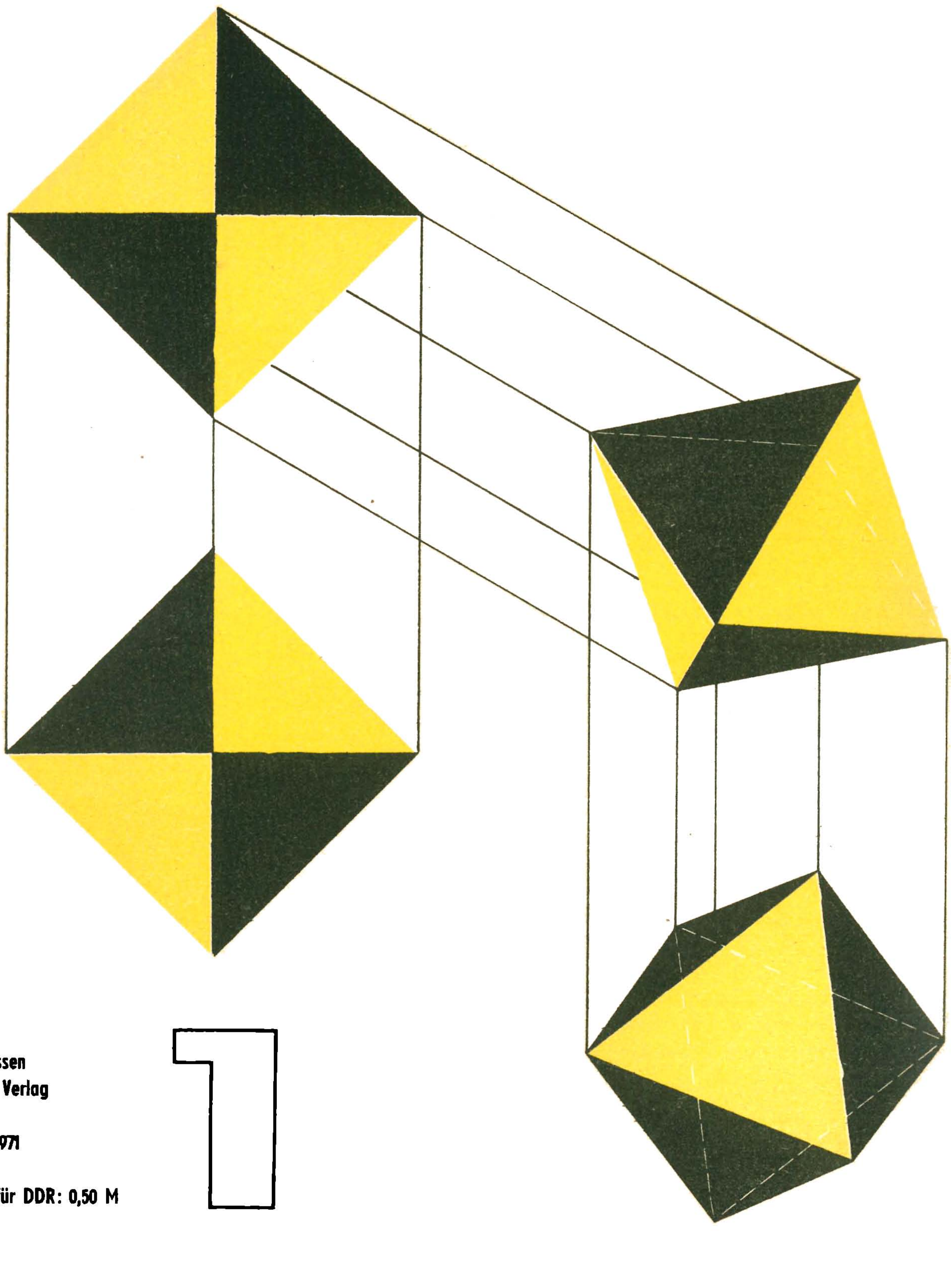
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
5. Jahrgang 1971
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

1

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import BmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Ch. Loff, Leipzig (S. 1); J. Lehmann, Leipzig (S. 13/14, S. 15, S. 12); R. Herrmann, Halle (Eigenfoto, S. 6); ADN (S. 11); Titelvignette: F. Fricke (S. 16); L. Klunker, Herzberg (S. 20)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 23. November 1970

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Dieses Heft wurde zu Ehren des *Internationalen Frauentages* 1971 gestaltet

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Der Weg eines Talents

Olga Alexandrowna Ladyschenskaja wurde am 7. März 1922 geboren. Sie erinnert sich gut an ihre Kindheit, an den Vater und an jene wertvollen Stunden, die er — ein großer Mathematiker — ihr und ihrer mathematischen Entwicklung widmete. Verliebt in die Mathematik, duldete der Vater bei anderen keine Gleichgültigkeit zu ihr und begeisterte sich, wenn er bei jemandem Interesse für diese Wissenschaft feststellte. So war er in der Schule, und so blieb er auch in der Familie. Zu Hause hörte die kleine Olga von allen am liebsten seine Erzählungen über die Mathematik. Die plastischen Erzählungen des Vaters vermittelten ihr ein Bild sowohl von der Romantik der Mathematik als auch von den wirklichen mathematischen Geheimnissen.

Diese Gespräche waren jedoch episodenhaft, und nur einmal gab es eine systematische Beschäftigung mit der Mathematik. Dieses eine Mal war jedoch durch seine Folgen so wichtig, daß man davon erzählen muß.

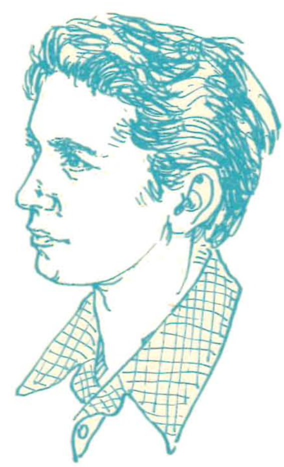
Der Vater beschloß, sich mit seinen älteren Töchtern (sie waren vier bzw. fünf Jahre älter als Olga) zu beschäftigen, weil die in der Schule eingeführte kollektive Lehrmethode (er selbst benutzte sie nicht, obwohl man ihn dafür gerügt hatte) zu einem traurigen Resultat führte: Die beiden von einem anderen Lehrer unterrichteten Töchter wußten nur wenig über die Mathematik, obwohl sie ganz gute Zensuren hatten. Gewöhnlich nahm er das Geometrie-Lehrbuch von Kiszlew (für Gymnasiasten) und ging es mit den Töchtern in den Sommerferien durch. Olga wurde „zur Gesellschaft" mitgenommen.

Der Vater unterrichtete folgendermaßen: Zunächst erzählte er einige Stunden hintereinander über das logische Denken im allgemeinen, über die deduktive und die induktive Methode, über die „Elemente" von Euklid, über die Griechen, die Araber, über die Zeit der Renaissance usw. Die nächsten Stunden wurden dazu verwendet, den Gegenstand der Geometrie zu bestimmen und ihr Grundschema von Definitionen und Sätzen aufzuzeichnen. Danach durften die Kinder selbst Sätze beweisen. Der Vater gab nur die Formulierungen. Ihnen blieb dann auch nichts weiter übrig, als die Sätze zu beweisen, sonst ärgerte sich der Vater sehr und begann ernsthaft zu glauben, daß seine Kinder besonders dumm seien. Aber auch ihnen schien es dann beschämend, den Beweis nicht selbst zu finden. Auf diese Weise ging man in zwei Monaten das ganze Lehrbuch von Kiszlew (Planimetrie und Stereometrie) durch.

Anfangs wandte sich der Vater zunächst an die älteste Tochter und verlangte eine Antwort, aber nach zwei Wochen begann Olga schon mit ihr zu wetteifern und fand oft als erste die richtige Lösung. Sie war damals acht Jahre alt und wurde gerade in die zweite Klasse versetzt.

Sie erinnerte sich natürlich nicht an alle Sätze und Beweise. Aber der Vater verlangte das auch gar nicht. Er erreichte etwas Wichtigeres: Er lehrte sie, logisch zu denken (sowohl in der Mathematik als auch im Leben) und die exakten Wissenschaften zu lieben.

Später lernte Olga viel aus den Arbeiten älterer Schüler, bei deren Korrektur sie dem Vater half. Als er nicht mehr lebte, gab sie zurückgebliebenen Schülern, auch höherer Klassen, sogar Förderunterricht.



Olga beschäftigte sich jedoch keineswegs nur mit Mathematik, sie las auch viel: Puschkin und Lermontow, Turgenjew und Tolstoi, Dostojewski und Tschechow, Tjutschew und Apuchtin, Wladimir Solowjew und Blok, Stendhal und Balzac. Sie hatte nicht wenige interessante Abhandlungen und polemische Artikel über die Entwicklung der russischen Kultur, Literatur und Malerei gelesen. Oft hatte sie Reproduktionen von Gemälden russischer und westeuropäischer Meister, berühmte Kathedralen und Skulpturen, die liebevoll in ihrem Album nachgezeichnet waren, betrachtet.

1939 hatte Olga die zehnte Klasse beendet. Es wurde Zeit, sich von Kologriew, dem Geburtsort, zu trennen und den ersten Schritt in das Leben zu tun. Auf den Rat des Vaters schickte sie ihre Unterlagen an die Leningrader Universität. Aber sie erhielt eine Absage: „Wegen der großen Zahl von Bewerbern mit ausgezeichneten Abgangszeugnissen müssen wir Bewer-

bern, die ihren Wohnsitz nicht in Leningrad haben, leider absagen."
Schließlich konnte sie ein Studium am Pädagogischen Institut aufnehmen. Sie erhielt eine Unterkunft und sogar ein Stipendium, auf das sie ganz besonders angewiesen war.
Das Interessanteste für sie waren von Anfang an die Analysisvorlesungen. Es las Dozent S. E. Ljapin nach dem gerade herausgekommenen Buch von Prof. G. M. Fichtenholz „Analysis I".
Solange der Lektor ein Theorem formulierte, war Zeit, selbst über den Beweis nachzudenken. Bald schon konnte Olga dem Lektor „vorsagen" und manchmal auch die Beweise an der Tafel vorführen. Aber mit der analytischen Geometrie klappte es nicht so richtig: Sie konnte den Satz hören, ihn beweisen; aber sie konnte ihn nicht noch aufschreiben, sie wurde vom Schlaf überwältigt. Es machten sich die schlaflosen Nächte im Studentenwohnheim bemerkbar, die sie mit der Lösung von schwierigen Aufgaben und dem Studium von mathematischen Büchern verbrachte, um zu verstehen, womit sich denn die Mathematiker beschäftigen.

Bald lag das erste Jahr am Institut hinter ihr. Für den Sommer wurde das dünne Büchlein von I. M. Winogradow „Zahlentheorie" mit den verzwickten Aufgaben nach jedem Kapitel vorgenommen. Diese mußte sie lösen, um im nächsten Jahr erfolgreich an einem Seminar zur Zahlentheorie teilnehmen zu können. Es wird vier Teilnehmer haben: einen Aspiranten, der sich auf die Zahlentheorie spezialisiert und außerdem Vorlesungen über analytische Geometrie hält, zwei sehr gute Mathematiker, die gerade das Studium beendeten, und Olga.
Im nächsten Jahr lasen zwei bekannte Professoren der Universität, B. A. Wenkow und G. M. Fichtenholz, für die Studenten des vierten Studienjahres die Vorlesungen über moderne Algebra und über die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. So etwas geschieht nicht in jedem Jahr. Wenn nun Olga diese Vorlesung besuchen würde? Eine gewisse Vorstellung über diese Gebiete ist vorhanden; sie müßte den Stoff verstehen. Aber wie steht es mit der Anweisung zum obligatorischen Besuch der festgelegten Vorlesung? Sie durfte doch nicht jede Woche eine Rüge in die Papiere bekommen. Zum Glück hatte der Dekan Verständnis für seine Assistentin. Er gestattete ihr das Fernbleiben von den obligatorischen Vorlesungen unter der Bedingung, daß sie dazu vorfristig die Prüfungen ablegt. Diese Bedingung wurde mit Bravour erfüllt. Außer einem erhöhten Stipendium erhielt sie eine Beurteilung von Fichtenholz und Natason, die ihr den Wechsel vom Pädagogischen Institut zur Universität ermöglichte.
Im Sommer kam der Krieg, und zu Ende war es mit all ihren Plänen.
Das Institut aber arbeitete weiter. Man lernte und schaufelte Schützengräben. Olga hatte die feste Absicht, in Leningrad zu bleiben und ihre Studien weiterzuführen. Sie konnte sich nicht vorstellen, daß der Krieg eine solche große Stadt zwei Jahre in seiner tödlichen Umklammerung halten könne. Nur der Zufall rettete sie vor dem Hungertod: Es war notwendig, sie kurzfristig zu operieren; aber für Zivilisten gab es in den Krankenhäusern keine Plätze mehr. Unter großen Schwierigkeiten gelang es ihr, mit der älteren Schwester aus dem belagerten Leningrad herauszukommen.

Wieder kam sie nach Kologriew und zur Schule, die sie vor kurzem gerade selbst absolviert hatte. Nur war jetzt Olga schon eine Lehrerin. Von Ansehen fast noch ein Kind, ging sie im Winter 1942 als 19jährige Lehrerin zu ihren fast gleichaltrigen Schülern der zehnten Klasse. Erinnerungen an die Kindheit und den Vater werden lebendig. Obwohl krank, gibt er sich seiner geliebten Sache hin. Die Tage widmet er den Schülern, und nachts treibt er Selbststudien. Es ist Mitternacht. Der Vater neigt sich über das Lehrbuch. Aber auch Olga schläft nicht. Sie möchte es zwar gerne, aber der Vater braucht ihre Nähe und den Gedankenaustausch mit ihr, auch über verschiedene Probleme aus der höheren Mathematik.

Für den Vater, einem Fernstudenten, waren diese nächtlichen Gespräche von besonderer Bedeutung, und nachdem ihn sein eigener „Professor" geprüft hatte, besaß er keine Angst mehr vor anderen Professoren. Wenn auch Olga damals mit der höheren Mathematik begann, diese aber nicht begriff, so erhielt sie doch über ihren Inhalt gewisse Vorstellungen. Das zahlte sich später aus, sowohl im Institut als auch jetzt in der Schule.

Zusammen mit ihrer Mutter und den beiden Schwestern litt Olga unter großen Entbehrungen. Es gab kein Heizmaterial, und das Brot reichte nicht. Aber nichts konnte ihren Willen und ihre Entschlossenheit brechen, sich ständig weiterzubilden. Sie machte sich mit einigen neuen Gebieten der Mathematik bekannt, zunächst mit solchen, die besonders für die Schule nötig waren.

Nun wurde Olga klar, daß sie auf die Moskauer Universität gelangen mußte. Dort waren die besten mathematischen Kräfte des Landes tätig. Aber nach Moskau zu gehen schien fast aussichtslos, denn noch tobte der Krieg. Nachdem sie im Herbst mit den Kindern im Kolchos gearbeitet hatte, durfte Olga im Winter 1943 endlich nach Moskau reisen. (Über ihr Studium in der Hauptstadt der Sowjetunion und ihren weiteren Lebenslauf werden wir in einem zweiten Beitrag berichten.)

J. Senkjewitsch

Eine Aufgabe von Nationalpreisträger Prof. Dr. rer. nat. habil.

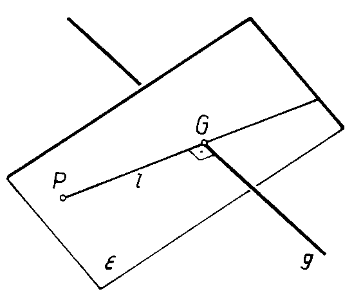
Käte Boll-Dornberger

em. Direktor des Forschungsbereichs Strukturforschung im Zentralinstitut für Physikalische Chemie der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

▲646 Welches geometrische Gebilde stellt die Menge aller Punkte im Raum dar, deren Abstände von zwei sich senkrecht kreuzenden Geraden g und h jeweils einander gleich sind?

Verschaffe dir eine anschauliche Vorstellung von diesem geometrischen Gebilde, indem du ebene Schnitte der folgenden Art legst:

1. Schnittebene α durch g senkrecht zu h
2. Schnittebene β durch h senkrecht zu g
3. Schar von Schnittebenen parallel α
4. Schar von Schnittebenen parallel β
5. eine zu g und h parallele Ebene γ, die das Gemeinlot von g und h halbiert
6. Schar von Schnittebenen parallel γ
7. Ebenenscharen, die die Geraden g und h unter Winkeln von 45° schneiden



Erklärungen:

Unter dem Abstand eines Punktes P von einer Geraden g versteht man die Länge des Lotes von P auf g. (Bild 1) Das Lot (PG) liegt in einer zu g senkrechten Ebene durch P.

Zwei Geraden, die sich nicht schneiden und nicht parallel zueinander sind, bezeichnet man als windschiefe oder sich kreuzende Geraden. Der Kreuzungswinkel zweier windschiefer Geraden ist gleich dem Schnittwinkel zweier hierzu paralleler sich schneidender Geraden. Bei zwei sich senkrecht kreuzenden Geraden schneiden sich entsprechende Parallelen unter einem rechten Winkel.

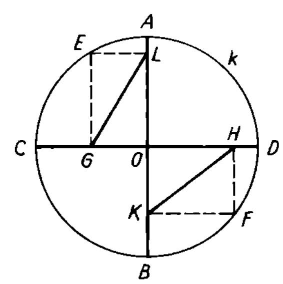
Unter dem Gemeinlot zweier sich kreuzender Geraden versteht man jene Gerade, die die beiden anderen senkrecht schneidet. Zu je zwei sich kreuzenden Geraden gibt es stets genau ein Gemeinlot.

Nichtalltägliche Aufgaben erfordern besondere Lösungsmethoden

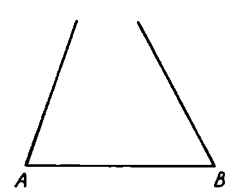
Hallo, liebe Mädchen und Jungen in der DDR!
Ich hatte mich bereits im letzten Jahr (*alpha* 4/69) mit einigen Aufgaben vorgestellt, und ich freue mich sehr, daß ich Euch in diesem Heft wiedertreffe.
Drei Aufgaben sind es diesmal, die ersten zwei geometrischer Natur. Sie können mit ganz verschiedenen Methoden gelöst werden. Denkt an Transformationen, geometrische Örter, Trigonometrie und analytische Geometrie. Die dritte Aufgabe appelliert an Euer Vorstellungsvermögen.
Je mehr Lösungswege Ihr für die Aufgaben 1 und 2 findet, an die vielleicht noch niemand gedacht hat, und je mehr allgemeine Lösungen Ihr für die dritte Aufgabe zusammenstellt, desto sicherer werdet Ihr in Zukunft gute Mathematiker.

Eure Dr. Nazla H. A. Khedre, Kairo, VAR

▲*Aufgabe 1:* Dem abgebildeten Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt 0 wurden zwei Durchmesser $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, die aufeinander senkrecht stehen, eingezeichnet. Es seien E und F zwei voneinander verschiedene Punkte der Peripherie des Kreises k. Die Geraden EL und FK verlaufen parallel zur Geraden CD und schneiden die Gerade AB in den Punkten L und K. Die Geraden EG und FH stehen senkrecht auf der Geraden CD und schneiden diese in den Punkten G und H. Es ist zu beweisen, daß $\overline{GL}=\overline{HK}$ gilt!



▲*Aufgabe 2:* Unsere Skizze stellt ein unvollständig gezeichnetes Dreieck ABC dar, das heißt, die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind nicht voll ausgezeichnet. Es sind die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC zu konstruieren, ohne zuvor den Schnittpunkt C der Geraden AC und BC zu bestimmen. Die Konstruktion ist zu begründen.



▲*Aufgabe 3:* Es ist anzugeben, auf welche Weise ein Würfel durch eine Ebene so geschnitten werden muß, daß als Schnittfigur a) ein Rechteck, b) ein Parallelogramm, c) ein Rhombus, d) ein Trapez, e) ein gleichschenkliges Dreieck, f) ein gleichseitiges Dreieck, g) ein Sechseck entsteht.

Die Mathematik ist schön

Péter Rózsa

Die folgenden Ausführungen sind einem Vortrag, den Frau Prof. Dr. Rózsa Péter am 15. Oktober 1963 an der Universität Rostock vor eingeladenen Lehrern und Schülern der erweiterten Oberschulen gehalten hat, entnommen. Er sollte besonders den Schülerinnen Mut machen, die Mathematik als Studienfach zu wählen. Dazu kann wohl niemand besser sprechen als eine Frau.

Frau Prof. Dr. Rózsa Péter ist eine der Frauen, die auf dem Gebiet der Mathematik große wissenschaftliche Erfolge erzielte. Sie wurde am 4. April 1970, dem 25. Jahrestag der Befreiung Ungarns vom Faschismus, mit dem Staatspreis ausgezeichnet. Der Chefredakteur von *alpha* überbrachte während der XII. IMO der einzigen ungarischen Frau, die Doktor der mathematischen Wissenschaften (1952) ist, Glückwünsche und hatte Gelegenheit zu einem freundschaftlichen Gedankenaustausch.

Rózsa Péter hat seit 1928 sehr enge Verbindungen zu den ungarischen Mittel- und Oberschulen, an denen sie auch bis 1948 unterrichtete. Von 1947 bis 1955 leitete sie den Lehrstuhl Mathematik an der Pädagogischen Hochschule in Budapest. Im Jahre 1955 wurde sie an die Eötvös Loránd Universität Budapest als Professor berufen.

Für ihre didaktischen und populärwissenschaftlichen Leistungen in der Mathematik erhielt sie 1953 den Beke-Preis. Das Buch „Das Spiel mit dem Unendlichen"*, in 20 Auflagen erschienen (davon vier in Ungarn), ist ein Beispiel, wie sie es versteht, Interesse für die Mathematik zu wecken und zu entwickeln, gleichzeitig aber die gemeinsamen Züge der Mathematik mit der Literatur, mit der Kunst spürbar zu machen. Im Jahre 1951 erhielt Rózsa Péter den Kossuth-Preis (ungarischer Nationalpreis) für ihre Monographie über die rekursiven Funktionen, (Die Theorie der sogenannten *rekursiven Funktionen* ist bis zum heutigen Tag ihr hauptsächliches Forschungsgebiet.) Für die in mehreren Sprachen erschienenen Ausgaben hat sie 1969 den Niveau-Preis der Ungarischen Akademie der Wissenschaften erhalten. Auf die Frage eines ungarischen Rundfunkreporters, ob dieser Themenkreis eigentlich auch einen praktischen Nutzen habe, antwortete sie:

„Ich muß Ihnen gestehen, daß ich während meiner Forschungsarbeiten nie an derartiges denke. Mein Themenkreis entspricht den inneren Notwendigkeiten der Mathematik, und ich hätte nicht einmal im Traum daran gedacht, daß man das auch in der Praxis zu irgend etwas gebrauchen kann. Eben darum liefert mein Forschungsgebiet ein frappantes Beispiel dafür, daß es auch gegen die praktische Nützlichkeit ein Vergehen ist, wenn die sogenannten ‚rein-mathematischen' Forschungen zurückgedrängt werden. Denn siehe: Aus den Werken ungarischer Mathematiker war mein Buch ‚Rekursive Funktionen' das *zweite*, das in der Sowjetunion herausgegeben wurde, und eben wegen seiner praktischen Bedeutung: Neuerdings ist es nämlich in der Theorie der Rechenmaschinen unentbehrlich geworden. Seitdem geben die Probleme im Zusammenhang mit den Rechenmaschinen auch unmittelbar Arbeit auf meinem Gebiet; unter anderem in der mathematischen Sprachwissenschaft, die durch Probleme der maschinellen Übersetzung in den Vordergrund getreten ist. Wenn wir aber schon über Nützlichkeit sprechen, dann noch etwas im allgemeinen über die Mathematik: Die gut unterrichtete Mathematik – und nicht gerade der unmittelbar praktisch anwendbare Stoff darin – entwickelt die Fertigkeit zur Wahrnehmung von Problemen, zu ihrer Ergreifung und zum Suchen der verschiedenen Arten ihrer Lösung. Und wir benötigen in unserer Welt eine Schar von Menschen, die die Probleme wahrnehmen und lösen können."

Nachfolgender Auszug aus dem Vortrag von Frau Prof. Dr. Rózsa Péter wurde der Zeitschrift „Mathematik in der Schule", Heft 2/64, entnommen:

Meine lieben Zuhörer!

Ich bin hier, um zu versuchen, meine Überzeugung weiterzugeben, daß die Mathematik schön ist. Als ich mein Studium begann, hatte ich noch viele Zweifel, ob ich der Mathematik würdig bin. Dann sagte mir ein Kollege das entscheidende Wort: *Nicht ich bin würdig, mich mit der Mathematik zu befassen, sondern die Mathematik ist würdig, daß man sich mit ihr befaßt.* An meiner eigenen Würde zweifle ich, trotz seitdem erhaltener Preise und Professur, oft noch heute, aber ich zweifle nie daran, daß ich nichts Besseres und Schöneres tun könnte, als Mathematik zu treiben.

Gewiß denken schon von Anfang einige: Wie kann man das trockene „Zweimalzwei" schön nennen? Mein Ziel ist zu zeigen, daß die Mathematik nicht trocken und kein „Zweimalzwei" ist, sondern sogar mit der Kunst viel Verwandtschaft hat.

Erstens ist es ein großer Irrtum, daß der Mathematiker hauptsächlich rechnet. Von meinen Schülern vom zehnten Lebensjahr bis zum ersten Jahrgang der Hochschule habe ich die mathematisch eingestellten mit folgender scherzhaften Frage herausgesucht: Wir haben zwei gleiche Gläser; in das eine gießen wir Wein, ins andere Wasser, und zwar bis zur selben Höhe (nicht ganz voll). Dann nehmen wir einen Löffel voll Wein aus dem ersten Glas, gießen das ins andere zum Wasser und vermischen es damit. Dann bringen wir von dieser Mischung einen vollen Löffel in den Wein des ersten Glases. Als Endergebnis ist so etwas Wein ins Wasser geraten und etwas Wasser in den Wein. Welches ist mehr: der reine Wein, der ins Wasser, oder das reine Wasser, das in den Wein gekommen ist?

Das Wesentliche ist hier nicht, ob man die richtige Antwort errät (es steckt hier eine kleine Falle, in die viele hineinfallen: Man denkt, ins Wasser ist ein voller Löffel Wein gelangt, in den Wein aber eine Mischung, also nicht ein voller Löffel reines Wasser), sondern nur darauf kommt es hier an, ob man die folgende Erklärung aufrichtig als beruhigend annimmt:

Es ist genausoviel Wein ins Wasser wie Wasser in den Wein geraten. Denn betrachten wir zu Beginn und zum Schluß z. B. das Weinglas, ohne Rücksicht darauf, was inzwischen geschehen ist. Die Flüssigkeit steht darin genausohoch zum Schluß wie zu Beginn. Der Unterschied ist nur, daß es etwas reinen Wein verloren hat (der jetzt im Wasserglas) und etwas reines Wasser gewonnen hat. Wäre sein Verlust größer oder kleiner als sein Gewinn, so müßte die Flüssigkeit in ihm tiefer oder höher stehen als zu Beginn. Also ist sein Verlust – der ins Wasser gekommene Wein – genausogroß wie sein Gewinn: das erhaltene Wasser.

Die, die weniger mathematisch denken, sagen wir die Physiker, sind von dieser logisch klaren Erklärung noch nicht beruhigt. Sie sind erst dann zufrieden, wenn man zu rechnen beginnt: Sind in einem vollen Löffel Mischung z. B. dreiviertel Teile Wasser und einviertel Teil Wein, dann bringen wir darin vom vollen Löffel Wein, der ins Wasser gekommen ist, einviertel Löffel wieder zurück. Indem also dreiviertel Löffel Wasser in den Wein gebracht werden, bleiben auch im Wasser nur dreiviertel Löffel Wein. Wie man sieht, ist für den Mathematiker nicht das Rechnen, sondern das klare Denken charakteristisch: die Fähigkeit, von unwesentlichen Dingen abzusehen.

Eine andere Aufgabe, in der schon gar keine Zahlen vorkommen, die nur eben die zur Lösung notwendige Abstraktion, die Fähigkeit, abzusehen von für die Frage unwesentlichen Dingen, verlangt und gerade das sie zu einer Aufgabe für mathematisch Denkende macht, lautet: Ein Zug fährt durch einen Tunnel. Der Rauch kommt durch ein offenes Fenster in ein Coupé herein, und die Nasen der drei darin Fahrenden werden rußig. Sie sehen einander an und lachen.

Jeder meint, daß gerade er einen glücklichen Platz genommen und so die Nase rein behalten hat. Wie kommt der Gescheiteste von den dreien darauf, daß auch seine Nase rußig ist? – wenn er sich nur auf folgende drei Annahmen stützen kann: 1. es ist gar nichts anderes zum Lachen da; 2. keiner der beiden anderen will aufhören zu lachen; 3. wenn jemand wüßte, daß er selber lächerlich ist, dann würde er nicht lachen. Die Lösung ist nicht sehr leicht, doch das Entscheidende ist wieder nicht, ob einer allein die Lösung findet, sondern, daß die nicht-mathematisch Denkenden sich nicht auf die gemachten Annahmen beschränken. Man hat mich oft mit solchen Lösungen geärgert: „Der Gescheiteste schaut in einen Spiegel." Oder „Der Gescheiteste meint: die Nasen der anderen sind rußig geworden, warum wäre ich eine Ausnahme." Die richtige Lösung kann ich am besten in erster Person erzählen; verzeihen Sie mir, daß ich mich selbst als Gescheiteste hinstelle. Die beiden anderen sollen z. B. Kurt und Hans heißen. Ich denke folgendes: Kurt hat Grund zum Lachen, er sieht ja die rußige Nase von Hans. Er sieht aber auch, daß Hans lacht. Warum kommt er davon nicht darauf, daß auch seine Nase rußig ist? Sonst sieht ja nach seiner Meinung Hans gar nichts Lächerliches – ausgenommen, falls auch meine Nase rußig ist. Das muß aber der Fall sein, da Hans lacht und Kurt nicht – daraus entnehmend, daß auch seine Nase rußig ist – zu lachen aufhört.

Daß man sich zu einmal festgelegten Annahmen hält, außer denen nichts in den Schlußfolgerungen verwendet werden darf, das ist eben das Wesentliche in dem axiomatischen Aufbau der Mathematik. Ein solch sorgfältiger Aufbau wurde besonders dann wichtig, als in der sogenannten „naiven" Mathematik Widersprüche auftauchen. Darauf werde ich noch zurückkommen. Hier möchte ich nur das hervorheben, daß durch die Axiome nie alle Eigenschaften der behandelten Gegenstände erfaßt werden, sondern nur einige Eigenschaften, und so kann es geschehen, daß auch ganz verschiedene Gegenstände, die nur einige Eigenschaften gemeinsam haben, denselben Axiomen genügen. Man sagt dann, daß es zum betrachteten Axiomensystem verschiedene „Modelle" gibt.*

Die Abstraktion spielt eine wesentliche Rolle in der ganzen Mathematik. Schon unsere natürlichen Zahlen sind durch Abstraktion entstanden. Man kennt primitive Völker, die andere Zahlen zur Abzählung der runden und zur Abzählung der flachen Gegenstände benutzen usw.; sie haben insgesamt z. B. sieben solche Zahlenfolgen, so daß sie, um bis zehn zählen zu können – weiter können sie dann auch nicht –, siebzig Zahlworte schaffen mußten. Mit der Zeit fällt dann die Bedeutung von einer dieser Zahlenfolgen ab, und die so farblos gewordenen Zahlworte werden zu Zahlen. Zum Beispiel waren die Zahlungsmittel eines Stammes flache Muscheln, und anfänglich hat man dort die flachen Gegenstände (in ihrer Sprache) mit folgenden Worten abgezählt: „einmuschel, zweimuschel usw." Mit der Zeit hat sich dann die Muschelbedeutung ganz verwischt, so daß heute „Einmuschel" einfach „eins", „Zweimuschel" einfach „zwei" usw. bedeutet.

Aber auch jedermann kann es beobachten, wie sich der Zahlbegriff im kleinen Kind ausbildet, das sich vor unseren Augen zu einem Kulturmenschen entwickelt. Es braucht eine lange Zeit, bis vor ihm das Gemeinschaftliche in „Zweiaugen", „Zweibeine", „Zweinüsse", nämlich ihre Zahl, klar wird. Das graue Zeichen 2 ist nur ein Symbol der vielen lebendigen Zweien.

Man könnte darauf sagen: Ja, man ist tatsächlich durch lebendige, farbenreiche Dinge zum abstrakten Zahlbegriff gekommen, aber die Mathematik befaßt sich im weiteren schon mit diesem farblosen Zahlenbegriff. Doch was die Mathematik mit der einen Hand wegnimmt, das erstattet sie reichlich mit der anderen Hand: Sie färbt das farblos gewordene Bild mit unerwarteten, neuen Zügen. Sechs Äpfel, sechs Kaninchen sind z. B. viel interessanter als die aus ihnen abstrahierte Sechs, mit der man zählt. Aber welch einen persönlichen, interessanten Zug erhält die Sechs, wenn man entdeckt, daß sie die erste vollkommene Zahl ist! Diesen Begriff kennt vielleicht nicht jeder: Ein echter Teiler einer Zahl ist eine kleinere Zahl, die in ihr restlos aufgeht; und eine Zahl heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Zum Beispiel sind sämtliche echte Teiler von 6 die Zahlen 1, 2 und 3, und tatsächlich ist

$$1+2+3=6.$$

Die Freude des Entdeckens, die vielleicht die größte menschliche Freude ist, kann kein anderer Lehrgegenstand in solchem Maße darbieten wie die Mathematik...

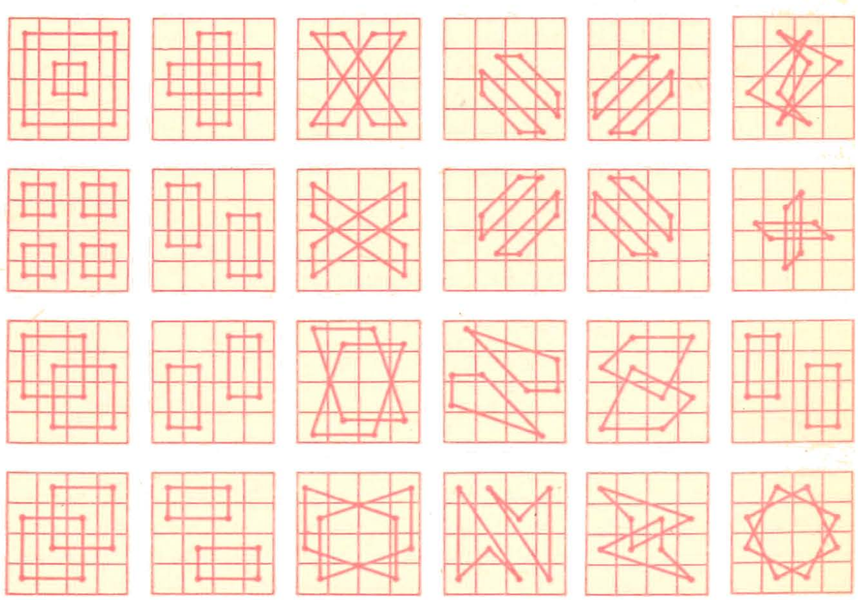
... Auch dadurch werden Entdeckungen hervorgerufen, daß in den mathematischen Schöpfungen immer noch mehr inbegriffen ist, als man von vornherein eingeplant hatte. Das ist ein gemeinsamer Zug mit den literarischen Werken ...

Das Spielerische ist ein gemeinsamer Zug von Mathematik und Kunst. Vielleicht kennen einige z. B. den Kupferstich *Melancholie* des Malers Albrecht Dürer, auf dem das folgende magische Quadrat zu sehen ist:

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

Die angedeutete Jahreszahl 1514 ist das Jahr des Entstehens des Bildes. Magisch heißt das Quadrat, da man die gleiche Summe, nämlich 34 erhält, wenn man die Zahlen je einer Zeile oder Spalte oder Diagonale addiert. Aber dieses Quadrat Dürers ist viel magischer. Bildet man z. B. die Summe jener vier Zahlen, die in den Ecken des Quadrats stehen, so erhält man ebenfalls 34. Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man die Summe der vier Zahlen bildet, die in den Ecken je eines der in den Quadraten eingezeichneten Vierecken stehen. Das sollte jeder nachprüfen...

R. Péter



* R. Péter, *Das Spiel mit dem Unendlichen*, 4. Auflage 1966, 278 S. mit zahlr. Abb., Format 14,2 cm mal 20 cm, Leinen, 9,80 M. BGT B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.

Relationen Teil 2

R Herrmann

4. Beziehungen als Menge von geordneten Paaren

Wir wissen nun schon, daß eine Beziehung auf gewisse Elementepaare mit Elementen einer entsprechenden Grundmenge zutrifft und daß diese *Elementepaare* geordnete Paare sind.
Wenn du nun zu einer gegebenen Beziehung R Beispiele suchen sollst, dann wählst du solche Elemente a und b der Grundmenge aus, für die „a R b“ oder „a steht in der Beziehung R mit b“ eine richtige Aussage ergibt.
Beispiel: „a R b“ bedeute „a ist ein Teiler von b“ (oder „$a \mid b$“). Grundmenge: Menge aller natürlichen Zahlen.
Nun würdet ihr etwa solche Beispiele angeben: $2|4$, $3|3$, $5|625$, $1|2$ usw., aber nie solche: $2|3$, $3|5$, $5|27$, ..., denn „2 teilt 3“ ist eine falsche Aussage, da keine natürliche Zahl x existiert, so daß $2 \cdot x = 3$ gilt. Dasselbe trifft für die anderen Beispiele zu.
Inzwischen weißt du schon viel von Beziehungen, und trotzdem haben wir noch nicht genau formuliert, was eine Beziehung eigentlich ist. Wenn du jemandem erklären solltest, was z. B. die „Kleiner-als-Beziehung“ ist, so würdest du vielleicht sagen, daß
$0<1$, $1<2$, $2<3$, $3<4$, $4<5$, ...
gilt. Die Pünktchen bedeuten dabei, daß man weitere Beispiele hinzufügen müßte, da die „Kleiner-als-Beziehung“ noch auf viele andere geordnete Paare natürlicher Zahlen zutrifft. Da bist du auf dem richtigen Wege. Du gibst nämlich geordnete Paare $[a;b]$ an (also $[0;1]$, $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$, $[4;5]$, ...), die zur „Kleiner-als-Beziehung“ gehören, d. h. für die die Aussage „$a<b$“ richtig ist. Diese geordneten Paare bilden eine Menge. Du könntest also auch sagen:
Die „Kleiner-als-Beziehung“ trifft auf folgende Menge von geordneten Paaren zu:
$[0;1]$, $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$, $[4;5]$, ..., denn es gilt $0<1$, $1<2$, $2<3$, $3<4$, $4<5$, ...
Nun mußt du aber aufpassen, daß man diese Paare nicht mit einer anderen Beziehung verwechselt. Man muß nämlich aus der Menge der Paare eindeutig erkennen, daß es sich um die „Kleiner-als-Beziehung“ und um keine andere handelt. Dieser Irrtum könnte bei den oben angegebenen Paaren aber entstehen, denn die Paare $[0;1]$, $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$, $[4;5]$, ... gehören auch zur „Vorgänger-Beziehung“.[3] Die Aussagen „0 ist Vorgänger von 1“, „1 ist Vorgänger von 2“, usw. sind nämlich wahre Aussagen. Wir wollen deswegen genauer sagen:
Merke dir: Eine Beziehung R ist die Menge *aller* geordneten Paare $[a;b]$ mit Elementen a und b aus einer Grundmenge G, für die die Aussage „a steht in der Beziehung R mit b“ richtig ist.
Wolltest du deine Aufgabe richtig erfüllen, müßtest du z. B. auch die Paare $[0;2]$, $[0;3]$, $[0;4]$, ... und $[1;3]$, $[1;4]$, ..., $[2;4]$, $[2;5]$, ... usw. hinzufügen. Insgesamt sind es unendlich viele Paare natürlicher Zahlen, die zur „Kleiner-als-Beziehung“ gehören.
Um alle Paare wirklich aufschreiben zu können, wollen wir uns zunächst auf eine endliche Grundmenge beschränken. Wir bezeichnen sie im folgenden mit G. In unserem Beispiel sei G die Menge aller natürlichen Zahlen von 0 bis 5.

$$G=\{0,1,2,3,4,5\}$$

Die „Kleiner-als-Beziehung“ trifft dann gerade auf folgende geordnete Paare zu:

[0;1]	[0;2]	[0;3]	[0;4]	[0;5]
	[1;2]	[1;3]	[1;4]	[1;5]
		[2;3]	[2;4]	[2;5]
			[3;4]	[3;5]
				[4;5]

denn es gilt:

$0<1$,	$0<2$,	$0<3$,	$0<4$,	$0<5$
	$1<2$,	$1<3$,	$1<4$,	$1<5$
		$2<3$,	$2<4$,	$2<5$
			$3<4$,	$3<5$
				$4<5$

Die Paare sind systematisch in Zeilen und Spalten angeordnet, damit wir sofort überblicken können, ob auch kein Paar fehlt.

[3] Gemeint ist hier stets der unmittelbare Vorgänger.

Aufgaben:

▪ 4 ▪ Gegeben sei die Beziehung R_1: „ist unmittelbarer Vorgänger von“. Die Grundmenge sei $G_1=\{0,1,2,3,4,5\}$. Gesucht sind alle Paare, auf die die Beziehung R_1 zutrifft. Einige Paare sind: $[0;1]$, denn 0 ist unmittelbarer Vorgänger von 1.
$[1;2]$, denn 1 ist unmittelbarer Vorgänger von 2.
Vervollständige die Menge der Paare! Beachte die angegebene Grundmenge!

▪ 5 ▪ „a R_2 b“ bedeute „a ist größer als b“. Gesucht sind alle Paare $[a;b]$, auf die R_2 zutrifft, d. h. für die gilt „$a>b$“.
Vervollständige die Menge der angegebenen Paare! Wähle a und b dabei aus der Grundmenge $G_2=\{0,1,2,3,4,5\}$!
$[1;0]$ $1>0$
$[2;0]$ $[2;1]$ $2>0$, $2>1$
$[3;0]$ ..... denn $3>0$, ...
....

▪ 6 ▪ „a R_3 b“ bedeute „a ist ein Teiler von b“. Die Grundmenge G_3 sei die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10, also $G_3=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.
Schreibe alle zu R_3 gehörigen geordneten Paare $[a;b]$ auf, wobei a und b jeweils aus G_3 stammen.
Hinweis: Schreibe erst alle betreffenden Paare auf, die mit 1 beginnen, dann die mit 2 beginnen usw., also:
$[1;1]$, $[1;2]$.... denn $1|1$, $1|2$, ...
$[2;2]$, $[2;4]$.... denn $2|2$, $2|4$, ... usw.

▪ 7 ▪ „a R_4 b“ bedeute „$a+3=b$“.
$G_4=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
Einige zu R_4 gehörige Paare sind:
$[0;3]$, denn $0+3=3$
$[1;4]$, denn $1+3=4$
Ergänze die fehlenden Paare!
Während du in den Aufgaben 4 bis 7 zu einer gegebenen Beziehung alle Paare gesucht hast, auf die die Beziehung bezüglich einer vorgegebenen Grundmenge zutraf, sollst du in der folgenden Aufgabe einen umgekehrten Weg gehen. Jetzt ist eine Beziehung durch eine Menge von geordneten Paaren und die Grundmenge gegeben. Du sollst herausfinden, welche bekannte mathematische Beziehung dadurch festgelegt wird.

▪ 8 ▪ R_5 ist eine Beziehung, die bezüglich $G_5=\{0,1,2,3,4,5\}$ gerade auf folgende Paare zutrifft:
$[5;4]$, $[4;3]$, $[3;2]$, $[2;1]$, $[1;0]$.
Was für eine Beziehung ist mit R_5 gemeint?
Schreibe die Lösung wie folgt auf:
„a R_5 b“ bedeutet „a .... b“
Hinweis: Sieh dir noch einmal R_1 (Aufgabe 4) an!

R. Herrmann

IV. Internationale Physikolympiade

(5. bis 14. Juli 1970, Moskau)

Inge Reimann, einziges Mädchen der IV. Internationalen Physikolympiade, berichtet für *alpha*:

Als Mitglied der Delegation der DDR habe ich im Sommer 1970 an der IV. Internationalen Physikolympiade in Moskau teilgenommen. Um eine Mannschaft für diese Olympiade zu stellen, wurde zunächst in allen Spezialschulen eine Arbeit geschrieben. Nach den Ergebnissen richtete sich die Auswahl einiger Schüler, die zu einem Physiklehrgang nach Güstrow delegiert wurden. Dort haben wir unser Wissen in verschiedenen Bereichen der Physik erweitert sowie vertieft und es beim Lösen von theoretischen und experimentellen Aufgaben angewendet. Am Ende dieses sehr arbeitsreichen Lehrganges wurden von 16 Teilnehmern 6 als Mitglieder der Delegation der DDR für die Internationale Physikolympiade benannt. Selbstverständlich habe ich nicht erst in Güstrow angefangen, mich mit Physik zu beschäftigen. Seit der 7. Klasse besuchte ich die Spezialschule des *VEB Carl Zeiss Jena*, eine Schule mit erweitertem Mathematik- und Physikunterricht. Dort habe ich am Mathematik- und in den letzten Jahren auch am Physikzirkel teilgenommen. Viel gelernt habe ich auch bei dem Lehrgang, der ein Jahr vorher zur Vorbereitung der II. Internationalen Physikolympiade durchgeführt wurde.

Am 5. Juli 1970 sind wir dann für 10 Tage nach Moskau geflogen. An der Olympiade nahmen jeweils 6 Schüler aus acht Ländern teil. Für die Klausur waren zwei Tage vorgesehen. Am ersten Tag hatten wir theoretische Probleme zu lösen, am zweiten wurde uns eine experimentelle Aufgabe gestellt. Da die Leistungsvergleiche am 4. und 5. Tage unseres Moskauer Aufenthaltes stattfanden, hatten wir davor und danach Gelegenheit, die Stadt und unsere Gastgeber kennenzulernen. Besonders herzlich war die Gastfreundschaft, der wir überall begegnet sind. Alle, mit denen wir zusammenkamen, wollten uns den Aufenthalt so angenehm und interessant wie möglich machen.

Von Moskau sahen wir sehr viel, wenn auch natürlich nicht alles. Wir waren auf dem Fernsehturm in Ostankino, im Gorkipark, in der Tretjakowgalerie und in der Lomonossow-Universität, haben die Allunionsausstellung besucht und den Kreml besichtigt, das Tschaikowski-Museum und vieles andere mehr. Besonders beeindruckend war der Anblick Lenins im Mausoleum auf dem berühmten Roten Platz. Leider war die Zeit für diese wunderbare Stadt viel zu kurz, und der Abschied ist uns sehr schwer gefallen. Ich glaube, keiner von uns wird diese 10 Tage vergessen können. So hatten sich unsere Anstrengungen also schon deswegen gelohnt.

Jetzt studiere ich seit dem 1. September; nicht Physik, sondern Mathematik in Jena. Es sind, wie wahrscheinlich überall, hier in meinem Studienjahr wesentlich weniger weibliche als männliche Studenten, wenn der Unterschied auch nicht so groß ist wie zur Olympiade in Moskau, wo ich als einziges Mädchen teilgenommen habe. Ich glaube, es gibt viele Mädchen, die sich an die Mathematik und Physik nicht so recht herantrauen. Vielleicht sollten sie mehr Mut zeigen und unter Beweis stellen, daß nicht nur Männer logisch denken können.

Theoretische Aufgaben
(Arbeitszeit: 5 Stunden)

1. Auf einer glatten (reibungslosen) horizontalen Fläche kann sich ein Quader mit der Masse $M = 1$ kg bewegen. Auf der oberen horizontalen Fläche des Quaders kann ein Schlitten mit Reibung gleiten. Der Vorderrand des Schlittens befindet sich in einer Entfernung von $l = 50$ cm vom Vorderrand des Quaders im Moment der Freisetzung des Schlittens. Der Gleitreibungskoeffizient beträgt $\mu = 0{,}02$, die Schlittenmasse mit Motor beträgt $m = 100$ g. Auf dem Schlitten ist ein Motor aufgestellt, der auf einer Welle einen Faden mit konstanter

Bild 1

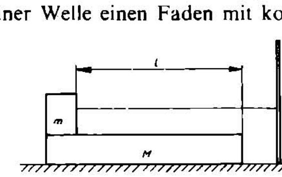
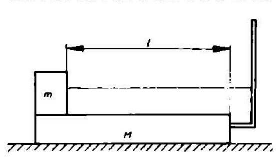


Bild 2



Geschwindigkeit $\gamma_0 = 10$ cm $\cdot$ s^{-1} aufwickelt. Das zweite Ende des Fadens wird im ersten Fall (Bild 1) an einen weit genug entfernten Pflock angebunden, der auf der Unterlage befestigt ist, und im zweiten Fall (Bild 2) an einen Pflock, der an dem Quader M befestigt ist.

Man hält den Quader M fest und gibt dem Schlitten die Möglichkeit, sich mit γ_0 zu bewegen. Danach läßt man auch den Quader frei. Bestimmen Sie für beide Fälle die Bewegungsart und Geschwindigkeit des Quaders und des Schlittens nach dem Freilassen! Bestimmen Sie für beide Fälle die Zeit, in der der Schlitten den Vorderrand des Quaders erreicht!

2. Die Elementarzelle des Kristallgitters des Steinsalzes (NaCl) stelle einen Würfel dar; die Länge der Würfelkante beträgt $a = 5{,}6$ Å (1 Å $= 10^{-8}$ cm). In Bild 3 sind die Natriumatome und Chloratome in einer Elementarzelle bezeichnet. Das gesamte Kristallgitter des Steinsalzes stellt eine Wiederholung solcher Elementarzellen dar. Das Atomgewicht das Natriums beträgt 23 und das des Chlors 35,5. Die Dichte des Steinsalzes ist $\varrho = 2{,}22\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$.

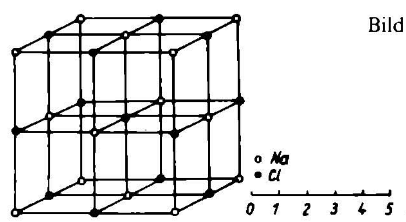


Bild 3

Berechnen Sie die absolute Masse des Wasserstoffatoms, und erklären Sie den Lösungsweg!

3. In dieser Aufgabe ist das Potential einer Hohlkugel zu bestimmen (d. Red.).

4. In einem Teleskop wird ein sphärischer Hohlspiegel mit einem Krümmungsradius von 2 m verwendet. Im Hauptbrennpunkt des Spiegels befindet sich ein Strahlungsempfänger in Form einer runden Scheibe. Die Scheibe liegt senkrecht zur optischen Achse des Teleskops.

Welche Größe muß der Empfänger haben, damit er die gesamte Strahlung empfängt, die vom Spiegel reflektiert wird, wenn dessen Durchmesser 50 cm beträgt?

Um wieviel Mal verringert sich die vom Empfänger aufgenommene Strahlung, wenn sich seine Ausmaße auf ein Achtel verringern?

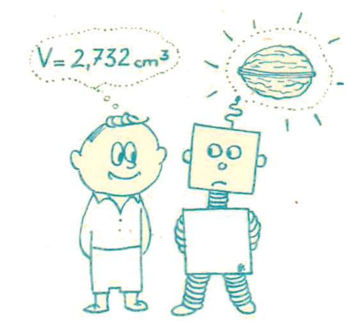
Anmerkungen: 1. Bei der Rechnung kann man für kleine x die Näherung

$\sqrt{(1-x^2)} \approx \left(1-\frac{x^2}{2}\right)$ verwenden.

2. Die Beugung bleibt unberücksichtigt.

(Zu dieser Aufgabe veröffentlicht *alpha* die Lösung in 3/71, weiteres Informationsmaterial siehe „Physik in der Schule“ 10/70 und 12/70, d. Red.).

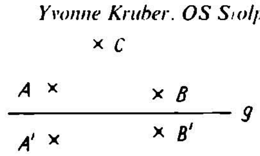
Wer löst mit?
alpha – Wettbewerb



Letzter Einsendetermin 24. April 1971

5▲621 Fünf Kinder spielen mit Murmeln. Klaus besitzt die meisten Murmeln. Karin hat vier Murmeln mehr als Ute. Horst hat drei weniger als Ute. Sabine besitzt 8 Murmeln mehr als Horst, aber eine weniger als Klaus. Wieviel Murmeln besitzt jedes dieser Kinder, wenn alle zusammen 97 Murmeln besitzen?

5▲622 Die Abbildung stellt drei Originalpunkte A, B, C und zwei Bildpunkte A', B' dar, die durch Spiegelung von A und B an der Geraden g entstanden sind. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Lineal und Bleistift den Bildpunkt C', der symmetrisch zu C bezüglich der Geraden g liegt! Gib eine Konstruktionsbeschreibung an! *Yvonne Kruber, OS Stolpen Kl. 8b*



W 5 ■ 623 Nach der Apfelernte im Schulgarten erhielt jeder der daran beteiligten Schüler aus einem mit Äpfeln gefüllten Korb je vier Äpfel vom Lehrer; es verblieben danach noch 44 Äpfel in diesem Korb. Hätte jeder dieser Schüler aber sechs Äpfel erhalten dann wären im Korb nur noch zwölf Äpfel verblieben. Wieviel Schüler beteiligten sich an der Apfelernte? Wieviel Äpfel enthielt der Korb? *P.*

W 5 ■ 624 An einer Vorstellung im „Theater der Freundschaft" in Berlin nahmen 29 Mädchen und 115 Jungen einer Landschule teil. Die Anreise erfolgte mit drei Autobussen; in jedem Bus saßen gleich viel Schüler. Im ersten Bus war die Anzahl der Jungen 15 mal so groß wie die der Mädchen. Im zweiten Bus saßen 20 Jungen mehr als Mädchen. Wieviel Jungen und Mädchen reisten mit jedem der drei Autobusse? *Yvonne Kruber, Stolpen, Kl. 8b*

* 5 * 625 Doris, Elke und Helga kaufen zusammen für 15,– M Briefmarken ein, und zwar 20 Briefmarken der Sorte A, doppelt soviel von der Sorte B und dreimal soviel von der Sorte C. Von diesen Briefmarken erhielt Doris die Hälfte der Sorte B und acht Stück der Sorte A; sie hatte dafür 1,70 M mehr zu bezahlen als Elke. Elke erwarb die Hälfte der Briefmarken der Sorte C und fünf Stück der Sorte A und zahlte 3,50 M. Helga kaufte die verbliebenen Briefmarken. Welche Werte besaßen die drei Briefmarkensorten? *StR Hans-Joachim Kerber, Neustrelitz*

6▲626 Herr Lehmann bestellte im Centrum-Versandhaus Leipzig drei Artikel zu paarweise verschiedenen Preisen. Jeder dieser Artikel kostete mehr als 10,– M. Der Preis jedes Artikels war durch einen vollen Markbetrag angegeben, und zwar jeweils durch eine gerade Zahl. Für jeden der drei Mietbehälter, in denen das Versandhaus dem Kunden die Artikel zustellte, wurde die gleiche Leihgebühr erhoben. Herr Lehmann hatte für die bestellte Ware einschließlich der Leihgebühren für die Mietbehälter den Betrag von 49,10 M zu überweisen. Die Transportkosten gingen zu Lasten des Versandhauses. Es sind die Einzelpreise der drei bestellten Artikel und die Leihgebühr für einen Mietbehälter zu bestimmen. *P.*

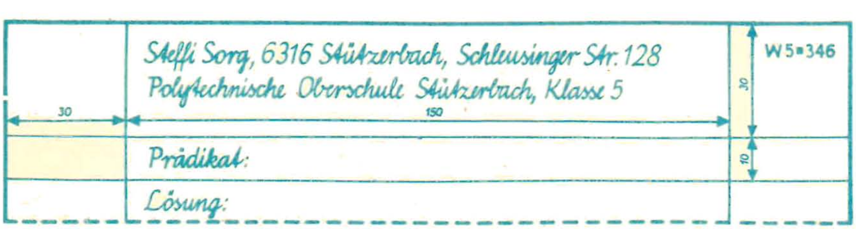
6▲627 Jens sammelt Briefmarken. Eines Tages stellt er fest, daß er bereits insgesamt 837 Briefmarken besitzt, und zwar dreimal soviel rumänische wie kubanische und viermal soviel sowjetische wie rumänische. An polnischen Briefmarken hat er 9 Marken mehr gesammelt als kubanische und rumänische zusammengenommen. Addiert er die Anzahlen der kubanischen, rumänischen, sowjetischen und polnischen Briefmarken, so erhält er die Anzahl der aus der DDR gesammelten Briefmarken. An ungarischen Briefmarken besitzt Jens 9 Stück weniger als die Hälfte der Anzahl der sowjetischen Marken.
Wieviel Briefmarken jedes dieser Länder hat Jens bereits gesammelt? *Angela Brandt, Kl. 6, 9014 Karl-Marx-Stadt*

W 6 ■ 628 Hans fordert seinen Freund Uwe auf: „Merke dir eine von Null verschiedene natürliche Zahl, multipliziere sie mit 5, addiere zu diesem Produkt 2! Multipliziere die so erhaltene Summe mit 4 und addiere zu diesem neuen Produkt 3! Die nun erhaltene Summe ist noch mit 5 zu multiplizieren. Nenne mir das Endergebnis deiner Rechnung, und ich sage dir, welche Zahl du dir gemerkt hast." Begründe, warum und wie Hans die von Uwe gedachte Zahl ermitteln konnte! *Herbert Biastoch, PH Dresden*

W 6 ■ 629 In ein Stück Flachstahl von $l = 310$ mm Länge sind fünf gleich große Löcher mit einem Durchmesser von $d = 35$ mm zu bohren. Berechne den Abstand x der Bohrlöcher untereinander, wenn das erste Bohrloch $a = 10{,}2$ mm vom linken Rand des Flachstahls entfernt beginnt, das letzte Bohrloch $b = 22$ mm vom rechten Rand entfernt enden soll und je zwei benachbarte Bohrlöcher den gleichen Abstand haben sollen! (Veranschauliche dir den Sachverhalt an Hand einer Skizze!) *W. Unze, Sondersch. f. Körperbehinderte „Dr. Georg Sacke", Leipzig*

* 6 * 630 Drei befreundete Lehrer, und zwar ein Mathematiklehrer, ein Sportlehrer und ein Geschichtslehrer, sitzen auf einer Konferenz in Berlin zusammen. Ihre Familiennamen sind Müller, Palm und Schulz. Ihre Vornamen lauten Otto, Klaus und Kurt. Ihre Wohnorte sind Anklam, Demmin und Neustrelitz. Herr Müller erzählt dem Sportlehrer, daß er den Mathematiklehrer in Anklam besucht habe. „Das weiß ich schon, Klaus", erwiderte Herr Palm, „Kurt erzählte mir davon, daß er Besuch aus Demmin gehabt habe." Ordne jedem Familiennamen den zugehörigen Vornamen, Wohnort und Lehrfach zu! *StR Hans-Joachim Kerber, Neustrelitz*

7▲631 Ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit den parallelen Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, von denen $\overline{AB}$ länger als $\overline{CD}$ ist, werde durch die Diagonale $\overline{BD}$ in zwei Dreiecke zerlegt, von denen das eine rechtwinklig und das andere gleichschenklig ist. Wie groß sind die Innenwinkel dieses Trapezes, und in welchem Verhältnis stehen seine vier Seiten zueinander? *T.*

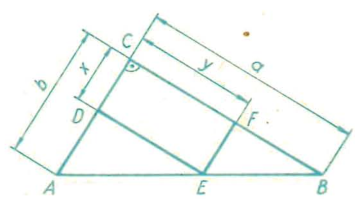


Achtung! Nur Lösungen zu W-Aufgaben oder *-Aufgaben einsenden! Jede Lösung auf ein Blatt für sich! Lösungskopf (siehe links) sauber ausfüllen! Postleitzahl beim Absender nicht vergessen! Lösungen rechtzeitig einsenden!

7▲632 Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$, dessen Innenwinkel $\sphericalangle CAB$ genau 60° beträgt! Fälle von C das Lot $\overline{CD}$ auf AB, danach von D die Lote $\overline{DE}$ und $\overline{DF}$ auf AC und BC sowie von E das Lot $\overline{EG}$ und von F das Lot $\overline{FH}$ auf die Gerade AB! Weise nach, daß der Weg von H nach B die gleiche Länge besitzt wie der Weg von H über A nach E!

StR Hans-Joachim Kerber, Neustrelitz

W 7 ■ 633 Einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Katheten a und b ist ein Rechteck $CDEF$ mit den Seiten x und y in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise einbeschrieben. Zeige, daß a, b, x und y der Gleichung $ax+by=ab$ genügen! *T.*



W 7 ■ 634 Bei einer Mathematik-Olympiade wurden drei erste Preise vergeben. Auf die Frage nach den Vornamen der drei Schüler, die einen ersten Preis erhielten, wurden folgende sieben Antworten gegeben:

a) Christiane, Udo, Steffen
b) Evelin, Horst, Udo
c) Gerald, Martina, Bernd
d) Steffen, Jörg, Udo
e) Gerald, Jörg, Bernd
f) Evelin, Martina, Christiane
g) Christiane, Evelin, Horst.

Es ist bekannt, daß in genau einer Antwort alle drei Vornamen richtig sind, in genau einer Antwort genau ein Vorname, in genau zwei Antworten genau zwei Vornamen, in genau drei Antworten alle drei Vornamen nicht zutreffen.

Ermittle die Vornamen der drei Schüler, die einen ersten Preis erhielten.

Yvonne Kruber, OS Stolpen, Kl. 8b

* 7 * 635 Sind in einem Sehnenviereck die Diagonalen gleich lang, so ist es ein gleichschenkliges Trapez. *T.*

8▲636 Es ist zu beweisen, daß es kein geordnetes Paar (a, b) natürlicher Zahlen gibt, so daß die Gleichung

$$\frac{b}{4}\left(a+\frac{1}{a-3}+3\right)=\frac{9}{b(a-3)} \qquad (1)$$

erfüllt ist und daß es genau ein geordnetes Paar (a, b) natürlicher Zahlen gibt, so daß die Gleichung

$$\frac{b}{4}\left(a+\frac{1}{a+3}-3\right)=\frac{9}{b(a+3)} \qquad (2)$$

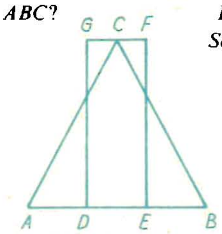
erfüllt ist. *K.*

W 8 ■ 637 Bei den Europa-Leichtathletik-Meisterschaften der Männer in Stockholm im August 1970 erhielt die Mannschaft der DDR als beste Mannschaft aller teilnehmenden Länder den Europa-Silber-Pokal. Sie erhielt bei 20 Disziplinen insgesamt 102 Punkte. Dabei wurden in jeder Disziplin für einen 1. Platz 7 Punkte, für einen 2. Platz 6 Punkte, für einen 3. Platz 5 Punkte, für einen 4. Platz 4 Punkte, für einen 5. Platz 3 Punkte, für einen 6. Platz 2 Punkte und für einen 7. Platz 1 Punkt vergeben. Es ist zu ermitteln, wieviel 1. Plätze, wieviel 2. Plätze usw. unsere Mannschaft in Stockholm erkämpfte.

Dabei sei noch als bekannt vorausgesetzt, daß unsere Mannschaft mehr 1. Plätze als 2. Plätze, ebensoviel 4. Plätze wie 2. Plätze, mehr 4. Plätze als 5. Plätze, mehr 5. Plätze als 3. Plätze, mehr 3. Plätze als 7. Plätze und keinen 6. Platz erhielt. *L.*

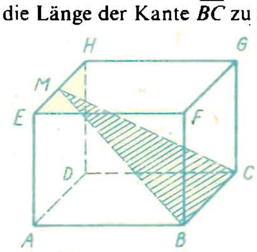
W 8 ■ 638 Die Basis $\overline{AB}$ des gleichschenkligen Dreiecks ABC sei durch die Punkte D und E in drei gleich lange Teilstrecken geteilt. $DEFG$ sei ein Rechteck, auf dessen Seite $\overline{FG}$ die Spitze C des gleichschenkligen Dreiecks ABC liegt (vgl. die Abb.). Wie verhält sich der Flächeninhalt des Rechtecks $DEFG$ zu dem Flächeninhalt des Dreiecks ABC?

Herwig Gratias, Sömmerda Kl. 9



* 8 * 639 Es sei $ABCDEFGH$ ein Quader, dessen Kante $\overline{AB}$ die Länge 4 cm und dessen Kante $\overline{AE}$ die Länge 3 cm hat (vgl. die Abb.). M sei der Mittelpunkt der Kante $\overline{EH}$. Ferner sei das Dreieck MBC rechtwinklig.

Es ist die Länge der Kante $\overline{BC}$ zu berechnen. *T.*



W 9 ■ 640 Drei Freunde, deren Vornamen Rolf, Kurt bzw. Werner und deren Nachnamen Zabel, Wagner bzw. Vogt sind, besitzen je ein Wochenendhaus. Diese Häuser liegen nebeneinander, sie seien der Reihe nach als das linke, das mittlere und das rechte Haus bezeichnet. Sie sind blau, rot bzw. gelb angestrichen.

An jedem Wochenende treffen sich die drei Freunde mit ihren Familien in einem der Häuser zu einer kleinen Feier. Dabei wurde vereinbart, daß jeder Gastgeber stets nur ein und dasselbe Getränk anbietet, und zwar Bier oder Wein oder Kaffee.

Heute haben sich die Freunde wieder getroffen. Dabei ist folgendes bekannt:

(1) Zabel und Rolf sind heute Gäste in dem gelben Haus.

(2) Der Gastgeber heißt nicht Kurt; sein Haus liegt nicht neben dem Haus von Wagner, der ein anderes Haus besitzt.

(3) In dem rechten Haus wird stets Bier angeboten; Kurt bietet seinen Gästen nur alkoholfreie Getränke an.

(4) Das mittlere Haus ist nicht rot angestrichen.

(5) Rolf bietet seinen Gästen stets Wein an.

Wie heißt der heutige Gastgeber? Welches Haus besitzt er? Was trinken seine Gäste heute? Welche Farben haben die Häuser in denen heute nicht gefeiert wird?

Bemerkung: Die Reihenfolgen der Angaben der Vornamen, Nachnamen, Farben und Getränke sind willkürlich gewählt und haben keine Beziehung zu dem Ergebnis.

Mathematikfachl. Rainer Rösel, Teterow

W 9 ■ 641 Ein Fernsprechteilnehmer in einem Ortsnetz mit mehr als 10000 Hauptanschlüssen zahlt für seinen Fernsprechanschluß monatlich eine Grundgebühr (einschließlich der üblichen Zusatzeinrichtung) von 9,60 M und außerdem für jedes Ortsgespräche 0,15 M. Würde dieser Fernsprechteilnehmer von einer öffentlichen Sprechstelle aus telefonieren, so hätte er für jedes Gespräch 0,20 M zu bezahlen.

Wieviel Ortsgespräche muß der Fernsprechteilnehmer mindestens monatlich führen, damit der Gesamtpreis für diese Gespräche einschließlich der Grundgebühr geringer als der Gesamtpreis der Gespräche von einer öffentlichen Sprechstelle aus ist. *K.*

* 9 * 642 Es seien x und y beliebige positive reelle Zahlen, für die

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \qquad (1)$$

gilt. Es ist zu beweisen, daß dann stets die Ungleichung

$$x+y\geqq 4 \text{ erfüllt ist.} \qquad (2)$$

Ferner sind die Bedingungen anzugeben, unter denen in (2) das Gleichheitszeichen gilt.

A. Möbius, Kl. 11, Univ. Halle

W 10/12 ■ 643 Füllt man in ein leeres trichterförmiges Gefäß, das die Form eines geraden Kreiskegels mit unten liegender Spitze hat, 1 l Wasser, so steigt der Wasserspiegel in dem Gefäß auf 10 cm Höhe.

a) Wie hoch steigt der Wasserspiegel, wenn man nur $\frac{1}{2}$ l Wasser einfüllt?

b) Wieviel Liter Wasser befinden sich in dem Gefäß, wenn der Wasserspiegel 5 cm hoch ist? *Sektion Mathematik, TU Dresden*

W 10/12 ■ 644 Es sind alle positiven reellen Zahlen x anzugeben, so daß die Ungleichung

$$\lg x-1<\lg x^p-p^2 \qquad (1)$$

für keine von 1 verschiedene reelle Zahl p erfüllt ist. *K.*

* 10/12 * 645 Es sind alle Lösungen des Gleichungssystems

$$x_1-x_2=x_3,$$
$$x_2-x_3=x_4, \quad \ldots \quad x_{n-1}-x_n=x_1,$$
$$x_n-x_1=x_2,$$

wobei n eine natürliche Zahl mit $n\geqq 3$ ist, im Bereich der reellen Zahlen zu ermitteln.

Reinhard Wobst, Dresden, 12. Kl.

Berufsbild: Vermessungsfacharbeiter und Kartographiefacharbeiter

Der Beruf im Rahmen der Volkswirtschaft

In der Deutschen Demokratischen Republik arbeiten wir an der Vollendung des Aufbaus des Sozialismus. Äußerer Ausdruck dafür ist unter anderem eine rege Bautätigkeit in Stadt und Land. Zur Durchführung aller Baumaßnahmen sind Vermessungsarbeiten für die Plan- bzw. Kartenherstellung und die Übertragung der Projekte in die Örtlichkeit (Absteckungen) nötig. Dabei denken wir an die Industriegiganten Leuna II und das Eisenhüttenkombinat Ost, an die Wärmekraftwerke in der Lausitz, die Talsperren im Harz und im Erzgebirge, den Überseehafen in Rostock, die Wohnstätten Hoyerswerda und Halle-Neustadt, die Erdölleitung Schwedt-Leuna, die im Wiederaufbau befindlichen Städte Berlin, Dresden und Neubrandenburg, die LPG-Bauten und Meliorationsmaßnahmen der sozialistischen Landwirtschaft, an den Straßen- bzw. Autobahnbau, an die Errichtung von Fernsehtürmen u. a. m. Unser großes friedliches Aufbauwerk durch ständige Einsatzbereitschaft gegen jede Aggressionstätigkeit zu schützen ist Aufgabe unserer Nationalen Volksarmee, zu deren moderner Ausrüstung genaue Karten des gesamten Gebietes unserer Deutschen Demokratischen Republik gehören. Sicher seid ihr selbst schon im Schulunterricht, beim Wandern oder während eines Geländespieles mit Karten in Berührung gekommen. Solche Karten und Pläne entstehen durch Vermessungsarbeiten. Ingenieure und Facharbeiter fahren von zentralen Dienststellen mit ihrem Meßkraftwagen hinaus ins Gelände, wo sie mit modernen Winkel- und Streckenmeßgeräten alle zur Aufnahme nötigen Objekte und Punkte nach Lage und Höhe einmessen. Um sich über größere Entfernungen hinweg verständigen zu können, werden auch Sprechfunkgeräte verwendet.

Die Berechnung und Auswertung der Messungsunterlagen erfolgt dann im Büro. Dabei werden moderne Geräte eingesetzt. Durch die exakte Kartierung der Messungsergebnisse und einer sauberen Tuschezeichnung entsteht ein Plan oder eine Karte.

Mit diesem Beitrag wollen wir die Ausbildungsstufe *Vermessungsfacharbeiter* und *Kartographiefacharbeiter* kennenlernen.

Die Bewerber müssen den Abschluß der 10. Klasse besitzen, gute Leistungen in Mathematik, den naturwissenschaftlichen Fächern und im Technischen Zeichnen vorweisen. Sie müssen außerdem solche Charaktereigenschaften wie Ordnungsliebe, Gewissenhaftigkeit und Verantwortungsbewußtsein entwickeln und als bewußte Staatsbürger der DDR auftreten.

Vermessungsfacharbeiter

Im Rahmen des Vermessungswesens hat der Vermessungsfacharbeiter an der Erfüllung folgender Aufgaben (als Mitarbeiter eines Diplom-Ingenieurs oder Ingenieurs im Kollektiv eines Meßtrupps) hohen Anteil:

Er arbeitet im Außen- und Innendienst mit ▪ bei der Schaffung und Erhaltung von Lage- und Höhenfestpunkten einschließlich deren Sicherung ▪ bei Vermessungsarbeiten zur Herstellung topographischer Karten und deren laufenden Nachträge, die sich aus Veränderungen in der Örtlichkeit ergeben ▪ bei der Anfertigung von Lage- und Höhenplänen für die Bau-, Land- und Forstwirtschaft, Wasser- und Energieversorgung sowie für das Verkehrswesen ▪ bei Vermessungsarbeiten zur Dokumentation von Rechtsverhältnissen an Grund und Boden ▪ bei speziellen Vermessungsarbeiten für Wissenschaft und Forschung.

Der Vermessungsfacharbeiter soll körperlich gesund und widerstandsfähig sein. Er soll normale Atmungs- und Kreislauforgane, ein gutes Gehör- und Sehvermögen besitzen sowie über die Fähigkeit verfügen, sich über längere Zeit konzentriert und aufmerksam zu verhalten.

Lehrzeit 2 Jahre; Qualifikationsmöglichkeit: Fachschulreife

Lehrzeit 3 Jahre in Klassen der Berufsausbildung mit Abitur;

Qualifikationsmöglichkeit: Hochschulreife

Dem Lehrling werden für die örtlichen Vermessungsarbeiten Kenntnisse in der Bedienung der Instrumente und über die Führung der Messungsurschriften bei instrumentellen Arbeiten wie bei der einfachen Lage- und Höhenmessung vermittelt. Zu den häuslichen Arbeiten gehören Berechnungen zur Bestimmung von Punkten nach Lage und Höhe sowie das Ermitteln von Flächen und Erdmassen. Neben der praktischen Ausbildung werden Berufstheorie, Staatsbürgerkunde und Sport vermittelt. (Bei der Ausbildung mit Abitur wird außerdem in den allgemeinbildenden Fächern unterrichtet.) Der Einsatz nach erfolgtem Berufsabschluß erfolgt u. a. in der Geodäsie, Topographie, Photogrammetrie, im Ingenieurvermessungswesen, Eisenbahnvermessung, VEB Geologische Forschung und Erkundung.

Kartographiefacharbeiter

Der Kartographiefacharbeiter wirkt innerhalb der Produktionsbereiche an den kartographischen und reproduktionstechnischen Arbeiten zur Herstellung und Laufendhaltung topographischer, geographischer und thematischer Karten verantwortlich mit. Er übt eine vorwiegend sitzende Tätigkeit aus. Er soll eine gute Sehschärfe und Farbtüchtigkeit beider Augen haben.

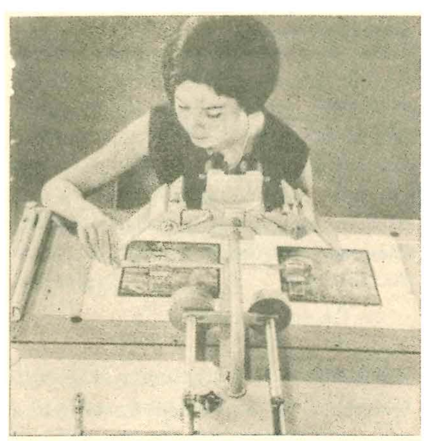
Die Ausbildung erfolgt im kartographischen Zeichnen, Gravieren und Klebemontagearbeiten sowie in der Gestaltung topographischer und thematischer Karten. Zur Ausbildung gehört auch das Erlernen von Wartung und Pflege der Zeichen-, Gravier- und Montagegeräte. Nach Prüfungsabschluß erfolgt der Einsatz wie beim Vermessungsfacharbeiter sowie in kartographischen Betrieben und Verlagen. Wer mehr über die Berufsausbildung von Vermessungs- und Kartographiefacharbeitern erfahren möchte, der wende sich an eine der Ausbildungsstätten:

▪ VEB Topographischer Dienst Dresden, Betriebsberufsschule (ohne und mit Abitur), 8047 Dresden, Altlockwitz 2

▪ VEB Ingenieur-Vermessungswesen Groß-Berlin, Betriebsberufsschule (ohne Abitur), 1603 Eichwalde, Tschaikowskistr. 10

▪ VEB Topographischer Dienst Schwerin, Betriebsberufsschule (ohne Abitur), 27 Schwerin, Karl-Marx-Str. 15

▪ VEB Topographischer Dienst Erfurt, Betriebsberufsschule (ohne Abitur), 58 Gotha, Schloßberg 1



Kartographiefacharbeiterin bei der Auswertung eines Luftbildpaares mit einem einfachen Stereoauswertgerät

Wir spielen mit optimaler Strategie

1 Wir wollen zunächst ohne Beweis einen Satz der Spieltheorie und die Definition der optimalen Strategien kennenlernen

In der Formulierung der Spielregeln des folgenden Spieles, an dem wir uns zunächst orientieren wollen, kommt der Begriff „Gewinn" vor. Darunter verstehen wir folgendes:

Definition 1: Ein Spieler beendet eine Partie mit dem Gewinn $+s$, wobei s eine natürliche Zahl ist bedeutet, daß er für diese Partie s Pluspunkte erhält. Ein Spieler beendet eine Partie mit dem Gewinn $-s$, wobei s wiederum eine natürliche Zahl ist, bedeutet, daß er für diese Partie s Punkte abgezogen erhält bzw. daß er s Minuspunkte erhält.

Die Spielregeln unseres ersten Spieles sind:

Spiel I:

1': Zwei Spieler A und B spielen mit Knöpfen. – Der Spieler A eröffnet die Partie, indem er n Knöpfe auf den Spieltisch legt. Dabei sind zur Spieleröffnung nur solche Knopfzahlen (Positionen) zulässig, daß gemäß der folgenden Spielregeln mindestens ein Zug ausgeführt werden kann. –

Die Spieler ziehen abwechselnd, wobei der Spieler B den ersten Zug ausführt. Solange die Partie nicht beendet ist, besteht Zugzwang. – Erhält am Partieende der eine Spieler den Gewinn g zugesprochen, so erhält sein Gegner den Gewinn $-g$ zugesprochen.

2': Ein Zug besteht im Wegnehmen von 3 oder 4 Knöpfen vom Tisch.

3': Die Partie ist beendet, sobald weniger als drei Knöpfe auf dem Tisch liegen. Der Spieler, nach dessen letztem Zug noch entweder 0, 1 oder 2 Knöpfe auf dem Tisch liegen, erhält in der angegebenen Reihenfolge entweder $+2$, 0 oder -1 als Gewinn zugesprochen.

Der jeweilige Stand bei einer Partie dieses Spieles und der folgenden Spiele wird vollständig beschrieben durch die Anzahl m der jeweils noch auf dem Tisch liegenden Knöpfe und den Namen des Spielers, der den letzten Zug ausführte. Diese Anzahlen m nennt man die *Positionen* dieser Spiele. Ein Spieler kann seine Spielweise bereits vor dem Spielen einer Partie, etwa auf Grund gesammelter Spielerfahrungen, dadurch festlegen, daß er für jede Position m (Knopfzahl m) angibt, auf welche Position er ziehen will und mit welcher Position er bei Partiebeginn eröffnen will. Er legt also fest, wieviel Knöpfe er bei jeder Position wegnehmen will. Eine jede derartig fixierte Spielweise, ob vorteilhaft oder unvorteilhaft, wird als *Strategie* bezeichnet. Eine jede Strategie läßt sich zumindest teilweise tabellarisch niederschreiben.

Ein Experte hat auf Grund langer Spielerfahrung die folgenden Strategien als besonders zweckmäßig für das Spiel I erkannt:

Eröffnungspositionen: 7; 14; 21; ...

Von Position ...	wird gezogen auf Position ...	Von Position ...	wird gezogen auf Position ...	Von Position ...	wird gezogen auf Position ...
0	—	9	6	18	14
1	—	10	7	19	15
2	—	11	7	20	16
3	0	12	8	21	17; 18
4	0	13	9		
5	1	14	10; 11		
6	2	15	12		
7	3; 4	16	13		
8	5	17	14		

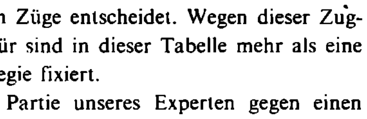
Ein Strich in der 2. Spalte dieser Tabelle bedeutet, daß nicht mehr gezogen werden kann, da das Spiel bereits beendet ist. Das Angeben mehrerer Zahlen in einem Feld der 2. Spalte bedeutet, daß der Experte sich hier von Fall zu Fall für einen der angegebenen Züge entscheidet. Wegen dieser Zugwillkür sind in dieser Tabelle mehr als eine Strategie fixiert.

Eine Partie unseres Experten gegen einen Anfänger sei aufgezeichnet:

$$19 \Rightarrow 15 \rightarrow 11 \Rightarrow 7 \rightarrow 4 \Rightarrow 0$$

Hier sind die Züge des Anfängers durch Pfeile und die des Experten, der natürlich eine seiner Strategien anwendet, durch Doppelpfeile gekennzeichnet. Da er am Partieende auf die Position 0 zieht, erzielt er den Gewinn $+2$ und sein Gegner, der Anfänger, damit gleichzeitig den Gewinn -2.

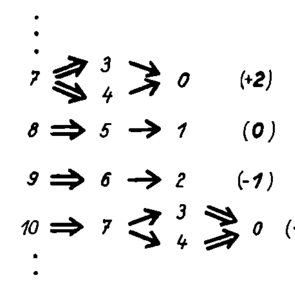
Kann unser Experte bei jeder Strategie des Anfängers, der die Partie mit der Position 19 eröffnet, den Gewinn $+2$ mit seinen Strategien erzwingen? Die Antwort werden wir am folgenden Schema ablesen, in dem alle Spiele dargestellt sind, bei denen sich der Experte stets seiner Strategien bedient und von seinem Gegner, der die Partien mit der Position 19 eröffnet, jeweils alle möglichen Züge in Betracht gezogen werden:



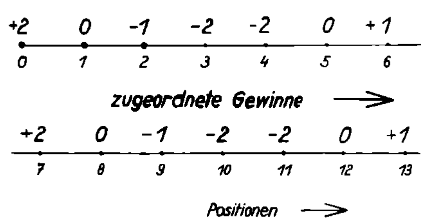
Zusätzlich zu den oben getroffenen Festsetzungen sind hier alle Züge, die gemäß der Strategien des Experten ausgeführt werden, stark markiert worden. Weiterhin ist in Klammern hinter jeder Endspielposition der Gewinn fixiert worden, den der Anfänger bei der jeweiligen Partie erzielt. In dieser Darstellung sind insgesamt 4 Partien zusammengefaßt. Die Antwort auf die gestellte Frage lautet: „Nein. Der eine Partie mit der Position 19 eröffnende Anfänger, der gegen den Experten spielt, erzielt dann den größtmöglichen Gewinn, wenn er sich ebenfalls der Strategien des Experten bedient."

Weitere vom Leser selbst zu betrachtende Beispiele lassen den folgenden Satz als wahr vermuten: *Der die Partie eröffnende Anfänger, der gegen unseren Experten spielt, erzielt bei jeder Eröffnungsposition dann den maximal möglichen Gewinn, wenn er sich ebenfalls der Strategie des Experten bedient.*

Zu einer Reihe von Eröffnungspositionen bestimmen wir nunmehr diesen maximal möglichen Gewinn des die Partie eröffnenden Anfängers, der gegen den Experten spielt:



Durch die Vorschrift, daß alle Züge nach den Strategien des Experten auszuführen sind, wird jeder Eröffnungsposition einer der Gewinne des Spieles zugeordnet. In naheliegender Weise ordnen wir zusätzlich noch den Endpositionen 0, 1 und 2 die Gewinne $+2$, 0 und -1 zu. Das auf diese Weise zu erzielende Ergebnis veranschaulichen wir und am Zahlenstrahl:



Nun soll mit dieser Zuordnung von Positionen und Gewinnen gearbeitet werden: Von der Position 9 mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{-1}$ kann laut Spielregeln nur auf die Positionen 5 und 6 mit den zugeordneten Gewinnen $\underline{0}$ und $\underline{+1}$ und von der Position 10 mit zugeordnetem Gewinn $\underline{-2}$ nur auf die Positionen 6 und 7 mit den zugeordneten Gewinnen $+1$ und $+2$ gezogen werden. Diese und weitere Beispiele lassen den folgenden Satz als wahr vermuten:

Satz 1: Den Positionen lassen sich die Gewinne eines Spieles so zuordnen, daß gilt:

a) Jeder Endposition ist der Gewinn zugeordnet, den der Spieler laut Spielregeln erhält, der mit seinem letzten Zug am Partieende auf diese Position zieht.

b) Von einer Position mit dem Gewinn $\underline{g}$, die keine Endposition ist, kann stets auf eine Position mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{-g}$ gezogen werden.
c) Einer beliebigen Position, auf die von einer Position mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{g}$ gezogen werden kann, ist ein Gewinn $\underline{g_*}$ zugeordnet, für den gilt $\underline{g_*} \leqq \underline{-g}$.
Mit der hergestellten Zuordnung zwischen Positionen und Gewinnen erscheinen auch die Strategien unseres Experten in neuem Licht: Laut Tabelle zieht der Experte von der Position 9 mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{-1}$ auf die Position 6 mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{+1}$ und von der Position 7 mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{+2}$ auf die Positionen 3 und 4 mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{-2}$. Offenbar sind bei den Zügen unseres Experten stets die zugeordneten Gewinne der beiden durch einen Zug verknüpften Positionen einander entgegengesetzt gleich. Weiterhin wählt unser Experte zur Spieleröffnung offenbar nur Positionen, denen der Gewinn $\underline{+2}$ zugeordnet ist. Diese Strategien unseres Experten wollen wir ab jetzt *optimale Strategien* nennen.
Definition 2: Ist für ein Spiel eine dem Satz 1 genügende Zuordnung von Positionen und Gewinnen hergestellt, so heißt mit optimaler Strategie spielen:
a) Von einer Position mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{g}$, die keine Endposition ist, wird auf eine Position mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{-g}$ gezogen.
b) Zur Eröffnung des Spieles werden Positionen gewählt, deren zugeordneter Gewinn der maximal mögliche Gewinn des Spieles ist. Hier sei noch vermerkt, daß gemäß Satz 1 die unter a) geforderte Zugmöglichkeit stets besteht.
In unserem nächsten Beitrag (2/71) werden wir erkennen, daß der Name optimale Strategie für die durch Definition 2 bestimmten Strategien berechtigt ist.

W. Träger

Taugen Mädchen für die Mathematik?

Sechs Mädchen waren unter den 112 Teilnehmern der XII. Internationalen Mathematikolympiade (Ungarische VR, 1970). Eine Bestätigung dafür, daß sich Mädchen in der Mathematik doch nicht behaupten? *Junge Welt* und *alpha* stellten den sechs jeweils fünf Fragen, die wir nachfolgend aufführen. Lest ihre Antworten und entscheidet selbst!

Unsere Fragen

1. Frage:
Da es nun einmal so wenig Mädchen gibt, die sich für Mathematik begeistern, wie kommt ein Mädchen dazu?

2. Frage:
Wenn du nicht gerade Mathematikaufgaben löst, was tust du dann?

3. Frage:
Wenn eine Aufgabe sehr schwierig ist, wie verhältst du dich?

4. Frage:
Hast du schon feste Vorstellungen von deinem zukünftigen Beruf?

5. Frage:
Sehen die Jungen in dir einen gleichberechtigten Partner?

Die Gespräche führten *Irma Weinreich* (*JW*) und *Johannes Lehmann* (*alpha*).

Der alpha-Club war in Cottbus dabei

Sechs vorbildliche Pioniere und Jugendfreunde (siehe Foto) wurden von der Bezirksleitung Leipzig der Pionierorganisation „Ernst Thälmann" zum VII. Pioniertreffen nach Cottbus delegiert. Seite an Seite mit den 15 Stationen Junger Techniker betreuten sie die Gäste des Treffens. Über 1 500 Pioniere nutzten die Möglichkeit, sich an der Wissensstraße Mathematik des *alpha*-Clubs der 29. OS Leipzig zu bewähren.

Auf einigen Bäumen sitzen mehrere Vögel. Hätte sich auf jedem dieser Bäume genau ein Vogel niedergelassen, so hätte einer dieser Vögel keinen Baum zum Ausruhen gefunden. Einer dieser Bäume wäre hingegen unbesetzt geblieben, wenn sich auf jeden der übrigen Bäume genau zwei Vögel gesetzt hätten. Um wieviel Vögel und um wieviel Bäume handelt es sich?

Das Problem zugunsten der Mädchen gelöst

Cevelma Dansansaravin, 17 Jahre, Mongolische Volksrepublik, besucht in Ulan Bator eine Spezialschule für Mathematik, Schülerin der 10. Klasse. Besondere Kennzeichen: selbstbewußt, ein wenig romantisch.

1. Seit der 8. Klasse besuche ich eine Spezialschule, die einzige, die es in der Mongolischen Volksrepublik gibt. Für diese Schule werden jedes Jahr in einem großen Wettbewerb die Besten ausgewählt. In meiner Klasse sind wir 24 Schüler, 13 davon Mädchen. In den anderen Klassen sieht es ähnlich aus. Bei uns ist die Frage, ob sich ein Mädchen mit Mathematik beschäftigt, zugunsten der Mädchen gelöst.
2. Ich spiele Schach und Tischtennis, lese viel. Wenn dann noch Zeit bleibt, gehe ich in die Oper. Mein Bruder ist in der Nationaloper Sänger.
3. Wenn ich merke, daß ich eine Aufgabe noch nicht beherrsche, lege ich sie beiseite. Mir fehlt manchmal die Energie. Bei anderen bin ich strenger als bei mir selbst.
4. Mein Lieblingsfach ist die räumliche Geometrie. Ich möchte einmal Architekt werden. Eine Aufnahmeprüfung habe ich bereits gemacht, wahrscheinlich studiere ich in Moskau. Ich habe viele schöne Vorstellungen, was in unserem Land alles entstehen wird. Und ich möchte gern sehen, was ich mir erträume. Zum Beispiel die neuen Häuser, die ich mit erbauen will.
5. Die Leistungen der Jungen sind im allgemeinen besser. Trotzdem sind sie nicht überheblich. Sie helfen mir alle. Sie machen mir Mut. Oder: Wir haben hier eine ganze Menge neuer Aufgaben von anderen Teilnehmern erhalten. Jungen und Mädchen werden zu Hause daran weiterarbeiten. Jeder mit gleichem Anteil.

Gegeben seien 12 Blatt Papier. Einige dieser Blätter zerschneiden wir jeweils wieder in 12 kleinere Blätter. Diese kleineren Blätter dürfen wiederum in jeweils 12 Teile zerschnitten werden und so fort. Es ist zu untersuchen, ob auf diese Weise
a) 100 Papierstückchen, b) 1 000 Papierstückchen entstehen können!

In meinem Leben hatte ich noch keine Zwei

Helena Husova, 18 Jahre, ČSSR, besucht in Prag eine Spezialklasse für Mathematik, Schülerin der 11. Klasse. Besondere Kennzeichen: sachlich, gewann als einziges Mädchen einen Preis.

1. Meine Eltern sind Historiker. Sie wollten gern, daß ich in ihre Fußspuren trete. Zu Hause stehen eine Unmenge historische Bücher, und jedesmal sagten sie, ich solle darin lesen. Aus einem gewissen Trotz heraus beschäftigte ich mich mit etwas ganz anderem. Geschichte finde ich furchtbar langweilig. (Helena hat in Geschichte trotzdem die Note 1, d. R.) Für mich gibt es nichts Schöneres als die Mathematik. Es ist die einzige Wissenschaft, wo man ohne Hilfsmittel beliebig Probleme lösen kann.
2. Ich spiele ein wenig Klavier. Beethoven, Mozart. Bach liebe ich, sammle auch Platten. Im Winter laufe ich Ski und Schlittschuhe. Außerdem schleppe ich immer ein Buch mit mir herum. Im Moment lese ich gerade die Geschichte vom Soldaten Schwejk.
3. Bei mir zu Hause liegen mindestens 12 bis 15 Aufgaben, die ich im Moment nicht lösen kann. Ich bewahre sie so lange auf, bis ich meine, jetzt weißt du alles dazu, das heißt, im Unterbewußtsein beschäftige ich mich schon damit. Für Nachschub ist auch gesorgt. Meist sind es die Jungen unserer Klasse, die mir solche Aufgaben geben. Es ist so eine Art Wettbewerb.
4. Wenn es keine zwingende Notwendigkeit gibt, nach meinem Abitur an einer anderen Stelle zu arbeiten, werde ich Mathematik studieren.
5. Unsere Gesellschaft gibt Mädchen und Jungen die gleichen Voraussetzungen. Leider nutzen die Mädchen noch zuwenig ihre Chance. Für mich ist es meistens so, daß ich alle mathematischen Probleme mit Jungen besprechen muß. Das ärgert mich für uns Mädchen.

Ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, für die $\overline{AB} > \overline{CD}$ gilt, habe einen Inkreis, der die Seite $\overline{AB}$ in E, die Seite $\overline{BC}$ in F, die Seite $\overline{CD}$ in G und die Seite $\overline{AD}$ in H berührt. Es ist zu beweisen, daß sich die Geraden AC, BD, EG und FH in einem gemeinsamen Punkt P schneiden!

Meine Zwillingsschwester macht auch Mathe

Agnes Szendrei, 17 Jahre, VR Ungarn, besucht in Szeged die Mittelschule, Schülerin der 11. Klasse. Besondere Kennzeichen: auffallend zurückhaltend, ziemlich unsportlich (wie sie sagt).

1. Ob man ein Junge oder ein Mädchen ist, das spielt für die Mathematik keine Rolle. Mein Vater ist Mathematiklehrer an der Hochschule, und da liegt es, wie man sagt, wohl in der Familie. Er war es, der mich dazu brachte, mich für die Mathematik zu entscheiden. In der achten Klasse gewann ich zum erstenmal einen Wettbewerb. Ich habe noch eine Zwillingsschwester, sie ist auch jedesmal dabei und wurde in diesem Jahr 11. bei der Landes-Mathematik-Olympiade. Ich wurde dritte.
2. Wir haben in unserer Klasse mehrere Studiengruppen. Ich leite die Gruppe, die sich speziell mit naturwissenschaftlichen Fächern beschäftigt. Dabei geht ein großer Teil meiner freien Zeit drauf. Außerdem übe ich mich in Fremdsprachen. (Agnes spricht perfekt russisch und englisch, d. R.) Und jetzt lerne ich gerade deutsch. Wenn ich ganz ehrlich bin, mir fällt es schwer, nicht hinter Büchern zu sitzen.
3. Ich nehme mir im allgemeinen vor, nicht eher aufzustehen, bis ich eine Lösung gefunden habe. Leider gelingt es mir nicht immer. Wenn ich anschließend merke, daß ich bei irgendeiner Kleinigkeit kapituliert habe, kann ich mich darüber ärgern. Es stört mich nicht, den ganzen Tag und noch länger über einer Aufgabe zu sitzen.
4. Ja, ganz fest. Ich möchte Mathematik studieren, vielleicht um Lehrerin zu werden.
5. Ich bin wohl ein bißchen zu ruhig.

Die Lösungen zu den Aufgaben, welche die Mädchen den alpha-Lesern stellten, veröffentlichen wir in Heft 2/71, d. Red.

Zwei Primzahlen p und $p+2$ nennt man Primzahlzwillinge.
(Beispiel: 29 und 31)
Beweise, daß für $p>3$ die Summe zweier Primzahlzwillinge stets durch 12 teilbar ist!

Ich bedaure, nicht eher angefangen zu haben

Anglika Rindler, 18 Jahre, Österreich, besuchte das Gymnasium in Spital, Abiturientin. Besondere Kennzeichen: lustig, immer zu irgendwelchen Scherzen aufgelegt.

1. Bekanntlich nimmt Österreich zum ersten Mal an einer internationalen Mathematikolympiade teil. Das brachte auch bei mir den Durchbruch; denn bis vor einem halben Jahr kannte ich mich in meinen Beziehungen zur Mathematik selbst nicht genau aus. Bei uns fanden Wettbewerbe für die Besten statt. Mein Lehrer schlug mir und drei Jungen vor, mitzumachen. Ich wurde die Beste. Ich bedaure, daß ich nicht eher angefangen habe, mich mit Mathematik zu beschäftigen.
2. Es gibt nichts, von dem ich sagen könnte, daß es mich nicht interessiert: Literatur, Sprachen, besonders Latein. Ich schwimme, betreibe Leichtathletik, spiele Handball und auch Fußball, wenn es sein muß. Hobbys habe ich nicht.
3. Ich suche so lange, bis ich meine, eine Lösung gefunden zu haben. Eher nehme ich keine neue Aufgabe zur Hand. Mein System wende ich auch bei Klausuren an. Nicht immer mit dem besten Erfolg. Ist die erste Aufgabe die schwierigste, kann es passieren, daß ich überhaupt nichts löse und eine Vier fange, obwohl ich die anderen Aufgaben bequem geschafft hätte.
4. Der Lateinlehrer ist mein Lieblingslehrer. Fast hätte ich Latein studiert. Buchstäblich in letzter Minute entschied ich mich für Mathematik. Wir haben nur drei Stunden Mathematik in der Woche, das ist einfach zuwenig, um ein eigenes Talent zu entdecken.
5. Wenn ich die Frage auf meinen Freund beziehe – wir besuchten die gleiche Schule –, dann: Es imponiert ihm. Aber selbst macht er sich nicht viel draus. Die Jungen, mit denen ich hier bin, achten mich als gleichberechtigten Partner. In unserer Mannschaft belegte ich den 3. Platz. Die Jungen freuten sich darüber mehr als ich.

Ein innerer Punkt P eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge a werde mit den drei Eckpunkten des Dreiecks verbunden, und es sei $\overline{AP}=x$, $\overline{BP}=y$, $\overline{CP}=z$. Es ist zu beweisen, daß dann stets die fortlaufende Ungleichung $a\sqrt{3} \leq x+y+z < 2a$ erfüllt ist!

Nach dem Erfolg packte mich der Ehrgeiz

Virginie Stoinova Hristova, 18 Jahre, VR Bulgarien, besuchte in Russe eine Spezialklasse für Mathematik, Abiturientin. Besondere Kennzeichen: quicklebendig, kann sich über alles totlachen.

1. Mit 12 Jahren verliebte ich mich in den Sohn meiner Mathematiklehrerin. Ich bin nämlich sehr romantisch. Doch richtig: An und für sich durch den Erfolg. Russe ist bekannt als Zentrum für mathematische Forschungen. Es gibt dort einen sogenannten mathematischen Fachkreis, der auch Wettbewerbe ausschreibt. Ich beteiligte mich, mehr aus Spaß. Als ich aber sah, daß ich mehr bringe, packte mich der Ehrgeiz.
2. Ich habe gerade das Abitur bestanden. In allen Fächern mit der besten Note. Selbstverständlich konnte zu dieser Zeit von freier Zeit nicht die Rede sein. Trotzdem muß man noch etwas mehr tun, als nur zu lernen, wenn man Anspruch erheben will, eine gute Schülerin zu sein. Ich war lange Zeit und auch im letzten Schuljahr Komsomolsekretär. Meine Funktion habe ich durchaus bewältigt. Ganz nebenbei: Ich liebe Katzen, und drei habe ich zu pflegen. Ich höre oft und viel Schlagermusik und tanze leidenschaftlich gern.
3. Eine Aufgabe, die ich nicht lösen kann, versetzt mich in dauernde Unruhe. Ich denke auf dem Nachhauseweg darüber nach, löse sie im Schlaf, deshalb beeile ich mich gewöhnlich, eine Lösung zu finden, und bin heilfroh darüber.
4. Ganz festgelegt habe ich mich noch nicht, was den direkten Beruf betrifft. Ich beginne in diesem Jahr in Sofia mit dem Mathematikstudium.
5. Manche Leute glauben tatsächlich, daß Mädchen von Mathematik weniger verstehen als Jungen. Da Mädchen aber im allgemeinen fleißiger sind und auch klüger – meine ich –, könnten sie durchaus mehr leisten. Ich weiß, das klingt selbstbewußt, aber es ist doch so, daß gerade in der Mathematik Traditionen und Vorbehalte es den Mädchen zusätzlich schwermachen, zu wirklichen Leistungen zu kommen.

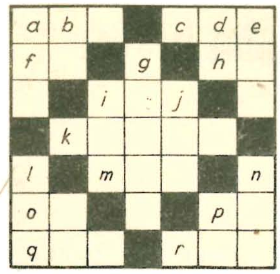
Gegeben seien die vier Zahlen $n-1$, n^2-n, n^3-n^2, n^4-n^3, wobei n eine von 0 und 1 verschiedene natürliche Zahl ist. Bestimme alle n, für die man zwei von den obigen vier Zahlen so auswählen kann, daß ihr Produkt gleich dem Produkt der anderen beiden dieser vier Zahlen ist!

Ich brauche eine Art Selbstbestätigung

Ursula Tyl, 17 Jahre, DDR, besucht die Spezialklasse für Mathematik der Heinrich-Hertz-Oberschule Berlin, Schülerin der 11. Klasse. Besondere Kennzeichen: ein wenig keß, träumt gern.

1. Mein Lehrer in Forst begann damit, mir wiederholt schwierigere Aufgaben zu stellen als den anderen Schülern. Ohne daß ich mir selbst über den Prozeß richtig im klaren war, weckte er mein mathematisches Interesse. Ich bin ihm dafür sehr dankbar.
2. Ich bereite mich auf ein Auslandsstudium vor, und der größte Teil meiner Freizeit ist dem Sprachstudium gewidmet. In meinen Ferien z. B. lese ich einen ganzen Stapel russischer Literatur. Außerdem schreibe ich hin und wieder Gedichte. Meine dichterischen Versuche habe ich bei mir.
3. Allein besitze ich nicht immer die Kraft, um mit den Problemen und Schwierigkeiten, die eine Aufgabe beinhalten kann, fertig zu werden. Ich gehe dann so wie ein Hausierer von Zimmer zu Zimmer und frage die anderen. Ich brauche jedesmal eine Art Selbstbestätigung.
4. Ich werde Mathematik studieren.
5. Manche Jungen denken, daß sie über größere Fähigkeiten verfügen. Im Moment wird es in manchen Fällen so sein. Aber auch Frauen sind zu großen Leistungen auf naturwissenschaftlichem Gebiet fähig. Was ich sage, ist nicht neu. Ich denke nur an Marie Curie. Uns Mädchen hilft man am wenigsten, wenn man uns bevorzugt behandelt. Ich finde, man sollte den Mädchen die gleichen Forderungen stellen, sie begeistern. Aber auch die Eltern sind zu überzeugen – bei mir war das zwar nicht notwendig –, daß Mädchen mathematisches Talent besitzen.

Ein mathematisches „Kreuzworträtsel“



Während bei den üblichen Kreuzworträtseln in die Felder des gegebenen Schemas Buchstaben so einzutragen sind, daß sie in waagerechter bzw. senkrechter Anordnung jeweils ein Wort ergeben, dessen Bedeutung in dem Rätsel vorgegeben wird, sind bei einem mathematischen „Kreuzworträtsel“ in die Felder des Schemas Ziffern einzutragen, und zwar jeweils eine der Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Diese Ziffern ergeben dann jeweils in waagerechter bzw. senkrechter Anordnung eine Zahl oder auch eine Reihe von Zahlen, deren Definition in dem Rätsel vorgegeben wird. Dabei ist im allgemeinen diese Zahl eindeutig bestimmt, d. h., man braucht nicht zu raten, sondern kann die gesuchten Ziffern durch eine geeignete Überlegung bestimmen. Wir bemerken noch, daß die Bezeichnung „Kreuzworträtsel“ eigentlich nicht exakt ist, es müßte besser „Kreuzziffernrätsel“ heißen, da ja Ziffern in die Felder einzusetzen sind. Die Bezeichnung „Mathematisches Kreuzworträtsel“ hat sich aber schon seit längerer Zeit durchgesetzt.

Da bei einem „mathematischen Kreuzworträtsel“ in die leeren Felder Ziffern statt Buchstaben einzutragen sind, wählen wir zum Auffinden der Lösungen die Form „a waagerecht“ statt wie sonst üblich „1 waagerecht“ usw. Aus drucktechnischen Gründen werden die Buchstaben a, b, c, usw. nicht in der linken oberen Ecke des leeren quadratischen Feldes angebracht, sondern sie füllen das Feld aus. Deshalb empfiehlt es sich, vor dem Lösen ein entsprechendes Schema nochmals anzufertigen, damit genügend Platz zum Eintragen der gesuchten Zahlen bzw. der Reihen von Zahlen vorhanden ist.

Wir stellen unseren Lesern das folgende mathematische Kreuzworträtsel:

Dabei bedeuten:

Waagerecht

a) Drei Primzahlen, bei denen die Differenz zwischen der zweiten und der ersten Zahl sowie zwischen der dritten und der zweiten Zahl gleich 2 ist.

c) Die kleinste von Null verschiedene natürliche Zahl, die durch 2, 3, 4, 5, 6 und 7 teilbar ist.

f) Die Lösung der Gleichung $4(x-13)+3(x+7)=200$.

h) Die größte natürliche Zahl x, für die $16x<1\,000$ gilt.

i) Die kleinste Primzahl, die größer als 100 ist.

k) Eine fünfstellige Zahl, die gleich der neunten Potenz einer natürlichen Zahl ist.

m) Die Maßzahl der Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Maßzahlen der Längen 120 und 50 haben.

o) Die Anzahl der Diagonalen in einem konvexen Achteck.

p) Eine zweistellige natürliche Zahl, deren Vorgänger durch 4^2 und deren Nachfolger durch 5^2 teilbar ist.

q) Die Maßzahl des Flächeninhalts eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Maßzahl 39 und dessen eine Kathete die Maßzahl 15 hat.

r) Das Produkt zweier natürlicher Zahlen, deren kleinstes gemeinsames Vielfaches gleich 111 und deren größter gemeinsamer Teiler gleich 9 ist.

Senkrecht

a) Die größte natürliche Zahl, deren 1 000. Teil kleiner als $\frac{1}{3}$ ist.

b) Die kleinste Primzahl, deren Doppeltes größer als 100 ist.

d) Zwei natürliche Zahlen, deren Summe gleich 8 ist und bei denen die Differenz zwischen der zweiten und der ersten Zahl gleich 4 ist.

e) Die ersten drei Ziffern nach dem Komma des Bruches $\frac{1}{37}$ in dezimaler Schreibweise.

g) Die Lösung der Gleichung $\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+3386$.

i) Eine natürliche Zahl, die Lösung der fortlaufenden Ungleichung $39\,800<209x<40\,000$ ist.

j) Die Maßzahl des Umfangs eines regelmäßigen Sechsecks, das einem Kreis mit dem Durchmesser 60 cm einbeschrieben ist.

l) Die kleinste dreistellige natürliche Zahl, die durch 2, 3 und 37 teilbar ist.

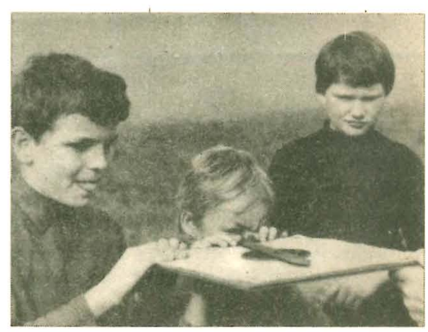
n) Die größte dreistellige natürliche Zahl.

R. Lüders

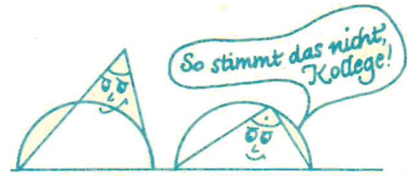
Kleine Schule – ganz groß

Seit 1964 bestehen an der kleinsten Oberschule des Bezirkes Leipzig, der OS Höfgen im Kreis Grimma, jeweils zwei Arbeitsgemeinschaften (Klassenstufe 5/6 und 7/8). Rund 35% aller Schüler dieser Klassenstufen beteiligen sich an der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik. Ab September 1970 wurde eine Chronik eingerichtet. Sie enthält Arbeitspläne, Protokolle über AG-Nachmittage, zeigt die Erfolge dieser Schule in den Olympiaden. J. Lehmann

Unsere Fotos: Beide AGs, hier auf der Fähre über die Mulde (zwischen Höfgen und Kloster Nimbschen), führten an einem AG-Nachmittag Vermessungsarbeiten zur Bestimmung der Breite der Mulde durch.



In freien Stunden alpha heiter



Uli Klaus, Erfurt (BS BMK, 1. Lehrjahr)

Prüfungsfragen

Als Student der Universität Göttingen legte Max Born bei dem Astronomen Karl Schwarzschild sein Examen ab. Zwischen ihnen kam es zu folgendem Dialog:
Schwarzschild: „Was tun Sie, wenn Sie eine Sternschnuppe sehen?"
Born: „Ich wünsche mir etwas."
Schwarzschild: „Gut, und was tun Sie dann?"
Born: „Dann schaue ich auf die Uhr, vermerke mir die Zeit, bestimme das Sternbild, aus dem die Sternschnuppe kam, die Richtung, wohin sie sich bewegte, die Länge der leuchtenden Flugbahn usw. Dann gehe ich nach Hause und berechne die angenäherte Flugbahn."
Der Professor stellte keine weiteren Fragen mehr. Er war mit den Antworten seines Prüflings zufrieden.

aus: Pythagoras 2/70, Erfurt

Soφ – μνϱck – ϱdelπste – ηge – ϱling – Geμse – νlon – πϱklammer – μnol – VEβξ – Veϱνka – μνmum – νlδ – Mαbrot – μll – πkiν –

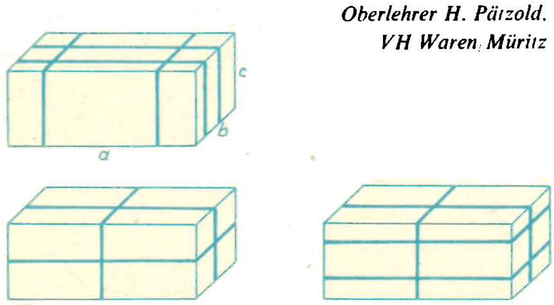
(Griechisches Alphabet siehe Tafelwerk, Seite 50)

cand. ing. W. Wallmann, TU Dresden

Lang, länger, am längsten

Ein Päckchen wurde auf drei verschiedene Arten verschnürt. Für welchen Fall benötigt man am wenigsten, für welchen am meisten Bindfaden? Es gilt $a+b>2c$!

Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz



Der „alpha"-Fimmel

Kommt die neueste *alpha*-Nummer,
macht das Mutti manchen Kummer.
Doch zunächst gibts einen Streit:
Wer kriegt sie als erster heut?
Ist geklärt die Streiterei,
beginnt sofort die Knobelei,
und die Töchter — auch Papa —
sitzen köpferauchend da.
Mutti möchte an den Tisch,
doch die Knobler wehren sich.
Darob sie mit dem Tiegel droht,
und Formeln gibt's zum Abendbrot.
Tags darauf beginnt dann neu
die W-Aufgaben Knobelei.
Es wird um sechs, es wird um sieben,
man tut noch spiegeln und verschieben.
Die Zettel türmen sich zu Bergen.
(Man kann sich doch nicht alles merken.)
Ein Teil liegt hier, ein Teil liegt dort,
doch sucht man einen, ist er fort.
Reicht das Knobeln nicht mehr aus,
liest man *Cantor*, liest man *Gauß;*
dann kommt noch *Galilei* daran;
auch das war ein berühmter Mann.
Ist diese Arbeit auch getan,
schaut man sich *alpha*-heiter an.
Dort gibt es neben ernsten Sachen
auch manchen guten Witz zum Lachen.
Dann folgt eine ruhige Zeit,
aber bald ist es soweit,
und täglich fragt man die Mama:
„Ist denn Post von Leipzig da?"
Die Schwester schon von weitem schreit:
„Wieviel Karten hab' ich heut'?"
Und die Mutti packt der Graus:
Der *alpha*-Fimmel ist im Haus!
Um diese Verse abzuschließen,
möchten wir nun gerne wissen:
Kommt man durch den *alpha*-Fimmel
später in den Mathe-Himmel?

Regina und Brigitte Hildenbrandt, OS Stützerbach

Werterhaltung

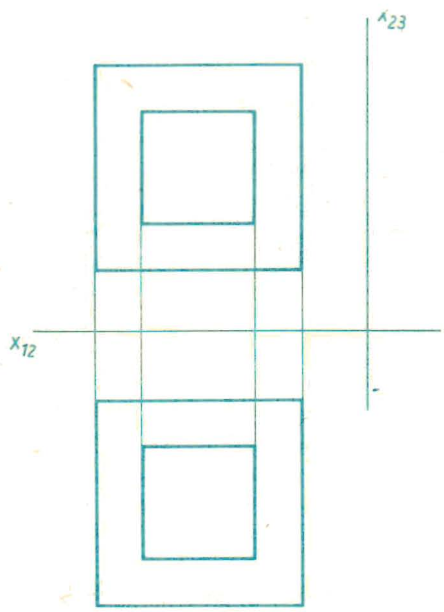
Vater ölt seinen elektrischen Rasierapparat. Er taucht einen langen geraden Draht von kreisförmigem Querschnitt in die Flasche und läßt das Öl in die Lager laufen.
Das am Draht haftende Öl laufe zu einem kugelförmigen Tropfen zusammen. Welchen Durchmesser hat dieser?
Durchmesser des Drahtes d
Länge des benetzten Drahtstückes l
Dicke der Ölschicht s
Zahlenfall. $d=1$ mm; $l=5$ cm; $s=0{,}01$ mm

Prof. Dr. habil. W. Renneberg
Karl-Marx-Universität Leipzig

Kreuzriß gesucht

Gegeben sind Grund- und Aufriß eines ebenflächig begrenzten Körpers.
Gesucht ist der Kreuzriß dieses Körpers bezüglich der x_{23}-Achse. Man beachte, daß zwei Lösungen möglich sind!

Elisabeth Siegert, Karl-Marx-Stadt
Joh.-R.-Becher-OS, Kl. 6

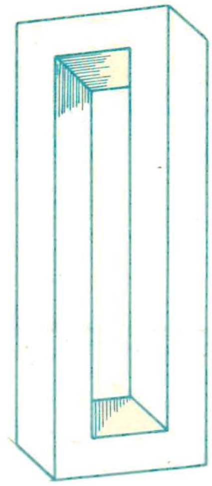


Mit *alpha*, sprach der Zirkelleiter,
half ich in Mathe vielen weiter.

Lehrerin Cilly Schröder, Dresden

Ein Körper, den es nicht gibt

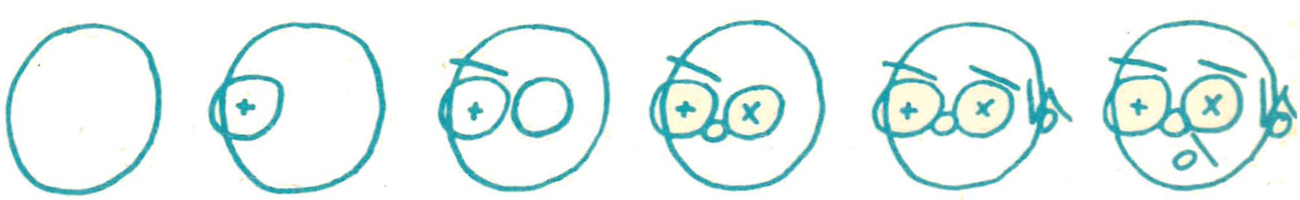
Baurat h. c. Dipl.-Ing. Dr.
M. Skalicky, Wien



Niederlande – Sommerbriefmarken 1970

entworfen nach einer Idee von *R. D. E. Oxemaar* mit Hilfe einer Datenverarbeitungsanlage in Zusammenarbeit mit der Gruppe numerische Steuerung der Abteilung Betriebswissenschaft an der TH Eindhoven.

isometrische Projektion von Kreis nach Quadrat
Parallelflächen in einem Würfel
zwei Skalaeinteilungen
Übergangsphasen von konzentrischen Kreisen mit ansteigendem Durchmesser
vier Spiralen



Null ... plus Null ... minus Null ... multipliziert mit Null ... minus Wurzel aus Null das Ganze geteilt durch Null

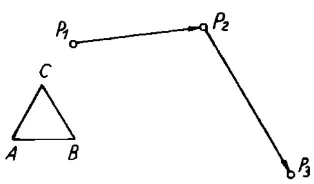
aus: Jean Effel, Historio-Grafik (Eulenspiegelverlag)

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

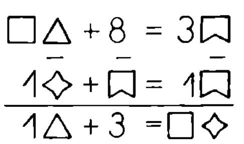
2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 5

1. Auf dem umstehenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck $\triangle ABC$ und zwei Verschiebungspfeile $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_2P_2}$ abgebildet. Mit dem Dreieck $\triangle ABC$ sollen nacheinander die Verschiebungen ausgeführt werden, die durch die Verschiebungspfeile $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_2P_3}$ gegeben sind. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\triangle A_2B_2C_2$! (Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)



2. Gib sämtliche Lösungen des nachstehenden Kryptogramms an, d. h. ersetze die geometrischen Figuren so durch je eine der Ziffern 0 bis 9, daß zusammen mit den bereits angegebenen Ziffern sämtliche (waagerecht und senkrecht stehenden) Aufgaben richtig gelöst sind. Dabei bedeuten gleiche Figuren gleiche Ziffern.

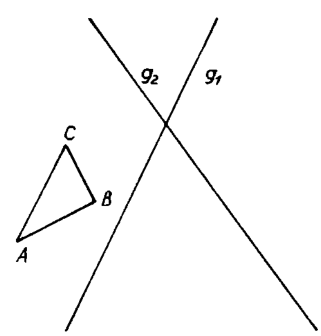


3. Die Mitglieder einer Arbeitsgemeinschaft „Junge Botaniker" unterstützten ihre Paten-LPG beim Obstanbau. Zu diesem Zwecke hielten sie eine 2,6 ha große Obstplantage, auf der je Hektar durchschnittlich 150 Apfelbäume standen, von Schädlingen frei. Danach wurden von jedem Baum durchschnittlich 50 kg Äpfel geerntet. Berechne, wieviel Tonnen Äpfel unter diesen Umständen insgesamt auf der Plantage geerntet wurden!

4. Eine Gruppe Junger Mathematiker führte eine Exkursion durch. Jeder Teilnehmer bezahlte 1,50 Mark für die Fahrkosten. Bei der Bezahlung des Sammelfahrscheines blieb ein Betrag von 1,10 Mark übrig. Hätte jeder Teilnehmer 1,40 Mark eingezahlt, so hätten 1,10 Mark an den Kosten des Sammelfahrscheines gefehlt. Ermittle die Anzahl der Teilnehmer an dieser Exkursion! Wieviel Geld erhielt jeder dieser Teilnehmer zurück, als der zuviel eingezahlte Betrag gleichmäßig unter ihnen verteilt wurde?

Olympiadeklasse 6

1. Auf dem umstehenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck $\triangle ABC$ und zwei Geraden g_1 und g_2 abgebildet.



Das Dreieck $\triangle$ABC soll nacheinander an den Geraden g_1 und g_2 gespiegelt werden. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\triangle A_2B_2C_2$!
(Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)

2. Die sowjetischen Raumschiffe Sojus 6, Sojus 7 und Sojus 8 umkreisten im Gruppenflug die Erde. Dabei brauchte die Gruppe der drei Raumschiffe für jede Umkreisung durchschnittlich 88 Minuten und legte in dieser Zeit rund 41 000 km zurück.
Berechne die Länge des Weges, den die Raumschiffgruppe während ihres Fluges durchschnittlich
a) in jeder Stunde,
b) in jeder Sekunde zurücklegte!
Bei der Aufgabe a) soll die Angabe in Kilometern erfolgen und auf volle Tausend Kilometer gerundet werden, bei Aufgabe b) soll die Angabe in Metern erfolgen und auf volle Hundert Meter gerundet werden.

3. In der fünfstelligen Zahl
52*2*
sind an den mit * bezeichneten Stellen zwei (gleiche oder verschiedene) Ziffern so einzusetzen, daß die dadurch entstehende Zahl durch 36 teilbar ist.
Gib alle Möglichkeiten hierfür an!
(*Beachte:* Eine Zahl ist genau dann durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist.)

4. Die Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $a = 16$ cm, $b = 9$ cm ist so in fünf Rechtecksflächen zu zerlegen, daß sich diese zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen, wobei sämtliche Teilrechtecke verwendet werden sollen und die gesamte Fläche des Quadrats lückenlos und ohne Überlappungen von den Flächen dieser Teilrechtecke ausgefüllt werden soll.
Gib eine Möglichkeit hierfür an!

Olympiadeklasse 7

1. In einem Ferienlager der Thälmann-Pioniere erwarben genau 70% aller Teilnehmer das Sportabzeichen und genau 30% aller Teilnehmer das Touristenabzeichen. Vorher besaß kein Teilnehmer eines dieser Abzeichen. Bei den folgenden Aussagen (1) bis (4), die sich sämtlich auf dieses Lager beziehen, ist zu untersuchen, ob sie wahr sind oder falsch sind oder ob das allein aufgrund der gemachten Angaben nicht entschieden werden kann:
(1) Weniger als die Hälfte aller Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, erwarben auch das Touristenabzeichen.
(2) Alle Teilnehmer erwarben entweder das Sportabzeichen oder das Touristenabzeichen.
(3) Unter den Trägern des Sportabzeichens gibt es mehr solche, die auch das Touristenabzeichen erwarben, als solche, die dies nicht taten.
(4) Wenn sich die Anzahl der Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, um 10% erhöhen würde, so gäbe es mehr Träger des Sportabzeichens als Träger des Touristenabzeichens.

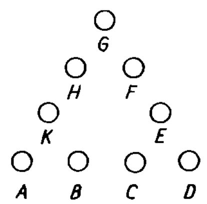
2. In einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Größen der Innenwinkel wie üblich mit α, β, γ bezeichnet wobei $\alpha = 60°$ sei. BB' sei die Halbierende des Winkels $\sphericalangle ABC$ und CC' die des Winkels $\sphericalangle ACB$; jede von ihnen schneidet die ihrem Winkel gegenüberliegende Dreieckseite in einem inneren Punkt (B' bzw. C'). Ferner seien die Größen der Winkel $\sphericalangle AB'B$ bzw. $\sphericalangle AC'C$ mit ε bzw. δ bezeichnet. Beweise, daß für jedes derartige Dreieck $\varepsilon + \delta = 180°$ gilt!

3. Ermittle alle Möglichkeiten eine natürliche Zahl t und eine Ziffer * so anzugeben, daß die folgende Gleichung gilt:
$9(230 + t)^2 = 492{*}04$

4. Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus
$\alpha = 70°$, $s_b = 7$ cm, $h_c = 5$ cm!
Dabei sei α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$, s_b sei die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AC und h_c die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch A und B senkrecht steht. Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren läßt!

Olympiadeklasse 8

1. In die neun Felder A, B, C, D, E, F, G, H, K der untenstehenden Figur sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 9, jede genau in eines der Felder, so einzutragen, daß die Summen s_1, s_2 und s_3 der in den Feldern A, B, C, D bzw. D, E, F, G bzw. G, H, K, A stehenden Zahlen einander gleich sind.



a) Welches ist der kleinste und welches ist der größte Wert, den diese (einander gleichen) Summen unter den genannten Bedingungen annehmen können?

b) Gib je eine Möglichkeit an, wie dieser kleinste bzw. dieser größte Wert erreicht werden kann!

2. In einem Dreieck ΔABC sei B' der Mittelpunkt der Seite AC und M der Mittelpunkt der Strecke BB'. Die Gerade durch A und M schneidet BC in einem Punkt, der A' genannt sei. Man beweise, daß

$$\overline{BC} = 3 \cdot \overline{BA'} \text{ gilt!}$$

3. Bei einem 216 kp schweren Stück einer Kupfer-Zink-Legierung wurde in Wasser ein Auftrieb (Gewichtsverlust) von 26 kp gemessen. Bekannt ist, daß Kupfer beim Eintauchen in (destilliertes) Wasser $\frac{1}{9}$ seines ursprünglichen Gewichtes und Zink $\frac{1}{7}$ seines ursprünglichen Gewichtes verliert.

Ermittle den prozentualen Gewichtsanteil des Kupfers und den des Zinks in der angegebenen Legierung!

(Die zu ermittelnden Größen sind auf volle Prozent zu runden).

4. Konstruiere ein Dreieck ΔABC aus $c = 5$ cm, $h_c = 4$ cm, $a = 6$ cm!

Dabei sei a die Länge der Seite BC, c die der Seite AB und h_c die der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren läßt.

Olympiadeklasse 9

1. Vier Freunde A, B, C und D verstecken einen Brief. Einer von ihnen nimmt ihn an sich.

Anschließend macht jeder von ihnen die im folgenden genannten drei Aussagen, von denen wenigstens je zwei wahr sind.

A (1) Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn C.
(2) Ich habe den Brief nicht.
(3) Mein Freund hat den Brief.

B (1) Entweder A oder C hat den Brief.
(2) Alle Aussagen von A sind wahr.
(3) D hat den Brief nicht.

C (1) Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn B.
(2) Ich habe den Brief.
(3) B macht keine falschen Aussagen.

D (1) Ich habe den Brief nicht.
(2) Entweder hat A den Brief, oder er hat ihn nicht.
(3) B hat das Spiel ausgedacht.

Wer hat den Brief?

2. Jemand behauptet:

Wenn von zwei natürlichen Zahlen a und b jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von a und b diese Eigenschaft.

a) Geben Sie ein Zahlenbeispiel an!

b) Beweisen Sie diesen Satz!

3. Gegeben seien zwei reelle Zahlen $m \neq 0$ und n. Ferner sei f die durch $f(x) = mx + n$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion.

a) Ermitteln Sie für $m = 1$ und $n = 0$ alle Zahlen x_0, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 - 2)$ gilt (d. h. für die der Funktionswert an der Stelle $x_0 + 2$ doppelt so groß ist wie der an der Stelle x_0)!

b) Ermitteln Sie bei beliebig gegebenen reellen Zahlen $m \neq 0$ und n alle Zahlen x_0, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ gilt!

4. Eine regelmäßige gerade dreiseitige Pyramide ist eine Pyramide, deren Grundfläche eine gleichseitige Dreiecksfläche ist und deren Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche zusammenfällt.

In der regelmäßigen Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D sei der Neigungswinkel zwischen jeder der drei Seitenflächen und der Grundfläche $60°$ groß. Die Grundfläche habe die Seitenlänge a. Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide!

Anmerkung: Haben zwei ebene Flächen eine gemeinsame Kante und ist P ein von den Endpunkten verschiedener Punkt dieser Kante, dann ist der Winkel, den zwei in P auf der Kante errichtete und in den beiden Flächen gelegene senkrecht stehende Strecken miteinander bilden, gleich dem Neigungswinkel der beiden Flächen zueinander.

Olympiadeklasse 10

1. Beweisen Sie, daß jede mehrstellige natürliche Zahl größer ist als das aus ihren sämtlichen Ziffern gebildete Produkt!

2. Vier Personen A, B, C und D machen in einem Spiel je drei Aussagen über denselben Gegenstand, einen einfarbigen Ball. Die Aussagen lauten:

A (1) Der Ball ist weder rot noch gelb.
(2) Der Ball ist entweder rot oder grün.
(3) Der Ball ist schwarz.

B (1) Wenn der Ball nicht gelb ist, ist er weiß.
(2) A macht eine falsche Aussage, wenn er sagt, der Ball ist schwarz.
(3) Der Ball ist grün.

C (1) Der Ball ist entweder schwarz oder grün.
(2) Der Ball ist rot.
(3) Der Ball ist entweder grün oder schwarz oder gelb.

D (1) Der Ball hat die gleiche Farbe wie mein Pullover.
(2) Wenn der Ball gelb ist, ist er nicht schwarz.
(3) Der Ball ist schwarz und grün.

Ermitteln Sie die Farbe des Balles für die folgenden beiden Fälle und untersuchen Sie, ob allein mit den vorliegenden Angaben die Farbe des Pullovers von D ermittelt werden kann! Wenn ja, geben Sie diese Farbe an!

Fall a) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei wahr.

Fall b) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei falsch.

3. In einem gleichseitigen Dreieck ΔABC mit der Seitenlänge a sei M der Mittelpunkt des Umkreises. S sei ein Punkt der in M auf der Ebene des Dreiecks errichteten Senkrechten, für den

$$\overline{AB} : \overline{SM} = 3 : \sqrt{6} \text{ gilt.}$$

Beweisen Sie, daß das Tetraeder mit den Ecken A, B, C, S regulär ist, d. h. daß alle Kanten dieses Tetraeders gleich lang sind!

4. Es seien m und n beliebige ganze Zahlen. Beweisen Sie, daß mindestens eine der Zahlen $x = 2mn$; $y = m^2 - n^2$; $z = m^2 + n^2$ durch 5 teilbar ist!

Olympiadeklasse 11/12

1. Es sind alle geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x^2 - y^2 = 1 \qquad (1)$$

$$x^6 + y^6 = \frac{7}{16} \qquad (2)$$

erfüllt ist.

2. Der Binomialkoeffizient $\binom{a}{k}$ wird für jede beliebige reelle Zahl a und jede natürliche Zahl $k \geqq 1$ durch

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot [a-(k-2)] \cdot [a-(k-1)]}{k!}$$

definiert.

a) Untersuchen Sie, ob auch in jedem hier genannten Fall für a und k die für ganzzahlige $a \geqq k$ aus dem Pascalschen Dreieck bekannte Beziehung

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1} \text{ gilt!}$$

b) Zeigen Sie, daß für $k > 2$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(2k-3)!}{2^{2k-2}\, k!\,(k-2)!} \cdot (-1)^{k+1} \text{ gilt!}$$

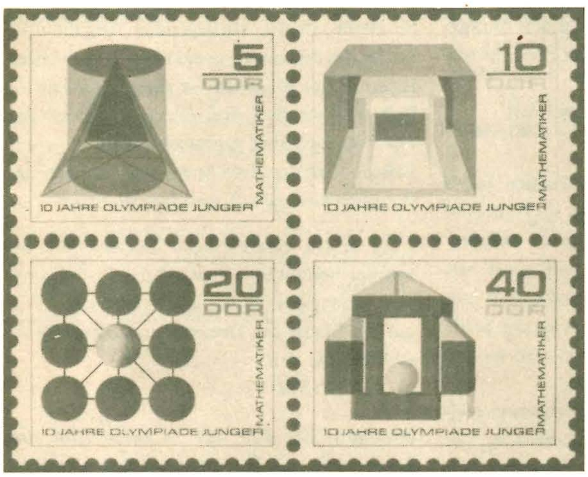
3. Die ersten Zeilen eines (beliebig fortsetzbaren) dreieckigen Zahlenschemas lauten:

Zeile 0	1
Zeile 1	1 1 1
Zeile 2	1 2 3 2 1
Zeile 3	1 3 6 7 6 3 1
......	....

Die allgemeine Vorschrift zur Bildung dieses Zahlenschemas lautet: Die einzige Zahl in Zeile 0 sei die Zahl 1.
Jede weitere Zahl sei gleich der Summe aus der unmittelbar über ihr stehenden Zahl und deren beiden Nachbarzahlen, wobei links und rechts von den Rändern fehlende Zahlen durch Nullen ersetzt zu denken sind. Es ist für jede natürliche Zahl n zu beweisen, daß in diesem Schema die Summe s_n aller Zahlen der Zeile n den Wert 3^n hat.

4. Es sei $ABCD$ ein konvexes Tangentenviereck und S der Schnittpunkt seiner Diagonalen, und es seien
$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{DA}=d$, $\overline{AC}=e$, $\overline{BD}=f$ und δ die Größe des Winkels $\sphericalangle BSA$. Beweisen Sie, daß dann
$ac-bd=ef\cdot\cos\delta$. gilt!

(Lösungen siehe Heft 6/71 – Sonderbeilage – d. Red.)



Briefmarkenentwürfe, zusammengestellt zu Ehren der X. OJM von L. Klunker, Herzberg (Elster)

Lösungen

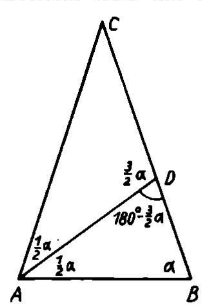
W 5 ■ 563 Der Autobus legt in einem Jahr $2\cdot 365$ Fahrten, also 730 Fahrten, zurück. Auf einer Fahrt werden $2\cdot 200$ m, also 400 m Fahrstrecke eingespart; das sind bei 730 Fahrten $730\cdot 400\ \text{m}=292\,000\ \text{m}=292\ \text{km}$. Aus $292:40=7\frac{3}{10}$ folgt, daß in einem Jahr 7 Stunden und 18 Minuten Fahrtzeit eingespart wird.

W 5 ■ 564 Die gesuchten zweistelligen Zahlen lassen sich durch $10a+b$, ihre Quersummen durch $a+b$ darstellen, wobei $0<a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$ gilt. Entsprechend der Aufgabe erhalten wir dann
$(10a+b)+(a+b)=100$ oder vereinfacht
$11a+2b=100$ bzw. $11a=100-2b$. Wegen $2b<20$ gilt also $11a>80$ und damit $a>7$.
Für $a=8$ wird $2b=100-88=12$, also $b=6$. Für $a=9$ erhält man wegen $2b=100-99=1$ für b keine Lösung. Daher wird die Gleichung nur für $a=8$ und $b=6$ erfüllt. Es gibt genau eine Lösung; die Zahl lautet 86.

* 5 * 565 Die zweistellige Zahl sei z, dann lautet die fünfstellige Zahl $1\,000z+z=1\,001z=91\cdot 11\cdot z$. Damit gilt auch $1001z:91=11z$, der Quotient ist also stets gleich dem Elffachen der ursprünglichen zweistelligen Zahl z.

W 6 ■ 568 Für das rechtwinklige Dreieck ADC gilt $\sphericalangle ACD=90^\circ-\alpha$; nach Voraussetzung gilt $\sphericalangle ACE=\frac{1}{2}\gamma$. Daraus folgt
$\delta=\frac{1}{2}\gamma-(90^\circ-\alpha)$. Wegen $\gamma=180^\circ-\alpha-\beta$ erhalten wir durch Substitution schließlich
$\delta=\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha-\beta)-90^\circ+\alpha=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

W 6 ■ 569 In der nachstehenden Abbildung sei $\overline{AD}$ Winkelhalbierende des gleichschenkligen Dreiecks ABC mit den kongruenten



Basiswinkeln $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA=\alpha$. Deshalb gilt $\sphericalangle CAD=\sphericalangle DAB=\frac{1}{2}\alpha$.
Nach dem Außenwinkelsatz gilt ferner $\sphericalangle CDA=\sphericalangle ABD+\sphericalangle DAB=\frac{3}{2}\alpha$. Als Nebenwinkel ist Winkel $\sphericalangle ADB=180^\circ-\frac{3}{2}\alpha$. Das Dreieck ABD soll gleichschenklig sein; dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. $\sphericalangle DAB=\sphericalangle ABD$, also $\frac{1}{2}\alpha=\alpha$. Diese Gleichung wird nur für $\alpha=0^\circ$ erfüllt, und das ist nicht möglich.

2. $\sphericalangle DAB=\sphericalangle ADB$, also $\frac{1}{2}\alpha=180^\circ-\frac{3}{2}\alpha$. Diese Gleichung wird nur für $\alpha=90^\circ$ erfüllt. Der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks kann nicht 90° betragen.

3. $\sphericalangle ABD=\sphericalangle ADB$, also $\alpha=180^\circ-\frac{3}{2}\alpha$. Diese Gleichung wird nur für $\alpha=72^\circ$ erfüllt.
Die Innenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABC betragen somit
$\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA=72^\circ$ und $\sphericalangle ACB=36^\circ$.
Für das zweite Teildreieck ADC gilt
$\sphericalangle CAD=\sphericalangle ACD=36^\circ$, das heißt, auch dieses Dreieck ist gleichschenklig.

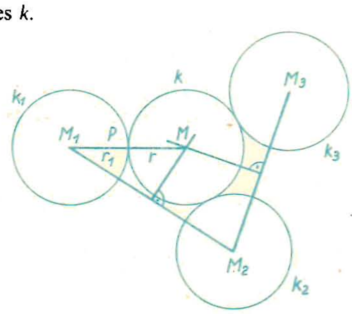
* 6 * 570 Aus $V=a^3$ und $27=3^3$ folgt, daß der angestrichene Würfel eine Kantenlänge von 3 dm bzw. 30 cm besitzt. Bei Aufteilung jeder Kante in n gleiche Teile würde man nach dem Zersägen $(n-2)^3$ rauminhaltsgleiche Würfel erhalten, die völlig ohne Farbanstrich sind. Für $n=5$ erhält man $(5-2)^3=3^3=27$ Würfel; für $n=6$ dagegen $(6-2)^3=4^3=64$ Würfel. Um mindestens 30 Würfel zu erhalten, muß jede Kante in sechs gleiche Teile unterteilt werden. Aus
$30\ \text{cm}:6=5\ \text{cm}$ folgt, daß jeder der so erhaltenen Würfel eine Kantenlänge von 5 cm besitzt.

W 7 ■ 573 Wegen $t=\frac{s}{v}$ gilt
$t=\dfrac{0{,}1\ \text{km}}{60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}=\frac{1}{600}\ \text{h}=\frac{60\cdot 60}{600}\ \text{s}=6\ \text{s}$. Es wurde eine Zeit von 6 Sekunden gestoppt.

W 7 ■ 574 Entsprechend der Aufgabe gilt
$a+b+c+d+e+f+g+h$
$=1+2+3+4+5+6+7+8=36$ und
$a+e+h+d=b+f+g+c=18$.
Ferner gilt $a+e+h+d=a+e+f+b$, also $d+h=b+f$ und $a+e+h+d=c+g+h+d$, also $a+e=c+g$. Wir nehmen nun eine Fallunterscheidung vor.
1) Es sei $a+e=3$. Da sich Zahl 3 aus den gegebenen Zahlen nur auf genau eine Weise, nämlich durch $1+2$ als Summe darstellen läßt, scheidet dieser Fall wegen $a+e=c+g$ aus.
2) Es sei $a+e=4$. Auch die Zahl 4 läßt sich aus den gegebenen Zahlen nur auf genau eine Weise, nämlich durch $1+3$ darstellen; deshalb scheidet auch dieser Fall aus.
3) Es sei $a+e=5$. Wegen $a+e=c+g$ und $1+4=2+3=5$ könnte $a=1$, $e=4$, $c=2$, $g=3$ sein. Unter dieser Voraussetzung gilt

dann aber wegen $a+e+h+d=a+e+f+b$ auch $d+h=b+f=13$. Wegen $6+7=5+8=13$ können $d=6$, $h=7$, $b=5$, $f=8$ sein. Damit ist eine mögliche Lösung gefunden; auf die übrigen Fälle sei hier verzichtet.

*** 7 * 575** Es sei k der zu konstruierende Kreis, r sein Radius und M sein Mittelpunkt. Ferner seien r_1, r_2, r_3 die Radien der Kreise k_1, k_2, k_3, und es gilt $r_1=r_2=r_3$. Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt, daß $\overline{MM_1}=\overline{MM_2}=\overline{MM_3}=r+r_1$ gilt, da $r_1=r_2=r_3$. Der Mittelpunkt M des Kreises k ist als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{M_1M_2}$ und $\overline{M_2M_3}$ eindeutig bestimmt. Die Verbindungsgerade MM_1 schneidet den Kreis k_1 in P; $\overline{MP}$ ist der gesuchte Radius r des zu konstruierenden Kreises k.



W 8 ■ 578 Jede n-stellige natürliche Zahl läßt sich in der Form

$$z=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_1 10^1+a_0 10^0$$

schreiben, wobei $a_n \cdot a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ die den Grundziffern der Zahl z entsprechenden natürlichen Zahlen sind und $a_n>0$ gilt. Vertauscht man nun in der Zahl z die erste und die letzte Ziffer miteinander, so erhält man die Zahl

$$z'=a_0 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_1 10^1+a_0 10^0.$$

Ist nun $a_n>a_0$, so erhält man die Differenz

$$\begin{aligned}z-z'&=a_n 10^n-a_0 10^n+a_0-a_n\\&=a_n(10^n-1)-a_0(10^n-1)\\&=(a_n-a_0)(10^n-1)\\&=(a_n-a_0)\cdot\underbrace{999\ldots9}_{n-1\text{ Ziffern}}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{z-z'}{9}=\frac{(a_n-a_0)\cdot 999\ldots9}{9}=(a_n-a_0)\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n-1\text{ Ziffern}}$$

Nun ist wegen $0<a_0<a_n<10$ $0<a_n-a_0<9$. Also ist $\frac{z-z'}{9}$ eine Zahl, die aus lauter gleichen Ziffern besteht. Ist nun $a_n=a_0$, so erhält man die Differenz Null.

Ist aber $a_n<a_0$, so bildet man die Differenz $z'-z$ und stellt wie oben fest, daß auch $\frac{z'-z}{9}$ aus lauter gleichen Ziffern besteht.

In jedem Falle ist also die gebildete Zahl entweder gleich Null, oder sie besteht aus lauter gleichen Ziffern.

W 8 ■ 579 Es sei a die Länge der Quadratseite. Dann ist der Radius des einbeschriebenen Kreises gleich $\varrho=\frac{a}{2}$, also sein Flächeninhalt gleich

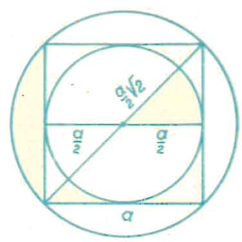
$$A_1=\pi\varrho^2=\frac{\pi}{4}a^2. \qquad \text{(vgl. die Abb.)}$$

Ferner ist der Radius des umbeschriebenen Kreises gleich der halben Länge der Diagonale des Quadrats, also gleich $r=\frac{a}{2}\sqrt{2}$, also sein Flächeninhalt gleich

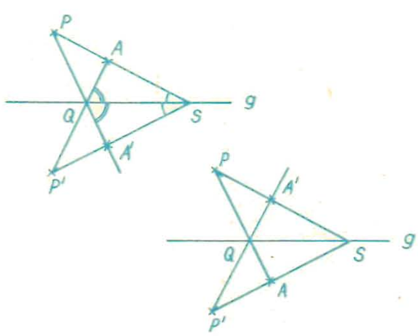
$$A_2=\pi r^2=\frac{\pi}{2}a^2.$$

Die Flächeninhalte der beiden Kreise verhalten sich also wie

$$A_1 : A_2=\frac{\pi}{4}a^2 : \frac{\pi}{2}a^2=\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=2:4=1:2.$$



*** 8 * 580** a) A liegt auf derselben Seite von g wie P (vgl. Abb. *a*). Da nach Voraussetzung A nicht den gleichen Abstand von P wie g hat, schneidet die Verbindungsgerade PA die Gerade g in einem Punkt S. Wir verbinden P' mit A und erhalten den Schnittpunkt Q dieser Verbindungsgeraden mit der Geraden g. Dann verbinden wir P mit Q; diese Verbindungsgerade schneidet die Gerade SP' in dem Punkt A'. Wir behaupten nun, daß A' der zu A in bezug auf die Gerade g symmetrisch gelegene Punkt ist.



Beweis: Da P und P' nach Voraussetzung in bezug auf die Gerade g symmetrisch liegen, gilt

$$\sphericalangle PQS=\sphericalangle P'QS,$$

ferner gilt

$$\sphericalangle PQA=\sphericalangle P'QA' \quad \text{(Scheitelwinkel)},$$

also $\sphericalangle AQS=\sphericalangle A'QS$. (1)

Außerdem gilt

$\sphericalangle QSA=\sphericalangle QSA'$ (2)

und $\overline{QS}=\overline{QS}$. (3)

Aus (1), (2) und (3) folgt nach einem Kongruenzsatz (*wsw*)

$\Delta QSA\cong\Delta QSA'$, (4)

also $\overline{SA}=\overline{SA'}$. (5)

Aus (2) und (5) folgt nun, daß A und A' in bezug auf die Gerade g symmetrisch liegen. w.z.b.w.

b) A und P liegen auf verschiedenen Seiten von g (vgl. Abb. *b*). Dann verbinden wir P mit A und erhalten den Schnittpunkt Q mit der Geraden g. Wir verbinden P' mit Q; diese Verbindungsgerade schneidet die Gerade SP in A'. A' ist der zu A in bezug auf die Gerade g symmetrisch gelegene Punkt.

Der Beweis wird analog wie im Falle a) geführt.

W 9 ■ 582 Die gegebene Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn $x^3+x^2>0$, d. h., $x^2(x+1)>0$ gilt.

