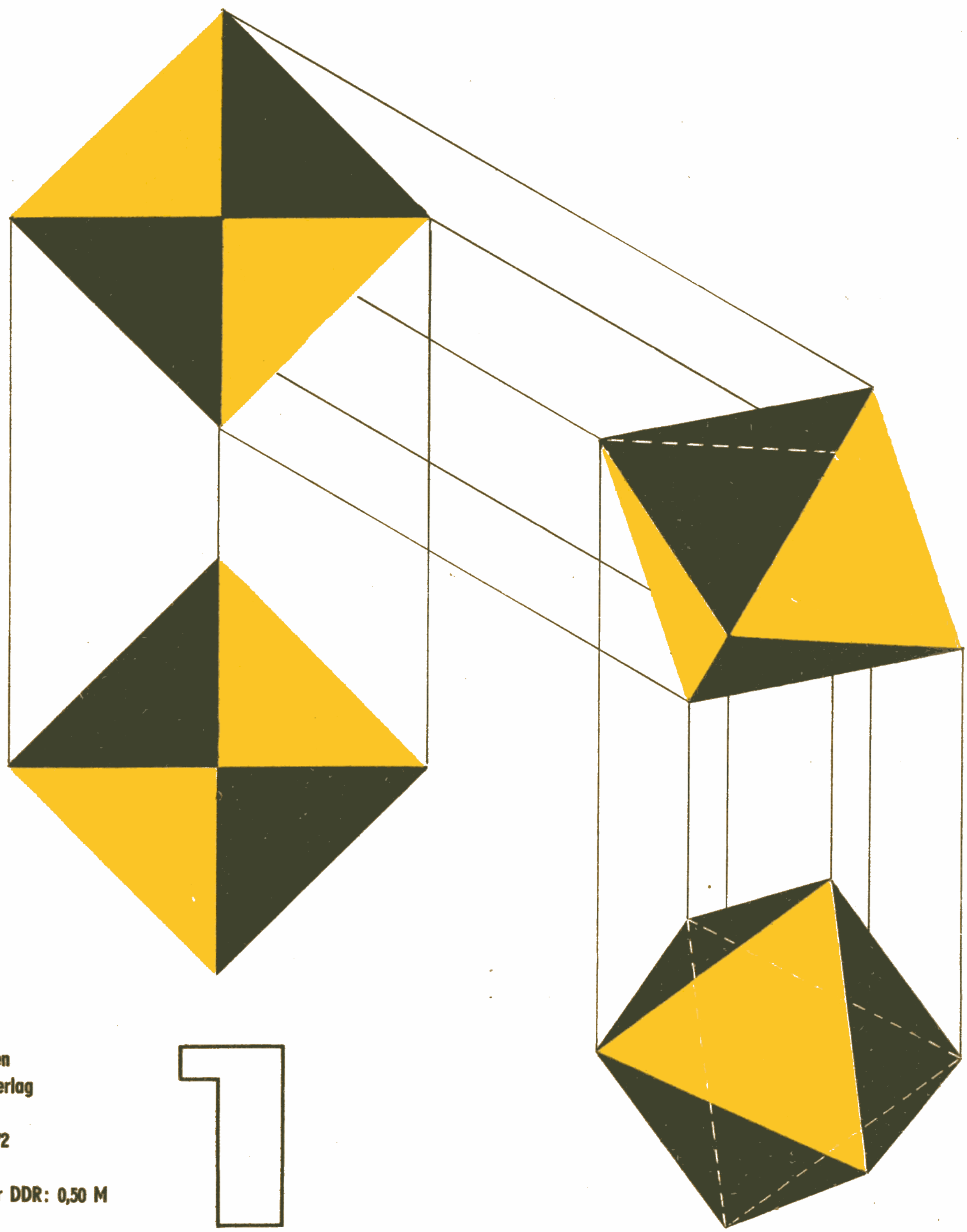
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
6. Jahrgang 1972
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31 059

1

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 3); Ersttagsbrief, eingesandt von Mathematikfachlehrer P. Nüchterlein, Burg (S. 4); Zentralbild ADN (S. 7); Graphiken: Parteihochschule „Karl Marx“ beim ZK der SED (S. 11);
Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 22. November 1971

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Über zwei Operationen mit Zahlen

Die Addition und Multiplikation von Zahlen genügen einer Reihe von Gesetzen, von denen wir hier an folgende erinnern:

1. Kommutatives Gesetz der Addition: $a+b=b+a$.
2. Assoziatives Gesetz der Addition: $(a+b)+c=a+(b+c)$.
3. Kommutatives Gesetz der Multiplikation: $a \cdot b=b \cdot a$.
4. Assoziatives Gesetz der Multiplikation: $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$.
5. Distributives Gesetz der Multiplikation bezüglich der Addition: $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$.

Hier sind a, b, c beliebige Zahlen. Es ist nun interessant, daß diese Gesetze auch in einigen anderen Fällen erfüllt sind, in denen man unter der „Addition" und „Multiplikation" gewisse andere Operationen mit Zahlen versteht, die von der uns so vertrauten gewöhnlichen Addition und Multiplikation verschieden sind. Um Verwechslungen mit diesen zu vermeiden, werden wir die nun einzuführenden Operationen durch Anführungszeichen hervorheben.
Unter der „Summe" zweier Zahlen a, b wollen wir ihr Maximum: $\max(a, b)$ verstehen, d. h. die größte der Zahlen a und b, wenn $a \neq b$ und eine beliebige von ihnen, wenn $a=b$. Diese Operation der „Addition", die beliebigen Zahlen a, b ihre „Summe" zuordnet, werden wir mit $\oplus$ bezeichnen, so daß

$a \oplus b=\max(a, b)$. So haben wir z. B.
$(-3) \oplus 2=2,\ \ 0 \oplus (-\sqrt{2})=0,\ \ \pi \oplus \pi=\pi$.

Es sei schon hier vermerkt, daß die „Addition" offensichtlich kommutativ ist:

$$a \oplus b=b \oplus a, \quad \text{denn} \quad \max(a, b)=\max(b, a).$$

Unter der „Multiplikation" zweier Zahlen a, b wollen wir nun noch ihr Minimum: $\min(a, b)$ verstehen, d. h. die kleinste der Zahlen a und b, wenn $a \neq b$ und eine beliebige von ihnen, wenn $a=b$. Die Operation der „Multiplikation", die zwei beliebigen Zahlen a, b ihr Produkt $\min(a, b)$ zuordnet, werden wir mit $\otimes$ bezeichnen, so daß

$a \otimes b=\min(a, b)$. So gilt z. B.
$(-3) \otimes 2=-3,\ \ 0 \otimes (-\sqrt{2})=-\sqrt{2},\ \ \pi \otimes \pi=\pi$.

Auch die Kommutativität der „Multiplikation" ist offensichtlich, denn

$$\min(a, b)=\min(b, a).$$

Gehen wir nun dazu über, für die eben definierten „Addition" und „Multiplikation" die Gültigkeit der anderen Gesetze zu überprüfen.
Um die Assoziativität der „Addition"

$$(a \oplus b) \oplus c=a \oplus (b \oplus c) \tag{1}$$

zu zeigen, müssen wir die Richtigkeit der Gleichung

$$\max(\max(a, b), c)=\max(a, \max(b, c))$$

überprüfen. Dazu haben wir in der linken Spalte der Tabelle 1 alle möglichen Reihenfolgen der Zahlen a, b, c in bezug auf ihre Größe gebracht. Die übrigen Spalten enthalten die entsprechenden Zahlen $a \oplus b$, $(a \oplus b) \oplus c$, $b \oplus c$ und $a \oplus (b \oplus c)$. Aus der Tabelle geht nun klar hervor, daß immer die Gleichung (1) besteht.
Wir können jetzt also von der „Summe" $a \oplus b \oplus c$ dreier beliebiger Zahlen a, b, c sprechen, diese gleich $a \oplus (b \oplus c)$ oder was dasselbe ist gleich $(a \oplus b) \oplus c$ setzen. Eine genaue Betrachtung der Tabelle 1 zeigt übrigens noch, daß immer

$$a \oplus b \oplus c=\max(a, b, c) \text{ ist.}$$

	Tabelle 1				Tabelle 2				
	$\max(a,b)$	$\max(\max(a,b),c)$	$\max(b,c)$	$\max(a,\max(b,c))$	$\max(a,b)$	$\min(\max(a,b),c)$	$\min(a,c)$	$\min(b,c)$	$\max(\min(a,c),\min(b,c))$
$a \leqq b \leqq c$	b	c	c	c	b	b	a	b	b
$a \leqq c \leqq b$	b	b	b	b	b	c	a	c	c
$b \leqq a \leqq c$	a	c	c	c	a	a	a	b	a
$b \leqq c \leqq a$	a	a	c	a	a	c	c	b	c
$c \leqq a \leqq b$	b	b	b	b	b	c	c	c	c
$c \leqq b \leqq a$	a	a	b	a	a	c	c	c	c

Von der Assoziativität der „Multiplikation", d. h. von der Gültigkeit der Gleichung

$$(a \otimes b) \otimes c=a \otimes (b \otimes c)$$

oder, was dasselbe ist, der Gleichung $\min(\min(a,b), c) = \min(a, \min(b, c))$ bitten wir euch selbst zu überzeugen — es genügt, eine entsprechende Tabelle ähnlich der Tab. 1 anzufertigen.
Wir wollen uns jetzt davon überzeugen, daß die „Multiplikation" bezüglich der „Addition" distributiv ist, d. h.

$$(a \oplus b) \otimes c=(a \otimes c) \oplus (b \otimes c), \tag{2}$$

was man auch in der Form

$$\min(\max(a, b), c)=\max(\min(a, c), \min(b, c))$$

schreiben kann. Es genügt, die Tabelle 2 aufzustellen, aus der ersichtlich ist, daß die Gleichung (2) wirklich für beliebige Zahlen a, b, c erfüllt ist.

Bei den Zahlen ist die gewöhnliche Addition bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation bekanntlich nicht distributiv: die Gleichung

$$(a \cdot b)+c=(a+c)\,(b+c)$$

ist nicht für alle Zahlen erfüllt. Für die oben eingeführten abstrakte „Addition“ und „Multiplikation“ ist dieses distributive Gesetz jedoch erfüllt:

$$(a \otimes b) \oplus c = (a \oplus c) \otimes (b \oplus c).$$

Überzeugt euch bitte selber davon, indem ihr zeigt, daß für beliebige Zahlen a, b, c die Gleichung

$$\max(\min(a, b), c) = \min(\max(a, c), \max(b, c))$$

erfüllt ist.

Es ist interessant, daß die „Addition“ und „Multiplikation“ auch andere Eigenschaften haben, die wir bei den gewöhnlichen Operationen vermissen:

$$a \oplus a = a \text{ und } a \otimes a = a,$$
$$a \otimes (a \oplus b) = a \text{ und } a \oplus (a \otimes b) = a.$$

Diese Relationen sind eine unmittelbare Folgerung aus der Definition der Operationen $\oplus$ und $\otimes$.

Es ist euch allen bekannt, daß man jeder Zahl a eine entgegengesetzte Zahl, d. h. die Zahl $-a$ zuordnen kann. Wir werden diese entgegengesetzte Zahl mit $\bar{a}$ bezeichnen, z. B.

$$\overline{2{,}5} = -2{,}5, \quad \overline{-\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad \bar{0} = 0.$$

Interessant ist nun, daß die „Addition“ und „Multiplikation“ mit der Operation, die einer Zahl ihre entgegengesetzte zuordnet, auf folgende Art und Weise verknüpft sind:

$$\overline{a \oplus b} = \bar{a} \otimes \bar{b}, \quad \overline{a \otimes b} = \bar{a} \oplus \bar{b}$$

(Bezüglich der gewöhnlichen arithmetischen Operationen sind diese Formeln falsch!) Versucht, diese Formeln selbst zu beweisen! Und versucht zum Schluß, folgende Aufgaben zu lösen:

Aufgaben:

▲1▲ Zeigt, daß für beliebige Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$, $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = \max(a_1, \ldots, a_n)$ und $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n = \min(a_1, \ldots, a_n)$.

▲2▲ Sind für beliebige Zahlen a, b, c die Gleichungen
$c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b)$ und
$c \oplus (a \otimes b) = (c \oplus a) \otimes (c \oplus b)$ erfüllt?

▲3▲ Beweist, daß für beliebige Zahlen a, b, c die Gleichung

$$\min[\min(a, c), \min(\max(a, b), c)] = \min(a, c)$$

besteht und schreibt sie mit Hilfe der Operationen $\oplus$ und $\otimes$! Wie kann man sich dann gleich unmittelbar von ihrer Gültigkeit überzeugen?

▲4▲ Es seien a, b, c beliebige Zahlen. Vereinfacht den Ausdruck
$\min\{a, -\max[\min(a, b), \max(a, c)]\}$.

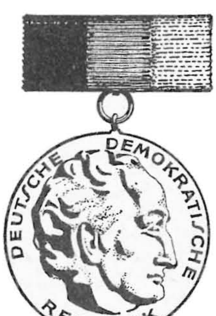
▲5▲ Ist für beliebige Zahlen a, b, c die Gleichung
$(a \oplus b) \otimes (a \oplus b \oplus c) = a \otimes \overline{[c \otimes (c \oplus b)]}$
erfüllt?

▲6▲ Kann man zu zwei gegebenen Zahlen a, b eine dritte Zahl x so bestimmen, daß

$$\max[\min(a, \max(a, b), x)] = b \text{ ist?}$$

Kirill Tschimov
(aus der sowj. Schülerzeitschrift „Quant“ 8/70)

Nationalpreis der DDR III. Klasse für Wissenschaft und Technik



Für seine beispielhaften wissenschaftlichen Leistungen zum Aufbau neuer Theorien zur Entwicklung neuer Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

An das Kollektiv „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Prof. Dr. rer. nat. habil. Klaus Matthes
Stellvertreter des Leiters des Institutskomplexes Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

Prof. Dr. rer. nat. habil. Johannes Kerstan
Ordentlicher Professor für Mathematik (Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik) an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Prof. Dr. rer. nat. habil. Kurt Nawrotzki
Hochschuldozent für das Fachgebiet Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Dr. rer. habil. Joseph Mecke
Hochschuldozent für Wahrscheinlichkeitstheorie an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Prof. Dr. rer. nat. Dr. sc. techn. Dieter König
Ordentlicher Professor für das Fachgebiet mathematische Methoden der Operationsforschung an der Sektion Mathematik der Bergakademie Freiberg

Eine Aufgabe von stud. math.
W. Burmeister

Sektion Mathematik an der Technischen Universität Dresden

▲809 Für welche natürlichen Zahlen n lassen sich unter Verwendung sämtlicher Elemente der Menge

$$M=\{n,n+1,n+3,n+5\}$$

zwei Produkte (zu je 2 Faktoren) bilden, die sich um genau 1 unterscheiden?

Wir nehmen an, es gibt überhaupt ein n, für das das Verlangte möglich ist. Wir müssen mit dieser Annahme beginnen, obwohl es denkbar wäre, daß überhaupt kein n Lösung dieser Aufgabe ist. Ein Beispiel dafür ist die vierte Aufgabe der XII. IMO in Ungarn, nach der die vorliegende Aufgabe gestaltet wurde:

XII. IMO — 4. Aufgabe: Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft:

Die Menge

$$\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5\}$$

läßt sich in zwei elementfremde nicht leere Teilmengen so zerlegen, daß das Produkt aller Elemente der einen Teilmenge gleich dem Produkt aller Elemente der anderen Teilmenge ist.

Diese Aufgabe besitzt keine Lösung, der Beweis hierfür ist recht schwierig.

Wir wenden uns nun wieder unserem Problem zu. Wenn die Zerlegung der Menge M in zwei Produkte, die sich um genau 1 unterscheiden, möglich ist, so ist das eine der Produkte geradzahlig, das andere ungeradzahlig. Die beiden Faktoren des ungeradzahligen Produktes sind notwendig ungerade Zahlen. Daraus folgt:

Wenn die Aufgabe für ein n lösbar ist, so muß

$$M=\{n,n+1,n+3,n+5\}$$

mindestens zwei ungerade Zahlen enthalten. Ist n ungerade, so ist n die einzige ungerade Zahl aus M, während $n+1, n+3, n+5$ gerade Zahlen sind. Daraus folgt:

Für ungerade n ist die Aufgabe nicht lösbar.

Wir betrachten also nur gerade Zahlen n.

Zunächst sei $n=0$, dann ist $M=\{0,1,3,5\}$. In diesem Fall sieht man, daß das eine der Produkte Null ist, während das andere Produkt mindestens gleich 3 ist. Daher ist die Aufgabe für $n=0$ unlösbar. Für $n=2$ ist $M=\{2,3,5,7\}$. Aus dieser Menge können die Produkte $2\cdot 7=14$ und $3\cdot 5=15$ gebildet werden. Sie unterscheiden sich um genau 1. Wir haben also eine Lösung der Aufgabe gefunden.

Ergebnis: Für $n=2$ ist die Aufgabe lösbar.

Wir überlegen: Ist damit die uns gestellte Aufgabe vollständig gelöst? Wir haben bewiesen, daß die Aufgabe Lösungen hat, aber wir haben möglicherweise noch nicht alle Lösungen gefunden. Daher versuchen wir, aus einem allgemeinen Ansatz alle Lösungen dieser Aufgabe zu gewinnen. Wir betrachten dasjenige der beiden Produkte, das n als Faktor enthält. Der zweite Faktor ist entweder gleich $n+1$, dann gilt

$$n\cdot(n+1)=(n+3)\cdot(n+5)\pm 1$$
$$n^2+n=n^2+8n+15\pm 1$$
$$7n=-15\pm 1,$$
$$n=-2 \text{ oder } n=-\frac{16}{7},$$

oder er ist gleich $n+3$, dann gilt

$$n\cdot(n+3)=(n+1)\cdot(n+5)\pm 1$$
$$n^2+3n=n^2+6n+5\pm 1$$
$$3n=-5\pm 1,$$
$$n=-2 \text{ oder } n=-\frac{4}{3}, \text{ oder er}$$

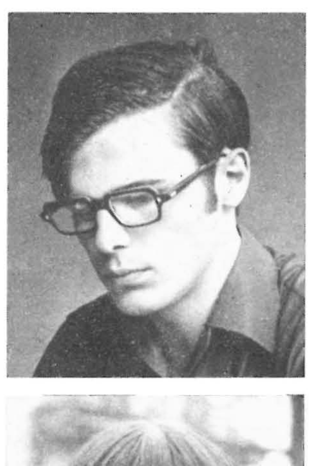
ist schließlich gleich $n+5$, dann gilt

$$n\cdot(n+5)=(n+1)\cdot(n+3)\pm 1$$
$$n^2+5n=n^2+4n+3\pm 1$$
$$n=3\pm 1,\ n=2 \text{ oder } n=4$$

Die einzigen Lösungen der Aufgaben sind $n=2$ und $n=4$, die übrigen Werte sind negativ. Außer $n=2$ gibt es also noch die zweite Lösung $n=4$. Für $n=4$ ist nämlich $M=\{4, 5, 7, 9\}$, und die beiden Produkte $4\cdot 9=36$ und $5\cdot 7=35$ leisten das Gewünschte.

Man versuche, die gleiche Aufgabe für die Menge $N=\{n,n+1,n+2,n+6\}$ zu lösen!

W. Burmeister



Wir stellen vor:
Ursula Baier

EOS Ernst Schneller, Meißen

Ursula Baier erhielt auf der *X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR* in Klassenstufe 10 einen 3. Preis und wurde damit einzige Preisträgerin. Wir möchten sie unseren *alpha*-Lesern vorstellen (siehe Foto auf dieser Seite unten).

Sie schrieb in einem Brief:

Werte Mitarbeiter von *alpha*!

Heute möchte ich meinen Dank für die Herausgabe der Zeitschrift *alpha* aussprechen.

Nachdem ich an einigen Kreisolympiaden gut abgeschnitten hatte, wurde mein Interesse an der Mathematik geweckt. Ich habe es daher begrüßt, daß 1967 die *alpha* erschien. Durch sie konnte ich meine Kenntnisse erweitern, bekam Übung im Lösen von Aufgaben und wurde zum Selbststudium angeregt. Nur dadurch konnte ich auf der *X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR* einen Preis erringen. Deshalb gebührt allen Mitarbeitern der *alpha* mein besonderer Dank.

Um das nächste Heft genauso interessant gestalten zu können, sende ich drei Aufgaben:

▲8▲844 Es ist folgender Satz zu beweisen: Fällt man von einem inneren Punkt P eines Dreiecks ABC die Lote l_a, l_b und l_c auf die Seiten a, b und c, so ist die Summe der Längen dieser Lote größer oder gleich der Länge der kürzesten Höhe und kleiner oder gleich der Länge der längsten Höhe des Dreiecks.

▲9▲845 Man verwandelt einen reinperiodischen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch, indem man in den Zähler die Periode und in den Nenner soviel Neunen schreibt, wie die Periode Stellen hat.

Diese Aussage ist zu beweisen!

▲10/12▲846 In einem Dreieck $\triangle ABC$ seien h_a, h_b und h_c die drei Höhen, r der Radius seines Umkreises und A sein Flächeninhalt. Beweise, daß zwischen diesen Größen die Beziehung

$$A=\sqrt{\frac{r}{2}\cdot h_a\cdot h_b\cdot h_c} \text{ gilt!}$$

Ramanujan —

das mathematische Genie Indiens

Teil 2

Die sechste Klasse war die letzte Klasse der Mittelschule. Als Sechzehnjähriger bestand *Ramanujan* nach Beendigung der Schule die Aufnahmeprüfungen für die Universität Madras. Im Januar 1904 wurde er in das erste Studienjahr des an der Universität angeschlossenen Kumbakonamer College aufgenommen. Für seine ersten Erfolge erhielt er ein Sonderstipendium, das für die in Englisch und Mathematik besten Studenten vorgesehen war. Bald ließen jedoch seine Ergebnisse immer mehr zu wünschen übrig, da er seine gesamte Zeit für eigene mathematische Untersuchungen verwendete, deren Ergebnisse er regelmäßig in seine Notizbücher eintrug.

Er hörte auf, Hausaufgaben anzufertigen, versäumte einen großen Teil des Unterrichts und mußte schließlich im ersten Studienjahr verbleiben. Im Leben *Ramanujans* begann ein fast zehn Jahre währender Abschnitt von Mißerfolgen. Im Jahre 1905 wanderte er durch Zentralindien, kehrte dann nach Kumbakonam zurück, wollte das Studium im College fortsetzen, wurde aber nicht zugelassen, fuhr nach Madras, wurde dort 1906 an der Universität immatrikuliert, erkrankte aber und fuhr wieder nach Hause nach Kumbakonam zurück. 1907 versuchte er, die Prüfungen für die beiden ersten Studienjahre der Universität extern abzulegen, fiel aber durch. Danach hatte er bis 1909 keine bestimmte Beschäftigung, wenn man davon absieht, daß er sich die ganze Zeit unermüdlich mit Mathematik befaßte und dabei immer neue Seiten seiner Notizbücher füllte. 1909 heiratete *Ramanujan*, und er versuchte, Arbeit zu finden. 1910 wandte er sich diesbezüglich an den indischen Mathematiker *Ramaswamy Aiyar*, den Begründer der Indischen Mathematischen Gesellschaft. *Ramaswamy Aiyar* sah sich die Notizbücher *Ramanujans* an und überzeugte sich davon, daß er es mit einem Menschen ungewöhnlicher Begabung zu tun hatte, obwohl er bei weitem nicht die ganze Größe dieses Talents erkannte. Er schickte *Ramanujan* zu *Seshu Aiyar*, der zu dieser Zeit Lehrer am Kumbakonamer College war und *Ramanujan* schon kannte, als dieser noch Student war. *Seshu Aiyar* vermittelte *Ramanujan* für einige Monate Arbeit. Endlich, im Dezember 1910, hatte *Ramanujan* etwas Glück: er wurde dem einflußreichen Beamten *Ramachandra Rao* vorgestellt, der im Leben *Ramanujans* eine wichtige Rolle spielte. Er war der erste, der in *Ramanujan* das mathematische Genie erkannte. Er machte seinen ganzen Einfluß geltend, um *Ramanujan* das Leben zu erleichtern und dessen wissenschaftliche Laufbahn sicherzustellen.

Ramachandra Rao half *Ramanujan* zunächst aus persönlichen Mitteln. Als er aber sah, daß *Ramanujan* diese Lage bedrückte, vermittelte er ihm eine Arbeit in der Postverwaltung von Madras. Das Monatsgehalt betrug 30 Rupien. *Ramanujan* arbeitete dort vom Februar 1912 bis zum Mai 1913, als sich sein Schicksal endlich durch die Einmischung von *Hardy* endgültig entschied.

Im Jahre 1911 wurden im „Journal of the Indian Mathematical Society“ (Zeitschrift der Indischen Mathematischen Gesellschaft) von *Seshu Aiyar* die ersten Aufgaben *Ramanujans* veröffentlicht. Der erste eigene Beitrag *Ramanujans* erschien etwas später im gleichen Jahr. Bald darauf wurde *Ramanujan* als Mathematiker bekannt, zumindest in seiner Heimat. Betrachtet man jedoch diesen Lebensabschnitt *Ramanujans*, so kann man sich nicht des Eindrucks erwehren, daß die Menschen seiner Umgebung bei noch so gutem Verhältnis zu ihm auch jetzt keine richtige Vorstellung hatten, welche Ausbildung *Ramanujan* für die wissenschaftliche Arbeit auf dem Gebiet der Mathematik benötigte. Sie glaubten, alles für ihn getan zu haben, worauf er Anspruch hatte.

Anfang 1913 empfahlen die *Ramanujan* nahestehenden indischen Mathematiker nachdrücklich, ein kompetenteres und strengeres Urteil über seine in den Notizbüchern niedergeschriebenen Ergebnisse einzuholen. Sie empfahlen, diese in das mathematische Zentrum des Britischen Imperiums — die Universität Cambridge — zu schicken.

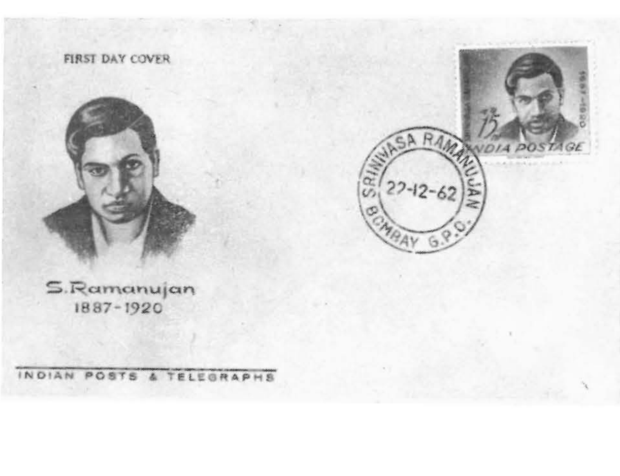
Bis zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts konnte diese Universität nicht zu den größten mathematischen Zentren der Welt gezählt werden. Anfang dieses Jahrhunderts wurde jedoch das Niveau der mathematischen Forschungen und der Lehre durch die jungen Mathematiker *Hardy* und *Littlewood* angehoben. Dank seiner Energie und ungewöhnlich hohen wissenschaftlichen Produktivität wurde *Hardy* (1877 bis 1947) schon in jungen Jahren zu einem bekannten Gelehrten, der an der Spitze einer großen mathematischen Schule stand. *Hardy* war nur 9 Jahre älter als *Ramanujan*, aber er konnte an die gesamte tausendjährige mathematische Weltkultur anknüpfen, während *Ramanujan* lediglich über zwei alte elementare Lehrbücher und sein großes mathematisches Talent verfügen konnte.

Seinen ersten Brief an *Hardy* schrieb *Ramanujan* am

16. Januar 1913. Über die darin mitgeteilten Sätze und Formeln urteilte *Hardy*: „Es genügt, einen Blick darauf zu werfen, um zu sehen, daß sie nur von einem Mathematiker allerhöchsten Ranges stammen konnten. Sie müssen richtig sein, denn wären sie falsch, so könnte niemand so viel Phantasie haben, sie zu erfinden". Über eine zahlentheoretische Formel von *Ramanujan*, die sich als nicht korrekt erwiesen hat, schrieb *Hardy*: „Das Hauptglied wurde erstmalig 1908 von *E. Landau* gefunden. *Ramanujan* hatte keinen so mächtigen Apparat zur Verfügung, wie er von *Landau* angewendet wurde. *Ramanujan* hat niemals ein französisches oder deutsches Buch gelesen, seine Englisch-Kenntnisse waren so unbedeutend, daß er nicht einmal eine elementare Prüfung bestehen konnte. Erstaunlich ist allein schon, daß er überhaupt in der Lage war, solche Aufgaben zu stellen, für deren Lösung im Laufe eines Jahrhunderts die Anstrengungen der besten Mathematiker Europas vonnöten waren und die bis heute keine vollständige Lösung erhalten haben."

Ramanujan hat auch viele richtige und neue zahlentheoretische Sätze aufgestellt, die bis heute von Mathematikern bewundert werden. Einige von ihnen sind sehr tiefliegend, obwohl sie sich mit elementaren Tatsachen der Zahlentheorie befassen. Betrachten wir ein verhältnismäßig einfaches Ergebnis von *Ramanujan*, das aber seine Schöpferkraft im richtigen Licht zeigt. Es handelt sich um einen Satz aus der elementaren Zahlentheorie, der ihn von Kindesalter an interessierte. Um über die ganzen Zahlen nachzudenken, braucht man keinerlei Kenntnisse, nur Interesse. Um aber in die Geheimnisse der natürlichen Zahlenreihe einzudringen, muß man noch über eine gewisse Spezifik im Denken verfügen und über die unerklärbare Kraft der Intuition, die alle großen Mathematiker besitzen und die in ganz besonderem Maße auch *Ramanujan* besaß.

Wieviel natürliche Zahlen unter den ersten hundert sind Potenzen der Zahl 2?



Ersttagsbrief, eingesandt vom Mathematikfachlehrer P. Nüchterlein, Burg

Man kann sie abzählen: $1=2^0$, 2, 4, 8, 16, 32, 64, insgesamt also 7. Aber wieviel solcher Zahlen gibt es unter den ersten tausend? Wir zählen weiter: zu den schon angeführten kommen die Zahlen 128, 256 und 512 hinzu, insgesamt gibt es also 10 solcher Zahlen. Wir stellen jetzt eine allgemeinere Frage: wieviel Potenzen der Zahl 2 gibt es unter den ersten n natürlichen Zahlen? Auch auf diese Frage kann man leicht antworten, man muß nur den Logarithmus anwenden. Es gibt nämlich genau so viele Potenzen wie es Exponenten $k \geqq 0$ gibt, für die $2^k \leqq n$ gilt. Diese Ungleichung logarithmieren wir mit der Basis 10 und erhalten

$$k \log 2 \leqq \log n, \text{ d. h. } k \leqq \frac{\log n}{\log 2}.$$

Wie viele nichtnegative ganzzahlige Exponenten k genügen dieser Ungleichung? Die Anzahl der positiven ganzzahligen k, die dieser Ungleichung genügen, ist gleich dem ganzzahligen Anteil des Bruches $\frac{\log n}{\log 2}$, der so bezeichnet wird: $\left[\frac{\log n}{\log 2}\right]$. Berücksichtigt man noch den Exponenten $k=0$, so erhält man die endgültige Antwort auf die uns interessierende Frage:

$$\left[\frac{\log n}{\log 2}\right]+1.$$

Wegen $\log 2 = 0{,}30103$ ergeben sich für $n=100$ und $n=1\,000$ die schon oben erhaltenen Resultate

$$\left[\frac{\log 100}{\log 2}\right]+1=\left[\frac{2}{0{,}30103}\right]+1=[6{,}6\ldots]+1=6+1=7,$$

$$\left[\frac{\log 1000}{\log 2}\right]+1=\left[\frac{3}{0{,}30103}\right]+1=[9{,}9\ldots]+1=9+1=10.$$

Analog löst man die entsprechende Aufgabe für Potenzen der Zahl 3. *Ramanujan* stellte sich eine dem Anschein nach nur wenig schwierigere Frage:

Wieviel natürliche Zahlen unter den ersten n sind Produkte von Potenzen der Zahl 2 und Potenzen der Zahl 3, d. h. wieviel können in der Form $2^k \cdot 3^l$ (mit nichtnegativen Exponenten k und l) geschrieben werden?

Wir gehen an dieses Problem empirisch heran und schreiben für $n=100$ alle solche Zahlen auf: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 81, 96 — insgesamt 20 Zahlen. Für $n=1000$ wäre es schon ermüdend, alle diese Zahlen zu notieren. Man braucht eine allgemeine Formel, aber trotz aller Anstrengungen gelingt es nicht, eine solche Formel aufzustellen. Eine exakte Formel der Art, wie sie oben für einfachere Aufgaben hergeleitet wurden, gibt es für die Aufgabe *Ramanujans* nicht. Dafür hat *Ramanujan* eine Näherungsformel gefunden, aber auch das war eine erstklassige Leistung. Bei den beiden vorangehenden Aufgaben hätte man als Näherungsformeln $\frac{\log n}{\log 2}$ und $\frac{\log n}{\log 3}$ wählen können; für $n=100$ bzw. $n=1000$ ergibt die erstere 6,6 (anstelle der exakten Anzahl 7) bzw. 9,9 (anstelle 10). Die Näherungsformel *Ramanujans* für die Anzahl der natürlichen Zahlen $\leqq n$, welche die Form $2^k 3^l$ (mit nichtnegativen ganzzahligen Exponenten k, l) haben, lautet

$$\frac{\log 2n \cdot \log 3n}{2 \log 2 \cdot \log 3}.$$

Das war ein glänzendes Ergebnis (eines der ersten *Ramanujans*), um so mehr, da der Beweis dieser Formel trotz ihrer Einfachheit sehr kompliziert ist. Überprüfen wir diese Formel für $n = 100$: Wir wissen, daß die exakte Anzahl 20 ist; die Formel *Ramanujans* ergibt

$$\frac{\log 200 \cdot \log 300}{2 \log 2 \cdot \log 3} = \frac{2{,}30103 \cdot 2{,}47712}{2 \cdot 0{,}30103 \cdot 0{,}47712}$$
$$= \frac{5{,}67792\ldots}{0{,}28725\ldots} = 19{,}75\ldots$$

In Wirklichkeit ist die Formel *Ramanujans* eine asymptotische Formel, d. h. wenn man die exakte Lösung der Aufgabe mit $R(n)$ bezeichnet (so daß z. B. $R(100) = 20$), so ist

$$R(n) - \frac{\log 2n \cdot \log 3n}{2 \log 2 \cdot \log 3} = d(n)$$

eine Größe, die für $n \to \infty$ bedeutend langsamer anwächst als $R(n)$. $R(n)$ selbst hat, wie aus dem Resultat *Ramanujans* ersichtlich ist, die Größenordnung $\log^2 n$. *Ramanujan* nahm offensichtlich an, daß die Differenz $d(n)$ für alle n beschränkt ist, da er überhaupt ein nahezu mystisches Talent besaß, für die kompliziertesten Funktionen Näherungsausdrücke mit beschränktem Fehler anzugeben. In diesem Fall allerdings konnte die Beschränktheit des Fehlers $d(n)$ wegen der Kompliziertheit der Funktion $R(n)$ nicht nachgewiesen werden, obwohl $R(n)$ scheinbar so leicht zu bestimmen ist (in Wirklichkeit gehört diese Aufgabe zu den sehr schwierigen Aufgaben, welche die Bestimmung der Anzahl der in einer Figur — hier einfach im Dreieck — enthaltenen Punkte mit ganzzahligen Koordinaten zum Inhalt haben). Es gibt Gründe anzunehmen, daß $d(n)$ mit n unbeschränkt anwächst. Das schärfste, was *Hardy* und einige andere Mathematiker in dieser Richtung beweisen konnten, ist, daß $d(n)$ langsamer anwächst als $\frac{\log n}{\log \log n}$. Auch dieses Resultat zeigt jedoch, wie gut die Näherungsformel *Ramanujans* für $R(n)$ ist.

