerlegen, wenn $x \leqq y \leqq z$ gilt:

$$30 = 1 \cdot 1 \cdot 30 = 1 \cdot 2 \cdot 15 = 1 \cdot 3 \cdot 10$$
$$= 1 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Wir erhalten daher die folgende Tabelle:

	x	y	z	$x+y+z$
1)	1	1	30	32
2)	1	2	15	18
3)	1	3	10	14
4)	1	5	6	12
5)	2	3	5	10

Nur in den Fällen 1) und 4) ist $x+y+z$ durch 4 teilbar; daher haben nur die Zahlen 1, 1, 30 und 1, 5, 6 die geforderten Eigenschaften.

Nur in dem Fall 4) gilt auch $x < y$ und $x < z$; außerdem ist in diesem Falle x Teiler von y und Teiler von z.

Daher haben nur die Zahlen 1, 5, 6 die in b) geforderten Eigenschaften.

W 8 ■ 551 Es sei 0 der Mittelpunkt des dem Tangentenviereck $ABCD$ eingeschriebenen Kreises (vgl. die Abbildung).

Dann gehen die Winkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ durch den Punkt 0, da die Schenkel dieser Winkel den Inkreis des Vierecks $ABCD$ berühren. Daher gilt $\sphericalangle ABO = \sphericalangle OBC$,

$$\sphericalangle OAB = \frac{\alpha}{2} = 45^\circ, \quad \sphericalangle BCO = \frac{\gamma}{2} = 45^\circ,$$

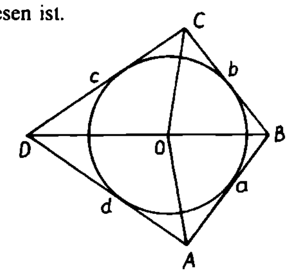
also $\sphericalangle OAB = \sphericalangle BCO$, $\overline{OB} = \overline{OB}$.

Daraus folgt

$$\triangle OAB \cong \triangle OBC \text{ (sww)}.$$

Daher ist $\overline{AB} = \overline{BC}$, also $a = b$.

Analog beweist man, daß auch die Dreiecke DAO und CDO kongruent sind, woraus $c = d$ folgt und womit die obige Behauptung bewiesen ist.



Zu bemerken ist noch, daß der Punkt O auf der Diagonalen $\overline{BD}$ liegt, weil die Winkel $\sphericalangle BOA$ und $\sphericalangle COB$ sowie die Winkel $\sphericalangle AOD$ und $\sphericalangle DOC$ einander gleich sind; diese Tatsache haben wir aber bei dem obigen Beweis nicht benutzt. Ferner ist wegen $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ die Gerade BD Symmetrieachse des Drachenvierecks $ABCD$.

Der obige Satz läßt sich noch verallgemeinern: Aus $\alpha = \gamma$ folgt wie oben $a = b$ und $c = d$. Es genügt also, daß die Winkel α und γ einander gleich sind; diese Winkel brauchen nicht notwendig rechte Winkel zu sein.

9 ▲ 552 Es sei V das Volumen der zur Verfügung stehenden Silbermenge von 2 g; dann gilt $V = \frac{2\,\text{g}}{10{,}5\,\text{g cm}^{-3}} \approx 0{,}1905\,\text{cm}^3$.

Nun sei x die Maßzahl der Länge des hergestellten Drahtes (in cm). Dann erhält man, da der Querschnittsdurchmesser 0,0002 cm, also der Querschnittsradius 0,0001 cm beträgt, die Gleichung

$$0{,}0001^2 \pi \cdot x = 0{,}1905, \text{ also}$$
$$x = \frac{0{,}1905 \cdot 10^8}{\pi} \approx 0{,}0606 \cdot 10^8,$$
$$x \approx 6060000.$$

Die Länge des Drahtes beträgt also rund
6060000 cm = 60600 m = 60,6 km.

9 ▲ 553 Es gibt z. B. die folgenden Möglichkeiten der Darstellung:

1) $1000000 = \sqrt{(11-1)^{11+1}}$,

2) $1000000 = \left(\frac{22-2}{2}\right)^{2^2+2}$,

3) $\quad 1000000=\left(\frac{33-3}{3}\right)^{3+3}$,

4) $\quad 1000000=(4+4+\sqrt{4})^{4+\sqrt{4}}$,

5) $\quad 1000000=(5+5)^{5+\frac{5}{5}}$,

6) $\quad 1000000=\left(\frac{66-6}{6}\right)^{6}$,

7) $\quad 1000000=\left(\frac{77-7}{7}\right)^{7-\frac{7}{7}}$,

8) $\quad 1000000=(8+\sqrt{\sqrt{8+8}})^{8-\sqrt{\sqrt{8+8}}}$,

9) $\quad 1000000=\left(9+\frac{9}{9}\right)^{9-\sqrt{9}}$.

W 9 ■ 554a) Es seien n und $n+1$ die gesuchten aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen; dann gilt

$$(n+1)^2-n^2=(n+1+n)(n+1-n)$$
$$=2n+1=211, \text{ also } 2n=210, n=105.$$

Die beiden Zahlen lauten also 105 und 106. Die „Probe" zeigt die Richtigkeit unserer Rechnung:

$$106^2-105^2=11236-11025=211.$$

b) In diesem Falle erhalten wir die Gleichung

$$(n+1)^2-n^2=2n+1=1000001,$$
$$\text{also } 2n=1000000, n=500000.$$

Die beiden Zahlen lauten also 500000 und 500001.