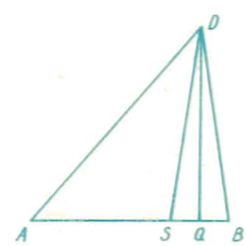
Für $x=0$ ist also die gegebene Ungleichung nicht erfüllt.

Nun gilt für alle x mit $x\neq0$ $x^2>0$
und für alle x mit $x>-1$ $x+1>0$,
dagegen für alle x mit $x<-1$ $x+1<0$.
Daher ist $x^2(x+1)>0$, wenn $x\neq0$ und $x>-1$,
und $x^2(x+1)<0$, wenn $x<-1$.

Die gegebene Ungleichung ist daher für alle x erfüllt, für die

$$x>-1 \quad\text{und}\quad x\neq0 \text{ gilt.}$$

W 9 ■ 583 Es sei Q der Mittelpunkt der Strecke $\overline{SB}$ (vgl. die Abb.). Dann gilt wegen $\overline{SB}=2$ cm $\overline{SQ}=\overline{QB}=1$ cm. Da das Dreieck SBD gleichschenklig mit $\overline{DS}=\overline{DB}=9$ cm ist, ist die Strecke $\overline{DQ}$ die Höhe in diesem gleichschenkligen Dreieck. Wir erhalten, wenn wir den Satz des Pythagoras in dem rechtwinkligen Dreieck SQD anwenden,



$$\overline{DQ}^2=\overline{DS}^2-\overline{SQ}^2=81\text{ cm}^2-1\text{ cm}^2=80\text{ cm}^2.$$

Nun können wir die gesuchte Länge der Strecke $\overline{AD}$ aus dem rechtwinkligen Dreieck AQD berechnen und erhalten

$$\overline{AD}^2=\overline{DQ}^2+\overline{AQ}^2=80\text{ cm}^2+64\text{ cm}^2=144\text{ cm}^2,\quad\text{also}\quad \overline{AD}=12\text{ cm}.$$

*** 9 * 584** Zur Lösung benutzen wir die folgende Formel für die dritte Potenz der Summe $a+b+c$, deren Richtigkeit wir durch Nachrechnung bestätigen können:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2)+6abc. \qquad (1)$$

Setzen wir in dieser Formel $a=xy$, $b=yz$, $c=zx$, so erhalten wir

$$(xy+yz+zx)^3=x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+3(x^2y^3z+xy^3z^2+xy^2z^3+x^2yz^3+x^3y^2z+x^3yz^2)+6x^2y^2z^2. \qquad (2)$$

Andererseits erhalten wir

$$xyz(x+y+z)^3=xyz\left[x^3+y^3+z^3+3(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2)+6xyz\right].$$

$$xyz(x+y+z)^3=xyz(x^3+y^3+z^3)+3(x^3y^2z+x^2y^3z+xy^3z^2+xy^2z^3+x^3yz^2+x^2yz^3)+6x^2y^2z^2. \qquad (3)$$

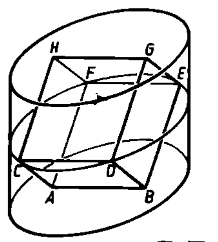
Wir erkennen, daß auf der rechten Seite der

Gleichungen (2) und (3) mit Ausnahme der ersten drei Summanden die Summanden übereinstimmen. Durch Subtraktion erhalten wir daher aus den Gleichungen (2) und (3):

$$(xy+yz+zx)^3-xyz\,(x+y+z)^3$$
$$=x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3-xyz\,(x^3+y^3+z^3). \quad (4)$$

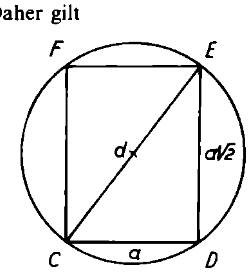
Diese Gleichung ist für alle reellen Zahlen x, y, z erfüllt.

W 10/12 ■ 586 Es sei $ABCDEFGH$ der in das Gefäß hineingestellte Würfel, dessen Kantenlänge wir mit a bezeichnen. Ferner seien $\overline{AB}$ die Kante des Würfels, die den Gefäßboden berührt, D, E, F, G die Ecken des Würfels, die die Gefäßwand berühren, $\overline{HG}$ die Kante des Würfels, die genau in der Wasseroberfläche liegt.



$\overline{CE}=\overline{DF}=\overline{AG}=\overline{BH}=d$

Dann ist das Viereck $CDEF$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{CD}=\overline{EF}=a$ und $\overline{DE}=\overline{FC}=a\sqrt{2}$, weil $\overline{CD}$ eine Kante und $\overline{DE}$ eine Flächendiagonale des Würfels ist. Da die vier Ecken C, D, E, F in gleicher Höhe über dem Gefäßboden liegen, ist dem Rechteck $CDEF$ ein Kreis umbeschrieben, der dem Grundkreis des Gefäßes kongruent ist und dessen Durchmesser gleich $d=30$ cm ist. Daher gilt



$$d^2=a^2+(a\sqrt{2})^2=a^2+2a^2=3a^2,$$

also $a^2=\frac{d^2}{3}$, $a=\frac{d}{3}\sqrt{3}$.

Ferner ist die Länge h der Höhe des zylindrischen Gefäßes bis zur Wasseroberfläche, gleich der Länge der Strecke $\overline{BG}$, die eine Flächendiagonale des Würfels ist; daher gilt

$$h=a\sqrt{2}=\frac{d}{3}\sqrt{6}.$$

Nun ist das Volumen V der eingefüllten Wassermenge gleich der Differenz aus dem Volumen eines geraden Kreiszylinders mit dem Durchmesser d und der Höhe h und dem Volumen des Würfels mit der Kantenlänge a. Wir erhalten daher

$$V=\frac{\pi}{4}d^2h-a^3=\frac{\pi}{4}d^2\frac{d}{3}\sqrt{6}-\frac{d^3}{27}3\sqrt{3}$$
$$=\frac{\pi d^3}{12}\sqrt{6}-\frac{d^3}{9}\sqrt{3}.$$

Setzt man nun den gegebenen Wert $d=30$ cm ein, so erhält man

$$V=\left(\frac{\pi\,30^3}{12}\sqrt{6}-\frac{30^3}{9}\sqrt{3}\right)\text{cm}^3$$

$(\pi\cdot 2250\sqrt{6}-3000\sqrt{3})\ \text{cm}^3\approx 12\,118\ \text{cm}^3$. Das Volumen der eingefüllten Wassermenge beträgt also rund 12,1 l.

W 10 12 ■ 587 a) Entnimmt man dem Gefäß $3+3+3+3=12$ Kugeln, so besteht im ungünstigsten Fall die Möglichkeit, daß man 3 weiße, 3 schwarze, 3 rote und 3 blaue Kugeln erhält, also nicht 4 Kugeln von der gleichen Farbe. Die Entnahme von 12 Kugeln reicht also noch nicht aus, um das gewünschte Ergebnis mit Sicherheit zu erreichen.

Entnimmt man jedoch 13 Kugeln, also eine Kugel mehr, so erhält man auch im ungünstigsten Fall 4 Kugeln von einer Farbe. Daher muß die Versuchsperson im Fall a) mindestens 13 Kugeln ziehen.

b) Entnimmt man dem Gefäß $100+9+9+9=127$ Kugeln, so besteht im ungünstigsten Fall die Möglichkeit, daß man 100 Kugeln von einer Farbe und je 9 Kugeln von einer anderen Farbe erhält, also nicht wenigstens je 10 Kugeln von zwei Farben. Die Entnahme von 127 Kugeln reicht also noch nicht aus. Entnimmt man jedoch noch eine weitere Kugel, so erhält man auch im ungünstigsten Fall 10 Kugeln von einer weiteren Farbe. Daher muß die Versuchsperson im Fall b) mindestens 128 Kugeln ziehen.

c) Entnimmt man dem Gefäß $100+100+100+9=309$ Kugeln, so besteht im ungünstigsten Fall die Möglichkeit, daß man je 100 Kugeln von je drei Farben und 9 Kugeln von der letzten Farbe erhält. Die Entnahme von 309 Kugeln reicht also noch nicht aus. Entnimmt man jedoch noch eine weitere Kugel, so erhält man auch im ungünstigsten Fall 10 Kugeln von jeder der vier Farben. Daher muß die Versuchsperson im Fall c) mindestens 310 Kugeln ziehen.

* 10 12 * 588 Es sei $f(x)=ax+b$ ein Polynom, für das die Bedingung der Aufgabe erfüllt ist. Dann gilt

$$f[f(x)]=a(ax+b)+b$$
$$=a^2x+ab+b. \text{ Da nun}$$

$f[f(x)]=2x+1$ gelten soll, erhalten wir die Gleichung

$$a^2x+ab+b=2x+1. \quad (1)$$

Diese Gleichung ist aber nur dann für alle x erfüllt, wenn die Koeffizienten übereinstimmen, wenn also

$a^2=2$ und $ab+b=1$ gilt. Ist nun (2)

$$a=\sqrt{2} \text{ und } b=\frac{1}{a+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$$
$$=\sqrt{2}-1,$$

so sind die Gleichungen (2) und damit auch die Gleichung (1) erfüllt.

Daher hat das Polynom

$f(x)=\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1$ die gesuchte Eigenschaft.

Ist nun $a=-\sqrt{2}$ und (3)

$$b=\frac{1}{a+1}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{1-2}=-\sqrt{2}-1,$$

so sind auch die Gleichungen (2) und (1) erfüllt. Daher hat auch das Polynom

$$f(x)=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}-1 \quad (4)$$

die gesuchte Eigenschaft. Wegen (2) gibt es keine weiteren linearen Polynome mit der gesuchten Eigenschaft.

Es gibt daher genau zwei lineare Polynome, für die die gegebene Bedingung erfüllt ist, nämlich

$$f(x)=\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1$$
und $$f(x)=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}-1.$$

6 ▲ 595 Es sei x die Anzahl der Fahrten zum Fahrpreis von 15 Pf und y die Anzahl der Fahrten zum Fahrpreis von 20 Pf, dann gilt $15x+20y=200$ bzw. $3x+4y=40$, wobei x und y natürliche Zahlen sind. Genau vier Zahlenpaare (x,y), nämlich die Paare (0,10), (4,7), (8,4) und (12,1) erfüllen die Gleichung.

Fahrten in Halle	Fahrten in Leipzig
0	10
4	7
8	4
12	1

6 ▲ 596 Es sei x die Anzahl der zu Pferde zurückgelegten Kilometer. Dann legte der Forscher mit dem Boot $3\frac{1}{2}$ km und zu Fuß $2\frac{1}{3}\cdot 3\frac{1}{2}x=\frac{49}{6}x$ km zurück. Die Gleichung $x+\frac{7}{2}x+\frac{49}{6}x=3040$ besitzt die Lösung $x=240$. Der Forscher legte also zu Pferde 240 km, mit dem Boot 840 km und zu Fuß 1960 km zurück.

7 ▲ 600 Wegen $k(a,b)=12$ gilt $a\cdot k=12$ und wegen $k(a,c)=27$ gilt $a\cdot m=27$; dabei sind k und m natürliche Zahlen. Wegen $2^2\cdot 3=12$ und $3^3=27$ und wegen $a>1$ folgt daraus $a=3$. Wegen $k(a,c)=27$ gilt daher $c=27$. Aus $c=27$ und $k(b,c)=108$ folgt, da b wegen $k(a,b)=12$ ein Teiler von 12 sein muß, $b=4$ oder $b=12$. Die Aufgabe besitzt somit zwei Lösungen; die beiden Tripel (3, 4, 27) und (3, 12, 27) erfüllen die gestellten Bedingungen.

7 ▲ 601 Das k.g.V. der Zahlen 8, 6 und 4 ist gleich 24. Die Bedingungen a) bis c) erfüllen alle Zahlen der Form $24n-1$ mit $n=1,2,3,4,\ldots$ Die Bedingung c) erfüllen alle Zahlen der Form $10m+1$ mit $m=0,1,2,3,4,\ldots$ Die kleinste natürliche Zahl, die alle vier Bedingungen erfüllt, ist demnach die Zahl 71; denn aus $n=3$ folgt $24n-1=71$ und aus $m=7$ folgt $10m+1=71$. Das k.g.V. der Zahlen 8, 6, 4 und 10 lautet 120. Alle Zahlen der Form $120k+71$ mit $k=1,2,3,\ldots$, 7 erfüllen die Bedingungen der Aufgabe; es gibt sieben solche Zahlen, sie lauten 191, 311, 431, 551, 671, 791, 911.

8 ▲ 605 Da p eine Primzahl mit $p>3$ ist, läßt sich p in der Form $p=2k+1$ darstellen, wobei k eine natürliche Zahl mit $k>1$ ist. Man erhält daher

$$p^2-1=(p-1)(p+1)=2k(2k+2)$$
$$=4k(k+1),$$

wobei entweder k oder $k+1$ eine gerade Zahl ist. Daher ist p^2-1 durch 8 teilbar.

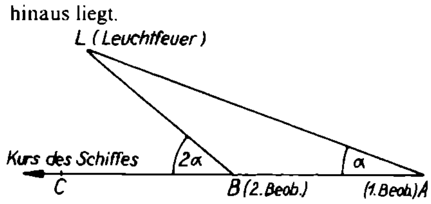
Andererseits läßt sich aber die Primzahl p, die größer als 3 ist, auch in der Form $3n+1$ oder $3n-1$ darstellen, wobei n eine natürliche Zahl mit $n>1$ ist; denn p ist nicht durch 3 teilbar, ist also entweder um 1 größer oder um 1 kleiner als ein Vielfaches von 3. Man erhält daher

entweder $p^2-1=(p-1)(p+1)=3n(3n+2)$

oder $p^2-1=(p-1)(p+1)=(3n-2)3n$.

Man erkennt, daß in beiden Fällen p^2-1 durch 3 teilbar ist. Da die Zahl p^2-1, wobei p größer als 3 ist, sowohl durch 8 als auch durch 3 teilbar ist, ist sie auch durch 24 teilbar, w.z.b.w.

8 ▲ 606 Es seien A der Standort des Schiffes bei der ersten Beobachtung, B der Standort bei der zweiten Beobachtung und L der Standort des Leuchtfeuers (vgl. die Abb.). Ferner sei C ein Punkt auf der Geraden AB, der auf der Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus liegt.



Dann gilt nach Voraussetzung

$\sphericalangle BAL=20°=\alpha$, $\sphericalangle CBL=40°=2\alpha$.

Nach dem Satz über die Außenwinkel des Dreiecks gilt daher

$\sphericalangle CBL=\sphericalangle BAL+\sphericalangle ALB$,

also $2\alpha=\alpha+\sphericalangle ALB$, d.h., $\sphericalangle ALB=\alpha$.

Das Dreieck ALB ist also gleichschenklig mit $\overline{LB}=\overline{AB}$. Nun hat das Schiff nach 20 min Fahrt 5 sm zurückgelegt; daher ist $\overline{AB}=5$ sm und auch $\overline{BL}=5$ sm.

Das Schiff ist also bei der zweiten Beobachtung 5 sm von dem Leuchtfeuer entfernt.

Zur Anfertigung einer maßstäblichen Zeichnung zeichnen wir die Strecke $\overline{AB}=5$ sm $\triangleq 5$ cm, tragen an den Strahl AB einen Winkel von 20° und an den Strahl BC einen Winkel von 40° an. Die freien Schenkel dieser Winkel schneiden sich in L. Wir entnehmen der Zeichnung $\overline{BL}=5$ cm $\triangleq 5$ sm, womit das obige Ergebnis durch die Zeichnung bestätigt wurde.

9 ▲ 610 1. Am schnellsten löst man solche Aufgaben wie die vorliegende mit Hilfe von *Zahlenkongruenzen*. Wir erhalten nämlich

$13 \equiv 4 \pmod 9$, $7 \equiv 7 \pmod 9$,
$13^2 \equiv 7 \pmod 9$, $7^2 \equiv 4 \pmod 9$,
$13^3 \equiv 1 \pmod 9$, $7^3 \equiv 1 \pmod 9$; also
$13^{3k} \equiv 1 \pmod 9$, $7^{3k} \equiv 1 \pmod 9$,
$13^{3k+1} \equiv 4 \pmod 9$, $7^{3k+1} \equiv 7 \pmod 9$,
$13^{3k+2} \equiv 7 \pmod 9$, $7^{3k+2} \equiv 4 \pmod 9$,

wobei k eine beliebige natürliche Zahl ist. Daher gilt

für $n=3k$: $2\cdot 13^n+5\cdot 7^n$
$\equiv 2\cdot 1+5\cdot 1\equiv 7 \pmod 9$,

für $n=3k+1$: $2\cdot 13^n+5\cdot 7^n$
$\equiv 2\cdot 4+5\cdot 7\equiv 43\equiv 7 \pmod 9$,

für $n=3k+2$: $2\cdot 13^n+5\cdot 7^n$
$\equiv 2\cdot 7+5\cdot 4\equiv 34\equiv 7 \pmod 9$.

In allen Fällen läßt also die Zahl $2\cdot 13^n+5\cdot 7^n$ bei Division durch 9 den gleichen Rest, nämlich den Rest 7.

2. Wer noch nicht mit Zahlenkongruenzen rechnen kann, kann die Aufgabe auch anders lösen, z. B. wie folgt:

Wir setzen $z_n=2\cdot 13^n+5\cdot 7^n$ und erhalten zunächst

$$z_0=2\cdot 1+5\cdot 1=7,$$
$$z_1=2\cdot 13+5\cdot 7=61,$$
$$z_2=2\cdot 13^2+5\cdot 7^2=583.$$

In diesen drei Fällen erhalten wir bei Division durch 9 den Rest 7.

Um den Beweis allgemein zu führen, untersuchen wir die drei Fälle $n=3k$, $n=3k+1$, $n=3k+2$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Ferner setzen wir

$13^3=2\,197=9\cdot 244+1$, $7^3=343=9\cdot 38+1$

und beachten, daß

$(9\cdot 244+1)^k=9m+1$, $(9\cdot 38+1)^k=9n+1$,

wobei m und n natürliche Zahlen sind; denn führt man die Multiplikation der gleichen Faktoren aus (oder wendet den Binomischen Satz an), so erhält man eine Summe, deren Summanden alle den Faktor 9 enthalten mit Ausnahme des letzten, der gleich 1 ist.

Daher gilt für

$$\begin{aligned}
n=3k:\ z_n &= 2\cdot(13^3)^k+5\cdot(7^3)^k\\
&=2\cdot(9m+1)+5\cdot(9n+1)\\
&=9\cdot(2m+5n)+7;\\
n=3k+1:\ z_n &=2\cdot 13\cdot(13^3)^k+5\cdot 7\cdot(7^3)^k\\
&=26\cdot(9m+1)+35\cdot(9n+1)\\
&=9\cdot(26m+35n)+26+35\\
&=9\cdot(26m+35n)+9\cdot 6+7;\\
n=3k+2:\ z_n &=2\cdot 13^2\cdot(13^3)^k+5\cdot 7^2\cdot(7^3)^k\\
&=338\cdot(9m+1)+245\cdot(9n+1)\\
&=9\cdot(338m+245n)+338+245\\
&=9\cdot(338m+245n)+9\cdot 64+7.
\end{aligned}$$

In allen drei Fällen erhalten wir daher, wenn wir z_n durch 9 dividieren, den Rest 7, w.z.b.w.

Nachtrag zu Heft 6/70, S. VI., Aufgabe 3, Klassenstufe 9:

2. Weg: Multiplikation von (1) mit $(n+1)$ ergibt

$mnx+mx=ny+nz+y+z$,

Multiplikation von (2) mit $(m+1)$ ergibt

$mny+ny=mx+mz+x+z$,

Multiplikation von (3) mit $(mn-1)$ ergibt

$mnpz-pz=mnx+mny-x-y$.

Nach Addition der drei erhaltenen Gleichungen und Division durch $z\,(\neq 0)$ folgt (4).

Aus (4) folgt wegen $m>0$, $n>0$, $p>0$, daß $mn-1>0$ ist. Daher kann die gesuchte Abhängigkeit nur

(7) $\quad p=\dfrac{m+n+2}{mn-1}$ lauten.

Umgekehrt kann von (1), (2), (7) auf (1), (2), (3) geschlossen werden, und daher erfüllt (7) in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe.

Ein Beispiel für eine mögliche Durchführung des Schlusses von (1), (2), (7) auf (1), (2), (3):

Aus (7) folgt $mn-1\neq 0$ sowie (4) und daraus

$(mn-1)\,pz=(nz+z)+(mz+z)$

Unter Verwendung der mit $(n+1)$ multiplizierten Gleichung (1) und der mit $(m+1)$ multiplizierten Gleichung (2) folgt weiter

$$\begin{aligned}
(mn-1)\,pz &=(mnx+mx-ny-y)\\
&\quad+(mny+ny-mx-x)\\
&=(mn-1)(x+y),
\end{aligned}$$

also schließlich (3).

Lösungen zu alpha-heiter

alphaismen

Sophie – Minirock – Rodelpiste – Etage – Rohling – Gemüse – Nylon – Büroklammer – Minol – VEB Taxi – Veronika – Minimum – Nildelta – Malfabrot – Müll – Bikini

Lang, länger, am längsten

(1) $4a+8c+4b$; (2) $4a+4c$; (3) $6a+4c+6b$

a) (1)>(2) und (3)>(2) führt auf : (2) benötigt den wenigsten Bindfaden.

b) $(1)-(2)=4c+4b$; $(3)-(2)=2a+6b$

Voraussetzung:

$a+b>2c \quad |+2b$
$a+3b>2c+2b \quad |\cdot 2$
$2a+6b>4c+4b$ ergo (3)>(1)

Reihenfolge: (2)<(1)<(3)

Werterhaltung

1. Weg: Die Ölschicht stellt einen Hohlzylinder dar.

$$V_{HZ}=\left[\frac{\pi(d+2s)^2}{4}-\frac{\pi d^2}{4}\right]l=\pi s l(d+s)$$

Da s gegenüber d klein ist, wird es als Summand weggelassen.

$V_{HZ}\approx \pi d l s$

Der Durchmesser der Kugel sei x.

$$V_{Ku}=\frac{\pi x^3}{6}$$

$x=\sqrt[3]{6dls}$

2. Weg: Die Ölschicht wird näherungsweise als Quader mit den Kanten πd, l und s aufgefaßt.

$V_{Qu}=\pi d l s$

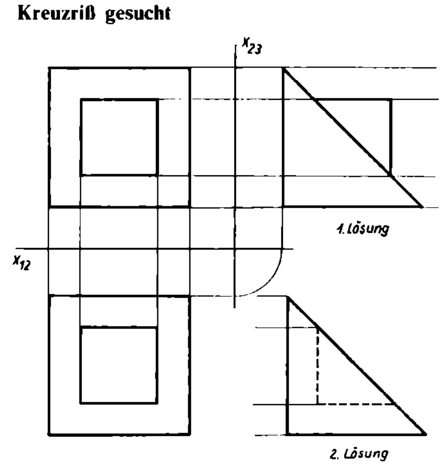
Weiter wie beim 1. Weg.

Zahlenfall

$x=\sqrt[3]{6\cdot 0,1\cdot 5\cdot 0,001}\approx 0,14$

Der Durchmesser des Tropfens beträgt rund 1,4 mm.

Kreuzriß gesucht



alpha-Abzeichen in Gold

Für dreijährige regelmäßige und erfolgreiche Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb erhielten 150 *alpha*-Leser das Abzeichen in Gold sowie eine Anerkennungsurkunde. Die im Druck hervorgehobenen Schüler erhielten Buchprämien. Die in Klammern gesetzten Zahlen geben die Anzahl der im Wettbewerbsjahr 1969/70 eingesandten Lösungen an.

Klassenstufe 5

Sigrun Geyer Dares-Salaam, Rep. Tanzania (32); **Ole-Andrée** Strzalla 22 Greifswald (30); **Annegret Kirsten** 422 Leuna (27); **Eckhard Schadow** 14 Oranienburg (24); **Matthias Liehm** 172 Ludwigsfelde

Klassenstufe 6

Sabine Anders 75 Cottbus (49); **Kerstin Bachmann** 402 Halle (36); **Carmen Schneider** 6081 Fambach (25); **Karin Weyh** 6081 Fambach (24); **Wolfgang Richter** 83 Pirna (23); **Ute Heimel** 6081 Fambach; Andrea Messerschmidt 6081 Heßles; Uta Zebisch 6081 Fambach; Gudrun Manske 6088 Steinbach-Hallenberg; Marina Volk 6081 Fambach; Gerd Oberwinter 1503 Potsdam-Bornstedt; Achim Last 6081; Viktoria Weise 48 Naumburg; Detlef Ballerstein 2201 Bandelin; Joh.-Christian Albrecht 1281 Rüdnitz; Matthias Albrecht 1281 Rüdnitz

Klassenstufe 7

Bernd Zaddach 75 Cottbus (76); **Bernd Mathiszik** 50 Erfurt (50); **Ralph Lehmann** 1273 Petershagen (40); **Christoph Scheurer** 9611 Glauchau-Gesau (30); **Jörg Hutschenreiter** 8020 Dresden (29); **Christian Endter** 6088 Steinbach-Hallenberg (24); **Angelika Kirchhoff** 701 Leipzig (21); **Heike Jurack** 8502 Burkau (19); Dagmar Rißmann 8021 Dresden; Gerd Falk 1522 Kleinmachnow; Uwe Quasthoff 7022 Leipzig; Andreas Gehb 6081 Fambach; Uwe Lewandovski 705 Leipzig; Rita Oswald 8291 Friedersdorf; Hans-Jürgen Förster 1532 Kleinmachnow; Roswitha Schlotte 90 Karl-Marx-Stadt; Ute Rosenbaum 9402 Bernsbach; Bettina Zabel 57 Mühlhausen; Gisela Köhler 926 Hainichen; Edda Günther 6506 Ronneburg; Eveline Wolf 6081 Fambach; Bernd Heymann 7027 Leipzig; Lutz Püffeld 1422 Hennigsdorf; Hans-Jochen Rodner 3014 Magdeburg; Karin Fischer 8036 Dresden; Cornelia Johne 8023 Dresden; Roswitha Leyh 5906 Ruhla; Eugen Büchner 6081 Springstille; Uwe Hafermann, 5801 Gräfenhain; Elke Schneider 50 Erfurt; Christa Linß 6081 Springstille; Bernd Henrich 9402 Bernsbach; Adelheid Ficker 9402 Bernsbach; Georg Linß 6081 Springstille; Eberhard Eff 6088 Steinbach-Hallenberg; Christa Ssyckov 8502 Burkau; Rainer Schwierz 8502 Burkau; Hans-Ulrich Frömmer 208 Neustrelitz; Andre Schübel 6051 Goldlauter; Bernd Bielig 8502 Burkau; Monika Mücke 8312 Heidenau; Wolfgang Herrmann 6088 Steinban- Hallenberg; Bernhard Rabending 301 Magdeburg; Annette Hessenmüller 6081 Fambach; Jost-Michael Fischer 1431 Grüneberg; Annelie Häfner 6088 Steinbach-Hallenberg; Henrik Frank 22 Greifswald; Hans-Peter Heller 608 Schmalkalden; Reinhild Fuhrmann 5801 Nauendorf; Cornelia Neumann 89 Görlitz; Claus Neumann 9402 Bernsbach

Klassenstufe 8

Rainer Zerch 24 Wismar (51); **Albrecht Heß** 8027 Dresden (40); **Ehrenfried Zschech** 86 Bautzen (27); **Herwig Gratias** 523 Sömmerda (26); **Angela Rohrbeck** 2302 Franzburg (25); **Bernd Klipps** 2051 Boddin (23); **Eberhard Manske** 6088 Steinbach-Hallenberg (22); Claus-Detlev Bauermeister 8019 Dresden; Frank Ihlenburg 22 Greifswald; Volker Lippoldt 7022 Leipzig; Bernd Singer 99 Plauen; Sigrid Jankowski 205 Teterow; Dietlind Kobes 205 Teterow; Rita Koch 6081 Trusetal; Volker Boos 4601 Dabrun; Renate Recknagel 6088 Steinbach-Hallenberg; Steffen Goetz 9201 Dorfchemnitz; Renate Köhler 66 Greiz-Pohlitz; Lothar Bombel 1281 Rüdnitz; Dieter Bornmann 6082 Breitungen; Ralf Suchert 8302 Bad Gottleuba; Frank Baumgartl 9412 Schneeberg; Wilfried Nätebusch 1501 Alt-Töplitz; Elke Wolf 6081 Fambach; Hans-Jürgen Reinsch 171 Luckenwalde; Andreas Eidner 9271 Falken; Hendrik Latwesen 63 Ilmenau; Günter Rieckhoff 2801 Blievenstorf; Regina Neuber 6088 Steinbach-Hallenberg; Peter Linhard 7305 Waldheim; Monika Seiler 53 Weimar

Klassenstufe 9

Andreas Juhl 425 Eisleben (25); **Jürgen Zabel** 57 Mühlhausen (22); **Gernot Spiewok** 22 Greifswald (19); **Harald Herrmann** 9301 Hammerunterwiesenthal (17); **Peter Mathé** 29 Wittenberge (16); **Gerhard Recknagel** 6088 Steinbach-Hallenberg (16); **Ullrich Tetzlaff** 1553 Friesack; **Sigrid Straßburger** 606 Zella-Mehlis; **Reinhard Liesigk** 44 Bitterfeld; Karin Krüger 453 Roßlau; Peter Mohr 87 Löbau; Ulrike Voigt 9533 Wilkau-Haßlau; Annerose Lehmann 7027 Leipzig; Jörg Lehnert 2034 Tutow; Ingrid Preiß 929 Rochlitz; Rainer Wilde 1953 Fehrbellin; Beate Weise 48 Naumburg; Tilo Stöckert 99 Plauen; Barbara Kiehm 6088 Steinbach-Hallenberg; Hans-J. Karl 612 Eisfeld

Klassenstufe 10

Frank Müller 798 Finsterwalde (40); **Heinz Marbes** 128 Bernau (38); **Arnulf Möbius** 7124 Holzhausen (27); **Jörg Büchner** 75 Cottbus (25); **Siegfried Kropf** 3251 Hakeborn (23); **Dietmar Wegner** 114 Berlin-Biesdorf (22); **Ilona Boenigk** 94 Aue (20); **Wolfgang Riedel** 90 Karl-Marx-Stadt (17); Detlef Karl 608 Schmalkalden; Klaus Dietze 36 Halberstadt; Rainer Gutjahr 5807 Ohrdruf; Bernd Platzer 4204 Bad Lauchstädt; Frank Kretzschmar 7043 Leipzig; Klaus Schönefeld 53 Weimar; Norbert Köppe 1801 Glienecke; Bernd Hofmann 8808 Niederoderwitz; Jürgen Dubslaff 50 Erfurt; Petra Jauch 59 Eisenach; Christian Philipp 8506 Ohorn; Hans-Dieter Recknagel 6088 Steinbach-Hallenberg; Renate Zimmermann 8036 Dresden; Hans-Jürgen Mehls 5603 Dingelstädt; Jürgen Voigt 9533 Wilkau-Haßlau; Rainer Kutscha 8701 Rennersdorf; Thomas Kühn 5812 Waltershausen; Gudrun Zschocke 9112 Burgstädt

Vorbildliche Hilfe

Anfang November wurden 120 Päckchen mit Buchprämien für die Preisträger des Wettbewerbs 1969/70 versandt.

Wir danken den Verlagen, welche uns Bücher im Wert von 1 500 M zur Verfügung stellten. Das ist ein echtes Zeichen der Anerkennung für die vielen Tausend aktiven Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb.

Einen wertvollen Beitrag zur weiteren Qualifizierung unserer Leser leisteten:

■ VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin ■ VEB Fachbuchverlag, Leipzig ■ Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin ■ Transpress, VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin ■ VEB Verlag Technik, Berlin ■ Sportverlag, Berlin ■ Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin ■ BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig ■ Der Kinderbuchverlag, Berlin ■ Verlag Leipziger Volkszeitung, Leipzig ■ Verlag Die Wirtschaft, Berlin.

Kollektive Beteiligung

Alle Schulen des Kreises Schmalkalden; OS Rudi Arndt, Geisa; OS Hainrode; Klub Jg. Mathematiker Cottbus; OS Eilenburg; OS Teterow; OS Parkentin; M.-A.-Nexö-OS, Marienberg; OS II Dingelstädt; E.-Thälmann-OS, Stralsund; OS Alt-Töplitz; J.-Brinckman-OS, Goldberg; EOS Worbis/Eichsfeld; TOS Neuenhofe; E.-Weinert-OS, Altkalen; OS Mahlis; *alpha*-Club Stralsund (Triebser Vorstadt); OS Burkau; OS Rüdnitz; OS Leinefelde; OS Greußen; OS Bad Gottleuba; OS Prießnitz; Comenius-OS, Oranienburg; OS Dorfchemnitz; OS Löderburg; OS Karow; OS M.-Kirchner, Rudolstadt; K.-Kollwitz-OS, Bützow; G.-Schumann-OS, Lauchhammer; OS Greiz-Irchwitz; OS Wurzen; F.-Reuter-OS Siedenbollentin; E.-M.-Arndt-OS, Greifswald; OS Altentreptow; H.-Beimler-OS, Rothenkirchen; OS Gusen; C.-Zetkin-OS, Wiehe/Unstruttal; 29. OS Leipzig; OS II Seelow; OS F.-Schmenkel, Schwedt; Klub Jg. Mathematiker, Karl-Marx-Stadt; OS Naunhof; OS Rotta; OS Radis

Wissen, wo ...

Inhaltsverzeichnis 1967/70

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

OJM
DDR

10 Jahre Olympiaden Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
5. Jahrgang 1971
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

2

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import BmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Eigenfoto H.-U. Schwarz, Jena; H. Richter, Jena; D. Bauer, Leipzig (alle S. 25/26); Eigenfoto V. Nikolajewa-Tereschkowa, Moskau; Zentralbild (S. 27/28); J. Lehmann, Leipzig; „Freiheit“ Wittenberg; Eigenfoto B. Worel, Neubrandenburg (S. 30/31); J. Lehmann, ADN (S. 36); Briefmarkenentwürfe Klunker, Herzberg (S. 43);
Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 25. Januar 1971

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

10 Jahre Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Hans-Ulrich Schwarz:

Ich war Teilnehmer der I. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

(27. 4. 1962 — Olympiadeklasse 10, EOS)

In diesem Jahr wird die *X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR durchgeführt.* Grund also, ein bescheidenes Jubiläum zu feiern bzw. einen Blick zurück zu tun. An meiner Entwicklung vermag man zu erkennen, wie bedeutungsvoll eine Teilnahme und ein gutes Abschneiden sein können.

Geboren 1946 in Achelstädt, einem kleinen Dorf des Kreises Arnstadt, eingeschult in Isserstedt bei Jena, umgeschult an die Westschule in Jena, delegiert an die EOS „Grete Unrein“ in Jena, hatte ich bis in die 10. Klasse kaum mehr mit Mathematik zu tun als die übrigen Schüler meines Jahrgangs. Es sei denn, man hielte das Verfahren meines Vaters, mich als „Versuchskaninchen“ bei der Erprobung von Mathematikarbeiten für seine Klasse einzusetzen, für eine Förderung. Arbeitsgemeinschaften, Spitzenzirkel, Spezialistenlehrgänge usw. gab es damals noch nicht.

Mein 1. Platz beim Kreisausscheid der *I. Olympiade Junger Mathematiker der DDR* in der Klassenstufe 10 war deshalb eine Überraschung auch für mich. Anfangs etwas tastend und sporadisch, später, nachdem ich auch beim Bezirksausscheid und beim DDR-Ausscheid Bester der Klassenstufe geworden war, immer bewußter und intensiver begann ich, mich mit der im allgemeinen als spröde verschrieenen Mathematik zu beschäftigen. Praktisch im Selbststudium arbeitete ich etliche mathematische Werke durch. Verständnisvolle Unterstützung fand ich bei meinen Lehrern und meinen Eltern.

Im folgenden Jahr beteiligte ich mich in der Klassenstufe 12, obwohl ich erst die 11. Klasse besuchte. Dies geschah nicht aus Überheblichkeit, aber ein DDR-Ausscheid wurde damals nur für die Klassen 10 und 12 durchgeführt. Ich hoffte, so unter „ferner liefen“ über die einzelnen Stufen bis zum DDR-Ausscheid zu kommen. Die dabei gewonnenen Erfahrungen sollten mir dann im nächsten Jahr von Nutzen sein. Daß es anders kam, daß ich nicht nur auf Kreis- und Bezirksebene, sondern auch in Berlin den 1. Platz belegen würde, das hat niemand vorausgesehen. Die Freude war natürlich riesengroß. Von allen Seiten kamen Gratulationen, zahlreiche Zeitungen brachten mein Bild mit entsprechenden Würdigungen. Ich gehörte auch zu der Mannschaft, die unsere Republik bei der V. IMO in der VR Polen vertrat. Da die mathematischen Wettbewerbe damals bei uns keine solchen Traditionen besaßen wie beispielsweise in der Ungarischen VR oder der UdSSR, war es bereits ein Erfolg, als wir mit drei 3. Preisen zurückkehrten. Die Tage in der VR Polen waren natürlich erlebnisreich. Interessant war auch das Zusammentreffen mit *Jungen Mathematikern* der sozialistischen Länder. Mit einigen schloß ich enge Freundschaft, stehe noch in brieflicher Verbindung, und es kam auch zu gegenseitigen Besuchen.

Vor 10 Jahren: Hans-Ulrich Schwarz nimmt die Urkunde: 1. Preis in der Klassenstufe 10, EOS (Siegerfeier in Jena) entgegen

Heute: Dr. Hans-Ulrich Schwarz, Diplom-Mathematiker an der Friedrich-Schiller-Universität, z. Z. Ehrendienst in der NVA

Selbstverständlich beteiligte ich mich als Schüler der 12. Klasse an der *III. Olympiade Junger Mathematiker der DDR*. Wieder belegte ich in allen drei Stufen den 1. Platz. An der IMO in Moskau konnte ich aber leider nicht teilnehmen, denn ich war inzwischen Student geworden. Einer Anregung der *Jungen Welt* folgend, hatte sich der damalige Direktor des Mathematischen Institutes der Friedrich-Schiller-Universität in Jena, Herr Professor Dr. *Kerstan*, entschlossen, mich als Mathematikstudent zu immatrikulieren, obwohl ich noch kein Abitur besaß. Dieses Beispiel hat meines Wissens nicht viel Nachfolger gefunden. Damit ich den Stoff des ersten Semesters besser aufholen konnte, drückte mir Prof. Dr. *Kerstan* den „Fichtenholz“ in der Ursprache in die Hand. Dadurch besserten sich nicht nur meine mathematischen, sondern auch meine Russisch-Kenntnisse. Natürlich, leicht war es nicht, mit den andren gleichzuziehen und wieder zur Spitze zu gehören. Aber ich schaffte es, und das „Karl-Marx-Stipendium“ war mein Lohn.

Von den drei Spezialrichtungen Kybernetik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Funktionsanalysis, die in Jena zur Wahl standen, gefiel mir die letzte am besten. Unter der Anleitung von Prof. Dr. *Pietsch* kam ich hier zum erstenmal mit Forschungsthemen in Berührung. 1968 fertigte ich meine Diplomarbeit über *Normideale* an. In meinem Studienjahr war auch *Lutz Bernhardt*, der 1963 ebenfalls Mitglied der DDR-Mannschaft bei der IMO in der VR Polen war. Er hatte sich dann für die Spezialrichtung Kybernetik entschieden. Im 4. Studienjahr gründete er einen Studentenzirkel mit dem Ziel, ein Programm für den Rechenautomaten ZRA 1 aufzustellen, mit dem man Stundenpläne aufstellen kann. Das Programm sollte den Verantwortlichen die verzwickte und langwierige Puzzelei abnehmen und optimale Lösungen bringen. Das ist uns auch recht gut gelungen. Nicht nur die Arbeit in diesem Zirkel machte uns allen Spaß, eine Studienreise nach Grusinien, die wir mit dem *Universitätspreis* als Auszeichnung erhielten, war ein unvergeßliches Erlebnis.

Nach Abschluß des Studiums arbeitete ich in Jena an der Sektion Mathematik als Assistent. Im Herbst 1969 trat ich meinen Ehrendienst bei der NVA an. In meiner Freizeit konnte ich die abschließenden Arbeiten an meiner Dissertation durchführen. Zur Verteidigung im Juni 1970 erhielt ich von meiner Einheit Sonderurlaub. Meine Doktorarbeit handelt ebenfalls von Normidealen. Nach meiner Entlassung werde ich wieder an der Universität in Jena tätig sein.

Zum Abschluß eine Aufgabe (sie ist vielleicht typisch für mein Fachgebiet, sie läßt erkennen, wie auch hier elementare Hilfsmittel angewendet werden können):

9▲691 Man beweise für beliebige positive Zahlen a, b, p die Ungleichung

$$\frac{2^{p+1}ab}{(a^{\frac{1}{p}}+b^{\frac{1}{p}})^p} \leqq a+b.$$

(Das Gleichheitszeichen gilt für $a=b$.)

Klaus-Ulrich Schwarz

Peter Beckmann:

Ich war Teilnehmer der I. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

(27. 4. 1962 — Olympiadeklasse 10, OS)

Zum zehnten Mal wetteifern Tausende Schüler unserer Republik bei der Mathematik-Olympiade, ermitteln die Besten der Schulen, Kreise, Bezirke und der DDR. Ihr Wettbewerb ist spannend und auch anstrengend wie ein sportlicher. Es siegt, wer das größte Wissen und die besten Nerven hat, so wie im Sport der siegt, der die größte Kondition hat und nervlich stark ist.

Uns Teilnehmern der *I. Olympiade Junger Mathematiker der DDR* ist es nicht mehr vergönnt, unsere mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten im „sportlichen" Wettbewerb zu messen. Die weitaus meisten „Pioniere" der Mathematik-Olympiaden nutzen heute diese Fähigkeiten in der täglichen Arbeit, lösen technische, ökonomische sowie auch rein mathematische und theoretisch-physikalische Probleme, bilden Schüler und Studenten aus. Vielen half die Teilnahme an den Olympiaden bei der Berufswahl, sie studierten Mathematik. So wandte sich beispielsweise mein Interesse mehr und mehr dieser eleganten Wissenschaft zu, nachdem ich erfolgreich bei den Olympiaden mitgestritten hatte, während ich mich zuvor besonders mit Naturwissenschaften beschäftigt hatte, vor allem chemische Experimente machte und den Wunsch hatte, einmal Chemie zu studieren. Die Mathematik-Olympiade 1962 gab dabei den Ausschlag. Wie bereits im Vorjahr bei der Stadtolympiade Leipzigs hatte ich in der Stadt und im Bezirk gute Plätze belegt und erreichte völlig unerwartet beim Republikausscheid den 1. Platz der 10. Klasse für Schüler der polytechnischen Oberschule. Seitdem war es mein Wunsch, Mathematiker zu werden.

In den folgenden drei Jahren erlernte ich in einer Abiturklasse den Beruf eines Chemielaboranten. Ich nahm auch weiterhin an den Mathematik-Olympiaden teil. Zu dieser Zeit begann eine systematische Vorbereitung in Zirkeln und Lehrgängen, insbesondere auf die Bezirks- und Republikausscheide. Das in diesen Vorbereitungszirkeln Gelernte war noch in den ersten Studienjahren eine wesentliche Hilfe.

1965 begann ich schließlich ein Mathematikstudium an der Karl-Marx-Universität in Leipzig, und seit September 1970 bin ich als wissenschaftlicher Assistent an der Sektion Mathematik tätig. Dabei blieb ich mit der „Olympiade-Bewegung" verbunden, war Zirkelleiter in Mathematik-Lagern, die vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit Leipzig organisiert wurden, war Korrektor bei Bezirks- und Republik-Olympiaden und leite jetzt einen Zirkel für die besten Schüler der 10. und 11. Klassen des Bezirkes Leipzig. Ein ganzes System solcher Zirkel hat die FDJ-Organisation unserer Sektion als Jugendobjekt übernommen. Den Olympiaden und den damit verbundenen Zirkeln messen wir eine große Bedeutung bei, schließlich braucht unser Staat auch in den nächsten Jahren und Jahrzehnten viele Mathematiker, ebenso werden sich die anderen Wissenschaften immer mehr der Mathematik bedienen müssen.

Vor 10 Jahren: Peter Beckmann, 1. Preisträger der Klassenstufe 10, OS (Siegerfeier in Jena)

Heute: Diplom-Mathematiker Peter Beckmann, Karl-Marx-Universität Leipzig, bei einem Vortrag vor *Jungen Mathematikern* des Bezirks Leipzig

Euch *Jungen Mathematikern* wünsche ich viel Freude an unserer Wissenschaft und Erfolg im Mathematikunterricht und in der außerunterrichtlichen Arbeit, außerdem möchte ich Euch noch eine Aufgabe stellen:

8▲692 In einem pythagoreischen teilerfremden Zahlentripel a, b, c sei a die ungerade und b die gerade Zahl. Dann läßt sich das Tripel darstellen durch

(1) $a=pq,\ b=\frac{p^2-q^2}{2},\ c=\frac{p^2+q^2}{2}$ mit $p>q>0$,

wobei p und q teilerfremd und beide ungerade sind, oder durch

(2) $a=m^2-n^2,\ b=2mn,\ c=m^2+n^2$ mit $m>n>0$,

wobei m und n teilerfremd sind und eine der beiden Zahlen gerade ist. Man drücke nun das Paar p, q durch das zugehörige m, n aus und umgekehrt.

Peter Beckmann

Bei den Internationalen Mathematikolympiaden von Schülern der DDR errungene Preise

IMO	1. Preis	2. Preis	3. Preis
I. (1959)	—	—	—
II.	—	—	—
III.	—	—	1
IV.	—	1	—
V.	—	—	3
VI.	—	1	2
VII.	—	2	3
VIII.	3	3	—
IX.	3	3	1
X.	5	3	—
XI.	—	4	4
XII. (1970)	1	2	4

Aus dem „Mathematikbeschluß" vom 17. Dezember 1962 zitiert

„Die Olympiaden Junger Mathematiker sind ein wirksames Mittel zur Weckung des Interesses aller Schüler an der Mathematik und zur Auswahl und Förderung befähigter Schüler. Damit tragen sie wesentlich zur Verbesserung der mathematischen Bildung bei.

Die Förderung erfolgreicher Teilnehmer der mathematischen Olympiaden und anderer mathematisch befähigter Schüler ist eine gemeinsame Aufgabe der Schule und der Volksbildungsorgane, der Mathematischen Gesellschaft der DDR, der Wissenschaftler der Hoch- und Fachschulen, der wissenschaftlich-technischen Kader der Betriebe und Forschungsstätten sowie der gesellschaftlichen Organisationen."

10 Jahre Weltraumflug

„Tiefbewegt schaute ich in die für mich ungewohnte neue Welt und war bemüht, alles zu sehen und mir einzuprägen. Erstaunlich klar und kalt erblickte ich durch die Bordfenster die Sterne. Zu ihnen war es noch weit — so weit! —, und dennoch schienen sie von der Bahn des Raumschiffes „Wostok" aus näher zu sein als von der Erde. Natürlich geht es hier nicht um einige hundert Kilometer, die im Vergleich zu den Lichtjahren, die uns von den Sternen trennen, wie ein Tropfen im Ozean sind. Vielmehr handelt es sich um das Prinzip: Der Mensch hat die Schwerkraft der Erde überwunden und ist in den Weltraum vorgestoßen." *J. A. Gagarin*

J. A. Gagarin vor dem Start am 12. 4. 1961

Vor 10 Jahren, am 12. April 1961, gingen die Träume und Pläne des russischen Gelehrten *Ziolkowski* in Erfüllung: *Juri Alexejewitsch Gagarin* startete an diesem Tage mit dem Raumschiff Wostok I, umkreiste als erster Mensch die Erde einmal auf einer Kreisbahn in 327 km Höhe und landete danach wieder auf der Erde.

In diesem Beitrag wollen wir uns nicht mit den Phasen des Starts, der Landung und der Kursänderung eines Raumflugkörpers beschäftigen, in denen zumindest teilweise die Raketentriebwerke arbeiten. Wir wollen jedoch die Phase des Umlaufens eines Raumflugkörpers oder Himmelskörpers um einen Zentralkörper (Erde, Mond, Sonne, Stern), in der die Raketentriebwerke nicht brennen, mittels geeigneter physikalischer Gesetze verstehen lernen. Allerdings können wir mit den Mitteln der Schulmathematik nur *Spezialfälle* der physikalisch möglichen Umläufe durchrechnen, nämlich *kreisförmige Bewegungen*.

Bei unseren Rechnungen werden Zahlenriesen und auch Zahlenzwerge eine Rolle spielen. Daß Zahlenriesen, wie 17 300 000 000 000, sich mittels einer Zehnerpotenz in der Form $1{,}73 \cdot 10^{13}$ schreiben lassen, überblicken wir. Daß sich auch Zahlenzwerge, z. B. 0,000 000 000 003 84, nach einer erweiternden Potenzdefinition in der gleichen Form schreiben lassen, wollen wir auf möglichst einfachem Wege verstehen lernen.

An der Tabelle

......

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$
$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$$
$$10^2 = 10 \cdot 10$$

lesen wir ab: Auf der linken Seite der aufgeschriebenen Gleichungen vermindert sich von Zeile zu Zeile der Potenzexponent um 1. Die Zahlen der rechten Seite entstehen in der angegebenen Reihenfolge jeweils durch Division mit 10 auseinander. Durch Beibehalten dieser Vorschrift ist die aufgeführte Tabelle wie folgt zu ergänzen:

$$10^1 = 10$$
$$10^0 = 1$$
$$10^{-1} = \frac{1}{10}$$
$$10^{-2} = \frac{1}{10 \cdot 10}$$
$$10^{-3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10}$$

Für den letzten Teil der so erhaltenen Tabelle kann geschrieben werden:

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1}$$
$$10^{-2} = \frac{1}{10^2}$$
$$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$$

....

Wie für die Basis 10, so lassen sich derartige Tabellen auch für jede von 0 verschiedene reelle Zahl *a* aufstellen. Deshalb wird festgelegt:

Definition: Ist n eine beliebige natürliche Zahl und a eine von 0 verschiedene reelle Zahl, so soll gelten $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Durch diese Definition werden die Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten und von 0 verschiedener Basis erklärt. Für den oben angegebenen Zahlenzwerg gilt zunächst:

$$0{,}000\,000\,000\,003\,84 = \frac{3{,}84}{10^{12}}$$

Wegen $\frac{1}{10^{12}} = 10^{-12}$ gilt deshalb

$0{,}000\,000\,000\,003\,84 = 3{,}84 \cdot 10^{-12}$. Natürlich könnte man statt $3{,}84 \cdot 10^{-12}$ auch z. B. $38{,}4 \cdot 10^{-13}$ oder $384 \cdot 10^{-14}$ schreiben. Wir wollen jedoch vereinbaren, daß der vor der Zehnerpotenz stehende Faktor stets zwischen 1 und 10 liegen soll.

Bei physikalischen Betrachtungen spielen statt Zahlen meistens Größen eine Rolle. Um auch beim Aufschreiben von Größen Bruchstriche zu vermeiden, wird die eben angegebene Definition für Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten im erweiternden Sinne auch auf Maßeinheiten angewendet. So wird z. B., wenn für Sekunde die Abkürzung *s* benutzt wird, statt $\frac{1}{s^2}$ auch s^{-2} geschrieben. Und für die Geschwindigkeiten $2\,370 \frac{m}{s}$ und $0{,}087 \frac{km}{h}$ schreiben wir $2{,}37 \cdot 10^3 m \cdot s^{-1}$ bzw. $8{,}7 \cdot 10^{-2} km \cdot h^{-1}$.

Aufgaben:

▲1▲ Sputnik I, der erste künstliche Erdtrabant, wurde am 4. 10. 1957 in der Sowjetunion gestartet. Er umkreiste die Erde genähert mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn in der Höhe 588 km über der Erdoberfläche in jeweils $T = 1$ h 35 min einmal. Der mittlere Erdradius beträgt 6 371 km.

Wie groß war die Bahngeschwindigkeit v von Sputnik I?

Die Antwort finden wir mit der Formel $s = vt$ für eine kreisförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v. Wird der Bahnradius mit r bezeichnet und wird als spezieller Weg der Umfang $u = 2\pi r$ der Kreisbahn gewählt, so ist die zugehörige Zeit die Umlaufzeit T. Bei dieser Wahl folgt aus $s = v \cdot t$ die Formel

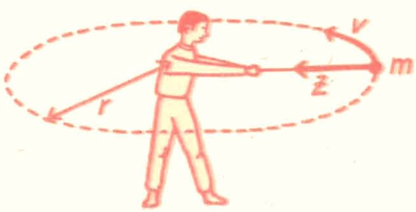
(1) $2\pi r = vT$ $(\pi = 3{,}14159\ldots)$

Mit $r = 6\,371$ km + 588 km = 6 959 km und $T = 1$ h 35 min = 5 700 s folgt aus (1) $v = 7\,667 m \cdot s^{-1}$. Sputnik I durchlief seine Bahn mit der Geschwindigkeit $7{,}67 \cdot 10^3 m \cdot s^{-1} = 7{,}67 km \cdot s^{-1}$.

Tatsächlich wich die Bahn von Sputnik I etwas von einer Kreisbahn ab. Bei seinem Flug näherte sich Sputnik I auf seiner ebenen Bahn bei jedem Umlauf der Erdoberfläche bis auf 288 km und entfernte sich anschließend jeweils wieder auf 947 km. Also bewegte sich Sputnik I auf einer ebenen Bahn, die sich dem Erdmittelpunkt bis auf 6 599 km nähert und sich von ihm bis auf 7 318 km entfernt. Nach fast 1 400 Erdumkreisungen verglühte Sputnik I nach 92 Tagen in der Erdatmosphäre. Da der erdnächste Bahnpunkt nur 228 km von der Erdoberfläche entfernt war, wurde Sputnik I infolge der in dieser Höhe noch relativ dichten Erdatmosphäre merklich abgebremst. Wegen des Energieverlustes näherte er sich langsam immer mehr der Erdoberfläche, um schließlich beim Eintauchen mit hoher Geschwindigkeit in noch dichtere Schichten der Erdatmosphäre zu verglühen.

Bei den folgenden Betrachtungen werden wir den Einfluß der Lufthülle des Zentralkörpers auf einen Raumflugkörper unberücksichtigt lassen. Unter dieser Bedingung kann ein Raumschiff seinen Zentralkörper, sofern das Raumschiff bei seinem Flug nicht in den Anziehungsbereich anderer Himmelskörper kommt, fast unbegrenzt oft umkreisen. Für die Erde ist die erste Bedingung in guter Näherung bereits erfüllt, sofern ein Raumschiff sich der Erde nicht mehr als bis auf etwa 200 km nähert. Für den Mond ist die erste Bedingung durchweg erfüllt, da er keine Atmosphäre besitzt. Von Versuchen auf der Erdoberfläche wissen wir: Um einen Körper zu zwingen, sich auf einer Kreisbahn gleichförmig (mit konstanter Bahngeschwindigkeit) zu bewegen, muß auf ihn stets eine auf den Kreismittelpunkt gerichtete Kraft wirken, die Zentripedalkraft Z genannt wird.

Hat der auf der Kreisbahn bewegte Körper die Masse m, ist r der Radius seiner Bahn und ist v seine Bahngeschwindigkeit, so ist die Größe der Zentripedalkraft bestimmt durch: (2) $Z=m\frac{v^2}{r}$.



Wird die Masse m in Kilogramm (kg), die Geschwindigkeit v in Meter pro Sekunde ($m \cdot s^{-1}$) und der Radius r in Meter (m) gemessen, so ergibt sich gemäß Formel (2) die Zentripedalkraft in der Einheit $kg \cdot m \cdot s^{-2}$. Diese Krafteinheit nennt man zu Ehren des englischen Physikers *Isaak Newton* (1643 bis 1727) das Newton (N): $1N=1\ kg \cdot m \cdot s^{-2}$. Später werden wir durch Lösen der Aufgabe 3 den Zusammenhang zwischen der Krafteinheit Newton (N) und der uns wohlbekannten Krafteinheit Kilopond (kp) kennenlernen: $1\ kp=9{,}81\ N$.

▲2▲ Der Mond bewegt sich in guter Näherung auf einer Kreisbahn mit Radius $r=384\,400\ km=3{,}844 \cdot 10^5$ km um die Erde. Seine Umlaufzeit[1] beträgt $T=27{,}32d$ (d – Abkürzung für Tag) und seine Masse $m=7{,}347 \cdot 10^{22}$ kg. Berechne die Zentripedalkraft, die gemäß Formel (2) auf den Mond einwirkt! Durch Umstellen von (1) nach v ergibt sich $v=\frac{2\pi r}{T}$.

Durch Einsetzen dieses Terms für v in (2) folgt: (3) $Z=\frac{4\pi^2 mr}{T^2}$.

Mit den für Radius r, Masse m und Umlaufzeit T gegebenen Werten ergibt sich gemäß (3) $Z=2{,}00 \cdot 10^{20} N$.

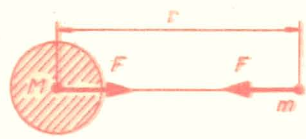
Der Mond ist nicht durch ein Seil an die Erde gekettet, durch das diese riesige Kraft übertragen werden kann. Dennoch nahm *Isaak Newton* völlig berechtigt an, daß auf den Mond eine Kraft der errechneten Größe wirken muß, die auf die Erde zu gerichtet ist.

Allgemein erkannte *Isaak Newton*, daß zwei „genähert punktförmige" Massen M und m sich stets gegenseitig mit gleich großen Kräften anziehen. Jede der Anziehungskräfte F hat die Richtung der Verbindungsstrecke beider Körper. Sie ist gegeben durch:

(4) $F=k\frac{Mm}{r^2}$ (Gravitationsgesetz)

Dabei ist r der Abstand der beiden Massen und k ist eine Konstante, die sogenannte Gravitationskonstante. „Genähert punktförmig" bedeutet, daß die räumliche Ausdehnung der Massen M und m erheblich kleiner als ihr Abstand r ist.

Die Formel (4) hat auch noch Gültigkeit, wenn eine der beiden Massen „genähert punktförmig" ist und die andere die Gestalt einer Kugel mit konstanter Dichte[2] hat.



Die in Formel (4) vorkommende Konstante k kann durch entsprechende Messungen auf der Erdoberfläche bestimmt werden. Da die zwischen Massen an der Erdoberfläche auftretenden Anziehungskräfte im allgemeinen sehr klein sind, werden diese Kräfte meist nicht bemerkt. Zu ihrer Messung sind deshalb äußerst empfindliche Versuchsanordnungen nötig. *Richarz* und *Krigar-Menzel* (1896) benutzten zur Bestimmung der Gravitationskonstanten zwei Bleikugeln mit den Massen $M=158$ kg (Radius 14,9 cm) und $m=0{,}73$ kg (Radius 2,5 cm), die sich, sofern ihre Mittelpunkte 20 cm von einander entfernt sind, gegenseitig mit der Kraft $F=1{,}92 \cdot 10^{-7}N$ anziehen. Gemäß Formel (4) ist aus diesen Angaben die Gravitationskonstante berechenbar. Die Gravitationskonstante k hat den Wert:

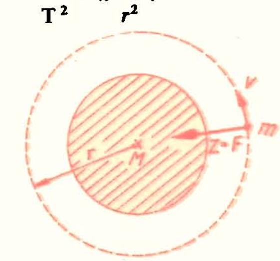
(5) $k=6{,}670 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

▲3▲ Die Erde ist genähert eine Kugel mit dem Radius $r=6{,}371 \cdot 10^3$ km und der Masse $M=5{,}979 \cdot 10^{24}$ kg. Mit welcher Kraft wird ein an der Erdoberfläche liegender Körper der Masse 1 kg von der Erde angezogen?

Durch Einsetzen der gegebenen Werte in (4) ergibt sich unter Berücksichtigung von (5) $F=9{,}81 N$. Da laut Definition die Masse 1 kg an der Erdoberfläche[3] von der Erde mit der Kraft 1 kp angezogen wird, gilt, wie bereits oben angegeben, $1\ kp=9{,}81\ N$.

Mit den erworbenen Kenntnissen verstehen wir nunmehr auch, warum ein „genähert punktförmiger" Körper der Masse m einen als ruhend angenommenen Körper der Masse M, der ebenfalls „genähert punktförmig" ist oder die Gestalt einer Kugel mit durchweg konstanter Dichte hat, auf einer Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit umfliegen kann: Die für die Kreisbewegung notwendige Zentripedalkraft muß gleich groß mit der Anziehungskraft beider Massen sein: $Z=F$. Laut Formel (3) und (4) ist diese Bedingung äquivalent mit

$$\frac{4\pi^2 mr}{T^2}=k\frac{Mm}{r^2}.$$



Durch Umformen folgt hieraus

(6) $kMT^2=4\pi^2 r^3$.

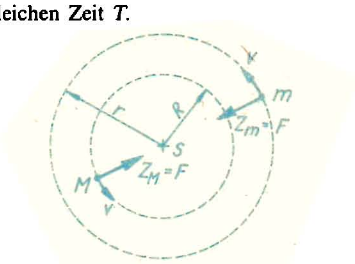
Hierin sind π die Kreiszahl, k die Gravitationskonstante, M die Masse des Zentralkörpers, T die Umlaufzeit des Körpers der Masse m um den Zentralkörper und r der Radius der Bahn des Körpers der Masse m. Als Besonderheit sei vermerkt: In der Gleichung (6) kommt die Masse m des umlaufenden Körpers nicht vor. Selbständig lösen wir mittels Formel (6) die beiden folgenden Aufgaben:

▲4▲ Durch die vollautomatische sowjetische Mondsonde Luna XVI wurde mit minimalem ökonomischem Aufwand und ohne Gefährdung von Menschenleben Mondgestein zur Erde transportiert. Vor der Landung auf dem Mond umkreiste Luna XVI in der Zeit zwischen dem 17. und 20. 9. 1970 vorübergehend den Mond in einer Höhe von 110 km über der Mondoberfläche. Der Mondradius beträgt $1{,}738 \cdot 10^3$ km und die Mondmasse $M=7{,}347 \cdot 10^{22}$ kg. Berechne aus diesen Angaben die Umlaufzeit von Luna XVI auf der angegebenen Bahn!

▲5▲ Die Sonne hat die Masse $M=1{,}985 \cdot 10^{30}$ kg. Ein Raumschiff umfliege die Sonne auf einer Kreisbahn in $T=258d$. Auch die Erde umkreist die Sonne in $365{,}24d$ genähert auf einer Kreisbahn einmal. Berechne für Raumschiff und Erde jeweils den Bahnradius! Berechne weiterhin für beide Körper gemäß Formel (1) die Bahngeschwindigkeit v!

Ergänzend sei mitgeteilt: Die Gleichung (6), auf die wir uns beim Lösen der jetzigen Aufgaben stützten, ist äquivalent mit der Forderung, daß Gravitationskraft und Zentripedalkraft einander gleich sind. Also gilt für die der Zentripedalkraft entgegengesetzte Zentrifugalkraft: Für einen seinen Zentralkörper auf einer Kreisbahn umfliegenden Trabanten heben sich Zentrifugalkraft und Anziehungskraft einander auf. *Juri Gagarin* war der erste Mensch, der die Erde im Zustand der Schwerelosigkeit und außerhalb der Lufthülle umkreiste!

Isaak Newton konnte auf Grund des von ihm erkannten Gravitationsgesetzes die allgemeine Bahn berechnen, auf der sich ein Körper um seinen als ruhend angenommenen Zentralkörper bewegt. Diese Bahnen erwiesen sich als identisch mit den Schnittlinien von Kegelmänteln mit Ebenen. Die geschlossenen unter diesen Bahnen werden Ellipsen genannt. Daß sich die Planeten auf Ellipsen um die Sonne bewegen, hatte bereits vor *Newton* der deutsche Astronom *Johannes Kepler* (1571 bis 1630) auf empirischem Wege erkannt. Kreise wiederum sind spezielle Ellipsen. Nur diesen Fall der Kreisbewegung konnten wir gemeinsam behandeln!
Bisher haben wir den Zentralkörper immer als ruhend angenommen.
Nach dem Gravitationsgesetz ist diese Annahme höchstens näherungsweise berechtigt. Merkliche Abweichungen zur Formel (6) treten auf, wenn die Masse des Trabanten nicht sehr klein gegenüber der Masse des Zentralkörpers ist. Würde man z. B. aus dem Bahnradius $r = 3{,}844 \cdot 10^5$ km und der Umlaufzeit $T = 27{,}32d$ des Mondes um die Erde gemäß Formel (6) die Masse der Erde als jetzigen Zentralkörper berechnen, so würde man statt $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg den Wert $6{,}05 \cdot 10^{24}$ kg erhalten. Der so erhaltene Wert wäre um die Mondmasse $0{,}07 \cdot 10^{24}$ kg zu groß. Daß diese Abweichung auftreten muß, ergibt sich aus folgenden Betrachtungen:
Sofern sich im Raum bzw. im betrachteten Raumteil nur zwei Körper der Massen M und m befinden, wirkt nach dem Gravitationsgesetz auf beide Körper eine Kraft. Es kann sich also keiner der beiden Körper in Ruhe befinden. Eine spezielle Bewegung zweier Körper der Massen M und m wollen wir kennenlernen: Dabei sollen sich beide Körper gleichförmig auf in einer Ebene liegenden konzentrischen Kreisen um den gemeinsamen Mittelpunkt S[4] so bewegen, daß der Punkt S in jedem Zeitmoment auf der Verbindungsstrecke beider Körper bzw. ihrer Mittelpunkte liegt. Insbesondere durchlaufen dann beide Körper ihre Bahn in der gleichen Zeit T.



Gemäß Formel (3) sind dann die auf beide Körper wirkenden Zentripedalkräfte gegeben durch $Z_M = \frac{4\pi^2 MR}{T^2}$ bzw. durch $Z_m = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$.
Nach Formel (4) ist die auf beide Körper wirkende Gravitationskraft gegeben durch

$$F = k\frac{Mm}{(R+r)^2}.$$

Damit die betrachtete Bewegung möglich ist, muß $F = Z_M = Z_m$ gelten. Durch Einsetzen und mittels einfacher Umformungen folgt hieraus

(7) $MR = mr$ und

(8) $k(M+m)T^2 = 4\pi^2(R+r)^3$.

Mittels der Gleichung (8) ist es möglich, aus dem Abstand $R+r$ beider Körper bzw. ihrer Mittelpunkte und ihrer gemeinsamen Umlaufzeit T die Summe $M+m$ ihrer Massen zu berechnen. Mittels der Gleichung (7) lösen wir die folgenden Aufgaben selbständig:

▲6▲ Die Masse der Erde beträgt $M = 5{,}979 \cdot 10^{24}$ kg und die des Mondes $m = 7{,}347 \cdot 10^{22}$ kg. Im Mittel beträgt der Abstand der Mittelpunkte beider Körper $3{,}844 \cdot 10^5$ km. Berechne hieraus die Lage des Bewegungszentrums S des Erde-Mondsystems! Die Erde ist genähert eine Kugel mit dem Radius $6{,}371 \cdot 10^3$ km. Welche Lage hat der Punkt S in bezug auf die Erdoberfläche?

▲7▲ Um die Erde mit der Masse $M = 5{,}979 \cdot 10^{24}$ kg bewege sich ein Raumschiff der Masse $m = 1\,400$ kg auf einer Kreisbahn mit dem Radius 6 600 km und dem Mittelpunkt S. Welchen Abstand besitzt der Punkt S vom Mittelpunkt der Erde?

H. Busch/W. Träger

[1] Es handelt sich hier um die in der Astronomie als siderische Umlaufzeit bezeichnete Zeit. Sie ist zu unterscheiden von der synodischen Umlaufzeit (29,53d), die zwischen zwei gleichen Mondphasen verstreicht.

[2] Als weitere Verallgemeinerung ist möglich: Der kugelförmige Körper besteht aus konzentrischen Kugelschalen mit jeweils konstanter Dichte.

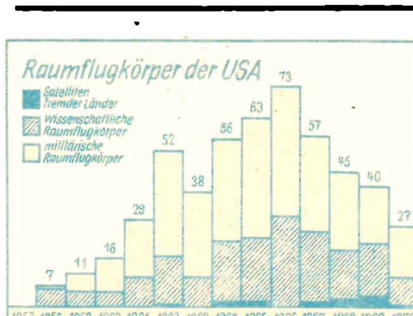
[3] Da die Erde nur in erster Näherung eine Kugel ist, gilt diese Definition exakt nur für Orte der Erdoberfläche mit bestimmter geographischer Breite, nämlich unter 45° geographischer Breite.

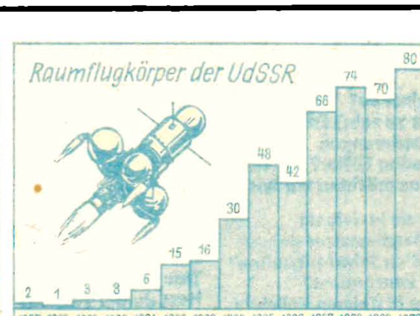
[4] Aus Gründen, auf die hier nicht eingegangen werden kann, wird das Zentrum S beider Bahnen als Schwerpunkt der Massen M und m bezeichnet.

Die Kosmonautin an die *alpha*-Leser

Liebe Schüler!
Ihr seid Zeugen hervorragender Ereignisse. Ihr lebt in einer Zeit, in der Wissenschaft und Technik aufblühen, in der Zeit der Eroberung des Kosmos. Vor kurzem wurde der Gruppenflug der „Sojus-Raumschiffe" erfolgreich durchgeführt und die Interkosmos-Serie, an denen auch Euer Land mitgearbeitet hat, gestartet. In Zukunft erweitert sich der Kreis der Menschen bedeutend, die den Kosmos erobern. Neue, vollkommenere Raumschiffe sowie die Schaffung orbitaler Stationen mit einem künstlichen Gravitationsfeld gestatten nicht nur den Kosmonauten, sondern auch Wissenschaftlern, an Raumflügen teilzunehmen. Vielleicht werdet Ihr, *Junge Mathematiker*, das sein und Eure Freunde aus den Zirkeln *Junger Kosmonauten*, denn ohne die Wissenschaft, der Ihr Euch verschrieben habt, sind kosmische Flüge nicht möglich.
Ich möchte Euch große Erfolge beim Lernen wünschen und Euch *Lenins* Worte ins Gedächtnis rufen, der sagte, daß die Jugend ein Stoßtrupp ist, daß sie bei jeder Arbeit eigene Initiative und Wagemut zeigen muß.

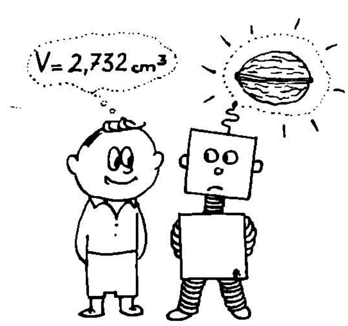
Valentina Nikolajewa-Tereschkowa





Wer löst mit?

alpha – Wettbewerb



Letzter Einsendetermin 1. Juli 1971

Teil 1: Auswahl von Aufgaben aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

* 5 * 647 An einem Tische sitzen sieben Schüler. Einer hört auf den Vornamen Fred, einer heißt Willi, vier heißen Lutz, und einer heißt Christian. Weiter wissen wir nur, daß unter ihnen zwei Brüder mit dem Familiennamen Scheibner, einer mit dem Zunamen Franke und vier Schüler mit dem Namen Schulz sind.

a) Von wem können wir mit Sicherheit Vor- und Zunamen angeben?

b) Warum muß er so heißen?

* 5 * 648 Aus 36 gleich großen Quadraten soll durch Aneinanderlegen ein Rechteck gebildet werden.

a) Wieviel Lösungsmöglichkeiten gibt es? (Bei jeder möglichen Lösung sollen sämtliche Quadrate verwendet werden.)

b) Welches der möglichen Rechtecke hat den kleinsten Umfang?

* 6 * 649 In einer Möbelfabrik wurde die Produktion von Tischen monatlich um 10 Tische gesteigert. Die Jahresproduktion betrug 1 920 Tische. Wieviel Tische wurden im Juni und wieviel im Dezember hergestellt?

* 6 * 650 Zu Beginn des Schuljahres kaufte Heinz zwei verschiedene Sorten von Heften; die eine kostete 8 Pf, die andere 15 Pf pro Stück. Er zahlte für 12 Hefte zusammen 1,31 M. Wieviel Hefte kaufte er von jeder Sorte?

* 7 * 651 In einem Haus mit 28 Fenstern sollen einige fehlende Fensterläden beschafft werden, so daß an jedem Fenster zwei Läden vorhanden sind. Einige Fenster haben noch zwei Läden; bei der gleichen Anzahl von Fenstern fehlen beide, der Rest hat je einen Laden. Wieviel neue Fensterläden braucht man? Begründe die Antwort!

* 7 * 652 Auf einer Exkursion fuhren mit Autobussen genau 319 Schüler, auf einer anderen genau 232. In jedem der Autobusse, die auf beiden Exkursionen fuhren, saß genau die gleiche Anzahl Schüler. Ermittle diese Anzahl! (Wir setzen dabei voraus, daß in jedem Autobus mehr als ein Schüler saß.)

* 8 * 653 Jemand würfelt mit n Würfeln bei einem einzigen Wurf zusammen die Augenzahl $3n+4$, und zwar zeigte dabei jeder Würfel die gleiche Augenzahl. Man ermittle sämtliche Werte von n, für die das möglich ist.

* 8 * 654 Die Fischer Adam, Bauer, Christiansen und Dahse (abgekürzt A, B, C, D) wägen nach dem Fischen ihre Ausbeute und stellen fest:

a) D fing mehr als C.

b) A und B fingen zusammen genau so viel wie C und D zusammen.

c) A und D fingen zusammen weniger als B und C zusammen.

Ordne die Fangergebnisse a, b, c, d der Fischer A, B, C, D der Größe nach! (Beginne mit dem größten Ergebnis!)

* 9 * 655 Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat. Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die anderen aber falsch sind:

a) Anna hat den Ball.

b) Brigitte hat den Ball nicht.

c) Claudia hat die Schere nicht.

Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

* 9 * 656 Bei einem Schachturnier mit 8 Teilnehmern spielt jeder gegen jeden genau eine Partie. Am Ende des Turniers haben alle Teilnehmer verschiedene Punktzahlen erzielt. Der Spieler auf dem zweiten Platz hat genau so viele Punkte gewonnen wie die letzten vier zusammen. Dabei erhält man für einen Sieg 1 Punkt und für ein Unentschieden $\frac{1}{2}$ Punkt. Wie endete die Partie zwischen den Spielern, die den 4. bzw. den 6. Platz belegten?

* 10 * 657 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$. Ferner sei r der Radius desjenigen im Innern dieses Dreiecks liegenden Halbkreises, dessen Durchmesser auf der Hypotenuse $\overline{AB}$ liegt und der die Katheten $\overline{AC}=b$ und $\overline{BC}=a$ berührt. Es ist zu beweisen, daß dann stets

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \quad \text{gilt.}$$

* 10 * 658 In den Klassen 5 bis 8 einer Schule gibt es 300 Schüler. Von ihnen lesen regelmäßig genau 120 Schüler die Zeitschrift „Technikus", genau 90 Schüler die Zeitschrift „Fröhlichsein und Singen", genau 180 Schüler die Zeitschrift „Die Trommel", genau 60 Schüler die Zeitschriften „Die Trommel" und „Technikus", genau 16 Schüler die Zeitschriften „Technikus" und „Fröhlichsein und Singen", genau 24 Schüler die Zeitschriften „Fröhlichsein und Singen" und „Die Trommel", genau 6 Schüler alle drei genannten Zeitschriften.

I. a) Wieviel Schüler lesen genau eine dieser Zeitschriften regelmäßig?

b) Wieviel Schüler lesen keine dieser Zeitschriften regelmäßig?

II. Lösen Sie die Aufgabe allgemein, indem Sie die Schülerzahl mit s bezeichnen und die übrigen angegebenen Zahlen der Reihe nach durch die Variablen a bis g ersetzen!

Teilnehmer der DDR-Olympiade 1970 stellen Aufgaben

* 9 * 659 Gegeben seien die beiden rationalen Zahlen

$$a=\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} \quad \text{und} \quad b=\frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}.$$

Es ist zu entscheiden, ob $a<b$, $a>b$ oder $a=b$ gilt.

Roland Wolter, EOS Lucas Cranach, Wittenberg-Piesteritz, Klasse 10

* 10/12 * 660 Es sei a eine positive reelle Zahl. Es ist zu entscheiden, ob das Gleichungssystem

$$x_1x_4x_5=a^2, \qquad (1)$$
$$x_1+x_2+x_4+x_6=3a, \qquad (2)$$
$$x_3+x_5=2x_6, \qquad (3)$$
$$x_1x_2x_4=a^3 \qquad (4)$$

eine Lösung hat, wobei keine der Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 negativ ist.

Bernhard Worel, Antonin-Zapotocky-OS, Neubrandenburg, Klasse 10

In Heft 4/70 (Seite 86) wurden beide Schüler nicht richtig eingeordnet. Mit den beiden Namen und den zugehörigen Fotos stellen wir diese zwei erfolgreichen Teilnehmer vor, d. Red.

Roland Wolter

Bernhard Worel

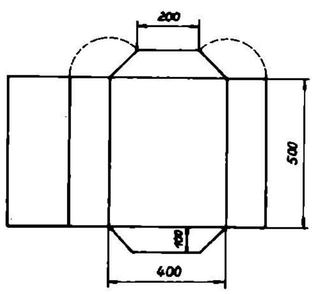
Teil 2: Wettbewerbsaufgaben

W 5 ■ 661 In der ersten Etage eines kleineren Hotels befinden sich mehrere Gästezimmer, die alle mit fortlaufenden Zimmernummern versehen sind. Addiert man diese Zimmernummern, so erhält man 95. Die Summe aus der ersten und letzten, zweiten und vorletzten Zimmernummer – und so fort – ergibt stets 19. Wieviel Gästezimmer befinden sich in dieser Etage? Welche Nummern tragen diese Zimmer?

Guido-Gerald Blosfeld, Halle, Kl. 5

W 5 ■ 662 Die abgebildete Figur (Maße in mm) stellt das Netz eines Behälters dar, in dem hochwertige Instrumente versandt werden. Bestimme das Volumen des Behälters (in dm^3)! Die Wandstärke des verwendeten Materials bleibe unberücksichtigt.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



W 6 ■ 663 Die Maßzahlen der Kantenlängen (gemessen in cm) eines Quaders seien natürliche Zahlen; sein Rauminhalt betrage 270 cm^3, und die Summe der Maßzahlen aller Kantenlängen betrage 80 cm. Für die Kantenlängen a, b und c gelte ferner $a<b<c$. Es sind die Kantenlängen des Quaders zu bestimmen! *Sch.*

W 6 ■ 664 Welche natürlichen Zahlen a erfüllen die Ungleichung

$$\frac{3}{5}<\frac{a}{41}<\frac{7}{11}?$$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

W 7 ■ 665 Unter welchen Bedingungen nimmt der Term

$$\frac{a(b-c)-b(c-a)+c(a-b)}{a-b+c}$$

den Wert Null an, wenn keine der Variablen mit Null belegt werden darf und nicht alle drei Variablen untereinander gleich sein sollen? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

W 7 ■ 666 Kann ein regelmäßiges Tetraeder einen quadratischen Schatten werfen, wenn die einfallenden Lichtstrahlen parallel verlaufen und senkrecht auf die Bildebene auftreffen? *Schüler Uli Klaus, Erfurt*

8 ▲ 667 Es ist zu beweisen, daß für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a \neq b$ die Ungleichung

$$\frac{b}{b-a}+\frac{a+b}{a}-\frac{a}{b-a}+\frac{a}{b}>4$$

erfüllt ist. *K.*

W 8 ■ 668 Je ein Bleistift, Lineal, Radiergummi, Kurvenschablone, Rechenstab, Zeichendreieck und Zirkel sind so auf die Schüler Lutz, Martina, Peter, Rainer und Rita verteilt, daß jeder Schüler mindestens einen dieser Gegenstände besitzt. Wie sind diese Gegenstände verteilt, wenn die folgenden Aussagen dieser Schüler sämtlich wahr sind?

(1) Rainer: „Wenn ich den Zirkel habe, so habe ich auch den Bleistift."

(2) Lutz: „Ich besitze den Rechenstab nicht und Rainer hat den Zirkel."

(3) Martina: „Wenn ich das Zeichendreieck habe, so habe ich auch den Rechenstab."

(4) Rita: „Ich habe das Lineal oder ich habe den Radiergummi."

(5) Martina: „Peter hat das Zeichendreieck oder Rita hat den Radiergummi."

(6) Peter: „Ich habe das Zeichendreieck und ich habe das Lineal." *T.*

W 8 ■ 669 Es sind alle geordneten Paare ganzer Zahlen zu ermitteln, für die die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die erste Zahl eines jeden Paares ist kleiner als 3.
2. Die Summe der beiden Zahlen eines jeden Paares ist größer als 2.
3. Die Differenz aus der ersten und der zweiten Zahl eines jeden Paares ist positiv.

Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

9 ▲ 670 Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die

$\log_4(\log_3(\log_2 x))=0$ gilt.

Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

W 9 ■ 671 a) Es ist ein Dreieck ABC aus $\overline{CD}=h_c=4$ cm, $\overline{CE}=s_c=4{,}2$ cm, $\overline{BF}=h_b=6$ cm zu konstruieren.

b) Welche Beziehungen müssen zwischen den gegebenen Größen h_c, s_c und h_b erfüllt sein, damit das Dreieck ABC aus diesen Stücken konstruierbar ist? *K.*

W 9 ■ 672 Es sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x+y+z=232 \qquad (1)$$

$$\frac{2x+y+z}{2}=\frac{x+3y+z}{3}=\frac{x+y+4z}{4} \qquad (2)$$

zu ermitteln. *Baurat h. c. Dipl.-Ing. Dr. Max Skalicky, Wien*

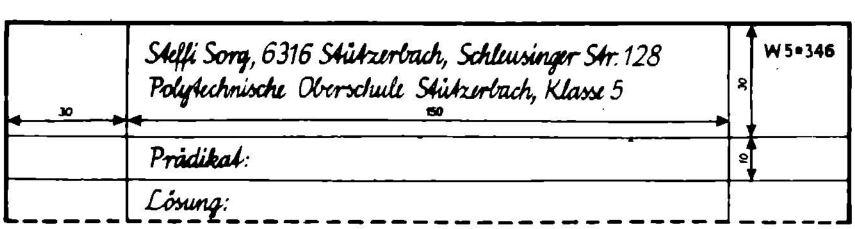
W 10/12 ■ 673 Es sind alle natürlichen Zahlen x anzugeben, für die die Gleichung

$$\left[\frac{x+2}{45-x}\right]=4 \text{ erfüllt ist.}$$

Bemerkung: Ist z eine reelle Zahl, so versteht man unter $[z]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als z ist. Es gilt also z. B.

$$\left[\frac{5}{2}\right]=2,\ \left[\frac{41}{8}\right]=5,\ [6]=6.$$ *K.*

W 10/12 ■ 674 Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AB}=a$ und $\overline{BC}=b$. Es soll die Länge x des Lotes, das von dem Eckpunkt A des Rechtecks auf die Diagonale $\overline{BD}$ gefällt ist, berechnet werden. *T.*



In eigener Sache

Am 31. 12. 1970, dem Einsendeschluß für Heft 5/70, lagen über 6000 Lösungen vor. Nun beginnt für die Redaktion, sie besteht aus dem Chefredakteur und der Redaktionsassistentin *F. Lehmann* (s. Foto), die Arbeit. Wir brauchen rund 40 Arbeitsstunden, um die Stöße von Einsendungen beim Postamt (Postfach) abzuholen, zu öffnen, die Lösungen zu entfalten, und endlich nach dem letzten Einsendetermin nach Nummern zu sortieren. Die Mathematikfachlehrer *G. Schulze* (Herzberg), *W. Unze* (Leipzig) und *J. Lehmann* (Chefredakteur) beginnen dann mit der Korrektur. Die Redaktionsassistentin erhält nach ca. 3 Wochen die angefertigten Antwortkarten, wertet sie statistisch aus, und dann gehen die Karten über das Hauptpostamt Leipzig zum Einsender. Das ist ein hartes Stück Arbeit, denn daneben gilt es die nächsten Hefte für den Satz vorzubereiten, Autoren zu gewinnen für neue Beiträge, Leserpost zu beantworten (jährlich ca. 1500 Briefe), Leserkonferenzen und technische Besprechungen zu führen, soll doch jedes neue Heft so gestaltet sein, daß es mit Interesse studiert wird. Red. *alpha*

Albrecht Dürer

ein Künstler, Humanist und Geometer

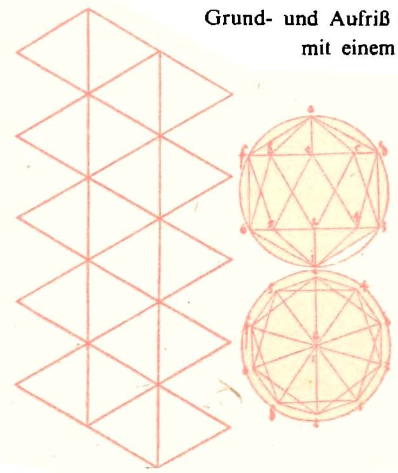
Teil 2

Luther steht bei seiner Bibelübersetzung wiederholt vor der Aufgabe, Sachverhalte mit Worten beschreiben zu müssen, die es in der deutschen Sprache bis dahin noch nicht gab. Ähnlich geht es Dürer bei der Abfassung seiner Werke. Erstmals benutzt er den Begriff „unendlich“ im mathematischen Sinn und schreibt „eyn vnentliche zal“. Durch Übernahme des Wortes „punktus“ aus dem Lateinischen geht mit dem Begriff auch das Wort „Punkt“ in den deutschen Sprachgebrauch ein. Weniger nachhaltig waren seine Übersetzungsversuche für konvex und konkav mit *eingebogen* und *ausgebogen*. Auch seine Wortprägung *Barlini* für parallele Geraden hat sich nicht eingeführt. Für „konstruieren“ benutzt er das bei Bauhütten gebräuchliche Wort „reißen“ oder „aufreißen“. Ein Kreis heißt bei Dürer „cirkellini“ und ein Rechteck „ablange fierung“. Die von ihm vorgeführten Fünfeck- und Neuneckkonstruktionen mit „unverrücktem“ Zirkel stammen offensichtlich aus den Rezeptsammlungen mittelalterlicher Bauhütten. Ferner finden sich in der „Underweysung“ Umwandlungen von Dreiecken in flächengleiche Rechtecke. Diese werden konstruktiv mit dem Höhensatz oder dem Lehrsatz von Pythagoras in flächengleiche Quadrate übergeführt. Zur Konstruktion der dabei erforderlichen rechtwinkeligen Dreiecke wird, wie auch in der heutigen Schulgeometrie, der Lehrsatz des Thales verwendet.

Kreisquadratur und Kreisrektifikation sind für Dürer zwei voneinander unabhängige Problemstellungen. Während er zur Umfangsbestimmung den Bruch $\frac{22}{7}$ als Näherungswert für π benutzt, setzt er bei der Flächenbestimmung $\frac{25}{8}$ als Faktor zu dem Quadrat des Kreisradius. Für die Kugel gibt er folgende Beschreibung: „Aber kein vollkumenes Korpus ist / das allenthalbe gleicher ist dann ein Kugel.“ Ferner wird eine exakte Konstruktion regelmäßiger Fünf- und Zehnecke vorgeführt, die sich bereits bei Ptolemäus nachweisen läßt.

Entsprechend dem Vorbild in Euklids „Elementen“ geht Dürer in seinem Werk auf die fünf Platonischen Körper ein. Er schreibt: „Zum dritten sind Corpora, die allenthalben gleich sind, von Feldern, Ecken und Seiten, die der Euklides corpora regularia nennt; der beschreibt ihrer fünf, darum dass ihr nit mehr künnen sein, die in eine Kugel, darin sie allenthalben anrühren, verfasst mügen werden.“

Er gibt Darstellungen dieser fünf regulären Körper in zugeordneten Normalrissen. Ohne früheres Vorbild sind die zugehörigen Netze.



Grund- und Aufriß eines Ikosaeders mit einem Bild des Netzes

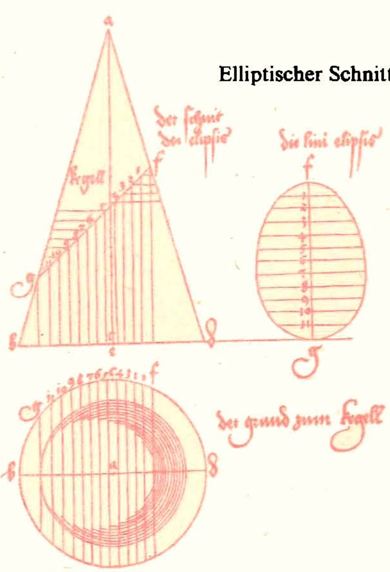
Bei dieser Gelegenheit behandelt er auch die zur Erdglobenherstellung aktuelle Netzabwicklung der Kugel in 16 Bogenzweiecke. Zu den dreizehn existierenden halbregulären konvexen (archimedischen) Polyedern führt er in der ersten Auflage von sieben und in der zweiten Auflage von neun solchen Körpern die Beschreibung mit Darstellung der Netze an. Unter ihnen findet sich z. B. das aus 12 regulären Fünfecken und 20 regulären Sechsecken bestehende Ikosaedron truncum, welches als Vorlage unseres heutigen Fernsehfußballs diente. Als schmückendes Beiwerk findet sich ein abgestumpftes Polyeder z. B. in dem bekannten Kupferstich „Melancholie“ aus dem Jahre 1514.

Sehr aufschlußreich für Dürers künstlerisches Schaffen sind seine Ausführungen zu den Kegelschnitten und zur Perspektive. Da es sich hierbei um die erste deutschsprachige Auseinandersetzung mit diesen Gegenständen handelt, ist das Werk auch für die Geschichte der Mathematik von außerordentlichem Interesse.

Bei Einführung der Kegelschnitte geht er anschaulich konstruktiv von Grund- und Aufriß eines Drehkegels aus, den er mit einer zweitprojizierenden Ebene schneidet. Durch unterschiedliche Festlegung des Neigungswinkels der schneidenden Ebene gegen die Basis gelangt er zu den drei Kegelschnittarten Ellipse, Parabel und Hyperbel. Die Bezeichnungen sucht er durch die deutschen Worte Eilinie, Brennlinie und Gabellinie zu ersetzen. Er schreibt einführend hierzu: „Die alten haben angetzeigt / das man dreyerley schnydt durch ein kegel mag thun.“

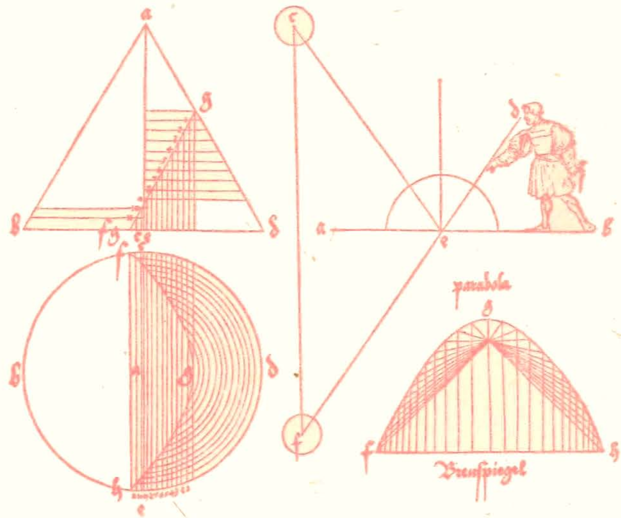
Die Melancholie (1514)

Als Entdecker der Kegelschnitte gilt der Grieche Menaichmos, welcher um 350 v.u.Z. lebte. Die Wortprägungen Ellipse, Parabel und Hyperbel gehen auf Apollonius (250 bis 200) zurück und bezeugen tiefere Einsichten in die Erzeugungsweisen der Kegelschnitte.



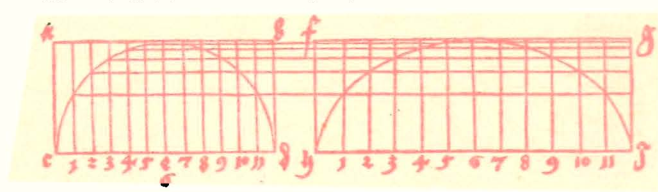
Elliptischer Schnitt eines Drehkegels

Aus Dürers Wortschöpfung „Eilinie" für Ellipse spricht die irrige Annahme, daß die Ellipse in ihren Hauptscheiteln verschieden stark gekrümmt sei und daher nur eine Symmetrieachse besitze. Dieser Irrtum findet bei der Darstellung von Tor- und Fensterbögen, die in Vertikalebenen bezüglich der Bildebene liegen, zeichnerisch seinen Niederschlag. Die in der zweiten Auflage veröffentlichten Konstruktionen zur Bestimmung der wahren Gestalt von Kegelschnitten mittels Umlegungen tragen bereits den Charakter eines neuzeitlichen Lehrbuches. Auf Brennpunkte und Fokaleigenschaften der Kegelschnitte geht er nur für den Fall der Parabel ein. Auch die als Zeichenhilfen wichtigen Scheitelkrümmungskreise von Kegelschnitten und Asymptoten der Hyperbel behandelt Dürer nicht. Weitere Impulse zur Belebung der Lehre von den Kegelschnitten geben später Kepler und Newton durch ihre Entdeckungen auf dem Gebiet der Himmelsmechanik. An anderer Stelle führt die konstruktive Entwicklung eines Torbogens aus einem Halbkreis auf eine halbe Ellipse. Das hierbei angewandte Konstruktionsverfahren stellt eine affine



Parabolischer Schnitt eines Drehkegels, Darstellung der Parabel mit Brennpunkt

Affine Transformation eines Halbkreises



Transformation dar. Wenn es auch Dürer hierbei nicht bewußt wurde, eine Ellipse gezeichnet zu haben, so verdeutlicht uns das Bild recht einprägsam, wie bei ihm der mathematische Begriff einer affinen Abbildung in der Anlage schon vorhanden war. (Fortsetzung folgt in Heft 4/71.)

E. Schröder

Dürer steht an unserer Seite

... Dürer zu gedenken ist für unsere Republik eine Sache tiefer Überzeugung. Denn vieles von dem, was über Dürer geschrieben wurde, mag vergänglich sein. Doch der Geist dieses größten Künstlers der deutschen Renaissance wirkt lebendig fort in unserer sozialistischen Kunst der Gegenwart.

aus: ND vom 12. 9. 1970

Was ist eine Funktion? Teil 2

2. Der allgemeine Begriff einer Funktion

Es ist unschwer zu sehen, daß im Beispiel 3 (siehe Heft 6/70, S. 124/125) für jeden der 28 Tage des Februars ein bestimmter Diensthabender festgesetzt ist. Mit anderen Worten, die Menge der Februartage wird auf die Menge der Jungen *abgebildet*, die den Dienst unter sich aufgeteilt haben. Man kann vereinbaren, mit dem Buchstaben x einen beliebigen Februartag und mit $y=f(x)$ den Diensthabenden am Tage x zu bezeichnen. Es liegt kein Grund vor, die Abbildung Tag $x \to y =$ Diensthabender am Tag x nicht mit Recht eine *Funktion* zu nennen und diese Abbildung in der Form

$y=f(x)$ zu schreiben.

Wir werden eine beliebige Abbildung f einer Menge E auf eine Menge M eine Funktion mit dem Definitionsbereich E und dem Wertevorrat M nennen.

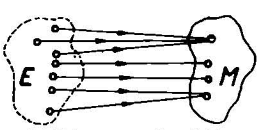


Abbildung von E auf M

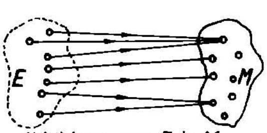


Abbildung von E in M

Vergeßt nicht, daß wir, wenn wir von einer Abbildung f einer Menge E auf eine Menge M sprechen, dabei meinen, daß $y=f(x)$ für *jedes* x aus E und *nur* für x aus dieser Menge definiert ist, während der Wert y der Funktion y notwendig der Menge M angehört und jedes y aus dieser Menge Wert der Funktion f für wenigstens einen Wert des Arguments x ist.

Ist nur bekannt, daß die Werte der Funktion f notwendig der Menge M angehören, ohne daß behauptet wird, daß *jedes* Element dieser Menge ein Wert der Funktion f ist, so sagt man, die Funktion bilde ihren Definitionsbereich E in die Menge M ab, oder, die Abbildung f sei eine Abbildung der Menge E in die Menge M.

Man muß somit die Bedeutung der Ausdrücke „Abbildung auf die Menge M" und „Abbildung in die Menge M" streng auseinanderhalten.*

Von der Abbildung

$x \to |x|$

beispielsweise kann man sagen, sie sei eine Abbildung von R in R, man kann aber nicht sagen, daß dies „eine Abbildung von R auf R" ist.

Vom rein logischen Standpunkt aus ist am einfachsten der Fall, daß der Definitionsbereich der Funktion endlich ist. Es ist klar, daß eine Funktion, deren Definitionsbereich aus n Elementen besteht, nicht mehr als n verschiedene Werte annehmen kann. Durch Funktionen, die auf endlichen Mengen definiert sind, werden also Abbildungen endlicher Mengen auf endliche Mengen realisiert.

Solche Abbildungen bilden einen der Untersuchungsgegenstände eines wichtigen Zweiges der Mathematik, der *Kombinatorik* (siehe Aufgaben 8, 11, 18, 19).

Beispiel 4. Wir wollen Funktionen betrachten, deren Definitionsbereich die aus zwei Buchstaben A und B bestehende Menge

$M=\{A, B\}$

ist und deren Werte derselben Menge angehören, d. h. Abbildungen der Menge M in sich.

Solcher Funktionen gibt es insgesamt vier. Wir geben sie durch eine Tabelle vor:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A

Die Funktionen f_1 und f_2 sind *konstant:* der Wertevorrat jeder dieser Funktionen besteht aus einem einzigen Element.

Die Funktionen f_3 und f_4 bilden die Menge M auf sich ab. Die Funktion f_3 kann man durch die Formel

$f_3(x)=x$

wiedergeben. Es handelt sich hierbei um die *identische* Abbildung: jedes Element der Menge E wird auf sich selbst abgebildet.

Um die Erklärung der Bedeutung des „Funktions"begriffs selbst abzuschließen, haben wir nur noch darauf hinzuweisen, daß die zur Bezeichnung der „unabhängigen Veränderlichen", d. h. eines beliebigen Elements des Definitionsbereichs, und der „abhängigen Veränderlichen", d. h. eines beliebigen Elements des Wertevorrats, getroffene Buchstabenwahl völlig unerheblich ist. Durch die Schreibweisen

$x \xrightarrow{f} \sqrt{x}, \quad \xi \xrightarrow{f} \sqrt{\xi}, \quad y \xrightarrow{f} \sqrt{y},$

$f(x)=y=\sqrt{x}, \quad f(\xi)=\eta=\sqrt{\xi},$

$f(y)=x=\sqrt{y}$

wird *ein und dieselbe Funktion* f definiert, die eine nichtnegative Zahl auf ihre (mit positivem Vorzeichen genommene) Quadratwurzel abbildet. Unter Benutzung dieser Schreibweisen erhalten wir

$f(1)=1, \quad f(4)=2; \quad f(9)=3$ usw.

* Es sei noch bemerkt, daß man jede Abbildung „auf" auch Abbildung „in" nennen kann, aber nicht umgekehrt.

3. Umkehrbare Funktion

Die Funktion $y=f(x)$

heißt *umkehrbar***, wenn sie jeden ihrer Werte ein einziges Mal annimmt. Von der Art sind die Funktionen $f_3(x)$ und $f_4(x)$ von Beispiel 4. Die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ von Beispiel 4 dagegen sowie die Funktionen der Beispiele 1, 2 und 3 sind *nichtumkehrbar.*

Um von einer beliebigen Funktion zu beweisen, daß sie nichtumkehrbar ist, genügt es, irgend zwei Argumentwerte $x_1 \neq x_2$ aufzuweisen, für die

$f(x_1)=f(x_2)$ ist.

Im Beispiel 3 braucht man nur zu bemerken, daß Petja sowohl am 1. als auch am 5. Februar Dienst hat. Daher ist die Funktion von Beispiel 3 nicht umkehrbar.

Beispiel 5. Die Funktion f

$x \xrightarrow{f} y=-\sqrt{x}$

ist umkehrbar. Sie ist auf der Menge R_+ der nichtnegativen Zahlen definiert. Ihr Wertevorrat ist die Menge

$R_- = (-\infty, 0]$

aller nichtpositiven Zahlen. Gibt man sich ein beliebiges y aus der Menge R_- vor, so kann man nach der Formel $x=y^2$ das zugehörige x finden.

Die Funktion g

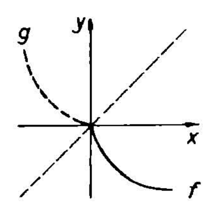
$y \xrightarrow{g} x=y^2$ für $y \leqq 0$

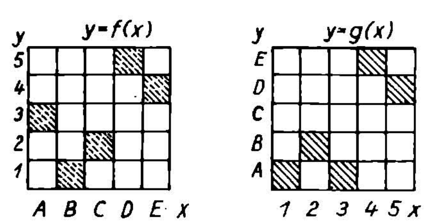
ist die *Umkehrfunktion* (*inverse* Funktion) zur Funktion f. Sie bildet die Menge R_- auf die Menge R_+ ab. Wie bereits gesagt wurde, kommt es auf die Wahl der Buchstaben zur Bezeichnung der unabhängigen und der abhängigen Veränderlichen nicht an. Die Funktionen f und g kann man in der Form

$f(x) = -\sqrt{x}$ für $x \geqq 0,$

$g(x) = x^2$ für $x \leqq 0$

schreiben. In Abbildung 3 sind graphische Darstellungen der zueinander inversen Funktionen f und g wiedergegeben.





Beispiel 6. Die durch die Tabelle

x	A	B	C	D	E
$y=f(x)$	3	1	2	5	4

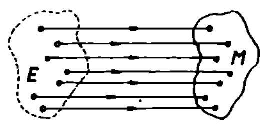
** Die Herkunft der Bezeichnung wird im folgenden klar werden: eine Funktion ist umkehrbar, wenn zu ihr eine Umkehrfunktion existiert.

vorgegebene Funktion ist auf der Menge der ersten fünf Buchstaben des deutschen Alphabets definiert, während ihr Wertevorrat die Menge der ersten fünf natürlichen Zahlen ist. Die Umkehrfunktion g wird durch die Tabelle

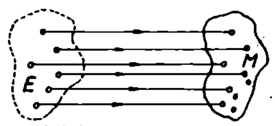
x	1	2	3	4	5
$y=g(x)$	B	C	A	E	D

gegeben. In Abbildung 4 sind diese Funktionen graphisch dargestellt.

Wir geben jetzt exakte Definitionen. f sei eine Abbildung der Menge E auf die Menge M. Wenn es zu jedem Element y aus der Menge ein einziges Element $x=g(y)$ der Menge E gibt, für das $f(x)=y$ ist, so ist die Abbildung f *umkehrbar*, und $y \to x$ heißt die *Umkehrabbildung* (*inverse* Abbildung) zur Abbildung f***. Die Umkehrbarkeit einer Abbildung f bedeutet somit, daß zu ihr eine Umkehrabbildung g existiert.



umkehrbare Abbildung von E auf M

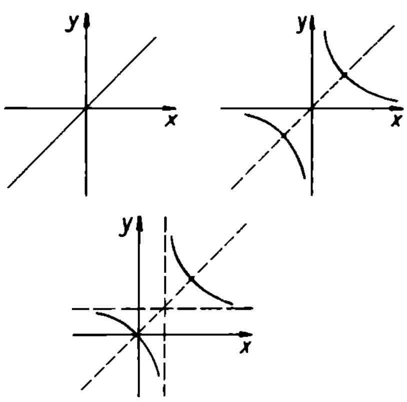


umkehrbare Abbildung von E in M

Die zu f inverse Abbildung wird gewöhnlich mit f^{-1} bezeichnet. Ist beispielsweise

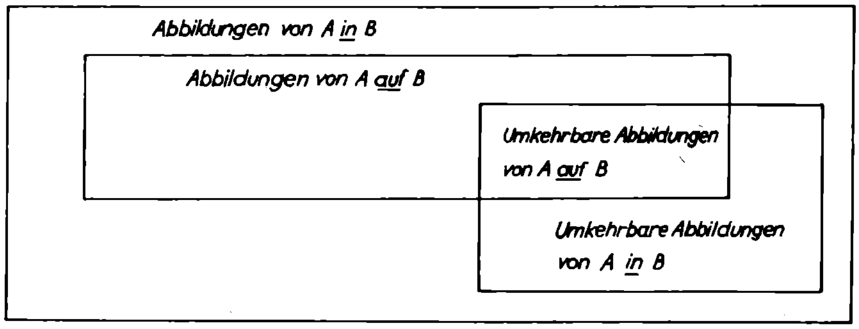
$$f(x)=x^3, \text{ so ist } f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}.$$

Da das Wort „Funktion" einfach ein Synonym des Wortes „Abbildung" ist, haben wir damit zugleich die Bedeutung des Ausdrucks „Umkehrfunktion" definiert.



Versucht selbst, das oben Gesagte zu wiederholen, indem ihr an Stelle des Wortes „Abbildung" das Wort „Funktion" gebraucht. Es ist klar, daß der Definitionsbereich der Umkehrfunktion f^{-1} der Wertevorrat der Funktion f und daß der Wertevorrat von f^{-1} der Definitionsbereich der Funktion f ist.

*** Derartige Abbildungen heißen auch *eineindeutige* Abbildungen von E auf M.



Die Umkehrfunktion der Umkehrfunktion f^{-1} ist die ursprüngliche Funktion f:

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Die Funktionen f und f^{-1} sind somit stets invers zueinander.

Beispiel 7. Es gibt Funktionen, die zu sich selbst invers sind. Von dieser Art sind die Funktionen

a) $f(x)=x$, b) $f(x)=\frac{1}{x}$, c) $f(x)=\frac{x}{x-1}$.

Prüft das nach! Graphische Darstellungen dieser Funktionen sind in Abbildung 5 wiedergegeben. Bestätigt, daß alle diese Funktionsbilder zur Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten, d. h. der Geraden $y=x$, symmetrisch sind.

Wir wollen die Beziehungen zwischen den verschiedenen Arten von Abbildungen einer Menge A auf eine Menge B und von A in eine Menge B schematisch darstellen:

Wir erinnern nochmals daran, daß der Begriff der Abbildung von A in B der allgemeinste Begriff ist. Fällt bei einer derartigen Abbildung das Bild von A mit B zusammen, so spricht man von einer Abbildung von A auf B.

Umkehrbare Abbildungen heißen auch noch *eineindeutige* Abbildungen. Dieser Ausdruck wird uns in Büchern häufig begegnen.

In letzter Zeit hat die französische Terminologie auch in unserer Literatur Verbreitung gefunden:

1) eine Abbildung von A auf B wird von den Franzosen „surjektiv" oder eine „Surjektion" genannt;

2) umkehrbare Abbildungen von A in B heißen bei ihnen „injektiv" oder „Injektionen",

3) umkehrbare Abbildungen von A auf B heißen nach der französischen Terminologie „bijektiv" oder „Bijektionen".

Wir weisen darauf hin, daß ein solcher Reichtum an Ausdrücken überflüssig ist, wenn man nur beim Gebrauch der Präpositionen „in" und „auf" Obacht gibt.

A. N. Kolmogorow

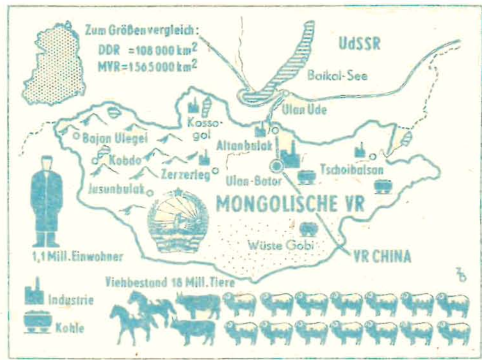
(In Heft 4/71 folgen Aufgaben zu diesem Beitrag, d. Red.)

Wir sind sie *Zum 25. Jahrestag der Gründung der SED*

Wer aber ist die Partei?
Sitzt sie in einem Haus mit Telephonen?
Sind ihre Gedanken geheim, ihre Entschlüsse unbekannt?
Wer ist sie?
Wir sind sie.
Du und ich und wir — wir alle.
In deinem Anzug steckt sie, Genosse, und denkt in deinem Kopf.
Wo ich wohne, ist ihr Haus, und wo du angegriffen wirst,
Da kämpft sie.
Zeige uns den Weg, den wir gehen sollen,
Und wir werden ihn gehen wie du, aber
Gehe nicht ohne uns den richtigen Weg,
Ohne uns ist er
der falscheste.
Trenne dich nicht von uns!
Wir können irren, und du kannst recht haben, also
Trenne dich nicht von uns!
Daß der kurze Weg besser ist als der lange, das leugnet keiner,
Aber wenn ihn einer weiß
Und vermag ihn uns nicht zu zeigen, was nützt uns seine Weisheit?
Sei bei uns weise!
Trenne dich nicht von uns!

Bertolt Brecht

Mathematikolympiaden in der MVR



Die *Mongolische Volksrepublik* nimmt seit 1964 (außer 1967) an den Internationalen Mathematikolympiaden teil. Insbesondere in den letzten beiden Jahren kam es zwischen den Delegationsleitern des bisher einzigen nichteuropäischen Teilnehmerlandes, den Delegationsleitern der DDR und dem Chefredakteur *alpha* zu mehreren freundschaftlichen Aussprachen über die außerunterrichtliche Arbeit im Fach Mathematik. Wir interessierten uns in erster Linie für die Olympiaden in der MVR:

In der MVR wird im Schuljahr 1970/71 die 8. Olympiade durchgeführt.

1. Stufe: Alle Schüler der 1. bis 10. Klasse nehmen unter Klausurbedingungen an der Schulolympiade teil. Die Aufgaben dazu stellen die Mathematiklehrer der Schule zusammen.

2. Stufe: Die erfolgreichsten Teilnehmer jeder Klassenstufe werden nochmals (in mehreren kleineren Gruppen) geprüft. Die Sieger dieser Gruppen bewerben sich in einem weiteren Wettbewerb um den Titel: Klassenstufensieger.

3. Stufe: Die Klassenstufensieger — ab Klasse 7 — werden zur Gebiets- bzw. Stadtolympiade delegiert. (Dies entspricht etwa unserer Kreisolympiade.) Wer die vom Gebietskomitee gestellten Aufgaben am vollständigsten und elegantesten löst, wird „Gebietssieger".

4. Stufe: Der jeweils erfolgreichste Teilnehmer der Klassenstufe 10 (Abiturstufe) des Gebietsausscheids — man nennt ihn „Champion" — nimmt an der Landesolympiade in der Hauptstadt Ulan-Bator teil. Für interessierte *Junge Mathematiker* der Klassenstufe 7 bis 9 wird (neben den beschriebenen Olympiadestufen) noch eine Fernolympiade ausgeschrieben. Besonders erfolgreiche Schüler erhalten daraufhin direkt vom Zentralen Komitee eine Einladung zur Teilnahme an der Landesolympiade. Von den 40 Knaben und 4 Mädchen, welche 1970 den Landeswettbewerb erreichten, wurden die 14 Spitzenreiter — wie jedes Jahr — in einem 6wöchigen Lehrgang auf die IMO vorbereitet. Für diese Schüler entfiel — als Anerkennung für die gezeigten Leistungen — die Teilnahme an den schriftlichen und mündlichen Abschlußprüfungen (Abitur). Alle 14 Schüler wurden ohne die vorher üblichen Aufnahmegespräche an Hochschulen immatrikuliert.

Mit *Dambin Chaltar*, Träger eines 3. Preises auf der XI. IMO, führten wir ein Gespräch. Es zeigt die hohe Einsatzbereitschaft eines der IMO-Teilnehmer der MVR:

Die Eltern *Dambins* sind Viehzüchter. Sie betreuen 500 Schafe. Sie leben im Winter in einem kleinen Dorf, 400 km von der Gebiets- (wir sagen Kreis-)stadt entfernt. Im Sommer ziehen sie mit ihrer Herde durch die an die Ländereien des Dorfes angrenzende Steppe. *Dambin* nahm von Klasse 7 bis 9 an den ersten 3 Stufen der Olympiade mit sehr gutem Erfolg teil. Ab Klasse 8 wurde er im Rahmen einer Arbeitsgemeinschaft von seinem Mathematiklehrer gefördert. (Spezialarbeitsgemeinschaften auf Gebietsebene gibt es wegen der großen Entfernung der Städte und Dörfer voneinander nicht.) 1969 wurde *Dambin* „Champion" des Gebiets Gorod. Als Preise erhielt er Bücher und mathematische Lehrmittel. Beim nachfolgenden Landesausscheid und im Vorbereitungslager auf die XI. IMO gehörte er zu den Besten.

XII. IMO: Teilnehmer der mongolischen Mannschaft

Allein sein Bericht über die Anreise zur Landeshauptstadt zeigt uns die völlig anderen Bedingungen, unter denen ein mongolischer Schüler zur Landesolympiade kommt: Ein Tagesritt ist nötig, um die seinem Wohnort am nächsten liegende Bushaltestelle zu erreichen. Sein ihn begleitender Vater, selbst beritten, nimmt dann *Dambins* Pferd wieder mit nach Hause zurück. Mit dem Bus geht es dann mehrere hundert Kilometer zur Gebietshauptstadt. Eine Verkehrsmaschine überbrückt die 1 000 km zur Landeshauptstadt.

Dambin, der jetzt in Moskau Mathematik studiert, übergab uns eine Aufgabe. Sie wurde vom erfolgreichsten IMO-Teilnehmer der DDR, *W. Burmeister*, bearbeitet:

▲675 Gegeben sind n natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die alle größer als 1 sind. Man finde die kleinste natürliche Zahl, die bei der Division durch $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der Reihe nach die Reste $a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_n - 1$ ergibt.

Die Delegationsleitung der mongolischen Mannschaft zur XII. IMO übergab uns, verbunden mit den herzlichsten Grüßen an alle *alpha*-Leser, zwei Aufgaben:

▲676 An einem Schachturnier beteiligten sich zehn Spieler, wobei jeder gegen jeden Teilnehmer einmal gespielt hat. Nach Beendigung des Turniers haben alle Spieler verschiedene Punktzahlen. Die Spieler, die die ersten beiden Plätze belegen, haben kein Spiel verloren. Der Spieler, der den dritten Platz belegt, hat zehn Punkte weniger als der Erste und Zweite zusammen.
Der Vierte hat so viel Punkte wie die vier letzten Spieler zusammen.
Es sind die Punktzahlen der Spieler anzugeben, die die ersten sechs Plätze belegten.

▲677 Gegeben sei ein gerader Kreiszylinder. Aus einem beliebigen Punkt M der Deckfläche ist eine Senkrechte MN auf die Grundfläche gefällt.
Bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Strecken, die Punkte der Kreislinie der Deckfläche mit Punkten der Kreislinie der Grundfläche verbinden und die gegebene Strecke MN schneiden.

1. Österreichische Mathematik-olympiade

Aufgaben der Schulolympiade

Im Schuljahr 1969/70 wurden in Österreich erstmals Vorbereitungskurse für einen mathematischen Wettbewerb abgehalten. Teilnahmeberechtigt waren Schüler der 5., 6. und 7. Gymnasialklasse (entspricht unserem 10., 11. und 12. Schuljahr). Im wesentlichen wurden in diesen von Mathematiklehrern gehaltenen Stunden Aufgaben aus der Zahlentheorie, Gleichungen und Gleichungssysteme, Ungleichungen und Aufgaben zur Teilbarkeit behandelt. Als Abschluß (8. 5. 70) diente der „Kurswettbewerb“, (entspricht der Schulolympiade).

Die acht besten Kandidaten des Kurswettbewerbs trafen sich bei den „Gebietsolympiaden“ (entspricht der Kreisolympiade), die in den drei Städten Saalbach, Wien und Graz stattfanden (21. 5. 70). Die jeweils acht besten Schüler der genannten drei Gebiete kamen zu einem zweiwöchigen Vorbereitungskurs zusammen, der von einem Universitätsprofessor und drei Gymnasialprofessoren betreut wurde. Nach Abschluß dieses Intensivkurses fuhren die Teilnehmer gemeinsam nach Wien zur „ersten österreichischen Mathematikolympiade“ (22. 6. 70). Die acht besten *Jungen Mathematiker* nahmen an der XII. IMO teil.

alpha-Leser Janous Walter,
Kl. 8, Gymnasium Horn (Niederösterreich)

▲1▲ Beweise für alle natürlichen Zahlen n:
$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\leqq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

▲2▲ Zeige, daß für jede ganze nichtnegative Zahl n der Ausdruck
$A_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$ *durch* 133 *teilbar ist.*

▲3▲ Löse im Körper der reellen Zahlen, wobei a ein reeller Parameter und x die Lösungsvariable ist, die Gleichung
$$\frac{ax+4}{2x+a}=\frac{x+a}{x+1}.$$
Für welche a ergibt sich nun:
a) keine Lösung, b) eine reelle Lösung mit der Vielfachheit 2 (d. h. eine Doppellösung), c) eine reelle Lösung mit der Vielfachheit 1 (d. h. es ergeben sich bei Berechnung zwar zwei Werte für x; einer liegt jedoch außerhalb des Definitionsbereiches), d) zwei reelle Lösungen, e) die Lösung 0 und eine positive Lösung, f) eine positive und eine negative Lösung, g) zwei positive Lösungen?

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang Richter

Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Variante 1

▲ 678a Wir wollen von der folgenden bekannten *Umschichtungsaufgabe* ausgehen: Ein Zweimarkstück a, ein Markstück b und ein Pfennig c liegen, der Größe nach geordnet, an einem Ort A übereinander, der Pfennig zuoberst. Man schichte diese Geldstücke in der gleichen Reihenfolge an einer anderen Stelle B auf. Es ist gestattet, eine oder mehrere Münzen inzwischen an einer anderen Stelle C abzulegen. Zu jeder Zeit sollen jedoch kleinere Münzen stets oberhalb von größeren Münzen liegen. Gefragt ist, wie oft dabei insgesamt die drei Münzen ihren Platz wechseln müssen.

Verallgemeinere diese Aufgabe nach verschiedenen Richtungen und gib die Lösungen an!

Variante 2

▲ 678b Auf einem Lagerplatz werden an einem Standort A quadratische Platten in den Abmessungen $a_n\times a_n$ (in cm²) ($a_1<a_2<\ldots<a_n$) gelagert. Wir wollen dabei kurz von „Platten der Sorte „n““ sprechen. Von der Sorte „n“ seien k_n Platten vorhanden (k_n sei eine natürliche Zahl). Die Platten werden, der Größe nach geordnet, übereinandergestapelt. Es kommt eine Bestellung auf Platten der Sorte „m“. Um diese Platten auf den Lieferwagen zu heben, müssen die darüberliegenden Platten der Sorte „$m-1$“, „$m-2$, ..., „2“, „1“ durch einen Kran jede einzeln abgehoben und auf einem anderen Platz (Standort B), wieder der Größe nach geordnet, abgelegt werden. Dies ist (für $m>2$) nur durchführbar, wenn ein weiterer Platz (Standort C) für eine kurzfristige Zwischenlagerung vorhanden ist.

Wieviel Hebeoperationen muß der Kran durchführen, bevor er mit dem Beladen des Lieferwagens beginnen kann?

Sektion Mathematik
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Die Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena wurde im Oktober 1966 als eine der ersten Sektionen in der DDR gegründet. Ihre Zielstellung war seit der Gründung: klassenmäßige sozialistische Erziehung der Studenten, auf hohem wissenschaftlichem Niveau stehende Ausbildung von Diplommathematikern in den Ausbildungsrichtungen Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematischer Statistik, Analysis, Mathematische Kybernetik sowie von Diplomlehrern der Ausbildungsrichtung Mathematik/Physik, Durchführung einer an den Strukturlinien unserer Volkswirtschaft orientierten Forschung auf den Gebieten Wahrscheinlichkeitstheorie, mathematische Statistik, Analysis und mathematischer Kybernetik. Die Herausarbeitung dieses Profils geschah mit dem Ziel einer wissenschaftlichen Kooperation mit dem Zentrum des wissenschaftlichen Gerätebaus, dem VEB Carl Zeiss Jena. Schwerpunkte der Arbeit der Sektion sind die Schaffung eines Systems des wissenschaftlich-produktiven Studiums sowie die Erarbeitung neuer Lehr- und Lernmethoden einschließlich neuer Lehrmittel.

An diesen Aufgaben werden die Studenten beteiligt. So arbeitete im vergangenen Studienjahr ein Studentenzirkel ein Programm zur Prüfungsautomatisierung unter Benutzung des R 300 aus. Ein anderer Zirkel half bei der Einrichtung eines Hörsaals für ein audiovisuelles Lehrprogramm. In Diplomarbeiten werden Teile des Lehrstoffs des Grundstudiums methodisch aufbereitet für die Herstellung audiovisueller Programme und teilprogrammierten Lehrmaterials. Das Betriebspraktikum der Mathematikstudenten dient ganz bestimmten betrieblichen Aufgaben, die im Einklang mit der Ausbildungsrichtung der Studenten stehen. Kompliziertere Aufgaben der Betriebe werden in Form von Diplomarbeiten fortgeführt.

In den kommenden Jahren erfolgt der Einsatz der Mathematik-Absolventen unserer Sektion schwerpunktmäßig in der Forschung und Entwicklung im VEB Carl Zeiss Jena und anderen strukturbestimmenden Industriezweigen sowie an der Sektion Mathematik unserer Universität. Gleichzeitig erreichen uns ständig neue Forderungen nach Absolventen aus den verschiedensten Bereichen der Volkswirtschaft. Daher wurden die Zulassungszahlen stark erhöht, so daß wir jeden Oberschüler mit Interesse für Mathematik zu einem Studium der Mathematik in Jena einladen können.

Relationen
Teil 3

5. Darstellung von Beziehungen im Diagramm

Zur besseren Übersicht und zur Erleichterung der Schreibarbeit wollen wir nun eine Darstellung für Beziehungen kennenlernen, nämlich die Darstellung im Diagramm, die uns auch Zugang zu wichtigen Eigenschaften von Beziehungen verschafft. Diese Darstellung ist allerdings nur für endliche Grundmengen möglich. Zur Erklärung der Darstellung wollen wir ein Beispiel betrachten. K sei wieder die Beziehung „ist kleiner als", d. h. „$a\,K\,b$" bedeutet „a ist kleiner als b" oder „$a<b$". Die Grundmenge G bestehe aus den Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, also
$G=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Wir zeichnen nun ein Quadrat von 6 mal 6 Kästchen und tragen an der linken Seite (von oben nach unten) in einer bestimmten (aber nicht vorgeschriebenen) Reihenfolge die Elemente der Grundmenge ab, so daß vor jeder Zeile des Quadrats genau ein Element der Grundmenge steht. Dann tragen wir dieselben Elemente *in derselben Reihenfolge* von links nach rechts über dem Quadrat ab, so daß über jeder Spalte des Quadrats genau ein Element steht. Jedem der 36 Felder des Quadrats entspricht nun genau ein geordnetes Paar von Elementen aus G. Wir wollen vereinbaren, daß wir zuerst das Element nennen, das die Zeile bezeichnet. Wir wollen also von links in das Diagramm gehen. Wir ordnen also jedem Feld genau ein geordnetes Elementenpaar $[a;b]$ mit Elementen aus G zu.

Bild 1

		0	1	2	3	4	5	2. Eingang
	0							
	1							
1. Eingang	2				2;3			
	3							
	4							
	5							

Umgekehrt können wir jedem geordneten Paar $[a;b]$ mit Elementen aus G genau ein Feld unseres Diagramms zuordnen. Die Zuordnung zwischen Feldern und geordneten Paaren über G ist also umkehrbar eindeutig.

Wir hatten uns gemerkt, daß K die Menge aller geordneten Paare $[a;b]$ ist, für die gilt: „$a\,K\,b$" oder „$a<b$" ist eine wahre Aussage. (a und b waren der Grundmenge beliebig entnommen.) K wird nun im Diagramm so dargestellt, daß alle zu K gehörigen geordneten Paare betrachtet und deren Felder im Diagramm gekennzeichnet werden. Das kann z. B. durch Hineinschreiben der geordneten Paare in die entsprechenden Felder erfolgen (siehe Bild 2). Diese Methode würde aber keine Schreiberleichterung bringen. Wir wollen deshalb die betreffenden Felder durch ein Kreuz kennzeichnen (siehe Bild 3).
Das Kreuz im Feld 1; 4 der Abb. 3 bedeutet z. B., daß das Paar $[1;4]$ zur Beziehung K gehört. Und das stimmt, denn „$1<4$" ist eine wahre Aussage.

Die freigebliebenen Felder gehören zu geordneten Paaren $[c;d]$, die nicht zur Beziehung K gehören. So ist z. B. das Feld 4; 1 bei der Darstellung der „Kleiner-als-Beziehung" frei, da „$4<1$" eine falsche Aussage darstellt.

K	0	1	2	3	4	5
0		0;1	0;2	0;3	0;4	0;5
1			1;2	1;3	1;4	1;5
2				2;3	2;4	2;5
3					3;4	3;5
4						4;5
5						

Bild 2

R_{10}	1	2	3	4	5	6	7
1	X						
2	X	X		X			
3	X		X			X	
4	X	X		X			
5	X				X		
6	X	X	X			X	
7	X						X

Bild 5

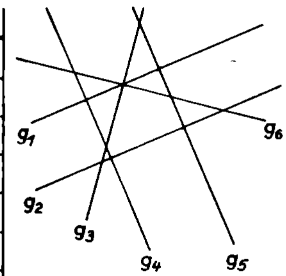


Bild 7

K	0	1	2	3	4	5
0		X	X	X	X	X
1			X	X	X	X
2				X	X	X
3					X	X
4						X
5						

Bild 3

R_{11}	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_1						
g_2						
g_3						
g_4						
g_5						
g_6						

Bild 6

R_{14}	0	1	2	3	4	5
0						
1	X					
2		X				
3			X			
4				X		
5					X	

Bild 8

R_9	0	1	2	3	4	5	6
0							X
1						X	
2					X		
3							
4			X				
5							
6	X						

Bild 4

R_{15}	5	0	2	4	3	1
5				X		
0						
2						X
4					X	
3				X		
1		X				

Bild 9

Aufgaben: Benutze zu den folgenden Aufgaben kariertes Papier! Erledige alle Aufgaben, bevor du weiterliest!

■ 9 ■ Stelle in einem Diagramm die Beziehung R_7 dar, wobei „$a\,R_7\,b$" bedeuten soll „$a \leq b$". Die Grundmenge sei
$G_7=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Durch welche geordneten Paare unterscheiden sich K (siehe Bild 3) und R_7?

■ 10 ■ Stelle in einem Diagramm die Beziehung R_8 dar. „$a\,R_8\,b$" bedeute „a teilt b". $G_8=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

■ 11 ■ Im obenstehenden Diagramm (Bild 4) sind nicht alle zur Darstellung der Beziehung R_9 gehörigen Felder gekennzeichnet. Vervollständige die Darstellung!
„$a\,R_9\,b$" bedeutet „$a+b=6$".
$G_9=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

■ 12 ■ Was ist an der Darstellung der Beziehung R_{10}: „ist ein Vielfaches von" (siehe Bild 5) nicht richtig?... $G_{10}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Korrigiere die Darstellung! Begründe die Änderung!

■ 13 ■ Welche geordneten Paare haben R_8 und R_{10} gemeinsam? Begründe deine Antwort!

■ 14 ■ Im folgenden Diagramm sollst du die Beziehung R_{11}: „steht senkrecht auf" darstellen. Die Grundmenge bestehe aus den Geraden g_1 bis g_6 des Bildes 7. (Wir wollen voraussetzen, daß Geraden, die in der Abb. als zueinander parallel bzw. zueinander senkrecht erscheinen, auch wirklich diese Lage zueinander haben sollen.)
Kennzeichne alle zur Darstellung von R_{11} gehörigen Felder!

■ 15 ■ Fertige dir selbst ein Diagramm zur Darstellung der Beziehungen R_{12} an und fülle es entsprechend aus!
R_{12} sei die Beziehung: „verläuft parallel" (oder auch „hat dieselbe Richtung wie").
Die Grundmenge bestehe wieder aus den Geraden g_1 bis g_6 des Bildes 7.

■ 16 ■ „$a\ R_{13}\ b$" bedeute „a läßt bei Division durch 3 denselben Rest wie b".
Stelle diese Beziehung über der Grundmenge $G_{13}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dar! Ordne die Elemente der Grundmenge der Größe nach!

■ 17 ■ Welche Beziehung wird durch das Diagramm – Bild 8 – dargestellt?
Gib die Beziehung und die Grundmenge an!
Schreibe die Lösung wieder wie folgt auf:
„$a\ R_{14}\ b$" bedeutet „a .... b". $G_{14}=$

■ 18 ■ Vergleiche die im Diagramm – Bild 9 – dargestellte Beziehung R_{15} mit der Beziehung R_{14}!
Was stellst du fest?
Hinweis: Vergleiche die den gekennzeichneten Feldern zugeordneten Paare!

■ 19 ■ „$a\ R_{16}\ b$" bedeute „a und b besitzen einen gemeinsamen Teiler". R_{16} soll über der Grundmenge $G_{16}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ betrachtet werden.
a) Stelle diese Beziehung in einem Diagramm dar!
b) Was fällt dir an dieser Beziehung auf?
c) Wie würde sich die Darstellung ändern, wenn die Beziehung wie folgt lautet: „a und b besitzen einen gemeinsamen Teiler, der größer ist als 1"? Begründe deine Antwort!

Mit diesen Kenntnissen ausgerüstet, können wir nun viele Beziehungen bilden. Es müssen nicht immer solche sein, die uns aus der Mathematik bekannt sind. Wir nehmen einfach eine beliebige Menge G als Grundmenge und bilden eine gewisse Menge von geordneten Paaren mit Elementen aus G. Wenn wir dabei von der Darstellung im Diagramm ausgehen (also nur im Falle endlicher Grundmengen), heißt das: Jede beliebige im Diagramm gekennzeichnete Menge von Feldern stellt eine Beziehung dar.

Bild 10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1			X							
2				X						
3										
4				X						
5							X	X		
6	X									
7										
8										
9										X
10										

Beispiele:
Es sei $G=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
Wir greifen uns zunächst die geordneten Paare [1;3], [2;4], [4;4], [5;7], [5;8], [6;1], [9;10] heraus. Diese bilden eine Beziehung. Wir bezeichnen sie mit R_{17}. Sie ist im Bild 10 dargestellt.
Dann greifen wir uns z.B. die geordneten Paare [1;10], [10;1], [2;9], [9;2], [3;8], [8;3], [4;7], [7;4], [5;6], [6;5] heraus. Diese bilden auch eine Beziehung. Wir bezeichnen sie mit R_{18}. Sie ist im Bild 11 dargestellt.

Bild 11

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										X
2									X	
3								X		
4							X			
5						X				
6					X					
7				X						
8			X							
9		X								
10	X									

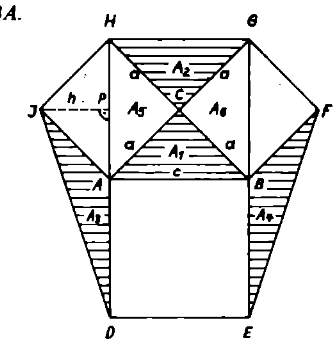
Wenn wir Glück haben, finden wir bei diesem willkürlichen Herausgreifen von Paaren eine Beziehung, die sich in kurzer Form durch einen sprachlichen Ausdruck oder durch Variable beschreiben läßt. Im ersten Fall (Beziehung R_{17}) haben wir Pech, im zweiten Fall (Beziehung R_{18}) haben wir Glück, denn „$a\ R_{18}\ b$" bedeutet „$a+b=11$". Sollten wir alle möglichen geordneten Paare, die man über G bilden kann, auswählen, dann haben wir die sogenannte „Allbeziehung" über G aufgestellt. In der Aufgabe 19a) haben wir eine solche Allbeziehung über der Grundmenge $G_{16}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aufgestellt. Überprüfe, ob du diese Aufgabe richtig gelöst hast! *R. Herrmann*

Vorfahrt beachten!

Unter diesem Thema starteten wir in Heft 5/70 einen Wettbewerb. Über 100 Einsendungen trafen bei uns ein. Wir sind erfreut über das Interesse an den Problemen des Straßenverkehrs. Im Auftrage der Deutschen Volkspolizei, Abteilung Verkehrserziehung, überreichen wir an folgende *alpha*-Leser Buchpreise:
1. Joachim Jaensch, 925 Mittweida; 2. Stefan Poppe, 705 Leipzig; 3. Albrecht Böttcher, 9314 Neudorf; 4. Elke und Carmen Hauptmann, 8245 Glashütte; 5. Angela Brandt, 9014 Karl-Marx-Stadt; 6. Andreas Juhl, 425 Eisleben; 7. Volker Heumann, 45 Dessau; 8. Rolf Hübner, 36 Halberstadt.

Leser fragen – alpha antwortet

Der Schüler *Peter Schilling* (8. Klasse) aus Golmsdorf übersandte uns die nachstehende Abbildung. Es handelt sich um ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$, über dessen Seiten die Quadrate $CBFG$, $ACHJ$ und $DEBA$ konstruiert wurden. In der Zeichnung wurden ferner die Verbindungsgeraden JD, EF und HG gezogen.
Peter bittet uns um den Beweis für folgende Aussagen: Die Dreiecke ABC, HCG, DAJ und EFB sind flächengleich. Die Summe der Flächeninhalte der angeführten Dreiecke ist gleich dem Flächeninhalt des Quadrats $DEBA$.



Nach Voraussetzung gilt $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ACH=\sphericalangle BCG=90°$, deshalb ist auch $\sphericalangle HCG=90°$.
Folgende Dreiecke sind kongruent, denn sie stimmen in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein:
$\triangle ABC\cong\triangle HCG\cong\triangle ACH\cong\triangle AHJ\cong\triangle BGC\cong\triangle GBF$.
Die Dreiecke DAJ und AHJ sind flächengleich, da sie gleiche Grundlinien und zugehörige gleiche Höhen besitzen ($\overline{DA}=\overline{AH}=c$, $\overline{JP}=h$). Aus der Flächengleichheit der Dreiecke DAJ und AHJ und der Kongruenz der Dreiecke AHJ und ABC folgt $A_1=A_3$. Analog dazu gilt $A_4=A_1$, also auch $A_1=A_2=A_3=A_4$. Ferner folgt daraus $A_3=A_5$ und $A_4=A_6$, und aus der Kongruenz der Quadrate $ABGH$ und $DEBA$ folgt die Flächengleichheit für die in Peters zweiter Aussage genannten Figuren. *StR Th. Scholl, Berlin*

alpha fragt – Leser antworten

● Wie bereite ich mich auf die Mathematikolympiade vor? ● Wie wurde in der Arbeitsgemeinschaft eine echte Verbindung zur Pionier- und FDJ-Arbeit geschaffen? ● Wie sieht der Arbeitsplan unserer Arbeitsgemeinschaft, Klassenstufe 5 (oder 6) aus? ● Wie habe ich gearbeitet, um gute Erfolge in Mathematik zu erzielen?

In freien Stunden alpha heiter

Lengren; aus: 100 neue Scherze (Eulenspiegelverlag)

Gestörter Lebenslauf

Eine Walze, die vergnüglich durch ihr Dasein rollte,
sah eines Tages einen Kegel aufrecht stehn —
ein Stich, ein Schmerz: Von da an wollte
sie auch so gehn.

Ach Gott, wie mühsam, bis sie sich erhoben!
Die eignen Arme waren viel zu schwach,
die guten Vettern kamen, drückten, schoben,
bald rutschte sie, bald gab der Boden nach,
und endlich, endlich war sie oben
mit Weh und Ach.

Da stand sie nun. Und mußte lang verschnaufen.
Und erst, als alles fort war und sie ganz allein,
versuchte schüchtern sie das neue Laufen
erst mit dem einen, dann dem andern Bein —:

O Himmel nein, wie war das schwer!
Nach ein paar Schritten ging's nicht mehr,
und schon nach einer knappen Stund
war ihre Sohle wund und wund.

Kam gleichen Wegs ein Wandersmann,
dann blieb sie stehn, beschaute sich die Gegend:
„Sehr schön ist's hier, jaja, und schön, daß es nicht regent.
Es ist doch gut, daß man's jetzt sehen kann."

Doch war der Wandrer hinterm nächsten Baum,
da packte es sie doppelt schmerzhaft wieder:
Das selige Rollen war ein ferner Traum,
und nah war nur das Brennen ihrer Glieder.

Was tun? Jaja, was tun?
Als sie noch rollte,
da war ihr Fehler, daß sie wollte.
Doch nun, als sie das Rollen wieder wollen sollte,
da war ihr Fehler, daß sie es nicht wollte.

K. Menninger, aus Zwischen Raum und Zahl

Ference Pataki in Aktion

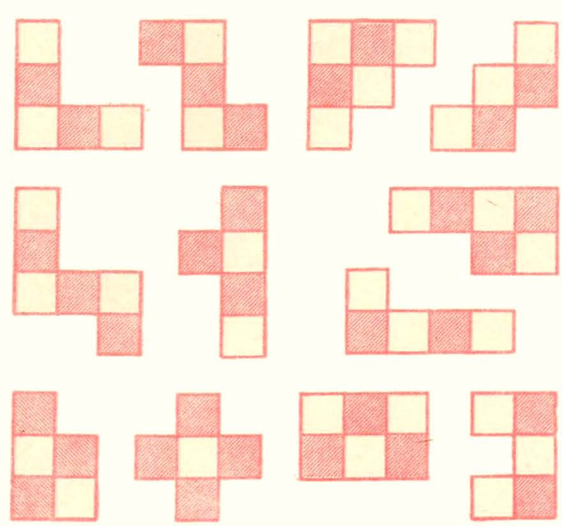
Ference Pataki, das ungarische Rechenphänomen, das in Sekundenschnelle die Multiplikation zweier dreistelliger Zahlen im Kopf ausführt, stellte im *Deutschen Fernsehfunk* die folgende Aufgabe: „Multiplizieren Sie die Zahl Ihrer Schuhgröße mit 2, addieren sie zu diesem Produkt 39, multiplizieren Sie die so erhaltene Summe mit 50, addieren Sie zu diesem Produkt 21, subtrahieren Sie von dieser Summe nunmehr die Zahl Ihres Geburtsjahres." Zur Überraschung aller Mitspieler war das Ergebnis eine vierstellige Zahl; die Zahl aus ihren ersten beiden Ziffern lieferte die Schuhgröße, die Zahl aus den beiden letzten Ziffern das derzeitige Alter der Mitspieler.
Wer findet die allgemeine Lösung zu diesem Problem?

Brandschutz-Rechenübung

Die Besatzung eines LF 16 (Löschfahrzeug Typ 16) ist bei einer Übung in zwei Reihen angetreten. In jeder Reihe stehen gleichviel Feuerwehrleute. Der Gruppenführer steht vor den beiden Reihen und befiehlt, daß der Maschinist und der Schlauchtruppführer in die zweite Reihe zurücktreten. In der zweiten Reihe stehen jetzt dreimal soviel Feuerwehrmänner wie in der ersten. Wieviel Feuerwehrmänner mit Gruppenführer sind angetreten?

Das zersprungene Schachbrett

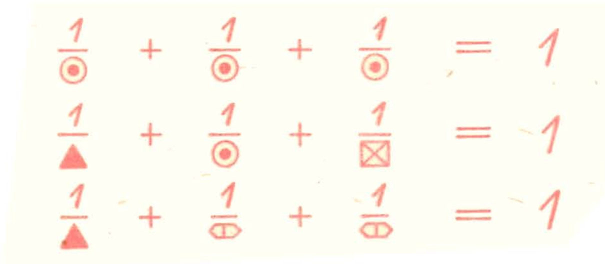
Setze die 12 Teile zu einem Quadrat (8 mal 8 Felder) zusammen!



aus: du bist dran, 42 Spiele am Tisch von Bruno Rüger

Kryptarithmetik

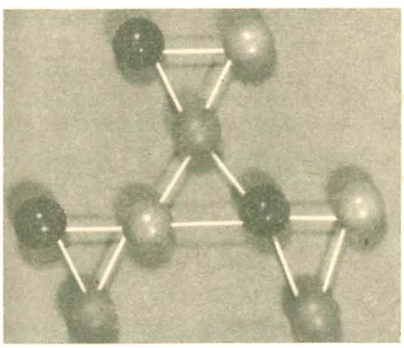
Im vorliegenden Schema sollen die geometrischen Figuren so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition (im dekadischen System) zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche geometrische Figuren gleiche Ziffern und verschiedene geometrische Figuren verschiedene Ziffern bedeuten.



Dipl.-Ing. E. Schmidt, Potsdam

Eine Aufgabe von Albert Einstein

Auch dann, als *Albert Einstein* schon in der ganzen Welt berühmt war, hat er nicht aufgehört, den Lesern der Frankfurter Zeitung mathematische Probleme zu stellen. Hier ist eins von vielen:



Die neun abgebildeten Kugeln stellen Eckpunkte von vier kleinen und drei größeren gleichschenkligen Dreiecken dar. Man soll die Ziffern 1 bis 9 in die einzelnen Kugeln so einschreiben, daß ihre Summe in jedem von diesen 7 Dreiecken immer die gleiche ist.

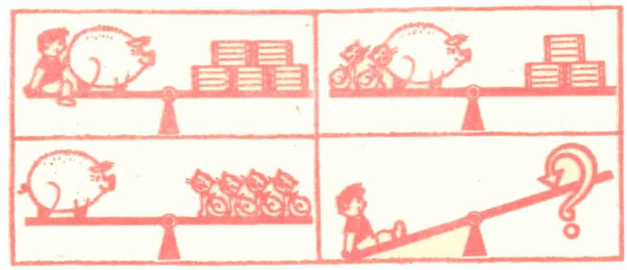
Selbststudium

aus: Cappriccio Romain,
Zeichner: Jon Popescu-Gopo, Bukarest

Wieviel wiegt der Knabe?

Der Junge und das Schwein wiegen zusammen soviel wie fünf Kisten. Das Schwein allein wiegt soviel wie vier Katzen. Zwei Katzen plus Schwein wiederum bringen ebensoviel Kilo auf die Waage wie drei der Kisten. Schließlich sitzt der Knabe allein auf der einen Seite — wie viele Katzen müssen auf die andere Seite springen, um die Waage ins Gleichgewicht zu bringen?

aus: NBI, Arithmetische Knobelei Nr. 66



Rätsel

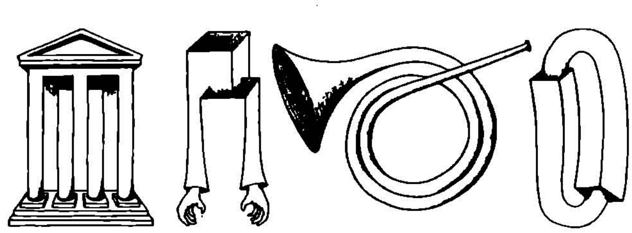
Aus den folgenden Silben sind 17 Begriffe zu bilden. Die Anfangsbuchstaben ergeben einen aktuellen Begriff.

a-a-ab-ad-bel-ble-bruch-bus-chun-chun-di-di-eck-ein-el-ex-gen-gen-gen-gens-glei-glei-go-heit-in-le-le-lip-lung-mal-na-nent-nor-null-pa-po-ra-recht-rhom-ri-schacht-se-stand-stel-tan-tan-te-te-ter-tion-un-va-vall

1. Eine Strecke, die 2 beliebige, nicht nebeneinanderliegende Eckpunkte eines n-Eckes verbindet. ($n > 3$)
2. Rechenart
3. Winkelfunktion
4. Die Menge aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Entfernung von 2 festen Punkten konstant ist.
5. Schnittpunkt einer Funktion mit der x-Achse
6. Allgemeines Symbol
7. Wie nennt man n bei der Potenz a^n?
8. Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel
9. Entfernung zweier Punkte
10. Ein Parallelogramm, dessen Seiten alle gleich lang sind
11. Aus Zähler und Nenner bestehende Zahl
12. Teil von Größenangaben
13. Verfahren zur Einschließung einer Lücke
14. Gerade, die den Kreis berührt
15. Ausdrücke, in denen die Zeichen „$<$“, „$>$“, „$\leqq$“, „$\geqq$“ vorkommen.
16. Bild der Funktion $y = x^2$
17. Ausdrücke, in denen das Gleichheitszeichen „$=$“ vorkommt.