Kehren wir nun zu *Ramanujans* Biographie zurück. In dem Briefwechsel, der sich zwischen *Ramanujan* und *Hardy* angebahnt hatte, entstand vor *Hardy* ein immer klareres Bild von dem urwüchsigen Talent *Ramanujans*. Am 27. Februar 1913 schrieb *Ramanujan* an *Hardy*:

„In Ihnen habe ich einen Freund gefunden, der meine Arbeiten aufmerksam und verständnisvoll verfolgt. Das ist für mich ein Anreiz, meine Untersuchungen fortzusetzen ... An vielen Stellen Ihres Briefes weisen Sie darauf hin, daß exakte Beweise nötig sind, und Sie bitten mich, meine Beweismethoden mitzuteilen ... Ich möchte Ihnen dazu folgendes sagen: Überprüfen Sie meine Resultate, und wenn sie mit Ihren übereinstimmen, so müssen Sie zumindest zugeben, daß meine Erörterungen ein Körnchen Wahrheit enthalten. Um mein Gehirn zu erhalten, brauche ich etwas zu essen, und das ist meine große Sorge. Ein Brief von Ihnen mit einer positiven Einschätzung meiner Arbeit genügt, und mir wird von der Universität oder von der Regierung ein Stipendium zuerkannt ..." *Hardy* unternahm daraufhin energische Schritte, um *Ramanujan* ein Stipendium zu verschaffen, und er lud ihn ein, nach Cambridge zu kommen. Die Einladung wurde *Ramanujan* durch den Sekretär der Organisation indischer Studenten in London übergeben, aber *Ramanujan* lehnte es, obwohl die Finanzfrage gelöst war, kategorisch ab, Indien zu verlassen. Der Hauptgrund dafür waren kastenbedingte Vorurteile, besonders seine Mutter war dagegen. So blieb nur übrig, sich in Indien um ein Stipendium für *Ramanujan* zu bemühen. Ab 1. Mai 1913 erhielt er von der Universität Madras ein auf zwei Jahre befristetes Sonderstipendium in Höhe von 75 Rupien monatlich. Von diesem Tage an wurde *Ramanujan*, wie *Hardy* schrieb, zum Berufsmathematiker.

Der Briefwechsel allein genügte *Hardy* nicht. Hartnäckig verfolgte er weiter das Ziel, *Ramanujan*, für dessen wissenschaftliche Tätigkeit er sich in gewissem Maße verantwortlich fühlte, zur Reise nach Cambridge zu bewegen, sowohl in *Ramanujans* Interesse als auch im Interesse der Mathematik. Das briefliche Drängen *Hardys* blieb ergebnislos, der Einfluß der Mutter überwog offensichtlich die Meinung *Hardys* und den Rat vieler Freunde *Ramanujans*. Bis Ende 1913 änderte sich daran nichts. Anfang 1914 jedoch kam auf Einladung der Universität ein Schüler *Hardys* als Gastdozent nach Madras. Dieser hatte den Auftrag, an der Universität noch einen Vorstoß zu unternehmen, und er überreichte ein diesbezügliches Memorandum. Die Notwendigkeit für *Ramanujan*, nach Cambridge zu fahren, wurde in den Intelligenzkreisen von Madras in breitem Maße und nachdrücklich diskutiert, so daß die Mutter schließlich doch nachgab.

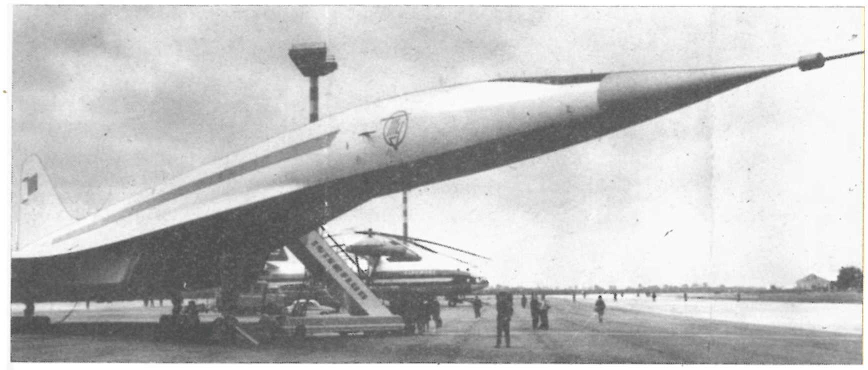
Die ersten Monate des Aufenthalts *Ramanujans* in Cambridge wurden dazu verwendet, die wesentlichsten Lücken in den mathematischen Kenntnissen zu schließen. *Hardy*, *Littlewood* und die anderen Cambridger Mathematiker waren über die Tiefe seiner Kenntnisse auf einigen Gebieten und die völlige Unkenntnis auf anderen Gebieten erstaunt.

V. Lewin

Dieser Beitrag wird in Heft 2/71 (Teil 3) abgeschlossen, d. Red.)

Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug?

Teil 2



Nachdem Klaus sich die Aufgabentexte notiert hat (siehe Heft 6/71, S. 130/132) urteilt er: „Jetzt verstehe ich auch, warum ein Überschallflugzeug ein weit nach vorn ragendes Staurohr besitzt (siehe Foto oben). Die Spitze des Staurohres soll die Spitze des mit dem Flugzeug „mitfliegenden" Schallkegels sein — und alle anderen Teile des Flugzeuges sollen sich möglichst innerhalb dieses Kegels befinden." Steffen ergänzt die Betrachtungen in einer anderen Richtung: „Wegen der großen Stärke der Druckwellen, die ein Überschallflugzeug bildet, breiten sich diese Druckwellen selbst, zumindest in Flugzeugnähe, mit größerer Geschwindigkeit aus. Mit wachsender Entfernung nimmt die Ausbreitungsgeschwindigkeit bis zur normalen Schallgeschwindigkeit ab. Deshalb hat, abweichend von unserer Überlegung, die Kopfwelle eines Überschallflugzeuges keine Kegelgestalt, sie umschließt vielmehr den von uns ermittelten Kegel." (Bild 11)

Bereits an einem der nächsten Tage haben beide Brüder wieder Zeit und Muße, um sich erneut über das Problem der Bestimmung der Geschwindigkeit eines Überschallflugzeuges zu unterhalten. Klaus legt zunächst seinem Bruder einen Zettel vor, auf dem er beide Aufgaben gelöst hat (siehe Heft 6/72, S. 132 unten)

1. Aufgabe

$$c = 340\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 340\,\frac{\frac{1}{1000}\,\mathrm{km}}{\frac{1}{3600}\,\mathrm{h}} = 340 \cdot 3{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$\approx 1200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

2. Aufgabe

a) Jagdflugzeug Suchoi III: $v = 2300\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

$$= 2300 \cdot \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{2300\,\mathrm{m}}{3{,}6\,\mathrm{s}} \approx 640\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Panzer T 54:

$$v = 56\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{56}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b) $\frac{v}{c} \approx \frac{640\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 1{,}9 \qquad \frac{v}{c} \approx \frac{16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 0{,}048$

„Du hast die beiden Aufgaben gelöst", kommentiert Steffen. „Insbesondere hast du richtig erkannt, daß der Quotient $\frac{v}{c}$ eine unbenannte Zahl ist. Dieser Quotient ist ein brauchbares Maß für die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers. Nach dem Physiker *Mach* nennt man diesen Quotienten die *Machsche Zahl* des in Luft bewegten Körpers." Steffen holt die Skizze (Bild 12), die auf der Wiese angefertigt worden ist, wieder hervor und sagt: „Wir müssen für verschiedene Werte von v zu dem Dreieck FQP, wie wir es hier gezeichnet haben, jeweils ein maßstabgetreues Bild, also ein ähnliches Dreieck $F'Q'P'$ zeichnen, bei dem jedesmal die Bildseite $F'Q'$ 1 dm lang ist. — Überlege dir, wie du ein solches Bilddreieck für ein Flugzeug, das mit doppelter Schallgeschwindigkeit fliegt, zeichnen kannst!" Klaus überlegt und spricht: „Da bei Original- und Bilddreieck die Verhältnisse entsprechend der Seiten gleich sind, gilt allgemein: $\overline{Q'P'} : \overline{Q'F'} = \overline{QP} : \overline{QF}$. Da laut unserer Zeichnung (Bild 12) $\overline{QP} = vt$ und $\overline{QF} = ct$ und laut Festsetzung $\overline{Q'F'} = 1$ dm gelten, ergibt sich hieraus $Q'P' = \frac{v}{c}$ dm. — Wegen $v = 2c$ muß jetzt speziell $\overline{Q'P'} = 2$ dm gelten." Nach dieser Betrachtung zeichnet Steffen das gesuchte Bilddreieck in einer für das Folgende geeigneten Lage:

Steffen errichtet im Punkt Q' auf $\overline{F'Q'}$ noch die Senkrechte. „Den halben Öffnungswinkel des durch unsere vereinfachende Annahme erhaltenen Schallkegels bezeichne ich mit α. Da Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gleich groß sind, tritt in meiner Zeichnung der Winkel α zweimal auf." Abschließend schlägt Steffen noch um Q' einen Kreisbogen mit dem Radius 1 dm. „Zeichne für verschiedene Werte $\frac{v}{c}$ mit $v > c$ derartige Bilddreiecke $F'Q'P'$, die sämtlich die gleichen

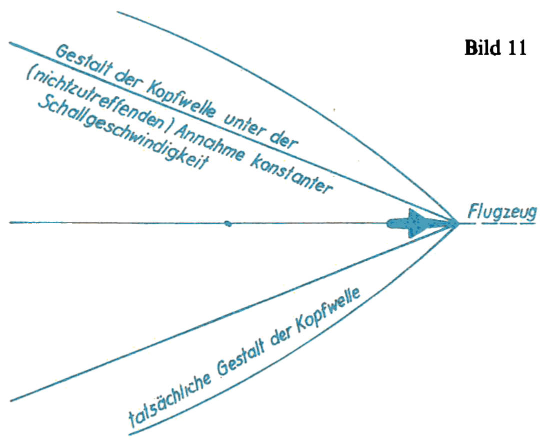


Bild 11

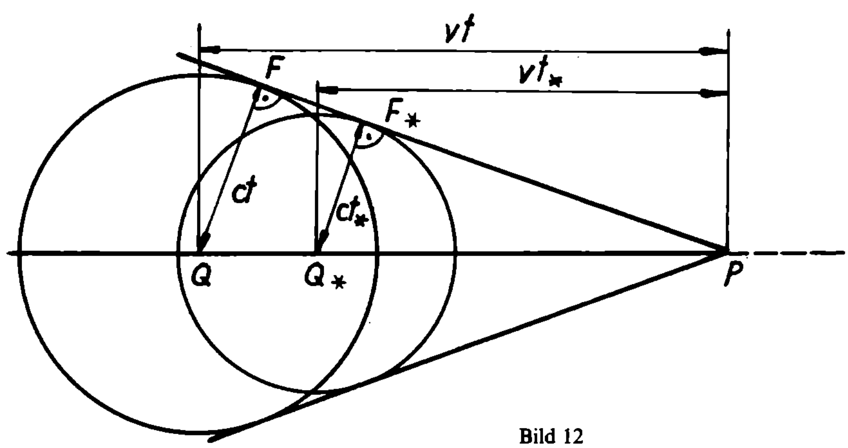


Bild 12

Eckpunkte F' und Q' haben. Dem Schnittpunkt der jeweiligen Strecke $\overline{Q'P'}$ mit dem gezeichneten Kreisbogen hast du als Kote die jeweilige Zahl $\frac{v}{c}$ zuzuordnen. Danach

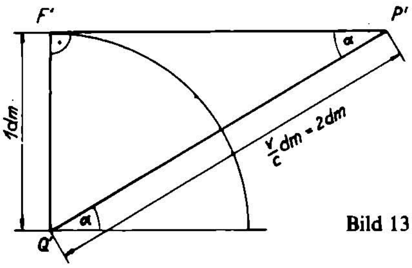
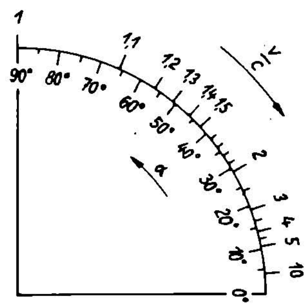


Bild 13

hast du diesen Kreisbogen noch ein zweites Mal zu kotieren, indem du seinen Punkten neben den Zahlen $\frac{v}{c}$ noch die Maßzahlen der in Grad gemessenen, jeweils zugehörigen Winkel α zuordnest." Nach dieser Anweisung zeichnet Klaus das abgebildete Nomogramm (Bild 14).

Bild 14


Als Klaus seinem Bruder dieses Nomogramm vorlegt, fragt ihn dieser: „Welche Maßzahl $\frac{v}{c}$ gehört laut Nomogramm zu $\alpha = 35°$?" Klaus antwortet nach einem Blick auf das Nomogramm: „$\frac{v}{c} \approx 1{,}7$". Wie soll ich nun mit diesem Nomogramm die Geschwindigkeit eines Überschallflugzeuges bestimmen?", fragt Klaus. Steffen erklärt: „Bei einem geradlinig-gleichförmig, horizontal und senkrecht über dich hinwegfliegenden Überschallflugzeug mißt du im Moment des Hörbarwerdens des Knalles den Erhebungswinkel α_* (Winkel, den der Sehstrahl Auge–Flugzeug mit der Waagerechten bildet), unter dem das Flugzeug erscheint. Am Nomogramm liest du zu diesem Erhebungswinkel α_* die zugehörige Machzahl $\frac{v_*}{c}$ ab. — Natürlich kannst du zum Messen des Winkels α_* gleich dein auf ein Stück Pappe aufgeklebtes Nomogramm verwenden. So kannst du gleichzeitig mit α_* die zugehörige Machzahl $\frac{v_*}{c}$ ablesen." (Bild 15)

Klaus erwidert: „Natürlich ist die so ermittelte Machzahl $\frac{v_*}{c}$ zu klein: Der Winkel α_* ist größer als der halbe Öffnungswinkel α des durch unsere vereinfachende Betrachtung erhaltenen Kegels ($\alpha_* > \alpha$) und deshalb ist die tatsächliche Fluggeschwindigkeit v des Flugzeuges sicher noch größer als die durch das Nomogramm ermittelte v_*. Es gilt also $v > v_*$." (siehe Bild 15)

Anschließend unterhalten sich beide noch darüber, wie die Fluggeschwindigkeit eines geradlinig-gleichförmig und horizontal fliegenden Überschallflugzeuges zu ermitteln ist, das seitlich am Beobachter vorbeifliegt. Da Klaus sich sehr interessiert an diesen Überlegungen zeigt, stellt ihm Steffen abschließend noch drei Aufgaben:

▲ *Aufgabe:* Von einem Überschallflugzeug, das einen geradlinigen und horizontalen Kurs mit konstanter Geschwindigkeit bei Windstille und der konstanten Lufttemperatur 18 °C einhält, hörst du den Knall seiner Kopfwelle 8 s danach, als sich das Flugzeug direkt über dir befand. Du siehst in diesem Moment das Flugzeug unter dem Erhebungswinkel $\alpha_* = 50°$. Schätze die Geschwindigkeit und die Flughöhe des Flugzeuges ab!

▲ *Aufgabe:* Von einem Schnellboot, welches einen geradlinigen Kurs mit der Geschwindigkeit 43 kn (Knoten) $\approx 80\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ steuert, ertönt vom Passieren der Stelle A der Fahrtroute an für 3 s die Schiffssirene. An welchen Stellen der Umgebung ist bei Windstille 5 s nach dem Ertönen der Sirene das Sirenengeheul zu hören?

▲ *Aufgabe:* Der geradlinige und horizontale Kurs eines Flugzeuges führt direkt über deinen Standort hinweg. Du siehst zu einem bestimmten Zeitpunkt das Flugzeug mit konstanter Geschwindigkeit unter dem Höhenwinkel $\beta = 80°$. 9 s danach hörst du die Motorengeräusche dieser Maschine gerade aus dieser Richtung kommen. Zu diesem zweiten Zeitpunkt siehst du die Maschine nun unter dem Höhenwinkel $\gamma = 50°$. Ermittle unter der Annahme von Windstille Fluggeschwindigkeit und Flughöhe dieses Flugzeuges! (Bild 16)

Diese Unterhaltung beendet Klaus mit den Worten: „Du hast dich ja schon gut auf den Ehrendienst bei den Luftstreitkräften unserer Volksarmee vorbereitet." Klaus löst auch diese drei Aufgaben. Wer von den *alpha*-Lesern kann das auch?

W. Träger

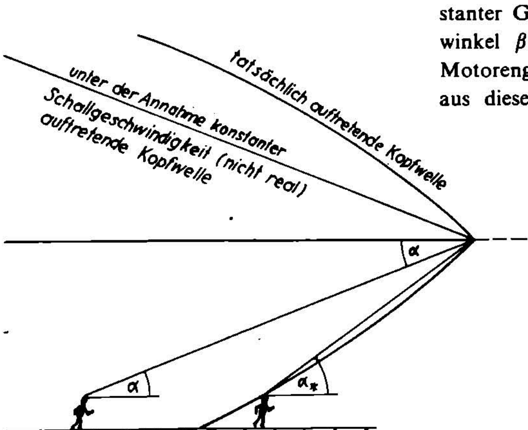


Bild 15

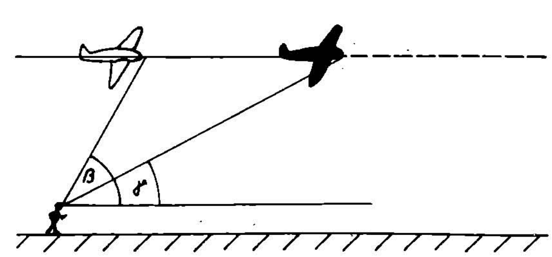
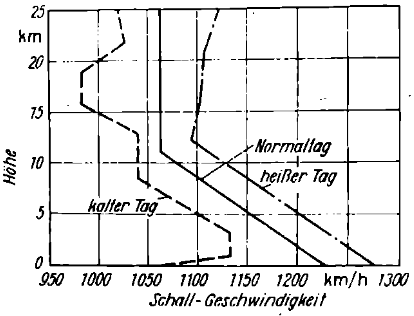


Bild 16

Aus dem **„Lexikon der Luftfahrt“** entnahmen wir für den Beitrag: „Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug“ folgende Begriffe (leicht gekürzt):

Schallgeschwindigkeit: Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls beim Durchgang durch feste Körper, Flüssigkeiten oder Gase. In der Luft bildet die S. einen wichtigen Grenzwert der Aerodynamik. Bei Annäherung an die S. ändert sich z. B. das Bild der Stromlinien bei der Umströmung fester Körper vollständig. Der Luftwiderstand unter-

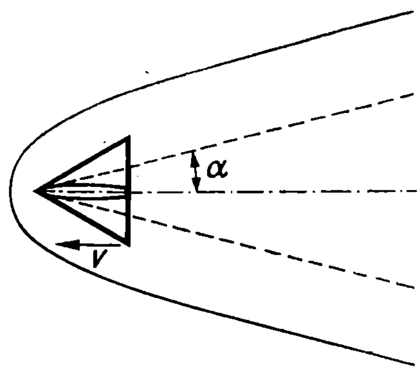


Die Schallgeschwindigkeit im Verhältnis zu Druck, Dichte und Temperatur der Luft (schematische Darstellung)

liegt nicht mehr den Gesetzen der Unterschallströmung. Er steigt ganz erheblich an, und es müssen die Gesetze der Gasdynamik zur Anwendung kommen. In der Luft wird die S. i. allg. mit dem Durchschnittswert 333 m/s (etwa 1 200 km/h) angegeben. Sie ist aber stark abhängig von Druck, Dichte und Temperatur der Luft und damit von der Flughöhe. Bei Flugzeugen, deren Geschwindigkeit nahe oder über der S. liegt, wird die erzielte Höchstgeschwindigkeit statt oder neben der Angabe in km/h in Mach (→ Machzahl) gemessen.

Schallmauer: bildhafte Bezeichnung für die starke Zunahme des Luftwiderstandes, die sich bei Erreichen der Schallgeschwindigkeit ergibt. Die Luft vor einem Körper, der Schallgeschwindigkeit und mehr erreicht, wird zusammendrückbar (kompressibel). Dadurch entsteht eine Stauung komprimierter Luft, die ein starkes Ansteigen des Luftwiderstandes bewirkt. Gleichzeitig ergibt sich dabei eine Änderung des Auftriebs und eine Verlängerung des Angriffspunktes der Luftkraft. Dadurch treten Verdichtungsstöße auf, die z. B. ein Flugzeug so stark beanspruchen, daß bei den ersten Versuchen, die S. zu durchbrechen, Tragflügel und Leitwerkteile wegbrachen. Beim Flug mit Schallgeschwindigkeit in Bodennähe können auf der Erde Gebäudeschäden angerichtet werden. Beim „Durchbrechen der S.“, d. h. beim Übergang zur Überschallgeschwindigkeit wie auch umgekehrt, und während des ganzen Überschallflugs gibt es auf der Erde einen bandförmigen Bereich, in dem die vom Flugzeug ausgehenden Verdichtungsstöße so ankommen, daß ein starker Knall hörbar ist. Ein mit Überschallgeschwindigkeit fliegendes Flugzeug ruft also im ganzen überflogenen Gebiet eine Stoßwelle, d. h. eine sich fortpflanzende Folge von Überschallknallen, hervor. → Kopfwelle.

Kopfwelle: kegelförmiger Verdichtungsstoß, der von einem mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Körper ausgeht; entsteht als Einhüllende sämtlicher von dem Körper *K* zu früheren Zeitpunkten ausgesandten Kugelwellen (Huygensches Prinzip); der halbe Öffnungswinkel α, Machscher Winkel, ergibt



Abgehobene Kopfwelle vor einem mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Flugzeug

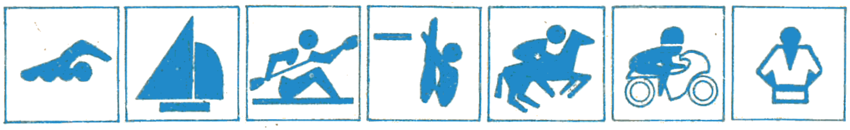
sich aus $\sin\alpha = v/c$, wobei *c* die Schallgeschwindigkeit und *v* die Geschwindigkeit des Körpers bedeuten; das Auftreffen einer K. auf das Ohr wird als Knall empfunden ...

Mach, Ernst: Physiker und Philosoph, geb. 18. Febr. 1838 Tuřany bei Brno, gest. 19. Febr. 1916 Haar bei München, Professor der Physik in Graz (ab 1864), Prag (ab 1867) sowie Philosophie in Wien (1895–1901). Er wurde als Physiker besonders bekannt durch seine Arbeiten über Strömungs- und Wärmelehre (→ Machzahl, → Kopfwelle)...

Machzahl, Mach, Machsche Zahl, Abkürzung M: nach dem Physiker E. Mach benannte Kennzahl, die das Verhältnis der Geschwindigkeit *v* eines Körpers zur Schallgeschwindigkeit *c* des umgebenden Mediums angibt. In *M* wird die Geschwindigkeit schneller Flugzeuge und schneller Strömungen in Windkanälen angegeben, die man mit dem → Machmeter ermittelt. Ist die *M* kleiner als 1, so ist die Geschwindigkeit kleiner als die Schallgeschwindigkeit. Entspr. gilt für *M* größer als 1 (Überschallflugzeuge). In Bodennähe beträgt die Schallgeschwindigkeit etwa 340 m/s. $M = 0{,}5$ ist dann z. B. eine Geschwindigkeit von 170 m/s oder etwa 600 km/h...

FDGB-Urlauber-Olympiade 1972

Bild 1



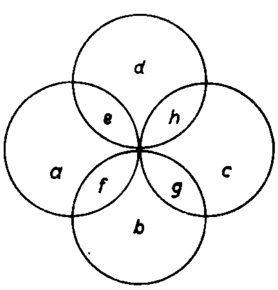
In Vorbereitung der Olympischen Spiele 1972 veranstaltet der Feriendienst des *Freien Deutschen Gewerkschaftsbundes* in der Zeit vom 12. 2. 1971 bis zum 1. 9. 1972 in den Urlaubsorten eine Urlauberolympiade. Jeder Urlauber hat damit die Gelegenheit, durch seine Teilnahme an dieser Massensportaktion seinen Körper durch sportliche Betätigung zu kräftigen und damit gleichzeitig seine Verbundenheit mit der Olympiademannschaft der DDR zu den Olympischen Spielen 1972 zu bekunden.

Ob wohl jeder *alpha*-Leser zusammen mit seinen Eltern die Möglichkeit nutzen wird, sich an der „FDGB-Urlauber-Olympiade 1971 bis 1972“, die unter dem obigen Symbol steht, zu beteiligen?

Darüber hinaus können sich *alpha*-Leser an dem folgenden mathematischen Wettbewerb beteiligen, für dessen Sieger Buchpreise, gestiftet vom Zentralvorstand der Gewerkschaft Unterricht und Erziehung, zur Verfügung stehen:

Problem: Die in die Felder des Symbols der „FDGB-Urlauber-Olympiade 1971 bis 1972“ eingesetzten Buchstaben a, b, ..., g und h bedeuten ganze Zahlen, für die gilt:

Bild 2



a) Die Summen s der jeweils in einem Kreise stehenden Zahlen sind einander gleich: $a+f+e=b+g+f=c+h+g=d+e+h=s$

b) Die Summen t der in kongruenten Feldern stehenden Zahlen sind ebenfalls einander gleich: $a+b+c+d=e+f+g+h=t$.

▲1▲ (Für Schüler der Klassen 5 und 6): Gib eine spezielle Lösung an, bei der alle acht Zahlen $a, b, \ldots, g$ und h natürliche Zahlen und voneinander verschieden sind!

▲2▲ (Für Schüler der Klassen 7 und 8): Zeige, daß $s=\frac{3}{4}t$ gilt!

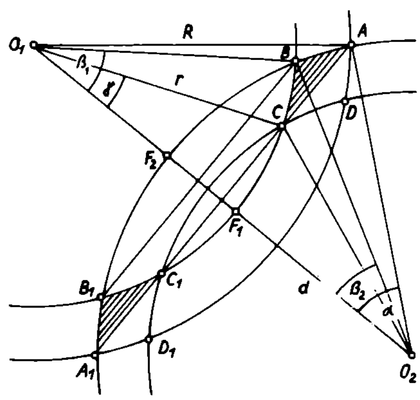
▲3▲ (Für Schüler der Klassen 9 und 10): Sind α, β, ε und σ beliebige ganze Zahlen, so ist die allgemeine Lösung gegeben durch $a=\sigma+\alpha$, $b=\sigma+\beta$, $c=\sigma-\alpha$, $d=\sigma-\beta$, $e=\sigma+\varepsilon$, $f=\sigma-\alpha-\varepsilon$, $g=\sigma+\alpha-\beta+\varepsilon$ und $h=\sigma+\beta-\varepsilon$.

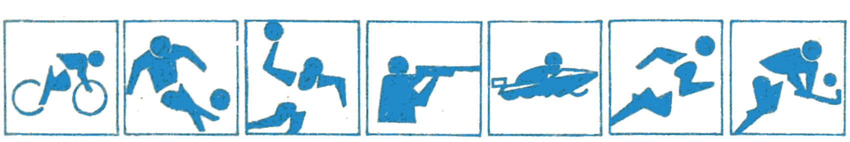
Zeige dies oder gib eine andere Darstellung der allgemeinen Lösung an!

Lösungen sind bis zum 30. März 1972 unter dem Kennwort „FDGB-Urlauber-Olympiade“ an die Redaktion unserer Zeitschrift einzusenden.

W. Träger

Bild 4 zum nachstehenden Artikel





Die fünf olympischen Ringe

Aus: Középiskolai Matematikai Lapok
(Mathematische Schülerzeitschrift der Ungarischen VR)

Problem: Betrachtet wird das bekannte Symbol der Olympischen Spiele auf einem Plakat in einfarbigem Druck.

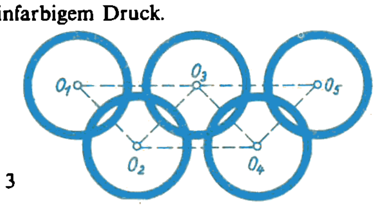


Bild 3

In der Zeichnung 3 sind u. a. zusätzlich die Zentren der fünf Ringe eingezeichnet. Die Zentren dreier sich schneidender Ringe sind jeweils die Eckpunkte eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks mit der Hypotenuse 24 cm. Der innere und äußere Durchmesser eines Ringes beträgt 18 cm bzw. 22 cm.

▲4▲ (Für Schüler der Klasse 6): Diese Olympischen Ringe überdecken sich in acht kongruenten Kreisbogenvierecken. (Ein Kreisbogenviereck ist eine von vier Kreisbögen begrenzte Fläche.)

Zeige, daß der Flächeninhalt des Kreisbogenvierecks $ABCD$ (siehe Bild 4) darstellbar ist durch

$$A_{\square}=(\frown AF_2A_1-\frown BF_2B_1)-(\frown BF_1B_1-\frown CF_1C_1).$$

In dieser Formel bedeutet z. B. $\frown AF_2A_1$ den Flächeninhalt des Kreissegmentes, das begrenzt wird von der Sehne $\overline{AA_1}$ und dem Kreisbogen von A über F_2 nach A_1 des Kreises mit Radius 11 cm um O_2.

▲5▲ (Für Schüler der Klasse 10): Stelle unter Benutzung der Zeichnung 4 die folgenden Formeln auf!

$$\cos\alpha=\frac{d}{2R};\quad \cos\beta_2=\frac{d^2+R^2-r^2}{2dR};$$

$$\cos\beta_1=\frac{d^2+r^2-R^2}{2dr};\quad \cos\gamma=\frac{d}{2r}$$

▲6▲ (Für Schüler der Klasse 7): Berechne den Flächeninhalt $A_{\odot}$ eines der in Zeichnung 3 sichtbaren Kreisringe!

▲7▲ (Für Schüler der Klasse 10): Zeige unter Benutzung der Ergebnisse der Teilaufgaben 4 und 5, daß für den Flächeninhalt des Kreisbogenvierecks $ABCD$ des Bildes 2 gilt $A_{\square}\approx 4{,}54\ \text{cm}^2$!

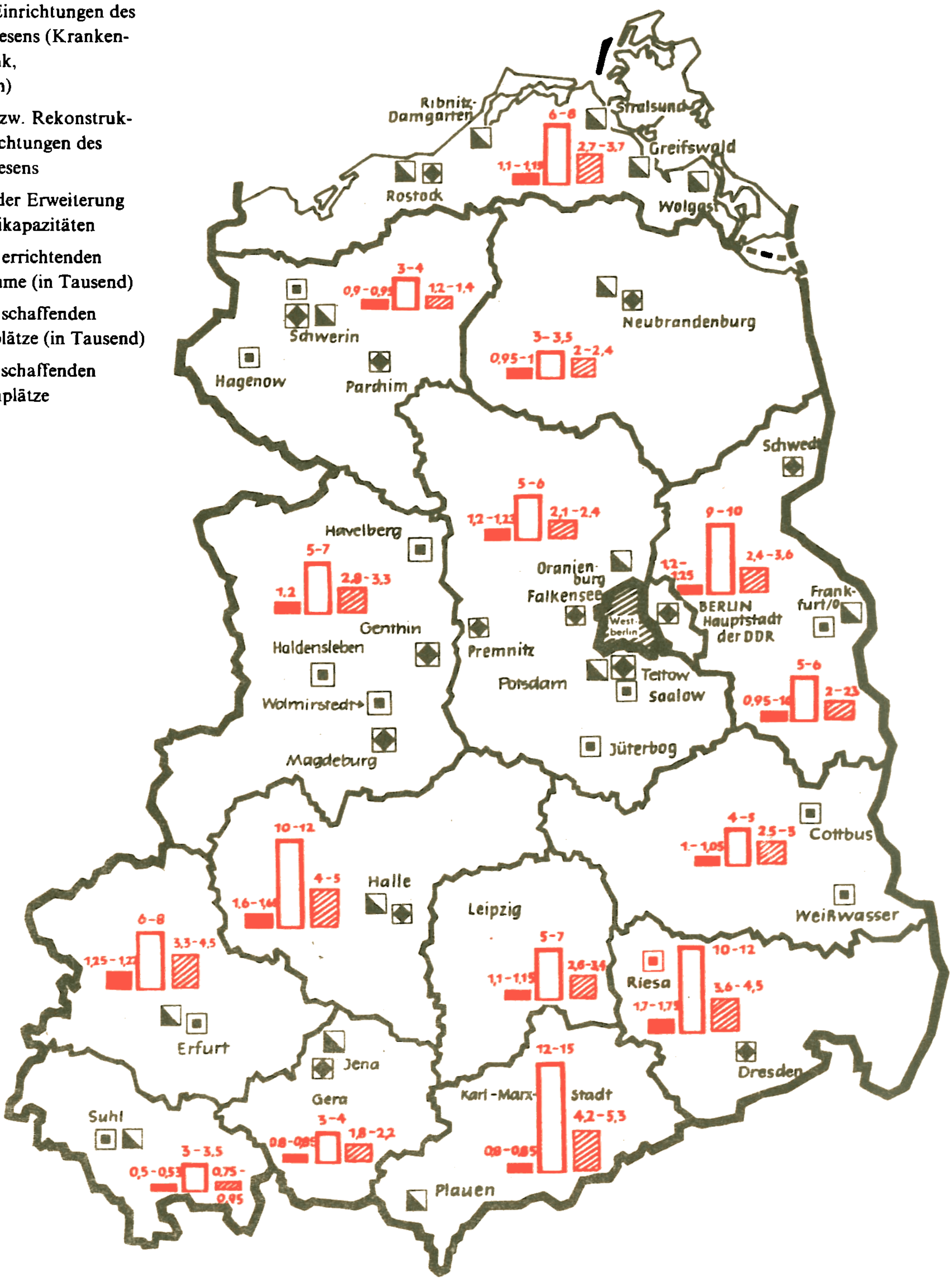
▲8▲ (Für Schüler der Klasse 7): Berechne den Flächeninhalt der von den fünf Olympischen Ringen begrenzten Fläche (in Bild 3 schwarz gedruckt)! Benutze dabei die Ergebnisse der Teilaufgaben 6 und 7!