Probe: $500001^2-500000^2=1000001$.

c) Es seien $n-1$ und $n+1$ die beiden gesuchten ungeraden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen; dann gilt

$$(n+1)^3-(n-1)^3=(n^3+3n^2+3n+1)$$
$$-(n^3-3n^2+3n-1)=6n^2+2,$$

also $\quad 6n^2+2=153602, \; 6n^2=153600,$
$n^2=25600, \; n=160.$

Die beiden ungeraden Zahlen lauten also 159 und 161.

Probe: $161^3-159^3=4173281-4019679$
$=153602$.

Wir sehen also, wie wir in den Fällen a) und b) mit Hilfe der Formel

$$(n+1)^2-n^2=2n+1$$

und im Falle c) mit Hilfe der Formel

$$(n+1)^3-(n-1)^3=6n^2+2$$

die Ergebnisse sehr schnell ermitteln konnten.

W 9 ■ 555 Es seien $n-1$, n, $n+1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Dann ist die Summe ihrer Kuben

$s=(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$
$=n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1$
$=3n^3+6n=3n(n^2+2)$.

Nun sind genau drei Fälle möglich:

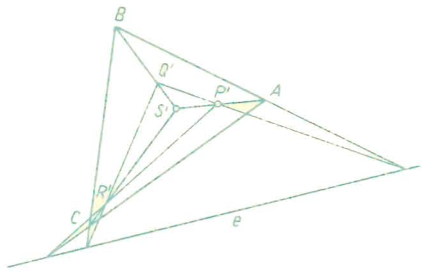
1. n ist durch 3 teilbar; dann ist s durch 9 teilbar

2. $n=3k+1$, wobei k eine natürliche Zahl ist; dann ist $n^2+2=(3k+1)^2+2=9k^2+6k+3=3(3k^2+2k+1)$ durch 3 teilbar, also s wieder durch 9 teilbar.

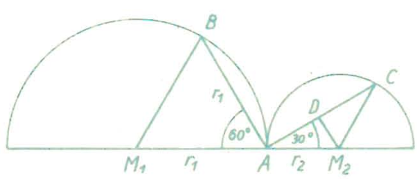
3. $n=3k+2$, wobei k eine natürliche Zahl ist; dann ist $n^2+2=(3k+2)^2+2=9k^2+12k+6=3(3k^2+4k+2)$ durch 3 teilbar, also s wieder durch 9 teilbar.

In jedem Falle ist also die Summe s durch 9 teilbar, w. z. b. w. Wir bemerken noch, daß nicht nur die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, sondern auch die Summe der Kuben dreier **aufeinanderfolgender ganzen Zahlen stets** durch 9 teilbar ist; denn der obige Beweis gilt auch, wenn n eine beliebige ganze Zahl ist.

10/12 ▲ 556 Man verlängert $\overline{BA}$ über A hinaus bis zum Schnitt mit e. Dieser Punkt gehört der Schnittgeraden von ε mit der Ebene $[ABS]$ an. Da auch P ein Punkt dieser Schnittgeraden ist, ergibt die Verbindung von P' mit dem Schnittpunkt auf e den Grundriß der Schnittgeraden von ε mit der Ebene $[ABS]$. Diese Gerade schneidet $\overline{BS'}$ in Q', dem Grundriß von Q. In gleicher Weise erhält man R' als Grundriß von R.



10/12 ▲ 557 Es seien M_1 der Mittelpunkt und r_1 der Radius des größeren Halbkreises, M_2 der Mittelpunkt und r_2 der Radius des kleineren Halbkreises.
Ferner seien $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ die beiden im Punkt A aufeinander senkrecht stehenden Sehnen (vgl. die Abbildung).



Dann ist nach Voraussetzung $\sphericalangle M_1AB=60°$, also auch $\sphericalangle BM_1A=60°$. Ferner ist $\overline{AB}=r_1$, da das Dreieck M_1AB gleichseitig ist. Wegen $\sphericalangle BAC=90°$ gilt $\sphericalangle CAM_2=30°$.
Ist D die Mitte der Sehne $\overline{AC}$, so gilt

$$\cos 30°=\frac{\overline{AD}}{r_2}, \text{ also}$$

$$\overline{AC}=2\overline{AD}=2r_2\cdot\cos 30°=2r_2\frac{1}{2}\sqrt{3}=r_2\sqrt{3}.$$

Wir erhalten also

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{r_2\sqrt{3}}{r_1}.$$

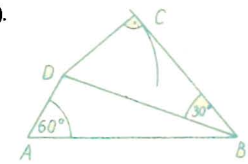
Nach Voraussetzung gilt nun $\frac{r_2{}^2\pi}{r_1{}^2\pi}=\frac{1}{3}$,

also $\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Daher gilt

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{r_2}{r_1}\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}=1, \text{ d. h. } \overline{AC}=\overline{AB}.$$

Die beiden Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ sind also gleichlang.
Es handelt sich hier um eine optische Täuschung; die Sehne $\overline{AB}$ scheint länger als die Sehne $\overline{AC}$ zu sein, weil der Kreisbogen über $\overline{AB}$ eine geringere Krümmung als der über $\overline{AC}$ hat.