Renate Zimmermann, Dresden (Kl. 11)

Das darf doch nicht wahr sein



aus: „Plexus“, Paris, Zeichner: Margat

Über Eigenschaften der natürlichen Zahlen

5▲679 Wieviel dreistellige natürliche Zahlen gibt es, die vorwärts und rückwärts gelesen einander gleich sind? (Beispiele: 383, 191, 222)

5▲680 Udo addiert alle natürlichen Zahlen von 1 bis 20, ohne die einzelnen Summanden zu notieren. Finde einen einfachen Weg, diese Aufgabe im Kopf zu lösen!

5▲681 Udo meint: „Voriges Jahr war ich viermal so alt wie mein Bruder; dieses Jahr bin ich nur noch dreimal so alt. Wenn das so weitergeht, wird er mich bald eingeholt haben." Was ist zu Udos Aussage zu bemerken?

5▲682 Bei einer zweistelligen natürlichen Zahl vertauscht Hans die Ziffern und erhält eine neue zweistellige Zahl. Wenn er nun die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert, so erhält er 72. Ermittle alle zweistelligen Zahlen, für die dies zutrifft!

5▲683 Von einer natürlichen Zahl n seien folgende Eigenschaften bekannt:
a) n ist zweistellig,
b) die Quersumme von n beträgt stets 13,
c) n ist durch 5 teilbar.
Ermittle alle Zahlen n!

5▲684 Axel multipliziert fünf natürliche Zahlen miteinander. Er erhält als Produkt eine ungerade Zahl. Ist die Summe dieser fünf Zahlen gerade oder ungerade?

5▲685 Solche Zahlen wie 2929 oder 3434 sind durch 101 teilbar. Gib eine Begründung dafür, warum das so ist!

5▲686 Ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die folgendes gilt:
a) n ist dreistellig,
b) die Anzahl der Einer der Zahl n ist kleiner als die der Zehner, aber größer als die der Hunderter,
c) n ist durch 7 und durch 3 teilbar,
d) $n<452$,
e) n ist durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.

5▲687 Welche Zahlenfolge erhält man, wenn man zu den natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ... jeweils 3 addiert und die erhaltenen Summen verdoppelt?

5▲688 Aus der Zahl 6789876 sind zwei Ziffern durchzustreichen, so daß die übrig bleibende fünfstellige Zahl
a) möglichst groß,
b) möglichst klein ist.

D. Michels/Th. Scholl

Sport frei!

7▲689 Die 13. Europameisterschaften im Schwimmen, Springen und Wasserball im September 1970 in Barcelona wurden zu einem großartigen Erfolg für die Deutsche Demokratische Republik. Es wurden Wettkämpfe in insgesamt 34 Disziplinen durchgeführt, wobei in jeder Disziplin genau eine Goldmedaille vergeben wurde. Über die Verteilung der Goldmedaillen liegen folgende Informationen vor:
a) Die Schwimmsportler unserer Republik errangen soviele Goldmedaillen wie die Schwimmer der UdSSR, Westdeutschland/Westberlins, Schwedens, Ungarns und der ČSSR zusammengenommen.
b) Die Schwimmer Schwedens und der ČSSR erkämpften zusammen doppelt soviele Goldmedaillen wie die Schwimmer Ungarns; dabei betrug die Anzahl der Goldmedaillen für die ČSSR den dritten Teil der Goldmedaillen Schwedens.
c) Die Anzahlen der Goldmedaillen, die die Mannschaften der UdSSR, Westdeutschland/Westberlins und Ungarns erkämpften, verhalten sich wie 3:2:1.
d) Auf die Schwimmer Ungarns entfiel der 17. Teil der Anzahl aller vergebenen Goldmedaillen.
e) Die restlichen Goldmedaillen nahmen die Schwimmer Frankreichs und Italiens mit nach Hause.
Wieviel Goldmedaillen erkämpften die Mannschaften der einzelnen Länder?

S.-H.

GST marschiert

7▲690 Am 1. Mai, dem Weltkampftag der internationalen Arbeiterbewegung, bildeten 150 Mitglieder der GST einen gesonderten Marschblock, der aus mehreren Reihen mit gleichvielen Fahnenträgern bestand. Während des Marsches zum Kundgebungsplatz mußte der Marschblock beim Passieren einer engen Straße umformiert werden. In jeder Reihe marschierten jetzt vier Personen weniger; es mußten aber zehn Reihen mehr als zuvor gebildet werden. Wieviel Fahnenträger bildeten ursprünglich eine Reihe? (Löse die Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle!)
(Lösungen siehe S. 45, d. Red.)

Mathematik und Chemie

8▲677 Durch Kopplung der endothermen Reaktion mit der Gleichung
$C+H_2O \rightarrow CO+H_2$; $Q_1=+31{,}4$ kcal und
der exothermen Reaktion mit der Gleichung
$2\,C+O_2+4\,N_2 \rightarrow 2\,CO+4\,N_2$;
$Q_2=-52{,}8$ kcal
wird (theoretisches) Mischgas erzeugt.
Dem Reaktionsapparat werden jeweils 1 mol Wasserdampf und k mol Sauerstoff zugeführt ($0 \leqq k \leqq 1$).
1. Die Reaktionswärme Q der gekoppelten Reaktion ist eine Funktion von k.
a) Stelle die Funktionsgleichung auf!
b) Gib Definitionsbereich und Wertevorrat an!
c) Bestimme die Nullstelle k_0!
d) Stelle die Funktion für die oben gegebenen Werte von Q_1 und Q_2 graphisch dar!
e) In welchem (molaren) Verhältnis stehen die Ausgangsstoffe Wasserdampf und Sauerstoff, wenn die Wärmebilanz gleich Null ist?
2. a) Gib die Zusammensetzung des erzeugten Mischgases in Abhängigkeit von k an (in Volumenprozent)!
b) Berechne die prozentuale Zusammensetzung für $k=k_0$ und $k=1$!
3. a) Bestimme die verbrauchten Stoffmengen (Kohlenstoff, Wasser, Luft) in Abhängigkeit vom Volumen des erzeugten Mischgases (im Normzustand) und von k!
b) In einem Winklergenerator werden stündlich 30000 m^3 Mischgas erzeugt (im Normzustand). Wieviel Kohlenstoff, Wasser und Luft werden dabei verbraucht ($k=1$)?
Anleitung: Von dem Gehalt an Kohlendioxid im Mischgas wird abgesehen. Dichten:
Wasserstoff $\varrho_1=0{,}089\ kg\,m^{-3}$,
Kohlenmonoxid $\varrho_2=1{,}25\ kg\,m^{-3}$.
4. Unter dem Heizwert H eines Gases versteht man diejenige Wärmemenge, die beim Verbrennen eines Kubikmeter Gases (im Normzustand) entsteht. Der Heizwert eines Gasgemisches berechnet sich aus den Anteilen und Heizwerten der einzelnen Gase.
a) Bestimme den Heizwert H des (theoretischen) Mischgases in Abhängigkeit von der Zusammensetzung (als Funktion von k)!
b) Wie groß ist der Heizwert des Mischgases, wenn die Wärmebilanz gleich Null ist? Heizwerte: Wasserstoff $H_1=3050\ kcal\,m^{-3}$, Kohlenmonoxid $H_2=3020\ kcal\,m^{-3}$. *Renneberg*

X. Olympiade
Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

(6./7. Februar 1971)

Olympiadeklasse 7

1) Während der Friedensfahrt fuhr an 6 Thälmannpionieren eine Spitzengruppe von Radrennfahrern so vorbei, daß man eine Reihenfolge eindeutig feststellen konnte. Um diese Reihenfolge zu ermitteln, gab jeder der 6 Pioniere seine Beobachtungen wieder, wobei sämtliche Aussagen wahr sind:

(1) In der Spitzengruppe waren genau 8 Fahrer, darunter genau ein Belgier und genau zwei Polen.
(2) Von den Fahrern, die vor dem Belgier fuhren, waren mindestens zwei DDR-Fahrer.
(3) Von den Fahrern, die vor den beiden Polen fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.
(4) Von den Fahrern, die hinter dem Belgier fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.
(5) Zwei sowjetische Fahrer fuhren unmittelbar hintereinander.
(6) Am Anfang und am Schluß der Spitzengruppe fuhr jeweils ein DDR-Fahrer.

Ermittle die genaue Reihenfolge der Fahrer der Spitzengruppe!

2) Gegeben sei ein Winkel der Größe 60° mit dem Scheitelpunkt S. Ferner sei $P \neq S$ ein beliebiger, auf einem der Schenkel des Winkels gelegener Punkt. Der Fußpunkt des Lotes von P auf den anderen Schenkel des Winkels sei F.
Beweise, daß sich die Halbierende des Winkels $\measuredangle PSF$ und die Strecke PF in einem Punkte schneiden, der auf der Mittelsenkrechten von PS liegt!

3) Von den Schülern einer 8. Klasse gehören genau $\frac{3}{5}$ dem Schulchor und genau $\frac{7}{10}$ der Schulsportgemeinschaft an. Genau $\frac{2}{5}$ der Anzahl aller Schüler dieser Klasse sind sowohl Mitglied des Chores als auch Mitglied der Schulsportgemeinschaft (SSG). Berechne, der wievielte Teil der Anzahl aller Schüler dieser Klasse weder im Chor noch in der SSG ist!

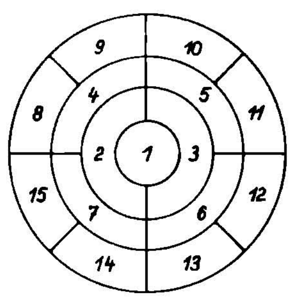
4) Nach der Sage machte die böhmische Königin *Libussa* die Gewährung ihrer Hand von der Lösung eines Rätsels abhängig, das sie ihren drei Freiern aufgab:
„Wenn ich aus diesem Korb mit Pflaumen dem ersten Freier die Hälfte des Inhalts und noch eine Pflaume, dem zweiten die Hälfte des Restes und noch eine Pflaume, dem dritten die Hälfte des nunmehrigen Restes und noch drei Pflaumen geben würde, dann wäre der Korb geleert.
Nenne die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält!"

5) Aus den zweistelligen Primzahlen 13, 17, 37, 79 erhält man wieder Primzahlen, wenn man ihre Ziffern jeweils vertauscht, also die Zahlen 31, 71, 73, 97 bildet. Ebenso kann man bei der Primzahl 131 die Ziffern beliebig vertauschen, also die Zahlen 113, 311 bilden, ohne daß die Primzahleigenschaft verlorengeht. Gibt es dreistellige Primzahlen mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern, bei denen sämtliche möglichen Ziffernvertauschungen stets wieder dreistellige Primzahlen ergeben?
(Ohne Benutzung der Zahlentafel)

6) Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a = 5{,}5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $s_c = 3$ cm!
Dabei bedeuten a, b die Längen der Seiten BC bzw. AC und $\overline{CD} = s_c$ die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AB. Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob sich mit den gegebenen Stückchen ein Dreieck eindeutig konstruieren läßt!

Olympiadeklasse 8

1) Die Abbildung A 8; 1 zeigt vier konzentrische Kreise. Die innere Kreisfläche ist mit 1 bezeichnet. Die von dem innersten und dem



nächstfolgenden Kreis begrenzte Fläche des Kreisringes ist in zwei kongruente Teile, mit 2 und 3 bezeichnet, geteilt. Entsprechend ist die Fläche des nächsten Kreisringes in 4 und die des letzten in 8 jeweils untereinander kongruente Teilflächen zerlegt, die fortlaufend numeriert wurden.
Wie müssen die Verhältnisse der Radien der vier Kreise gewählt werden, damit alle diese 15 genannten Flächenstücke einander inhaltsgleich sind?

2) Eine Pumpe P_1 füllt ein Becken in genau 4 h 30 min. Eine zweite Pumpe P_2 füllt dasselbe Becken in genau 6 h 45 min. Beim Füllen dieses Beckens wurde eines Tages zunächst die Pumpe P_1 genau 30 min lang allein eingesetzt. Anschließend wurden beide Pumpen zusammen so lange eingesetzt, bis das Becken gefüllt war.
Berechne, wie lange es insgesamt dauerte, bis das Becken unter diesen Umständen gefüllt wurde!
(Es sei angenommen, daß beide Pumpen während ihres Einsatzes mit konstanter Leistung arbeiteten.)

3) Gegeben seien eine Gerade g und zwei auf verschiedenen Seiten von g gelegene Punkte A und B.
Konstruiere alle diejenigen Punkte P auf g, die die Eigenschaft haben, daß der Strahl PB einen der Winkel halbiert, die von g und der Geraden g_1 durch A und P gebildet werden!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob sie stets eindeutig durchführbar ist!

4) Es seien a, b natürliche Zahlen, und es gelte $a > b$. Gib für a und b Bedingungen an, so daß folgendes gilt: Die Differenz der Quadrate von a und b ist genau dann eine Primzahl, wenn diese Bedingungen sämtlich erfüllt sind.

5) Fritz behauptet seinen Mitschülern gegenüber:

(1) In unserem Haus wohnen mehr Erwachsene als Kinder.
(2) Es gibt in unserem Hause mehr Jungen als Mädchen.
(3) Jeder Junge hat wenigstens eine Schwester.
(4) Kinderlose Ehepaare wohnen nicht in unserem Hause.
(5) Alle in unserem Hause wohnenden Ehepaare haben ausschließlich schulpflichtige Kinder.
(6) Außer den Ehepaaren mit Kindern wohnt niemand in unserem Hause.

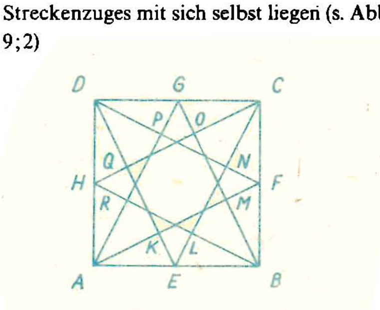
Brigitte entgegnete darauf: „Diese Aussagen können aber nicht sämtlich wahr sein.“
Untersuche, ob Brigitte mit diesem Einwand recht hat!

6) Beweise den folgenden Satz:
Sind D, E, F die Fußpunkte der Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$, dann halbieren die Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$ die Innenwinkel des Dreiecks $\triangle DEF$.
(Da der Beweis für alle drei Winkel analog verläuft, genügt es, ihn für den Winkel $\sphericalangle EFD$ zu führen.)

Olympiadeklasse 9

1) Günter verbrachte in seinen Ferien eine Anzahl von Tagen mit seiner FDJ-Gruppe in einem Lager. An jedem Tage wurden aus seiner Gruppe genau zwei Schüler vormittags und genau zwei Schüler nachmittags zum Tischdienst eingeteilt.
Im Laufe der Tage wurden alle Schüler seiner Gruppe gleich oft zu diesem Tischdienst eingesetzt.
Ferner ist folgendes bekannt:
(1) Günter war an genau 6 Tagen zum Tischdienst eingeteilt.
(2) Wenn er nachmittags Tischdienst hatte, hatte er vormittags keinen.
(3) Er hatte an diesen Tagen genau 13 mal nachmittags keinen Tischdienst.
(4) Er hatte an diesen Tagen genau 11 mal vormittags keinen Tischdienst.
Aus wieviel Schülern bestand Günters Gruppe?

2) In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA mit E, F, G, H bezeichnet. In dem Streckenzug $A\ F\ D\ E\ C\ H\ B\ G\ A$ auftretende Schnittpunkte seien so mit K, L, M, N, O, P, Q, R bezeichnet, daß $AKEL$ $BMFNCOGPDQHR$ ein (nicht konvexes) Sechzehneck ist, auf dessen Seiten keine weiteren Schnittpunkte des obengenannten Streckenzuges mit sich selbst liegen (s. Abb. A 9;2)



Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Sechzehnecks!

3) Wenn x eine reelle Zahl ist, so bedeute $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. (So ist z. B.
$[3{,}7]=3,\ [-3{,}7]=-4,\ [4]=4.$)
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x für die $\left[\frac{10+3x}{6}\right]=\frac{5x+3}{7}$ *gilt!*

4) Ermitteln Sie alle geordneten Tripel reeller Zahlen (x, y, z), die Lösungen des Gleichungssystems
(1) $x+y=2$
(2) $xy-z^2=1$ *sind!*

5) Eine dreiseitige Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D habe die Kantenlängen
$\overline{AB}=4$ cm, $\overline{AC}=3$ cm, $\overline{BC}=5$ cm, $\overline{BD}=12$ cm, $\overline{CD}=13$ cm, und $\sphericalangle ABD$ sei ein rechter Winkel.
Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide!

6) Es ist ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a+b+c$, α, γ zu konstruieren.
Dabei bedeuten wie üblich a; b; c die Längen der Seiten BC, AC, AB und α, γ die Größen der Winkel $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ACB$.
Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Olympiadeklasse 10

1) a) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Addiert man zu einer ganzen Zahl k das Quadrat der Hälfte ihres unmittelbaren Vorgängers, so entsteht das Quadrat einer rationalen Zahl.
b) Nutzen Sie eine bei diesem Beweis erhaltene Gleichung, um vier voneinander verschiedene pythagoreische Zahlentripel zu finden!
(Ein pythagoreisches Zahlentripel (x, y, z) ist ein geordnetes Tripel dreier von Null verschiedener natürlicher Zahlen x, y, z mit der Eigenschaft $x^2+y^2=z^2$. Zwei derartige Tripel heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht eines von ihnen aus dem anderen dadurch erhalten werden kann, daß man x, y und z mit einer natürlichen Zahl $\neq 1$ multipliziert oder daß man x mit y vertauscht oder daß man beides durchführt.)

2) Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC}=\overline{BC}$. Konstruieren Sie die Parallele zu AB, die die Dreiecksfläche in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt. Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

3) Geben Sie für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen $f(x)$ an, die die Eigenschaft haben, daß für jedes reelle x
$f(x)=f(x+1)-a$ gilt!

4. Unter $n!$ (gelesen n Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen $n\geqq 2$ und alle positiven reellen Zahlen $x\neq 1$

$$\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_4 x}+\ldots+\frac{1}{\log_n x}=\frac{1}{\log_{n!} x}$$

gilt!

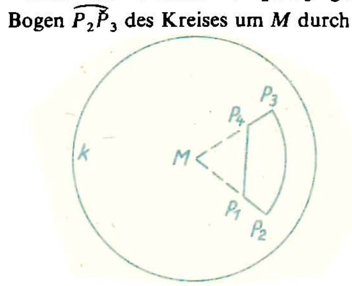
5. Während eines Schachturniers, bei dem jeder gegen jeden genau einmal spielte, wurden genau 15 Partien gespielt. Genau 5 Spiele endeten unentschieden (remis). Wie üblich gab es für jeden Sieg einen, für jedes Remis einen halben Punkt, für jede Niederlage 0 Punkte. Nach Abschluß des Turniers hatten keine zwei Spieler die gleiche Gesamtpunktzahl erzielt.
Der zweitbeste Spieler erreichte genau zwei Punkte mehr als der letzte.
Über einige Teilnehmer A, B, C, ... ist ferner folgendes bekannt:
A, der sich besser als D plazierte, erreichte wie dieser kein Remis.
C, der Dritter wurde, schlug den Vierten.
Zeigen Sie, daß diese Angaben hinreichend sind, um den Ausgang des Spieles B gegen C zu ermitteln!

6. Im Innern eines Würfels mit der Kantenlänge 1 seien 28 verschiedene Punkte beliebig angeordnet. Es ist zu beweisen, daß es dann wenigstens ein aus zwei verschiedenen dieser 28 Punkte bestehendes Punktepaar gibt, so daß der Abstand dieser zwei Punkte voneinander nicht größer als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist.

Olympiadeklasse 11/12

1. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sind α, β, γ die Größen der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks, so gilt:
$\sin^2\gamma \geqq \sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$.

2. In einer Ebene ϵ liege ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.
Als Spiegelung am Kreis k sei diejenige Vorschrift bezeichnet, durch die jedem Punkt $P\neq M$ in ϵ der folgendermaßen definierte Punkt P' in ϵ zugeordnet wird:
(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.
(2) $\overline{MP}\cdot\overline{MP'}=r^2$.
Gegeben sei ferner ein im Innern von k gelegener Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ der folgenden Gestalt:
P_1, P_2 seien auf einem und demselben Strahl gelegen; P_3, P_4 auf einem und demselben anderen von M ausgehenden Strahl.
Es gelte $\overline{MP_1}=\overline{MP_4}<\overline{MP_2}=\overline{MP_3}$.
Der Winkel $\sphericalangle P_2MP_3$ sei kleiner als 180°.
Der Kurvenzug bestehe aus den Strecken P_1P_2, P_3P_4 und P_4P_1 sowie aus dem im Innern des Winkels $\sphericalangle P_2MP_3$ gelegenen Bogen $\widehat{P_2P_3}$ des Kreises um M durch P_2.



Spiegeln Sie diesen Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ an k (Beschreibung und Begründung einer Konstruktion unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal)!

3. Es sei f die für alle reellen Zahlen x durch $f(x)=\frac{1-x^2}{x^6+4}$ definierte Funktion.
Es ist zu entscheiden, ob unter allen Funktionswerten $f(x)$ ein größter und ein kleinster Wert vorkommen. Diese Werte sind gegebenenfalls zu ermitteln.

4. Es sind alle ganz-rationalen Funktionen $y=f(x)$ anzugeben, die für alle reellen x die Gleichungen
$f(t\cdot x)=t\cdot f(x)$ erfüllen.
Dabei sei t eine beliebig gegebene und dann fest gehalten zu denkende reelle Zahl.

5. Es seien zwei nicht in derselben Ebene liegende (also zwei windschiefe) Geraden g_1 und g_2 gegeben.
Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P, zu denen es Punkte P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2 mit der Eigenschaft gibt, daß P die Strecke P_1P_2 in ein und demselben Verhältnis von innen teilt.
Anmerkung: Eine Gerade g ist zu einer Ebene ϵ genau dann parallel, wenn es in ϵ eine Gerade gibt, die zu g parallel ist.

6. Es sei $\mathfrak{M}_1$ die Menge aller Punkte, deren Koordinaten x, y in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & y\geqq 0\\ (2) & y-2x\leqq 1\\ (3) & y+2x\leqq 1\end{array}\right\}\quad (x, y \text{ reell})$$

Ist ferner n eine positive ganze Zahl, so sei $\mathfrak{B}_n$ die Menge aller Punkte, für deren Koordinaten die folgenden Ungleichungen gelten:

$$(4)\quad \frac{2^n-3}{2^n}<y<\frac{2^n-1}{2^n}$$

$$(5)\quad \frac{3}{2^{n+1}}<x<\frac{3}{2^{n+1}}$$

a) Stellen Sie $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$ graphisch dar!
b) Es ist zu beweisen, daß es einen Punkt $P\in\mathfrak{M}_1$ gibt, der in keiner der Punktmengen $\mathfrak{B}_n$ enthalten ist.
c) Es sei $\mathfrak{M}_2$ die Punktmenge, für die (1), (2), (3) und (6) $y\leqq 1-\frac{1}{1000}$ gilt.
Es ist zu beweisen, daß es ein n_1 gibt mit der Eigenschaft, daß jedes Element von $\mathfrak{M}_2$ auch Element der Vereinigungsmenge $\mathfrak{B}_1\cup\mathfrak{B}_2\cup\ldots\mathfrak{B}n_1$ ist.
Ermitteln Sie die kleinste Zahl n_1, die diese Bedingung erfüllt!

Lösungen zu aufgepaßt — nachgedacht — mitgemacht

5▲679

101	202 …	909
111	212 …	919
121	222 …	929
…	… …	…
…	… …	…
191	292 …	999

Jede Spalte enthält zehn solcher Zahlen. Da es 9 Spalten gibt, erhalten wir 90 Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.

5▲680 Udo rechnet $20+(1+19)+(2+18)+\ldots+(9+11)+10=10\cdot 20+10=210$.

5▲681 Im vorigen Jahr sei der Bruder von Udo n Jahre, also Udo $4\cdot n$ Jahre alt gewesen. In diesem Jahr ist Udo dann $4\cdot n+1$ und sein Bruder $n+1$ Jahre alt.

n	$4\cdot n$	$n+1$	$4\cdot n+1$
1	4	2	5
2	8	3	9
3	12	4	13
4	16	5	17

Nur $n=2$ erfüllt die Bedingungen. Im vorigen Jahr war Udo 8, sein Bruder 2 Jahre alt. In diesem Jahr ist Udo 9, sein Bruder 3 Jahre alt. Ganz gleich, wie lange beide leben werden, Udo wird stets sechs Jahre älter sein als sein Bruder.

5▲682 Die zweistellige natürliche Zahl sei $10a+b$ mit $a>b$. Durch Vertauschen der Ziffern erhalten wir die Zahl $10b+a$.
Nun gilt

$$\begin{aligned}(10a+b)-(10b+a)&=72,\\ 9a-9b&=72,\\ 9(a-b)&=72,\\ a-b&=8.\end{aligned}$$

Wegen $1\leqq a\leqq 9$ und $a>b$ folgt daraus entweder $a=8$ und $b=0$ oder $a=9$ und $b=1$. Da 80 nach dem Vertauschen der Ziffern keine zweistellige Zahl ergibt, entfällt dieser Fall. Die Aufgabe besitzt genau eine Lösung; die zweistellige Zahl lautet 91, und es gilt $91-19=72$.

5▲683 Die zweistelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 13 lauten 49, 58, 67, 76, 85, 94. Nur 85 ist durch 5 teilbar. Es gibt also genau eine Zahl mit den genannten Eigenschaften.

5▲684 Ein Produkt aus beliebig vielen Faktoren ist gerade, wenn wenigstens ein Faktor gerade ist. Damit das Produkt ungerade wird, müssen alle fünf Faktoren ungerade sein. Die Summe von fünf ungeraden Zahlen ist ebenfalls ungerade.

5▲685 $2929=29\cdot 100+29\cdot 1$
Allgemein:

$$\begin{aligned}100n+n&=n(100+1)=101\cdot n\\ 2929&=29\cdot(100+1)\\ &=29\cdot 101\end{aligned}$$

5▲686 Aus c) und e) folgt, daß die Zahlen n durch 2, 3 und 7 teilbar, also Vielfache von 42 sind. Wegen a) und d) kommen zunächst nur die Zahlen 126, 168, 210, 252, 294, 336, 378, 420 in Frage. Wegen b) entfallen davon die Zahlen 126, 168, 210, 252, 336, 378 und 420. Die Aufgabe besitzt genau eine Lösung, nämlich die Zahl $n=294$.

5▲687 $z=(n+3)\cdot 2$ mit $n=0, 1, 2, 3, 4,\ldots$ ergibt die Zahlenfolge 6, 8, 10, 12, 14, …

5▲688 a) 89876 b) 67876

Sport frei!

7▲689 Es wurden genau 34 Goldmedaillen vergeben.
Aus d) folgt: $34:17=2$; die Schwimmer Ungarns erkämpften zwei Goldmedaillen.
Angenommen, auf die UdSSR entfallen x, auf Westdeutschland/Westberlin y und auf Ungarn $z=2$ Goldmedaillen; nach c) gilt dann $x:y:z=3:2:1$ bzw. $x:y:2=3:2:1$ und folglich $x=6$, $y=4$. Aus b) folgt, daß die Schwimmer Schwedens und der ČSSR zusammen $2z=2\cdot 2=4$ Goldmedaillen erkämpften. Da ferner die Anzahl der auf die ČSSR entfallenden Goldmedaillen gleich dem dritten Teil der auf Schweden entfallenden ist, erhielt die ČSSR eine, Schweden drei Goldmedaillen.
Nach a) erhielt die DDR dann $6+4+3+2+1=16$ Goldmedaillen. Nach e) gilt: $34-32=2$ und $2:2=1$; die Mannschaften Frankreichs und Italiens errangen je eine Goldmedaille.

GST marschiert

7▲690 Da beim Umformieren des Marschblocks jede Reihe um vier Personen verringert wurde, mußten zuvor mindestens fünf Personen in einer Reihe marschieren. Es sei m die Anzahl Personen, die ursprünglich eine Reihe bildeten, und n die Anzahl der Reihen; dann gilt $m\cdot n=150$.

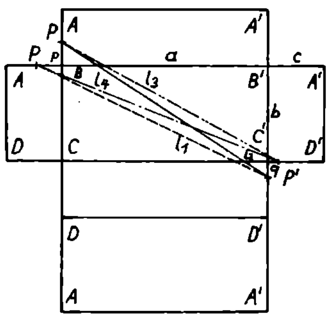
m	n	$m-4$	$n+10$	$(m-4)\cdot(n+10)$
5	30	1	40	40
6	25	2	35	70
10	15	6	25	150
15	10	11	20	220
25	6	21	16	336
30	5	26	15	390
50	3	46	13	598
75	2	71	12	852
150	1	146	11	1606

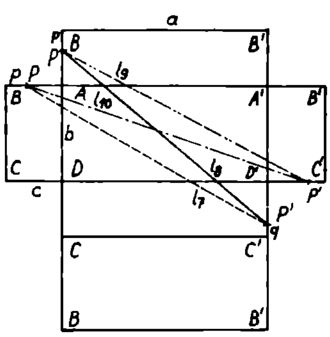
Nur für die dritte Zeile der Tabelle gilt $m\cdot n=(m-4)(n+10)=150$.

Ursprünglich bildeten somit zehn Fahnenträger eine Reihe.
Probe: $10 \cdot 15 = 6 \cdot 25 = 150$.

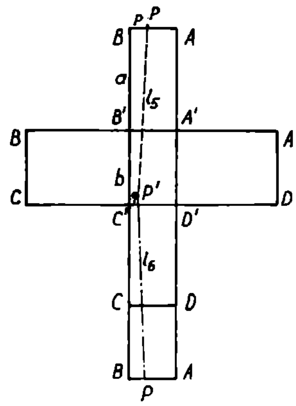
Lösung zu der Aufgabe
von Prof. Dr. Herbert Frank

▲589 Klappt man die Oberfläche eines Quaders auf, indem man sie an einigen Kanten aufschneidet, und legt sie in die Ebene, so bleibt die Länge eines beliebigen Kurvenbogens unverändert. Da in der Ebene die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten P und P' die Strecke $\overline{PP'}$ ist, wäre die Lösung der genannten Aufgabe auf folgendem Wege zu finden:
Man sucht alle Aufklappungen (Abwicklungen) der Oberfläche des Quaders $ABCD\ A'B'C'D'$ in die Ebene derart, daß die Punkte P und P' durch eine Strecke verbindbar sind, die ganz in der aufgeklappten Oberfläche des Quaders liegt. Dabei ist zu beachten, daß an aufgeschnittenen Kanten die Punkte paarweise zu identifizieren sind, d. h. entsprechende („aufgeschnittene") Punkte als ein und derselbe Punkt gelten. Beiliegend habe ich die möglichen Fälle skizziert (ich hoffe, keinen übersehen zu haben). Es ergeben sich 10 Möglichkeiten, die Punkte P und P' mit einer Strecke zu verbinden, die ganz in der aufgeklappten Oberfläche des Quaders liegen. Unter diesen Strecken ist nun die Strecke mit der kleinsten Länge auszuwählen (das können auch mehrere Strecken gleicher Länge sein). Zu diesem Zweck berechnet man die Länge dieser Strecke mit Hilfe des Satzes von Pythagoras. Man erhält folgendes Resultat, wobei a, b, c die Länge der Kanten $\overline{AA'}$, $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AD}$ bezeichnen, p den Abstand des Punktes P vom Punkte B und q den Abstand des Punktes P' vom Punkte C':





$l_1^2=(a+p)^2+(b+q)^2$
$l_2^2=a^2+(b+p+q)^2=(a+p-p)^2+(b+q+p)^2$
$\quad=(a+p)^2+(b+q)^2-2p(a-b-q)$
$l_3^2=(a+q)^2+(b+p)^2=(a+p+q-p)^2$
$\quad+(b+q+p-q)^2$
$\quad=(a+p)^2+(b+q)^2-2(p-q)\cdot(a-b)$
$l_4^2=(a+p+q)^2+b^2$
$\quad=(a+p+q)^2+(b+q-q)^2=(a+p)^2$
$\quad+(b+q)^2+2q(a-b+p)$
$l_5^2=l_6^2=(a+b)^2+(p-q)^2=(a+p)^2+(b+q)^2$
$\quad+2ab-2pq-2ap-2bq$
$l_7^2=(a+c-p)^2+(b+c-q)^2=(a+p+c-2p)^2$
$\quad+(b+q+c-2q)^2$
$\quad=(a+p)^2+(b+q)^2+(c-2p)(2a+c)$
$\quad+(c-2q)(2b+c)$ usw.



Über eine Vielzahl von Fallunterscheidungen wäre nun zu entscheiden, welche dieser Größen jeweils die kleinste ist. Ob diese Frage überhaupt entscheidbar ist, vermag ich nicht zu sagen, da ich sie selbst nicht näher untersucht habe. Vielleicht hätte ich die Aufgabe auf einen Spezialfall einschränken sollen; dann hätte sie allerdings vieles von ihrem mathematischen Reiz verloren.

Lösung des Mathematischen „Kreuzworträtsels" (Heft 1/71)

3	5	7		4	2	0
3	3		4		6	2
3		1	0	1		7
	1	9	6	8	3	
2		1	3	0		9
2	0		2		4	9
2	7	0		9	9	9

Zur Erläuterung der Lösung geben wir die folgenden Hinweise:
Waagerecht:
a) Es gibt nur drei solche Primzahlen, nämlich 3, 5 und 7.
c) Die Zahl ist gleich $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.
f) Wir erhalten $4x-52+3x+21=200$, also $7x=231$, d. h., $x=33$.
h) Wir erhalten $x<\frac{1000}{16}=62\frac{1}{2}$, also ist die gesuchte natürliche Zahl gleich 62.
i) Bereits die Zahl 101 ist eine Primzahl, da sie nicht durch 2, 3, 5 und 7 teilbar ist.
k) Es gilt $2^9=512<10000$, $3^9=19683$ und $4^9=262144>100000$; die weiteren neunten Potenzen natürlicher Zahlen haben mehr als 5 Stellen; daher ist 19683 die einzige Zahl mit den gegebenen Eigenschaften.
m) Wir erhalten $x^2=120^2+50^2=16900$, also $x=130$.
o) Die Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck beträgt $\frac{n(n-3)}{2}$. Für $n=8$ erhalten wir $\frac{8\cdot 5}{2}=20$.
p) Von den zweistelligen Zahlen $25-1=24$, $50-1=49$, $75-1=74$ und $100-1=99$ besitzt nur die Zahl 49 einen Vorgänger, der durch 16 teilbar ist.
q) Die Maßzahl der anderen Kathete beträgt $\sqrt{39^2-15^2}=\sqrt{1296}=36$. Daher ist die Maßzahl des Flächeninhalts gleich $\frac{36\cdot 15}{2}=270$.
r) Hier hat sich in der Aufgabe ein Fehler eingeschlichen. Es muß richtig heißen: „Das Produkt zweier natürlicher Zahlen, deren k.g.V. gleich 333 und deren g.g.T. gleich 3 ist." Dann erhalten wir das Produkt $333 \cdot 3 = 999$; denn das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist gleich dem Produkt ihres k.g.V. und ihres g.g.T.

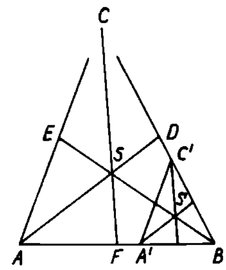
Senkrecht:
a) Aus $\frac{x}{1000}<\frac{1}{3}$ folgt $x<\frac{1000}{3}=333\frac{1}{3}$. Daher ist die gesuchte Zahl gleich 333.
b) Die kleinste Primzahl, die größer als 50 ist, ist 53.
d) Aus $x+y=8$ und $y-x=4$ folgt $2y=12$, also $y=6$ und weiter $x=2$.
e) Wir erhalten $1:37=0{,}027\ldots$; die ersten drei Ziffern sind also 0, 2, 7.
g) Wir erhalten $4x=3x+40632$, also $x=40632$.
i) Es gilt $\frac{39800}{209}<x<\frac{40000}{209}$, also $190\frac{90}{209}<x<191\frac{81}{209}$, d. h., $x=191$.
j) Die Maßzahl des Radius ist gleich 30; daher ist die Maßzahl des Umfangs des regelmäßigen Sechsecks gleich $30 \cdot 6 = 180$.
l) Da die Zahlen 2, 3 und 37 teilerfremd sind, ist die gesuchte Zahl gleich $2\cdot 3\cdot 37=222$.
n) Die größte dreistellige natürliche Zahl ist 999.

Lösungen zu den Aufgaben von Frau Dr. Nazla H. A. Khedre (Heft 1/71)

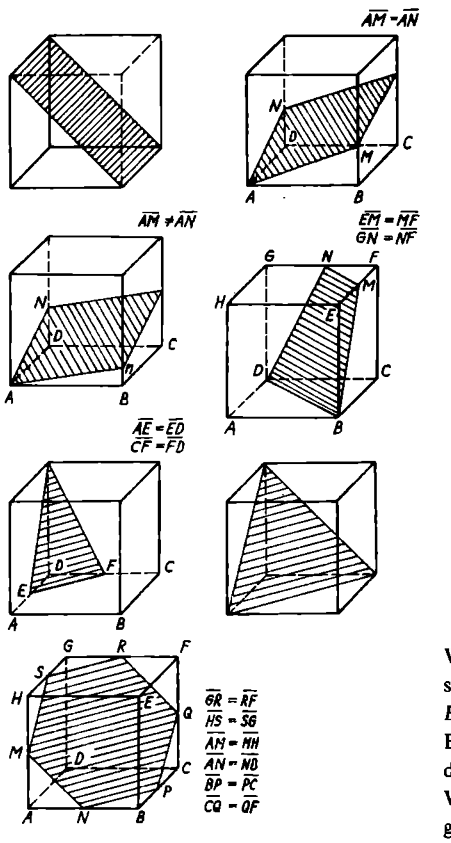
1. Aus $EL \parallel CD$, $EG \perp CD$ und $AB \perp CD$ folgt, daß das Viereck $GOLE$ ein Rechteck ist. $\overline{OE}=r$ ist Diagonale dieses Rechtecks; damit gilt $\overline{OE}=\overline{GL}$, denn die Diagonalen eines Rechtecks sind gleichlang. Aus analogen Gründen ist auch das Viereck $KFHO$ ein Rechteck mit der Diagonalen $\overline{OF}=r$, und es gilt $\overline{OF}=\overline{HK}$. Aus $r=\overline{OE}=\overline{GL}$ und $r=\overline{OF}=\overline{HK}$ folgt $\overline{GL}=\overline{HK}$.

2. Wir legen auf der Seite $\overline{BC}$ einen inneren Punkt C' fest und zeichnen durch C' die

Parallele zu AC; ihr Schnittpunkt mit der Geraden AB sei A'. Auf Grund unserer Konstruktion sind die Dreiecke ABC und $A'BC'$ einander ähnlich. Wir konstruieren nun die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks $A'BC'$; ihr Schnittpunkt sei S'. Durch A zeichnen wir dann die Parallele zu $A'S'$, die die Gerade BC in D schneidet. Die Gerade BS' schneide die Gerade AC in E; der Schnittpunkt der Geraden AD und BE sei S. Schließlich halbieren wir die Seite $\overline{AB}$, der Halbierungspunkt sei F und zeichnen die Gerade FS. Wegen $\overline{CF}=s_c$ und $\overline{SF}=\frac{1}{3}s_c$ gilt $\overline{SC}=2\cdot\overline{SF}$. Damit läßt sich C konstruieren, indem wir auf der Geraden FS von S aus die Strecke $\overline{SC}=2\cdot\overline{SF}$ abtragen.



3. Der Anschaulichkeit halber geben wir mögliche Lösungen durch Schrägbilder an.



Lösungen der Aufgaben, gestellt für die alpha-Leser von den 6 Mädchen, welche an der XII. IMO teilnahmen:

Helena Husova (ČSSR): Durch jedes Zerschneiden eines Blattes Papier in zwölf Teile vergrößert sich die Anzahl der Papierstückchen um elf Stück. Werden n Blätter zerschnitten, so erhalten wir $(12+11n)$ Blätter zum Teil unterschiedlicher Größe. Die Gleichung $12+11n=100$ besitzt die Lösung $n=8$. Die Gleichung $12+11n=1000$ besitzt im Bereich der natürlichen Zahlen als Grundbereich keine Lösung. Auf die vorgegebene Weise können 100, aber nicht 1000 Papierstückchen entstehen.

Virginia Stoinova Hristova (VR Bulgarien): Es seien in dieser Reihenfolge $\overline{PD}=r$, $\overline{PE}=s$, $\overline{PF}=t$ die Längen der von P auf $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ gefällten Lote. Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC ergibt sich dann

$$\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}as+\frac{1}{2}at=\frac{1}{2}ah,$$
$$\frac{1}{2}a(r+s+t)=\frac{1}{2}ah,$$
$$r+s+t=h.$$

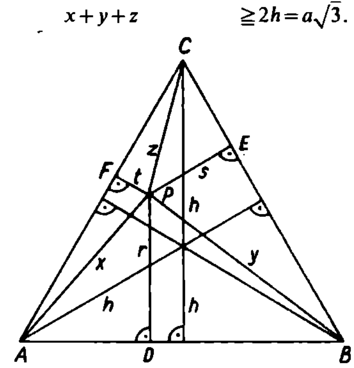
Die Summe aus den Längen dieser Lote ist also konstant, und zwar gleich der Höhe h des Dreiecks ABC.

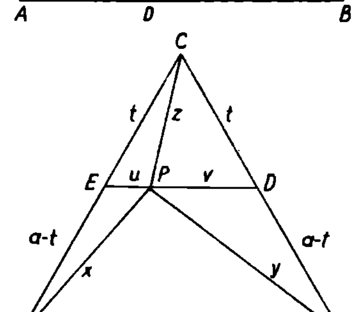
Für eine beliebige Lage des Punktes P gilt dann (wie der Zeichnung zu entnehmen ist):

$$z+r\geqq h,\quad x+s\geqq h,\quad y+t\geqq h.$$

Daraus folgt $x+y+z+(r+s+t)\geqq 3h$,

$$x+y+z+h\geqq 3h,$$
$$x+y+z\geqq 2h=a\sqrt{3}.$$





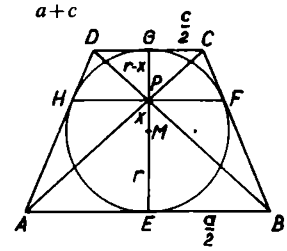
Wir zeichnen eine Parallele zu AB durch P, sie schneide AC in E, BC in D. Das Dreieck EDC ist dann ebenfalls gleichseitig.

Es sei $\overline{ED}=\overline{CD}=\overline{CE}=t$, $\overline{PE}=u$ und $\overline{PD}=v$, dann gilt $\overline{AE}=\overline{BD}=a-t$.

Wegen $z<t$, $x<u+(a-t)$, $y<v+(a-t)$ gilt dann $x+y+z<2a+(u+v)-t$,

$$x+y+z<2a+t-t,$$
$$x+y+z<2a.$$

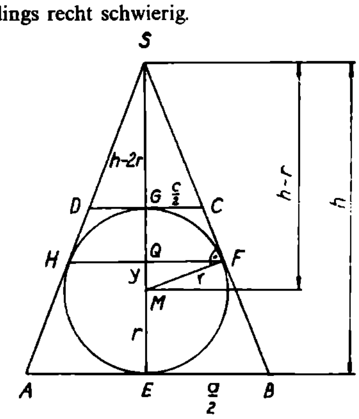
Agnes Szendrei (Ungarische VR): Jedes gleichschenklige Trapez ist eine axialsymmetrische Figur. Die Berührungspunkte E und G des Inkreises mit den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sowie der Schnittpunkt P der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ liegen auf der Symmetrieachse EG des gleichschenkligen Trapezes $ABCD$. Es sei M der Mittelpunkt des Inkreises und r sein Radius; bezeichnen wir $\overline{MP}$ mit x, dann gilt $\overline{EP}=r+x$ und $\overline{GP}=r-x$. Nach dem Strahlensatz erhalten wir $a:c=(r+x):(r-x)$ bzw. $x=\frac{r(a-c)}{a+c}$.



Der Schnittpunkt S der Geraden BC und AD liegt ebenfalls auf der Symmetrieachse EG. Es sei $\overline{ES}=h$, Q der Schnittpunkt der Sehnen $\overline{EG}$ und $\overline{FH}$ und $\overline{MQ}=y$, dann gilt $\overline{GS}=h-2r$. Nach dem Strahlensatz erhalten wir $h:(h-2r)=a:c$ bzw. $h=\frac{2ar}{a-c}$. Wenden wir auf das rechtwinklige Dreieck MFS den Kathetensatz an, so erhalten wir $y(h-r)=r^2$ bzw. $h=\frac{r(r+y)}{y}$. Durch Gleichsetzen und weiteres Umformen erhalten wir schließlich

$$\frac{2ar}{a-c}=\frac{r(r+y)}{y}\quad\text{bzw.}\quad y=\frac{r(a-c)}{a+c}.$$

Damit gilt $x=y$ bzw. $\overline{MP}=\overline{MQ}$, das heißt, die Punkte P und Q fallen zusammen. Dieser Sachverhalt gilt auch für ein beliebiges Tangentenviereck; der Beweis wird dann allerdings recht schwierig.



Cevelma Dansansaravin (Mongolische VR): Es sei x die Anzahl der Bäume und y die Anzahl der Vögel; dann gilt $y-x=1$ und $2(x-1)=y$. Durch Substitution erhalten wir daraus $2(x-1)-x=1$. Diese Gleichung hat die Lösung $x=3$. Aus $y-3=1$ folgt $y=4$. Es waren drei Bäume und vier Vögel vorhanden.

Angelika Rindler (Österreich): Es seien p und $p+2$ Primzahlen, ihre Summe beträgt $2p+2=2(p+1)$. Da p Primzahl ist, muß $p+1$ eine gerade Zahl und somit durch 2 teilbar sein. Folglich ist $2(p+1)$ durch $2\cdot 2=4$ teilbar.

Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen p, $p+1$, $p+2$ ist genau eine durch 3 teilbar. Da $p\neq 3$, und p und $p+2$ beides Primzahlen sind, kann nur $p+1$ durch 3 teilbar sein. Deshalb ist $2(p+1)$ durch $4 \cdot 3 = 12$ teilbar.

Ursula Tyl (DDR): Es sei p das Produkt zweier der vier angegebenen Zahlen; nach Voraussetzung gilt dann

$$p^2 = (n-1)(n^2-n)(n^3-n^2)(n^4-n^3),$$
$$p^2 = (n-1)\,n\,(n-1)\,n^2\,(n-1)\,n^3\,(n-1),$$
$$p^2 = n^6(n-1)^4,$$
$$p = n^3(n-1)^2.$$ Nun gilt aber

auch $(n-1)(n^4-n^3) = n^3(n-1)^2$ und
$(n^2-n)(n^3-n^2) = n^3(n-1)^2$.

Folglich ist das Produkt aus der ersten und vierten stets gleich dem Produkt aus der zweiten und dritten der angegebenen vier Zahlen und zwar für $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$.

Lösung der Aufgabe von
Dipl.-Math. V. Scharnitzky (Heft 6/70, S. 144)

Da $1970 = 2 \cdot 5 \cdot 197$ und $n = 2k$, wobei k eine positive ganze Zahl ist, haben wir nur zu beweisen, daß die Zahl

$$z = 222^{2k} + 202^{2k} - 192^{2k} - 172^{2k}$$
$$= 2^{2k}(111^{2k} + 101^{2k} - 96^{2k} - 86^{2k})$$

durch 2, durch 5 und durch 197 teilbar ist.
Nun ist, weil k eine positive ganze Zahl ist, 2^{2k} durch 2 teilbar; wir haben also nur noch zu beweisen, daß die Zahl

$$x = (111^{2k} - 86^{2k}) + (101^{2k} - 96^{2k})$$

durch 5 und durch 197 teilbar ist. Wir haben dabei die Summanden so geordnet, daß die Summe der Basen der Potenzen in beiden Klammern jeweils 197 beträgt, da ja auch die Teilbarkeit durch 197 nachzuweisen ist.
Wir erhalten weiter

$$x = (111^k + 86^k)(111^k - 86^k)$$
$$+ (101^k + 96^k)(101^k - 96^k).$$

Nun gilt für alle positiven ganzen Zahlen k und für alle reellen Zahlen a und b mit $a \neq b$ (vgl. z. B. das Tafelwerk, 7.–12. Klasse, S. 57)

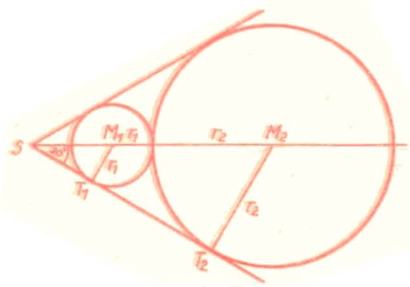
$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}),$$

also ist $a^k - b^k$ durch $a-b$ teilbar. Daraus folgt, daß $111^k - 86^k$ durch $111 - 86 = 25$ und $101^k - 96^k$ durch $101 - 96 = 5$ teilbar ist, also ist x durch 5 teilbar.
Nun unterscheiden wir die folgenden beiden Fälle:
1. Fall: k sei eine ungerade positive ganze Zahl. Dann gilt

$$a^k + b^k = (a+b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + \ldots - ab^{k-2} + b^{k-1}),$$

also ist $a^k + b^k$ durch $a+b$ teilbar.
Daraus folgt, daß in diesem Fall $111^k + 86^k$ durch $111 + 86 = 197$ und $101^k + 96^k$ durch $101 + 96 = 197$ teilbar ist. Also ist auch x durch 197 teilbar.
2. Fall: $k = 2m$ sei eine gerade positive ganze Zahl. Dann gilt $a^k - b^k = a^{2m} - b^{2m}$
$= (a^m + b^m)(a^m - b^m)$.
Ist nun m ungerade, so ist wieder $a^m + b^m$ durch $a+b$ teilbar. Also ist in diesem Fall $111^m + 86^m$ und $101^m + 96^m$ durch 197 teilbar, d. h., auch x ist durch 197 teilbar.
Ist aber m gerade, so setzen wir das Verfahren so lange fort, bis wir einen Zerlegungsfaktor $a^t + b^t$ mit ungeradem t erhalten, der dann durch $a+b$ teilbar ist; dabei kann auch $t = 1$ werden. Daher ist auch in diesem Falle x durch 197 teilbar. Damit haben wir bewiesen, daß die Zahl x in jedem Falle durch 197 und durch 5 teilbar ist. Also ist die Zahl z durch 197, durch 5 und durch 2 teilbar, also durch 1970 teilbar, w. z. b. w.

9▲611 Es seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2, S der Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten und T_1 bzw. T_2 die Berührungspunkte einer Tangente mit den Kreisen k_1 bzw. k_2.



Dann hat das rechtwinklige Dreieck M_1ST_1 die Winkel $\sphericalangle M_1ST_1 = 30°$ und $\sphericalangle T_1M_1S = 60°$; man kann es sich also durch Zerlegung eines gleichseitigen Dreiecks in zwei kongruente rechtwinklige Teildreiecke entstanden denken. Wegen $\overline{M_1T_1} = r_1$ gilt also $\overline{SM_1} = 2r_1$ und analog $\overline{SN_2} = 2r_2$.
Daraus folgt

$$\overline{M_1M_2} = \overline{SM_2} - \overline{SM_1} = 2r_2 - 2r_1.$$

Andererseits gilt, da die Kreise k_1 und k_2 sich berühren,

$$\overline{M_1M_2} = r_1 + r_2.$$

Wir erhalten also die Gleichungen

$$r_1 + r_2 = 2r_2 - 2r_1,$$
$$3r_1 = r_2,$$
$$r_1 : r_2 = 1 : 3.$$

Die Radien der Kreise k_1 und k_2 verhalten sich also wie $1 : 3$.

10/12▲615 Angenommen, lg 5 sei rational; dann gilt $\lg 5 = \frac{p}{q}$, wobei wegen $\lg 5 > 0$ p und q teilerfremde, von Null verschiedene natürliche Zahlen sind.
Es gilt also, da die Basis der dekadischen Logarithmen gleich 10 ist,

$$10^{\frac{p}{q}} = 5, \quad 10^p = 5^q, \quad 5^9 \cdot 2^p = 5^q.$$

Wegen $p \geqq 1$ ist der Term auf der linken Seite dieser Gleichung durch 2 teilbar, also auch der Term auf der rechten Seite, d. h., die Zahl 5^q und damit auch die Zahl 5 ist durch 2 teilbar. Das ist aber ein Widerspruch; daher ist die Annahme, lg 5 sei eine rationale Zahl falsch, womit die Behauptung bewiesen ist.

Berichtigung

Gudrun Manske erhielt das *alpha*-Abzeichen in Gold. Sie wurde versehentlich in Klassenstufe 6 anstatt in Klassenstufe 9 eingereiht. Sie ist (bei 18 eingesandten Lösungen) Preisträger und erhielt eine Buchprämie. In Klassenstufe 8 muß es heißen: *Beate Recknagel*, in Heft 6/70 auf S. 137, Klassenstufe 5: *Elke Genath*. Wir danken dem Mathematikfachlehrer E. Manske, Steinbach-Hallenberg, für den Hinweis. Der vorbildlichen Schule wünschen wir weiterhin gute Erfolge im *alpha*-Wettbewerb. Als Anerkennung für die sehr guten Leistungen wurden 5 Buchprämien überreicht, d. Red.

Lösungen zu alpha-heiter

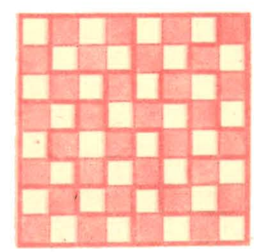
Ference Pataki in Aktion

$[(2a+39) \cdot 50 + 21] - (1971 - b) = 100a + b$
Jede individuelle Belegung der Variablen a und b des Ausdrucks $100a + b$ liefert die in der Aufgabe gesuchte Zahl.

Brandschutz-Rechenübung

Es sind 9 Feuerwehrleute angetreten.

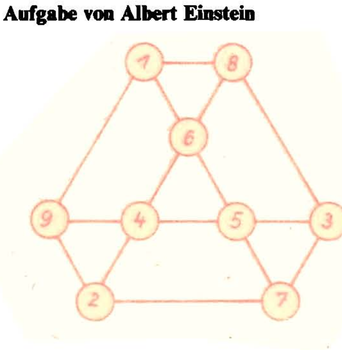
Das zersprungene Schachbrett



Kryptarithmetik

▲=2 ⊙=3 ⊂⊃=4 ⊠=6

Eine Aufgabe von Albert Einstein



Wieviel wiegt der Knabe?

Es müssen 6 Katzen auf die Waage springen.

Rätsel

1. Diagonale 2. Addition 3. Tangens 4. Ellipse 5. Nullstelle 6. Variable 7. Exponent 8. Rechteck 9. Abstand 10. Rhombus 11. Bruch 12. Einheit 13. Intervallschachtelung 14. Tangente 15. Ungleichungen 16. Normalparabel 17. Gleichungen: *Datenverarbeitung*

Literatur

In Vorbereitung

GELFAND/GLAGOLEWA/SCHNOL

Funktionen und graphische Darstellungen

Übersetzung aus dem Russischen
Etwa 104 Seiten mit etwa 200 Abbildungen.
Etwa 7,40 M

Der Behandlung von Funktionen und ihrer graphischen Darstellungen wird in der Schule ein weiter Raum gegeben, da sie in nahezu allen Bereichen von Wissenschaft und Technik eine hervorragende Rolle spielen. Der Inhalt des vorliegenden Buches ist eine Erweiterung und Vertiefung des Lehrplanstoffes; wesentliche Teile knüpfen genau dort an, wo die schulmäßige Behandlung endet.

W. MAY

Differentialgleichungen

Etwa 196 Seiten mit etwa 34 Abbildungen.
Etwa 7,50 M

Das Buch stellt für Schüler der oberen Klassen diesen über den Lehrplan der Schule hinausgehenden Stoff in verständlicher Form dar. Dabei will es keine vollständige Behandlung der verschiedenen Arten von Differentialgleichungen bringen, sondern dem Leser einen Einblick in die Bedeutung, Lösungsprinzipien und Möglichkeiten der Anwendung von Differentialgleichungen geben.

Neuerscheinungen

ZICH/KOLMAN

Unterhaltsame Logik

Übersetzung aus dem Tschechischen
84 Seiten mit 15 Abbildungen.
Etwa 5,90 M

Nach kurzer, leichtverständlicher Einführung in die Aussagenlogik, die nur geringe Voraussetzungen an mathematischen Kenntnissen erfordert und für Schüler der mittleren und oberen Klassenstufen geeignet ist, regen viele interessante Aufgaben den Leser zur intensiven Mitarbeit an.

H. BELKNER

Matrizen

96 Seiten. 4,30 M

E. LEHMANN

Lineare Optimierung für Junge Mathematiker

116 Seiten mit 36 Abbildungen. 4,85 M

Alle Bändchen kartoniert und im Format 12 cm × 19 cm

Außerdem lieferbar

Belkner
Determinanten 4,80 M

Gelfand/Glagolewa/Kirillow
Die Koordinatenmethode 3,40 M

Hameister
Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene 4,20 M

Hasse
Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik 3,30 M

Krysicki
Zählen und Rechnen einst und jetzt 4,80 M

Lietzmann
Altes und Neues vom Kreis 2,10 M
Der Pythagoreische Lehrsatz 3,30 M
Riesen und Zwerge im Zahlenreich 1,85 M
Wo steckt der Fehler? 4,80 M

Miller
Rechenvorteile 3,75 M

Sedláček
Einführung in die Graphentheorie 6,40 M

Übungen für Junge Mathematiker
Teil 1:
Lehmann, Zahlentheorie 6,50 M
Teil 2:
Grosche, Elementargeometrie 4,50 M
Teil 3:
Kleinfeld, Ungleichungen 5,50 M

Liebe Schülerinnen und Schüler!
Zum 10. Male wird in der DDR die Mathematik-Olympiade durchgeführt. Die meisten von Euch werden sich schon einige Male erfolgreich an der ersten Stufe beteiligt haben; manchen ist es gelungen, an einer Kreis-, Bezirks- oder sogar an der DDR-Olympiade teilzunehmen und sich dort Preise zu verdienen. Aber nicht nur den Preisträgern, sondern allen Teilnehmern an irgendeiner Stufe der Mathematik-Olympiade möchte ich anläßlich dieses Jubiläums die herzlichsten Glückwünsche aussprechen; denn für alle bedeutet schon die Teilnahme an diesem Wettkampf einen Gewinn. Die Mühe für die Vorbereitung trägt ihre Früchte in der schulischen Arbeit und darüber hinaus, und für viele wird die Beschäftigung mit der Mathematik auch zur Freude an der Mathematik geführt haben.
Wie Eure Schülerzeitschrift *alpha* soll auch die Mathematische Schülerbücherei Euch bei Eurer Arbeit helfen, Kenntnisse vermitteln und Freude bereiten. Wir Verlagsmitarbeiter hoffen, daß uns das bisher gelungen ist, und wir werden uns weiterhin bemühen, Euch viele interessante Bändchen der Mathematischen Schülerbücherei zur Verfügung zu stellen.
Für die erfolgreiche Teilnahme an der 10. Mathematik-Olympiade möchte ich Euch meine besten Wünsche übermitteln.

D. Ziegler *Verantw. Lektor für Mathematik*

Bücher von heute sind morgen Taten

Literatur zu: 10 Jahre Raumfahrt (siehe S. 27 bis 29)

J. A. Gagarin / W. I. Lebedew
Der Sprung ins Weltall
Aus dem Russischen von Friedrich Bergner.
205 Seiten mit Fotos, Halbleinen 7,20 M,
Verlag Neues Leben, Berlin

Die Autoren schildern aus eigenem Erleben die Emotionen und Reaktionen von Raumpiloten in außergewöhnlichen Situationen. Sie machen den Leser nicht nur mit dem Bau und der Ausstattung sowjetischer Raumschiffe bekannt, sondern gehen vor allem auf die im Zustand der Schwerelosigkeit und in der Welt der Stille auftretenden Erscheinungen und Schwierigkeiten sowie auf Möglichkeiten zu ihrer Überwindung ein.

Heinz Mielke **Der Weg zum Mond**
264 Seiten mit Illustrationen, Fotos und Tafeln,
Halbleinen 12,40 M, Verlag Neues Leben, Berlin

Zusammen mit dem Leser verfolgt der Autor den Weg, den das menschliche Erkenntnisstreben von ersten Phantasievorstellungen bis zur wissenschaftlichen Erkundung des Mondes zurückgelegt hat, und macht ihm den wechselseitigen Zusammenhang der Raumfahrtforschung und der wissenschaftlich-technischen Revolution und damit den Nutzen dieser Forschung für die Entwicklung der menschlichen Gesellschaft erkennbar.

Bestellung obengenannter Titel sind unter Angabe des Kennwortes *alpha* zu richten an:
Buchhaus Leipzig, 701 Leipzig, PSF 140

Heinz Mielke **Lexikon Raumfahrt**
367 Seiten, zahlreiche Abb., Halbleinen 18,60 M,
transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin

Das Lexikon ist gegenwärtig das umfassendste deutschsprachige Nachschlagewerk seiner Art. Es enthält etwa 1 200 Stichwörter und Synonyme sowie zahlreiches Bildmaterial. Übersichten über die Grenzwissenschaften der Raumfahrt, Fakten aus der Raketen- und Raumfahrtgeschichte sowie Biographien der Kosmonauten und Astronauten ermöglichen eine umfassende Information.

Frösi Schallfolie: **Der Weg in den Kosmos**
Preis 2,— M
Zu bestellen bei: Redaktion Frösi, Verlag „Junge Welt", 108 Berlin

Inhaltsangabe der Schallfolie: Originalaufnahmen von Sputnik 1 bis 3, Lunik 1 bis 5; Startvorbereitungen auf dem Kosmodrom Baikonur. Die Stimme des ersten Kosmonauten aus der Testkammer und dem Weltall · Telefongespräch J. Gagarins nach Saratow

Daten seines Fluges: Raumschiff „Wostok 1" · 4725 kg Start: 12. 4. 1961 7.07 MEZ · Startort: Baikonur · Landung: 12. 4. 1961, 8.55 MEZ · Landeort: Dorf Smelowka, südlich Engels an der Wolga.

Aus der Mathematischen Schülerbücherei

L. A. KALJOUJNINE
Primzahlzerlegung
Übersetzung aus dem Russischen · MSB, Band 59
1971, etwa 40 Seiten, Broschur 2,40 M
Bestellnummer: 569 878 0

T. ROMAN
Reguläre und halbreguläre Polyeder
Übersetzung aus dem Rumänischen · MSB, Band 45
1968, 119 Seiten, 76 Abbildungen, Broschur, 6,— M
Bestellnummer: 569 467 5

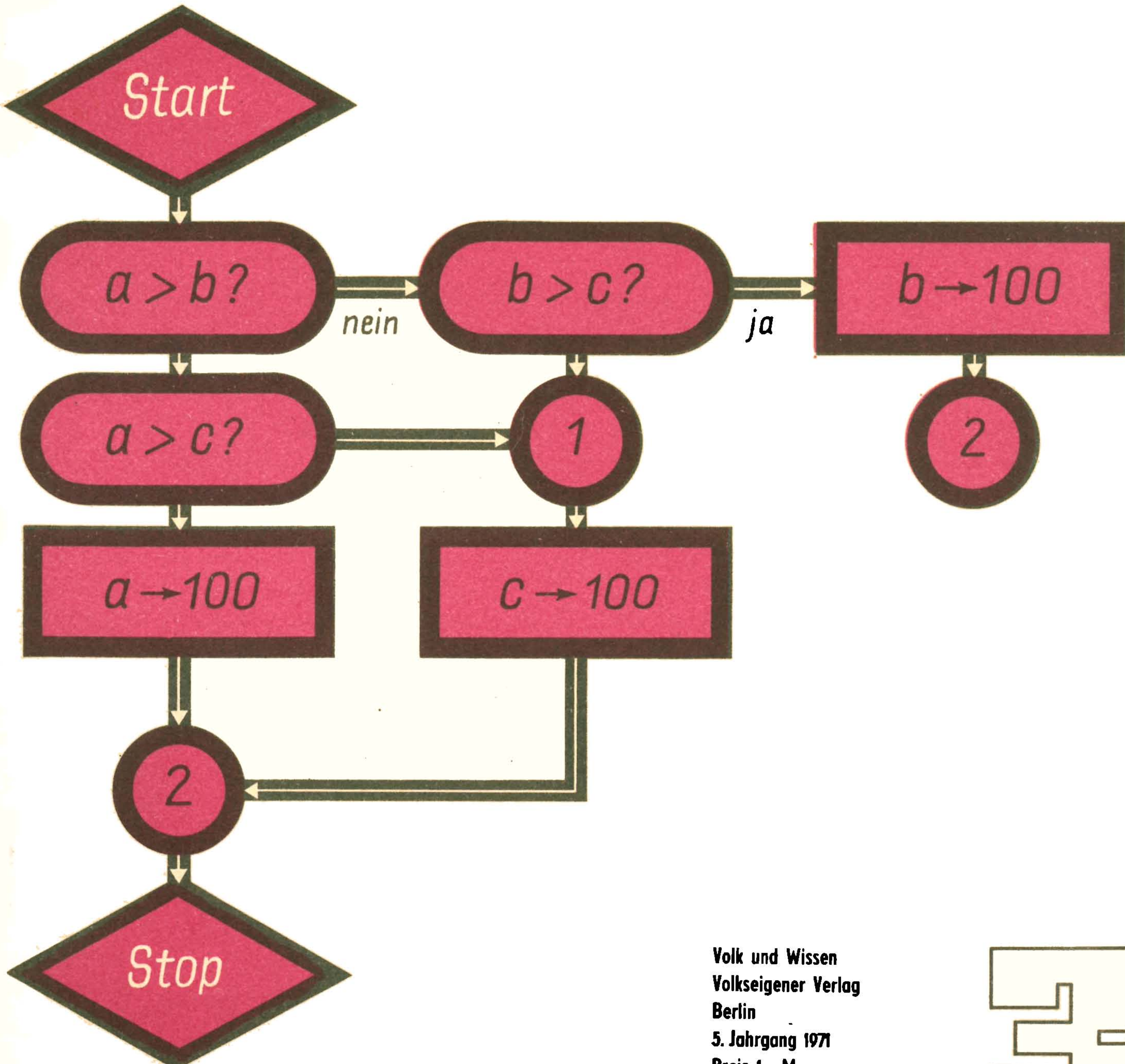
I. M. SOBOL
Die Monte-Carlo-Methode
Übersetzung aus dem Russischen · MSB, Band 61
1971, etwa 50 Seiten, Broschur, 3,80 M
Bestellnummer: 569 879 9

N. N. WOROBJOW
Die Fibonaccischen Zahlen
Übersetzung aus dem Russischen · MSB, Band 19
2., erweiterte Auflage 1971, 129 Seiten, 22 Abbildungen,
Broschur, 4,80 M
Bestellnummer: 569 841 4

VEB DEUTSCHER
VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
5. Jahrgang 1971
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

3

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import BmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: L. Berger, Žiliná (S. 52); Urania Heft 2/71 (S. 52); J. Lehmann, Leipzig (S. 55, 60, 65);
Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes des Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 17. März 1971

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Dieses Heft wurde zu Ehren der XIII. Internationalen Mathematikolympiade in der ČSSR (Juli 1971) gestaltet.

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgabe für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Über die Ramseyschen Zahlen

Jiří Sedláček

Wir beginnen mit einer einfachen Aufgabe. Sechs Schüler haben vereinbart, einander in den Ferien über zwei Themen zu schreiben. Jeder Schüler wird also jedem der fünf anderen Schüler schreiben, und jedes Paar hat sich auf ein Thema festgelegt. Wir sollen nun beweisen, daß es mindestens drei Schüler gibt, die untereinander über das gleiche Thema schreiben.

Wir erleichtern uns die Lösung durch eine geometrische Veranschaulichung. Jedem der 6 Schüler können wir einen Punkt in der Ebene zuordnen. Es ist gleichgültig, wie wir die Punkte in der Ebene auswählen, jedoch ist es zweckmäßig, wenn von diesen 6 Punkten keine drei auf einer Geraden liegen.
Auch wenn die Lage der einzelnen Punkte insgesamt beliebig ist, wollen wir sie uns so vorstellen, daß sie die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks bilden. Wenn ein Paar der Freunde über das erste Thema schreibt, wird das in der Figur so dargestellt, daß wir die zugehörigen zwei Punkte durch eine rote Linie (Sehne) verbinden. Wenn ein Paar über das zweite Thema schreibt, werden die beiden Punkte durch eine blaue Linie verbunden. Nun wäre zu beweisen, daß in dieser rot-blauen Figur immer wenigstens ein Dreieck existiert, dessen Seiten von gleichfarbigen Strecken gebildet werden. (Hier in der Zeitschrift ersetzen wir in den Figuren eine rote Strecke durch eine ausgezogene Linie, während wir eine blaue Strecke gestrichelt darstellen.)
Nun können wir an die Lösung der Aufgabe herangehen. Wir führen den Beweis indirekt, setzen also voraus, daß die oben angeführte Aussage falsch ist. Dann wäre es möglich, eine rotblaue Figur so zu zeichnen, daß es dabei weder ein rotgezeichnetes noch ein blaugezeichnetes Dreieck gibt.
Was folgt daraus? In der Figur gibt es insgesamt 15 Strecken, denn es liegt ein Sechseck mit allen Diagonalen vor. Zeichnet euch als Überlegungsfigur ein solches Sechseck, zunächst einfarbig. In der mehrfarbig gezeichneten Figur müssen dann wenigstens 8 Strecken gleichfarbig dargestellt sein (die übrigen Strecken haben dann alle die gleiche andere Farbe). Ohne daß wir damit die Allgemeinheit der Überlegungen einschränken, können wir voraussetzen, daß die erste Farbe rot sein soll. Es läßt sich nun beweisen, daß es wenigstens einen Punkt A gibt, von dem mindestens drei rote Strecken ausgehen. Wäre diese Aussage falsch, dann dürften von jedem der sechs Punkte höchstens zwei rote Strecken ausgehen und die Figur hätte folglich höchstens $(6 \cdot 2) : 2 = 6$ rote Strecken. Das ist aber ein Widerspruch zur Feststellung, daß es wenigstens 8 rote Strecken geben muß.
Wir tragen nun die drei roten Strecken, die vom Punkt A ausgehen sollen, in die Figur ein und bezeichnen die Endpunkte dieser Strecken der Reihe nach mit B, C, D (siehe Figur 1). Die Strecke $\overline{BC}$ kann nicht rot sein, sonst würde damit ein rotes Dreieck ABC entstehen; also ist $\overline{BC}$ eine blaue Strecke. Auch die Strecke $\overline{CD}$ ist blau darzustellen (entsprechend einer ähnlichen Überlegung). Welche Farbe gehört zur Strecke $\overline{BD}$? Falls rot, dann gäbe es ein rotes Dreieck ABD; falls blau, dann wäre das Dreieck BCD blau. Diese Überlegung führt also auf einen Widerspruch, daher muß die zugehörige Annahme falsch sein. Damit ist nun die ganze Aufgabe gelöst.

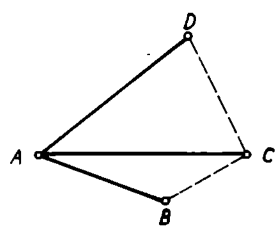


Bild 1

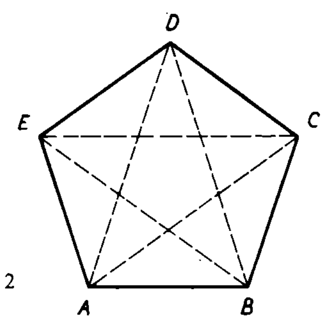


Bild 2

Wir wollen jetzt noch eine Variante zu dieser Aufgabenstellung betrachten. Hätten sich 7, 8 oder eine noch größere Anzahl von Schülern verabredet, dann würden wir aus diesen einfach eine Gruppe von 6 Schülern auswählen und durch eine Überlegung, wie wir sie schon kennen, könnten wir beweisen, daß es wenigstens drei Schüler gibt, die einander zum gleichen Thema schreiben. Ein solcher Beweis gelingt aber nicht, wenn es sich nur um fünf Schüler handelt. Dies zeigt uns Figur 2; wir erkennen dabei ein Fünfeck $ABCDE$ mit seinen Diagonalen. Wenn die Freunde einander so schreiben, wie die voll- bzw. gestrichelt-gezeichneten Linien anzeigen, erkennen wir, daß es keine Gruppe von drei Schülern gibt, die einander zum gleichen Thema schreiben. Geometrisch gesprochen: In der Figur 2 gibt es kein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C, D oder E, in dem alle drei Seiten des Dreiecks die gleiche Farbe besitzen.
Wer die Aufgaben der IMO verfolgt, wird sich möglicherweise erinnern, daß bei diesem Wettbewerb vor einigen Jahren eine etwas kompliziertere Aufgabe gestellt wurde. Dabei korrespondierten 17 Wissenschaftler zu drei Themen und es sollte bewiesen werden,

daß man dann wenigstens eine Gruppe von drei Wissenschaftlern finden kann, die einander zum gleichen Thema schreiben.*

Bei den Figuren, die wir hier benutzt haben, war es unwesentlich, wie die Punkte in der Ebene festgelegt waren; wir hätten auch die Punkte durch Kurven verbinden können, anstatt der tatsächlich benutzten Strecken. Das Gebilde, das wir für unsere Überlegungen verwendet haben, wird in der Mathematik Graph genannt. Wir wollen in diesem Zusammenhang für diesen Begriff keine genaue Definition geben und stellen daher nur fest, daß ein Graph aus zwei Arten von Elementen besteht: aus *Knoten*, die wir als Punkte in der Ebene darstellen, und aus *Kanten*, die als Strecken oder als Kurven dargestellt werden. Eine Kante verbindet immer zwei verschiedene Knoten. Wenn wir sagen, daß ein Graph vollständig ist, dann ist jedes Paar von Punkten durch genau eine Kante verbunden.

Die ursprüngliche Aufgabe können wir nun von einem höheren Standpunkt aus betrachten. Es seien a, b zwei gegebene natürliche Zahlen; dann bezeichnen wir mit $n=R(a,b)$ die kleinste natürliche Zahl n mit folgender Eigenschaft: jeder vollständige Graph mit n Knoten, dessen Kanten entweder rot- oder blaugefärbt sind, enthält unter den n Knoten a Knoten, die nur durch rote Kanten, oder b Knoten, die nur durch blaue Kanten verbunden sind.

Wir können hier nicht beweisen, daß eine solche Zahl $R(a,b)$ immer existiert. Der Beweis ist kompliziert und in der Fachliteratur zu finden. Diese Zahlen $R(a, b)$ werden manchmal *Ramseysche Zahlen* genannt (nach dem englischen Mathematiker F. P. Ramsey, der sich schon 1929 mit ähnlichen, aber weitaus allgemeineren Fragestellungen beschäftigte).

Wir hatten zu Beginn des Beitrags den Sachverhalt einer Aufgabe erläutert und können daraus erkennen, daß $R(3,3)=6$. Ihr könnt euch vorstellen, daß für alle Paare a, b die Beziehung $R(a,b)=R(b,a)$ gilt. Das Studium der Ramseyschen Zahlen ist schwierig und es ist bisher keine Formel bekannt, mit der man diese Zahlen im allgemeinen Fall einfach darstellen könnte. Es wurden nur Ungleichungen gefunden, die für Ramseysche Zahlen gelten und die eine ungefähre Bestimmung ihres numerischen Wertes gestatten. Die ungarischen Mathematiker Erdös und Szekeres führten 1935 die folgende Ungleichung an:

$$R(a,b) \leqq R(a-1,b)+R(a,b-1).$$

Wer mit Formeln aus der Kombinatorik vertraut ist, kann aus der eben angeführten Beziehung folgende herleiten:

$$R(a,b) \leqq \binom{a+b-2}{a-1}.$$

Auch die Beschränkung auf den Fall $a=b$ vereinfacht das Studium der Ramseyschen Zahlen nur unwesentlich. Durch Einsetzen in die eben angegebene Beziehung erhalten wir

$$R(a,a) \leqq \binom{2a-2}{a-1}.$$

Diese Ungleichung wurde 1963 durch C. Frasnay verbessert; seine Ungleichung lautet

$$R(a,a) \leqq \frac{8}{9}\binom{2a-2}{a-1}.$$

Selbstverständlich können wir die Ramseyschen Zahlen auch für drei, vier oder mehr Farben definieren. Das Studium der Zahlen $R(a,b,c)$, $R(a,b,c,d)$ usf. ist freilich noch komplizierter.

Seit dem Jahr 1936, als der ungarische Mathematiker *D. König* in Leipzig sein bekanntes Buch „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen" veröffentlichte, ist die Graphentheorie sowohl in die Breite als auch in die Tiefe gewachsen. Es entstanden neben Hunderten von wissenschaftlichen Arbeiten auch einige gute Lehrbücher, doch eine leichtfaßliche Einführung in diese Disziplin, die die Mathematikstudenten und die an der Graphentheorie interessierten Studenten und Wissenschaftler anderer Fachgebiete lesen können, fehlt noch immer. Ich denke hier vor allem an Physiker, Chemiker, Elektro-Ingenieure, aber auch an Ökonomen, Soziologen, Linguisten und Wissenschaftler anderer verwandter Gebiete. Das vorliegende Buch möge als ein Versuch in dieser Richtung gewertet werden. Es setzt neben einer guten Kenntnis der Schulmathematik freilich auch noch eine gewisse Fähigkeit zum abstrakten Denken voraus. Meiner Ansicht nach sind auch Schüler der höheren Klassen in der Lage, allein oder in Arbeitsgemeinschaften den Stoff durchzuarbeiten und zu verstehen.

Trotz der Elementarfassung und des geringen Umfangs des Buches war ich bestrebt, möglichst viele jener Probleme zu streifen, die in letzter Zeit in der Theorie der Graphen behandelt wurden. Jiří Sedláček

* Aufgabe 4, VI. IMO – UdSSR 1964
Jeder von 17 Wissenschaftlern steht im Briefwechsel mit allen anderen. Sie behandeln in ihrem Briefwechsel nur drei Themen, und je zwei Wissenschaftler behandeln ein und nur ein Thema. Zu beweisen ist, daß es mindestens drei Wissenschaftler gibt, die untereinander ein und dasselbe Thema behandeln.

Eine Aufgabe von Doc. Jan Vyšín

Karls-Universität Praha

▲693 Diesmal legen wir euch keine bestimmte Aufgabe oder kein Problem vor; wir verlangen etwas mehr. Wir beschreiben euch eine mathematische Situation und eure Aufgabe ist folgende:
Ihr bildet zuerst im Rahmen dieser Situation einige Probleme, die ihr dann löst. Es ist klar, daß wir in diesem Falle von euch mehr Phantasie und Erfindungsgabe verlangen als zum Lösen einer der üblichen mathematischen Aufgabe nötig ist. Aber wir bieten euch mehr an: Eure Arbeit wird interessanter sein, ihr werdet dabei mehr Freiheit haben und was das Wichtigste ist: Ihr werdet eine große Kunst kennen lernen; das ist die Kunst, Fragen zu stellen.
Wie ihr vielleicht wißt, ist es manchmal schwieriger, Aufgaben zu stellen – natürlich interessante, einen wertvollen Kern enthaltende Aufgaben – als dieselben zu lösen. Deshalb sind heutzutage die sogenannten *Problemsituationen* in den Mittelpunkt des Interesses aller schöpferischen Mathematiker und Mathematiklehrer getreten.
Unsere Problemsituation kann folgendermaßen beschrieben werden: In einer gegebenen Ebene (oder auf einer Geraden oder im Raum) ist eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ gegeben. Wir setzen voraus, daß die Menge $\mathfrak{M}$ mindestens zwei Punkte enthält und daß die Entfernung zwischen je zwei ihrer Punkte eine gewisse positive Zahl δ übertrifft. Wir sollen die Menge $\mathfrak{M}$ in mindestens zwei elementfremde nicht leere Untermengen zerlegen. Solche Zerlegungen sind geometrisch charakterisiert, z. B. kann die Menge $\mathfrak{M}$ durch Geraden, Kreislinien, Ebenen oder Kugelflächen zerlegt werden.
Erinnert euch an die XII. Internationale Mathematikolympiade! Unter den Wettbewerbsaufgaben befand sich auch eine Aufgabe über das Zerlegen gewisser Zahlmengen in zwei arithmetisch charakterisierte Untermengen. (Siehe *alpha* 5/70, S. 112, Aufg. 4) Es war also eine Aufgabe, deren Thematik eine arithmetische Analogie unserer geometrischen Problemsituation war. Es handelte sich um die Zerlegung einer aus sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen bestehenden Menge in zwei Teilmengen derart, daß die Produkte aller Zahlen jeder von diesen Teilmengen einander gleich waren.

Die gegebene geometrische Situation bietet uns sofort die erste Frage: Kann die Punktmenge $\mathfrak{M}$ auch unendlich sein? Es ist klar, daß jede endliche Punktmenge die Grundbedingung erfüllt: Ist nämlich δ_0 die kleinste der Entfernungen aller Punktepaare der Menge $\mathfrak{M}$, so genügt es, $\delta \frac{1}{2}\delta_0$ zu wählen, um die Forderung zu erfüllen.
Nehmen wir an, daß die Menge $\mathfrak{M}$ (in einer Ebene ϱ) unendlich ist, jedoch die vorgeschriebene „Abstandsbedingung" erfüllt. Konstruieren wir in ϱ ein Quadratnetz, dessen Quadrate die Seitenlänge $\frac{1}{4}\delta\sqrt{2}$ haben. Die größte in jedem einzelnen Netzquadrat enthaltene Strecke hat die Länge

$$d=\left(\frac{1}{4}\delta\sqrt{2}\right)\sqrt{2}=\frac{1}{2}\delta.$$

Deshalb liegt in jedem Netzquadrat (seine Grenze eingeschlossen) höchstens ein einziger Punkt der Menge $\mathfrak{M}$. Die Figur 1 zeigt eine gebrochene Spirallinie, die einmal durch das Innere jedes Netzquadrats geht. Dadurch ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung einer gewissen Menge der Netzquadrate und der Menge $\mathfrak{N}$ aller natürlichen Zahlen gegeben. Das bedeutet: Ist die Menge $\mathfrak{M}$ unendlich, so ist sie abzählbar, d. h. man kann eine umkehrbar eindeutige Abbildung auf die Menge aller natürlichen Zahlen finden; die Fig. 1 zeigt, wie eine solche Menge $\mathfrak{M}$ konstruierbar ist.

▲1▲ Die Menge $\mathfrak{M}$ ist endlich. Es sind zwei konzentrische Kreislinien k_1, k_2 zu konstruieren, so daß folgende Forderungen erfüllt werden:
a) weder k_1 noch k_2 enthält einen Punkt der Menge $\mathfrak{M}$.
b) das Innere des Kreises k_1, das Innere des Kreisringes (k_1, k_2) und das Äußere des Kreises k_2 enthalten dieselbe Punktanzahl der Menge $\mathfrak{M}$.
Die Aufgabe ist natürlich dann und nur dann lösbar, wenn die Anzahl aller Elemente der Menge $\mathfrak{M}$ durch 3 teilbar ist. Auf dem Bild 2 ist $\mathfrak{M}=\{A_1, A_2, \ldots, A_9\}$. Den Punkt S (d. h. den gemeinsamen Mittelpunkt der Kreislinien k_1, k_2) wählen wir derart, daß er auf keiner Symmetrieachse irgendwelcher Strecken $\overline{A_iA_k}$ $(i \neq k)$ liegt. Dann sind nämlich alle Entfernungen $\overline{SA_i}$ voneinander verschieden. Wählen wir die Bezeichnung der Punkte A_i so, daß

$$\overline{SA_1}<\overline{SA_2}<\overline{SA_3}<\ldots<\overline{SA_9}$$

ist; dann genügt es, die Radien der Kreise k_1, k_2 folgendermaßen zu wählen:

$$SA_3<r_1<SA_4<r_2<SA_7.$$

Wenn wir die Forderung a) auslassen und gleichzeitig jedes Gebilde durch seine Berandung ergänzen, so ist die Aufgabe auch in dem Falle lösbar, wenn die Punktanzahl der Menge $\mathfrak{M}$ kein Vielfaches von 3 ist.

▲2▲ Die in der Ebene ϱ liegende Punktmenge ist unendlich, aber b abzählbar; z. B. die Menge der Ecken sämtlicher Netzquadrate eines bestimmten Netzes (Fig. 3). Die Menge $\mathfrak{M}$ ist in zwei Teilmengen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ zu zerlegen, so daß jede von ihnen in einer abgeschlossenen Halbebene ϱ_1, ϱ_2 liegt; die Grenzlinien dieser Halbebenen sollen zwei verschiedene Parallelen von maximaler Entfernung sein.
So liegt z. B. auf dem Bild 3 im Innern des Ebenenstreifens kein Punkt der Menge $\mathfrak{M}$; die Grenzen beider Halbebenen sind die Verbindungslinien der Punkte (0; 0), (2; 1) und (1; 1), (3; 2). Ihre Entfernung (Breite des Streifens) ist $\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0{,}477$ und für die gegebene Richtung der Grenzlinien kann sie nicht vergrößert werden.

▲3▲ Die Menge $\mathfrak{M}$ ist endlich und umfaßt eine gerade Punktanzahl $2n (n \geqq 2)$. Die Menge $\mathfrak{M}$ ist in zwei Teilmengen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ zu zerlegen, deren jede n Punkte enthält und deren jede in einem Quadrat liegt. Die beiden Quadrate sollen parallele Seiten haben und punktfremd sein (Fig. 4, wo $n=5$ ist).
Wir bestimmen eine Gerade s derart, daß sie zu keiner Verbindungslinie irgendeines Punktpaares der Menge $\mathfrak{M}$ parallel ist. Wir projizieren sämtliche Punkte der Menge $\mathfrak{M}$ mit Projektionsrichtung (s) auf eine zu s senkrechte Gerade q. So erhalten wir $2n$ verschiedene Punkte der Geraden q, die eine Menge $\mathfrak{M}'$ bilden. Diese Menge $\mathfrak{M}'$ zerlegen wir durch eine Gerade p der Richtung (s) in zwei Teile (jeder Teil mit n Punkten). Die Konstruktion beider gesuchten Quadrate (siehe Fig. 4) liegt jetzt auf der Hand.

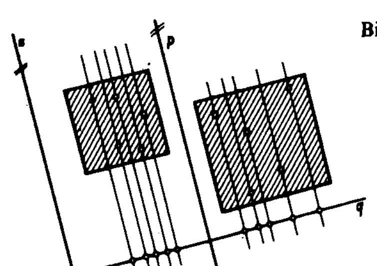


Bild 4

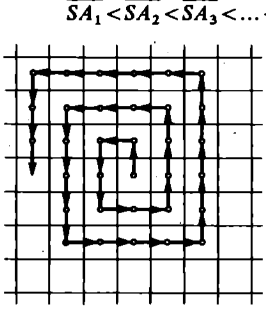


Bild 1

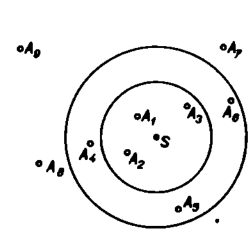


Bild 2

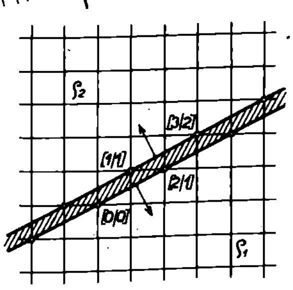


Bild 3

Vorschau auf die XIII. IMO

ČSSR 1971

Aus dem Programm der XIII. IMO

8. bis 10. Juli	– Sitzungen der Jury
10. Juli	– Ankunft der Delegationen in Bratislava
11. Juli	– Gemeinsame Fahrt nach Žilinà, dem Austragungsort der XIII. IMO
12. Juli	– Besichtigung von Žilinà und Umgebung
13. Juli	– 1. Klausur
14. Juli	– 2. Klausur
15. bis 17. Juli	– Exkursion und Ausflüge der Delegationen Korrektur der Arbeiten durch die Jury
18. Juli	– Rückfahrt nach Bratislava
19. Juli	– Feierlicher Abschluß der XIII. IMO
20. Juli	– Besichtigung von Bratislava
21. Juli	– Rückreise der Delegationen

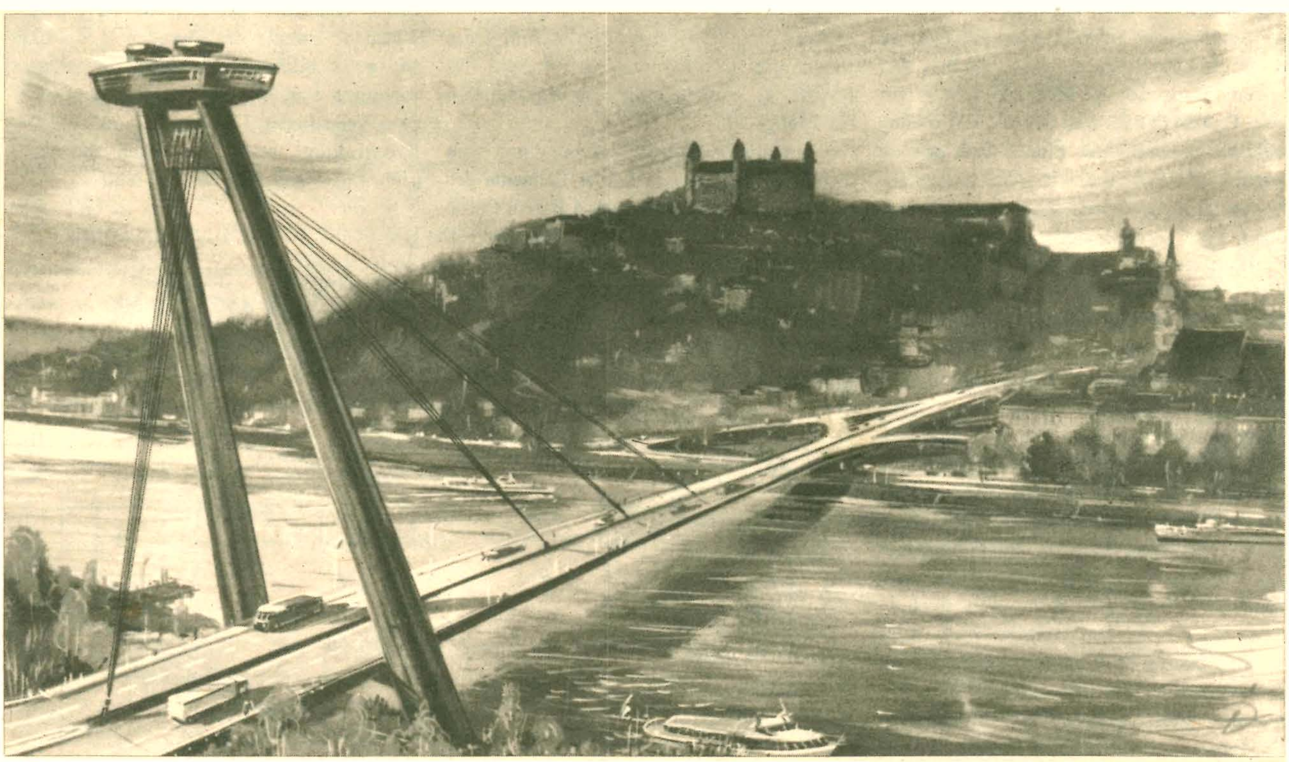
Bratislava – Hauptstadt des tschechoslowakischen Landesteiles Slowakei (SSR), an der Donau gelegen, 300 000 Einwohner, Kultur-, Wirtschafts- und Verkehrsmittelpunkt, über der Altstadt mit dem gotischen St.-Martins-Dom und weltlichen Bauten der Schloßberg, Comenius-Universität, zahlreiche Hochschulen (pädagogische, technische, ökonomische, für bildende Künste, für Musik) und Fachschulen (elektrotechnische, chemische), Sitz der *Slowakischen Akademie der Wissenschaften*, Rundfunkstation, Fernsehturm (Höhe 171 m), Bahnknotenpunkt, größter Binnenhafen der ČSSR (Ölhafen), Erdölkombinat, Nahrungs- und Genußmittelindustrie, Maschinenbau, Textilien; gegründet im Jahre 907.

Žilinà – Bezirkshauptstadt, 34 000 Einwohner, liegt in einer malerischen Berglandschaft am längsten Fluß der SSR, dem Váh, nordwestlich dem Gebirge: Malá Fatra; Bahnknotenpunkt (Praha – Ostrava – Košice, Bratislava, Rajec), chemische, Textil-, Bekleidungs-, Holz-, Papierindustrie, gegründet im 10. Jahrhundert, noch heute können wir Bauwerke aus dem 13. Jh. bewundern.

Neben zwei Gymnasien (entspricht unserer EOS), einer *Fachschule für Ökonomie* und einer *Oberfachschule für Bauwesen* befindet sich in Žilinà die *Hochschule für Verkehrswesen* der ČSSR (mit 3 Fakultäten).
Reizvoll ist die Umgebung von Žilinà, welche durch ihre Naturschönheiten berühmt ist: Vrátna-Tal, Hohe Tatra, Höhlen von Demänová.

Im Jahre 1962 wurde die IV. IMO in der ČSSR durchgeführt. Die Teilnehmer erhielten das in der Abbildung gezeigte Abzeichen.

Donaubrücke in Bratislava (Entwurf eines Kollektivs der Slowakischen TH in Bratislava) – Kabelbrücke mit nur einem 80 m hohen, schräggestelltem Pylon (griech.: Torbau) in seinem Oberteil ein Café und eine Aussichtsplattform. Die moderne Brücke, 1971 wird sie eingeweiht, bildet einen interessanten Kontrast zu den historischen Bauten der slowakischen Hauptstadt. Länge 432 m, zwei Fahrbahnen je 8,5 m breit, Masse: 7 600 t, Stahlbaukonstruktion, verschweißt aus vormontierten Sektionen.



Zur Geschichte der Mathematikolympiaden in der ČSSR

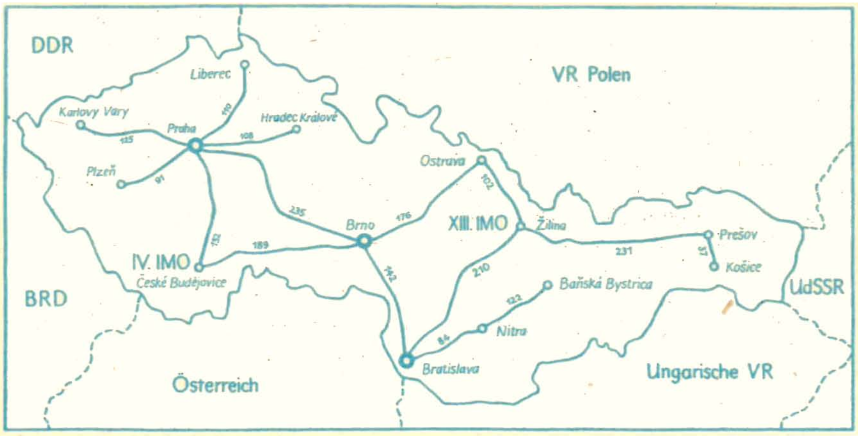
Im Schuljahr 1970/71 wird in der ČSSR bereits der 20. Jahrgang der Mathematikolympiade (MO) durchgeführt. Die Veranstaltung mathematischer Wettbewerbe für Schüler von erweiterten Oberschulen war in der Tschechoslowakei aber schon viel früher eine Tradition. Dies hängt vor allem mit der Tätigkeit der „Gesellschaft der tschechoslowakischen Mathematiker und Physiker" (JČMF) zusammen, die 1862 gegründet wurde.

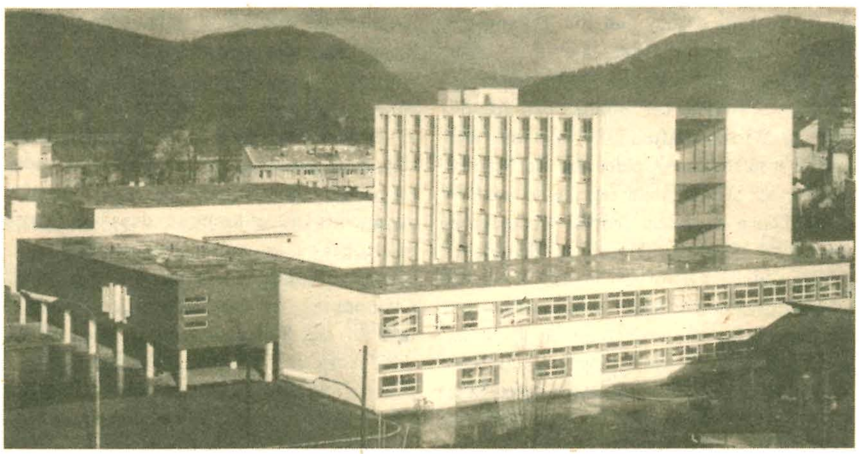
Bereits ab 1872 veröffentlichte diese Gesellschaft in ihren Zeitschriften mathematische und physikalische Aufgaben* für Oberschüler, wobei als Ansporn Preise für die richtige Lösung ausgeschrieben wurden. Diese Tradition wurde später von der Zeitschrift „Rozhledy matematicko-fyzikalní" weitergeführt, für deren Inhalt die Gesellschaft JČMF verantwortlich ist. Der Lösungswettbewerb dieser Zeitschrift ist freilich zunächst nur für ihre Leser bestimmt, wobei viele von ihnen keine Möglichkeit haben, sich bei Schwierigkeiten beraten zu können. Ein für Schüler bestimmter mathematischer Wettbewerb sollte aber gleichzeitig dazu beitragen, daß die Teilnehmer ihre mathematischen Kenntnisse durch eine planmäßige Arbeit festigen und erweitern können, was durch den Wettbewerb der Zeitschrift nicht erreicht werden konnte.

Im Ausland gab es in dieser Hinsicht bereits ein Modell: die Mathematikolympiaden in der Sowjetunion sowie Wettbewerbe ähnlicher Art in anderen Ländern. In den Schuljahren 1949 bis 1951 wurden in den mährischen Bezirken Olomouc und Ostrava erstmalig Mathematikwettbewerbe veranstaltet, in der Slowakei dann im Schuljahr 1950/51. Durch den führenden böhmischen Mathematiker Prof. Eduard Čech wurde 1951 vorgeschlagen, eine Vorbereitungskommission für MO zu beauftragen, die erforderlichen organisatorischen Maßnahmen mit dem Ministerium für Schulwesen und mit der damaligen Jugendorganisation zu beraten. Diese Vorbereitungskommission arbeitete ein Statut für MO aus, das vom Ministerium für Schulwesen im Dezember 1951 bestätigt wurde. Damit war der Start zum ersten Jahrgang der MO freigegeben.

Neben dem genannten Ministerium und dem Jugendverband waren das Mathematische Institut der Akademie der Wissenschaften der ČSSR sowie die Gesellschaft JČMF Träger der MO. Auch in den Bezirken und Kreisen wurden nun entsprechende Kommissionen für MO gegründet, ferner wurde an jeder Schule ein Fachlehrer für Mathematik als *Referent für MO* berufen.* *Jiří Mida, Praha*

* Zur Organisation der MO siehe: „Mathematikolympiaden in der ČSSR" *alpha* 2/1970





Žilinà, Studentenheim der Hochschule für Verkehrswesen – Unterkunft der Mannschaften
Žilinà, Oberfachschule für Bauwesen – Ort des Wettbewerbs

Wir stellen vor: Bohus Sivač, Zwolen, erfolgreichster IMO-Teilnehmer der ČSSR. (1965 bis 1968) Unser Foto: Bereits mit 13 Jahren nahm Bohus an der VII. IMO (Berlin) teil und schaffte einen 3. Preis.

Ruinen der Burg Strečno

Wirklichkeit und Täuschung

Bilder sind manchmal trügerisch

Welche Bedeutung hat ein Bild bei mathematischen Überlegungen? Es ist ein sehr wertvolles Hilfsmittel, das unser Vorgehen anschaulicher macht und unserem Gedächtnis nachhilft. Wenn wir ohne Abbildung arbeiten, ähnelten wir Schachspielern, die eine Partie „blind" spielen – ohne Figuren und ohne das Schachbrett anzusehen. Solche Schachspieler gibt es, und ich zweifle nicht daran, daß manche der erfahrenen Leser geometrische Schulaufgaben lösen können, ohne vorher eine Skizze gezeichnet zu haben; das setzt jedoch Übung und ein gutes Vorstellungsvermögen voraus. Die Bedeutung eines Bildes darf andererseits nicht überschätzt werden. Gerade seine Anschaulichkeit kann uns manchmal zu ganz falschen Schlußfolgerungen verführen. Außerdem können wir niemals ganz sicher sein, bei der Zeichnung keine Ungenauigkeit begangen zu haben, die das ganze Ergebnis negativ beeinflussen könnte. Auch der beste Zeichner kann ohne mathematische Überlegungen nicht beweisen, daß drei Gerade, die sich in seiner Zeichnung schneiden, wirklich einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Selbst wenn man aufs sorgfältigste gearbeitet hat, kann man niemals ausschließen, daß Folgerungen, die sich scheinbar aus der fertigen Zeichnung ergeben, durch zufällige Ungenauigkeiten der Zeichnung hervorgerufen sein könnten.

Übrigens kann sich der Leser selbst davon überzeugen, daß Mißtrauen zu einem gezeichneten Bild manchmal sehr berechtigt ist. Wir wollen das an einem Beispiel zeigen, das in der Schule einen Prüfstein genauen Zeichnens bildet, am sogenannten Feuerbachschen Neun-Punkte-Kreis.

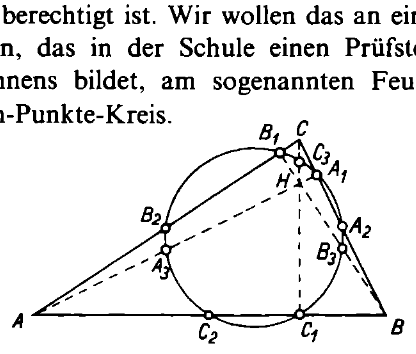


Bild 1

Bild 1 zeigt ein Dreieck ABC. Drei Gerade AA_1, BB_1, CC_1, die in der Abbildung gestrichelt sind, stellen die Höhen dieses Dreiecks dar. Jeder Leser weiß aus der Schule, daß sich diese drei Höhen in einem Punkt schneiden (H. in Bild 1). Der Punkt A_2 ist die Mitte der Seite $\overline{BC}$, der Punkt B_2 die Mitte der Seite $\overline{CA}$ und der Punkt C_2 die der Seite $\overline{AB}$. Der Punkt A_3 halbiert die Strecke $\overline{AH}$, der Punkt B_3 die Strecke $\overline{BH}$ und der Punkt C_3 die Strecke $\overline{CH}$. Nun wollen wir uns jene neun Punkte, die wir mit A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 bezeichnet haben, näher ansehen. Die Zeichnung legt uns den Gedanken nahe, daß alle neun Punkte auf einem Kreis liegen – oder nur auf einer einem Kreis sehr „ähnlichen" Kurve. Wir verraten gleich, daß die aus dem Bild abgelesene Vermutung über den Kreis diesmal richtig ist. Die konstruierten Punkte liegen wirklich auf der Peripherie des Kreises, wovon man sich durch einen genauen mathematischen Beweis überzeugen könnte (der Beweis ist jedoch einigermaßen schwierig, weshalb wir ihn weglassen).

Was sind optische Täuschungen?

Das Beispiel des Feuerbachschen Kreises zeigt, wie wichtig es für einen Mathematiker ist, sich mit den verschiedenen Fallstricken bekannt zu machen, die Vorstellungs- oder Anschauungskraft auslegen können. Ein Mathematiker verläßt sich niemals auf Auskünfte, die sich aus mehr oder weniger unvollkommenen Bildern ergeben und nimmt sie nur als (wenn auch manchmal sehr wertvolle) Anregungen hin, um alles von neuem und gründlich zu überlegen. Ein Bild, das zeigt, daß unser Auge und unsere Vorstellung nicht immer als verläßliche Richtschnur dienen und daß manchmal das Gegenteil von dem wahr ist, was man übereilt erwarten würde, nennt man (nicht ganz zutreffend) eine *optische Täuschung*. Die Lehre von den *optischen Täuschungen* wurde gründlich und bis in einzelne Details ausgearbeitet. Betrachten wir jene optische Täuschungen näher, die eine direkte Beziehung zur Mathematik und ihrer Anwendung haben. Zunächst müssen wir uns jedoch einige Begriffe eines etwas entlegeneren Gebiets klarmachen.

Aus dem Physikunterricht wissen wir noch, daß das Auge einem photographischen Apparat ähnlich ist. Das Objekt des Apparats vertritt hier die Augenlinse, die lichtempfindliche photographische Platte die Netzhaut. Auch ein gesundes Auge weist eine Reihe optischer Fehler auf, mit denen sich die geometrische und die medizinische Optik befassen. Der deutsche Physiker *Helmholtz* äußerte über die Mängel des Menschenauges sogar folgendes: Wenn sich ein Optiker unterstehen würde, ihm ein Instrument mit solchen Mängeln, wie sie ein Auge hat, zu verkaufen, würde er sich für berechtigt halten, die Qualität seiner Arbeit scharf zu tadeln und ihm das Instrument unter

Protest zurückzugeben. Das ist freilich ein wenig übertrieben. Wir haben keinen Grund, unser Auge so abfällig zu beurteilen. Gäbe es keine optischen Täuschungen, so wären wir z. B. um alle Schätze der Malkunst gebracht und könnten weder Filmvorstellungen noch Fernsehprogramme verfolgen. Man lese nur, was 1774 *Leonhard Euler* schrieb:

„Wenn wir gewöhnt wären, über Dinge nur nach der Wirklichkeit zu urteilen, könnte für uns die Malkunst überhaupt nicht existieren, und es wäre um uns so bestellt, als seien wir blind. Der Maler würde vergebens alle seine Kunst aufs Farbenmischen verwenden. Wir würden sagen: Hier, auf dieser Platte, ist ein roter Fleck, hier ein blauer, dort sind einige weiße und hier einige schwarze Linien. Alle befinden sich in derselben Ebene, man sieht ihnen keinen Entfernungsunterschied an. Man könnte keinen einzigen Gegenstand abbilden. Alles auf dem Bild käme uns wie eine Schrift auf dem Papier vor. Bei aller Vollkommenheit wären wir arm daran, denn wir wären jedes Vergnügens verlustig, das uns die so angenehme und nützliche Malkunst bringt."

Optische Täuschungen sind manchmal schwierig zu erklären, ist doch z. B. schon das Schätzen von Entfernungen und Längen ein komplizierter Prozeß, bei dem Erfahrung und Übung eine bedeutende Rolle spielen. Meistens geht es nicht um eine durch Augenfehler verursachte Täuschung, sondern um einen Trugschluß auf Grund unrichtiger Deutungen. Wir sollten daher eigentlich besser von Trugschlüssen als von optischen Täuschungen sprechen; aber der Name „optische Täuschung" ist bereits eingebürgert.

Falsches Schätzen von Länge und Entfernung

Die Entfernung von Gegenständen beurteilt man oft nach der jeweiligen „Ermüdung" des Auges, das die betreffende Strecke durchlaufen muß. Daher erscheint uns eine senkrechte, auf eine Tafel gezeichnete Strecke länger als eine in Wirklichkeit gleich lange waagerechte. Wenn man versucht, ohne Lineal auf der Tafel ein Quadrat mit waagerechter Grundlinie zu zeichnen, und dann das Bild mit einem Lineal nachprüft, so fällt das Quadrat gewöhnlich verkürzt aus.

Einige Druckbuchstaben hält man unwillkürlich für symmetrisch zu einer horizontalen Achse.

Der Zeichner der Buchstaben B, H, S oder der Ziffer 8 rechnete mit dieser optischen Täuschung und hat daher den oberen und unteren Teil dieser Buchstaben ungleich groß entworfen. Der Leser wird diese kleine Asymmetrie kaum wahrnehmen, nur wenn der Druckfehlerteufel die Buchstaben zufällig auf den Kopf stellt, wird man von der Asymmetrie überrascht:

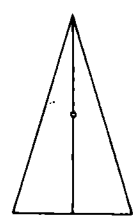
B H S 8   8 S H B

Mit fünfzehnjährigen Schülern machte ein Lehrer folgenden Versuch: Er gab ihnen auf, die Länge und die Breite des Schulkatheders, das sie alle Tage vor Augen hatten, zu schätzen und das Ergebnis aufzuschreiben. Bei der Auswertung der Resultate stellte es sich heraus, daß die Schüler die Länge (horizontal gemessen) im großen ganzen richtig abschätzten, während sie die Höhe (in vertikaler Richtung) fast alle überschätzten.

Mit solchen Schätzfehlern muß auch ein Bildhauer bei der Wahl der Dimensionen von Statuen rechnen, die in verschiedener Höhe angebracht werden und trotzdem natürlich wirken sollen.

Ein anderer Irrtum beim Längenschätzen kann dadurch verursacht werden, daß man statt der Länge unwillkürlich die Flächengröße abschätzt. Wenn man mit Hilfe eines Lineals die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks (Bild 2) halbiert, ist man überrascht, da der Halbierungspunkt (scheinbar) zu hoch angebracht ist. In der unteren Bildhälfte sieht man nämlich eine größere Fläche als in der oberen.

Bild 2



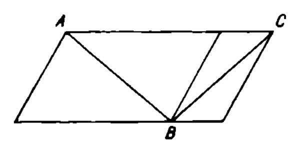
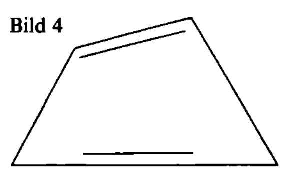


Bild 3

Mit Hilfe des Lineals kann man sich überzeugen, daß in Bild 3 die Strecke $\overline{AB}$ nicht länger ist als $\overline{BC}$. Hier beurteilt man unwillkürlich wieder die Fläche der Rhomben, deren Diagonalen durch die zu schätzenden Strecken dargestellt werden.

Bild 4



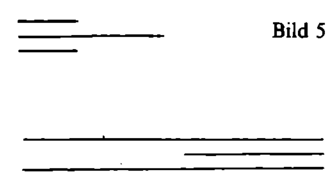


Bild 5

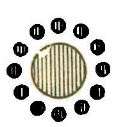
Eine weitere Täuschung, die zu einer unrichtigen Wertung der Größe oder Länge führt, wird dadurch hervorgerufen, daß man diese unwillkürlich mit einer anderen Größe oder Länge vergleicht.

In Bild 4 ist ein ungleichseitiges Viereck gezeichnet; im Inneren sieht man unweit von den Seiten zwei Strecken. Man soll entscheiden, welche von den Strecken kürzer ist.

In Bild 5 beurteilt man die Länge der mittleren Strecke danach, ob sie zwischen kürzeren oder längeren Strecken liegt. Dieselbe Strecke scheint in der oberen Hälfte des Bildes länger als in der unteren.

In Bild 6 kann man sich durch Nachmessen überzeugen, daß die beiden mittleren Kreise denselben Durchmesser haben, obwohl sie auf den ersten Blick verschieden groß erscheinen. Diesen Längen- und Größenkontrasten begegnet man übrigens auch im Alltagsleben. Wenn man in einem engen Treppenhaus Männer trifft, die ein Klavier tragen, scheint das Instrument riesengroß. Auf einer weitläufigen Bühne kommt es uns viel kleiner vor. Einen Autobus, der täglich durch unseren Ort fährt, halten wir nicht für sehr geräumig; wir sind jedoch von seiner Größe überrascht, wenn wir ihn in der Reparaturwerkstätte sehen.

Bild 6



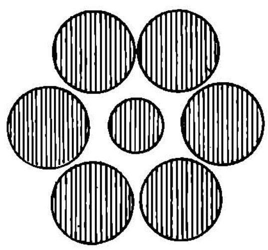


Bild 7

Bild 8

Bild 7 erinnert an zwei gleich hohe Papierstöße, der linke ist mehr, der rechte weniger zur Seite verschoben. Man soll entscheiden, welche Strecken länger sind – die im linken oder die im rechten Teil des Bildes. Das scheinbare Ergebnis trügt, die Strecken sind in Wirklichkeit gleich lang. Eine interessante Illusion entsteht, wenn weiße und schwarze Farbe miteinander kontrastieren. In Bild 8 sieht man gleich große schwarze Kreise, die in den Scheitelpunkten eines (nicht gezeichneten) gleichschenkligen Dreiecks angebracht sind. Man soll abschätzen, wie viele solche Kreise in den freien Raum zwischen den zwei unteren Kreisen und dem oberen Kreis noch hineinpassen. Man ist nicht sicher, ob es vier oder fünf Kreise sein werden. Das gemessene Resultat ist überraschend: Es gibt gerade Platz für drei solche Kreise. Wie ist diese Täuschung zu erklären? Es geht um die sogenannte Irradiation (Hinüberstrahlen), unter deren Einfluß dem Auge die schwarzen Gegenstände kleiner erscheinen als eine gleich große weiße Fläche.

Merkwürdiges von Parallelen und Senkrechten

Leicht verschätzt man sich bei parallelen oder bei aufeinander senkrecht stehenden Geraden und bei der Größe von Winkeln. Die *Zöllnerschen Parallelen* (Bild 9) erwecken bei flüchtigem Blick den Eindruck auseinanderlaufender Linien. In Bild 10 scheinen die Parallelen gekrümmt zu sein, in Bild 11 kommt uns das Quadrat unter dem Einfluß der konzentrischen Kreise ein wenig deformiert vor. Zwei Parallelen schneiden in Bild 12 eine Gerade; ist es wirklich eine Gerade, oder ist ihr unterer „Teil" ein wenig verschoben? Der Winkel, den die Gerade in Bild 12 mit den Parallelen einschließt, beträgt ungefähr 15°. Wenn man ein ähnliches Bild für einen Winkel von 45° oder darüber konstruiert, entsteht die Täuschung nicht.

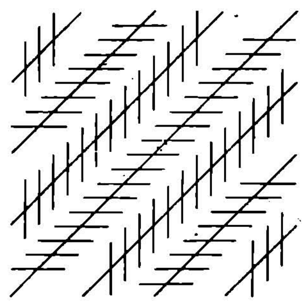


Bild 9

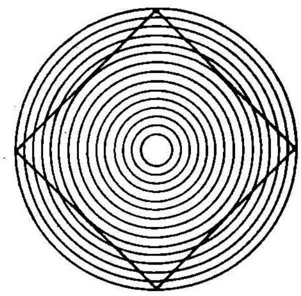
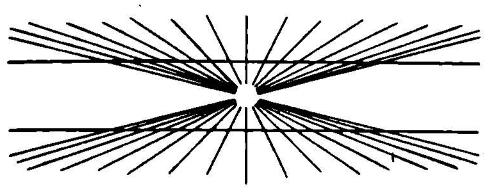


Bild 11

Bild 10



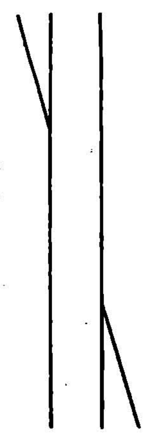


Bild 12

In den letzten vier Fällen kam die Täuschung dadurch zustande, daß unsere Aufmerksamkeit durch einige Einzelheiten der Abbildung abgelenkt wurde. Auf gemusterten Textilien mit vielen winzigen Details entdeckte man durch Zufall eine Reihe optischer Täuschungen. Jeder dürfte bemerkt haben, daß z. B. ein Tischtuch mit kleinen, aber ausgeprägten Mustern manchmal sogar unangenehm wirkt (volkstümlich sagt man, daß einem „die Augen übergehen"). Diese Eigenschaften von Mustern und Ornamenten müssen die Gestalter und Produzenten von Textilwaren berücksichtigen, wenn sie ihre Kunden zufriedenstellen wollen.

Jiří Sedláček, aus: „Keine Angst vor Mathematik", leicht gekürzt

Übungsaufgaben aus Mathematiklehrbüchern der ČSSR

5▲704 Der Spielplatz der Schule hat Rechteckform. Berechne den Umfang des Platzes in Metern, wenn ein Schüler festgestellt hat, daß der Platz 140 Schritte lang und 90 Schritte breit ist, wobei die Schrittlänge des Schülers 65 cm beträgt.

5▲705 Eine Pioniergruppe erhielt den Auftrag, 85 Bilder zum Fach Erdkunde mit den Abmessungen 7,5 dm und 6 dm für die Länge und Breite am Rand mit Leinenband einzufassen. Berechne, wieviel Meter Leinenband dazu benötigt werden (runde das Ergebnis auf Meter).

6▲706 Berechne den Preis, der für das Ausheben einer Kalkgrube zu bezahlen ist, die 4,3 m lang, 2,9 m breit und 20 dm tief sein soll; für 1 m^3 Ausheben sind 14,60 Kčs zu bezahlen (runde den Rauminhalt auf m^3).

6▲707 Ein Tourist benutzte für seine Reisestrecke von 313 km die Eisenbahn, den Autobus und wanderte auch eine Teilstrecke. Mit dem Autobus fuhr er um 205 km weniger als mit dem Zug, seine Wanderstrecke war um 36 km kürzer als seine Fahrstrecke mit dem Autobus. Berechne, wieviel km die Bahnfahrt, die Autobusfahrt und die Wanderstrecke beträgt.

▲6▲708 Um einen See führt ein Weg von 2000 m Länge. Von einer Stelle aus fuhr ein Junge auf dem Rad mit einer Geschwindigkeit von $350\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$ auf diesem Weg. Ein anderer Junge lief von der gleichen Stelle auf diesem Weg in entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit von $150\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$. Berechne, nach wieviel Minuten die Jungen sich begegnen und welche Strecke jeder dabei zurückgelegt hat.

6▲709 Von einer Papiermaschine wird in 8 Minuten ein 200 m langes Papierband erzeugt. Berechne die Länge des Papierbandes, das von der Maschine a) in 15 Minuten, b) in 8 Stunden erzeugt wird.

7▲710 Zeichne eine Gerade g und einen nicht auf g liegenden Punkt P; zeichne ferner ein beliebiges stumpfwinkliges Dreieck ABC mit dem stumpfen Winkel beim Eckpunkt B. Konstruiere ein zum Dreieck ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ derart, daß die Seite $\overline{A'B'}$ auf der Geraden g liegt und der Eckpunkt C' mit P zusammenfällt.

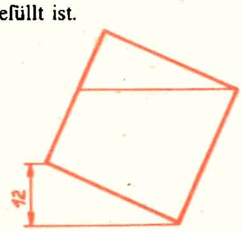
7▲711 Der große Zeiger einer Uhr ist 12 cm lang. Berechne den von der Spitze des großen Zeigers zurückgelegten Weg, wenn

a) eine Stunde, b) $\frac{1}{4}$ Stunde, c) 5 Minuten, d) 35 Minuten vergangen sind.

7▲712 Berechne die Entfernung der Orte A und B, die beide auf dem Äquator liegen. Der Halbmesser des Äquators beträgt 6375 km. Ort A liegt bei 12° östlicher Länge, Ort B bei 139° östlicher Länge.

8▲713 Ein Stahlblock von Würfelform hat die Kantenlänge 8 cm. Von diesem Stahlblock wird ein kegelförmiger Hohlraum herausgedreht. Die Grundfläche des Kegels ist kreisförmig mit einem Durchmesser von 6 cm, sie liegt in einer Würfelfläche; die Spitze des Kegels fällt mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Würfelfläche zusammen. Die Dichte des Stahls beträgt $7{,}8\,\frac{g}{cm^3}$. Berechne die Masse des abgedrehten Stahls.

8▲714 Ein eiserner Wasserbehälter ist würfelförmig mit der Kantenlänge 1 m. Durch eine Unterlage längs einer Kante hat der Behälter eine Schrägstellung, so daß die gegenüberliegende Kante um 12 cm tiefer liegt. Berechne die Wassermenge in dm^3, die sich im Behälter befindet, wenn dieser bis zum Rand gefüllt ist.



8▲715

$$\left[\left(1+\frac{1+\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}{1-\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\right)\cdot\frac{1}{1+\frac{a^2}{x^2}}\right]+\frac{a^2-x^2}{a-x}$$

Bestimme, für welche Werte von a, x der vorstehende Term sinnvoll ist und vereinfache ihn.

Auswahl und Übersetzung: O. Langer

Literatur aus der ČSSR in deutscher Sprache

Kolman, Arnost, Prof. Dr., und Prof. Dr. Ottokar Zich

Unterhaltsame Logik

Etwa 130 S. mit etwa 6 Abb., kartoniert Etwa 5,90 M · BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft Leipzig

Nach kurzer, leichtverständlicher Einführung in die Aussagenlogik, die nur geringe Voraussetzungen an mathematischen Kenntnissen erfordert und für Schüler der mittleren und oberen Klassen geeignet ist, regen viele interessante Aufgaben den Leser zur intensiven Mitarbeit an (ab Klasse 8).

Sedláček, Jiří, Prof. Dr.

Einführung in die Graphentheorie

171 S. mit 73 Abb., kartoniert, 6.40 M BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig

Inhalt: Vorbetrachtungen · Ungerichtete Graphen · gerichtete Graphen · Historische Anmerkungen

Das Buch gibt eine für Schüler verständliche Einführung in die Graphentheorie, deren Anwendungsmöglichkeiten auf verschiedensten Gebieten mehr und mehr zunehmen (ab Klasse 9).

Vyšín, Jan

Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben

Etwa 192 S. mit etwa 41 Abb., kartoniert, etwa 5.90 M · BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig

Eine moderne Behandlung mathematischer Aufgaben bis zur Lösung. Es werden keine Rezepte gegeben, sondern Anregungen zu systematischer Arbeit und methodischem Vorgehen. (ab Klasse 9).

Sedláček, Jiří, Prof. Dr.

Keine Angst vor Mathematik

167 Seiten, 71 Bilder, 12 cm mal 19 cm, Halbgewebeeinband, 4,80 M

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Der Autor dieses international erfolgreichen Buches geht vom mathematischen Spiel aus und führt den Leser in kurzweiliger Weise zur Anwendung der Mathematik im Verkehrswesen, in der Technik, in Naturwissenschaften und im täglichen Leben.

Autorenkollektiv

Aufgaben von Mathematikolympiaden in der UdSSR und in der ČSSR

292 Seiten, 16,8 cm mal 22,5 cm, 1965, Pappeinband, Bestell-Nr. 002 106, 8,20 M Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Der Autor *R. Zelinka* (†) hat den 9. Jahrgang (1961) der Mathematikolympiade in der ČSSR zusammengestellt: Aufgaben der ersten bis dritten Stufe (Klasse 11, 10, 9, 8), dazu ausführliche Lösungen.

Mit würdigen Initiativen zu Ehren des VIII. Parteitages ins zweite Vierteljahrhundert der FDJ

1967 stellte der VII. Parteitag der SED die begeisternde Aufgabe der Schaffung des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus in unserer Republik. Damals waren wir, *Gabriele Schütze*, *Gabriele Veit* und *Detlef Tänzer*, noch Schüler der 8. Klasse, und keiner von uns hat geahnt, wie stark die Beschlüsse dieses Parteitages in unser persönliches Leben eingreifen und unsere Entwicklung beeinflussen würden.

Damals verstanden wir zwar, daß Mathematik und Naturwissenschaften wichtige Grundlagen für den wissenschaftlich-technischen Fortschritt sind, woraus sich die Notwendigkeit eines hohen mathematischen Bildungsniveaus besonders der jungen Generation ableitet, aber wir hatten noch nicht erfaßt, daß diese Aufgabe auch ganz direkt an uns gerichtet war, daß sie uns neue, beherztere Zielstellungen und mehr Mut und Beharrlichkeit bei ihrer Verwirklichung abverlangen würde. Um das große Bildungsprogramm unseres Staates, welches besonders die rasche Zunahme von Mathematikern, Physikern, Chemikern und von Lehrern dieser Disziplinen vorsieht, mit verwirklichen zu helfen, wurde an der Karl-Marx-Universität in Leipzig im Studienjahr 1969/70 ein Vorkurs eingerichtet. Diesen Vorkurs konnten Schüler besuchen, welche die 10. Klasse erfolgreich abgeschlossen hatten und beabsichtigten, Diplom-Lehrer für Physik und Mathematik zu werden. Schon in einem Jahr erreicht man die Hochschulreife, wodurch es möglich ist, unserem Staat ein Jahr früher als gewöhnlich hochqualifizierte Lehrkräfte zur Verfügung zu stellen.

Wir gehörten zu den 30 Studenten des ersten Jahrganges dieses Vorkurses. In zwei Seminargruppen bereiteten sich 20 Mädchen und 10 Jungen auf das Studium der Physik und Mathematik vor. Wie es sein muß, so beschränkte sich unsere Vorbereitung keineswegs auf die Ausbildung – hier lag der Schwerpunkt naturgemäß auf den Fächern Mathematik, Physik und Staatsbürgerkunde –, sondern wir bemühten uns um die Entwicklung unserer ganzen Persönlichkeit und unseres Kollektivs. Dazu gehörten ein reges kulturelles Leben ebenso wie die Diskussion über politische Probleme und Ereignisse, angestrengte Studienarbeit ebenso wie unser Winterlager im Februar 1970. Den Abschluß und gleichzeitig den Höhepunkt des Studienjahres bildete eine Reise in die Sowjetunion.

Seit September 1970 studieren wir an der Sektion Physik der Karl-Marx-Universität und bemühen uns, die uns gebotenen Möglichkeiten so zu nutzen, daß wir auf unseren künftigen Beruf als sozialistische Lehrer für Mathematik und Physik gut vorbereitet sind.

Unser Dank gilt der Partei der Arbeiterklasse, die uns durch ihre kluge und weitsichtige Politik eine solche Perspektive eröffnet hat und uns alle Möglichkeiten bietet, unsere Begabungen und Fähigkeiten zum Wohle unserer Republik zu entfalten.

1. Gabriele Schütze
Bis zum 8. Schuljahr besuchte ich die 24. OS in Leipzig, nahm dort am Mathematikzirkel teil und gab Förderunterricht für schwächere Schüler. Die Vorbereitungsklasse der EOS „Richard Wagner" schloß ich im 10. Schuljahr mit dem Prädikat „gut" ab und konnte auf Grund meiner guten Leistungen in Physik und Mathematik zum Vorkurs delegiert werden. Dort hatte ich gute Voraussetzungen für meine weitere allseitige Entwicklung; 1971 wurde ich Kandidat der SED.

2. Detlef Tänzer
Schon als Schüler der 22. OS hatte ich den Wunsch, einmal Lehrer für Mathematik zu werden. Nach zweijährigem Besuch der EOS „Karl Marx" kam ich zum Vorkurs und konnte dort meine Leistungen noch verbessern, so daß ich am Ende das Prädikat „sehr gut" erhielt. Seit Beginn des Studiums bin ich Sekretär unserer FDJ-Gruppe.

3. Gabriele Veit
Ich besuchte bis zur 8. Klasse die 22. OS in Leipzig, nahm am Mathematikzirkel, am Mathematiklager und an Mathematikolympiaden teil. In der Vorbereitungsklasse der EOS „Richard Wagner" konnte ich sehr gute Leistungen erreichen und zum Vorkurs delegiert werden. Seit Februar 1971 bin ich Kandidat der SED.

1

2

3


Sinnvolle Bewährung im Jugendobjekt

Seit 1966 werden an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Schüler der Erweiterten Oberschulen auf ihr künftiges Studium in einem Zirkelsystem vorbereitet. Diese Zirkel wurden der FDJ-Grundorganisation der Sektion als Jugendobjekt übergeben.

In diesen Zirkeln soll vor allem das Interesse an mathematischen Problemen und Arbeitsweisen über die Möglichkeiten der Oberschule hinaus gefördert werden und dem Schüler ein kleiner Einblick in Mittel und Methoden, die die Grundlage der modernen Mathematik bilden, gegeben werden. Für die Studenten bedeutet die Leitung der Zirkel eine große Bewährungsprobe. Und das nicht nur, weil es eine zusätzliche Belastung im ohnehin alle Kräfte fordernden Studium ist, sondern weil sie neben fachlichen Qualitäten auch bestimmte Eigenschaften als Leiter und Propagandist erwerben müssen. So zeugt es von ihrem Verantwortungsbewußtsein, wenn sie in Zirkeldiskussionen auch auf die Rolle der Mathematik in der sozialistischen Gesellschaft eingehen. Der große Zustrom von Zuhörern zeigt, daß die Jugend den Zirkelbesuch als effektive Form der Studienvorbereitung buchen.

Wissenschaftler und Forschungsstudenten helfen

Am 8. Oktober 1970 wurde an der Humboldt-Universität zu Berlin in der Sektion Mathematik die
Mathematische Schülergesellschaft (MSG)

gegründet. Ihr gehören etwa 200 Berliner Mädchen und Jungen an. Es sind die besten *Jungen Mathematiker* aus den Klassenstufen 7 bis 12 der Hauptstadt der DDR.
Die MSG entspricht in der Struktur den in einzelnen Bezirken unserer Republik bestehenden Bezirksklubs *Junger Mathematiker*. Die fachliche Betreuung erfolgt durch Wissenschaftler und Forschungsstudenten der Sektion Mathematik.
Die Gründung der MSG ist ein bedeutender Schritt zur Verwirklichung der vom VII. Parteitag und dem VII. Pädagogischen Kongreß gestellten Bildungsaufgaben. Ich glaube, es hat jeder erkannt, welche große Rolle die Mathematik beim umfassenden Aufbau des Sozialismus spielt; die Weiterentwicklung der Mathematik ist eine der wichtigsten Voraussetzungen für die Meisterung der wissenschaftlich-technischen Revolution. Damit ein Schüler von heute den Aufgaben der Zukunft gewachsen ist, ist es notwendig, daß er sich ein umfangreiches und anwendungsbereites Wissen erwirbt. In der MSG erhalten mathematisch begabte und interessierte Schüler eine systematische Förderung. Sie werden mit den fachlichen Grundlagen der Mathematik, mit ihren Arbeitsmethoden und Hilfsmitteln vertraut gemacht und sollen die Fähigkeit erwerben, mathematische Probleme selbständig zu erkennen und zu lösen.
Aus dem Arbeitsprogramm: Lösen und Diskutieren von Aufgaben – Möglichkeit der Nutzung des Lesesaales der Sektion Mathematik – spezielle Förderung der besten Teilnehmer durch Wissenschaftler – mehrtägige Lehrgänge in den Ferien.
Die Mitgliedschaft in der MSG ist für jeden Schüler eine hohe Auszeichnung. Wir wissen aber auch, daß sie gleichzeitig die gesellschaftliche Verpflichtung bedeutet, sich ein umfangreiches Wissen anzueignen, um durch Höchstleistungen unserer Republik für die vielseitigen Bildungsmöglichkeiten zu danken, die sie uns bietet.

stud. math. Ingrid Schiemann, Berlin

Mitgliedsausweise für die Teilnehmer der Kreisklubs Neubrandenburg

- Die Mitgliedschaft in Kreisklub *Junger Mathematiker* gilt als Auszeichnung.
- Die Mitglieder gehören zu den talentiertesten *Jungen Mathematikern* des Kreises. Sie haben die Voraussetzungen, einmal gute Mathematiker zu werden und die technische Revolution zu meistern.
- Die Mitgliedschaft soll dazu beitragen, das selbständige Denken und die schöpferische Arbeit weiter zu entwickeln.
- Durch Gemeinschaftsarbeit werden die eigenen Interessen mit denen der Gesellschaft in Übereinstimmung gebracht. Jedes Mitglied ist bemüht, hohe Leistungen nicht nur für sich und seine Schule zu erzielen, sondern damit auch zur Stärkung unserer Deutschen Demokratischen Republik beizutragen. Die Erfüllung dieser Aufgaben ist für jedes Mitglied gesellschaftlicher Auftrag.
- Neben den Veranstaltungen erhält jedes Mitglied Aufträge zur Bearbeitung, die termingemäß an den Mentor zur Begutachtung zu übergeben sind.
- Nach jeder Kreisolympiade wird, den gezeigten Leistungen entsprechend, die Mitgliedschaft neu festgelegt.
- Jedes Mitglied beteiligt sich laufend am *alpha*-Wettbewerb.

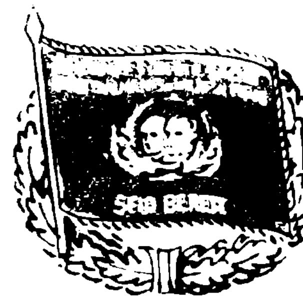
Hohe Auszeichnung für Mathe-LVZ

Die *Mathe-LVZ* wird seit 1962 als Sonderausgabe der Leipziger Volkszeitung (LVZ), dem Organ der Bezirksleitung der SED, jeweils am 13. Dezember jedes Jahres (Geburtstag der Pionierorganisation „Ernst Thälmann") herausgegeben. Ihre Thematik wird der gesellschaftlichen Praxis entnommen:
Mit Zirkel und Rechenstab · Mathe-international · Mathe-Olympiaden · Mathe-heiter Mathe-Rechenvorteile · Mathe-unterhaltsam Mathe und Sport · Mathe Aeronautik/Astronautik · Mathe und Bauwesen.
Die 10. Ausgabe erscheint am 13. Dezember 1971 unter dem Motto: Mathe-Verkehrswesen / Verkehrserziehung. Über 600000 Exemplare der *Mathe-LVZ* gingen bisher in alle Teile unserer Republik.
Das Kollektiv der *Mathe-LVZ* wurde am 25. Jahrestag der FDJ vom Zentralrat der FDJ in Anerkennung und Würdigung besonderer Verdienste mit der Medaille

Für hervorragende Leistungen
bei der sozialistischen Erziehung
in der
Pionierorganisation „Ernst Thälmann"
in Gold

ausgezeichnet.

Dem Kollektiv gehören an:
Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Chefredakteur *alpha* und Lehrer an der 29. OS Leipzig, Mathematikfachlehrer W. Unze, Leipzig – beide Redaktionsmitglieder *alpha* –, die LVZ-Redakteure Hanna Günther und Jutta Rosche und Studienrat Th. Scholl, Berlin, als Gutachter (Leiter der Aufgabengruppe 5 bis 7 der Schülerzeitschrift *alpha*).

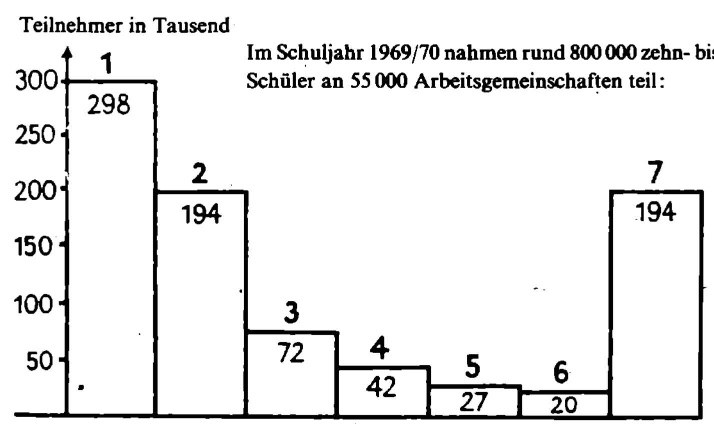


Das Leben und die Tätigkeit der Kinder außerhalb des Unterrichts ist den vielseitigen Interessen der Schüler aller Altersgruppen entsprechend zu gestalten. Unter einer vielseitig gestalteten ganztägigen Erziehung verstehen wir, das geistige Leben inhaltsreich zu organisieren. Sie muß dem Anspruchsniveau der gewachsenen Reife unserer heutigen Schuljugend entsprechen. Unsere Mädchen und Jungen sollen forschen, knobeln, singen, tanzen, spielen und aktiv Sport treiben.

M. Honecker, VII. Pädagogischer Kongreß

Es gilt, den Kindern und Jugendlichen zu helfen, Neigungen und Gewohnheiten auszubilden, um die arbeitsfreie Zeit – soziale Errungenschaften unserer sozialistischen Entwicklung – selbständig und schöpferisch zur Bereicherung der eigenen Persönlichkeit zu nutzen.

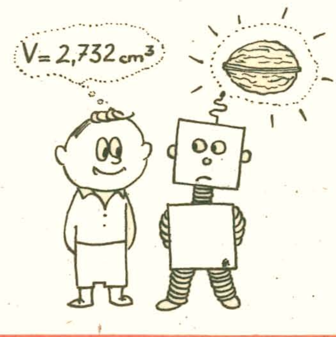
Aus dem Referat des Ersten Sekretärs des ZK der SED und Vorsitzenden des Staatsrates der DDR, Walter Ulbricht, auf dem VII. Päd. Kongreß



Im Schuljahr 1969/70 nahmen rund 800000 zehn- bis vierzehnjährige Schüler an 55000 Arbeitsgemeinschaften teil:

Fachrichtungen:
1. Sport
2. Künstlerische AGs
3. Mathematik – Naturwissenschaften
4. Technik
5. Gesellschaftswissenschaften
6. Sprachen
7. sonstige AGs

Wer löst mit? alpha – Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 8. September 1971

5▲716 Es sind alle natürlichen Zahlen n zu bestimmen, die die Gleichung $(n-2)\cdot(n+1)=10$ erfüllen. *T.*

5▲717 In dem Schema

$$\begin{array}{r} xyy \\ +yxy \\ +yyx \\ \hline yyy0 \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Wieviele Lösungen besitzt diese Aufgabe? *Sch.*

W 5 ■ 718 Aus 16 Stäbchen von je 1 cm Länge läßt sich ein Quadrat legen, dessen Flächeninhalt 16 cm² beträgt. Durch Umlegen von nicht mehr als der Hälfte der Stäbchen läßt sich der Flächeninhalt der so entstandenen Figur auf 7 cm² verkleinern.
a) Zeichne eine entsprechende Figur!
b) Aus 400 Stäbchen von je 1 cm Länge läßt sich ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von 10000 cm² legen. Durch Umlegen von nicht mehr als die Hälfte der Stäbchen soll der Flächeninhalt der entstehenden Figur möglichst klein gemacht werden. Um wieviel cm² verkleinert sich in diesem Fall der Flächeninhalt?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

W 5 ■ 719 Fünf Mädchen, die sämtlich älter als 10 Jahre sind, wurden nach ihrem Lebensalter (in ganzen Zahlen) gefragt; jedes dieser Mädchen machte dazu eine wahre Aussage:
a) Doris ist weder die jüngste noch die älteste von uns.
b) Carmen ist 14 Jahre alt.
c) Barbara ist jünger als Carmen, aber älter als Doris.
d) Barbara und Carmen sind beide jünger als Evelin.
e) Evelin ist 5 Jahre älter als Angelika.
Wie alt ist jedes der fünf Mädchen, wenn ihre Lebensalter paarweise verschieden sind?

Yvonne Kruber, EOS Sebnitz, Kl. 9/II

*5*720 Es sind alle geordneten Paare (m, n) natürlicher Zahlen zu bestimmen, die die Gleichung $(m+1)\cdot(2n-1)=6$ erfüllen! *T.*

*5*721 Welche natürlichen Zahlen $a, b, c, d, e, f, g, h, x$ erfüllen zugleich die folgenden neun Gleichungen?

(1)	$x+3=a$,	(6)	$e\cdot 8=f$,
(2)	$a-2=b$,	(7)	$f:4=g$,
(3)	$b+8=c$,	(8)	$g\cdot 13644=h$,
(4)	$c+1=d$,	(9)	$h-32354=22222$
(5)	$d:5=e$,		

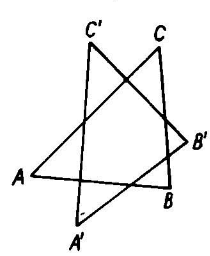
Astrid Rösel, OS 1, Teterow, Kl. 4

*5*722 Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen 6 cm und 9 cm. Jede Seite dieses Rechtecks soll um dieselbe Strecke so verlängert werden, daß ein Rechteck mit dem Flächeninhalt von 304 cm² entsteht. Um wieviel Zentimeter muß jede Seite des Rechtecks verlängert werden?

E. Naumann, Fachlehrer für Mathematik, 90 Karl-Marx-Stadt, Schloßoberschule

6▲723 Beweise, daß jede sechsstellige natürliche Zahl, die aus zwei verschiedenen Grundziffern gebildet wird, von denen jede genau dreimal vorkommt, stets durch 3 teilbar ist! *Yvonne Kruber, EOS Sebnitz, Kl. 9/II*

6▲724 Das Dreieck $A'B'C'$ sei das Bild des Dreiecks ABC, das durch Drehung des



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h., für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben, mit * versehen, gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe oder die entsprechenden in Heft 1/71, 2/71, 3/71 veröffentlichten Aufgaben der Kreis-, Bezirks- bzw. DDR-Olympiade einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 gekennzeichnet sind oder veröffentlichte Olympiadeaufgaben 11/12.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm), denn jede Aufgabe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder das Endergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 70/71 läuft von Heft 5/70 bis Heft 3/71. Zwischen dem 1. und 10. Oktober 1971 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/70 bis 3/71 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/71 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/70 bis 3/71 erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, welche bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1970/71 einsenden, erhalten das *alpha-Abzeichen in Gold* (und die Urkunden zurück).

Redaktion *alpha*

Dreiecks ABC um den Punkt D als Drehzentrum und um den Winkel $\sphericalangle ADA' = \varphi$ als Drehwinkel entstanden ist. Es sind das Drehzentrum D und der Drehwinkel φ durch Konstruktion zu bestimmen!

Volker Zillmann, Dresden

W 6 ■ 725 Es sind alle natürlichen Zahlen zu ermitteln, die durch 3, 5, 7 und 11, aber nicht durch 2 teilbar und kleiner als 10000 sind. *Yvonne Kruber, EOS Sebnitz, Kl. 9/II*

W 6 ■ 726 Es ist zu beweisen, daß in einem rechtwinkligen Dreieck dem kleineren der beiden spitzen Winkel auch die kleinere der beiden Katheten gegenüberliegt. *T.*

* 6 * 727 Zeichne ein Rechteck $ABCD$, in dem die Seite $\overline{AB}$ größer ist als die Seite $\overline{BC}$! Verbinde die Mitte E der Seite $\overline{CD}$ mit den Eckpunkten A und B des Rechtecks! Konstruiere nun unter alleiniger Benutzung von Lineal und Bleistift die Seitenhalbierenden des Dreiecks ABE und begründe diese Konstruktion!

Yvonne Kruber, EOS Sebnitz, Kl. 9/II

* 6 * 728 Jemand bildet die Summe aus sechs natürlichen Zahlen. Von den Summanden weiß man nur, daß jeder nachfolgende Summand um 7 größer ist als das Doppelte seines Vorgängers. Beweise, daß die so gebildete Summe durch 21 teilbar ist!

StR. H.-J. Kerber, Neustrelitz

* 6 * 729 An einem internationalen Leichtathletik-Wettkampf in der Volksrepublik Polen beteiligten sich mehr als 180, aber weniger als 220 Sportler. Die Anzahl der teilnehmenden Sportler des Gastgeberlandes war um 8 kleiner als die Hälfte der Anzahl aller teilnehmenden aktiven Sportler. Die Anzahl der sowjetischen Sportler war um 3 größer als ein Viertel, die Anzahl der Aktiven aus der DDR war um 5 größer als ein Achtel der Anzahl aller Teilnehmer. Aus der ČSSR beteiligten sich dreimal so viel Sportler wie aus Ungarn. Wieviel Sportler starteten insgesamt? Wieviel Sportler entsandte jedes der beteiligten Länder?

Jörg Schubert, POS Pfaffroda, Kl. 5a

7 ▲ 730 Es ist zu beweisen, daß für alle Dreiecke ABC, die den gleichen Winkel $\sphericalangle BAC = \alpha$ und den gleichen Inkreisradius ϱ besitzen, die Summe $b+c-a$ konstant ist! (Es seien a, b und c die Längen der Seiten eines solchen Dreiecks.) *T.*

7 ▲ 731 Aus dem nachstehenden Stundenplanausschnitt ist zu ermitteln, welche Unterrichtsfächer die vier Lehrkräfte Herr Reichelt, Frau Helmert, Fräulein Fischer und Herr Walter unterrichten, wenn folgendes bekannt ist:

a) Jede Lehrkraft unterrichtet in genau zwei verschiedenen Fächern.

b) Jede Lehrkraft unterrichtet beide Fächer in beiden Klassen.

c) Fräulein Fischer unterrichtet in den Klassen 5a und 5b am Dienstag nur in den ersten beiden Stunden.

d) Herr Reichelt hat als Fernstudent dienstags seinen Studientag.

e) Frau Helmert unterrichtet montags nur zwei Stunden in der Klasse 5b, die übrige Zeit ist sie im Schulhort eingesetzt.

f) Für den Russischlehrer beginnt die Lehrtätigkeit montags erst von der dritten Stunde an.