Tóttay Emőke

Hauptvorhaben auf den Gebieten der Volksbildung, des Gesundheitswesens u. a. von 1971—1975

Diese Graphik wurde entnommen aus: „Arbeitsmaterial zur Direktive des VIII. Parteitages der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands zum Fünfjahrplan für die Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR 1971 bis 1975“, herausgegeben von der Parteihochschule „Karl Marx“ beim ZK der SED, erschienen im Verlag Die Wirtschaft, Berlin. Preis der Mappe 6,20 M, geblockt, einseitig bedruckt. Auf 62 Tafeln wird mit mehrfarbigen Schaubildern und graphischen Darstellungen die Direktive zum Fünfjahrplan erläutert. Hervorragend für Unterricht, außerunterrichtliche Arbeit, insbesondere für Wandzeitungen geeignet.

- Neubau von Einrichtungen des Gesundheitswesens (Krankenhaus, Poliklinik, Ambulatorium)
- Erweiterung bzw. Rekonstruktion von Einrichtungen des Gesundheitswesens
- Einrichtung oder Erweiterung von Wäschereikapazitäten
- Anzahl der zu errichtenden Unterrichtsräume (in Tausend)
- Anzahl der zu schaffenden Kindergartenplätze (in Tausend)
- Anzahl der zu schaffenden Kinderkrippenplätze (in Tausend)



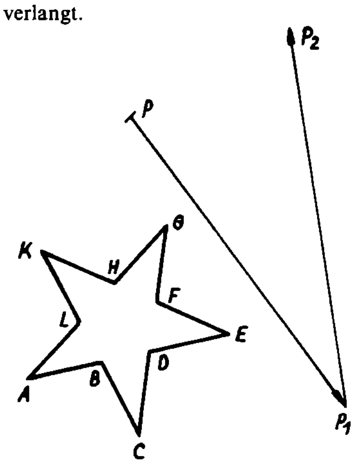
XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

(24. November 1971)

Olympiadeklasse 5

1. Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind eine Sternfigur *ABCDEFGHKL* und zwei Verschiebungspfeile $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ abgebildet. Auf die Sternfigur sollen nacheinander die Verschiebungen $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ angewendet werden. Konstruiere auf dem Arbeitsblatt, unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck, die dabei entstehende Sternfigur $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2K_2L_2$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



2. Bernd hat an Monika insgesamt 21 Mark an Beiträgen abzurechnen. Er hat 8 Zweimarkstücke und 6 Fünfmarkstücke und kein weiteres Geld bei sich. In Monikas Kasse befinden sich genau 20,— Mark, und zwar in Form von 10 Zweimarkstücken. Sie behauptet, daß es unter diesen Umständen 3 verschiedene Möglichkeiten gibt, den angegebenen Betrag abzurechnen.
Dabei sollen keine Möglichkeiten gezählt werden, bei denen ein Geldstück einmal zwischen Bernd und Monika *hin-* und ein gleichwertiges später *wieder zurückgegeben* wird. Auch sollen Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, in der Geldstücke gegeben werden, nicht als verschieden gelten. Ebenso soll es nicht darauf ankommen, *welches* Fünfmark- oder *welches* Zweimarkstück gegeben wird. Stelle fest, ob Monikas Behauptung richtig ist.

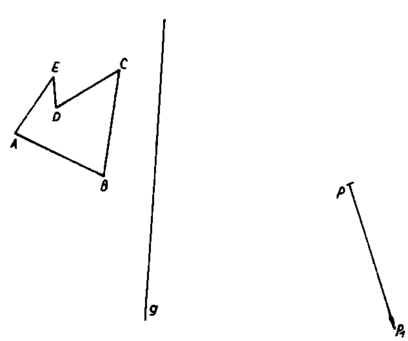
Anmerkung: Eine Untersuchung, ob diese 3 Möglichkeiten, falls es sie gibt, die einzigen sind, ist nicht erforderlich.

3. Am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha" beteiligten sich 1970 von einer Oberschule insgesamt 216 Schüler. Das waren dreimal so viele wie im Jahr 1969. Im Jahr 1969 gab es an derselben Schule doppelt so viele Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb wie im Jahr 1968. Berechne jeweils die Anzahl aller Schüler dieser Oberschule, die am *alpha*-Wettbewerb der Jahre 1968 und 1969 teilgenommen haben!

4. Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede alle folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:
(1) Die Zahl z ist nicht durch 10 teilbar.
(2) Subtrahiert man die Einerziffer der Zahl von ihrer Zehnerziffer, so erhält man 4.
(3) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine neue zweistellige Zahl z_1, deren Dreifaches kleiner ist als z.

Olympiadeklasse 6

1. Das auf dem beiliegenden Arbeitsblatt abgebildete Fünfeck *ABCDE* soll an der Geraden g gespiegelt werden. Auf das so entstandene Fünfeck, $A_1B_1C_1D_1E_1$ ist anschließend die Verschiebung anzuwenden, die durch den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ gegeben ist. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck auf dem Arbeitsblatt das dadurch entstehende Fünfeck $A_2B_2C_2D_2E_2$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



2. Ruth, Marion und Petra verbringen einen Teil ihrer Ferien in einem Pionierlager. Jede von ihnen betreibt genau eine der Sportarten Tischtennis, Volleyball und Schwimmen.
Außerdem ist bekannt:
(1) Marion leiht sich von der Volleyballspielerin gute Bücher.
(2) Die Volleyballspielerin und Petra haben nicht gleichviele Preise bei der Mathematikolympiade errungen.
(3) Marion geht in eine höhere Klasse als die Tischtennisspielerin. Welche Sportart treibt jedes der drei Mädchen?

3. Von dem berühmten Mathematiker *Leonhard Euler* (1707 bis 1783) stammt folgende Aufgabe:
Zerlege die Zahl 25 so in zwei Summanden, daß der größere Summand 49 mal so groß ist wie der kleinere Summand.
Hinweis: Die Summanden brauchen nicht natürliche Zahlen zu sein.

4. Wenn man ein Drittel von Rainers Spargeld zu einem Fünftel dieses Spargeldes addiert, dann ist die Summe genau 7 Mark mehr als die Hälfte seines Spargeldes. Wieviel Mark hat Rainer hiernach insgesamt gespart?

Olympiadeklasse 7

1. Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar sind!

2. Andreas, Birgit und Claudia trugen untereinander ein kleines Schachturnier aus. Folgendes ist hierüber bekannt:
(1) Jeder spielte gegen jeden die gleiche Anzahl von Partien.
(2) Keine Partie endete unentschieden (remis).
(3) Andreas gewann genau $\frac{2}{3}$ seiner Spiele.
(4) Birgit gewann genau $\frac{3}{4}$ ihrer Spiele.
(5) Claudia gewann genau ein Spiel.
Ermittle die Anzahl aller Spiele, die in dem Turnier insgesamt ausgetragen wurden!

3. Beweise folgenden Satz: In jedem spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ hat jeweils einer der Schnittwinkel je zweier Höhen die gleiche Größe wie der Innenwinkel an derjenigen Ecke, von der keine der beiden Höhen ausgeht.

4. Konstruiere ein konvexes Viereck *ABCD* aus $\overline{BC} = 3{,}5$ cm; $\overline{CD} = 3{,}5$ cm; $\overline{AC} = 5$ cm, $\sphericalangle DAB = 75°$ und $\sphericalangle ABC = 120°$. Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein konvexes Viereck eindeutig bestimmt ist!
Anmerkung: $\sphericalangle ABC$ bedeutet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Olympiadeklasse 8

1. Beweise den folgenden Satz:
Wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist genau eine der Zahlen $p-1$, $p+1$ durch 6 teilbar.

2. Es sei AB eine Strecke gegebener Länge a, auf der zwei Punkte C und D liegen. Dabei

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Kreis- und Bezirksolympiade

Kreisolympiade

Olympiadeklasse 5

1.

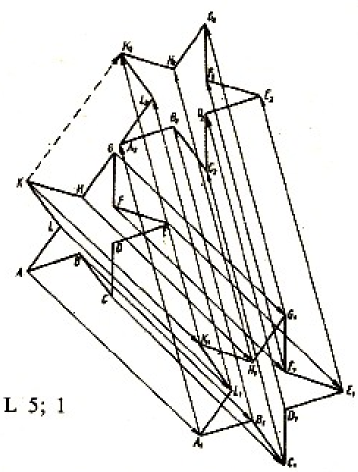


Abb. L 5; 1

Es ist auch zulässig, sofort die Verschiebung $\overrightarrow{PP_2}$ durchzuführen.

2.

1. Möglichkeit: Bernd gibt Monika 1 Fünfmarkstück und 8 Zweimarkstücke. Wegen $5+8\cdot 2=21$ sind das genau 21 Mark.

2. Möglichkeit: Bernd gibt Monika 3 Fünfmarkstücke und 3 Zweimarkstücke.
Wegen $3\cdot 5+3\cdot 2=21$ sind das ebenfalls genau 21 Mark.

3. Möglichkeit: Bernd gibt Monika 5 Fünfmarkstücke und erhält von ihr 2 Zweimarkstücke zurück.
Wegen $5\cdot 5-2\cdot 2=21$ sind das wiederum genau 21 Mark.

3. Da es 1970 dreimal so viele Teilnehmer waren wie 1969, muß man die Anzahl 216 der Teilnehmer von 1970 durch 3 dividieren, um die Anzahl der Teilnehmer von 1969 zu erhalten. Diese betrug wegen $216:3=72$ somit 72.

Da es 1969 doppelt so viele Teilnehmer waren wie 1968, muß man die Anzahl der Teilnehmer von 1969 durch 2 dividieren, um die Anzahl der Teilnehmer von 1968 zu erhalten. Diese betrug wegen $72:2=36$ somit 36.

4. Die Bedingung (1) ist genau dann erfüllt, wenn die Einerziffer der gesuchten Zahlen nicht 0 ist. Daher werden die Bedingungen (1) und (2) genau von den Zahlen 51; 62; 73; 84; 95 erfüllt. Vertauscht man jeweils ihre Ziffern, dann erhält man der Reihe nach die Zahlen 15; 26; 37; 48; 59. Das Dreifache dieser Zahlen beträgt der Reihe nach 45; 78; 111; 144; 177. Wegen $45<51$ und $78>62$; $111>73$; $144>84$; $177>95$ erfüllt somit genau die Zahl 51 alle Bedingungen der Aufgabe.

Olympiadeklasse 6

1.

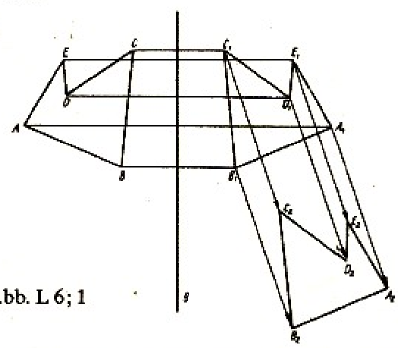


Abb. L 6; 1

2. (4) Wegen der Aussagen (1) und (2) ist die Volleyballspielerin weder Marion noch Petra. Ruth ist also die Volleyballspielerin.
(5) Da die Tischtennisspielerin wegen (3) nicht Marion und wegen (4) nicht Ruth sein kann, ist Petra die Tischtennisspielerin.
(6) Aus (4) und (5) ergibt sich: Marion ist die Schwimmerin.

3. Soll der größere Summand das 49fache des kleineren Summanden betragen, so muß die Summe das 50fache des kleineren Summanden sein. Diesen erhält man daher, wenn man die Summe durch 50 dividiert; er lautet somit $25:50=\frac{1}{2}$, und hiernach muß der größere Summand $49\cdot\frac{1}{2}=\frac{49}{2}$ sein. In der Tat beträgt die Summe von diesen beiden Summanden (von denen der größere 49 mal so groß ist wie der kleinere) $\frac{1}{2}+\frac{49}{2}=25$.

4. Laut Aufgabe besitzt Rainer Spargeld. Dessen Betrag sei x Mark. Dann gilt

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=\frac{x}{2}+7.$$

Hieraus folgt nach Multiplikation mit 30 weiter $10x+6x=15x+210$ und daraus $x=210$. Also hat Rainer insgesamt 210 Mark gespart.

Anderer Lösungsweg: Wegen $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}=\frac{16}{30}$ und $\frac{1}{2}=\frac{15}{30}$ sind $\frac{16}{30}$ von Rainers Spargeld genau 7 Mark mehr als $\frac{15}{30}$ dieses Geldes. Also stellen 7 Mark genau $\frac{1}{30}$ seines Spargeldes dar. Er hat mithin insgesamt 30 mal so viel gespart. Das sind genau 210 Mark.
Hinweis: Da der Aufgabentext bereits die Existenz einer Geldsumme mit den angegebenen Eigenschaften vorgibt, ist zur vollständigen Lösung keine „Probe" erforderlich.

Olympiadeklasse 7

1. Eine Zahl ist genau dann gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar, wenn sie durch das kgV dieser Zahlen teilbar ist.
Wegen

$2=2$,
$3=\quad 3$,
$4=2\cdot 2$,
$6=2\cdot\ 3$,
$7=\qquad 7$,
$8=2\cdot 2\cdot 2$,
$9=\quad 3\cdot 3$,
$12=2\cdot 2\cdot 3$,
$14=2\cdot\quad 7$ ist das kgV dieser Zahlen $2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7=504$.

Die einzige dreistellige natürliche Zahl, die durch 504 teilbar ist, ist 504. Daher ist 504 die einzige Zahl, die allen Bedingungen der Aufgabe entspricht.

2. Da es genau 3 Möglichkeiten gibt, aus den drei Spielern ein Paar von gegeneinander Spielenden auszuwählen, so ist nach (1) die Anzahl aller Spiele das Dreifache derjenigen Partiezahl, die jeweils ein solches Paar gegeneinander austrug.
(7) Das Doppelte dieser Partienzahl und somit $\frac{2}{3}$ aller Spiele des Turniers beträgt daher die Anzahl derjenigen Spiele, an denen jeweils einer der Spieler überhaupt teilnahm, d. h. jeder der 3 Spieler nahm an genau $\frac{2}{3}$ aller Spiele teil.
Wegen (3) und (7) gewann infolgedessen Andreas genau $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ aller Spiele und wegen (4) und (7) Birgit genau $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ aller

Spiele. Somit gewannen Andreas und Birgit zusammen wegen $\frac{4}{9}+\frac{1}{2}=\frac{17}{18}$ genau $\frac{17}{18}$ aller Spiele. Daher und weil wegen (2) jedes Spiel von genau einem Spieler gewonnen sein mußte, gewann Claudia genau $\frac{1}{18}$ aller Spiele. Da dies andererseits nach (5) genau ein Spiel war, wurden folglich genau 18 Spiele bei diesem Turnier ausgetragen.

3. Weil $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck ist, liegt der Höhenschnittpunkt im Innern des Dreiecks. Er sei mit H bezeichnet. Es seien ferner zwei Höhen des Dreiecks ausgewählt; die Bezeichnung läßt sich dann so wählen, daß dies die von C bzw. A ausgehenden Höhen sind. Ihre Fußpunkte auf AB bzw. BC seien D bzw. E genannt. Dann gilt:

$\sphericalangle ADC \cong \sphericalangle AEB$ als rechte Winkel und $\sphericalangle HAD \cong \sphericalangle EAD$ (H liegt auf AE).

Folglich gilt wegen des Winkelsummensatzes ($\triangle ADH$ bzw $\triangle BEA$) $\sphericalangle AHD \cong \sphericalangle ABE$, w. z. b. w.

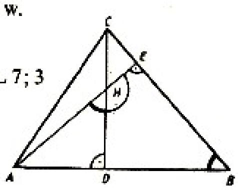
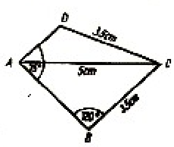


Abb. L 7; 3

4. (I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt (Abb. L 7; 4).



Dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ aus den Seiten AC, BC und dem der größeren Seite AC gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle ABC$ zu konstruieren. Punkt D muß nun erstens auf dem freien Schenkel eines Winkels der Größe $\sphericalangle BAD$ und zweitens auf dem Kreis um C mit dem Radius $\overline{CD}$ liegen. Ferner liegen, da das Viereck konvex ist, B und D auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und C.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Viereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $\overline{AC}=5$ cm, $\overline{BC}=3{,}5$ cm und $\sphericalangle ABC=120°$.

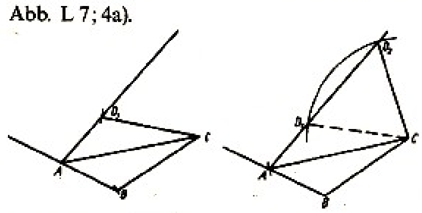
(2) Man trägt in A an AB einen Winkel der Größe 75° so an, daß sein freier Schenkel nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegt wie B.

(3) Man schlägt den Kreis um C mit $\overline{CD}=3{,}5$ cm. Schneidet er den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels, so sei einer der Schnittpunkte D genannt.

(III) Der Beweis, daß bei je 4 so konstruierten Punkten A, B, C, D die vorgeschriebenen Streckenlängen und Winkelgrößen auftreten, ergibt sich unmittelbar aus (II) und der Umkehrung der Schlüsse in (I). Ferner folgt aus (II), daß

$\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 195° > 180°$ ist, so daß keiner der Winkel $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$ die Größe 180° erreichen oder überschreiten kann. Daher bilden A, B, C, D die Ecken eines konvexen Vierecks.

(IV) Die Konstruktion des Dreiecks $\triangle ABC$ ist wegen $\overline{AC} > \overline{BC}$ und, weil $\sphericalangle ABC$ der Seite AC gegenüberliegt, nach dem Kriterium (ssw) stets bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Der Kreis um C mit $\overline{CD}$ schneidet den freien Schenkel des nach (2) konstruierten Winkels von 75° bei den vorgegebenen Werten in genau zwei Punkten D_1 und D_2. Man erhält also (bis auf Kongruenz) zwei Vierecke, $ABCD_1$ und $ABCD_2$, die beide den Bedingungen der Aufgabe genügen (s. Abb. L 7; 4a).



Die beiden Vierecke sind nicht kongruent, da sie (wie aus der Figur ersichtlich ist) verschiedenen Flächeninhalt haben.

Olympiadeklasse 8

1. Jede Primzahl $p>3$ ist eine ungerade Zahl, folglich müssen sowohl $p-1$ als auch $p+1$ gerade, also durch 2 teilbar sein. Wegen $p>3$ ist p auch nicht durch 3 teilbar und läßt daher bei Division durch 3 genau einen Rest 1, 2.

Im ersten Fall ist von den beiden Zahlen $p-1$, $p+1$ genau die erste, im zweiten Fall genau die zweite durch 3 teilbar. Deshalb und weil beide Zahlen $p-1$ und $p+1$ gerade sind, ist wegen der Teilerfremdheit von 2 und 3 genau eine der Zahlen $p-1$ oder $p+1$ durch $2\cdot 3=6$ teilbar.

2.

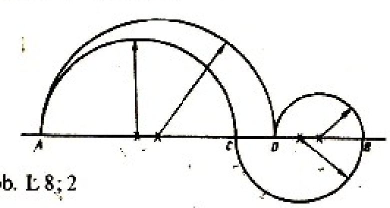


Abb. L 8; 2

Die Länge des Halbkreisbogens über AC beträgt $\overline{AC}\cdot\frac{\pi}{2}$. Die Länge des Halbkreisbogens über AD beträgt $\overline{AD}\cdot\frac{\pi}{2}$. Die Länge des Halbkreisbogens über DB beträgt $\overline{DB}\cdot\frac{\pi}{2}$. Die Länge des Halbkreisbogens über CB beträgt $\overline{CB}\cdot\frac{\pi}{2}$.

Daher beträgt die gesuchte Summe

$$s=(\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{DB}+\overline{CB})\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$=2\cdot\overline{AB}\cdot\frac{\pi}{2}=a\cdot\pi.$$

3. Der Mittelpunkt des Umkreises sei M. Nach dem Satz über Zentriwinkel und Peripheriewinkel folgt:

$\sphericalangle AMS \cong \sphericalangle SMB$ und, da M Mittelpunkt des Umkreises ist, $\overline{AM}=\overline{SM}=\overline{BM}$. Daher gilt: $\triangle AMS \cong \triangle SMB$ (sws), woraus $\overline{AS}=\overline{SB}$ folgt.

Infolgedessen liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB.

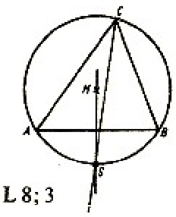


Abb. L 8; 3

4. a) Liegt P auf g, so auch P', und es gilt

(1) $\overline{QP}=\overline{QP'}$.

Liegt P nicht auf g, so ist $P'\neq P$, und die Gerade durch P und P' steht senkrecht auf g. Ist S ihr Schnittpunkt mit g, so gilt ferner $\overline{SP}=\overline{SP'}$. Wenn nun $S=Q$ ist, so ist damit (1) gezeigt. Wenn aber $S\neq Q$ ist, so erhält man

$\triangle QSP \cong \triangle QSP'$ (s, w, s)

und hieraus ebenfalls (1). Mit (1) ist bereits die Behauptung bewiesen.

b) Ist $P'=P$, so hat die Gerade g durch P, Q die behauptete Eigenschaft. Ist $P'\neq P$ ein Punkt des Kreises um Q mit $\overline{PQ}$, so gilt (1), und daher geht die Mittelsenkrechte g von PP' durch Q. Da P' der Spiegelpunkt von P bezüglich g ist, ist somit die Behauptung bewiesen.

c) Gäbe es entgegen der Behauptung doch eine Gerade g mit den genannten Eigenschaften, so läge nach a) der Spiegelpunkt P^* von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit $\overline{PQ}$. Das steht im Widerspruch zur Behauptung. Es gibt für die genannten Punkte P^* mithin keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre.

Olympiadeklasse 9

1. Angenommen, ein gerader Kreiszylinder entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Mit r sei die Maßzahl des (in Zentimeter gemessen) Radius seiner Grundfläche und mit h die Maßzahl des (in Zentimeter gemessen) Radius seiner Grundfläche und mit h die Maßzahl seiner Höhenlänge (ebenfalls in cm) bezeichnet. Dann beträgt die Maßzahl des Umfangs seiner Grundfläche (in cm): $2\pi r$, die Maßzahl des Inhalts seiner Mantelfläche (in cm²): $2\pi rh$ und die Maßzahl seines Volumens (in cm³): $\pi r^2 h$, und es gilt: $2\pi r=2\pi rh$, woraus wegen $r\neq 0$ $h=1$ folgt.

Ferner gilt: $2\pi rh=\pi r^2 h$, woraus wegen $r\neq 0$, $h\neq 0$ $r=2$ folgt.

Also kann höchstens ein gerader Kreiszylinder mit einem Radius von 2 cm und einer Höhenlänge von 1 cm den Bedingungen der

Aufgabe entsprechen. Tatsächlich ist in diesem Falle
der Umfang der Grundfläche: 4π cm
der Mantelflächeninhalt: 4π cm^2 und
das Volumen: 4π cm^3.

2. Angenommen, (a, b) sei ein Zahlenpaar, das zusammen mit einer geeigneten Zahl n der gestellten Bedingung genügt, dann gilt:
$$\frac{a+n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}.$$ Daraus erhält man
$$ab+bn=abn.$$
Wegen $b\neq 0$ folgt
$$a+n=an,$$ also
(1) $$a=n(a-1).$$
Aus (1) folgt $a\neq 1$ und daher
$$n=\frac{a}{a-1}=1+\frac{1}{a-1}.$$
Da n ganzzahlig ist, ergibt sich weiter $a-1=\pm 1$, also $a=2$ oder $a=0$, und wegen $n>0$ schließlich $a=2$.
Daher können nur Zahlenpaare der Form $(2, b)$ und zu jedem dieser Paare nur $n=2$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.
Tatsächlich ist
$$\frac{2+2}{b\cdot 2}=\frac{4}{2b}=\frac{2}{b}.$$
Die Lösungsmenge besteht also aus allen Zahlenpaaren der Form $(2, b)$ ($b\neq 0$ ganz).

3. Der Mittelpunkt des Kreises sei M. Die Strecke P_7P_{18} zerlegt den Kreis in zwei Teile, wobei P_{12} in dem einen und P_{21} in dem anderen Teil liegt. Daher schneiden sich die Strecken P_7P_{18} und $P_{12}P_{21}$ in einem innerhalb des Kreises gelegenen Punkte, der S genannt sei.

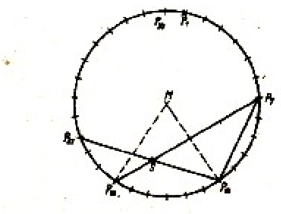


Abb. L 9; 3

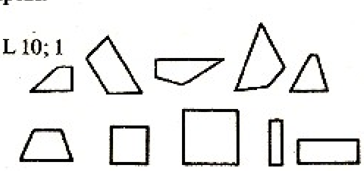
Dann beträgt die Größe des Zentriwinkels $\sphericalangle P_{18}MP_{12}$, da ihm ein Fünftel des gesamten Kreisumfanges als Bogen zugeordnet ist, 72°. Folglich ist der Winkel $\sphericalangle P_{18}P_7P_{12}$ als ein zu dem gleichen Bogen $\overset{\frown}{P_{12}P_{18}}$ gehörender Peripheriewinkel halb so groß, also 36° groß. Analog erhält man für den Winkel $\sphericalangle P_7MP_{21}$, dem $\frac{8}{15}$ des Umfangs zugeordnet ist, eine Größe von 192° und daher für den Winkel $\sphericalangle P_7P_{12}P_{21}$ eine Größe von 96°.
Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf $\triangle P_{12}SP_7$ hat mithin $\sphericalangle P_{12}SP_7$, einer der Schnittwinkel der oben genannten Strecken, eine Größe von $180°-(36°+96°)=48°$. Die Größen der anderen Schnittwinkel $\sphericalangle P_{12}SP_{18}$, $\sphericalangle P_{18}SP_{21}$, $\sphericalangle P_{21}SP_7$ als Neben- oder als Scheitelwinkel des Winkels $\sphericalangle P_{12}SP_7$ sind 132°, 48°, 132°.

4. Zu p_1 und p_2 kann man zunächst stets reelle Zahlen a und b eindeutig so bestimmen, daß (1) und (2) erfüllt sind, nämlich
$$a=\frac{p_1+p_2}{2},\quad b=\frac{p_2-p_1}{2}.$$
Der verlangte Beweis ist geführt, wenn noch gezeigt wird, daß a, b natürliche Zahlen sind, deren Produkt durch 6 teilbar ist. Da p_1, p_2 nach Voraussetzung zwei von der Primzahl 2 verschiedene Primzahlen sind, sind sie beide ungerade.
Folglich sind p_1+p_2 und p_2-p_1 gerade, also a und b ganze Zahlen. Ferner ist $p_1+p_2>0$ und wegen $p_1<p_2$ auch $p_2-p_1>0$, also sind a und b natürliche Zahlen. Da ihre Summe $a+b=p_2$ ungerade ist, ist eine der Zahlen a, b gerade. Also ist $a\cdot b$ gerade.
Nach Voraussetzung sind p_1 und p_2 von der Primzahl 3 verschiedene Primzahlen. Daher sind sie nicht durch 3 teilbar, d. h. jede von ihnen läßt bei Division durch 3 einen der Reste 1 oder 2. Lassen beide den gleichen Rest, dann ist $2b=p_2-p_1$ durch 3 teilbar, also auch b. Lassen beide verschiedene Reste, so ist $2a=p_1+p_2$ durch 3 teilbar, also auch a. Daher ist $a\cdot b$ in jedem Falle durch 3 teilbar. Aus $2\mid a\cdot b$ und $3\mid a\cdot b$ folgt, da 2 und 3 teilerfremd sind, schließlich $6\mid a\cdot b$, w. z. b. w.

Olympiadeklasse 10

1. Es gilt: Jedes Quadrat ist gleichzeitig ein Rechteck, ein Parallelogramm und ein Trapez. Jedes Rechteck ist zugleich ein Parallelogramm und ein Trapez.
A kann daher z. B. folgendermaßen schließen: Angenommen, die Aussage (1) wäre falsch, d. h., es gäbe auf der Zeichnung entweder kein Quadrat oder genau 1 Quadrat.
Nach den Spielregeln wären dann die Aussagen (2) bis (4) wahr. Gäbe es genau 1 Quadrat, so gäbe es nach (2) noch ein weiteres Rechteck, also mindestens 2 Parallelogramme, im Widerspruch zu (3). Gäbe es kein Quadrat auf der Zeichnung, so nach (2) und (4) auch kein Rechteck und kein Trapez, im Widerspruch zu (3). Also ist (1) wahr. Daher gibt es mindestens 2 Quadrate auf der Zeichnung. Also ist (3) falsch, und (2), (4) sind wahr. Gäbe es 3 oder mehr Quadrate auf der Zeichnung, so müßte wegen (2) und (4) die Anzahl der Trapeze mindestens 12 betragen, was nicht möglich ist.
Daher gilt: Es gibt auf der Zeichnung genau 2 Quadrate, genau 4 Rechtecke und genau 8 Trapeze.

Abb. L 10; 1



(Abb. L 10; 1 zeigt eine mögliche Form der Zeichnung (wird vom Schüler nicht verlangt).)

2. a) Die Entfernung von A nach B betrage s km. Dann fuhr das erste Auto mit einer Geschwindigkeit von $\frac{s}{4}$ km h^{-1} und das zweite mit $\frac{s}{3}$ km h^{-1}. Das erste Auto ist nach t Stunden genau dann doppelt so weit von B entfernt wie das zweite, wenn
$$s-\frac{s}{4}\cdot t=2\left(s-\frac{s}{3}t\right)$$ gilt.
Wegen $s\neq 0$ ist dies äquivalent mit
$$1-\frac{t}{4}=2\left(1-\frac{t}{3}\right),$$ also mit
$$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)t=1$$ und daher schließlich mit
$$t=\frac{12}{5}=2{,}4.$$
Nach genau 2,4 h war daher das erste Auto genau doppelt so weit von B entfernt wie das zweite Auto.
b) Das erste Auto legte bis zu diesem Zeitpunkt wegen $\frac{s}{4}\cdot\frac{12}{5}=\frac{3}{5}s$ genau $\frac{3}{5}$ des Weges, das zweite wegen $\frac{s}{3}\cdot\frac{12}{5}=\frac{4}{5}s$ genau $\frac{4}{5}$ des Weges zurück.

3. Angenommen, für eine reelle Zahl k gelte (*). Dann ist $v+ku>0$, und es folgt aus (*):
(1) $u+kv<v+ku$, also
(2) $(u-v)(1-k)<0$.
Wegen $u>v$ folgt daraus $k>1$. Also können höchstens alle $k>1$ Lösungen von (*) sein.
Tatsächlich ist für $k>1$ die Ungleichung (2) und damit auch (1) sowie (*) erfüllt.
Oder: Tatsächlich gilt für $k=1+m$ ($m>0$ reell)
$$\frac{u+(1+m)v}{v+(1+m)u}=\frac{u+v+mv}{u+v+mu}.$$
Nun ist aber wegen $v<u$ und $m>0$ $mv<mu$, also $0<u+v+mv<u+v+mu$ und daher
$$\frac{u+v+mv}{u+v+mu}<1,\text{ also }\frac{u+kv}{v+ku}<1.$$

4. Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC}=\overline{BC}=a$. Seine Basislänge sei $\overline{AB}=c$. Ferner sei CD eine Strecke auf der Mittelsenkrechten der Seite AB, wobei D auf AB liegen möge. Dann ist CD gleichzeitig Halbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$. Daher liegen die Mittelpunkte M_i und M_u von In- und Umkreis auf der Geraden durch C und D. Die Radien der beiden Kreise seien r_i bzw. r_u. Das Lot von M_i auf AC habe den Fußpunkt E, das Lot von M_u auf die Gerade durch A und C habe den Fußpunkt F.

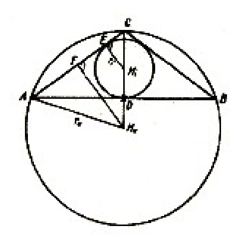
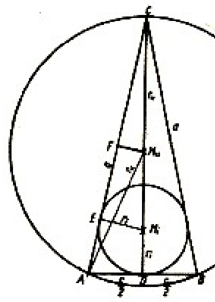


Abb. L 10; 4

Dann ist $\overline{AF}=\overline{CF}=\frac{a}{2}$, $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{AE}=\frac{c}{2}$,
$$\overline{DM_u}=\sqrt{r_u^2-\frac{c^2}{4}},\quad \overline{CM_i}=\sqrt{\left(a-\frac{c}{2}\right)^2+r_i^2}.$$

Daher erhält man durch Anwendung des Satzes des Pythagoras auf $\triangle ACD$ einerseits

$$\frac{c^2}{4}+\left(r_u \pm \sqrt{r_u^2-\frac{c^2}{4}}\right)^2=a^2,$$



wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, (je nachdem, ob M_u auf der Strecke CD liegt oder nicht), also

$$\pm r_u\sqrt{4r_u^2-c^2}=a^2-2r_u^2,$$
$$4r_u^4-c^2r_u^2=a^4-4a^2r_u^2+4r_u^4,$$

(1) $\quad r_u=\dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2-\dfrac{c^2}{4}}}$, andererseits

$$\frac{c^2}{4}+\left(r_i+\sqrt{a^2-ac+\frac{c^2}{4}+r_i^2}\right)^2=a^2, \text{ also}$$

$$r_i\sqrt{4a^2-4ac+c^2+4r_i^2}=ac-\frac{c^2}{2}-2r_i^2,$$

$$4a^2r_i^2-4acr_i^2+c^2r_i^2+4r_i^4$$
$$=a^2c^2-ac^3-4acr_i^2+\frac{c^4}{4}+2c^2r_i^2+4r_i^4,$$

(2) $\quad r_i=\dfrac{c\left(a-\dfrac{c}{2}\right)}{2\sqrt{a^2-\dfrac{c^2}{4}}}.$

Nun hat ein Dreieck genau dann die geforderten Eigenschaften, wenn $\pi r_i^2:\pi r_u^2=1:4$ oder, äquivalent hiermit, $r_u=2r_i$ gilt. Nach (1), (2) ist dies gleichwertig mit $a^2=c(2a-c)$, dies mit $(a-c)^2=0$ und daher mit $a=c$.

Anmerkung: Wurde der letzte Absatz nicht als Übergang zu äquivalenten Aussagen, sondern als Folgerung formuliert, so ist anschließend noch eine „Probe" durchzuführen, etwa so:

Ist $a=c$, also $\triangle ABC$ gleichseitig, so ist $M_i=M_u$ zugleich Schwerpunkt S des Dreiecks, und daher gilt dann $r_u:r_i=\overline{CS}:\overline{SD}=2:1$.)

Bezirksolympiade

Olympiadeklasse 7

1. Angenommen, p sei eine Primzahl, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt. Wegen (2) ist dann $p-2$ sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar. Da 3 und 5 teilerfremd sind, ist folglich $p-2$ durch $3\cdot 5=15$ teilbar, d. h. p ist von der Form $n\cdot 15+2$ (n eine natürliche Zahl).

Wegen (3) ist p und damit auch n ungerade. Also können wegen (1) höchstens die Zahlen 17; 47; 77 den Bedingungen der Aufgabe genügen. Von ihnen ist 77 keine Primzahl, und 47 genügt nicht der Bedingung (3). Also kann nur 17 Lösung der Aufgabe sein. In der Tat erfüllt 17 die Bedingungen (1), (2), (3) und ist damit die einzige derartige Primzahl.