W 10/12 ■ 558a) Auf den Schenkeln eines Winkels von 60° mit dem Scheitelpunkt A trägt man die Strecke $\overline{AD}=3$ cm und $\overline{AB}=8$ cm ab. Dann trägt man die Strecke $\overline{BD}$ im Punkt B den Winkel $\sphericalangle DBC=30°$ an. Nun zeichnet man einen Kreis mit dem Radius 3,5 cm um den Punkt D, der den freien Schenkel des Winkels $\sphericalangle$DBC im Punkt C berührt. A, B, C, D sind die Eckpunkte des gesuchten Vierecks $ABCD$ (vgl. die Abbildung).



b) Wir berechnen zunächst die Maßzahl f der Länge der Diagonale $\overline{BD}$ (in cm) nach dem Kosinussatz (in dem Dreieck ABD):

$$f^2=3^2+8^2-2\cdot3\cdot8\cos 60°=9+64-2\cdot3\cdot8\cdot\frac{1}{2}$$
$$=9+64-24=49, \text{ also } f=7, \text{ d. h.}$$
$$\overline{BD}=7 \text{ cm}.$$

Nun berechnen wir die Größe γ des $\sphericalangle BCD$ nach dem Sinussatz (in dem Dreieck BCD):

$$\frac{\sin\gamma}{\sin 30°}=\frac{7}{3,5}, \text{ also } \sin\gamma=2\sin 30°$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}=1, \text{ d. h. } \gamma=90°.$$

Nun können wir die Länge der Seite $\overline{BC}$ nach dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$\overline{BC}=\sqrt{7^2-3,5^2}\text{ cm}=7\sqrt{1-\frac{1}{4}}\text{ cm}$$
$$=\frac{7}{2}\sqrt{3}\text{ cm}\approx 6,06 \text{ cm}.$$

c) Zunächst ist das Teildreieck ABD durch die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ und dem eingeschlossenen Winkel $\sphericalangle DAB$ (bis auf Kongruenz) eindeutig bestimmt. Aber auch das Teildreieck BCD ist durch die Seiten $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$ sowie durch den Winkel $\sphericalangle DBC=30°$ eindeutig bestimmt, da, wie oben gezeigt wurde, der Winkel $\sphericalangle BCD$ ein rechter Winkel ist, und ein rechtwinkliges Dreieck durch die Länge der Hypotenuse und einen spitzen Winkel bereits eindeutig bestimmt ist. Daher ist auch das gesuchte Viereck $ABCD$ durch die vorgegebenen Stücke eindeutig bestimmt, w. z. b. w.
Wir bemerken noch, daß in dem vorliegenden Falle das Viereck $ABCD$ deswegen eindeutig bestimmt ist, weil der Winkel $\sphericalangle BCD$ ein rechter Winkel ist und daher der Kreis mit dem Radius 3,5 cm um den Punkt D und der freie Schenkel des Winkels $\sphericalangle DBC$ nur einen Punkt gemeinsam haben können (vgl. die Konstruktion unter a).

W 10/12 ■ 559 Setzt man $(46)_m=4m+6$, $(3)_m=3$ und $(162)_m=1\,m^2+6m+2$, so erhält man die Gleichung

$$(4m+6)\,3=m^2+6m+2,$$
$$12m+18=m^2+6m+2,$$
$$m^2-6m-16=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$m_1=3+\sqrt{9+16}=3+5=8 \text{ und}$$
$$m_2=3-5=-2.$$

Da die gesuchte Basis m eine ganze positive Zahl sein muß, erfüllt nur *die Lösung* $m=8$ die Bedingungen der Aufgabe.

Wir überzeugen uns durch die Probe, daß die gesuchte Basis tatsächlich $m=8$ ist:

$(46)_m=4\cdot 8+6=38$, $(3)_m=3$,
$(162)_m=64+48+2=114$; $38\cdot 3=114$.

5 ▲ 561 Aus $56-(c\cdot d)=50$ folgt $c\cdot d=6$. Für dieses Produkt sind genau vier Fälle möglich, und zwar $1\cdot 6=2\cdot 3=3\cdot 2=6\cdot 1=6$. Aus der abgebildeten Tabelle wird der weitere Lösungsweg ersichtlich.

c	d	$a=24:c$
1	6	24
2	3	12
3	2	8
6	1	4

$b=48:a$	$a+b+c$	$(a+b+c):d$
2	27	nicht lösbar
4	18	6
6	17	nicht lösbar
entfällt, da $a<c$		

5 ▲ 562

Aus $fg+he=aai$ folgt $a=1$;
aus $de+11i=cie$ folgt $c=2$;
aus $11b2:12=de$ und $e\neq 1$ folgt $e=6$;
aus $d6+11i=2i6$ folgt $i=0$;
aus $d6+110=206$ folgt $d=9$;
aus $11b2:12=96$ folgt $b=5$;
aus $12\cdot h6=912$ folgt $h=7$;
aus $fg+76=110$ folgt $g=4$ und $f=3$;
aus $111j-912=206$ folgt $j=8$.