Montag

Klasse 5a	Klasse 5b	
Deutsch	Geographie	1. Stunde
Geschichte	Deutsch	2. Stunde
Sport	Russisch	3. Stunde
Geographie	Zeichnen	4. Stunde
Russisch	Mathematik	5. Stunde
Zeichnen	Biologie	6. Stunde

Dienstag

Klasse 5a	Klasse 5b	
Russisch	Deutsch	1. Stunde
Mathematik	Russisch	2. Stunde
Mathematik	Sport	3. Stunde
Deutsch	Mathematik	4. Stunde
Biologie	Deutsch	5. Stunde
Sport	—	6. Stunde

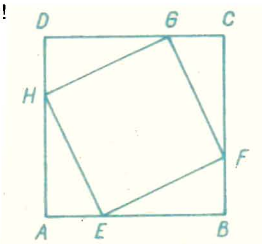
Biologiefachlehrer K.-H. Schubert Pfaffroda (Krs. Olbernhau)

W 7 ■ 732 Volkers Vater hat ein neues Auto. Volker studiert die vierstellige Autonummer und sagt zu seinem Freund: „Das Produkt aus der ersten und zweiten Stelle ist gleich dem Neunfachen des Produkts aus der dritten und vierten Stelle. Dividiert man die Summe aus der ersten und zweiten Stelle durch die Summe aus der dritten und vierten Stelle, so erhält man das gleiche wie bei Division der Summe aus der ersten und dritten Stelle durch die Summe aus der zweiten und vierten Stelle". Der Freund antwortete: „Wenn unter den vier Ziffern keine Null und unter den beiden mittleren Ziffern keine 1 und keine 7 ist, kann ich dir die Autonummer nennen!" Wie heißt sie?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

W 7 ■ 733 Einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Katheten $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ sind Rechtecke so einzuzeichnen, daß jeweils ein Eckpunkt eines solchen Rechtecks auf der Hypotenuse und zwei Rechteckseiten auf den Katheten des Dreiecks ABC liegen. Es ist nachzuweisen, daß alle diese Rechtecke den gleichen Umfang besitzen!

* 7 * 734 Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB} = a$. Die Eckpunkte eines weiteren Quadrates $EFGH$ liegen sämtlich auf den vier Seiten des Quadrates $ABCD$. Es ist nachzuweisen, daß der Flächeninhalt des Quadrates $EFGH$ genau dann am kleinsten ist, wenn seine Eckpunkte mit den Seitenmitten des Quadrates $ABCD$ zusammenfallen! *T.*



* 7 * 735 Der Name eines bedeutenden Mathematikers schreibt sich mit fünf Buchstaben. Den Buchstaben $A, B, C, \ldots, Y, Z$ des Alphabets seien in dieser Reihenfolge die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 25, 26$ zugeordnet. Setzt man für die Buchstaben des Namens die ihnen zugeordneten Zahlen ein, so beträgt die Summe der

a) dem ersten und zweiten Buchstaben zugeordneten Zahlen 26,

b) dem ersten und dritten Buchstaben zugeordneten Zahlen 17,

c) dem ersten und vierten Buchstaben zugeordneten Zahlen 10,

d) dem ersten und fünften Buchstaben zugeordneten Zahlen 23,

e) allen fünf Buchstaben zugeordneten Zahlen 61.

Wie lautet der Name dieses bedeutenden Mathematikers?

Mathematikfachlehrer E. Naumann, Karl-Marx-Stadt, Schloßoberschule

* 7 * 736 Einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Katheten $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ sind Rechtecke so einzuzeichnen, daß jeweils ein Eckpunkt eines solchen Rechtecks auf der Hypotenuse und zwei Rechteckseiten auf den Katheten des Dreiecks ABC liegen. Es ist nachzuweisen, daß von allen diesen Rechtecken das unter ihnen enthaltene Quadrat den größten Flächeninhalt besitzt! *T.*

8 ▲ 737 Es sind alle rationalen Zahlen x anzugeben, für die die Gleichung

$[2x-5] = 3$ erfüllt ist.

Bemerkung: Ist z eine rationale Zahl, so versteht man unter $[z]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als z ist. Es gilt also z. B. $[8{,}7] = 8$; $[4] = 4$; $\left[-2\frac{1}{4}\right] = -3$.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

W 8 ■ 738 Das Produkt aus zwei zweistelligen natürlichen Zahlen sei gleich einer natürlichen Zahl, in deren Darstellung (im dekadischen System) nur die Grundziffern 5 vorkommen. Wie lauten diese beiden zweistelligen Zahlen? *S. H.*

W 8 ■ 739 Einem regelmäßigen Sechseck mit der Seitenlänge a sei ein Kreis umbeschrieben, und einem Quadrat mit der gleichen Seitenlänge sei ebenfalls ein Kreis umbeschrieben. Wie verhalten sich die Flächeninhalte dieser beiden Kreise zueinander?

Harry Reimann, 9. Oberschule, Berlin, Kl. 8

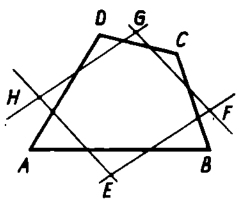
* 8 * 740 Es sind alle geordneten Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen m und n mit $m>2$ und $n>2$ zu bestimmen, für die die Gleichung

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$ erfüllt ist. *T.*

* 8 * 741 Es sind alle Rechtecke $ABCD$ anzugeben, deren Seitenlängen $\overline{AB}=a$ cm und $\overline{BC}=b$ cm ganzzahlig sind und bei denen die Maßzahl des Flächeninhalts (in cm^2) gleich der Maßzahl des Umfangs (in cm) ist.

Egbert Lindner, 2. Oberschule, Dresden, Kl. 9

* 8 * 742 Jede der vier Seiten eines konvexen Vierecks $ABCD$ sei in drei gleiche Teile geteilt. Durch die Teilpunkte seien – wie aus der Zeichnung ersichtlich – vier Geraden gezeichnet, die sich in den Punkten E, F, G und H schneiden. Es ist zu beweisen, daß das Viereck $EFGH$ ein Parallelogramm ist. *Sch.*



* 8 * 743 Es sind alle natürlichen Zahlen a zu ermitteln, für die die Zahl $13a+1$ gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Dipl.-Hütteneing. Kurt Oertel, Zschornewitz

9 ▲ 744 Es ist zu beweisen, daß für jedes Dreieck ABC mit den Seitenlängen $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, in dem der Winkel $\sphericalangle BCA=\gamma$ spitzwinklig ist, die Ungleichung

$c^2<a^2+b^2$ erfüllt ist. *T.*

W 9 ■ 745 Vor einem Wettkampf zwischen sechs Sportlern, deren Namen wir zur Abkürzung mit A, B, C, D, E und F bezeichnen, wurden die folgenden drei Voraussagen über das Ergebnis des Wettkampfes gemacht, wobei jeweils die Sportler in der Reihenfolge der von ihnen belegten Plätze (beginnend mit dem 1. Platz) angegeben wurden:

1. A, B, C, D, E, F;
2. A, C, B, F, E, D;
3. C, E, F, A, D, B.

Nach dem Abschluß des Wettkampfes zeigte sich, daß in der ersten Voraussage genau drei Plätze richtig angegeben waren, daß aber in keinem Falle zwei in der Voraussage benachbarte Plätze richtig waren. Bei der zweiten Voraussage stimmte kein einziger der angegebenen Plätze. Bei der dritten Voraussage war nur ein Platz richtig angegeben.

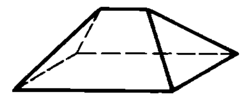
Es ist zu ermitteln, welchen Platz jeder der sechs Sportler belegt hatte.

Dozent L. M. Lopowok, Woroschilowgrad, UdSSR

W 9 ■ 746 Gegeben sei ein regelmäßiges Sechseck $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ mit der Seitenlänge a. Es ist ein weiteres regelmäßiges Sechseck $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ zu konstruieren, dessen Flächeninhalt dreimal so groß wie der Flächeninhalt des gegebenen Sechsecks ist. Die Konstruktion ist zu begründen.

Schüler Rainer Zerck, Wismar

* 9 * 747 Ein Walmdach (vgl. die Abb.) hat eine rechteckige Grundfläche mit den Seitenlängen $a=10$ m und $b=7$ m; seine Höhe beträgt $h=3{,}80$ m. Alle Seitenflächen des Daches haben die gleiche Neigung, sie bilden also jeweils einen gleichgroßen Winkel mit der Grundfläche.



Es sind die Länge des Dachfirstes, die Längen der Seitenkanten des Daches und das Volumen des von dem Dach und seiner Grundfläche begrenzten Raumteils zu berechnen.

Michael Schnelle, OS II, Calau, Kl. 7

* 9 * 748 Es sei p eine Primzahl, die größer als 3 und gleich der Summe von drei Primzahlen p_1, p_2, p_3 ist, von denen jede ebenfalls größer als 3 ist.

Es ist zu beweisen, daß man dann stets aus den drei Primzahlen p_1, p_2, p_3 zwei Primzahlen, die wir mit q und r bezeichnen wollen, so auswählen kann, daß die Differenzen

$p-q,\ p-r,\ q-r$

sämtlich durch 6 teilbar sind.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

* 9 * 749 Es ist zu beweisen, daß für jede natürliche Zahl n, die nicht durch 3 teilbar ist, die Zahl

$z=n^{12}-n^8-n^4+1$

durch 9 teilbar ist.

Schüler Dietmar Wegner, OS Dardesheim

* 9 * 750 Es ist zu beweisen, daß die Summe von drei oder mehr als drei aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen niemals eine Primzahl ist.

Henry Reuter, OS Flößberg, Kl. 9

10/12 ▲ 751 In den Leningrader Ishorsk-Werken werden Kugelspeicher aus Stahl gebaut, die einen äußeren Durchmesser von 16 m und eine Wandstärke von 42 mm haben.

a) Wie groß ist die Masse eines solchen Kugelspeichers? (Dichte des Stahls $7{,}86\ g\cdot cm^{-3}$)

b) Welchen Wert erhält man für die Masse des Kugelspeichers, wenn man statt der genauen Formel für das Volumen einer Hohlkugel zur schnelleren Berechnung die folgende Näherungsformel benutzt:

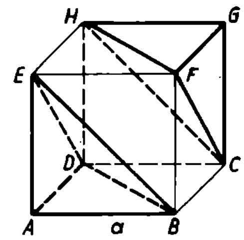
$V=4\pi r^2 s$,

wobei r der äußere Radius der Hohlkugel und s die Wandstärke ist? Wie groß sind der absolute und der relative Fehler? *L.*

W 10/12 ■ 752 Welche paarweise voneinander verschiedenen Primzahlen x, y und z erfüllen die Gleichung $x^2+xy+z=82$? *Sch.*

W 10/12 ■ 753 Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit der Kantenlänge a und mit der Grundfläche $ABCD$. Ferner liege E senkrecht über A, F senkrecht über B, G senkrecht über C und H senkrecht über D (vgl. die Abb.). Von diesem Würfel seien zwei Pyramiden, die durch die Kanten $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{DE}$ bzw. durch die Kanten $\overline{GC}$, $\overline{GF}$, $\overline{GH}$, $\overline{CF}$, $\overline{CH}$, $\overline{FH}$ begrenzt sind, abgeschnitten. Es soll das Volumen des Restkörpers berechnet werden.

Ulrike Weise, EOS „Friedrich Engels“, Karl-Marx-Stadt, Kl. 11



* 10/12 * 754 Es seien f, g, h drei Funktionen mit

$$f(x)=x^2+x+1, \qquad (1)$$
$$g(x)=3x-5, \qquad (2)$$
$$h(x)=x+1, \qquad (3)$$

die für alle reellen Zahlen x definiert sind. Ferner seien x_1 und x_2 zwei reelle Zahlen, für die die Gleichung

$$f\{g[h(x)]\}=f(2x) \quad \text{erfüllt ist.} \qquad (4)$$

Es ist zu beweisen, daß dann

$$\{g[h(x_1)]+h(x_1)+x_1\}\{g[h(x_2)] + h(x_2)+x_2\}=0 \quad \text{gilt.} \qquad (5)$$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

* 10/12 * 755 Wir untersuchen alle Gleichungssysteme der Form

$$y=ax+b, \qquad (1)$$
$$y=cx+d, \qquad (2)$$

wobei die Koeffizienten a, b, c, d natürliche Zahlen darstellen, die kleiner als 10 sind. (Diese Koeffizienten können also gleich 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 sein.)

1. Wieviel verschiedene Gleichungssysteme dieser Art gibt es?
2. Wieviele dieser Gleichungssysteme haben

a) genau eine reelle Lösung,

b) keine reelle Lösung,

c) unendlich viele reelle Lösungen?

Bemerkung: Wir wollen zwei solche Gleichungssysteme als verschieden ansehen, wenn sie sich in mindestens einem der Koeffizienten a, b, c, d unterscheiden. *L.*

* 10/12 * 756 Es ist zu beweisen, daß für alle Winkel α mit $0°\leqq\alpha<30°$ die Gleichung

$\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha\cdot\tan 3\alpha$
$=\tan 3\alpha-\tan 2\alpha-\tan\alpha$ erfüllt ist.

Schüler Ulli Klaus, Erfurt

* 10/12 * 757 Es ist zu beweisen, daß es zu jeder von Null verschiedenen natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl z gibt, die die Form

$z=222\ldots2000\ldots0$

hat und durch n teilbar ist.

(Die Zahl z hat also in dekadischer Darstellung zunächst p Grundziffern, die gleich 2 sind, und dann q Grundziffern, die gleich 0 sind, wobei p und q natürliche Zahlen mit $p\geqq1$, $q\geqq1$ sind.) *S. H.*

Harald Englisch übersetzt Aufgaben aus der ČSSR

Als Schüler der 4. Klasse nahm ich zum ersten Mal an einer Kreisolympiade teil. Ein 3. Platz (bei ca. 120 Teilnehmern der Stadt Leipzig) war ein schöner Erfolg und gab mir den Ansporn, mich kontinuierlich mit der Mathematik zu beschäftigen. Anfangs ließen mir mein Vater und der Bezirkszirkel *Junger Mathematiker* die größte Förderung zuteil werden. Später kam das Selbststudium als eine wichtige Hilfe dazu. Ich bin ein regelmäßiger Leser von *alpha*. Früher beteiligte ich mich auch am *alpha*-Wettbewerb. Im Jahre 1968 wurde ich in meiner Klassenstufe Sieger (mit 32 Antwortkarten). Heute interessieren mich die Beiträge und schwierige Probleme wie Aufgaben von Internationalen Olympiaden. In Vorbereitung auf ein Mathematikstudium – ich besuche jetzt die 11. Klasse – beschäftige ich mich besonders mit der *Linearen Algebra* und der *Analysis*. Die Erfolge meiner Arbeit sind die Ergebnisse bei Mathematikolympiaden. Als die schönsten möchte ich die 3. Preise bei der DDR-Olympiade in Klassenstufe 10 als Schüler der 7. Klasse und Klassenstufe 11 als Schüler der 10. Klasse bezeichnen.

Im Sommer 1970 besuchte ich mit meinen Eltern die ČSSR. Da mich die Olympiadebewegung in diesem Land interessierte, fragte ich im erstbesten Geschäft nach entsprechender Literatur. Ich hatte Glück. Beim Blättern stellte ich fest, daß das mir Angebotene genau das Richtige war. Der nächste Schritt war das Übersetzen. Zugegeben, ich hatte davor einige Angst, obwohl ich mich vorher schon an sowjetisches Material herangewagt habe. Aber beim Tschechischen lag die Sache auch anders: Vor dem Besuch der ČSSR kannte ich kein Wort dieser Sprache, und inzwischen lernte ich nur: „Bitte, danke, guten Tag, wo ist ... ?"

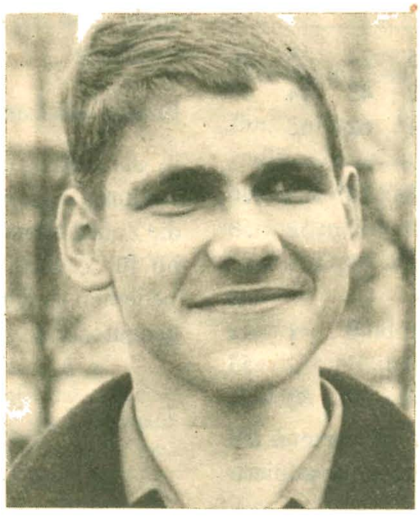
In Leipzig habe ich mir ein Wörterbuch besorgt und mich an die Arbeit gemacht. Zuerst schlug ich jedes Wort nach. Natürlich fand ich nicht von jedem Begriff die Übersetzung. Später suchte ich nur noch die wichtigsten Wörter heraus, nutzte die Verwandschaft des Tschechischen mit dem Russischen und konzentrierte mich auf mathematische Zeichen. Da ging die Arbeit viel schneller von der Hand. Und wenn ich doch einmal eine Aufgabe nicht verstand, versuchte ich, mir diese an Hand der Lösung zu rekonstruieren.

Ich erzählte im Bezirkszirkel von meiner Arbeit. Da meinte der Leiter des Bezirkskabinetts für außerunterrichtliche Tätigkeit, Herr *Hanowski*, daß diese Aufgaben allen zugänglich gemacht werden müßten.

Mein Freund *Arnulf Möbius*, auch ein langjähriger, erfolgreicher Olympiadeteilnehmer, übernahm die Korrektur. Die Mutter eines ehemaligen Olympioniken erklärte sich bereit, die Übersetzung auf Maschine zu schreiben. Es entstanden 150 Abzüge (Ormig). Nun können sich alle Mitglieder des Bezirksklubs durch unsere Arbeit weiterbilden.

Als Kostprobe möchte ich den *alpha*-Lesern einige Aufgaben vorstellen.

Harald Englisch, EOS Karl Marx, Leipzig, Klasse 11



Nach Redaktionsschluß:
Anläßlich der Siegerehrung zur *X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR* erhielt Harald Englisch einen 2. Preis in Olympiadeklasse 12 (EOS) und wurde damit Kandidat zur XIII. Internationalen Mathematikolympiade. Weitere Kandidaten sind: Wolfgang Burmeister (Dresden), Thomas Jentzsch (Halle), Reinhard Wobst (Karl-Marx-Stadt, ehem. Dresden), Rainer Siegmund-Schultze (Berlin), Stefan Ladmann (Leipzig), Hans-Jürgen Fischer (Karl-Marx-Stadt), Gerhard Spens (Erfurt), Arnulf Möbius (Halle, ehem. Leipzig), Ludwig Schäfer (Erfurt), Olaf Böhme (Dresden).

Aufgaben aus Mathematik-Olympiaden der ČSSR

■ 1 ■ Zerlege die natürlichen Zahlen von 1 bis 12 in 4 Gruppen zu je 3 Zahlen, wobei die Summe der 3 Zahlen jeder Gruppe nicht größer als 20 sein soll. Beweise, daß in solch einer Zerlegung die Gruppe $\{5, 6, 7\}$ nicht auftreten kann.

■ 2 ■ Gegeben ist der Viertelkreis SBC mit dem Radius $r=\overline{SB}=\overline{SC}$. A sei der Punkt auf dem Bogen $\widehat{BC}$, für den $\sphericalangle BSA=60^\circ$ gilt, X sei ein beliebiger Punkt der Strecke $\overline{SC}$.
a) Bestimme den Flächeninhalt P des Gebietes, das von den Strecken $\overline{AX}$ und $\overline{BX}$ und vom Bogen $\widehat{AB}$ begrenzt wird, mit Hilfe der Länge $x=\overline{SX}$.
b) Für welche x ist P halb so groß wie der Flächeninhalt des Viertelkreises? Den wievielten Teil von der Länge des Bogens $\widehat{BC}$ nimmt x in diesem Falle ein?

■ 3 ■ Konstruiere das rechtwinklige Dreieck ABC mit der Hypotenuse $c=\overline{AB}$, wenn ferner die Länge der Seitenhalbierenden s_c und der Winkel ω gegeben sind. Dabei ist ω der Winkel zwischen s_c und der Winkelhalbierenden w_γ.

■ 4 ■ Bestimme für die Funktion

$$y=\sqrt{x\,\frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}-\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}+\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}}$$

den maximalen Definitionsbereich und stelle sie dort graphisch dar.

■ 5 ■ a) Bestimme die kleinste natürliche Zahl N, die genau 15 Teiler hat.
b) Bestimme alle Zahlen kleiner als N, die mehr als 15 Teiler haben.

■ 6 ■ Gegeben ist im Raum die Gerade p und eine Ebene π senkrecht zu p. Auf p sind 2 Punkte A und B gegeben, die auf der gleichen Seite von π liegen. In π ist eine Gerade q gegeben. Bestimme den geometrischen Ort aller Höhenschnittpunkte der Dreiecke ABX, wobei X auf der Geraden q wandert.

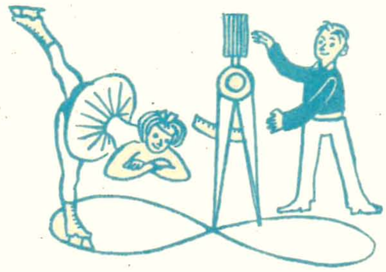
■ 7 ■ Gegeben sind die nichtnegativen Zahlen c_1, c_2, c_3 und die positiven Zahlen d_1, d_2, d_3 mit $d_1\leqq d_2\leqq d_3$. Zeige, daß dann gilt

$$(c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3)\left(\frac{c_1}{d_1}+\frac{c_2}{d_2}+\frac{c_3}{d_3}\right)\leqq (c_1+c_2+c_3)^2\,\frac{(d_1+d_3)^2}{4d_1d_3} \qquad (1)$$

Hinweis: Zeige zuerst, daß

$$\frac{d_2}{d_1+d_3}+\frac{\frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_3}}\leqq 1. \qquad (2)$$

In freien Stunden alpha heiter



Denk dir eine Zahl

Fordere deinen Freund auf, sich eine beliebige Zahl kleiner als 64 zu denken und anzugeben, in welcher dieser sechs Querspalten sie vorkommt:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43
45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	

2	3	6	7	10	11	14	15	18	19	22
23	26	27	30	31	34	35	38	39	42	43
46	47	50	51	54	55	58	59	62	63	

4	5	6	7	12	13	14	15	20	21	22
23	28	29	30	31	36	37	38	39	44	45
46	47	52	53	54	55	60	61	62	63	

8	9	10	11	12	13	14	15	24	25	26
27	28	29	30	31	40	41	42	43	44	45
46	47	56	57	58	59	60	61	62	63	

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	48	49	50	51	52	53
54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	

Die gedachte Zahl findet man leicht, indem man die ersten Zahlen in den angegebenen Querspalten addiert. Wie ist das möglich?

Die bunten Würfel des Major MacMahon

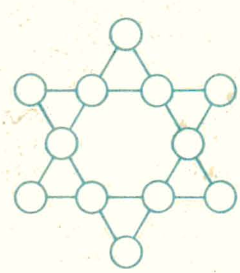
Das Spiel besteht aus dreißig gleichgroßen Würfeln, deren Flächen in sechs Farben gehalten sind: Jeder Würfel hat eine weiße, blaue, grüne, gelbe, rote und schwarze Fläche. Dabei unterscheiden sich je zwei dieser Würfel durch die gegenseitige Lage der farbigen Flächen voneinander. (Das Spiel enthält deshalb ausgerechnet dreißig Würfel, weil die sechs Farben gerade auf dreißigfache Weise so auf die Würfelflächen verteilt werden können, daß je zwei Farbanordnungen voneinander verschieden sind.)

Mit den dreißig Würfeln des *MacMahon* lassen sich verschiedene Spiele verabreden; auf das bekannteste wollen wir hier eingehen:
Von den dreißig Würfeln wählt man einen beliebigen, den man *Muster* nennt. Von den 29 übrigen soll man 8 auswählen und sie zu einem großen Würfel zusammenstellen, der die gleiche Farbverteilung wie das Muster hat. Wenn man weiter nichts verlangt, ist die Aufgabe verhältnismäßig leicht. *MacMahon* fügte jedoch einige andere Forderungen für die Zusammenstellung des Würfels aus acht Einzelwürfeln hinzu. Er verlangt z. B., daß im „großen“ Würfel nur Würfel mit gleichfarbigen Flächen aneinanderstoßen sollen. Wenn z. B. ein Einzelwürfel eine weiße Deckfläche hat und man darauf einen weiteren stellt, muß die Grundfläche dieses Würfels wiederum weiß sein.

Ersetze Buchstaben durch Zahlen

In der untenstehenden Aufgabe sind die Buchstaben so durch Zahlen zu ersetzen, daß in der Summe für e die Zahl 2 oder 4 oder 6 gesetzt werden kann. Überlege, ob für e auch 8 möglich ist. Bei jeder Teilaufgabe bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Zahlen, a, b, c, d, bedeuten vier verschiedene Zahlen.

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & c & d \\ & & b & c & d \\ & & & c & d \\ + & & & & d \\ \hline & e & e & e & e \end{array}$$

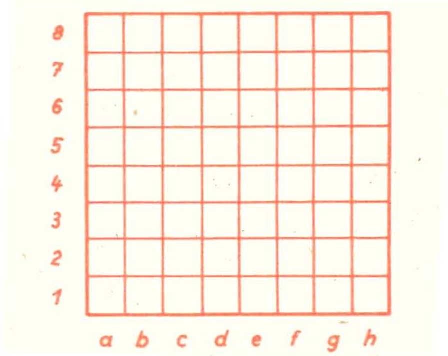


Der Zahlenstern

Ein sechseckiger Stern enthält 12 Kreise. Ordne die Zahlen 1 bis 12 so in die Kreise ein, daß die Summe der Zahlen für jede Seite (4 Kreise) 26 beträgt! Zeige ferner, daß es möglich ist, die Zahlen so einzuordnen, daß außerdem die Summe der Zahlen an den 6 Eckfeldern 26 beträgt!

Damen auf dem Schachbrett

Auf ein Schachbrett sind vier Damesteine so zu stellen, daß sie alle nichtbesetzten Felder mit Ausnahme von a1, a2, b1, b2 decken. Auf das Brett sind fünf Damesteine so aufzustellen, daß sie alle nicht besetzten Felder decken.
Wieviel Züge kann man auf einem leeren Schachbrett mit einem Damestein ausführen? (Der Damestein kann sich bei jedem Zuge beliebig weit vor oder zurück, parallel zu den Seiten des Brettes oder zu den beiden Diagonalen des Brettes bewegen.)



Die Zahl 3 fünfmal verwendet

Die Zahlen 11 und 57 sollen nur mit Hilfe der Zahl 3 und beliebigen Rechenzeichen sowie mit der Bedingung dargestellt werden, daß die Zahl 3 genau fünfmal verwendet wird.

Kryptarithmetik

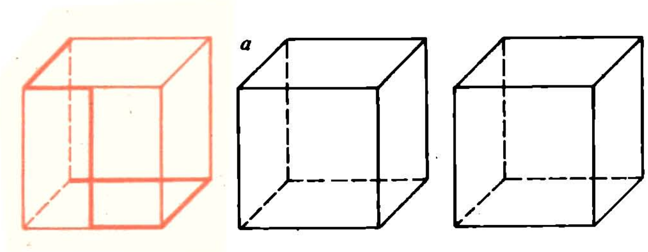
Ergänze die fehlenden Ziffern, an deren Stelle Sterne gesetzt sind!

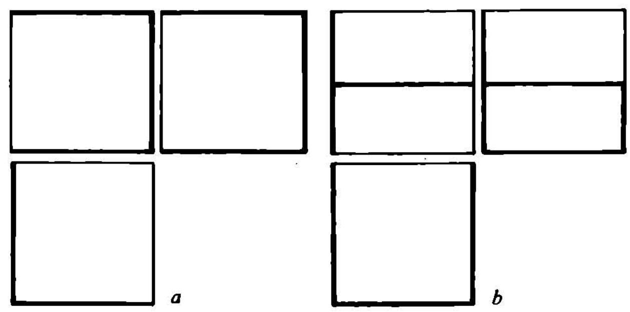
$$\begin{array}{r} 1\,*\,*\,.\,*\,* \\ \hline *\,*\,*\,1\;\; \\ *\,*\,*\,1\;\;\;\; \\ \hline *\,*\,*\,1\,*\;\; \end{array}$$

Die auf beiden Seiten (S. 66/67) gestellten Probleme wurden entnommen aus:
333 her a zábavy pro pionýry (Verlag Mladá franta); Magazín hadanky a křižovky (Verlag Orbis), Keine Angst vor Mathematik (SNTI-Verlag technischer Literatur / VEB Fachbuchverlag); Zentrale Mathe-AG Liberec; rozhledy (mathematische Schülerzeitschrift der ČSSR)

Aufgepaßt

Wir wollen überprüfen, wie es um unser räumliches Vorstellungsvermögen steht: In einen Würfel ist der Verlauf eines Drahtes in räumlich gebrochener Linie eingezeichnet.





In a und b ist der gleiche Würfel im Grund-, Auf- und Kreuzriß gezeichnet. Das Bild des Verlaufs je eines Drahtes ist dargestellt. Zeichne in die beiden Würfel den Verlauf der Drähte in räumlich gebrochener Linie ein!

Wer hat die Scheibe eingeschlagen?

Emil, Johann, Karl und *Rudolf* haben auf dem Hof Fußball gespielt und eine Fensterscheibe eingeschlagen. Als der Fall untersucht wurde, sagten sie folgendermaßen aus:
Emil: „Das Fenster hat Karl oder Rudolf eingeschlagen."
Johann: „Rudolf hat es getan."
Karl: „Ich habe das Fenster nicht eingeschlagen."
Rudolf: „Ich auch nicht."
Ihr Lehrer, der die Jungen gut kannte, sagte: „Drei von ihnen sprechen immer die Wahrheit."
Wer hat also das Fenster eingeschlagen?

Lösungen

Lösung zu der Aufgabe 4 der IV. Internationalen Physikolympiade (Heft 1/71)

Bei einem sphärischen Hohlspiegel kreuzen sich die reflektierten Strahlen eines Parallelstrahlbündels nicht alle im Brennpunkt. Damit ergibt sich eine Skizze für den Sachverhalt entsprechend Bild. (Siehe S. 72, Mitte)

Die Brennweite des sphärischen Hohlspiegels mit dem Brennpunkt F beträgt

$$FM = FO = \frac{R}{2}.$$

Weil das Dreieck CMD gleichschenklig und die Strecke $DM = R$ ist, folgt

$$\cos i = \frac{R}{2\,CM}, \text{ also } CM = \frac{R}{2\cos i}.$$

Weiterhin gilt für die Strecke CF:

$CF = CM - FM$, also

$$CF = \frac{R}{2\cos i} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos i} - 1\right). \qquad (1)$$

Für das rechtwinklige Dreieck CEF gilt:

$$\tan 2i = \frac{x}{CF}, \text{ also } x = CF \cdot \tan 2i.$$

In Verbindung mit Gleichung (1) folgt für die Strecke x:

$$x = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos i} - 1\right)\tan 2i. \qquad (2)$$

Für das rechtwinklige Dreieck DAM gilt:

$$\sin i = \frac{a}{R}. \qquad (3)$$

Aus der Gleichung $\cos^2 i + \sin^2 i = 1$ folgt dann:

$$\cos i = \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}$$

für Winkelfunktionen des doppelten Winkel

$$\tan 2i = \frac{\sin 2i}{\cos 2i} = \frac{2\sin i\cos i}{1 - 2\sin^2 i}.$$

Dann folgt in Verbindung mit den Gleichungen (3) und (4):

$$\tan 2i = \frac{2a\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}}{R\left(1 - \frac{2a^2}{R^2}\right)} \qquad (5)$$

Daraus folgt für die Strecke x in Verbindung mit den Gleichungen (2), (4) und (5):

$$x = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}} - 1\right)\frac{2a\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}}{R\left(1 - \frac{2a^2}{R^2}\right)}.$$

$$x = \frac{a}{1 - \frac{2a^2}{R^2}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}\right).$$

Es gelten folgende Näherungen:

$$1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}} \approx 1 - \left(1 - \frac{a^2}{2R^2}\right) \approx \frac{a^2}{2R^2} \text{ und weil}$$

$\frac{a^2}{R^2} \ll 1$ ist $1 - \frac{2a^2}{R^2} \approx 1$.

Daraus folgt für die Strecke x:

$$x \approx a\frac{a^2}{2R^2} \approx \frac{a^3}{2R^2}.$$

Für die Größe des Empfängers ergibt sich damit angenähert:

$$x \approx \frac{25^3}{2 \cdot 200^2}\,\text{cm} \approx 2\,\text{mm}.$$

Aus der Berechnung des Verhältnisses der Spiegelflächen zueinander ergibt sich die Lösung für den zweiten Teil der Aufgabe. Dabei wird in jedem der beiden Fälle berücksichtigt, daß auf den Strahlungsempfänger die Energie vom ganzen Spiegel, das heißt von der Kreisfläche von Halbmesser a, trifft. Aus der vorhergehenden Berechnung ergibt sich

$$a = \sqrt[3]{2R^2x}.$$

Die Wirkungsfläche des Spiegels ist proportional zu a^2, das bedeutet

$$a^2 = \sqrt[3]{4R^4x^2}.$$

Eine Verringerung des Empfängerradius auf ein Achtel ergibt

$$a_1{}^2 = \sqrt[3]{4R^4\left(\frac{x}{8}\right)^2}.$$

Damit wird das Flächenverhältnis

$$\frac{F}{F_1} = \frac{a^2}{a_1{}^2} = \sqrt[3]{8^2} : 1 = 4 : 1.$$

Die vom Empfänger aufgenommene Strahlung verringert sich um ein Viertel, wenn seine Ausmaße auf ein Achtel reduziert werden.

W 5 ■ 592 Nach dem Umstellen der Bücher befinden sich in jedem Regal genau 40 Bücher. Da dabei dem ersten Regal zwei Bücher entnommen wurden, befanden sich dort zuvor 42 Bücher. Dem zweiten Regal wurden zwei Bücher hinzugefügt und drei Bücher entnommen, in ihm befanden sich demnach 41 Bücher. Im dritten Regal befanden sich 37 Bücher.

W 5 ■ 593 Wir nehmen an, im vergangenen Jahr beteiligten sich n Schüler am Wettbewerb; dann nahmen $(28-n)$ Schüler nicht daran teil. Gegenwärtig beteiligen sich $(n+6)$ Schüler am Wettbewerb. Die Gleichung $n+6=28-n$ wird nur für $n=11$ erfüllt, denn $11+6=28-11$. Also nahmen im vergangenen Jahr 11 Schüler dieser Klasse am *alpha*-Wettbewerb teil und in diesem Jahr $11+6=17$ Schüler.

* 5 * 594 Nehmen wir an, ein Schüler habe a 5-Pfennigstücke, b 10-Pfennigstücke, c 20-Pfennigstücke und d 50-Pfennigstücke gespart, dann gilt $5a+10b+20c+50d=200$ bzw.

$a+2b+4c+10d=40$. Dabei sind a, b, c und d natürliche Zahlen größer als 0 und kleiner als 4. Da $2b$, $4c$, $10d$ sämtlich gerade Zahlen sind, und die Summe 40 ebenfalls eine gerade Zahl ist, muß auch a eine gerade Zahl sein, also $a=2$. Wir erhalten somit

$$2+2b+4c+10d=40,$$
$$2b+4c+10d=38,$$
$$b+2c+5d=19.$$

Diese Gleichung besitzt unter den gegebenen Bedingungen genau zwei Lösungen, nämlich $b_1=2$, $c_1=1$, $d_1=3$ und $b_2=3$, $c_2=3$, $d_2=2$. Da es sich um drei Schüler handelt, aber nur die beiden Möglichkeiten

$2\cdot5+2\cdot10+1\cdot20+3\cdot50=200$ und

$2\cdot5+3\cdot10+3\cdot20+2\cdot50=200$ bestehen,

trifft Regines Behauptung zu.

W 6 ■ 597 Es sei n die Anzahl der Ringe, die ein Schütze höchstens erreichen kann, dann entfallen auf Monika $\frac{4}{5}n$ Ringe, auf Bärbel $\left(\frac{4}{5}n+4\right)$ Ringe, auf Margit $\left(\frac{4}{5}n+2\right)$ Ringe. Zusammen erreichten die drei Mädchen also $\left(\frac{12}{5}n+6\right)$ Ringe. Die Gleichung $\frac{12}{5}n+6=\frac{5}{2}n$ hat die Lösung $n=60$.

Ein Schütze konnte 60 Ringe erreichen. Bärbel erreichte 52, Margit 50, Monika 48 Ringe.

W 6 ■ 598 Da die von A gemachte Aussage falsch ist, hat A verschiedenfarbige Kugeln in der Hand. Da A höchstens zwei Kugeln erhielt, besitzt er genau eine weiße und eine schwarze Kugel. Da die Aussage von C falsch ist, hat C genau eine Kugel, und zwar entweder eine weiße oder eine schwarze erhalten. Im ersten Falle müßte dann B je eine weiße und schwarze Kugel besitzen. Da aber die Aussage von B falsch ist, kann dieser Fall nicht eintreten. Daher trifft der zweite Fall zu, und B erhielt zwei weiße Kugeln. Demnach erhielten

A eine weiße und eine schwarze Kugel,
B zwei weiße Kugeln,
C eine schwarze Kugel.

* 6 * 599 Das Produkt $RPRP$ läßt sich darstellen durch $100\cdot RP+RP=101\cdot RP$. Demnach gilt $P^2\cdot PQP=101\cdot RP$, das heißt PQP muß durch 101 teilbar sein. Aus $n\cdot101=PQP$ und $0<n<9$ folgt

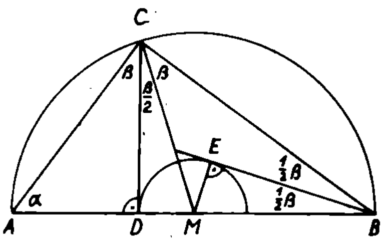
$PQP=101$ für $n=1$, also $Q=0$ und $R=0$ (entfällt);
$PQP=202$ für $n=2$, also $Q=0$ und $RP=8$ (nicht möglich); usw. Nur $n=4$ erfüllt die gestellten Bedingungen, und wir erhalten $PQP=404$ und $RP=64$, also $R=6$.

Probe: $4\cdot404\cdot4=6464$.

W 7 ■ 602 Es seien x, y und z die gesuchten natürlichen Zahlen. Dann gilt $x+y+z=s$ und $xs+ys+zs=s(x+y+z)=s^2$. Daraus folgt $240+270+390=s^2$ bzw. $s^2=900$ und damit $s=30$. Aus $xs=30x=240$ folgt $x=8$, aus $xy=30y=270$ folgt $y=9$ und aus $zs=30z=390$ folgt $z=13$. Die gesuchten Zahlen lauten somit 8, 9 und 13.

W 7 ■ 603 Es sei $\overline{BC}=\overline{AD}=b$; dann gilt $A_1=\frac{b}{2}(x+y)$, $A_2=\frac{b}{2}[(a-x)+(a-y)]$
$=\frac{b}{2}(2a-x-y)$, also
$A_1 : A_2=(x+y) : (2a-x-y)=2 : 3$.
Daraus folgt
$3x+3y=4a-2x-2y$,
$5x+5y=4a$,
$x+y=\frac{4}{5}a$.

* 7 * 604 Nach dem Satz des Thales gilt $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$ und damit auch $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB=\beta$. Im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt $\sphericalangle ACD=90^\circ-\alpha=\beta$.
Aus $\overline{MD}=\overline{ME}$, $\overline{MB}=\overline{MC}$, $\sphericalangle CDM = \sphericalangle BEM =90^\circ$ folgt $\triangle DMC \cong \triangle MBE$ und damit $\sphericalangle MBE= \sphericalangle DCM=\frac{1}{2}\beta$.



Aus $\sphericalangle ACB= \sphericalangle ACD+ \sphericalangle DCM+ \sphericalangle MCA$ $=\beta+\frac{1}{2}\beta+\beta=90^\circ$ folgt $\beta=36^\circ$ und somit $\alpha=54^\circ$.
Es wurden auch die Lösungen (*alpha*-Wettbewerb) anerkannt, bei denen die Einsender den Höhenfußpunkt F näher an A als an B wählten, d. Red.

W 8 ■ 607 Es seien x und y zwei zweistellige natürliche Zahlen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Dann ist ihre Summe $x+y$ das Quadrat einer natürlichen Zahl, und es gilt

$$\frac{1}{5}x=\frac{6}{25}y, \text{ also } x : y=6 : 5,$$

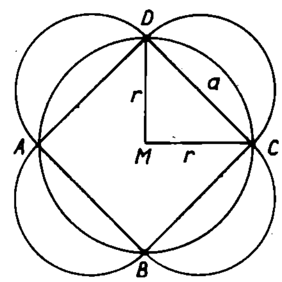
d. h., $x=6k$ und $y=5k$, wobei k eine natürliche Zahl ist.
Daraus folgt $x+y=11k$.
Nach Voraussetzung ist 11k eine Quadratzahl; das ist aber nur dann möglich, wenn k gleich einer der Zahlen 11, $11\cdot 4$, $11\cdot 9$, ..., $11\cdot n^2$, ... ist. Für $k=11$ erhalten wir $x=66$ und $y=55$, also zwei zweistellige Zahlen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen; denn es gilt

$$x+y=66+55=121=11^2$$

und $\frac{1}{5}x=\frac{66}{5}$, $\frac{6}{25}y=\frac{6\cdot 55}{25}=\frac{66}{5}$.
Für $k=11\cdot 4=44$ erhalten wir $x=264$ und $y=220$; diese Zahlen erfüllen nicht mehr die Bedingungen der Aufgabe, da sie bereits dreistellig sind. Entsprechendes gilt für $k=11\cdot n^2$ mit $n>2$.
Es gibt also genau ein geordnetes Paar von natürlichen Zahlen, das die gestellten Bedingungen erfüllt, nämlich (66, 55).

W 8 ■ 608 Für $a=1$ erhalten wir $f(a)=a^a(100-a^a)=99$; für $a=2$ erhalten wir $f(a)=2^2(100-2^2)=4(100-4)=384$;
also Zahlen, die nicht vierstellig sind.
Für $a=3$ erhalten wir $f(a)=3^3(100-3^3)$ $=27(100-27)=1971$. Diese Zahl ist vierstellig und erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.
Für $a>3$ erhalten wir $a^a \geqq 4^4=256$, also $100-a^a \leqq 100-256<0$,
d. h., $f(a)<0$, also keine weiteren Lösungen.
Es gibt also genau eine vierstellige Zahl, die die obigen Bedingungen erfüllt, nämlich die Zahl 1971.

* 8 * 609 a) Es seien M der Mittelpunkt und r der Radius des Kreises k, a die Länge der Seiten des Quadrats $ABCD$. Dann gilt, da das Dreieck MCD rechtwinklig ist, nach dem Satz des Pythagoras
$r^2+r^2=a^2$, also $r^2=\frac{a^2}{2}$ (vgl. d. Abb.)



Der Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ ist gleich $A_1=a^2$. Der Flächeninhalt des Kreises k ist gleich $A_2=\pi r^2=\frac{\pi}{2}a^2$. Der Flächeninhalt eines jeden Halbkreises über einer Quadratseite ist gleich $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}a^2$, also die Summe dieser vier Flächeninhalte gleich $A_3=\frac{\pi}{2}a^2$.
Wir erhalten daher die Summe der Flächeninhalte der vier von den Punkten A, B, C, D begrenzten Segmente des Kreises k, indem wir von dem Flächeninhalt des Kreises k den Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ subtrahieren:

$$A_2-A_1=\frac{\pi}{2}a^2-a^2.$$

Die Summe der Flächeninhalte der vier „Mondsicheln" ist daher

$$A_3-(A_2-A_1)=\frac{\pi}{2}a^2-\left(\frac{\pi}{2}a^2-a^2\right)=a^2,$$

d. h., die Summe der Flächeninhalte der vier „Mondsicheln" ist *gleich* dem Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$.
b) Damit haben wir gleichzeitig diese Summe, die gleich a^2 ist, durch die Seitenlänge a des Quadrats $ABCD$ ausgedrückt.

W 9 ■ 612 Wir formen die gegebene Zahl zunächst so um, daß der Nenner des ersten Summanden rational wird (durch Erweiterung mit $5+\sqrt{2}$) und erhalten dann weiter

$$z=\frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}-\frac{10}{23}\sqrt{2}=\frac{(5+\sqrt{2})^2}{(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})}-\frac{10}{23}\sqrt{2}$$
$$=\frac{25+10\sqrt{2}+2}{25-2}-\frac{10\sqrt{2}}{23}$$
$$=\frac{25+10\sqrt{2}+2-10\sqrt{2}}{23}=\frac{27}{23},$$

d. h., die Zahl z ist rational, weil sie sich als Quotient der ganzen Zahlen 27 und 23 darstellen läßt.

W 9 ■ 613 Es sei a die Länge der Würfelkante; dann ist der Radius der einbeschriebenen Kugel gleich $\varrho=\frac{a}{2}$, also ihr Rauminhalt gleich $V_1=\frac{4}{3}\pi\varrho^3=\frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8}=\frac{\pi}{6}a^3$.
Ferner ist der Radius der *umbeschriebenen* Kugel gleich der halben Länge der Körperdiagonale des Würfels, also gleich $r=\frac{a}{2}\sqrt{3}$.
Daher ist der Rauminhalt gleich

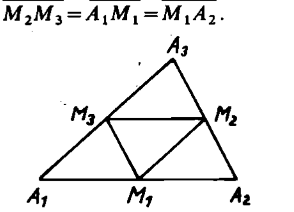
$$V_2=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8}3\sqrt{3}=\frac{\pi}{2}a^3\sqrt{3}.$$

Die Rauminhalte der beiden Kugeln verhalten sich daher wie

$$V_1 : V_2=\left(\frac{\pi}{6}a^3\right) : \left(\frac{\pi}{2}a^3\sqrt{3}\right)$$
$$\frac{1}{3} : \sqrt{3}=1 : (3\sqrt{3})\approx 1 : 5{,}196.$$

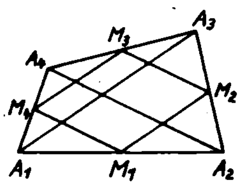
Der Rauminhalt der umbeschriebenen Kugel ist also etwas mehr als fünfmal so groß wie der Rauminhalt der einbeschriebenen Kugel.

* 9 * 614 a) Aus $\overline{A_1M_1} : \overline{M_1A_2} = \overline{A_1M_3} : \overline{M_3A_3}=1 : 1$ folgt $M_1M_3 \parallel A_2A_2$ und weiter $\overline{M_1M_3} : \overline{A_2A_3}=1 : 2$, also $\overline{M_1M_3}=\overline{A_2M_2}=\overline{M_2A_3}$ (vgl. Abb. 1).
Analog erhalten wir $\overline{M_1M_2}=\overline{A_1M_3}=\overline{M_3A_3}$ und $\overline{M_2M_3}=\overline{A_1M_1}=\overline{M_1A_2}$.



Da die Punkte M_1, M_2, M_3 gegeben sind, läßt sich das Dreieck $M_3M_2A_3$ aus den drei Seiten $\overline{M_3M_3}$, $\overline{M_2A_3}=\overline{M_1M_3}$ und $\overline{A_3M_3}=\overline{M_1M_2}$ konstruieren. Durch Verlängerung der Strecke $\overline{A_3M_3}$ über M_3 hinaus um sich selbst erhalten wir den Punkt A_1 und analog durch Verlängerung der Strecke $\overline{A_3M_2}$ über M_2 hinaus um sich selbst den Punkt A_2. Damit haben wir das gesuchte Dreieck $A_1A_2A_3$ konstruiert und gleichzeitig festgestellt, daß es genau ein Dreieck mit den verlangten Eigenschaften gibt.
b) Aus $\overline{A_1M_1} : \overline{M_1A_2}=\overline{A_1M_4} : \overline{M_4A_4}=1 : 1$ folgt $M_1M_4 \parallel A_2A_4$ (vgl. Abb. 2). Analog erhalten wir $M_2M_3 \parallel A_2A_4$ und $M_1M_2 \parallel M_3M_4 \parallel A_1A_3$. Das gesuchte Viereck existiert also nur dann, wenn die gegebenen Seitenmitten M_1, M_2, M_3, M_4 Eckpunkte eines Parallelogramms sind.
Zur Konstruktion des gesuchten Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ können wir jetzt den Punkt A_1 beliebig annehmen, jedoch so, daß er zwi-

schen den parallelen Geraden M_1M_2 und M_3M_4 liegt und von der Geraden M_1M_4 einen kleineren Abstand als diese Gerade von der Geraden M_2M_3 hat. (Sonst könnten nämlich die Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 nicht die Seitenmitten des gesuchten Vierecks sein.) Jetzt verlängern wir die Strecke $\overline{A_1M_1}$ über M_1 hinaus um sich selbst bis zum Punkt A_2 und die Strecke $\overline{A_1M_4}$ über M_4 hinaus bis zum Punkt A_4. Die Verbindungsgeraden A_2M_2 und A_4M_3 schneiden sich im Punkt A_3. Dann ist $A_1A_2A_3A_4$ ein Viereck mit den verlangten Eigenschaften. Denn es gilt
$\overline{M_1M_4} \parallel \overline{A_2A_4} \parallel \overline{M_2M_3}$ und daher
$\overline{M_2M_3} : \overline{A_2A_4} = \overline{M_1M_4} : \overline{A_2A_4} = 1 : 2$.



Also sind M_2 und M_3 die Mittelpunkte der Seiten $\overline{A_2A_3}$ bzw. $\overline{A_3A_4}$. Ferner sind nach Konstruktion M_1 und M_4 die Mittelpunkte der Seiten $\overline{A_1A_2}$ bzw. $\overline{A_4A_1}$. Das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ hat daher die verlangten Eigenschaften.
Nun konnten wir den Punkt A_1 beliebig (mit den obigen Einschränkungen) annehmen. Die Aufgabe b) hat daher im Gegensatz zur Aufgabe a) unendlich viele Lösungen.

W 10/12 ■ 616 a) Wir erhalten bei Anwendung der Näherungsformel für das Volumen des pyramidenstumpfförmigen Teils des Zeltes

$$V_1' = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 h_1 = 2{,}725^2 \cdot 1{,}7\ \text{m}^3 \approx 12{,}62\ \text{m}^3.$$

Ferner beträgt das Volumen der aufgesetzten Pyramide

$$V_2 = \frac{b^2 h_2}{3} = \frac{2{,}15^2 \cdot 0{,}5}{3}\ \text{m}^3 \approx 0{,}77\ \text{m}^3.$$

Für das Volumen des Zeltes erhalten wir daher den Näherungswert
$V' = V_1' + V_2 \approx 13{,}39\ \text{m}^3$.
b) Bei Anwendung der genauen Formel erhalten wir für das Volumen des pyramidenstumpfförmigen Teils des Zeltes

$$V_1 = \frac{h_1}{3}(a^2 + ab + b^2)$$
$$= \frac{1{,}7}{3}(3{,}3^2 + 3{,}3 \cdot 2{,}15 + 2{,}15^2)\ \text{m}^3$$
$$= \frac{1{,}7 \cdot 22{,}61}{3}\ \text{m}^3 \approx 12{,}81\ \text{m}^3,$$

also für das Volumen des Zeltes
$V = V_1 + V_2 \approx (12{,}81 + 0{,}77)\ \text{m}^3 \approx 13{,}58\ \text{m}^3$.
Der absolute Fehler beträgt also bei der Anwendung der Näherungsformel
$V - V' \approx (13{,}58 - 13{,}39)\ \text{m}^3 \approx 0{,}19\ \text{m}^3$.
Daraus erhalten wir den relativen Fehler

$$\frac{V - V'}{V} \approx \frac{0{,}19}{13{,}58} \approx 0{,}014, \text{ d. s. } 1{,}4\,\%.$$

Der bei der Anwendung der Näherungsformel entstandene Fehler ist also verhältnismäßig klein und kann bei derartigen praktischen Berechnungen vernachlässigt werden.

W 10/12 ■ 617 Wegen (2) ist $k \neq 0$. Durch Multiplikation mit k^2 erhalten wir aus (2)
$kx + 5k^2y = 2k^2$. Ferner folgt aus (1) (3)

$$-kx + 3y = -18, \qquad (4)$$

also durch Addition von (3) und (4)

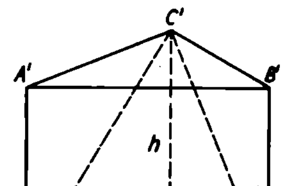
$$y(5k^2 + 3) = 2k^2 - 18, \quad y = \frac{2(k^2 - 9)}{5k^2 + 3} \qquad (5)$$

Ferner erhalten wir aus (2)

$$x = k(2 - 5y) = k\left(2 - \frac{10(k^2 - 9)}{5k^2 + 3}\right) = \frac{96k}{5k^2 + 3} \qquad (6)$$

Wegen $5k^2 + 3 > 0$ gilt $y < 0$ genau dann, wenn $k^2 < 9$, also $-3 < k < 3$ ist, also für ganzzahlige k nur in den Fällen $k = -2, -1, 0, 1, 2$.
Andererseits gilt wegen (6) $x < 0$ nur für $k < 0$.
Daher hat das gegebene Gleichungssystem negative rationale Lösungen nur für $k = -2$ und $k = -1$.

* 10 * 618 Da die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gleichseitig und einander kongruent sind, gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$. Wegen $\overline{CC'} = h$ folgt ferner nach dem Satz des Pythagoras
$\overline{AC'}^2 = \overline{BC'}^2 = a^2 + h^2$ (vgl. d. Abb.).



Gilt nun $\sphericalangle AC'B = 45°$, so folgt aus der Anwendung des Kosinussatzes in dem Dreieck ABC'

$$a^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{BC'}^2 - 2\,\overline{AC'} \cdot \overline{BC'} \cdot \cos 45° \qquad (1)$$
$$a^2 = (a^2 + h^2) + (a^2 + h^2) - 2(a^2 + h^2)\,\frac{1}{2}\sqrt{2},$$
$$a^2 = (a^2 + h^2)(2 - \sqrt{2}).$$

Hieraus erhalten wir, indem wir durch a^2 dividieren,

$$1 = \left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)(2 - \sqrt{2}), \qquad (2)$$
$$1 + \frac{h^2}{a^2} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}. \text{ Daraus folgt}$$
$$\frac{h^2}{a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ also } \frac{h}{a} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}. \qquad (3)$$

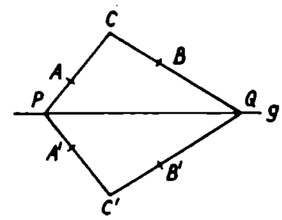
Andererseits folgt auch, wie man durch den Rückschluß von (3) auf (1) leicht bestätigt, aus $h : a = 1 : \sqrt[4]{2}$ $\sphericalangle AC'B = 45°$.
Es gilt also $\sphericalangle AC'B = 45°$ genau dann, wenn

$$h : a = 1 : \sqrt[4]{2} \approx 1 : 1{,}189.$$

5 ▲ 621 Die Lösung ist der abgebildeten Tabelle zu entnehmen.

Name	Anzahl der Murmeln	Lösung
Klaus	$x+9$	23
Karin	$x+7$	21
Ute	$x+3$	17
Horst	x	14
Sabine	$x+8$	22
insges.	$5x+27=97$ $5x=70$ $x=14$	

5 ▲ 622 Wir zeichnen die Verbindungsgerade der Punkte A und C; sie schneidet die Symmetrieachse g im Punkte P. Dann zeichnen wir die Gerade durch die Punkte P und A'. Die nun zu zeichnende Verbindungsgerade der Punkte B und C schneidet die Symmetrieachse g im Punkte Q. Der Schnittpunkt der Geraden PA' mit der zu ziehenden Geraden QB' ist der gesuchte Bildpunkt C'.



W 5 ■ 623 Aus $44 - 12 = 32$ folgt, daß im zweiten Falle der Verteilung 32 Äpfel mehr als im ersten Falle verteilt worden wären. Da dann jeder Schüler $6 - 4 = 2$ Äpfel mehr erhalten hätte, gilt $32 : 2 = 16$, das heißt, es beteiligten sich 16 Schüler an der Apfelernte. Aus $16 \cdot 4 + 44 = 108$ oder $16 \cdot 6 + 12 = 108$ folgt, daß sich 108 Äpfel in dem Korbe befanden.

W 5 ■ 624 Am Theaterbesuch beteiligten sich insgesamt 144 Schüler, denn $29 + 115 = 144$. In jedem der drei Busse saßen 48 Schüler, denn $144 : 3 = 48$. Es sei x die Anzahl der Mädchen, die im ersten Bus fuhren, dann saßen in diesem Bus $15 \cdot x$ Jungen, also $x + 15x = 16x$ Schüler. Aus $16x = 48$ folgt $x = 3$. Im ersten Bus saßen demnach 3 Mädchen und 45 Jungen. Es sei y die Anzahl der Mädchen, die mit dem zweiten Bus reisten, dann saßen in diesem Bus $y + 20$ Jungen, also insgesamt $2y + 20$ Schüler. Aus $2y + 20 = 48$ folgt $y = 14$. Im zweiten Bus fuhren 14 Mädchen und 34 Jungen. Aus $29 - 3 - 14 = 12$ und $115 - 45 - 34 = 36$ folgt, daß mit dem dritten Bus 12 Mädchen und 36 Jungen reisten.

* 5 * 625 Der Übersicht halber fertigen wir uns eine Tabelle an.

	Sorte A	Sorte B	Sorte C	Preis
Elke	5		30	3,50 M
Doris	8	20		5,20 M
Helga	7	20	30	6,30 M
insges.:	20	40	60	15,00 M

Elke und Doris kauften zusammen
13 Stück der Sorte A, 20 Stück der Sorte B, 30 Stück der Sorte C für 8,70 M.
Helga hingegen erwarb
7 Stück der Sorte A, 20 Stück der Sorte B, 30 Stück der Sorte C für 6,30 M.
Demnach kosten sechs Briefmarken der Sorte A ($8{,}70 - 6{,}30 = 2{,}40$) genau 2,40 M, also eine Briefmarke 0,40 M.
Aus $3{,}50 - 2{,}00 = 1{,}50$ und $150 : 30 = 5$ folgt, daß jede Briefmarke der Sorte C 0,05 M kostete. Aus $5{,}20 - 3{,}20 = 2{,}00$ und $200 : 20 = 10$ folgt, daß jede Briefmarke der Sorte B 0,10 M kostete.

6▲626 Die möglichen Fälle der unterschiedlichen Preise der bestellten Artikel sind in der abgebildeten Tabelle zusammengestellt.

bar sein; das trifft aber nur für 5,10 M zu. Die Einzelpreise der Artikel lauten also 12,— M, 14,— M, 18,— M. Die Leihgebühr für einen Mietbehälter beträgt 1,70 M.

Preis in M	12,—	12,—	12,—	12,—	12,—	12,—	14,—
je Artikel	14,—	14,—	14,—	14,—	16,—	16,—	16,—
	16,—.	18,—	20,—	22,—	18,—	20,—	18,—
	42,—	44,—	46,—	48,—	46,—	48,—	48,—
Leihgebühr	7,10	5,10	3,10	1,10	3,10	1,10	1,10
Gesamtbetrag	49,10	49,10	49,10	49,10	49,10	49,10	49,10

Da für jeden der drei Mietbehälter die gleiche Leihgebühr erhoben wurde, muß der Gesamtbetrag für Leihgebühren durch 3 teilbar sein; das trifft aber nur für 5,10 M zu.

6▲627 Jens habe x kubanische Briefmarken gesammelt; an Hand des Aufgabentextes läßt sich folgende Tabelle aufstellen:

Länder	Anzahl der Marken	Lösung
Kuba	x	18 Briefmarken
Rumänien	$3x$	54
Sowjetunion	$4\cdot 3x=12x$	216
Polen	$x+3x+9=4x+9$	81
DDR	$x+3x+12x+4x+9=20x+9$	369
Ungarn	$12x:2-9=6x-9$	99
insgesamt	$46x+9=837$	837
	$46x=828$	
	$x=\ 18$	

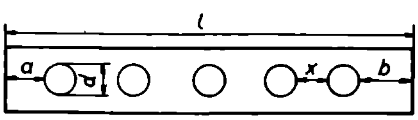
W 6 ■ 628 Uwe habe sich die Zahl x gemerkt, und n sei das berechnete Endergebnis. Auf Grund der Anweisungen hat er folgende Rechenoperation auszuführen:

$$[(x\cdot 5+2)\cdot 4+3]\cdot 5=n,$$
$$(5x+2)\cdot 20+15=n,$$
$$100x+40+15=n,$$
$$100x+55=n.$$

Die gemerkte Zahl x erhält man, wenn man die letzten beiden Ziffern (55) im errechneten Ergebnis n wegläßt.
Beispiel: $n=1\,755$, $x=17$.

W 6 ■ 629 Es sei n die Anzahl der Bohrlöcher; sie besitzen untereinander $n-1$ Abstände. Aus der nachfolgenden Abbildung läßt sich die Struktur der allgemeingültigen Gleichung für die Länge x des Abstandes zweier benachbarter Bohrlöcher leicht bestätigen.

$$x=\frac{l-(a+b+n\cdot d)}{n-1}$$



Zahlenbeispiel:

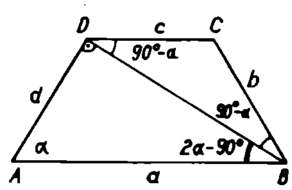
$$x=\frac{310-(10{,}2+22+5\cdot 35)}{5-1}\,\text{mm},$$
$$x=25{,}7\ \text{mm}.$$

Der Abstand zweier benachbarter Bohrlöcher beträgt 25,7 mm.

* 6 * 630 Aus dem 5. Satz des Aufgabentextes folgt: Herr Müller ist weder Sportlehrer noch Mathematiklehrer, also Geschichtslehrer.

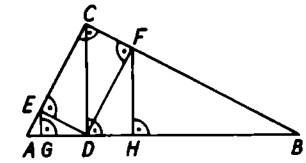
Aus dem 6. Satz folgt: Herr Müller heißt mit Vornamen Klaus und wohnt in Demmin. Herr Palm heißt weder Klaus noch Kurt, also Otto. Herr Palm ist nicht Mathematiklehrer, also Sportlehrer. Damit ist Herr Schulz Mathematiklehrer, er hat den Vornamen Kurt und wohnt in Anklam. Deshalb ist Herr Palm in Neustrelitz wohnhaft.

7▲631 In dem abgebildeten Trapez $ABCD$ sei $AB \parallel CD$, $b=d$ und $a>c$. Aus diesen Voraussetzungen folgt, daß Winkel $\sphericalangle BCD$ größer als 90° ist. Deshalb kann nur das Dreieck ABD rechtwinklig sein, und es gilt $\sphericalangle ADB=90°$. Wegen $\sphericalangle BCD>90°$ kann das Dreieck DBC nur dann gleichschenklig sein, wenn $\sphericalangle BDC=\sphericalangle DBC$ gilt. Es sei $\sphericalangle BAD=\alpha$, dann ist $\sphericalangle ADC=180°-\alpha$ und $\sphericalangle CDB=180°-\alpha-90°=90°-\alpha$, also auch $\sphericalangle DBC=90°-\alpha$. Aus $\sphericalangle ABC=\alpha$ und $\sphericalangle ABD=\sphericalangle ABC-\sphericalangle DBC$ folgt $\sphericalangle ABD=\alpha-(90°-\alpha)=2\alpha-90°$.



Für die Winkelsumme des Dreiecks ABD gilt demnach
$\alpha+2\alpha-90°+90°=180°$, also $\alpha=60°$. Damit ergeben sich die Trapezwinkel zu $\alpha=\beta=60°$ und $\gamma=\delta=120°$. Da das rechtwinklige Dreieck ABD die spitzen Winkel 30° und 60° besitzt, gilt ferner $\overline{AB}=2\cdot\overline{AD}$.
Für die Trapezseiten ergibt sich somit $a:b:c:d=2:1:1:1$.

7▲632 Es sei $\overline{AB}=c$; wegen $\sphericalangle CAB=60°$ gilt $\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{c}{2}$. Für das Dreieck ADC gilt wegen $\sphericalangle CAD=60°$, ferner $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{c}{4}$.
$\overline{DB}=\overline{AB}-\overline{AD}=c-\frac{c}{4}=\frac{3c}{4}$.



Wegen $\overline{EC}=\overline{DF}$ gilt $\overline{DH}=\frac{1}{2}\overline{EC}$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}-\frac{c}{8}\right)=\frac{3c}{16}$. Daraus folgt:
$\overline{HB}=\overline{DB}-\overline{DH}=\frac{3}{4}c-\frac{3c}{16}=\frac{9}{16}c$: $\overline{AE}+\overline{AH}$
$=\frac{c}{8}+\frac{c}{4}+\frac{3c}{16}=\frac{9}{16}c$, also $\overline{HB}=\overline{AE}+\overline{AH}$.

W 7 ■ 633 Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AED und EBF und des Rechtecks $CDEF$; deshalb gilt

$$\frac{ab}{2}=\frac{y(b-x)}{2}+\frac{x(a-y)}{2}+xy,\quad \text{bzw.}$$
$$ab=y(b-x)+x(a-y)+2xy.$$

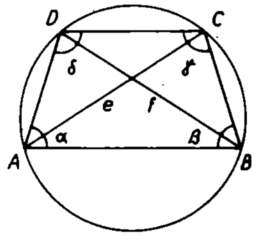
Durch weiteres Umformen der Gleichung erhalten wir

$$ab=by-xy+ax-xy+2xy,$$
$$ab=ax+by.$$

W 7 ■ 634 Wir lösen die Aufgabe mit Hilfe einer Fallunterscheidung.
1) Angenommen in Antwort a) seien alle drei Vornamen richtig; dann sind nur in den Antworten c) und e) jeweils alle Vornamen falsch. Das widerspricht der Voraussetzung, also ist diese Annahme falsch.
2) Angenommen in Antwort b) seien alle drei Vornamen richtig; dann sind nur in den Antworten c) und e) jeweils alle Vornamen falsch. Das widerspricht der Voraussetzung, also ist diese Annahme falsch.
3) Angenommen in Antwort c) seien alle drei Vornamen richtig; dann sind in den Antworten a), b), d), g) jeweils alle Vornamen falsch. Das widerspricht der Voraussetzung, also ist diese Annahme falsch.
4) Angenommen in Antwort d) seien alle drei Vornamen richtig; dann treffen alle Voraussetzungen zu. In Antwort a) ist ein Vorname, in den Antworten b) und e) sind zwei Vornamen, in den Antworten c), f), g) sind drei Vornamen falsch. Die Vornamen der drei Schüler, die einen ersten Preis erhielten, lauten Steffen, Jörg und Udo.
Die noch durchzuführenden weiteren Fallunterscheidungen führen ebenfalls zu Widersprüchen.

* 7 * 635 In der Abbildung sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit den Diagonalen $\overline{AC}=e$, $\overline{BD}=f$ und es gelte $e=f$. Die sich einander gegenüberliegenden Winkel eines Sehnenvierecks ergänzen sich zu 180°, also $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$. Peripheriewinkel, die zu gleich-

langen Sehnen eines Kreises gehören, sind entweder kongruent, oder sie ergänzen sich zu 180°. Wegen $e=f$ gilt deshalb entweder $\alpha=\beta$ oder $\alpha+\beta=180°$.



Im *1. Fall* ($\alpha=\beta$) folgt dann aus $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$

$\gamma=$ und $\alpha+\delta=180°$.

Daher gilt $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, d. h., das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez. Wegen $\alpha=\beta$ ist dieses Trapez gleichschenklig.

Im *2. Fall* ($\alpha+\beta=180°$) folgt aus $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$

$\beta=\gamma$ und $\alpha+\beta=180°$.

Daher gilt $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$, d. h., das Viereck $BCDA$ ist ein Trapez. Wegen $\beta=\gamma$ ist dieses Trapez gleichschenklig.

In jedem Fall ist daher das Viereck $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez, w.z.b.w.

8▲636 1. Angenommen, es gäbe ein geordnetes Paar (a, b) natürlicher Zahlen, so daß die Gleichung (1) erfüllt ist. Dann würde gelten $a \neq 3$, $b \neq 0$ und

$$b^2(a^2-3a+1+3a-9)=36,$$
$$b^2(a^2-8)=36. \qquad (3)$$

Da nach Voraussetzung a und b natürliche Zahlen sind, muß b^2 ein Teiler von 36 sein; daher ist b gleich 1, 2, 3 oder 6.

Nun erhalten wir aus (3) für

$b=1$ $a^2-8=36$, also $a^2=44$,
$b=2$ $a^2-8=9$, also $a^2=17$,
$b=3$ $a^2-8=4$, also $a^2=12$,
$b=6$ $a^2-8=1$, also $a^2=9$.

Für $b=1, 2$ oder 3 ist also a keine natürliche Zahl; für $b=6$ erhalten wir $a=3$, was der Voraussetzung $a \neq 3$ widerspricht.

Daher hat die Gleichung (1) keine Lösung, die den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

2. Angenommen, das geordnete Paar (a, b) natürlicher Zahlen sei eine Lösung der Gleichung (2). Dann gilt $b \neq 0$ und

$$b^2(a^2+3a+1-3a-9)=36,$$
$$b^2(a^2-8)=36.$$

Diese Gleichung stimmt mit der Gleichung (3) überein und hat, wie oben gezeigt wurde, nur die Lösung $a=3$, $b=6$.

Daher hat auch die Gleichung (2) nur eine Lösung, die den Bedingungen der Aufgabe entspricht, nämlich das geordnete Paar (3, 6).

W 8 ■ 637 Wir bezeichnen mit $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ die Anzahl der 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7. Plätze, die unsere Mannschaft erhielt. Dann gilt, da unsere Mannschaft insgesamt 102 Punkte erhielt,

$$y=7x_1+6x_2+5x_3+4x_4+3x_5+2x_6+x_7=102 \qquad (1)$$

und, da in 20 Disziplinen gekämpft wurde,

$$z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=20. \qquad (2)$$

Ferner gilt nach Voraussetzung

$$x_6=0<x_7<x_3<x_5<x_4=x_2<x_1. \qquad (3)$$

Daraus folgt

$$x_6=0,\ x_7\geqq 1,\ x_3\geqq 2,\ x_5\geqq 3,$$
$$x_4=x_2\geqq 4,\ x_1\geqq 5. \qquad (4)$$

Würde nun in (4) jeweils das Gleichheitszeichen gelten, so wäre

$y=7\cdot 5+6\cdot 4+5\cdot 2+4\cdot 4+3\cdot 3+2\cdot 0+1=95$, also wegen (1) um 7 Einheiten zu klein, und

$z=5+4+2+4+3+0+1=19$, also wegen (2) um 1 Einheit zu klein.

Daher muß eine der Zahlen x_i um 1 erhöht werden; das kann aber nur für x_1 zutreffen, da y um 7 Einheiten zu klein ist.

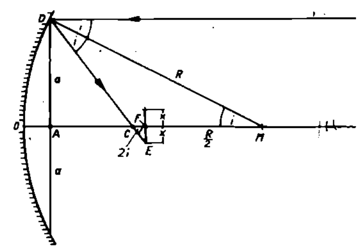
Wir erhalten also

$x_1=6$, $x_2=4$, $x_3=2$, $x_4=4$, $x_5=3$, $x_6=0$, $x_7=1$.

Die Mannschaft der DDR erkämpfte also in Stockholm sechs 1. Plätze, vier 2. Plätze, zwei 3. Plätze, vier 4. Plätze, drei 5. Plätze und einen 7. Platz.

Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß die Gleichungen (1) und (2) sowie die Ungleichungen (3), also alle Bedingungen der Aufgabe, erfüllt sind.

Abb. zu S. 68 (Physik-Olympiade)



Lösungen zu alpha-heiter

Denk dir eine Zahl

Wenn man alle Zahlen, die in der Tabelle vorkommen, in das Zweiersystem überführt, sieht man, daß die an der Spitze jeder Tabelle angeführten Zahlen der Reihe nach folgende sind:

2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 und 2^5. In der ersten Tabelle kommen gerade die Zahlen vor, die im Zweiersystem das Glied 2^0 enthalten, in der zweiten Tabelle gerade diejenigen mit dem Glied 2^1 usw.; in der letzten, sechsten Tabelle, sind gerade jene Zahlen, die das Glied 2^5 enthalten. Es genügt also, die ersten Zahlen der betreffenden Tabellen zu addieren, um die gedachte Zahl festzustellen.

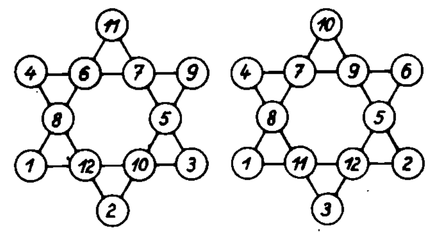
Beispiel: Unser Freund mag sich die Zahl 39 gedacht haben. Diese Zahl findet man in der ersten, zweiten, dritten und sechsten Tabelle. Man addiert also $1+2+4+32=39$. Man sieht, daß die Summe $1+2+4+32$ oder $2^0+2^1+2^2+2^5$ oder $1\cdot 2^5+0\cdot 2^3+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0$ die Niederschrift der Zahl 39 im Zweiersystem ist.

Ersetze Buchstaben durch Zahlen

1 573	3 681	5 819
573	681	819
73	81	19
3	1	9
2 222	4 444	6 666

Für die Zahl 8 (8 888) gibt es entsprechend den gestellten Bedingungen keine Lösung. Dagegen würde für $a=d=7$, $b=9$, $c=2$ das Ergebnis $e=8$ möglich.

Der Zahlenstern



Damen auf dem Schachbrett

Die Damesteine stellt man z. B. auf die Felder c6, e3, f8, h5. Die Aufgabe hat mehrere Lösungen. Man kann die Damesteine z. B. auf die Felder d6, e5, f4, g8, h7 stellen.

Mit den Damesteinen können im ganzen 1 456 Züge gemacht werden.

Die Zahl 3 fünfmal verwendet

$11=3\cdot 3+3-\frac{3}{3}$; $57=3^3+3^3+3$

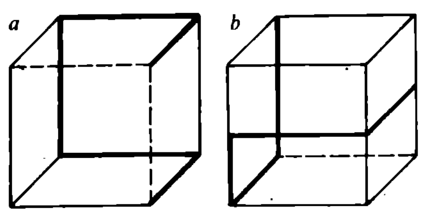
Es sind noch andere Lösungen möglich.

Kryptarithmetik

1 8 9 · 9 9	1 4 3 · 7 7
1 7 0 1	1 0 0 1
1 7 0 1	1 0 0 1
1 8 7 1 1	1 1 0 1 1

Aufgepaßt

a b



Wer hat die Scheibe eingeschlagen?

Emil wird als Übeltäter von Karl und Rudolf, Johann wieder von Karl und Rudolf und Karl von Emil und Rudolf angegeben. Keiner dieser drei Jungen kann also der Täter sein, denn nach der Erklärung des Lehrers muß der Schuldige von den drei Verhörten genannt werden. Rudolf wurde von Emil, Johann und Karl, d. h. von drei Jungen beschuldigt. Er hat also die Fensterscheibe eingeschlagen.

Leser schreiben an alpha

Auf Initiative einiger Schüler und der Fachlehrer für Mathematik und Physik wurde an unserer Schule eine Wandzeitung der *Jungen Mathematiker und Physiker* eingerichtet. Die Schüler, welche sich am aktivsten bei der Lösung der Aufgaben zeigen, werden mit Buchprämien ausgezeichnet. Ich finde, das sollten alle Schulen tun.

Jörg Vetter, W.-Pieck-EOS, Großenhain

Wir sind Schüler der Klasse 4. Im Mathematikzirkel unserer Schule haben wir im Kollektiv die Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 5 gelöst. Anbei folgt der Stoß der Lösungen.

Judith Klinkert, A.-Diesterweg-OS, Nordhausen

Ich finde, man sollte öfter Olympiadeteilnehmer vorstellen und von ihnen eine Aufgabe veröffentlichen. *M. Pokrandt, Cottbus*

Mein Sohn (18 Jahre) und ich (als Vater) finden Ihre Zeitschrift sehr anregend. Schade, daß es in meiner Jugend keine solche Zeitschrift gab. *K. Kühn, Berlin*

Ich schlage vor, die Lösungen der Aufgaben der Kreis-, Bezirks- und DDR-Olympiade in Heft 4 zu veröffentlichen. Damit ist eine gute Vorbereitung auf die nächste Olympiade gewährleistet. *Claus Scheffler, Zittau (Kl.6)*

Wir haben hier einen *alpha-Club Junger Mathematiker* an der Schule. Er umfaßt 16 Mitglieder und besteht bereits zwei Jahre. Dank unserer Arbeit und Eurer Hilfe, nämlich der *alpha*-Zeitschrift, haben wir auf der letzten Kreisolympiade sehr gut abgeschnitten. *Michael Gehrmann, POS Guevezow, Kr. Demmin*

Eifrigster ausländischer Teilnehmer ist István Mátrai aus Szombathely (Ungarische VR). Er beschäftigt sich mit sechs Sprachen. *alpha* hilft nicht nur zur Erweiterung seiner mathematischen, sondern auch seiner sprachlichen Kenntnisse, d. Red.

Als ich die Zeitschrift das erste Mal bekam, hatte ich mich nicht viel für sie interessiert. Wenn man aber mit *alpha* richtig arbeitet, kann man sehr viel lernen.

Monika Modebeck, Torgelow (Kl. 6)

alpha gefällt mir sehr gut. Ich würde sie jedem Mathematikinteressierten empfehlen. Sie eignet sich sehr gut zum Selbststudium und stellt eine gute Vorbereitung und Ergänzung zu den Mathematikolympiaden dar.

Joachim Jaensch, Mittweida

Man könnte in *alpha* technische und physikalische Probleme von der mathematischen Seite her betrachten.

Hans-Gert Gräbe, Erfurt (Kl. 9)

So mühelos manche der eingereichten Lösungen auch erscheinen mögen, sie haben angestrengtes Denken, Fleiß, Ausdauer, einigen Ehrgeiz und Zeit verlangt. Für einen nicht mehr jungen Laien, dem im Beruf manches abverlangt wird, ist es ein echtes Opfer, an diesem Wettbewerb teilzunehmen. Es wird aber gern gebracht, besonders dann, wenn man des Verständnisses für diese Art der Freizeitgestaltung innerhalb der Familie gewiß sein kann.

K. Heym, PGH Ausbau, Bad Liebenstein

Seit der 6. Klasse besuche ich in unserem Pionierhaus „Juri Gagarin" einen Mathematikzirkel, der für die Besten im Fach Mathematik im Bezirk Karl-Marx-Stadt gegründet wurde. Dort arbeiten wir auch mit *alpha* und beteiligen uns am Wettbewerb. Den Mitgestaltern der *alpha* möchte ich meinen Dank aussprechen und sagen: „Weiter so!"

Sabine Klemer, Karl-Marx-Stadt (Kl. 7)

Wenn auch Ihre Aufgaben nicht immer leicht sind, so bemühe ich mich, sie doch zu lösen. Die regelmäßige Beschäftigung mit Ihrer Zeitschrift hat mir auch geholfen, im Mathematikunterricht gute Leistungen zu erreichen. Gefallen hat mir die EDV-Serie. Ich kann mir somit schon ein Bild von meinem künftigen Beruf als Facharbeiter für EDV machen.

Rolf Becker, Erfurt (Kl. 10)

Bitte mehr Artikel ab Klasse 5!

B. Kühmstädt, Erfurt (Kl. 6)

Mich würde interessieren, wie einzelne Arbeitsgemeinschaften arbeiten, wie sie sich auf Olympiaden vorbereiten. Sicher könnten andere AGs sich neue Anregungen von erfolgreichen AGs holen oder mit ihnen in Erfahrungsaustausch treten.

Sabine Dittrich, Bernsbach (Kl. 10)

Fragt mehr junge Leute, die sich mit Mathematik beschäftigen, wie sie ihre Zeit einteilen, wie sie an Aufgaben herangehen, wie sie sich individuell und im Kollektiv mathematisch weiterbilden!

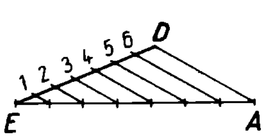
Klaus Schönefeld, Weimar (Kl. 12)

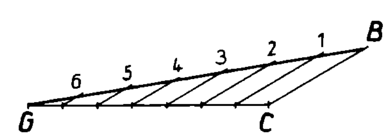
Es macht mir einfach Freude, Aufgaben aus *alpha* zu lösen. Durch diese Zeitschrift habe ich mich so richtig für die Mathematik begeistert. *Norbert Littig, Lichtenberg*

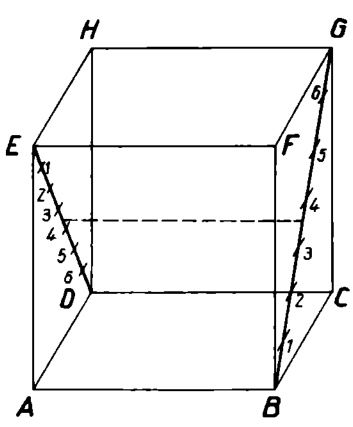
Um den Wettbewerb weiter zu popularisieren, tragen die Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb ihr Abzeichen, das sie von der Redaktion erhielten.

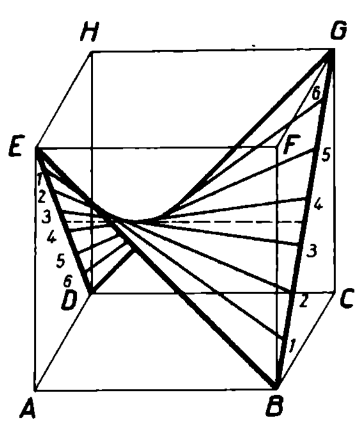
OS Fredersdorf, Kreis Belzig

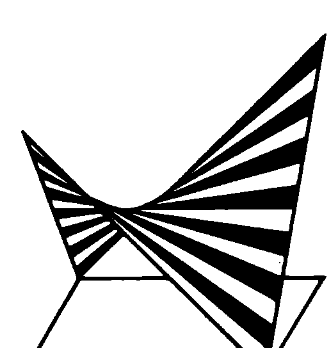
Mit Zirkel und Zeichendreieck











Kurzer Abriß der

Geschichte der Mathematik

der Tschechoslowakei

Lange vor der Gründung eines selbständigen Staates (1918) wirkten tschechische und slowakische Gelehrte auf dem heutigen Gebiet der ČSSR und trugen zur Entwicklung der mathematischen Wissenschaften bei. Zum besseren Verständnis für ihre fachliche und politische Tätigkeit wollen wir uns zunächst an einige geschichtliche Ereignisse erinnern.
Als erstes Zeichen einer beginnenden wissenschaftlichen Tätigkeit kann man die Gründung der Prager Karls-Universität (älteste Universität in Mitteleuropa) im Jahr 1348 ansehen. An ihr wirkten neben tschechischen und deutschen Wissenschaftlern zeitweilig auch weitere ausländische Gelehrte. Es bestanden von Anfang an vielfältige Beziehungen zu anderen Universitäten und Ländern. Ähnliche ökonomische Bedingungen beiderseits des Erzgebirges brachten auch etwa die gleiche wirtschaftliche und kulturelle Entwicklung der Bewohner in Böhmen und Sachsen hervor. Auch die älteste Technische Hochschule Mitteleuropas entstand in Prag; sie ging 1718 aus einer militärtechnischen Lehranstalt hervor. Unter der Leitung von Gerstner, einem international anerkannten Ingenieur, wurde sie 1815 eine selbständige Höhere Technische Lehranstalt und führte ab 1864 die Bezeichnung Polytechnisches Institut; ihr Statut wurde das Muster für alle Höheren Technischen Lehranstalten in Österreich-Ungarn. Große Bedeutung für die Entwicklung der angewandten Mathematik hatten auch die Bergbauakademie in Příbram (Böhmen) und Štiavnica (Slowakei), an der zeitweilig auch Christian Doppler wirkte.
Für die Entwicklung der Mathematik auf dem Gebiet der ČSSR haben neben einzelnen Gelehrten besonders auch Vereinigungen eine große Bedeutung erlangt. An erster Stelle ist hier die Böhmische Gelehrte Gesellschaft zu nennen, die 1784 gegründet wurde und später die Bezeichnung Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften führte. Sie errang international bald einen sehr guten Ruf, und zu ihren ausländischen Mitgliedern zählte u. a. Cauchy. Für die Entwicklung der Schulmathematik erlangte die 1862 gegründete Gesellschaft der böhmischen Mathematiker entscheidende Bedeutung; bei ihrer Gründung führte sie zunächst die Bezeichnung „Verein für freie Vorträge aus der Mathematik und Physik". Wegen ihrer wissenschaftlichen Zielsetzung fand sie jedoch bald die Unterstützung von Hochschullehrern; ihre Entwicklung wurde besonders gefördert durch die sich rasch vergrößernde Bibliothek, die umfangreiche Sammlung ausländischer Zeitschriften und die Herausgabe eigener Zeitschriften und Bücher, darunter der Zeitschrift für Schüler *Rozhledy matematicko-fyzikalni* (Mathematisch-physikalische Umschau). Nach Gründung der selbständigen Republik wurde die heutige Bezeichnung „Gesellschaft der tschechoslowakischen Mathematiker und Physiker" (JČMF) eingeführt.
Durch die Teilung des Prager Polytechnischen Instituts (1869) und die Teilung der Prager Universität (1882) in selbständige tschechische und deutsche Hochschulen sowie die Gründung der Böhmischen Akademie der Wissenschaften (1891), konnte sich zunächst in Böhmen, später auch in Mähren und in der Slowakei ein reges wissenschaftliches Leben entfalten. Jedoch verhinderten die reaktionären Verhältnisse in Österreich-Ungarn, daß sich fortschrittliche Ideen im allgemeinbildenden Schulwesen durchsetzen konnten. Wirklich durchgreifende Reformen wurden erst nach 1948 möglich, als die Entwicklung der ČSR zum sozialistischen Staat gesichert war. Nach diesem geschichtlichen Überblick wollen wir etwas näher auf zwei Persönlichkeiten eingehen: Rudolf Skuherský (1828 bis 1863) und Juraj Hronec (1881 bis 1959).
R. Skuherský wurde in Opočno (Ostböhmen) als Sohn eines Arztes geboren. Nach dem Besuch des Gymnasiums studierte er an der Ständischen Realschule in Prag, die dem Polytechnischen Institut angegliedert war. Sein Mathematiklehrer war *Doppler*, der ihn maßgeblich für sein späteres Wirken beeinflußte. *Skuherský* studierte nach einer Unterbrechung am Polytechnikum in Wien weiter und wurde dort Assistent am Lehrstuhl für Darstellende Geometrie. Er wurde 1852 zum ersten Professor für Darstellende Geometrie am Polytechnischen Institut in Prag berufen. Seine wissenschaftlichen Arbeiten behandelten die Theorie der Projektionsarten (u. a. die orthogonale Parallelperspektive und die orthogonale Projektion auf zwei Ebenen, die keinen rechten Winkel miteinander einschließen); sie entsprachen seiner Absicht, besonders anschauliche Arten der Parallelprojektion zu verwenden. *Skuherský* war aber nicht nur ein hervorragender akademischer Lehrer, sondern zeigte auch ein gutes Verständnis für die gesellschaftliche Entwicklung seiner Zeit. Durch seine Bemühungen, z. B. um die Einführung der tschechischen Sprache beim Unterricht am Polytechnischen Institut, wurde er zum Vorkämpfer des fortschrittlichen tschechischen Bürgertums, das er außerdem seit 1862 als Abgeordneter des Böhmischen Landtages bis zu seinem frühen Tode vertrat.
J. Hronec wurde 1881 in Gočovo (Ostslowakei) geboren, er stammte aus einer Kleinbauernfamilie. Durch die Unterstützung seiner Brüder konnte er das Gymnasium in Rožňava besuchen und studierte anschließend Mathematik an der Universität Clausenburg bei Prof. *Schlesinger*, der ebenfalls aus der Slowakei stammte und ihn für die Theorie der Differentialgleichungen interessierte. *Hronec* arbeitete dann sein ganzes Leben auf diesem Gebiet und widmete ihm den größeren Teil seiner mehr als 30 wissenschaftlichen Arbeiten und Bücher. Er war auch praktisch-pädagogisch tätig und zwar von 1906 bis 1922 am Gymnasium in Kežmarok (Slowakei). Während dieser Zeit war er mehrfach zu Studienaufenthalten im Ausland und promovierte 1912 in Gießen. Er wurde 1923 an die Karls-Universität nach Prag und 1924 als Professor an die TH Brno berufen. 1938 wurde er der erste Rektor der neugegründeten TH Košice, die bald darauf nach Bratislava verlegt wurde.
Er hatte erkannt, daß eine schnellere kulturelle Entwicklung in der Slowakei sich auf eine fruchtbare Zusammenarbeit mit Böhmen und Mähren, aber noch mehr auf die Durchsetzung demokratischer Reformen stützen mußte. Er förderte nach 1945 besonders die Tätigkeit der Slowakischen Akademie der Wissenschaften und den Ausbau der Hochschulen in der Slowakei. Er war Träger hoher staatlicher Orden und vieler Auszeichnungen. In seiner Persönlichkeit verschmolzen Wissenschaftlichkeit und gute organisatorische Fähigkeiten auf wissenschaftlichem, pädagogischem und kulturellem Gebiet zu einer großartigen Einheit.

O. Langer

IMO-Spiegel

I. IMO: SR Rumänien (Sinaia*)
II. IMO: SR Rumänien (Sinaia)
III. IMO: Ungarische VR (Vesprem)
IV. IMO: ČSSR (Budějovice)
V. IMO: VR Polen (Wrocław)
VI. IMO: UdSSR (Moskau)
VII. IMO: DDR (Berlin)
VIII. IMO: VR Bulgarien (Sofia)
IX. IMO: SFR Jugoslawien (Cetinje)
X. IMO: UdSSR (Moskau)
XI. IMO: SR Rumänien (Bukarest)
XII. IMO: Ungarische VR (Keszthely)
XIII. IMO: ČSSR (Žilina)

* Austragungsort der beiden Klausuren

* Quellen: 100 let Jednoty ČMF, Verlag SPN, Praha 1962; Zeitschrift: Matematika ve škole, Jahrgang 14, H. 14; Matematicko-fyzikalný časopis SAV, Jahrgang X, H. 2.

Rückblick auf die XII. IMO

Teilnehmer stellen Aufgaben für *alpha*

▲694 Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD = 90°$. Die in bezug auf die Gerade AB zu der Geraden AC symmetrisch liegende Gerade möge die Gerade BD im Punkt E schneiden. Es ist zu untersuchen, ob der Punkt D stets der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ACE ist.

Prof. Dr. J. Surányi, Vizepräsident der Jury der XII. IMO, Vizepräsident der Mathematischen Gesellschaft János Bolyai u. Chefredakteur der ungarischen Schülerzeitschrift *Középiskola Matematikai Lapok*

▲695 Es seien in der Ebene vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 gegeben, die paarweise voneinander verschieden sind. Durch jeden dieser Punkte ist je eine Gerade g_1, g_2, g_3, g_4 so zu ziehen, daß die Schnittpunkte dieser Geraden Eckpunkte eines Quadrats sind. Die Konstruktion ist nur mit dem Zirkel und dem Lineal auszuführen.

Prof. C. Ottescu, stellv. Delegationsleiter der rumänischen Mannschaft, Sekretär der Mathem. Gesellschaft der SR Rumänien

▲696 Gegeben sei ein rechteckiges Schema, das in m Zeilen und n Spalten $m \cdot n$ Felder enthält, wobei m und n natürliche Zahlen mit $m \geqq 2$ und $n \geqq 2$ sind. In die Felder dieses Schemas sollen reelle Zahlen so eingetragen werden, daß in jedem Teilrechteck dieses Schemas die Summe zweier Zahlen, die sich in den gegenüberliegenden Ecken eines solchen Rechtecks befinden, jeweils gleich sind. (Unter einem Teilrechteck verstehen wir dabei auch das rechteckige Schema selbst.)
Wieviel Zahlen des rechteckigen Schemas muß man mindestens kennen, um aus ihnen alle anderen Zahlen des Schemas eindeutig bestimmen zu können?

Arkadij Klimow, Arsamas (UdSSR), Träger eines 1. Preises der XII. IMO

▲697 Man beweise, daß für drei beliebige positive reelle Zahlen die folgende Behauptung stets zutrifft:
Ist das Produkt dieser drei Zahlen gleich 1 und die Summe dieser drei Zahlen größer als die Summe ihrer reziproken Werte, so ist genau eine dieser drei Zahlen größer als 1.

Aus der Landesolympiade 1970 der UdSSR, überreicht durch J. S. Petrakow, Fachberater der Abteilung pädagogische Hochschulbildung im Min. für Volksbildung der UdSSR

▲698 Die Menge E aller Punkte der Ebene sei so in drei paarweise elementefremde Teilmengen A, B, C (Klassen) zerlegt, daß jeder Punkt von E genau einer dieser Klassen A, B oder C angehört. Ferner sei a eine positive reelle Zahl.
Man beweise, daß es dann stets mindestens zwei Punkte von E gibt, die voneinander den Abstand a haben und der gleichen Klasse angehören.
Man verallgemeinere und beweise diese Aussage auf den Fall, daß die Menge R aller Punkte des dreidimensionalen Raums in vier Klassen A, B, C, D zerlegt ist.

Virginie Stoinova Hristova, Russe; Mitglied der bulgarischen Mannschaft

▲699 In einem Saal mögen sich genau n Personen befinden, wobei n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 2$ ist. Von diesen Personen seien einige miteinander bekannt und andere nicht miteinander bekannt. Dabei setzen wir voraus: Wenn A mit B bekannt ist, so ist auch B mit A bekannt.
Man beweise, daß es unter den n Personen mindestens zwei Personen gibt, die unter den übrigen Personen in dem Saal die gleiche Anzahl von Bekannten haben.
Bemerkung: Die Anzahl der Bekannten, die eine Person unter den übrigen Personen in dem Saal hat, kann auch gleich Null sein.

Helena Husova, Praha; Mitglied der tschechoslowakischen Mannschaft

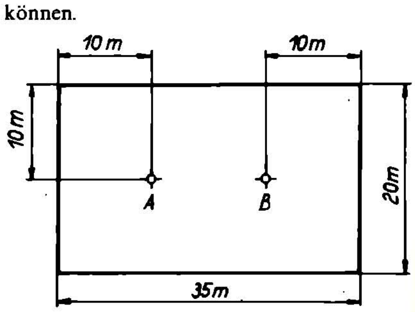
▲700 Es seien α, β, γ die Größen der Winkel eines Dreiecks. Es ist zu beweisen, daß dann stets die folgenden beiden Ungleichungen erfüllt sind:

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{3}{2}, \qquad (1)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geqq \frac{3}{4}. \qquad (2)$$

Angelika Rindler, Spital; Mitglied der österreichischen Mannschaft

▲701 Ein Farmer hat zwei Ziegen, die eine Wiese von rechteckiger Form mit den Seitenlängen 35 m und 20 m abgrasen sollen. Auf der Wiese befinden sich zwei Pfähle A und B, deren Abstand von den beiden nächstgelegenen Rechteckseiten jeweils 10 m beträgt (vgl. die Abb.). Jeder der Pfähle besitzt einen Ring, durch den ein Strick geführt werden kann. Da die beiden Ziegen sehr streitsüchtig sind, sollen sie so an diesem Strick angebunden werden, daß sie niemals zusammentreffen, aber die gesamte Wiese abgrasen können.



Wie müssen die beiden Ziegen an diesem Strick angebunden und wie lang muß dieser Strick gewählt werden?

Bernard Silverman, London; Träger eines 1. Preises der XII. IMO

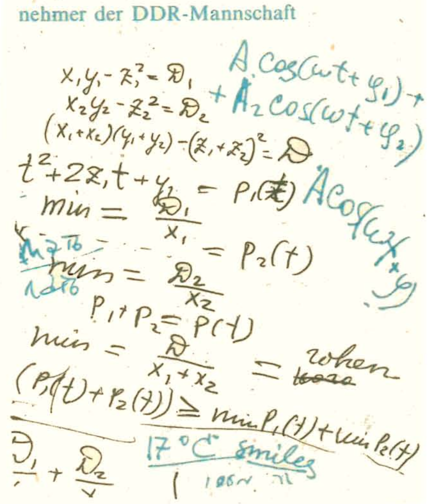
▲702 Von zwei verschiedenen Punkten A und B eines Weges, der neben einer Eisenbahnstrecke verläuft, brechen zwei Schüler zur gleichen Zeit auf und gehen einander entgegen. Zu dem Zeitpunkt, in dem der erste Schüler in dem Punkt A startet, erreicht ihn die Lokomotive eines Eisenbahnzuges, der in Richtung B fährt, und hat ihn nach genau 10 s mit dem letzten Wagen überholt. Nach genau weiteren 6 min erreicht die Lokomotive dieses Zuges den zweiten Schüler; nach genau weiteren 9 s passiert der letzte Wagen dieses Zuges diesen Schüler.
Nach welcher Zeit, gerechnet von dem Start ab, werden sich die beiden Schüler begegnen? Dabei wird vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeiten des Zuges und die der beiden Schüler konstant sind.

Ary Van Tooren, Den Haag; Delegationsleiter der niederländischen Mannschaft; Redakteur der niederländischen Zeitschrift „Pythagoras"

▲703 Wieviel verschiedene vierstellige natürliche Zahlen (in dekadischer Darstellung) gibt es, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
1. Alle Ziffern jeder dieser Zahlen sind paarweise voneinander verschieden;
2. die Quersumme jeder dieser Zahlen ist nicht größer als 22;
3. die größte Ziffer steht jeweils an der ersten Stelle, die zweitgrößte an der letzten Stelle der Zahl.

Urshinzerendin Sanshimjatow/Gombaschawin Nazagdorsh, Delegationsleiter/stellvertr. Delegationsleiter der mongolischen Mannschaft, Mongolische Staatliche Universität Ulan Bator

Zeichen der Freundschaft: Diskussion zu der Lösung einer IMO-Aufgabe mit Aufzeichnungen sowjetischer, schwedischer und Teilnehmer der DDR-Mannschaft



Literatur

Bücher von heute sind morgen Taten

H. Mucke
Anaglyphen – Raumzeichnungen
92 Seiten mit 63 Abbildungen und im Anhang 18 farbige Tafeln mit 59 Anaglyphen sowie 1 Brille. 16,5 cm mal 23,0 cm. 1970. In Halbleinen. 21,00 M
BSB B. G. Teubner, Leipzig

H. Mielke
transpress-Lexikon der Raumfahrt
367 Seiten, 1200 Stichwörter, zahlr. Bildmaterial und Übersichten, 15,0 cm mal 22,0 cm. 1970. Halbleinen. 18,50 M
transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin

H. Körth und E. Förster
Wirtschaftsmathematik für die Berufsbildung
3. neubearbeitete Auflage, 360 Seiten mit zahlreichen Abb., 14,2 cm mal 21,8 cm. 1970. Pappeinband. 10,25 M
Verlag Die Wirtschaft, Berlin

N. W. Efinow
Grundzüge der projektiven Geometrie
Übersetzung aus dem Russischen
212 Seiten, 71 Abbildungen. 1970. Pappeinband. 9,80 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

E. Bürger/G. Wittmar
Was ist, was soll Datenverarbeitung
etwa 176 Seiten, etwa 50 Zeichnungen, 12,5 cm mal 20,0 cm. Pappeinband. Etwa 5,80 M
Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin

Autorenkollektiv
Allgemeine Statistik
532 Seiten, 100 Abbildungen, 135 Tabellen. Ganzleinen. 17,00 M

G. Herfurth
Umgang mit Zufallsgrößen
Teil I: Fehler- und Ausgleichsrechnung
131 Seiten mit 62 Abbildungen, 14,2 cm mal 20,0 cm. 1969. In Halbleinen 15,50 M

Teil II: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik
139 Seiten mit 65 Abbildungen, 14,2 cm mal 20,0 cm. 1969. In Halbleinen 16,50 M
BSB B. G. Teubner, Leipzig

R. Göttner
Was ist – was soll Operationsforschung
344 Seiten, zahlreiche Bilder und Tabellen, 12,4 cm mal 19,5 cm. 1970. Pappeinband, zellophaniert. 6,80 M
Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin

W. Schütz
Michail W. Lomonossow
Biographien hervorragender Naturwissenschaftler
94 Seiten mit 7 Abbildungen. 1971. Kartonniert. Etwa 5,35 M
BSB B. G. Teubner, Leipzig

N. W. Efinow
Über die Grundlagen der Geometrie
Übersetzung aus dem Russischen
236 Seiten, 86 Abbildungen. 9,80 M
VEB Verlag der Wissenschaften, Berlin

Autorenkollektiv
Plakat und Wandzeitung
Schriften zur Kunsterziehung, Band 24
128 Seiten, zahlr. Abb., Bestell-Nr. 172 107 1970. Pappband. 11,30 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin

W. Göhler
Höhere Mathematik – Formeln und Hinweise
kleiner Wissensspeicher
105 Seiten. 1970. Kartoniert. 6,50 M
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig

Autorenkollektiv
Was willst Du werden?
Berufe mit Zukunft
384 Seiten, Darstellung von 22 Grundberufen. 1970. 5,50 M
Verlag Neues Leben, Berlin
Das Buch gibt Antwort auf die Frage, welche Ausbildungsberufe ein Schulabgänger wählen kann. Der Herausgeber hat den vierzehn Grundberufen sehr große Aufmerksamkeit geschenkt. Wichtige Berufe einzelner Industriezweige und Einrichtungen werden ausführlich beschrieben. Am Schluß des Buches wird ein Überblick über sämtliche Ausbildungsberufe der DDR gegeben (also auch über solche, die im vorderen Teil des Buches nicht beschrieben werden).

Allgemeine Statistik Aufgabensammlung mit ausführlichen Lösungswegen
etwa 176 Seiten, 12 Abb., 164 Tabellen. Broschur. Etwa 6,80 M
Verlag Die Wirtschaft, Berlin

F. Holtmann
Mathematik
Band I: Arithmetik
357 Seiten, 108 Bilder, 12,0 cm mal 19,0 cm. 1969. Pappeinband. 6,80 M

Band II: Geometrie
514 Seiten, 442 Bilder, 12,0 cm mal 19,0 cm. 1969. Pappeinband. 10,80 M
VEB Fachbuchverlag, Leipzig

Gäbler
Mathematik und Leben
Band III: Differentialrechnung – Integralrechnung – Analytische Geometrie
469 Seiten, zahlr. Abb., 17,0 cm mal 22,0 cm. 1969. 20,00 M
VEB Fachbuchverlag, Leipzig

V. Mangold/Knopp
Einführung in die höhere Mathematik, Band I
564 Seiten, 116 Abb., Format 15,5 mal 23,0 cm. 1970. Leinen. 22,— M
S. Hirsel Verlag, Leipzig

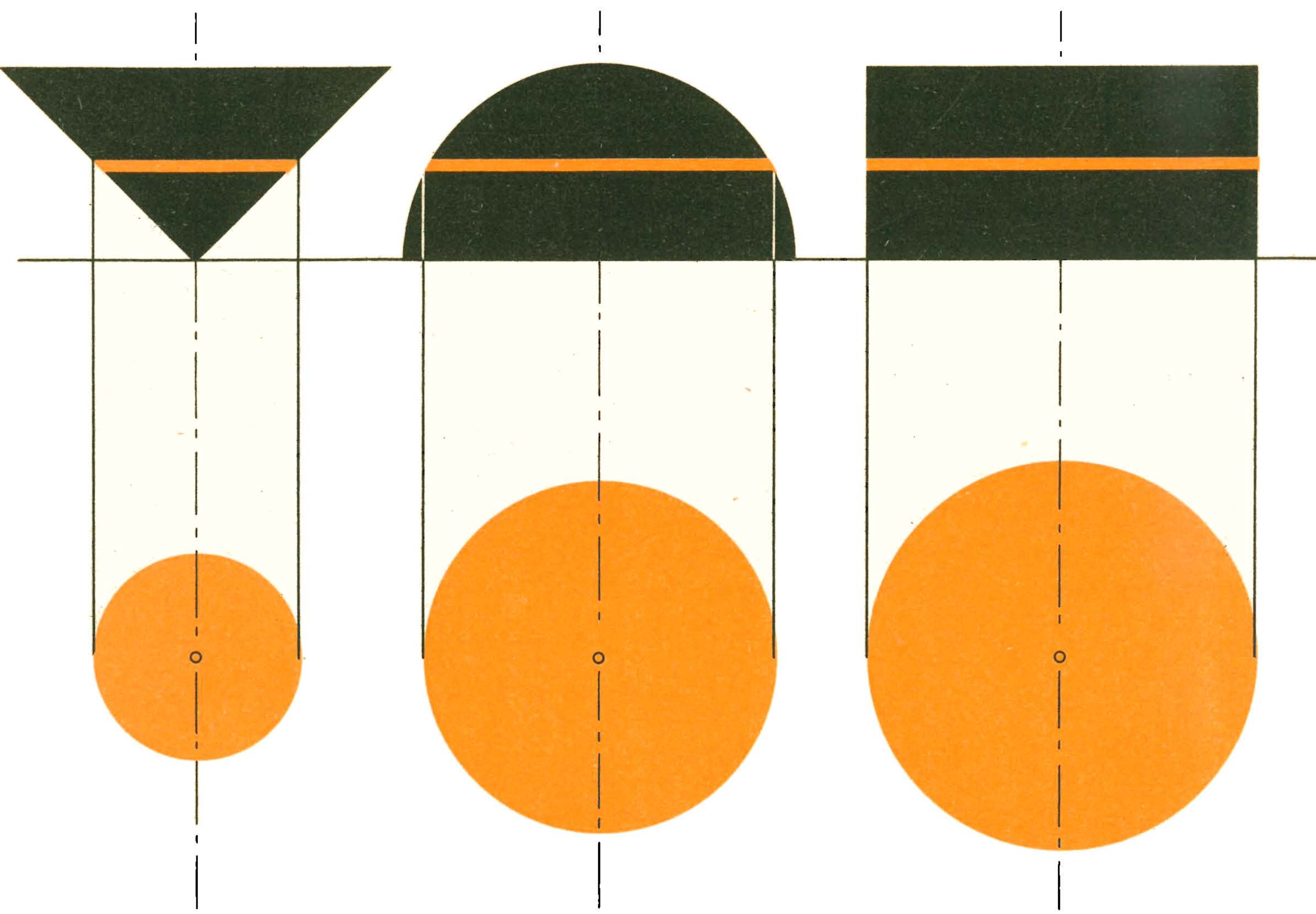
Autorenkollektiv, Leitung D. Stempel
Begriffe der Netzplantechnik
101 Seiten, 11,0 cm mal 18,3 cm. 1970. 6,50 M
Verlag Die Wirtschaft, Berlin

G. Schmidt
Kompendium der Physik
332 Seiten, 165 Abb., 7 Tabellen, 14,2 cm mal 21,0 cm. 1970. Leinen flexibel.
VEB Gustav Fischer Verlag, Jena 17,80 M

L. N. Landau
Algorithmierung im Unterricht
424 Seiten, zahlr. Abb., 15,0 cm mal 22,0 cm. 1969. In Halbleinen. Bestell-Nr. 242 512-1 16,00 M
Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
5. Jahrgang 1971
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

4

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import BmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Novosti (S. 73); E. Hoffmann BBS Suhl (S. 84/85); Vignette Prof. C. Ottescu, Bukarest (S. 88); Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 17. Mai 1971

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klasse geeignet

Der Weg eines Talents
Teil 2

Prof. Dr. Olga Alexandrowna Ladyschenskaja

Nach einigen Schwierigkeiten, bedingt durch den Krieg, gelang es *Olga Ladyschenskaja* Anfang des Winters 1943 auf die Moskauer Universität zu gelangen.

Als obligatorische Vorlesung des zweiten Studienjahres wählte *Olga L.* Algebra. Mit lauter und mächtiger Stimme vermittelte *A. G. Kurosch* Kenntnisse über Gruppen, Ringe, Körper, Ideale, Isomorphismen und Homomorphismen und vieles andere mehr, was bereits die ganze moderne Mathematik durchdrungen hat. Die Vorlesungen waren ausgezeichnet. Um bei den Hörern die neuen Begriffe und die Beziehungen zwischen ihnen zu festigen, führte *Kurosch* am Anfang jeder Vorlesung eine kleine Überprüfung durch. Aber am interessantesten waren seine Berichte darüber, wie und durch wen sich die Algebra in den letzten 20 bis 30 Jahren entwickelt hat und was in der gegenwärtigen Zeit getan wird. Das geringe Alter dieser Wissenschaft und die intensive Arbeit des Professors selbst gestatteten ihm, die Jugend schnell in den Kreis der ungelösten Aufgaben und Probleme einzuführen.

Zur Auswertung der neuesten Fachliteratur und zur Erörterung der in ihr gelösten bzw. noch nicht gelösten Probleme wurde ein Seminar geschaffen, an dem außer qualifizierten Leuten auch Aspiranten und Studenten der höheren Studienjahre, die sich die Algebra als Spezialfach gewählt hatten, teilnahmen. Auch *Olga* hielt in diesem Seminar Vorträge. Die Atmosphäre war ungezwungen und Unklarheiten wurden gleich im Seminar beseitigt.

Am Ende des Jahres schlug *A. G. Kurosch* dem wissenschaftlichen Rat *Olga* als Stipentiatin für das *Stalin*-Stipendium vor. Im nächsten Jahr erhielt sie eine Einladung für das Seminar von *I. M. Gelfand* zur Funktionalanalysis. Das Seminar lief erst ein Jahr. Jung waren die Teilnehmer, einschließlich des Leiters, und jung und voller unterschiedlicher interessanter Aufgaben ist das Gebiet, dem das Seminar gewidmet war.

Die Arbeit des Seminars verlief sogar für die Verhältnisse der Moskauer Universität ungewöhnlich. Zusammenhängende Vorträge gab es fast gar keine. Man diskutierte über wissenschaftliche Ergebnisse der Seminarteilnehmer, oder man sprach über irgendeine interessante Arbeit aus einer Zeitschrift.

Die Beweise wurden nicht ausgeführt, man erläuterte nur die hauptsächlichen Ideen und Methoden. Nicht selten blieb der Vortragende stecken und dann versuchte der Leiter selbst oder einer der Teilnehmer die soeben formulierte Behauptung entweder zu beweisen oder zu widerlegen.

Ein großes Seminar für die „Erwachsenen“ ist gut. Aber dort gibt es vor allem „zufällige“ Vorträge, die nach einem persönlichen Geschmack ausgewählt wurden oder diktiert werden von der Notwendigkeit eines Dissertanten, seine Arbeit vorzutragen. Dort ist aber nicht der geeignete Ort, Zweifel oder Mutmaßungen zu äußern. Deshalb ist es besser, sich sein eigenes kleines Arbeitsseminar zu bilden und dort ein eigenes Programm zusammenzustellen.

Zwei Teilnehmer sind zweifellos schon vorhanden. *Olga* und ihr erster Lehrer für partielle Differentialgleichungen *A. Myschkies.* Aber man könnte doch *I. G. Pokrowski* bitten, die Patenschaft für dieses kleine Seminar zu übernehmen? Wenn die Teilnehmer mit der Lösung der anstehenden Probleme nicht zurechtkommen werden, dann kann seine Hilfe sehr wertvoll sein. Er kann vor der Wahl von unpassenden Arbeiten warnen und auf jene Aufgaben hinweisen, die besonders wichtig und kompliziert sind. Nach anfänglichen Schwankungen geht man zu ihm und äußert die ungewöhnliche Bitte. Er ist erstaunt, aber einverstanden und verfolgt ein ganzes Jahr ihre Erörterungen und nimmt manchmal auch selbst daran teil. Natürlich geht ein großer Teil der Arbeit zu Hause bzw. in den Korridoren und auf dem Hof der Universität vor sich. Im Seminar findet nur ein kleiner Teil davon statt. Das ist auch verständlich, denn das Seminar dauert nur zwei bis drei Stunden in der Woche, aber die restlichen 165 verlaufen außerhalb.

Jetzt erkannte *Olga*, der die Mathematik immer als etwas Vollständiges und Abgeschlossenes erschienen war, die Geheimnisse und Schwächen der Mathematik. Immer klarer trat der Kreis der ungelösten Fragen ihres Gebietes hervor. Es waren schon sehr viele, welche sollte man wählen? Eines der Probleme begann sie immer mehr zu reizen. Die Lösung dieses Problems kann zur Beantwortung einer von *Courant* gestellten Frage beitragen. Aber jetzt, im fünften Studienjahr, muß man erst einmal eine Diplomarbeit zustande bringen. Deshalb werden die nächsten drei Monate für die Abschlußarbeit benutzt, in der sie ein anderes Problem löst.

Die Diplomarbeit wird im „Mathematischen Sammelband“, einer führenden mathematischen Zeitschrift, abgedruckt. Nach Beendigung der Universität wird sie Aspirant. Aber familiäre Umstände zwingen sie, nach Leningrad zu fahren. Ihr wissenschaftlicher

Betreuer, *S. L. Soboljew*, ist in Moskau und weilt nur gelegentlich zur Erfüllung von dienstlichen Pflichten in Leningrad. Die Moskauer Universität ist weit weg und in Leningrad ist alles unbekannt. Hier herrscht noch nicht jene freundschaftliche Atmosphäre, die sich so günstig auf die eigene Arbeit ausgewirkt hatte. Wird die Kraft ausreichen, etwas Interessantes zu tun? Der Zweifel in die eigenen Kräfte ist größer als notwendig. Es gibt nur einen Ausweg – man muß sich an die Arbeit machen. Nach drei Monaten angespannter Arbeit ist die *Methode der endlichen Differenzen* ausgearbeitet und mit ihrer Hilfe ein wichtiges Problem gelöst.

Man sagt ihr, daß das völlig für die Dissertation reicht. Die Furcht und das mangelnde Selbstvertrauen verschwinden für einige Zeit. Die Moskauer hören ihre Arbeit und gratulieren ihr. Es gratuliert auch *S. L. Soboljew* und sagt, daß sie die Arbeit als Dissertation verteidigen müsse. Doch man war der Meinung, daß die Arbeit ein rein theoretisches Interesse verdient, weil die in ihr untersuchten impliziten Differenzschemata kaum für eine wirkliche Berechnung geeignet sind.

Der wirkliche Wert ihrer Arbeit war damals noch nicht verstanden worden, obwohl sie mehrmals in Leningrad und Moskau darüber vortrug. Teilweise kann man das dadurch erklären, daß die Rechentechnik in der Sowjetunion zu dieser Zeit noch nicht so weit entwickelt war und deshalb die Differenzmethode für die wirklichen Berechnungen erst in den fünfziger Jahren ausgenutzt wurde.

Im Herbst 1949 erfolgte die Dissertation. Bis 1953 war sie dann Assistent, danach Dozent und ab 1955 Professor an der Leningrader Universität. Sie hält eine Spezialvorlesung an zwei Fakultäten: der physikalischen und der mathematischen. Diese Vorlesung heißt: *Randwertaufgaben der mathematischen Physik*. Sie ist in ihren Grundbestandteilen auf die Arbeiten von *Ladyschenskaja* aufgebaut. Ihr Inhalt verändert sich von Jahr zu Jahr. Viele ihrer Untersuchungen (besonders in der ersten Zeit) wurden durch den Wunsch, dieses oder jenes noch besser zu verstehen und den Studenten zugänglicher zu machen, hervorgerufen.

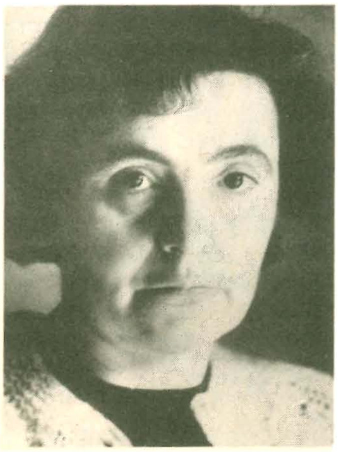
Diese Vorlesungen hörten alle ihre Schüler und hatten Einfluß auf viele Teilnehmer des wissenschaftlichen Forschungsseminars zu Fragen der mathematischen Physik.

In den zwanzig Jahren Universitätsarbeit leitete *Ladyschenskaja* ständig wissenschaftliche Forschungsseminare und Zirkel für Aspiranten, wissenschaftliche Mitarbeiter und Studenten. Ihre direkten Schüler erzog sie in solchen Zirkeln und Seminaren schon vom zweiten und dritten Studienjahr an. Sie bemüht sich, ihre Schüler auf verschiedene Gebiete, die etwas mit partiellen Differentialgleichungen zu tun haben, hinzuleiten. So entsteht ein gutes Kollektiv, das möglichst viele Interessen und Forschungen aller Richtungen erfaßt.

Es gibt noch eine Besonderheit ihrer Arbeit mit den Studenten: Sie beobachtet sie genau und bemüht sich festzustellen, welcher Kreis von Aufgaben am besten für sie geeignet ist. Dann wählt sie für einen Studenten eine entsprechende Aufgabe aus, die sie für interessant hält und für die sie schon den ungefähren Lösungsweg sieht. Dafür braucht man oft eine nicht geringe Vorbereitung. Sie wählt dem Studenten die notwendige Literatur aus, wobei es nicht selten Originalarbeiten sind. Diese Artikel werden von den Studenten studiert und oft auch auf speziellen Seminaren vorgetragen. In der Vorbereitungszeit lehrt *Ladyschenskaja* die Studenten das Durchgearbeitete zu verstehen und es nicht in der Reihenfolge des Artikels darzulegen, sondern so, als ob man es selber gemacht hätte, d. h. erst die hauptsächlichen Ideen und Überlegungen aufzeigen und dann erst die formalen Beweise zu geben. Gewöhnlich betrachtet sie nicht nur eine Aufgabe, sondern mehrere, die miteinander verbunden sind und gemeinsam zur Lösung eines ernsthaften Problems führen. Sie zerlegt die Schwierigkeit dieses Problems in mehrere Teilschritte und der Student bewältigt diese nacheinander, wobei er sich im Prozeß dieser Bewältigung entwickelt. Manchmal studiert sie ein Gebiet nur deshalb, um zu verstehen mit welchen Fragen man sich dort beschäftigt und mit welchen Kenntnissen man dort ausgerüstet sein muß (um ihre jungen Wissenschaftler damit ausrüsten zu können) und wen sie von ihren Schülern in diese Richtung lenken kann. So war es auch mit der Untersuchung von verschiedenen mathematischen Fragen der theoretischen Physik. Einen besonderen Platz in der Tätigkeit von *Ladyschenskaja* nimmt das wissenschaftliche Forschungsseminar zur mathematischen Physik ein. Es vereinigt alle, die in Leningrad auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen arbeiten. Dieser Zirkel begann seine Arbeit im Herbst 1947 und wird von dem bekannten Akademiker *W. J. Smirnow* geleitet. *Ladyschenskaja* ist eine der aktivsten Teilnehmerinnen. Sehr viele Berichte gab sie auf seinen Sitzungen über ihre Ergebnisse. Man sagt jetzt sogar, daß das Seminar drei wissenschaftliche Leiter hat: *W. I. Smirnow, O. A. Ladyschenskaja* und *S. G. Michlin.*

Ab 1962 ist *O. A. Ladyschenskaja* Leiterin des geschaffenen Laboratoriums der mathematischen Physik. Alle ihre Mitarbeiter waren ehemals ihre Schüler an der Universität. Zwei von ihnen verteidigen schon ihre Dissertation.

Seit diesem Jahr ist sie auch Angestellte der Universität. Sie erhielt zweimal den Ersten Preis der Universität für ihre Arbeiten, erhielt viele ehrenvolle Einladungen zu Vorlesungen an anderen Universitäten des In- und Auslandes und war auf mehreren internationalen Kongressen. Sie gehört auch zur Redaktion einer der bedeutendsten Zeitschriften der Sowjetunion auf mathematischem Gebiet: *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften der UdSSR* (Mathematische Reihe).



Wann und wo man *Ladyschenskaja* trifft, immer ist sie von Menschen umgeben. Das sind nicht nur ihre Schüler und nicht nur Leningrader Mathematiker. An sie wenden sich auch Wissenschaftler anderer Städte und allen möchte sie helfen. Sie hat eine große Anzahl von Arbeiten durchgesehen, die für die Veröffentlichung vorgesehen sind. Mit ihr berät man sich über die Auswahl von Themen (besonders für die Dissertation) und bespricht seine Arbeiten, wobei nicht nur die Teilnehmer ihres Seminars, sondern auch Wissenschaftler, die tausende Kilometer von Leningrad entfernt sind.

In den ersten fünf bis sechs Jahren ihrer Arbeit an der Universität gab sie viel Kraft und Zeit für die Arbeit mit den Studenten, von denen sie sehr viel forderte. Dabei strebte sie an, daß die Studenten zuerst den Gegenstand verstanden, die wichtigsten Objekte kannten und sich fest die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten und Verbindungen zwischen ihnen einprägten. Sie lehrte sie, das wichtige zu sondieren und es sich anzueignen. Erst danach konnte ein genaueres Studium des Gegenstandes erfolgen. *Ladyschenskaja* war für ihre Prüfungen bekannt. Man konnte sie nicht betrügen. Sie merkte schnell, ob jemand nur etwas auswendig gelernt hatte, oder ob er es wirklich begriffen hatte. Die guten Studenten ließen sich gern von ihr prüfen, da dies eine gute Kontrolle ihrer Fähigkeiten darstellte.

Bei einem persönlichen Gespräch mit *Ladyschenskaja* schaffen ihre Natürlichkeit, ihre herzliche Freundlichkeit und ihr aufmerksames Zuhören eine Atmosphäre der Freundschaft und eine Art geistiger Gemütlichkeit. Ihre Rede ist interessant und logisch, ob es nun ein persönliches Gespräch ist oder eine Vorlesung. Im Gespräch gibt sie Ratschläge, in der Vorlesung diskutiert sie das Dargebotene, als ob sie sich nur Gedanken macht und nicht lehrt. Vielleicht ist es deshalb so einfach, ihr zuzuhören. Obwohl sich ihre Arbeiten auf ein Gebiet beziehen, in dem „die reine Zahl herrscht“ und obwohl ihre tägliche Beschäftigung die Untersuchung der weißen Flecke der exaktesten Wissenschaft ist, ähnelt *Ladyschenskaja* nicht dem Gelehrten, der nur dazu in der Lage ist „in jeder Sekunde eine Quadratwurzel zu ziehen“ (*W. W. Majakowski*).

Sie hat sehr viele Interessen. Die Musik, die Malerei, das Theater und die Literatur begeisterten sie nicht nur, sondern bildeten einen Bestandteil ihres Lebens. Nicht weniger liebt sie die Natur und die imposante Stadt, in der sie lebt.

J. Senkewitsch

Vorliegender Beitrag wurde dem Buch: *Schicksal eines Talents* (Kurzbiographien von Mathematikerinnen) entnommen.

Дорогие ребята,

позвонили мне и попросили дать вам какую-либо задачу для предстоящей олимпиады. Попробуйте доказать, что нельзя составить прямоугольник из пяти попарно неравных квадратов.

Далее же подумайте: "из скольких попарно неравных квадратов можно составить прямоугольник?"

Этот вопрос относится к серии задач, привлекших внимание сравнительно недавно,

Liebe *alpha*-Leser!

Ich empfehle allen, die sich für die Mathematik interessieren, folgende Aufgabe zu lösen:

Es ist zu beweisen, daß es unmöglich ist, aus fünf paarweise ungleichen Quadraten ein Rechteck zusammenzustellen. Überlegt, aus wieviel paarweise ungleichen Quadraten sich ein Rechteck zusammenstellen läßt!

Dieses Problem gehört zu einer Serie, welche vor relativ kurzer Zeit, vor 70 Jahren, aufgeworfen wurde und nicht nur Geometer, sondern auch die Projektanten komplizierter Stromkreise interessierte. Zur Lösung dieser Aufgabe haben deutsche Mathematiker wesentlich beigetragen.

Ich wünsche Euch Erfolge in der Mathematik. Ihr dürft allerdings andere Wissenschaften und die Kunst nicht vernachlässigen. Die Mathematik allein reicht nicht aus, damit sich der Mensch geistig entwickeln kann.

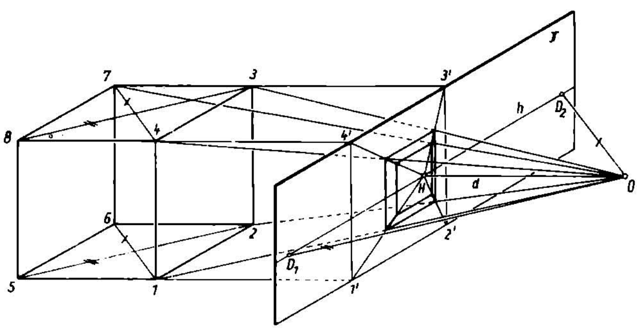
Mit besten Grüßen Olga Ladyschenskaja

Albrecht Dürer

ein Künstler, Humanist und Geometer

Teil 3

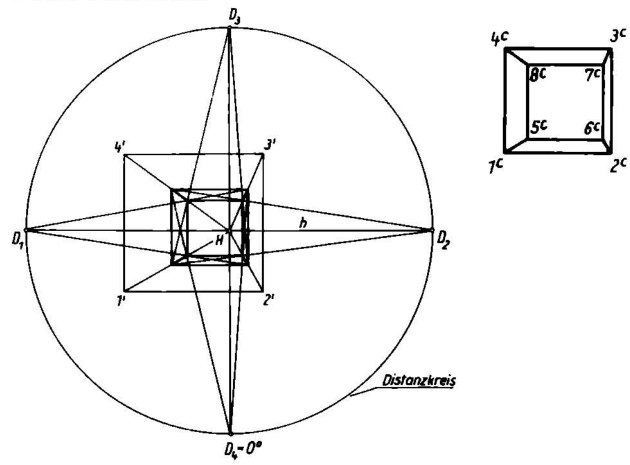
Einen breiten Raum nimmt in der „Underweysung“ das Konstruieren und Zeichnen von Zentralrissen ein. Bei der theoretischen Abhandlung zur Zentralprojektion beschränkt sich Dürer auf das Beispiel eines Würfels. Er führt eine Bildebene π zwischen das Projektionszentrum oder Auge und das abzubildende Objekt, wobei die Bildebene parallel zu einem Seitenpaar des Würfels angenommen wird. Aus didaktischen Gründen werde der Abbildungsvorgang nicht an den entsprechenden Figuren aus der „Underweysung“, sondern an einem hierzu in neuem Stil entworfenen Schrägbild erläutert.



Schrägbild zur Zentralprojektion eines Würfels

Die von dem Auge O an das Objekt gezogenen Sehstrahlen werden mit der Bildebene π zum Schnitt gebracht. Es genügt in dem vorgelegten Beispiel, die Bilder der acht Eckpunkte des Würfels nach der Durchstoßmethode zu konstruieren. Hierbei ist zu beachten, daß sich die Bilder der vier auf π lotrecht stehenden Würfelkanten (sogenannte Tiefengeraden in der Abbildung) in einem Punkt, dem Hauptpunkt H des Zentralrisses schneiden. Dieser Punkt ist der Fluchtpunkt sämtlicher zur Bildebene π senkrecht liegender Geraden. Die Waagerechte h durch H stellt den Bildhorizont dar. Werden in die Deck- und Basisfläche des Würfels die Diagonalen eingezeichnet, so schneiden sich die Bilder paarweise zueinander paralleler Diagonalen in den auf h liegenden Punkten D_1 und D_2. Dies sind die Fluchtpunkte der Diagonalenpaare. Sie liegen symmetrisch bezüglich H, und die Strecke $\overline{HD_1} = \overline{HD_2}$ gibt den Abstand des Auges (Projektionszentrums) von der Bildebene an. Man bezeichnet diese beiden Punkte deshalb als Diszanzpunkte und nennt die Strecke $\overline{HO}$ die Augdistanz d.

Legt man das in π entstehende Bild auf ein ebenes waagerechtes Zeichenfeld, so ergibt sich bei entsprechender Zuordnung des Auges lotrecht über dem Hauptpunkt H im Abstand d der gewünschte Bildeffekt. Man glaubt, in das Innere eines Würfels hineinzuschauen.



Zentralperspektives Bild eines Würfels

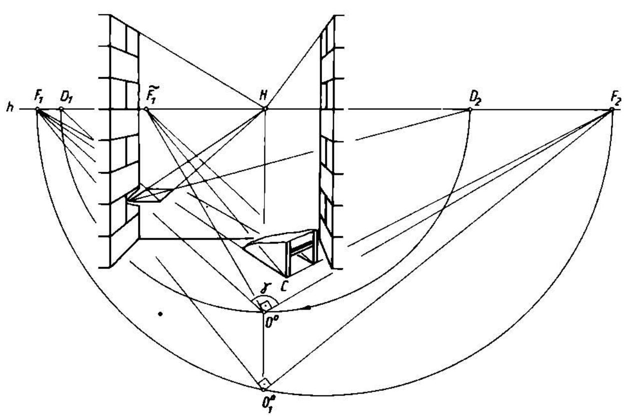
Schlägt man um H einen Kreis mit der Augdistanz d, so erhält man den Distanzkreis. Die Fluchtpunkte sämtlicher Geraden, welche die Bildebene unter einem Winkel von 45° schneiden, liegen auf diesem Kreis, z. B. auch die Fluchtpunkte der in die rechte und linke Seite des Würfels eingezeichneten Diagonalen.

In Dutzenden von Dürer-Bildern läßt sich dieser Aufbau als Rahmenkonstruktion nachweisen (Hieronymus im Gehäuse, Melancholie, Bilder aus dem Marienleben u. a. m.). Die Betrachtung gewisser Dürer-Bilder erfordert eine Technik, deren Anwendung einige elementare Grundkenntnisse in der Zentralperspektive voraussetzt.

Der Künstler ordnet nämlich dem Auge des Beschauers einen ganz bestimmten Punkt im Raum zu, von dem aus er sein Werk betrachtet wissen will. Mit unseren elementaren Voraussetzungen zur Zentralperspektive wollen wir ein Bild Dürers analysieren, bei dessen Erarbeitung er sich eindeutig an die in seiner „Underweysung“ entwickelten Grundlagen gehalten hat. Es handelt sich um das Mittelbild des sogenannten Dresdner Altars, ein Werk aus dem Jahre 1496. Dieses Bild war mit vielen anderen Schätzen der Weltkultur gegen Ende des zweiten Weltkrieges von der Vernichtung bedroht.

Dank der Sicherstellung durch sowjetische Truppen und einer gründlichen Restaurierung ist es nun wieder Gemeingut der Menschen geworden. In diesem Bild, Maria mit dem Kind darstellend, kommt der aus Quadern gefügten Einfassung, dem schachbrettartig gestalteten Fußbodenbelag und selbst den durch das

Mittelbild des Dresdner Altars mit Konstruktionsanalyse



Fenster schwach sichtbaren Häusern eine vom Künstler beabsichtigte Funktion zu. Der Betrachter soll hierdurch den Eindruck gewinnen, ihm sei im Raum gemeinsam mit den dargestellten Personen ein bestimmter Platz zugeordnet. Der Hauptpunkt H des Bildes, in dem sich die Bilder aller Tiefengeraden (hier Steinfugen der Wand und des Fußbodens) schneiden, ist eindeutig rekonstruierbar. Ferner ist der Horizont h, die waagerechte Linie durch H, eine wichtige Orientierungslinie des Bildes.
Um die Distanzpunkte D_1 und D_2 und damit auch die Augdistanz d konstruktiv zu finden, forschen wir auf dem Fußboden nach dem Bild eines geeigneten Quadrates. Durch die Zusammenfassung von 9 quadratischen Steinen haben wir das Bild eines Quadrates von hinreichender Größe, in das sich mit einiger Sicherheit die Diagonalen einzeichnen lassen. Die Schnittpunkte dieser Diagonalen mit dem Horizont h liegen symmetrisch bezüglich des Hauptpunktes. Wir können sie mit gutem Gewissen als Distanzpunkte D_1 und D_2 des Bildes annehmen. Sie gestatten uns, für die Lage des Auges bei der Bildbetrachtung die richtige Stellung anzugeben. Die Messung der Strecke $d=\overline{HD_1}$ führt unter Berücksichtigung der Originalgröße des Bildes (96,5 cm · 107 cm) auf die im Original vorliegende Augdistanz von 85 cm. Nachdem im Bild der Horizont mit Hauptpunkt und Distanzpunkten festgelegt sind, kann der Künstler bei Darstellung quaderförmiger Gebilde nicht mehr freizügig über die Winkel von Kanten im Bild verfügen. In diesem Beispiel möge überprüft werden, ob die Wiedergabe des auf einer horizontalen Tafel stehenden Lesepultes den Gesetzen der Perspektive genügt. Setzt man für das auf dem Pult liegende aufgeschlagene Buch ein rechteckiges Format voraus, so muß nach dieser Darstellung auch die Basis des Lesepultes ein Rechteck sein; d. h., die von C ausgehenden Basiskanten stehen im Raum aufeinander senkrecht. Die Verlängerungen der Basiskanten schneiden den Horizont in den Fluchtpunkten F_1 und F_2. Wie man erkennt, liegen diese beiden Punkte außerhalb der Strecke D_1D_2. Zufolge dieser Darstellung würden die Basiskanten des Pultes einen stumpfen Winkel einschließen, was sicher nicht den Absichten des Künstlers entspricht und auch nicht mit den bekannten Buchformaten in Einklang zu bringen ist. Die wahre Größe des Winkels, den die Basiskanten nach dieser Darstellung miteinander einschließen müßten, ergibt sich durch Verbinden des in die Zeichenebene umgelegten Augpunktes O° mit den Fluchtpunkten F_1 und F_2. Durch Nachmessen finden wir einen Winkel $\gamma=108°$, der von den beiden Fluchtstrahlen eingeschlossen wird. Hält man F_2 fest, so müßte der Fluchtpunkt F_1 nach $\tilde{F}_1$ verschoben werden, wenn in C wirklich ein rechter Winkel vorliegen soll. Umgekehrt kann auch der Betrachter des Bildes seinen Standort dem dargestellten Lesepult anpassen. Er müßte dann die Augdistanz auf 118 cm vergrößern. Die Analyse zeigt die Umlegungen O^0 und O_1^0 der beiden Augpunkte in die Bildebene. An diesem Beispiel sieht man, daß die Analyse zu verschiedenen Bildabschnitten auf widersprechende Distanzen für den Augpunkt führt. Die Klarheit im geometrischen Aufbau des Bildes macht es uns heute leicht, an einem Frühwerk des Meisters noch bestehende Inkonsequenzen bei Anwendung der Perspektive aufzuspüren. Unsere Betrachtung ist nicht als Rechthaberei zu verstehen, sondern soll uns an einem handfesten Beispiel das harte Ringen dieses großen Künstlers der Renaissance um Form und Inhalt seiner Werke verdeutlichen.

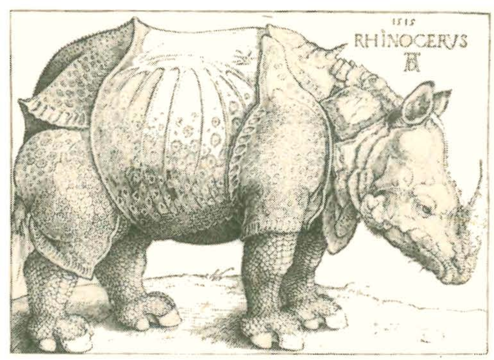
Schwieriger gestaltet sich die Anwendung von Gesetzen der Perspektive auf die zeichnerische Darstellung unregelmäßiger Körper, da hier der Horizont und Fluchtpunkte nicht so leicht auswertbar sind. Dürer zeigt in seiner „Underweysung", wie sich der Künstler in solchen Fällen mit einigen technischen Mitteln half. Er verwendete einen rechteckigen Holzrahmen, stellte ihn so vor sich auf, daß das gewünschte Blickfeld davon eingefaßt war und spannte in den Rahmen einen durchsichtigen weißen Schirm, den sogenannten Flor. Nun visierte er markante Punkte des darzustellenden Gegenstandes von einem festen Punkt, dem Augpunkt aus an und markierte die zugehörigen Bildpunkte auf dem Flor. Dieses Verfahren läuft auf eine experimentelle Umsetzung der Durchstoßmethode hinaus. Von dem Flor werden anschließend die markierten Bildpunkte in das Zeichenfeld übertragen. Diese sind für den Künstler eine wertvolle Stütze bei Ausführung des Bildes. Ein in dieser Weise entworfenes Bild liefert einen wahrheitsgetreuen Eindruck des dargestellten Objektes, wenn sich das Auge des Betrachters in der vom Künstler durch die Konstruktion vorgeschriebenen Lage bezüglich des Bildes befindet. Soll die gewünschte Augdistanz länger als der Arm des Künstlers sein, so bedient sich der Maler eines Visierrohres, das er mit einer Schnur hinter sich in einem festen Punkt verankert. Nun tastet der Künstler unter fluchtgerechter Führung des Visierrohres bezüglich des festen Haltepunktes ausgezeichnete Punkte des Objektes innerhalb der Grenzen des Bildrahmens ab und trägt sie in dem Flor ein. Auch dazu gibt Dürer in der zweiten Auflage seiner „Underweysung" ein instruktives Bild mit erläuterndem Text: „Ein Mann zeichnet eine Kanne" unter Anwendung von Jakob Kesers Durchzeicheninstrument mit der Schnur.

Der Zeichner der Kanne, um 1525

Die Perspektive ist ein von Dürer vielfach aber nicht vielfältig verwendetes Mittel zur Steigerung der Raumwirkung in seinen Bildern. Die Bevorzugung von Tiefengeraden und frontalen Ebenen verleiht seinen Bildern mitunter etwas Strenges und Kulissenhaftes. Beispiele für diese Art des Einsatzes der Perspektive finden sich in den Werken

Hieronymus im Gehäuse, Kupferstich 1514
Weihnachten, Gemälde um 1504
Weihnachten, Kupferstich 1504
Die Verkündigung, Holzschnitt 1500/02
Ruhe auf der Flucht, Holzschnitt 1503/04
Das kleine Pferd, Kupferstich 1505
Melancholie, Kupferstich 1514
Abendmahl, Holzschnitt 1523

Mehr Gelöstheit trifft man bei solchen Bildern an, wo Dürer auf eine Verdeutlichung der Tiefe des Raumes durch Zutaten der Perspektive verzichtet. Bilder von biblischen Gestalten (Adam und Eva, die vier Apostel) und Porträts vieler ihm nahestehender Zeitgenossen (Willibald Pirkheimer, Bilder von Vater und Mutter, Michael Wolgemut, *Philipp Melanchton*, Erasmus von Rotterdam, Hieronymus Holzschuher) erscheinen uns auch nach 450 Jahren noch von einer nicht überbietbaren Aussagekraft und Lebendigkeit.



Seine Tier- und Pflanzendarstellungen bezeugen die Bereitschaft zu liebevoller und selbstloser Hingabe seiner künstlerischen Fähigkeiten auch an scheinbar unbedeutende Objekte der Natur (der Feldhase, *Rhinozeros*, Veilchensträußchen, Rasenstück).
Aus den Ornamentierungen wertvoller Druckerzeugnisse (Randzeichnungen zum Gebetbuch des Kaisers Maximilian, Mitarbeit an Erd- und Himmelsgloben des Mathematikers Johann Stabius, Gedenksäule für die Opfer des Bauernkrieges) sprechen lebendige Phantasie und die Bereitschaft zur Anpassung bei kollektiver Arbeitsweise. Dürers Wirken hat an ausstrahlender Kraft wohl deshalb über viele Jahrhunderte in keiner Weise eingebüßt, weil das von ihm hinterlassene Lebenswerk nicht einer einseitigen außergewöhnlichen Begabung entsprang, sondern das Ergebnis von zähem Fleiß, vielseitiger Begabung und Aufgeschlossenheit und einer ständigen kompromißlosen Auseinandersetzung mit sich selbst und seiner Umwelt darstellt.

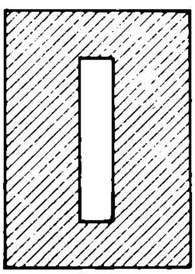
E. Schröder

Eine Aufgabe von Nationalpreisträger Prof. Dr.

Hans Reichardt

Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin

▲758▲ Aus einem Teppich, der die Form eines Rechtecks mit den Seitenlängen 9 m und 12 m hat, sei genau in der Mitte ein Stück, das die Form eines Rechtecks mit den Seitenlängen 1 m und 8 m hat, herausgeschnitten, da es verdorben war. Dabei verlaufen die längeren Seiten des herausgeschnittenen Rechtecks parallel zu den längeren Seiten des Teppichs (vgl. die Abb.).



Man zerlege den Teppich durch zwei Schnitte (die nicht geradlinig verlaufen müssen, sondern auch Ecken haben können) so, daß man die Teile wieder zu einem rechteckigen Teppich zusammensetzen kann.

Kreuzfigur

In der Aufgabe 373 in *alpha* Heft 2/1969, S. 38 war die Kreuzfigur (Bild 1) durch vier Strecken in ein inhaltsgleiches Quadrat zu verwandeln.

Eine weitere Beschäftigung mit dieser Aufgabe führte zu folgenden Überlegungen.

Da die fünf Quadrate der Kreuzfigur inhaltsgleich dem großen Quadrat sind, müssen auch die schraffierten Flächen (Bild 2) einander inhaltsgleich sein, da sie jeweils ein Viertel der beiden Figuren sind.

Beide ineinandergezeichnet zeigen sie uns (Bild 3, hier vergrößert), daß sowohl die Flächen I und I' als auch II und II' jeweils kongruente Dreiecke sind (Drehung am A bzw. S).

Wir können also folgende Aufgabe stellen:

Aufgabe 1:

Ein Fünfeck gebildet aus einem Quadrat und einem gleichschenklig-rechtwinkligem Dreieck nach Bild 4 (wir wollen es „Giebel-Fünfeck" nennen), soll so durch zwei zueinander senkrechte Schnitte in drei Teile zerlegt werden, daß sich aus diesen ein Quadrat zusammenfügen läßt.

Diese Schnitte sind in Bild 3 die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{FS}$. Die Lösung führt zur Überlegung, daß die Schnitte die Seiten des gesuchten Quadrates sein könnten; daß sie daher gleich lang sein müssen, und ihr Schnittpunkt (rechter Winkel) am Figurenrand liegen könnte.

Verbinden wir nach Bild 5 die Punkte A und S, so erhalten wir das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck AFS, dessen Flächeninhalt sowohl die Hälfte des Quadrates als auch des „Giebelfünfecks" ist, aber auch der Gesamtfläche der Restdreiecke (schraffiert) entspricht.

Weiter stellen wir fest, daß die Dreiecke ABF und FES kongruent sind. Da die Höhe des Dreiecks DSC gleich der Hälfte der Strecke $\overline{BC}$ ist, muß F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ sein. Dann ist auch $\overline{SG}=\overline{GF}$.

Die schraffierten Restdreiecke haben mit dem Dreieck AFS je eine gemeinsame Seite, aber auch paarweise unter sich gleiche Seiten. Wenn daher die Restdreiecke auf die Fläche des Dreiecks AFS gespiegelt werden, füllen sie dessen Fläche ganz aus. Ihr gemeinsamer Punkt ist K. Er liegt auf der Seitenhalbierenden $\overline{AG}$ und auf $\overline{FH}$. Ferner ist $\overline{FH} \perp \overline{AG}$. Hier stellt sich nun

Aufgabe 2:

Konstruiere zu einem gegebenen gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck AFS das zugehörige „Giebelfünfeck". (Bild 7)

Fälle von F die Senkrechte auf die Seitenhalbierende $\overline{AG}$. Der Schnittpunkt ist K. Die Spiegelung von K an den Dreieckseiten ergibt die restlichen 3 Ecken des Quadrates. Ferner ermöglicht eine Senkrechte von A aus auf eine Gerade durch H und G die Bildung des Quadrates.

K ist außerdem der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $\overline{AG}$ und des Halbkreises über $\overline{AF}$.

Die Überlegungen reichen zu folgendem Satz: Folgende vier Punkte auf dem Umfang eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck liegen auch auf dem Umfang eines Quadrates: die Punkte (A) und (F) der einen Kathete, der Mittelpunkt (G) der anderen Kathete, der Schnittpunkt (H) auf der Hypotenuse mit der Verlängerung der Senkrechten von der Rechtwinkelecke (F) auf die Seitenhalbierende ($\overline{AG}$) der zweiten Kathete.