2. Zur Abkürzung bezeichnen wir die Schüler, die sich nur an einer Sportart beteiligen, mit F, L, S, T, und die Schüler, die sich an zwei Sportarten beteiligen, mit FL, FS, FT, LS, LT, ST, jeweils nach den Anfangsbuchstaben der Sportarten.

Dann gilt:

(8) Wegen (2) betreiben genau 18 Schüler je genau eine Sportart.

(9) Wegen (1) und (8), und weil die Klasse 28 Schüler hat, betreiben genau 10 Schüler je genau zwei Sportarten.

(10) Wegen (9) und (7) gibt es genau 5 LT.

(11) Wegen (9), (10), (4) und da es laut Aufgabenstellung mindestens 1 Schwimmer gibt, gibt es genau 1 FS, 1 LS, 1 ST. Gäbe es nämlich je 2 davon, wäre wegen $5+6=11>10$ die mögliche Anzahl bereits überschritten.

(12) Wegen (9), (10), (11) und (6) gibt es genau 2 FL

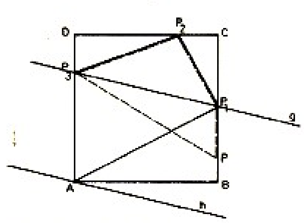
(13) Wegen (10) und (3) gibt es genau 10 Leichtathleten, also wegen (10), (11) und (12) genau 2 L

(14) Wegen (8), (13), (4) und (5) gibt es genau 8 F und 8 T. Folglich gibt es in dieser Klasse genau

11 Fußballer (nämlich 8 F, 2 FL, 1 FS),
10 Leichtathleten (nämlich 2 L, 2 FL, 1 LS, 5 LT),
3 Schwimmer (nämlich 1 FS, 1 LS, 1 ST),
14 Turner (nämlich 8 T, 5 LT, 1 ST).

3. Laut Aufgabe gilt:

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=a \text{ und}$$
$$\overline{BP_1}=\overline{P_1C}=\frac{1}{2}a,$$
$$\overline{CP_2}=\overline{DP_3}=\frac{1}{4}a \text{ und}$$
$$\overline{AP_3}=\overline{P_2D}=\frac{3}{4}a$$



Das Vieleck $PP_1P_2P_3$ hat genau dann den kleinsten Flächeninhalt, wenn das Dreieck $\triangle P_1PP_3$ (zur Strecke P_1P_3 entartet ist und damit) den kleinsten möglichen Flächeninhalt 0 hat. Dies tritt genau dann ein, wenn $P=P_1$ oder $P=P_3$ gilt.

In diesem Falle ist der Flächeninhalt des Vielecks $PP_1P_2P_3$ gleich dem des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$.

Der Flächeninhalt des Vielecks $PP_1P_2P_3$ ist genau dann am größten, wenn der des Dreiecks $\triangle PP_1P_3$ am größten ist, weil die Dreiecke auf verschiedenen Seiten der Geraden g liegen.

Dies ist genau dann der Fall, wenn der Punkt P den größten Abstand von P_1P_3 hat. Zieht man durch A die Parallele h zu der Geraden g durch P_1 und P_3, dann erkennt man, daß unter allen möglichen Lagen des Punktes P dieser genau im Falle $P=A$ den größten Abstand von der fest vorgegebenen Seite P_1P_3 hat; denn für alle anderen Lagen des Punktes P liegt dieser im Innern des von g und h begrenzten Parallelenstreifens oder auf g, weil $\overline{P_3A}$ nach Voraussetzung größer als $\overline{P_1B}$ ist.

a) Den Flächeninhalt A_D des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$ erhält man, wenn man vom Flächeninhalt A_Q des Quadrates $ABCD$ die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle P_2P_1C$ und $\triangle P_3P_2D$ sowie den Flächeninhalt des Trapezes P_1P_3AB subtrahiert. Es gilt daher

$$A_D=a^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{a}{4}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{3a}{4}\right)\cdot a$$
$$=a^2-\frac{a^2}{16}-\frac{3a^2}{32}-\frac{5a^2}{8}=\frac{7a^2}{32}.$$

Das gesuchte Verhältnis der Flächeninhalte beträgt in diesem Falle, wegen $A_Q=a^2$ und $A_V=A_D$

$$A_D:A_Q=\frac{7a^2}{32}:a^2=7:32.$$

b) Entsprechend kann der Flächeninhalt A_V des Vierecks $P_1P_2P_3A$ ermittelt werden:

$$A_V=a^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{a}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a, \text{ also}$$
$$=a^2-\frac{a^2}{16}-\frac{3a^2}{32}-\frac{a^2}{4}=\frac{19a^2}{32}.$$

Das gesuchte größte Verhältnis der Flächeninhalte beträgt

also $\quad A_V:A_Q=19:32.$

4. Man kann sich die Klasse in Dreiergruppen zu je 2 Mädchen und einem Jungen aufgeteilt denken. Wenn jetzt von genau 5 dieser Dreiergruppen je ein Mädchen und ein Junge fortgingen, blieben von ihnen genau 5 Mädchen übrig. Diese können nur dann die restlichen Dreiergruppen in Vierergruppen (zu je 3 Mädchen und 1 Junge) umwandeln, wenn deren Anzahl ebenfalls 5 beträgt. Also gibt es in der Klasse genau 10 der oben beschriebenen Dreiergruppen, die Klasse hat also genau 30 Schüler, und zwar 20 Mädchen und 10 Jungen.

5. Es sei $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=a$.

Ferner sei P ein Punkt der Quadratfläche, und es gelte:

$\overline{AP}=x_1$, $\overline{BP}=x_2$, $\overline{CP}=x_3$ und $\overline{DP}=x_4$.

Dann gilt unter Benutzung der Dreiecksungleichung:

(1) $x_1+x_2\geqq a$, $\quad$ (2) $x_2+x_3\geqq a$,
(3) $x_3+x_4\geqq a$, $\quad$ (4) $x_4+x_1\geqq a$.

Dabei gilt in (1), in (2), in (3) bzw. in (4) das Gleichheitszeichen nur dann, wenn P auf AB, auf BC, auf CD bzw. auf DA liegt. Da dies bei keiner Lage von P für alle vier Seiten

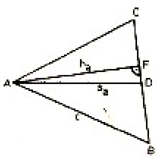
AB, BC, CD, DA gleichzeitig zutrifft, gilt bei keiner Lage von P in allen vier Beziehungen (1), (2), (3), (4) das Gleichheitszeichen. Somit ergibt sich stets

$2x_1+2x_2+2x_3+2x_4>4a$ und daher

$x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4>2a$, w. z. b. w.

6. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (Abb. L 7; 6). Der Fußpunkt der Höhe durch A auf die Gerade durch B und C sei F, der Mittelpunkt von BC sei D. Dann werde das Teildreieck $\triangle ABF$ aus h_a, c und dem rechten Winkel $\sphericalangle$ AFB konstruiert.

Punkt D liegt erstens auf dem Kreis mit s_a um A und zweitens auf der Geraden durch F und B.



(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren ein Dreieck $\triangle ABF$ mit einem rechten Winkel $\sphericalangle AFB$ und Seiten AB, AF der Länge c bzw. h_a.

(2) Wir ziehen die Gerade durch F und B.

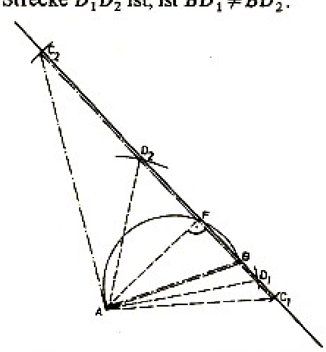
(3) Wir schlagen einen Kreis um A mit s_a. Schneidet er die Gerade durch F und B, so sei D einer der Schnittpunkte.

(4) Wir schlagen den Kreis um D mit $\overline{BD}$. Schneidet er die Gerade durch B und F außer in B noch in einem zweiten Punkt, so sei dieser C genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion ist $\overline{AB}=c$, AF die auf der Geraden durch B und C senkrechte Höhe mit $\overline{AF}=h_a$ und D der Mittelpunkt von BC; ferner gilt $\overline{AD}=s_a$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist im (hier vorliegenden) Falle $h_a<c$ bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt (2) ebenfalls. Wegen $s_a>h_a$ ergibt (3) genau zwei Schnittpunkte, die D_1 und D_2 genannt seien. Da nicht B, sondern F Mittelpunkt der Strecke D_1D_2 ist, ist $\overline{BD_1}\neq\overline{BD_2}$.



Somit ergibt (4) genau zwei verschiedene Schnittpunkte, die C_1 und C_2 genannt seien. Wegen $\overline{BD_1}\neq\overline{BD_2}$ ist auch $\overline{BC_1}\neq\overline{BC_2}$. [Es existieren folglich zwei Dreiecke $\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$, die beide die gleiche entsprechende Höhenlänge, aber verschiedene Längen der zugehörigen Grundseiten haben. Daher haben sie verschiedenen Flächeninhalt, sind also zueinander nicht kongruent].* Infolgedessen existieren bis auf Kongruenz genau zwei verschiedene Dreiecke, die beide allen Bedingungen der Aufgabe genügen (Abb. L 7; 6a).

* Anmerkung: Wenn der in eckigen Klammern stehende Nachweis vom Schüler nicht gebracht wird, ist deswegen kein Punkt abzuziehen.

Olympiadeklasse 8

1. Die vom Anfang bis zum Zeitpunkt t vergangene Zeit, während der also genau 30 Liter je Sekunde in das Gefäß flossen, betrage x Sek., dann sind in der Zeit, während der genau 15 Liter je Sekunde in das Gefäß flossen, genau $(40-x)$ Sekunden vergangen, und es gilt:

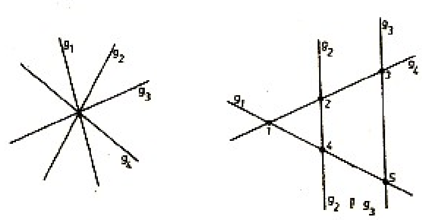
$30x+(40-x)\cdot 15=1000$, also

$15x=\ 400$, woraus man

$x=\ \frac{80}{3}$ erhält.

Während dieser $\frac{80}{3}$ s flossen genau $\frac{80}{3}\cdot 30$ l, das sind 800 l Wasser, in das Gefäß. Wegen $\frac{800}{1000}=\frac{4}{5}$ waren daher zum Zeitpunkt t genau $\frac{4}{5}$ des Gefäßes gefüllt.

2. Der zweite und der sechste Schüler haben nicht recht; denn es gibt z. B. folgende Lösungen (Abb. L 8; 2):



Der dritte Schüler hat recht.

Beweis: Angenommen, es gäbe 4 Geraden so, daß genau 2 Schnittpunkte auftreten. Da Schnittpunkte existieren, können die vier Geraden nicht sämtlich parallel zueinander sein. O. B. d. A. mögen sich die Geraden g_1 und g_2 im Punkt A schneiden. Von den beiden anderen Geraden muß mindestens eine nicht durch A gehen, da sonst nur A als Schnittpunkt aufträte. Dies sei etwa die Gerade g_3. Sie hat also mit einer der beiden Geraden, etwa mit g_1, einen von A verschiedenen Schnittpunkt B. Dann gilt $g_3 \parallel g_2$, weil sonst entgegen der Aufgabe g_3 mit g_2 einen weiteren von A und B verschiedenen Schnittpunkt hätte. Die vierte Gerade kann nun nicht ebenfalls zu g_2 und g_3 parallel sein, da sie dann g_1 in einem von A und B verschiedenen Punkt schneiden würde. Also hat sie einen Schnittpunkt A' mit g_2 und einen Schnittpunkt B' mit g_3. Da sie von g_1 verschieden ist, kann nicht gleichzeitig $A=A'$ und $B=B'$ sein. Somit tritt außer A und B noch mindestens ein weiterer Schnittpunkt auf. Dieser Widerspruch beweist, daß die Annahme, es gäbe 4 Geraden, für die genau 2 Schnittpunkte auftreten, falsch war.

3. Ein Dreieck $\triangle ABC$ mit drei reellen Zahlen a, b, c als Seitenlängen existiert genau dann, wenn gleichzeitig die Ungleichungen

(1) $a>0$, (4) $a<b+c$,

(2) $b>0$, (5) $b<a+c$,

(3) $c>0$, (6) $c<a+b$

gelten. Es ist genau dann gleichschenklig, wenn $a=b$ oder $a=c$ oder $b=c$ gilt. Die Bedingung $a=b$ ist gleichbedeutend mit $-5x+12=3x+20$, also mit $x=-1$. Daraus ergibt sich $a=b=17$ und $c=12$, und (1) bis (6) sind sämtlich erfüllt. Die Bedingung $a=c$ ist gleichbedeutend mit

$-5x+12=4x+16$, also mit $x=-\frac{4}{9}$.

Daraus ergibt sich $a=c=\frac{128}{9}$ und $b=\frac{55}{3}$, und (1) bis (6) sind sämtlich erfüllt. Die Bedingung $b=c$ ist gleichbedeutend mit

$3x+20=4x+16$, also mit $x=4$.

Daraus ergibt sich $b=c=32$ und $a=-8$, d. h. (1) ist nicht erfüllt.

Mithin gibt es genau für $x=-1$ und $x=-\frac{4}{9}$ je ein gleichschenkliges Dreieck.

4. Nach Voraussetzung ist $a-2>0$ und $b-2>0$, also

$(a-2)(b-2)=ab-2(a+b)+4>0$, d. h.

$ab>2(a+b)-4$.

Ferner folgt aus $a>2$, $b>2$, daß

$a+b>4$ ist, woraus

$2(a+b)-4>(a+b)$ und damit erst recht $ab>(a+b)$ folgt.

5. Die Anzahl der Nüsse in dem Gefäß sei x. Dann würde der erste Pionier

$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ erhalten,

als Rest blieben $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)$.

Davon würde der zweite Pionier

$\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{2}$ erhalten, als Rest

blieben $\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-3)$.

Davon würde der dritte Pionier

$\frac{1}{8}(x-3)+\frac{1}{2}$ erhalten, als Rest

blieben $\frac{1}{8}(x-3)-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}(x-7)$.

Davon würde der vierte Pionier

$\frac{1}{16}(x-7)+\frac{1}{2}$ erhalten, als Rest

blieben $\frac{1}{16}(x-7)-\frac{1}{2}=\frac{1}{16}(x-15)$.

Davon würde der fünfte Pionier

$\frac{1}{32}(x-15)+\frac{1}{2}$ erhalten, als Rest

blieben $\frac{1}{32}(x-15)-\frac{1}{2}=\frac{1}{32}(x-31)$.

Dieser Rest betrug laut Aufgabe Null. Daraus folgt $x=31$. Also enthielt das Gefäß genau 31 Nüsse. Von diesen würden bekommen:

Der 1. Pionier 16 Nüsse,
der 2. Pionier 8 Nüsse,
der 3. Pionier 4 Nüsse,
der 4. Pionier 2 Nüsse und
der 5. Pionier 1 Nuß.

6. Laut Aufgabe ist $EFGH$ ein Parallelogramm. Daraus folgt:

$$\overline{HE}=\overline{GF},\ \overline{HG}=\overline{EF}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle HEG\cong\sphericalangle FGE\\ \sphericalangle AEG\cong\sphericalangle CGE\end{array}\right\}\text{ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.}$$

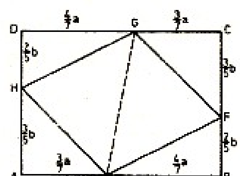
Also gilt: $\sphericalangle AEH\cong\sphericalangle CGF$.

Mithin ist $\triangle AEH\cong\triangle CGF$ (s, w, w).

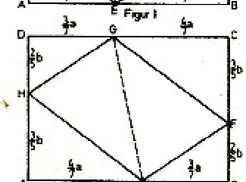
Analog läßt sich zeigen, daß $\triangle BEF\cong\triangle DGH$ gilt. Folglich gilt:

$\overline{AE}=\overline{CG}$, $\overline{BE}=\overline{DG}$, $\overline{AH}=\overline{CF}$, $\overline{DH}=\overline{BF}$, und es gibt genau die folgenden 4 Möglichkeiten, einem Rechteck $ABCD$ ein Parallelogramm $EFGH$ in der geforderten Weise einzubeschreiben (Abb. L 8; 6):

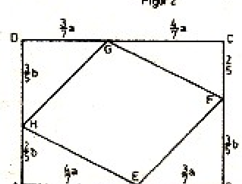
Dabei kann man Fig. 3 durch Spiegelung der Fig. 1 und Fig. 4 durch eine Spiegelung der Fig. 2 an der Mittelsenkrechten zu AB gewinnen. Es sind daher die folgenden beiden Fälle zu betrachten:



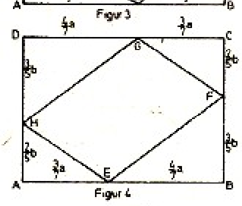
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

Fall 1:

Es sei $\overline{DH}:\overline{HA}=\overline{BF}:\overline{FC}=2:3$
und $\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{CG}:\overline{GD}=3:4$.

Dann ist der Flächeninhalt A_P des Parallelogramms $EFGH$ gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt A_R des Rechtecks $ABCD$ und der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle AEH$, $\triangle EBF$, $\triangle FCG$ und $\triangle GDH$. Also gilt:

$$A_P=ab-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{3}{5}b+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{2}{5}b+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{3}{5}b+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{2}{5}b\right)$$

$$=ab-\left(\frac{9}{35}ab+\frac{8}{35}ab\right)$$

$$=\frac{18}{35}ab.$$

Daraus folgt: $A_R:A_P=35:18$

Fall 2:

Es sei $\overline{DH}:\overline{HA}=\overline{BF}:\overline{FC}=2:3$
und $\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{CG}:\overline{GD}=4:3$.

Analog wie im Fall 1 erhält man dann

$$A_P=ab-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{3}{5}b+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{2}{5}b+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{3}{5}b+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{2}{5}b\right)$$

$$=ab-\left(\frac{12}{35}ab+\frac{6}{35}ab\right)$$

$$=\frac{17}{35}ab,\text{ woraus}$$

$A_R:A_P=35:17$ folgt.

Olympiadeklasse 9

1. Die sechsstellige Telefonnummer läßt sich im dekadischen System folgendermaßen darstellen:

$z=a\cdot 10^5+b\cdot 10^4+c\cdot 10^3+d\cdot 10^2+e\cdot 10^1+f$ mit natürlichen Zahlen a, b, c, d, e, f, für die $0\leqq b, c, d, e, f\leqq 9$ und $b, c, d, e, f\neq 1$ sowie $2\leqq a\leqq 9$ gilt. Wäre $a+b\geqq 10$, so wäre die erste Ziffer c der Summe $a+b$ eine 1.

Also gilt: $a+b=c\leqq 9$.

Ebenso erhält man $b+c=d\leqq 9$, $c+d=e\leqq 9$, $d+e=f\leqq 9$. Angenommen, es wäre $a=4$. Dann wäre $c\geqq 4$ und $d\geqq 4$ und mithin $e\geqq 8$, was $d+e=f\geqq 12$ zur Folge hätte, im Widerspruch zu $f\leqq 9$. Also gilt $a\leqq 3$, woraus laut Aufgabe $a=2$ oder $a=3$ folgt. Angenommen, es wäre $b>0$. Dann müßte laut Aufgabe $b\geqq 2$ gelten. Daraus folgte $c\geqq 4$, $d\geqq 6$ und $c+d=e\geqq 10$, was nicht möglich ist. Also gilt $b=0$. Da Günters Hausnummer eine durch 3 teilbare Zahl ist, gilt $a=3$. Die Hausnummer lautet also 30 und die Telefonnummer seiner Schule 30 33 69.

2. Die neun aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien mit n, $n+1$, ..., $n+8$ bezeichnet. Ihre Summe beträgt dann $9n+36$. Da die drei „Zeilensummen" gleich sein sollen, muß jede von ihnen $3n+12$ betragen. Laut Aufgabe gilt das auch für die übrigen fünf Summen. Unter ausschließlicher Verwendung der gegebenen Zahlen läßt sich diese Summe auf genau 8 verschiedene Weisen aus je 3 verschiedenen Summanden bilden, nämlich auf folgende Weisen:

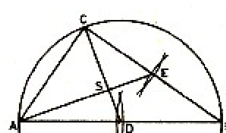
$n+(n+4)+(n+8)$
$n+(n+5)+(n+7)$
$(n+1)+(n+3)+(n+8)$
$(n+1)+(n+4)+(n+7)$
$(n+1)+(n+5)+(n+6)$
$(n+2)+(n+3)+(n+7)$
$(n+2)+(n+4)+(n+6)$
$(n+3)+(n+4)+(n+5)$

In diesen Summen [kommen die Summanden n, $(n+2)$, $(n+6)$ und $(n+8)$ genau je zweimal, die Summanden $(n+1)$, $(n+3)$, $(n+5)$ und $(n+7)$ genau je dreimal, und es]* kommt nur der Summand $(n+4)$ genau viermal vor. Bei der Bildung der „Zeilen-", „Spalten-" und „Diagonalsummen" wird nur das schraffierte Feld genau viermal, [die Eckfelder werden je dreimal und alle übrigen Felder je zweimal]* belegt. Daher muß in dem schraffierten Feld die Zahl $(n+4)$, das ist die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen n, ..., $(n+8)$, stehen, und wenn sie dort steht, gibt es die angegebenen Möglichkeiten.

* Anmerkung: Die eingeklammerten Angaben sind für eine (vollständige) Lösung nicht erforderlich.

3. Das Dreieck $\triangle ABC$ ist wegen $(\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+1^2$ nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras rechtwinklig. Es sei o. B. d. A. $\overline{AC}=m$, $\overline{BC}=m\sqrt{2}$ und $\overline{AB}=m\sqrt{3}$ (m eine positive reelle Zahl) gesetzt. Dann ist AB Hypotenuse, der rechte Winkel liegt also bei C (der größten Seite liegt der größte Winkel gegenüber).

Es seien D der Mittelpunkt von AB, E der Mittelpunkt von BC und S der Schnittpunkt von CD und AE.



Nach der Umkehrung des Satzes des Thales gilt nun:

$$\overline{CD}=\overline{AD}=\overline{DB}=\frac{1}{2}m\sqrt{3}.$$

Daraus und aus dem Satz über das Teilverhältnis zweier sich schneidenden Seitenhalbierenden eines Dreiecks folgt:

(1) $\overline{CS}=\frac{2}{3}\overline{CD}=\frac{1}{3}m\sqrt{3}$. Es gilt

nach dem Satz des Pythagoras ($\triangle AEC$)

$$\overline{AE}=\sqrt{m^2+\frac{m^2}{2}}=\frac{1}{2}m\sqrt{6}.$$

Mithin gilt:

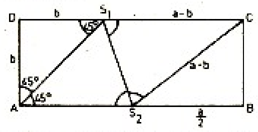
(2) $\overline{AS}=\frac{2}{3}\overline{AE}=\frac{1}{3}m\sqrt{6}$.

Wegen (1) und (2) gilt $\overline{CS}^2+\overline{AS}^2=\frac{m^2}{3}+\frac{2m^2}{3}=m^2=\overline{CA}^2$.

Daher ist nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras $\triangle ASC$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei S, die Seitenhalbierenden CD und AE stehen also senkrecht aufeinander w. z. b. w.

4. Ein Rechteck $ABCD$ genügt genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $\sphericalangle AS_2S_1\cong\sphericalangle S_1S_2C$ gilt. Da ferner in jedem Rechteck $\sphericalangle AS_2S_1\cong\sphericalangle S_2S_1C$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) ist, so genügt ein

Rechteck genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn



das Dreieck $\triangle S_1S_2C$ gleichschenklig mit $\overline{S_1C}=\overline{S_2C}$ ist. Nun ist das rechtwinklige Dreieck $\triangle ADS_1$ stets gleichschenklig, da $\sphericalangle DAS_1$ eine Größe von 45° hat und somit $\sphericalangle DAS_1 \cong \sphericalangle AS_1D$ gilt. Daher gilt: $\overline{DS_1}=\overline{DA}=b$, und das Rechteck genügt genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $\overline{S_2C}=\overline{S_1C}=a-b$ gilt. Da $\triangle S_2BC$ rechtwinklig ist, ist dies nach dem Satz des Pythagoras genau dann der Fall, wenn

$$(a-b)^2=b^2+\frac{a^2}{4}$$

oder, gleichbedeutend hiermit,

$a^2-2ab=\frac{a^2}{4}$, d. h. $\frac{3}{4}a^2=2ab$ gilt.

Wegen $a\neq 0$ trifft dies genau für $a:b=8:3$ zu.

5. Es gilt $(a+b-c)^2 \geqq 0$, und das Gleichheitszeichen gilt genau für $a+b=c$. Daraus folgt

$(a+b)^2-2(a+b)c+c^2 \geqq 0$, also

$a^2+b^2+c^2 \qquad \geqq 2(bc+ac-ab).$

Nach Division durch die positive reelle Zahl abc ergibt das $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab} \geqq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$, und das Gleichheitszeichen gilt genau für $a+b=c$.

6. Angenommen, die Gleichung hätte eine Lösung. Dann gilt

$y(2x+1)=2x^2-5x+19$, also

$$y=x-3+\frac{22}{2x+1} \text{ mit } x\neq -\frac{1}{2}.$$

Da x, y ganzzahlig sein sollen, muß auch $\frac{22}{2x+1}$ eine ganze Zahl sein. Das ist genau dann der Fall, wenn $2x+1$ ein Teiler von 22, d. h. eine der Zahlen -22; -11; -1; 1; 11; 22 ist. Für $2x+1=\pm 22$ ist x nicht ganzzahlig. In den übrigen Fällen erhält man für x der Reihe nach die Werte -6; -1; 0; 5 und daraus für y die Werte -11, -26, 19, 4. Also können höchstens die Zahlenpaare $(-6; -11)$, $(-1; -26)$, $(0; 19)$, $(5; 4)$ Lösung sein.

Durch Einsetzen in die gegebene Gleichung findet man, daß sie es auch sind.

Olympiadeklasse 10

1. Angenommen, es gibt ein Zahlenpaar $(a; b)$, das die Bedingungen (1), (2) erfüllt. Dann gilt:

(3) $\quad a+b=6$ und

(4) $\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=6.$

Aus (3) folgt $b=6-a$ und $a\neq 6$, hieraus und aus (4)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{6-a}=6.$$

Nach Multiplikation mit $a(6-a)$, Subtraktion von $6a(6-a)$ und Division durch 6 ergibt sich $a^2-6a+1=0$. Diese Gleichung hat die Lösungen

$$a_{1,2}=3\pm\sqrt{9-1}=3\pm 2\sqrt{2}.$$

Als zugehörige Werte erhält man aus (3)

$$b_{1,2}=3\pm 2\sqrt{2}.$$

Also können höchstens die Paare $(3+2\sqrt{2};\ 3-2\sqrt{2})$ und $(3-2\sqrt{2};\ 3+2\sqrt{2})$ Lösung sein.

Tatsächlich gelten für die Gleichungen

$3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}=6$ und

$$\frac{1}{3+2\sqrt{2}}+\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}}{9-8}=6$$

sowie diejenigen Gleichungen, die durch Vertauschung von $(+2\sqrt{2})$ mit $(-2\sqrt{2})$ entstehen.

2. Angenommen, es gäbe ein Zahlenpaar (x, y), das den Bedingungen (1), (2) genügt. Setzt man $x=10a+b$ (mit a, b natürlich und $1\leqq a\leqq 9$, $1\leqq b\leqq 9$), dann folgt $y=10b+a$, und wegen $x>y$ auch $a>b$.

Wegen $a\neq 0$, $b\neq 0$ und $a>b$ ist

$$2\leqq a\leqq 9 \text{ und } 1\leqq b\leqq 8.$$

Das Quadrat der zweistelligen Zahl x ist entweder dreistellig oder vierstellig.

Wir betrachten zunächst die Fälle, in denen x^2 dreistellig ist. Wegen $40^2>1000$ ist dann $a\leqq 3$.

Da auch $32^2=1024$ bereits vierstellig ist, können höchstens die Zahlen 21 bzw. 31 die Bedingungen (1), (2) erfüllen.

Tatsächlich gilt

$$21^2=441 \text{ und } 12^2=144 \text{ sowie}$$
$$31^2=961 \text{ und } 13^2=169.$$

Also erfüllen die Paare (21, 12) und (31, 13) die Bedingungen (1), (2).

Angenommen nun, die Bedingungen der Aufgabe seien mit einer Zahl x erfüllbar, deren Quadrat x^2 vierstellig ist. Dann gilt für die Ziffern a, b dieser Zahl

(3) $\quad (10a+b)^2=1000c+100d+10e+f$

sowie

(4) $\quad (10b+a)^2=1000f+100e+10d+c$ (mit c, d, e, f natürlich und $0\leqq c, d, e, f\leqq 9$; $c, f\neq 0$).

Aus (3) und (4) folgt

$100a^2+20ab+b^2=1000c+100d+10e+f$

$a^2+20ab+100b^2=c+10d+100e+1000f.$

Durch Subtraktion erhält man

$99a^2-99b^2=999c+90d-90e-999f$, also

(5) $\quad 11(a^2-b^2)=111c+10d-10e-111f.$

Da die linke Seite von (5) durch 11 teilbar ist, muß es auch die rechte Seite sein.

Addiert man zu $111c+10d-10e-111f$ die durch 11 teilbare Zahl $1111f+110e-110c$, dann erhält man $1000f+100e+10d+c=(10b+a)^2$,

und auch diese Zahl muß durch 11 teilbar sein. Daher muß schließlich $11\,|\,(10b+a)$ gelten, was wegen $a\neq b$ nicht der Fall ist. Dieser Widerspruch beweist, daß es für vierstellige Zahlen x^2 kein derartiges Zahlenpaar (x, y) gibt. Daher erfüllen genau die Paare (21, 12) und (31, 13) die Bedingungen (1), (2).

3. Nach Aufgabenstellung ist $\overline{AC}=2a$ und nach dem Lehrsatz des Pythagoras

(1) $\quad \overline{AB}=a\sqrt{5}.$

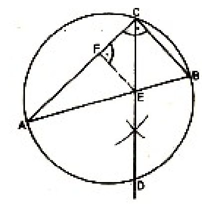
Es sei E der Schnittpunkt von AB und CD. Dann gilt nach dem im Hinweis angegebenen Satz

$$\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{AC}:\overline{BC}=2:1.$$

Daraus folgt wegen (1):

$$\overline{AE}=\frac{2}{3}a\sqrt{5} \text{ und } \overline{EB}=\frac{1}{3}a\sqrt{5}.$$

Die Parallele zu BC durch E schneide AC in F. Dann gilt nach einem der Strahlensätze $\overline{EF}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{AB}=2:3$, woraus $\overline{EF}=\frac{2}{3}a$ folgt (Abb. L 10; 3).



Dreieck $\triangle EFC$ ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F und, da $\sphericalangle ACE$ eine Größe von 45° hat, auch gleichschenklig. Also gilt $\overline{EF}=\overline{FC}$. Nach dem Satz des Pythagoras folgt nun

$$\overline{CE}=\frac{2}{3}a\sqrt{2}.$$

[Weiter gilt: $\triangle ADE \sim \triangle BCE$; denn $\sphericalangle BEC \cong \sphericalangle AED$ (Scheitelwinkel) und $\sphericalangle CBA \approx \sphericalangle CDA$ (Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen). Daher gilt: $\overline{CE}:\overline{EB}=\overline{AE}:\overline{ED}$]*, woraus man

$$\overline{ED}=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{EB}}{\overline{CE}}=\frac{\frac{2}{3}a\sqrt{5}\cdot\frac{1}{3}a\sqrt{5}}{\frac{2}{3}a\sqrt{2}}=\frac{5}{6}a\sqrt{2}$$

erhält. Somit ergibt sich:

$$\overline{CD}=\overline{CE}+\overline{ED}=\frac{2}{3}a\sqrt{2}+\frac{5}{6}a\sqrt{2}=\frac{3}{2}a\sqrt{2}.$$

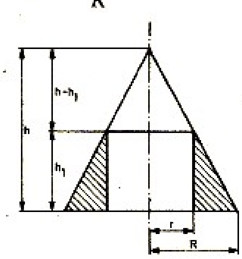
* Anmerkung: Hier kann auch einfach der Sehnensatz $\overline{AE}\cdot\overline{EB}=\overline{CE}\cdot\overline{ED}$ zitiert werden.

4. Für die Höhenlänge h_1 des Restkörpers gilt nach einem der Strahlensätze

$R:r=h:(h-h_1)$

und damit

(1) $\quad h_1=h-\frac{hr}{R}.$



Es sei V das Volumen des Kegelkörpers und V_1 das Volumen des aus dem Kegel herausgebohrten Körpers.

Dann gilt $V=\frac{1}{3}R^2\cdot\pi\cdot h$, so daß die Forderung $\quad V_1=\frac{1}{2}V$ mit

(2) $\quad V_1=\frac{1}{6}R^2\cdot\pi\cdot h$ gleichbedeutend ist.

Das Volumen V_1 setzt sich zusammen aus dem eines geraden Kreiskegelkörpers mit dem Radius r und der Höhenlänge $(h-h_1)$ und aus dem eines geraden Kreiszylinderkörpers mit dem Radius r und der Höhenlänge h_1. Daher gilt

(3) $$V_1=\frac{1}{3}\pi r^2(h-h_1)+r^2\cdot\pi\cdot h_1$$

Aus (2) und (3) folgt, daß r genau dann allen Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn

$$\frac{\pi}{6}R^2h=\pi r^2h_1+\frac{\pi}{3}r^2h-\frac{\pi}{3}r^2h_1,$$

und $0<r<R$ gilt.

Unter Berücksichtigung von (1) und wegen $\pi h\neq 0$ folgt, daß dies gleichwertig ist mit

$$\frac{1}{6}R^2=\frac{2}{3}r^2-\frac{2r^3}{3R}+\frac{1}{3}r^2=r^2-\frac{2r^3}{3R},$$

woraus man

$$\frac{2r^3}{3R}-r^2+\frac{1}{6}R^2=0, \text{ also}$$

$$r^3-\frac{3}{2}Rr^2+\frac{1}{4}R^3=0 \text{ erhält.}$$

Wegen $R=6$ folgt daraus

$$r^3-9r^2+54\quad=0.$$

Das ist eine kubische Gleichung für r. Durch sinnvolles Probieren ermittelt man $r=3$ als eine Lösung dieser Gleichung; denn es ist $27-81+54=0$. Da $r=3$ zwischen 0 und R liegt, ist $r=3$ auch Lösung der Aufgabe.

Weil für $0<r<R$ mit wachsendem r das Volumen des herausgebohrten Körpers monoton wächst und das Volumen des Restkörpers monoton abnimmt, kann es höchstens eine Lösung geben. Daher ist $r=\frac{R}{2}=3$ zugleich die einzige Lösung der Aufgabe.

5. a) Für jedes reelle x gilt

$f(x+p)=f(x)$; hieraus folgt

$\frac{1}{2}f(x+p)=\frac{1}{2}f(x)$, d. h.

$F(x+p)=F(x)$.