Wir erhalten also

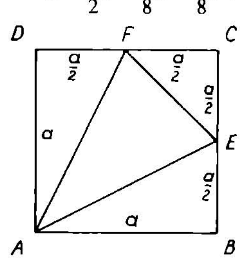
$$\begin{array}{rcl} 1152 & : \; 12 = & 96 \\ + & \cdot & + \\ 34 & + \; 76 = & 110 \\ \hline 1118 & - \; 912 = & 206 \end{array}$$

und stellen fest, daß alle waagerecht und senkrecht angeordneten Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

6 ▲ 566 Entsprechend den Bedingungen der Aufgabe gilt $\overline{AB}=\overline{AD}=a$, $\overline{BE}=\overline{DF}=\frac{a}{2}$, $\sphericalangle ABE=\sphericalangle ADF=90°$; daraus folgt $\triangle ABE\cong\triangle AFD$.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks AEF gilt deshalb

$$A=a^2-a\cdot\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$=a^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{8}a^2=\frac{3}{8}a^2.$$



6 ▲ 567 Bei der *1. Wägung* wird auf jede Waagschale eine Kugel gelegt:

1. Fall: Bei Gleichgewicht haben sowohl die beiden auf der Waage liegenden Kugeln wie die beiden nicht aufgelegten Kugeln jeweils gleiche Masse. Durch die anschließende 2. Wägung muß nur festgestellt werden, welche der Kugelsorten die schwerere ist. Dies geschieht durch Auflegen einer schon benutzten Kugel auf die eine Waagschale und einer noch nicht aufgelegten Kugel auf die andere Waagschale.

2. Fall: Falls bei der 1. Wägung kein Gleichgewicht herrscht, wird durch den Ausschlag der Waage die eine der beiden aufgelegten Kugeln als eine schwerere und die andere als eine leichtere Kugel erkannt. Bei der anschließenden 2. Wägung wird die als schwerere erkannte Kugel mit einer noch nicht aufgelegten Kugel verglichen. Je nachdem, ob Gleichgewicht herrscht oder nicht, wird die erstmals aufgelegte Kugel entweder als schwerere oder als leichtere erkannt. Gleichzeitig ergibt sich damit, daß die auch bei der zweiten Wägung noch nicht aufgelegte Kugel entweder eine leichtere oder schwerere ist.

7 ▲ 571 Die zu ermittelnden rationalen Zahlen x müssen die Gleichung $x\cdot|x|=x+|x|$ erfüllen.

1. Es sei $x<0$; wegen $|x|=-x$ gilt dann $x\cdot|x|<0$ und $x+|x|=0$, das heißt, es gibt keine Zahl $x<0$, die die Gleichung erfüllt.
2. Es sei $x=0$; wegen $|x|=0$ gilt dann $x\cdot|x|=0$ und $x+|x|=0$; also ist $x=0$ eine Lösung der Gleichung.
3. Es sei $x>0$; wegen $|x|=x$ gilt dann $x^2=2x$. Da $x>0$ ist, dürfen wir die Gleichung durch x dividieren und erhalten $x=2$ als Lösung der Gleichung.

Es gibt zwei rationale Zahlen, nämlich $x_1=0$ und $x_2=2$, die den gestellten Bedingungen genügen.

7 ▲ 572 Wenn die Summe zweier dreistelliger Zahlen eine vierstellige Zahl ergibt, so beginnt diese vierstellige Zahl stets mit der Ziffer 1, also $P=1$.

Wenn $A=0$, so $R=0$; das widerspricht den gestellten Bedingungen.
Wenn $A=2$, so $R=4$ und $M=1$; da $P=1$, entfällt $M=1$.
Wenn $A=3$, so $R=6$, $M=2$; $PA=13$ kann nicht erfüllt werden.
Wenn $A=4$, so $R=8$, $M=3$, $O=7$.
Wenn $A=5$, so $R=0$, $M=3$, $PA=15$ kann nicht erfüllt werden.
Wenn $A=6$, so $R=2$, $M=4$, $O=8$.
Wenn $A=7$, so $R=4$, $M=5$; $PA=17$ kann nicht erfüllt werden.
Wenn $A=8$, so $R=6$, $M=6$; da $R=6$ entfällt $M=6$.
Wenn $A=9$, so $R=8$, $M=7$, $PA=19$ kann nicht erfüllt werden.

Es existieren genau zwei Lösungen:

$$\begin{array}{r} 734 \\ +\ 714 \\ \hline 1448 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 846 \\ +\ 816 \\ \hline 1662 \end{array}$$

8 ▲ 576 Wir beweisen diese Behauptung durch eine Fallunterscheidung. Ist nämlich a eine natürliche Zahl, so läßt sich a in der Form $3n$ oder $3n+1$ oder $3n+2$ darstellen, wobei n eine natürliche Zahl ist; denn eine natürliche Zahl ist entweder durch 3 teilbar oder läßt bei der Division durch 3 den Rest 1 oder den Rest 2. Wir müssen daher die folgenden drei Fälle untersuchen:

1. Fall: $a=3n$.
Dann ist der Nachfolger des Quadrats der Zahl a gleich
$a^2+1=(3n)^2+1=9n^2+1$, also nicht durch 3 teilbar, da der Rest 1 entsteht.

2. Fall: $a=3n+1$.
Dann ist der Nachfolger des Quadrats der Zahl a gleich

$$a^2+1=(3n+1)^2+1=9n^2+6n+1+1$$
$$=3n(3n+2)+2,$$

also nicht durch 3 teilbar, da der Rest 2 entsteht.