Dabei ist ein Katheten-Eckpunkt (A) zugleich auch Eckpunkt des Quadrates.

Nun kommen wir wieder zu unserer Ausgangsfigur zurück und sehen uns einen Balken der Kreuzfigur an. Er besteht aus drei kongruenten Quadraten.

In dieses Rechteck (Bild 8) zeichnen wir über beide Hälften einer Diagonale je ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ein. Es stellt sich nun

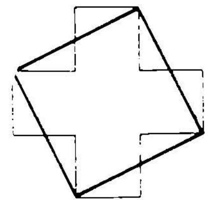


Bild 1

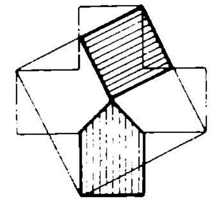


Bild 2

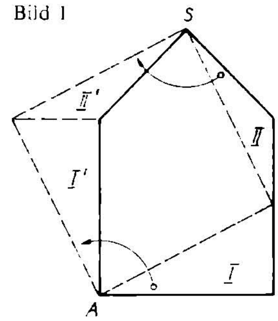


Bild 3

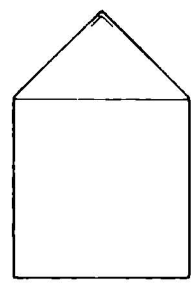


Bild 4

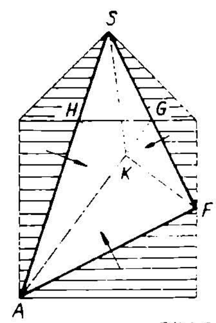


Bild 5

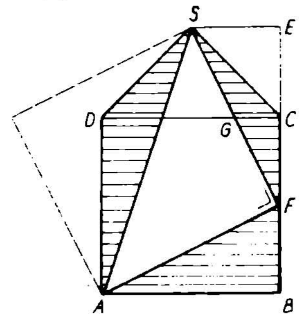


Bild 6

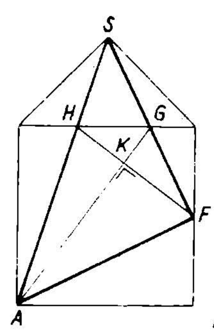


Bild 7

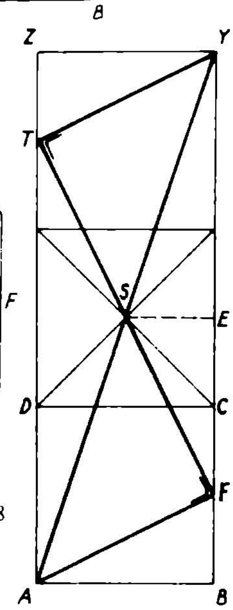


Bild 8

Aufgabe 3:

Den wievielten Teil der Rechteckfläche bedecken die beiden Dreiecke?

Wir sehen aus Bild 8, daß sich der Flächeninhalt des „Giebelfünfecks" $ABCSD$ zur

Rechteckfläche $ABYZ$ wie 5:12 verhält. Nun haben wir oben die Flächeninhaltsgleichheit vom „Giebelfünfeck“ mit zwei der eingezeichneten Dreiecke bewiesen. Also bedecken die beiden Dreiecke $\frac{5}{12}$ der Rechteckfläche.

Aber auch ohne die vorherigen Erkenntnisse läßt sich diese Aufgabe lösen. $\triangle SEF \cong \triangle FBA$ ($\overline{SF}=\overline{FA}$, $\sphericalangle EFS = \sphericalangle BAF$, $\sphericalangle SEF = \sphericalangle ABF = 90°$). Dann ist $\overline{SE}=\overline{FB}$. Die Fläche des Dreiecks SEY ist ein Achtel, die des Dreiecks ABF ein Zwölftel des Rechtecks. Wir müssen also von der Rechteckfläche zweimal das erste Dreieck und viermal das zweite abziehen. Dann bleiben für die beiden Dreiecke AFS und STY $\frac{5}{12}$ des Rechteck-Flächeninhaltes übrig.

H. Decker

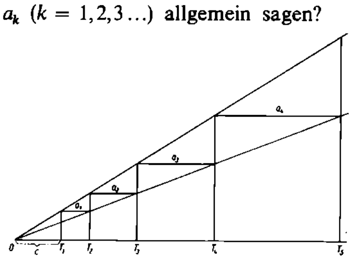
Aufgaben zum Beitrag: Albrecht Dürer

1 In Dürers „Underweysung“ findet sich im Abschnitt über die Zentralperspektive die hier dargestellte Folge von Quadraten mit den Seiten $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$

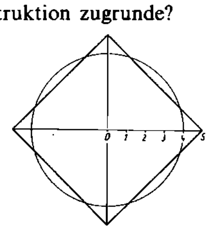
Weise nach, daß die folgenden Proportionen bestehen:

$a_1:a_2 = a_2:a_3 = a_3:a_4 = \dots = a_k:a_{k+1}$

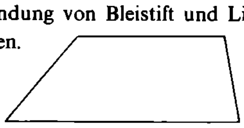
Was läßt sich über die Folge der Quadratseiten a_k ($k = 1,2,3 \dots$) allgemein sagen?



2 Zur Umwandlung eines Kreises in ein flächengleiches Quadrat gibt Dürer sinngemäß die folgende Näherungskonstruktion: Zeichne in den vorgegebenen Kreis ein Paar zueinander senkrechter Durchmesser. Teile den Kreisradius in vier gleiche Teile und trage ein Viertel des Kreisradius über die Enden der Durchmesser hinaus nach außen ab. Verbinde die sich ergebenden vier Punkte zu einem Quadrat. Dieses hat annähernd den gleichen Flächeninhalt wie der Kreis. Welcher Näherungswert für π liegt dieser Konstruktion zugrunde?



3 Von einem Schachbrett liegt das zentralperspektive Bild des Spielfeldrandes vor. Die Bilder der 64 Einzelfelder sind unter Verwendung von Bleistift und Lineal einzuzeichnen.



Was ist eine Funktion? Teil 3

Aufgaben

Mit einer kleinen Null sind die ganz leichten Fragen gekennzeichnet; indem ihr sie beantwortet, könnt ihr überprüfen, ob ihr das in dem Artikel Geschriebene verstanden habt. Schwierigere Aufgaben sind mit einem Stern markiert. Sie brauchen nicht unbedingt sämtlich gelöst zu werden.

1. Einführung

1°. Bestimmt Definitionsbereich und Wertevorrat folgender Funktionen:

a) $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$, b) $y = f(x) = \sqrt{x^2-1}$.

2. *Ganzer Teil* einer Zahl x heißt die größte Zahl, die x nicht überschreitet. Der ganze Teil von x wird mit $[x]$ bezeichnet.

Z. B. ist

$[0]=0$, $[7,5]=[7]=7$, $[-0,3]=-1$, $[-\pi]=-4$.

Die Differenz $x-[x]$ heißt der *Bruchteil* der Zahl x und wird mit $\{x\}$ bezeichnet. Stellt die folgenden Funktionen graphisch dar und bestimmt ihren Definitionsbereich und ihren Wertevorrat:

a) $f_1(x) = [x]$, b) $f_2(x) = \{x\}$,

c) $f_3(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$, d) $f_4(x) = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$,

e*) $f_5(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$, f*) $f_6(x) = \frac{1}{[x]}$,

g*) $f_7(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}$, h*) $f_8(x) = \frac{1}{\{x\}}$.

3*. Für eine beliebige natürliche Zahl n definieren wir $s(n)$ als die Summe der Teiler der Zahl n (n selbst ausgeschlossen). Beispielsweise ist

$s(1)=0$, $s(2)=1$, $s(6)=6$, $s(12)=16$, $s(28)=28, \dots$

Man beweise, daß $s(n)$ die Werte 2 und 5 nicht annimmt.

2. Funktion

4°. Zwei Menschen (A und B) können sich in zwei Zimmern auf vier verschiedene Weisen niederlassen:

AB		*A*	*B*
	AB	*B*	*A*

Auf wieviel Weisen können sich niederlassen: a) zwei Menschen in drei Zimmern, b) drei Menschen in zwei Zimmern, c) drei Menschen in zwei Zimmern so, daß keines der Zimmer unbesetzt bleibt?

5°. Die Menge M besteht aus drei Elementen und die Menge N aus zwei Elementen. Wieviel a) Abbildungen von M <u>in</u> N, b) Abbildungen von M <u>auf</u> N, c) Abbildungen von N <u>in</u> M, d) Abbildungen von N <u>auf</u> M gibt es?

6. Wieviel siebenstellige Telefonnummern gibt es? Wieviel von ihnen sind nur mit den Ziffern 0, 1, 2 und 3 gebildet?

7. Beweist, daß es mehr als eine Million Funktionen gibt, die nur die zwei Werte 0 und 1 annehmen und auf der Menge der ersten zwanzig natürlichen Zahlen definiert sind.

8. Die Menge M bestehe aus m Elementen, die Menge N aus n Elementen. Wieviel auf der Menge M definierte Funktionen gibt es, deren Werte der Menge N angehören?

Bemerkung: Die Aufgaben 8, 11, 18, 19 gehören zu den Grundaufgaben der Kombinatorik. Wir führen sie hier an, um zu zeigen, daß sich die Kombinatorik zu einem beträchtlichen Teil mit der Berechnung der Anzahl von Abbildungen dieser oder jener Art endlicher Mengen in endliche Mengen befaßt.

9. Auf wieviel Weisen kann man unterbringen: a) zwei Gäste auf zwei Stühlen, b) drei auf drei Stühlen, c) sechs auf sechs Stühlen?

10. Die Menge E bestehe aus sechs Elementen. Man zeige, daß es genau 720 Funktionen gibt, für die E sowohl Definitionsbereich als auch Wertevorrat ist.

11. Eine Abbildung einer endlichen Menge auf sich heißt eine *Permutation*. Die Anzahl der verschiedenen Permutationen einer Menge hängt nur von der Anzahl n ihrer Elemente ab und wird mit $n!$ bezeichnet. Zeigt, daß

$1!=1$, $2!=2$, $3!=6$, $4!=24$, $5!=120$, $6!=720$

ist. Gebt ein allgemeines Verfahren zur Berechnung von $n!$ an.

3. Umkehrbare Funktion

12°. Welche der folgenden Funktionen sind umkehrbar und welche nicht?

$f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=x^4$, $f_3(x)=x^{17}$, $f_4(x)=x^{18}$.

13. In einer Klasse sitzen auf jeder Bank höchstens zwei Personen. Wir ordnen jedem Schüler seinen Banknachbar zu, sitzt er aber allein, so ihn selbst. Was ist die Umkehrabbildung?

14. Jedem Wort der deutschen Sprache werde das mit denselben Buchstaben, aber in umgekehrter Reihenfolge geschriebene Wort zugeordnet (Wort wollen wir eine beliebige endliche Aufeinanderfolge von Buchstaben nennen). Ist diese Funktion umkehrbar? Wenn ja, was ist die Umkehrfunktion?

15. Eine Abbildung einer endlichen Menge auf sich ist stets umkehrbar. Gebt ein Beispiel für eine nichtumkehrbare Abbildung der Menge der natürlichen Zahlen auf sich.

16. Neun Touristen müssen in drei Booten untergebracht werden. Auf wieviel Weisen kann dies geschehen, wenn man fordert, daß

a) in jedem Boot drei Personen sind, b) in jedem Boot höchstens vier und mindestens zwei Personen sind, c) in jedem Boot mindestens ein Tourist fährt? (Die Boote tragen Nummern: Nr. 1, Nr. 2, Nr. 3.)

17*. Wenn die Wirte genügend viel Stühle besitzen, so ist es nicht üblich, auf einen Stuhl mehr als einen Gast zu setzen: die Menge der Gäste wird umkehrbar in die Menge der Stühle abgebildet. Auf wieviel Weisen können sich setzen, wenn es im Zimmer insgesamt sechs Stühle gibt: a) ein Gast, b) zwei Gäste, c) drei, d) vier, e) fünf, f) sechs Gäste?

18*. Umkehrbare Abbildungen einer endlichen Menge M in eine andere endliche Menge N heißen in der Kombinatorik *Variationen* (die Gäste werden auf die Stühle „verteilt"). Die Anzahl der Abbildungen einer Menge M in eine Menge N hängt nur von der Elementezahl m der Menge M und der Elementeanzahl n der Menge N ab und wird mit A_n^m bezeichnet. Zeigt, daß

$$A_1^1=1,\ A_2^1=A_2^2=2,\ A_3^1=3,$$
$$A_3^2=A_3^3=6,\ A_{10}^2=90$$

ist, und stellt eine allgemeine Regel zur Berechnung von A_n^m auf. Zeigt, daß stets $A_n^{n-1}=A_n^n$ ist.

19*. Aufgabe 16c läßt sich abstrakt formulieren: wieviel Abbildungen einer aus neun Elementen bestehenden Menge auf eine dreielementige Menge gibt es? Wir wollen mit D_n^m die Anzahl der Abbildungen einer n-elementigen Menge auf eine m-elementige Menge bezeichnen. Prüft nach, daß

$$D_3^2=6,\ D_4^2=12,\ D_4^3=36,\ D_n^n=n!$$

ist. Versucht, eine allgemeine Regel zur Berechnung von D_n^m zu geben (*das ist eine etwas schwierigere Aufgabe als die Aufgaben 8, 11* und *18*).

20*. Wieviel auf einer aus 28 Elementen bestehenden Menge definierte Funktionen gibt es, die jeden der vier Werte P, K, S und W je sechsmal annehmen?

Das ist die Aufgabe über die Anzahl der Möglichkeiten, im Februar die Dienste zwischen Petja, Kolja, Sascha und Wolodja gerecht zu verteilen (Beispiel 3, Heft 6/70, S. 124). *A. N. Kolmogorow*

4. Antworten, Hinweise, Lösungen

1. Natürlicher Definitionsbereich: a) $x\neq 0$, b) $x\leqq -1$; $x\geqq 1$.

4. a) 9; b) 8; c) 6.

5. a) 8; b) 6; c) 9; d) 0.

6. 10^7; 4^7.

8. n^m.

12. Umkehrbar sind f_1 und f_3.

13. und 14. Die Abbildung fällt mit ihrer inversen zusammen.

16. a) 1680; b) 9240; c) $18150=3^9-3\cdot 2^9+3$.

18. $A_n^m=n(n-1)\dots(n-m+1)$, wenn $m\leqq n$; $A_n^m=0$, wenn $m>n$.

20. $\dfrac{28!}{(7!)^4}$.

alpha fragt – Leser antworten

Bekannt sind die Formeln für die Summe der ersten n von Null verschiedenen natürlichen Zahlen, für die Summe der Quadrate dieser Zahlen und für die Summe der Kuben dieser Zahlen:

$$s_1 = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$s_2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$s_3 = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

(vgl. z. B. Tafelwerk, 7.–12. Klasse, S. 58).

Unser Leser, Herr *Michael Raschke*, Berlin, fragt nun, ob es eine allgemeine Formel für die Summe

$$s_k = 1^k+2^k+3^k+\dots+n^k$$

gibt, da man bei der Lösung vieler Probleme solche Summen berechnen muß.

Herr Dr. *K. Rosenbaum*, Pädagogische Hochschule Erfurt-Mühlhausen, beantwortet diese Frage und leitet mit Hilfe des binomischen Satzes eine Formel her, mit deren Hilfe man der Reihe nach die Summen $s_1, s_2, s_3, \dots, s_k$ berechnen kann. Es handelt sich dabei um eine sogenannte Rekursionsformel; d. h., man muß zunächst die Summen s_1, s_2, ..., s_{k-1} ermitteln, um die Summe s_k berechnen zu können.

Nach dem binomischen Satz (vgl. Tafelwerk, S. 57) gilt für alle von Null verschiedenen Zahlen k und n

$$\begin{aligned}
0^k &= (1-1)^k = 1^k-\tbinom{k}{1}1^{k-1}+\dots\\
&\quad +(-1)^{k-1}\tbinom{k}{k-1}\cdot 1+(-1)^k\cdot 1,\\
1^k &= (2-1)^k = 2^k-\tbinom{k}{1}2^{k-1}+\dots\\
&\quad +(-1)^{k-1}\tbinom{k}{k-1}\cdot 2+(-1)^k\cdot 1,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
(n-1)^k &= (n-1)^k=n^k-\tbinom{k}{1}n^{k-1}+\dots\\
&\quad +(-1)^{k-1}\tbinom{k}{k-1}\cdot n+(-1)^k\cdot 1.
\end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung wie oben

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1+2+\dots+n,\\
s_2 &= 1^2+2^2+\dots n^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
s_{k-1} &= 1^{k-1}+2^{k-1}+\dots+n^{k-1}
\end{aligned}$$

und erhalten durch Addition der Terme auf den linken und rechten Seiten der obigen Gleichungen

$$\begin{aligned}
0^k+1^k+\dots+(n-1)^k &= 1^k+2^k+\dots+n^k\\
&-\tbinom{k}{1}s_{k-1}+\tbinom{k}{2}s_{k-2}-\tbinom{k}{3}s_{k-3}+\dots\\
&+(-1)^{k-1}\tbinom{k}{k-1}s_1+(-1)^k n.
\end{aligned}$$

Wegen $\binom{k}{1}=k$, $\binom{k}{2}=\dfrac{k(k-1)}{2}$, $\binom{k}{3}=\dfrac{k(k-1)(k-2)}{6}, \dots, \binom{k}{k-1}=k$

folgt hieraus, weil die Summe auf der linken Seite gleich der Summe der ersten $n-1$ Summanden auf der rechten Seite ist,

$$n^k-ks_{k-1}+\frac{k(k-1)}{2}s_{k-2}-\frac{k(k-1)(k-2)}{6}s_{k-3}+\dots+(-1)^{k-1}ks_1+(-1)^k n = 0,$$

$$s_{k-1} = \frac{1}{k}\left\{n^k+\frac{k(k-1)}{2}s_{k-2}-\frac{k(k-1)(k-2)}{6}s_{k-3}+\dots+(-1)k^{-1}ks_1+(-1)^k n\right\}.$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir nun aus $s_1, s_2, \dots, s_{k-2}+(-1)^{k-1}ks_1$ s_{k-1} berechnen.

Eine solche Formel nennt man eine *Rekursionsformel*, weil man jeweils die Summe s_{k-1} durch „Zurücklaufen" aus den Summen $s_{k-2}, s_{k-3}, \dots, s_2, s_1$ berechnen kann.

Wir wenden diese Formel an und berechnen zunächst die schon erwähnten Summen s_1, s_2 und s_3.

Für $k=2$ erhalten wir

$$s_1 = \frac{1}{2}\{n^2+(-1)^2 n\} = \frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Für $k=3$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
s_2 &= \frac{1}{3}\{n^3+3s_1-n\} = \frac{1}{3}\left\{n^3+\frac{3n(n+1)}{2}-n\right\}\\
&= \frac{n}{6}(2n^2+3(n+1)-2),\\
s_2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Für $k=4$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
s_3 &= \frac{1}{4}\left\{n^4+\frac{4\cdot 3}{2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right.\\
&\quad \left.-\frac{4\cdot 3\cdot 2}{6}\,\frac{n(n+1)}{2}+n\right\}\\
&= \frac{1}{4}\{n^4+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n\}\\
&= \frac{n}{4}\{n^3+1+(n+1)(2n-1)\}\\
&= \frac{n(n+1)}{4}\{n^2-n+1+2n-1\}\\
&= \frac{n(n+1)(n^2+n)}{4},\\
s_3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.
\end{aligned}$$

Zum Abschluß berechnen wir noch s_4. Für $k=5$ *erhalten wir*

$$\begin{aligned}
s_4 &= \frac{1}{5}\left\{n^5+\frac{5\cdot 4}{2}\,\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right.\\
&\quad -\frac{5\cdot 4\cdot 3}{6}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&\quad \left.+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{24}\,\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}\\
&= \frac{n}{5}\left\{n^4-1+\frac{5}{2}n(n+1)^2-\frac{5}{3}(n+1)(2n+1)\right.\\
&\quad \left.+\frac{5}{2}(n+1)\right\}\\
&= \frac{n(n+1)}{30}\{6(n-1)(n^2+1)+15n(n+1)\\
&\quad -10(2n+1)+15\}\\
&= \frac{n(n+1)}{30}\{6n^3+9n^2+n-1\}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir auch die nicht in dem Tafelwerk enthaltene Formel erhalten:

$$s_4 = 1^4+2^4+3^4+\dots+n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.$$

Mathematik und Physik

alpha -Wettbewerb – Physik

Letzter Einsendetermin: 1. Oktober 1971

Liebe *alpha*-Leser!
In diesem Heft findet ihr zum ersten Mal Wettbewerbsaufgaben zur Physik. An der Lösung der Probleme kann sich jeder Leser beteiligen. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Richtlinie: Schuljahr 1970/71) Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit P ▪ 10/12 gekennzeichnet sind. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm mal 297 mm). Am Kopf der Lösung müssen stehen: Name, Vorname, Adresse der Schule und Klasse des Teilnehmers und Name seines Physiklehrers, der ihn im Schuljahr 1970/71 unterrichtete.

Die besten Lösungen werden von der Redaktion prämiert. Die Preisträger und die Namen der aktivsten Teilnehmer werden in Heft 6/71 veröffentlicht. Die Lösungen sind unter dem Kennwort „*alpha*-Wettbewerb" einzusenden an

Pädagogisches Institut Güstrow
Sektion Mathematik/Physik
26 Güstrow
Goldberger Str. 12

Aufgaben

P 6 ▪ 759 Zwischen zwei senkrecht zueinander stehenden ebenen Spiegeln steht ein Bleistift. Wie viele Bilder des Bleistifts erblickst Du

a) in jedem Spiegel,
b) insgesamt (Konstruktion)?

Wie viele Bilder seht man, wenn die Spiegel einen Winkel von 60° einschließen?

P 6 ▪ 760 Wenn man bei Frost nacheinander Holz und Eisen gleicher Temperatur berührt, erscheint das Eisen kälter.
Wie kommt das?

P 6 ▪ 761 Ein Fahrzeug 1 fährt vom Ort *A* zum Ort *B*. Seine Geschwindigkeit beträgt 50 km/h. Ein Fahrzeug 2 fährt vom Ort *C* zum Ort *D*. Seine Geschwindigkeit beträgt 60 km/h. Die Entfernung von *A* nach *B* sei 25 km, von *C* nach *D* 24 km. Beide Fahrzeuge starten zur gleichen Zeit.
Welches Fahrzeug ist zuerst am Ziel?

P 7 ▪ 762 In einem Teich schwimmt ein Boot, im Boot liegt ein großer Stein. Wie ändert sich der Wasserstand im Teich, wenn der Stein aus dem Boot in das Wasser geworfen wird?

P 7 ▪ 763 Von zwei gleichen, dünnen und luftdicht abgeschlossenen Glasbehältern ist einer mit Luft und der andere mit Wasser gefüllt. Mit einer Waffe wird zunächst auf das eine und dann auf das andere Gefäß geschossen. Was geschieht mit den Behältern?

P 7 ▪ 764 Eine Waage befindet sich im Gleichgewicht. Auf einer Waagschale stehen ein Glas Wasser und ein Stativ mit der angehängten Last und auf der anderen Wägestücke. Kommt die Waage aus dem Gleichgewicht, wenn man die Last ins Wasser taucht?

P 8 ▪ 765 Bestimme das Verhältnis der Massen eines Kupfer- und eines Aluminiumdrahtes! Beide Drähte haben gleiche Länge und gleichen Widerstand. Der spezifische Widerstand des Aluminiums ist doppelt so groß wie der des Kupfers. Die Dichte des Aluminiums beträgt $\frac{1}{3}$ der Dichte von Kupfer.

aus einem Lehrbuch der VAR

P 8 ▪ 766 Am Kraftwerk beträgt die Spannung zwischen dem Fahrdraht und den Schienen der Straßenbahn 550 V. Auf der Strecke befindet sich ein Triebwagen, der zum Fahren eine Mindestspannung $U = 500$ V braucht. Die Stromstärke beträgt 25 A. Bestimme den Abstand, in dem der Triebwagen vom Kraftwerk fahren kann. Der Widerstand des Fahrdrahtes beträgt je km 0,45 Ω, der Widerstand der Straßenbahnschienen ist 0,05 Ω je km.

aus einem Lehrbuch der VAR

P 8 ▪ 767 In der Mitte eines sehr großen zugefrorenen Sees wird ein Loch in das Eis geschlagen und ein Eisblock von 9 m Dicke herausgenommen. Welche Länge muß ein Seil haben, um vom Rand des Eisblockes bis ins Wasser zu reichen?

$\gamma_{Eis} = 0{,}9\,\frac{\text{p}}{\text{cm}^3} \qquad \gamma_{Wasser} = 1{,}0\,\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$

P 9 ▪ 768 Ein Radfahrer und ein LKW fahren gleichzeitig von den Endpunkten einer Strecke $\overline{AB}$ los. Der Radfahrer fährt von *A* nach *B*, der LKW von *B* nach *A* und ohne Aufenthalt zurück. Auf der Hinfahrt begegnet der LKW dem Radfahrer 5 km vor *A* und überholt ihn 15 Minuten später auf der Rückfahrt 10 km vor *B*. Beide Fahrzeuge bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit. Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ und die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge sind zu berechnen.

P 9 ▪ 769 Wie groß ist das scheinbare Gewicht eines Körpers mit der Masse *m*, der bei der Temperatur *t* in eine Flüssigkeit eingetaucht wird? Gegeben sind mit ϱ_0 die Dichte des Körpers bei 0 °C, mit ϱ'_0 die Dichte der Flüssigkeit bei 0 °C, mit γ der kubische Wärmeausdehnungskoeffizient des Körpers und mit *k* der Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit.

Aus: Gheorghiu, Probleme der Physik, SR Rumänien

P 9 ▪ 770 Von einer Höhe fallen 2 Körper in einem Intervall von 1 s herab. Wie ändert sich der Abstand zwischen ihnen während des Falls.

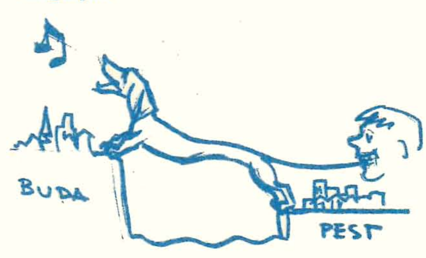
P 10/12 ▪ 771 Ein Pendel mit einem Gewicht von 25 p rückt aus der Ruhelage zur Seite. Dabei beträgt die Spannkraft im Faden 20 p. Berechnen Sie die Kraft, die das Pendel in die Ruhelage zurücktreibt!

P 10/12 ▪ 772 Zwei mathematische Pendel verrichten in einer Minute 10 bzw. 7 Schwingungen. Finden Sie das Verhältnis der Pendellängen!

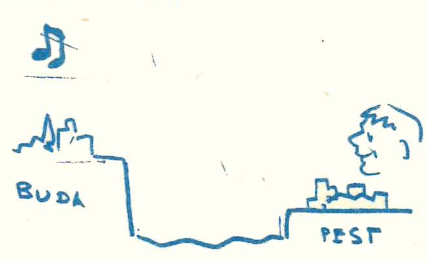
P 10/12 ▪ 773 Ein Körper gleitet ohne Reibung auf einer geneigten Ebene herab, der Winkel der Neigung verändert sich zur Horizontalen von 0° bis 90°. Die Basis *b* der geneigten Ebene verändert sich nicht.
Es ist die Abhängigkeit der Zeit des Heruntergleitens vom Winkel graphisch darzustellen! Bei welchem Winkel ist die Zeit des Heruntergleitens am kleinsten?

U. Walta

Telegraphie



Drahtlose Telegraphie



Zahlen ermitteln durch systematisches Untersuchen

▲1▲ Ermittle alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, die jeweils zugleich beide Gleichungen der nachfolgenden Aufgaben erfüllen.

1.1. $a+b=8$, $a-b=2$ 1.2. $a+b=19$, $a-b=48$

▲2▲ Ermittle alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen, die jeweils zugleich die drei Gleichungen der folgenden Aufgaben erfüllen.

2.1. $a+b+c = 11$, $a+b = 6$, $a-b = 4$ 2.2. $a+b+c = 62$, $b = a+2$, $c = 4 \cdot a$

▲3▲ Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen beträgt 36. Ermittle diese Zahlen!

▲4▲ Das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen beträgt 210. Ermittle diese Zahlen!

▲5▲ Die natürlichen Zahlen a, b, c und d seien paarweise nicht gleich, und es gelte $2<a<b<c<d$ und $a+b+c+d=25$. Welche natürlichen Zahlen erfüllen die gestellten Bedingungen?

▲6▲ Anstatt eine gewisse natürliche Zahl mit 6 zu multiplizieren und zum Produkt 3 zu addieren, multipliziert Udo versehentlich diese Zahl erst mit 3 und addiert dann 6. Trotzdem erhält er dasselbe Ergebnis. Um welche Zahl handelt es sich?

▲7▲ Ermittle alle natürlichen Zahlen a, für die $4 \cdot a+1$ durch 5 teilbar und außerdem kleiner als 20 ist!

▲8▲ Auf einer Wiese weiden Gänse und Schafe. Die Tiere haben zusammen 40 Köpfe und 96 Beine. Wieviel Gänse und wieviel Schafe sind es?

▲9▲ Für insgesamt 40 M wurden Artikel eingekauft, und zwar zum Einzelpreis von 5 M oder 7 M. Gib alle Lösungen an!
Statt der 40 M stehen 71 M zur Verfügung.
Statt der 40 M stehen 98 M zur Verfügung.

▲10▲ Beim Durchnumerieren der Seiten eines Buches wurden genau
a) 55 Ziffern,
b) 87 Ziffern,
c) 213 Ziffern gedruckt.
Wieviel Seiten hatte jeweils das Buch?

D. Michels/Th. Scholl

Die Teilbarkeit durch 7

In der Klasse 6 werden verschiedene Teilbarkeitsregeln erarbeitet, und besonders wichtig sind dabei die Teilbarkeitsregeln für Primzahlen (2, 3, 5) und ihre Potenzen (4, 8, 9, 25). Die nächstgrößeren Primzahlen nach 5 sind 7 und 11, und vielleicht hast auch du dich schon gefragt, ob es auch für 7 und 11 solche Teilbarkeitsregeln gibt. In der Artikelserie „Rechnen mit Resten" von *G. Lorenz* in dieser Zeitschrift, deren Inhalt für die folgenden Überlegungen als bekannt vorausgesetzt wird, ist die Teilbarkeitsregel für 11 enthalten (Heft 6/1969, S. 126). Um zu einer Teilbarkeitsregel für 7 zu gelangen, betrachten wir die ziffernmäßige Darstellung einer natürlichen Zahl

$$N = a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0$$

etwas näher; N ist also $(n+1)$-stellig. Bei der ausführlichen Schreibweise beginnen wir am besten mit den Einern:

(1) $N = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n$

Für den angestrebten Satz über die Teilbarkeit durch 7 ist aber eine Zusammenfassung zu Dreiergruppen zweckmäßiger:

(2) $N = A_0 + A_1 \cdot 1000 + A_2 \cdot 1000^2 + \ldots + A_{k-1} \cdot 1000^{k-1} + A_k \cdot 1000^k$

Die Zahlen A_i $(i=0, \ldots, k)$ entstehen durch Einteilung der Zahl N von rechts nach links in Gruppen zu je drei Ziffern. Jede der Zahlen A_i selbst kann einstellig, zweistellig oder dreistellig sein, und selbstverständlich gilt $k<n$. (Genauer ist $\frac{n}{3}-1<k\leq\frac{n}{3}$.)

Betrachten wir als Beispiel

$$N = 455\,083\,002\,843,$$

so erhalten wir gemäß (1) die Darstellung

$N = 3+4 \cdot 10+8 \cdot 10^2+2 \cdot 10^3+0 \cdot 10^4+ +0 \cdot 10^5+3 \cdot 10^6+8 \cdot 10^7+0 \cdot 10^8+ +5 \cdot 10^9+5 \cdot 10^{10}+4 \cdot 10^{11}$ (also $n=11$).

Einteilung in Dreiergruppen gemäß (2) liefert $N = 843+2 \cdot 1\,000+83 \cdot 1000^2+455 \cdot 1000^3$; hier ist also $k=3$.

Die Darstellung (2) einer natürlichen Zahl N ist vorteilhaft, da an Kongruenzen

$$\begin{array}{lll}
10 \equiv 3\,(7), & 10^7 \equiv 3\,(7), & 10^{13} \equiv 3\,(7),\\
10^2 \equiv 2\,(7), & 10^8 \equiv 2\,(7), & 10^{14} \equiv 2\,(7),\\
10^3 \equiv -1\,(7), & 10^9 \equiv -1\,(7), & 10^{15} \equiv -1\,(7),\\
10^4 \equiv 4\,(7), & 10^{10} \equiv 4\,(7), & 10^{16} \equiv 4\,(7),\\
10^5 \equiv 5\,(7), & 10^{11} \equiv 5\,(7), & 10^{17} \equiv 5\,(7),\\
10^6 \equiv 1\,(7), & 10^{12} \equiv 1\,(7), & 10^{18} \equiv 1\,(7),
\end{array}$$

erkennbar ist, daß nur die Potenzen 10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}, 10^{15}, ... abwechselnd -1 und 1 als Rest ergeben. Deshalb stellen wir die soeben untersuchten Potenzen, die den Rest -1 und 1 ergaben, anders dar.

$$\begin{array}{ll}
10^3 = 1\,000 \equiv -1\,(7), & 10^{12} = 1\,000^4 \equiv 1\,(7),\\
10^6 = 1\,000^2 \equiv 1\,(7), & 10^{15} = 1\,000^5 \equiv -1\,(7),\\
10^9 = 1\,000^3 \equiv -1\,(7), & 10^{18} = 1\,000^6 \equiv 1\,(7),
\end{array}$$

allgemein:

$$1\,000^{2g} \equiv 1\,(7)$$
$$1\,000^{2g+1} \equiv -1\,(7) \quad g=1, 2, 3, \ldots$$

Die Darstellung (2) und die Gesetzmäßigkeiten über das Rechnen mit Kongruenzen führen uns nun zu einer Teilbarkeitsregel für 7:

$N \equiv A_0 + A_1 \cdot (-1) + A_2 \cdot 1 + A_3 \cdot (-1) + +A_4 \cdot 1 + A_5 \cdot (-1) + \ldots (7)$ oder kürzer

$N \equiv A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - A_5 \ldots \quad (7).$

Verwenden wir für den Term auf der rechten Seite der letzten Kongruenz die leicht verständliche Bezeichnung „alternierende Dreiergruppenquersumme (von N)", so können wir den erhaltenen Sachverhalt in folgendem Satz aussprechen:

Jede natürliche Zahl läßt bei Division durch 7 denselben Rest wie ihre alternierende Dreiergruppenquersumme.

Speziell ergibt das die Teilbarkeitsregel: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn ihre alternierende Dreiergruppenquersumme durch 7 teilbar ist.

Für unsere Beispielzahl $n=455\,083\,002\,843$ erhalten wir als Dreiergruppenquersumme

$843-2+83-455=926-457=469,$

und wegen $469 \equiv 0$ (7) (es ist ja $469=67 \cdot 7$) ist N durch 7 teilbar.

Allerdings läßt sich hieraus erkennen, daß die Anwendung der Teilbarkeitsregel für 7 sehr umständlich ist und die Regel mehr theoretischen als praktischen Wert besitzt.

E. Naumann

Mathematische Denkaufgaben

● Meine Handschuhe und Socken lagen in einem dunklen Zimmer durcheinander, und zwar lagen drei Paar Handschuhe von verschiedener Machart und zehn Paar helle und dunkle Socken zusammen. Wieviel Handschuhe und wieviel Socken mußte ich (mindestens) herausgreifen, damit ich ein Paar Handschuhe von gleicher Machart und ein Paar Socken von gleicher Farbe erhielt?

● In einer Kiste liegen vier Sorten Äpfel, von jeder Sorte gleich viel und zusammen 100. Wieviel Äpfel muß man ohne Hinzusehen herausnehmen, damit man sicher ist, daß von jeder Sorte mindestens zehn Äpfel dabei sind?

● Iwanow wurde gefragt, wen denn das Gemälde, das an der Wand hängt, darstellt. Da antwortete er: „Der Vater des auf dem Bilde Dargestellten ist der einzige Sohn des Vaters des Antwortenden." Wer ist portraitiert worden?

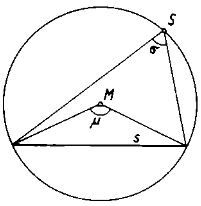
● Ein Lehrer hat die Arbeiten von drei Schülern, Alexejew, Wassiljew und Sergejew, durchgesehen, aber nicht mitgebracht. Er sagte zu den Schülern: „Ihr habt in euren Arbeiten unterschiedliche Leistungen gezeigt („3", „4", „5" – Zensur „5" entspricht unserer Zensur „1", d. Red.). Sergejew hat keine „5" und Wassiljew keine „4". Aber ich glaube, Alexejew hat eine „4". Später stellte sich heraus, daß der Lehrer dem einen Schüler die richtige Zensur gesagt hatte, sich aber bei den beiden anderen geirrt hatte. Welche Zensuren hatten die Schüler?

K. A. Rupassow, Staatliches Pädagogisches Institut Tambow, UdSSR

Ein interessanter geometrischer Beweis

In Olympiadeklasse 10, 4. Stufe (DDR-Olympiade) der IX. OJM wurde die folgende Aufgabe (10;5) gestellt (siehe Heft 3/70):

Es seien k' und k'' zwei voneinander verschiedene Kreise durch die Eckpunkte A und B des Dreiecks $\triangle ABC$, deren Mittelpunkte M' bzw. M'' beide auf dem Umkreis k von $\triangle ABC$ liegen. Beweisen Sie, daß der Mittelpunkt P des Inkreises von $\triangle ABC$ entweder auf k' oder auf k'' liegt!



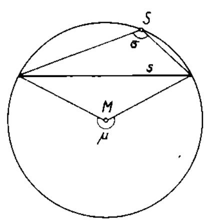


Bild 1 Die Scheitelpunkte M und S liegen in einer gemeinsamen Halbebene bezüglich der Kreissehne s.

Bild 2 Die Scheitelpunkte M und S liegen in entgegengesetzten Halbebenen bezüglich der Kreissehne s.

Lösung der Aufgabe

Vorbemerkung: Bei der Beweisführung ist die Kenntnis des Satzes über Zentri- und Peripheriewinkel im Kreis vorauszusetzen. Er lautet: *Im Kreis ist der Zentriwinkel doppelt so groß wie jeder Peripheriewinkel über der gleichen Sehne;* d. h. es gilt $\mu = 2\sigma$. Für die Messung der Winkel sind die in den Bildern 1 und 2 angegebenen Vorschriften zu den beiden wesentlich verschiedenen Fällen einzuhalten.

Beweisführung: Zunächst zeichnet man eine Planfigur (Bild 3) entsprechend den Vorgaben der Aufgabenstellung. Der Inkreismittelpunkt P des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt im Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden. Wir zeichnen zunächst die Winkelhalbierende w_γ ein. Diese schneidet k' in den Punkten 1 und 2. Wenn die eingangs aufgestellte Behauptung wahr sein soll, dann muß der Punkt 1 mit dem Inkreismittelpunkt P identisch sein. Der Punkt 2 liegt außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$ und scheidet deshalb von der Betrachtung aus.

Der geforderte Beweis ist also erbracht, wenn gezeigt wird, daß der Punkt 1 auf w_α (oder auf w_β) liegt.

γ ist ein Peripheriewinkel von k bezüglich der Sehne $\overline{AB}$. Da M' nach Konstruktion den Kreisbogen $\widehat{AB}$ halbiert, gilt $\overline{AM'} = \overline{M'B}$. Somit liegt M' auf w_γ. Wir setzen $\sphericalangle CAB = \alpha$ und $\sphericalangle CM'B = \mu$. Da α und μ Peripheriewinkel von k bezüglich der gleichen Sehne $\overline{BC}$ darstellen und in der gleichen Halbebene bezüglich dieser Sehne liegen, gilt $\alpha = \mu$. (1)

Ferner setzen wir $\sphericalangle 1AB = \delta$. Nun sind δ ein Peripheriewinkel von k' und μ ein Zentriwinkel von k' bezüglich der gemeinsamen Sehne $\overline{B1}$. Folglich gilt $\mu = 2\delta$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $\alpha = 2\delta$ oder $\delta = \frac{\alpha}{2}$;

d. h. die Verbindungslinie $(1A)$ liegt in der Winkelhalbierenden w_α.

Der auf k' liegende Punkt 1 ist also identisch mit dem Inkreismittelpunkt P, was zu beweisen war.

Hätte man C auf k im Inneren von k' angenommen, wäre der Beweis völlig analog gelaufen. Eine Fallunterscheidung erübrigt sich damit.

Schlußbetrachtung: Unbefriedigend an der Aufgabenstellung erscheint die Tatsache, daß man erst mit Hilfe der Planfigur entscheiden kann, welcher der beiden Kreise k' oder k'' als Ort für den Inkreismittelpunkt P nur in Betracht kommen kann. Auch die Ausschaltung des Punktes 2 von der weiteren Betrachtung läßt sich nicht befriedigend rechtfertigen. Diese nur unzureichend motivierbaren Einschränkungen entfallen, wenn man auch die Ankreise des Dreiecks ABC mit in die Untersuchung einbezieht. Werden der Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks als gleichwertig betrachtet, entfällt die differenzierte Behandlung von k' und k'', und der zyklische Charakter des hier vorliegenden Sachverhaltes tritt deutlicher vor Augen.

In Bild 4 sind zu dem Dreieck $A_1A_2A_3$ der Umkreis k_u sowie die Kreise k' und k'' gemäß der vorgelegten Aufgabenstellung eingezeichnet. Die Verbindungsgerade (A_3M') schneidet k' in den Punkten J_0 (Mittelpunkt von k_0) und J_3 (Mittelpunkt von k_3).

Die Verbindungsgerade (A_3M'') schneidet k'' in J_1 (Mittelpunkt von k_1) und J_2 (Mittelpunkt von k_2). Jeder der vier Kreise k_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ berührt jede der drei Dreieckseiten. Erst in Bild 4 ist jene Aussage geometrisch voll ausgeschöpft, die in der vorliegenden Aufgabe zu beweisen war.

An den Beweisen oder Beweisversuchen der Teilnehmer der Olympiadeklasse 10 der IX. OJM war vielfach zu bemängeln, daß nicht eindeutig auseinandergehalten wurde, was nach Konstruktion vorausgesetzt wurde und was man zu beweisen suchte. Voraussetzung und Behauptung müssen für jeden Schritt einer längeren Beweisführung klar auseinandergehalten werden. Z. B. wurde nach unserem Vorgehen in dem einen Schritt der Punkt 1 mit A verbunden und dann gezeigt, daß $(1A)$ in der Winkelhalbierenden w_α liegt. Im Bild wird dies dadurch zum Ausdruck gebracht, daß man die Bezeichnung w_α in Klammern setzt. In gleicher Weise ist es für den Inkreismittelpunkt P geschehen.

Beweise lassen sich vielfach in verschiedener Richtung aufziehen, jedoch muß die Richtung der Beweisführung klar sein.

E. Schröder

Bild 3

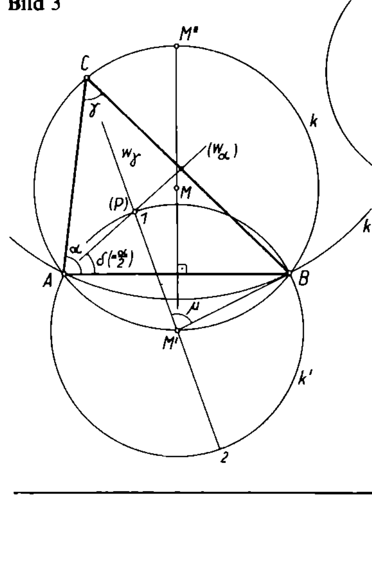
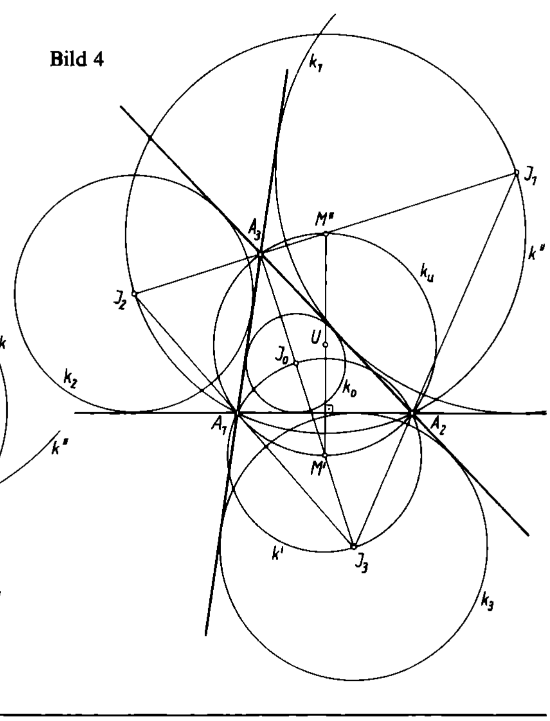


Bild 4



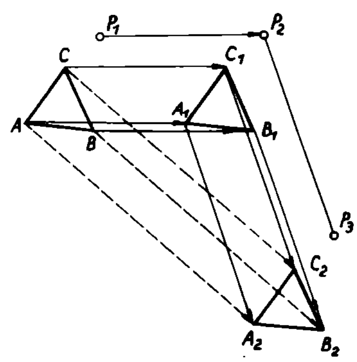
X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Kreis-, Bezirks- und DDR-Olympiade

Kreisolympiade

Olympiadeklasse 5

1. Es ist auch zulässig, sofort die Verschiebung $\overline{P_1P_3}$ durchzuführen.



2. Aus $8 - ✉ = 3$ folgt $✉ = 5$. Setzt man für ✉ in Spalte 3 jeweils 5 ein, so erhält man $\square = 2$ und $\diamond = 0$. Schließlich ermittelt man auf diese Weise aus Zeile 1, daß $\triangle = 7$ sein muß. Tatsächlich erfüllen die angegebenen Ziffern alle Bedingungen der Aufgabe; denn in

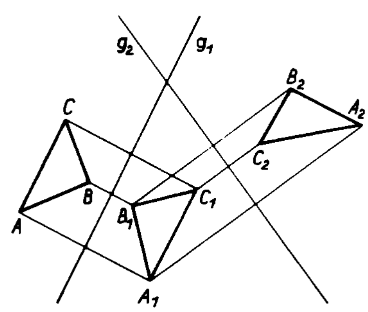
$$\begin{array}{c} 27+8=35 \\ - \quad - \quad - \\ \underline{10+5=15} \\ 17+3=20 \end{array}$$

sind alle waagerecht und senkrecht stehenden Aufgaben richtig gelöst.

3. Es gilt 2,6 ha = 260 a. Da auf 1 ha = 100 a durchschnittlich 150 Apfelbäume standen, standen auf 10 a durchschnittlich 15 Apfelbäume, auf 260 a mithin 26mal soviel, das sind insgesamt 390 Apfelbäume. Diese 390 Apfelbäume trugen 390mal soviel, wie jeder Apfelbaum durchschnittlich trug, das sind wegen $390 \cdot 50 = 19\,500$ insgesamt 19 500 kg Äpfel. Wegen 19 500 kg = 19,5 t wurden somit auf der Plantage 19,5 t Äpfel geerntet.

4. Da bei einem Teilnehmerbeitrag von 1,40 Mark genau 1,10 Mark zuwenig, bei einem Beitrag von 1,50 Mark genau 1,10 Mark zuviel zusammengekommen wäre, so hätte das gesammelte Geld genau das Doppelte der Kosten des einen Sammelfahrscheines betragen, wenn jeder Teilnehmer 2,90 Mark eingezahlt hätte. Folglich wären genau die Kosten des einen Sammelfahrscheines zusammengekommen, wenn jeder der Teilnehmer 1,45 Mark bezahlt hätte. Jeder der Teilnehmer hatte also 0,05 Mark zuviel bezahlt. Dieser Betrag wurde jedem zurückerstattet. Wegen $110 : 5 = 22$ handelte es sich um 22 *Junge Mathematiker*, die an dieser Exkursion teilnahmen.

1.



2. a) Da die Raumschiffgruppe in 88 Minuten durchschnittlich 41 000 km zurücklegte, legte sie in jeder Minute wegen $41\,000 : 88 \approx 466$ rund 466 km, in 60 Minuten also rund $60 \cdot 466$ km*, das sind rund 28 000 km* zurück.

* *Anmerkung:* Eigentlich müßte an diesen Stellen mit Hilfe einer Fehlerrechnung bewiesen werden, daß die Rundung richtig ist. Dieser an sich erforderliche Nachweis wird aber vom Schüler nicht verlangt.

b) Da die Raumschiffgruppe in jeder Minute 466 km = 466 000 m zurücklegte, legte sie in jeder Sekunde den 60. Teil davon, also wegen $466\,000 : 60 \approx 7\,767$ rund 7 800 m* zurück.

3. (1) Ist nach Ergänzung der beiden fehlenden Ziffern eine durch 36 teilbare Zahl entstanden, so ist diese sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar.

(2) Ist eine mehrstellige Zahl durch 4 teilbar, so stellen ihre letzten beiden Ziffern (in gleicher Reihenfolge) ebenfalls eine durch 4 teilbare Zahl dar. Daher kann als Einerziffer nur 0; 4 oder 8 eingesetzt werden.

(3) Ist eine Zahl durch 9 teilbar, so ist es auch ihre Quersumme.

Nun beträgt die Summe der drei gegebenen Ziffern 9. Lautet daher die Einerziffer

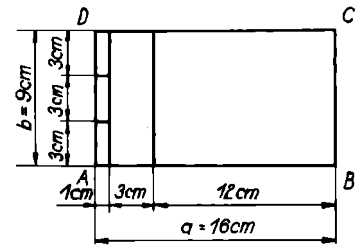
$$\left.\begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 8 \end{array}\right\} \text{ so kann die Hunderterziffer nur } \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ oder } 9 \\ 5 \\ 1 \end{array}\right\} \text{ sein.}$$

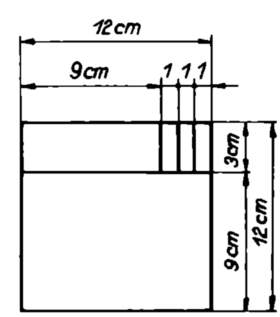
Also können nur die Zahlen 52 020; 52 920; 52 524; 52 128 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Die Probe zeigt, daß sie dies auch sämtlich tun.

4. (Das Rechteck $ABCD$ hat laut Aufgabe einen Flächeninhalt von $9\,\text{cm} \cdot 16\,\text{cm} = 144\,\text{cm}^2$. Da das Quadrat den gleichen Flächeninhalt haben muß, und da 12 die einzige natürliche Zahl ist, deren Quadratzahl 144 beträgt, so muß seine Seite 12 cm lang sein.)

Anmerkung: Da laut Aufgabe nur die Angabe einer Möglichkeit gefordert war, sind derartige Überlegungen für eine vollständige Lösung nicht erforderlich.

Eine mögliche Zerlegung ist die in der Abb. dargestellte.





Olympiadeklasse 7

1. Aussage (1) ist wahr, weil höchstens 30 % aller Teilnehmer beide Abzeichen erworben haben konnten und 30 % weniger als die Hälfte von 70 % sind.

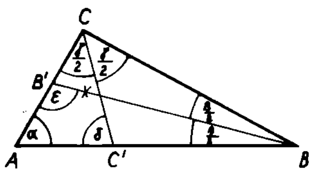
Bei Aussage (2) kann allein mit den vorliegenden Angaben nicht entschieden werden, ob sie wahr oder falsch ist. Sie ist genau dann wahr, wenn jeder Teilnehmer genau ein Abzeichen erworben hat.

Aussage (3) ist falsch, weil höchstens 30 % aller Teilnehmer beide Abzeichen erworben haben konnten, also mindestens 40 % aller Teilnehmer nur das Sportabzeichen erhielten.

Aussage (4) ist wahr, weil es (bereits vor, also erst recht) nach einer Erhöhung der Anzahl der Sportabzeichenträger von diesen mehr gibt als Träger des Touristenabzeichens.

2. Laut Voraussetzung gilt $\alpha = 60°$. Dann gilt unter Benutzung des Winkelsummensatzes ($\triangle ABC$)

$\beta + \gamma = 180° - 60° = 120°$.



Nach dem Außenwinkelsatz gilt ferner:

$$\varepsilon = \gamma + \frac{\beta}{2} \quad (\triangle B'BC)$$

sowie $\delta = \beta + \frac{\gamma}{2}$. ($\triangle C'BC$) Daraus folgt

$$\varepsilon + \delta = \frac{3}{2}(\beta + \gamma) = \frac{3}{2} \cdot 120° = 180°,$$

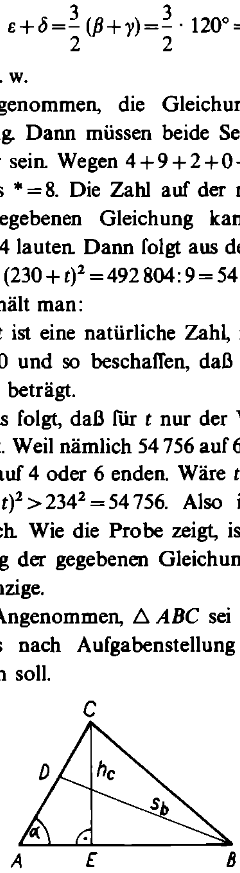
w. z. b. w.

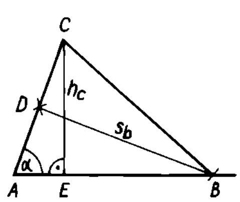
3. Angenommen, die Gleichung hat eine Lösung. Dann müssen beide Seiten durch 9 teilbar sein. Wegen $4+9+2+0+4=19$ folgt daraus $* = 8$. Die Zahl auf der rechten Seite der gegebenen Gleichung kann also nur 492 804 lauten. Dann folgt aus der Gleichung weiter $(230+t)^2 = 492\,804 : 9 = 54\,756$, und daher erhält man:

$230+t$ ist eine natürliche Zahl, nicht kleiner als 230 und so beschaffen, daß ihr Quadrat 54 756 beträgt.

Daraus folgt, daß für t nur der Wert 4 möglich ist. Weil nämlich 54 756 auf 6 endet, kann t nur auf 4 oder 6 enden. Wäre $t > 4$, so wäre $(230+t)^2 > 234^2 = 54\,756$. Also ist nur $t = 4$ möglich. Wie die Probe zeigt, ist $t = 4$; $* = 8$ Lösung der gegebenen Gleichung, und zwar die einzige.

4. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll.





Der Mittelpunkt von AC sei D, der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe sei E. Dann liegt E wegen $\alpha < 90°$ auf dem von A ausgehenden Strahl durch B, und es läßt sich das Teildreieck $\triangle AEC$ aus h_c, α und dem rechten Winkel $\sphericalangle AEC$ konstruieren. Punkt B liegt erstens auf dem von A ausgehenden Strahl durch E und zweitens auf dem Kreis mit s_b um D.

(II) Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren das Dreieck $\triangle AEC$ aus h_c, α und dem rechten Winkel $\sphericalangle AEC$.

(2) Wir konstruieren den Mittelpunkt D der Strecke AC.

(3) Wir konstruieren den von A ausgehenden Strahl durch E.

(4) Wir schlagen um D mit s_b den Kreis. Schneidet er den Strahl AE, so sei B einer der Schnittpunkte.

(III) Beweis, daß jedes auf diese Weise konstruierbare Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach Konstruktion ist $\overline{DB} = s_b$, $\overline{CE} = h_c$ und der Winkel $\sphericalangle CAB$ hat die Größe α. Ferner ist D der Mittelpunkt, also BD die Seitenhalbierende von AC. Schließlich ist nach Konstruktion $CE \perp AB$, also CE auf AB und damit die auf der Geraden durch A und B senkrechte Höhe.

(IV) Wegen $\alpha < 90°$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium *sww* eindeutig. Ferner ist (2) stets eindeutig möglich, ebenso (3), da wegen (1) $A \neq E$ ist.

Schließlich ist auch (4) nach *sww* eindeutig möglich, da für die gegebenen Größen α und h_c die Strecke DA kleiner als s_b ausfällt. Folglich ist die gesamte Konstruktion mit den gegebenen Stücken eindeutig.

Olympiadeklasse 8

1. Die in die Felder $A, B, C, D, E, F, G, H, K$, eingetragenen Zahlen seien $a, b, c, d, e, f, g, h, k$, genannt.

Dann gilt für

$$s_1 = a+b+c+d,\ s_2 = d+e+f+g,\ s_3 = g+h+k+a \quad (1)$$

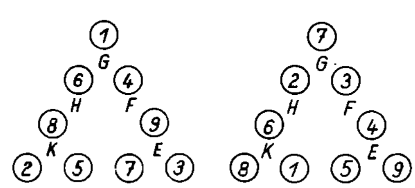
Laut Aufgabenstellung $s_1 = s_2 = s_3$ und (2)

$a+b+c+d+e+f+g+h+k = 45$ (3).

Aus (1), (2) und (3) folgt

$3s_1 = s_1 + s_2 + s_3 = 45 + a + d + g$.

Daher ist $3s_1$ und folglich s_1 dann am kleinsten (bzw. am größten), wenn jeweils dasselbe für die Summe $a+d+g$ gilt. Die kleinste (bzw. größte) Summe, die aus drei verschiedenen der natürlichen Zahlen 1, …, 9 gebildet werden kann, ist $1+2+3=6$ (bzw. $7+8+9=24$). Daher kann der kleinste Wert von s_1 nicht kleiner als $(45+6):3=17$ sein [bzw. der größte nicht größer als $(45+24):3=23$]. Wenn man nun noch je eine der in der Aufgabenstellung beschriebenen Eintragungen finden kann, bei denen $s_1 = 17$ (bzw. $s_1 = 23$) wird, so ist einerseits gezeigt, daß diese beiden Werte schon selbst der kleinste bzw. größte Wert von s_1 sind, und andererseits sind damit auch zwei Möglichkeiten derart gefunden, wie es in b) verlangt war.



2. Laut Aufgabe gilt:

$\overline{AB'} = \overline{B'C}$ und $\overline{MB'} = \overline{BM}$.

Die Parallele durch B' zu AA' ist für das Dreieck $\triangle AA'C$ eine Mittelparallele. Sie schneidet BC in einem Punkt, der zwischen A' und C liegt und A'' genannt sei. Dann gilt nach einem der Strahlensätze

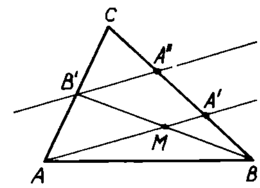
$\overline{BA'} : \overline{A'A''} = \overline{BM} : \overline{MB'} = 1:1$ (1)

$\overline{A'A''} : \overline{A''C} = \overline{AB'} : \overline{B'C} = 1:1$ (2)

Aus (1) und (2) folgt

$\overline{BA'} = \overline{A'A''} = \overline{A''C}$ und daraus

$\overline{BC} = 3\,\overline{BA'}$, w. z. b. w.



3. Das Gewicht des Kupferanteils in der Legierung sei x kp. Dann beträgt das Gewicht des Zinkanteils $(216-x)$ kp.

Beim Eintauchen in Wasser beträgt der Gewichtsverlust des Kupferanteils $\frac{1}{9}x$ kp und der des Zinkanteils $\frac{1}{7}(216-x)$ kp. Daher gilt:

$\frac{1}{9}x + \frac{1}{7}\cdot(216-x) = 26$, woraus man

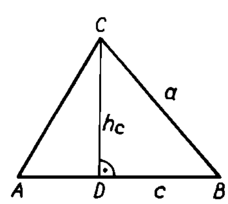
$7x + 9(216-x) = 63 \cdot 26$,

also $2x = 9 \cdot 216 - 63 \cdot 26 = 9 \cdot 34$

und daraus $x = 153$ erhält.

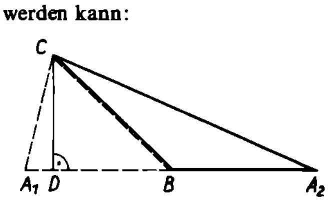
Der Kupferanteil kann daher nur 153 kp, der Zinkanteil nur 216 kp − 153 kp = 63 kp betragen haben. Wegen $153:216 \approx 0{,}708$ betrug der prozentuale Anteil des Kupfers rund 71 %, der des Zinks rund 29 %.

4. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.



Der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe sei D. Dann enthält das Teildreieck $\triangle CDB$, sofern es nicht mit $D = B$ entartet ist, als bekannte Stücke a, h_c und den rechten Winkel $\sphericalangle CDB$. Punkt A liegt erstens auf der Geraden durch B und D und zweitens auf dem Kreis um B mit c.

(II) Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(1) Wir konstruieren das Teildreieck $\triangle CDB$ aus $\overline{BC}=a$, $\overline{CD}=h_c$ und dem rechten Winkel $\sphericalangle CDB$. Der Entartungsfall $D=B$ tritt nicht auf, da für die gegebenen Werte $h_c<a$ gilt.
(2) Wir zeichnen die Gerade durch D und B.
(3) Wir schlagen den Kreis um B mit c. Schneidet er die Gerade durch D und B, so sei A einer der Schnittpunkte.
(III) Beweis, daß jedes so erhaltene Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach Konstruktion ist $\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=c$, $\overline{CD}=h_c$ und CD die auf der Geraden durch A und B senkrechte Höhe.
(IV) Wegen $h_c<a$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium *ssw* eindeutig möglich, da der gegebene rechte Winkel der größeren Seite gegenüberliegt. (Wie sich (1) [und (2)] für $h_c=a$ gestalten würde, braucht bei den gegebenen Werten nicht untersucht zu werden.) Konstruktionsabschnitt (2) ist stets eindeutig möglich, da sich wegen $h_c<a$ bei (1) $D\neq B$ ergeben hatte. Schließlich ergibt (3) stets zwei verschiedene Punkte A_1 und A_2. Da nun der wegen $h_c<a$ spitze Winkel $\sphericalangle DBC$ in dem einen der beiden Dreiecke $\triangle A_1BC$, $\triangle A_2BC$ als Innenwinkel, in dem anderen als Außenwinkel bei B auftritt, so ist das eine dieser Dreiecke bei B spitzwinklig, das andere bei B stumpfwinklig; folglich sind diese beiden Dreiecke nicht kongruent (bei gleicher Reihenfolge A_1B, C bzw. A_2, B, C homologer Punkte).
Anmerkung: Da nach dem Außenwinkelsatz der Winkel $\sphericalangle DBC$ größer ist als jeder der beiden spitzen Winkel des bei B stumpfwinkligen unter den Dreiecken $\triangle A_1BC$, $\triangle A_2BC$, so sind diese beiden Dreiecke auch nicht kongruent bei anderer Reihenfolge homologer Punkte. Jedoch ist dieser Nachweis im Sinne der Aufgabenstellung nicht erforderlich.
Somit besitzt die Aufgabe genau diese beiden Dreiecke als Lösung.

Olympiadeklasse 9

1. Angenommen, C hätte den Brief nicht. Dann wäre C (2) falsch. Also folgt, da laut Aufgabe von den drei Aussagen, die C gemacht hat, wenigstens zwei wahr sind, daß C (3) wahr sein müßte. Daher wären alle Aussagen von B und wegen B (2) auch alle Aussagen von A wahr. Wegen B (1) und A (2) müßte mithin doch C den Brief haben. Dieser Widerspruch beweist, daß die Annahme, C hätte den Brief nicht, falsch war.
Also verbleibt als einzige Möglichkeit nur die Annahme: C hat den Brief.
2. b) Angenommen, a und b seien zwei derartige natürliche Zahlen. Dann gilt:

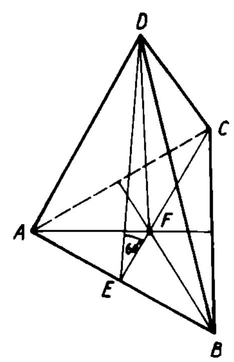
$$\left.\begin{array}{l} a = u^2+v^2 \\ b = x^2+y^2 \end{array}\right\} \text{ mit natürlichen Zahlen } u, v, x, y \text{ also}$$

$$\begin{aligned} a\cdot b &= (u^2+v^2)(x^2+y^2) \\ &= u^2x^2+u^2y^2+v^2x^2+v^2y^2 \\ &= (u^2x^2+v^2y^2)+(u^2y^2+v^2x^2), \\ &= (u^2x^2+2uvxy+v^2y^2)+(u^2y^2 \\ &\quad -2uvxy+v^2x^2), \\ &= (ux+vy)^2+(uy-vx)^2 \quad (1.1) \\ &= (ux+vy)^2+(vx-uy)^2 \quad (1.2) \end{aligned}$$

Da entweder $(uy-vx)$ oder $(vx-uy)$ und sämtliche der Zahlen u, v, x, y natürliche Zahlen sind, stehen auch in den Klammern von (1.1) bzw. (1.2) natürliche Zahlen, d. h. $a\cdot b$ ist als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellbar.
a) Es gilt z. B. für $a=5$ und $b=13$:
$5=1^2+2^2$; $13=2^2+3^2$
$5\cdot 13=65=1^2+8^2$
3. a) Angenommen, es gäbe ein solches x_0. Dann gilt $2\cdot x_0=x_0+2$, woraus man $x_0=2$ erhält. Tatsächlich ist hierfür die verlangte Bedingung wegen $2\cdot 2=2+2$ erfüllt.
b) Angenommen, es gäbe ein solches x_0. Dann gilt
$2(mx_0+n) = m(x_0+2)+n$, also $mx_0=2m-n$ und daher wegen $m\neq 0$

$$x_0 = 2-\frac{n}{m}.$$

Tatsächlich ist hierfür die verlangte Bedingung wegen $2\left[m\left(2-\frac{n}{m}\right)+n\right]$ $=m\left(2-\frac{n}{m}+2\right)+n$ erfüllt, da sie dasselbe wie $4m=4m$ besagt.
4. Für das Volumen V der Pyramide mit den Ecken A, B, C, D gilt $V=\frac{1}{3}G\cdot h$, wobei G der Inhalt der Grundfläche und h die Länge der Pyramidenhöhe ist. Laut Aufgabe ist die Grundfläche die Fläche des gleichseitigen Dreiecks $\triangle$ ABC. Für den Flächeninhalt G dieses Dreiecks gilt $G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.



Es sei F der Fußpunkt der Pyramidenhöhe. Da F nach Voraussetzung mit dem Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ zusammenfällt, schneidet der von C ausgehende Strahl durch F die Seite AB in deren Mittelpunkt, der E genannt sei. Damit ist CE Seitenhalbierende und wegen der Gleichseitigkeit von $\triangle$ ABC auch Höhe dieses Dreiecks.
Folglich gilt:

$$\overline{AE} = \overline{EB} \quad (1)$$

sowie $\overline{FE} = \frac{1}{3}\overline{CE} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$.
Da $\triangle DFA \cong \triangle DFB$ (*sws*) ist, gilt:

$$\overline{AD} = \overline{BD},$$

d. h. $\triangle ABD$ ist gleichschenklig.
Wegen (1) ist folglich DE Höhe in diesem Dreieck. Der Winkel $\sphericalangle FED$ ist daher der Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche der Pyramide und somit laut Aufgabe 60° groß. Da $\sphericalangle EFD$ ein rechter Winkel ist, läßt sich die Fläche des Dreiecks $\triangle$ EFD als die Hälfte der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks auffassen.
Folglich gilt $\overline{DE} = 2\cdot\overline{EF} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.
Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt nun

$$h = \overline{DF} = \sqrt{\overline{DE}^2-\overline{EF}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{12}} = \frac{a}{2}.$$

Damit ergibt sich für das Volumen V der Pyramide der Wert

$$V = \frac{1}{3}G\cdot h = \frac{1}{3}\frac{a^2}{\cdot 4}\sqrt{3}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^3}{24}\sqrt{3}.$$

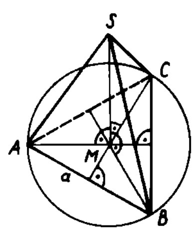
Olympiadeklasse 10

1. Jede n-stellige natürliche Zahl z mit den Ziffern $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ $(n>1)$ im dekadischen System läßt sich folgendermaßen schreiben:
$z = a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}+\ldots+$
$+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0$. Dabei gilt
$0<a_{n-1}\leqq 9$ und $0\leqq a_i\leqq 9$ $(i=0,\ldots n-2)$
Daraus folgt $z\geqq a_{n-1}\cdot 10^{n-1}$
Das aus den sämtlichen Ziffern von z gebildete Produkt P lautet:
$P = a_{n-1}\cdot a_{n-2}\ldots a_2\cdot a_1\cdot a_0$.
Wegen $0\leqq a_i\leqq 9$ $(i=0,\ldots,n-2)$ und $a_{n-1}>0$ sowie $n>1$* gilt:
$P\leqq a_{n-1}\cdot 9^{n-1}<a_{n-1}\cdot 10^{n-1}\leqq z$,
also $P<z$, w.z.b.w.
* *Anmerkung:* Die Voraussetzung $n>1$ verwendet man, um $9^{n-1}<10^{n-1}$ zu erhalten, die Voraussetzung $a_{n-1}>0$, um daraus $a_{n-1}\cdot 9^{n-1}<a_{n-1}\cdot 10^{n-1}$ zu schließen.
2. *Fall a)* Angenommen, C (3) wäre falsch. Dann wäre auch C (1) falsch, und es gäbe im Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe höchstens eine wahre Aussage von C. Also kann C (3) nur wahr, der Ball also nur grün oder schwarz oder gelb sein.
Daher muß C (2) falsch, also laut Aufgabenstellung C (1) wahr sein. Der Ball kann mithin nur schwarz oder grün sein. Dann ist B (1) falsch, demnach muß B (3) wahr sein. Der Ball kann also nur grün sein. Die Aussage D (3) ist falsch, da der Ball einfarbig ist. Also ist D (1) wahr. Der Pullover von D kann daher ebenfalls nur grün sein.
Fall b) Angenommen, C (1) wäre wahr. Dann wäre auch C (3) wahr, im Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe. Also kann C (1) nur falsch sein. Angenommen, C (3) wäre wahr. Dann wäre der Ball gelb, also wären alle Aussagen von A falsch, im Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe. Also kann auch C (3) nur falsch und folglich C (2) nur wahr sein. Der Ball kann somit nur rot sein. Daher müssen B (1), (3) falsch sein. Andererseits gilt: D (2) ist unabhängig von allen Bedingungen stets wahr, also ist laut Aufgabenstellung D (1) falsch. Die Farbe des Pullovers von D läßt sich allein mit Hilfe

der gemachten Aussagen nicht ermitteln. Es steht nur fest, daß der Pullover nicht rot ist.

3. In jedem gleichseitigen Dreieck ist der Umkreismittelpunkt gleichzeitig der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, und jede von diesen ist mit einer Höhe des Dreiecks identisch. Im vorliegenden Fall hat jede von ihnen mithin die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Die Seitenhalbierenden eines jeden Dreiecks teilen einander so im Verhältnis 2:1, daß $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ ist. Ferner ist nach Aufgabenstellung $\overline{SM} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$.

Daher gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras, daß die Länge jeder der Strecken AS, BS, CS gleich $\sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3}} = a$ ist.



4. Angenommen, eine der Zahlen m, n sei durch 5 teilbar. Dann ist x durch 5 teilbar. Angenommen, keine der Zahlen m, n sei durch 5 teilbar. Dann läßt jede der Zahlen m^2, n^2 bei Division durch 5 entweder den Rest 1 oder den Rest 4.

Beweis: Jede nicht durch 5 teilbare ganze Zahl g läßt sich in der Form $g = 5p+r$ mit ganzzahligen p, r und $1 \leqq r \leqq 4$ *schreiben.* Dann gilt: $g^2 = (5p+r)^2 = 25p^2+10pr+r^2$, d. h. g^2 läßt bei Division durch 5 den gleichen Rest wie r^2.

Daraus ergibt sich:

Läßt bei Division durch 5

eine Zahl den Rest 1, so läßt ihr Quadrat den Rest 1

eine Zahl den Rest 2, so läßt ihr Quadrat den Rest 4

eine Zahl den Rest 3, so läßt ihr Quadrat den Rest 4

eine Zahl den Rest 4, so läßt ihr Quadrat den Rest 1.

Lassen m^2 und n^2 den gleichen Rest, dann ist y durch 5 teilbar. Lassen m^2 und n^2 verschiedene Reste, dann ist wegen $4+1 = 1+4 = 5$ die Zahl z durch 5 teilbar. Damit ist in jedem möglichen Fall gezeigt, daß von den Zahlen x, y, z stets mindestens eine durch 5 teilbar ist.

Bezirksolympiade

Olympiadeklasse 7

1. Die belgischen Fahrer, DDR-Fahrer, polnischen und sowjetischen Fahrer seien der Reihe nach mit B, D_1, D_2, ..., P_1, P_2, ..., S_1, S_2, ... bezeichnet.

Nach (5) waren mindestens zwei sowjetische Fahrer in der Spitzengruppe. Nach (2) fuhr mindestens ein DDR-Fahrer weder am Anfang noch am Ende, wegen (6) waren also mindestens drei DDR-Fahrer in der Spitzengruppe. Wegen (1) müssen diese Mindestzahlen, 2 sowjetische, 3 DDR-Fahrer, auch bereits die genauen Anzahlen der sowjetischen bzw. DDR-Fahrer sein. Sind X, Y Bezeichnungen von Fahrern, so bedeute $X < Y$, daß X vor Y fuhr. Dann gilt

(2) $D_1 < D_2 < B$,

(3) $S_1 < P_1 < P_2$,

(4) $B < S_2$.

Da genau ein Belgier in der Spitzengruppe fuhr, folgt aus (2) und (4)

(7) $D_1 < D_2 < B < S_2$.

Da genau zwei sowjetische Fahrer in der Spitzengruppe und nach (5) unmittelbar hintereinander fuhren, folgt daraus sowie aus (3) und (7)

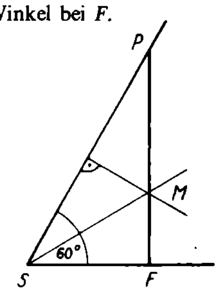
(8) $D_1 < D_2 < B < S_1 < S_2 < P_1 < P_2$.

Aus (6) und (8) folgt

(9) $D_1 < D_2 < B < S_1 < S_2 < P_1 < P_2 < D_3$.

Damit sind bereits 8 Fahrer erfaßt, also ist (9) die einzige Möglichkeit für die gesuchte Reihenfolge.

2. Da F eindeutig bestimmt ist, ist F auf Grund der Voraussetzungen von P und S verschieden. Daher sind P, S, F die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel bei F.



Dann schneidet bekanntlich die Halbierende des Winkels $\sphericalangle PSF$ die Strecke PF in einem Punkt, der mit M bezeichnet werde. Dabei hat der Winkel $\sphericalangle MSP$ eine Größe von 30°. Außerdem hat der Winkel $\sphericalangle SPF$ als Komplementwinkel des Winkels $\sphericalangle PSF$ eine Größe von 30° (Winkelsumme im Dreieck $\triangle PSF$). Daher ist $\triangle PSM$ gleichschenklig mit $\overline{PM} = \overline{MS}$. Infolgedessen liegt M auf der Mittelsenkrechten von PS.

3. Laut Aufgabe sind $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ der Anzahl aller Schüler der Klasse Mitglieder des Chores, aber nicht Mitglieder der SSG; und $\frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$ der Anzahl der Schüler sind Mitglieder der SSG, aber nicht Mitglieder des Chores. Berücksichtigt man noch die $\frac{2}{5}$ der Anzahl der Schüler dieser Klasse, die beiden angehören, so verbleibt wegen $\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$ genau $\frac{1}{10}$ der Anzahl aller Schüler dieser Klasse, und genau soviel sind weder im Chor noch in der SSG.

4. Ist x die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält, dann bekommt der erste Freier $\left(\frac{x}{2}+1\right)$ Pflaumen. Als Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl $x - \left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{x}{2} - 1$. Die Anzahl der Pflaumen, die der zweite Freier bekommt, ist hiernach

$$\frac{\frac{x}{2}-1}{2} + 1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2},$$

und als nunmehriger Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl

$$\left(\frac{x}{2}-1\right) - \left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{x}{4} - \frac{3}{2}.$$

Die Anzahl der Pflaumen, die der dritte Freier bekommt, ist dann

$$\frac{\frac{x}{4}-\frac{3}{2}}{2} + 3 = \frac{x}{8} + \frac{9}{4}.$$

Danach ist der Korb geleert, woraus die Gleichung

$$\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{x}{8}+\frac{9}{4}\right) = 0$$

folgt. Aus dieser ergibt sich

$$\frac{x}{8} = \frac{15}{4},$$

also $x = 30$. Daher kann die gesuchte Anzahl nur 30 betragen.

5. Angenommen, es gäbe eine derartige dreistellige Primzahl. Dann könnte sie nur aus drei verschiedenen der Ziffern 1, 3, 7, 9 bestehen, da bei den Vertauschungen jede ihrer Ziffern auch einmal an letzter Stelle stünde und daher, wie man mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln erkennt, die Ziffern 0, 2, 4, 5, 6, 8 entfielen. Also müßte die Primzahl entweder aus den Ziffern 1, 3, 7

oder aus den Ziffern 1, 3, 9

oder aus den Ziffern 1, 7, 9

oder aus den Ziffern 3, 7, 9 bestehen.

Nun ist aber z. B. $371 = 7 \cdot 53$

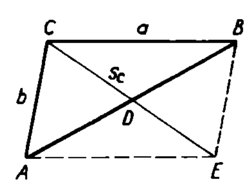
$319 = 11 \cdot 29$

$791 = 7 \cdot 113$

$793 = 13 \cdot 61$

d. h. es gibt in jedem Falle unter den durch Vertauschungen der Ziffern entstehenden Zahlen wenigstens eine, die nicht Primzahl ist. Daher gibt es keine dreistellige Primzahl mit der geforderten Eigenschaft.

6. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll.



Der Mittelpunkt von AB sei D; der Punkt E sei derjenige auf dem Strahl CD gelegene von C verschiedene Punkt, für den $\overline{CD} = \overline{DE}$ gilt. Dann ist $AEBC$ ein Parallelogramm, da sich AB und CE gegenseitig halbieren.

Also ist $\overline{AE} = \overline{CB} = a$.

(II) Daher kann ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann der Aufgabenstellung entsprechen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir zeichnen die Strecke CD der Länge s_c.
(2) Wir zeichnen den Strahl CD.
(3) Wir schlagen den Kreis um D mit $\overline{CD}=s_c$; der von C verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl CD sei E.
(4) Wir schlagen um C und E die Kreise mit den Radien b bzw. a. Ist A einer ihrer Schnittpunkte, so zeichnen wir den Strahl AD.
(5) Wir schlagen den Kreis um D mit $\overline{AD}$; der von A verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl AD sei B.

(III) Beweis, daß ein so konstruiertes Dreieck der Aufgabenstellung entspricht:
Nach Konstruktion ist $\overline{AC}=b$. Ferner ist $\overline{AD}=\overline{DB}$, also CD Seitenhalbierende, und ihre Länge ist nach Konstruktion $\overline{CD}=s_c$. Schließlich ist $AEBC$ ein Parallelogramm, da sich die Diagonalen AB und CE gegenseitig halbieren. Also ist $\overline{CB}=\overline{AE}=a$.

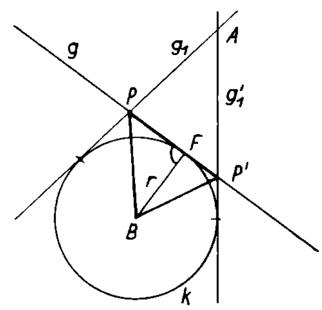
(IV) Wegen $a-b<2s_c<a+b$ sind alle Konstruktionsschritte durchführbar, also gibt es ein Dreieck, das der Aufgabenstellung entspricht. Dieses ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, da der einzige möglicherweise mehrdeutige Konstruktionsschritt (4) dann zu zwei zu der Geraden durch C und E symmetrischen und damit kongruenten Figuren führt.

Olympiadeklasse 8

1. Die Radien der vier Kreise seien von innen nach außen mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet. Die Kreise enthalten der Reihe nach 1, 3, 7 und 15 der genannten jeweils einander inhaltsgleichen Flächenstücke.
Da die Flächeninhalte der Kreise πr_i^2 ($i=1, 2, 3, 4$) betragen, erhält man aus der Aufgabenstellung die Proportion $\pi r_1^2 : \pi r_2^2 : \pi r_3^2 : \pi r_4^2 = 1:3:7:15$ und daraus wegen $r_i>0$ ($i=1, 2, 3, 4$) schließlich, daß $r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{7} : \sqrt{15}$ gelten muß, wenn alle 15 Flächenstücke einander inhaltsgleich sein sollen.

2. Da P_1 das gesamte Becken in genau 4 h 30 min füllt, wurde durch diese Pumpe in 30 min genau $\frac{1}{9}$ des Beckens gefüllt.
In jeder Minute füllte P_1 mithin genau $\frac{1}{270}$ des Beckens. Da P_2 das gesamte Becken in genau 6 h 45 min, also in 405 min, füllt, füllte diese Pumpe in jeder Minute $\frac{1}{405}$ des Beckens.
In der Zeit, in der beide Pumpen zusammen arbeiteten, füllten sie mithin in jeder Minute wegen $\frac{1}{270}+\frac{1}{405}=\frac{15}{2430}=\frac{1}{162}$ genau $\frac{1}{162}$ des Beckens.
Insgesamt wurde von beiden Pumpen gemeinsam $\frac{8}{9}$ des Beckens gefüllt.
Wegen $\frac{8}{9}=\frac{144}{162}$ geschah das in genau 144 min.
Infolgedessen wurde das Becken in der in der Aufgabe angegebenen Weise in genau 174 min, das sind 2 h 54 min, gefüllt.

3. (I) Angenommen, P sei ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann hat B als Punkt der Winkelhalbierenden gleiche Abstände zu g und der Geraden g_1 durch A und P, also wird derjenige Kreis um B, der g berührt, auch g_1 berühren.



(II) Daher entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
Man fällt das Lot BF von B auf g. Dann schlägt man den Kreis k um B durch F und konstruiert die Tangenten von A an k. Ist g_1 eine dieser Tangenten und schneidet sie g, so sei P ihr Schnittpunkt mit g.

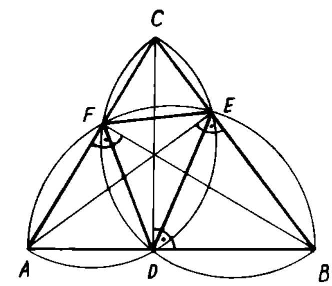
(III) Beweis, daß jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe genügt: Die Geraden g und g_1 werden nach Konstruktion beide von k berührt, sie haben also gleiche Abstände von B. Daher liegt B auf einer Winkelhalbierenden dieser beiden Geraden.

(IV) Die Konstruktion von F ist stets eindeutig durchführbar und ergibt $F\neq B$ und $F\neq A$, da A und B nicht auf g liegen.
Ferner liegt k mit Ausnahme des Punktes F ganz auf der anderen Seite von g wie A. Also liegt A außerhalb von k. Somit gibt es genau zwei verschiedene Tangenten g_1 und g_1' von A an k. Da jede von ihnen A und einen Punkt von k, also einen Punkt auf der anderen Seite von g wie A, enthält, schneidet jede von ihnen g, und diese beiden Schnittpunkte P, P' sind auch voneinander verschieden, da sie andernfalls sowohl auf g_1 als auch auf g_1' lägen, also mit dem Schnittpunkt A von g_1 und g_1' zusammenfielen.
Somit hat die Aufgabe genau diese zwei Lösungen P, P'.

4. Wegen $a>b$ gilt $a^2-b^2>0$. Wegen $(a-b)\leq(a+b)$ ist $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ genau dann Primzahl, wenn $a-b=1$ und $a+b$ Primzahl ist.

5. Angenommen, die Aussagen (1), (2), (3), (4), (5), (6) wären sämtlich wahr. Dann hätte wegen (3) und (4) jedes Ehepaar wenigstens 1 Mädchen. Wegen (1), (4), (5) und (6) müßte folglich die Anzahl der Jungen kleiner sein als die Anzahl der Ehepaare und damit erst recht kleiner als die Anzahl der Mädchen, im Widerspruch zu (2). Brigitte hat also mit ihrem Einwand recht.

6. Die Fußpunkte der die Punkte A, B bzw. C enthaltenden Höhen des spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ seien mit E, F bzw. D in dieser Reihenfolge bezeichnet.
Jeder der Punkte E, F, D liegt nach der Umkehrung des Lehrsatzes des Thales auf zweien der drei Kreise, die je eine der Dreiecksseiten als Durchmesser haben (s. Abb.). Sie sind innere Punkte der Strecken BC, AC bzw. AB, da $\triangle ABC$ spitzwinklig ist. Der Strahl FB verläuft folglich im Innern des Winkels $\sphericalangle EFD$. Nun gilt
$\sphericalangle AEB \cong \sphericalangle BDC$ (rechte Winkel)
$\sphericalangle ABE \cong \sphericalangle DBC$ und mithin wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck
$\sphericalangle BAE \cong \sphericalangle BCD$. (1)



Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt:
$\sphericalangle BAE \approx \sphericalangle BFE$ (Bogen $\widehat{BE}$) sowie
$\sphericalangle BCD \approx \sphericalangle BFD$ (Bogen $\widehat{BD}$).
Hieraus sowie aus (1) folgt
$\sphericalangle BFE \cong \sphericalangle BFD$, d. h. BF halbiert $\sphericalangle EFD$.

Olympiadeklasse 9

1. Die erwähnte Anzahl von Tagen sei x.
Aus (2) folgt:
(5) Es gab keinen Tag, an dem Günter vor- und nachmittags Tischdienst hatte.
Aus (3) folgt:
(6) Günter hatte an genau $(x-13)$ Tagen nachmittags Tischdienst.
Aus (4) folgt:
(7) Günter hatte an genau $(x-11)$ Tagen vormittags Tischdienst.
Aus (1), (5), (6) und (7) erhält man
$x-13+x-11=6$ und daraus
(8) $x=15$ als Anzahl der Tage, die Günter im Lager verbrachte. Nach (6) bzw. (7) folgt also weiter als Anzahl der Vormittage bzw. der Nachmittage, an denen Günter Tischdienst hatte, 2 bzw. 4.
Nun gilt weiter:
Da täglich genau vier Schüler Tischdienst hatten, waren insgesamt genau 60 Einsätze notwendig. Da jedes Mitglied der Gruppe gleich oft eingesetzt wurde, und daher wie Günter genau 6mal eingesetzt war, bestand die Gruppe aus genau 10 Schülern.

2. Den gesuchten Flächeninhalt erhält man, indem man vom Flächeninhalt a^2 des Quadrats $ABCD$ die Summe der Flächeninhalte der acht Dreiecke
$\triangle AKE$, $\triangle BLE$, $\triangle BMF$, $\triangle CNF$, $\triangle COG$, $\triangle DPG$, $\triangle DQH$, $\triangle ARH$ subtrahiert.
Nun gilt:
$\triangle ABF \cong \triangle ABH \cong \triangle BCG \cong \triangle BCE \cong \triangle CDH \cong \triangle CDF \cong \triangle DAE \cong \triangle DAG$; denn diese

Dreiecke stimmen sämtlich in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen rechten Winkel überein.

Daher sind die anfangs genannten acht Dreiecke sämtlich untereinander kongruent; denn sie stimmen in den Winkeln und in einander entsprechenden Seiten überein.

Es gilt ferner $\triangle AKE \sim \triangle ABF$ (nach dem Hauptähnlichkeitssatz). Folglich ist $\triangle AKE$ rechtwinklig bei K, entsprechend $\triangle BFM$ bei M. Deshalb gilt $KE \parallel BM$. Aus einem der Strahlensätze folgt:

$\overline{KE} : \overline{MB} = \overline{AE} : \overline{AB} = 1 : 2$, d. h. wegen $\overline{AK} = \overline{MB}$ $\overline{AK} = 2\overline{KE}$. Aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle AKE$, folgt:

$\overline{KE}^2 + (2\overline{KE})^2 = \overline{AE}^2$, d. h.

$5\,\overline{KE}^2 = \frac{a^2}{4}$ bzw. $\overline{KE}^2 = \frac{a^2}{20}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AKE$ beträgt

$\frac{\overline{KE}\cdot 2\,\overline{KE}}{2} = \overline{KE}^2 = \frac{a^2}{20}$.

Mithin ist der gesuchte Flächeninhalt

$$a^2 - 8\cdot\frac{a^2}{20} = \frac{3}{5}a^2.$$

3. Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x, die die gegebene Gleichung erfüllt.

Dann ist $\frac{5x+3}{7}$ ganzzahlig, und es gibt eine reelle Zahl a mit $0 \leqq a < 1$, so daß $\frac{10+3x}{7} = \frac{5x+3}{7} + a$ gilt.

Daraus folgt

$70 + 21x = 30x + 18 + 42a$, woraus man

$$x = \frac{52-42a}{9} \text{ erhält.}$$

Wegen $0 \leqq a < 1$ folgt daraus

$$\frac{10}{9} < x \leqq \frac{52}{9} \text{ und weiter}$$

$$\frac{\frac{50}{9}+3}{7} < \frac{5x+3}{7} \leqq \frac{\frac{260}{9}+3}{7}$$

bzw. $\frac{11}{9} < \frac{5x+3}{7} \leqq \frac{41}{9}$, also kann der Ausdruck $\frac{5x+3}{7}$ (da er ganzzahlig ist) nur gleich einer der Zahlen 2; 3; 4 sein.

Aus $\frac{5x+3}{7} = 2$ folgt $x = \frac{11}{5}$

aus $\frac{5x+3}{7} = 3$ folgt $x = \frac{18}{5}$ und

aus $\frac{5x+3}{7} = 4$ folgt $x = 5$.

Also können höchstens $x = \frac{11}{5}$, $x = \frac{18}{5}$, $x = 5$ Lösungen von (1) sein.

Tatsächlich sind dies Lösungen; denn es gilt:

$$\left[\frac{10+\frac{33}{5}}{6}\right] = 2 \quad\text{und}\quad \frac{\frac{55}{5}+3}{7} = 2;$$

$$\left[\frac{10+\frac{54}{5}}{6}\right] = 3 \quad\text{und}\quad \frac{\frac{90}{5}+3}{7} = 3;$$

$$\left[\frac{10+15}{6}\right] = 4 \quad\text{und}\quad \frac{25+3}{7} = 4;$$

4. Angenommen, ein Tripel (x, y, z) sei Lösung von (1), (2). Dann ergibt sich, indem man z. B. $x = 2 - y$ in (2) einsetzt,

$$y^2 - 2y + z^2 + 1 = 0, \text{ also}$$

(3) $\quad (y-1)^2 + z^2 = 0.$

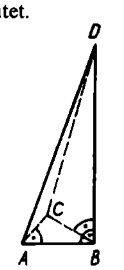
Wäre nun $y \neq 1$ oder $z \neq 0$, so folgte $(y-1)^2 > 0$ bzw. $z > 0$, also, da stets $(y-1)^2 \geqq 0$ und $z^2 \geqq 0$ ist, in jedem Falle $(y-1)^2 + z^2 > 0$ im Widerspruch zu (3). Daher folgt aus (3), daß $y = 1$ und $z = 0$ sein muß.

Oder: Es gilt (4) $z^2 \geqq 0$ sowie wegen (3) auch (5) $z^2 = -(y-1)^2 \leqq 0$. Aus (4) und (5) folgt $z^2 = 0$, also $z = 0$. Hieraus und aus (5) ergibt sich $(y-1)^2 = 0$ also $y = 1$.

Aus (1) folgt dann $x = 1$. Also kann höchstens das Tripel (1, 1, 0) Lösung des Gleichungssystems (1), (2) sein. Tatsächlich ist dies Lösung; denn für $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ wird $x + y = 1 + 1 = 2$ und $xy - z^2 = 1 - 0 = 1$.

5. Für das Volumen V der Pyramide mit den Ecken A, B, C, D gilt:

$V = \frac{1}{3} G \cdot h$, wobei G den Inhalt der Grundfläche und h die Länge der zugehörigen Höhe bedeutet.



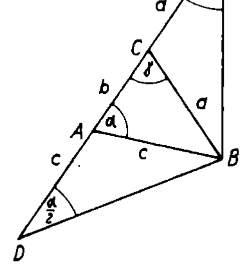
Da 3; 4; 5 und 5; 12; 13 pythagoreische Zahlentripel sind, sind nach der Umkehrung des Lehrsatzes des Pythagoras die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BCD$ rechtwinklig mit den rechten Winkeln $\sphericalangle BAC$ bzw. $\sphericalangle CBD$.

Da laut Aufgabe auch $\sphericalangle ABD$ ein rechter Winkel ist, steht BD senkrecht auf der Ebene, in der das Dreieck $\triangle ABC$ liegt. Wählt man nun die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ als Grundfläche der Pyramide, dann ist BD die zugehörige Höhe, und man erhält

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\cdot 4}{2}\cdot 12\ \text{cm}^3$$

$$V = 24\ \text{cm}^3.$$

6. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.



Punkt D sei derjenige auf dem Strahl CA gelegene Punkt, für den $\overline{AD} = \overline{AB}$ mit A zwischen C und D gilt, und Punkt E derjenige auf dem Strahl AC gelegene Punkt, für den $\overline{CE} = \overline{CB}$ mit C zwischen A und E gilt. Dann gilt $\overline{DE} = a + b + c$.

Ferner sind die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle CBE$ gleichschenklig. Daher und unter Berücksichtigung des Außenwinkelsatzes folgt, daß $\sphericalangle CEB$ die Größe $\frac{\gamma}{2}$ und $\sphericalangle ADB$ die Größe $\frac{\alpha}{2}$ hat.

Mithin enthält das Dreieck $\triangle EDB$ als bekannte Stücke die Seite $a + b + c$ und Winkel der Größe $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$. Ferner gilt auch $\overline{\sphericalangle DBA} = \frac{\alpha}{2}$ und $\overline{\sphericalangle EBC} = \frac{\gamma}{2}$ ($\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.).

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $\triangle EDB$ aus $\overline{DE} = a + b + c$,

$\overline{\sphericalangle BDE} = \frac{\alpha}{2}$, $\overline{\sphericalangle BED} = \frac{\gamma}{2}$.

(2) Man trägt in B an den Strahl BD einen Winkel der Größe $\frac{\alpha}{2}$ auf derjenigen Seite der Geraden durch B und D an, auf der E liegt. Schneidet sein freier Schenkel die Strecke DE, so sei der Schnittpunkt A genannt.

(3) Man trägt in B an den Strahl BE einen Winkel der Größe $\frac{\gamma}{2}$ auf derjenigen Seite der Geraden durch B und E an, auf der D liegt. Schneidet sein freier Schenkel die Strecke DE und liegt der Schnittpunkt zwischen A und E, so sei er C genannt.

(III) Der Beweis, daß ein so entstandenes Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht, ergibt sich folgendermaßen:

Laut Konstruktion gilt:

$$\overline{ED} = a + b + c.$$

Die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle CBE$ sind gleichschenklig mit $\overline{AD} = \overline{AB}$ bzw. $\overline{CE} = \overline{CB}$.

Ihre Basiswinkel haben die Größe $\frac{\alpha}{2}$ bzw. $\frac{\gamma}{2}$.

Dann haben die Winkel $\sphericalangle CAB$ bzw. $\sphericalangle BCA$ als Außenwinkel in den Dreiecken $\triangle ADB$ bzw. $\triangle CBE$ die Größen α bzw. γ. Schließlich hat auch (da A zwischen D und E sowie C zwischen A und E liegt) $\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB}$ die verlangte Größe $(\overline{EC} + \overline{CA} + \overline{AD} = \overline{DE}) = a + b + c$.

(IV) Da in jedem Dreieck mit zwei Innenwinkeln α, γ die Beziehung $\alpha + \gamma < 180°$ gilt, kann die Konstruktion nur möglich sein, wenn diese Beziehung erfüllt ist.

Ist dies der Fall, so gilt:

Konstruktionsschritt (1) ist eindeutig (bis auf Kongruenz) durchführbar, da erst recht $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\ (< 90°) < 180°$ gilt. Dabei ergibt sich

$$\overline{\sphericalangle DBE} = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) > 180° - 90° = 90°$$

also erst recht $\overline{\sphericalangle DBE} > \frac{\alpha}{2}$, so daß die Konstruktion von A (Konstruktionsschritt [2]) ebenfalls eindeutig möglich ist. Schließlich folgt

$\sphericalangle \overline{EBA} = \sphericalangle \overline{DBE} - \frac{\alpha}{2} > 90° - \frac{\alpha}{2} > \frac{\gamma}{2}$, so daß auch C (zwischen A und E) eindeutig bestimmt ist (Konstruktionsschritt [3]). Daher ist für $\alpha + \gamma < 180°$ die gesamte Konstruktion (bis auf Kongruenz) eindeutig durchführbar.

Olympiadeklasse 10

1. a) Für jede Zahl k gilt:

(1) $k + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = \frac{4k + k^2 - 2k + 1}{4}$

$= \frac{k^2 + 2k + 1}{4} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$.

Ist k ganz, so erhält man das Quadrat der rationalen Zahl $\frac{k+1}{2}$ womit der Satz bewiesen ist.

b) Die erhaltene Gleichung (1) führt auf ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn k eine Quadratzahl ist und $\frac{k-1}{2}$ sowie $\frac{k+1}{2}$ natürliche Zahlen sind.

Letzteres ist für alle ungeraden Quadratzahlen $k > 1$ der Fall. Man erhält so z. B. die folgenden pythagoreischen Zahlentripel (x, y, z):

k	$x = \sqrt{k}$	$y = \frac{k-1}{2}$	$z = \frac{k+1}{2}$	Tatsächlich ist
9	3	4	5	9 + 16 = 25
25	5	12	13	25 + 144 = 169
49	7	24	25	49 + 576 = 625
81	9	40	41	81 + 1600 = 1681

Für jedes dieser vier Tripel gilt: In je dreien dieser vier Tripel kommt mindestens eine Zahl vor, die durch keine Zahl des vierten Tripels teilbar ist. Daher sind die vier Tripel (in dem angegebenen Sinne) voneinander verschieden.

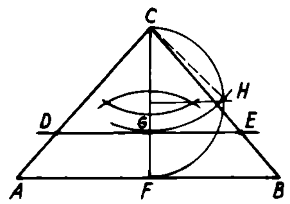
2. (I) Angenommen, die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ sei durch eine Parallele zur Basis AB in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegt und es seien D, E die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den Seiten AC bzw. BC. Ferner sei F der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrecht stehenden Höhe des Dreiecks $\triangle ABC$ und G der Schnittpunkt dieser Höhe mit den genannten Parallelen. Dann gilt nach dem Hauptähnlichkeitssatz

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

Da sich die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate einander entsprechender Seiten bzw. Höhen verhalten, gilt: $\overline{CG}^2 : \overline{CF}^2 = 1 : 2$, woraus man $CG = \frac{CF}{2}\sqrt{2}$ erhält, d. h. CG ist so lang wie eine (also jede) Kathete in einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse CF.

(II) Daraus ergibt sich, daß eine Parallele zu AB nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man fällt das Lot CF von C auf AB.
(2) Man schlägt einen Halbkreis über CF.
(3) Man errichtet auf CF die Mittelsenkrechte. Ihr Schnittpunkt mit dem Halbkreis sei H genannt.
(4) Man schlägt den Kreis um C mit $\overline{CH}$. Schneidet er CF in einem Punkte, so sei dieser G genannt.
(5) Man zieht die Parallele durch G zu AB.



(III) Der Beweis, daß eine so konstruierte Parallele den Bedingungen der Aufgabe entspricht, verläuft folgendermaßen:

Laut Konstruktion ist $\triangle CHF$ rechtwinklig-gleichschenklig, wobei CF seine Hypotenuse ist. Daher gilt:

$\overline{CF}^2 = 2\,\overline{CH}^2$, also $\overline{CH} = \frac{\overline{CF}}{2}\sqrt{2}$.

Ferner gilt nach Konstruktion $\overline{CH} = \overline{CG}$.

Sind nun D und E die Schnittpunkte der konstruierten Parallelen mit AC bzw. BC, so gilt $DE \parallel AB$ und daher einerseits $CG \perp DE$, andererseits $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

Die Flächeninhalte I und I_1 dieser Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate einander entsprechender Höhen CF, CG, d. h.:

$I : I_1 = \overline{CF}^2 : \overline{CG}^2 = \overline{CF}^2 : \left(\frac{\overline{CF}}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 2 : 1$, q. e. d.

(IV) Im Konstruktionsabschnitt (2) gibt es zwei Möglichkeiten, einen Halbkreis zu wählen, und daher führen (2), (3) auf verschiedene Punkte H_1 bzw. H_2. Für diese ist jedoch $\overline{CH_1} = \overline{CH_2}$. Da alle übrigen Konstruktionsschritte eindeutig durchführbar sind (z. B. [4] wegen $\overline{CH} < \overline{CF}$), trifft dies somit auch für die gesamte Konstruktion zu.

3. Angenommen $f(x)$ sei eine lineare Funktion mit der geforderten Eigenschaft.

Dann läßt sich diese Funktion in der Form $f(x) = mx + n$ (m, n reelle Zahlen) schreiben, und es gilt für jedes reelle x die Gleichung $mx + n = m(x+1) + n - a$, also $m = a$.

Daher können nur Funktionen mit einer Gleichung der Form $f(x) = ax + n$ (n eine reelle Zahl) die geforderte Eigenschaft haben.

Tatsächlich gilt für jede solche Funktion und für jedes reelle x:

$f(x) = ax + n = a(x+1) + n - a = f(x+1) - a$.

4. Es gilt: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$;

daher gilt:

$\log_x(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n) = \log_x n!$

Daraus folgt

$\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 4 + \ldots + \log_x n = \log_x n!$ (1)

Nun gilt für alle reellen Zahlen $a, b > 0$ und $a, b \neq 1$:

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ (2)

Aus (1) und (2) folgt

$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \ldots + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x}$, w. z. b. w.

5. Wir bezeichnen die Spieler nach ihrer Plazierung mit I, II, III usw.

Aufgrund der gemachten Angaben gelten folgende Aussagen:

(1) Es wurden genau 15 Partien gespielt.
(2) Genau 5 Partien endeten Remis.
(3) Die Gesamtpunktzahlen waren paarweise voneinander verschieden.
(4) II erreichte genau zwei Punkte mehr als der Letze.
(5) A schnitt besser ab als D.
(6) A spielte nicht remis.
(7) D spielte nicht remis.
(8) C = III.
(9) C schlug IV.

Bezeichnet man die Anzahl der Teilnehmer mit n, so gilt $\frac{n(n-1)}{2} = 15$, woraus $n = 6$ folgt.

(10) An dem Turnier nahmen genau 6 Spieler teil.

Bezeichnet man die von VI erreichte Punktzahl mit z, so hat wegen (4) der Spieler II genau $z + 2$ Punkte erreicht. Daraus folgt wegen (3) als einzige Möglichkeit für III, IV, V:

	Spieler	erreichte Gesamtpunktzahl
(11)	V	$z + 0{,}5$
	IV	$z + 1$
	III	$z + 1{,}5$.

Die Summe der von II, III, IV, V, VI erreichten Gesamtpunktzahlen ist somit $5z + 5$.

Bezeichnet man nun die von I erreichte Punktzahl mit t, so gilt also $5z + 5 + t = 15$, woraus $t = 5\,(2 - z)$ folgt. Nun ist $(2 - z)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 0,5 und daher t ein ganzzahliges Vielfaches von $5 \cdot 0{,}5$. Andererseits gilt nach (3), und da I höchstens 5 Partien gewonnen haben kann,

$2{,}5 \leqq t \leqq 5$.

Daher kann t nur 2,5 oder 5 sein. Für $t = 2{,}5$ ergäbe (3), weil I die höchste Punktzahl hat, im Widerspruch zu $t = 10 - 5z$ für z den Wert $z = 0$.

Daher folgt $t = 5$ und $z = 1$.

(12) I gewann also seine sämtlichen Spiele.

Damit erhält man unter Berücksichtigung von (8), (9), (10), (11) und (12) folgende Punkttabelle:

	I	II	III	IV	V	VI	Ges. Punktzahl
I	×	1	1	1	1	1	5
II	0	×		·			3
C = III	0		×	1			2,5
IV	0	·	0	×	·		2
V	0			·	×		1,5
VI	0			·		×	1

Nun läßt sich die Plazierung von D ermitteln. Es gilt

$D \neq$ III wegen (8)

$D \neq V$, da die Gesamtpunktzahl D wegen (7) eine ganze Zahl sein muß
$D \neq \mathrm{I}$ wegen (5)
$D \neq \mathrm{II}$ und $D \neq \mathrm{VI}$ aus folgendem Grund: Wäre $D = \mathrm{II}$ oder $D = \mathrm{VI}$, so wäre nach (7) in Zeile und Spalte II bzw. in Zeile und Spalte VI überall 1 oder 0 einzusetzen. Danach verblieben noch genau 10 freie Felder, in die wegen (2) überall 0,5 einzusetzen wäre, und hierbei könnte die Gesamtpunktzahl 2,5 von C nicht auftreten.
Also ist $D = \mathrm{IV}$. (13)
Die Tabelle enthält noch 18 freie Felder. In genau 10 von ihnen ist wegen (2) die Zahl 0,5 einzusetzen. In genau 8 von ihnen ist demnach 1 oder 0 einzusetzen. Sechs dieser Felder sind wegen (7) schon bestimmt und in der Tabelle durch einen Punkt markiert. Die restlichen beiden Zahlen 1 und 0 müssen bei II und VI auftreten, da diese wegen ihrer ganzzahligen Gesamtpunktzahlen nicht sämtliche noch offenen Partien remis gespielt haben können.
C hat also außer gegen I und IV sämtliche Partien remis gespielt. Wegen (6) und (13) ist somit $A = \mathrm{I}$ und hiernach B einer der (von C und) von I und IV verschiedenen Spieler. Daher folgt als einzige Möglichkeit für den gesuchten Spielausgang:
(14) Das Spiel B gegen C endete unentschieden.
6. Die Lösung kann nach dem „Schubfachprinzip" erfolgen. Man denke sich den Würfel durch ebene Schnitte in 27 untereinander kongruente Teilwürfel zerlegt. Die Raumdiagonale jedes dieser Teilwürfel hat die Länge $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.
Da wenigstens einer der Teilwürfel zwei verschiedene der 28 Punkte in seinem Innern oder auf seinem Rand enthält, kann der Abstand dieser beiden Punkte mithin nicht größer als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ sein, weil die Länge der Raumdiagonalen eines Würfels gleich dem größten Abstand ist, den zwei Punkte ein und desselben Würfels voneinander haben können. (Bekanntlich läßt sich jedem Würfel eine Kugel umschreiben, deren Durchmesser gleich der Raumdiagonalen des Würfels ist.)

DDR-Olympiade

Die Lösungen zu den Aufgaben 1, 2, 4, 5 und 6 veröffentlichen wir in Heft 5/71.

3.1. (entsprechend dem Vorschlag der Aufgabenkommission):
(1) Für $c > 1$ ist $\log_c 4 < \log_c 12$ und damit $\frac{1}{\log_4 c} < \frac{1}{\log_{12} c}$, woraus sich $\log_{12} c < \log_4 c$ ergibt. Also ist (+) *erfüllt.*
(2) Für $c = 1$ ist (+) *erfüllt.*
(3) Für $\frac{1}{4} \leqq c < 1$ gilt $[\log_{12} c] = -1 = [\log_4 c]$, also ist (+) *erfüllt.*
(4) Für $\frac{1}{12} \leqq c < \frac{1}{4}$ gilt $[\log_{12} c] = -1$ und $[\log_4 c] = -2$; also ist (+) *nicht erfüllt.*
(5) Für $\frac{1}{16} \leqq c < \frac{1}{12}$ gilt $[\log_{12} c] = -2 = [\log_4 c]$, also ist (+) *erfüllt.*
(6) Sei $0 < c < \frac{1}{16}$. Setzt man $[\log_{12} c]$ u und $[\log_4 c] = v$, so gilt $12^u \leqq c < 12^{u+1}$, $4^v \leqq c < 4^{v+1}$, und wegen $4^v \leqq c < \frac{1}{16}$ ist $v < -2$, d. h. $v \leqq -3$. Dann ist $12^{u+1} > c \geqq 4^v = 12^v \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^v \geqq 12^v \cdot 27 > 12^{v+1}$ und damit $u > v$; also ist (+) *nicht erfüllt.*
Ergebnis: (+) ist genau dann erfüllt, wenn $\frac{1}{16} \leqq c < \frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{4} \leqq c$ ist.
Bemerkungen: Für diese Wahlaufgabe entschieden sich 63 Schüler (d. h. etwa die Hälfte der Teilnehmer). Von ihnen erreichten nur 2 die volle Punktzahl 7; 4 Teilnehmer erzielten 6 Punkte. Dagegen mußten 18 Lösungen mit 0 Punkten bewertet werden. Es ist bemerkenswert, daß sich kaum einer der Schüler durch eine Veranschaulichung der Funktion $f(c) = \log_{12} c$ und $g(c) = \log_4 c$ eine Übersicht über alle Lösungen verschafft hat. Auf diese Weise hätte man sehr leicht und schnell eine Unvollständigkeit und gewisse Fehlschlüsse in der Lösung erkennen können. Die meisten Fehler beruhten auf dem falschen Schluß, daß aus $[x] \leqq [y]$ folgt $x \leqq y$. (Bei der Diskussion von $[x] \leqq [y]$ blieb der Fall $x > y$ unbeachtet.)

Dr. E. Quaisser,
Pädagogische Hochschule Potsdam

3.2. (Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission, leicht abgeändert):
Ist $b > r > 0$, so gibt es ein Flächenstück, wie es die Abbildung zeigt. Ist sein Inhalt F und sein Umfang u, so gilt:
(1) $F = 2br - \frac{1}{2}\pi r^2$
und die wegen $r \neq 0$ mit (1) äquivalente Beziehung
(1') $2b = \frac{F}{r} + \frac{1}{2}\pi r$ sowie
(2) $u = 2r + 2b + \pi r$.
Aus (1') und (2) folgt der Reihe nach, daß dann die folgenden Gleichungen bestehen:
$$u = 2r + \frac{F}{r} + \frac{1}{2}\pi r + \pi r,$$
$$ur = 2r^2 + F + \frac{3}{2}\pi r^2$$
(3) $r^2\left(\frac{3}{2}\pi + 2\right) - ur + F = 0.$
(3) ist eine quadratische Gleichung in r, die eine positive reelle Lösung nach Voraussetzung besitzt. Dann muß notwendig die Diskriminante positiv sein, d. h. es gilt
$$\frac{u^2}{(3\pi + 4)^2} > \frac{2F}{3\pi + 4} \text{ und folglich}$$
(4) $u \geqq \sqrt{2F(3\pi + 4)}$.
Soll in (4) das Gleichheitszeichen gelten, so muß wegen (3) $r = \frac{u}{3\pi + 4}$ sein, woraus sich unter Beachtung von (4) mit dem Gleichheitszeichen
(5) $r = \sqrt{\frac{2F}{3\pi + 4}}$ und hieraus in Verbindung mit (1')
(6) $b = \sqrt{\frac{2F}{3\pi + 4}}(\pi + 1) = r(\pi + 1) \quad (> r)$
ergibt.
Wählt man zu gegebenem $F > 0$ die Zahlen r und b gemäß (5) und (6), so gibt es wegen $b > r$ zu dem Paar (r, b) ein Flächenstück, wie es in der Aufgabe beschrieben ist. Zwischen dessen Inhalt F und dessen Umfang u besteht die Relation
$u = \sqrt{2F(3\pi + 4)}$. Daher genügt das Paar $(r, b) = \left(\sqrt{\frac{2F}{3\pi + 4}}, \sqrt{\frac{2F}{3\pi + 4}}\,(\pi + 1)\right)$
den Bedingungen der Aufgaben und ist das einzige dieser Art.
Bemerkungen: Diese Aufgabe erwies sich für die Schüler, die die Methoden der Differentialrechnung zur Extremwertbestimmung nicht kannten, als ein echter Prüfstein. Die Gleichungen (1) und (2) konnten die Schüler im allgemeinen aufstellen. Aber bereits den Übergang zu (3) konnten einige nicht mehr vollziehen, und die weiteren Überlegungen schafften nur die besten Schüler. Häufig wurde das richtige Endergebnis in einer Form angegeben, aus der das Erfülltsein der Bedingungen $b > r$ nicht ersichtlich war. Wenn diese Relation dann nicht besonders nachgewiesen wurde, zogen die Korrektoren mit Recht einen Punkt ab. In einer guten Darstellung wurden Lösungen, die im Prinzip dem oben dargestellten Weg entsprechend von *Ursula Baier* (Dresden), *Doris Heckemann* (Dresden) und *Bernd Worel* (Neubrandenburg) abgegeben. Die Schüler, die die Aufgabe unter Anwendung der Differentialrechnung lösten, hatten es zwar bedeutend leichter, erhielten aber durchaus nicht immer die volle Punktzahl, da sie diese Methode nicht immer exakt anwendeten. Trotzdem wäre es m. E. günstiger, bei dieser Aufgabe in der Aufgabenstellung die Anwendung der Differentialrechnung als Lösungsmethode auszuschließen.

Hans-Jürgen Sprengel
Pädagogische Hochschule Potsdam

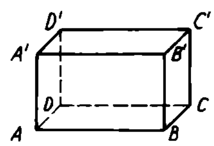
X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade (4. Stufe) · Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. Bilden Sie alle Mengen von fünf ein- oder zweistelligen Primzahlen derart, daß in jeder dieser Mengen jede der Ziffern 1 bis 9 genau einmal auftritt!

2. Von einem Quaderkörper mit den Eckpunkten A, B, C, D, A', B', C', D' (siehe Abb. A 10;2) und den Kantenlängen $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{AA'}=c$ seien mit Hilfe der ebenen Schnitte durch die Eckpunkte B', A, D' bzw. A', B, C' bzw. B', C, D' bzw. A', D, C' diejenigen Teile abgetrennt, die jeweils den Eckpunkt A' bzw. B' bzw. C' bzw. D' enthalten.



Das Volumen des verbleibenden Restkörpers sei V_R, das des ursprünglichen Quaders V_Q.

a) Man gebe sämtliche Punkte des Quaderkörpers an, die Eckpunkte des Restkörpers sind, und stelle diesen in einem Schrägbild $\left(\alpha=60°;\ q=\frac{1}{3}\right)$ dar. (Das Schrägbild ist für den Fall $a=5$ cm, $b=2$ cm, $c=2{,}5$ cm zu zeichnen.)

b) Man berechne $V_R : V_Q$.

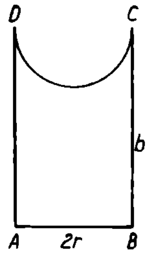
Von den nachstehenden Aufgaben 3.1. und 3.2. ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

3.1. Man ermittle alle positiven reellen Zahlen c, für die

(*) $\quad [\log_{12} c] \leqq [\log_4 c]$ gilt.

Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

3.2. Die Abb. A 10; 3.2. zeigt ein Flächenstück, das aus der Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB}=\overline{CD}=2r$ und $\overline{BC}=\overline{AD}=b$, $b>r$, durch Herausschneiden einer Halbkreisscheibe mit dem Durchmesser CD entstanden ist.



Man denke sich nun eine positive reelle Zahl F beliebig gegeben. Dann sind alle geordneten Paare (r, b) positiver reeller Zahlen mit $r<b$ zu ermitteln, für die das entsprechende Flächenstück den Inhalt F und dabei möglichst kleinen Umfang hat.

4. Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung

$$f(x+1) = f(-x) \text{ erfüllen.}$$

5. Es sei r eine von Null verschiedene reelle Zahl. Man ermittle alle reellen Zahlen $x \neq 0$, die die Ungleichung

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2} \text{ erfüllen. Dabei}$$

sind folgende Fälle zu untersuchen:

a) Es sei $r < -6$.

b) Es sei $r = -6$.

c) Es sei $-6 < r < 0$.

d) Es sei $r > 0$.

6. Die Fläche eines Dreiecks $\triangle ABC$ soll folgendermaßen in drei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt werden:

Zwischen den Eckpunkten A und B des Dreiecks liegen auf AB zwei Punkte E und F so, daß E zwischen A und F liegt. Außerdem sei D derjenige Punkt im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, für den $ED \parallel AC$ und $FD \parallel BC$ gilt. Die Flächen der Trapeze $AEDC$ und $FBCD$ und die des Dreiecks $\triangle EFD$ sollen dann untereinander inhaltsgleich sein.

Konstruieren Sie Punkte E, F, D, für die diese Forderung erfüllt ist! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Olympiadeklasse 11/12

1. Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, zu denen es reelle Zahlen x gibt, so daß $\sqrt{a+x}$ und $\sqrt{a-x}$ reell sind und die Ungleichung

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a \text{ erfüllt ist.}$$

Wie lauten die Werte von x in Abhängigkeit von a?

2. Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn h eine reelle Zahl ist und wenn eine ganzrationale Funktion f vom Grade n mit reellen Koeffizienten keine reellen Nullstellen besitzt, so gilt dasselbe von der ganzrationalen Funktion F, die durch

$F(x)=f(x)+hf'(x)+h^2f''(x)+\ldots+h^nf^{(n)}(x)$

definiert ist.

3. Es ist der folgende Satz zu beweisen: Haben je drei von vier in der gleichen Ebene liegenden konvexen Vielecksflächen jeweils einen Punkt gemeinsam, so gibt es einen Punkt, der jeder der vier Vielecksflächen angehört.

4. Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

In dem Gleichungssystem:

$$x+a_1y=b_1, \qquad (1)$$

$$a_2y+b_2z=a_3, \qquad (2)$$

$$b_3x+a_4z=b_4 \qquad (3)$$

wählt zunächst A für den Koeffizienten a_1, dann B für den Koeffizienten b_1, dann wieder A für a_2, dann B für b_2 usw., zum Schluß B für b_4 je eine beliebige ganze Zahl.

A hat genau dann gewonnen, wenn das System (1), (2), (3) genau eine ganzzahlige Lösung (x, y, z) hat.

a) Kann A so spielen, d.h., kann er die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_4$ jeweils nach der Wahl von $b_1, \ldots, b_3$ durch B so auswählen, daß er gewinnt?

b) Kann A von vornherein für die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_4$ solche Werte angeben, daß er unabhängig von der Wahl der Koeffizienten durch B (in jedem Falle) gewinnt?

5. Es sei $A_0A_1 \ldots A_n$ $(n \geqq 2)$ ein ebener konvexer Polygonzug der Länge s mit $A_0 \neq A_n$. Die Punkte $A_1 \ldots A_{n-1}$ mögen auf ein und derselben Seite der Geraden g durch A_0 und A_n liegen. (Ein ebener Polygonzug $A_0A_1 \ldots A_n$ heiße konvex, wenn der durch die Strecke A_0A_n geschlossene Polygonzug eine konvexe Fläche begrenzt.)

Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt F der bei Rotation des Polygonzuges um g entstehenden Fläche nicht größer als $\pi\frac{s^2}{2}$ ist, daß also $F \leqq \frac{s^2}{2}\pi$ gilt.

Von den folgenden Aufgaben 6.1. und 6.2. ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

6.1. Definition: Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen u, v, w, ... heißt eine Gruppe bezüglich der algebraischen Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedem geordneten Paar $[u;v]$ von Elementen aus $\mathfrak{M}$ ist vermöge der Operation A ein Element w aus $\mathfrak{M}$ zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).

(2) Die algebraische Operation A ist assoziativ d.h., für alle Elemente u, v, w aus $\mathfrak{M}$ gilt:

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w).$$

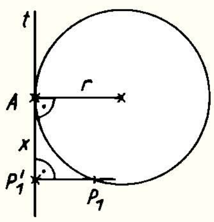
(3) Zu je zwei Elementen u und v aus $\mathfrak{M}$ existiert mindestens ein Element x aus $\mathfrak{M}$, so daß $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus $\mathfrak{M}$, so daß $y \circ u = v$ gilt.

Es sei nun $\mathfrak{P}$ die Menge aller Polynome 1. Grades
$f(x) = a_0 + a_1 x$, wobei a_0, a_1 rationale Zahlen sind und $a_1 \neq 0$ gilt.
Ferner sei in $\mathfrak{P}$ eine algebraische Operation A wie folgt definiert: Sind $f(x)$ und $g(x)$ Polynome aus $\mathfrak{P}$, so ist

$$f(x) \circ g(x) = g[f(x)].$$

Es ist zu entscheiden, ob $\mathfrak{P}$ eine Gruppe bezüglich A ist.

6.2. In einem ebenen Gelände erfolge das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r, falls außerdem eine Tangente t an diesen Kreisbogen und ihr Berührungspunkt A bekannt sind, dadurch, daß in beliebigen Punkten P' von t (mit $\overline{AP'} = x < r$) Senkrechte auf t errichtet und auf ihnen (nach der Seite von t, auf der der Kreisbogen liegt), Strecken $P'P$ so abgetragen werden, daß die Punkte P Punkte des gesuchten Kreisbogens sind. Dabei gelte $\overline{P'P} = y < r$.



a) Beweisen Sie, daß dann

$$y = \frac{x^2}{2r - y} \quad \text{gilt!}$$

b) In der Praxis genügt es oft, Näherungswerte für y zu ermitteln. Das geschieht auf folgende Weise:
Einen ersten Näherungswert y_1 erhält man aus der Gleichung

$$y_1 = \frac{x^2}{2r}.$$

Falls dessen Genauigkeit nicht ausreicht, wird ein zweiter Näherungswert y_2 aus der Gleichung

$$y_2 = \frac{x^2}{2r - y_1} \quad \text{ermittelt.}$$

Analog kann weiter verfahren werden, bis die geforderte Genauigkeit erreicht wurde.
Untersuchen Sie, ob es eine kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft gibt, daß für alle positiven reellen Zahlen

$$x \leq \frac{1}{n} \cdot r \quad \text{der relative Fehler}$$

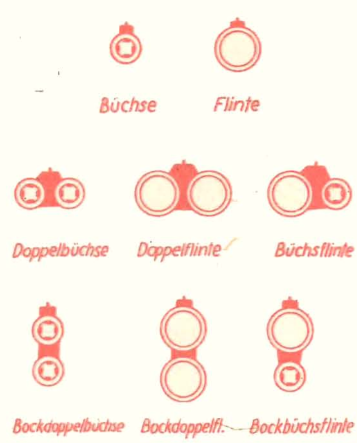
$$\delta = \frac{|y - y_1|}{y}$$

des Näherungswertes $y = \frac{x^2}{2r}$ nicht größer als 0,001 ausfällt, daß also $\delta \leq 0{,}001$ gilt!

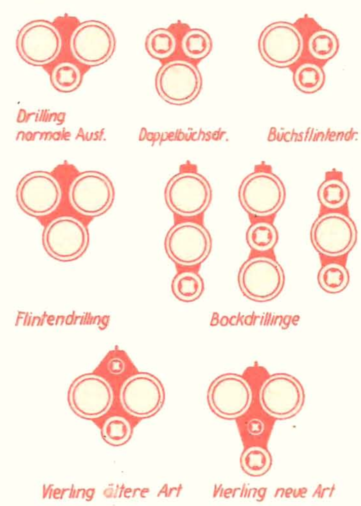
Waffen aus Suhl


Jugendluftgewehr

Der kleinste Bezirk unserer Republik ist der Bezirk Suhl, und die Stadt Suhl die kleinste Bezirksstadt. Nur 3,2 % der Bevölkerung der Republik leben in diesem Bezirk.
Was wissen wir sonst noch von Suhl? Ist Suhl nur eine Stadt im Thüringer Wald, Zentrum einer schönen Urlaubsgegend mit viel Wald und mit Schnee im Winter?
Der VEB Fahrzeug- und Jagdwaffenwerk Ernst Thälmann ist der größte Betrieb des Bezirkes. Die Suhler Moped-Vogelfamilie Star, Schwalbe, Spatz und Sperber kommt ebenso aus diesem Betrieb wie die in aller Welt beliebten Jagd- und Sportwaffen. Wer von euch hat noch nicht mit einem Luftgewehr aus Suhl geschossen? Bei uns in Suhl haben die Schüler ihre eigene Schülerproduktionsabteilung, in der sie im Rahmen des polytechnischen Unterrichts monatlich 700 Jugendluftgewehre montieren und für die Kunden im In- und Ausland verpacken.
Ich möchte euch in diesem Artikel einiges über unsere Waffenproduktion, dabei auftretende mathematische Probleme sowie die in diesem Jahr in Suhl stattfindenden Europameisterschaften im Sportschießen berichten.
Bei Jagdwaffen unterscheidet man zwischen Flinten und Büchsen. Während bei Flinten der Lauf innen glatt ist und mit einer Vielzahl kleiner Bleikugeln – den Schroten – geschossen wird, ist die „Kugel", die aus dem gezogenen Lauf der Büchse verschossen wird, ein längliches Geschoß. Es gibt ein- und mehrläufige Jagdwaffen. Je nach der Art und Anordnung der Läufe unterscheidet man zwischen Doppelflinten, Drillingen, Bockwaffen und Vierlingen. Interessant ist bei Flinten und Büchsen die Art der Kaliberbezeichnung. Sie geht bei Flinten auf eine alte englische Tradition zurück und wird noch heute überall angewandt. Man nimmt 1 engl. Pfund Blei (453,6 g) und teilt es z. B. in 12 gleich große Teile. Aus jedem der 12 Teile gießt man eine Kugel. Der Laufdurchmesser einer Flinte, der dem Durchmesser einer solchen Kugel entspricht, heißt Kaliber 12. Teilt man das Pfund in 16 Teile und stellt entsprechend 16 gleichgroße Kugeln her, so erhält man das Kaliber 16 und so jedes beliebige Flintenkaliber. Gebräuchliche Flintenkaliber sind Kaliber 12 und Kaliber 16 sowie 20 (seltener).



Ein- und doppelläufige Jagdgewehrarten



Drei- und vierläufige Jagdgewehrarten

Bei den Flintenkalibern sieht man deutlich, daß große Zahlen kleine Kaliber bezeichnen

▲1▲ Berechne die Flintenkaliber 12, 16 und 20! Die Dichte von Blei ist 11,3 g · cm^{-3}. Es wird klar, daß bei Flinten die kleinere Zahl ein größeres Kaliber bezeichnet.
Bei Büchsen gibt es zwei Arten von Kaliberbezeichnungen. In den Ländern, die das metrische Maßsystem verwenden (DDR,

BRD, Frankreich, Sowjetunion u. a.), wird der ungefähre Durchmesser der Läufe (innen) und der Geschosse in mm als Kaliber angegeben. So hat z. B. eine Büchse Kaliber 8 mm einen ungefähren Laufinnen- und Geschoßdurchmesser von 8 mm.

In den Ländern des Zollsystems dagegen (USA) gibt das Kaliber an, wieviel Hundertstel (oder Tausendstel) Zoll (1 Zoll = 25,4 mm) der Innendurchmesser des Laufes beträgt. Die Kaliberbezeichnung kann ins metrische System umgerechnet werden, wie z. B. bei der wohl allen von euch bekannten Kleinkaliberbüchse Kaliber 22, deren Lauf mithin einen Innendurchmesser von 5,588 mm hat.

▲2▲ Berechnet den Durchmesser der Geschosse bei einem 38er und einem 45er Revolver!

Wir sehen, daß diese Kaliberbezeichnung nichts mit der Länge der Patronen, der Hülsen oder der Geschosse zu tun hat.

Wie schon erwähnt, ist der Lauf einer Büchse innen nicht glatt. Die wendelförmigen Vertiefungen (Züge) in seinem Innern haben die Aufgabe, dem Lang- oder Spitzengeschoß eine Drehung um seine Längsachse zu geben und so dessen Flugstabilität zu erhöhen.

Die Drehzahl, die dabei zumindest kurzfristig erzielt wird, ist, wie wir sehen werden, recht beachtlich.

▲3▲ Errechnet die ungefähre Drehzahl eines Geschosses in Umdrehungen pro Minute, wenn dasselbe den Lauf mit $800\ m \cdot s^{-1}$ verläßt und durch die Züge im Lauf alle 30 cm einmal um seine Längsachse gedreht wird.

Wer von euch hat sich schon einmal Gedanken darüber gemacht, wieviele Schrote einer Ente, einem Fasan oder einem Hasen bei einem Schuß „um die Ohren" fliegen? In einer normalen Schrotpatrone Kaliber 12 sind 35 g Schrote. Die Auswahl der Schrotgröße richtet sich selbstverständlich nach der Wildart, insbesondere nach der Größe der zu jagenden Tiere. So gibt es zum Beispiel 2-mm-Schrote für die Jagd auf Enten und für die Jagd auf den Fuchs benutzt man 4-mm-Schrote.

▲4▲ Berechne die Anzahl der Schrote in einer Patrone vom Kaliber 12, wenn der Schrotdurchmesser 2 bzw. 4 mm und die Dichte von Blei $11{,}3\ g \cdot cm^{-3}$ beträgt! Vergleiche die Anzahl der Schrote, die sich durch die Durchmesserverdopplung ergibt, miteinander!

In Suhl werden nicht nur Waffen gebaut, es wird mit ihnen auch geschossen. Besonders im August 1971, wenn sich die besten Schützen Europas in Suhl zu ihren Meisterschaften versammeln, wird es eine ganze Woche lang nach Pulver riechen. Auf den zur Zeit schönsten und modernsten Anlagen Europas werden etwa 800 bis 1 000 Schützen aus vielen Ländern im friedlichen Wettstreit ihre Besten ermitteln.

Insgesamt werden 26 Goldmedaillen in 10 verschiedenen Schießdisziplinen vergeben.

Die Vielseitigkeit des Sportschießens kommt nicht nur in den verschiedenen Waffen, sondern auch in den Stellungen (Anschlägen), Entfernungen und Zielobjekten zum Ausdruck. Neben Klein- und Großkalibergewehren, mit denen auf 50 m und 300 m Entfernung feststehende Ringscheiben im Liegen, Knien und Stehen geschossen wird, finden wir Pistolen für das Schießen auf feststehende Ringscheiben auf 50 m Entfernung (Scheibenpistolen) und solche für das Schießen auf nur kurzzeitig sichtbare Figurenscheiben in 25 m Entfernung (Schnellfeuerpistolen).

Zweifellos werden die 3 jagdlichen Schießdisziplinen sehr viele Zuschauer besonders beeindrucken. Beim Wurftaubenschießen (Trap und Skeet) wird aus Flinten nach 12 cm großen Keramikscheiben geschossen, die von Wurfmaschinen auf eine bis zu 80 m weite Luftreise geschleudert werden. Hier kann der Zuschauer unmittelbar den Erfolg oder Mißerfolg der Schützen miterleben.

Schließlich wird von Schützen mit Kleinkaliberbüchsen auf sich in 50 m Entfernung bewegende Wildschweinscheiben geschossen und dabei mit viel Geschick und Können um die höchste Ringzahl gekämpft.

Wir wünschen den DDR-Sportlern bei den Europameisterschaften 1971 in Suhl viel Erfolg!*

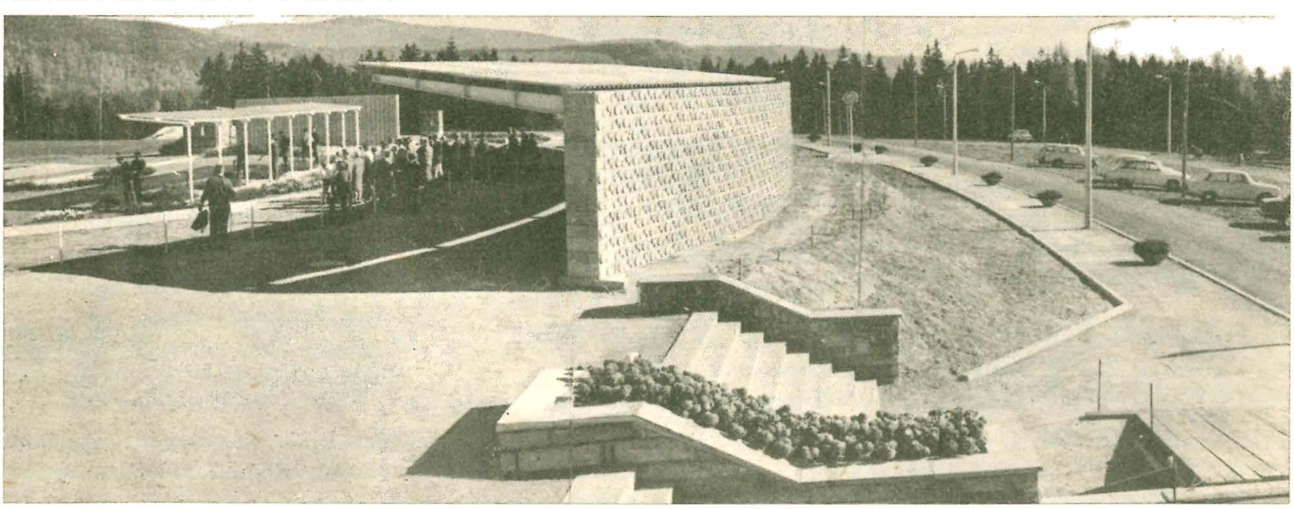
E. Hoffmann

* Lösungen zu den Aufgaben siehe S. 93!

Höchste Zuverlässigkeit der Funktion (alle Bockflinten haben das höchste Gütezeichen der DDR) und Gravuren nach Wunsch in künstlerischer Handarbeit haben den Ruf der Suhler Waffen in der Welt begründet.

Der Vizeweltmeister Wurftaube Trap von 1969, *Henke* DDR, auf dem Suhler Stand

Blick auf einen der drei Wurftaubenstände



XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

I. Stufe (Schulolympiade)

Letzter Abgabetermin: 18. Oktober (beim Mathematiklehrer)

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen sowie die Punktbewertungstabellen werden am 19. Oktober 1971 veröffentlicht.

Olympiadeklasse 5

5/I/1) Bei einem Manöver unserer NVA legte ein Fahrzeug in 9 Teilstrecken eine Gesamtstrecke von 1 780 km zurück.
Die erste Teilstrecke betrug 220 km. Die restlichen Teilstrecken waren untereinander gleich lang.
Berechne die Länge einer jeden dieser restlichen 8 Teilstrecken.

5/I/2) Rolf behauptet, daß sich eine Additionsaufgabe mit der Summe 1 000 bilden läßt, wobei sämtliche Summanden natürliche Zahlen sind, in deren dekadischer Darstellung ausschließlich die Ziffer 8 auftritt und zwar insgesamt genau 8 mal. Stelle fest, ob Rolfs Behauptung richtig ist! Wenn sie es ist, so gib alle derartigen Additionsaufgaben an und ordne darin die Summanden der Größe nach, beginnend mit dem größten!

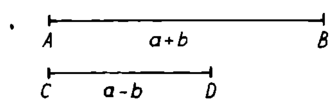
5/I/3) Zeichne 5 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, so, daß sie
a) keinen gemeinsamen Punkt,
b) genau einen Schnittpunkt,
c) genau vier Schnittpunkte,
d) genau fünf Schnittpunkte,
e) genau sechs Schnittpunkte,
f) genau sieben Schnittpunkte,
g) genau acht Schnittpunkte,
h) genau neun Schnittpunkte,
i) genau zehn Schnittpunkte miteinander haben!
Als Lösung gilt eine jeweilige Zeichnung ohne Begründung. Parallele Geraden sind als solche zu kennzeichnen (z. B. $g_1 \parallel g_2$).

5/I/4) Es soll das Produkt $21 \cdot 12 \cdot 25$ berechnet werden. Manfred will diese Aufgabe schriftlich lösen. Annerose sagt: „Mit Hilfe eines Rechenvorteils kann ich die Aufgabe auch im Kopfe rechnen."
Gib an, welchen Rechenvorteil Annerose benutzt haben könnte!

Olympiadeklasse 6

6/I/1) Von zwei Autos vom Typ „Wartburg" legte das eine eine Strecke von 1 200 km zurück, das andere eine Strecke von 800 km. Es sei angenommen, daß jedes der beiden Autos für jeden Kilometer die gleiche Menge Kraftstoff verbrauchte.
Dabei verbrauchte das zweite Auto 36 Liter Kraftstoff weniger als das erste.
Berechne, wieviel Liter Kraftstoff beide Autos zusammen für die oben angegebenen Strecken verbrauchten!

6/I/2) Von den beiden abgebildeten Strekken AB und CD hat die erste die Länge $a+b$, die zweite die Länge $a-b$.



Konstruiere unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge a und eine Strecke der Länge b! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

6/I/3) Vier Flächen eines Holzwürfels von 3 cm Kantenlänge werden rot angestrichen, die beiden übrigen bleiben ohne Anstrich. Danach wird der Würfel in genau 27 Würfel von je 1 cm Kantenlänge zersägt.
Ermittle von diesen kleinen Würfeln die Anzahl derjenigen, die keine rot angestrichene Fläche,
genau eine rot angestrichene Fläche,
genau zwei rot angestrichene Flächen,
genau drei rot angestrichene Flächen besitzen!
Unterscheide dabei die folgenden Fälle:
a) Die nicht angestrichenen Flächen haben keine gemeinsame Kante.
b) Die nicht angestrichenen Flächen haben eine gemeinsame Kante.
Als Lösung genügt die Angabe der Anzahlen ohne Begründung.

6/I/4) Zwei Orte A und B seien durch eine 999 km lange Straße miteinander verbunden. Im Abstand von jeweils 1 km seien auf dieser Straße Kilometersteine aufgestellt, die beiderseitig derart beschriftet sind, daß auf der einen Seite jedes Steines seine Entfernung von A und auf der anderen Seite seine Entfernung von B in km angegeben ist. Z. B. trägt der Stein am Ortsausgang von A die Beschriftung 0 und 999, der Stein am Ortseingang von B die Beschriftung 999 und 0.
Ermittle von diesen Steinen die Anzahl derjenigen, bei deren Beschriftung höchstens zwei voneinander verschiedene Ziffern verwendet wurden (z. B. 722 und 277).

Olympiadeklasse 7

7/I/1) Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen Z mit folgenden Eigenschaften:
(1) Die Zahl Z ist durch 8 teilbar.
(2) Die Ziffern von Z sind paarweise voneinander verschieden, d. h. in jeder dieser Zahlen darf jede Ziffer höchstens einmal auftreten.
(3) Alle verwendeten Ziffern bezeichnen, einzeln für sich betrachtet, jeweils Primzahlen.

7/I/2) Beweise folgenden Satz:
Enthält ein rechtwinkliges Dreieck einen Winkel von 30°, so ist seine Hypotenuse (längste Seite) doppelt so lang wie seine kürzeste Kathete (kürzeste Seite).

7/I/3) Günther zeichnet ein Dreieck $\triangle ABC$ und stellt fest: Die Maßzahl des in Zentimetern gemessenen Umfangs u seines Dreiecks
$\triangle ABC$ ist eine Primzahl. Ferner gilt:
$\overline{BC}=a=6$ cm, $\overline{AC}=b=2$ cm.
Ermittle $\overline{AB}=c$ und u!

7/I/4) Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus b, c (mit $c>b$) und $\alpha+\beta$!
Dabei sind b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücken stets ein Dreieck eindeutig bestimmt ist.

Olympiadeklasse 8

8/I/1) a) Berechne die Zahl
$$x=-\{-[-(-2)]^2\}^3\cdot\left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\right\}$$
b) Stelle fest, ob sich x als Potenz einer natürlichen Zahl darstellen läßt!

8/I/2) Ermittle alle rationalen Zahlen x, die folgende Eigenschaft haben:
Addiert man 33 zu x und halbiert die entstandene Summe, so erhält man das Doppelte der zu x entgegengesetzten Zahl.

8/I/3) Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit A als Scheitel des rechten Winkels und mit $\overline{AC}<\overline{AB}$. (1)

Der Kreis um A mit $\overline{AC}$ schneidet BC außer in C noch in einem Punkt E, wobei E wegen (1) zwischen C und B liegt. Die im Punkt E an den genannten Kreis gelegte Tangente schneidet AB in einem Punkt D, der zwischen A und B liegt.
Beweise, daß $\overline{ED} = \overline{DB}$ gilt!

8/I/4) Gegeben seien ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$ sowie eine beliebige Länge e ($e > 0$).
Konstruiere unter Beibehaltung der Seite AB ein zu $ABCD$ flächengleiches Parallelogramm ABC_1D_1, das auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie $ABCD$ liegt und dessen Diagonale AC_1 die gegebene Länge e hat!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken stets eindeutig ein Parallelogramm der geforderten Art konstruieren läßt! (Eine Untersuchung, ob zwei eventuell entstehende verschiedene Parallelogramme einander kongruent sind, wird hier nicht verlangt.)

Olympiadeklasse 9

9/I/1) Jörg schreibt die folgende Gleichung auf:

(1) $$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} = \frac{1}{(a+b)(c+d)}.$$

Michael meint, daß sie „falsch" sei. Jörg, der sich nicht so leicht „überzeugen" läßt, wählt für die Variablen a, b, c und d Zahlen, setzt sie in die Gleichung (1) ein und erhält zu Michaels Überraschung eine wahre Aussage. Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, nur aus den Zahlen -1; 0; 1 für a, b, c und d je eine so auszuwählen, daß die Gleichung (1) erfüllt wird!

9/I/2) Jede Seitenhalbierende eines Dreiecks zerlegt die Dreiecksfläche in zwei Dreiecksflächen, die gleichlange Grundseiten und gleichlange Höhen haben und somit inhaltsgleich sind. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks heißt Schwerpunkt des Dreiecks. Untersuchen Sie, ob jede Gerade durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks $\triangle ABC$ dessen Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt!

9/I/3) Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen a, für die der Term

$$t = \frac{a+11}{a-9}$$

eine natürliche Zahl ist!

9/I/4) In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$. S sei ein Punkt der Senkrechten in A auf ε. Ermitteln Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle CDS$!
Hinweis: Im Lehrbuch für Mathematik, Klasse 7, finden Sie auf Seite 94 Anregung für eine Lösung dieser Aufgabe.

Olympiadeklasse 10

10/I/1) Ein Raum soll mit 32 Glühlampen so ausgestattet werden, daß sich eine Gesamtleistung von 1 800 Watt ergibt. Es stehen je ausreichend viele Glühlampen von 40 Watt, 60 Watt und 75 Watt, aber keine anderen, zur Verfügung.
Geben Sie alle Möglichkeiten einer derartigen Ausstattung an!

10/I/2) Beweisen Sie den folgenden Satz: Der Durchschnitt aus der Menge aller Drachenvierecke und der Menge aller Trapeze ist die Menge aller Rhomben.

10/I/3) Es sei x eine Variable, die alle von 1 und von -1 verschiedenen reellen Zahlen annehmen kann. Geben Sie eine Möglichkeit an, den Term $\frac{x}{x^2-1}$ so als Summe zweier Brüche darzustellen, daß die Variable x nur in den Nennern dieser beiden Brüche und dort in keiner höheren als der 1. Potenz auftritt!

10/I/4) in

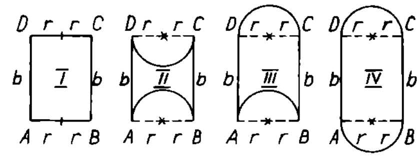
$$\begin{array}{r} D\ R\ E\ I \\ +D\ R\ E\ I \\ +D\ R\ E\ I \\ \hline N\ E\ U\ N \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden!
Geben Sie alle Lösungen dafür an!

Olympiadeklasse 11/12

11/12/I/1) Fünf Soldaten A, B, C, D, E aus fünf sozialistischen Staaten treffen sich auf einem Meeting bei einem gemeinsamen Manöver der befreundeten Armeen. An dem Manöver nehmen nur Angehörige der bulgarischen, polnischen, ungarischen, sowjetischen Streitkräfte und der *Nationalen Volksarmee* der DDR teil. Ferner ist folgendes bekannt:
(1) Jeder der Soldaten A, B, C und D beherrscht außer der Sprache seines Staates als „Zweitsprache" noch genau eine der folgenden Sprachen: Bulgarisch, Polnisch, Ungarisch, Russisch, Deutsch.
(1a) Diese vier Zweitsprachen sind paarweise voneinander verschieden.
(2) E beherrscht keine Fremdsprache.
(3) A beherrscht eine Sprache, die außer ihm auch der Sowjetsoldat beherrscht.
(4) B beherrscht keine slawische Sprache, also weder Bulgarisch, noch Polnisch, noch Russisch.
(5) Der NVA-Angehörige kann sich genau dann mit E verständigen, wenn einer der drei anderen Soldaten, nämlich C, als Übersetzer fungiert.
(6) Der Bulgare kann sich mit dem Ungarn nur über zwei der anderen Soldaten, und zwar D und B, verständigen.
Es ist für jeden dieser Soldaten festzustellen, welchem Staat er angehört und welche Zweitsprache er – wenn überhaupt – beherrscht.