Daher hat die Funktion $F(x)$ die Zahl p als eine Periode. Ist umgekehrt q eine positive Periode von $F(x)$, so gilt für alle reellen x die Gleichung $F(x+q)=F(x)$, d. h. $\frac{1}{2}f(x+q)=\frac{1}{2}f(x)$, also $f(x+q)=f(x)$, so daß q dann auch eine Periode von $f(x)$ ist; nach Voraussetzung über p und $f(x)$ folgt hieraus $q\geqq p$. Daher ist p auch die *kleinste* positive Periode von $F(x)$.

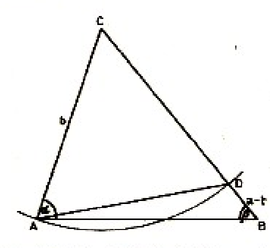
b) Für jedes reelle x ist auch $\frac{x}{2}$ reell; daher gilt $f\left(\frac{x}{2}+p\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)$, d. h. $f\left(\frac{x+2p}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)$, d. h. $G(x+2p)=G(x)$. Daher hat die Funktion $G(x)$ die Zahl $2p$ (die ebenfalls positiv ist) als eine Periode. Ist umgekehrt r eine positive Periode von $G(x)$, so gilt für alle reellen x die Gleichung $G(x+r)=G(x)$; d. h.

$f\left(\frac{x+r}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)$, d. h.

$f\left(\frac{x}{2}+\frac{r}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)$. Da hierbei auch $\frac{x}{2}$ alle reellen Zahlen durchläuft, ist also $\frac{r}{2}$ eine (ebenfalls positive) Periode von $f(x)$; nach Voraussetzung über p und $f(x)$ folgt hieraus aber $\frac{r}{2}\geqq p$, d. h. $r\geqq 2p$. Daher ist $2p$ auch die kleinste positive Periode von $G(x)$.

6. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Der Kreis um C mit b schneide BC in D. Dann ist $\overline{BD}=a-b$.

Das Dreieck $\triangle ADC$ ist gleichschenklig mit $\overline{AC}=\overline{DC}$, also $\overline{\sphericalangle CDA}=\frac{1}{2}(180°-\overline{\sphericalangle ACD})$ $=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=60°$.



Der Winkel $\sphericalangle ADB$ hat daher eine Größe von $180°-60°=120°$. Das Dreieck $\triangle ADB$ läßt sich aus $(a-b)$, β und $\overline{\sphericalangle ADB}=120°$ konstruieren. Punkt C liegt nun erstens auf dem von B ausgehenden Strahl durch D und zweitens auf dem freien Schenkel eines in A an AB angetragenen Winkel der Größe α.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir zeichnen eine Strecke BD der Länge $a-b$.

(2) Wir tragen an BD in B einen Winkel der Größe β und in D nach derselben Seite einen Winkel von 120° an. Schneiden sich die freien Schenkel dieser Winkel, so sei der Schnittpunkt A genannt.

(3) Wir zeichnen die Gerade durch B und D.

(4) Wir tragen in A an AB nach derselben Seite, auf der D liegt, einen Winkel der Größe α an. Schneidet sein freier Schenkel die Gerade durch B und D, so sei dieser Schnittpunkt C genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierbare Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Laut Konstruktion ist

$\overline{\sphericalangle ABC}=\beta$ und $\overline{\sphericalangle BAC}=\alpha$.

Ferner ist nach Konstruktion

$\overline{\sphericalangle CDA}=180°-120°=60°=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

$=\frac{1}{2}(180°-\overline{\sphericalangle ACD})$, also ist $\triangle ADC$ gleichschenklig mit $\overline{AC}=\overline{DC}$. Somit gilt

$\overline{BC}-\overline{AC}=\overline{BC}-\overline{DC}$

$=\overline{BD}$ (, also nach Konstruktion)

$=a-b$.

(IV) Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind stets eindeutig ausführbar. Sie ergeben nach (w, s, w) mit den gegebenen Größen eindeutig ein Dreieck $\triangle ABD$.

Die Konstruktionsschritte (3) und (4) sind ebenfalls stets eindeutig ausführbar.

Wegen $\alpha+\beta<180°$ ist der Punkt C stets vorhanden und eindeutig bestimmt.

Die Lösungen zu den Aufgaben der Klasse 10 der DDR-Olympiade werden in Heft 5/72 veröffentlicht. (Klassenstufe 11/12 siehe „Mathematik in der Schule" 12/72, d. Red.)

---

liege C zwischen A und D und D zwischen C und B. Über AC, AD und DB seien auf derselben Seite der Geraden durch A und B Halbkreise geschlagen, und über CB sei ein Halbkreis auf der anderen Seite der Geraden geschlagen.
Es ist die Summe s der Längen aller dieser Halbkreisbögen in Abhängigkeit von a zu ermitteln.

3. Beweise, daß für jedes Dreieck $\triangle ABC$ der folgende Satz gilt: Ist S der von C verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch C mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$, dann liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB.

4. In einer Ebene ε seien zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q sowie eine durch Q gehende Gerade g beliebig gegeben.
a) Beweise, daß dann stets der Spiegelpunkt P' von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt!
b) Beweise, daß es umgekehrt zu jedem Punkt P' des Kreises um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ eine durch Q verlaufende Gerade g gibt, bezüglich der P' der Spiegelpunkt von P ist!
c) Beweise: Ist P^* ein Punkt, der nicht auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt, so gibt es keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre!

Olympiadeklasse 9

1. Bei einem geraden Kreiszylinder sollen die Maßzahlen des Umfangs seiner Grundfläche (in cm), des Inhalts seiner Mantelfläche (in cm^2) und seines Volumens (in cm^3) untereinander gleich sein.
Ermitteln Sie den Grundkreisradius und die Höhenlänge jedes derartigen Zylinders!

2. Ermitteln Sie alle geordneten Paare (a, b) ganzer Zahlen a und b $(b \neq 0)$ mit folgender Eigenschaft: Ersetzt man den Zähler a des Bruches $\frac{a}{b}$ durch die Summe aus a und einer geeigneten natürlichen Zahl n $(n \neq 0)$ und ersetzt man zugleich den Nenner b dieses Bruches durch das Produkt aus b und der gleichen Zahl n, so erhält man einen Bruch, der dem zu Anfang genannten Bruch $\frac{a}{b}$ gleich ist.

3. Eine Kreislinie sei in 30 gleichgroße Bögen geteilt. Die Teilpunkte seien der Reihe nach mit P_1 bis P_{30} bezeichnet. Berechnen Sie die Größe jedes der vier Winkel, unter denen sich die Strecken P_7P_{18} und $P_{12}P_{21}$ schneiden!

4. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sind p_1 und p_2 Primzahlen, für die $3 < p_1 < p_2$ gilt, dann gibt es stets zwei natürliche Zahlen a und b, so daß die Gleichungen
(1) $a+b=p_2$ und $a-b=p_1$
gleichzeitig erfüllt sind und das Produkt $a \cdot b$ durch 6 teilbar ist.

Olympiadeklasse 10

1. Fünf Schüler A, B, C, D, E spielen folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:
Einer von ihnen, z. B. der Schüler A, verläßt den Raum. Nun werden auf ein Blatt Papier genau 10 Vierecke gezeichnet. Die Zeichnung wird versteckt, und A wird hereingerufen.
Jeder der Schüler B, C, D, E macht über die gezeichneten Vierecke genau eine Aussage. Von diesen Aussagen ist genau eine falsch. Sie lauten:
(1) Auf der Zeichnung ist nicht nur *ein* Quadrat.
(2) Es sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate auf der Zeichnung.
(3) Man sieht unter den Vierecken auf der Zeichnung genau ein Parallelogramm.
(4) Auf der Zeichnung gibt es genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke.
A soll nun feststellen, welche Aussage falsch ist. Außerdem soll er die genaue Anzahl der Quadrate, Rechtecke und Trapeze angeben. Wie kann das geschehen?

2. Zwei Autos starteten gleichzeitig und fuhren auf derselben Straße von A nach B. Das erste Auto benötigte für diese Strecke 4 Stunden, das zweite 3 Stunden.
Beide fuhren während der ganzen Zeit mit gleichbleibender Geschwindigkeit.
a) Zu welchem Zeitpunkt nach dem Start war das erste Auto genau doppelt so weit von B entfernt wie das zweite?
b) Welche Strecke, ausgedrückt in Bruchteilen der gesamten Entfernung von A nach B, legte jedes Auto bis zu dem in a) gesuchten Zeitpunkt zurück?

3. Es seien u und v reelle Zahlen mit $0 < v < u$. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k mit $k > -\frac{v}{u}$, für die (*) $\frac{u+kv}{v+ku} < 1$ gilt!

4. Unter allen gleichschenkligen Dreiecken $\triangle ABC$ ist bei gegebener Schenkellänge $\overline{AC}=\overline{BC}=a$ die Basislänge $\overline{AB}=c$ derjenigen Dreiecke zu ermitteln, für die das Verhältnis der Flächeninhalte von In- und Umkreis 1:4 beträgt.

Olympiadeklasse 11/12

1. Gegeben seien zwei Würfel mit den Kantenlängen a bzw. b. Gesucht ist ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche, dessen Volumen gleich der Summe der Würfelvolumina und dessen Höhenlänge gleich der Summe der Längen der Würfelkanten ist.
a) Man berechne die Seitenlänge c der quadratischen Grundfläche eines solchen Prismas.
b) Man gebe eine Konstruktion für eine Strecke der in a) ermittelten Länge c an.

2. Beweisen Sie, daß für keine ganze Zahl n die Zahl $7n+3$ Quadrat einer ganzen Zahl sein kann!

3. Klaus bemerkt, daß die beiden Zeiger seiner Taschenuhr zwischen 6 Uhr und 7 Uhr zu genau zwei Zeitpunkten einen Winkel von 110° bilden.
Ermitteln Sie die Anzahl der Minuten, die vom ersten bis zum zweiten der genannten Zeitpunkte vergangen sind!

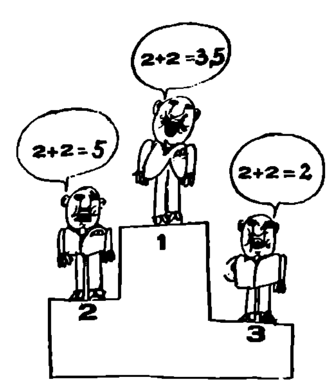
4. Man betrachte in einer mit einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem versehenen Ebene die Schar aller konzentrischen Kreise um den Mittelpunkt $M(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.
Es ist zu beweisen, daß keine Kreislinie dieser Schar mehr als einen Punkt (x, y) mit rationalen Zahlen x, y als Koordinaten enthält.

(Die Lösungen zu den Aufgaben der Klassenstufe 5 bis 10 werden in Heft 3/72 veröffentlicht, d. Red.)

Vorbildliche Hilfe

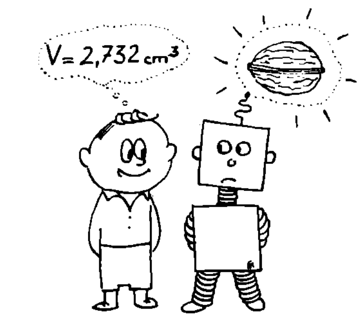
Ende Oktober wurden 100 Päckchen mit Buchprämien für die Preisträger des Wettbewerbs 1970/71 versandt.
Wir danken den Verlagen, welche uns Bücher im Wert von 1 500 M zur Verfügung stellten. Das ist ein echtes Zeichen der Anerkennung für die vielen Tausend aktiven Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb.
Einen wertvollen Beitrag zur weiteren Qualifizierung unserer Leser leisteten:

- VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
- VEB Fachbuchverlag, Leipzig
- Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin
- Transpress, VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin
- VEB Verlag Technik, Berlin
- Sportverlag, Berlin
- Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin
- BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig
- Der Kinderbuchverlag, Berlin
- Verlag Die Wirtschaft, Berlin
- Deutscher Militärverlag, Berlin.



Mit dieser Vignette des polnischen Zeichners Szpilki (Warschau) wünscht die Redaktion *alpha* allen Teilnehmern der Bezirksolympiade (5./6. Februar) viel Erfolg.

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1972

5▲847 Ein Grundstück hat die Form eines Rechtecks; es sei 60 m breit und dreimal so lang. Das Grundstück soll eingezäunt werden. Vier laufende Meter des Zaunes kosten 16,60 M; ferner beträgt der Arbeitslohn für die Aufstellung dieses Zaunes 210,— M. Wie teuer wird die Einzäunung dieses Grundstücks?

Astrid Richter, Zerpenschleuse, Kl. 5b

5▲848 Der Trog eines Schiffshebewerkes, der die Form eines Quaders hat, ist innen 87 m lang und 13 m breit und besitzt eine Wassertiefe von 2,5 m. Die Stahlkonstruktion des Troges hat eine Masse von 1600 t. Die Masse des leeren Troges und der Stahlträger, auf denen er ruht, ist gleich der Masse seiner Wasserfüllung. Welche Last wird bei einem Aufzug des gefüllten Troges gehoben? Wieviel Tonnen wiegen die Stahlträger?

Britta K., Plauen

W 5 ■ 849 Die Schüler einer Klasse sammelten insgesamt 336 kg Altpapier. Aus 1 kg Altpapier stellt man in einer Papierfabrik genau 700 g reines weißes Papier her und aus je 30 g von diesem genau ein Schreibheft. Gib die größtmögliche Anzahl von Heften an, die aus dem gesammelten Altpapier hergestellt werden kann!

W 5 ■ 850 Von einer zweistelligen Zahl z ist bekannt, daß die Einerziffer eine dreimal so große Zahl darstellt wie die Zehnerziffer. Vertauscht man die Ziffern dieser Zahl, so entsteht eine Zahl, die um 36 größer ist als die ursprüngliche. Wie lautet die Zahl z im Dezimalsystem?

5 851 Ein 8 cm langes Matchboxauto vom Typ *Rolls Royce* (Baujahr 1906) wird im Maßstab 1:55, ein Modell vom Typ *Daimler* (Baujahr 1911) im Maßstab 1:45 hergestellt. Der *Rolls Royce* ist in Wirklichkeit 62 cm länger als der *Daimler*. Welche Länge besitzt das Matchboxauto vom Typ *Daimler*?

Annegret Kirsten, August-Bebel-OS Leuna, Kl. 6c

5 852 Während einer Vorstellung im „Theater der Jungen Welt" in Leipzig blieben einige Plätze frei. Alfred zählte 17, Annerose dagegen 16 freie Plätze. Heinz sagte, Alfred habe sich auf jeden Fall verzählt. Wie konnte Heinz seine Aussage begründen, wenn er wußte, daß es im Theater insgesamt 520 Plätze gibt und in dieser Vorstellung 68 Mädchen mehr als Jungen anwesend waren? Wieviel Jungen und wieviel Mädchen nahmen an der Vorstellung teil, wenn die Angabe von Annerose richtig ist?

6▲853 Ein Parallelogramm $ABCD$ wird durch seine Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, die sich in M schneiden, in vier Teildreiecke $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CDM$ und $\triangle DAM$ zerlegt. Es ist zu beweisen, daß diese vier Teildreiecke untereinander flächengleich sind!

Peter-Michael Anders u. Detlef Snaga, Bernau, Kl. 7b

6▲854 Beweise, daß die hintereinander ausgeführten Spiegelungen eines Dreiecks ABC an zwei zueinander parallelen Geraden ($g_1 \parallel g_2$) durch eine Verschiebung des Dreiecks ABC um den doppelten Abstand der Geraden g_1 und g_2 dargestellt werden kann.

Volker Zillmann, 801 Dresden

W 6 ■ 855 Aus einem Papierstreifen von 4 cm Breite soll ein Trapez mit einem Flächeninhalt von 20 cm² herausgeschnitten werden. Eine der parallelen Grundseiten des Trapezes soll 7 cm lang werden. Wie lang muß die zweite parallele Grundseite gewählt werden?

Mathematikfachlehrer Karl-Heinz Gentzsch, Meuselwitz

30	150	30	
	Steffi Sorg, 6316 Stützerbach, Schleusinger Str. 12S Polytechnische Oberschule Stützerbach, Klasse 5		W 5■346
	Prädikat:	10	
	Lösung:		

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h., für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit * versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben *seiner oder einer höheren Klassenstufe* einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Endergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgeben.

Der Jahreswettbewerb 1971/72 läuft von Heft 5/71 bis Heft 2/72. Zwischen dem 1. und 10. September 1972 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/71 bis 2/72 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 5/72 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/71 bis 2/72) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, welche bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1971/72 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen *richtig frankiert* sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

W 6 ■ 856 Von 27 eingesandten Aufgaben im „alpha-Wettbewerb" erhielt der dritte Teil dieser Aufgaben das Prädikat „gut gelöst". Die restlichen Aufgaben teilen sich in $\frac{7}{9}$ „sehr gut gelöster" Aufgaben und zu gleichen Teilen in „gelöste" und „nicht gelöste" Aufgaben. Wieviel nicht gelöste, gelöste, gut gelöste bzw. sehr gut gelöste Aufgaben befanden sich unter den 27 eingesandten Aufgaben? *Gernot Förster, Forst, Kl. 8*

6 857 Bei einem 800-m-Lauf starteten sechs Läufer A, B, C, D, E und F. Vor dem Start wurden von drei Personen drei Tips m, n und p für die voraussichtliche Plazierung der Läufer gegeben.

Tip	1.	2.	3.	4.	5.	6. Platz
m	E	F	C	D	B	A
n	B	A	E	F	C	D
p	B	F	E	D	C	A

Nach Beendigung des Laufes stellte sich heraus, daß vom Tip m genau drei der sechs Angaben, vom Tip n keine der Angaben richtig waren. Auch vom Tip p waren genau drei der sechs Angaben richtig, jedoch keine zwei benachbarten der obigen Tabelle. In welcher Reihenfolge liefen die Läufer durchs Ziel? *Bernd Heymann, Leipzig, Kl. 8*

6 858 Gesucht sind alle durch 8 und 9 teilbaren natürlichen Zahlen, die aus vier aufeinanderfolgenden Ziffern bestehen. (Die Reihenfolge dieser Ziffern ist beliebig.)

H.-Ulrich Frömmer, Neustrelitz, Kl. 7

7 ▲ 859 In einem Internat wohnen insgesamt 41 Schüler, darunter 23 Jungen. Jeder Junge liest regelmäßig entweder die „Junge Welt" oder die „Trommel" zum Stückpreis von 0,15 M bzw. 0,10 M. Die Jungen müssen für jede neu erscheinende Zeitung zusammen 2,70 M zahlen. Jedes der Mädchen liest entweder die Zeitschrift „Frösi" zum Preise von 0,70 M oder „alpha" zum Preise von 0,50 M. Zusammen müssen die Mädchen 0,40 M weniger zahlen als das Vierfache des Betrages, den die Jungen aufbringen. Wieviele dieser vier Zeitungen bzw. Zeitschriften werden regelmäßig bezogen?

Steffen Mai, POS Prießnitz, Kl. 7

7 ▲ 860 Ein gerades dreiseitiges Prisma ist ein Körper, der von zwei in parallelen Ebenen liegenden kongruenten Dreieckflächen (Grund- bzw. Deckfläche) und von Rechteckflächen (Seitenflächen) begrenzt wird. Es sind alle geraden dreiseitigen Prismen zu bestimmen, deren fünf Begrenzungsflächen jeweils gleichen Umfang haben! Es ist ferner das Netz eines solchen geraden dreiseitigen Prismas mit umfangsgleichen Begrenzungsflächen zu zeichnen! *T.*

W 7 ■ 861 Ein Lichtspieltheater verfügt über insgesamt 507 Sitzplätze. Es werden folgende Eintrittspreise erhoben: Parkett: 0,75 M, Sperrsitz: 1,00 M, Loge: 1,25 M.

Sind alle Plätze ausverkauft, so beträgt die Gesamteinnahme 464,25 M. Die Einnahmen aus den Sperrsitz- und Logenplätzen ergeben zusammen 312,00 M. Wieviel Plätze entfallen auf das Parkett, den Sperrsitz und die Logen?

Ingolf Kunath, Meißen, Kl. 10

W 7 ■ 862 Zeichne ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ mit der Seite $\overline{AB}=a$ und ziehe die Diagonalen $\overline{BD}$ und $\overline{AE}$. Wie verhält sich der Flächeninhalt A_1 des Dreiecks AEF zum Flächeninhalt A_2 des Rechtecks $ABDE$?

Wolfgang Huschmann, OS Oelsnitz, Kl. 7b

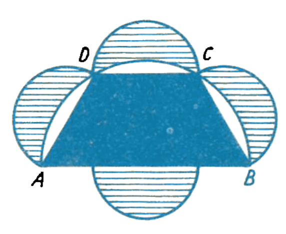
7 863 Herr Müller fragt Herrn Schulz, welche Zahlen er beim Spiel „6 aus 49" getippt habe. Herr Schulz antwortet: „Die Summe der getippten Zahlen lautet 175. Die zweite Zahl ist um 5 größer als die erste, die fünfte um zwei größer als die vierte. Die dritte Zahl ist eine Primzahl, die größer als 20 aber kleiner als 30 ist. Die sechste Zahl ist dreimal so groß wie die erste. Die Summe aus der ersten und zweiten Zahl ist gleich der vierten Zahl." Welche Zahlen hat Herr Schulz getippt?

Uwe Briese, OS Stargard, Kl. 6

7 864 Zeichne einen Winkel $\alpha=88°$ mit seinem Scheitelpunkt S und konstruiere die Halbierungslinie w_α dieses Winkels! Beschreibe um S einen Kreis k_1 mit einem (beliebigen) Radius r_1! Seine Schnittpunkte mit den Schenkeln des Winkels α seien A und B, sein Schnittpunkt mit w_α sei M. Konstruiere nun um M einen Kreis k_2 mit dem Radius $r_2=\overline{AM}=\overline{BM}$, und errichte in B zur Geraden SB die Senkrechte, die den Kreis k_2 in C schneidet! Verbinde schließlich C mit A! Bestimme die Größe des Winkels $\gamma=\sphericalangle ACB$ durch Messung und durch Rechnung!

Mathematikfachlehrer W. Unze, Leipzig

8 ▲ 865 Es ist zu entscheiden, ob der Flächeninhalt des in der beigefügten Abbildung schwarz gefärbten Trapezes $ABCD$ größer, kleiner oder gleich der Summe der Flächeninhalte der drei schraffierten Mondsicheln und des schraffierten Halbkreises ist.



Dabei gilt für die Grundseiten des Trapezes $\overline{AB}=2\,\overline{CD}$ und für die Schenkel $\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{CD}$. Ferner sind die Mondsicheln jeweils durch den Halbkreis über $\overline{AB}$ als Durchmesser und die Halbkreise über den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ begrenzt, während der Durchmesser des Halbkreises unterhalb der Seite $\overline{AB}$ gleich der Seite $\overline{CD}$ ist. Erst schätzen, dann rechnen!

Aus der sowjetischen populärwissenschaftlichen physikalisch-mathematischen Zeitschrift „Quant", 1971, Heft 5

8 ▲ 866 Bei dem ersten internationalen Testflug von Sofia nach Moskau (Entfernung 1900 km) legte das neue sowjetische Überschall-Passagierflugzeug Tu 144 diese Strecke in nur 1 h 11 min zurück. Die Maschine erreichte die Höchstgeschwindigkeit nach 18 min, flog dann mit dieser Höchstgeschwindigkeit weiter und verringerte wieder die Geschwindigkeit 17 min vor der Landung. Wie groß war die Höchstgeschwindigkeit (in km/h) der Tu 144 bei diesem Flug, wenn man annimmt, daß die Geschwindigkeit während der ersten 18 min linear bis zur Höchstgeschwindigkeit zunahm und 17 min vor der Landung wieder linear abnahm? Wir nehmen also an, daß die mittlere Geschwindigkeit während der ersten 18 min und während der letzten 17 min halb so groß wie die Höchstgeschwindigkeit war. (Diese Annahme trifft zwar nur angenähert zu, sie reicht aber aus, um einen Näherungswert für die Höchstgeschwindigkeit zu bestimmen. Dabei vernachlässigen wir auch die Verlängerung des Flugweges, die durch die Steigung des Flugzeuges bis zu einer Höhe von etwa 16000 m entsteht.) *L.*

W 8 ■ 867 Jeder der drei Pioniere Sabine, Elke und Werner spielt mit genau einem der Sportgeräte Ball, Sprungseil und Kreisel. Welches Sportgerät hat Sabine, wenn von den folgenden drei Aussagen genau eine wahr ist?

(1) Sabine hat den Kreisel nicht.
(2) Werner hat den Ball, und Elke hat das Sprungseil.
(3) Wenn Werner den Ball hat, so hat Sabine das Sprungseil. *T.*

W 8 ■ 868 Es sind die Größen der Winkel (im Gradmaß) aller gleichschenkligen Dreiecke anzugeben, die die folgenden Eigenschaften haben:

1. Die Maßzahlen der Größen der Winkel (im Gradmaß) des Dreiecks sind ganzzahlig.
2. Der Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ist n-mal so groß wie die beiden anderen Winkel zusammen, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. *Sch.*

8 869 Ein Radfahrer stellte am Ende einer Fahrt fest, daß der Kilometerzähler seines Fahrrades eine zurückgelegte Entfernung von 50 km anzeigte. Andererseits wußte er, daß sein Kilometerzähler eine zu geringe Entfernung anzeigte, weil er für einen Reifen von 26 Zoll Durchmesser konstruiert war, während sein Fahrrad einen Reifen von 28 Zoll Durchmesser hatte.

Welche Entfernung hat der Radfahrer tatsächlich zurückgelegt?

Schüler Thomas Wolf, Schleiz

8 870 a) Es seien in der Ebene 5 Punkte gegeben, von denen keine drei Punkte auf einer Geraden liegen.
Wieviel verschiedene Dreiecke gibt es, die jeweils drei der gegebenen 5 Punkte als Eckpunkte besitzen?
(Dabei gelten jeweils zwei Dreiecke als verschieden, wenn sie sich in mindestens einem Eckpunkt unterscheiden.)
b) Es seien in der Ebene n Punkte mit $n \geqq 3$ gegeben, von denen keine drei Punkte auf einer Geraden liegen.
Wieviel verschiedene Dreiecke gibt es, die jeweils drei der gegebenen n Punkte als Eckpunkte besitzen? *T.*

9▲871 Die im Bau befindliche sibirische Erdöl-Fernleitung Aleksandrowskoje-Ansherо-Sudshensk wird eine Länge von 850 km haben. Bei diesem Bau werden erstmalig Rohre mit einem äußeren Durchmesser von 1220 mm verlegt. Die Wandstärke der Rohre beträgt 15 mm.
Wieviel Tonnen Stahl werden für diese Fernleitung benötigt, wenn die Dichte des verwendeten Stahls 7,85 gcm^{-3} beträgt? *L.*

W 9 ■ 872 Es sind alle reellen Zahlen anzugeben, für die die folgende Bedingung erfüllt ist:
Die Differenz aus der vierten und zweiten Potenz dieser Zahl ist 72 mal so groß wie die Summe aus der zweiten Potenz der Zahl und der Zahl selbst. *Sch.*

W 9 ■ 873 Ein Quader habe eine Höhe von 12 cm Länge, eine Raumdiagonale von 13 cm Länge und ein Volumen von 144 cm^3. Es sind die Längen der Grundkanten zu berechnen. *G. Schlieper, Berlin*

9 874 Man beweise, daß für alle positiven reellen Zahlen a und b die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$a(a+1)+\frac{b^2}{a} \geqq 2b+a^2. \qquad (1)$$

Welcher Bedingung müssen die reellen Zahlen a und b genügen, damit in (1) das Gleichheitszeichen gilt?
Ingolf Kunath, EOS Meißen, Klasse 11

9 875 Es sei ABC ein Dreieck, dessen Seite $\overline{AC}$ durch den Punkt E im Verhältnis $\overline{AE}:\overline{EC}=p:q$ und dessen Seite $\overline{BC}$ durch den Punkt D im Verhältnis $\overline{BD}:\overline{DC}=r:s$ geteilt ist. Dabei sind p, q, r, s positive reelle Zahlen.
Es ist das Verhältnis zu ermitteln, in dem die Strecke $\overline{AD}$ durch die Gerade BE geteilt wird.
Rüdiger Nützmann, stud. math. Trittelwitz

10▲876 Im Innern eines Kreises mit dem Radius r mögen 17 verschiedene Punkte liegen.
Man beweise, daß es unter diesen 17 Punkten stets zwei Punkte gibt, deren Abstand kleiner als $\frac{2}{3}r$ ist. *Hans-Dietrich Gronau, stud. math. Neustrelitz*

W 10 ■ 877 Es sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x+y+xy=19, \qquad (1)$$
$$y+z+yz=11, \qquad (2)$$
$$z+x+zx=14 \qquad (3)$$

zu ermitteln. *L.*

W 10 ■ 878 Das Volumen eines Kegelstumpfes mit den Grundkreisradien r_1 und r_2, wobei $r_1 \neq r_2$ sei, und der Höhe h wird einmal nach der genauen Formel

$$V=\frac{\pi}{3}h\,(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$$

und einmal nach der Näherungsformel

$$V'=\frac{\pi}{2}h\,(r_1^2+r_2^2) \text{ berechnet.}$$

Es ist zu entscheiden, ob der Näherungswert V' größer oder kleiner als der genaue Wert V ist. *Herwig Gratias, EOS Sömmerda, Kl. 10*

10/12 879 In einem Spielwarengeschäft gibt es vier Sorten bunter Glaskugeln, die zum Verkauf angeboten werden. Eine Kugel von der ersten Sorte wiegt 1g und kostet 4 Pf, der zweiten Sorte 4 g und 9 Pf, der dritten Sorte 8 g und 12 Pf, der vierten Sorte 10 g und 18 Pf.
Es sollen alle Möglichkeiten angegeben werden, die bestehen, um für 10 M genau 100 Kugeln zu kaufen, die zusammen genau 500 g wiegen. *Hans-Dieter Hornschuh, Mathematiklehrer, Kleintobel, Kr. Ravensburg (BRD)*

10/12 880 Man beweise den folgenden Satz:
Es sei $P_1P_2\ldots P_{2n}$ ein Tangentenvieleck mit gerader Eckenzahl ($2n \geqq 4$), d. h., alle Seiten dieses Vielecks sind Tangenten eines Kreises, und die Berührungspunkte $T_1, T_2, \ldots, T_{2n}$ sind sämtlich innere Punkte der Seiten $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{2n}P_1}$. Ferner mögen diese Seiten die Längen $s_1, s_2, \ldots, s_{2n}$ haben. Dann gilt stets

$$s_1+s_3+\ldots+s_{2n-1}=s_2+s_4+\ldots+s_{2n}.$$

Albrecht Böttcher, EOS „Johannes R. Becher“, Annaberg-Buchholz, Kl. 11

Fünf Jahre Mathematische Schülerzeitschrift alpha — fünf Jahre alpha-Wettbewerb

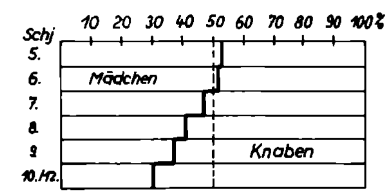
Seit der Gründung der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* (1967) gingen in der Redaktion über

100000 Lösungen

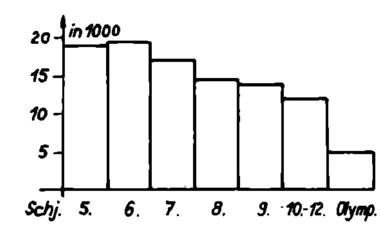
ein, wurden bearbeitet und jeder Teilnehmer erhielt eine Antwort.