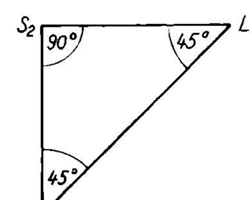
3. Fall: $a=3n+2$.
Dann ist der Nachfolger des Quadrats der Zahl a gleich

$$a^2+1=(3n+2)^2+1=9n^2+12n$$
$$+4+1=3(3n^2+4n+1)+2,$$

also nicht durch 3 teilbar, da der Rest 2 entsteht.

In allen drei Fällen ist also der Nachfolger der Quadratzahl a^2 nicht durch 3 teilbar, womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

8 ▲ 577 Es seien S_1 der Standort des Schiffes bei der ersten Beobachtung, S_2 der Standort des Schiffes bei der zweiten Beobachtung, L der Standort des Leuchtfeuers (vgl. die Abb.).



Dann gilt auf Grund der Bedingungen der Aufgabe

$\sphericalangle S_2S_1L=45$, $\sphericalangle LS_2S_1=90°$, $\overline{S_1S_2}=6$ sm.

Daraus folgt $\sphericalangle S_1LS_2=45°$, d. h., das rechtwinklige Dreieck LS_2S_1 ist gleichschenklig mit $\overline{LS_2}=\overline{S_1S_2}=6$ sm.

Das Schiff ist also zur Zeit der zweiten Beobachtung von dem Leuchtfeuer 6 sm entfernt.

9 ▲ 581 Angenommen, (x, y, z) sei eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3). Dann gilt

$$xy+xz=810, \qquad (4)$$
$$xy+yz=680, \qquad (5)$$
$$xz+yz=572. \qquad (6)$$

Addieren wir jetzt die Terme auf den linken bzw. rechten Seiten der Gleichungen (4) und (5) und subtrahieren davon die Terme auf der linken bzw. rechten Seite von (6), so erhalten wir eine Gleichung, in der die Variablen nur noch in der Form xy auftreten; denn $xz-xz=0$ und $yz-yz=0$. Wir erhalten also

$$2xy=810+680-572=918,$$
$$xy=459. \qquad (7)$$

Ferner erhalten wir, wenn wir die Terme auf den beiden Seiten der Gleichung (4) und (6) addieren und davon die Terme auf den beiden Seiten der Gleichung (5) subtrahieren,

$$2xz=810+572-680=702,$$
$$xz=351. \qquad (8)$$

Endlich erhalten wir durch Addition von (5) und (6) und Subtraktion von (4)

$$2yz=680+572-810=442,$$
$$yz=221. \qquad (9)$$

Aus den Gleichungen (7), (8) und (9) können wir nun x, y und z berechnen, wenn wir beachten, daß $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ gilt, denn sonst wären die Gleichungen (4), (5) und (6) nicht erfüllt. Wir multiplizieren die Terme auf beiden Seiten von (7) und (8), dividieren dann durch die Terme auf beiden Seiten von (9) und erhalten

$$\frac{xyxz}{yz}=\frac{459\cdot 351}{221}, \text{ also}$$
$$x^2=\frac{9\cdot 51\cdot 9\cdot 39}{13\cdot 17}=9\cdot 3\cdot 9\cdot 3=27^2.$$

Daraus folgt

$$x_1=27, \quad x_2=-27.$$

Aus der Gleichung (7) erhalten wir nun

$$y=\frac{459}{x}, \text{ also}$$
$$y_1=\frac{459}{27}=17, \quad y_2=\frac{459}{-27}=-17.$$

Aus der Gleichung (8) erhalten wir

$$z=\frac{331}{x}, \text{ also}$$
$$z_1=\frac{331}{27}=13, \quad z_2=\frac{331}{-27}=-13.$$

Wenn also das gegebene Gleichungssystem überhaupt Lösungen hat, so können es nur die Lösungen

$x_1=27$, $y_1=17$, $z_1=13$ und
$x_2=-27$, $y_2=-17$, $z_2=-13$ sein.

Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß das tatsächlich Lösungen des Gleichungssystems (1), (2), (3) sind; wir erhalten nämlich durch Einsetzen in diese Gleichungen die wahren Aussagen

$$27(17+13)=810,$$
$$17(27+13)=680,$$
$$13(27+17)=572.$$

Entsprechendes gilt für die Lösung $(-27, -17, -13)$.

10/12 ▲ 585 Angenommen, die reelle Zahl x sei eine Lösung der gegebenen Ungleichung

$$\frac{x^2+2x-15}{x+1}<0. \qquad (1)$$

Wegen $x+1 \neq 0$ ist diese Ungleichung genau dann erfüllt, wenn auf der linken Seite der Zähler negativ und der Nenner positiv oder wenn der Zähler positiv und der Nenner negativ ist.

Wir untersuchen daher die beiden Fälle

1. $x+1>0$, also $x>-1$;
2. $x+1<0$, also $x<-1$.

1. Fall: $x>-1$.
In diesem Fall ist die gegebene Ungleichung genau dann erfüllt, wenn

$$x^2+2x-15<0, \text{ also} \qquad (2)$$
$$x^2+2x+1-16<0,$$
$$(x+1)^2<16,$$
$$|x+1|<4, \text{ also} \qquad (3)$$
$$-4<x+1<4, \text{ d.h., } -5<x<3 \text{ gilt.} \qquad (4)$$

Nun ist im Falle $1\ x>-1$; die gegebene Ungleichung ist daher in diesem Fall genau dann erfüllt, wenn $-1<x<3$ gilt.