11/12/I/2) a) Es ist für jede der hier abgebildeten Figuren (I bis IV), die sämtlich durch Strecken oder Halbkreise mit dem Radius r begrenzt sind und für die jedesmal $ABCD$ ein Rechteck mit $\overline{AB} = \overline{CD} = 2r$ und $\overline{AD} = \overline{BC} = b$ ist, folgende Untersuchung durchzuführen:
Gibt es Streckenverhältnisse $b : r$, für die der Umfang u der betreffenden Figur bei gegebenem Flächeninhalt A am kleinsten ist? Wenn ja, so sind sämtliche derartige Streckenverhältnisse anzugeben.
Ferner ist dieser Minimalumfang jeweils durch r auszudrücken, und es ist der Quotient aus dem Minimalumfang und der Quadratwurzel des Flächeninhalts zu berechnen.
b) Die Figuren I bis IV sind nach abnehmendem Minimalumfang bei konstantem Flächeninhalt zu ordnen. Dabei wird auch der Fall $b = 0$ zugelassen, falls in diesem Falle der Minimalumfang der betreffenden Figur erreicht wird.



11/12/I/3) Es sind alle nicht negativen reellen Zahlen k anzugeben, für die das Polynom

$$f(x) = (x+1)^4 - (kx)^2$$

a) genau eine,
b) genau zwei voneinander verschiedene
c) genau drei paarweise verschiedene
d) genau vier paarweise verschiedene
e) keine

reelle(n) Nullstelle(n) hat.

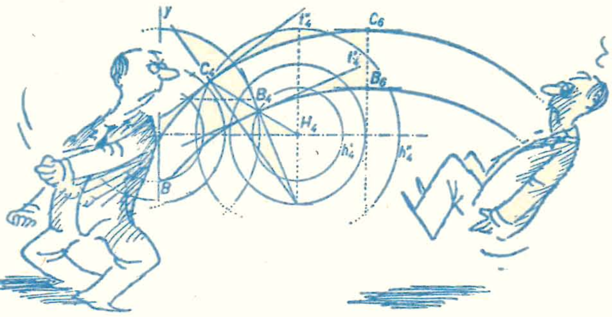
11/12/I/4) In einem Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} \geqq \overline{BC} \geqq \overline{AC}$ sei P ein im Innern des Dreiecks gelegener Punkt. Man beweise, daß dann stets $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ gilt!

Achtung — alpha-Wettbewerb

Wir bitten, die Antwortkarten des *alpha*-Wettbewerbs erst dann *geschlossen* an die Redaktion einzusenden, wenn die von uns zum Heft 3/71 abgesandten Antwortkarten bei euch eingetroffen sind, also zwischen dem 1. und 10. Oktober 1971. Wer seine Antwortkarten zurückerhalten möchte, der lege einen *richtig frankierten* Umschlag mit seiner Adresse bei.
Wettbewerbs-Teilnehmer, welche zwei oder drei Anerkennungsurkunden mit den Antwortkarten einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold und die Urkunden zurück.
Wir wiederholen: Letzter Einsendetermin für Heft 3/71: 8. 9. 1971

Redaktion *alpha*

In freien Stunden alpha heiter



Vladimir Renčin, Praha

Eine Aufgabe aus dem klassischen Griechenland

„Edler Pythagoras, sage mir an, wie viele Schüler zählt Dein Haus, die dem Dienst sich weihen der unsterblichen Götter?“ – „Sagen will ich es Dir, o Polykrates. Siehe, die Hälfte weiht sich der herrlichen Mathematik, ein Viertel erforscht eifrig die Tiefen der ewigen Natur, ein Siebentel übt noch schweigend die Kraft der Seele und horcht der sinnvollen Rede, dann noch der Jungfrauen drei.
So viel führ' ich der Schüler zum Born der ewigen Wahrheit.“ Wieviel Schüler hatte demnach Pythagoras?

Zahlenrätsel

Den Zahlen entsprechend sind Buchstaben in die Figur einzusetzen. Das Rätsel, richtig gelöst, zeigt eine wertvolle Hilfe für mathematisch interessierte Schüler (ue = ü)

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37

a) 19 1 8 27 Bezeichnung für eine wahre Aussage
b) 3 7 31 32 12 24 franz. Mathematiker (1623 bis 1662)
c) 19 37 26 12 9 24 geometrisches Gebilde
d) 27 35 36 36 18 26 Zeichen zur schriftlichen Darstellung von Zahlen
e) 15 16 17 10 14 30 28 24 gemeinsamer Anfangspunkt zweier Strahlen
f) 34 25 29 33 10 Anordnung von Zahlen nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten
g) 5 20 21 37 Zahl
h) 31 22 6 11 18 Ergebnis einer Addition
i) 13 4 5 2 23 19 Wichtiger Satz aus der Geometrie (Kurzbezeichnung)

Mathematikfachlehrer H. Winkler, OS Hartmannsdorf

Ein Zahlentrick

Klaus führt beim Pioniernachmittag ein „Zauberkunststück“ vor. Er nennt drei Städte, z. B. Dresden – Berlin – Leipzig und fordert drei Pioniere auf, eine Stadt verdeckt zu notieren. Klaus darf nicht wissen, wer welche Stadt gewählt hat und es muß von jedem Teilnehmer eine andere Stadt benannt werden.
Angenommen, die 3 Pioniere heißen Ruth, Peter und Inge. Klaus gibt nun der Ruth 1 Pfennig (oder Rechengeld), Peter 2 und Inge 3 Pfennige. Auf dem Tisch liegen 18 weitere Pfennige. Klaus fordert nun die Pioniere auf, sich von den Pfennigen in seiner Abwesenheit welche zu nehmen und zwar soll der, der Dresden wählte, so viele Pfennige nehmen, wie er schon in der Hand hat, der Berlin wählte, nehme zweimal soviel weg, wie er in der Hand hat und der Leipzig wählte, soll viermal soviel nehmen, wie er schon in der Hand hat. Dann verläßt Klaus den Raum. Wenn er wiederkommt, zählt er die verbliebenen Pfennige und kann aus der Tabelle ersehen, wer Dresden, wer Leipzig, wer Berlin notierte!

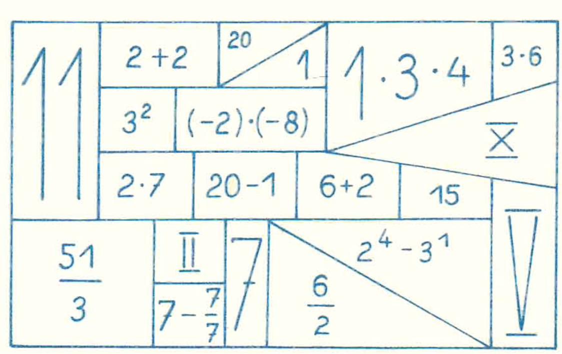
es liegen:	1 Pf	2 Pf	3 Pf	5 Pf	6 Pf	7 Pf
Ruth	Dresden	B	D	B	L	L
Peter	Berlin	D	L	L	D	B
Inge	Leipzig	L	B	D	B	D

Oberlehrer H. Pätzold, Volkshochschule Waren/Müritz

Test für „Adleraugen“

In jedem Feld steht eine Zahl oder ein Term. Sie sind den Zahlen von 1 bis 20 äquivalent. Wer zählt am schnellsten von 1 bis 20? Das entsprechende Feld muß dabei gezeigt werden.
Wer weniger als 30 Sekunden braucht, hat ein scharfes Auge!

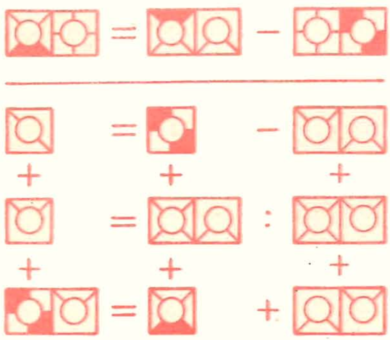
Oberlehrer H. Pätzold, Volkshochschule Waren/Müritz



Kryptarithmetik

Für jedes Zeichen ist eine Ziffer einzusetzen. Gleiche Zeichen bedeuten gleiche Ziffern. Es sind drei waagerechte und vier senkrechte Aufgaben zu lösen.

Jörg Schubert, Pfaffroda (Kl. 6)

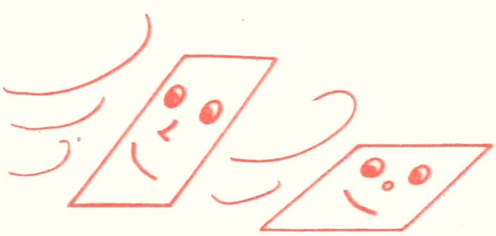


Am besten: halbe — halbe

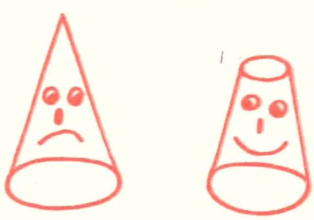
Herr Neumann, ein Mathematiklehrer, zensiert die Hausaufgaben seiner Schüler. Er wundert sich; Klaus rechnete besser als sonst. Er fragt: „Na, Klaus, wem soll ich nun die Zwei geben, dir oder deiner Schwester?“ – „Am besten: halbe – halbe, jedem eine Eins!“

Mitgeteilt von Ilse Clauder, Spielberg

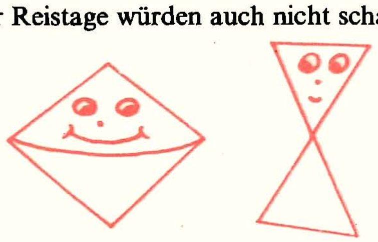
„Nein, dieser Gegenwind heute!“



„Warum nur immer so spitzig?“



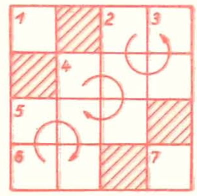
„Ein paar Reistage würden auch nicht schaden!“



Ausgedacht und gezeichnet von der Schülerin Monika Simon, EOS Flöha

Begegnung mit berühmten Mathematikern

Waagerecht: 1. 3!; 2. Potenz von 2; 4. Faktoren sind Primzahlzwillinge; 5. teilbar durch 17; 6. gleiche Quersumme wie 5 senkrecht.



Senkrecht: 2. teilbar durch 7; 3. teilbar durch 9; 5. Potenz von 3.

An folgenden Stellen erscheinen die Lebensdaten berühmter Leipziger Mathematiker, wenn man bei der Lösung berücksichtigt, daß die Jahreszahlen mit 1 beginnen. Die Namen der Mathematiker sollt ihr selbst finden.

Von ... (Diagonale, beginnend bei 6) bis ... (Diagonale beginnend bei 7) lebte ...

Von ... (2 in Pfeilrichtung) bis ... (4 in Pfeilrichtung) lebte ... Von 1790 bis ... (6 in Pfeilrichtung) lebte ...

Christa Riehl, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität, Leipzig

Ist das die Möglichkeit?

Lehrer: „Man durchschneidet mit einer Ebene eine Kugel. Was entsteht dabei?“

Schüler (im Brustton der Überzeugung): „Eine Ellipse!“

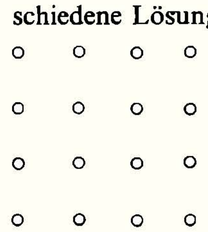
Lehrer: „Wieso – eine Ellipse? – Ein Kreis!!“

Schüler (listig lächelnd): „Aber ich will die Kugel schief durchschneiden!...“

Doz. J. Gaiduk, Charkow (UdSSR)

Nur mit Geduld zu meistern!

Gegeben sind 16 Punkte in der Ebene in folgender Anordnung: Diese 16 Punkte sind durch 6 Streckenzüge ohne abzusetzen derart zu verbinden, daß kein Punkt auf mehr als einer Strecke liegt. (Es sind verschiedene Lösungen möglich)



Nach einer Idee von StR H. J. Kerber, Oberlehrer H. Pätzold Waren/Müritz

6 aus 49 + 1

Ulrich Groß, Marienberg (Kl. 6)

6 aus 50, kennt Ihr das?
6 aus 50 macht viel Spaß.
Welche Sportart kam hinzu?
Der echte Sportler merkt's im Nu!
Mathe heißt die Disziplin,
alpha ist ein Hauptgewinn!

Lösungen

Lösungen zu: aufgepaßt — nachgedacht — mitgemacht (Heft 4/71)

1.1. Aus $a-b=2$ folgt $a \geqq 2$; aus $a+b=8$ folgt $0 \leqq a \leqq 8$. Somit gilt $2 \leqq a \leqq 8$.

a	b	$a-b$	$a+b$
2	0	2	2
3	1	2	4
4	2	2	6
5	3	2	8
6	4	2	10
7	5	2	12
8	6	2	14

Nur das Zahlenpaar (5, 3) erfüllt zugleich beide Gleichungen.

1.2. Aus $a-b=48$ folgt $a \geqq 48$; aus $a+b=19$ folgt $0 \leqq a \leqq 19$. Beide Bedingungen können nicht zugleich erfüllt sein. Die Aufgabe besitzt somit keine Lösung.

2.1. Aus $a-b=4$ folgt $a \geqq 4$; aus $a+b=6$ folgt $0 \leqq a \leqq 6$. Somit gilt $4 \leqq a \leqq 6$.

a	b	$a+b$	$a-b$
4	0	4	4
5	1	4	6
6	2	4	8

Nur das Zahlenpaar (5, 1) erfüllt zugleich die zweite und dritte Gleichung. Wegen $a+b+c=11$, also $6+c=11$, gilt $c=5$. Es gibt genau ein Zahlentripel (5, 1, 5), das alle gegebenen Gleichungen zugleich erfüllt.

2.2.

a	$b=a+2$	$c=4 \cdot a$	$a+b+c$
0	2	0	2
1	3	4	8
2	4	8	14
3	5	12	20
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
9	11	36	56
10	12	40	62
11	13	44	68

Nur das Zahlentripel (10, 12, 40) erfüllt zugleich die gegebenen drei Gleichungen.

3. Aus $36:3=12$ und $12-1=11$ und $12+1=13$ folgt, daß die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 11, 12 und 13 lauten.

4. Aus $210=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7=5 \cdot 6 \cdot 7$ folgt, daß die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 5, 6 und 7 lauten.

5. Die nachstehende Tabelle enthält alle möglichen Lösungen.

a	b	c	d
3	4	5	13
3	4	6	12
3	4	7	11
3	4	8	10
3	5	6	11
3	5	7	10

a	b	c	d
3	5	8	9
3	6	7	9
4	5	6	10
4	5	7	9
4	6	7	8

6. Es sei n die zu ermittelnde natürliche Zahl

n	$6 \cdot n$	$6 \cdot n+3$	$3 \cdot n$	$3 \cdot n+6$
0	0	3	0	6
1	6	9	3	9
2	12	15	6	12
3	18	21	9	15

Der Tabelle ist zu entnehmen, daß nur $n=1$ eine Lösung darstellt.

7. Damit $4 \cdot a+1$ kleiner als 20 ist muß a entweder 0 oder 1 oder 2 oder 3 oder 4 sein. Damit $4 \cdot a+1$ durch 5 teilbar ist, muß $4 \cdot a$ entweder 4 oder 9 oder 14 oder 19 betragen. Nur $a=1$ erfüllt die gestellten Bedingungen.

8. Es sei a die Anzahl der Gänse und b die Anzahl der Schafe. Jede Gans besitzt dann $2 \cdot a$ Beine, jedes Schaf $4 \cdot b$ Beine. Die Tiere besitzen zusammen $a+b$ Köpfe und $2 \cdot a+4 \cdot b$ Beine.

a	b	$2 \cdot a$	$4 \cdot b$	$2 \cdot a+4 \cdot b$
1	39	2	156	158
2	38	4	152	156
.	.	.	.	.
	.			
.	.	.	.	.
31	9	62	36	98
32	8	64	32	96
33	7	66	28	94

Der Tabelle ist zu entnehmen, daß auf der Wiese 32 Gänse und 8 Schafe weiden.

9. Es seien a Artikel zum Preise von 5 M und b Artikel zum Preise von 7 M eingekauft worden. Die nachstehende Tabelle enthält alle möglichen Lösungen.

a	$5 \cdot b$	b	$7 \cdot b$	$5 \cdot a+7 \cdot b$
1	5	5	35	40
8	40	0	0	40
3	15	8	56	71
10	50	3	21	71
0	0	14	98	98
7	35	9	63	98
14	70	4	28	98

10. a) Zum Drucken der einstelligen Ziffern werden genau 9 Ziffern benötigt. Für die zweistelligen Ziffern verbleiben noch $55-9=46$ Ziffern. Daraus lassen sich 23 zweistellige Ziffern drucken, und zwar die Ziffern von 10 bis 32. Das Buch hatte 32 Seiten.

b) In diesem Falle verbleiben zum Drucken der zweistelligen Ziffern $87-9=78$ Ziffern. Es lassen sich also 39 zweistellige Ziffern drucken, und zwar die Ziffern von 10 bis 48. Das Buch hat 48 Seiten.

c) Für die zweistelligen Ziffern, also für die Ziffern von 10 bis 99 werden $2 \cdot 90=180$ Ziffern benötigt. Für die dreistelligen Ziffern verbleiben noch $213-9-180=24$ Ziffern; daraus lassen sich acht dreistellige Ziffern drucken, und zwar die Ziffern 100 bis 107. Das Buch besitzt 107 Seiten.

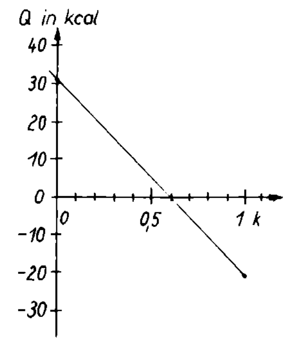
Lösungen zu „Mathematik und Chemie“ (Heft 2/71)

1. a) $Q=Q_1+k\,Q_2$

b) Definitionsbereich: $0 \leqq k \leqq 1$

Wertevorrat: $Q_1 \geqq Q \geqq Q_1+Q_2$

$(Q_1>0,\ Q_2<0)$



c) $0=Q_1+k_0\,Q_2,\ k_0=-\dfrac{Q_1}{Q_2}$

d) $Q=31{,}4-52{,}8\,k$

e) $k_0=\dfrac{31{,}4}{52{,}8}=0{,}595$

Molares Verhältnis von Wasser und Sauerstoff ist 1 mol:0,595 mol.

2. a) Ist V_m das molare Volumen, so sind die Volumina

H_2	CO	N_2	Gesamt
V_m	$(1+2k)\,V_m$	$4k\,V_m$	$2(1+3k)\,V_m$

Die prozentuale Zusammensetzung ist

H_2	CO	N_2
$\dfrac{50}{1+3k}\,\%$	$\dfrac{50\,(1+2k)}{1+3k}\,\%$.	$\dfrac{200\,k}{1+3k}\,\%$

b)	$k=k_0$	$k=1$
H_2	18,0 %	12,5 %
CO	39,3 %	37,5 %
N_2	42,7 %	50,0 %

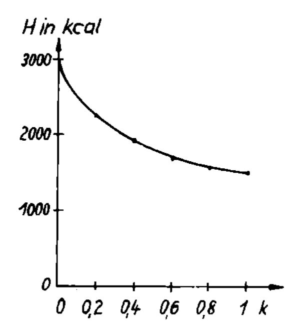
3. a)

Wasser	Kohlenstoff	Luft
$\dfrac{4{,}5\,Q_1}{1+3k}\,V$	$0{,}214\,Q_2\,\dfrac{1+2k}{1+3k}\,V$	$\dfrac{2{,}5\,k}{1+3k}\,V$

b)

Wasser	Kohlenstoff	Luft
3,00 t	6,03 t	18 750 m^3

4. a) $H=\dfrac{1}{2\,(1+3\,k)}\,[H_1+(1+2\,k)\,H_2]$



b) $H=\dfrac{5}{1+3\,k}\,[305+302\,(1+2\,k)]$

c) H = 1 735 kcal

Lösungen zu: Aufgaben aus Mathematiklehrbüchern der ČSSR (Heft 3/71)

5▲704 $u=2(a+b)=2\cdot\left(\frac{140\cdot 65}{100}+\right.$
$\left.+\frac{90\cdot 65}{100}\right)\mathrm{m}=\frac{2\cdot 65}{100}(140+90)\,\mathrm{m}$
$u=299\,\mathrm{m}$

5▲705 Bandlänge $l=85\cdot 2\cdot(0{,}75+0{,}6)\,\mathrm{m}=$
$=170\cdot 1{,}35\,\mathrm{m}=299{,}5\,\mathrm{m}$;
Bandlänge $\approx 230\,\mathrm{m}$

6▲706 $V=a\cdot b\cdot c=(4{,}3\cdot 2{,}9\cdot 2)\,\mathrm{m}^3=24{,}7\,\mathrm{m}^3\approx 25\,\mathrm{m}^3$; der Preis beträgt daher $25\cdot 14{,}60$ Kcs $=365$ Kcs.

6▲707 Aus dem Ansatz $x+y+z=313$, $y=x-205$, $z=y-36$ erhalten wir $x=253$, $y=48$, $z=12$; daher ergeben sich: 253 km Bahnfahrt, 48 km Autobusfahrt, 12 km Wanderstrecke.

6▲708 Aus dem Ansatz $s=v_1t+v_2t$ ergibt sich $t=\frac{s}{v_1+v_2}$; wir erhalten damit $t=4$ min. Aus $s_1=v_1t$ bzw. $s_2=600\,\mathrm{m}$ für den Läufer.

6▲709 Aus $s=vt$ erhalten wir: in 15 Minuten werden 375 m, in 8 Stunden 12000 m Papierband erzeugt.

7▲710 Nachdem g und P sowie das geforderte Dreieck ABC gezeichnet sind, werden die Winkel α, β auf g angetragen; es sind zwei Lösungen möglich.

7▲711 Aus der Formel $b=\frac{2\pi r\cdot\alpha^\circ}{360^\circ}$ erkennt man, daß es zweckmäßig ist, zunächst die Teilaufgabe a) zu rechnen und die Ergebnisse der anderen Teilaufgaben daraus abzuleiten. Wir erhalten bei

a) $b=\frac{2\pi 12\cdot 360^\circ\,\mathrm{cm}}{360^\circ}=24\pi\,\mathrm{cm}\approx 75{,}36\,\mathrm{cm}$;
b) $b=6\pi\,\mathrm{cm}\qquad\approx 18{,}84\,\mathrm{cm}$;
c) $b=2\pi\,\mathrm{cm}\qquad\approx 6{,}28\,\mathrm{cm}$;
d) $b=\frac{24\pi\cdot 35}{60}\,\mathrm{cm}\quad=14\pi\,\mathrm{cm}\approx 43{,}96\,\mathrm{cm}$.

7▲712 Aus der Formel $b=\frac{2\pi r\cdot\alpha^\circ}{360^\circ}$ ergibt sich

$$b=\frac{2\pi\cdot 6\,375\,\mathrm{km}\cdot(139^\circ-12^\circ)}{360^\circ},\ b\approx 14\,120\,\mathrm{km}.$$

7▲713 Wir benutzen den Ansatz $m=m_1-m_2$ und die Formel $m=V\cdot\varrho$; es ergibt sich $m_1\approx 3\,990$ g, $m_2\approx 588$ g, daher $m\approx 3{,}4$ kg.

8▲714 Der mit Luft gefüllte Teil des Behälter-Volumens hat die Form eines dreiseitigen Prismas mit der Höhe $h=100$ cm, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck mit der Grundlinie $g=100$ cm und der Höhe h' ist. Dieses Dreieck ist dem Dreieck an der Unterseite des Behälters ähnlich (s. Fig. 2); daher gilt

$\frac{h'}{100}=\frac{12}{\sqrt{100^2-12^2}}$, $h'\approx 12{,}08$ cm,
$V_{Luft}\approx 60\,400\,\mathrm{cm}^3$, $V_{Wasser}\approx 940\,\mathrm{dm}^3$.

8▲715 Der Term ist sinnvoll für a beliebig reell, $x\neq 0$, $x\neq a$; Ergebnis: $1+a+x$.

Lösungen zu „Mathematische Denkaufgaben“ (Heft 4/71)

● Vier Handschuhe und drei Socken. Unter den vier Handschuhen befinden sich mit Sicherheit zwei von ein und derselben Machart. Andererseits befinden sich unter den drei Socken zwei von gleicher Farbe.

● Es genügt nicht, 36 Äpfel aus der Kiste herauszunehmen, weil sie alle von verschiedenen Sorten sein könnten (je 9 Äpfel von jeder Sorte). Wenn man jedoch noch einen weiteren Apfel herausnimmt, dann sind sicher 10 Äpfel von ein und derselben Sorte unter ihnen. Daher befinden sich unter 37 Äpfeln sicher mindestens 10 Äpfel von ein und derselben Sorte.

● An der Wand hing das Portrait von Iwanows Sohn. Iwanow hatte die spitzfindige Antwort auch so formulieren können: „Der Vater des auf dem Bilde Dargestellten bin ich.“

● Wir nehmen an, daß die ersten beiden Aussagen nicht stimmen und die dritte stimmt. Wenn es nicht stimmt, daß Sergejew keine „5“ hat und Wassiljew keine „4“, dann hat Sergejew eine „5“ und Wassiljew eine „4“. Aus der Richtigkeit der dritten Aussage folgt, daß Alexejew ebenfalls eine „4“ hat. Dies ist aber nicht möglich, da die Zensuren der Schüler nach den Bedingungen der Aufgabe verschieden sind. Aus der Annahme, daß die erste und die dritte Aussage nicht stimmen und die zweite stimmt, ergibt sich, daß Sergejew eine „5“ hat, Wassiljew keine „4“ und Alexejew keine „4“. Dies ist wiederum nicht möglich, weil dann entweder Wassiljew oder Alexejew gewiß eine „4“ haben muß, da Sergejew eine „5“ hat. Die einzige Möglichkeit ist daher:
Die erste Behauptung des Lehrers ist richtig und die anderen beiden Male hat er sich geirrt. Somit erhalten wir: Sergejew hat keine „5“. Wassiljew hat eine „4“ und Alexejew hat keine „4“. Daraus ergibt sich, daß Wassiljew eine „4“ hat, Sergejew hat keine „5“ (und keine „4“), also eine „3“ und Alexejew hat keine „4“, sondern eine „5“.

Lösungen zu den Aufgaben: Waffen aus Suhl

▲1▲ *Kaliber 12* (Heft 4/71)

$$m\cdot z=453{,}6\,\mathrm{g}$$
$$\frac{d^3\cdot\pi}{6}\cdot\varrho\cdot z=453{,}6\,\mathrm{g}$$
$$\frac{d^3\cdot\pi}{6}\cdot 11{,}3\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\cdot 12=453{,}6\,\mathrm{g}$$
$$d^3=\frac{453{,}6\,\mathrm{g}\cdot 6}{\pi\cdot 11{,}3\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\cdot 12}$$
$$d=\sqrt[3]{\frac{453{,}6\,\mathrm{g}\cdot 6}{\pi\cdot 11{,}3\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\cdot 12}}$$
$$d=\sqrt[3]{6{,}4\,\mathrm{cm}^3}$$
$$d\approx 1{,}86\,\mathrm{cm}$$

Kaliber 16 $\quad d\approx 1{,}68$ cm
Kaliber 20 $\quad d\approx 1{,}57$ cm

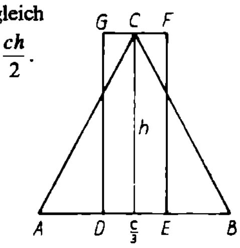
▲2▲ $\frac{38}{100}\,\mathrm{Zoll}\cdot 25{,}4\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{Zoll}}=9{,}66\,\mathrm{mm}$
$\frac{45}{100}\,\mathrm{Zoll}\cdot 25{,}4\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{Zoll}}=11{,}4\,\mathrm{mm}$

▲3▲ $n=\frac{800\,\mathrm{m}}{0{,}3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}}=2\,670\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 60\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}$
$=160\,000\,\mathrm{min}^{-1}$

▲4▲ $n_{92}:n=\frac{35\,\mathrm{g}}{m_k}\quad n=\frac{35\,\mathrm{g}\cdot 6}{\pi\cdot d^3\cdot\varrho}$
$n=\frac{35\,\mathrm{g}\cdot 6}{0{,}008\,\mathrm{cm}^3\cdot 11{,}3\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}}\approx 740$
$n\approx 93$
n_{94}

W 8 ■ 638 Es seien c die Länge der Basis $\overline{AB}$ des gleichschenkligen Dreiecks ABC und h die Länge der zugehörigen Höhe (vgl. die Abb.). Dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich

$$A_1=\frac{ch}{2}.$$



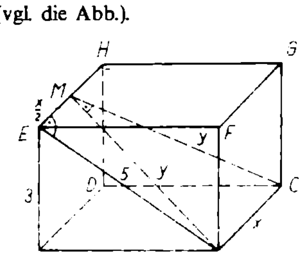
Nach Voraussetzung gilt $\overline{DE}=\frac{c}{3}$, ferner gilt $\overline{EF}=h$; daher ist der Flächeninhalt des Rechtecks $DEFG$ gleich

$$A_2=\frac{ch}{3}.$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks $DEFG$ verhält sich daher zu dem Flächeninhalt des Dreiecks ABC wie

$$A_2:A_1=\frac{ch}{3}:\frac{ch}{2}=2:3.$$

* 8 * 639 Wir setzen $\overline{BC}=x$ cm und $\overline{MB}=y$ cm. Dann gilt aus Symmetriegründen $\overline{MB}=\overline{MC}=y$ cm, d. h., das Dreieck MBC ist gleichschenklig; da dieses Dreieck nach Voraussetzung auch rechtwinklig ist, kann nur der Winkel $\sphericalangle CMB$ ein rechter Winkel sein (vgl. die Abb.).



Ferner gilt nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck ABE,
$\overline{EB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=(16+9)\,\mathrm{cm}^2=25\,\mathrm{cm}^2$,
also $\overline{EB}=5$ cm.
Wenden wir nun den Satz des Pythagoras auf die Dreiecke MEB und CMB an, so erhalten wir die Gleichungen

$$y^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+5^2, \tag{1}$$
$$x^2=y^2+y^2. \tag{2}$$

Aus (1) erhalten wir durch Multiplikation mit 2

$$2y^2=\frac{x^2}{2}+50 \text{ und aus (2) } 2y^2=x^2.$$

Daraus folgt

$$x^2=\frac{x^2}{2}+50, \text{ also } \frac{x^2}{2}=50, \; x^2=100$$

und, da x positiv ist, $x=10$.

Die gesuchte Länge der Kante $\overline{BC}$ beträgt also 10 cm.

W 9 ▪ 640 Aus (1) folgt bereits, daß die Häuser, in denen heute nicht gefeiert wird, blau bzw. rot angestrichen sind.

Ferner folgt aus (1), daß der Gastgeber nicht Rolf und nicht Zabel heißt. Aus (2) folgt, daß der Gastgeber nicht Kurt und nicht Wagner heißt. Daher heißt der Gastgeber *Werner Vogt*.

Aus (2) folgt weiter, daß das Haus von Werner Vogt nicht das mittlere Haus ist.

Aus (3) folgt, daß Kurt nur Kaffee anbietet, daß also Werner Vogt nicht Kaffee anbietet. Ferner folgt aus (5), daß Werner Vogt nicht Wein anbietet. Also wird heute *Bier* getrunken. Wegen (3) besitzt der heutige Gastgeber das *rechte Haus*.

Wir überzeugen uns noch davon, daß die gegebenen Antworten mit den gestellten Bedingungen (1), (2), (3) und (5) im Einklang stehen. Auch die Bedingung (4), die zur Lösung der Aufgabe nicht benutzt wurde, steht nicht im Widerspruch zu den gegebenen Antworten; das mittlere Haus ist nämlich nicht rot und nicht gelb gestrichen, sondern blau.

W 9 ▪ 641 Bezeichnen wir die Anzahl der in einem Monat geführten Gespräche mit x, so erhalten wir die Ungleichung

$$0{,}15x+9{,}60<0{,}20x,$$

also $0{,}05x>9{,}60$, d. h., $x>\frac{960}{5}=192$.

Der Teilnehmer muß also mindestens 193 Ortsgespräche in einem Monat führen, damit der Gesamtpreis für diese Gespräche einschließlich der Grundgebühr geringer ist als der Gesamtpreis der Gespräche von einer öffentlichen Sprechstelle aus.

* 9 * 642 Wir stellen zunächst eine Ungleichung für $(x+y)^2$ auf. Es gilt nämlich für alle reellen Zahlen x und y

$$(x-y)^2 \geqq 0. \tag{3}$$

Daraus folgt

$$x^2-2xy+y^2 \geqq 0,$$
$$x^2+2xy+y^2 \geqq 4xy,$$
$$(x+y)^2 \geqq 4xy. \tag{4}$$

Weil x und y nach Voraussetzung positiv sind, erhalten wir hieraus durch Division durch xy die Ungleichung

$$(x+y)\frac{x+y}{xy} \geqq 4,$$

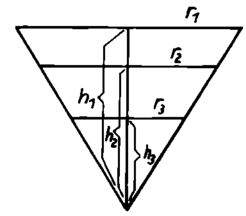
also $$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqq 4. \tag{5}$$

Wegen $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ folgt hieraus

$$x+y \geqq 4, \text{ w.z.b.w.} \tag{6}$$

Nun gilt in der Ungleichung (3) und daher auch in (4), (5) und (6) das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x=y$, wenn also wegen $x+y=4$ $x=2$ und $y=2$ ist.

W 10/12 ▪ 643 a) Es seien r_1 der Radius, h_1 die Höhe und V_1 das Volumen des Kegels, den die Wassermenge von 1 l bildet. Ferner seien r_2 der Radius, h_2 die Höhe und V_2 das Volumen des Kegels, den die Wassermenge von $\frac{1}{2}$ l bildet (vgl. die Abb.).



Dann gilt

$$V_1=\frac{\pi}{3}r_1^2h_1, \tag{1}$$

$$V_2=\frac{\pi}{3}r_2^2h_2. \text{ Ferner gilt} \tag{2}$$

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{r_2^2h_2}{r_1^2h_1}=\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Wegen $\frac{r_2}{r_1}=\frac{h_2}{h_1}$, also $\frac{r_2^2}{r_1^2}=\frac{h_2^2}{h_1^2}$ folgt aus (3)

$$\frac{h_2^3}{h_1^3}=\frac{1}{2}, \text{ also } h_2^3=\frac{1}{2}h_1^3,$$

$$h_2=h_1\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\frac{h_1}{2}\sqrt[3]{4}\approx 0{,}794\,h_1.$$

Wegen $h_1=10$ cm steigt also der Wasserspiegel bei $\frac{1}{2}$ l Wasser auf rund 7,94 cm Höhe.

b) Es seien r_3 der Radius und V_3 das Volumen des Kegels, den die Wassermenge bei einer Höhe von $h_3=5$ cm bildet.

Dann gilt wie oben

$$\frac{V_3}{V_1}=\frac{h_3^3}{h_1^3}=\left(\frac{h_3}{h_1}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}, \text{ also}$$

$$V_3=\frac{1}{8}V_1=\frac{1}{8}\text{l}=125\text{ cm}^3.$$

Wenn der Wasserspiegel 5 cm hoch ist, befinden sich daher nun $\frac{1}{8}$ l $=125$ cm³ Wasser in dem Gefäß.

W 10/12 ▪ 644 Die gegebene Ungleichung (1) ist für alle positiven reellen Zahlen x und für alle reellen Zahlen p mit $p \neq 1$ äquivalent mit den folgenden Ungleichungen:

$$\lg x-1<p\cdot\lg x-p^2, \tag{2}$$
$$p^2-1<(p-1)\cdot\lg x, \tag{3}$$
$$(p+1)(p-1)<(p-1)\cdot\lg x. \tag{4}$$

Da nach Voraussetzung $p \neq 1$ gilt, haben wir die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $p>1$, d. h., $p-1>0$ und $p+1>2$. In diesem Falle ist die Ungleichung (4) und daher auch die Ungleichung (1) äquivalent mit der Ungleichung

$$p+1<\lg x. \tag{5}$$

Für $x>100$ ist $\lg x>2$; es gibt also, wenn $x>100$ ist, stets eine reelle Zahl p mit $p>1$, so daß die Ungleichung (5) und damit auch die Ungleichung (1) erfüllt ist.

2. Fall: $p<1$, d. h., $p-1<0$ und $p+1<2$. In diesem Falle ist die Ungleichung (4) und daher auch die Ungleichung (1) äquivalent mit der Ungleichung

$$p+1>\lg x. \tag{6}$$

Für $x<100$ ist $\lg x<2$; es gibt also, wenn $x<100$ ist, stets eine reelle Zahl p mit $p<1$, so daß die Ungleichung (6) und damit auch die Ungleichung (1) erfüllt ist.

Ist aber $x=100$, also $\lg x=2$, so erhalten wir aus (3) die Ungleichung

$$p^2-1<2(p-1), \text{ also } p^2-2p+1<0,$$

also $(p-1)^2<0$.

Diese Ungleichung ist aber für keine reelle Zahl p erfüllt, weil das Quadrat einer reellen Zahl nicht kleiner als Null sein kann. Daher ist die gegebene Ungleichung (1) nur im Falle $x=100$ für keine von 1 verschiedene reelle Zahl p erfüllt.

* 10/12 * 645 Zunächst stellen wir fest, daß alle Gleichungen dieses Systems für $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ erfüllt sind. Wir haben damit eine Lösung erhalten. Wir müssen nun untersuchen, ob es noch weitere Lösungen gibt.

Zu diesem Zwecke könnten wir die sog. Einsetzungsmethode anwenden und den Wert für x_3 in die zweite Gleichung einsetzen, dann die Werte für x_3 und x_4 in die dritte Gleichung usw., bis wir schließlich zwei Gleichungen für x_1 und x_2 erhalten, die wir lösen können. Das ist aber sehr umständlich, und erfordert einen hohen Rechenaufwand. Das folgende Verfahren führt schneller zum Ziel:

Wir formen die Gleichungen zunächst um und erhalten

$$x_2=x_1-x_3, \quad x_4=x_3-x_5, \quad x_n=x_{n-1}-x_1,$$
$$x_3=x_2-x_4, \quad \ldots\ldots\ldots \quad x_1=x_n-x_2.$$

Jetzt multiplizieren wir in der ersten Gleichung auf beiden Seiten mit x_2, in der zweiten Gleichung mit x_3 usw. und erhalten

$$x_2^2=x_1x_2-x_2x_3,$$
$$x_3^2=x_2x_3-x_3x_4,$$
$$x_4^2=x_3x_4-x_4x_5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n^2=x_{n-1}x_n-x_nx_1,$$
$$x_1^2=x_nx_1-x_1x_2.$$

Addieren wir jetzt sämtliche Terme der linken Seiten und sämtliche Terme der rechten Seiten dieser Gleichungen, so erhalten wir, da jeweils der Subtrahend auf der rechten Seite einer Gleichung mit dem Minuenden auf der rechten Seite der folgenden Gleichung übereinstimmt, die Gleichung

$$x_2^2+x_3^2+x_4^2+\ldots+x_n^2+x_1^2=0.$$

Da alle Summanden auf der linken Seite nicht negativ sind, ist diese Gleichung nur dann erfüllt, wenn

$$x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n=0$$

gilt. Das gegebene Gleichungssystem hat also nur eine Lösung, nämlich $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

* 5 * 647 a) Ein Schüler heißt mit Sicherheit Lutz Schulz. b) Es gibt vier Schüler, die mit Vornamen Lutz, aber nur drei Schüler, die mit Zunamen nicht Schulz heißen.

* 5 * 648 Es gilt $36=1\cdot 36=2\cdot 18=3\cdot 12=4\cdot 9=6\cdot 6$; demnach gibt es fünf verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Legen wir aus 36 Quadraten ein größeres Quadrat $(6\cdot 6)$, so besitzt diese Figur den kleinsten Umfang, wie man leicht nachprüfen kann.

* 6 * 649

Monat	Jan.	Febr.	März	April
Anzahl der Tische	x	$x+10$	$x+20$	$x+30$

Mai	...	Nov.	Dez.
$x+40$	...	$x+100$	$x+110$

Aus $12x+660=1920$ folgt $x=105$. Im Monat Juni wurden 155, im Monat Dezember 215 Tische hergestellt.

* 6 * 650 Hätte Heinz nur Hefte der ersten Sorte gekauft, dann hätte er für 12 Hefte 96 Pf bezahlen müssen. Für jedes Heft der zweiten Sorte zahlte er 7 Pf mehr als für jedes Heft der ersten Sorte. Wegen $131-96=35=5\cdot 7$ hat Heinz 5 Hefte der zweiten Sorte und 7 Hefte der ersten Sorte gekauft.

* 7 * 651 Würde man die Fenster ohne Läden mit je einem Laden der kompletten Fenster versehen, dann fehlte an jedem Fenster ein Laden. Also braucht man 28 neue Fensterläden.

* 7 * 652 Die Anzahl der Schüler pro Autobus muß ein gemeinsamer Teiler, der größer als 1 ist, von 319 und 232 sein. Wegen $319=11\cdot 29$ und $232=8\cdot 29$ ist die Primzahl 29 der einzige gemeinsame Teiler größer als 1 von 319 und 232; denn 8 und 11 sind teilerfremd. Daher fuhren in jedem Bus genau 29 Schüler.

* 8 * 653 Die Augenzahl $3n+4$ muß durch n teilbar sein. $\frac{3n+4}{n}=3+\frac{4}{n}$ liefert nur für n als Teiler von 4, also $n=1$, $n=2$, $n=4$ ganzzahlige Ergebnisse. $n=1$ scheidet aus, da keine 7 gewürfelt werden kann. Für $n=2$ erhält man 10 Augen, das heißt, es wurde zweimal eine 5 gewürfelt. Für $n=4$ ergeben sich 16 Augen, das heißt, es wurde viermal eine 4 gewürfelt. Es wurde also entweder mit zwei oder mit vier Würfeln gewürfelt.

* 8 * 654 Für die Fangergebnisse a, b, c, d gilt:

$$c<d, \quad (1)$$
$$a+b=c+d, \quad (2)$$
$$a+d<b+c. \quad (3)$$

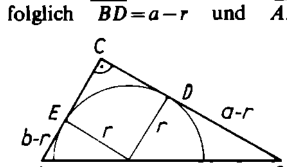
Aus (2) und (3) folgt durch Addition $2a+b+d<b+2c+d$ und damit $2a<2c$, also $a<c$.
Aus (1) und $a<c$ folgt $a<c<d$.
Aus (2) und $a<c$ folgt $d<b$ und damit auch $a<c<d<b$.
Fischer B hat das größte Fangergebnis erzielt; ihm folgen mit kleiner werdenden Fangergebnissen die Fischer D, C und A.

* 9 * 655 Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.
1. Fall: Angenommen, die Aussage a) sei wahr; dann sind die Aussagen b) und c) falsch. Also hätte Brigitte den Ball. Das steht aber im Widerspruch zur Aussage a), da nicht zwei Schülerinnen zugleich den Ball haben können.
2. Fall: Angenommen, die Aussage b) sei wahr; dann sind die Aussagen a) und c) falsch. Also hat Claudia die Schere. Anna hat den Ball nicht. Also müßte Claudia den Ball haben, was zu einem Widerspruch führt.
3. Fall: Angenommen, die Aussage c) sei wahr; dann sind die Aussagen a) und b) falsch. Also hat Brigitte den Ball, Claudia den Bleistift und Anna die Schere.
Da die Fälle 1. und 2. zu einem Widerspruch führen, trifft nur der Fall 3 zu, womit die Frage beantwortet ist.

* 10 * 656 Jeder Teilnehmer spielt genau 7 Partien und kann maximal 7 Punkte erreichen, wenn er alle Partien gewinnt. Die vier Schachspieler, die die letzten vier Plätze belegen, müssen unter sich genau 6 Partien ausspielen. Die dabei zu verteilenden 6 Punkte teilen sie also unter sich auf. Da der Spieler, der den 2. Platz belegte, laut Aufgabe genau so viel Punkte gewonnen hat wie die letzten vier zusammen, hat er mindestens 6 Punkte erreicht. Er kann aber auch nicht mehr als 6 Punkte erzielt haben; denn er besiegte außer den anderen Spielern auch den Ersten. Würde er Erster, und spielte er gegen diesen (bei Siegen gegen alle übrigen Spieler) unentschieden, so hätten erster und zweiter Spieler entgegen der Voraussetzung die gleiche Punktzahl. Somit müssen die letzten vier Spieler zusammen genau 6 Punkte erzielt haben, das heißt, sie haben alle Partien gegen die ersten vier Spieler verloren. Infolgedessen hat auch der 4. Spieler den 6. Spieler besiegt. Außerdem sind alle Bedingungen der Aufgabe miteinander verträglich, wie z. B. folgendes Schema zeigt:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1	1	1	1	1
2	0		1	1	1	1	1	1
3	0	0		1	1	1	1	1
4	0	0	0		1	1	1	1
5	0	0	0	0		1	1	1
6	0	0	0	0	0		1	1
7	0	0	0	0	0	0		1
8	0	0	0	0	0	0	0	

* 10/12 * 657 Es seien M der Mittelpunkt des Halbkreises mit dem Radius r, D und E die Berührungspunkte dieses Halbkreises mit den Katheten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$. Dann gilt $\sphericalangle MEC=90°$, $\sphericalangle MDC=90°$ und $\overline{ME}=\overline{MD}=r$. Da nach Voraussetzung $\sphericalangle ACB=90°$ ist, gilt ferner $\sphericalangle EMD=90°$. Das Viereck $MDCE$ ist somit ein Quadrat, und es gilt $\overline{CE}=\overline{CD}=r$ und folglich $\overline{BD}=a-r$ und $\overline{AE}=b-r$.



Wegen $EM \parallel BC$ folgt nach dem Strahlensatz $\frac{b-r}{b}=\frac{r}{a}$. Durch weitere Umformungen erhalten wir schließlich
$1-\frac{r}{b}=\frac{r}{a}$, $1=\frac{r}{a}+\frac{r}{b}$, $\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, w.z.b.w.

* 10 * 658 Wir geben unmittelbar die allgemeine Lösung (II.) der Aufgabe an. Wir nehmen an, daß
x_1 Schüler *nur* die Zeitschrift „Technikus",
x_2 Schüler *nur* die Zeitschrift „Fröhlichsein und Singen",
x_3 Schüler *nur* die Zeitschrift „Die Trommel",
y_1 Schüler *nur* die Zeitschriften „Technikus" und „Fröhlichsein und Singen",
y_2 Schüler *nur* die Zeitschriften „Technikus" und „Die Trommel",
y_3 Schüler *nur* die Zeitschriften „Fröhlichsein und Singen" und „Die Trommel"
regelmäßig lesen. Dann gilt

$$x_1+y_1+y_2+g=a, \quad (1)$$
$$x_2+y_1+y_3+g=b, \quad (2)$$
$$x_3+y_2+y_3+g=c. \text{ Ferner gilt} \quad (3)$$
$$y_1+g=e, \text{ also } y_1=e-g; \quad (4)$$
$$y_2+g=d, \text{ also } y_2=d-g; \quad (5)$$
$$y_3+g=f, \text{ also } y_3=f-g. \quad (6)$$

a) Die Anzahl der Schüler, die *genau eine* dieser Zeitschriften regelmäßig lesen, ist gleich $x_1+x_2+x_3$. Wir erhalten durch Addition aus (1), (2) und (3)

$$x_1+x_2+x_3+2(y_1+y_2+y_3)+3g$$
$$=a+b+c. \quad (7)$$

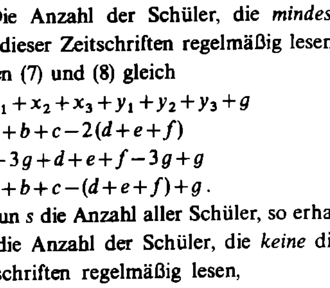
Ferner erhalten wir durch Addition aus (4), (5) und (6)

$$y_1+y_2+y_3=d+e+f-3g. \quad (8)$$

Setzen wir diesen Wert in (7) ein, so erhalten wir

$$x_1+x_2+x_3+2(d+e+f)-6g+3g$$
$$=a+b+c,$$
$$x_1+x_2+x_3=a+b+c-2(d+e+f)+3g. \quad (9)$$

Für $a=120$, $b=90$, $c=180$, $d=60$, $e=16$, $f=24$, $g=6$ erhalten wir
$x_1+x_2+x_3=390-2\cdot 100+18=208$.
Also lesen 208 Schüler *genau eine* dieser Zeitschriften regelmäßig.



b) Die Anzahl der Schüler, die *mindestens eine* dieser Zeitschriften regelmäßig lesen, ist wegen (7) und (8) gleich

$$z=x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+y_3+g$$
$$=a+b+c-2(d+e+f)$$
$$+3g+d+e+f-3g+g$$
$$=a+b+c-(d+e+f)+g.$$

Ist nun s die Anzahl aller Schüler, so erhalten wir die Anzahl der Schüler, die *keine* dieser Zeitschriften regelmäßig lesen,

$$s-z=s-(a+b+c)+d+e+f-g. \quad (10)$$

Am speziellen Fall (I) erhalten wir
$s-z=300-390+100-6=4$.
Also lesen nur 4 Schüler keine dieser Zeitschriften regelmäßig. Die beigefügte Abbildung zeigt sehr anschaulich, wie man die Anzahlen der Schüler in den Fällen a) und b) graphisch ermitteln kann. Wir erhalten nämlich im Falle a)
$50+56+102=208$ wie oben
und im Falle b)
$300-208-54-10-18-6=4$ wie oben.

*** 9 * 659** Wir berechnen die Differenz

$$a-b=\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1}-\frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}$$
$$=\frac{(100^{100}+1)(100^{89}+1)-(100^{99}+1)(100^{90}+1)}{(100^{90}+1)(100^{89}+1)}$$
$$=\frac{u}{v}.$$

Nun gilt für den Nenner dieses Bruches $v>0$ und für den Zähler

$$u=100^{189}+100^{100}+100^{89}+1-100^{189}-100^{99}-100^{90}-1$$
$$=100^{100}+100^{89}-100^{99}-100^{90}$$
$$=100^{89}+100^{90}(100^{10}-100^{9}-1)$$
$$=100^{89}+100^{90}(99\cdot 100^{9}-1)>0.$$

Daraus folgt $a-b>0$, also $a>b$, womit die geforderte Entscheidung getroffen ist.
Bemerkung: Wir kommen noch schneller zu dem obigen Ergebnis, wenn wir die für alle positiven reellen Zahlen c, d, x, y mit $c>d$ und $x<y$ erfüllte Ungleichung

$$\frac{c+x}{d+x}>\frac{c+y}{d+y} \tag{1}$$

anwenden. Diese Ungleichung ist nämlich wegen $(c+x)(d+y)-(c+y)(d+x)$
$=cd+cy+dx+xy-cd-cx-dy-xy$
$=c(y-x)-d(y-x)=(c-d)(y-x)>0$
erfüllt. Nun gilt

$$a=\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1}=\frac{100^{99}+\frac{1}{100}}{100^{89}+\frac{1}{100}}>\frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}=b;$$

diese Ungleichung erhalten wir nämlich aus der Ungleichung (1), wenn wir $c=100^{99}$, $d=100^{89}$, $x=\frac{1}{100}$, $y=1$ setzen.
Mit Hilfe der Ungleichung (1) können wir auch die folgende verallgemeinerte Behauptung leicht beweisen:
Für alle reellen Zahlen p, die größer als 1 sind, und für alle natürlichen Zahlen m und n mit $m>n>1$ gilt

$$\frac{p^m+1}{p^n+1}>\frac{p^{m-1}+1}{p^{n-1}+1}.$$

*** 9 * 660** Angenommen, das gegebene Gleichungssystem habe eine Lösung mit $x_i\geqq 0$ ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$).
Dann gilt wegen (2)

$$x_1+x_2+x_4=3a-x_6 \tag{5}$$

und wegen (4), da das arithmetische Mittel von drei nicht negativen reellen Zahlen stets größer oder gleich dem geometrischen Mittel dieser Zahlen ist,

$$\frac{x_1+x_2+x_4}{3}\geqq\sqrt[3]{x_1x_2x_4}=a. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt

$$\frac{3a-x_6}{3}\geqq a,\text{ also } 3a-x_6\geqq 3a,\ x_6\leqq 0. \tag{7}$$

Da nach Voraussetzung andererseits $x_6\geqq 0$ gilt, folgt $x_6=0$. Aus (3) erhalten wir daher
$x_3+x_5=0$,
also wegen $x_3\geqq 0$, $x_5\geqq 0$, $x_3=x_5=0$,
d. h., $x_1x_4x_5=0$ im Widerspruch zu (1), wonach
$x_1x_4x_5=a^2>0$ gilt.
Daher hat das gegebene Gleichungssystem *keine* nicht negative Lösung.

W 5 ■ 661 Die Zahl 19 läßt sich wie folgt als Summe zweier Summanden darstellen:

$19=1+18$	$19=6+13$
$19=2+17$	$19=7+12$
$19=3+16$	$19=8+11$
$19=4+15$	$19=9+10$
$19=5+14$	

Aus $95:19=5$ folgt, daß es genau fünf Zimmerpaare, also zehn Gästezimmer gibt. Da alle Zimmer mit fortlaufenden Nummern versehen sind, gibt es nur eine Lösung; die Zimmer tragen die Nummern von 5 bis 14.

W 5 ■ 662

$$V=2\cdot 1\cdot 5\,\mathrm{dm}^3+2\cdot\frac{1}{2}\cdot(1\cdot 1\cdot 5)\,\mathrm{dm}^3=15\,\mathrm{dm}^3$$

W 6 ■ 663 Für das Volumen des Quaders gilt $V=abc=270\ \mathrm{cm}^3$; für die Summe der Maßzahlen aller seiner Kantenlängen gilt ferner $4a+4b+4c=80$ und damit $a+b+c=20$. Aus $a<b<c$ und $a+b+c=20$ folgt $c\leqq 17$. Wegen $270=1\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5=abc$ sind die Möglichkeiten für a, b und c weiter eingeengt, da sie Teiler von 270 sein müssen. Nur für $a=5$, $b=6$, $c=9$ sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
Probe: $V=5\cdot 6\cdot 9\ \mathrm{cm}^3=270\ \mathrm{cm}^3$;
$s=5\ \mathrm{cm}+6\ \mathrm{cm}+9\ \mathrm{cm}=20\ \mathrm{cm}$.

W 6 ■ 664 Allgemein gilt: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a\cdot d<b\cdot c$. Aus $5a>123$ folgt $a\geqq 25$; aus $11a<287$ folgt $a\leqq 26$. Da beide Ungleichungen erfüllt sein müssen, besitzt die Aufgabe genau zwei Lösungen, nämlich $a_1=25$ und $a_2=26$.

W 7 ■ 665 Es seien $a, b, c\neq 0$ und $a-b+c\neq 0$, dann gilt

$$\frac{ab-ac-bc+ab+ac-bc}{a-b+c}=\frac{2b(a-c)}{a-b+c}.$$

Dieser Term nimmt den Wert Null an, wenn der Zähler Null ist, also $2b(a-c)=0$. Wegen $b\neq 0$ folgt daraus $a-c=0$, also $a=c$. Nun sollen nach Voraussetzung nicht alle drei Variablen einander gleich sein, also gilt $a=c\neq b$. Da $a-b+c\neq 0$, also $a+c\neq b$ sein muß, gilt ferner $2a\neq b$ bzw. $a\neq\frac{b}{2}$. Unter den gegebenen Voraussetzungen nimmt daher der obige Term den Wert Null genau dann an, wenn $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $a=c\neq b$ und $a=c\neq\frac{b}{2}$ gilt.

Der Chefredakteur von *alpha* auf der X. OJM im Gespräch mit Preisträger Th. Jentsch (Halle).

Lösungen zu *alpha*-heiter

Eine Aufgabe aus dem klassischen Griechenland

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x,\quad\text{also } x=28$$

Zahlenfeldrätsel

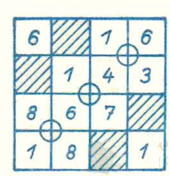
a) Satz, b) Pascal, c) Strahl, d) Ziffer, e) Scheitel, f) Reihe, g) Acht, h) Summe, i) Thales: Alpha
Mathematische Schuelerzeitschrift

Kryptarithmetik

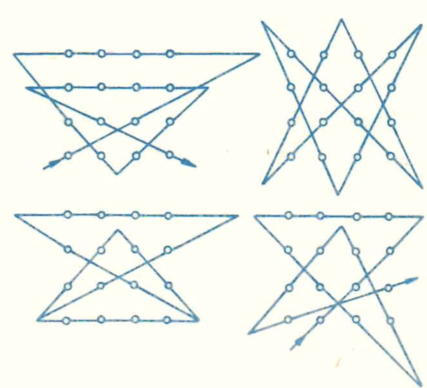
21	+	4	=	25	
+		+		+	
20	:	10	=	2	
+		+		+	
12	−	5	=	7	
53	−	19	=	34	

Begegnung mit berühmten Mathematikern

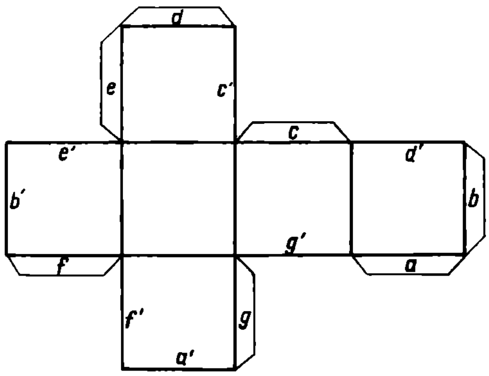
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716)
Johannes Regiomontanus (1436 bis 1476)
August Ferdinand Möbius (1790 bis 1868)



Nur mit Geduld meistern

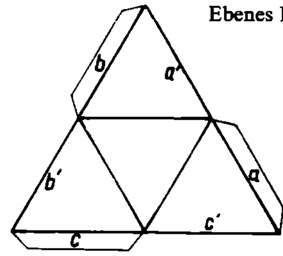


Mit Zirkel und Zeichendreieck

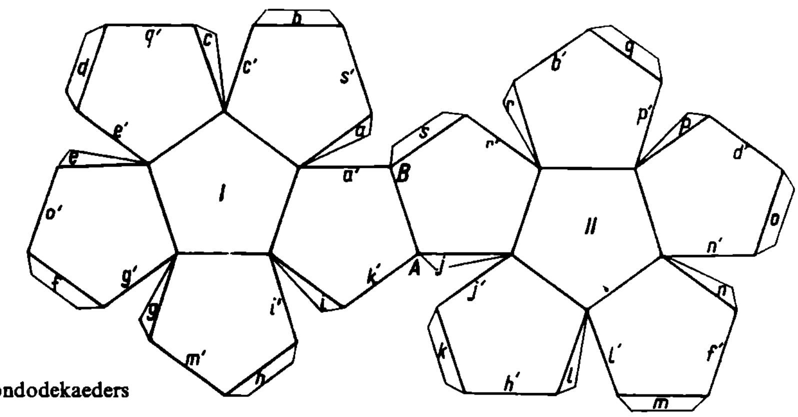


Ebenes Netz des Würfels

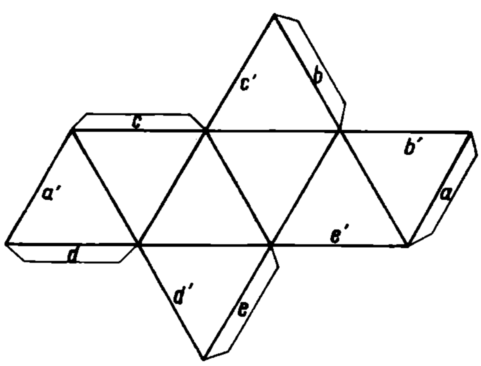
aus T. Roman, Reguläre und halbreguläre Polyeder
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften



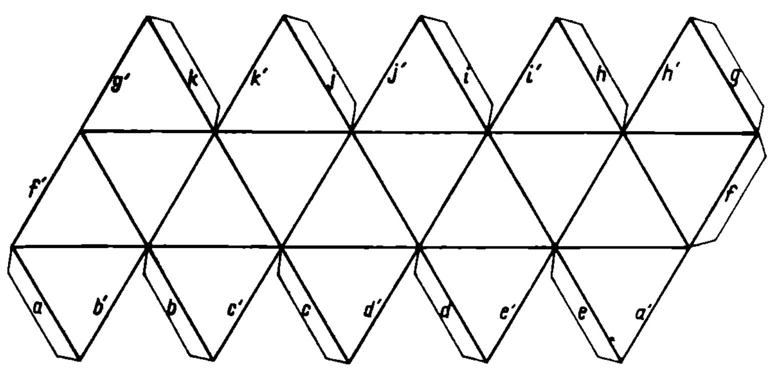
Ebenes Netz des regulären Tetraeders



Ebenes Netz des regulären Pentagondodekaeders



Ebenes Netz des regulären Oktaeders



Ebenes Netz des regulären Ikosaeders

POSTKARTE

Gebühren-
frei!

Postamt

....
(PLZ)

Sofort an den zuständigen
Postzeitungsvertrieb weiterleiten.

VLV Spremberg Ag 310 69 DDR 2761
I 20 8 986 Z 6

Liebe *alpha*-Leser!

Immer wieder erreicht uns Post, daß Schüler und Erwachsene „durch Zufall“ ein *alpha*-Heft in die Hände bekommen und begeisterte Leser wurden. Uns wurde auch mitgeteilt, daß aktive *alpha*-Leser in ihrer Klasse geworben haben, um weiteren interessierten Mitschülern die Möglichkeit zu schaffen, sich neben dem Mathematikunterricht durch aktives außerunterrichtliches Selbststudium weiter zu qualifizieren. Wir haben daher einen Bestellzettel abgedruckt. Schneide ihn aus und gib ihn den Schülern, die bestellen wollen! Sollte diese Bestellkarte nicht ausreichen, so wird jedes Postamt helfen.
Berichtet uns, wie Ihr geworben habt, welche Erfolge Ihr hattet!

Eure Redaktion *alpha*

Aus dem Inhalt der Hefte alpha,
Heft 5 und 6

Aus der Welt der Tetraeder – Ungleichungen – ein schwieriger, aber interessanter Beweis – Dualspiele – Berufsbild: Facharbeiter für Statistik – Berufsbild: Facharbeiter für BMSR-Technik – Aus dem Leben *J. Keplers* – Bericht über die XIII. Internationale Mathematikolympiade in der ČSSR – Preisträger des *alpha*-Wettbewerbs 1970/71 – Berichte von Arbeitsgemeinschaften – Mathematik und Chemie – *Ramanujan*, das mathematische Genie Indiens – Was ist aus ihnen geworden? *alpha* stellt 20 ehemalige IMO-Teilnehmer aus der DDR vor – Wie entsteht die Schülerzeitschrift *alpha?* – Eine Aufgabe von Prof. Dr. *Riedrich* – Eine Aufgabe von Prof. Dr. *Lewin* – aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht: Aufgaben speziell für Klasse 5/6 – In freien Stunden, *alpha* heiter – *alpha*-Wettbewerbe zu Heft 5 und 6 u. a. m.

Liebe Redaktion *alpha!*

Mit Beginn des Schuljahres 1970/71 haben wir an unserer Schule einen Mathematik-Zirkel für die Klassen 5 und 6 eingerichtet. Der Inhalt unserer Arbeit sieht so aus: Wir erarbeiten gemeinsam die Aufgaben des *alpha*-Wettbewerbs, lösen Knobelaufgaben und spielen Schach. Wir haben das Schachspiel deshalb mit eingeführt, weil wir der Meinung sind, daß es eine gute Erziehung zur Konzentration ist und unser Kombinationsvermögen weckt. Alle Teilnehmer sind begeistert. Sie lesen die *alpha* gern und lösen schon von allein Aufgaben höherer Klassenstufen.
Von 169 Schülern unserer kleinen Landschule (achtklassige Oberschule) abonnieren 27 die *alpha*. Oft lesen auch die Eltern mit und beteiligen sich am Lösen der Aufgaben. Von nun an wollen wir die Lösungen geschlossen an die Redaktion einsenden.
Wir bedanken uns für die interessante Zeitschrift und wünschen uns vor allem viele Knobelaufgaben.

Im Namen des Mathe-Zirkels Brigitte Dittrich

Oberlehrer Brigitte Dittrich
OS Bahratal (Kreis Pirna)

Bestellschein

Empfangsstellennummer des PZV | Zustellbezirk | Einziehbezirk

Ich bestelle hiermit ab ______ zur Zustellung/Abholung *)

Überwiesen wird

Artikelnummer | WGr

______ Stück ______ Titel der Zeitung/Zeitschrift

Karteinummer

zu den Bezugsbedingungen lt. Postzeitungsliste zum Abonnementspreis von ______ M

In Blockschrift ausfüllen:

Name, Vorname: ______

Anschrift: ______

(Postleitzahl, Wohnort, Straße, Hausnummer, Gebäudeteil, Stockwerk)

Das Abonnementsgeld wird bar bezahlt *)

ist abzubuchen vom Konto Nr. ______ beim ______

(Postscheckamt, Bankinstitut u. a.)

*) Nichtzutreffendes streichen

Ich versichere, daß ich den obengenannten Bezieher geworben habe

______
(Unterschrift des Werbers)

______
(Eigenhändige Unterschrift des Bestellers)

Die stark umrandeten Felder werden von der Deutschen Post ausgefüllt

Bezieherkarte/ Kundenkarte berichtigt	Adreßplatte geprägt/ Z 47 ausgefertigt	Bestellvermerk	Verteilkarte berichtigt	Vermerke

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha

$(a+b)^0$ 1

$(a+b)^1$ 1 1

$(a+b)^2$ 1 2 1

$(a+b)^3$ 1 3 3 1

$(a+b)^4$ 1 4 6 4 1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
5. Jahrgang 1971
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

5

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import BmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: S. N. Hirurkar, Nagpur (S. 97); J. Lehmann, Leipzig (S. 98, S. 107, S. 109, S. 111); K. Bastian, Halle (S. 110); ČSTK, Bratislava (S. 108/109)
Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes des Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 27. Juli 1971

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Ramanujan –

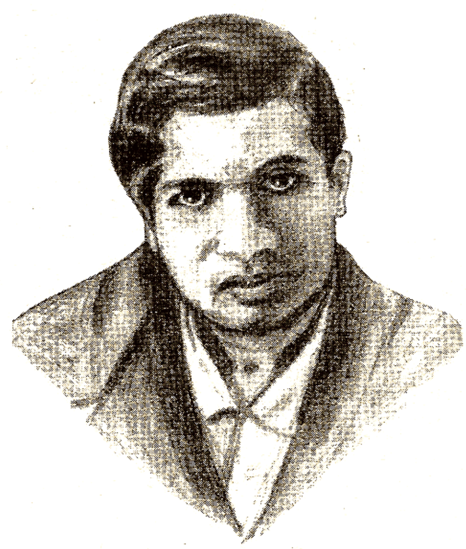
das mathematische Genie Indiens

Das Leben *Ramanujans* bietet wohl das interessanteste Beispiel aus der neueren Zeit dafür, was ein wirklich großes Talent in fast völliger Isolierung von dem in der Welt vorhandenen Wissenschatz vollbringen kann. Das Schaffen *Ramanujans* bis zu seinem 27. Lebensjahr ist nämlich ein kaum wiederholbares Experiment über das Wirken eines mathematischen Gehirns im Vakuum. Wir werden kurz berichten, wie das zustande gekommen ist und was das Ergebnis war.

Srinivasa Ramanujan Aiyangar wurde am 22. Dezember 1887 in einem Dorf im Süden Indiens geboren. Seine Eltern gehörten der privilegierten Kaste der Brahmanen an. Sie unterschieden sich jedoch in nichts von den kleinen Angestellten, Kaufleuten und Bauern ihrer Umgebung. *Ramanujans* Vater war Buchhalter eines kleinen Textilgeschäftes in der Stadt Kumbakonam (Provinz Madras). Seine Mutter war vermutlich eine außergewöhnliche und willensstarke Frau, jedoch kann infolge ihrer religions- und kastenbedingten Vorurteile ihr Einfluß auf einen so begabten Sohn in bezug auf dessen wissenschaftliche Entwicklung nicht als günstig angesehen werden. *Ramanujan* achtete seine Mutter und ordnete sich ihr vollständig unter. Sie war verständlicherweise nicht in der Lage, seinen durch nichts zu hemmenden Drang zur Mathematik zu begreifen. Von der Richtigkeit ihres Handelns überzeugt, bremste sie eine Entwicklung und lenkte ihn mit starker Hand auf den einzig ihr bekannten und für ihre Familie traditionellen Weg zum kleinen Angestellten oder Beamten. Nur der innere Drang des Genies half *Ramanujan*, schließlich ein schöpferischer Mathematiker zu werden, der sich frei der Beschäftigung mit der geliebten Wissenschaft hingibt. Der Weg dahin war jedoch lang – zu lang.

Ramanujan wurde in der Atmosphäre einer für das koloniale Indien verständlichen Feindseligkeit gegenüber allem Europäischen und insbesondere Englischen erzogen, wobei sich der Protest gegen die koloniale Unterdrückung in der strengen Befolgung der nationalen Bräuche, der alten Lebensweise und des traditionellen Erziehungs- und Ausbildungssystems der Brahmanen äußerte. Für die mathematische Entwicklung des jungen *Ramanujan* ergaben sich daraus sehr schwierige Bedingungen, die sich auf seine gesamte wissenschaftliche Laufbahn stark auswirkten. Man muß auch berücksichtigen, daß die britische Verwaltung ihrerseits keine besonderen Anstrengungen unternahm, auf irgendeinem Gebiet der Wissenschaft und der Kunst Talente des indischen Volkes zu fördern. Das urwüchsige Genie *Ramanujans* blieb deshalb den größten Teil seines kurzen Lebens sich selbst überlassen.

Von 1892 bis 1897 besuchte *Ramanujan*, wie es für die Brahmanen üblich war, die Grundschule. Infolge seiner sehr guten Ergebnisse wurde ihm anschließend in der städtischen Mittelschule von Kumbakonam die Hälfte des Schulgeldes erlassen. Erzogen in den mythischen Traditionen des Brahmanentums, fragte *Ramanujan* schon in der zweiten Klasse der Mittelschule (die in unserem Schulsystem etwa der fünften Klasse entspricht) die älteren Mitschüler und die Lehrer, worin die „höhere Wahrheit" in der Mathematik bestehe. Er war es ja gewohnt anzunehmen, daß auf jedem Gebiet der menschlichen Tätigkeit eine mystische „höhere Wahrheit" existiert – der Ursprung der Dinge, der das betreffende Gebiet lenkt und in sich alles enthält, was darüber bekannt sein kann. Man sagt, daß er als Antwort Hinweise auf den Pythagorassatz, die Prozentrechnung u. ä. erhielt.



S. Ramanujan (1887 bis 1920), für *alpha* gezeichnet von Prof. Dr. *S. N. Hirurkar*, Universität Nagpur (Indien), Sektion Mathematik

Bereits in der vierten Klasse der Mittelschule studierte *Ramanujan* einen vollständigen Trigonometrie-Lehrgang, und zwar nach dem zweibändigen Lehrbuch von *Loney*, das er sich bei einem ihm bekannten Studenten der Universität Madras lieh. Es wird erzählt, daß dieser Student von den Trigonometriekenntnissen des Schülers in Erstaunen versetzt wurde. Häufig wandte er sich an *Ramanujan* mit der Bitte, ihm beim Lösen von Aufgaben zu helfen. In der fünften Klasse entdeckte *Ramanujan* selbständig die Eulerschen Formeln, welche Sinus und Kosinus nach der Exponentialfunktion einer imaginären Variablen ausdrücken. Als er jedoch erfuhr, daß diese Formeln schon bekannt sind, versteckte er seine Notizen auf dem Dachboden. Das war seine erste Berührung mit der westlichen Mathematik. Er begriff nun, daß das Loneysche Lehrbuch bei weitem nicht alle bekannten mathematischen Fakten enthält. Die Ärmlichkeit der Kumbakonamer Bibliothek und die schlechten Kenntnisse der englischen Sprache behinderten die mathematische Entwicklung des jungen *Ramanujan* jedoch stark. Erst im Jahre 1903, als *Ramanujan* in der sechsten Klasse der Mittelschule war, gelang es ihm über einen Bekannten, das einzige in Kumbakonam vorhandene Buch über höhere Mathematik zu erhalten. Das war das Buch von *Carr* „Sammlung elementarer Ergebnisse der reinen und der angewandten Mathematik“, das 1880 bis 1886 in London in zwei Bänden erschienen war. Das Buch enthält 6 165 Sätze und Formeln, die meisten von ihnen werden ohne Beweise und Herleitungen angeführt. Lediglich für eine kleine Anzahl der wichtigsten Sätze werden einige Beweisschritte aufgezeigt. Das Werk von *Carr* wäre, wie auch Hunderte andere Bücher, bald in Vergessenheit geraten, wenn es nicht von *Ramanujan* gelesen worden wäre.

Der englische Mathematiker *Hardy* schrieb: „... *Ramanujan* hat dieses Buch berühmt gemacht, und es gibt keinerlei Zweifel daran, daß es ihn stark beeinflußt hat und der Ausgangspunkt seiner Laufbahn war. Ein solches Buch mußte gewisse Vorzüge haben; und wirklich, das Buch von *Carr* ... ist nicht einfach ein drittklassiges Lehrbuch, sondern es ist ein Buch, das mit Sachkenntnis und mit Liebe geschrieben wurde...“.

In der kurzen (und bisher einzigen) Biographie *Ramanujans*, die von *Seshu Aiyar* (Lehrer und später Direktor des Kumbakonamer College) und *Ramachandra Rao* (hoher Regierungsbeamter der Provinz Madras) verfaßt wurde, wird dieser wichtige Abschnitt im Leben *Ramanujans* wie folgt beschrieben: „Vor *Ramanujan* tat sich eine neue Welt auf, die er begeistert durchwanderte. Das Buch von *Carr* weckte die in ihm schlummernden Kräfte. Begierig ging er daran, die in ihm angeführten Formeln und Sätze herzuleiten und zu beweisen. Da er hierbei keinerlei andere Bücher benutzen konnte, stellte jeder von ihm gefundene Beweis eine selbständige Untersuchung dar. Anfangs befaßte er sich mit Methoden der Zusammenstellung magischer Quadrate. Dann interessierte er sich für die Geometrie. Er versuchte, die Quadratur des Kreises zu lösen, und fand dabei eine außerordentlich gute Näherungsformel für den Kreisumfang, nach der die Länge des Erdäquators bis auf 1 bis 2 m genau errechnet werden kann. Bald war er von der Geometrie enttäuscht und wandte sich der Algebra zu, wobei er einige neue Reihen aufstellte. Häufig schrieb er gleich früh nach dem Erwachen fertige Formeln auf, anschließend überprüfte er sie schnell. Übrigens gelang es ihm nicht immer, einen strengen Beweis zu führen. Seine Ergebnisse trug er in ein Notizbuch ein, das er gewöhnlich den Mathematikern zeigte, die sich für seine Arbeit interessierten.“

Dieses Notizbuch ist seitdem berühmt geworden, 1957 wurde es von dem *Tata Institute of Fundamental Research* in Bombay als „facsimile edition“ in zwei Großbänden herausgegeben.

Bevor wir mit dem Lebenslauf *Ramanujans* fortfahren, wollen wir einige seiner Ergebnisse aus dem Notizbuch anführen. Wir wählen die einfachsten aus, aber auch diese zeigen eine Virtuosität im Aufstellen von Formeln und im formalen Rechnen, wie sie nur solche Meister unserer Wissenschaft wie *Leonard Euler* (1707 bis 1783) und *Carl Gustav Jacob Jacobi* (1804 bis 1851) besessen haben.

Ramanujan verstand sich meisterhaft auf Näherungsformeln (wofür vor allem Intuition benötigt wird). Tiefgehende Überlegungen führten ihn beispielsweise zu der Feststellung, daß bis auf die zehnte Dezimalstelle genau

$$\pi = \frac{63}{25} \cdot \frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}$$

und bis auf die neunte Dezimalstelle genau

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{1\,103}{99^2} \text{ gilt.}$$

Von Virtuosität im Auffinden unbekannter Formeln zeugen auch folgende Ergebnisse des jungen *Ramanujan*:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots}}} = 3,$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\ldots}}}} = 4,$$

$$\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-\sqrt{8+\ldots}}}} = 1+2\sqrt{3}\sin 20°,$$

$$\sqrt{11-2\sqrt{11+2\sqrt{11-\ldots}}} = 1+4\sin 10°,$$

$$\sqrt{23-2\sqrt{23+2\sqrt{23-\ldots}}} = 1+4\sqrt{3}\sin 20°.$$

In den letzten drei Formeln wiederholen sich die Vorzeichen vor den Wurzelzeichen periodisch in Dreiergruppen: „−“, „+“, „−“. Hier zwei weitere bemerkenswerte Formeln *Ramanujans*:

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}},$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}}.$$

Diese exakten Gleichungen sind natürlich Spezialfälle bedeutend allgemeinerer Beziehungen, die *Rama*-

nujan kannte, aber niemandem mitteilte. Nach seinem Tod wurde ein Teil dieser allgemeinen Beziehungen von anderen Mathematikern reproduziert; es gibt aber keinen Zweifel, daß einige von ihnen verloren sind. *Hardy*, der sich sehr intensiv mit der Erforschung des Schaffens *Ramanujans* befaßte, bemerkte: „In den Formeln *Ramanujans* ist immer bedeutend mehr enthalten als man auf den ersten Blick annimmt. Jeder, der sie herzuleiten versucht, wird sich davon überzeugen. Einige seiner Formeln decken außerordentlich tiefgehende analytische Abhängigkeiten auf, andere sind weniger bedeutend, aber unter den Formeln *Ramanujans* gibt es nicht eine, die nicht interessant und lehrreich wäre".

Die letzten beiden Formeln sind völlig elementar, aber sehr inhaltsreich. Sie besitzen eine einmalige innere Symmetrie, und ihre Existenz konnte nur von einem Mathematiker allerhöchsten Ranges vermutet werden. Im Gegensatz zu ihnen sind die ersten zwei Gleichungen einfach und elegant. Folgende Kette scharfsinniger Umformungen führt zur ersten Formel:

$$n(n+2)=n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}$$
$$=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}}$$
$$=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)(n+5)}}}$$
$$=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+(n+4)(n+6)}}}}$$

usw., woraus *Ramanujan* schließt (streng genommen erfordert das noch eine zusätzliche Begründung), daß

$$n(n+2)$$
$$=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+(n+4)\sqrt{1+\ldots}}}}}$$

Hieraus erhalten wir für $n=1$ die erste Formel.

Folgende Formel wird von *Ramanujan* auf geradezu artistische Weise und lediglich unter Zuhilfenahme von Formeln der Schultrigonometrie hergeleitet:

$$1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ=\sqrt{1+4\sqrt{3}\sin 20^\circ+12\sin^2 20^\circ}$$
$$=\sqrt{1+4\sqrt{3}\sin 20^\circ+12\cdot\frac{1-\cos 40^\circ}{2}}$$
$$=\sqrt{7+4\sqrt{3}\sin 20^\circ-6\cos 40^\circ}$$
$$=\sqrt{7+4\sqrt{3}\sin 20^\circ-2\sqrt{3}\cos 70^\circ-2\sqrt{3}\cos 10^\circ}$$
$$=\sqrt{7+2\sqrt{3}\cos 70^\circ-2\sqrt{3}\cos 10^\circ}$$
$$=\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin 30^\circ\sin 40^\circ}$$
$$=\sqrt{8-(1+2\sqrt{3}\sin 40^\circ)}.$$ Analog erhält man

$$1+2\sqrt{3}\sin 40^\circ=\sqrt{8+(2\sqrt{3}\sin 80^\circ-1}$$ und

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Dr.-Ing.
Viktor Lewin

Lehrstuhlleiter an dem Lenin-Pädagogischen Istitut Moskau

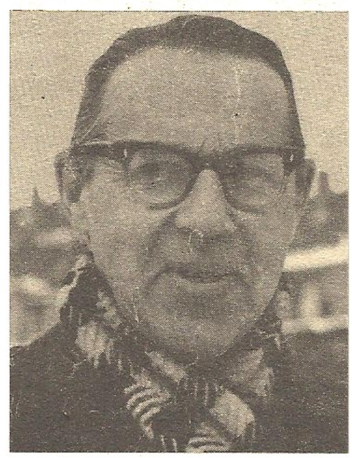
▲774 Es ist zu beweisen, daß die Ungleichung

$$2^{-|x|}+2^{-\frac{1}{|x|}}\leqq 1$$

für alle reellen Zahlen x erfüllt ist.

Ferner ist der Graph der Funktion

$y=2^{-|x|}+2^{-\frac{1}{|x|}}$ zu zeichnen.



$$2\sqrt{3}\sin 80^\circ-1=\sqrt{8-(1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ)}.$$

Diese drei Resultate führen zu der Gleichung

$$1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ=\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-(1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ)}}}.$$

Die gesuchte Formel kann hieraus durch Iteration (d. h. durch wiederholtes Einsetzen) gefunden werden. Die gesamte Technik *Ramanujans* zeigt einen Überfluß unerwartet phantastischer Wendungen in den, wie es scheint, einfachsten Dingen. Die Gleichheit

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

zum Beispiel ist nicht schwer zu beweisen, man mußte aber erst mal darauf kommen! *V. Lewin*

Dieser Beitrag wird in Heft 1/72 fortgesetzt, d. Red.

Wie löst man schwierige Aufgaben?

In jedem Heft von „*alpha*“ werden Aufgaben gestellt. Viele davon kann man nicht lösen, wenn man nur versucht, ein bestimmtes, aus dem Mathematikunterricht bekanntes Lösungsverfahren schematisch anzuwenden. Es ist gewöhnlich notwendig, etwas gründlicher nachzudenken und selbständig einen Lösungsweg zu suchen. Aber wie macht man das?

Sicherlich hat jeder schon einmal gestaunt, wenn er die fertige Lösung einer Aufgabe gelesen hat, und sich dann gefragt: Wie kann man nur auf solche Lösungswege kommen?

Nun, das ist gar nicht so geheimnisvoll, wie es manchmal aussehen mag. Man braucht dazu zunächst einmal zwei Dinge: Sichere und ausreichende mathematische Kenntnisse sowie Ausdauer und Beharrlichkeit beim Suchen nach der Lösung. Es kann aber sein, daß man trotzdem nicht zum Ziel kommt, weil man nicht weiß, *wie* man eine Lösung sucht. Gerade das wollen wir uns einmal an einem Beispiel ansehen.

Wir wählen eine Aufgabe, die im Oktober 1968 bei einem mathematischen Schülerwettbewerb in Budapest gestellt worden ist. Es handelt sich dabei darum, einen Beweis zu führen, und das fällt ja oft besonders schwer.

Aufgabe: In einer Ebene seien eine Gerade g und ein Kreis k gegeben, der einen Radius von n cm besitzen soll (n ist eine natürliche Zahl). Außerdem seien in k genau $4n$ Strecken der Länge 1 cm eingezeichnet. Es ist zu beweisen, daß es unter diesen Voraussetzungen stets eine Sehne in k gibt, die zu g parallel oder zu g senkrecht verläuft und die mit wenigstens zwei der eingezeichneten Strecken gemeinsame Punkte besitzt.

Bevor wir überhaupt mit der Lösungssuche beginnen, müssen wir uns erst einmal über die Aufgabenstellung klar werden. Das ist *immer* notwendig! Wir wollen uns also merken: *Ich muß die Aufgabe verstehen!*

Dazu fertigen wir am besten eine Skizze an. Das ist sehr häufig nützlich. Wir merken uns:

Ich versuche, zur gegebenen Aufgabe eine Skizze zu machen!

Aus dem Text unserer Aufgabe geht hervor, daß zunächst eine Gerade g und ein Kreis k zu zeichnen sind. Da durch g offenbar nur eine Richtung festgelegt werden soll, wollen wir g so legen, daß die Gerade den Kreis nicht schneidet, damit wir eine möglichst übersichtliche Zeichnung bekommen.

Wie groß soll der Radius des Kreises gewählt werden? Die Aufgabe verlangt, die Behauptung für jeden *beliebigen* Radius zu beweisen, dessen Maßzahl eine natürliche Zahl ist. Wir wollen uns den Sachverhalt erst einmal an einem möglichst einfachen *Sonderfall* klarmachen. Deshalb wählen wir für unsere Zeichnung $n=1$.

Auch das ist oft nützlich. Wir halten fest: *Ich versuche, zunächst einen einfachen Sonderfall der Aufgabe zu betrachten!* (Damit die Zeichnung nicht zu klein wird, können wir als Maß*einheit* eine Länge von 2 cm festlegen.) Wir haben nun $4n=4\cdot 1=4$ Einheitsstrecken (von je 2 cm Länge) in den Kreis zu zeichnen, und zwar ganz beliebig. So erhalten wir beispielsweise eine Skizze, wie sie im Bild 1 dargestellt ist. Diese Skizze veranschaulicht einen speziellen Fall der in der Aufgabe gegebenen *Voraussetzungen.*

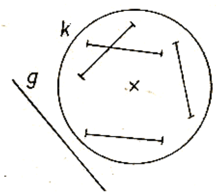


Bild 1

Das klare Erkennen der gegebenen Voraussetzungen ist vor allem bei Beweisaufgaben (aber natürlich auch sonst) wichtig. Wir merken uns also:

Ich muß versuchen, die gegebenen Voraussetzungen richtig zu verstehen!

Unsere Behauptung besagt nun: Es gibt eine Sehne in k, die zu g parallel oder senkrecht verläuft und die wenigstens zwei der eingezeichneten Strecken trifft.

Das ist bei *unserer* Skizze offensichtlich: man kann sehr leicht eine solche Sehne einzeichnen, z. B. so, wie das im Bild 2 dargestellt ist. Aber damit ist unsere Aufgabe nicht gelöst! Wir müssen die Behauptung doch etwas genauer betrachten! Auch das ist wieder wichtig:

Ich muß versuchen, die Behauptung vollständig zu verstehen!

Unsere Behauptung besagt: Es gibt *stets* eine solche Sehne, ganz gleich, wie die vier Einheitsstrecken in den Kreis eingezeichnet werden.

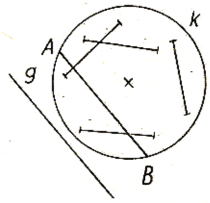


Bild 2

Wie könnte man das beweisen? Durch weitere Zeichnungen sicher nicht, denn es gibt unübersehbar viele Möglichkeiten für die Lage der Einheitsstrecken in dem Kreis. Kennen wir vielleicht ähnliche Sätze, die uns weiterhelfen könnten?

So eine Frage ist oft nützlich:

Kenne ich Sätze, in denen ähnliche Voraussetzungen oder eine ähnliche Behauptung auftreten?

In unserem Fall müssen wir die Frage leider mit „Nein“ beantworten. Untersuchen wir also den Sachverhalt weiter, betrachten wir ihn von verschiedenen Seiten. Dabei wollen wir jedes Wort der Aufgabenstellung genau beachten und auch versuchen, die Bedingungen mit anderen Worten auszudrücken. Das ist wohl immer notwendig:

Ich muß alle Bedingungen der Aufgabe beachten, sie eventuell umformulieren, Zusammenhänge suchen, vielleicht Hilfslinien zeichnen, Schlüsse ziehen!

Beginnen wir noch einmal bei der Behauptung! Wir wollen sie einmal *anders* formulieren, z. B. so: Es gibt *keine* Lage der Einheitsstrecken im Kreis, bei der *jede* Sehne, die zu g parallel oder senkrecht verläuft, nur *höchstens eine* der Einheitsstrecken trifft.

Wie kommt das eigentlich? Um den Grund dafür zu finden, versuchen wir, eine Zeichnung anzufertigen, die der Behauptung widersprechen würde. Wir beginnen mit einer Strecke e_1. Dann überlegen wir, wie die zweite Strecke e_2 *nicht* liegen dürfte, damit es nicht schon bei zwei Strecken eine Sehne parallel oder senkrecht zu g gibt, die beide Strecken trifft. Wir finden: e_2 darf nicht in die beiden punktierten Streifen hineinragen oder an sie anstoßen (siehe Bild 3)!

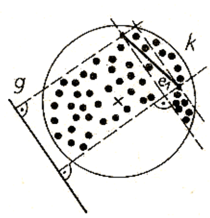


Bild 3

Diese Bedingung ist noch leicht zu erfüllen. Mit dem Einzeichnen von e_2 entstehen aber zwei weitere Streifen, die für die nächste Strecke e_3 „gesperrt“ sind (siehe Bild 4). Nun wird es schon schwierig, und wir sehen auch den Grund: in dem Kreis ist nicht genügend Platz, um die Strecken so hinein zu zeichnen, daß in jedem der entstehenden Streifen nur genau eine Strecke anzutreffen ist – oder, anders ausgedrückt, daß Streifen gleicher Richtung sich nirgends berühren oder überdecken. Aber vielleicht haben wir nur ungeschickt begonnen und nicht darauf geachtet, die „Sperrstreifen" möglichst schmal zu machen?

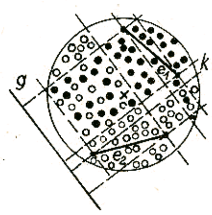


Bild 4

Wir fangen noch einmal von vorne an! Jetzt sehen wir aber: Wenn wir *einen* der durch e_1 bestimmten Streifen *schmaler* machen (durch Drehen von e_1), dann wird der *andere* Streifen *breiter*.

Nun verstehen wir die Behauptung wieder etwas besser und können sie noch anders ausdrücken, etwa so: Stets ist die Summe der Breiten aller zu *g parallelen* Streifen größer oder gleich dem Durchmesser des Kreises oder die Summe der Breiten aller zu *g senkrechten* Streifen ist größer oder gleich dem Durchmesser.

Wir wollen das als Ungleichung schreiben. Dazu vereinbaren wir: p_r sei die Breite des durch die Strecke e_r bestimmten Streifens, der *parallel* zu g verläuft;

s_r sei die Breite des durch die Strecke e_r bestimmten Streifens, der *senkrecht* zu g verläuft.

Die Behauptung lautet jetzt (gleich für *beliebiges n*, also für $4n$ Einheitsstrecken):

$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{4n} \geqq 2n$ oder

$s_1+s_2+s_3+\cdots+s_{4n} \geqq 2n$

Dieser Schritt ist wieder sehr wichtig! Wir wollen uns merken:

Ich führe passende Bezeichnungen ein und versuche, die Bedingungen der Aufgabe mit mathematischen Symbolen auszudrücken!

Bis jetzt sind wir gut vorangekommen. Es würde nun genügen, folgendes nachzuweisen: Wenn die erste Ungleichung *nicht* gilt, dann muß zumindest die zweite gelten. Aber wie sollen wir das zeigen? Wir sehen dazu keinen Weg.

In einer solchen Situation hilft oft folgendes: *Ich versuche, den Satz indirekt zu beweisen!*

Bei einem indirekten Beweis nimmt man an, die Behauptung sei *falsch*. Man versucht dann, aus dieser Annahme einen *Widerspruch* herzuleiten. Gelingt das, dann muß man die Annahme fallen lassen und somit die Richtigkeit der Behauptung anerkennen. Bei unserem Beispiel sieht das so aus:

Angenommen, unsere Behauptung sei *falsch*. Dann dürfte weder die eine noch die andere Ungleichung gelten. Es müßte dann vielmehr heißen:

$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{4n} < 2n$ und

$s_1+s_2+s_3+\cdots+s_{4n} < 2n$

Daraus würde folgen (durch Addition):

$$(*) \qquad (p_1+s_1)+(p_2+s_2)+(p_3+s_3)+\cdots+(p_{4n}+s_{4n}) < 4n$$

Wir fragen uns, ob das möglich ist. Dazu überlegen wir: alle p_r und alle s_r sind größer oder gleich Null; auf der linken Seite der Ungleichung stehen $4n$ Summanden der Form (p_r+s_r); wenn die Ungleichung gelten soll, muß *wenigstens einer* dieser Summanden kleiner als 1 sein – sind nämlich *alle* $4n$ Summanden gleich oder größer als 1, dann kann die Summe nicht kleiner als $4n$ sein. *Kann* nun irgend ein Summand (p_r+s_r) kleiner als 1 sein? Eine kleine Skizze (siehe Bild 5) zeigt uns, daß das offenbar *nicht* möglich ist! Stets gilt $p_r+s_r \geqq e_r$, und e_r hat ja die Länge 1. Also können wir feststellen: Alle Summanden, die auf der linken Seite der Ungleichung (*) stehen, sind mindestens gleich 1, die Ungleichung (*) ist also *falsch*. Unsere Annahme, die Behauptung gelte nicht, hat somit zu einem Widerspruch geführt. Wir müssen diese Annahme fallenlassen, die Behauptung ist somit bewiesen.

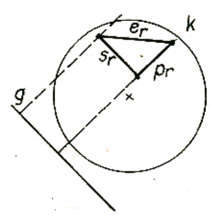


Bild 5

Sind wir jetzt fertig? Im allgemeinen nicht. Es ist wichtig, noch einen letzten Hinweis zu beachten:

Ich überprüfe alle Lösungsschritte auf ihre Richtigkeit und die Lösung auf Vollständigkeit! Erst nach dem erfolgreichen Abschluß dieser Überprüfung kann ich sagen: Die Aufgabe ist gelöst.

War unser Beispiel schwierig? Ja, ganz leicht war es sicher nicht. Aber wir wollten ja gerade lernen, wie man schwierige Aufgaben löst. Haben wir dieses Ziel erreicht? Nun, diese Frage muß jeder für sich selbst entscheiden, indem er versucht, neue Aufgaben zu lösen und dabei jene „Merksätze" anzuwenden, die wir bei der Bearbeitung unserer Aufgabe herausgestellt haben. Eine Garantie für das Finden von Lösungen geben die „Merksätze" natürlich nicht, aber oft können sie doch weiterhelfen, wenn man einmal steckengeblieben ist. Dazu viel Erfolg!

W. Walsch

Das magische Quadrat

▲807 Im Januar 1971 erhielt Fritz von seinem Opa eine Geburtstagskarte, auf der dieser zusätzlich das folgende magische Quadrat angebracht hatte.

1956—1971

68	58	57	71
63	65	66	60
67	61	62	64
56	70	69	59

Darunter stand geschrieben:

Hier steh'n die Zahlen von 16 Jahren,
obgleich es doch nur 15 waren.
Verwirrend scheinen sie gemischt,
ganz ohne Ordnung aufgetischt.
Durchläuft man Spalte oder Zeile,
auch kreuz und quer in aller Eile
- selbst daran muß man sich nicht binden –
man wird die gleiche Summe finden.
Doch wie und wo, will ich nicht sagen,
man muß schon selber etwas wagen.

Im Februar feierte der Opa seinen Geburtstag und erhielt von seinem Enkel eine Glückwunschkarte, auf welcher dieser das gleiche magische Quadrat angebracht hatte.

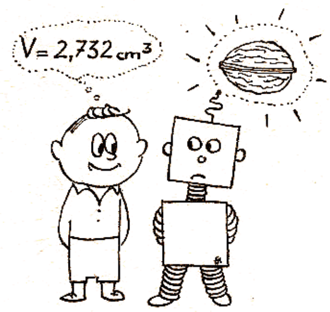
1. Was hat sich Fritz dabei gedacht, und in welchem Jahr ist sein Opa wohl geboren?
2. Wie groß ist die Summe s einer Spalte oder Reihe? Wieviel Quadrate und Rechtecke geben die gleiche Summe s, wenn man die 4 Zahlen in ihren Ecken addiert?
3. Versuche eine Gedächtnishilfe für die Anordnung der Zahlen im magischen Quadrat zu finden!
4. Fritz hat entdeckt, daß er in einigen Jahren auch zum Geburtstag seiner Mutter ein magisches Quadrat sinnvoll verwenden kann. Die Summe s einer Spalte wird aber bei diesem Quadrat 330 betragen.
a) Stelle das magische Quadrat auf!
b) Was besagt es für das Geburtstagskind?
c) Wie alt ist oder wird die Mutter 1971?

W. Bennewitz

(Lösung siehe Heft 6/71.)

Wer löst mit?

alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 3. Januar 1972

Der Wettbewerb läuft über vier Hefte. Es hat sich gezeigt, daß in den „Ferienheften" (Heft 3/69 und 3/70) wesentlich weniger Lösungen eingingen als zu den Aufgaben der Hefte 5, 6, 1 und 2. Außerdem ist damit für die Redaktion eine größere Zeitspanne zur Auswertung der rücklaufenden Karten und Urkunden gegeben. In den vier Wettbewerbsheften werden gleichviele Aufgaben gestellt wie in fünf Heften vergangener Jahre. Auf Hinweis zahlreicher Leser nehmen wir die Olympiadeaufgaben aus dem Wettbewerb heraus, da sie in den Arbeitsgemeinschaften behandelt wurden und oft die offiziellen Lösungen des Zentralen Komitees der OJM bekannt sind. Im letzten Jahr gingen über 30 000 Lösungen ein. In oft wochenlanger Kleinarbeit haben drei Mathematiklehrer das Material korrigiert. Eine gewissehafte Einhaltung der Wettbewerbsbedingungen, Sauberkeit und Übersichtlichkeit in der Ausführung der Lösungen und termingerechte Einsendung erleichtern dem Wettbewerbskollektiv die Arbeit.

Wir wünschen unseren Lesern beim Wettbewerb 1971/72 viel Freude und vor allem Erfolg.

Chefredakteur J. Lehmann

5▲775 Die Variablen der nachstehenden neun Gleichungen sind mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 10 derart zu belegen, daß alle Gleichungen zugleich erfüllt werden, das heißt, für gleiche Buchstaben sind gleiche Zahlen, für verschiedene Buchstaben sind verschiedene Zahlen einzusetzen.

(1) $a+a=b$, (4) $g+h=d$, (7) $h+h=c$,
(2) $c-d=e$, (5) $i-f=h$, (8) $f+f=g$,
(3) $e+f=a$, (6) $e+e=f$, (9) $g+g=j$.

Andreas Börner, Schkortitz (Kreis Grimma)

W 5■776 Helga, Carola, Sonja, Adelheid und Renate, die zu den aktiven Teilnehmern der diesjährigen Kinder- und Jugend-Spartakiade gehören, bewohnen während der Wettkampftage gemeinsam ein Zimmer. Die Heimatorte dieser fünf Mädchen sind Görlitz, Berlin, Jena, Rostock und Merseburg. Aus ihren Gesprächen erfahren wir:

a) Sonja und Carola starten im Hochsprung, während die Mädel aus Jena und Merseburg für diese Disziplin nicht gemeldet sind.
b) Drei Schülerinnen, nämlich Adelheid, Sonja und die Schülerin aus Görlitz waren bereits im Vorjahr Teilnehmer der Spartakiade.
c) Drei Schülerinnen, nämlich Carola, Renate und das Mädel aus Görlitz haben im Fach Mathematik die Note 1.
d) Carola war noch nie in der Hauptstadt der DDR.
e) Adelheid steht mit der Schülerin aus Merseburg im Briefwechsel.

Den Vornamen der fünf Mädchen sind die Namen ihrer Heimatorte zuzuordnen.

Karin Schubert, Pfaffroda

W 5■777 Im Berliner Schokoladenwerk VEB „Elfe" wurde eine neue Bonbonsorte entwickelt, die in Kürze in den Handel kommen soll.

Wieviel Gramm wiegt ein Bonbon, wenn eine Tüte Bonbon 80 Pf kostet, 1 000 Bonbon auf 50 Tüten kommen und 1 kg Bonbon 5 M kostet?

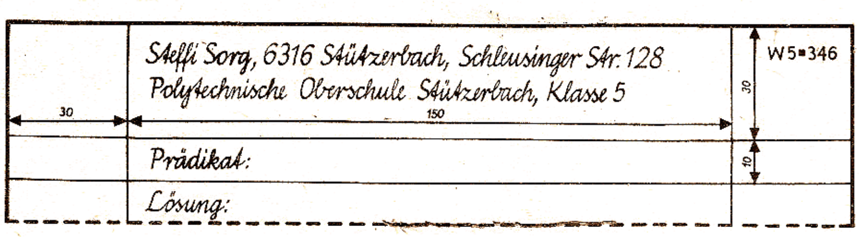
Hans-Peter Tams, Domsühl (Kl. 7)

***5*778** In der nachstehenden Additionsaufgabe ist jedes Sternchen durch eine der Ziffern von 1 bis 9 zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. Die Quersumme des ersten Summanden soll dabei 10 und die des zweiten 5 betragen.

```
   5 * *
 + * 2 *
 + * 6 *
 -------
 1 0 0 0
```

Wieviele Lösungen besitzt diese Aufgabe?

Carsten Schmidt, Dessow



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h., für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit * versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben *seiner oder einer höheren Klassenstufe* einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W■ 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Endergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgeben.

Der Jahreswettbewerb 1971/72 läuft von Heft 5/71 bis Heft 2/72. Zwischen dem 1. und 10. September 1972 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/71 bis 2/72 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 5/72 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/71 bis 2/72) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, welche bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1971/72 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen *richtig frankiert* sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

*5*779 Bei einem Tischtennisturnier sollen die 36 Teilnehmer zunächst Vorrundenspiele in sechs Gruppen zu je sechs Spielern austragen, und zwar jeder gegen jeden. Die beiden Erstplazierten aus den Vorrundenspielen sollen danach Zwischenrundenspiele in zwei Gruppen zu je sechs Spielern nach dem gleichen System austragen. Die beiden Erstplazierten dieser zwei Gruppen kommen in die Endrunde. Das Turnier beginnt um 8.30 Uhr. Zwischen den Vorrunden- und Zwischenrundenspielen liegt eine Pause von einer Stunde; nach Abschluß der Zwischenrundenspiele wird nochmals eine Pause von 15 Minuten eingelegt. Bis zu welcher Uhrzeit wird die Sporthalle zur Durchführung des Turniers voraussichtlich besetzt sein, wenn man für jedes Spiel im Durchschnitt 15 Minuten Spielzeit rechnet?

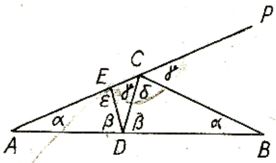
Biologiefachlehrer K.-H. Schubert, Pfaffroda

6▲780 Gibt es ein konvexes Vieleck, bei dem die Anzahl der Diagonalen doppelt so groß ist wie die Anzahl seiner Eckpunkte? Die Antwort ist zu begründen!

Rainer Helbig, Leipzig, Thomas-OS (Kl. 7)

W 6■781 In der abgebildeten Figur sei Winkel $\sphericalangle BCD = \delta = 80°$. Es sind die Größen der Winkel α, β, γ und ε zu bestimmen!

S. H.

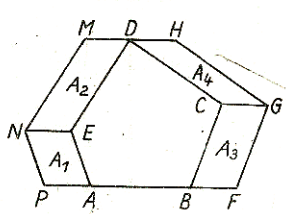


W 6■782 Aus dem Unterricht wissen wir, daß in einem Rechteck die Diagonalen einander halbieren und gleich lang sind.
Beweise: Wenn in einem Rechteck die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist es ein Quadrat. *T.*

*6*783 Es sind alle gebrochenen Zahlen $\frac{a}{b}$ mit $1<b<21$ anzugeben, die die folgenden Eigenschaften besitzen: Erweitert man $\frac{a}{b}$ mit 4 und vergrößert man danach den erweiterten Zähler um 7, so ist der auf diese Weise entstehende Bruch gleich $\frac{3}{4}$. Wieviele Zahlen $\frac{a}{b}$ gibt es, die den Bedingungen genügen?

Ing. f. Rechenelektronik H. Werner, Berlin

*6*784 Über den vier Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ und $\overline{EA}$ eines konvexen Fünfecks $ABCDE$ wurden Parallelogramme – wie aus der



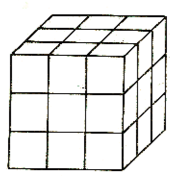
Zeichnung ersichtlich – derart gezeichnet, daß die Punkte P, A, B, F und M, D, H jeweils auf einer Geraden liegen und daß $\overline{PA} = \overline{BF}$ gilt. Es ist zu beweisen, daß für die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3 und A_4 der Parallelogramme die Beziehung $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$ gilt! *Sch.*

7▲785 In einem Drachenviereck* $ABCD$ mit der Symmetrieachse AC sei die Diagonale $\overline{BD}$ halb so lang wie die Diagonale $\overline{AC}$. Es ist der Flächeninhalt des Drachenvierecks in Abhängigkeit von der Diagonale $\overline{AC} = e$ anzugeben.

Yvonne Kruber, OS Stolpen, Kl. 9

W 7▲786 Ein Holzwürfel mit der Kantenlänge 100 mm soll durch $3n$ Sägeschnitte ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$), von denen jeweils n Schnitte zu einer Seitenfläche des Ausgangswürfels parallel und untereinander äquidistant sind, in kongruente Teilwürfel zersägt werden. Die zerspante Schnittbreite betrage dabei 1 mm.

a) Wieviel Teilwürfel kann man auf diese Weise höchstens erhalten?



b) Wie groß darf die Anzahl der Schnitte sein, wenn nicht mehr als 50% des Volumens des Ausgangswürfels zerspant werden sollen? *T.*

W 7■787 Bei einer Mathematikolympiade schrieben sieben Teilnehmer, und zwar Axel, Bernd, Dieter, Eberhard, Gerda, Helga und Ilona, die Klausur in einem Raum. Diese sieben Schüler wohnen in sieben verschiedenen Städten der DDR. In Vorbereitungslagern haben sich einige dieser sieben Schüler bereits kennengelernt. So kennt

a) Axel genau einen Schüler und zwei Schülerinnen, b) Bernd genau drei Schüler und keine Schülerin, c) Dieter genau zwei Schüler und eine Schülerin, d) Eberhard genau zwei Schüler und zwei Schülerinnen, e) Gerda keinen Schüler, aber zwei Schülerinnen, f) Helga genau drei Schüler und eine Schülerin, g) Ilona genau zwei Schüler und eine Schülerin.

Es ist zu ermitteln, wer sich untereinander kennt!

Bei dieser Aufgabe setzen wir voraus, daß, wenn ein Teilnehmer A den Teilnehmer B kennt, so auch der Teilnehmer B den Teilnehmer A kennt.

Mathematikfachlehrer E. Naumann, Schloßoberschule Karl-Marx-Stadt

*7*788 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Man zeichne die Diagonalen ein, ihr Schnittpunkt sei M. Die Strecken $\overline{AM}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$ und $\overline{DM}$ sind zu halbieren; die Halbierungspunkte seien in der vorgegebenen Reihenfolge E, F, G und H. Wie verhält sich der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ zu dem des Rechtecks $EFGH$?

Ingolf Kunath, EOS Meißen, Kl. 10

*7*789 Auf einer kreisförmigen Radrennbahn, deren Bahnlänge 300 m beträgt, trainieren zwei Rennfahrer. Beide fahren mit konstanten Geschwindigkeiten. Wenn sie in entgegengesetzte Richtungen fahren, dann treffen sie sich 15 s nach dem Start. Fahren hingegen beide in gleicher Richtung, dann überholt Fahrer A den Fahrer B das erste Mal nach 150 s. Es sind die Geschwindigkeiten beider Fahrer in km h^{-1} zu ermitteln!

Uwe Löser, Goßwitz

8▲790 Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, von dem der Umfang $a+b+c = 10$ cm sowie die Winkel $\alpha = 80''$ und $\beta = 60°$ gegeben sind.

Wolfgang Riedel, Spezialklasse 11 der Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt

8▲791 Es sind alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 3$ anzugeben, für die die Anzahl n der Seiten eines konvexen n-Ecks ein ganzzahliges Vielfaches der Anzahl seiner Diagonalen ist.

Wolfgang Luth, 3. EOS Rostock, Kl. 11c

W 8■792 Steffi, Marion und Christine unternehmen mit ihren Eltern eine Ferienreise. Eine der drei Familien reist an die Ostsee, die andere in die Sächsische Schweiz und die dritte in den Thüringer Wald. Über die Reiseziele werden die folgenden Aussagen gemacht:

(1) Steffi fährt an die Ostsee;

(2) Christine reist in den Thüringer Wald, oder Steffi reist in die Sächsische Schweiz.

a) Welche Reiseziele können die drei Mädchen haben, wenn die Aussage (1) wahr und die Aussage (2) falsch ist?

b) Welche Reiseziele können die drei Mädchen haben, wenn die Aussage (1) falsch und die Aussage (2) wahr ist? *T.*

W 8■793 Klaus sagt zu Peter: „Denke dir zwei natürliche Zahlen, von denen die erste größer als die zweite ist! Bilde die Differenz dieser beiden Zahlen, und gib mir diese Differenz an! Bilde dann die Differenz der Quadrate dieser beiden Zahlen, und gib mir auch diese Differenz an! Nun kann ich mit Hilfe von nur vier Rechenoperationen die beiden von dir gedachten Zahlen ermitteln."

a) Welche Rechenoperationen hat Klaus ausgeführt, um die beiden gedachten Zahlen zu ermitteln?

b) Wie lauten die gedachten Zahlen, wenn Peter als Differenz der beiden Zahlen die Zahl 5 und als Differenz ihrer Quadrate die Zahl 105 angegeben hat?

Bodo Geyer, OS Cainsdorf, Kl. 8a

*8*794 Gesucht ist eine sechsstellige natürliche Zahl, die die folgenden Eigenschaften hat:

1. Addiert man die aus den ersten drei Grundziffern dieser Zahl gebildete Zahl zu der aus den letzten drei Grundziffern gebildeten Zahl, so erhält man die Summe 999.
2. Multipliziert man die sechsstellige Zahl mit 6, so erhält man wieder eine sechsstellige Zahl, deren erste drei Grundziffern gleich den letzten drei Grundziffern und deren letzte drei Grundziffern gleich den ersten drei Grundziffern der ursprünglichen Zahl sind.

Emil Eichhorn, Bautzen (Alter: 82 Jahre)

* 8 * 795 Es seien a und b zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, und es sei $c=ab$. Es ist zu beweisen, daß dann die Zahl

$$x = a^2+b^2+c^2$$

stets gleich dem Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl ist. *Sch.*

9 ▲ 796 Gegeben seien zwei Kreise mit den Radien 4 cm und 6 cm, deren Mittelpunkte den Abstand 7 cm haben. Es ist der Abstand der Schnittpunkte dieser beiden Kreise zu berechnen.

Schüler Rainer Zerck, Wismar

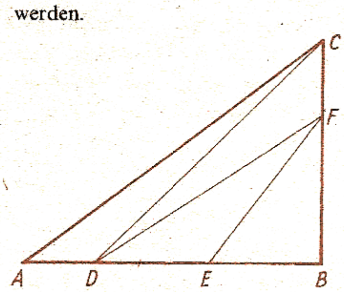
9 ▲ 797 Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit den Seitenlängen a, b, c, d, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen. Es ist zu beweisen, daß dann stets die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$a^2+c^2 = b^2+d^2.$$

T.

W 9 ■ 798 Drei Schüler haben die Vornamen Henry, Peter und Uwe. Ihre Nachnamen sind Bergmann, Sabel und Strauch. Wie heißen die drei Schüler, wenn die folgende Aussage falsch ist? „Wenn Henry den Nachnamen Bergmann hat, so hat Uwe den Nachnamen Strauch.“ *T.*

W 9 ■ 799 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck, auf dessen Kathete $\overline{AB}$ der Punkt D zwischen A und B und der Punkt E zwischen D und B liegt und auf dessen Kathete $\overline{BC}$ der Punkt F zwischen B und C liegt (vgl. die Abb.). Ferner sei $\overline{EB}=15$ cm und $\overline{BF}=20$ cm. Endlich seien die Flächeninhalte der Dreiecke EBF, DEF, DFC und ADC gleich groß.
Es soll die Länge der Strecke $\overline{AD}$ berechnet werden. *S. H.*



* 9 * 800 Klaus zeigt seinen Eltern sein Halbjahreszeugnis und wird dafür gelobt. „Ja“, sagt er voller Stolz, „im vorigen Jahr hatten wir die gleichen Fächer wie in diesem Jahr. Damals betrug die Summe meiner Zensuren noch 27 und das Produkt sogar 3456. Ich hatte vier Einsen. Jetzt beträgt die Summe 22 und das Produkt nur 192. Mein Zensurendurchschnitt liegt jetzt unter 1,6.“ Darauf sagen die Eltern: „Junge, daraus wird doch keiner schlau. Wer soll nun wissen, wieviele Einsen, Zweien, Dreien oder Vieren du jetzt hast und im Vorjahr hattest?“
Ich denke, wir können die Zensurenverteilung in diesem Jahr und im Vorjahr herausfinden. Klaus hat sogar eine Angabe gemacht, die wir für die Ermittlung der Zensuren nicht benötigen. Welche Angabe ist das?

Bernd Hübler, Fachlehrer für Mathem., POS VII Neubrandenburg

* 9 * 801 Gegeben seien in der Ebene zwei Punkte A und B, die benachbarte Punkte eines Quadrats $ABCD$ sind. Es sollen nur mit dem Zirkel, also ohne Benutzung des Lineals, die anderen Eckpunkte C und D dieses Quadrats konstruiert werden.

Jürg Helbig, Lessing-Oberschule, Halle, Kl. 8

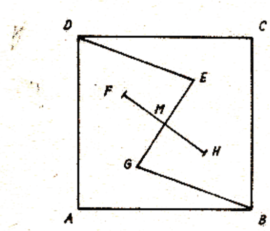
W 10/12 ■ 802 Im Jahre 1963 stellte ein Mathematiker an seinem Geburtstag fest, daß das von ihm erreichte Alter gleich dem Produkt der vier natürlichen Zahlen ist, die den Grundziffern seines Geburtsjahres entsprechen.
In welchem Jahr wurde dieser Mathematiker geboren, und welches Alter hatte er an seinem Geburtstag erreicht?

Dozent L. M. Lopowok, Woroschilowgrad, UdSSR

W 10/12 ■ 803 In einer Kammer (Länge $L=4{,}0$ m, Breite $B=2{,}5$ m Höhe $H=2{,}3$ m) steht als einziges Möbel an der Längswand ein Schrank, der die Form eines Quaders mit den Außenmaßen $a=0{,}6$ m, $b=1{,}8$ m, $h=2{,}1$ m hat. Kann dieser Schrank ohne Zerlegung durch eine an der Schmalseite der Kammer befindliche Tür mit den lichten Maßen 0,8 m und 1,9 m transportiert werden? Die Antwort ist zu begründen.

Dr. Gerhard Hesse, Radebeul

* 10/12 * 804 Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Von B und D aus seien zwei gleich lange Strecken $\overline{BG}$ und $\overline{DE}$ so gezeichnet, daß $\sphericalangle CDE = \sphericalangle ABG$ ist und E und G innere Punkte des Quadrates $ABCD$ sind. M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EG}$. Auf der Mittelsenkrechten dieser Strecke seien die Punkte F und H so konstruiert, daß $\overline{FM}=\overline{HM}=\overline{EM}$ gilt (vgl. die Abb.).



Es ist zu beweisen, daß dann stets die folgenden Beziehungen erfüllt sind:

1. $\overline{HC}=\overline{ED}=\overline{FA}=\overline{GB}$;
2. $HC \parallel FA$;
3. $HC \perp ED$ und $FA \perp GB$.

Prof. Dr. Th. Glocke Pädagogische Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“, Erfurt

* 10/12 * 805 Es ist zu beweisen, daß das Produkt

$$p = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\ldots\cdot\frac{49}{50}$$

größer als 0,1 und kleiner als 0,123 ist.

Schüler Egbert Lindner, Dresden

Nachgedacht und mitgemacht!

„Wer ist der beste in Mathematik?“ fragte der Pionierleiter zum Gruppennachmittag der Klasse 5a.
Alle Pioniere zeigten auf Wolfgang.
„Bitte, Wolfgang, merke dir eine zweistellige Zahl. Aber nenne sie mir nicht! Beantworte nur die folgenden drei Fragen:
„1. Kann man diese Zahl durch 3 dividieren, oder bleibt ein Rest?“
„Es gibt den Rest 1.“
„2. Und wenn du diese Zahl durch 5 dividierst?“
„Da erhalte ich den Rest 3.“
„3. Und wenn du durch 7 teilst?“
„Hier bleibt kein Rest.“
„Dann hast du dir die Zahl 28 gemerkt!“
„Richtig!“ antwortete Wolfgang. „Aber wie konntest du das wissen?
„Und ich möchte mir auch eine Zahl denken!“ rief Helga.
„Kannst du sie auch erraten?“
„Selbstverständlich. Sag' nur die Reste beim Dividieren durch 3, 5 und 7!“
„Die Reste sind 2, 3 und 5!“
„Dann hast Du Dir 68 gemerkt!“
„Richtig!“
Alle Pioniere bedrängten nun den Pionierleiter, sein „Geheimnis“ zu verraten!
„Ganz leicht! Jeder kann die Zahl finden, wenn er folgendes macht:
1. Der Rest beim Dividieren durch 3 ist mit 70 zu multiplizieren.
2. Den zweiten Rest muß man mit 21 multiplizieren.
3. Den dritten Rest mit 15.
Danach addiert man die drei Produkte und erhält die gedachte Zahl. Ergibt die Multiplikation mehr als 105, so muß man noch 105 subtrahieren.“

Ein Beispiel möchte ich euch geben und ihr alle werdet das Zahlenkunststück auch beherrschen:
a) Reste 1, 2, 4, also
$1\cdot 70=70$; $2\cdot 21=42$; $4\cdot 15=60$
b) $70+42+60=172$
c) $172-105=67$.“

Mathematikfachlehrer A. Halameisär, 325. Schule, Moskau

Concursul de matematică
etapa locale

Am 1. März 1970 wurde in der Stadt Bukarest in einer dreistündigen Klausur die Schulolympiade durchgeführt. Wir danken der Redaktion *Gazeta matematica*, die uns die Aufgaben zur Verfügung stellte. Studienrat *Th. Scholl*, Berlin, bearbeitete das Material für unsere Leser und erarbeitete die Lösungen.

Klassenstufe 6, siehe Seite 114

Klassenstufe 7

1. Die folgenden beiden Terme sind durch äquivalente Umformungen so weit wie möglich zu vereinfachen:

$$T_1=\frac{2a^2b+2ab^2}{3a^2+6ab+3b^2}:\frac{1}{a+b}-\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\frac{a^3b^3}{3a^2-3b^2},$$

$$T_2=\left(\frac{2}{a}-\frac{3}{b}\right)\cdot\frac{27}{4b^2-9a^2}:\frac{1}{2b+3a}.$$ Danach ist ein Term T_3 zu bilden, für den gilt

$$T_3=\left(3\,T_1+\frac{T_2}{27}\right)\left(3\,T_1-\frac{T_2}{27}\right).$$

Schließlich ist das geometrische Mittel aus den Termen T_1 und T_2 zu bilden unter der Voraussetzung, daß $a>0$ und $b>0$ gilt.

Gh. Stefanescu, Bukarest

2. Die Summe zweier rationaler Zahlen beträgt 60, ihr Produkt 675. Es ist die Summe aus den reziproken Werten dieser beiden Zahlen zu bestimmen!

Ghita Dimonte, Bukarest

3. In einem Kreis k mit dem Mittelpunkt O werden zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ angenommen. Es ist ein innerer Punkt E der Strecke $\overline{OB}$ festzulegen und die Verbindungsgerade CE zu zeichnen, die den Kreis k in einem weiteren Punkt F schneidet. Die im Punkt F an den Kreis k zu konstruierende Tangente t schneide die Gerade AB im Punkte G.

a) Es ist zu beweisen, daß $\sphericalangle OCE+\sphericalangle EFG=90°$ gilt.

b) Es ist zu beweisen, daß das Dreieck $\triangle EFG$ gleichschenklig ist.

c) Welches Maß muß der Kreisbogen $\widehat{DF}$ haben, damit das Dreieck $\triangle EFG$ gleichseitig ist? Unter der Voraussetzung, daß das Dreieck $\triangle EFG$ gleichseitig ist, soll die Richtigkeit folgender Aussagen nachgewiesen werden:

d) Das Dreieck $\triangle DOF$ ist ebenfalls gleichseitig.

e) Die Dreiecke $\triangle COE$ und $\triangle CFD$ sind einander ähnlich. Unter der Voraussetzung, daß der Radius r des Kreises k die Länge 8 cm hat, sind die Längen der Strecken $\overline{CF}$, $\overline{EO}$ und $\overline{CE}$ zu bestimmen.

Ghita Dimonte, Bukarest

Klassenstufe 8

1. Gegeben sei ein gerades dreiseitiges Prisma $ABCDEF$, das das Dreieck ABC zur Grundfläche und das Dreieck DEF zur Deckfläche hat und in dem $\overline{AB}=\overline{AC}=4$ cm, $\overline{BC}=5$ cm und $\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}=6$ cm betragen. Eine Ebene, die durch die Ecke A geht, schneidet die Kante $\overline{BE}$ in einem Punkt P und die Kante $\overline{CE}$ in einem Punkt Q derart, daß die Geraden $\overline{BC}$ und $\overline{PQ}$ zueinander parallel verlaufen.

a) Welche Länge muß die Strecke $\overline{BP}$ besitzen, damit das Dreieck $\triangle PQD$ gleichseitig ist?

Unter der Voraussetzung, daß das Dreieck $\triangle PQD$ gleichseitig ist, sind folgende Aufgaben zu lösen:

b) Es ist das Volumen der Pyramide $EFQPD$ zu berechnen.

c) Es sind das Volumen und die Oberfläche des Polyeders $ABCDPQ$ zu berechnen.

d) Es ist zu zeigen, daß die Polyeder $ABCPQ$, $DEFPQ$ und $ADPQ$ volumengleich sind.

Elena Matroscenco, Bukarest

2. Der Term $T=\dfrac{2x-1+(2x-1)^2+(2x-1)^3}{8x^3+1}$ soll so weit wie möglich vereinfacht werden. Danach soll die Gleichung $T=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ in x gelöst werden

Valeria Tomuleanu, Bukarest

3. Gegeben sind drei Terme

$$T_1=\frac{1}{3}[2(b^2+c^2)]-a^2,$$

$$T_2=\frac{1}{3}[2(c^2+a^2)-b^2] \text{ und}$$

$$T_3=\frac{1}{3}[2(a^2+b^2)-c^2].$$

Es ist der Term

$$T_4=\frac{T_1+T_2+T_3}{T_1{}^2+T_2{}^2+T_3{}^2}$$ zu bestimmen!

C. Ionescu-Tiu, Bukarest

75 Jahre Gazeta matematica

Im September 1970 konnte die rumänische mathematische Schülerzeitschrift *Gazeta matematica* auf ihr 75jähriges Bestehen zurückblicken. Ihr Wirken ist auf das engste mit der Mathematik in Rumänien verbunden. Gegründet im Jahre 1895 aus der Notwendigkeit, die Mathematikausbildung der Studenten der *Hochschule für Brücken- und Straßenbau* zu unterstützen, entwickelte sich die Zeitschrift zu einem Organ, in dem führende rumänische Mathematiker Artikel und Aufgaben veröffentlichten, an denen die mathematikinteressierten Schüler und Studenten ihre Kräfte maßen. Einen großen Aufschwung für die rumänische Mathematik brachten die Bildungsreform und die Reform von 1948; der Aufbau des Sozialismus verlangte auch von der *Gazeta matematica*, das wissenschaftliche und methodische Niveau zu heben und einen breiten Leserkreis an die Mathematik heranzuführen und für sie zu interessieren. Akademiemitglied *Gr. C. Moisil* schreibt dazu in einem Artikel „Zum 75. Jahr" in der Sondernummer 10/70:

„Die *Gazeta matematica* reorganisierte sich, um ihren neuen Aufgaben gerecht zu werden. Die Gesellschaft für mathematische Wissenschaften in der Sozialistischen Republik Rumänien hat es verstanden, ihre Arbeit und ihre besonders charakteristischen Publikationen zu prägen:

- die Aufgabe, das Interesse der breiten Masse der Schüler an der Mathematik zu wecken,
- die Aufgabe, eine Trennung der fachwissenschaftlichen Arbeit von der pädagogischen zu verhindern.

Diese Merkmale behalten auch weiterhin ihre Gültigkeit. Die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften und des Interesses der Oberschüler für die Mathematik ist auf Unterstützung der Mathematiker durch die Kommunistische Partei Rumäniens zurückzuführen."

Heute veröffentlicht die *Gazeta matematica* in jeder ihrer Nummern mathematische, mathematisch-historische Artikel und eine Vielzahl von Problemen und Aufgaben (in Heft 10/70 findet man z. B. die Probleme 10686 bis 10729), deren Lösungen in den nächsten Nummern ausführlich besprochen werden. Viele der Probleme und Aufgaben stammen übrigens von Lesern der Zeitschrift, die auch originelle Lösungen und sogar kleinere mathematische Artikel in der Zeitschrift veröffentlichen.

Durch die Welt der Tetraeder

Wer sein räumliches Vorstellungsvermögen trainieren will, der folge unserem

Streifzug durch die Welt der Tetraeder

Die Rolle, die in der Ebene die Dreiecke spielen, übernehmen im Raum die Tetraeder. Die *regelmäßigen Tetraeder* sind euch sicherlich bekannt (vgl. *alpha* 1/69); sie kamen in einigen Olympiade-Aufgaben schon vor und sollen natürlich auch eine Station auf unserem Streifzug bilden. Was aber wißt ihr über Tetraeder, die *nicht* regelmäßig sind? Mit ihnen wollen wir uns vor allen Dingen bekannt machen. Ob ihr dann auch der Meinung seid, daß die unregelmäßigen Tetraeder eigentlich viel interessanter sind als die regelmäßigen?

Die Voraussetzungen zum Verständnis der einzelnen Abschnitte sind verschieden, und nicht alle Abschnitte hängen voneinander ab. Für Schüler ab 8. Klasse ist dieses Unternehmen sicherlich zuträglich, Schüler aus niederen Klassenstufen sollten es auch einmal probieren.*

Die beigefügten Bilder sind senkrechte oder schräge Parallelprojektionen räumlicher Figuren. Bei solch einer Projektion wird das Bild eines Punktes P etwa mit P' oder P^s bezeichnet; diese Kennzeichnung ist meistens fortgelassen!

1. Der geometrische Begriff „Tetraeder“

● *Voraussetzung:* Im Raum seien vier Punkte A, B, C, D gegeben. Sie sollen nicht in einer Ebene liegen.

● *Behauptung* 1: Es liegen keine drei dieser vier Punkte auf einer Geraden.

● Beweis: Würden etwa A, B und C auf einer Geraden liegen, und bezeichnen wir diese Gerade mit g, dann könnten wir so schließen: Der Punkt D darf nicht auch noch zu g gehören, da vier Punkte einer Geraden in unendlich vielen Ebenen liegen (in welchen?); dies würde der Voraussetzung über A, B, C und D widersprechen. Liegt nun der Punkt D nicht auf der Geraden g, dann bestimmen D und g eine (einzige) Ebene, in der alle vier Punkte enthalten sind; dies wäre ebenfalls gegen die Voraussetzung. Da wir alle möglichen Lagen des Punktes D bezüglich der Geraden durch die Punkte A, B, C berücksichtigt haben, ist die Behauptung 1 (indirekt) bewiesen worden.

● *Folgerung:* Die gegebenen Punkte sind paarweise verschieden. (Denn wäre etwa $A=B$, dann würden $A=B$, C und D in wenigstens einer Ebene liegen; dies sollte aber nicht zutreffen.)

● *Bemerkung:* Die Feststellung, daß gewisse Punkte paarweise verschieden sind, ist in der Geometrie öfters herauszustellen. Es kann nämlich passieren, daß im Laufe einer Untersuchung zwei Punkte als gleich erkannt werden, denen das anfangs nicht anzusehen war. Besonders für jene Fälle, in denen „uns die Anschauung verläßt“, ist diese Bemerkung wichtig. Hierzu werden wir noch Beispiele kennenlernen.

Einige einfache Feststellungen und weitere Folgerungen fassen wir in der Behauptung 2 zusammen:

● *Behauptung 2a:* Die vier Punkte A, B, C und D legen genau die sechs eindeutig bestimmten Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ (Bild 1) und Geraden AB, AC, AD, BC, BD, CD fest.

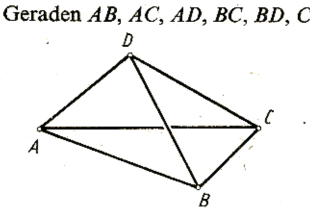


Bild 1: Bild von 4 Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, und ihren Verbindungsstecken (Tetraeder).

● *Behauptung 2b:* Durch jeden Punkt gehen genau drei dieser sechs Geraden; diese drei Geraden liegen nicht in einer Ebene:
Durch A gehen die Geraden AB, AC, AD, durch B gehen die Geraden ...
(vervollständige diese Übersicht).

● *Behauptung 2c:* Diese sechs Geraden bzw. Strecken lassen sich auf drei Weisen so zu Paaren (bei denen es nicht auf die Reihenfolge ankommt) ordnen, daß jedes Paar alle vier Punkte enthält:
AB und CD, AC und BD, AD und BC bzw.
$\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$.

Betrachten wir das Geradenpaar AB und CD! Da die vier Punkte A, B, C und D nicht in einer Ebene liegen, sind auch die beiden Geraden nicht in einer Ebene enthalten. Sie treffen sich nicht in einem Punkt, denn sonst würden sie eine Ebene bestimmen, in der entgegen der Annahme alle vier Punkte lägen. Sie sind aber auch nicht parallel zueinander, da sonst durch den gleichen Schluß ein Widerspruch zur Voraussetzung über A, B, C und D herzuleiten wäre.

● *Bezeichnung:* Zwei Geraden des Raumes, die keinen Punkt gemeinsam haben und nicht parallel sind, nennt man zwei *windschiefe* Geraden. Kürzer: Zwei Geraden heißen *windschief,* wenn sie keine Ebene gemeinsam haben.

Solche Paare windschiefer Geraden werden in unseren Betrachtungen eine Rolle spielen. Löse in diesem Zusammenhang die

▲**Aufgabe 1** Es seien a und b zwei windschiefe Geraden. Ferner sei ε eine Ebene durch die Gerade a. Dann gilt: Entweder trifft die Gerade b die Ebene ε in genau einem Punkt oder die Gerade b ist zur Ebene ε parallel. (*Anleitung.* Schreibe nieder, was du über die gegenseitige Lage einer Geraden und einer Ebene weißt. – Suche in deiner Umgebung Modelle für windschiefe Geraden und zur Behauptung der Aufgabe 1, etwa in Gestalt geeigneter Kanten und Flächen eines Schuhkartons!)

▲**Aufgabe 2** Es seien a und b zwei windschiefe Geraden. Es gibt dann eine Ebene α durch die Gerade a und eine Ebene β durch die Gerade b, die eindeutig bestimmt und zueinander parallele Ebenen sind.

● *Behauptung 2d:* Aus den sechs Strecken, die die Punkte A, B, C, D festlegen, lassen sich geschlossene Streckenzüge herstellen, und zwar genau die folgenden drei:
$\overline{AB}-\overline{BC}-\overline{CD}-\overline{DA}$, $\overline{AB}-\overline{BD}-\overline{DC}-\overline{CA}$, $\overline{AD}-\overline{DB}-\overline{BC}-\overline{CA}$ (Bilder 2 und 3).

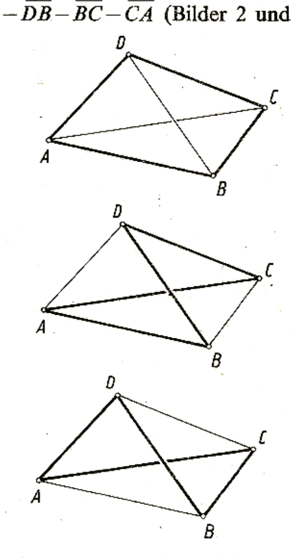


Bild 2: Aus vier Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, herzustellende räumliche Vierecke.

● *Bezeichnung:* Solch einen geschlossenen Zug aus vier Strecken, die nicht in einer Ebene liegen, nennt man ein *räumliches Viereck* oder *windschiefes Viereck.*

▲**Aufgabe 3** Vergleiche den so eingeführten Begriff „Räumliches Viereck“ mit dem, was du über Vierecke in der Ebene (*ebene Vierecke*) weißt! (*Anleitung.* Die Ausgangsfigur in der Ebene besteht wieder aus vier Punkten. Welche Voraussetzung hast du jetzt für sie festzulegen?)

* Die Betrachtungen sind übrigens absichtlich nicht als „Mathematik im Erzählstil“ durchgeführt worden. Legt einmal selber Wert darauf, die verschiedenen Bestandteile einer Untersuchung möglichst deutlich herauszupräparieren und zu kennzeichnen!

● *Behauptung 2e:* Je drei der vier Punkte A, B, C und D legen ein Dreieck fest. Es gibt genau vier Dreiecke, und zwar die mit den Eckpunkten ... (schreibe sie selber hin).

● *Bezeichnung: „Tetraeder".* Sind A, B, C, D vier Punkte des Raumes, die nicht in einer Ebene liegen, dann nennt man die Figur aus den vier Dreiecken $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$ ein *Tetraeder* (oder *Vierflächner*); *Symbol:* Tetraeder $ABCD$. Es heißen A, B, C, D die Eckpunkte oder Ecken, die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ die *Kanten* und die angeführten Dreiecke die *Seitenflächen* oder die Seiten des Tetraeders.

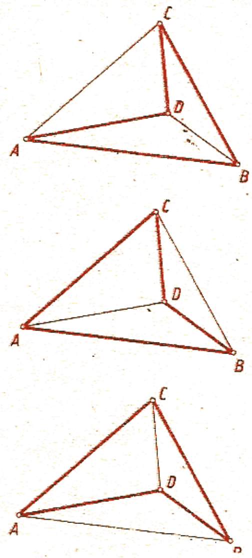


Bild 3: Aus vier Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, herzustellende räumliche Vierecke.

● *Bemerkung:* Je nach den Bedürfnissen eines Problems ist es bequem und üblich, den so eingeführten Begriff „Tetraeder" geeignet abzuwandeln: Man nennt unter Umständen auch die Gerade, die durch eine Kante des Tetraeders festgelegt ist, eine Kante, oder die Ebene, in der eine Seitenfläche liegt, eine Seite (auch Seitenebene) des Tetraeders. Ein Punkt, der Eckpunkt ist oder auf einer Kante oder im Inneren eines der begrenzenden Dreiecke liegt, heißt ein *Punkt* oder ein *Randpunkt* des Tetraeders. Auf natürliche Weise werdet ihr wie bei einem Dreieck in der Ebene so auch bei einem Tetraeder im Raume *innere* und *äußere* Punkte des Tetraeders unterscheiden. Die inneren Punkte zusammen mit den Randpunkten sind Punkte eines ebenfalls Tetraeder genannten Körpers; man müßte eigentlich zwischen Tetraeder*körper* und Tetraeder*fläche* unterscheiden – die Bequemlichkeit der Mathematiker verlangt sozusagen, daß jeder Leser mathematischer Literatur genau aufpassen muß, welchen Inhalt die verwendeten Begriffe und Bezeichnungen haben sollen, wobei dieser Inhalt in einer einzigen Abhandlung „naheliegenden" Änderungen unterworfen sein kann!

● *Hinweis:* Eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche nennt man eine *dreiseitige Pyramide.* (Auch hier ist zwischen der Pyramide als Körper und als Fläche zu unterscheiden.) Solch eine dreiseitige Pyramide ist natürlich nichts anderes als ein Tetraeder, an dem eine Ecke als Spitze und die gegenüberliegende Seite als Grundfläche hervorgehoben worden sind. Sind Ecken und Seitenflächen gleichberechtigt, dann ist das Wort Tetraeder besser als die Bezeichnung (dreiseitige) Pyramide.

2. Regelmäßige und rechtwinklige Tetraeder

Unter den regelmäßigen Polyedern (vgl. *alpha* 1/69) ist dir der Würfel sicherlich am vertrautesten. Nach einem Verfahren, das bei der Lösung der zugehörigen Olympiade-Aufgaben recht nützlich war, stellen wir aus einem Würfel regelmäßige Tetraeder her: Die acht Ecken eines Würfels zerlegen wir in zwei Gruppen zu vier Punkten, wie es Bild 4 zeigt. Die Punkte solch einer Gruppe haben die Eigenschaft, nicht in einer Ebene zu liegen und bestimmen daher ein Tetraeder. Auf diese Weise sind durch die Ecken eines Würfels zwei Tetraeder festgelegt. Jedes dieser Tetraeder ist regelmäßig, denn es sind untereinander gleichlange Diagonalen der Würfelseiten-Quadrate die Kanten eines Tetraeders. Beide Tetraeder sind daher auch kongruent. Überdies sind sie durch Drehung etwa um die Achse a durch 90° zur Deckung zu bringen.**

▲**Aufgabe 4** Gib weitere Drehachsen an!

Die beiden Tetraeder durchdringen sich in einem regelmäßigen Oktaeder; dieser Durchschnitt ist in Bild 4 gestrichelt eingezeichnet. Die auf gleiche Art aus einem Quader herzustellenden Tetraeder sind nicht regelmäßig. Sie sind ebenfalls kongruent, doch lassen sie sich nicht durch Drehungen um der Geraden a entsprechende Achsen zur Deckung bringen.

** Diese Drehung ist Beispiel für eine Deckabbildung des Tetraeders.

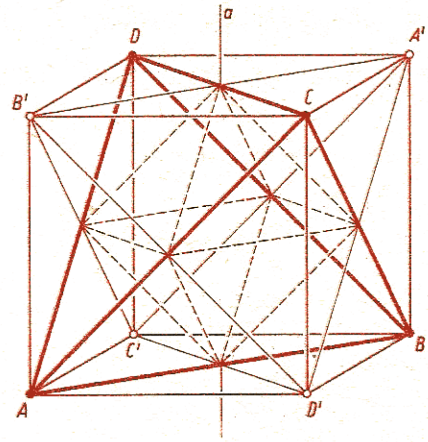


Bild 4: Aus den Ecken eines Würfels lassen sich zwei regelmäßige und acht rechtwinklige Tetraeder bilden.

▲**Aufgabe 5** Versuche Spiegelungen an geeigneten Ebenen als mögliche Deckabbildungen anzugeben! Welche Deckabbildungen gibt es jedoch, wenn der Quader ein Paar Quadrate als Seitenflächen besitzt?

Weitere Tetraeder sind aus einem Würfel zu erhalten, wenn ein Eckpunkt und die dieser Ecke benachbarten Ecken des Würfels herausgegriffen werden. Wir erhalten so acht Tetraeder:

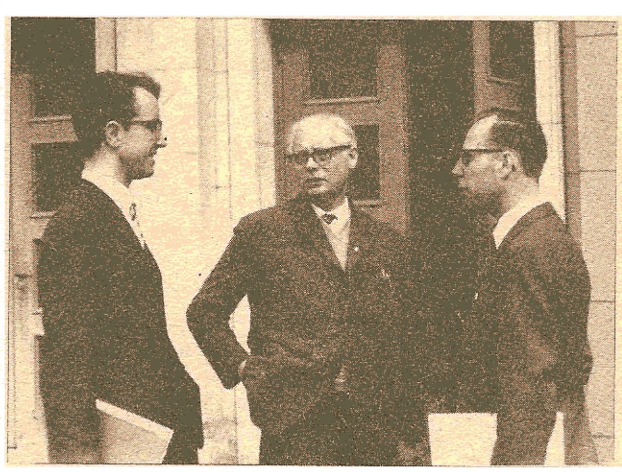
$AB'C'D'$, $BC'D'A'$, $CD'A'B'$, $DA'B'C'$, $A'BCD$, $B'CDA$, $C'DAB$, $D'ABC$.

Diese Tetraeder zeichnen sich dadurch aus, daß sie jeweils eine Ecke besitzen, in der die angrenzenden Kanten paarweise senkrecht aufeinander stehen. Auf gleiche Weise erhalten wir aus einem Quader solche Tetraeder.

● *Bezeichnung:* Ein Tetraeder, das in einer Ecke paarweise senkrecht aufeinander stehende Kanten besitzt, heißt ein *rechtwinkliges Tetraeder.*

Dieser ausführlichen Einführung des Begriffs „Tetraeder" wird sich in einem der nächsten Hefte ein weiterer Beitrag anschließen.

G. Geise



Drei Experten im Gespräch (X. OJM, DDR-Stufe): Dozent Dr. *G. Geise* im Bild rechts (Autor unseres obigen Beitrags) im Gespräch mit Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. *R. Lüders* (Mitte) und Dozent Dr. *L. Stammler* (Mitglieder des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR).