In diesem Jahre hat (für den Wettbewerb 1970/71) die Redaktion versandt:
2120 Abzeichen in Silber (dazu Urkunden)
210 Abzeichen in Gold
(für dreijährige Mitarbeit)
45 Abzeichen in Gold
(für vierjährige Mitarbeit).
Die nachfolgenden drei Graphiken sollen dem Leser die Erfolge unserer kontinuierlichen, systematischen außerunterrichtlichen Arbeit zeigen (1967/71):

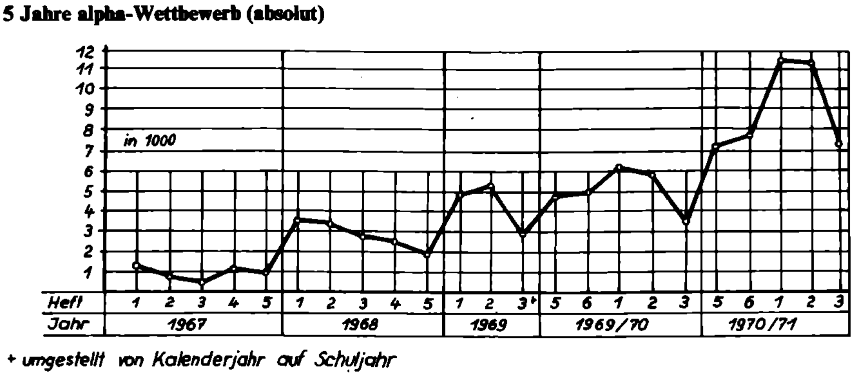
Beteiligung aufgeschlüsselt nach Mädchen und Jungen



Beteiligung — aufgeschlüsselt nach Schuljahren



5 Jahre alpha-Wettbewerb (absolut)



+ umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr

Abzeichen in Gold für dreijährige Teilnahme am alpha-Wettbewerb

Klassenstufe 5: Kirsten Helbig, 1321 Schöneberg (75); **Astrid Rösel,** 205 Teterow (60; aus Klasse 4); **Guido Gerald Blosfeld,** 402 Halle (29); Detlef Poppe, 57 Mühlhausen (22); Heidi Wegener, 1157 Berlin; Gabriele Biebl, 754 Calau;

Klassenstufe 6: Bärbel Anders, 75 Cottbus (43); **Claus Scheffler,** 88 Zittau (26); Ines Greiner, 725 Wurzen (21); Ute Wittat, 9507 Ebersbrunn; Ullrich Bittner, 22 Greifswald; Carsten Schmidt, 1901 Dessow; Thomas Bergunde, 22 Greifswald; Petra Zimmermann, 8036 Dresden; Gerlinde Koch, 6081 Trusetal;

Klassenstufe 7: Reiner Lindemann, 75 Cottbus (81); **Detlef Snaga,** 128 Bernau (55); **Karl-Heinz Hering,** 50 Erfurt (51); Frank Klowe, 128 Bernau (42); Hans-Peter Tams, 2851 Domsuhl (40); Sibylle Rohrbeck, 2302 Franzburg (39); Michael Schnelle, 754 Calau (37); Brigitte Hildebrandt, 6316 Stützerbach (31); Bärbel Rahnefeld, 901 Karl-Marx-Stadt (27); Christoph Schmidt, 821 Freital (26); Andrea Schädlich, 9501 Culitzsch (25); Lothar Jennig, 2031 Gülzowshof (25); Thomas Rudolph, 92 Freiberg (20); Ute Greiner, 725 Wurzen; Birgit Bartels, 2567 Neubukow; Joh.-Ebh. Albrecht, 1281 Lobetal; Matthias Albrecht, 1281 Lobetal; Harald Anders, 8502 Buckau; Sabine Skierlo, 205 Teterow; Sabine Mamerow, 202 Altentreptow; Rüdiger Blach, 754 Calau; Norbert Ziegler, 6051 Heidersbach; Margit Birnbaum, 22 Greifswald; Barbara Wettengel, 992 Oelsnitz; Beate Reiher, 99 Plauen; Eva Clauß, 9501 Culitzsch; Karl-Heinz Schmidt, 3257 Hecklingen; Burkhard Graupmann, 128 Bernau; Helga Herchert, 6427 Lichte; Uwe Löser, 6801 Goßwitz; Christine Röhnert, 8122 Radebeul; Elke Kantiem, 1195 Berlin; Andreas Möckel, 57 Mühlhausen; Ingo Reidat, 57 Mühlhausen; Dietmar Marohn, 53 Weimar; Norbert Kunze, 90 Karl-Marx-Stadt; Margit Gneuß, 8501 Leppersdorf; Helma Walther, 102 Berlin; Dietmar Ihll, 9335 Kurort Seiffen; Günter Dähne, 46 Wittenberg; Angelika Goebel, 7904 Elsterwerda; Judith Seyfahrt, 53 Weimar, Uwe Lehnert, 2034 Tutow; Ulrich König, 6405 Schalkau; Detlef Walz, 755 Lübben; Jürgen Lutz, 6316 Stützerbach; Dietmar Braasch, 2601 Karow; Jutta Storch, 6081 Tambach; Detlef Heymel, 6081 Fambach; Brigitte Linß, 6081 Springstille; Christine Wilhelm, 6081 Springstille; Armin Endter, Frank Jäger, beide 6088 Steinbach-H., Monika Tschirschke, 755 Lübtheen;

Klassenstufe 8: Gernot Förster, 757 Forst (81); **Andreas Schlosser,** 95 Zwickau (79); **Thomas Wolf,** 655 Schleiz (54); Wolfgang Kögler, 9529 Wiesenburg (45); Irene Hanske, 8507 Putzkau (41); Stefan Pfeifer, 74 Altenburg (40); Hans-Ullrich Ihme, 8717 Oppach (36); Andreas Popp, 95 Zwickau (28); Regina Hildenbrandt, 6316 Stützerbach (27); Joachim Krautz, 75 Cottbus (25); Christine Feige, 57 Mühlhausen (24); Christian Hofmann, 7404 Meuselwitz (24); Bernd Heurich, 9402 Bernsbach (24); Uwe Beck, 154 Falkensee (23); Norbert Lüttig, 8501 Lichtenberg (21); Konstanze Zimmer, 8501 Hauswalde (20); Angela Petzold, 115 Berlin-Mahlsdorf (20); Uwe Quasthoff, 7022 Leipzig; Gerald Gebauer, 8501 Frankenthal; Rolf Schubert, 9402 Bernsbach; Frank Leopold, 8514 Pulsnitz; Andreas Buder, 8211 Cunersdorf; Astrid Dabel, 2321 Elmenhorst; Jörg Wehage, 1802 Kirchmöser; Gerhard Schramm, 4731 Voigtstedt; Andree Scheibel, 6051 Heidersbach; Birgit Starke, 703 Leipzig; Jürgen Beator, 1711 Woltersdorf, Manuela Quandt, 1162 Berlin; Andreas Schneider, 8512 Großrohrsdorf; Eberhard Scharf, 5701 Lengenfeld; Ingo Richter, 532 Apolda; Clemens Schlechte, 808 Dresden; Friedegard Ruthenberg, 1291 Blumberg; Irmtraud Albrecht, 111 Berlin; Petra Steinke, 1291 Blumberg; Bernd Bielig, Regine Katzer, Gabriele Granck, Heike Jurack, Martina Hoste, Rainer Schwierz, Carola Wotzsch, Reiner Wagner alle OS Buckau, 8502 Buckau; Thomas Brüderle, 6082 Breitungen; Rainer Möller, 6081 Mittelstille; Roswitha Peter, 6081 Breitenbach; Christian Endter, Manfred Wabe, Andreas Reitzig, alle 6088 Steinbach-H.;

Klassenstufe 9: Hans-Gert Gräbe, 50 Erfurt (56); **Ulf Brüstel,** 7401 Ziegelheim (39); Bernd Hanke, 8708 Großschweidnitz (35); Yvonne Kruber, 835 Stolpen (35); Hanne Heinold, 15 Potsdam (32); Andreas Stern, 22 Greifswald (29); Peter Ullrich, 8213 Bannewitz (28); Reinhard Schuster, 703 Leipzig (25); Uwe Stitz, 801 Dresden (24); Volker Boos, 4601 Dabrun (22); Wolfram Ortweiler, 532 Apolda (21); Gerd Hantsche, 8142 Radeberg; Hubert Janik, 215 Strasburg; Volker Lippoldt, 7022 Leipzig; Peter Linhart, 7305 Waldheim; Peter-Michael Schmidt, 65 Gera; Helmar Bittner, 22 Greifswald; Roland Damm, 759 Spremberg; Reinhard Krüger, 2221 Buddenhagen; Angelika Tollgreve, 2731 Wendorf; Jürgen Koch, 5301 Weimar; Wolfgang Lehmann, 2723 Warin; Martin Ermrich, 3703 Elbingerode; Uta Preußer, 22 Greifswald; Regina Dittrich, 95 Zwickau; Reiner Lindner, 9291 Frankenau; Annegret Boden, 8512 Großröhrsdorf; Christian Engelmann, 9103 Limbach-Oberfrohna; Hans-Jürgen Reinsch, 171 Luckenwalde; Walter Tockhorn, 20 Neubrandenburg; Silvia Boden, 85 Bischofswerda; Uwe Löbus, 801 Dresden; Elke Wolf, 6081 Fambach; Rita Koch, 6081 Trusetal; Lothar Bombel, 1281 Danewitz; Anita Paul (29), 608 Schmalkalden; Gerti Häfner, 6088 Steinbach-H. ohne Angabe der Klassenstufe: Peter Recknagel, Rainer Nothnagel, Annelie Häfner, Eberhard Eff, Bernd Schneeschmidt, Gerlind Endter, Barbara Recknagel, Gerlinde Müller, Harald Recknagel, alle OS Steinbach-Hallenberg (6088); Manuela Terne, 795 Bad Liebenwerda; Georgia Dux, 6087 OS Seligenthal;

Klassenstufe 10/12: Albrecht Böttcher, 9314 Neudorf (36); **Jörg Vogel,** 55 Nordhausen (31); Michael Hoffmann, 238 Barth (30); Knut Taeger, 402 Halle (27); Karl-Heinz Breitmoser, 20 Neubrandenburg (20); Volker Warstat, 323 Oschersleben (20); Andreas Heß, 794 Jessen; Winfried Helwig, 3018 Magdeburg; Stefan Ackermann, 725 Wurzen; Thomas Schwan, 8019 Dresden; Rolf Sommer, 993 Adorf; Ralf Hein, 9611 Remse; Ottmar Langer, 73 Döbeln; Klaus Fiedler, 801 Dresden; Carmen Hauptmann, 8245 Glashütte; Klaus Pohl, 66 Greiz; Wolfgang Herrmann, 9306 Elterlein; Sabine Dittrich, 9402 Bernsbach; Hans-Jürgen Weinberger, 222 Wolgast; Marlies Eberlein, 8231 Niederfrauendorf; Bettina Belitz, 68 Saalfeld; Karl Heym, 6202 Bad Liebenstein; Claus Opitz, 36 Halberstadt; Rüdiger Nützmann, 2031 Trittelwitz; Detlef Hantke, 42 Merseburg; Bernd Ahrens, 301 Magdeburg; Volker Drenk, 2043 Neukalen; Gerhard E. Zinn, 6051 Marisfeld; Marina Schulz, 89 Görlitz; Petra Hoyer, 7027 Leipzig, Ute Reisner, 75 Cottbus.

Abzeichen in Gold für vierjährige Teilnahme am alpha-Wettbewerb

Klassenstufe 6: Annegret Kirsten, 422 Leuna (52); **Eckhard Schadow,** 14 Oranienburg (28);

Klassenstufe 7: Sabine Anders, 75 Cottbus (81); **Kerstin Bachmann,** 402 Halle (54); **Wolfgang Richter,** 83 Pirna (44); Joh.-Chr. Albrecht, 1281 Lobetal (24);

Klassenstufe 8: Bernd Mathiszik, 50 Erfurt (64); **Ralf Lehmann,** 1273 Petershagen (58); **Christoph Scheurer,** 9611 Glauchau-G. (30); Bettina Zabel, 57 Mühlhausen (29); Lutz Puffeld, 1422 Hennigsdorf (25); Gisela Köhler, 926 Hainichen (24); Uwe Lewandowski, 705 Leipzig (23); Hans-Jürgen Förster, 1532 Kleinmachnow (20); Karin Fischer, 8036 Dresden; Elke Schneider, 50 Erfurt; Hans-Georg Meyer, 50 Erfurt; Hans-Jochen Rodner, 3014 Magdeburg; Edda Günther, 6506 Ronneburg; Bernd Heymann, 7027 Leipzig;

Klassenstufe 9: Ehrenfried Zchesch, 86 Bautzen (48); **Herwig Gratias,** 523 Sömmerda (38); **Angela Rohrbeck,** 2302 Franzburg (31); Claus-Detlev Bauermeister, 8019 Dresden; Andreas Meyer, 50 Erfurt; Andreas Eichner, 9271 Falken; Renate Köhler, 66 Greiz-Pohlitz; Monika Seiler, 53 Weimar;

Klassenstufe 10/12: siehe Seite 24.
Die im Druck hervorgehobenen Schüler erhielten Buchprämien.

In freien Stunden alpha heiter

aus: Wochenpost 2/71 (R. Schwalme)

Gute Ratschläge

Man sollte dem h....en, der mit seiner J... eine Lan....se m....!
Wer sich beim Ernte:...atz verspätet, sollte sich ....ge im Waldre.... abschneiden, um ....am zu übern:...en!
Einem W... ....achmann sollte man nie erzählen, dieser Vogel sei ein Vi....raß!

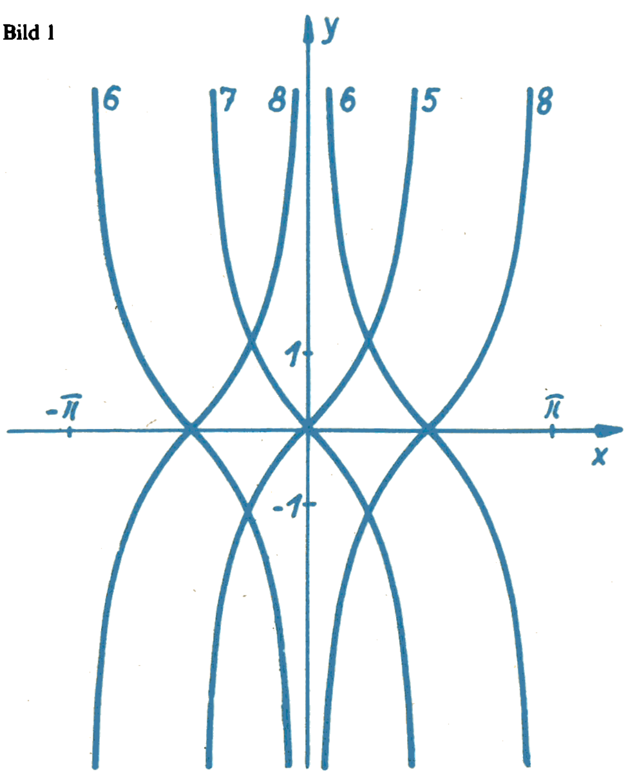
In die leeren Felder sind Zahlwörter einzusetzen, damit die Ratschläge, wenn überhaupt, einen Sinn bekommen.

Oberlehrer H. Pätzold, Volkshochschule Waren/Müritz

Hier funktioniert alles!

Gegeben sind die acht Winkelfunktionen, die auf den beiden Zeichnungen dargestellt sind.
a) Stelle die Funktionsgleichungen für alle acht Funktionen auf!

Bild 1



b) Schreibe jede der Funktionsgleichungen von a) als Sinusfunktionen, wobei für $y = a \cdot \sin(x+c)$ gelte $a > 0$.

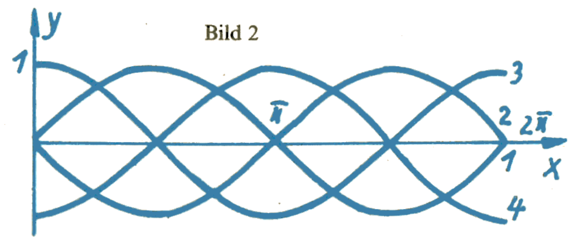


Bild 2

Wolfgang Riedel, Spezialklasse Math. der TH Karl-Marx-Stadt

Mehr als ein Problem!

Johannes Lehmann
Leipzig
Lochmannstr. 4

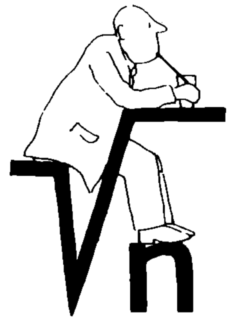
Welchen Beruf übt dieser Herr aus?

Oberlehrer H. Pätzold, Volkshochschule Waren/Müritz

Der Mathematiker und der Löwe

Frage: Wie fängt ein Mathematiker einen Löwen?
Antwort: Zuerst definiert er, was es heißt einen Löwen gefangen zu haben. *Definition:* Wenn der Löwe durch ein Gitter von mir getrennt ist!
Dann setzt sich der Mathematiker einfach in einen Käfig und hat laut Definition den Löwen gefangen.

aus: Churgin „Formeln und was dann?"



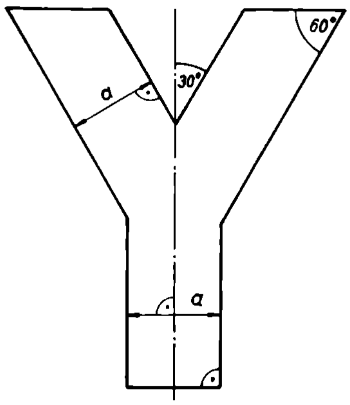
Geschickt aufgebaut

F. Kuritz (Wochenpost 11/71)

Der Buchstabe Ypsilon

Die Fläche des abgebildeten Buchstaben *Y* ist geeignet, in Teilflächen zerlegt zu werden. Diese Teilflächen sind zu einem Rechteck zusammenzulegen!

Mathematikfachlehrer W. Träger, Schloßberg-OS Döbeln



Formel

Wir fanden uns
über mathematische Formeln gebeugt,
mit zerwühlten Haaren,
angeknabbertem Bleistift.

Es war nicht die Zeit
zu tanzen,
kein Kerzenlicht
spann Schatten um uns.

Wir fanden uns
über mathematische Formeln gebeugt
und begannen uns zu lieben.

Petra Heinrich, Teilnehmerin des 1. Zentralen Poetenseminars der FDJ, Schwerin, August 1971

Silbenrätsel

Aus den Silben
al-chen-dert-eck-ei-ein-er-ex-ge-ge-grund-hen-hö-hun li-men-mon-ne-nent-ner-neun-new - o - on - pe-po-ra-re-satz-tern-ti-ton-wei-wert-zwei
sollen Wörter der folgenden Bedeutung gebildet werden:

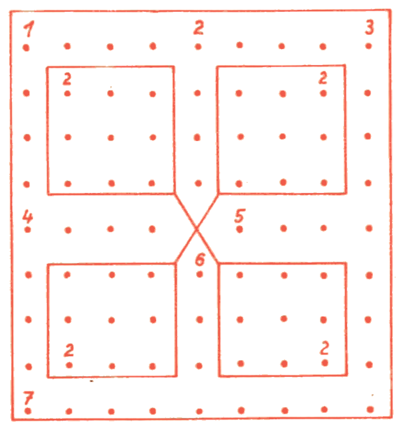
1. französischer Mathematiker (1746 bis 1818), 2. $6 \cdot 17$, 3. englischer Mathematiker und Physiker, Mitbegründer der Differentialrechnung (1643 bis 1727), 4. in der Prozentrechnung benutzte Größe, 5. Menge, die aus genau einem Element besteht, 6. ein spezielles Vieleck, 7. Zeichengerät, 8. Teil einer Potenz, 9. Name eines Lehrsatzes über das rechtwinklige Dreieck, 10. Oberbegriff zu Addition und Division, 11. Multiplizieren des Zählers und des Nenners eines Bruches mit der gleichen Zahl.

Die ersten Buchstaben ergeben, von oben nach unten gelesen, den Namen eines wichtigen Teilgebietes der Mathematik, die vorletzten Buchstaben, in entsprechender Reihenfolge, den Namen seines Begründers.

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, V. L. d. V., Berlin

Magisches Quadrat

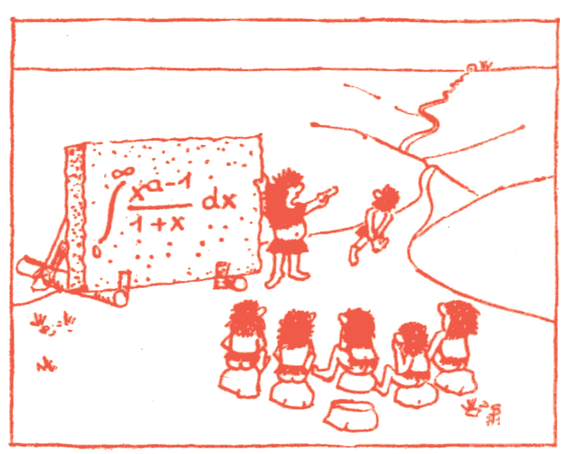
Der richtige Umgang mit 1 waag. ist in der Schule sehr wichtig
4 waag. ist ein altes engl. Längenmaß
5 waag. ist die lat. Bezeichnung für Fläche
7 waag. ist ein Begriff aus einem jungen Teilgebiet der Mathematik, das von einem Hallenser Mathematiker begründet wurde
1 senkr. ist ein wichtiger Begriff der Mathematik, wird mit lim abgekürzt
3 senkr. ist die Vermessungskunde
Die Stereometrie beschäftigt sich mit 6 senkr.



In die mittleren 4 Felder sind die Zahlen 1 bis 9 so einzusetzen, daß die Summen der Spalten und Zeilen stets 15 ergeben.

Mathematikfachlehrer W. Weber, EOS Schkeuditz bei Leipzig

„Marsch in die Ecke! In meiner Stunde gibt es keine Vorsagerei."



aus: DLZ 4/71 (G. Sprengel, Dessau)

Kryptarithmetik

In den folgenden beiden Aufgaben sind jeweils die Sternchen durch eine der Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht. Dabei darf die Ziffer 0 nicht am Anfang einer der Zahlen stehen.

a)	b)
**4·*8*	**4·*8*
***8	***8
5**2	5**2
***8	***8
*1*4**	*8*4**

Lösung:

a) In der Multiplikationsaufgabe (siehe oben) bezeichnen wir den ersten Faktor mit x, den zweiten Faktor mit y und das Produkt in der 5. Zeile mit z.

Dann folgt aus der 3. Zeile

$$5002 \leqq 8x \leqq 5992,$$

$$625\frac{2}{8} \leqq x \leqq 749.$$

Da aber x auf 4 endet, erhalten wir

$$634 \leqq x \leqq 744. \qquad (1)$$

Da an der letzten Stelle in der 2. und 4. Zeile die Ziffer 8 steht und da x auf 4 endet, können die erste und die letzte Ziffer von y nur die Ziffern 2 oder 7 sein. Daher ist y gleich 282, 287, 782 oder 787.

Wir stellen noch fest, daß die zweite Ziffer in der 2. Zeile nur gleich 4, 5 oder 6 sein kann, da sonst in der 5. Zeile an der zweiten Stelle nicht die Ziffer 1 stehen könnte. Jetzt untersuchen wir die einzelnen Fälle.

1. $y=282$

Dann ist wegen (1)

$$1268 \leqq 2x \leqq 1488, \qquad (2)$$

also steht in der 5. Zeile an der ersten Stelle die Ziffer 2. Daher ist z mindestens gleich 210408, und wir erhalten die Ungleichung

$$y=\frac{z}{x}=\frac{210408}{x}.$$

Nun ist aber $x \leqq 744$, also $\frac{1}{x} \geqq \frac{1}{744}$; daraus folgt

$$y \geqq \frac{210408}{744}=282\frac{600}{744}$$

im Widerspruch zu $y=282$, so daß dieser Fall ausscheidet.

2. $y=287$

Wie oben erhalten wir dann $z \geqq 210408$ und

$$x=\frac{z}{y} \geqq \frac{210408}{287}=733\frac{37}{287}.$$

Wegen (1) kann daher x nur gleich 734 oder 744 sein. Wir erhalten für $z=xy$
210658 oder 213528.

In beiden Fällen steht an der 4. Stelle von z nicht die Ziffer 4. Daher scheidet auch dieser Fall aus.

3. $y=782$

Wegen (1) gilt $4438 \leqq 7x \leqq 5208$.

Da an der 2. Stelle von $7x$ nur die Ziffern 4, 5 oder 6 stehen können, folgt

$$4438 \leqq 7x \leqq 4698,$$

also $$634 \leqq x \leqq 671\frac{1}{7}.$$

x kann also nur gleich 634, 644, 654 oder 664 sein.

Wir erhalten für $z=xy$
495788, 503608, 511428 oder 519248.

Nur für $z=511428$ und $x=654$ ist die Bedingung erfüllt, daß an der 4. Stelle von z die Ziffer 4 steht. Wir erhalten daher die Lösung:

654·782
4578
5232
1308
511428

4. $y=787$

Wie oben kann x nur eine der Zahlen 634, 644, 654, 664 sein.

Wir erhalten für z
498958, 506828, 514698 oder 522568.

Da hier in keinem Falle an der 4. Stelle von z die Ziffer 4 steht, erhalten wir keine weitere Lösung. Die gestellte Aufgabe hat also nur die unter Ziffer 3 angegebene Lösung.

J. Lehmann/R. Lüders

(Die Lösung zu Aufgabe b) veröffentlichen wir in Heft 2/72, Red. *alpha*.)

Geometrisches Kreuzworträtsel

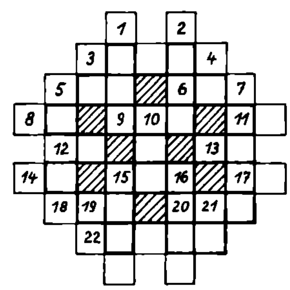
Die entsprechend den Bedingungen bestimmte Zahl schreibt so (horizontal oder vertikal), daß jedes Kästchen eine Ziffer bekommt (Diese Ziffer kann keine Null sein, die links einer Zahl steht), Das Komma in einem Zehnerbruch wird weggelassen. Wenn die Zahl ein Annäherungswert ist, so wird wie gewöhnlich auf — oder abgerundet, und zwar so, daß genausoviel Ziffern wie freie Kästchen zur Verfügung stehen.

«Геометрический» кроссворд

Определив по условию число, нужно записать его (горизонтально или вертикально) так, чтобы в каждой клетке была одна цифра (этой цифрой не может быть нуль, записанный слева от числа). Запятую в десятичной дроби пропускают. Если число приближенное, его округляют по обычным правилам, оставив столько цифр, сколько выделено клеток для записи числа.

По горизонтали:

3. Отношение площади круга к квадрату радиуса.
5. Объем прямоугольного параллелепипеда, у которого площади трех граней соответственно равны 24, 28 и 42.
6. Площадь параллелограмма, у которого между сторонами 17 и 26 заключен угол в 30°.
8. Наименьшая из медиан прямоугольного треугольника, у которого катеты равны 10 и 24.
9. Величина внешнего угла правильного 60-угольника в минутах.
11. Площадь трапеции, у которой основания равны 5 и 19, а углы при меньшем основании по 135°.
12. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами 100 и 150.
13. Периметр ромба, диагонали которого равны 24 и 32.
14. Количество параллелограммов, которые образуются в результате пересечения четырех параллельных прямых тремя параллельными секущими.
15. Площадь прямоугольника, у которого периметр равен 84, а длина больше ширины на 4.
17. Число диагоналей выпуклого 15-угольника.
18. Площадь ромба, у которого периметр 144, а угол равен 150°.
20. Объем куба, у которого объем в куб. м и площадь поверхности в кв. м выражаются одним числом.
22. Сумма углов треугольника в минутах.



По вертикали:

1. Расстояние между двумя концентрическими окружностями, длины которых отличаются на 20.
2. Периметр правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 520.
3. Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна 12.

(Die Fortsetzung und den deutschen Text zu diesem aus der sowjetischen Schülerzeitschrift *Quandt* (5/70) entnommenen Rätsel findet der Leser auf Seite 24).

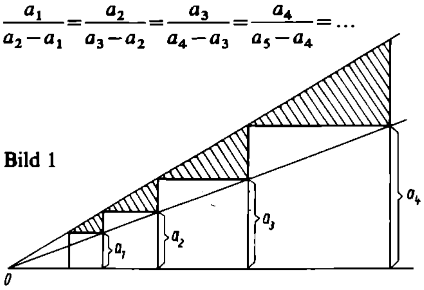
Lösungen

Lösungen der Aufgaben zum Beitrag „Albrecht Dürer“ (alpha 4/71 S. 80)

1 In der Figur 1 sind die schraffierten Dreiecke ähnlich und ähnlich gelegen. Ein Dreieck läßt sich in das andere durch zentrische Streckung oder Stauchung mit O als Zentrum überführen. Für die Katheten der Dreiecke gelten daher die folgenden Proportionen:

$$\frac{a_1}{a_2-a_1}=\frac{a_2}{a_3-a_2}=\frac{a_3}{a_4-a_3}=\frac{a_4}{a_5-a_4}=\ldots$$

Bild 1



Nach Anwendung der Sätze über korrespondierende Addition und Subtraktion in Proportionen erhält man:

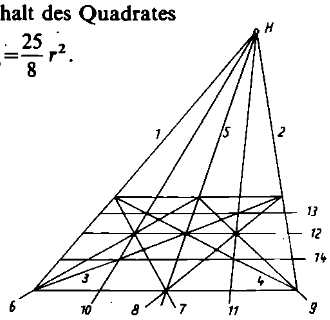
$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}=\frac{a_4}{a_5}=\ldots$$

Damit ist gezeigt, daß die Folge der Seiten der dargestellten Quadrate eine geometrische Folge bildet.

2 Bezeichnet man mit r den Radius des Kreises in der Aufgabenstellung, so ist die Länge d einer Diagonalen des zugeordneten Quadrates gleich $\frac{5}{2}r$. Daraus folgt für die Länge der Quadratseite $s=\frac{5\sqrt{2}}{4}r$. Somit ist der Inhalt des Quadrates

$$A_q=\frac{25}{8}r^2.$$

Bild 2



Da für den Kreisinhalt $A_k=\pi r^2$ gilt, wird mittels der vorgelegten Konstruktion die transzendente Zahl π durch den Bruch $\frac{25}{8}$ approximiert.

3 Bild 2 zeigt durch die den Geraden beigefügten Zahlen, in welcher Reihenfolge konstruktiv vorzugehen ist, um das zentralperspektive Bild des Schachbrettes schrittweise zu vervollständigen. Zentralperspektives Bild des Schachfeldes in Figur 3.

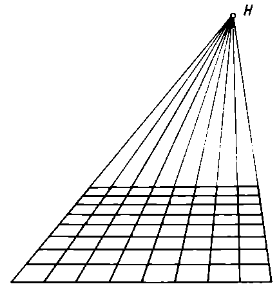


Bild 3

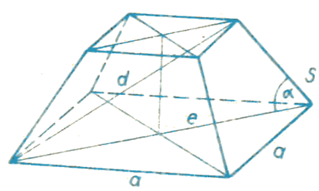
W 10/12 ■ 753 Zunächst liegt es nahe, das Volumen der beiden Pyramiden so zu berechnen, daß man den Flächeninhalt der Grundfläche BED der Pyramide $ABED$ ermittelt sowie die Länge der zugehörigen Höhe. Diese Rechnung ist aber sehr umständlich. Man kommt auf die folgende Weise schneller zum Ziel:

Man wählt als Grundfläche der Pyramide $ABED$ das rechtwinklige Dreieck ABD, dessen Flächeninhalt $\frac{a^2}{2}$ beträgt; dann ist die Länge der zugehörigen Höhe $\overline{AE}=a$. Das Volumen dieser Pyramide beträgt daher

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3}{2}=\frac{a^3}{6}.$$

Ebenso groß ist auch das Volumen der Pyramide $GCFH$. Man erhält daher das gesuchte Volumen des Restkörpers, da das Volumen des Würfels a^3 beträgt,

$$V=a^3-2\cdot\frac{a^3}{6}=\frac{2}{3}a^3.$$



*10/12*754 Für alle reellen x gilt

$$\begin{aligned} f[\![g[h(x)]]\!] &= f[g(x+1)]\\ &= f[3(x+1)-5]=f(3x-2)\\ &= (3x-2)^2+3x-2+1\\ &= 9x^2-9x+3 \quad\text{und} && (6)\\ f(2x) &= 4x^2+2x+1. && (7)\end{aligned}$$

Wegen (6) und (7) ist daher die Gleichung (4) für eine reelle Zahl x genau dann erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} 9x^2-9x+3&=4x^2+2x+1,\\ 5x^2-11x+2&=0,\\ x^2-\frac{11}{5}x+\frac{2}{5}&=0. && (8)\end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1=2$ und $x_2=\frac{1}{5}$, d. h. die Gleichung (4) ist nur dann erfüllt, wenn $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{5}$.

Andererseits gilt wegen $x_1=2$
$h(x_1)=3$, $g[h(x_1)]=g(3)=4$
und wegen $x_2=\frac{1}{5}$

$$h(x_2)=\frac{6}{5},\quad g[h(x_2)]=g\left(\frac{6}{5}\right)=-\frac{7}{5}.$$

Daraus folgt

$$[\![g[h(x_1)]+h(x_1)+x_1]\!]\,[\![g[h(x_2)]+h(x_2)+x_2]\!]$$
$$=(4+3+2)\left(-\frac{7}{5}+\frac{6}{5}+\frac{1}{5}\right)=9\cdot 0=0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

*10/12*755 1. Da es 10 Möglichkeiten für die Wahl des Koeffizienten a und jeweils je 10 Möglichkeiten für die Wahl von b, c und d gibt, existieren insgesamt
$10^4=10000$ verschiedene Gleichungssysteme der obigen Art.

2. Ist nun (x, y) eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2), so gilt

$$\begin{aligned} ax+b&=cx+d,\quad\text{also}\\ x(a-c)&=d-b. && (3)\end{aligned}$$

Fall a): Es sei $a-c\neq 0$; dann hat das Gleichungssystem genau eine Lösung, nämlich

$$x=\frac{d-b}{a-c}\quad\text{und}\quad y=a\frac{d-b}{a-c}+b=\frac{ad-bc}{a-c}.$$

In diesem Fall haben wir für die Wahl von a genau 10 Möglichkeiten. Dann haben wir aber für die Wahl von c wegen $c\neq a$ nur noch 9 Möglichkeiten. Ferner können wir noch b und d beliebig wählen (je 10 Möglichkeiten.)

Wir erhalten also insgesamt $10\cdot 9\cdot 10\cdot 10=9000$ verschiedene Gleichungssysteme, die genau eine reelle Lösung haben.

Fall b): Es sei $a-c=0$ und $d-b\neq 0$, also $a=c$ und $b\neq d$. Dann hat die Gleichung (3) und damit auch das gegebene Gleichungssystem keine reelle Lösung.

In diesem Fall haben wir für die Wahl von a genau 10 Möglichkeiten; dann ist c eindeutig bestimmt. Für die Wahl von b haben wir dann noch 10 Möglichkeiten und wegen $d\neq b$ nur noch 9 Möglichkeiten für die Wahl von d.

Wir erhalten also insgesamt $10\cdot 1\cdot 10\cdot 9=900$ verschiedene Gleichungssysteme, die keine Lösung haben.

Fall c): Es sei $a-c=0$ und $d-b=0$, also $a=c$ und $b=d$. Dann hat die Gleichung (3) und damit auch das gegebene Gleichungssystem unendlich viele reelle Lösungen; das Gleichungssystem ist nämlich für alle reellen x und alle y mit $y=ax+b$ erfüllt.

In diesem Fall haben wir für die Wahl von a genau 10 Möglichkeiten; dann ist c eindeutig bestimmt. Weiter haben wir für die Wahl von b noch 10 Möglichkeiten; dann ist auch d eindeutig bestimmt.

Wir erhalten also insgesamt $10\cdot 10=100$ verschiedene Gleichungssysteme, die unendlich viele Lösungen haben.

Zusammenfassung: Die Anzahl der Gleichungssysteme der obigen Art mit

a) genau einer reellen Lösung beträgt also 9000, d. s. 90 %,
b) keiner reellen Lösung beträgt 900, d. s. 9 %
c) unendlich vielen reellen Lösungen beträgt 100, d. s. 1 %.

Wir erkennen, daß die Gleichungssysteme mit genau einer Lösung weitaus häufiger vorkommen (90 % der Fälle) als die Gleichungssysteme mit keiner oder unendlich vielen Lösungen.

*10/12*756 Da in der angeführten Gleichung die Winkel α, 2α und 3α vorkommen und da $0° \leqq \alpha < 30°$ gilt, liegt es nahe, das Additionstheorem für die Tangensfunktion anzuwenden, das wir in dem Tafelwerk, 7.—12. Klasse, auf S. 61, Zeile 5 v. u. finden.
Es gilt nämlich für alle Winkel α mit $0° \leqq \alpha < 30°$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha \cdot \tan\alpha}. \quad (1)$$

Dabei ist der Nenner auf der rechten Seite dieser Gleichung für alle Winkel mit $0° \leqq \alpha < 30°$ von Null verschieden; denn es gilt für diese Winkel $\tan\alpha < \frac{1}{3}\sqrt{3}$,
$\tan 2\alpha < \sqrt{3}$, also $\tan 2\alpha \cdot \tan\alpha < 1$.
Wir können daher auf beiden Seiten der Gleichung (1) mit $1 - \tan 2\alpha \cdot \tan\alpha$ multiplizieren und erhalten $\tan 3\alpha - \tan 3\alpha \cdot \tan 2\alpha \cdot \tan\alpha = \tan 2\alpha + \tan\alpha$. Daraus folgt
$\tan\alpha \cdot \tan 2\alpha \cdot \tan 3\alpha = \tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan\alpha$,
womit die Behauptung bewiesen ist.

*10/12*757 Wir untersuchen die folgenden $n+1$ natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ a_2 &= 22, \\ a_3 &= 222, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n+1} &= \underbrace{222\dots2}_{n+1 \text{ Grundziffern}} \end{aligned}$$

Diese $n+1$ natürlichen Zahlen können bei der Division durch n nur die Reste 0, 1, 2, ..., $n-1$ lassen. Es sind also höchstens n verschiedene Reste möglich. Daher gibt es unter diesen $n+1$ verschiedenen Zahlen mindestens zwei Zahlen, die den gleichen Rest bei der Division durch n lassen. Die Differenz dieser beiden Zahlen ist daher durch n teilbar und hat die Form

$$z = 222\dots2000\dots0,$$

womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.
Bemerkung: Zum Beweis haben wir ein interessantes mathematisches Prinzip angewandt, nämlich das sog. „Schubfachprinzip von Dirichlet" (benannt nach dem deutschen Mathematiker *Peter Gustav Lejeune-Dirichlet*, 1805 bis 1859): Wenn man $n+1$ Gegenstände auf n Schubfächer verteilt, so befinden sich mindestens zwei dieser Gegenstände in einem Schubfach. Wenn also $n+1$ natürliche Zahlen bei der Division durch n höchstens n verschiedene Reste lassen, so gibt es mindestens zwei dieser Zahlen, die den gleichen Rest bei der Division durch n lassen.