2. Fall: $x<-1$.
In diesem Fall ist die gegebene Ungleichung genau dann erfüllt, wenn

$$x^2+2x-15>0, \text{ also}$$
$$(x+1)^2>16,$$
$$|x+1|>4, \text{ also}$$
$$x+1>4 \text{ oder } x+1<-4,$$
$$\text{d. h., } x>3 \text{ oder } x<-5.$$

Nun ist im Fall 2 $x<-1$; die gegebene Ungleichung ist daher in diesem Fall genau dann erfüllt, wenn $x<-5$ gilt.

Zusammenfassend können wir daher feststellen, daß die gegebene Ungleichung für alle reellen Zahlen x erfüllt ist, für die

$$x<-5 \text{ oder } -1<x<3 \text{ gilt.}$$

Lösung zu der Aufgabe von Prof. Dr. sc. techn. D. Schmidt

▲ 619 x sei die Anzahl der von einem Facharbeiter gefertigten Gegenstände, y sei die Zahl der Gegenstände, die „sein" Lehrling weniger als er fertigte.

Nach Absprache erhält der Facharbeiter x^2 Pfennige, sein Lehrling bekommt aber $(x-y)^2$ Pfennige, folglich muß gelten:

$$x^2-(x-y)^2=105$$

Daraus ergibt sich:

$$x=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{105}{y}+y\right)$$

Man überlege, daß x und y ganzzahlig und positiv sein müssen. Damit man für x positive ganze Zahlen erhält, muß y Teiler von 105 sein, d. h.

$$y=1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105.$$

Mit diesen Werten erhält man aus der Gleichung

$$x=53, 19, 13, 11, 11, 13, 19, 53$$

und für

$$x-y=52, 16, 8, 4, -4, -8, -16, -52.$$

Die letzten 4 Möglichkeiten scheiden aus, weil auch $x-y$ positiv sein muß. Also bleibt

	x		$x-y$	
(A)	53	(37)	52	(d)
(B)	19	(11)	16	(a)
(C)	13	(9)	8	(b)
(D)	11		4	(c)

Aus den Differenzen (37, 11, 9) ergibt sich, wieviel Gegenstände von wem (in Klammern daneben geschrieben) angefertigt wurden.

Für die Betreuung der Lehrlinge ergeben sich damit die Zuordnungen

$A \leftrightarrow d$, $B \leftrightarrow a$, $C \leftrightarrow b$, $D \leftrightarrow c$.

5 ▲ 590

Klasse	Betrag in M
5	41,50
6	44,00
7	50,00
8	42,75
9	43,00
10	44,00
	265,25

5 ▲ 591 Wir lösen die Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle.

Fall	$a\cdot b$	a	b	$d=2\cdot b$	$c=a-6$
1)	18	1	18	36	n. l.
2)	18	2	9	18	n. l.
3)	18	3	6	12	n. l.
4)	18	6	3	6	0
5)	18	9	2	4	3
6)	18	18	1	2	12

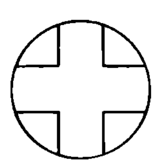
Wir erhalten also nun in den Fällen 4), 5) und 6) wahre Gleichheitsaussagen.

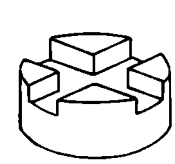
Lösungen zu alpha-heiter

Kleine Knobelei

4	×	1	−	3	=1
×		×		+	
2	×	3	−	5	=1
−		+		−	
2	×	4	−	6	=2
=6		=7		=2	

Von Oben wie?


Grundriß


Schrägbild

Rätsel um Otek

Archimedes (287? bis 212 v. u. Z.)
Einstein (1897 bis 1955)

Schwieriges Problem

Die Zahlen 30241, 34201, 41230 und 43210 auch 54321, 52341 usw. erfüllen die gestellten Bedingungen

Ein wenig Logik

Kreuzworträtsel

S E M E S R
I I O N H E
E N L H C N
R I X E E I
K L A S S E
E I L I K U
G T P N A L
E E H U L E
L R A S E R

1.

660	653	658
655	657	659
656	661	654

= **1971**

(Die Summe jeder Zeile, Spalte und Diagonale ergibt 1971.)

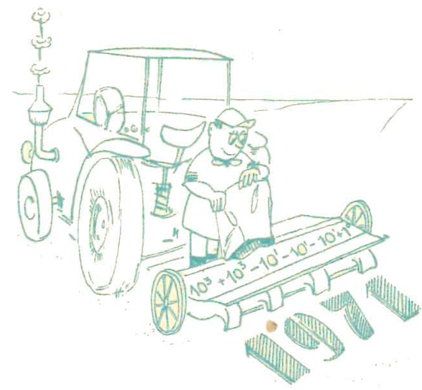
2. **1971** = MCMLXXI
(MC − M) : L − X : X = I (oder)
(MC − M) : L = X : X + I

3.
$$\begin{array}{r} 1+9+7+1 \\ +9+7+1+1 \\ +7+1+1+9 \\ +1+1+9+7 \\ +1+9+7+1 \\ \hline \mathbf{19+71} \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} 1+9+7+1 \\ +1\cdot 9+7+1 \\ +1+9\cdot 7-1 \\ \hline \mathbf{1\cdot 97+1} \end{array}$$