XIII. Internationale Mathematikolympiade

Žilina/Bratislava 1971

Aufgaben

1. Sei n eine natürliche Zahl mit $n>2$. Man beweise, daß die folgende Behauptung genau für $n=3$ und $n=5$ gilt:
„Für beliebig reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist die Ungleichung
$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)$
$+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)$
$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})\geqq 0$
erfüllt.“ (Ungarische VR, 5 Punkte)

2. Es sei ein konvexes Polyeder P_1 mit genau neun Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_9$ gegeben. P_i sei das Polyeder, das man aus P_1 durch die Parallelverschiebung $A_1 \to A_i$ erhält ($i=2, 3, \ldots, 9$). Man beweise, daß wenigstens zwei Polyeder $P_1, P_2, \ldots, P_9$ mindestens einen inneren Punkt gemeinsam haben müssen. (UdSSR, 7 Punkte)

3. Man beweise, daß die Folge $\{2^n-3\}$, $n=2, 3, 4, \ldots$, mindestens eine unendliche Teilfolge mit paarweise teilerfremden Elementen enthält.
(VR Polen, 9 Punkte)

4. Alle Seitenflächen eines Tetraeders $ABCD$ seien spitzwinklige Dreiecke. Wir betrachten alle geschlossenen Polygonzüge $XYZTX$, die folgendermaßen definiert sind:
X, Y, Z und T seien innere Punkte der Kanten AB, BC, CD bzw. DA. Man beweise:
a) Ist $\sphericalangle DAB+\sphericalangle BCD \neq \sphericalangle ABC+\sphericalangle CDA$, so existiert unter den Polygonzügen kein kürzester.
b) Ist $\sphericalangle DAB+\sphericalangle BCD=\sphericalangle ABC+\sphericalangle SDA$, so existieren unendlich viele kürzeste Polygonzüge $XYZTX$. Ihre Länge beträgt $2\,AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$,
wobei $\alpha=\sphericalangle BAC+\sphericalangle CAD+\sphericalangle DAB$ ist.
(Niederlande, 6 Punkte)

5. Man beweise, daß in der Ebene für jede natürliche Zahl n eine unendliche (und nicht leere) Punktmenge S mit der folgenden Eigenschaft existiert:
Zu jedem beliebigen Punkt A aus S gibt es in S genau n Punkte, die von A den Abstand 1 haben. (VR Bulgarien, 7 Punkte)

6. $A=(a_{ij})$; i, j$=1, 2, \ldots, n$ sei eine Matrix, deren Elemente ganze, nichtnegative Zahlen sind.
Die Matrix habe folgende Eigenschaft:
Ist ein Element $a_{ij}=0$, dann gilt für diese i und j

$$a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in}+a_{1j}+2_{2j}+\ldots+a_{nj}\geqq n.$$

Man beweise, daß die Summe aller Elemente der Matrix nicht kleiner als $\frac{n^2}{2}$ ist.
(Schweden, 8 Punkte)

DDR-Teilnehmer der XIII. IMO

Wolfgang Burmeister 1. Preis
dazu: Sonderpreis für die elegante Lösung der 3. Aufgabe
Erweiterte Oberschule Dresden-Süd, Klasse 12

Harald Englisch 2. Preis
EOS „Karl Marx“, Leipzig, Klasse 11

Thomas Jentsch 3. Preis
Spezialklasse Mathematik/Physik der Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg (ehem. Dresden), Klasse 12

Arnulf Möbius 3. Preis
Spezialklasse Mathematik/Physik der Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg (ehem. Leipzig), Klasse 12

Gerhard Spens 3. Preis
Humboldt-EOS Erfurt, Klasse 12

Reinhard Wobst 3. Preis
Spezialklasse an der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt, Klasse 12

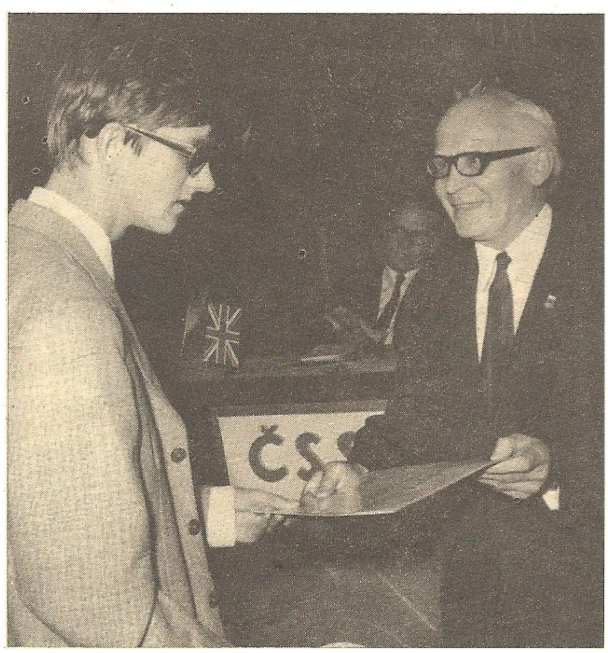
Olaf Böhme
EOS „Berthold Brecht“, Dresden, Klasse 11

Hans-Jürgen Fischer
Spezialklasse an der Sektion der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt, Klasse 11

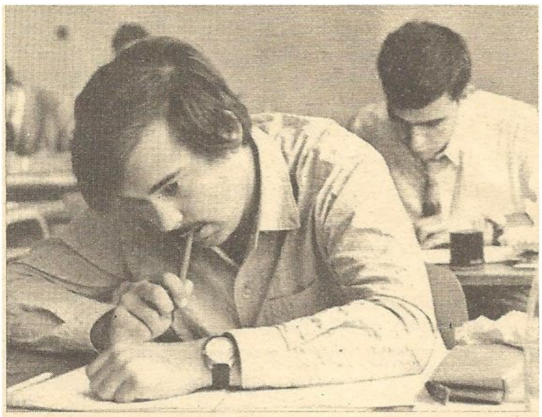
Preisträger der XIII. IMO

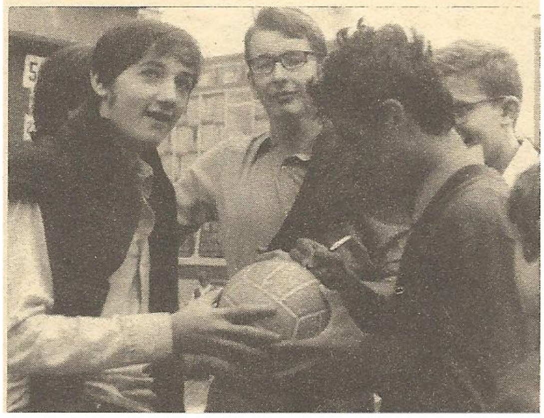
	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Sonderpreis	Gesamtpunktz.
Ungarische VR	4	4		2	255
UdSSR	1	5	2		205
DDR	1	1	4	1	142
VR Polen	1		4		118
Großbritannien		1	4		110
SR Rumänien		1	4		110
Österreich			4		82
SFR Jugoslawien			2		71
ČSSR			1		55
Schweden			2		43[1]
Niederlande			2	1	48
VR Bulgarien					39
Frankreich					38
Mongolische VR					26
Republik Kuba					9[2]
	7	12	29	4	1351[3]

[1] bei 7 Teilnehmern [2] bei 4 Teilnehmern
[3] von 4830 möglichen Punkten



● Klausur-Atmosphäre (13./14. 7. 1971) ● Adressenaustausch nach einem turbulenten Fußballspiel ● Die Jury der XIII. Internationalen Mathematikolympiade – Abschlußfeier in der Komensky-Universität Bratislava ● Sonderstempel, herausgegeben zu Ehren der XIII. IMO ● Ausstellung: 20 Jahre Mathematikolympiaden in der ČSSR – 13 Jahre Internationale Mathematikolympiaden ● Akademiemitglied J. Novák überreicht einen 1. Preis an Imre Ruzsa, Budapest. Er erreichte als einziger Teilnehmer die volle Punktzahl (42 Punkte), Foto S. 108 unten





alpha stellt vor

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Der Verein tschechischer und später tschechoslowakischer Mathematiker und Physiker begann in den 70er Jahren des 19. Jahrhunderts eine *Zeitschrift für die Pflege der Mathematik* herauszugeben. Diese enthielt auch eine Beilage, die für Schüler der damaligen Mittel- und Oberschulen bestimmt war. Aus ihr ging 1920 die selbständige *Mathematisch-naturwissenschaftliche Umschau* hervor. Bei der Reorganisierung des Vereins tschechoslowakischer Mathematiker und Physiker übernahm der Verlag der Akademie diese Zeitschrift. Allmählich verlor sie ihren Leserkreis und stellte 1955 ihr Erscheinen ein.

Unter schwierigen Bedingungen gelang es 1956, die Zeitschrift zu erneuern, neue Leser und Autoren zu gewinnen.

In diesem Jahr erscheint der 50. Jahrgang der *Umschau*. Neben klassischen Partien der Mathematik werden überwiegend Artikel mit moderner Thematik veröffentlicht. In der Geometrie finden wir vor allem Beiträge, die in der technischen Praxis Anwendung finden können. Die Physik gibt Anleitungen aus sich neu bildenden Fachgebieten. Die Astronomie macht mit der Erschließung des Weltalls vertraut.

Die Wettbewerbsbewegung der Mittel- und Oberschüler wird durch Preisausschreiben, die unabhängig von den Mathematik- und Physikolympiaden durchgeführt werden, gefördert. Eine besondere Rubrik ist den jüngsten Lesern gewidmet. Sie wird durch Aufgaben – häufig unterhaltsam – und elementare Artikel gefüllt. Damit soll von Kindheit an die Liebe zur Mathematik geweckt werden, die leider noch häufig in verschiedenen Lehrbüchern von der Form her vernachlässigt wird. *Rozhledy* macht ihre Leser auch mit dem Inhalt befreundeter ausländischer Zeitschriften vertraut, aus denen sie kürzere Artikel, aber auch Aufgaben abdruckt.

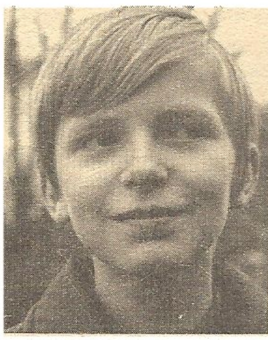
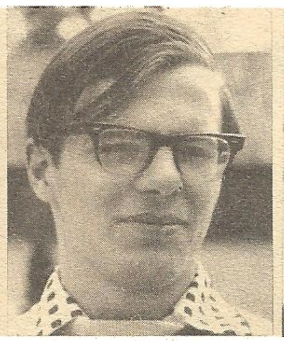
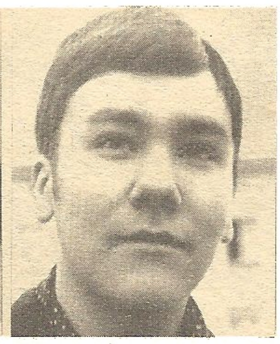
Doc. Ota Setzer, Prag (Chefredakteur)

Die Redaktion *Rozhledy* grüßt die Leser von *alpha* recht herzlich und stellt folgendes Problem:

▲ 806 Konstruiere ein Drachenviereck $ABCD$ aus den gegebenen Seiten $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$ und dem Inkreisradius ϱ!

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade (5. 4. bis 8. 4. 1971)

Erste Preise wurden vergeben:

Bernd Zaddach, 10. OS Cottbus, 8. Schuljahr (Olympiadeklasse 10)

Wolfgang Burmeister, EOS Dresden-Süd (Olympiadeklasse 12)

Thomas Jentsch, Spezialklasse der Martin-Luther-Universität Halle (Olympiadeklasse 12, Spezialklasse)

Zweite Preise wurden vergeben:

In **Olympiadeklasse 10** an: **Lothar Wenzel,** EOS „Friedrich List" Berlin; **Matthias Günther,** EOS „Helmholtz" Leipzig; **Guntram Pausch,** EOS „Wilhelm Pieck" Borna (Bez. Leipzig); **Jürgen Roßmann,** EOS „Antonin Zapotocky" Neubrandenburg; **Bernhard Worel,** OS V. Neubrandenburg; **Bernd Süssmilch,** BBS des soz. Binnenhandels Schwerin; **Holger Steinberg,** BBS Schiffselektronik Rostock; **Winfried Kung,** BBS Wohnungsbaukombinat Rostock
In **Olympiadeklasse 11: Rainer Siegmund-Schultze,** EOS „Heinrich Hertz", Berlin
In **Olympiadeklasse 12: Stefan Ladmann,** EOS „Max Klinger" Leipzig; **Reinhard Wobst,** Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt; **Harald Englisch,** EOS „Karl Marx" Leipzig

Dritte Preise wurden vergeben:

In **Olympiadeklasse 10: Stefan Zeh,** Karl-Marx-OS Plauen; **Ralf Lehmann,** J.-Curie-OS Petershagen (Bez. Frankfurt/Oder); **Eckart Böhringer,** EOS „Heinrich Hertz" Berlin; **Ursula Baier,** EOS „Ernst Schneller" Meißen; **Hans-Gert Gräbe,** EOS „A. v. Humboldt" Erfurt; **Steffen Oswald,** M.-A.-Nexö-OS Dresden; **Ulrich Krüger,** EOS „Friedrich Engels" Riesa; **Konrad Engel** (Kl. 9), Herder-OS Rostock; **Oswald Knoth,** Goethe EOS Wurzen (Bez. Leipzig); **Wilfried Hartmann,** EOS Windischleuba (Bez. Leipzig)
In **Olympiadeklasse 11: Olaf Böhme,** EOS Dresden-Reick; **Hans-Jürgen Fischer,** Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt; **Bernd Hofmann,** Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt;
In **Olympiadeklasse 12: Gerhard Spens,** Humboldt EOS Erfurt; **Ludwig Schäfer,** Humboldt-EOS Erfurt; **Hans-Rainer Schumann,** EOS Naumburg; **Andreas Pomp,** Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt; **Arnulf Möbius,** Spezialklasse der Martin-Luther-Universität Halle

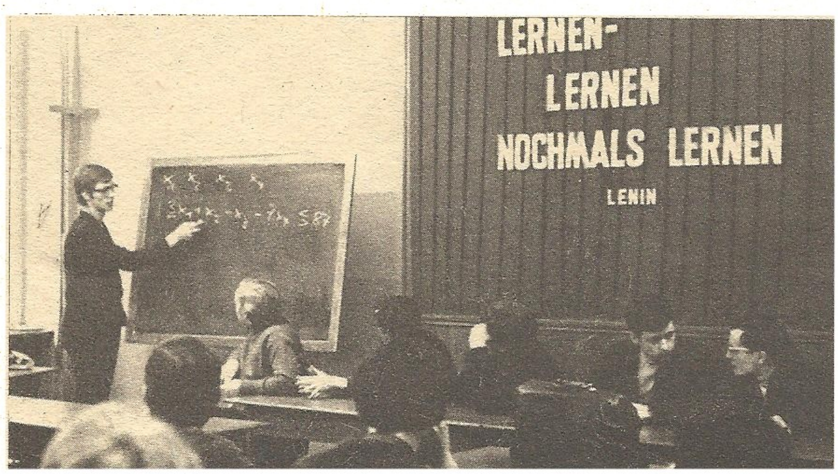
An der X. OJM nahmen 186 Jungen und 25 Mädchen teil.

Was ist aus ihnen geworden?

alpha stellt ehemalige IMO-Teilnehmer vor

Aus Anlaß der *X. Olympiade Junger Mathematiker* veranstaltete die Mathematische Gesellschaft der DDR ein wissenschaftliches Kolloquium mit ehemaligen IMO-Teilnehmern der DDR. Zwanzig junge Mathematiker und Physiker folgten der Einladung. Zwölf von ihnen berichteten in Kurzvorträgen über ihre Arbeit. Einige Themen seien genannt: Operatorenideale – Extremwertprobleme in der Theorie der konformen Abbildungen – Anwendung der Gruppentheorie in der Elementarteilchenphysik – Über vertauschbare Funktionen – Über eine spezielle Ungleichung. Alle IMO-Teilnehmer weilten einen Tag bei den 220 Teilnehmern der X. OJM in der Jugendhochschule „Wilhelm Pieck", Berlin-Bogensee. Aufgeteilt in kleine Gruppen, berichteten sie den OJM-Teilnehmern über ihre Erfolge an Internationalen Mathematikolympiaden, über ihre gesellschaftliche und wissenschaftliche Entwicklung. Sie machten ihre Zuhörer sozusagen aus erster Hand mit den Studienbedingungen und dem Studienverlauf an Hochschulen vertraut. Sie zeigten insbesondere die rasche Entwicklung der Mathematik in der DDR zwischen dem VII. und VIII. Parteitag.

1. Diplom-Physiker *Thomas Görnitz*, Assistent, Karl-Marx-Universität Leipzig (III. IMO)
2. Dr. *Uwe Küchler*, Assistent, Friedrich-Schiller-Universität Jena (V. IMO)



3. Dr. *Hans-Ulrich Schwarz*, Assistent an der Friedrich-Schiller-Universität Jena (V. IMO)

4. Diplom-Mathematiker *Bernd Noack*, Assistent, Institut für Gesellschaftswissenschaften beim ZK der SED (V. IMO)

5. Diplom-Physiker *Rolf-Günther Riedel*, Problemanalytiker, Kombinat Robotron (V. IMO)

6. Diplom-Mathematikerin *Monika Noack*, Forschungsstudentin, Humboldt-Universität zu Berlin (VI. u. VII. IMO)

7. *Manfred Brandt*, stud. math. Forschungsstudent, Humboldt-Universität zu Berlin (VI., VII. IMO)

8. Diplom-Mathematiker *Manfred Krüppel*, Assistent, Universität Rostock (VI. IMO)

9. *Wilhelm Otto*, stud. math., Forschungsstudent, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin (VII. IMO)

10. *Walter Liepe*, stud. math., Humboldt-Universität zu Berlin (VII/VIII. IMO)

11. *Peter Enskonatus*, stud. math., Forschungsstudent, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin (VII./VIII. IMO)

12. Dr. *Marko Roczen*, Assistent, Humboldt-Universität zu Berlin (VII. IMO)

13. *Gert Siebert*, stud. math., Forschungsstudent, Humboldt-Universität zu Berlin (VIII./IX. IMO)

14. *Christoph Bandt*, stud. math., Universität Greifswald (IX./X. IMO)

15. *Joachim Fritz*, stud. math., Humboldt-Universität zu Berlin (IX./X. IMO)

16 *Ulrich Zähle*, stud. math., Lomonossow-Universität, Moskau (IX./X. IMO)

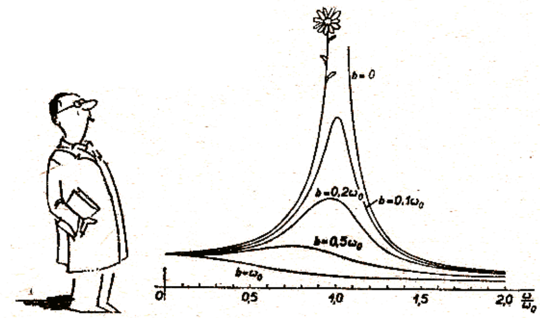
17. *Hans-Görg Roos*, stud. math., Technische Hochschule Otto von Guericke, Magdeburg (X. IMO)

18. *Jürgen Gärtner*, stud. math., Technische Universität Dresden (X./XI. IMO)

19. *Hans-Dietrich Gronau*, stud. math., Universität Rostock (XI. IMO)

20. *Klaus Neumann*, stud. math., Technische Universität Dresden (XI. IMO)

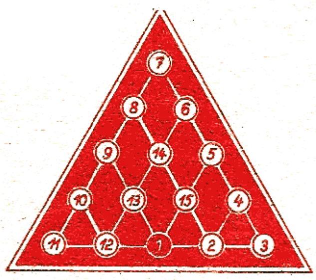
In freien Stunden alpha heiter



Wladimir Renčin, Praha

Vierzehn Figuren

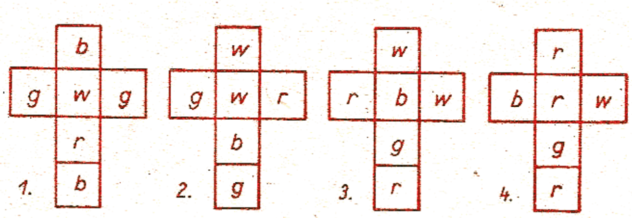
Aus Pappe oder Sperrholz wird ein Dreieck ausgesägt, das man so einteilt, wie es auf der Zeichnung angegeben ist. Für das Spiel benötigt man 14 Figuren.



Die Figuren werden auf allen hellen Kreisen des Dreiecks aufgestellt, der Kreis mit der Nummer 1 bleibt frei. Die Figuren können nur gesetzt werden, wenn man mit ihnen eine andere Figur überspringen kann. Jede übersprungene Figur wird vom Spielfeld genommen. Die letzte Figur muß mit ihrem Sprung auf dem Kreis mit der Nummer 1 enden. Diese Aufgabe ist mit einer Mindestzahl von Zügen zu erfüllen.
Hier ist eine Lösung mit einer Mindestzahl von 13 Zügen: 5 auf 1, 7 auf 5, 8 auf 15, 4 auf 6, 1 auf 5, 6 auf 4, 3 auf 5, 12 auf 14, 10 auf 8, 8 auf 15, 5 auf 1, 2 auf 12 und 11 auf 1.

Ein neues Knobelspiel

Es sind vier Knobelwürfel nach folgendem Muster herzustellen (die Kleinbuchstaben im Netz der Würfel bedeuten die Farben Blau (*b*), Grün (*g*), Rot (*r*), Weiß (w)):
Diese vier Würfel sind zu einem quadratischen Prisma so zusammenzusetzen, daß die Farben Weiß, Rot, Blau und Grün auf allen vier Rechteckflächen der Prismen in beliebiger Reihenfolge zu sehen sind.



Schüler W. König, Berlingerode, übersandte uns die Unterlagen zu diesem kanadischen Spiel

Denksport

Was denkt ein *Junger Mathematiker*, wenn er vor einem Klassenraum steht, sich überzeugt, daß genau fünf Mitschüler darin sind, und er dann acht Schüler herauskommen sieht?
Lösung: Er denkt: „Wenn jetzt noch drei Schüler hineingehen, dann ist der Klassenraum leer“.

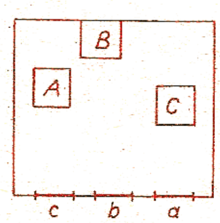
Auf der DDR-Olympiade von Dr. L. Stammler, Halle, zum besten gegeben

Name mit sechs Buchstaben

Der Name einer Stadt hat 6 Buchstaben. Setzt man für den Buchstaben die Zahl, die seine Stellung im Alphabet angibt, so gilt folgendes:
a) Subtrahiert man die erste Zahl von der Summe der übrigen, erhält man 56
b) Subtrahiert man die zweite Zahl von der Summe der übrigen, erhält man 50
c) das gleiche Verfahren auf die dritte Zahl angewandt, liefert 24
d) bei der vierten Zahl ergibt sich 36
e) bei der fünften Zahl 42
f) bei der sechsten Zahl 32
Wie heißt die Stadt?

OL H. Pätzold

Straßenbauer gesucht



Auf einem umfriedeten Grundstück liegen drei Häuser *A*, *B*, *C* und an einer Seite liegen drei Tore *a*, *b*, *c*. Wie muß man drei Wege anlegen, daß *A* mit *a*, B mit *b* und *C* mit *c* verbunden wird, und daß sich dabei kein Weg kreuzt? Die Wege müssen innerhalb des Grundstückes verlaufen!

Silbenrätsel

Der Anfangsbuchstabe eines jeden Wortes ergeben ein Teilgebiet der Mathematik, welches bereits in der polytechnischen Oberschule gelehrt wird.

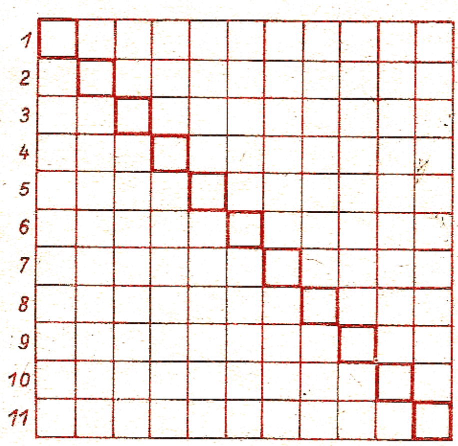
a – ba – bel – bo – de – der – di – dif – drei – e – e – eck – ei – el – ein – ep – ex – fe – fer – ge – gen – gik – go – heits – i – ko – kreis – kus – la – läu – le – le – le – lip – lo – lon – ment – mo – nal – nent – ner – nom – null – or – po – ra – ra – ren – renz – ro – sa – se – ska – si – stel – ta – tan – te – tho – tron – zie.

1. Ebene Figur
2. Rechengerät im Altertum
3. Rechenoperation
4. Einteilung
5. Zusammenstellung von Werten
6. Hochzahl
7. Grundlagenwissenschaft
8. Teil eines Rechenstabes
9. Ebene Figur mit zwei Brennpunkten
10. Schnittpunkt einer Funktion mit der x-Achse
11. Unterschied zweier Zahlen
12. Kreis mit dem Radius $r=1$
13. Geometrischer Grundbegriff
14. Griechischer Buchstabe
15. Bezeichnung für senkrecht
16. Eingliedriger Term
17. Begriff aus der Mengenlehre
18. Gerade, die einen Kreis berührt
19. Name eines Rechenautomaten
20. Regelmäßiger Polyeder
21. Stelle im Dezimalsystem

Mathematikfachlehrer Karl-Heinz Gentzsch
Peter-Göring-OS Lucka (Kreis Altenburg)

Aus den Buchstaben

a-a-a-a-a-a-a-b-b-b-c-c-c-c-d-d-d-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-f-g-g-g-h-h-h-h-h-h-i-i-i-i-i-i-i-i-k-k-k-l-l-l-l-l-l-l-l-m-m-m-n-n-n-n-n-n-n-n-n-n-n-n-n-n-n-o-o-o-o-p-p-p-r-r-r-r-r-r-r-s-s-s-s-s-ß-t-t-t-t-t-t-u-u-u-u-u-u-u-r-w-w



sind waagerecht 11 Wörter einzutragen (ß ein Buchstabe, ä=ae). Die markierte Diagonale ergibt einen Abschnitt in der *alpha*-Zeitschrift.

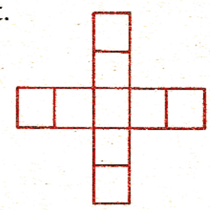
1. Winkel am Dreieck
2. Rechenvorschrift
3. Begriff aus der Bruchrechnung
4. Aufgabentyp
5. anderer Name für Quotient
6. mathematische Ausdrücke mit Gleichheitszeichen
7. Begriff vom Kreis
8. Begriff vom Trapez
9. Zahlenpaar in der graphischen Darstellung
10. zwei Winkel, die einen Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben
11. k.g.V. von Nennern gegebener Brüche

Mathematikfachlehrer H. Winkler
OS Hartmannsdorf (Bez. Karl-Marx-Stadt)

Summenkreuz

Die Zahlen 1 bis 9 sind in das Kreuz so einzutragen, daß senkrecht wie waagerecht die gleiche Summe entsteht.

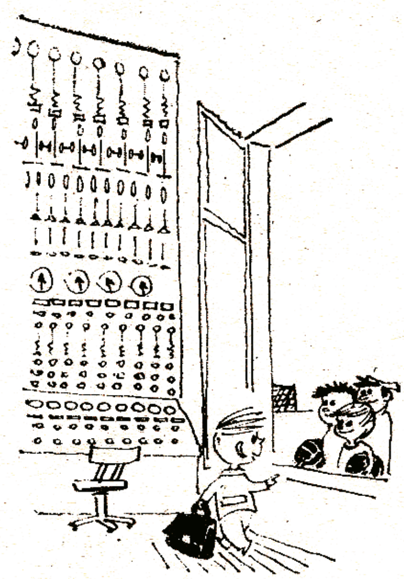
Schülerin Kerstin Diestler, Rudolstadt



Krypharithmetik

René Brunsch, Kl. 5, Wüstenbrand
(Bez. Karl-Marx-Stadt)

```
52 · **
-------
    **
    **
-------
   *7*
```



Ich programmiere nur schnell die Hausaufgabe, dann komme ich spielen. *aus: Ogonjok (S. Tscherepanow)*

Spielwürfel und Mathematik

▲1▲ Welche Augenzahl wird durch genau einen Wurf mit genau zwei Spielwürfeln (3 Würfeln, 4 Würfeln, n Würfeln) mindestens und welche höchstens erzielt?

▲2▲ Udo hat mit genau einem Wurf die Augenzahl 7 (13) erreicht. Wieviel Spielwürfel hat er bei diesem Wurf mindestens und wieviel höchstens benutzt? Welche Augenzahlen zeigen dabei die einzelnen Würfel?

▲3▲ Petra hat in genau einem Wurf mit nur einem Würfel mehr Augen erzielt als Klaus in genau einem Wurf mit vier Würfeln. Gib alle Möglichkeiten an!

▲4▲ Bärbel erreichte in genau einem Wurf mit genau drei Würfeln weniger Augen als Sabine in genau einem Wurf mit genau zwei Würfeln. Wieviel verschiedene Möglichkeiten an Gesamtaugenzahlen beider Spielpartner gibt es?

▲5▲ Axel benutzt beim Würfeln bei jedem Wurf stets genau fünf Spielwürfel. Berechne die Gesamtaugenzahlen aller möglichen Würfe, wenn dabei niemals keine zwei (oder mehr) Würfel die gleiche Augenzahl zeigen!

▲6▲ Hans erzielt in genau einem Wurf mit genau drei Würfeln die Gesamtaugenzahl 6 (11). Wieviel Möglichkeiten gibt es?

Würfelspiele

Drei Spielwürfel sollen zu einem quadratischen Prisma übereinander gestapelt sein (Bild 1). Wenn ihr nur die obere Fläche der Säule und nur zwei seitliche Flächen seht, könnt ihr sofort die Summe der Augen auf den Flächen, mit denen die Würfel aufeinander liegen, und die Augen auf der Unterfläche der Säule ermitteln. So ist zum Beispiel in der Anordnung der Würfel, die in Bild 2 dargestellt ist, die gesuchte Summe 17. Überlegt, nach welchen Regeln man sich richten muß, um die Summe der verdeckten Augen zu erraten.

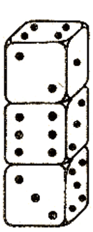


Bild 1

In welcher Reihenfolge lagen die Würfel?

Gebt euren Freunden drei Würfel, ein Stück Papier und einen Bleistift und sagt ihnen, sie sollen die Würfel beliebig nebeneinanderlegen und die dreistellige Zahl bilden, deren Ziffern den Augen auf den oberen Seiten der Würfel entsprechen. Das ist zum Beispiel bei den in Bild 3 dargestellten Würfeln die Zahl 254. An diese Zahl sollen sie die drei Ziffern anhängen, die den Augen auf den Unterseiten der Würfel entsprechen. Damit erhält man eine sechsstellige Zahl, in unserem Beispiel 254 523. Dann sollen sie diese Zahl durch 111 teilen und euch das Ergebnis sagen.


Bild 2

Ohne eine Multiplikation durchzuführen, könnt ihr sehr schnell die drei ersten Ziffern der sechsstelligen Zahl angeben und damit also sagen, in welcher Reihenfolge die Würfel lagen.

Wie wird das gemacht? Man zieht von der angesagten Zahl 7 ab und teilt die Differenz durch 9. Die Ziffern des Quotienten geben die Lage der Würfel an.

Wenn wir unser Beispiel fortsetzen, erhalten wir also:

$254\,523:111=2\,293$; $2293-7=2\,286$;
$2\,286:9=254$.

Was ist die mathematische Grundlage dieses Kunststücks?

Setzen

Beliebig viele Mitspieler. Ein Würfel. Jeder Spieler schreibt auf ein Blatt Papier:

1 × =
2 × =
3 × =
4 × =
5 × =
6 × =
7 × =
8 × =
9 × =
10 × 6 = 60

Dann würfelt er zehnmal hintereinander. Nach jedem Wurf muß er die entsprechende Augenzahl in eine der noch unvollständigen Gleichungen einsetzen. Welche er wählt, steht ihm frei (z. B. $10\cdot 6=60$, wenn er eine Sechs gewürfelt hat). Sieger ist, wer die 10 Ergebnisse addiert und die höchste Endsumme aufweisen kann.

Aufgaben der Schulolympiade (Stadt Bukarest)

Klassenstufe 6

(Siehe Beitrag Seite 105 in diesem Heft)

---

1. Gegeben sei ein Dreieck ABC, in dem $\overline{AB}<\overline{AC}$ ist. Von einem inneren Punkt M der Seite $\overline{AB}$ ist das Lot auf die Gerade BC zu fällen; sein Fußpunkt sei D. Auf der Seite $\overline{BC}$ ist ein innerer Punkt N so festzulegen, daß $\overline{BD}=\overline{DN}$ gilt. Danach ist die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{CN}$ zu konstruieren; ihr Schnittpunkt mit der Geraden AC sei P. Der Punkt N ist mit den Punkten M und P zu verbinden.

a) Es ist die Größe des Winkels $\sphericalangle MNP$ zu bestimmen für den Fall, daß die Winkel $\sphericalangle CAB=64°$ und $\sphericalangle CBA=72°$ betragen.

b) Es sei ferner $\overline{AB}+\overline{AC}=11$ cm. Welchen Umfang besitzt das Viereck $AMNP$?

c) Ändert sich der Umfang des Vierecks $AMNP$, wenn sich der Punkt M auf $\overline{AB}$ bewegt? Die Antwort ist zu begründen!

d) Es falle der Punkt M mit dem Eckpunkt A des Dreiecks ABC zusammen. Es ist der Umfang des Dreiecks ANP zu berechnen!

A. Hollinger, Bukarest

2. Drei Radfahrer starten zum gleichen Zeitpunkt im Ort A und fahren auf demselben Wege mit unterschiedlichen, aber jeweils konstanten Geschwindigkeiten bis zum Ort B. Ihre Fahrzeiten verhalten sich wie 3:4:5. Der erste Radfahrer trifft in B um 14 Uhr, der zweite um 14.20 Uhr ein. Die Geschwindigkeit des zweiten Radfahrers betrug dabei $30\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Um wieviel Uhr trifft der dritte Radfahrer im Ort B ein?

b) Wieviel Minuten benötigt jeder der drei Radfahrer, um die Entfernung $\overline{AB}$ zurückzulegen?

c) Wie groß ist die zurückgelegte Entfernung?

d) Mit welchen Geschwindigkeiten fuhren der erste bzw. der dritte Radfahrer?

H. Bercovici, Bukarest

3. Es sind alle rationalen Zahlen x zu bestimmen, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{2\cdot(2{,}4-\sqrt{4{,}1616})}{x}=\frac{(2\cdot\sqrt{2})^2+2^2}{5:\sqrt{1:\left(1+\frac{7}{9}\right)}}.$$

I. C. Ligor, Bukarest

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Aufgaben der DDR-Olympiade Fortsetzung

1. Aufgabe (Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission)

(1) Da genau neun Ziffern verwendet werden müssen, kann höchstens eine der Primzahlen einstellig sein. Andererseits muß, da neun ungerade ist, mindestens eine der Primzahlen einstellig sein. Dafür kommen genau die Zahlen 2, 3, 5 und 7 in Frage.

(2) Die vier anderen Zahlen sind wegen (1) sämtlich zweistellig und können nur auf die Ziffern 1, 3, 7 und 9 enden, da sie sonst durch 2 oder 5 teilbar wären.

(3) Die einstellige Primzahl kann weder 3 noch 7 sein, da sonst für die restlichen vier zweistelligen Zahlen nur genau drei verschiedene Endziffern vorhanden wären, also (2) nicht erfüllt werden kann.

Es werden nun genau die folgenden beiden Fälle unterschieden:

(4a) Die einstellige Primzahl sei 2. Für die Zehnerstellen der vier zweistelligen Primzahlen bleiben dann genau die Ziffern 4, 5, 6 und 8.

Sämtliche zweistelligen Primzahlen, die sich unter diesen Bedingungen bilden lassen, sind:

41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 83 und 89. Von ihnen kann die Zahl 43 nicht zu einer der gesuchten Mengen gehören, da diejenigen der genannten Primzahlen, in denen weder die Ziffer 4 noch die Ziffer 3 vorkommt, genau die Primzahlen 59, 61, 67 und 89 sind. Je drei von diesen enthalten aber eine der Ziffern 6, 9 zweifach, so daß man aus ihnen keine drei weiteren, den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden Primzahlen auswählen kann. Wählt man aus den verbleibenden acht Primzahlen als Zahl, in der die Ziffer 5 vorkommt, die Zahl 53, dann entfallen 59 und 83, und aus den verbleibenden fünf Zahlen lassen sich, da dann 89 stets verwendet werden muß, zusammen mit den bereits gewählten Zahlen genau die folgenden beiden Mengen bilden:

(I) $\{2, 53, 41, 67, 89\}$ und
(II) $\{2, 53, 47, 61, 89\}$.

Analog findet man bei der Wahl von 59 (und damit 83) die beiden Mengen

(III) $\{2, 59, 41, 67, 83\}$ und
(IV) $\{2, 59, 47, 61, 83\}$.

Damit sind alle Möglichkeiten für Mengen der genannten Art, die die Zahl 2 enthalten, erschöpft.

(4b) Die einstellige Primzahl sei 5.

Dann bleiben für die Zehnerstellen der vier zweistelligen Primzahlen genau die Ziffern 2, 4, 6 und 8.

Sämtliche zweistelligen Primzahlen, die sich unter diesen Bedingungen bilden lassen, sind 23, 29, 41, 43, 61, 67, 83 und 89. Wie in (4a) zeigt man, daß 43 zu keiner der Mengen gehören kann. Ähnliche Überlegungen wie in (4a) ergeben genau Mengen, die den Bedingungen entsprechen, nämlich:

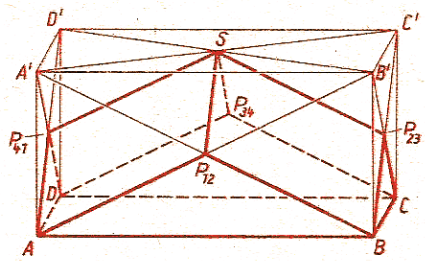
(V) $\{5, 23, 41, 67, 89\}$
(VI) $\{5, 23, 47, 61, 89\}$
(VII) $\{5, 29, 41, 67, 83\}$
(VIII) $\{5, 29, 47, 61, 83\}$.

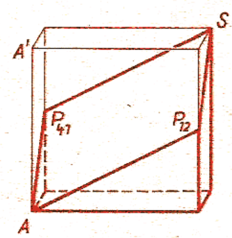
Es gibt mithin genau die Mengen I bis VIII der gesuchten Art.

2. Aufgabe: Man bezeichnet die vier schneidenden Ebenen mit E_1, E_2, E_3, E_4 entsprechend der in der Aufgabenstellung festgelegten Reihenfolge. E_1 und E_2 schneiden die Deckfläche des Quaderkörpers nach den Diagonalen $(B'D')$ bzw. $(A'C')$. Der Schnittpunkt S dieser Diagonalen ist den Ebenen E_1 und E_2 gemeinsam. E_1 und E_2 schneiden die Seitenfläche $(ABB'A')$ des Quaderkörpers nach den Diagonalen (AB') bzw. $(A'B)$. Der Schnittpunkt P_{12} dieser Diagonalen ist den Ebenen E_1 und E_2 gemeinsam. Folglich ist die Verbindungsgerade (SP_{12}) die Schnittgerade der Ebene E_1 und E_2. Wegen der Konvexität des Quaders hat die Schnittgerade mit dem Quaderkörper genau die Strecke SP_{12} gemeinsam. Aus den gleichen Überlegungen ist die Verbindungsgerade (AP_{12}) Schnittgerade von E_1 mit der von den Punkten $ABB'A'$ aufgespannten Ebene. Entsprechend liegt (BP_{12}) in der Schnittgeraden von E_2 mit $(ABB'A')$. Die Punkte A, B und P_{12} liegen gemeinsam mit dem Restkörper unterhalb der Ebenen E_3 und E_4. Daraus folgt, daß die Strecken AP_{12}, BP_{12}, SP_{12} Kanten des Restkörpers darstellen. Die Kante AB bleibt bei diesen vier Schnitten ungeändert bestehen.

Durch zyklische Fortsetzung dieser Überlegungen findet man, daß die Punkte A, B, C, D als Eckpunkte am Restkörper erhalten bleiben, während die Ecken A', B', C', D' entfallen. Genau die Mittelpunkte P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} und S der Seitenfläche bzw. Deckfläche treten als neue Eckpunkte dazu. Es verbleibt ein konvexer Restkörper mit 9 Ecken, 16 Kanten und 9 Flächen. Die Probe mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes $e+f-k=2$ ist erfüllt.

Das Volumen V_R des Restkörpers kann in folgender Weise zu dem Volumen V_Q des Quaders in Beziehung gesetzt werden: Man lege durch den Punkt S zwei seitenparallele ebene Schnitte, die den Quaderkörper in vier kongruente Quaderkörper zerlegen. Durch Anbringen der vier ebenen Schnitte wird z. B. der Teilquader mit der Kante AA' von der Ebene E_1 in zwei volumengleiche Teilkörper zerlegt, wobei genau der untere Teil dem Restkörper zufällt. Wendet man diese Überlegung auf alle vier Teilquader an, ergibt sich die Aussage $V_R : V_Q = 1 : 2$.





Bemerkungen: Diese mit 7 Punkten ausgeschriebene Aufgabe lag 109 Teilnehmern zur Lösung vor. Es ergab sich der folgende Punktspiegel für diese Aufgabe: 0 : 12; 1 : 7; 2 : 2; 3 : 4; 4 : 6; 5 : 13; 6 : 20; 7 : 45. Die Aufgabe wurde etwa von 40 % der Teilnehmer vollständig gelöst, während auch ein Teil fast nichts mit der Aufgabe anzufangen wußte. Zur Volumenbestimmung des Restkörpers wurden sehr unterschiedliche Methoden angewandt, auf die hier im einzelnen nicht eingegangen werden kann. Ein zyklisches Vorgehen nach der hier demonstrierten Art, was eine wiederholte Anwendung gleicher Schlußweisen erlaubt, wurde von keinem Teilnehmer angewandt. Auch eine Probe mit dem *Eulerschen Polyedersatz* war in keiner Arbeit zu finden.

Dozent Dr. E. Schröder, Technische Universität Dresden

3. Aufgabe (3.1 und 3.2: siehe Heft 4/71, Seite VIII)

4. Aufgabe (nach dem Vorschlag der Aufgabenkommission):

Angenommen, es gibt eine quadratische Funktion

$f(x)=ax^2+bx+c$, a, b, c reell, $a \neq 0$

mit der geforderten Eigenschaft.

Dann gilt für jedes reelle x:
$a(x+1)^2+b(x+1)+c=a(-x)^2+b(-x)+c$,
also
$ax^2+2ax+a+bx+b+c=ax^2-bx+c$.
Daraus folgt

$$(a+b)(2x+1)=0.$$

Da diese Gleichung insbesondere für $x=0$ erfüllt sein muß, folgt
$a=-b$.
Mithin können höchstens die quadratischen Funktionen der Form
$f(x)=ax^2-ax+c$ ($a\neq 0$, a, c beliebig reell) die geforderte Eigenschaft haben.
Tatsächlich gilt für jede von diesen:
$f(x+1)=a(x+1)^2-a(x+1)+c=ax^2+ax+c$
$f(-x)=a(-x)^2-a(-x)+c=ax^2+ax+c$,
also $f(x+1)=f(-x)$.
Bemerkungen: Es zeigte sich, daß diese relativ leichte Aufgabe viele Schüler dazu verleitete, nicht mit der notwendigen Sorgfalt zu arbeiten. So fehlten z. B. häufig die Probe bzw. der Hinweis, daß a und c beliebig reelle Werte (außer $a\neq 0$) annehmen können.

J. Bartsch, Universität Rostock

5. Aufgabe (Vorschlag der Aufgabenkommission):
a) Angenommen, die reelle Zahl $x\neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung, d. h. es sei

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Wegen $r<-6$ gilt $0<-\frac{3}{r}<\frac{1}{2}$. Daher gilt

$$\frac{x}{2}>\frac{1}{2}+\frac{3}{r}>0,$$ also $x>0$ und damit

$$2>x\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{r}\right)$$ bzw.

$$4>x\left(\frac{6+r}{r}\right)$$ bzw. wegen

$$\left(\frac{6+r}{r}\right)>0.$$

$$0<x<\frac{4r}{6+r}.$$

Also können höchstens solche x, für die

$$0<x<\frac{4r}{6+r}$$ gilt,

Lösungen der gegebenen Ungleichung sein.
Tatsächlich gilt für alle diese Werte

$$\frac{2}{x}>\frac{2}{\frac{4r}{6+r}}=\frac{3}{r}+\frac{1}{2},$$ also $\frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}$.

b) In diesem Falle geht die gegebene Ungleichung in

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$$ über.

Diese Ungleichung ist für alle $x>0$ und nur für diese erfüllt, da genau für sie

$$\frac{2}{x}>0$$ gilt.

c) In diesem Falle gilt $-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}$. (2)
Angenommen, die reelle Zahl $x\neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung. Dann gilt

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}.$$ Wegen (2) ist diese Ungleichung für alle $x>0$ erfüllt.

Es sei nun $x<0$. Dann gilt $rx>0$, und man erhält durch Multiplikation von (1) mit rx:

$$2r-3x>\frac{rx}{2}$$ und weiter

$4r-6x>rx$, woraus man wegen $(r+6)>0$

$$x<\frac{4r}{6+r}$$ erhält.

Also können im Falle c) höchstens solche x, für die $x>0$ oder $x<\frac{4r}{6+r}$ gilt, die gegebene Ungleichung erfüllen.
Tatsächlich ist für $x>0$ wegen (2)

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}$$ und für

$$x<\frac{4r}{6+r}$$

$$\frac{2}{x}>\frac{2}{\frac{4r}{6+r}}=\frac{3}{r}+\frac{1}{2},$$ also

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}.$$

d) In diesem Falle gilt $-\frac{3}{r}<0$.
Angenommen, die reelle Zahl $x\neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung. Dann gilt

$$\frac{2}{x}>\frac{1}{2}+\frac{3}{r}>0$$ und daher $x>0$.

Daraus folgt

$$0<x<\frac{4r}{6+r}.$$ Also können höchstens

solche x, für die $0<x<\frac{4r}{6+r}$ gilt,

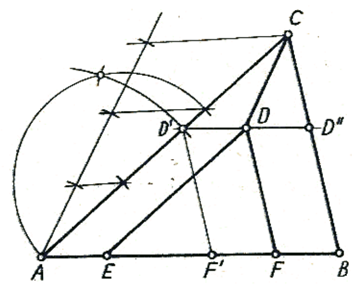
Lösungen der gegebenen Ungleichung sein.
Tatsächlich ist in diesem Falle

$$\frac{2}{x}>\frac{2}{\frac{4r}{6+r}}=\frac{3}{r}+\frac{r}{2},$$ also $\frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}$.

6. Aufgabe:
Bemerkungen: Die Aufgabe wurde von einem großen Teil der Schüler richtig gelöst, wobei jedoch nicht in allen Fällen die Notwendigkeit des Hinweises erkannt worden war, daß alle nach der Konstruktion gewonnenen Punkte den Bedingungen der Aufgabe genügen. Neben den Lösungen, die dem Vorschlag der Aufgabenkommission, der die üblichen Schritte bei der Bearbeitung einer derartigen Aufgabe unter Benutzung der Dreieckshöhen und Anwendung des Strahlensatzes ausführlich darlegt, entsprechen, entwickelten u. a. *Gerald Teuschbein* (Bez. Gera) und *Cornelia Kästner* (Bez. Cottbus) Gedanken, die bei der folgenden Lösung berücksichtigt wurden.
Unter der Annahme, daß in einem Dreieck ABC ein den Bedingungen der Aufgabe genügendes Dreieck EFD existiert, kann man folgende Aussagen machen:
(1) Dreieck EFD ist wegen der geforderten Parallelität der entsprechenden Seiten ähnlich dem Dreieck ABC.
(2) Der Flächeninhalt des Dreiecks EFD ist der dritte Teil des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC.
(3) Durch Parallelverschiebung des Dreiecks EFD um die Länge der Strecke AE in Richtung der Strecke BA entsteht das diesem kongruente Dreieck $AF'D'$.
(4) Nach dem Satz über die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke gilt:

$$\overline{AD'}:\overline{AC}=1:\sqrt{3}=\frac{1}{3}\sqrt{3}:1.$$

(5) Der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ ist doppelt so groß wie der des Trapezes $FBCD$. Wegen der Längengleichheit von $F'D'$ und FD folgt aus der Flächenformel für ein Trapez nach dem Strahlensatz
$2\overline{FB}=\overline{F'B'}$, also $\overline{FB}=\overline{F'F}$.



Konstruktion: Man teilt $\overline{AC}$ im Verhältnis $\frac{1}{3}\sqrt{3}:1$ durch Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks über der Hypotenuse $\frac{2}{3}\overline{AC}$ mit der einen Kathete $\frac{1}{3}\overline{AC}$. Die zweite Kathete ist dann gerade $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,\overline{AC}$.
Durch den Teilpunkt D' wird je eine Parallele zu AB bzw. BC gezeichnet. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit BC bzw. AB seien D'' und F'. Der Mittelpunkt von $D'D''$ ist D, der von $F'B$ ist F. Der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch D mit AB ist E. Diese Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar, wenn A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.
Die nach der Konstruktion gewonnenen Punkte E, F und D genügen stets den Bedingungen der Aufgabe, denn es gelten folgende Überlegungen:
Wegen $\overline{AD'}=\frac{1}{3}\sqrt{3}\,\overline{AC}$ und $F'D'$ parallel BC ist der Flächeninhalt des Dreiecks $AF'D'$ gleich dem dritten Teil des Flächeninhalts des Dreiecks ABC. Wegen der Kongruenz der Dreiecke $AF'D'$ und EFD trifft das auch für den Flächeninhalt des Dreiecks EFD zu. Damit ist der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ doppelt so groß wie der des Dreiecks EFD. Da D die Strecke $D'D''$ und F die Strecke $F'B$ halbiert und $F'D'$ gleich FD ist, ist der Flächeninhalt des Trapezes $FBCD$ halb so groß wie der des Trapezes $F'BCD'$, also gleich dem des Dreiecks EFD. Damit muß auch das Trapez $EDCA$ den gleichen Flächeninhalt besitzen, da die Summe der drei Teilflächen die Fläche des Dreiecks ABC ergeben muß.

H.-J. Vogel, Päd. Hochschule Potsdam

Lösungen

Lösungen zu „Aufgepaßt – nachgedacht – mitgemacht“ (Heft 5/71)

▲1▲

Anzahl der Würfel	kleinste Augenzahl	größte Augenzahl
2	$2 \cdot 1 = 2$	$2 \cdot 6 = 12$
3	$3 \cdot 1 = 3$	$3 \cdot 6 = 18$
4	$4 \cdot 1 = 4$	$4 \cdot 6 = 24$
n	$n \cdot 1 = n$	$n \cdot 6 = 6n$

▲2▲ Die höchste Augenzahl eines Spielwürfels beträgt 6. Um mit genau einem Wurf die Gesamtaugenzahl 7 zu erreichen, muß man mindestens zwei Würfel verwenden. Dabei sind folgende Augenzahlenpaare möglich: (1;6), (2;5), (3;4). Es sind höchstens sieben Würfel benutzt worden, von denen jeder die Augenzahl 1 zeigte, denn $7 \cdot 1 = 7$.
Um mit genau einem Wurf die Gesamtaugenzahl 13 zu erreichen, muß man mindestens drei Würfel verwenden. Sie könnten folgende Augenzahlentripel zeigen: (1,6,6), (2,5,6), (3,4,6), (3,5,5), (4,4,5). Es können höchstens 13 Würfel benutzt werden, von denen jeder die Augenzahl 1 zeigt, denn $13 \cdot 1 = 13$.

▲3▲ Petra (5); Klaus (1,1,1,1)
Petra (6); Klaus (1,1,1,1)
Petra (6); Klaus (1,1,1,2)

▲4▲ Sabine habe die Gesamtaugenzahl 12 erreicht, dann könnte Bärbel die Gesamtaugenzahl 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 oder 11 gewürfelt haben. Weitere Möglichkeiten wären folgende:
Sabine (11); Bärbel (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 oder 10)
Sabine (10); Bärbel (3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9)
Sabine (9); Bärbel (3, 4, 5, 6, 7 oder 8)
Sabine (8); Bärbel (3, 4, 5, 6 oder 7)
Sabine (7); Bärbel (3, 4, 5 oder 6)
Sabine (6); Bärbel (3, 4 oder 5)
Sabine (4); Bärbel (3)
Es gibt also $1+2+3+4+5+6+7+8+9$, das sind 45 verschiedene Möglichkeiten.

▲5▲

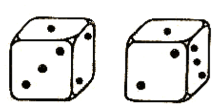
Augenzahlen der fünf Würfel	Gesamtaugenzahl
(1, 2, 3, 4, 5)	15
(1, 2, 3, 4, 6)	16
(1, 2, 3, 5, 6)	17
(1, 2, 4, 5, 6)	18
(1, 3, 4, 5, 6)	19
(2, 3, 4, 5, 6)	20

▲6▲ Um die Gesamtaugenzahl 6 zu erreichen, gibt es folgende drei Möglichkeiten: (1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2). Um die Gesamtaugenzahl 11 zu erreichen, gibt es folgende sechs Möglichkeiten: (1, 4, 6), (1, 5, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (3, 3, 5), (3, 4, 4).

Lösungen der Würfelspiele (Heft 5/71)

a) *Feststellung der verdeckten Summe nach der sichtbaren Zahl der Augen auf der oberen Fläche der Säule.* Die Summe der Augen auf den verdeckten Flächen, mit denen die Würfel aufeinanderliegen, und die Augenzahl auf der unteren Fläche ist minus der Zahl der Augen, die auf der oberen Fläche der Säule sichtbar ist (vgl. Bild S. 114). Wenn also die Augen addiert werden, die sich auf allen horizontalen Flächen der drei Würfel befinden, das heißt die Augen auf drei Paaren einander gegenüberliegenden Flächen, dann beträgt die Summe 21 ($3 \cdot 7 = 21$). Aber die Summe soll nach der Bedingung der Aufgabe nicht die Zahl der Augen a auf der oberen Fläche enthalten. Wenn wir diese Zahl von 21 abziehen, erhalten wir die gesuchte Summe.

b) *Feststellung der verdeckten Summe nach zwei sichtbaren Seitenflächen der Säule.* Bei Beachtung des „Prinzips der Sieben“ sind zwei Reihenfolgen für die Anordnung der Augen auf den Flächen eines Spielwürfels möglich. Die eine Reihenfolge für die Anordnung ist die spiegelbildliche Wiedergabe der anderen. Legt einen Würfel mit der 1 nach oben auf den Tisch. Dann befindet sich die 2 auf einer Fläche und die 3 auf einer benachbarten Fläche rechts oder links davon. Mit anderen Worten folgen beim Blick von oben die drei Augen den zwei Augen entweder im Uhrzeigersinn (Bild a) oder entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn (Bild b). Nachdem die Reihenfolge der Anordnung für 1, 2 und 3 Punkte festliegt, ist die Anordnung der 4, 5 und 6 Punkte auf den übrigen Würfelflächen eindeutig nach dem „Prinzip der Sieben“ bestimmbar. Wenn wir wissen, wie die Punkte auf den Seiten des Würfels zueinander geordnet sind und das „Prinzip der Sieben“ kennen, genügt es, wenn wir zwei beliebige benachbarte Seitenflächen des Würfels sehen, um die Zahl der Augen auf der oberen und dann auch auf der unteren Fläche festzustellen.



a b

Zum Beispiel sehen wir auf dem unteren Würfel S. 114, Bild 1 auf einer Fläche 3 Punkte und auf der rechts benachbarten 5 Punkte. Folglich müssen auf der benachbarten Fläche nach links 2 Punkte sein, oben 1 Punkt und unten 6 Punkte (wenn es ein Würfel vom Typ b ist). Auf dem mittleren Würfel hat eine Seitenfläche 6 Augen, folglich die abgewandte 1 Auge, die rechte hat 3, folglich die obere 2 und die untere 5 Augen. Zum fehlerlosen Erraten der Augen auf den verdeckten Flächen nach der gezeigten Methode ist freilich angespannte Aufmerksamkeit und praktische Übung erforderlich.

Da die Summe der Augen auf zwei einander gegenüberliegenden Flächen eines jeden Spielwürfels immer gleich 7 ist, sind die drei Ziffern, die der zuerst aufgeschriebenen dreistelligen Zahl angehängt werden, Ergänzungen zu 7. Wenn wir die anfangs aufgeschriebene Zahl mit A bezeichnen, dann ist die hinzugesetzte dreistellige Zahl $777-A$ und die ganze sechsstellige Zahl $1\,000\,A+(777-A)$ oder $999\,A+777=111\ (9\,A+7)$. Wie man sieht, ist die Zahl durch 111 teilbar. Man erhält $9\,A+7$. Diese Zahl wird angesagt. Wenn wir von ihr 7 abziehen und die Differenz durch 9 teilen, dann erhalten wir die ursprüngliche Zahl A.

(*aus: Kordemski: köpfchen, köpfchen*)

Lösung zur Aufgabe von NPT Prof. Dr. Hans Reichardt

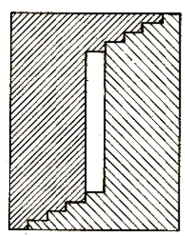
▲ 758 ▲ Der Flächeninhalt der nach dem Herausschneiden verbleibenden Figur beträgt

$$A=(9 \cdot 12-1 \cdot 8)\,\text{m}^2=100\,\text{m}^2$$

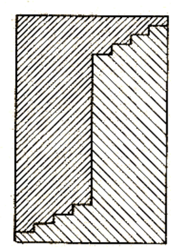
und ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks, das nach dem Zusammensetzen der Teile entstehen soll.
Da nur zwei Schnitte zulässig sind, liegt es nahe, den ersten Schnitt von der unteren Teppichkante bis zu dem herausgeschnittenen Teil und den zweiten Schnitt von dem herausgeschnittenen Teil bis zur oberen Kante so zu führen, daß beim Zusammensetzen der Teile der herausgeschnittene Teil bedeckt wird. Dann hat eine Seite des neu entstehenden Rechtecks die Länge 8 m und wegen

$$A=100\,\text{m}^2=8 \cdot 12{,}5\,\text{m}^2$$

die andere Seite die Länge 12,5 m.



1



2

Aus diesem Grunde liegt es nahe, die beiden Schnitte treppenförmig zu führen, wie das aus dem Bild 1 zu erkennen ist, in der die durch die Schnitte entstandenen Teilfiguren verschieden schraffiert sind. Verschiebt man jetzt die rechte Teilfigur um $\frac{1}{2}$ m nach unten und um 1 m nach links, so erhält man durch das Zusammensetzen beider Teilfiguren ein Rechteck mit den Seitenlängen 8 m und 12,5 m, womit die Aufgabe gelöst ist (vgl. Bild 2).

Druckfehlerteufel

Dipl.-Ing. Dr. M. Skalicky stellt fest: In Heft 2/71, S. 37 muß es in ▲1▲ richtig heißen: $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ und nicht $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

In 2/71, S. 27…29 stellt er eine verblüffende Formel auf: Wenn

v Fluchtgeschwindigkeit von der Erde,

D Durchmesser der Erde,

dann ist $\frac{v^2}{D}=\frac{1\,\text{kp}}{1\,\text{kg}}$.

■ *Karin Müller* und *Wolfgang Riedel* stellten fest, daß es in 2/71, S. 45 Bezirksolympiade Kl. 11/12, Aufgabe 6 richtig heißen muß:

$$-\frac{3}{2^{n+1}}<x<\frac{3}{2^{n+1}}.$$

Schwieriges Problem

Zu dem von uns gebotenen Problem in Heft 6/70, Seite 139, sandte uns Prof. *M. Benjamin* eine Lösung:

„Nachstehend der Versuch einer vollständigen Lösung.

Wir wollen zunächst nur solche Lösungen betrachten, die sich nicht nur durch die Reihenfolge der Ziffern unterscheiden (wesentlich verschiedene Lösungen). Es sei also etwa $A<B<C<D<E$. Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt ferner, daß ein Zehnerübertrag bei der Addition nicht erfolgen kann; ferner kann keine Ziffer gleich Null sein. (Denn wenn etwa $A=0$, so $A+E=E=F$ entgegen der Bedingung, daß $E\neq F$).

Die Lösungen müssen dann folgenden Bedingungen genügen: $A+E=B+D=2C=F$; A, B, C, D, E, F natürliche Zahlen und kleiner als 10 und paarweise verschieden.

Eine Lösung liegt also dann vor, wenn sich eine gerade Zahl auf zwei verschiedene Arten als Summe zweier verschiedener Zahlen darstellen läßt. Das ist nur für $F=6$ und $F=8$ möglich (für $F=4$ gibt es nur eine Darstellung, bei der ein Summand Null ist). Wir erhalten die nachfolgenden Lösungen:

A	B	C	D	E	F
1	2	3	4	5	6
1	2	4	6	7	8
1	3	4	5	7	8
2	3	4	5	6	8

Aus diesen wesentlich unterschiedenen Lösungen ergeben sich durch Umstellung der Ziffern weitere. Dabei ist zu berücksichtigen:

1. Die Ziffer ‚C' kann ihren Platz nicht ändern.
2. Die vier anderen Ziffern der Summanden bilden zwei Paare (A,E) und (B,D), die jeweils symmetrisch zu ‚C' in der Darstellung der Zahl stehen.

Infolgedessen sind zu jeder Ziffernfolge 8 Zahlen möglich, die sich nur durch die Reihenfolge der Ziffern unterscheiden:

A	B	C	D	E	D	A	C	E	B
A	D	C	B	E	D	E	C	A	B
B	A	C	E	D	E	B	C	D	A
B	E	C	A	D	E	D	C	B	A

Insgesamt gibt es somit 32 verschiedene Lösungen des ‚schwierigen Problems'. Werten wir solche Lösungen als gleich, bei denen nur die Reihenfolge der beiden Summanden vertauscht ist, so haben wir 16 verschiedene Lösungen."

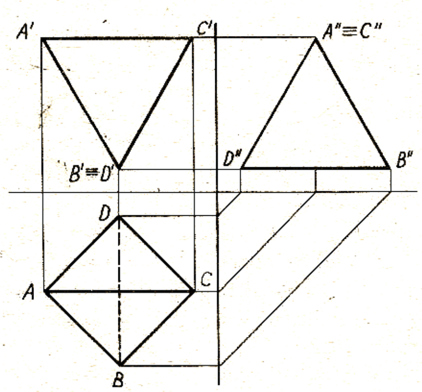
Magisches Quadrat

In Heft 1/71 boten wir auf S. 5 24 magische Quadrate. Es gibt noch weitere, die wir aus Platzgründen nicht veröffentlichen konnten. *Siegrun Kühn* aus Putzkau war pfiffig und sandte uns weitere Vorschläge.

▲ 675 Zu dieser Aufgabe sandte uns *W. Burmeister* die Lösung (Heft 2/71, S. 36): x sei die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft. Wir sehen, daß $x+1$ ohne Rest durch $a_1, a_2, \ldots, a_n$ teilbar ist; $x+1$ ist ein gemeinsames Vielfaches dieser n Zahlen. Nun soll x möglichst klein sein, dann ist $x+1$ das kleinste gemeinsame Vielfache der gegebenen Zahlen; wir bezeichnen es durch eckige Klammern. *Antwort:* Die gesuchte Zahl ist das kleinste gemeinsame Vielfache der gegebenen Zahlen; vermindert um 1:
$x=[a_1, a_2, \ldots, a_n]-1$.

8▲692 Aus (1) folgt $c-b=q^2$ und $c+b=p^2$, und (2) ergibt $c-b=m^2+n^2-2mn=(m-n)^2$, $c+b=m^2+n^2+2mn=(m+n)^2$. Es folgt $q^2=(m-n)^2$ und $p^2=(m+n)^2$, und daraus wegen $p>q>0$ und $m>n>0$: $p=m+n$, $q=m-n$.
Durch Auflösen nach m und n erhält man: $m=\frac{p+q}{2}$, $n=\frac{p-q}{2}$. Aus der Teilerfremdheit von p und q folgt dabei die von m und n, und umgekehrt; denn hätten p und q einen gemeinsamen Teiler >2, so hätten m und n den gleichen gemeinsamen Teiler, hätten m und n einen gemeinsamen Teiler >1, so auch p und q. Sind p und q beide ungerade, so sind sowohl $p+q$ als auch $p-q$ gerade und genau eine der beiden durch 4 teilbar, von m und n also eine gerade und die andere ungerade. Sind von m und n eine gerade und die andere ungerade, so sind sowohl p als auch q ungerade.

W 7 ■ 666 Der Abbildung ist folgendes zu entnehmen: Ein regelmäßiges Tetraeder erzeugt einen quadratischen Grundriß, wenn zwei nicht in einer Ecke zusammenstoßende Kanten parallel zur Grundrißebene liegen. Zur Erhöhung der Anschaulichkeit wurde die senkrechte Parallelprojektion im Dreitafelverfahren gewählt.



8▲667 Wir formen zunächst den Term auf der linken Seite der Ungleichung um und erhalten

$$\frac{b}{b-a}+\frac{a+b}{a}-\frac{a}{b-a}+\frac{a}{b}$$
$$=\frac{b-a}{b-a}+\frac{a}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=2+\frac{a^2+b^2}{ab}. \qquad (1)$$

Nun gilt für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a\neq b$

$$\frac{(a-b)^2}{ab}>0, \text{ also}$$
$$\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}-2>0,$$
mithin
$$\frac{a^2+b^2}{ab}>2. \text{ Daraus folgt} \qquad (2)$$
$$2+\frac{a^2+b^2}{ab}>4, \text{ also wegen (1)}$$
$$\frac{b}{b-a}+\frac{a+b}{a}-\frac{a}{b-a}+\frac{a}{b}>4, \text{ w.z.b.w.}$$

W 8 ■ 668 Wegen (6) hat Peter mindestens das Zeichendreieck und das Lineal. Da Peter das Lineal besitzt, hat wegen (4) Rita mindestens den Radiergummi. Laut (2) hat Rainer mindestens den Zirkel. Nach (1) muß Rainer mindestens noch den Bleistift besitzen. Noch nicht erkannt ist, wer Rechenstab und Kurvenschablone hat. Da jeder Schüler mindestens einen der angegebenen Gegenstände haben muß, sind Rechenstab und Kurvenschablone in den Händen von Lutz und Martina. Da wegen (2) Lutz den Rechenstab nicht hat, hat diesen Martina. Lutz hat also die Kurvenschablone.
Bei der gefundenen Verteilung sind auch die Aussagen (5) und (3) wahr. Diese wurden jedoch zur Ermittlung der Verteilung nicht herangezogen. Wenn also die Aussagen (1) bis (5) wahr sind, so besitzt Lutz die Kurvenschablone, Martina den Rechenstab, Peter das Zeichendreieck und das Lineal, Rainer den Zirkel und den Bleistift, Rita den Radiergummi.

W 8 ■ 669 Angenommen, das geordnete Paar (x,y) ganzer Zahlen entspricht den Bedingungen der Aufgabe. Dann gilt

$$x<3; \qquad (1)$$
$$x+y>2; \qquad (2)$$
$$x-y>0, \text{ also } y<x. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt
$2<x+y<x+x=2x$, also $2x>2$, d.h., $x>1$. (4)
Wegen (1) und (4) gilt also
$1<x<3$ und, da x eine ganze Zahl ist, $x=2$. (5)
Aus (2) folgt daher
$2+y>2$, also $y>0$.
Andererseits gilt wegen (3) und (5)
$y<2$, also ist $y=1$. (6)
Wir erhalten also genau ein geordnetes Paar (2,1) ganzer Zahlen und überzeugen uns davon, daß für $x=2$, $y=1$ die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind.
Bemerkung: Wir können diese Aufgabe auch durch die folgende Überlegung lösen:

Es kann nicht $x \leqq 1$ gelten; denn dann wäre wegen (3) $y \leqq 0$, also $x+y \leqq 1$, was der Bedingung (2) widerspricht. Daher gilt $x>1$ und außerdem wegen (1) $x<3$, also $x=2$. Ferner folgt wieder wie oben aus (2) $y>0$, also wegen (3) $y=1$.

9▲670 Angenommen, x sei eine Lösung der Gleichung

$$\log_4(\log_3(\log_2 x)) = 0.$$

Dann gilt, weil die Gleichung $\log_4 z=0$ nur die Lösung $z=1$ hat,

$$\log_3(\log_2 x) = 1.$$

Nun hat die Gleichung $\log_3 t=1$ nur die Lösung $t=3$, daher gilt

$$\log_2 x=3.$$

Daraus folgt $2^3=x$, also $x=8$.

Die gegebene Gleichung hat also genau eine Lösung, nämlich $x=8$.

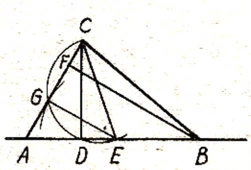
Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß $x=8$ tatsächlich eine Lösung der gegebenen Gleichung ist. Wir erhalten nämlich

$$\log_4(\log_3(\log_2 8)) = \log_4(\log_3 3) = \\ = \log_4 1 = 0.$$

W 9 ■ 671 a) Es sei ABC das gesuchte Dreieck mit $\overline{CD}=h_c$, $\overline{CE}=s_c$ und $\overline{BF}=h_b$ (vgl. die Abb.). Ferner möge die Parallele durch E zu $\overline{BF}$ die Seite $\overline{AC}$ in G schneiden.

Dann gilt nach dem Strahlensatz, da E der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ ist, $\overline{EG}:\overline{BF}=1:2$, also $\overline{EG}=\frac{\overline{BF}}{2}=\frac{h_b}{2}$.

Da $\sphericalangle CGE=90°$, liegt der Punkt G auf dem Thaleskreis um $\overline{CE}$. Andererseits liegt G auf dem Kreis um E mit dem Radius $\frac{h_b}{2}$. Nach dieser Überlegung läßt sich das Dreieck ABC leicht konstruieren. Wir zeichnen $\overline{CD}=h_c$ und errichten in D auf $\overline{CD}$ die Senkrechte, die den Kreis um C mit dem Radius s_c in dem Punkt E schneidet. (Ist $s_c>h_c$, so erhalten wir noch einen zweiten Schnittpunkt E', der in der Abbildung aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet ist.)



Dann zeichnen wir über $\overline{CE}$ als Durchmesser den Halbkreis, der in derselben Halbebene bezüglich CE wie der Punkt D liegt (bzw. den Halbkreis über $\overline{CE'}$ als Durchmesser, der in der anderen Halbebene bezüglich CE' wie der Punkt D liegt).

Den Punkt G (bzw. G') erhalten wir nun als Schnittpunkt dieses Halbkreises mit dem Kreis um E (bzw. E') mit dem Radius $\frac{h_b}{2}$.

Wir verbinden C mit G (bzw. G') und erhalten den Schnittpunkt A (bzw. A') dieser Verbindungsgeraden mit der Geraden DE (bzw. mit DE').

Wir verlängern $\overline{AE}$ über E hinaus (bzw. $\overline{AE'}$ über E' hinaus) um sich selbst und erhalten den Punkt B (bzw. B') und damit das gesuchte Dreieck ABC (bzw. $A'B'C$). Aus dieser Konstruktion ersehen wir, daß wir im Falle $s_c > h_c$ genau zwei Dreiecke erhalten, die den gegebenen Bedingungen entsprechen. Im Falle $s_c=h_c$ erhalten wir jedoch nur ein (gleichschenkliges) Dreieck, das den gegebenen Bedingungen entspricht.

b) Aus der Konstruktion haben wir bereits ersehen, daß die Bedingung $s_c \geqq h_c$ erfüllt sein muß.

Ferner muß die Bedingung $\frac{h_b}{2} \leqq s_c$ erfüllt sein, weil sonst der Kreis um E mit dem Radius $\frac{h_b}{2}$ den Halbkreis über $\overline{CE}$ nicht schneiden würde. Sind andererseits diese beiden Bedingungen erfüllt, so ist das Dreieck ABC auch konstruierbar.

W 9 ■ 672 Es sei das Zahlentripel (x,y,z) eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems; dann gilt

$$x+y+z = 232 \qquad (1)$$

und, wie wir durch Multiplikation der zweiten Gleichung mit 12 erhalten,

$$12x+6y+6z=4x+12y+4z= \\ =3x+3y+12z. \qquad (2)$$

Wir könnten jetzt aus der Gleichung (1) $z=232-x-y$ ermitteln und diesen Wert in (2) einsetzen. Wir würden dann zwei Gleichungen mit den Variablen x und y erhalten, die wir nach einer der üblichen Methoden lösen können. Dieses Verfahren ist aber etwas umständlich, und der folgende Weg führt schneller zum Ziel:

Subtrahieren wir in (2) jeweils die Summen von $12x+12y+12z$, so erhalten wir

$$6y+6z=8x+8z=9x+9y,$$

$$6(y+z) = 8(x+z) = 9(x+y) = k, \qquad (3)$$

wobei wir zur Vereinfachung $9(x+y)=k$ gesetzt haben.

Daher gilt

$$y+z = \frac{k}{6}, \qquad (4)$$

$$x+z = \frac{k}{8}, \qquad (5)$$

$$x+y = \frac{k}{9}. \qquad (6)$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt durch Addition der Terme auf den linken bzw. rechten Seiten

$2(x+y+z) = \frac{k}{6}+\frac{k}{8}+\frac{k}{9}=\frac{29k}{72}$. Wegen $x+y+z=232$ erhalten wir hieraus

$2 \cdot 232 = \frac{29}{72}k$, also

$$k = \frac{2 \cdot 232 \cdot 72}{29} = 1152. \qquad (7)$$

Wir erhalten daher wegen (4), (5), (6) und (7)

$$x=(x+y+z)-(y+z)=232-\frac{k}{6}=232-192 \\ =40, \qquad (8)$$

$$y=(x+y+z)-(x+z)=232-\frac{k}{8}=232-144 \\ =88, \qquad (9)$$

$$z=(x+y+z)-(x+y)=232-\frac{k}{9}=232-128 \\ =104. \qquad (10)$$

Wenn also das gegebene Gleichungssystem überhaupt eine Lösung hat, so gibt es wegen (8), (9) und (10) genau eine Lösung, nämlich

$$x=40,\ y=88,\ z=104.$$

Durch Probe überzeugen wir uns davon, daß das tatsächlich Lösungen des gegebenen Gleichungssystems sind. Wir erhalten nämlich durch Einsetzen dieser Werte in (1)

$40+88+104=232$ und in (2)

$$\frac{2\cdot 40+88+104}{2}=\frac{40+3\cdot 88+104}{3} \\ =\frac{40+88+4\cdot 104}{4}, \text{ also } 136 = 136 = 136,$$

das sind in beiden Fällen wahre Aussagen.

W 10/12 ■ 673 Es sei x eine natürliche Zahl, für die die gegebene Gleichung erfüllt ist. Dann gilt

$$4 \leqq \frac{x+2}{45-x} < 5. \text{ Also gilt} \qquad (1)$$

$$x < 45, \qquad (2)$$

da sonst diese fortlaufende Ungleichung nicht erfüllt wäre. Weiter folgt aus (1) wegen $45-x>0$

$$x+2 \geqq 4(45-x),$$
$$x+2 \geqq 180-4x,$$
$$5x \geqq 178,$$
$$x \geqq \frac{178}{5} = 35\tfrac{3}{5}. \qquad (3)$$

Andererseits folgt aus (1)

$$x+2 < 5(45-x),$$
$$x+2 < 225-5x,$$
$$6x < 223,$$
$$x < \frac{223}{6} = 37\tfrac{1}{6}. \qquad (4)$$

Die Ungleichungen (3) und (4) und daher auch die fortlaufende Ungleichung (1) sind also für natürliche Zahlen x nur dann erfüllt, wenn $x=36$ oder $x=37$ ist.

Die gegebene Gleichung hat daher nur die Lösungen $x=36$ und $x=37$.

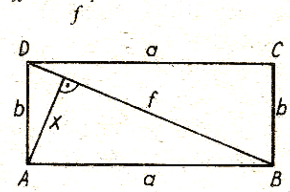
W 10/12 ■ 674 Es sei f die Länge der Diagonalen $\overline{BD}$ des Rechtecks $ABCD$ (vgl. die Abb.). Dann gilt für den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks ABD einerseits

$A_1 = \frac{fx}{2}$ und andererseits

$A_1 = \frac{ab}{2}$. Daraus folgt

$\frac{fx}{2} = \frac{ab}{2}$, also

$x = \frac{ab}{f}$.



Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras $f=\sqrt{a^2+b^2}$, daraus folgt

$$x=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

W 8 ■ 668 *Uta* und *Rainer Gutsche* aus Herzberg schrieben uns, daß sie solche Aufgaben gern lösen. Sie sind bei der Lösung des Problems wie folgt vorangegangen: „Zuerst haben wir die Aussagen 1 bis 6 durch verschiedene Symbole in der Tabelle dargestellt. Dann haben wir bei Peter, Rainer und Rita gestrichen, was nicht mehr gelten kann. In den Spalten *a, b, c, f, g* konnten wir danach auch streichen (aber bei *d* und *e* nicht). Bei *e* war nur noch Martina frei, und danach bliebe nur noch für Lutz die Schablone übrig. In der Tabelle kennzeichneten wir außerdem gleich die Nummern der Aussagen."

Spalte	a	b	c	d	e	f	g
Dinge / Personen	Bleistift	Lineal	Radiergummi	Kurvenschabl.	Rechenstab	Dreieck	Zirkel
Lutz	⬡	⬡	⬡	◬	$\boxed{2}$	⬡	⬡
Martina	⬡	⬡	⬡	⬡	◬	$\boxed{3,6}$	⬡
Peter	⬡	⑥	⬡	⬡	⬡	$\boxed{6}$	–
Rainer	$\boxed{1,2}$	–	–	–	–	–	$\boxed{1,2}$
Rita	⬡	⬡	$\boxed{4}$	⬡	⬡	⬡	⬡

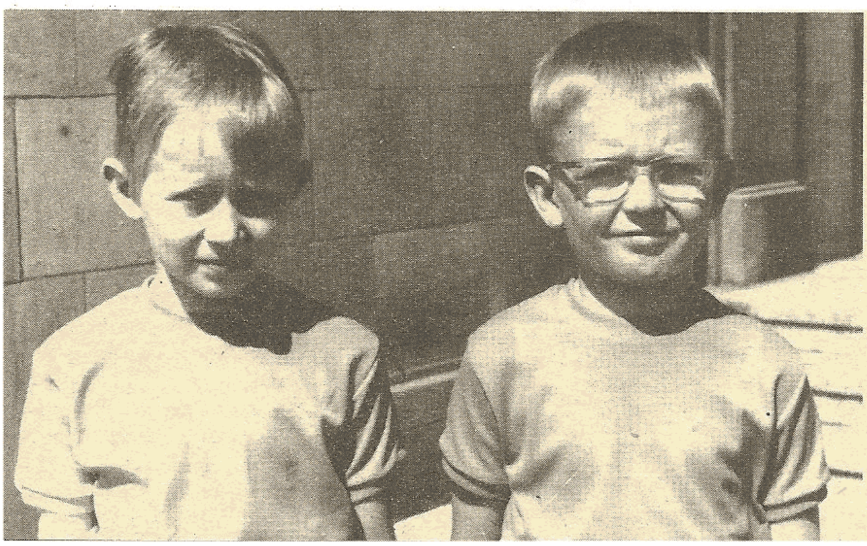
⑦ Der Kreis markiert den Gegenstand, den die Person besitzt. (Die Nummern sind die Aussagenummern)

$\boxed{4}$ Das Quadrat bezeichnet den Gegenstand, den die Person nach der Aussage nicht besitzt.

◬ Das Dreieck mit dem Punkt markiert den Gegenstand, den die Person nur besitzen kann.

⬡ Die kleinen Sechsecke geben die Fälle an, die ausscheiden. Lutz besitzt die Kurvenschablone, Martina den Rechenstab, Peter das Lineal und das Dreieck, Rainer den Bleistift und den Zirkel, Rita den Radiergummi.

Uta Gutsche, Kl. 3c   Rainer Gutsche, Kl. 4a



Junge Mathematiker und ihre „Ordografie"

Ja, liebe Leser und Löser unserer interessanten Zeitschrift *alpha*, um die Rechtschreibung geht es hier! Seit Jahren leite ich AGs in Mathematik. Immer höher steigen die kleinen Mathematiktalente auf der Stufenleiter der Erkenntnisse, doch an einem Punkt muß ich oft trotz elegantester Beweisführungen, trotz Meisterung der kniffligsten Fallunterscheidungen, trotz zähen Ringens nach dem besten Lösungsweg die Hände über dem Kopf zusammenschlagen – das ist bei den Fragen der Rechtschreibung!

Nun gut, zugegeben, da gibt es schon einige schwierige Klippen, wenn ich z. B. an *Hypotenuse, Hypothese, Ellipse, Hyperbel, Polygon* usw. denke. Aber das ist noch gar nichts gegenüber den Worten des täglichen Gebrauchs. Eine kleine Blütenlese will ich mitteilen, die Euch zum Nachdenken anregen soll: *Kravör (Graveur), Producktionsleiter, Razelisierung* und aus den Lösungen des *alpha*- Wettbewerbs: *Beweiß, Kurfenschapplone, quatratisch, Priemfaktoren, Difision, Haubtnenner, Umpfang, Vormell (Formel), Etasche, Minnimum* ...

Alle Originale sind bei mir einzusehen! Keines erfunden! Ob Ihr nachdenkt? Fühlt sich jemand getroffen? Also macht's besser! Dies wünscht Euch in der Hoffnung, daß in Zukunft den 40 Punkten bei der Olympiade nicht 40 Rechtschreibungsfehler gegenüberstehen, die sich eingeschlichen haben,

Euer Hans-Karl Noßke,
Mathematikfachlehrer,
Leipzig

Lösungen zu alpha-heiter

Ein neues Knobelspiel

Würfel	vorhandene Farben			
1.	r	w	2	$2b$
2.	r	$2w$	$2g$	b
3.	$2r$	$2w$	g	b
4.	$3r$	w	g	b

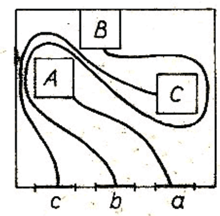
$r \triangleq$ rot $w \triangleq$ weiß $g \triangleq$ grün $b \triangleq$ blau

	1.	2.	3.	4.
vorn	w	g	b	r
oben	b	r	g	w
hinten	b	w	r	g
unten	r	g	w	b
rechte bzw. linke Seite	$g \mid g$	$w \mid b$	$r \mid w$	$r \mid r$

Name mit sechs Buchstaben

(*a*) 56; (*b*) 50; (*c*) 24; (*d*) 36; (*e*) 42; (*f*) 32 – Berlin

Straßenbauer gesucht



Silbenrätsel

1. Dreieck
2. Abakus
3. Radizieren
4. Skala
5. Tabelle
6. Exponent
7. Logik
8. Läufer
9. Ellipse
10. Nullstelle
11. Differenz
12. Einheitskreis
13. Gerade
14. Epsilon
15. orthogonal
16. Monom
17. Element
18. Tangente
19. Robotron
20. Ikosaeder
21. Einer

Lösungswort: Darstellende Geometrie

Aus den Buchstaben

1	**A**	U	SS	E	N	W	I	N	K	E	L
2	A	**L**	G	O	R	I	T	H	M	U	S
3	D	O	**P**	P	E	L	B	R	U	C	H
4	S	A	C	**H**	A	U	F	G	A	B	E
5	V	E	R	H	**A**	E	L	T	N	I	S
6	G	L	E	I	C	**H**	U	N	G	E	N
7	D	U	R	C	H	M	**E**	S	S	E	R
8	M	I	T	T	E	L	L	**I**	N	I	E
9	K	O	O	R	D	I	N	A	**T**	E	N
10	N	E	B	E	N	W	I	N	K	**E**	L
11	H	A	U	P	T	N	E	N	N	E	**R**

Summenkreuz

		7			
		1			
6	5	9	3	4	=27
		8			
		2			
		=27			

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} 52\cdot 11 \\ \hline 52 \\ 52 \\ \hline 572 \end{array}$$

Aus der Arbeit der Arbeitsgemeinschaften

Bezirksklub Junger Mathematiker Gera

Gründung am 3. 1. 1971, Teilnehmer: talentierte Schüler der Klassen 8 bis 12.
Der BKJM wird vom Klubrat geleitet, dessen Vorsitzender ein Lehrer der Spezialschule des VEB *Carl Zeiß Jena* ist. Zum Klubrat gehören weiterhin ein Kreisfachberater Mathematik, ein pädagogischer Mitarbeiter des Bezirkskabinetts für außerunterrichtliche Tätigkeit, zwei Schüler der 8. bis 12. Klasse, ein wissenschaftlicher Mitarbeiter der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität, ein Mitglied der FDJ-Bezirksleitung und ein Student der Sektion Mathematik. Es wurden durchgeführt: 3 bis 4 Wochenendkurse, ein Winter- und ein Sommerlager. Vorwiegend Studenten betreuen die Mitglieder des BKJM.

Aus der Station Junger Techniker Leisnig berichtet

Es begann mit einer Wandzeitung, auf der eine Knobelei der Woche zu finden war. Hier ein Beispiel: Im Fotogeschäft erwirbt ein Kunde einen Fotoapparat und einen Film mit einem Hundertmarkschein. Da der Verkäufer nicht herausgeben kann, wechselt er die Banknote im benachbarten Textilkonsum ein. Mit dem Film und 97,– M Wechselgeld verläßt nun der Kunde das Geschäft. Kurze Zeit darauf bringt nun die Kassiererin aus dem Textilladen den Schein zurück, da es sich um eine Fälschung handele. Sie erhält ihn hier gegen einen echten Schein umgetauscht. Wie groß ist der Gesamtverlust der Fotoverkaufsstelle durch den betrügerischen Kunden?
Diese durchaus nicht neue Aufgabe und weitere lösten stets heftige Diskussionen aus. Das Bedürfnis, sich mit mathematischen Problemen zu befassen, stieg mit jeder veröffentlichten „Knobelei". Der zweite Schritt folgte: Monatlich wurde ein mathematischer Knobelnachmittag gestaltet.
Für die 5. Klassen begann eine Veranstaltung z. B. damit, daß drei Schüler nacheinander je eine beliebige 6-stellige Zahl untereinander an die Tafel schreiben durften. Der Lehrer nahm die Kreide und setzte rasch 3 weitere darunter. Nachdem ein Schüler die Addition der 6 Zahlen ausgeführt hatte, wurde ein anderer beauftragt, hinter einem Wandbild einen geschlossenen Briefumschlag hervorzuziehen und die darin enthaltene Notiz laut vorzulesen. Verblüfft hörten die Teilnehmer den Wert 2 999 997, die an der Tafel stehende Summe! Die Frage, „Wie ist das möglich?" führte zu den unwahrscheinlichsten Vermutungen. Nicht zuletzt traute man dem Lehrer die tollsten Zauberkünste zu! Die Erkenntnis jedoch, daß der Lehrer nur mit den drei hinzugefügten Zahlen jede darüberstehende zu 999 999 ergänzt hatte und daher den Lösungszettel getrost vorbereiten konnte, bedurfte erst manchen Hinweises.
Material entnahmen wir aus „Köpfchen, Köpfchen", (Urania-Verlag) „Zahlenriesen" (B. G. Teubner), der Mathe-LVZ (Sonderausgabe der Leipziger Volkszeitung). Am meisten „Futter" bietet *alpha*.
Vor 7 Jahren entstand bei uns, unabhängig von dieser Massenarbeit, ein *Klub Junger Mathematiker*. Zweimal treffen sich die besten Schüler unseres Kreises (Klassenstufe 7/8).

Aus einem Brief des Leiters des Klubs G. Fischer, Leisnig (Bez. Leipzig)

Ein AG-Leiter berichtet

An der Peter-Göring-Oberschule Lucka (Kreis Altenburg) gibt es seit sieben Jahren Mathematikarbeitsgemeinschaften. Stets wurde in ihnen ein wichtiger Grundsatz verwirklicht: AG-Stunden sind keine Unterrichtsstunden! Es gibt vielleicht einen grundlegenden Unterschied zu anderen Arbeitsgemeinschaften, denn in unseren Arbeitsgemeinschaften wird in etwa der Hälfte aller Zusammenkünfte *Geschichte der Mathematik* betrieben.
Die Geschichte der Mathematik hat einen wesentlichen Anteil beim Erwerb eines wissenschaftlichen Weltbildes. Weiterhin wird durch die Geschichte der Mathematik deutlich, daß die Mathematik, wie sie heute gelehrt wird, das Ergebnis eines langen historischen Prozesses ist, der u. a. durch den Einfluß der ökonomischen und gesellschaftlichen Verhältnisse geprägt wurde. Welche Probleme werden besprochen? Die folgenden zwei Pläne geben Auskunft:
AG I (Klasse 9): Die Anfänge. Altägyptische Mathematik: Quellen, Rechentechnik, Einzelprobleme. Babylonische Mathematik: Schrift, Zahlensystem, Zahlentafeln, geometrische Probleme. Griechische Mathematik: Periodisierung, Logistik, Thales, pythagoreische Schule, Zusammenbruch der *arithmetica universalis*, Elemente des Euklid, Archimedes. Die Mathematik am Ausgang der Antike: Heron, Diophantos, Pappos, Verfall und Ursachen des Verfalls. (nach: Wußing, *Mathematik in der Antike*)
AG II (Klasse 10):
Zur Geschichte der Logarithmen. Geschichte der Trigonometrie: Anfänge, Archimedes, Trigonometrie und Astronomie, Regiomontanus, Gauß, Euler.
Interessierte Schüler fertigen Anschauungstafeln dazu an.

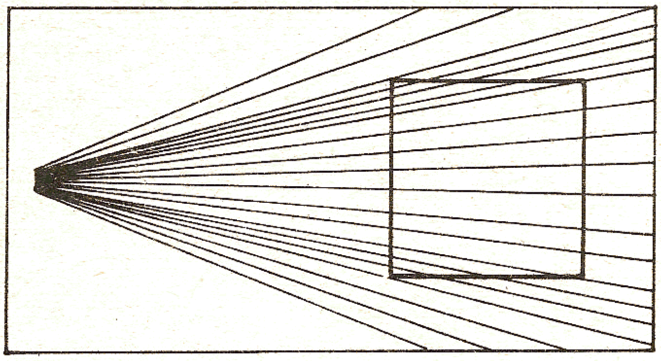
Aus einem Brief des Mathematikfachlehrers K.-H. Gentzsch

Ein Ingenieur berichtet über seine Arbeit

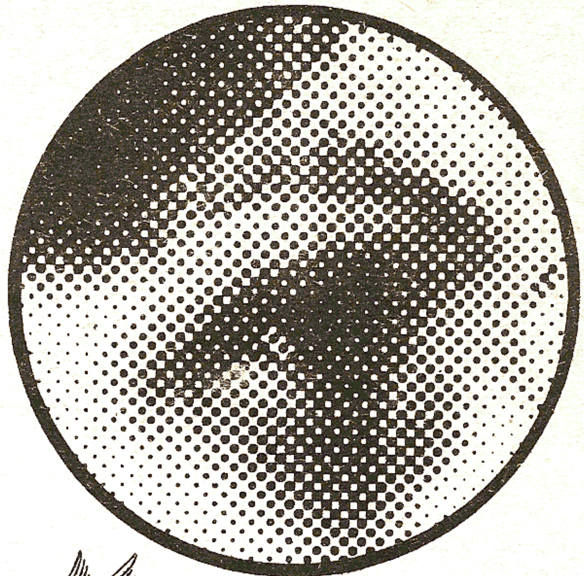
Zunächst möchte ich mich vorstellen: Ich bin Ingenieur und als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Hauptabteilung Metallurgie des Ernst-Thälmann-Werkes Magdeburg tätig.
Mit der Oberschule kam ich in Kontakt, als mein Sohn vor sieben Jahren in die erste Klasse kam. Seit dieser Zeit bin ich im Elternbeirat der Oskar-Linke-OS tätig. Vom ersten Schuljahr an hatte ich besonderes Interesse am Mathematikunterricht und aus der guten Zusammenarbeit mit den Mathematiklehrerinnen ergab sich die Gründung einer Arbeitsgemeinschaft. Ich begann im 2. Halbjahr des 5. Schuljahres. Wenn ich zurückblicke, so glaube ich, daß dieser Zeitpunkt besonders günstig ist. Ich konnte mit einer geschichtlichen Einführung beginnen, die Schüler behandelten gerade die Antike im Geschichtsunterricht. Diese Einführung, die das Wesen der Mathematik von den Bedürfnissen der Gesellschaft ableitet, machte allen viel Freude und hat dazu beigetragen, das Interesse der AG-Teilnehmer zu wecken, da sie auch durch Hinweise auf die Technik jener Zeit zum Nachdenken angeregt wurden. Überhaupt habe ich immer wieder auf die Wechselbeziehungen zur Gesellschaft hingewiesen. Jeder konnte erkennen, warum wir von einer Produktivkraft Mathematik sprechen.
Ich beziehe *alpha* seit ihrem Erscheinen. Zu 80 Prozent nutze ich die in ihr enthaltenen Aufgaben für unsere Arbeit. Nicht „schulmäßige Arbeit" brachte uns voran, sondern eine intensive Diskussion zu den gestellten Problemen. Zu besonderen Schwerpunkten der Arbeit überreichte ich den *Jungen Mathematikern* ausführliche Lösungshinweise (Ormig-Abzüge). Ein gemeinsam mit Eltern und Lehrern durchgeführter mathematischer Nachmittag fand großen Anklang. Ich mußte feststellen, daß die Schüler der Klassenstufen 5 und 6 mit ihrem Schulwissen die in *alpha* gestellten Aufgaben nur unter Anleitung lösen konnten. Es war für mich als Ingenieur oft nicht leicht, den Schülern entsprechend ihrer Ausbildung einen geeigneten Lösungsweg für gestellte Aufgaben zu bieten. *alpha* hat dabei gute Dienste geleistet. Unsere beliebte Schülerzeitschrift *alpha* sollte gerade hier Neuland beschreiten und auch für den AG-Leiter Hinweise für seine Arbeit geben, die sicher auch von den *Jungen Mathematikern* studiert werden. Ich möchte sagen, daß die AG-Arbeit in unserem hochentwickelten Industriestaat eine zwingende Notwendigkeit ist.

Ing. K. Lenz

Optische Täuschungen

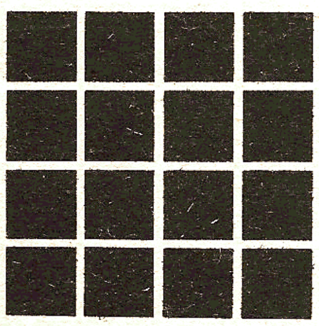


Quadratisch oder nicht?

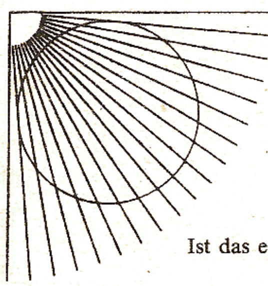


Betrachtet man das Sieb aus der Ferne, erkennt man leicht darauf ein . . .

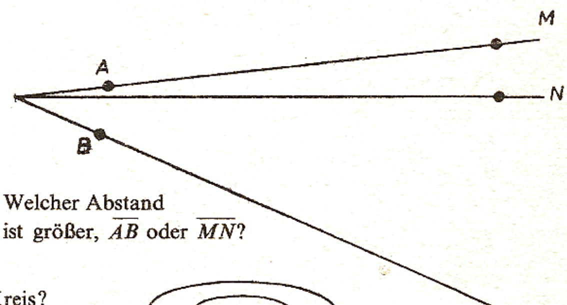
Von Schnabel zu Schnabel: Welche der beiden Strecken ist länger?



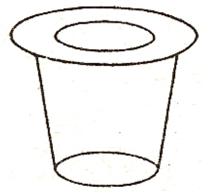
Wo sich die weißen Linien kreuzen, sieht das Auge graue Flecken, die es gar nicht gibt.



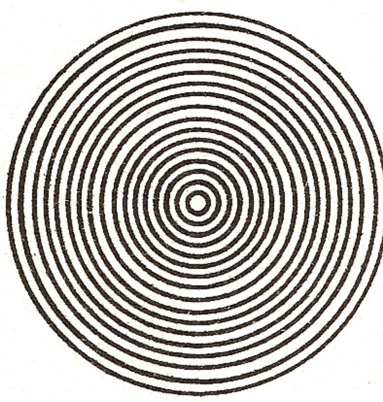
Ist das ein Kreis?



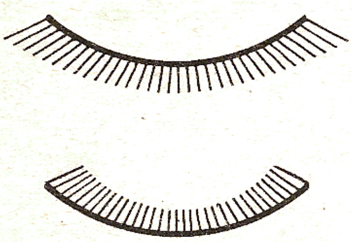
Welcher Abstand ist größer, $\overline{AB}$ oder $\overline{MN}$?



Welche Ellipse ist größer, die untere oder die innere oben?

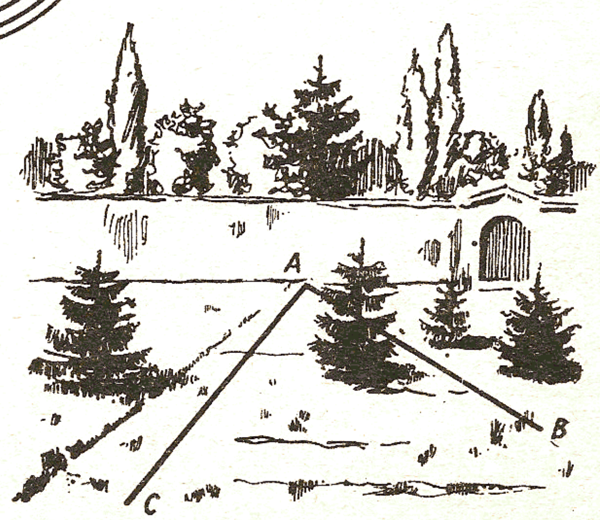


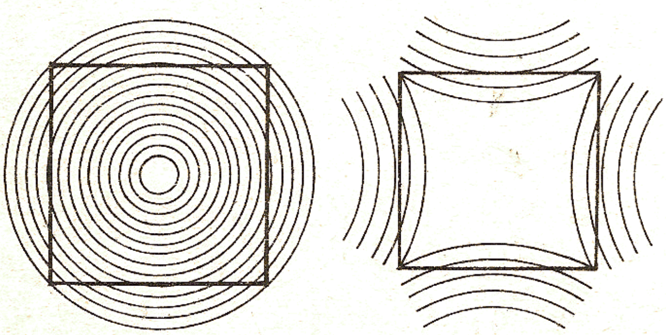
Bewegungstäuschung: Wird die Figur bewegt, so scheint der Durchmesser zu rotieren.



Welcher Bogen ist länger, der untere oder der obere?

Welche Strecke ist länger: $\overline{AC}$ oder $\overline{AB}$?



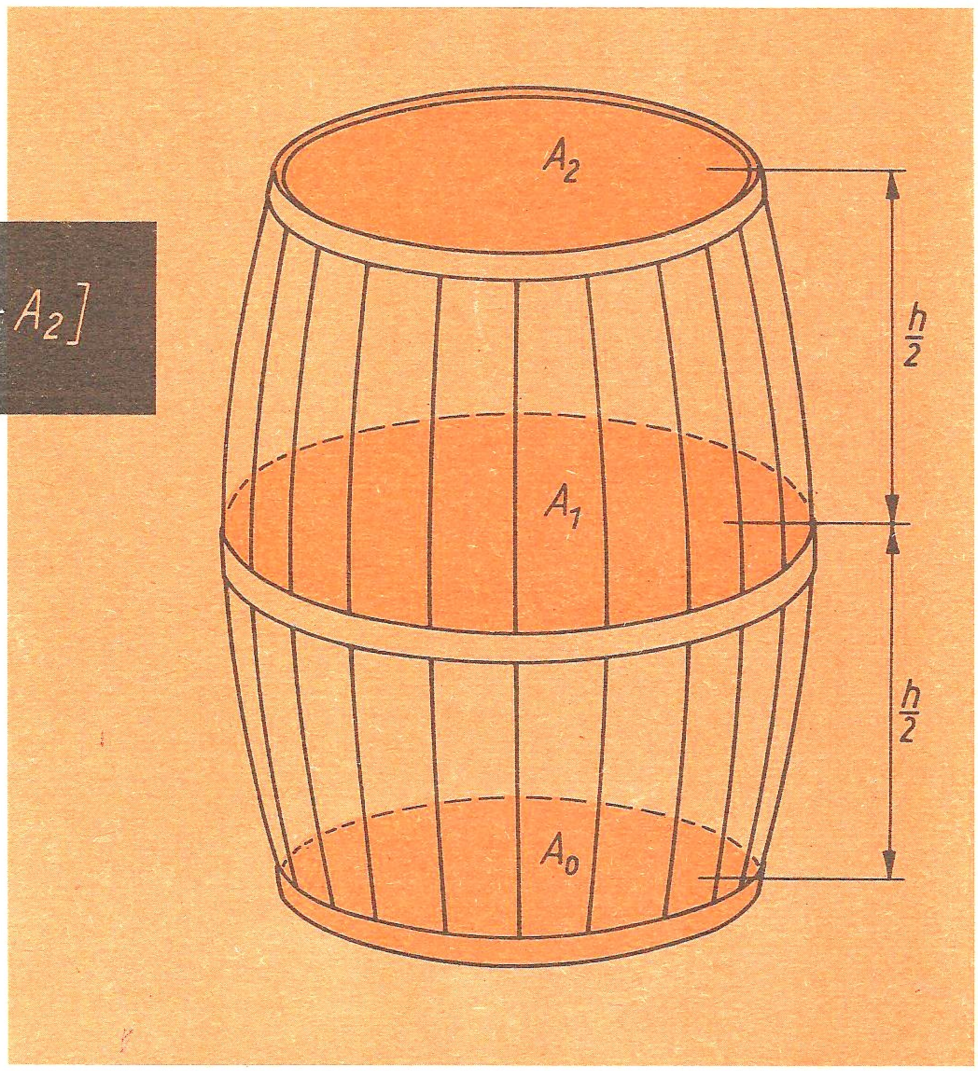


Ist das nun ein Quadrat oder nicht?

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha

$$V = \frac{h}{6}\left[A_0 + 4A_1 + A_2\right]$$



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
5. Jahrgang 1971
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

6

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Archiv TU Dresden (S. 121); J. Lehmann, Leipzig (S. 125); R. Mittelstädt, Berlin (S. 126/27); TASS-Fotodienst (S. 130); Hochschulfilm- und Bildstelle der Humboldt-Universität Berlin (S. 135); Vignetten: W. Meder, Leipzig; Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 30. September 1971

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgabe für Schüler ab der angegebenen Klasse geeignet

Johannes Kepler –

Astronom und Mathematiker

Die vierhundertjährige Wiederkehr des Geburtstages von Johannes Kepler ist nur ein äußerer Anlaß, eines Wissenschaftlers zu gedenken, der zu den entscheidendsten Bahnbrechern für die neuzeitliche Wissenschaft gehört.

In seinem Leben, durch seine forschende Tätigkeit vollzieht sich ein großer Teil des Übergangs von der mittelalterlichen, mit Mystik behafteten Astronomie zur neuzeitlichen, wissenschaftlichen und auf rationalen Grundgedanken fußenden Astronomie.

Tatsachen, die uns heute als selbstverständlich erscheinen, wie z. B. die Eigenschaft der Planetenbahnen, Ellipsen zu sein, waren bis zur Zeit Keplers nicht nur völlig unbekannt, sondern auch aus den benutzten Beobachtungstafeln und den vorherrschenden theoretischen Anschauungen in keiner Weise ableitbar. Diese heute selbstverständlichen Erkenntnisse standen vielmehr im Widerspruch zu den aus dem Altertum und dem Mittelalter überlieferten Auffassungen.

Da sich zur Zeit Keplers aber solche Widersprüche zwischen Tradition und realer Naturerkenntnis im Gebiet der Astronomie häufig bis zu theologischen Streitfragen auswuchsen und damals Eingriffe in das persönliche Leben des betreffenden Wissenschaftlers hervorrufen konnten (es sei daran erinnert, daß Galileo Galilei infolge seines Eintretens für das kopernikanische Weltsystem vor ein Inquisitionsgericht gebracht wurde und er sich nur durch Widerruf vor dem Märtyrertod gerettet hat), wird klar, daß nicht nur hervorragende wissenschaftliche Leistungen, sondern auch ungewöhnliche Charakterstärke von den Begründern der modernen Astronomie aufgebracht werden mußten.

So erscheint es mehr als gerechtfertigt, einen Blick auf das Leben und wissenschaftliche Wirken Keplers zu werfen und einige markante Züge dieses Wirkens herauszustellen, nicht zuletzt auch deshalb, weil, wie Kepler sagte, „die Geschichte von Entdeckungen oft genau so interessant ist, wie es diese Entdeckungen selbst sind“.

Johannes Kepler wurde am 27. 12. 1571 in Weil, einer Stadt in Württemberg, geboren. Er besuchte als Stipendiat die Klosterschule in Maulbronn und erwarb mit 17 Jahren am protestantisch-theologischen Stift zu Tübingen die Magisterwürde. In Tübingen studierte Kepler protestantische (lutherische) Theologie und gleichzeitig Mathematik und Astronomie. Sein Lehrer Michael Maestlin führte ihn in die neue Lehre von Nikolaus Kopernikus (1473–1543), eines Domherren, Arztes und Astronomen, ein. Diese kopernikanische Lehre besagt, daß sich die Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars, ...) auf Kreisbahnen um die *Sonne* bewegen und steht damit in ganz entschiedenem Gegensatz zu der seit dem Altertum herrschenden Auffassung des Ptolemäus (90 n. u. Z.–160 n. u. Z.), nach welcher die *Erde* den Mittelpunkt der Welt darstellt. Kopernikus hat seine Lehre im Werk „De revolutionibus orbium coelestium“ (Über die Bewegungen der Himmelskörper) niedergelegt.

Das kopernikanische Weltsystem ist also heliozentrisch, d. h., die Sonne (griechisch: helios) steht im Mittelpunkt der Welt, im Unterschied zum geozentrischen ptolemäischen Weltsystem (die Erde steht im Mittelpunkt der Welt). Zur Erklärung der Bahnen der Planeten wurden in beiden Systemen komplizierte Systeme von Kreisbewegungen durch gegenseitige Überlagerung (sog. Epizykelbewegungen) gebildet, die mehr oder weniger mit den damals noch recht ungenauen Beobachtungen übereinstimmten.

Kepler stellte sich bereits in seiner Tübinger Zeit ganz auf den Standpunkt des kopernikanischen Systems und nur durch sein weiteres konsequentes Festhalten am heliozentrischen System gelangte er zur Entdekkung der nach ihm benannten Planetengesetze.

Im Jahre 1594 wird Kepler aus seinen theologischen Studien, die er zur Vorbereitung auf ein von ihm gewünschtes Kirchenamt unternahm, herausgerissen und zum Antritt einer neuen Stelle nach Graz geschickt, wo die protestantischen Landstände von Steiermark eine höhere Schule unterhielten. Als „Lehrer der Mathematik und Moral“ und als Mathematiker der „Landschaft“, d. h. der protestantischen Landesregierung, oblag ihm die Amtsaufgabe, jährlich einen Kalender auszuarbeiten. Solche Kalender enthielten die Angaben der Feiertage, astronomische Angaben über die Sonne, den Mond, die Planeten und den Tierkreis sowie über die Jahreszeiten, den voraussichtlichen Witterungsverlauf sowie zu erwartende besondere Ereignisse. Die Aufstellung des Kalenders erforderte somit astronomische Kenntnisse, und so bestimmte diese Aufgabe die Hinwendung Keplers zur Mathematik und Astronomie.

Obwohl Kepler mit seinen Voraussagen, die er im Kalender für 1595 machte, Erfolg hatte, war er sich über Unwissenschaftlichkeit und Unhaltbarkeit der Astrologie, auf die sich solche Voraussagen gründeten, im klaren und betrachtete die astrologischen Methoden als ein zeitgegebenes Übel. Sein wahres Interesse richtete sich vielmehr darauf, den „Bauplan des Universums“ zu enthüllen und speziell der Frage nach der Anzahl, der Größe und der Art der Bewegung der Planeten nachzugehen.

Dabei ist er zunächst noch ganz im mittelalterlichen, spekulativen Denken befangen, wie sich in seinem ersten Werk „Mysterium cosmographicum“ (Geheimnis der Weltbeschreibung), das er 1595 entwarf, zeigt.

Von der mathematisch beweisbaren Tatsache ausgehend, daß es nur fünf reguläre Polyeder (Vielflächner), nämlich das Tetraeder, den Würfel, das Oktaeder, das Pentagondodekaeder und das Ikosaeder gibt (regulär ist ein Polyeder genau dann, wenn seine Seitenflächen aus lauter regelmäßigen untereinander kongruenten n-Ecken bestehen und alle Körperecken untereinander kongruent sind – man kann zeigen, daß n hierbei nur die Werte 3, 4 oder 5 annehmen kann –, kommt Kepler auf die Vermutung, daß sich in die fünf Zwischenräume der Bahnen der (damals nur bekannten) sechs Planeten die fünf regulären Polyeder so einschieben lassen, daß jeweils die Sphäre des einen Planeten (d. h. die Oberfläche einer gedachten Kugel, die die Bahnkurve des jeweiligen Planeten enthält) die umbeschriebene Kugel und die Sphäre des nächsten Planeten (in Richtung kleiner werdender Sonnenabstände gezählt) die einbeschriebene Kugel eines der regulären Polyeder ist. So gelangt Kepler zu der folgenden Anordnung von Planeten(-bahnen) und regulären Körpern:

Merkur – Oktaeder – Venus – Ikosaeder – Erde – Pentagondodekaeder – Mars – Tetraeder – Jupiter – Würfel – Saturn.

Natürlich trifft dieser Sachverhalt, der nur das Ergebnis reiner Spekulation war, die u. a. auf der falschen Annahme fußte, daß es nur sechs Planeten gibt, nicht zu und natürlich stellte auch Kepler erhebliche Abweichungen zwischen den nach seiner „Theorie“ geforderten und den wirklichen Abständen fest. Kepler konnte jedoch auf die großen Ungenauigkeiten des damals vorliegenden Beobachtungsmaterials verweisen und war auch deshalb von der Richtigkeit seines Weltmodells überzeugt.

Die Reaktion der damaligen wissenschaftlichen Welt auf das Erscheinen des „Mysterium cosmographicum“ war teils anerkennend, teils ablehnend. Für die Zukunft wichtig wurde der Umstand, daß auch Tycho Brahe, ein dänischer Astronom, Keplers Erstlingswerk kritisierte, ihn aber zur Zusammenarbeit einlud, da er die theoretische Begabung von Kepler erkannte. Wer war Brahe?

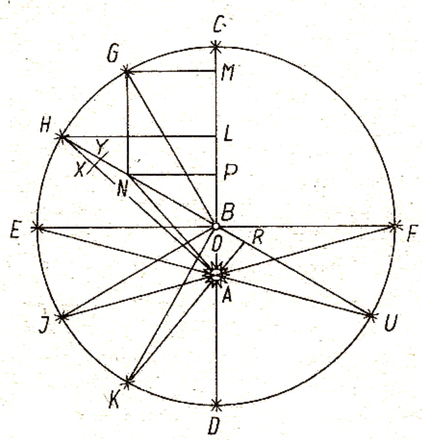
Tycho Brahe wurde am 14. 12. 1546 in Knudstrup (Schonen/Dänemark) geboren. Er studierte an verschiedenen deutschen Universitäten zunächst Rechtswissenschaften, wandte sich aber dann immer mehr der Astronomie zu, beobachtete 1572 das Entstehen eines neuen Fixsterns (Supernova) und erhielt vom dänischen König Auftrag und Mittel zum Bau zweier Sternwarten auf der Insel Hveen: Uranienburg und Sternenburg. Dort beobachtete Brahe mehrere Jahrzehnte das gesamte Himmelsgeschehen mittels einfacher Instrumente, die aber sehr große Dimensionen hatten und erhielt so die genauesten Beobachtungen vor der Erfindung des Fernrohrs. Brahe wußte, daß nur ein genialer Theoretiker seine Beobachtungen voll auswerten konnte und daher ist verständlich, daß er die Verbindung zu Kepler suchte.

Er befand sich, als er Kepler einlud, in Wandsbek, wo er nach unfreiwilligem Scheiden aus seiner dänischen Heimat zunächst eine Zuflucht gefunden hatte. Kepler aber war durch seine Stellung in Graz verhindert, eine so weite Reise zu unternehmen. Während sich in Brahes Schicksal eine günstige Wendung vollzog, indem er, einem Rufe Kaiser Rudolph II. folgend, im Jahre 1599 nach Prag (Schloß Benatek bei Prag) übersiedeln und dort seine astronomischen Arbeiten fortsetzen konnte, wurde Keplers Stellung in Graz durch die gegenreformatorischen Maßnahmen des Erzherzogs Ferdinand von der Steiermark immer unsicherer, da Kepler protestantischen Glaubens war. Er folgte der Einladung Tychos und arbeitete eng mit ihm zusammen, obwohl diese Zusammenarbeit mit starken persönlichen Spannungen belastet war. Im Oktober 1600 siedelt Kepler mit seiner Familie nach Prag über, da er, wie alle Protestanten, die nicht zum Katholizismus übertraten, aus der Steiermark ausgewiesen wurde. Die Zusammenarbeit mit Tycho Brahe war jedoch nicht von langer Dauer, da dieser am 24. Oktober 1601 starb. Kepler wird sein Nachfolger als Hofastronom Kaiser Rudolph II.

Es war ein günstiger Umstand, daß Tycho Brahe sich zur Zeit, da Kepler in Prag ankam, gerade mit der Marsbahn beschäftigte, denn die Marsbahn ist eine Ellipse mit verhältnismäßig großer Exzentrizität. Wenn überhaupt, so konnte am ehesten an dieser Bahn festgestellt werden, daß es sich um eine Ellipse und nicht um einen Kreis handelte.

Kepler geht nun von der physikalisch richtigen Vorstellung aus, daß „in der Sonne der Sitz der die Planeten bewegenden Kraft sei“, und rechnet daher alle Abstände vom Sonnenmittelpunkt aus. Durch die Annahme, daß von der Sonne eine Kraft ausgeht, die „die Planeten herumreißt“, errät er genial den Flächensatz, das sog. zweite Keplersche Gesetz.

Dieser Flächensatz besagt folgendes: Die Planeten bewegen sich so, daß die Verbindungsgerade Sonne – Planet in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. In Sonnennähe bewegen sich also die Planeten schneller als in Sonnenferne. Mit der Kenntnis dieses Flächensatzes tastete sich Kepler schrittweise an die wahre Form der Planetenbahnen (zunächst der Marsbahn) heran.



Schon vor Kepler stand fest, daß die Sonne nicht der Mittelpunkt der als kreisförmig vorgestellten Planetenbahn sein konnte, die Verhältnisse mußten also wie auf der Zeichnung (sie stammt von Kepler) sein. Jedoch zeigten die Beobachtungen starke Abweichungen von einer Kreisbahn und Kepler gelangte auf einem mühevollen, induktiven Weg (d. h. vom Speziellen auf das Allgemeine schließend, mit anschließender Prüfung durch Beobachtung und Experiment) zur Tatsache, daß die Marsbahn eine Ellipse ist, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. (Daß dies für alle Planetenbahnen zutrifft, ist der Inhalt des sog. ersten Keplerschen Gesetzes.) Die Keplerschen Gesetze bedeuteten gegenüber den Jahrtausenden vorangegangener Sternenkunde einen ersten wirklichen Fortschritt zur Erklärung der Himmelserscheinungen. Ein weiterer großer Schritt wurde etwa einhundert Jahre später von Newton, dem großen englischen Physiker, vollzogen. Ihm gelang es, die Keplerschen Gesetze aus den von ihm formulierten Grundgesetzen (Axiomen) der Mechanik deduktiv zu gewinnen, also auf logischem Wege mittels mathematischer Methoden abzuleiten.

Im Jahr 1605 war Kepler im Besitz der ersten beiden Gesetze (das dritte, über das noch zu sprechen sein wird, fand er erst 1618), die er in seinem Hauptwerk, der „Astronomia Nova“, darstellte. Im Untertitel nennt er dieses Buch „Himmelsphysik“, und tatsächlich wird dieses Werk heute als die Grundlegung der modernen wissenschaftlichen Himmelsmechanik und Astronomie anerkannt.

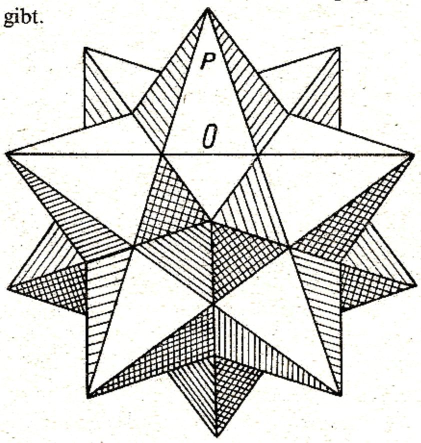
Vor der Drucklegung im Jahre 1609 waren für Kepler noch erhebliche Schwierigkeiten zu überwinden, denn die „Astronomia Nova“ war mittels der Braheschen Beobachtungen entstanden, aus denen die Erben Brahes, insbesondere sein Schwiegersohn Tengnagel, der verschiedene höfische Stellungen innehatte, möglichst viele finanzielle Vorteile herauszuschlagen gedachten. Zunächst verzögerten die Braheschen Erben die Herausgabe der Beobachtungen Brahes an Kepler, und später machten sie Ansprüche bezüglich des Veröffentlichungsrechtes geltend.

Bevor wir Keplers weiteren Lebensweg und seine astronomischen Forschungen weiter verfolgen, wollen wir einen Blick auf seine mathematischen Leistungen werfen. Eine der bekanntesten ist seine Methode, die Rauminhalte von Rotationskörpern näherungsweise zu berechnen. In der Widmung des Buches „Nova stereometria doliorum“ (Neue Stereometrie der Fässer; Linz 1615) beschreibt er, durch welchen rein äußerlichen Anlaß sein Interesse für die Problematik geweckt wurde. Er hatte nämlich beobachtet, wie die Verkäufer von Weinfässern zur Feststellung des Rauminhaltes der in einem Faß enthaltenen Flüssigkeitsmenge einen Meßstab (Visierrute) benutzten, und zwar mit ein und derselben Skala für Fässer unterschiedlichster Bauart und Krümmung. Kepler stellte sich die Frage nach der Berechtigung dieses Verfahrens und arbeitete Methoden für den Vergleich von Rauminhalten aus.

Wesentlich ist, daß Kepler durch neuartige Vorgehensweisen die bis dahin bekannte Stereometrie erweiterte, so daß sie wieder zu einer interessanten Wissenschaft wurde, ferner, daß er durch Einführung und Verwendung von Näherungslösungen den Bedürfnissen der Praxis entgegenkam und durch die spezielle Betrachtungsweise von Flächen und Körpern als zusammengesetzte Gebilde, die aus kleinen Streifen bzw. Schichten bestehen, wurde Kepler zu einem Wegbereiter der Infinitesimalrechnung (Differential- und Integralrechnung). An diesen Verdiensten ändert die Tatsache nichts, daß nicht alle der von Kepler erhaltenen Ergebnisse stichhaltig sind und von unserem heutigen Standpunkt die mathematische Ausdrucksweise (keine Formeln!) sehr schwerfällig ist.

Die heute gelegentlich noch benutzte „Keplersche Faßregel“ zur Berechnung der Rauminhalte von Rotationskörpern (s. unser Titelblatt) geht in ihrer heutigen Form auf

J. H. Lambert (1756) zurück, der sie in Analogie zu Keplerschen Überlegungen aufgestellt hat.
Weiter gehört zu den vielseitigen mathematischen Aktivitäten Keplers die Entdekkung zweier sogenannter Sternpolyeder, von denen wir eines, den Dodekaeder-Igel, in der Zeichnung zeigen. Sie gerieten in Vergessenheit und wurden 1810 von dem französischen Mathematiker L. Poinsot neu entdeckt, zusammen mit zwei weiteren Sternpolyedern, und 1811 wies der französische Mathematiker A. L. Cauchy nach, daß es nur diese vier regelmäßigen Sternpolyeder gibt.



Schließlich beschäftigte sich Kepler u. a. auch damit, wie man den Raum mit Kugeln gleichen Radius ausfüllen kann, so daß der Zwischenraum kleinstmögliches Volumen einnimmt (wenn man sich auf einen beschränkten Raumteil bezieht). Man spricht dann von einer „dichtesten Kugelpackung". Bis heute ist nicht bekannt, ob die von Kepler angegebene Kugelpackung wirklich die dichteste ist. Kepler stellte sich dazu ein räumliches Würfelgitter aus Würfeln gleicher Länge vor und betrachtete eine Art dreidimensionales Schachbrett von abwechselnd „weißen" und „schwarzen" Würfeln. In jeden schwarzen Würfel wird nun eine Kugel einbeschrieben, die alle Kanten dieses Würfels berührt. Die Gesamtheit dieser Kugeln bildet die Keplersche Kugelpackung.
Ein weiteres Arbeitsgebiet Keplers, auf dem er bahnbrechend gewirkt hat, ist die Optik der Linsen und Linsensysteme, mit der er sich im Hinblick auf die Konstruktion von Fernrohren für astronomische Zwecke befaßte. Mit seinen Arbeiten „Astronomiae pars opticae" (der optische Teil der Astronomie) und „Dioptrice", die in den Jahren 1604 bzw. 1611 erschienen. legt er die Grundlagen der wissenschaftlichen Optik überhaupt. Vor dem Erscheinen dieser Werke war die Optik ein Gebiet, das nur durch die Weitergabe der Erfahrungen der Linsenschleifer und Brillenmacher bestimmt wurde.
In den „Dioptrice", die aus Anlaß des Aufkommens des aus den Niederlanden stammenden sog. Galileischen Fernrohrs geschrieben wurde, entwickelte er die Theorie eines für astronomische Beobachtungen wesentlich günstigeren Fernrohrtyps, den des sog. Keplerschen Fernrohrs.
Galilei hatte mit seinem Fernrohr aufsehenerregende Entdeckungen gemacht, z. B. die vier Jupitermonde festgestellt und damit eine heftige Diskussion unter den Astronomen und allen weiteren Liebhabern der Himmelskunde entfacht.
Auch Kepler mußte, aufgefordert von dem in Prag residierenden Kaiser Rudolph II., zu diesem Ereignis Stellung nehmen, und dies tat er unverzüglich in seiner berühmt gewordenen „Dissertatio cum nuncio sidereo" (Unterredung mit dem Sternenboten, 1609), in welcher er Galileis Beobachtungen und Erkenntnisse rückhaltlos anerkannte, u. a. deshalb, weil sie das Kopernikanische System stützten. In diesem Zusammenhang ist eine Bemerkung Keplers zur Astronomie des Jupiters interessant, in welcher Kepler künftige Weltraumflüge vorausahnt: „Gib Schiffe oder schaffe Segel für die himmlische Luft, und es werden Leute da sein, die sich nicht einmal vor jener Weite fürchten. Und als ob die wagemutigen Reisenden schon in den nächsten Tagen dastünden, wollen wird die Astronomie dafür schaffen, ich für den Mond, Du, Galilei, für den Jupiter."
Mit der „Dioptrice" schließt im wesentlichen die erste große Schaffensperiode Keplers ab, die sich etwa mit der Zeit seines Prager Aufenthaltes deckt. Durch den Tod Kaiser Rudolph II. (1612) wurde seine Stellung in Prag schwierig. Obwohl er vom Nachfolger Rudolphs, dem Kaiser Matthias, als „Hofmathematikus" bestätigt wird, geht Kepler 1612 als Lehrer an die Landschaftsschule in Linz. Tragische Familienereignisse, der Tod seines Sohnes Friedrich und seiner ersten Frau, bedrückten Kepler und lähmten seine Schaffenskraft.
Doch stellte er sich noch eine große Aufgabe: die Auswertung und Aufbereitung des von Tycho Brahe gesammelten Beobachtungsmaterials in der Form astronomischer Jahrbücher und Tafeln. Solche Tafeln haben für die Orts- und Zeitbestimmung (vor allem in der Schiffahrt) große praktische Bedeutung, von ihrer Genauigkeit hängt z. B. die Effektivität der Navigation sowie weiterer Operationen ab. In diese Tafeln, die nach dem Förderer Brahes, Kaiser Rudolph II., den Namen „Tabulae Rudolphinae" erhalten sollten, konnte Kepler seine Planetengesetze einarbeiten, und daher war der Benutzer gezwungen, sich mit den neuen Erkenntnissen der Astronomie vertraut zu machen.
Bevor die Tafeln gedruckt vorlagen, waren jedoch noch viele Schwierigkeiten zu überwinden. Zum einen war sich Kepler selbst über viele Einzelheiten noch im unklaren, z. B. fehlte ihm noch das dritte Planetengesetz, das die Abstände der Planeten von der Sonne und ihre Umlaufzeiten verknüpft.

Fortsetzung auf Seite 135

Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil. Thomas Riedrich

Sektion Mathematik an der Technischen Universität Dresden

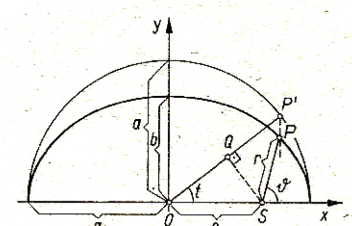
▲808 Es ist interessant, den Weg zu verfolgen, auf dem Kepler zu der Erkenntnis gelangte, daß die Marsbahn eine Ellipse ist. Ein wesentliches Zwischenglied war eine geometrische Eigenschaft jeder Ellipse, die ihr beweisen sollt.
Gegeben ist eine Ellipse mit der großen Halbachse a, der kleinen Halbachse b $(0<b<a)$, und wir stellen uns vor, daß die Richtungen dieser Halbachsen mit den Achsen eines rechtwinkligen x,y-Koordinatensystems zusammenfallen. Dann liegt ein Punkt $P(x,y)$ dann und nur dann auf der Ellipse, wenn die Beziehung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

gilt, wie es euch ja aus der Analytischen Geometrie bekannt ist. Ein Kreis mit dem Ellipsenmittelpunkt als Mittelpunkt und Radius a werde beschrieben, und $P(x,y)$ sei ein Punkt der Ellipse, der gleichzeitig im Innern der ersten Quadranten liegt $(x>0,\ y>0)$. Die Parallele zur y-Achse durch den Punkt (x,y) schneidet im ersten Quadraten den genannten Kreis in einem eindeutig bestimmten Punkt $P'(x,y)$. Diesen Punkt P' verbinden wir mit dem Ellipsenmittelpunkt und fällen vom Brennpunkt $S=S(e,0)$ der Ellipse, wobei bekanntlich

$$e=\sqrt{a^2-b^2}\ (>0) \qquad (2)$$

gilt, das Lot auf die Verbindungsstrecke von P' zum Ellipsenmittelpunkt. Der zugehörige Lotpunkt heiße Q (s. Zeichnung).



Die Eigenschaft, die für Kepler wesentlich wurde, besteht nun darin, daß die Strecken SP und QP' gleich lang sind (für jeden Ellipsenpunkt P), also

$$|SP|=|QP'| \qquad (3)$$

gilt. Eure Aufgabe besteht nun darin, unter Benutzung der Beziehungen (1) und (2) die Gültigkeit der Eigenschaft (3) nachzuweisen (ohne Benutzung weiterer allgemeiner Aussagen über die Ellipse).

Geometrische Kombinatorik

In diesem Artikel möchten wir zeigen, daß die elementaren, schnell entwickelbaren Ideen der Kombinatorik auch in der Geometrie viele schöne Anwendungen besitzen. Wir können natürlich nur einige Beispiele zeigen, obzwar die Mathematiker nur über die erste Frage, nämlich über Färbungen von Landkarten, schon viele Bände geschrieben haben.

1. Wir beginnen mit einer einfachen *Aufgabe:* Es seien $e_1, \ldots, e_n$ einige Geraden in der Ebene; wir setzen voraus, daß sie sich in allgemeiner Lage befinden, d. h. keine drei von ihnen haben einen gemeinsamen Punkt, aber je zwei schneiden sich. Diese Geraden zerlegen die Ebene in mehrere Stücke. (Wieviel Stücke entstehen hier? Das ist schon eine interessante Frage der kombinatorischen Geometrie. Wir verraten die Antwort: $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$. Den Beweis überlassen wir dem Leser.) Diese Stücke nennen wir *Länder*. Die Aufgabe besteht darin, diese Länder so mit zwei Farben (sagen wir rot und blau) zu färben, daß benachbarte Länder stets verschiedene Farben bekommen (Bild 1).

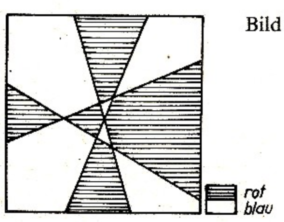
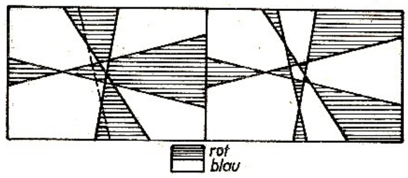


Bild 1

Kann man dies immer ausführen?
Die Antwort ist „Ja“. Das werden wir jetzt (mittels vollständiger Induktion) beweisen. Bauen wir die Figur Schritt für Schritt auf. Nach dem Einziehen der ersten Geraden kann man die gewünschte Färbung trivialerweise angeben.
Nehmen wir an, daß die Länder, in welche die Geraden $e_1, \ldots, e_{n-1}$ die Ebene zerlegen, in der gewünschten Weise rot und blau gefärbt sind. Ziehen wir jetzt die Gerade e_n ein, so bleiben einige Länder unverändert, andere aber werden zerschnitten. Wir wollen die Färbung so abändern, daß die zwei Teile der zerschnittenen Länder verschiedene Farben erhalten. Das kann man leicht erreichen; auf der „linken“ Seite der Geraden e_n lassen wir alles unverändert, auf der „rechten“ aber vertauschen wir blau und rot (Bild 2). Es ist leicht zu sehen, daß diese abgeänderte Färbung die Eigenschaft hat, daß benachbarte Länder verschieden gefärbt sind.



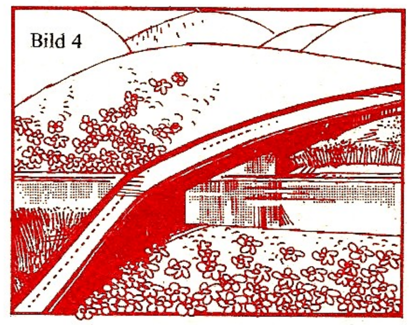
Aufgabe: Nehmen wir statt der Geraden Kreise, dann gilt dieselbe Aussage. Dies ist zu beweisen!

2. Wir haben das Wort Land gebraucht, weil die Abbildung mit den gefärbten Stücken der Ebene als Landkarte betrachtet werden kann. Wir sagen jetzt einige Worte über Färbungen von Landkarten. Eine Landkarte ist verständlich, wenn benachbarte Länder verschiedene Farben besitzen. Im allgemeinen genügen zwei Farben nicht, z. B. haben Belgien, Westdeutschland, Luxemburg und Frankreich paarweise eine gemeinsame Grenze, so daß diese vier Länder verschiedene Farben erhalten müssen, wenn man die Karte von Europa färben will. Es ist bewiesen, daß fünf Farben immer genügen, noch niemand konnte aber beweisen, daß auch vier Farben ausreichen. Das ist die berühmte *Vierfarbenvermutung*. Trotz der Anstrengungen vieler Mathematiker blieb diese Vermutung schon seit mehr als 100 Jahren unbewiesen. Es ist sehr interessant, daß die Hilfsmittel, die man zur Lösung des Vierfarbenproblems ausgearbeitet hat, in der reinen und angewandten Mathematik eine große Rolle spielen, obzwar sie bisher nicht zur Lösung des eigentlichen Problems führten. Nennen wir diejenigen Strecken der Grenzen, wo sich zwei Länder treffen, *Kanten*, und diejenigen Punkte, welche auf der Grenze von drei oder mehr Ländern liegen, *Ecken*. Betrachten wir eine Landkarte mit der Eigenschaft, daß sich in jeder Ecke eine gerade Anzahl von Kanten (oder, was dasselbe bedeutet, eine gerade Anzahl von Ländern) treffen. Der Leser soll beweisen, daß man diese Landkarte mit zwei Farben färben kann.

Bild 3

3. Es seien $e_1, \ldots, e_n$ gerade Landstraßen, welche ins Unendliche verlaufen. Dieses Landstraßensystem wurde modernisiert, und man wollte jede Kreuzung mit Unter- und Überführungen ausbauen. Das wollte man aber so ausführen, daß entlang jeder Straße die Unter- und Überführungen einander abwechseln. Kann man dies immer durchführen? (Bild 3).
Wenn wir unser erstes Ergebnis anwenden, können wir etwas feststellen, was nichts mit unserer Aufgabe zu tun zu haben scheint: Man kann die Landteile zwischen den Straßen so mit Getreide einsäen bzw. mit Blumen bepflanzen, daß auf einer Seite jeder Straße Getreide wächst und auf der anderen Seite Blumen stehen. Jetzt können wir leicht eine Vorschrift angeben, wie die Unter- und Überführungen zu bauen sind. Jede Kreuzung ist so auszubauen, daß man bei Annäherung auf der rechten Seite Blumen sieht, wenn man auf die Überführung kommt und Getreide, wenn man in die Unterführung einfährt (Bild 4)

Bild 4



Es ist leicht einzusehen, daß diese Vorschrift dasselbe bedeutet, wenn man der Kreuzung von einer anderen Richtung naht. Entlang einer Straße sieht man rechts abwechselnd Getreide und Blumen, d. h. man kommt abwechselnd zu Unter- und Überführungen.
Aufgabe: Man finde den Beweis dieser Aussage, ohne die unter 1. bewiesenen Aussagen zu verwenden!

4. Betrachten wir ein System von endlich vielen Punkten in der Ebene. Wir setzen nicht voraus, daß diese Punkte sich in allgemeiner Lage befinden, sondern nur, daß sie nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen. Da können natürlich viele Geraden auftreten, welche durch drei oder mehr Punkte des Systems laufen, jedoch gibt es immer wenigstens eine Gerade, welche genau zwei Punkte des Systems enthält. Diese letzte Aussage – den *Satz von Gallai* – wollen wir jetzt beweisen.
Die Schwierigkeit des Problems liegt in der Wahl der gewünschten Geraden. Hat man schon eine Eigenschaft gefunden, mit der man diese Gerade bestimmen kann, so ist es leicht zu beweisen, daß sie tatsächlich nur zwei Punkte enthält. Betrachten wir die Abstände zwischen einem Punkt und der Verbindungslinie zweier anderer Punkte. Unter diesen endlich vielen Entfernungen gibt es eine kleinste positive (hier haben wir ausgenutzt, daß nicht alle diese Entfernungen gleich Null sind, d. h. nicht alle Punkte auf einer Geraden liegen), sei dies die Entfernung

zwischen dem Punkt P und der Verbindungslinie e der Punkte Q und R. Wir beweisen jetzt, daß e keinen weiteren Punkt des Systems enthält. Nehmen wir an, e enthalte auch den Punkt S. Es sei T die Projektion von P auf e (Bild 5).

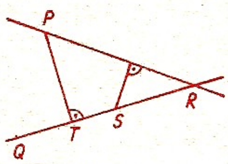


Bild 5

Man kann die Bezeichnungen so wählen, daß S zwischen T und R liegt. Die Entfernung zwischen S und der Verbindungslinie von P und R ist kleiner als die Entfernung zwischen P und e. Das ist aber ein Widerspruch, also enthält e wirklich nur Q und R. Damit haben wir den Satz von Gallai bewiesen.

Aufgabe: Sind endlich viele Geraden in der Ebene gegeben, so daß je zwei sich schneiden, aber nicht alle durch ein und denselben Punkt gehen, dann gibt es wenigstens einen Punkt, der in genau zwei Geraden enthalten ist.

5. In der kombinatorischen Geometrie kann man beliebig viele Fragen stellen, welche etwa lauten: Wie viele Schnittpunkte, Kanten, Geraden usw. gibt es höchstens oder wenigstens oder genau, wenn man diese oder jene Voraussetzung hat? Im 1. Punkt haben wir schon eine solche Aufgabe gestellt. Jetzt werden wir weitere nennen und einige lösen. Wir hoffen, daß die Leser selbständig solche Aufgaben formulieren und lösen können werden.

Es seien n Punkte in der Ebene gegeben. Wie viele Verbindungslinien bestimmen diese Punkte wenigstens? Die $\binom{n}{2}$ Verbindungslinien sind nicht alle notwendig verschieden, wenn z. B. alle Punkte auf ein und derselben Geraden liegen, dann gibt es nur eine Verbindungslinie. Diesen trivialen Fall wollen wir aber ausschließen und stellen die folgende Frage: Wie viele Verbindungslinien bestimmen n Punkte wenigstens, wenn sie nicht sämtlich auf einer Geraden liegen? Es ist zu erwarten, daß im schlimmsten Falle n-1 Punkte auf einer Geraden liegen und nur der n-te außerhalb dieser Geraden liegt. (Bild 6). In diesem Falle bestimmen die Punkte genau n Geraden, deshalb kann man vermuten: n Punkte, die nicht alle auf derselben Geraden liegen, bestimmen mindestens n verschiedene Verbindungslinien. Wir beweisen diese Aussage mit vollständiger Induktion. Für $n=1,2$ ist die Behauptung nichtssagend, für $n=3$ ist sie trivial. Es sei $n \geqq 4$, und für n-1 Punkte sei die Behauptung schon bewiesen. Nach dem Satz von Gallai gibt es immer zwei Punkte, P und Q, deren Verbindungslinie keinen weiteren von den gegebenen Punkten enthält. Lassen wir jetzt P weg. Für die übrigbleibenden n-1 Punkte sind zwei Fälle möglich:

a) Die restlichen n-1 Punkte liegen auf einer Geraden, die P nicht enthält. Die Konfiguration ist wie in Bild 6, die n Punkte bestimmen also genau n Geraden.

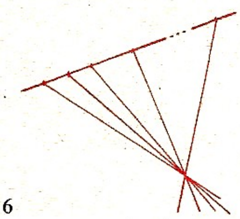


Bild 6

b) Die restlichen n-1 Punkte liegen nicht auf einer Geraden. Jetzt können wir die Induktionsannahme anwenden und feststellen, daß diese n-1 Punkte mindestens n-1 Geraden bestimmen. Die Gerade PQ ist aber nicht unter diesen, so daß die n Punkte zusammen mindestens n Geraden bestimmen.

Aufgabe: Beweise: Bestimmen n Punkte genau n Geraden, so liegen n-1 von ihnen auf einer Geraden.

6. Von fünf Punkten in allgemeiner Lage kann man immer die Ecken eines konvexen Vierecks auswählen. Das ist eine bekannte Aufgabe, der Leser wird es ohne Schwierigkeiten beweisen. Die Aufgabe kann aber verallgemeinert werden: Von wie vielen Punkten kann man immer die Ecken eines konvexen k-Ecks auswählen? Mit anderen Worten: Welches ist die Höchstzahl von Punkten, die nicht notwendig ein konvexes k-Eck bestimmen?

Es ist nicht ganz klar, daß es hier eine Antwort gibt, d. h. daß man nicht beliebig viele Punkte mit der genannten Eigenschaft angeben kann. Man kann beweisen, und zwar mit rein kombinatorischen Mitteln, daß es eine Zahl $f(k)$ derart gibt, daß die Behauptung gilt: Man kann höchstens $f(k)$ Punkte angeben, die kein konvexes k-Eck bestimmen. Das wollen wir aber hier nicht diskutieren.

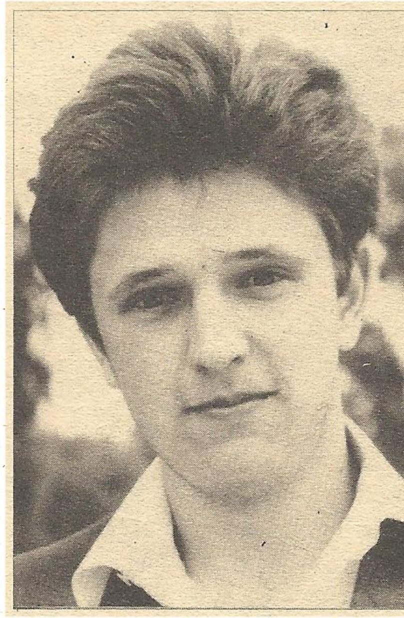
Es ist interessant, daß der Wert von $f(k)$ nicht bekannt ist. In kombinatorischen Fragen kommt es oft vor, daß man eine Zahl, die ähnlich wie $f(k)$ definiert ist, nicht explizit angeben kann. Hier gibt es eine schöne Vermutung: $f(k)=2^{k-2}$, d. h. man kann höchstens 2^{k-2} Punkte so angeben, daß sie nicht die Ecken eines konvexen k-Ecks enthalten. Man hat ein System von 2^{k-2} Punkten angegeben, die kein konvexes k-Eck bestimmen (das ist gar nicht einfach!), niemand kann aber bisher beweisen, daß man nicht auch $2^{k-2}+1$ Punkte mit dieser Eigenschaft angeben kann.

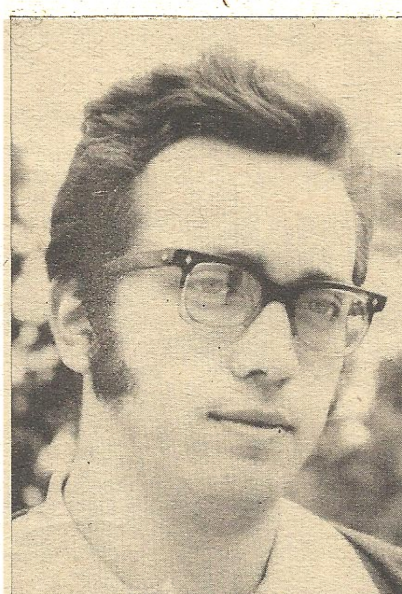
Aufgaben: 1. Die Vermutung ist wahr für $k=5$: Man kann acht Punkte angeben, die kein konvexes Fünfeck bestimmen, aber neun Punkte enthalten immer die Ecken eines konvexen Fünfecks.

2. Es sind acht Punkte mit folgender Eigenschaft anzugeben: Die Symmetrieachse von je zwei von ihnen enthält mindestens zwei Punkte des Systems. (Es ist nicht bekannt, ob es andere Punktsysteme mit dieser Eigenschaft gibt.)

3. n Punkte seien in der Ebene gegeben. Wir bezeichnen mit d die maximale Entfernung zwischen zwei gegebenen Punkten. Dann gibt es höchstens n Punktepaare, bei denen der Abstand der Punkte gleich d ist.

László Lovász, József Pelikán





L. Lovász und J. Pelikán nahmen an der VII. Internationalen Mathematikolympiade (Berlin 1965) teil und erhielten 1. Preise. Zur XII. IMO (Budapest 1970) waren sie als Koordinatoren tätig. Beide sind als Diplommathematiker an der Universität Budapest tätig.

Wie entsteht die Zeitschrift alpha?

Die mathematische Schülerzeitschrift *alpha* besteht nunmehr fünf Jahre. Durch die Mithilfe eines großen Kreises von Autoren des In- und Auslandes konnten 30 Hefte für eine systematische, kontinuierliche und intensive außerunterrichtliche Arbeit zusammengestellt werden. Die Redaktion dankt den Wissenschaftlern, Lehrern, Werktätigen aus der gesellschaftlichen Praxis und den Schülern, welche aktiv an der inhaltlichen Gestaltung der Zeitschrift *alpha* mitwirkten.

Wir wollen aber auch denen Dank sagen, welche die technischen Voraussetzungen schufen, daß jedes Heft in einwandfreier Qualität in die Hände unserer Leser gelangte.

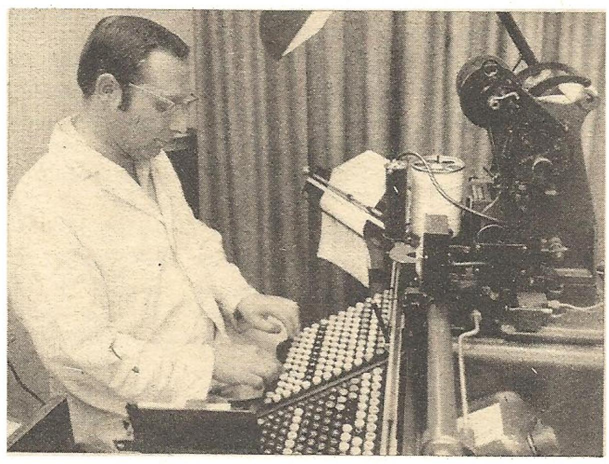
Wird ein Artikel an die Redaktion gesandt, so beginnt eine umfassende Vorarbeit, bis er der Druckerei übergeben werden kann. Zunächst gehen alle Beiträge an ein Gutachterkollektiv, welches entweder zustimmt, Hinweise zur inhaltlichen oder methodischen Verbesserung gibt oder sie aus solchen Gründen wie *für Schüler nicht geeignet, fachlich nicht einwandfrei, bereits gleiches bzw. ähnliches Material veröffentlicht* usf. ablehnt. Rund drei Monate vor Erscheinen eines Heftes wird es so zusammengestellt, daß möglichst alle Leser, d. h. die jüngeren wie die älteren Leser, gleichermaßen angesprochen werden. Die Redaktionsassistentin schreibt jeden Beitrag genau nach festgelegten Normen, technische Zeichnungen werden nach den eingereichten Originalen von einem Mathematikfachlehrer angefertigt und Vignetten zur Auflockerung des Heftes bereitgestellt. Ein Typograph erhält den gesamten Inhalt eines Heftes und gestaltet gemeinsam mit dem Chefredakteur Seite um Seite. Nach rund vierwöchiger Kleinarbeit können nunmehr die fertiggestellten Unterlagen der *Staatsdruckerei der DDR* übergeben werden.

Absprache über die Herstellung der Zeitschrift *alpha* zwischen Chefredakteur (im Bild rechts), Auftragsbearbeiterin (Fernstudent: Ing.-Ökonom) und dem Abteilungsleiter Lichtsatz

Schauen wir uns einmal die *drucktechnische Herstellung* eines Heftes genau an: Zunächst überprüft die *Auftragsabteilung* das vorliegende Material. Es wird eine Auftragstasche ausgeschrieben, die sämtliche Angaben über die Fertigung des Auftrags von der Satzherstellung bis zum Versand enthält. Außerdem berechnet der Auftragsbearbeiter die benötigte Papiermenge und sichert die Bereitstellung eines entsprechenden Materialkontingents.

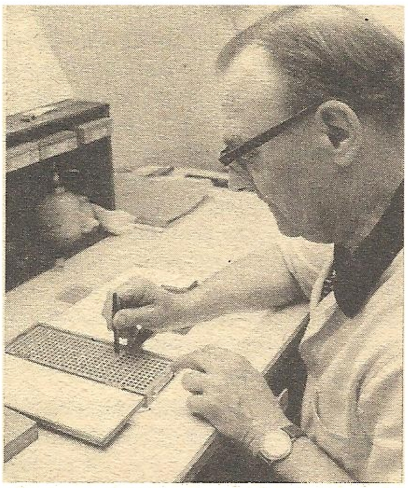
Nunmehr erhält der Leiter der *Abteilung Lichtsatz* die Auftragstasche und die Manuskripte. Die Bildvorlagen gehen an die Fotoabteilung zur Herstellung der Bilddiapositive.

Die Satzherstellung erfolgt mit einer modernen *Monophoto*-Lichtsatzanlage. Mit ihr ist es möglich, einfachen wie schwierigen Satz mit hoher Qualität des Schriftbildes herzustellen. Die Anlage besteht aus zwei voneinander getrennten Maschinen, dem *Taster* und dem *Projektor*. Mit dem Taster wird der Text des Manuskriptes auf einen Papierstreifen übertragen, wobei alle Buchstaben, Ziffern, Zeichen und Steuerkommandos nach einem bestimmten Code als Lochkombinationen eingestanzt werden. Nur die besten Fachkräfte kommen am Taster zum Einsatz, denn jeder Fehler beim Setzen ist erst nach dem Entwickeln des Filmes zu erkennen.