Lösungen zu: Mathematische Kurzweil aus der VR Bulgarien (Heft 6/71):

Klassentreffen

Angenommen, es waren n Personen anwesend; jede dieser n Personen überreichte an $(n-1)$ Personen je ein Foto. Es wurden insgesamt $n(n-1)$ Fotos ausgetauscht; daher gilt $n(n-1) = 552$, wobei n eine natürliche Zahl ist.
Wegen $n^2 > 552$, also $n \geqq 24$ und wegen $(n-1)^2 < 552$, also $n-1 \leqq 23$ und damit $n \leqq 24$ gilt $n = 24$. Es waren 24 Personen anwesend.
Probe: $24 \cdot 23 = 552$.

Tischrunde

Da keiner der beiden Brüder Peter heißt, lauten ihre Vornamen Walter und Bernd. Herr Stein heißt dann entweder Walter oder Peter. Da Herr Ismer aber Wein, Peter hingegen Bier trank, muß Herr Stein mit Vornamen Peter und Herr Ismer folglich Walter heißen. Da Peter Stein Bier, Walter Ismer Wein und Bernd Neumann Kaffee trank, hat Walter Neumann Tee getrunken.

Auf einer Bank

Es seien A, B, C und D die vier Bankplätze in dieser Reihenfolge. Da Wilma und Ingo nicht am Rande der Bank saßen, könnten sie zwei unterschiedliche Sitzordnungen gehabt haben.
1. Fall: Wilma saß auf Platz B, Ingo auf Platz C. Da rechts von Ingo das Kind mit dem Familiennamen Starke saß und dies der Familienname eines der beiden Mädchen ist, müßte Lena Starke auf Platz D gesessen haben. Folglich trägt Wilma den Familiennamen Weiß. Peter hat in diesem Fall auf Platz A gesessen. Da aber die Schüler mit dem Familiennamen Sander und Weiß nicht nebeneinander saßen, kann weder Peter noch Ingo den Familiennamen Sander haben. Das steht im Widerspruch zum Aufgabentext. Folglich scheidet dieser Fall aus.
2. Fall: Wilma saß auf Platz C, Ingo auf Platz B. Dann hat Wilma den Familiennamen Starke, da sie rechts von Ingo sitzt. Da die Mädchen nicht nebeneinander saßen, nahm Lena Weiß Platz A ein. Da die Kinder mit den Familiennamen Sander und Weiß nicht nebeneinander saßen, nahm Peter Sander Platz D ein.

Platz *A*	Platz *B*	Platz *C*	Platz *D*
Lena	Ingo	Wilma	Peter
Weiß	Hauff	Starke	Sander

Wettlauf der Igel

Die Geschwindigkeit des zweiten Igels sei $x \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Zum Zurücklegen von 100 cm Weglänge auf dem Rücken der ersten Schildkröte benötigt der Igel die Zeit $\frac{100}{x}$ s. In dieser Zeit legt die erste Schildkröte den Weg von $\frac{600}{x}$ cm zurück, und zwar in der Gegenrichtung zum Igel.
Zum Zurücklegen von 50 cm Weglänge auf dem Rücken der zweiten Schildkröte benötigt der Igel die Zeit $\frac{50}{x}$ s. In dieser Zeit legt die zweite Schildkröte den Weg von $\frac{900}{x}$ cm zurück, und zwar in der Laufrichtung des Igels. Aus $\frac{900}{x}$ cm $-$ $\frac{600}{x}$ cm $=$ $\frac{300}{x}$ cm folgt, daß der zweite Igel $\frac{300}{x}$ cm Weglänge einspart. Der Igel, der keine Hindernisse zu überwinden hatte, lief demnach schneller.

Lösungen zu: Aufgepaßt — nachgedacht — mitgemacht (Heft 6/71)

▲1▲ Udo behält 1 Pf, 2 Pf, 3 Pf oder 4 Pf übrig. Aus $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ und $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ folgt, daß Udo 8 Pf oder 16 Pf oder 24 Pf oder 32 Pf bei sich gehabt haben könnte.
▲2▲ Angenommen, Klaus erhalte wöchentlich n Mark Taschengeld; dann spart er in jeder Woche $\frac{1}{2}n$ Mark. Nach acht Wochen hat er $4n$ Mark gespart. Folglich gilt $11 < 4 \cdot n < 17$. Nur $n = 3$ oder $n = 4$ genügen dieser Ungleichung. Klaus erhält entweder 3 M oder 4 M Taschengeld.
▲3▲ Die Aussage „Klaus ist nicht so groß wie Bernd" läßt sich durch die Aussage „Klaus ist kleiner als Bernd" ersetzen. Da Bernd kleiner als Uwe ist, gilt folgende Beziehung: Klaus ist der Kleinste, ihm folgen mit zunehmender Größe zunächst Bernd, danach Uwe.
Die Aussage „Uwe ist größer als Klaus" wird nicht benötigt.
▲4▲ Wir fertigen folgende Tabelle an:

n	$4 \cdot n$	$4 \cdot n - 2$
1	4	2
2	8	6
3	12	10
4	16	14

Nur $n = 3$ genügt der Ungleichung.
▲5▲ Aus $3 \cdot 3 = 9 < 11$ und $3 \cdot 4 = 12 > 11$ folgt, daß die erste Ungleichung für $x = 4, 5, 6, 7, \dots$ erfüllt wird.
Aus $7 \cdot 6 = 42 > 40$ und $7 \cdot 5 = 35 < 40$ folgt, daß die zweite Ungleichung für $x = 5, 4, 3, 2, 1, 0$ erfüllt wird.
Beide Ungleichungen werden demnach nur durch die Zahlen 4 oder 5 erfüllt.
▲6▲ Nach Peters Aussage läßt sich folgende Tabelle aufstellen:

Anzahl der

Brüder	Schwestern	Jungen	Mädchen
1	1	2	1
2	2	3	2
3	3	4	3
4	4	5	4

Nach Marions Aussage läßt sich folgende Tabelle aufstellen: *Anzahl* der

Brüder	Schwestern	Jungen	Mädchen
2	1	2	2
4	2	4	3
6	3	6	4
8	4	8	5

Durch Vergleich beider Tabellen stellen wir fest, daß zur Familie vier Jungen und drei Mädchen gehören.

▲7▲ *Anzahl der*

grünen	gelben	roten	blauen	insges.
Buntstifte				
1	2	2	5	10
1	3	3	4	$11>10$
1	2	2	9	14
1	3	3	7	14
1	4	4	5	14
2	3	3	6	14
2	4	4	5	$15>14$

▲8▲ Es seien a_1 und a_2 die Seitenlängen der Quadrate und A_1 und A_2 die zugehörigen Flächeninhalte; dann läßt sich folgende Tabelle aufstellen:

a_1	a_2	A_1	A_2	A_2-A_1
1	2	1	4	3
2	3	4	9	5
3	4	9	16	7
4	5	16	25	9
5	6	25	36	11

Der Tabelle ist zu entnehmen, daß das kleinere Quadrat eine Seitenlänge von 4 cm, das größere von 5 cm besitzt.

5▲775 Für die Variablen $a, b, c, \ldots, i, j$ dürfen nur die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 9, 10$ eingesetzt werden; aus $e+e=f$ und $f+f=g$ und $g+g=j$ folgt deshalb $e=1$ und damit $f=2$, $g=4$ und $j=8$. Denn für $e\geqq 2$ wird $j\geqq 16$, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht.

Aus (3) folgt $1+2=a$, also $a=3$.

Aus (1) folgt $3+3=b$, also $b=6$.

Nur die Zahlen 5, 7, 9 und 10 sind noch nicht vergeben.

Aus (7) folgt $h=5$ und damit $c=10$. Denn für $h>5$ wird $c>10$, was den Bedingungen widerspricht.

Aus (4) folgt $4+5=d$, also $d=9$.

Aus (5) folgt $i-2=5$, also $i=7$.

Wir überzeugen uns noch davon, daß unter diesen Voraussetzungen auch die Gleichung (2) erfüllt ist; denn es gilt $10-9=1$. Für $a=3$, $b=6$, $c=10$, ..., $j=8$ sind also alle gegebenen Gleichungen erfüllt.

W 5 ■ 776 Aus b) folgt: Adelheid und Sonja wohnen nicht in Görlitz. Aus c) folgt: Carola und Renate wohnen nicht in Görlitz. Folglich ist Görlitz der Wohnort von Helga.

Aus a) folgt: Carola wohnt weder in Jena noch in Merseburg.

Aus d) folgt: Carola wohnt nicht in Berlin. Folglich wohnt Carola in Rostock, da Görlitz der Wohnort von Helga ist.

Aus a) folgt: Sonja wohnt weder in Jena noch in Merseburg. Da Sonja auch nicht in Görlitz (Helga) oder Rostock (Carola) wohnen kann, ist ihr Heimatort Berlin.

Aus e) folgt: Adelheid wohnt nicht in Merseburg. Folglich wohnt Adelheid in Jena und Renate in Merseburg.

W 5 ■ 777 Wegen $1000:50=20$ enthält jede Tüte 20 Bonbon.

Aus $80:20=4$ folgt, daß ein Bonbon 4 Pf kostet.

Aus $500:4=125$ folgt, daß auf 1 kg genau 125 Bonbon kommen.

Aus $1000:125=8$ folgt, daß ein Bonbon 8 g wiegt.

*5*778 Auf Grund der vorgegebenen Quersummen könnte der erste Summand 514 oder 523 oder 532 oder 541 und der zweite Summand 122 oder 221 sein. Nun sind folgende Kombinationen möglich:

a)	b)	c)	d)
514	523	532	541
+122	+122	+122	+122
+ *6*	+ *6*	+ *6*	+ *6*
1000	1000	1000	1000

e)	f)	g)	h)
514	523	532	541
+221	+221	+221	+221
+ *6*	+ *6*	+ *6*	+ *6*
1000	1000	1000	1000

Da die Addition der Einer in jeder Aufgabe gleich 10 ist, muß in jedem Fall ein Zehner übertragen werden. In den Aufgaben b), c), d), f), g), h) ist die Summe der Zehner dann aber stets größer als 100 und kleiner als 200, was der Voraussetzung widerspricht.

Es gibt demnach genau zwei Lösungen:

a)	e)
514	514
+122	+221
+364	+265
1000	1000

*5*779 a) Vorrundenspiele

In jeder der sechs Gruppen sind $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ Spiele auszutragen. Insgesamt sind also $6\cdot 15=90$ Spiele durchzuführen. Dafür stehen sechs Tischtennisplatten zur Verfügung; an jeder Platte werden demnach $90:6=15$ Spiele ausgetragen. Dazu wird eine Zeit von $15\cdot 15$ Minuten, also 225 Minuten benötigt. Es schließt sich eine Pause von 60 Minuten an.

b) Zwischenrundenspiele

In jeder der zwei Gruppen sind $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ Spiele auszutragen. Insgesamt sind also $2\cdot 15=30$ Spiele durchzuführen. An jeder der sechs Platten werden demnach $30:6=5$ Spiele ausgetragen. Die Spielzeit beträgt also $5\cdot 15$ Minuten $=75$ Minuten. Es schließt sich eine Pause von 15 Minuten an.

c) Endrundenspiele

Da genau vier Spieler in die Endrunde kommen, kann nur an zwei Platten gespielt werden. Es sind $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ Spiele, an jeder der beiden Platten also drei Spiele auszutragen, wofür voraussichtlich 45 Minuten benötigt werden.

Aus $225+60+75+15+45$ Minuten $=420$ Minuten $=7$ Stunden folgt, daß die Sporthalle von 8.30 Uhr bis 15.30 Uhr besetzt sein wird.

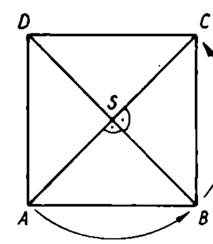
6▲780 Von jedem der n Eckpunkte eines n-*Ecks* lassen sich $n-3$ Diagonalen ziehen, das sind $n(n-3)$ Diagonalen. Dabei wurde jede Diagonale doppelt gezählt. Ein n-Eck besitzt demnach $\frac{1}{2}n(n-3)$ Diagonalen. Nun soll gelten $2n=\frac{1}{2}n(n-3)$. Durch Umformung erhalten wir

$$4n=n(n-3),$$
$$4=n-3, \quad (\text{da } n\neq 0)$$
$$n=7.$$

Ein konvexes Siebeneck besitzt genau 14 Diagonalen.

W 6 ■ 781 Da die Dreiecke $\triangle ADE$ und $\triangle DBC$ in zwei Winkeln ($\sphericalangle EAD=\sphericalangle DBC=\alpha$ und $\sphericalangle ADE=\sphericalangle BDC=\beta$) übereinstimmen, müssen sie auch in ihrem dritten Winkel übereinstimmen, und es gilt demnach $\sphericalangle AED=\sphericalangle DCB$ bzw. $\varepsilon=\delta=80°$. Für den gestreckten Winkel $\sphericalangle ACP$ gilt ferner $2\gamma+\delta=180°$, also $2\gamma+80°=180°$ und damit $\gamma=50°$. Für den Außenwinkel $\sphericalangle PCB$ des Dreiecks ABC gilt $\gamma=2\alpha$, also $2\alpha=50°$ und damit $\alpha=25°$. Für die Summe der Winkelgrößen des Dreiecks ADE gilt $\alpha+\beta+\varepsilon=180°$, also $25°+\beta+80°=180°$ und damit $\beta=75°$.

W 6 ■ 782 Es sei $ABCD$ ein Rechteck, in dem die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ aufeinander senkrecht stehen und sich im Punkte S schneiden.



Dann gilt $\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}=\overline{SD}$ und $\sphericalangle ASB=\sphericalangle BSC=\sphericalangle CSD=\sphericalangle DSA=90°$. Drehen wir das Rechteck $ABCD$ um S als Drehzentrum im positiven Sinne um einen Drehwinkel von 90°, so wird deshalb A auf B, B auf C, C auf D und D auf A abgebildet. Damit wird aber zugleich auch $\overline{AB}$ auf $\overline{BC}$, $\overline{BC}$ auf $\overline{CD}$, $\overline{CD}$ auf $\overline{DA}$ und $\overline{DA}$ auf $\overline{AB}$ abgebildet. Folglich gilt $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$, und das Rechteck $ABCD$ ist somit ein Quadrat.

*6*783 Aus $\frac{4a+7}{4b}=\frac{3}{4}$ folgt $3b=4a+7$ $=3a+6+a+1$ bzw. $b=a+2+\frac{a+1}{3}$. Nur wenn $a+1$ durch 3 teilbar ist, wird b ganzzahlig. Die folgende Tabelle enthält die möglichen Belegungen für a.

Die Brüche $\frac{2}{5}, \frac{5}{9}, \frac{8}{13}$ und $\frac{11}{17}$ genügen den gestellten Bedingungen.

a	b
2	5
5	9
8	13
11	17

Abzeichen in Gold für vierjährige Teilnahme am alpha-Wettbewerb

Klassenstufe 10/12: Jürgen Zabel, 57 Mühlhausen (38); **Heinz Marbes,** 128 Bernau (30); **Jürgen Dubslaff,** 50 Erfurt (29); Hans-Joachim Karl, 409 Halle-Neustadt (24); Johannes Blümlein, 6112 Heldburg (22); Harald Herrmann, 9301 Hammer-Unterwiesenthal (21); Ilona Boenigk, 402 Halle (21); Christian Philipp, 8506 Ohorn; Thomas Kuhn, 5812 Waltershausen; Elke Hauptmann, 801 Dresden; Gernot Spiewok, 22 Greifswald, Sigrid Straßburger, 606 Zella-Mehlis; Karin Krüger, 453 Roßlau; Jörg Lehnert, 2034 Tutow; Ingrid Preiß, 929 Rochlitz; Rainer Wilde, 1953 Fehrbellin; Frank Kretschmar, 7043 Leipzig; Peter Mohr, 87 Löbau; Annerose Lehmann, 7027 Leipzig, Renate Zimmermann, 8036 Dresden.

Fortsetzung zu Geometrisches Kreuzworträtsel (Seite 20)

4. Градусная величина угла между диагоналями трапеции, основания которой стягивают дуги окружности в 97° и 139°.
5. Объем треугольной пирамиды, у которой боковые ребра взаимно перпендикулярны и равняются 37, 42, 54.
7. Площадь треугольника, у которого угол между сторонами 312 и 232 равен 30°.
10. Объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого выражаются последовательными нечетными числами.
15. Площадь ромба с углом в 30°, описанного около окружности радиуса 24,5.
16. Сумма внутренних углов выпуклого 42-угольника (в градусах).
19. Диагональ прямоугольника, у которого длина равна 40, а ширина на 31 меньше.
21. Площадь прямоугольной трапеции, у которой основания равны 4 и 6, а один из углов 45°.

Horizontal

3. Verhältnis der Fläche des Kreises zum Quadrat seines Radius. 5. Inhalt des rechteckigen Parallelepipeds mit den Seitenflächen $a=24$, $b=28$ und $c=42$ (Flächeneinheiten). 6. Fläche des Parallelogramms mit den Seitenlängen $a=17$ und $b=26$ und einem von ihnen eingeschlossenen Winkel $\alpha=30°$. 8. Kleinste Seitenhalbierende des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $a=10$ und $b=24$. 9. Größe des Außenwinkels eines gleichseitigen Dreiecks in Minuten. 11. Fläche des Trapezes mit den Grundlinien $a=15$ und $b=19$ und mit gleichen Winkeln $\alpha=135°$ bei der Grundlinie a. 12. Radius des Kreises, der dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $a=100$ und $b=150$ umbeschrieben ist. 13. Umfang des Rhombus mit den Diagonalen $a=24$ und $b=32$. 14. Anzahl der Parallelogramme, die man erhält, wenn vier parallele Geraden durch drei parallele Geraden geschnitten werden. 15. Fläche des Rechtecks mit dem Umfang $u=84$ und den Seiten a und $b=4+a$. 17. Anzahl der Diagonalen eines konvexen 15-Ecks. 18. Fläche des Rhombus mit dem Umfang $u=144$ und dem Winkel $\alpha=150°$. 20. Inhalt des Würfels, dessen Inhalt (in m^3) gleich seiner Oberfläche (in m^2) ist. 22. Winkelsumme eines Dreiecks in Minuten.

Vertikal

1. Abstand zwischen zwei konzentrischen Kreisen, deren Umfänge sich um 20 unterscheiden. 2. Umfang des regelmäßigen Sechsecks, das einem Kreis mit dem Radius $r=520$ einbeschrieben ist. 3. Fläche des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypothenuse $c=12$. 4. Winkel (in Grad) zwischen den Diagonalen eines Trapezes, dessen durch die Grundlinien bestimmten Zentriwinkel des umbeschriebenen Kreises 97° und 139° betragen. 5. Inhalt der dreiseitigen Pyramide mit paarweise senkrechten Seitenflächen $a=37$, $b=42$ und $c=54$. 7. Fläche des Dreiecks mit den Seiten $a=312$, $b=232$ und dem Winkel $\alpha=30°$ zwischen ihnen. 10. Inhalt eines rechtwinkligen Parallepipeds, dessen Dimensionen aufeinanderfolgende ungerade Zahlen sind. 15. Fläche des Rhombus mit dem Winkel $\alpha=30°$, das einem Kreis mit dem Radius $r=24{,}5$ umbeschrieben ist. 16. Summe der inneren Winkel (in Grad) eines konvexen 42-Ecks. 19. Diagonale des Rechtecks mit den Seiten $a=40$ und $b=a-31$. 21. Fläche des rechtwinkligen Trapezes mit den Grundlinien $a=6$ und $b=4$ und einem Winkel $\alpha=45°$.

Lösung: horizontal: 3) 31416; 6) 221; 8) 13; 9) 360; 11) 84; 12) 90; 13) 80; 14) 18; 15) 437; 17) 90; 18) 648.
vertikal: 1) 3183; 2)3120; 3)36; 4) 62; 5) 13986; 7) 18096; 10) 693; 15) 4802; 16) 7200; 19) 41; 21) 10.

Lösungen zu alpha - heiter

Gute Ratschläge

Zahlwörter: elf, acht, drei, acht, eins, zwei, vier, eins, acht, acht, elf, elf

Hier funktioniert alles!

a) $f(x)=\sin x$, $f(x)=-\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=-\cos x$, $f(x)=\tan x$, $f(x)=\cot x$, $f(x)=-\tan x$, $f(x)=-\cot x$
b) $f(x)=\sin x$, $f(x)=\sin(x+\pi)$, $f(x)=\sin x+\frac{\pi}{2}$

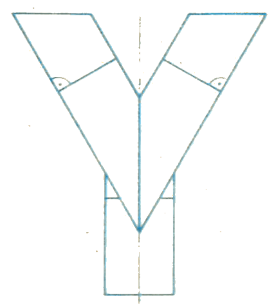
$$f(x)=\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \qquad f(x)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin x}$$

$$f(x)=\frac{\sin(x+\pi)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \qquad f(x)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(x+\pi)}$$

Mehr als ein Problem!

Der Herr ist Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*.

Der Buchstabe Ypsilon



Silbenrätsel

1.	M	on	G	e
2.	E	inhundertzw	E	i
3.	N	ewt	O	n
4.	G	rundwe	R	t
5.	E	inermen	G	e
6.	N	eune	C	k
7.	L	ine	A	l
8.	E	xpone	N	t
9.	H	öhensa	T	z
10.	R	echenoperati	O	n
11.	E	rweite	R	n

Magisches Quadrat

G	L	E	I	C	H	U	N	G		
R	2	7	6	E	4	9	2	E		
E	9	5	1	V	3	5	7	O		
N	4	3	8	A	8	1	6	D		
Z	O	L	L	*	A	R	E	A		
W	6	1	8	R	8	3	4	E		
E	7	5	3	A	1	5	9	S		
R	2	9	4	U	6	7	2	I		
T	E	I	L	M	E	N	G	E		

Wissen, wo ...
Inhaltsverzeichnis 1967–1971

6/70 *Jugend und Mathematik* — eine mathematische Schülerzeitschrift der Demokratischen Republik Vietnam

Logik

2/68 Notwendig oder hinreichend — das ist hier die Frage — M. Rehm
2/70 Logisches Denken — spielend erlernt — G. Scholz
3/70 Mathematische Logik für Anfänger (Leseprobe)
5/70 Achtung Kreuzung — Vorfahrt beachten! — W. Träger

Mengenlehre

1/67 Mit Mengen fängt es an (1) — W. Walsch/H. Lohse
2/67 Wir operieren mit Mengen (2) — W. Walsch
3/67 Wir untersuchen Abbildungen (3) — W. Walsch
4/67 Wir lösen Aufgaben aus der Mengenlehre — W. Walsch
2/69 Zweiermengen und geordnete Paare — H. Tiede

Nomographie

2/70, 3/70, 4/70, 5/70 Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen — W. Träger

Olympiaden — Olympiadeaufgaben

1/67 VIII. IMO 1966 — J. Lehmann
1/67 Wir lösen eine Aufgabe der VIII. IMO — H. Bausch
1/67 bis 6/67 VI. OJM der DDR
2/67 Mathematischer Leistungsvergleich Praha—Neubrandenburg — J. Lehmann
3/67 Mathematischer Mannschaftswettbewerb — M. Mäthner/G. Schulze
3/67 Mathematische Wettbewerbe in England
4/67 Mathematikolympiaden in Bulgarien — S. Bodurow
5/67 Mathematikolympiaden in der UdSSR, Allunionsolympiade Tbilissi 1967 — J. Petrakow
5/67 Eine vorbildliche Jahresarbeit — R. Höppner
6/67 IX. IMO 1967 — H. Bausch
1/68 bis 6/68, 2/69 VII. OJM der DDR
1/68 18. Mathematischer Jahreswettbewerb der USA 1967
3/68 Die Aufgabenkommission des Zentralen Komitees für die OJM der DDR — H. Karl
5/68, 6/68 X. IMO 1968 — H. Bausch/W. Burmeister
6/68 Allunions-Fernolympiade — R. Lüders/J. Lehmann
1/69 bis 3/69, 6/69, 2/70 VIII. OJM der DDR
3/69 Concursul de matematica, Etapa locala-22 martie 1968
5/69, 1/70 XI. IMO 1969 — H. Bausch/J. Lehmann
5/69 Fernolympiade Mathematik, UdSSR 1968 — G. Ulbricht
1/70 bis 4/70 IX. OJM der DDR
2/70 Mathematikolympiaden in der ČSSR — O. Langer/St. Horák
3/70 Mathematische Schülerwettstreite in Ungarn — I. Reimann/M. Walter
4/70 Mathematische Wettbewerbe in Schweden
5/70 XII. IMO 1970 — H. Bausch/J. Lehmann
1/71 bis 4/71 X. OJM der DDR
2/71 10 Jahre Olympiaden Junger Mathematiker der DDR
2/71 Mathematikolympiaden in der MVR
2/71 Österreichische Mathematikolympiade
5/71 Concursul de matematica (SR Rumänien)

Planimetrie

1/68, 2/68, 3/68 Nichts Einfacheres als ein Quadrat — H. Wiesemann
5/68 Was ist ein Viereck? — L. Görke
6/68, 1/69, 2/69, 3/69, 5/69 Mit Zirkel und Zeichendreieck — J. Lehmann
1/69 Spieglein, Spieglein an der Wand — W. Träger
3/69 Mit Bleistift und Lineal — E. Schröder
3/69 Bange machen gilt nicht! — Modell eines geom. Extremwertproblems — Th. Scholl
5/69 Übe sinnvoll — überall! Anleitung zur Arbeit am Dreieck — G. Pietzsch
6/69 Kleine geometrische Exkursion — Th. Scholl
2/70 Wie löst man eine Konstruktionsaufgabe? — H. Titze
3/70, 4/70 Ornamente — R. Bittner

Relationen

6/70, 1/71, 2/71 Relationen — R. Herrmann

Stereometrie

1/69 Fernsehfußball — reguläre Polyeder — E. Schröder
2/69 Der Eulersche Polyedersatz — H. Günther
5/71 Durch die Welt der Tetraeder — G. Geise

Unterhaltung

1/68 Hinter die Kulissen geschaut — W. Träger
3/68, 4/68 Wir lösen ein Zahlenrätsel — Th. Scholl
3/68, 4/68, 5/68 eine Knobelgeschichte 1., 2., 3. Teil — W. Träger
6/68 Schön ist so ein Ring(el)spiel — J. Frormann
3/69 An welchem Wochentag wurde ich geboren? — W. Unze
4/69 Wir stellen ein Zahlenrätsel auf — W. Träger
1/71 Wir spielen mit optimaler Strategie — W. Träger
3/71 Wirklichkeit und Täuschung — J. Sedláček

Verbindung zur Praxis

1/67 Die Deutsche Bücherei im Spiegel von Zahlen und Fakten — S. Günther
3/67 Schwankt der Fernsehturm? — W. Zill
3/67 Der Berliner Fernsehturm — W. Zill
4/67 Auf den Spuren Roald Amundsens — S. Meier
5/67 Erfahrungsaustausch mit sowj. Wissenschaftlern (Bratsk) — H. Werner
6/67 Ernährung und Leistungsfähigkeit — W. Kraak
1/68 50 Jahre Rote Armee
1/68 Dresden in Zahlen — W. Weidauer
1/69 Messegold für Präzisionsreißzeuge — A. Hanisch
2/69 Staatlicher Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden — Zwinger — H. Grötzsch
3/69 Mathematische Modelle aus der DDR — W. Glaß
4/69 Multicurve — E. Schröder
4/69 Aus der VAR berichtet
5/69 20 Jahre Entwicklung des Volksbildungswesens in der DDR — J. Lehmann
6/69 Mathematik und Musik — Ch. Lange
6/69 Rund um das Schachbrett — K. Kannenberg
1/69 bis 6/70 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung — J. Frormann
4/71 Waffen aus Suhl — E. Hoffmann
6/71 Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug? — W. Träger

Zahlenbereiche

5/68 Übe sinnvoll — Anleitung zum Rechnen mit gebrochenen Zahlen — G. Pietzsch

Zahlenfolgen

6/67 Einige Aufgaben über Folgen aus den Schriften des Altertums — A. A. Kolosow
3/68, 4/68, 5/68, 6/68 Elementare Zahlenfolgen — H. Lohse

Zahlentheorie

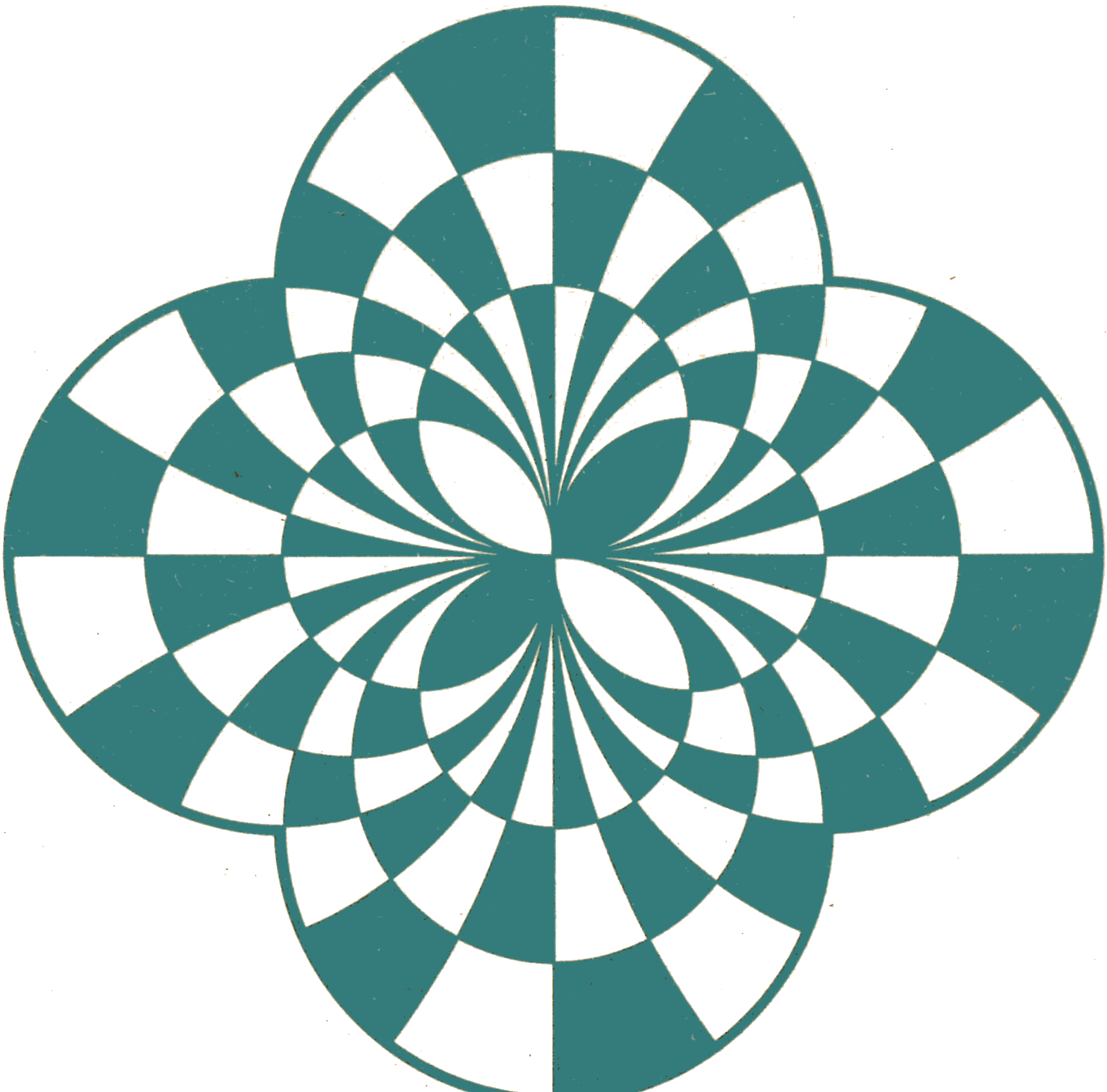
3/69, 4/69, 5/69, 1/70, 2/70 Rechnen mit Resten — G. Lorenz
5/70 Freitag, der 13. — T. Bailey/G. Hofmann
4/71 Die Teilbarkeit durch 7 — E. Naumann

Zirkel (Arbeitsgemeinschaften)

1/67 Eine Arbeitsgemeinschaft erlebte die Deutsche Bücherei — AG 29. OS Leipzig
5/67 Mathematischer Wettbewerb — W. Werner
5/68 Was verbirgt sich hinter: MBZ 8? — G. Horn
3/69 Ein Zirkelnachmittag über „18. Mathem. Jahreswettbewerb der USA" — W. Träger
5/70 Arbeitsgemeinschaften haben das Wort

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
6. Jahrgang 1972
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31 059

2

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Foto: Augustin-Louis Cauchy (1789 bis 1857) — nach einer Lithographie von Boilly 1831 (S. 27); Briefmarken, zur Verfügung gestellt von P. Nüchterlein, Burg bei Magdeburg (S. 35); Vignetten: K.-H. Guckuk (S. 28, S. 48); Foto: J. Lehmann, Leipzig (S. 39); Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 26. Januar 1972

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgabe für Schüler ab der angegebenen Klasse geeignet

Die Arithmetik der Binomialkoeffizienten

§ 1 Definition und einfachste Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

Wenn man das Binom $1+x$ in die Potenz n erhebt, so erhält man offensichtlich ein Polynom des Grades n, d. h. die größte Potenz, in der x in das Polynom eingeht, ist n. Zum Beispiel:

$(1+x)^0=1,$
$(1+x)^1=1+x,$
$(1+x)^2=1+2x+x^2,$
$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3,$
$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4,$
$(1+x)^5=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$
....

Die Koeffizienten dieser Polynome nennt man Binomialkoeffizienten. Es gibt für sie eine spezielle Bezeichnung: der Koeffizient bei x^m im Polynom $(1+x)^n$ wird mit C_n^m bezeichnet. So ist z. B. $C_2^1=2$, $C_4^2=6$, $C_5^3=10$. Man kann also schreiben

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n. \qquad (1)$$

Für eine beliebige Zahl a erhält man hieraus leicht

$$(a+x)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}x+\ldots+C_n^nx^n.$$

(Es genügt, Formel (1) auf $(1+xa)^n$ anzuwenden und die erhaltene Gleichung mit a^n zu multiplizieren).

Es ist offensichtlich, daß C_n^m ganze nicht negative Zahlen sind und daß $C_n^m=0$ für $m>n$ (das Polynom $(1+x)^n$ hat den Grad n, und x^m geht in ihn für $m>n$ nicht ein). Man kann sich ferner leicht davon überzeugen, daß $C_n^0=C_n^n=1$. Die anderen Binomialkoeffizienten C_n^m (für $0<m<n$) kann man finden, indem man $1+x$ in die verschiedensten Potenzen erhebt. Ihre Werte für $n \leqq 10$ sind in der folgenden Tabelle enthalten (s. unten).