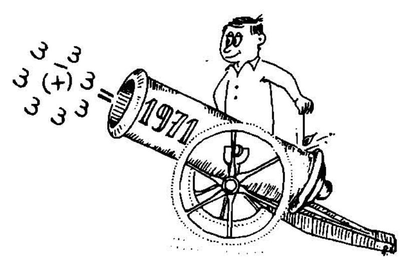
5.
$$\begin{array}{r} 1+9+7+1 \\ +1\cdot 9+7-1 \\ +1+9\cdot 7-1 \\ \hline \mathbf{1\cdot 97-1} \end{array}$$

6.
$$\begin{aligned} \mathbf{1971} &= 3^7-6^3 \\ &= 7^4-8^3+9^2+10^0 \\ &= 3^2+4^2+5^2+5^4+6^4 \\ &= 3^3+6^3+12^3 \\ &= 3^3(1^3+2^3+4^3) \end{aligned}$$



7.
$$\begin{aligned} \mathbf{1971} &= 2^{11}-2^6-2^3-2^2-2^0 \\ &= 3^7-3^5+3^3 \\ &= 4^5+4^5-4^3-4^2+4^1-4^0 \\ &= 44^2+44-(4+4)-4^0 \\ &= 5^4+5^4+5^4+5^3-5^2-5^1+5^0 \\ &= 10^3+10^3-10^1-10^1-10^1+10^0 \end{aligned}$$

(Gleiche Basiswerte)



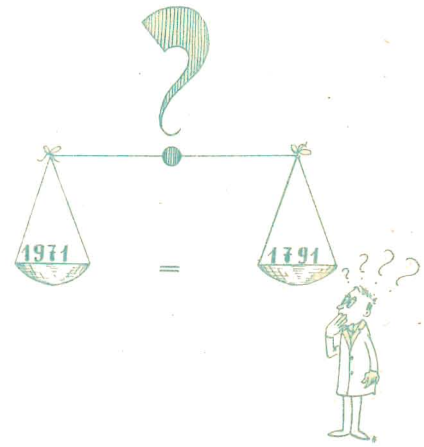
8.
$$\begin{aligned} \mathbf{1971} &= (2\cdot 22)^2+2\cdot 22-2\cdot 2^2-2^{2-2} \\ &= 333\,(3+3)-3^3 \\ &= 44\cdot 44+44:4+4! \\ &= 44\cdot 44+44-4:4-4\sqrt{4} \end{aligned}$$

(Gleiche Ziffern)

9.
$$\begin{aligned} \mathbf{1971} &= 12^3+(4\cdot 5+6-7+8)\cdot 9 \\ &= 987\cdot 6:(5+4)\cdot 3-2-1 \end{aligned}$$

(Ziffern von 1 bis 9, einmal steigend, einmal fallend)

10.
$$19+71=1+9\cdot 7+1+19+7-1$$
$$19-71=19-7-1-1+9-71$$



11. $1+97+1=1+7+91$

(1971, einmal vorwärts, einmal rückwärts)

12. **1971**
$$1^2+9^2+7^2+1^2=19\cdot 7-1$$
$$19+71=1+9+7+1+1\cdot 9\,(7+1)$$
$$1+971-19-71=1\cdot 9\cdot 7\cdot 1\cdot\sqrt{197-1}$$
$$\begin{aligned} &1+9+7+1+1\cdot 9\cdot 7\cdot 1 \\ &=(1+9)(7+1)-(1-9):(7+1) \end{aligned}$$
$$1^9+71=1!\cdot 9!:7!\cdot 1!$$
$$1^9+71+1^9\cdot 71=1\cdot 9\cdot 7\cdot 1+(1+9)(7+1)$$
$$\frac{1\cdot 9\cdot 7\cdot 1\cdot(1+9+7+1)}{1\cdot 9\cdot 7\cdot 1+(1+9+7+1)}=\sqrt{197-1}$$

Ing. H. Decker

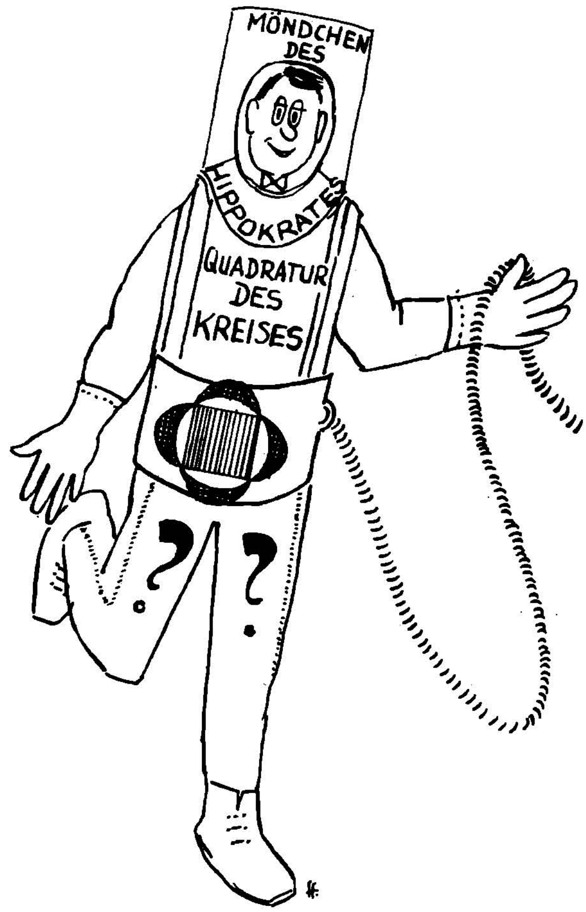
Mit einem interessanten Problem wollen wir das Jahr 1970 abschließen. Es wurde von Dipl.-Math. Victor Scharnitzky, Lehrstuhlleiter an der *Hochschule für Leichtindustrie* in Budapest (Koordinator der XII. IMO) für die *alpha*-Leser gestellt.