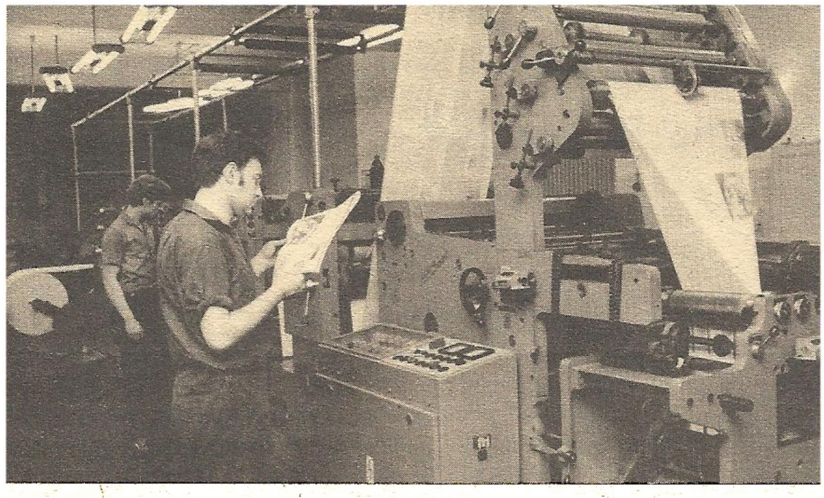


Herstellung des Lochstreifens auf dem Taster

Die Steuerung des Projektors erfolgt durch den am Taster hergestellten *Lochstreifen*. Im Projektor befin-



Zusammenstellung des Matrizenrahmens für die Zeitschrift *alpha*



Druck auf der Rollenoffsetmaschine (drei Farben in einem Durchgang) mit gleichzeitiger Falzung des Papierbogens

det sich ein *Matrizenrahmen,* der alle auf dem Lochstreifen festgelegten Buchstaben, Ziffern und Zeichen als kleines Filmnegativ enthält. Wenn der Matrizenrahmen mit dem vom Lochstreifen gewählten Buchstaben in Stellung gebracht ist, erfolgt die Belichtung. Ein Lichtstrahl dringt durch das Buchstabennegativ und fällt, gelenkt durch Prismen und Spiegel, auf den unbelichteten Film, der sich in einer Kassette befindet. Das geschieht Buchstabe für Buchstabe in Sekundenbruchteilen, bis eine Filmspalte von etwa 50 cm Länge und maximal 26 cm Breite belichtet ist. Das Ergebnis nach dem Entwickeln ist ein *Schriftdiapositiv.* Auf einem *Lichtpausgerät* werden von den Filmspalten Rotpausen hergestellt zum Lesen der Korrektur durch einen Korrektor in der Druckerei sowie für den Chefredakteur und den Autor, an die sie gesandt werden. Der Typograph fertigt aus den Rotpausen einen *Klebespiegel* an, d. h. er klebt die Rotpausen der Textfilme und die Rotpausen der Fotos und Zeichnungen so auf, wie später das Heft aussehen soll. Korrekturen und Klebespiegel gehen dann wieder

Aufnahme der Bilder mit der Reproduktionskamera

in die Druckerei. Es werden nunmehr Korrekturzeilen getastet, und es wird ein Korrekturlochstreifen hergestellt. Dann übernimmt die *Montageabteilung* Textfilme, Korrekturfilme, Korrekturfahnen, Klebespiegel und Bilddiapositive. Nun werden unter Berücksichtigung der durch die Redaktion angezeichneten Korrekturen die Filme der Schrift und der Bilder nach dem Klebespiegel zusammengeklebt. Die Redaktion erhält nochmals für kurze Zeit Rotpausen von diesen Seiten, nimmt eine letzte Korrektur vor und erklärt das Material für druckreif. Wenn danach alle Fehler korrigiert sind, werden jeweils vier Seiten auf einer großen durchsichtigen Folie zu einer *Kopiervorlage* zusammengeklebt und in der *Kopie* davon Offsetdruckplatten hergestellt.

Diese Druckplatten sind dünne Kupferfolien, die auf einer Seite verchromt sind. An allen Stellen, die beim Druckvorgang Farbe annehmen und wieder abgeben sollen, wird durch Chemikalien die Chromschicht entfernt.

Gedruckt wird auf *Rollenoffsetmaschinen.* Die Druckplatten sind hierbei um einen Druckzylinder gespannt. Die eingefärbten Druckplatten geben die Farbe auf einen Gummizylinder ab und dieser bedruckt das Papier. Es läuft von einer Rolle durch die Druckwerke, wobei es auf beiden Seiten gleichzeitig bedruckt und die ankommenden Papierbahnen am Ende der Maschine geschnitten und auf A 4-Format gefalzt werden. Die von der Offsetmaschine auf A 4 gefalzten Bogen werden in der *Fertigmacherei* in einen Umschlag gesteckt, im Rücken mit zwei Klammern geheftet und auf Format geschnitten. In der Zeit vom 13. bis 16. jedes geraden Monats erhält die *Deutsche Post* (Zeitungsvertriebsamt) die gesamte Auflage und verteilt sie an die Leser.

Heidemarie Jüttner, Peter Dreßler, Johannes Lehmann

Welche, wie viele Möglichkeiten gibt es ?

Solchen Fragen, wie sie in der Überschrift stehen, seid ihr sicherlich schon begegnet. Ihr sollt nun Aufgaben lösen lernen, die diese oder ähnliche Fragen enthalten.
Wir beginnen mit drei Beispielen.

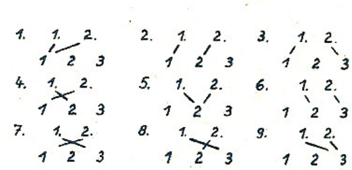
Aufgabe 1 Alfred, Bernd und Christian bewohnen in einem Ferienlager gemeinsam ein Zimmer. Leider hat nur einer von ihnen einen Spiegel mit. Um Streit zu vermeiden, beschließen sie, sich jeden Morgen in einer neuen Reihenfolge zu kämmen. Wie viele Tage können sie nach diesem Beschluß handeln? Das heißt: Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die drei Freunde anzuordnen?
Versucht, die Lösung durch Probieren selbst zu finden, bevor ihr weiterlest!
Lösung: Wir bezeichnen die drei Freunde mit den Anfangsbuchstaben ihrer Namen: *A, B, C.* Nun stellen wir fest, welche Anordnungsmöglichkeiten es gibt:
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.
Die drei Freunde können also 6 Tage nach ihrem Beschluß handeln.

Aufgabe 2 Welche zweistelligen Ziffern lassen sich aus den Grundziffern 1, 2, 3 zusammenstellen, wenn in jeder Ziffer jede dieser Grundziffern mehrmals vorkommen darf? Wie viele solche zweistelligen Ziffern gibt es?
Ihr könnt die Lösung wieder selbst finden, bevor ihr weiterlest.
Lösung: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33; also neun Ziffern.

Aufgabe 3 Zur Teilnahme an einem Pioniertreffen hat eine Gruppe Arnim, Brigitte, Christine, Dieter und Elke delegiert. Leider ist aber aus Platzgründen nur die Teilnahme zweier Pioniere dieser Gruppe möglich. Die Gruppenleitung steht nun vor der Aufgabe, aus den vorgeschlagenen Pionieren zwei auszuwählen. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?
Wir bezeichnen die Pioniere mit den Anfangsbuchstaben ihrer Namen: *A, B, C, D, E.* Versucht nun, die Lösung wieder selbst zu finden!
Lösung: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE; also zehn Möglichkeiten.
Solltet ihr bei der Lösung zum Beispiel *BA* anstelle von *AB* angegeben haben, so wäre das auch richtig; man darf in diesem Falle nur nicht *AB und BA* notieren, weil ja diese beiden Darstellungen die gleiche Delegation bedeuten.
Wenn man diese drei Aufgaben miteinander vergleicht, so fallen einige Gemeinsamkeiten, aber auch einige Unterschiede auf.
1. Wir haben es in jeder Aufgabe mit einzelnen, unterscheidbaren Dingen zu tun, die zusammengehören (Grundziffern, Kinder oder Buchstaben). Eine Zusammenfassung solcher Dinge nennen wir eine *Menge,* die einzelnen zu ihr gehörenden Dinge heißen *Elemente der Menge.*
2. Manchmal werden alle Elemente der jeweils gegebenen Menge für die einzelnen Zusammenstellungen benutzt (Aufg. 1), manchmal aber auch nicht (Aufg. 2, 3).
3. Manchmal ist bei den Zusammenstellungen die Anordnung bzw. die Reihenfolge der Elemente zu berücksichtigen (Aufg. 1, 2), manchmal aber auch nicht (Aufg. 3).
4. Manchmal dürfen sich hierbei Elemente wiederholen (Aufg. 2), manchmal aber auch nicht (Aufg. 1, 3).
Die Beantwortung der Fragen, ob bei einer Zusammenstellung die Anordnung der Elemente zu berücksichtigen ist oder nicht und ob sich in einer Zusammenstellung Elemente wiederholen dürfen oder nicht, ist sehr wichtig. Wir wollen das noch anhand des folgenden Beispiels erklären und uns hierfür zunächst nur geeignete Sachaufgaben überlegen.

Aufgabe 4 Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Preise an drei Schüler zu verteilen?
(1) Bei den Preisen kann es sich z. B. um Bücher mit verschiedenen Titeln handeln. Die Preise sind also *unterscheidbar.*
(2) Bei den Preisen kann es sich z. B. auch um wertgleiche Geldprämien handeln. Die Preise sind dann *nicht unterscheidbar.*
(a) Ein Schüler kann *mehrere Preise* erwerben, wie etwa bei einem Sportwettkampf. Er kann z. B. im 60-m-Lauf und im Weitsprung Sieger sein.
(b) Ein Schüler kann *höchstens einen Preis* erwerben, wie etwa bei einer Prüfung für eine besondere Leistung.
Diese einzelnen Fälle lassen sich wie folgt verbinden: (1a), (1b), (2a), (2b). Aufgabe 4 sollte noch etwas Wichtiges verdeutlichen: Wir haben es bei solchen Aufgaben stets mit zwei Mengen zu tun, hier also mit der Menge der Preise und der Menge der Schüler. Beide Mengen müssen, den Aufgabenbedingungen entsprechend, einander zugeordnet werden, und zwar in unserem Beispiel so, daß jeder Preis verteilt wird, aber nicht jeder Schüler einen bekommen kann bzw. zu bekommen braucht.
Auch bei den Aufgaben 1 bis 3 können wir jeweils zwei Mengen unterscheiden, die einander geeignet zuzuordnen sind:
Aufgabe 1: Eine Menge ist die Menge der drei Freunde, die andere Menge besteht auch aus drei Elementen, die man etwa als die drei Platznummern 1., 2., 3. deuten kann.
Aufgabe 2: Eine Menge ist die Menge der insgesamt gegebenen Grundziffern, die andere Menge besteht aus zwei Elementen, die man etwa als eine Menge von zwei nebeneinanderliegenden Kästchen deuten kann, in die die Grundziffern einzeln geschrieben werden sollen. Diese Menge ist also die Menge der geforderten Stellen jeder Ziffer.
Die Zuordnung der beiden Mengen erfolgt in Aufgabe 2 so, daß jedes der beiden Kästchen mit einer Grundziffer zu besetzen ist, während in einer Zusammenstellung nicht jede Grundziffer vorzukommen braucht.
Aufgabe 3: Eine Menge ist die Menge der fünf Kinder, die andere Menge ist die Menge der vorhandenen zwei Delegiertenplätze. Die Zuordnung der beiden Mengen erfolgt so, daß jedem Element der Zweiermenge ein Element aus der Fünfermenge zugeordnet wird. Umgekehrt kann man nicht jedem Element der Fünfermenge ein Element der Zweiermenge zuordnen.
In allen vier Aufgaben ist also eine der beiden gegebenen Mengen dadurch gekennzeichnet, daß *jedes* ihrer Elemente den Elementen der anderen Menge zugeordnet werden kann. Diese Menge wollen wir mit *M* bezeichnen, die andere mit *N.*
Bei Aufgabe 1 ist es gleichgültig, welche der beiden Mengen wir mit *M* bzw. *N* bezeichnen.
Wir wollen uns diese Zuordnungen durch Zeichnungen veranschaulichen. Die Elemente der beiden Mengen werden wir hierbei zweckmäßig darstellen. Für die Zeichnungen wollen

Bild 1



wir vereinbaren, die Elemente der Menge *M* stets oben, die Elemente der Menge *N* unten zu notieren. Die möglichen Zuordnungen wollen wir durch Striche veranschaulichen.

Wir beginnen mit Aufgabe 2. Bild 1 ist wie folgt zu deuten: Bei der ersten Zusammenstellung heißt die erste Grundziffer 1, die zweite Grundziffer auch 1; bei der zweiten Zusammenstellung heißt die erste Grundziffer 1, die zweite 2 usw., wie in der Lösung bereits angegeben.

Erkennt ihr in Bild 1, daß die Striche in einer bestimmten Reihenfolge stehen? Wir zeichnen erst alle Fälle, in denen der Strich von 1. zu 1 verläuft. Dann beginnen wir eine neue Zeile, zeichnen den Strich von 1. stets zu 2 und beginnen mit dem Strich von 2. wieder von vorn. Das setzen wir so lange fort, bis beide Striche beim letzten Element angekommen sind, hier also bei 3. Auf diese Weise finden wir systematisch alle Möglichkeiten, ohne etwa in Gefahr zu geraten, eine Möglichkeit zu vergessen.

Bei der Lösung von Aufgabe 3 müssen wir im Gegensatz zu Aufgabe 2 zweierlei beachten:

1. Die Anordnung der Elemente ist beliebig. Das wird in Bild 2 dadurch berücksichtigt, daß wir nur solche Zuordnungen angeben, bei denen die Striche einander *nicht* schneiden.

2. Die Elemente dürfen sich nicht wiederholen. Wir dürfen also in Bild 2 nur solche Zuordnungen angeben, bei denen zu einem untenstehenden Element nicht mehrere Striche verlaufen. Um wieder systematisch alle Möglichkeiten zu finden, verfahren wir im übrigen wie bei Bild 1.

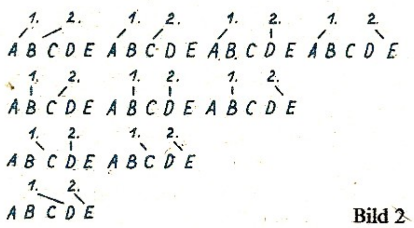


Bild 2

Werdet ihr nun Aufgabe 4 lösen können?

Wir wollen die beiden Preise mit 1. und 2., die drei Schüler mit 1, 2, 3 bezeichnen.

Löst nun den Fall (1a) allein!

Wenn ihr richtig gearbeitet habt, müßt ihr als Lösung Bild 1 erhalten haben, also 9 Möglichkeiten.

Löst jetzt Fall (1b)!

Welche Möglichkeiten des Falles (1a) fallen hier weg?

Nun, es fallen gerade diejenigen weg, bei denen zu einem untenstehenden Element zwei Striche führen, denn kein Schüler kann mehr als einen Preis bekommen. Es verbleiben also 6 Möglichkeiten.

Wie ist die Lösung des Falles (2a)?

Welche Möglichkeiten des Falles (1a) können wir jetzt wegfallen lassen? Zum Beispiel jene, bei denen Striche einander schneiden, denn die Anordnung der Preise ist ohne Bedeutung. Es verbleiben demnach 6 Möglichkeiten.

Löst nun den Fall (2b)!

Wenn ihr richtig gearbeitet habt, verbleiben in Bild 1 die Möglichkeiten 2., 3. und 6., also 3 Möglichkeiten.

Bei der zeichnerischen Lösung von Aufgabe 1 müssen wir beachten, daß zwar Striche einander schneiden dürfen, daß aber nicht zu einem untenstehenden Element mehrere Striche führen dürfen. Versucht, der Reihe nach alle Möglichkeiten durch Zeichnung zu finden, und vergleicht eure Lösung mit Bild 3!

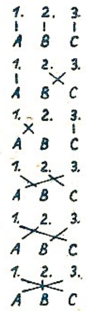


Bild 3

Fassen wir zusammen, wie wir Aufgaben der hier besprochenen Art lösen können:

1. Wir bestimmen die zwei Mengen.

2. Wir bestimmen die Stellung der beiden Mengen.

Welche Menge steht oben? Es muß von *jedem* Element ein einziger Strich ausgehen.

Welche Menge steht unten?

Es dürfen Elemente freibleiben.

3. Wir bestimmen alle möglichen Zuordnungen.

a) Ist bei der Lösung die Anordnung der Elemente zu berücksichtigen?

Wenn nicht, so lassen wir alle jene Fälle weg, in denen Zuordnungsstriche einander schneiden.

b) Dürfen sich bei der Lösung Elemente wiederholen?

Wenn ja, so dürfen zu einem untenstehenden Element mehrere Striche führen. Wenn nicht, so darf zu jedem Element der unteren Menge höchstens ein Strich hinführen.

Wir wollen nun eine Aufgabe nach diesem Lösungsplan bearbeiten.

Aufgabe 5 Die Ehepaare Köhler und Lorenz haben ein Theateranrecht. Sie sitzen immer auf denselben Plätzen mit den Nummern 1 bis 4. Einmal sind die Männer plötzlich verhindert. Die beiden Frauen haben nun vier Plätze zur Verfügung. Wie können sich die beiden Frauen auf diese Plätze setzen, falls jeder Frau ein einziger Platz und jedem Platz höchstens eine Frau zugeordnet wird? Wie viele Platzverteilungen sind möglich?

1. Zwei Mengen: Menge der Frauen, Mengen der Plätze.

2. Da jede Frau Platz bekommen soll, aber nicht jeder Platz besetzt werden kann bzw. besetzt zu werden braucht, steht die Menge der Frauen oben, die der Plätze unten.

3. a) Striche dürfen einander schneiden. (Warum?)

b) Zu einem untenstehenden Element dürfen nicht mehrere Striche führen. (Warum?)

Es gibt 12 Möglichkeiten.

Bild 4

Die beiden Frauen haben aber nicht lange überlegt. Sie wählten sofort die Möglichkeit 5, weil das ihre Stammplätze waren.

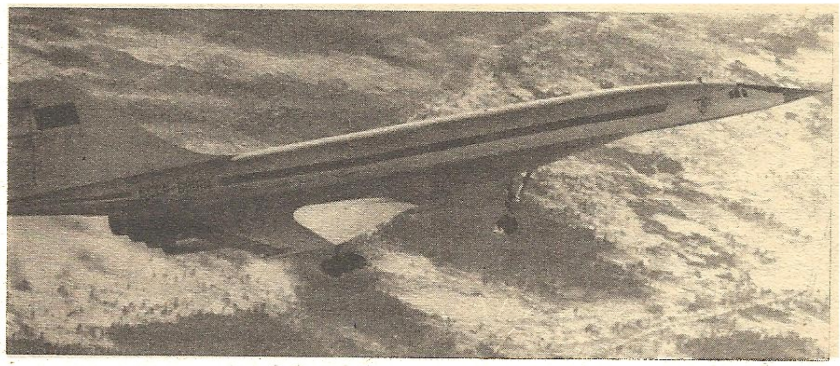
Bis jetzt haben wir nur Aufgaben besprochen, in denen Mengen mit höchstens fünf Elementen vorkamen. Wie lösen wir nun schwierigere Aufgaben, etwa auch solche, in denen anstelle von Zahlen Variable für (natürliche) Zahlen stehen, wenn also die Aufgaben allgemein formuliert sind?

Beispiel (vgl. Aufgabe 5!): Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, m Personen auf n Plätze zu verteilen usw.? Wir brauchen nur für m und n der Reihe nach möglichst kleine Zahlen einzusetzen und nach unserem Lösungsplan zu verfahren.

In *alpha*, Heft 2/72, wird dieser Artikel fortgesetzt. Wir werden dann sehen, daß man bei geschicktem Vorgehen Zahlenfolgen erkennen kann. Bestimmte Gesetzmäßigkeiten wollen wir aber zunächst vorsichtigerweise als Vermutungen formulieren. *W. Türke*

Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug?

Teil 1



An einem herrlichen, windstillen Sonntag geht Klaus mit seinem älteren Bruder Steffen wandern. Am Rande eines Sees machen sie Rast. Während Steffen mit einem Grashalm spielt, schaut Klaus hinauf in das Blau des wolkenlosen Himmels. Da entdecken seine Augen einen metallisch glänzenden, sich bewegenden Punkt, der einen Kondensstreifen hinter sich herzieht, am Himmel. „Ein Flugzeug!" ruft er aus. Beide beobachten die offenbar einen geradlinigen Kurs steuernde Maschine, die in großer Höhe direkt über die beiden Jungen hinwegfliegt. Obwohl sich die Maschine bereits wieder von den Jungen entfernt, ist noch kein Motorengeräusch zu hören. Doch dann ist plötzlich ein lauter Knall zu vernehmen. Klaus bemerkt: „Dieser Knall läßt die Fensterscheiben klirren." Und Steffen erwidert: „Ich weiß, wie leicht diese Geräusche zu einer Belästigung werden. Doch auf den sicheren Schutz, den uns die NVA im Bunde mit der Roten Armee vor Überfällen bietet, können wir nicht verzichten. Dabei sind unsere Luftstreitkräfte ein wichtiger Bestandteil der Landesverteidigung, und deshalb müssen wir das Geknalle in der Luft ertragen."

Erst kurze Zeit später, nachdem beide den Knall gehört haben, ist vom beobachteten Flugzeug das Motorengeräusch zu hören. „Wie kommt denn dieser Knall zustande?" fragt Klaus. „Die Maschine dort oben fliegt mit Überschallgeschwindigkeit", antwortet Steffen. Klaus, der die Antwort nicht voll erfassen kann, argumentiert: „Diese Behauptung erscheint mir zu kühn. An diesem Silberpunkt in der Luft kannst du ja gar nicht die Gestalt der Tragflügel erkennen, die einen solchen Schluß zuläßt." „Das ist nicht nötig! Meine Behauptung folgt allein aus unserer Behauptung. Ich will dir das erklären!" antwortet Steffen. Und er fährt fort: „Als Vorbereitung sollst du hierzu zwei Aufgaben lösen. Die erste Aufgabe lautet:

Warum richten sich beim 100-Meter-Lauf die Zeitnehmer, die am Ziel stehen, nicht nach dem Geräusch, das das Zusammenschlagen der Startklatsche erzeugt, sondern achten mit dem Auge auf das Zusammenschlagen der Startklatsche?"

Bereits nach kurzer Zeit antwortet Klaus: „In einer Sekunde legt der Schall rund 340 m[1] zurück. Um 100 m zurückzulegen, braucht der Schall rund 0,3 s. Würden sich die Zeitnehmer auf ihr Gehör verlassen, so würden sie die gelaufene Zeit um 0,3 s zu kurz stoppen." Auf den zweiten Teil der gestellten Frage will Klaus sehr präzise antworten. Deshalb holt er Notizblock und Bleistift aus der Jackentasche und führt die folgende Rechnung aus, bei der er sich auf das Gesetz der geradlinig-gleichförmigen Bewegung $s = vt$ (s – Weg; v – Geschwindigkeit; t – Zeit) stützt:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{100\,m}{300\,000\,\frac{km}{s}} = \frac{100\,ms}{300\,000\,km}$$

$$= \frac{1s}{300\,000 \cdot 10} \approx \underline{\underline{0{,}000\,000\,3\ s}}$$

Dann antwortet er: „Da das Licht sich mit der Geschwindigkeit $v = 300\,000\,\frac{km}{s}$ ausbreitet, braucht es zum Durchlaufen der Strecke $s = 100$ m annähernd die Zeit $t = 0{,}0000003$ s. Der durch das Beobachten mit dem Auge begangene Meßfehler ist also so klein, daß diese Methode zulässig ist." Steffen erwidert: „Die erste Aufgabe hast du richtig gelöst. Hoffentlich schaffst du auch die zweite Aufgabe:

Nehmen wir an, ich beginne jetzt einen Schrei von 0,2 s Dauer auszustoßen. An welchen Stellen der Umgebung ist dieser Schrei 3 s später zu hören?"

Klaus schaut sich die in weitem Umkreis ebene Landschaft an. In sein Notizheft skizziert er sich die folgende Zeichnung:

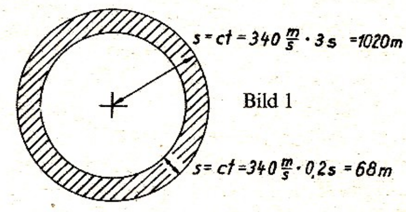
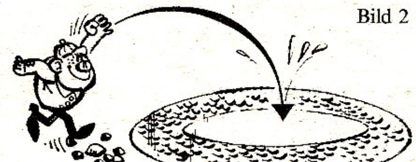


Bild 1

Anschließend antwortet er: „Der Beginn deines Schreies wäre in 1 020 m Entfernung von unserem Standort zu hören, das Abbrechen deines Schreies jedoch in 952 m Entfernung. Also sind 3 s nach Beginn deines Schreies die von dir erzeugten Schallwellen in der Kreisringfläche mit den Radien von 1 020 m und 952 m und unserem Standort als Zentrum zu hören." „Auch die zweite Frage hast du richtig beantwortet", sagt Steffen. Bei diesen Worten ergreift Steffen einen Stein und wirft ihn ins Wasser. Nach kurzer Zeit ruft er: „Siehst du jetzt ein Modell, das man etwa mit deinem Ergebnis vergleichen kann?"

Bild 2



Klaus sieht, daß die Stelle, an der der Stein ins Wasser fiel und dazu ein Teil der sie umgebenden Wasseroberfläche sich wieder in Ruhe befindet. Genau ein kreisringförmiger Teil der Wasseroberfläche mit der Einwurfstelle als Zentrum befindet sich in Bewegung. Er erkennt, daß diese Kreisringfläche dem Bereich entspricht, in dem bei der vorigen Aufgabe der Schrei zu hören ist[2]. Steffen fährt fort: „Nach diesen Vorbereitungen will ich dir unter den Voraussetzungen von Windstille und gleicher Lufttemperatur in allen

[1] Die Schallgeschwindigkeit in Luft ist weitgehend vom Luftdruck unabhängig, sie ändert sich hingegen mit der Temperatur. Zu in unseren Breiten auftretenden Außentemperaturen $t = x\,°C$ ist die zugehörige Schallgeschwindigkeit durch die Formel $c \approx (331{,}6 + 0{,}6\,x)\,\frac{m}{s}$ näherungsweise bestimmt. Für die Temperaturen $t = 0\,°C$ und $t = 20\,°C$ folgt hieraus $c \approx 331{,}6\,\frac{m}{s}$ bzw. $c \approx 343{,}6\,\frac{m}{s}$. – Jedoch breitet sich Schall mit abnorm großer Amplitude (Lautstärke), wie er z. B. bei der Detonation von Explosivstoffen, durch starke elektrische Funken und bei einem Überschallflugzeug entsteht, in Herdnähe mit größerer Geschwindigkeit (Es wurden Geschwindigkeiten bis $500\,\frac{m}{s}$ gemessen) aus.

Höhen sowie der in Wirklichkeit nicht durchweg zutreffenden Annahme konstanter Schallgeschwindigkeit (Beachte den letzten Teil der Fußnote 1!) die Schallausbreitung von einem Flugzeug mit Überschallgeschwindigkeit erklären: Der Schall breitet sich vom Flugzeug aus nach allen Seiten aus. Um uns beim Anfertigen einer Zeichnung auf ein ebenes Problem beschränken zu können, betrachten wir die Schallausbreitung zunächst nur in einer Ebene, in der allerdings die geradlinige Flugroute des mit der konstanten Geschwindigkeit v fliegenden Flugzeuges liegt. Das Flugzeug möge sich zu einem bestimmten Zeitpunkt im Punkt P seines Flugweges befinden. Wir wollen feststellen, in welchen Punkten unserer Ebene zu diesem bestimmten Zeitpunkt der Knall der Kopfwelle unseres Flugzeuges zu hören ist. Zentren der Schallausbreitung sind alle Punkte der Flugroute, die das Flugzeug schon passiert hat. Betrachten wir zunächst ein solches Zentrum Q. Bezeichnen wir die Zeit, die unser Flugzeug zum Zurücklegen der Strecke $\overline{QP}$ benötigte, mit t, so gilt nach dem Gesetz der geradlinig-gleichförmigen Bewegung

$$\overline{QP} = vt. \qquad \text{(Bild 3)}$$

Vom Zentrum Q aus hat sich der Schall inzwischen um die Strecke ct, wobei c die Schallgeschwindigkeit ist, nach allen Seiten ausgebreitet (Bild 4).

Analog gilt das für alle Punkte der Flugroute, die das Flugzeug zu dem gewählten Zeitpunkt schon passiert hat. Wir wollen zunächst zwei weitere solche Zentren betrachten, die wir mit R und S bezeichnen wollen. Für die Abstände $\overline{RP}$ und $\overline{SP}$ soll gelten:

$$3\,\overline{SP} = 2\,\overline{RP} = \overline{QP}.\text{“}$$

Hier stellt Steffen die erste Zwischenfrage an seinen aufmerksam zuhörenden Bruder: „Vergleiche die Zeiten, die unser Flugzeug zum Durchfliegen der Strecken $\overline{QP}$, $\overline{RP}$ und $\overline{SP}$ benötigt!“ Prompt kommt die Antwort: „Diese Zeiten verhalten sich wie $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$.“ – „Im gleichen Verhältnis stehen also auch die Radien der Schallausbreitung von den Punkten Q, R und S zum angenommenen Zeitpunkt.“ Den letzten Satz fügt Klaus erst seiner Antwort hinzu, nachdem Steffen die Skizze in der folgenden Weise ergänzt hat (Bild 5).

Klaus schaut sich noch eine Zeitlang diese Zeichnung an. Dann steht er auf und sucht sich am Ufer des Sees mit geringer Wassertiefe einen flachen, runden Stein. Er wirft diesen Stein flach über die Wasseroberfläche.

[2] Probiert aus, wie sich das beobachtete Bild ändert, wenn der Stein statt in ruhendes Wasser in strömendes Wasser geworfen wird. Daran erkennt ihr, daß die von uns angestellten Betrachtungen über die Schallausbreitung nur unter der Bedingung der Windstille gelten.

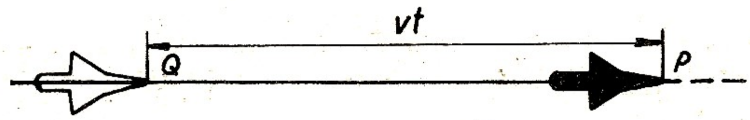


Bild 3

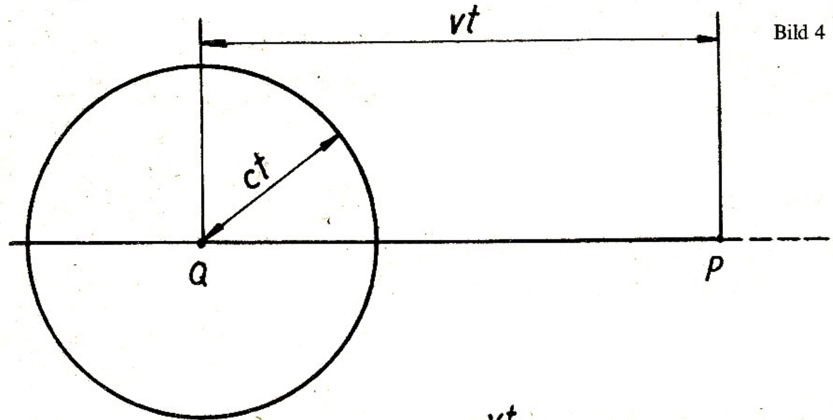


Bild 4

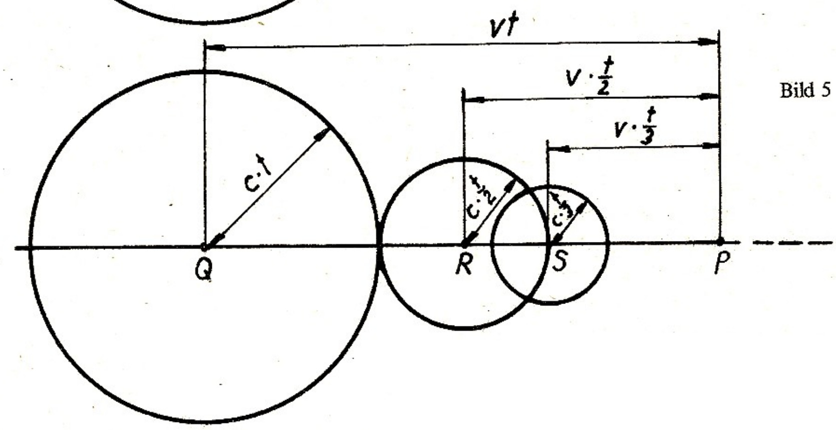


Bild 5

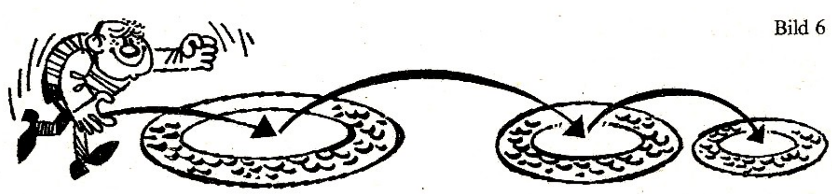


Bild 6

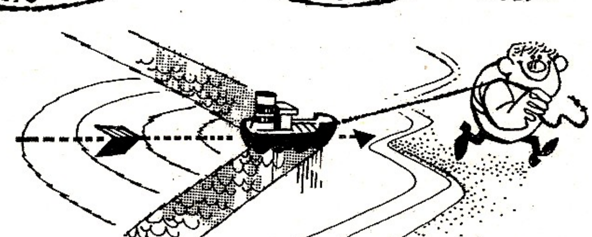


Bild 7

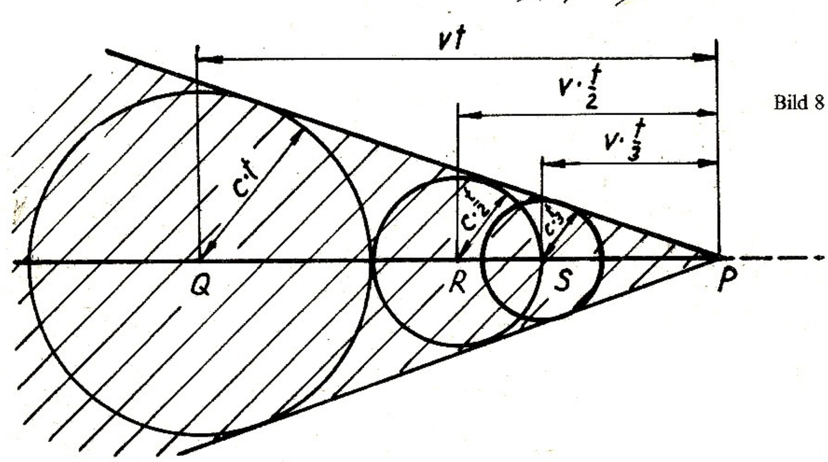


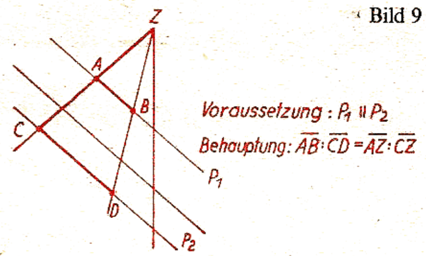
Bild 8

Der Stein setzt ein erstes Mal mit seiner kreisförmigen Breitfläche auf der Wasseroberfläche auf und wird wieder in die Höhe gestoßen. Nach mehrmaligem Aufsetzen versinkt der Stein schließlich im Wasser. Beide Brüder beobachten das Bild, das die Wasseroberfläche kurz danach bietet (Bild 6).
„Hast du damit bereits ein Modell der Schallausbreitung von einer schnell bewegten Schallquelle geschaffen?" fragt Steffen. „Nein, denn der Stein hat nur drei Stellen der Wasseroberfläche zu Zentren von Wasserwellen gemacht. ... Dann müßte der Stein direkt an der Grenze zwischen Wasser und Luft, also an der Wasseroberfläche entlang fliegen. ..." Klaus ist nachdenklich geworden. Nach kurzer Zeit sieht man Klaus ein Stück Holz an einem Faden mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig durch das Wasser ziehen. Die Brüder beobachten zwei vom „Schiff" auslaufende, mit der Fahrtroute gleiche Winkel bildende geradlinige Wellenzüge (Bild 7).
Klaus kommentiert das Experiment: „Die Geschwindigkeit unseres Schiffes muß größer sein als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wasserwellen, damit das beobachtete Wellenbild zustande kommt. Je schneller wir unser Boot fahren lassen, um so spitzer ist der Winkel, den die beiden geradlinigen Wellenzüge mit der Fahrtroute bilden. Damit haben wir ein Modell der Schallausbreitung von einem Überschallflugzeug gefunden."
In die Skizze mit den drei Kreisen (Bild 5) zeichnet Steffen die gemeinsamen Kreistangenten ein. Dabei spricht er: „Bis zu diesen beiden Strahlen hat sich zu dem von uns gewählten Zeitpunkt der Schall ausgebreitet." Bei diesen Worten schraffiert Steffen die von diesen Strahlen begrenzte, sich nach dem Unendlichen erstreckende Fläche. „Wir betrachteten die Schallausbreitung von dem Flugzeug aus zunächst nur in einer Ebene, der Schall breitet sich natürlich im ganzen Raum aus und nicht nur in einer Ebene wie die Wasserwellen (Bild 8).
Die von uns angestellte Überlegung gilt jedoch für jede Ebene, die die Gerade der Flugroute enthält. Deshalb kann gesagt werden: *Unter den Voraussetzungen der Windstille und gleicher Lufttemperatur in allen Höhen sowie der Annahme konstanter Schallgeschwindigkeit befindet sich die von einem Überschallflugzeug erzeugte Kopfwelle zu jedem Zeitpunkt auf der Mantelfläche eines Kegels*[3]. *An dessen Spitze möge sich jeweils das Flugzeug befinden. Die Achse fällt mit dem Flugweg des Flugzeugs zusammen. Der Öffnungswinkel des Kegels ist durch die Geschwindigkeit des Flugzeugs bestimmt.*

[3] Diesen „Schallkegel" bezeichnet man nach dem Physiker *Ernst Mach* (1838 bis 1916) als *Machschen Kegel*.

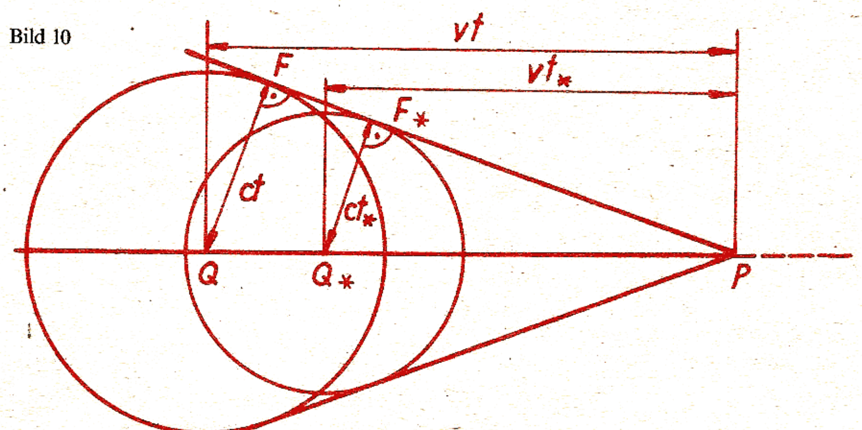
Zur Begründung dieser Aussage werden wir uns auf den zweiten Teil des Strahlensatzes stützen."
Hierauf antwortet Klaus sicher und fertigt dabei folgende Skizze an: „Werden die Strahlen eines Büschels von einer Parallelenschar geschnitten, so verhalten sich je zwei Parallelenabschnitte, die zwischen gleichen Strahlen liegen, zueinander wie die zugehörigen Strahlenabschnitte ein und desselben Strahls." Steffen radiert in der Skizze (Bild 8)

Bild 9



die Kreise um R und S weg. Danach argumentiert er: „Unsere Behauptung wird dadurch bestätigt, daß neben dem Punkt Q ein weiterer vom Flugzeug bereits passierter, ansonsten beliebiger Punkt Q_* der Flugroute betrachtet wird. Die Zeit t_*, die das Flugzeug zum Durchfliegen der Strecke $\overline{Q_*P}$ benötigte, ist bestimmt durch das Gesetz der geradlinig-gleichförmigen Bewegung $\overline{Q_*P}=vt_*$. Wir betrachten den Kreis um Q_*, der die gezeichneten Strahlen berührt." Während Steffen diese Worte spricht, zeichnet er die folgende Skizze:

Bild 10



Klaus bemerkt dazu: „Die von dir gezeichneten Strahlen sind also jetzt als die vom Punkte P an den Kreis um Q gezogenen Tangenten aufzufassen." Nun schlußfolgert Steffen: „Laut 2. Teil des Strahlensatzes gilt

$$\overline{F_*Q_*}:\overline{FQ}=\overline{Q_*P}:\overline{QP}.$$

Mittels der in der Skizze angegebenen Beziehungen folgt:

$$\overline{F_*Q_*}:ct=vt_*:vt."$$

Durch Umstellen dieser Proportion nach $\overline{F_*Q_*}$ und durch Kürzen erhält Steffen die Beziehung $\overline{F_*Q}=ct_*$. „Also ist der eben um Q betrachtete Kreis gerade der, bis zu dem die von Q_* sich ausbreitende Druckstörung vorgedrungen ist", schlußfolgert Steffen.

Schließlich ergänzt er noch: „Daß tatsächlich in jedem inneren Punkt des betrachteten Kegels die Motorengeräusche zu hören sind – vorausgesetzt, daß ihre Stärke nicht wegen zu großer Entfernung des Flugzeuges unter der Hörbarkeitsschwelle liegt oder daß sie wegen der Dämpfung (Reibungserscheinung der Luft) gar nicht bis zum Beobachter gelangen – kannst du dir nunmehr selbst überlegen."
Man sieht es dem Gesicht von Klaus an, daß er noch immer etwas grübelt. Und dann rückt er damit heraus: „Es müßte doch möglich sein, aus dem Öffnungswinkel des ‚Schallkegels' eines Überschallflugzeuges auf dessen Geschwindigkeit zu schließen." Steffen antwortet: „Du hast recht. Doch da du dir bei dieser Erklärung ein Nomogramm[4] anfertigen sollst, mit dem du künftig die Geschwindigkeit eines über dich hinweg fliegenden, einen geradlinigen Kurs steuernden Überschallflugzeuges bestimmen kannst, will ich mit dieser Erklärung erst zu Hause beginnen. Dort stehen uns alle Zeichengeräte wie Winkelmesser, Lineal und Zirkel zur Verfügung." Nach einer kurzen Pause ergänzt Steffen: „Bis zu dieser Aussprache sollst du die folgenden Aufgaben lösen:

▲ *Aufgabe:* Rechne die Schallgeschwindigkeit $v=340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ um in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$!

▲ *Aufgabe:* Das sowjetische Jagdflugzeug Suchoi III hat die Spitzengeschwindigkeit $v=2\,300\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und der sowjetische Panzer T 54 hat die Spitzengeschwindigkeit $v=56\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

a) Rechne diese Geschwindigkeiten um in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$!

b) Berechne für diese Spitzengeschwindigkeiten v jeweils den Quotienten $\frac{v}{c}$, wobei $c=340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ die Schallgeschwindigkeit ist!

W. Träger

[4] Siehe Beitrag „Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen" in „alpha" 2/70 bis 6/70.

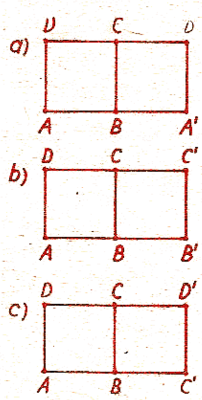
Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. März 1972

5▲810 Junge Pioniere haben im Schulgarten insgesamt 936 Erdbeerpflanzen gesetzt. Auf jedem der vier angelegten Beete stehen gleichviel Pflanzen. Auf einem dieser Beete geht durch unsachgemäße Pflege der neunte Teil der Pflanzen ein. Wieviel Erdbeeren gehen verloren, wenn pro Pflanze mit einem Ertrag von 15 Erdbeeren gerechnet werden kann? *Mathematikfachlehrer H. Winkler OS Hartmannsdorf*

5▲811 Bestimme die Summe aus allen zweistelligen natürlichen Zahlen, die sämtlich Primzahlen sind und deren Quersummen ebenfalls Primzahlen sind! *Sch.*

W 5 ■ 812 Jedes der unter den Zeichnungen a), b) und c) abgebildeten Quadrate *ABCD* wurde einer besonderen Bewegung unterworfen. Gib an, um welche Art von Bewegung es sich jeweils handelt, und ermittle die Bewegungsgrößen! *Volker Zillmann, 801 Dresden*



W 5 ■ 813 Eine der größten Binnenschleusen Europas liegt an der Elbe bei Magdeburg. Die Schleusenkammer hat eine Länge von 325 m und ist 25 m breit und 4,3 m hoch. Welches Volumen hat die eingelassene Wassermenge, wenn der Wasserspiegel seinen höchsten Stand 0,5 m unter der Oberkante der Schleusenkammer hat? Runde das Ergebnis (in Kubikmetern) auf Vielfache von Hundert! *Aus „Physik in der Schule"*

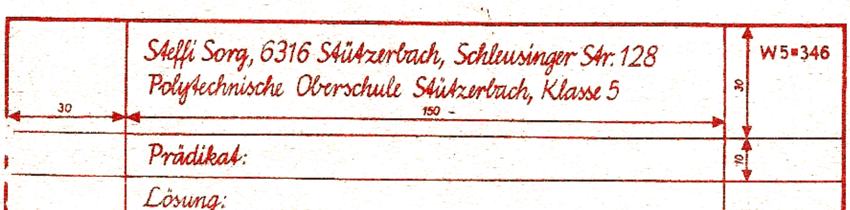
* 5 * 814 Auf der Straßenbahnlinie 4 der Dresdner Verkehrsbetriebe (Radebeul—Pillnitz) verlassen werktags die ersten Wagenzüge Radebeul um 4.50 Uhr und Pillnitz um 4.38 Uhr. Tagsüber verkehren die Wagenzüge in beiden Richtungen in einem zeitlichen Abstand von jeweils 15 Minuten. Die Fahrzeit in beiden Richtungen beträgt 89 Minuten. Wie vielen Wagenzügen des Gegenverkehrs begegnet ein Wagenzug auf der Gesamtstrecke, der um 8.35 Uhr in Radebeul abfährt? *Dr. G. Hesse, 8122 Radebeul*

* 5 * 815 Aus je einem Blatt Schreibmaschinenpapier (Format A 4) von 0,1 mm Stärke werden acht kleinere Notizzettel gleichen Formats durch Zerschneiden hergestellt. Diese Notizzettel sollen in einem Kästchen, das eine innere Höhe von 4,8 cm besitzt, aufbewahrt werden. Wie viele Bogen A 4 müssen zerschnitten werden, um das anfangs leere Kästchen zu füllen? *Sch.*

6▲816 Beweise, daß für die Höhe h zur Hypotenuse $\overline{AB}$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC stets $h = \frac{a \cdot b}{c}$ gilt! *Frank Kolwe, 128 Bernau, 7. Klasse*

6▲817 Man schüttet 50 Stahlkugeln gleichen Durchmessers in einen Meßzylinder, der mit 75 ml Wasser gefüllt ist. Der Wasserstand steigt danach auf 87 ml. Welches Volumen hat eine Kugel? *Aus „Physik in der Schule"*

W 6 ■ 818 Bei einer Geschwindigkeitskontrolle durch die Volkspolizei durchfuhr ein Pkw innerhalb einer geschlossenen Ortschaft (keine Schnellstraße) die Meßstrecke s von 200 m in einer Zeit t von 10 s. Verhielt sich der Kraftfahrer entsprechend der Straßenverkehrsordnung? *Aus „Physik in der Schule"*



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h., für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit * versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben *seiner oder einer höheren Klassenstufe* einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Endergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

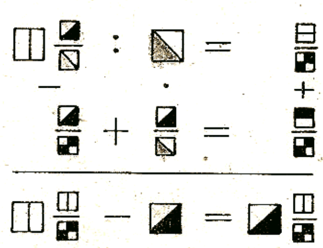
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgeben.
Der Jahreswettbewerb 1971/72 läuft von Heft 5/71 bis Heft 2/72. Zwischen dem 1. und 10. September 1972 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/71 bis 2/72 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 5/72 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/71 bis 2/72) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, welche bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1971/72 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).
Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen *richtig frankiert* sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

W 6 ■ 819 Welche Kantenlänge besitzt ein Würfel, bei dem die Maßzahl seiner Oberfläche (in cm^2) gleich der Maßzahl seines Volumens (in cm^3) ist?

Volker Zillmann, 801 Dresden

* 6 * 820 Ist es möglich, daß in einem gleichschenkligen Trapez die Mittellinie genauso lang ist wie eine Diagonale? Die Antwort ist zu begründen! *Sch.*

* 6 * 821 In dem folgenden Zahlenrätsel, das entgegen den üblichen Zahlenrätseln auch gebrochene Zahlen enthält, bedeuten verschiedene Symbole verschiedene Grundziffern und gleiche Symbole jeweils gleiche Grundziffern. Alle Grundziffern sind von Null verschieden. Alle im Zahlenrätsel enthaltenen Brüche sind echte Brüche; bei jedem Bruch sind Zähler und Nenner teilerfremd. Entschlüssele dieses Zahlenrätsel! *T.*



7 ▲ 822 Die Schüler dreier Oberschulen eines Stadtbezirks sammelten insgesamt 4 t 300 kg Altpapier. Die Schüler der Schule A sammelten 840 kg mehr, die Schüler der Schule B hingegen 650 kg weniger als die Schüler der Schule C. Die Schüler beschlossen, den Erlös der Altstoffsammlung dem Solidaritätskonto für Vietnam zu überweisen. Wieviel Mark konnten die Schüler jeder der drei Schulen dem Solidaritätskonto zuführen, wenn der Altstoffhandel für 1 kg Altpapier 15 Pf zahlt?

Mathematikfachlehrer Karl-Heinz Gentzsch, Meuselwitz

7 ▲ 823 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB}=a$ und $\overline{BC}=b$, und es gelte $a > b$. Die Seite $\overline{AB}$ ist in drei kongruente Teilstrecken zu teilen. Der Teilpunkt, der dem Punkt B am nächsten liegt, sei E. Verbindet man C mit E, so entsteht ein Trapez $AECD$. Es ist der Flächeninhalt dieses Trapezes allein durch die Seiten a und b des gegebenen Rechtecks auszudrücken.

Mathematikfachlehrer Karl-Heinz Gentzsch, Meuselwitz

W 7 ■ 824 Eine Klasse schrieb eine Leistungskontrolle. Genau ein Drittel der beteiligten Schüler hatte eine Aufgabe falsch, genau ein Viertel hatte zwei Aufgaben und genau ein Sechstel drei Aufgaben falsch; genau ein Achtel hatte alle vier Aufgaben falsch. Wie viele Schüler hatten alle Aufgaben richtig gelöst, wenn dieser Klasse nicht mehr als 30 Schüler angehören?

Mathematikfachlehrer Karl-Heinz Gentzsch, Meuselwitz

W 7 ■ 825 Klaus hat im Verlaufe des Schuljahres mehrere schriftliche Klassenarbeiten im Fach Mathematik geschrieben; er erhielt dabei nur die Noten 1 oder 2. Der Zensurendurchschnitt aus diesen Arbeiten beträgt genau 1,4. Wieviel Klassenarbeiten hat Klaus mindestens mitgeschrieben?

H. Werner, Ing. f. Rechenelektronik, 111 Berlin

* 7 * 826 Axel, Bruno, Dieter und Ernst sind die vier Teilnehmer der Endrunde eines Schachturniers. Es hat jeder gegen jeden zweimal zu spielen, also Spiel und Rückspiel. Für eine gewonnene Partie wird 1 Punkt, für eine unentschiedene $\frac{1}{2}$ Punkt, für eine verlorene kein Punkt vergeben. Bruno und Dieter erzielten zusammen einen Punkt mehr als Axel und Ernst zusammen erreichten. Dieter und Ernst erkämpften zusammen 7 Punkte. Axel und Dieter konnten zusammen nur 5 Punkte weniger erreichen, als Bruno und Ernst zusammen hatten. Wie viele Punkte errang jeder der vier Teilnehmer?

Ingolf Kunath, EOS Meißen, 10. Kl.

* 7 * 827 Gegeben seien sechs aufeinanderfolgende einstellige natürliche Zahlen. Setze aus den ersten drei dieser Zahlen die größtmögliche dreistellige Zahl z_1 und aus den letzten drei dieser Zahlen die kleinstmögliche dreistellige Zahl z_2 zusammen. Beweise, daß die Differenz z_2-z_1 stets 135 beträgt und daß die Summe z_1+z_2 stets durch 111 teilbar ist!

Sabine Bartelt, Neubrandenburg

8 ▲ 828 Man beweise, daß für jede Primzahl, die größer als 5 ist, das Produkt

$$P=(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$$

durch 360 teilbar ist.

Dr. Gerhard Hesse, Radebeul

8 ▲ 829 Es sei z eine natürliche Zahl, deren erste 300 Grundziffern (im dekadischen System) sämtlich gleich 1 und deren weitere Grundziffern sämtlich gleich 0 sind:

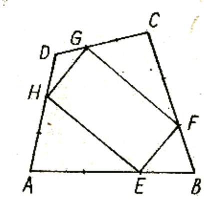
$$z=\underbrace{111\ldots11}_{300\text{ Ziffern}}\underbrace{000\ldots00}_{\text{beliebig viele Ziffern}}$$

Man untersuche, ob die Zahl z gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl sein kann.

Gerd Weißenborn, Berlin, EOS „Heinrich Hertz", Kl. 10

W 8 ■ 830 Bei den Europa-Leichtathletikmeisterschaften in Helsinki im August 1971 wurden insgesamt 38 Goldmedaillen, 39 Silbermedaillen und 37 Bronzemedaillen vergeben. Die Mannschaft der DDR, die in der Länderwertung den ersten Platz einnahm, erkämpfte insgesamt 32 Medaillen. Sie erhielt genau ein Drittel aller Silbermedaillen und mehr als ein Sechstel, jedoch weniger als ein Fünftel aller vergebenen Bronzemedaillen.
Wieviel Gold-, Silber- bzw. Bronzemedaillen erhielt die Mannschaft der DDR? *L.*

W 8 ■ 831 Die hier abgebildete Figur stellt ein konvexes Viereck $ABCD$ dar, dessen Seiten sämtlich gedrittelt wurden. Es ist zu beweisen, daß die Teilungspunkte E, F, G und H die Eckpunkte eines Parallelogramms sind. *Sch.*



* 8 * 832 Es sind alle Primzahlen p anzugeben, für die die natürliche Zahl

$$z=p^2+1$$

wieder eine Primzahl ist. *T.*

* 8 * 833 Auf wieviel verschiedene Weisen kann man den Betrag von 1 M wechseln, falls eine ausreichende Anzahl von 1-Pf-, 5-Pf-, 10-Pf-, 20-Pf- und 50-Pf-Stücken zur Verfügung steht? *L.*

9 ▲ 834 Es sei a eine ungerade natürliche Zahl, die größer als 1 ist. Dann ist auch die Zahl

$$b=\frac{(a-1)(a+1)}{2}$$

eine natürliche Zahl, weil $a-1$ und $a+1$ gerade natürliche Zahlen sind.
Es ist zu beweisen, daß unter diesen Voraussetzungen die Summe der Quadrate der Zahlen a und b gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist, daß also

$$a^2+b^2=c^2$$

gilt, wobei c eine natürliche Zahl ist.
Ferner ist die Zahl c in den Fällen $a=3, 5, 7$ und 9 zu berechnen.

Flieger Falk Schellenberg, NVA

W 9 ■ 835 a) Der Betrag der Differenz der dritten Potenzen zweier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sei gleich 2611. Wie lauten diese Zahlen?
b) Der Betrag der Differenz der vierten Potenzen zweier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sei gleich 39775.
Wie lauten diese Zahlen?
Hinweis zur Lösung: Wir verweisen auf die Lösung der Aufgabe 554 (Heft 3, 1970, S. 63; Lösung in Heft 6, 1970, S. 141).

Reinhard Schulz, Rotta, Fachlehrer für Mathematik

W 9 ■ 836 Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC! Lege auf der über C hinaus verlängerten Seite $\overline{BC}$ einen äußeren Punkt F fest, und verbinde F mit dem Mittelpunkt D der Seite $\overline{AB}$! Der Schnittpunkt der Geraden AC und DF sei E. Ziehe durch C eine Parallele zur Geraden DF! Ihr Schnittpunkt mit der Geraden AB sei der Punkt G.
Es ist zu beweisen, daß die Strecke $\overline{CG}$ das harmonische Mittel zu den Strecken $\overline{ED}$ und $\overline{DF}$ ist, d. h., daß $\overline{CG}=\frac{2\cdot\overline{ED}\cdot\overline{DF}}{\overline{ED}+\overline{DF}}$ gilt.

Sch.

* 9 * 837 Im neunten Fünfjahrplan (1971 bis 1975) der UdSSR wird sich das jährliche Nationaleinkommen von 266,3 Mrd. Rubel auf 373 Mrd. Rubel erhöhen, wobei sich der Konsumtionsfonds um 41% und der Akkumulationsfonds um 37,5% erhöht.
Es sollen der Konsumtionsfonds und der Akkumulationsfonds (in Mrd. Rubel) am Ende des neunten Fünfjahrplans bestimmt werden.
Bemerkung: Unter dem Konsumtionsfonds versteht man den Teil des Nationaleinkommens, der für den individuellen oder den gesellschaftlichen Verbrauch bestimmt ist, unter dem Akkumulationsfonds den Teil, der für die Erweiterung der Industrieanlagen, für Neubauten usw. bestimmt ist.

Dozent L. M. Lopowok, Woroschilowgrad, UdSSR

* 9 * 838 Es sei $ABCD$ ein Rechteck, dessen Umfang 14 cm beträgt und dessen Diagonale $\overline{AC}$ um 2 cm länger als die Seite $\overline{BC}$ ist. Es sind die Längen der Seiten und der Diagonale zu berechnen.

Wolfgang Huschmann Oberschule V, Oelsnitz, Kl. 8

10/12 ▲ 839 a) Es ist zu beweisen, daß

$$\sqrt{10}-\sqrt{9}<\sqrt{9}-\sqrt{8} \text{ gilt.} \qquad (1)$$

b) Es ist zu beweisen, daß für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1} \text{ gilt.} \qquad (2)$$

Burkhard Neumann, OS Rangsdorf, Kl. 9

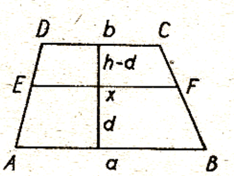
W 10/12 ■ 840 Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$x^4-2x^2-400x=9999$ zu ermitteln.

Bemerkung: Diese Aufgabe wurde bereits von dem indischen Mathematiker *Bhâskara* (1114 bis 1185) gestellt und gelöst (vgl. A. P. Juschkewitsch; Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Leipzig: B. G. Teubner 1964, S. 140).

Wolfgang Riedel, Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, Spezialklasse 12

W 10/12 ■ 841 In einem Trapez $ABCD$, von dem die Grundseiten $\overline{AB}=a=9$ cm, $\overline{CD}=b=4$ cm und die Höhe $h=5$ cm gegeben sind, ist zu der Grundseite AB im Abstand d die Parallele gezogen, die die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ des Trapezes in den Punkten E und F schneidet (vgl. die Abb.).



1. Die Länge x der Strecke $\overline{EF}$ ist als Funktion des Abstandes d und umgekehrt der Abstand d als Funktion der Länge x darzustellen.
2. Der Abstand d ist allgemein und numerisch zu berechnen, wenn die Länge x gleich dem

a) arithmetischen, c) harmonischen,
b) geometrischen, d) quadratischen

Mittel der Längen der beiden Grundseiten ist.
(Dabei versteht man unter dem quadratischen Mittel der Zahlen a und b die Zahl $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.)
3. In jedem dieser vier Fälle ist das Verhältnis der Flächeninhalte A_1 und A_2 der durch die Parallele EF erzeugten beiden Teiltrapeze $EFCD$ und $ABFE$ allgemein und numerisch zu bestimmen.
4. In welchem Falle geht die Parallele EF durch den Schnittpunkt S der Diagonalen des Trapezes $ABCD$?
5. In welchem Falle sind die beiden Teiltrapeze $EFCD$ und $ABFE$ einander ähnlich? (Die Antwort ist jeweils zu begründen.)

Rudolf Schalle, Halle, Dozent an der ABF i. R., Verdienter Lehrer des Volkes

* 10/12 * 842 Man beweise den folgenden Satz:
Es sei $P_1P_2\ldots P_{2n}$ ein Sehnenvieleck mit gerader Eckenzahl ($2n\geqq 4$), d. h., die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ liegen sämtlich auf einem Kreis. Ferner mögen die Innenwinkel dieses Vielecks die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ haben. Dann gilt stets

$$\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2n-1}=\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2n}.$$

Albrecht Böttcher, EOS „Johannes R. Becher“, Annaberg-Buchholz, Kl. 11

* 10/12 * 843 Es seien

$$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

die Summe von n positiven reellen Zahlen ($n\geqq 2$) und

$$\bar{s}_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$$

die Summe der reziproken Werte dieser Zahlen. Man beweise, daß dann stets

$$s_n\cdot\bar{s}_n\geqq n^2 \text{ gilt.}$$

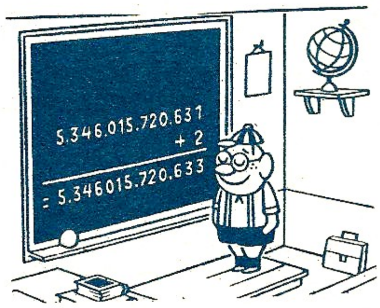
Wolfgang Riedel, TH Karl-Marx-Stadt, Spezialklasse 12

Johannes Kepler –
Astronom und Mathematiker
Fortsetzung von Seite 123

Trotz des Drängens der österreichischen Ständeregierung, die Tafeln fertigzustellen, wandte sich Kepler, unterbrochen durch Reisen von Linz nach Württemberg, wo er seine in einem Hexenprozeß angeklagte Mutter erfolgreich verteidigte, seinem eigentlichen Lieblingsgebiet, der Aufdeckung von „Harmonien“, d. h. von mathematischen Gesetzmäßigkeiten in Natur und Kunst zu. Auf diesem Wege wieder zu astronomischen Betrachtungen veranlaßt, fand er am 15. Mai 1618 das dritte Planetengesetz. Es sagt aus, daß sich die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen verhalten. Zusammen mit vielen anderen Erkenntnissen, u. a. auch über Fragen der Musik, veröffentlichte Kepler das dritte Planetengesetz im Werk „Harmonices mundi“ (Weltharmonie), das den Gipfelpunkt seines wissenschaftlichen Lebenswerkes darstellt. Wenige Tage vor dem Abschluß der Arbeit an den „Harmonices mundi“ brach (durch die Ereignisse in Prag am 23. Mai 1618 ausgelöst) der Dreißigjährige Krieg aus.
Schließlich kam noch ein allerdings glückliches Unglück („felix calamitas“), wie Kepler selbst es nannte, hinzu, das die Fertigstellung der Tafeln verzögerte. Gerade um 1620 nämlich wurde der Gebrauch von Logarithmen in größerem Umfang üblich und bekannt (durch die Arbeiten von Neper, Bürgi, Briggs). Logarithmisches Rechnen ist natürlich zur Berechnung, aber auch zur Benutzung von astronomischen Tafeln von größter Bedeutung. Kepler konnte also unmöglich auf die Benutzung von Logarithmen verzichten und schrieb zu diesem Zweck ein eigenes Logarithmenwerk „Chilias logarithmorum“ (1624), das den Gebrauch der Rudolphinischen Tafeln erleichtern soll.
Kepler fand schließlich in Ulm einen geeigneten Drucker für die Tafeln und überwachte alle Phasen der Produktion selbst, bis sie 1627 in Frankfurt am Main zur Messe käuflich vorlagen. Welche Leistung die Rudolphinischen Tafeln letztlich darstellten, läßt sich näherungsweise daran abschätzen, daß sie für die folgenden 100 Jahre die Grundlage aller astronomischen Rechnungen bildeten und durch keine bessere Tafel ersetzt wurden. Kontrollrechnungen, die erst in jüngster Zeit mittels elektronischer Rechenmaschinen durchgeführt wurden, zeigten, daß die Tafeln fast fehlerfrei sind, Kepler also mit einer bewundernswerten Genauigkeit gerechnet hat.
Seine Zeit hat ihm für diese Leistungen nicht gedankt. Sein ganzes Leben hatte er mit finanziellen und materiellen Schwierigkeiten zu kämpfen, die völlig hätten vermieden werden können, wenn er die ihm vertraglich zugesicherten Gelder aus seiner Anstellung als Astronom der Kaiser Rudolph II. und Matthias erhalten hätte.
So übersiedelte er 1628 nach Sagan in Schlesien, wo er von Wallenstein Unterstützung zu finden hoffte. Wallenstein bietet ihm eine Professur in Rostock an. Vor Antritt dieser Stellung (1630) will Kepler seine finanziellen Forderungen auf dem Reichstag geltend machen, der in Regensburg tagt. Durch die Strapazen der in Kriegszeiten durchgeführten Reise nach Regensburg erkrankt er und stirbt dort am 15. 11. 1630.
Wir ehren in Kepler einen bahnbrechenden Wissenschaftler, der heute mit seinen bedeutenden Leistungen der ganzen Menschheit gehört und der, wie der große Physiker unseres Jahrhunderts, Albert Einstein, sagte, „einfach unfähig war, etwas anderes zu tun, als auf jedem Gebiet für seine Überzeugung einzustehen“.

Th. Riedrich

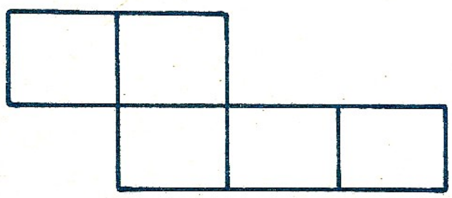
In freien Stunden alpha heiter



Ohne Worte (aus DLZ)

Schwierige Lage!

16 Hölzchen sind so angeordnet, wie es die Figur zeigt. Es sollen 2 Hölzchen, die aber mit im Spiel bleiben, derart umgelegt werden, daß aus den 5 kongruenten Quadraten 4 kongruente Quadrate entstehen.



Bitte ankreuzen!

Die Zahlen am Rande bedeuten, wieviel Karos in der entsprechenden Zeile bzw. Spalte angekreuzt werden sollen. (Es gibt mehrere Lösungen)

Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz

3	2	1	3	2	
					2
					1
×					4
×					3
					1

Ein wichtiger Beruf

DIETER v. BUNNAT
GERA

In welchem Zweig unserer Volkswirtschaft ist Herr Bunnat tätig?

Spieglein, Spieglein an der Wand

Jemand möchte sich in einem ebenen, senkrecht stehenden Spiegel von Kopf bis Fuß sehen. Wie groß muß der Spiegel dann mindestens sein?

Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz

Magisches Quadrat

Waagrecht und senkrecht werden die gleichen gefundenen Zahlen eingetragen:

a) eine Potenz 2^n mit fünfstelliger Lösung

b) $l=5+\sum_{a=0}^{0}(55550+a)$

p) Produkt zweier Primzahlen

$a\cdot b=p$

$a+p=(a-1)^{a-3}=(a-3)^{a-1}$

$b-a=6$

h) fünfstellige Zahl mit Ziffern $k;\ l;\ m;\ n;\ o$

$k+l^o-m^o=p$

$p=n-2$

$(l+m):2-2=k$

$\frac{l\cdot m}{5}=5$

a	l	p	h	a
l				
p			p	
h		p		
a				

Ilse Clauder, 4241 Spielberg

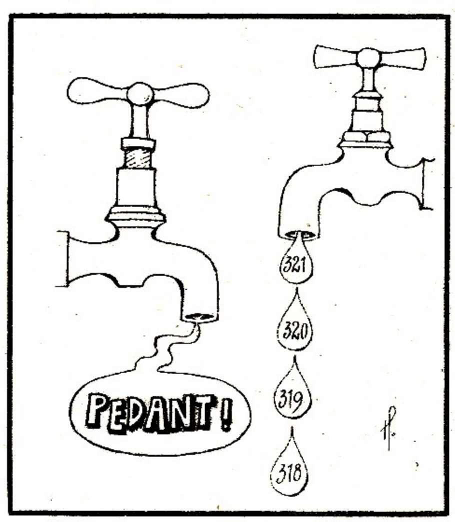
Rund um die 81

$9^2=81=(8+1)^2$

$729^2=(72+9)^3=81^3=[(8+1)(8+1)(8+1)]^2$

$9^{18}=81^9=81^{8+1}=(1+8)^{18}$

Ingenieur H. Decker, Köln



aus: Neues Leben 5/71 (H.-J. Starke)

Abschlußprüfung, Klasse 10

Die Aufgabe, in dem Ausdruck $x=\frac{\lg 5}{\lg 3-\lg 2}$ x ohne Benutzung des Tafelwerkes annähernd zu bestimmen, löste ein Schüler so:

$x=\frac{a^5}{a^3-a^2}=\frac{a^5}{a}=a^4$, also $x\approx 4$.

Kann man das richtige Ergebnis anerkennen?
Wie hätte man umformen können?

Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz

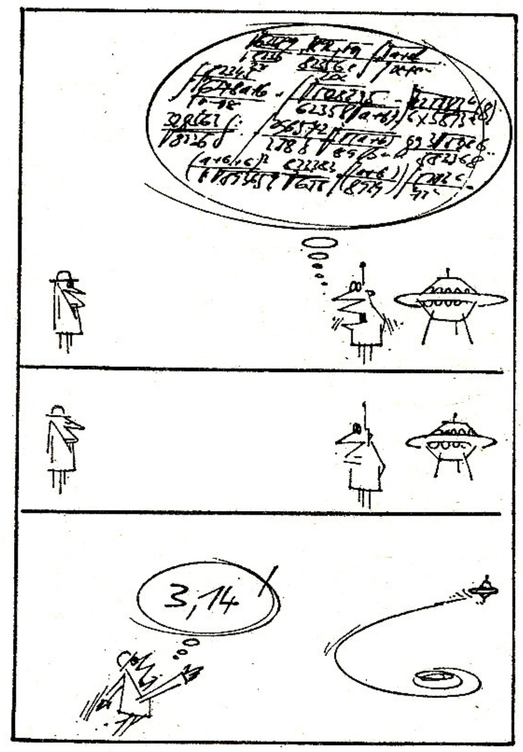
Vladimir Renčin, Praha

Silbenrätsel

Aus den Silben
a-by-chint-e-eu-gam-ge-ge-gel-gen-ka-ler-li-ly-ma-me-na-ni-nu-nungs-o-on-ord-pe-re-ra-run-rus-scheff-schin-sis-te-the-ti-tsche
sind 11 Wörter zu bilden, deren erste und dritte Buchstaben, von oben nach unten gelesen, den Namen eines bekannten Mathematikers und dessen Lebenswerk ergeben.

1. griechischer Buchstabe 2. Mathematiker (1707 bis 1783), fundamentale Arbeiten zur Variationslehre, zur Integral- und Differentialrechnung 3. Verbindungsgerade von Grund- und Aufriß eines Punktes 4. Mathematiker, Arbeiten zur numerischen Anwendung math. Methoden 5. Begriff aus der Trigonometrie 6. Mathematiker (1894 bis 1959), Untersuchungen auf dem Gebiet der Funktionstheorie, Zahlentheorie und modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung 7. Begriff aus der höheren Mathematik 8. Begriff zur Logarithmenfunktion 9. Mathematiker (1821 bis 1894), Begründer der Petersburger math. Schule 10. Verknüpfung mathematischer Größen 11. Vorschrift, Richtschnur

Mathematikfachlehrer H. Winkler, OS Hartmannsdorf

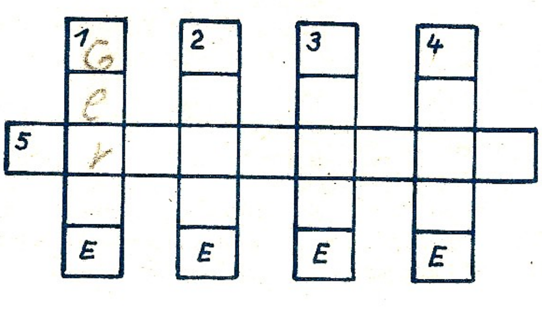


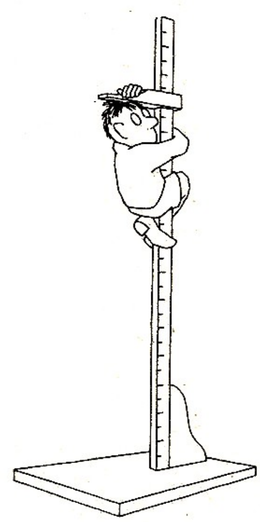
Boris, Paris

Mathematische Begriffe

1. Begriff, der bei den natürlichen Zahlen bereits ab Klasse 1 verwendet wird 2. Begriff aus der Geometrie, der ebenfalls bereits in der 1. Klasse auftaucht 3. Begriff aus der Kreislehre 4. Zentraler Begriff im gesamten Lehrgang der Mathematik 5. Begriff, der ab Klasse 1 verwendet wird.

Oberstudienrat G. Schulze, EOS Herzberg





Miroslaw Bartak, Bratislava

▲1▲ Udo gibt von dem Geldbetrag, den er bei sich hat, zunächst die Hälfte aus, von dem verbleibenden Restbetrag wieder die Hälfte, von dem restlichen Gelde nochmals die Hälfte. Er behält weniger als 5 Pfennig übrig. Welchen Geldbetrag könnte Udo bei sich gehabt haben?

▲2▲ Klaus erhält jeden Sonntag Taschengeld, stets den gleichen Geldbetrag. Er ist sehr sparsam und gibt ständig nur die Hälfte des erhaltenen Taschengeldes aus, um die andere Hälfte zu sparen. Nach acht Wochen hat Klaus schon mehr als 11 M, aber weniger als 17 M gespart. Wie hoch ist das wöchentliche Taschengeld von Klaus, wenn es sich um einen vollen Markbetrag handelt?

▲3▲ Uwe ist größer als Klaus. Bernd ist kleiner als Uwe. Klaus ist nicht so groß wie Bernd. Ordne diese drei Jungen nach ihrer Größe! Welche der drei Aussagen wird für die Lösung der Aufgabe nicht benötigt?

▲4▲ Ermittle alle natürlichen Zahlen n, die der Ungleichung $11 > 4 \cdot n - 2 > 6$ genügen!

▲5▲ Welche natürlichen Zahlen erfüllen zugleich die beiden Ungleichungen $3 \cdot x > 11$ und $7 \cdot x < 40$?

▲6▲ Peter sagt: „Ich habe ebenso viele Brüder wie Schwestern." Seine Schwester Marion meint: „Ich habe doppelt so viele Brüder wie Schwestern." Wieviel Jungen und wieviel Mädchen gehören zur Familie?

▲7▲ Eine Schachtel enthält genau zehn Buntstifte, am meisten blaue, am wenigsten grüne, gleichviel rote wie gelbe und keine weiteren andersfarbigen. Wie viele Buntstifte jeder Farbe sind es?
Löse die Aufgabe für den Fall, daß die Schachtel 14 Buntstifte enthält!

▲8▲ Die Seitenlängen zweier Quadrate unterscheiden sich genau um 1 cm, ihre Flächeninhalte um $9\,\mathrm{cm}^2$. Wie lang ist die Seite des kleineren, wie lang ist die des größeren Quadrates?

D. Michels/Th. Scholl

Mathematische Kurzweil aus der VR Bulgarien

Klassentreffen

Zwanzig Jahre nach ihrer Schulentlassung trafen sich die ehemaligen Schüler einer Klasse, um Erinnerungen auszutauschen und über ihre beruflichen Erfolge zu berichten. Jeder der Anwesenden überreichte jedem früheren Klassenkameraden ein Erinnerungsfoto von sich. Es wurden insgesamt 552 Fotos ausgetauscht. Wieviel Personen hatten sich zum Klassentreffen eingefunden?

Tischrunde

In einem Restaurant saßen die beiden Brüder Neumann und deren Freunde Stein und Ismer; sie tranken entweder Kaffee oder Tee oder Bier oder Wein. Keine zwei dieser Personen tranken das gleiche Getränk. Zwei dieser Personen haben den Vornamen Walter, die anderen Vornamen lauten Bernd und Peter. Keiner der beiden Brüder heißt Peter mit Vornamen. Peter trank Bier, Ismer hingegen Wein und Bernd Kaffee. Ordne den vier Vornamen die zugehörigen Familiennamen und die bestellten Getränke zu!

Auf einer Bank

Auf einer Bank saßen zwei Jungen mit den Vornamen Ingo und Peter und zwei Mädchen mit den Vornamen Wilma und Lena. Die Familiennamen der Mädchen lauten Weiß und Starke, die der Jungen Sander und Hauff. Wilma und Ingo saßen nicht am Rande der Bank. Die Kinder mit den Familiennamen Sander und Weiß saßen nicht nebeneinander. Rechts von Ingo saß das Kind mit dem Familiennamen Starke. Die Mädchen saßen nicht nebeneinander. Ordne jedem Vornamen den zugehörigen Familiennamen zu! In welcher Reihenfolge saßen die vier Kinder auf der Bank?

Wettlauf der Igel 26 3

Zwei Igel liefen um die Wette. Sie starteten zum gleichen Zeitpunkt, liefen auf zwei verschiedenen, aber gleichlangen Wegen und erreichten zugleich das gemeinsame Ziel. Der erste Igel stieß während seines Laufes auf keinerlei Hindernisse. Der zweite Igel hingegen stieß auf zwei Schildkröten, die er nicht umgehen konnte, so daß er seinen Lauf auf deren Panzer fortsetzte. Die Hindernisse behinderten diesen Igel nicht in seinem Lauf, das heißt, er erlitt weder einen Tempo- noch einen Zeitverlust. Die eine Schildkröte war 1 m lang und kroch dem Igel mit einer Geschwindigkeit von $6\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ entgegen. Die andere Schildkröte war 50 cm lang und kroch mit einer Geschwindigkeit von $18\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ in die gleiche Richtung wie der zweite Igel lief. Welcher war der Schnellere der beiden Igel?

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb

Alle Schulen des Kreises Schmalkalden (608); OS Clingen (5401); OS Westgreußen (5401); OS Mahlis (7261); EOS Worbis (562); OS Teterow I (205); F.-Schiller-OS Eilenburg (728); Station Jg. Techniker Meiningen (61); Prießnitz (731); OS Marienberg (934); OS Sayda (9201); OS Gottleuba (8302); 16. OS Rostock (25); OS Radis (4401); OS Rüdnitz (1281); OS II Blankenfelde (1636); OS Rotta (4401); OS Burkau (8502); K.-Kollwitz-OS Sondershausen (54); Spezialistenlager Mathematik des Kreises Worbis (562); Teiloberschule Neuenhofe (3241); OS Kavelstorf (2555); K.-Kollwitz-OS Bützow (262); OS Kuhfelde (3561); OS Schernberg (5401); OS Zepernick (1297); K.-Liebknecht-OS Berlin (116); OS Matgendorf (2051); OS Oberröblingen (4701); OS Haynrode (5601); R.-Arndt-OS Geisa (6222); OS Löderburg (3258); OS Stahnsdorf (1533); Lessing-OS Großpostwitz (8603); E.-Schneller-OS Burgstädt (9112); alpha-Club Jan-Hus-OS Naumburg (48); K.-Kollwitz-OS Wittenberg (46); E.-Hartsch-OS Gersdorf (2561); J.-Brinckmann-OS Goldberg (2862); OS Pfaffroda (9331); OS Jördenstorf (2051); Klub Jg. Mathematiker Cottbus (75); Diesterweg-OS Halle (402); AG Mathematik E.-Thälmann-OS Karl-Marx-Stadt (90); OS Bahratal (8302); OS II Blankenfelde (1636)

Beste Schulen im alpha-Wettbewerb

Schulen des Kreises Schmalkalden (1 900 Karten); POS Steinbach-Hallenberg (1 700 Karten); POS Teterow (800 Karten); POS Burkau (450 Karten); POS Oberschönau (400 Karten); POS Clingen (350 Karten).

Lösungen

5▲716 Wegen $10=1\cdot 10=2\cdot 5=5\cdot 2=10\cdot 1$ könnte der Faktor $n-2$ gleich 1, 2, 5 oder 10 sein.

$n-2$	n	$n+1$	$(n-2)\cdot(n+1)$
1	3	4	4
2	4	5	10
5	7	8	40
10	12	13	130

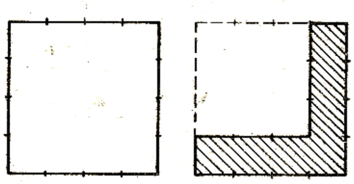
Nur $n=4$ erfüllt die Gleichung, und es gilt $(4-2)\cdot(4+1)=2\cdot 5=10$.

5▲717 Die Summe aus drei dreistelligen Zahlen ist stets kleiner als 3000. Deshalb kann y entweder 1 oder 2 sein.
Es sei $y=1$; dann ist $x=8$, da die Summe der Einerstellen auf Null endet.
Es sei $y=2$; dann ist $x=6$, da die Summe der Einerstellen auf Null endet.
Die Aufgabe besitzt genau eine Lösung, und zwar

$$\begin{array}{r} 811 \\ +\ 181 \\ +\ 118 \\ \hline 1110 \end{array}$$

Für $y=2$ und damit $x=6$ erhalten wir $622+262+226\neq 2220$.

W 5■718 a) Die beiden Abbildungen stellen das aus 16 Stäbchen gelegte Quadrat und eine durch Umlegen von Stäbchen entstehende Figur mit einem Flächeninhalt von 7 cm² dar.



b) Es sind $2\cdot 99=198$ Stäbchen umzulegen, damit der Flächeninhalt der entstehenden Figur möglichst klein wird. Aus $99\cdot 99=9801$ folgt, daß der Flächeninhalt sich – verglichen mit dem des Quadrates – um 9801 cm² verkleinert.

W 5■719 Wir bezeichnen das Lebensalter (in ganzen Zahlen) von Doris mit D, von Carmen mit C, von Barbara mit B, von Evelin mit E und von Angelika mit A. Dann gilt wegen b) und c) $D<B<C=14$, also wegen d) $D<B<C=14<E$, also wegen a) und e) $A<D<B<C=14<E=A+5$.
Daraus folgt $B\leqq 13$, $D\leqq 12$, $A\leqq 11$ und wegen $A>10$ hieraus $A=11$, $D=12$, $B=13$, $C=14$, $E=A+5=16$.
Angelika ist daher 11 Jahre, Doris 12 Jahre, Barbara 13 Jahre, Carmen 14 Jahre und Evelin 16 Jahre alt.

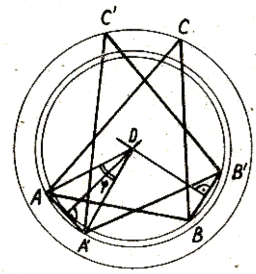
***5*720** Wegen $6=1\cdot 6=2\cdot 3=3\cdot 2=6\cdot 1$ könnten die Faktoren
a) $m+1=1$ und $2n-1=6$,
b) $m+1=2$ und $2n-1=3$,
c) $m+1=3$ und $2n-1=2$,
d) $m+1=6$ und $2n-1=1$ sein.
Aus a) folgt $m=0$; es gibt keine natürliche Zahl n, die die Gleichung $2n-1=6$ erfüllt.
Aus b) folgt $m=1$ und $n=2$ und damit $(1+1)\cdot(2\cdot 2-1)=2\cdot 3=6$.
Aus c) folgt $m=2$; aber es gibt keine natürliche Zahl n, die die Gleichung $2n-1=2$ erfüllt.
Aus d) folgt $m=5$ und $n=1$ und damit $(5+1)\cdot(2\cdot 1-1)=6\cdot 1=6$.
Die Gleichung besitzt also genau zwei Lösungen; es sind dies die Zahlenpaare (1, 2) und (5, 1).

***5*721** $h=22222+32354=54576$;
$g=h:13644=54576:13644=4$;
$f=g\cdot 4=4\cdot 4=16$; $e=f:8=16:8=2$;
$d=e\cdot 5=2\cdot 5=10$; $c=d-1=10-1=9$;
$b=c-8=9-8=1$; $a=b+2=1+2=3$;
$x=a-3=3-3=0$.

***5*722** Es sei x die Länge, um die jede Seite des Rechtecks zu verlängern ist; dann gilt $(6+x)\cdot(9+x)=304$.
Aus $304=2\cdot 152=4\cdot 76=8\cdot 38=16\cdot 19$ folgt, daß $x=10$ ist. Es gilt nämlich $(6+10)\cdot(9+10)=16\cdot 19=304$. Jede Seite des Rechtecks muß um 10 cm verlängert werden.

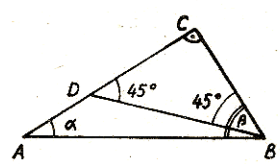
6▲723 Alle Zahlen, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, sind durch 3 teilbar. Die beiden jeweils dreimal vorkommenden Grundziffern seien x und y. Da die Teilbarkeit durch 3 nur von der Quersumme der Zahlen abhängt, ist es gleichgültig, an welcher Stelle die Grundziffern stehen. Die Quersumme dieser Zahlen ist in jedem Falle gleich $3x+3y=3(x+y)$, also durch 3 teilbar. Damit sind die Zahlen selbst auch durch 3 teilbar.

6▲724 Bei der Drehung einer Figur liegen zwei einander entsprechende Punkte (Original- und Bildpunkt) auf einem Kreis um das Drehzentrum D. Die Kreise aller Paare einander entsprechender Punkte sind konzentrische Kreise, das heißt, sie haben den gleichen Mittelpunkt D. Die Mittelsenkrechte einer Kreissehne geht durch den Mittelpunkt des zugehörigen Kreises. Man erhält demnach das Drehzentrum D, indem man zu den Sehnen $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ die Mittelsenkrechten konstruiert, deren Schnittpunkt mit D zusammenfällt. Der Winkel $\sphericalangle ADA'=\varphi$ ist dann der Drehwinkel.
Bemerkung: Falls im speziellen Fall die Mittelsenkrechten zu den Sehnen $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ zusammenfallen, so kann man mit Hilfe dieser Mittelsenkrechten das Drehzentrum D nicht bestimmen. Man wählt dann als zweite Sehne die Sehne $\overline{CC'}$ und erhält den Punkt D als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu den Sehnen $\overline{AA'}$ und $\overline{CC'}$.

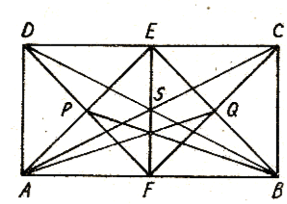


W 6■725 Die kleinste der zu ermittelnden Zahlen ist von Null verschieden (weil 0 durch 2 teilbar ist) und gleich dem k.g.V. der Zahlen 3, 5, 7, 11; sie lautet $3\cdot 5\cdot 7\cdot 11=1155$. Die der Größe nach geordneten nun folgenden Zahlen sind gleich den Produkten $1155\cdot k$ mit $k=3, 5, 7$; sie lauten $1155\cdot 3=3465$, $1155\cdot 5=5775$ und $1155\cdot 7=8085$. Die Zahl $1155\cdot 9=10395$ ist bereits größer als 10000, erfüllt also nicht mehr die gestellten Bedingungen.

W 6■726 In dem Dreieck sei Winkel $\sphericalangle ACB=90°$, $\sphericalangle CAB=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$, und es gelte $\beta>\alpha$, wodurch die Allgemeingültigkeit des Beweises nicht eingeschränkt wird. Aus $\alpha+\beta=90°$ und $\beta>\alpha$ folgt $\beta>45°$. Aus diesem Grunde schneidet der freie Schenkel des in B an $\overline{BC}$ angetragenen Winkels von 45° die Strecke $\overline{AC}$ in einem inneren Punkt. (Siehe Abbildung) Es gilt ferner Winkel $\sphericalangle BDC=45°$ und damit $\overline{CB}=\overline{CD}$. Aus $\overline{CD}<\overline{CA}$ und $\overline{CB}=\overline{CD}$ folgt $\overline{CB}<\overline{CA}$.



***6*727** Wir zeichnen zunächst die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ des Rechtecks $ABCD$; ihr Schnittpunkt sei S. Die Verbindungsgerade der Punkte E und S ist Symmetrieachse des Rechtecks und schneidet AB in F; die Strecke $\overline{EF}$ ist somit wegen $\overline{AF}=\overline{BF}$ Seitenhalbierende



des Dreiecks ABE. Nun zeichnen wir die Diagonale $\overline{DF}$ des Rechtecks $AFED$; ihr Schnittpunkt mit AE sei P. Da P die Strecke $\overline{AE}$ halbiert, ist die Strecke $\overline{BP}$ ebenfalls Seitenhalbierende des Dreiecks ABE. Der Schnittpunkt der noch zu zeichnenden Diagonale $\overline{CF}$ des Rechtecks $FBCE$ mit BE sei Q. Die Strecke $\overline{AQ}$ ist dann die dritte Seitenhalbierende des Dreiecks ABE.

* 6 * 728

1. Summand: n
2. Summand: $2n+7$
3. Summand: $2(2n+7)+7=4n+21$
4. Summand: $2(4n+21)+7=8n+49$
5. Summand: $2(8n+49)+7=16n+105$
6. Summand: $2(16n+105)+7=32n+217$

Summe: $63n+399=21(3n+19)$

Die Summe ist also durch 21 teilbar.

* 6 * 729 Es sei n die Anzahl aller teilnehmenden Sportler; dann gilt $180<n<220$. Aus Polen beteiligten sich $\left(\frac{n}{2}-8\right)$ Sportler, aus der UdSSR $\left(\frac{n}{4}+3\right)$ Sportler, aus der DDR $\left(\frac{n}{8}+5\right)$ Sportler. Aus diesen drei Ländern beteiligten sich somit $\frac{7}{8}n$ Sportler. Aus der ČSSR und Ungarn beteiligten sich insgesamt $\frac{1}{8}n$ Sportler.

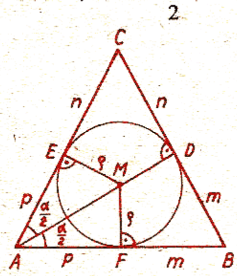
Es sei x die Anzahl der ungarischen Sportler; dann beteiligten sich $3x$ Sportler aus der ČSSR. Aus diesen beiden Ländern beteiligten sich demnach $4x$ Sportler.

Daher gilt $4x=\frac{1}{8}n$; $x=\frac{n}{32}$ ist also ganzzahlig. Hieraus folgt wegen $\frac{180}{32}<\frac{n}{32}<\frac{220}{32}$ und damit $5\frac{20}{32}<x<6\frac{28}{32}$ schließlich $x=6$ und $n=32\cdot 6=192$.

Wir erhalten also die folgende Tabelle:

Land	Anzahl der Sportler
Polen	88
UdSSR	51
DDR	29
ČSSR	18
Ungarn	6
insgesamt	192

7 ▲ 730 Es seien D, E und F die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks ABC mit dem Mittelpunkt M und dem Radius ϱ (siehe Abbildung). Die Berührungsradien $\overline{ME}$ und $\overline{MF}$ stehen senkrecht auf den Geraden AC und AB, und die Gerade AM ist die Halbierungslinie des Winkels $\sphericalangle BAC$. Somit gilt $\sphericalangle CAM=\sphericalangle BAM=\frac{\alpha}{2}$.



Die Dreiecke AFM und AME sind deshalb kongruent, und es gilt $\overline{AE}=\overline{AF}$. In gleicher Weise läßt sich nachweisen, daß auch $\overline{CD}=\overline{CE}$ und $\overline{BD}=\overline{BF}$ gilt. Deshalb gilt auch $a=m+n$, $b=n+p$, $c=m+p$ (siehe Abbildung). Wir erhalten somit $b+c-a=(n+p)+(m+p)-(m+n)=2p$.

Da für alle möglichen Dreiecke der Winkel $\sphericalangle BAC=\alpha$ sowie der Inkreisradius ϱ konstant sind, ist auch $\overline{AF}=p$ und somit ebenfalls $2p$ konstant.

7 ▲ 731 In beiden Klassen werden an diesen beiden Tagen genau acht verschiedene Fächer von genau vier Lehrern unterrichtet. Unter Beachtung von a) und b) und auf Grund des Stundenplanausschnittes sind folgende Fachkombinationen für diese Lehrer nicht möglich:

Russisch/Sport, Russisch/Mathematik, Russisch/Deutsch.

Nach f) sind auch die Kombinationen Russisch/Geographie und Russisch/Geschichte nicht möglich.

Es verbleiben die Kombinationen Russisch/Biologie und Russisch/Zeichnen. Da nach a) und b) auch die Kombination Deutsch/Mathematik nicht möglich ist, muß nach c) Frl. Fischer Russisch unterrichten. Ferner entfällt wegen c) auch die Kombination Russisch/Biologie, das heißt, Frl. Fischer unterrichtet die Fächer Russisch und Zeichnen.

Aus d) folgt, daß Herr Reichelt folgende Fächer nicht unterrichtet: Russisch, Deutsch, Mathematik, Sport, Biologie. Da Frl. Fischer Zeichnen unterrichtet, entfällt dieses Fach ebenfalls für Herrn Reichelt. Deshalb unterrichtet Herr Reichelt die Fächer Geographie und Geschichte.

Auf Grund des Stundenplanausschnittes sind auch die Kombinationen Deutsch/Geographie, Deutsch/Biologie nicht möglich.

Aus e) und den bisherigen Überlegungen folgt, daß Frau Helmert die Fächer Mathematik und Biologie unterrichtet. Für Herrn Walter verbleiben somit die Fächer Deutsch und Sport.

W 7 ■ 732 Es sei $\overline{abcd}$ die vierstellige Autonummer in dekadischer Schreibweise.

Dann gilt $ab=9cd$,

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a+b}{c+d}.$$

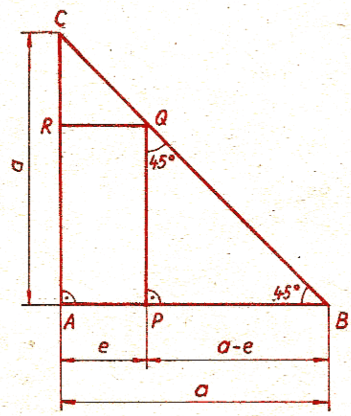
Aus der zweiten Gleichung folgt $b=c$.

Wäre nämlich $c<b$, so wäre $a+c<a+b$ und $b+d>c+d$, also $\frac{a+c}{b+d}<\frac{a+b}{c+d}$, was der obigen Gleichung widerspricht. Wäre $c>b$, so wäre $\frac{a+c}{b+d}>\frac{a+b}{c+d}$, was wieder der obigen Gleichung widerspricht. Daher gilt $b=c$.

Für die erste Gleichung gilt deshalb $ab=9bd$ und damit $a=9d$. Da keine Ziffer gleich Null ist, muß $d=1$ und $a=9$ sein. Nur $b=c=3$ erfüllt die Bedingungen.

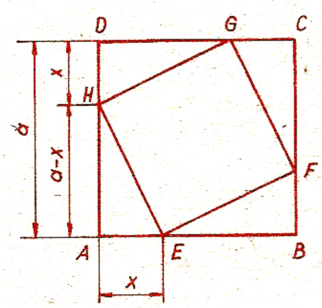
Die Autonummer lautet somit 9331.

W 7 ■ 733 Wegen $\overline{AP}=\overline{RQ}=e$ und $\overline{PB}=\overline{PQ}=a-e$ gilt für den Umfang des dem Dreieck ABC in der vorgeschriebenen Weise eingezeichneten Rechtecks $APQR$ unabhängig von der Lage des Punktes Q stets $u=2\cdot\overline{AP}+2\cdot\overline{PQ}=2(\overline{AP}+\overline{PQ})=2(e+a-e)=2a$.



* 7 * 734 Es ist leicht nachzuweisen, daß $\overline{AE}=\overline{DH}=x$ gilt. Auf diesen Beweis sei hier verzichtet. Dann gilt $\overline{AH}=a-x$, und zwischen den Flächeninhalten beider Quadrate besteht folgende Beziehung:

$$A_{EFGH}=A_{ABCD}-4\cdot\frac{x(a-x)}{2}=a^2-2x(a-x).$$



Nun gilt $A_{EFGH}=a^2-2x(a-x)=$

$$=2x^2-2ax+a^2=2\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}\right)+\frac{a^2}{2}=$$

$$=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{2}\geq\frac{a^2}{2}.$$

Für $x=\frac{a}{2}$ wird also der Flächeninhalt des Quadrates $EFGH$ am kleinsten. Daher fallen die Eckpunkte dieses Quadrates mit den Seitenmitten des Quadrates $ABCD$ zusammen, w. z. b. w.

* 7 * 735 Es seien x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 die den fünf Buchstaben des Namens in dieser Reihenfolge zugeordneten Zahlen. Dann gilt

$x_1+x_2=26$, also $x_2=26-x_1$;
$x_1+x_3=17$, also $x_3=17-x_1$;
$x_1+x_4=10$, also $x_4=10-x_1$;
$x_1+x_5=23$, also $x_5=23-x_1$;
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=61$.

Durch Einsetzen gewinnen wir die Gleichung $x_1+26-x_1+17-x_1+10-x_1+23-x_1=61$, also $3x_1=15$ und damit $x_1=5$.

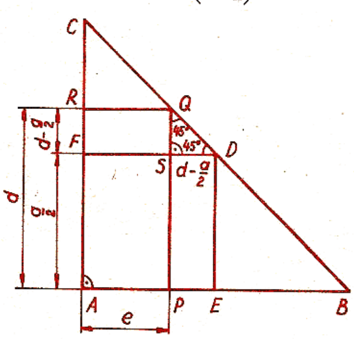
Daraus folgt: $x_2=21$, $x_3=12$, $x_4=5$, $x_5=18$.

Der Zahl $x_1=5$ entspricht der Buchstabe E, der Zahl $x_2=21$ entspricht der Buchstabe U, der Zahl $x_3=12$ entspricht der Buchstabe L, der Zahl $x_4=5$ entspricht der Buchstabe E, der Zahl $x_5=18$ entspricht der Buchstabe R. Der bedeutende Mathematiker heißt Euler. *Leonhard Euler* (1707 bis 1783), geboren in Basel, bedeutender Mathematiker, Physiker und Astronom. Euler wirkte von 1727 bis 1741 in Petersburg, dem heutigen Leningrad, von 1741 bis 1766 in Berlin und von 1766 bis zu seinem Tode wieder in Petersburg. Er hat bedeutende Arbeiten zur Algebra, Differential- und Integralrechnung sowie zur Variationsrechnung verfaßt, mehr als 950 Abhandlungen wurden von ihm veröffentlicht. Unter seinem Einfluß entstand in Rußland eine mathematische Schule, deren Vertreter große Leistungen auf dem Gebiete der Mathematik erzielt haben.

* 7 * 736 Die dem Dreieck ABC in der vorgeschriebenen Weise eingezeichneten Figuren seien ein Rechteck $APQR$ und ein Quadrat $AEDF$. Aus Gründen der Symmetrie ist dann jede Quadratseite gleich $\frac{a}{2}$. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

1. Fall: Es sei $\overline{AP}=e$, $\overline{AR}=d$ und $\overline{AP}<\overline{AE}$, also $e<\frac{a}{2}$. Für den Flächeninhalt des Rechtecks gilt dann

$$A_1=A_{APSF}+A_{FSQR}=\frac{ae}{2}+e\left(d-\frac{a}{2}\right);$$



für den Flächeninhalt des Quadrates gilt

$$A_2=A_{APSF}+A_{PEDS}=\frac{ae}{2}+\frac{a}{2}\left(d-\frac{a}{2}\right), \text{ weil}$$

$\overline{SQ}=\overline{SD}=d-\frac{a}{2}$ gilt.

Da nach Voraussetzung $e<\frac{a}{2}$ ist, muß $A_1<A_2$ sein.

2. Fall: Es sei $\overline{AP}>\overline{AE}$, also $e>\frac{a}{2}$.

Durch Spiegelung des Rechtecks $APQR$ an der Geraden AD läßt sich dieser Fall auf den ersten zurückführen.

8 ▲ 737 Ist $[z]=3$, so gilt $3\leqq z<4$. In dem vorliegenden Fall gilt also

$$2x-5\geqq 3 \qquad (1)$$

und

$$2x-5<4. \qquad (2)$$

Die Ungleichung (1) gilt genau dann, wenn $2x\geqq 8$, d. h., $x\geqq 4$. Die Ungleichung (2) gilt genau dann, wenn $2x<9$, d. h. $x<4{,}5$. Die Ungleichungen (1) und (2) und damit auch die gegebene Gleichung sind also für alle rationalen Zahlen x erfüllt, für die $4\leqq x<4{,}5$ gilt.

W 8 ■ 738 Es seien a und b die gesuchten zweistelligen Zahlen, in deren Produkt $z=ab$ nur die Grundziffern 5 vorkommen. Dann gilt $10\leqq a<100$, $10\leqq b<100$ und $100\leqq z<10\,000$.

z kann also nur gleich einer der Zahlen 555 oder 5 555 sein.

Wäre nun $z=5555=5\cdot 11\cdot 101$, wobei die Faktoren 5, 11 und 101 Primzahlen sind, so wäre in dem Produkt $z=ab$ einer der Faktoren eine dreistellige Zahl, was der Voraussetzung widerspricht, wonach a und b zweistellige Zahlen sind. Daher gilt $z=555=3\cdot 5\cdot 37$, wobei die Faktoren 3, 5 und 37 Primzahlen sind. Die Zahl $z=555$ läßt sich also nur in der folgenden Weise als Produkt zweier zweistelliger Zahlen darstellen:

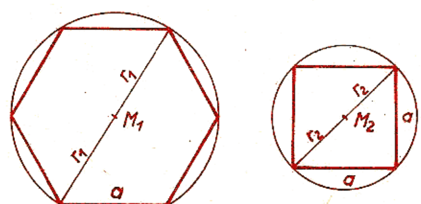
$$z=15\cdot 37.$$

Daher sind 15 und 37 die gesuchten zweistelligen Zahlen.

W 8 ■ 739 Für den Radius des dem regelmäßigen Sechseck umbeschriebenen Kreises gilt $r_1=a$. Für den Radius r_2 des dem Quadrat mit der Seitenlänge a umbeschriebenen Kreises gilt nach dem Satz des Pythagoras (vgl. die Abb.)

$$(2r_2)^2=a^2+a^2, \text{ also } 4r_2^2=2a^2,$$

$$\text{d. h., } r_2^2=\frac{a^2}{2}.$$



Daher verhalten sich die Flächeninhalte A_1 und A_2 dieser beiden Kreise wie

$$A_1:A_2=\pi r_1^2:\pi r_2^2=r_1^2:r_2^2=a^2:\frac{a^2}{2}=2:1.$$

* 8 * 740 Es seien m und n zwei natürliche Zahlen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Dann gilt

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \text{ mit } m>2,\ n>2, \qquad (1)$$

also

$$mn=2n+2m,$$
$$mn-2m-2n+4=4,$$
$$m(n-2)-2(n-2)=4,$$
$$(m-2)(n-2)=4. \qquad (2)$$

Da die Zahl 4 sich nur wie folgt in Faktoren zerlegen läßt

$4=1\cdot 4$, $4=2\cdot 2$, $4=4\cdot 1$, sind nur die folgenden drei Fälle möglich:

1. $m-2=1$, $n-2=4$, also $m=3$, $n=6$;
2. $m-2=2$, $n-2=2$, also $m=4$, $n=4$;
3. $m-2=4$, $n-2=1$, also $m=6$, $n=3$.

Für diese Zahlen m, n ist aber auch die Gleichung (1) erfüllt. Daher ist die gegebene Gleichung genau für die folgenden geordneten Paare $(m;\ n)$ natürlicher Zahlen mit $m>2$, $n>2$ erfüllt:

$(3;6)$, $(4;4)$, $(6;3)$.

Bemerkung: Diese Aufgabe führt zu einem interessanten geometrischen Problem: Es ist zu untersuchen, in welcher Weise man die Ebene durch kongruente regelmäßige Vielecke vollständig überdecken kann, wobei jeweils zwei Vielecke eine Seite gemeinsam haben und an jeder Ecke eines n-Ecks jeweils m n-Ecke zusammenstoßen.

Angenommen, diese Überdeckung sei möglich. Dann gilt, da der Innenwinkel eines jeden regelmäßigen n-Ecks

$$\alpha=2\left(90°-\frac{360°}{2n}\right)=180°\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

beträgt und da an jeder Ecke m n-Ecke zusammenstoßen,

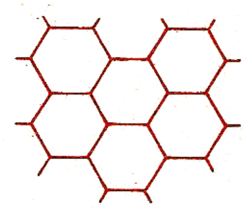
$$m\cdot 180°\left(1-\frac{2}{n}\right)=360°, \text{ also}$$

$$m\left(1-\frac{2}{n}\right)=2,\quad 1-\frac{2}{n}=\frac{2}{m},$$

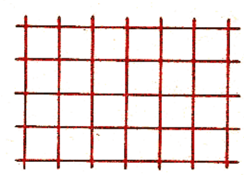
$$\frac{2}{m}+\frac{2}{m}=1,\quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}.$$

Wir erhalten also die Gleichung (1), die für $m>2$, $n>2$ nur die folgenden Lösungen hat:

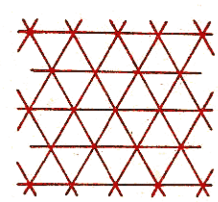
1. $m=3$, $n=6$; d. h., die Ebene wird durch regelmäßige Sechsecke überdeckt, wobei jeweils 3 Sechsecke an einer Seite zusammenstoßen (vgl. Abb. 1).



2. $m=4$, $n=4$; d. h., die Ebene wird durch regelmäßige Vierecke, also Quadrate, überdeckt, wobei jeweils 4 Quadrate an einer Ecke zusammenstoßen (Abb. 2).



3. $m=6$, $n=3$; d. h., die Ebene wird durch regelmäßige Dreiecke, also gleichseitige Dreiecke, überdeckt, wobei jeweils 6 gleichseitige Dreiecke an einer Ecke zusammenstoßen (Abb. 3).



Weitere Überdeckungen sind unter den gegebenen Bedingungen nicht möglich, weil die Gleichung (1) nur diese drei Lösungen hat.

* 8 * 741 Da der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ ab cm² und sein Umfang $2(a+b)$ cm beträgt, erhalten wir die Gleichung

$$2(a+b)=ab.$$

Wegen $a \neq 0$, $b \neq 0$ können wir auf beiden Seiten dieser Gleichung durch $2ab$ dividieren un erhalten

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2}, \text{ also } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}.$$

Diese Gleichung hat aber, wie in Aufg. * 8 * 740 nachgewiesen wurde, nur die folgenden Lösungen in natürlichen Zahlen a und b:

1. $a=3$, $b=6$;
2. $a=4$, $b=4$;
3. $a=6$, $b=3$.

Denn für $a=1$ und $a=2$ bzw. $b=1$ und $b=2$ wird

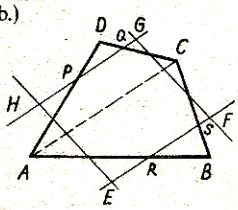
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{2},$$

was der obigen Gleichung widerspricht.

Daher gibt es nur die Rechtecke $ABCD$ mit den folgenden Seitenlängen, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:

1. $\overline{AB}=3$ cm, $\overline{BC}=6$ cm,
Flächeninhalt 18 cm^2, Umfang 18 cm.
2. $\overline{AB}=4$ cm, $\overline{BC}=4$ cm,
Flächeninhalt 16 cm^2, Umfang 16 cm.
3. $\overline{AB}=6$ cm, $\overline{BC}=3$ cm,
Flächeninhalt 18 cm^2, Umfang 18 cm.

* 8 * 742 Nach dem Strahlensatz gilt (vgl. die Abb.)



$\overline{DP}:\overline{DA}=\overline{DQ}:\overline{DC}=1:3$ und folglich $PQ \parallel AC$ bzw. $HG \parallel AC$; $\overline{BR}:\overline{BA}=\overline{BS}:\overline{BC}=1:3$ und folglich $RS \parallel AC$ bzw. $EF \parallel AC$.

Daraus folgt $HG \parallel EF$. Aus analogen Betrachtungen folgt auch $GF \parallel HE$. Das Viereck $EFGH$ ist somit ein Parallelogramm.

* 8 * 743 Angenommen, die Zahl $13a+1$ sei gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl; dann gilt

$13a+1=x^2$, wobei x eine natürliche Zahl ist. (1)

Die Gleichung (1) ist genau dann erfüllt, wenn

$$13a=x^2-1, \text{ also } a=\frac{(x+1)(x-1)}{13}. \qquad (2)$$

Weil a eine natürliche Zahl und 13 eine Primzahl ist, ist also entweder $x+1$ oder $x-1$ durch 13 teilbar.

1 Fall: $x+1$ sei durch 13 teilbar. Dann gilt $x+1=13k$, also $x=13k-1$, wobei k eine natürliche Zahl ist. In diesem Fall folgt also aus (2)

$a=k(13k-2)$, und wir erhalten

$13a+1=13k(13k-2)+1=(13k-1)^2$,

d. h., die Zahl $13a+1$ ist gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl.

2. Fall: $x-1$ sei durch 13 teilbar. Dann gilt $x-1=13k$, also $x=13k+1$, wobei k eine natürliche Zahl ist. In diesem Fall folgt also aus (2)

$a=k(13k+2)$, und wir erhalten

$13a+1=13k(13k+2)+1=(13k+1)^2$,

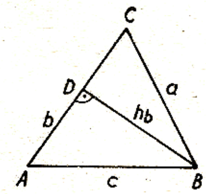
d. h., die Zahl $13a+1$ ist gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl.

Daher sind alle natürlichen Zahlen $13a+1$ mit $a=k(13k-2)$ und $a=k(13k+2)$ ($k=0$, 1, 2, 3, ...) und nur diese Zahlen gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl.

Wir erhalten also die Zahlen $a=0$, $a=11$, $a=15$, $a=48$ $a=56$ usw.

9 ▲ 744 1. Wir nehmen zunächst an, daß $a \leq b$ gilt. Dann ist der Fußpunkt der von B ausgehenden Höhe $\overline{BD}=h_b$ ein innerer Punkt der Seite $\overline{AC}$ (vgl. die Abb.). Nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf das rechtwinklige Dreieck ABD, gilt

$$c^2=h_b^2+\overline{AD}^2.$$



Wegen $h_b<a$, also $h_b^2<a^2$, und $\overline{AD}<b$, also $\overline{AD}^2<b^2$, folgt hieraus

$$c^2=h_b^2+\overline{AD}^2<a^2+b^2.$$

2. Gilt nun $a>b$, so benutzen wir die von A ausgehende Höhe $\overline{AE}=h_a$ und erhalten analog wie oben

$$c^2=h_a^2+\overline{BE}^2<b^2+a^2.$$

In jedem Falle gilt also $c^2<a^2+b^2$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung: Die obige Behauptung läßt sich auch mit Hilfe des Kosinussatzes der ebenen Trigonometrie beweisen. Es gilt nämlich für alle Dreiecke ABC

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma.$$

Ist nun γ ein spitzer Winkel, so gilt $\cos\gamma>0$, also $\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma<a^2+b^2$.

W 9 ■ 745 Da in (2) kein Platz richtig angegeben war, belegte A nicht den 1. Platz. Da in (1) genau drei Plätze, jedoch niemals zwei aufeinanderfolgende, richtig angegeben sind, belegte B den 2. Platz, D den 4. Platz und F den 6. Platz.

Daher belegte E nicht den 2. Platz, F nicht den 3. Platz, A nicht den 4. Platz, D nicht den 5. Platz und B nicht den 6. Platz. Es sind also alle in (3) angegebenen Plätze mit Ausnahme der Angabe für C falsch; mithin belegte C den 1. Platz, da genau ein Platz richtig angegeben ist.

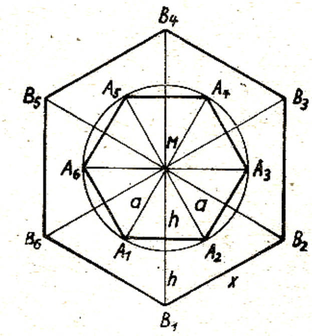
Da in (2) kein Platz richtig angegeben ist, belegte E nicht den 5. Platz, also verbleibt für E nur noch der 3. Platz. Für A ergibt sich daher der 5. Platz.

Wir erhalten daher die folgende richtige Reihenfolge der Plätze:

$C, B, E, D, A, F.$

Ferner stellen wir fest, daß bei dieser Verteilung in (1) genau drei Plätze richtig angegeben sind (jedoch niemals zwei aufeinanderfolgende), in (2) kein Platz richtig und in (3) genau ein Platz richtig. Bei der angegebenen Reihenfolge und nur bei dieser sind also alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

W 9 ■ 746 Das gegebene regelmäßige Sechseck setzt sich aus sechs kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge a und der Länge der Höhe $h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ zusammen (vgl. die Abb.); sein Flächeninhalt beträgt also $A_1=6\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$. (1)



Es sei nun x die Seitenlänge des zu konstruierenden regelmäßigen Sechsecks $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$; dann ist der Flächeninhalt dieses Sechsecks gleich $A_2=\frac{3}{2}x^2\sqrt{3}$. (2)

Nach Voraussetzung ist der Flächeninhalt dieses Sechsecks dreimal so groß wie der Flächeninhalt des gegebenen Sechsecks; daher gilt

$A_2=3A_1$. (3)

Aus (1), (2) und (3) folgt daher

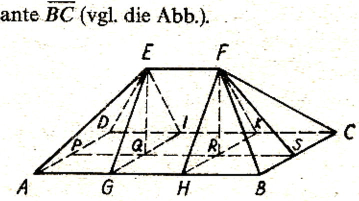
$A_2=\frac{3}{2}x^2\sqrt{3}=\frac{9}{2}a^2\sqrt{3}$. Also gilt

$3x^2=9a^2$, $x^2=3a^2$, $x=a\sqrt{3}=2h$.

Die Seite des zu konstruierenden Sechsecks $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ ist also doppelt so lang wie die Höhe jedes der gleichseitigen Dreiecke, in die das gegebene Sechseck zerlegt worden ist.

Daraus ergibt sich die Konstruktion. Wir spiegeln den Mittelpunkt M des Umkreises des gegebenen regelmäßigen Sechsecks $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ an jeder Seite dieses Sechsecks. Dabei haben der Original- und der Bildpunkt jeweils den Abstand $x=2h$. Verbinden wir die Bildpunkte B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 miteinander, so erhalten wir das zu konstruierende Sechseck, dessen Seitenlänge $x=a\sqrt{3}$ ist.

* 9 * 747 1. Es seien $ABCD$ die rechteckige Grundfläche des Daches mit den Seitenlängen $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{EF}$ der Dachfirst, $\overline{QR}$ die Projektion des Dachfirstes auf die Grundfläche, $\overline{GH}$ bzw. $\overline{IK}$ die Projektion des Dachfirstes auf die Kanten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ sowie S die Projektion des Punktes F auf die Kante $\overline{BC}$ (vgl. die Abb.).



Da nach Voraussetzung die Seitenflächen des Daches gleichgroße Winkel mit der Grundfläche bilden, sind die rechtwinkligen

Dreiecke $\triangle RFH$ und $\triangle RFS$ kongruent; denn sie stimmen in den Winkeln $\measuredangle FHR$ und $\measuredangle RSF$ sowie in der Seite $\overline{FR}$ überein.

Es gilt also $\overline{RS}=\overline{RH}=\frac{b}{2}=3{,}50$ m. Daraus folgt $\overline{EF}=\overline{QR}=a-2\cdot\frac{b}{2}=a-b=3$ m.

Die Länge des Dachfirstes beträgt also 3 m.

2. Ferner erhalten wir in dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle RFH$

$$\overline{FH}^2=h^2+\frac{b^2}{4}$$

und in dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle HBF$

$$\overline{FB}^2=\overline{FH}^2+\frac{b^2}{4}=h^2+\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{4}=$$
$$=h^2+\frac{b^2}{2}.$$

Die Seitenkanten $\overline{FB}$, $\overline{FC}$, $\overline{EA}$, $\overline{ED}$ haben also die Länge

$$\overline{FB}=\sqrt{h^2+\frac{b^2}{2}}=\sqrt{3{,}8^2+\frac{7^2}{2}}\text{ m}$$
$$=\sqrt{38{,}94}\text{ m}\approx 6{,}24\text{ m}.$$

3. Der von dem Dach und seiner Grundfläche begrenzte Körper besteht aus einem dreiseitigen Prisma mit der Grundfläche FHK und der Höhe $\overline{QR}=a-b$ sowie aus zwei kongruenten Pyramiden mit den rechteckigen Grundflächen $HBCK$ bzw. $AGID$ sowie den Spitzen F bzw. E. Das gesuchte Volumen beträgt daher

$$V=\frac{bh}{2}(a-b)+2\cdot\frac{b^2}{2}\cdot\frac{h}{3}=bh\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{b}{3}\right)$$
$$=\frac{bh}{6}(3a-b)\approx 102\text{ m}^3.$$

*9*748 Da p eine Primzahl ist mit $p>3$, ist nur einer der folgenden beiden Fälle möglich:

1. $p\equiv 1 \pmod 3$;
2. $p\equiv 2 \pmod 3$.

Fall 1: Da die Primzahlen p_1, p_2, p_3 ebenfalls größer als 3 sind, sind sie entweder kongruent 1 oder kongruent 2 modulo 3. Ihre Summe ist daher nur dann kongruent 1 modulo 3, wenn genau zwei von ihnen, die wir mit q und r bezeichnen wollen, kongruent 1 und eine von ihnen kongruent 2 modulo 3 ist.

Wir wählen die Primzahlen q und r aus und erhalten

$$p-q\equiv 0 \pmod 3),$$
$$p-r\equiv 0 \pmod 3),$$
$$q-r\equiv 0 \pmod 3).$$

Andererseits sind diese Differenzen aber auch durch 2 teilbar, weil alle Primzahlen, die größer als 2 sind, ungerade Zahlen sind. Daraus folgt, daß die Differenzen $p-q$, $p-r$, $q-r$ sämtlich durch 6 teilbar sind, womit unsere Behauptung im Fall 1 bewiesen ist.

Fall 2: In diesem Fall ist die Summe der drei Primzahlen p_1, p_2, p_3 nur dann kongruent 2 modulo 3, wenn genau zwei von ihnen, die wir wieder mit q und r bezeichnen, kongruent 2 modulo 3 sind. Wir erhalten $p-q\equiv p-r\equiv q-r\equiv 0 \pmod 6$,

da diese Differenzen durch 3 und durch 2 teilbar sind, womit unsere Behauptung auch im Fall 2 bewiesen ist.

Bemerkung: Wir wollen noch zeigen, daß es tatsächlich drei Primzahlen gibt, die größer als 3 sind und deren Summe wieder eine Primzahl ist. Die drei Primzahlen 5, 7, 11 haben nämlich diese Eigenschaft, weil $5+7+11=23$ eine Primzahl ist. Wir wählen die Primzahlen 5 und 11 aus und erhalten die Differenzen

$23-5=18$, $23-11=12$, $11-5=6$,

die sämtlich durch 6 teilbar sind.

*9*749 Wir formen zunächst den Term auf der rechten Seite der Gleichung

$$z=n^{12}-n^8-n^4+1$$

so um, daß wir ein Produkt erhalten, dessen Teilbarkeit durch 9 wir leicht untersuchen können. Wir erhalten

$$z=n^8(n^4-1)-(n^4-1)=(n^4-1)(n^8-1)$$
$$=(n^2+1)(n^2-1)(n^4+1)(n^4-1)$$
$$=(n^2+1)(n+1)(n-1)(n^4+1)(n^2+1)$$
$$(n+1)(n-1)$$
$$=(n^4+1)(n^2+1)^2(n+1)^2(n-1)^2.$$

Da n nach Voraussetzung nicht durch 3 teilbar ist, haben wir genau zwei Fälle zu untersuchen:

1. Fall: n läßt bei Division durch 3 den Rest 1, d. h., $n=3k+1$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Dann ist $n-1=3k$ durch 3 teilbar, also ist $(n-1)^2$ und damit auch z durch 9 teilbar.

2. Fall: n läßt bei Division durch 3 den Rest 2, d. h., $n=3k+2$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Dann ist $n+1=3k+3=3(k+1)$ durch 3 teilbar, also ist $(n+1)^2$ und damit auch z durch 9 teilbar.

In beiden Fällen ist also die Zahl z durch 9 teilbar, w. z. b. w.

Bemerkung: Mit Hilfe von Zahlenkongruenzen läßt sich dieser Beweis kürzer schreiben. Wir erhalten nämlich

im ersten Fall $n\equiv 1 \pmod 3$, also $n-1\equiv 0 \pmod 3$, daher gilt $(n-1)^2\equiv 0 \pmod 9$ und $z\equiv 0 \pmod 9$;

im zweiten Fall $n\equiv 2 \pmod 3$, also $n+1\equiv 0 \pmod 3$, daher gilt $(n+1)^2\equiv 0 \pmod 9$ und $z\equiv 0 \pmod 9$.

*9*750 Es seien n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen

$$a, a+1, a+2, \ldots, a+n-1$$

gegeben, wobei $a\geqq 1$ und $n\geqq 3$ gilt. Dann beträgt ihre Summe

$$s=a+(a+1)+(a+2)+\ldots$$
$$+(a+n-3)+(a+n-2)+(a+n-1).$$

Wir schreiben nun die gleiche Summe noch einmal in umgekehrter Reihenfolge der Summanden auf und erhalten

$$s=(a+n-1)+(a+n-2)+(a+n-3)+\ldots$$
$$+(a+2)+(a+1)+a.$$

Durch Addition erhalten wir

$$2s=(2a+n-1)+(2a+n-1)+(2a+n-1)+$$
$$+\ldots+(2a+n-1)+(2a+n-1)+$$
$$+(2a+n-1)=n(2a+n-1),\text{ also}$$
$$s=\frac{n(2a+n-1)}{2}.$$

Ist nun n *ungerade*, so ist $2a+n-1$ gerade, also $\frac{2a+n-1}{2}$ eine natürliche Zahl. Ferner gilt $n\geqq 3$ und wegen $a\geqq 1$, $\frac{2a+n-1}{2}\geqq 2$, d. h. in der Faktorenzerlegung $s=n\cdot\frac{2a+n-1}{2}$ sind beide Faktoren größer als 1, also ist s keine Primzahl.

Ist aber n gerade, so ist $n\geqq 4$, also $\frac{n}{2}\geqq 2$ eine natürliche Zahl. Ferner gilt $2a+n-1\geqq 2+3=5$, d. h., in der Faktorenzerlegung $s=\frac{n}{2}\cdot(2a+n-1)$ sind beide Faktoren größer als 1, also ist s keine Primzahl.

Damit haben wir bewiesen, daß in keinem Falle die Summe s eine Primzahl ist.

10/12▲751 a) Ist r der äußere Radius und s die Wandstärke einer Hohlkugel, so ist ihr Volumen gleich

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{4}{3}\pi(r-s)^3=\frac{4}{3}\pi\,[r^3-(r-s)^3].$$

Da der gegebene Kugelspeicher einen Radius $r=8$ m und eine Wandstärke $s=0{,}042$ m hat, erhalten wir $r-s=7{,}958$ m. Da ferner die Dichte des Stahls $7{,}86\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}=7{,}86\text{ t}\cdot\text{m}^{-3}$ beträgt, ist die Masse des Kugelspeichers gleich

$$M=\frac{4}{3}\pi(8^3-7{,}958^3)\cdot 7{,}86\text{ t}$$
$$\approx\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 8{,}0\cdot 7{,}86\text{ t}\approx 263{,}4\text{ t},$$

wobei mit einer vierstelligen Logarithmentafel gerechnet wurde.

b) Auf Grund der angegebenen Näherungsformel erhalten wir für die Masse des Kugelspeichers den Wert

$M'=4\pi\cdot 8^2\cdot 0{,}042\cdot 7{,}86\text{ t}\approx 265{,}5$ t,

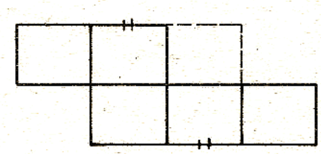
der sich nur wenig von dem unter a) berechneten Wert unterscheidet. Der absolute Fehler bei Anwendung dieser Näherungsformel beträgt $M'-M=2{,}1$ t und der relative Fehler

$$\frac{M'-M}{M}=\frac{2{,}1}{263{,}4}\approx 0{,}008,\text{ d. s. } 0{,}8\,\%.$$

Der relative Fehler ist also wegen der verhältnismäßig geringen Wandstärke recht klein, so daß man in der Praxis in solchen Fällen die angegebene Näherungsformel ohne Bedenken anwenden kann.

Lösungen zu alpha-heiter, Heft 6/71

Schwierige Lage!



Bitte ankreuzen!

Eine „Zwangslösung“ ergibt sich, wenn man die Diagonalen freiläßt!
Eine andere Lösung:

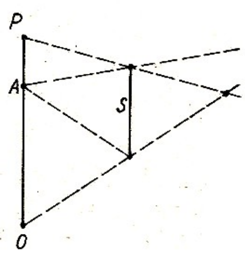
	X		X	
				X
X	X		X	X
X		X	X	
X				

Ein wichtiger Beruf

Herr Bunnat ist in der *Datenverarbeitung* tätig.

Spieglein, Spieglein an der Wand

Es genügt, wenn der Spiegel halb so groß ist wie die Person. Siehe Skizze. (PO – Person; A – Auge; S – Spiegel) Da die Dreieckseiten halbiert werden und der Spiegel parallel zur Person steht, ist der Spiegel halb so groß wie die Person.



Magisches Quadrat

$^{a}6$	$^{l}5$	$^{p}5$	$^{h}3$	$^{a}6$
$^{l}5$	5	5	5	5
$^{p}5$	5		$^{p}5$	5
$^{h}3$	5	$^{p}5$	5	3
$^{a}6$	5	5	3	6

Abschlußprüfung, Klasse 10

$$x=\frac{\lg 5}{\lg\frac{3}{2}} \qquad x\cdot\lg\frac{3}{2}=\lg 5$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=5$$

$$x\approx 4,\ \text{da}\ \frac{81}{16}\approx 5$$

Silbenrätsel

1. Gamma 2. Euler 3. Ordnungslinie 4. Runge 5. Gegenkathete 6. Chintschin 7. Analysis 8. Numerus 9. Tschebyscheff 10. Operation 11. Regel
Georg Cantor Mengenlehre

Mathematische Begriffe

1. Folge 2. Seite 3. Sehne 4. Menge 5. Gleichung

Wir stellen vor:
Dr. Ludwig Boll

Am 10. Dezember 1971 begeht Dr. rer. nat. h. c. *Ludwig Boll* seinen 60. Geburtstag.
Vor allem den älteren *alpha*-Lesern ist der Cheflektor für Mathematik und Naturwissenschaften im VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, sicher bekannt. Hat er doch beispielsweise an der Entwicklung der „Mathematischen Schülerbücherei“ und überhaupt von Titeln populärwissenschaftlicher Verbreitung mathematischer Kenntnisse erheblichen Anteil.
Bevor sich *Ludwig Boll* diesen verantwortungsvollen Aufgaben widmen konnte, mußten viele harte Lebensprüfungen von ihm bestanden werden. Die Schule in Bingen und Mainz bis zum Abitur 1930 bereitete ihm ebensowenig Schwierigkeiten wie das Studium in Göttingen bei Courant, Landau und Hilbert. Doch bereits 1933 warfen ihn die eben an die Macht gelangten Nazis das erstemal ins Gefängnis, da er seit 1931 Mitglied roter Studentengruppen und seit 1932 Mitglied der KPD war.
Am 20. 4. 1933 wurde *Ludwig Boll* in das von Anna Seghers im Siebten Kreuz beschriebene Konzentrationslager Osthofen (bei ihr heißt es Westhofen) überführt, aber kurze Zeit danach wieder freigelassen. Es folgten Jahre der Emigration im Saargebiet und später in Holland.
Ab Mai 1942 trug er die Nummer 1492 als Gefangener im Polizeidurchgangslager Westerborg in Holland. An der ersten Deportation in ein Massenvernichtungslager am 15. 7. 1942 kam *Ludwig Boll* gerade noch vorbei, und im Oktober 1943 gelang ihm die Flucht nach Amsterdam. Dort lebte er in der Illegalität bis zur Kapitulation des faschistischen Deutschlands. Von seinen Eltern, welche inzwischen ebenfalls verhaftet worden waren, hörte er das einzige und letzte Mal 1942 aus Piaski bei Lublin in Polen. Nach 1945 widmete *Ludwig Boll* seine ganze Kraft dem demokratischen Neuaufbau, u. a. als kommunistischer Stadtverordneter der Stadt Bingen, ohne sein wissenschaftliches Lieblingsgebiet – die Mathematik – zu vernachlässigen. So studierte er an der Universität Mainz bei Köthe und Rohrbach und arbeitete als nebenamtlicher Lehrer am Gymnasium in Bingen. Seine politische Tätigkeit brachte ihn in den Jahren 1947 bis 1950 in immer engeren Kontakt mit politischen Freunden von früher, welche inzwischen in der DDR arbeiteten. Seine Aufgeschlossenheit, aber auch sein kritisches Urteilsvermögen, vor allem aber wohl seine große Einsatzbereitschaft und ständige Aktivität ließen ihn neue Freunde gewinnen. So verließ er 1951 Westdeutschland, um seine Studien an der Humboldt-Universität zu Berlin abzuschließen, wozu ihm die Stadt Berlin ein Goethe-Stipendium in Höhe von 300,– M monatlich gewährte.
Hier traf er auch seine ehemalige Studienkollegin Käthe aus Göttingen wieder, welche nach Jahren der Emigration in England seit 1946 in der DDR arbeitete. Kurzerhand wurde geheiratet. Und während seine Frau als Professor bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin das Institut für Strukturforschung (das ist ein Gebiet, welches sowohl für die Physik als auch für die Chemie und Biologie grundsätzliche Bedeutung hat) auf- und ausbaute und für ihre wissenschaftlichen Leistungen im Dienste der DDR neben anderen hohen staatlichen Auszeichnungen 1960 den Nationalpreis erhielt, widmete sich *Ludwig Boll* der systematischen Entwicklung von mathematischer Ausbildungsliteratur, deren Palette von Titeln der MSB bis zu Monographien und Forschungsberichten reicht. Dabei wurde von ihm die Übersetzung sowjetischer Werke ebenso gefördert wie die Veröffentlichung von Arbeiten junger DDR-Wissenschaftler. Und sicher wird mancher unter den *alpha*-Lesern sein, von dem später einmal ein Buch im Deutschen Verlag der Wissenschaften erscheint.
Für dieses jahrelange erfolgreiche Wirken erhielt *Ludwig Boll* neben der Verdienstmedaille der DDR (1959), dem Vaterländischen Verdienstorden in Silber (1969) und anderen Auszeichnungen am 21. Juli 1970 die Ehrendoktorwürde der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät des Wissenschaftlichen Rates der Humboldt-Universität zu Berlin.
Wir gratulieren Dr. *Ludwig Boll* herzlich zu seinem Geburtstag und hoffen, daß er unserer *alpha* noch viele Jahre bei bester Schaffenskraft so verbunden bleibt wie bisher.

W. Arnold

Preisträger
des alpha-Wettbewerbes

Vorbildliche Leistungen

Klassenstufe 5

Sven Thorsten Freitag, 95 Zwickau; **Hermann Tenor,** 45 Dessau; **Olaf Richter,** 83 Pirna; **Angelika Müller,** 22 Greifswald (aus Klasse 4); **Jörg Schubert,** 9331 Pfaffroda; **Uwe Schäfer,** 75 Cottbus; **Jens-Uwe Richter,** 9134 Kemtau; **Thomas Maiwald,** 8809 Olbersdorf; **Holger Jurack,** 8502 Burkau; **Eva Gerstner,** 806 Dresden; Berthold Wettengel, 992 Oelsnitz; Ulf Hutschenreiter, 8020 Dresden; Dietmar Gröger, 3257 Hecklingen; Ulli Riedel, 938 Flöha; Uwe Heiber, 63 Ilmenau; Uwe Szyszka, 2001 Brohm; Cornelia Linz, 75 Cottbus; Angela Bagola, 795 Spremberg; Dirk Sprengel, 15 Potsdam; Gerd Köhler, 926 Hainichen; Jörg Brüstel, 7401 Ziegelheim; Jan Müller, 1034 Berlin; Kerstin Utke, 23 Stralsund; Andreas Michalowski, 6088 Steinbach-Hallenberg; Frank Müller, 75 Cottbus; Ulrich Wolf, 30 Magdeburg; Bert Schultz, 112 Berlin; Andreas Möller, 6088 Steinbach-Hallenberg; Pia-Gabriela Preußer, 22 Greifswald; Andreas Fischer, 8122 Radebeul; Klaus Brinkmann, 26 Güstrow; Manuela Lehmert, 562 Worbis; Astrid Richter, 1291 Zerpenschleuse; Stefan Clausnitzer, 14 Oranienburg; Gerald Nahrstedt, 3241 Neuenhofe; Uta Stopp, 8019 Dresden; Hartmut Herrmann, 1282 Schönow; Blanka Rothämel, 6088 Steinbach-Hallenberg; Steffen Gattert, 7043 Leipzig; Astrid Pflaum, 1199 Berlin; Monika Juppe, 8301 Bahratal; Bianca Herrmann, 4608 Zahna; Kathrin Benedix, 73 Döbeln; Frank Weber, 425 Eisleben; Marion Haupt, 1055 Berlin; Martina Klug, 25 Rostock; Lars Luther, 26 Güstrow; Kersten Strert, 754 Calau; Petra Scharf, 73 Döbeln; Sylvia Steinert, 112 Berlin; Anita Heß, 8027 Dresden; Jens Schmidt, 6088 Steinbach-Hallenberg; Uwe Rinka, 128 Bernau; Lutz Thorwarth, 608 Schmalkalden.

Klassenstufe 6

Bernd Derlich, 205 Teterow (67 Karten); **Birgit Kühmstedt,** 5001 Erfurt; **Frank Richter,** 793 Herzberg; **Barbara Wolf,** 437 Köthen; **Carola Kühnl,** 205 Teterow; **Ulrike Bandemer,** 92 Freiberg; **Hellfried Schumacher,** 2111 Ahlbeck; **Norbert Heß,** 8019 Dresden; **Ole-André Strzalla,** 22 Greifswald; **Ursula Barth,** 5101 Kleinfahner; **Marlies Englisch,** 7022 Leipzig; **Elvira Naubauer,** 9413 Schönheide; **Gerlinde Koch,** 6089 Trusetal; Thomas Lübke, 112 Berlin; Lothar Eimecke, 7901 Fermerswalde; Beate Brandtner, 7295 Schildau; Peter Piehler, 75 Cottbus; Rainer Lang, 9402 Bernsbach; Heike Anders 1636 Dahlewitz; Michael Huhn, 205 Teterow; Birgit Siewert, 14 Oranienburg; Klaus Dieter Eickhoff, 112 Berlin; Caroline Oelsnitz, 205 Teterow; Andreas Börner, 7241 Schkortitz; Gabriele Boitz, 75 Cottbus; Torsten Waldeck, 90 Karl-Marx-Stadt; Holger Kuchling, 110 Berlin; Anke Jahn, 728 Eilenburg; Ria Kirschke, 409 Halle-Neustadt; Bärbel Meißner, 5401 Clingen; Heidrun Köpke, 205 Teterow; Birgit Krötenheerdt, 402 Halle; Elke Genath, 6088 Steinbach-Hallenberg; Uwe Briese, 2002 Burg Stargard; Andreas Näther, 925 Mittweida; Falk Bahner, 6088 Steinbach-Hallenberg; Angelika Spychalski, 2051 Pampow; Heiko Schnurbusch, 90 Karl-Marx-Stadt; Andreas Hochhaus, 57 Mühlhausen; Mathias Hegner, 1136 Berlin; Stefan Hauber, 9402 Bernsbach; Ingrid Juppe, 8301 Bahratal; Angela Richter, 2723 Warin; Heidrun Scheinhardt, 4203 Bad Dürrenberg; Sigrun Geyer, Dar-es-Salaam (Tanzania); Ute Minow, 2723 Warin; Achim Bobeth, 806 Dresden; Andreas Lochner, 825 Meißen; Matthies Gerth, 59 Eisenach; Thomas Hentschel, 88 Zittau; Hannelore Schiefer, 90 Karl-Marx-Stadt; Barbara Günther, 728 Eilenburg; Michael Zeidler, 938 Flöha; Traudel Dunkelmann, 2723 Warin; Christine Mücke, 5401 Westgreußen; H.-D. Dunker, 7114 Zwenkau.

Klassenstufe 7

Uwe Risch, 327 Burg (105 Lösungen); **Uwe Löbus,** 801 Dresden; **Peter-Michael Anders,** 128 Bernau; **Wolfgang Huschmann,** 9156 Oelsnitz; **Jürgen Sommerschuh,** 85 Bischofswerda; **Jens Haupt,** 90 Karl-Marx-Stadt; **Martina Römer,** 128 Bernau, **Arndt Petzold,** 9034 Karl-Marx-Stadt; **Volkmar Vogel,** 8261 Ziegenhain; **Elke Seidel,** 806 Dresden; Jürgen Reimann, 104 Berlin; Gerald Gerlach, 801 Dresden; Karin Schubert, 9331 Pfaffroda; Heinz-Ulrich Petsch, 45 Dessau; Wolfram Werner, 8040 Dresden; Wilfried Carl, 402 Halle; Peter Heumann, 90 Karl-Marx-Stadt; Frank Burghardt, 12 Frankfurt/O.; Sabine Mamerow, 202 Altentreptow; Matthias Neumann, 1136 Berlin; Mariana Klöpper, 7122 Borsdorf; Gert Trinks, 801 Dresden; Ralf Weber, 85 Bischofswerda; Gudrun Müller, 9402 Bernsbach; Jörg Päßler, 934 Marienberg; Christine Wodtke, 9402 Bernsbach; Elke Hübner, 9402 Bernsbach; Petra Dietzel, 4271 Adendorf; Werder Wehr, 5603 Dingelstädt; Astrid Kamel, 353 Havelberg; Norbert Siedow, 195 Neuruppin; Gudrun Rosenbaum, 9402 Bernsbach; Birgit Schönherr, 1162 Berlin;

Klassenstufe 8

Horst Kohlschmidt, 801 Dresden; **Hans-Ulrich Frömmer,** 208 Neustrelitz; **Siegfried Weiß,** 8713 Neusalza-Spremberg; **Roswitha Schlotte,** 90 Karl-Marx-Stadt; **Harry Reimann,** 104 Berlin; **Jörg Hutschenreiter,** 8020 Dresden; **Regina Rau,** 9412 Schneeberg; **Norman Bitterlich,** 9011 Karl-Marx-Stadt; **Bernd Peters,** 2402 Wismar; **Harald Lehmann,** 7961 Görlsdorf; **Kerstin Müller,** 7253 Brandis; Eckhard Wildgrube, 4601 Berkau; Horst Theel, 1034 Berlin; Gerd Falk, 1532 Kleinmachnow; Christian Endter, 6088 Steinbach-Hallenberg; Rainer Arnold, 934 Hinterer Grund; Frank Rönick, 582 Bad Langensalza; Frank-G. Krause, 784 Senftenberg; Adriane Ulrich, 3223 Seehausen; Norbert Strecker, 7812 Lauchhammer; Bodo Geyer, 9505 Cainsdorf; Norbert Kunath, 825 Meißen; Mathias Thiele, 9303 Bärenstein; Dagmar Reißmann, 8021 Dresden; Barbara Kilias, 90 Karl-Marx-Stadt; Horst Werner, 111 Berlin; Michael Richter, 9361 Gehringswalde; Claudia Neumann, 9402 Bernsbach; Ute Rosenbaum, 9402 Bernsbach; Rolf Bartl, 58 Gotha; Gisbert Löwe, 655 Schleiz; Ulrike Brückner, 8122 Radebeul; Roland Bößenroth, 117 Berlin;

Klassenstufe 9

Ute Winkler, 153 Teltow (57 Karten); **Rainer Zerck,** 24 Wismar (57 Karten); **Frank Hartmann,** 7702 Bernsdorf; **Manfred Pokrandt,** 75 Cottbus; **Egbert Lindner,** 801 Dresden; **Johannes Borngräber,** 1211 Wüste-Kunersdorf; **Michael Otto,** 6081 Bernbach; **André Hoffmann,** 89 Görlitz; **Rolf-Dietmar Regel,** 75 Cottbus; **Dagmar Marby,** 43 Quedlinburg; André Otto, 119 Berlin; Christine Hense, 15 Potsdam; Karl-Heinz Vogt, 1211 Kietz; Bernd Zimdars, 209 Templin; Ralf Hötling, 102 Berlin; Silvia Giese, 729 Torgau; Bernd Klipps, 2051 Boddin; Matthias Günther, 701 Leipzig; Steffi Frömmer, 208 Neustrelitz; Bernd Reddemann, 36 Halberstadt; Andreas Schürer, 93 Annaberg-Buchholz; Gerlind Hanke, 7101 Frankenheim; Volker Heumann, 45 Dessau; Roland Nehrig, 55 Nordhausen; René Gottschlig, 75 Cottbus; Andreas Weller, 8242 Altenberg; Andreas Fleischer, 8027 Dresden; Ralf Theuer, 1321 Crussow; Jutta Schuster, 27 Schwerin; Siglinde Puller, 759 Spremberg; Jürgen Krebs, 3302 Barby; Roland Borch, 75 Cottbus; Klaus Irmscher, 57 Mühlhausen; Eberhard Maunke, 6088 Steinbach-Hallenberg

Klassenstufe 10/12

Dietmar Wegner, 3601 Dardesheim (29 Karten); **Ulrich Klaus,** 58 Erfurt (29 Karten); **Manfred Riemer,** 83 Pirna; **Volkmar Färber,** 1551 Berge; **Dieter Garling,** 286 Lübz; **Kurt Oppitz,** 15 Potsdam; **Hartmut Bull,** 2331 Lonvitz; **Brigitte Prawitz,** 119 Berlin; Michael Böhm, 1136 Berlin; Sabine Steinert, 8027 Dresden; Gina Jahnke, 801 Dresden; Bärbel Kurz, 724 Grimma; Matthias Heine, 8601 Schwarznaußlitz; Konrad Schneider, 95 Zwickau; Klaus-Peter Schemmel, 1055 Berlin; Edgar Petersdorf, 7251 Röcknitz; Lew Dimenstein, Leningrad; Walter Janous, Innsbruck (Österreich); Bert de Brock, Groningen (Holland); István Mátrai, Szombathely (Ungarische VR)

Die im Druck hervorgehobenen Schüler erhielten Buchprämien.

1972

Zum Jahreswechsel beste Wünsche für persönliches Wohlergehen, erfolgreiches Schaffen und gute Zusammenarbeit.

С Новом Году желаем Вам здоровья, счастья и успехов в работе. Надеемся и в дальнейшем на хорошее заимное сотрудничество.

With the compliments of the season we wish you the best of health, of prosperous 1972 and continuing good cooperation.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1972} &= (123-4\cdot5+6+7)(8+9)\\
&= 12^3-\sqrt{4}+5\cdot67-89\\
&= (1+2\cdot3)^4-5(6+78)-9\\
&= (9+8)(7+65+43+2-1)\\
&= 9+8+7-6-5+43^2+10\\
&= 12^{1+2}+12^2+(12-2)^2\\
&= 3+33+44\cdot44\\
&= 33+44\cdot44+3\\
&= (1111-111-11-1-1-1)(1+1)\\
&= (22+22)^2+(2+2+2)^2\\
&= (3\cdot3+3)^3+(3+3)^3+3^3+(3:3)^3\\
&= (77+77+77+7\cdot7)\cdot7+(77+7):7\\
&= 999+99\cdot9+9\cdot9+9:9\\
&= 3^3\cdot2^3\cdot2^3+3^3\cdot2^3+3^3+1^3\\
&= 12^3+123+123-1+2-3\\
&= (3\cdot2+11)(11\cdot11-2-3)
\end{aligned}
$$

Ing. H. Decker, Köln