Man beweise, daß die Zahl
$222^n+202^n-192^n-172^n$
für alle geraden positiven ganzen Zahlen n durch **1970** teilbar ist.

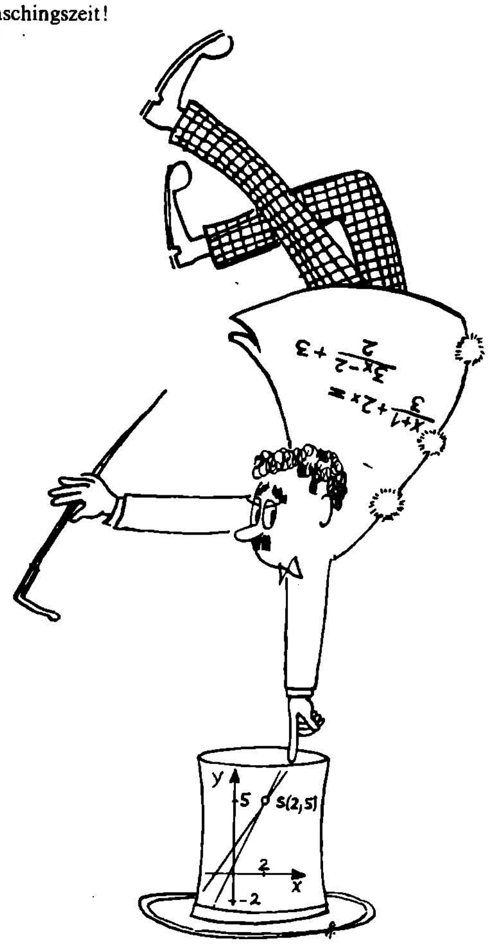
Die Redaktion alpha wünscht allen Lesern ein frohes und gesundes

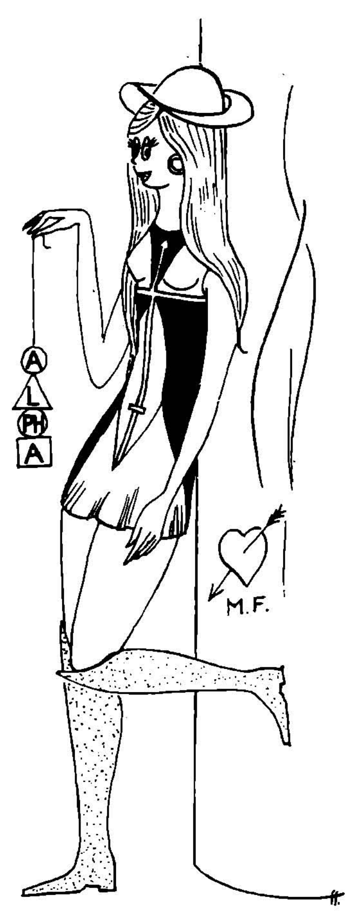
1971

MATHE-FASCHING



Barbara Mahr und *Lutz Quasdorf*,
Kl. 12, EOS Humboldt, Leipzig,
wünschen eine heitere Faschingszeit!





Übungsaufgaben, Klasse 9/12

9 ▲ 610 Es ist zu beweisen, daß die Zahl $2 \cdot 13^n + 5 \cdot 7^n$ für alle natürlichen Zahlen n bei Division durch 9 den gleichen Rest läßt. Ferner ist dieser Rest zu bestimmen.
Hinweis zur Lösung: Es empfiehlt sich, zunächst die Fälle $n=0$, $n=1$, $n=2$ zu behandeln und dann den Beweis allgemein zu führen. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

9 ▲ 611 Zwei Kreise k_1 und k_2, von denen k_1 einen kleineren Radius als k_2 hat, mögen einander so von außen in einem Punkt P berühren, daß die beiden gemeinsamen Tangenten, die nicht durch den Punkt P gehen, einen Winkel von 60° bilden. Es ist das Verhältnis $r_1 : r_2$ der Radien dieser Kreise zu ermitteln. *Ekkehard Kührt EOS „Friedrich Schiller", Zella-Mehlis, Kl. 10*

10/12 ▲ 615 Es ist zu beweisen, daß die Zahl lg 5 keine rationale Zahl ist.
Anleitung zur Lösung: Jede positive rationale Zahl läßt sich bekanntlich in der Form $\frac{p}{q}$ darstellen, wobei p und q einander teilerfremde, von Null verschiedene natürliche Zahlen sind. Beim Beweis geht man also davon aus, daß sich die Zahl lg 5 in dieser Form darstellen läßt, und zeigt, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt (vgl. den Beweis für die Irrationalität der Zahl $\sqrt{2}$).
Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden

Lösung der Aufgabe zur Axonometrie

Ein kleiner Dreh führt zum Ziel (alpha, 5/70, S. 99)