Wir sehen, daß die Binomialkoeffizienten recht schnell wachsende Zahlen sind. Der aufmerksame Leser wird in der Anordnung dieser Zahlen eine Reihe von Gesetzmäßigkeiten feststellen. Solche Gesetzmäßigkeiten ergeben sich im allgemeinen leicht aus der Definition der Binomialkoeffizienten. Wir werden hier nur die wichtigsten von ihnen beweisen. Von ihnen hebt sich wegen seiner Bedeutung wiederum die sogenannte *Pascalsche Gleichung* hervor.

Satz 1 (Pascalsche Gleichung). Für beliebige natürliche Zahlen n, m gilt

$$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}. \qquad (2)$$

Beweis: Nach Definition ist C_n^m der Koeffizient bei x^m in $(1+x)^n$. Um diesen Koeffizienten zu finden, müssen wir n Polynome miteinander multiplizieren, die alle gleich $1+x$ sind. Zuerst $n-1$ dieser Polynome miteinander multiplizierend, erhalten wir

$$1+C_{n-1}^1x+C_{n-1}^2x^2+\ldots+C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}.$$

Jetzt führen wir die letzte Multiplikation durch und bekommen

$$(1+x)^n=(1+x)(1+C_{n-1}^1x+C_{n-1}^2x^2+\ldots+C_{n-1}^{n-1}x^{n-1})=(1+C_{n-1}^1x+C_{n-1}^2x^2+\ldots+x^{n-1})+(x+C_{n-1}^1x^2+C_{n-1}^2x^3+\ldots+x^n)$$
$$=1+(C_{n-1}^1+1)x+(C_{n-1}^2+C_{n-1}^1)x^2\ldots+(C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1})x^m+\ldots+x^n.$$

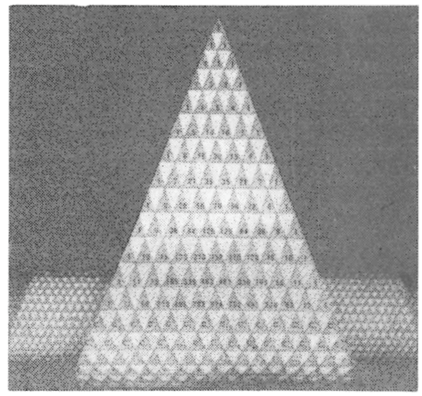
In diesem Ausdruck ist der Koeffizient bei x^m gleich $C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$, also $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$.

m / n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Die Pascalsche Gleichung ist gut zur Berechnung der Binomialkoeffizienten geeignet. Wenn wir z. B. unsere Tabelle für $n=11$ durch eine elfte Zeile ergänzen wollen, so genügt es, benachbarte Zahlen der zehnten Zeile zu addieren:

$C_{11}^0=1$	$C_{11}^6=C_{10}^6+C_{10}^5=462$
$C_{11}^1=C_{10}^1+C_{10}^0=\ 11$	$C_{11}^7=C_{10}^7+C_{10}^6=330$
$C_{11}^2=C_{10}^2+C_{10}^1=\ 55$	$C_{11}^8=C_{10}^8+C_{10}^7=165$
$C_{11}^3=C_{10}^3+C_{10}^2=165$	$C_{11}^9=C_{10}^9+C_{10}^8=\ 55$
$C_{11}^4=C_{10}^4+C_{10}^3=330$	$C_{11}^{10}=C_{10}^{10}+C_{10}^9=\ 11$
$C_{11}^5=C_{10}^5+C_{10}^4=462$	$C_{11}^{11}=1$

Hieraus ist ersichtlich, daß man die Binomialkoeffizienten am besten in einer dreieckigen Tabelle, dem sogenannten Pascalschen Dreieck anordnet.



Jede Zahl dieser Tabelle erhält man als Summe der beiden links und rechts über ihr stehenden Zahlen. Mit Hilfe der Pascalschen Gleichung kann man auch eine allgemeine Formel finden, die C_n^m durch n und m ausdrückt.

Satz 2 (Formel der Binomialkoeffizienten). Für beliebige natürliche Zahlen n, m gilt

$$C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}. \qquad (3)$$

Beweis: Wir werden den Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion führen. Wenn $n=1$, so ist die Formel richtig:

$$C_1^1=1=\frac{1}{1};$$

$$C_1^m=0=\frac{1\cdot 0\cdot\ldots\cdot(1-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} \quad (m>1).$$

Wir nehmen jetzt an, daß

$$C_{n-1}^m=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}$$ für ein gewisses n. Wenn dann $m>1$, so ist

$$C_n^m=C_{n-1}^{m-1}$$
$$+C_{n-1}^{m-1}=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{1\cdot 2\cdot\ldots m}$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots(m-1)}=\left(1+\frac{n-m}{m}\right)\cdot$$
$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots(m-1)}$$
$$=\frac{n}{m}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(m-1)}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(m-1)\cdot m}.$$

Für $m=1$ haben wir $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$

$$=C_{n-1}^1+C_{n-1}^0=\frac{n-1}{1}+1=\frac{n}{1}.$$

Formel (3) ist also richtig für $n=1$ und aus ihrer Gültigkeit für $n-1$ folgt ihre Gültigkeit für n. Das bedeutet, daß Formel (3) für beliebiges n bewiesen ist.

Wir empfehlen dem Leser, der hier das erstemal mit Formel (3) bekannt wurde, aus ihr die uns schon bekannten Gleichungen $C_n^0=C_n^n=1$ und $C_n^m=0$ für $m>n$ herzuleiten. Formel (3) ist allein schon deshalb interessant, daß der Quotient im rechten Teil eine ganze Zahl ist, d. h. alle Zahlen im Zähler lassen sich durch die Zahlen des Nenners teilen.

Den folgenden Satz brauchen wir in der weiteren Darbietung.

Satz 3. Wenn m, n teilerfremd sind (d. h. ihr größter gemeinsamer Teiler beträgt 1), so läßt sich C_n^m durch n teilen.

Beweis: Da

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\dots\cdot m}=$$

$$=\frac{n}{m}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\dots(m-1)}=\frac{n}{m}\,C_{n-1}^{m-1},$$

so ist $mC_n^m=nC_{n-1}^{m-1}$. Folglich läßt sich mC_n^m durch n teilen. Da sich aber mC_n^m (und ganz allgemein jede ganze Zahl größer 1) eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen läßt und m und n teilerfremd sind, d. h. m läßt sich durch keine einzige Primzahl teilen, durch die sich n teilen läßt, so muß sich C_n^m durch n teilen lassen.

So lassen sich z. B. $C_9^4=126$ durch 9 und $C_{10}^3=120$ durch 10 teilen. Wir wollen hier noch auf folgende Eigenschaften der Binomialkoeffizienten hinweisen:

1. $C_n^m=C_n^{n-m}$;
2. $C_m^m+C_{m+1}^m+\dots+C_{m+k}^m=C_{m+k+1}^m$;
3. $C_n^0+C_n^1+\dots+C_n^n=2^n$;
4. $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\dots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\dots$

Das zu beweisen überlassen wir Euch.

D. B. Fuchs (aus Quant 6/70)

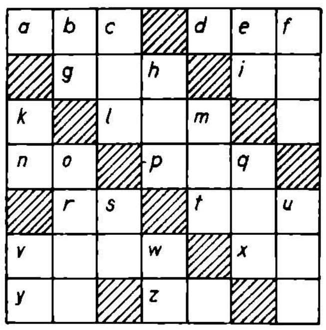
In Heft 3/72 folgt: § 2 Der Rest bei der Division der Binomialkoeffizienten durch Primzahlen; § 3 Einiges über die Reste bei der Division der Binomialkoeffizienten durch Potenzen von Primzahlen, d. Red.

Anekdote

Eine Anekdote zu unserem Beitrag S. 34/35: Einst fuhr *Hardy* in einem Taxi mit dem Kennzeichen 1729 zu dem kranken *Ramanujan*. *Hardy* hielt diese Zahl für „langweilig": $1729=7\cdot 13\cdot 19$, und er erzählte das *Ramanujan*, der ihm sofort entgegnete: „Nein, *Hardy*, nein, *Hardy*, das ist eine sehr interessante Zahl, sie ist die kleinste Zahl, die man auf zwei verschiedene Weisen als Summe zweier Kubikzahlen darstellen kann: $9^3+10^3=1^3+12^3=1729$". *Littlewood* bemerkte in diesem Zusammenhang, daß jede natürliche Zahl ein persönlicher Freund *Ramanujans* war.

Ein mathematisches „Kreuzworträtsel"

In die freien Felder des abgebildeten Schemas sind Ziffern, und zwar jeweils eine der Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, so einzutragen, daß sich in waagerechter bzw. senkrechter Anordnung Zahlen ergeben, die den weiter unten angegebenen Bedingungen entsprechen. Dabei darf die Ziffer 0 nicht am Anfang einer dieser Zahlen stehen.



Es bedeuten:

Waagerecht

a) Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 18 und 33.
d) Eine natürliche Zahl, die Lösung der Gleichung $\frac{x-2}{3}+\frac{x+23}{2}=200$ ist.
g) Eine natürliche Zahl, die eine Potenz von 3 ist.
i) Eine Primzahl.
l) Eine natürliche Zahl, die durch 2, 3 und 7 teilbar ist.
n) Eine natürliche Zahl, die gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist.
p) Eine natürliche Zahl, die gleich einem Vielfachen der unter a (waagerecht) angegebenen Zahl ist.
r) Eine Primzahl.
t) Eine dreistellige natürliche Zahl mit gleichen Grundziffern.
v) Eine natürliche Zahl, die durch 57 teilbar ist.
x) Der größte gemeinsame Teiler der durch a), l) und p) waagerecht bestimmten Zahlen.
y) Eine Primzahl.
z) Eine natürliche Zahl, die durch 11 teilbar ist.

Senkrecht

b) Eine Primzahl.
c) Eine natürliche Zahl, die durch 8 teilbar ist.
e) Eine Primzahl, die kleiner als 25 ist.
f) Eine natürliche Zahl, deren Quersumme gleich 13 ist.
h) Eine natürliche Zahl, die durch 5 teilbar ist.
i) Eine natürliche Zahl, deren Quersumme gleich 4 ist.
k) Eine natürliche Zahl, die durch 11 teilbar ist.
m) Eine natürliche Zahl, die durch 9 teilbar ist.
o) Das Geburtsjahr des großen deutschen Mathematikers Carl Friedrich Gauß.
q) Eine natürliche Zahl, die durch 4 teilbar ist.
s) Eine natürliche Zahl, die durch 7 teilbar ist.
u) Eine natürliche Zahl, deren Quersumme gleich der Quersumme der durch t) (waagerecht) bestimmten Zahl ist.
v) Das Dreifache der unter y (waagerecht) angegebenen Zahl.
w) Dieselbe Zahl, wie unter r (waagerecht).

Bemerkung: Im Gegensatz zu den bisher in unserer Zeitschrift veröffentlichten mathematischen „Kreuzworträtseln" sind hier die meisten Zahlen durch die einzelnen Angaben zunächst noch nicht eindeutig bestimmt. Die Eindeutigkeit ergibt sich erst, wenn man die „waagerechten" und „senkrechten" Angaben zueinander in Beziehung setzt.

Christine Riehl

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. L. A. Kaloujnine

Mathematisch-Physikalische Fakultät der Universität Kiew

10/12 ▲ 881 Wann ist der Binomialkoeffizient $\binom{m}{n}$ ungerade? Es sind alle geordneten Paare natürlicher Zahlen m und n mit $m>0$ und $m\geqq n$ anzugeben, für die der Binomialkoeffizient

$$\binom{m}{n}=\begin{cases}\dfrac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n} & \text{für } n>0\\ 1 & \text{für } n=0\end{cases}$$

eine ungerade natürliche Zahl ist.

Zwei Beweise einer Ungleichung von Cauchy

Die *Cauchysche Ungleichung* zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel nichtnegativer Zahlen ist eine der bedeutendsten Ungleichungen. In der bekannten Monographie von *E. Beckenbach* und *R. Bellmann* „Theorie der Ungleichungen" werden zwölf Beweise für diese Ungleichung geführt. Hier bieten wir zwei Beweise, von denen wir glauben, daß sie neu sind, den ersten, weil er so einfach und elementar ist, den anderen, weil hier eine Identität abgeleitet wird, die das arithmetische und das geometrische Mittel nichtnegativer Zahlen in Verbindung bringt und die man benutzen könnte, um die Differenz dieser beiden Mittel abzuschätzen.

Der französische Mathematiker Augustin Cauchy (*21. 8. 1789 †23. 5. 1857)

Der Satz von Cauchy: Das arithmetische Mittel eines beliebigen Systems $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nichtnegativer Zahlen ist immer größer oder gleich dem geometrischen Mittel dieser Zahlen, wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn alle Zahlen a_i einander gleich sind, d. h.

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \qquad (1)$$

wobei

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

dann und nur dann gilt, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ ist.

1. Beweis

Wir wollen uns der Methode der vollständigen Induktion bedienen: Für $n=1$ ist die Aussage richtig. Angenommen, sie sei richtig für n nichtnegative Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, so werden wir jetzt beweisen, daß sie dann auch richtig ist für die $n+1$ nichtnegativen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$.

Wir können annehmen, daß keine der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ gleich Null ist; denn sonst wäre die rechte Seite der Formel (1) gleich Null und der Satz augenscheinlich richtig.

Wir setzen

$$\sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}} = A \qquad (2)$$

und

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a. \qquad (3)$$

Dann gilt $a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} = A^{n+1}$,

$$a_1 a_2 \cdots a_n = a^n, \; a_{n+1} = \frac{A^{n+1}}{a^n}. \qquad (4)$$

Beachten wir jetzt, daß nach Induktionsannahme der Satz für n Zahlen gilt, so haben wir infolge von (1), (2), (3) und (4):

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{n\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} + a_{n+1}}{n+1}$$

$$\geqq \frac{n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + \frac{A^{n+1}}{a^n}}{n+1} = A + \frac{na + \frac{A^{n+1}}{a^n}}{n+1} - A$$

$$= A + \frac{na^{n+1} + A^{n+1} - (n+1)a^n A}{(n+1)a^n}$$

$$= A + \frac{na^{n+1} - na^n A - A(a^n - A^n)}{(n+1)a^n}$$

$$A + \frac{(a-A)(na^n - Aa^{n-1} - A^2 a^{n-2} - \ldots - A^n)}{(n+1)a^n} \qquad (5)$$

Nun sind in dem Produkt

$(a-A)(na^n - Aa^{n-1} - A^2 a^{n-2} \ldots - A^n)$

für $a<A$ beide Faktoren negativ und für $a>A$ beide Faktoren positiv, so daß der zweite Summand auf der rechten Seite von (5) für alle $a \neq A$ größer Null ist. Also ist stets

$$\frac{a_1+a_2+\ldots a_n+a_{n+1}}{n+1} \geqq A \qquad (6)$$

oder nach (2)

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1} \geqq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}},$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann steht, wenn in den Beziehungen (5) und (6) das Gleichheitszeichen steht.

Das zuletzt Gesagte bedeutet aber

$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ und $a = A$,

oder aber (auf Grund von (3) und (4))

$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1} = a = A$;

damit ist der Satz vollständig bewiesen.

2. Beweis

Wir setzen

$\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} = G_k$ für $k = 1, 2, \ldots,$

so daß $a_k = \frac{G_k^k}{G_{k-1}^{k-1}}$ für $k = 2, 3, \ldots,$ gilt. (7)

Wie im ersten Beweis können wir annehmen, keine der Zahlen a_k (demnach auch G_k) sei Null. Dann ergibt sich auf Grund von (7) und der Gleichheit

$$a_1 + a_2 = G_1\left[1 + \left(\frac{G_2}{G_1}\right)^2\right], \qquad (8)$$

wenn man noch die Identität

$$x^k - kx + (k-1) \qquad (9)$$
$$= (x-1)[x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + x - (k-1)]$$
$$= (x-1)^2 [x^{k-2} + 2x^{k-3} + \ldots + (k-2)x + (k-1)]$$

berücksichtigt,

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

$$= G_n + \frac{1}{n}\Big\{(a_1+a_2-2G_2) + (a_3+2G_2-3G_3) + (a_4+3G_3-4G_4) + \ldots + [a_n+(n-1)G_{n-1}-nG_n]\Big\}$$

$$= G_n + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} G_{k-1}\left[\left(\frac{G_k}{G_{k-1}}\right)^k - k\frac{G_k}{G_{k-1}} + (k-1)\right]$$

$$= G_n + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} G_{k-1}\left(\frac{G_k}{G_{k-1}} - 1\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{G_k}{G_{k-1}}\right)^{k-2} + 2\left(\frac{G_n}{G_{k-1}}\right)^{k-3} + \ldots + (k-2)\frac{G_k}{G_{k-1}} + k - 1\right].$$

Hieraus ergibt sich, daß immer

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqq G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

gilt, und daß diese Ungleichung dann und nur dann in eine Gleichung übergeht, wenn $G_1 = G_2 = \ldots = G_n$ ist oder, was dasselbe ist, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ ist, was zu beweisen war.

W. Dziadek

Physik-Wettbewerb 1971

In Heft 4/71 boten wir in einem Wettbewerb mathematische Probleme aus der Physik. 156 *alpha*-Leser sandten ihre Lösungen an das Päd. Institut Güstrow. Unser Mitarbeiter *U. Walta* wertete die Lösungen aus und legte die Preisträger fest:

Klasse 6	34 Schüler	117 Lösungen
Klasse 7	29 Schüler	72 Lösungen
Klasse 8	17 Schüler	62 Lösungen
Klasse 9	21 Schüler	54 Lösungen
Klasse 10/12	55 Schüler	106 Lösungen
zusammen	156 Schüler	411 Lösungen

Preisträger: Norbert Heß, Dresden (Kl. 6); Berthold Möbius, Dresden (Kl. 6); Jens Haupt, Karl-Marx-Stadt (Kl. 7); Siegfried Sonnenschein, Wittenberge (Kl. 7); Andreas Schlosser, Zwickau (Kl. 8); Ralph Lehmann, Petershagen (Kl. 8); Herwig Gratias, Sömmerda (Kl. 9); Andreas Weißhaupt, Halle (Kl. 9); Viktor Wassiliew, Moskau (Kl. 9); Brigitte Prawitz, Berlin (Kl. 10/12); Kurt Oppitz, Kleinmachnow (Kl. 10/12); Hans-Jürgen Weinberger, Wolgast (Kl. 10/12); Nikolaus Zimmermann, Sibiu, SR Rumänien (Kl. 10/12).

Alle Teilnehmer erhielten eine Antwortkarte, die für den Wettbewerb 1971/72 mitgewertet wird.

In Heft 4/72 veröffentlichen wir den Physik-Wettbewerb für das Schuljahr 1972.

Kiew
In der Welt der Mathematik

Schüleralmanach der Ukrainischen SSR

Zwischen ukrainischen Mathematikern sowie Mathematiklehrern und der Redaktion *alpha* besteht seit einigen Jahren ein enger Kontakt. Wir freuen uns, daß wir nunmehr einen weiteren Freund in unserer außerunterrichtlichen Arbeit erhalten haben. Einen ersten Band des *Almanachs* erhielten wir 1969 von unserem aktiven Mitarbeiter, dem Mathematikmethodiker Prof. *N. Tschaikowski* († 1970) mit der humorvollen Widmung: „Der *alpha*-Redaktion vom neugeborenen ukrainischen Bruder.“

In zunächst unregelmäßigen Abständen erscheinen diese Almanache (Format A5, 270 Seiten) für mathematisch interessierte und talentierte Schüler im Alter von 15 bis 17 Jahren unter dem Motto: *„Wenn die Hausaufgaben erledigt sind... .“*

Über den Inhalt wollen wir kurz berichten: In Band 1 gibt *J. A. Mitropolski, Direktor des Instituts für Mathematik der Ukrainischen Akademie der Wissenschaften* unter dem Titel „Das granitene Fundament“ das Geleit. Er stellt dabei die ständig wachsende Bedeutung der Mathematik für die technische Revolution heraus.

Im ersten Abschnitt (*Horizonte der Mathematik*) werden dem Leser jeweils durch populärwissenschaftliche Darlegungen ernsthafte theoretische Probleme vorgelegt wie: Die Sprache der mathematischen Logik; Algebraische und transzendente Zahlen; Das Dirichletsche Schubfachprinzip und diophantische Aproximationen; Lineare Optimierung Primzahlzerlegungen.

Der zweite Abschnitt (*Mathematische Nachrichten*) macht den Leser mit Problemen allgemeinen Interesses bekannt, bietet neue Beweise zu bekannten mathematischen Aussagen.

Der dritte Abschnitt ist der *Geschichte der Mathematik* gewidmet. Insbesondere werden bekannte Mathematiker vorgestellt, vor allem solche unserer Zeit (wie Leninpreisträger), es wird von Kongressen berichtet usf.

Mathematische Spiele, Aufgaben mit ausführlichen Lösungen, Buchbesprechungen gehören zur ständigen Ausstattung der reich illustrierten Ausgaben. Das große Interesse der Jugend ist daran zu messen, daß die je 35000 Exemplare von Band 1 und 2 wenige Tage nach ihrer Auslieferung vergriffen waren. In Aussicht ist gestellt, die Auflage wesentlich zu erhöhen und die Almanache in regelmäßigen Abständen herauszugeben.

Ist es nicht ein echtes Zeichen der Freundschaft, wenn Prof. *L. A. Kaloujnine* bei seinem Besuch in Leipzig stellvertretend für viele interessante Beiträge den nachfolgenden dem Chefredakteur *alpha*, aus dem Ukrainischen ins Deutsche übersetzt, in die Feder diktierte? Wir danken recht herzlich dafür.

Paris · Concours general

Mathematikwettbewerb in Frankreich

Zum vierten Male nahm eine französische Mannschaft an der Internationalen Mathematikolympiade teil. In einem Gespräch mit dem Chefredakteur von *alpha* berichtete *Pierre-Louis Curien*, Teilnehmer der XII. IMO, daß es in seinem Lande keine Mathematikolympiaden gibt. Gleichzeitig aber stellte er fest, daß es einen Wettbewerb gäbe, den sogenannten *Concours general*, über den er den Lesern von *alpha* berichten möchte:

Der *Concours* wird seit 1747 durchgeführt. An ihm können sich alle interessierten Schüler der Klassen 11 bzw. 12 (d.h. der Abschlußlehrgänge der Gymnasien) beteiligen. Im März jeden Jahres fordern die Lehrer ihre Schüler auf, sich am *Concours generale* zu beteiligen. Die Schüler der Klassenstufe 11 können sich für Geschichte, Literatur und Sprachen (u.a. Englisch, Russisch, Deutsch) melden, Schüler der Klassenstufe 12 für Mathematik, Physik und Philosophie. Zu einem festgelegten Termin im Mai werden die interessierten Schüler vom Ministerium für Volksbildung zu einer sechsstündigen Klausur in vier Zentren im Lande eingeladen. Für die einzelnen (obengenannten) Fächer finden die Klausuren an verschiedenen Tagen statt, denn jeder Schüler kann sich für mehrere Fächer melden.

Es wird jeweils nur ein Problem gestellt, untergliedert in einzelne Abschnitte, gestaffelt nach Schwierigkeit. Die Aufgaben werden von einem Wissenschaftlerkollegium im Auftrage des Ministeriums ausgearbeitet und die eingehenden Lösungen mehrfach und sehr streng korrigiert. Es kann einen 1., 2. und 3. Preis sowie 8 Anerkennungsurkunden (genannt: *accessit*) geben. Es kommt aber auch vor, daß keine Preise vergeben werden, wenn die Leistungen nicht den Anforderungen der Jury genügen. Im Jahre 1970 wurde an den IMO-Teilnehmern *Hervé Pépin* ein erster Preis und ein 3. Preis an den Autor dieses Berichts vergeben. (Letzterer nahm auch am Physik-Wettbewerb teil.) Beide Schüler kommen aus dem Lyceum Louis le Grand. Aus dieser Schule hatten sich 20 Schüler für das Fach Mathematik beworben. Die Aufgaben für alle Fächer sind aus Gebieten entnommen, die auf moderne Gebiete der Hochschulen hinweisen (in Mathematik u.a.: Boolesche Algebra, Gruppen, Zahlentheorie).

Im Fach Mathematik beteiligen sich jährlich 500 bis 1000 Schüler am *Concours generale.*

Piere-Louis Curien, Paris

(S. 39)

Budapest
Kürschák-Wettbewerb 1971

(30. Oktober 1971, Ungarische VR)

▲1▲ Die Gerade e schneidet die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC in C_1, die Seite $\overline{AC}$ in B_1 und die Verlängerung der Seite $\overline{BC}$ in A_1. Es seien die Mittelpunkte der Seite $\overline{AB}$, bzw. $\overline{AC}$ C_0, bzw. B_0, und es seien C_2 das Spiegelbild von C_1 an C_0 und B_2 das Spiegelbild von B_1 an B_0. Es ist zu beweisen, daß $\sin B_1A_1C : \sin C_2A_2B_2 = \overline{B_2C_2} : \overline{B_1C_1}$.

▲2▲ Es sind in der Ebene 22 Punkte gegeben, keine drei der gegebenen Punkte liegen an einer Geraden. Es ist zu beweisen, daß die Punkte so in Paare eingeteilt werden können, daß die Strecken, die die zu denselben Paaren gehörenden Punkte verbinden, wenigstens 5 verschiedene Schnittpunkte haben.

▲3▲ Wir haben 30 Geldbüchsen und zu jeder Büchse einen Schlüssel, mit dem die anderen Büchsen nicht aufgesperrt werden aufs Geratewohl in die zugesperrten Büchsen hinein, in jede Büchse einen. Wir brechen zwei Büchsen auf. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wir die übrigen Büchsen ohne Aufbrechen anderer Büchsen aufsperren können?

Eingesandt von unserem ungarischen Auslandskorrespondenten Istvan Reiman, Technische Universität Budapest

Die Landwirtschaft der DDR

Das vorliegende Material wurde entnommen aus: „Arbeitsmaterial zur Direktive des VIII. Parteitages der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands zum Fünfjahrplan für die Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR 1971 bis 1975“, herausgegeben von der Parteihochschule „Karl Marx“ beim ZK der SED, erschienen im Verlag *Die Wirtschaft*, Berlin.
Preis der Mappe 6,20 M geblockt, einseitig bedruckt. Auf 62 Tafeln wird mit mehrfarbigen Schaubildern und graphischen Darstellungen die Direktive zum Fünfjahrplan erläutert. Hervorragend für Unterricht, außerunterrichtliche Arbeit, insbesondere für Wandzeitungen geeignet.

Unter den Bedingungen der DDR ist die weitere Produktionssteigerung landwirtschaftlicher Erzeugnisse durch die sozialistische Intensivierung, das heißt vor allem

- durch die Chemisierung
- und komplexe Mechanisierung der Pflanzen- und Tierproduktion
- sowie durch Meliorationen,

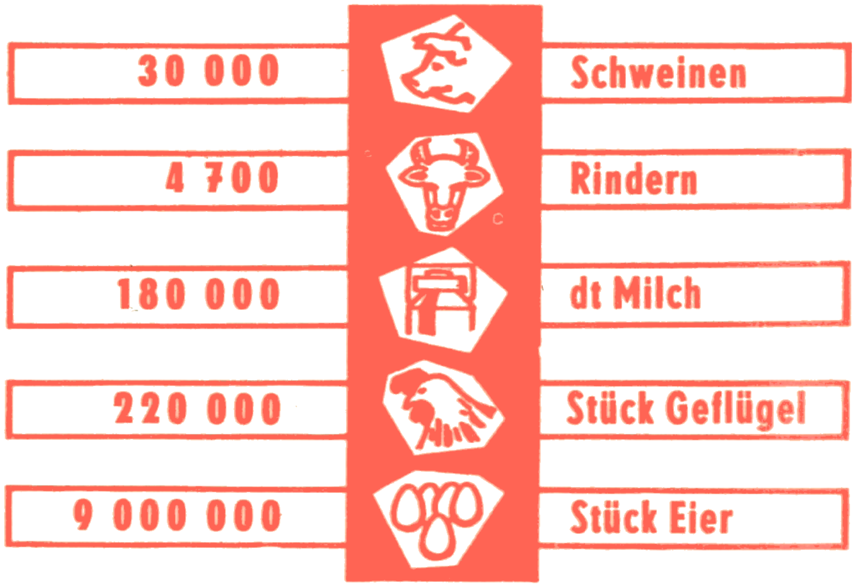
zu vollziehen.

Ein ständig Beschäftigter in der Landwirtschaft erzeugt Nahrungsmittel
1965 für 18 Menschen
1970 für 23 Menschen
1975 für 30 Menschen

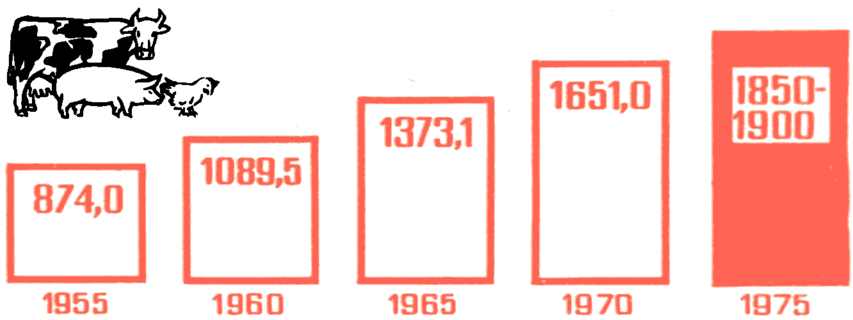
Der Hauptanteil landwirtschaftlicher Rohstoffe geht in die Lebensmittelindustrie.

In 50 Zweigen der Industrie werden Rohstoffe der Landwirtschaft verarbeitet.

Die planmäßige Versorgung unserer Bevölkerung erfordert die tägliche Bereitstellung von



Schlachtvieh (einschließlich Geflügel) — kt —

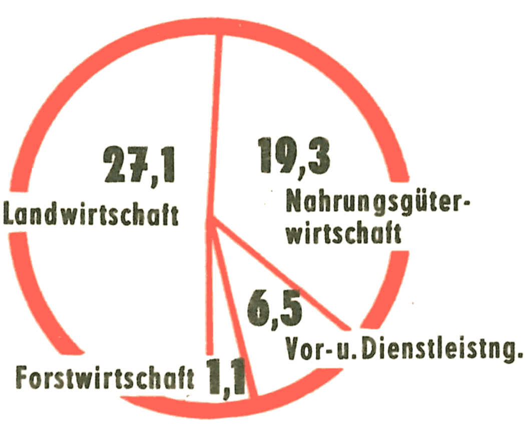


Versorgung der landwirtschaftlichen Betriebe mit mineralischen Düngemitteln — 1000 t —

	Stickstoff N	Phosphorsäure P_2O_5	Kali K_2O
1970	549,0	410,0	613,9
1975	750-800	520-525	700-715

Bruttoprodukt der Landwirtschaft, Nahrungsgüterwirtschaft und Forstwirtschaft 1970 (in Mrd. M)

— zu effektiven Preisen —



Von der Landwirtschaft werden erzeugt:

67 Prozent des extraktiven Rohstoffaufkommens der Volkswirtschaft der DDR

76 Prozent des Nahrungsmittelfonds

30–40 Prozent des gesamten Warenfonds der Bevölkerung

Additive magische Zahlquadrate mit neun Feldern

Den meisten unserer Leser wird bekannt sein, daß sich die Zahlen 1, 2, 3, ... 8 und 9 anstelle der Variablen a, b, c, ..., h und i so in die Felder des Bildes 1 einsetzen lassen, daß die acht Summen der in jeder Zeile, jeder Spalte und Diagonale stehenden Zahlen sämtlich einander gleich sind. Jede der so entstandenen Konfigurationen wird ein *magisches Zahlquadrat* genannt (Bild 1).

Allgemein wollen wir festsetzen:

Definition: Sind im Bild 1 anstelle der Variablen a, b, c, ..., h und i derart ganze Zahlen eingesetzt, daß die acht Summen der Zahlen in den Feldern jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale sämtlich einander gleich sind, so heißt diese Konfiguration ein *additives magisches Zahlquadrat mit neun* Feldern.

Unter Bezug auf Bild 1 gelten für ein additives magisches Zahlquadrat mit neun Feldern die folgenden acht Gleichungen:

I	$a+b+c=s$	V	$b+e+h=s$
II	$d+e+f=s$	VI	$c+f+i=s$
III	$g+h+i=s$	VII	$a+e+i=s$
IV	$a+d+g=s$	IIX	$c+e+g=s$

Die in diesen acht Gleichungen auftretende Zahl s ist als Summe ganzer Zahlen selbst eine ganze Zahl.

Wir wollen nun alle additiven magischen Zahlenquadrate mit neun Feldern bestimmen. Zunächst machen wir eine Aussage über die im Mittelfeld eines solchen Zahlquadrates stehende Zahl: Durch Addieren der linken und rechten Seiten der Gleichungen V, VII und IIX ergibt sich

$(a+b+c)+(g+h+i)+3e=3s$.

Unter Beachtung von I und III folgt hieraus $s+s+3e=3s$, und daraus durch Umformen:

IX $e=\frac{s}{3}$

Es gilt also:

Satz 1: In einem additiven magischen Zahlquadrat mit neun Feldern ist die im Mittelfeld stehende Zahl der dritte Teil der Summe der in den Feldern einer Zeile, Spalte oder Diagonale stehenden Zahlen.

Die Leser mögen die folgenden Aufgaben selbständig lösen:

▲1▲ Beweise: Das arithmetische Mittel aller Zahlen eines additiven magischen Zahlquadrates mit neun Feldern ist gleich der im Mittelfeld stehenden Zahl.

▲2▲ Beweise: Das arithmetische Mittel der beiden in den Endfeldern der Mittelzeile, der Mittelspalte oder einer der Diagonalen stehenden Zahlen ist bei einem additiven magischen Zahlquadrat gleich der Zahl im Mittelfeld. Das heißt, es gilt in bezug auf Bild 1:

$$e=\frac{d+f}{2}=\frac{b+h}{2}=\frac{a+i}{2}=\frac{c+g}{2}$$

▲3▲ Beweise: Das arithmetische Mittel der in zwei benachbarten Seitenmittelfeldern stehenden Zahlen ist bei einem additiven magischen Zahlquadrat gleich der im nichtbenachbarten Eckfeld stehenden Zahl. Das heißt, es gilt in bezug auf Bild 1:

$\frac{h+f}{2}=a;\quad \frac{d+h}{2}=c;\quad \frac{b+f}{2}=g;\quad \frac{b+d}{2}=i.$

▲4▲ Zeige: Es ist unmöglich, die vier folgenden Bilder zu additiven magischen Zahlquadraten zu ergänzen (Bild 2, 3, 4, 5)!

Als zweites wollen wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 2: Wenn a, b, c, ... h und i ganze Zahlen mit der Eigenschaft sind, daß die Konfiguration des Bildes 1 ein additives magisches Zahlquadrat ist und wenn k eine beliebige ganze Zahl ist, so ist auch die folgende Konfiguration ein additives magisches Zahlquadrat (Bild 6).

Da die Addition ganzer Zahlen kommutativ und assoziativ ist, ergibt sich: Bei der Konfiguration des Bildes 6 ist jede der laut Definition zu betrachtenden Summen um $3k$ größer als bei der Konfiguration des Bildes 1. Da laut Voraussetzung des Satzes 2 alle zu betrachtenden acht Summen der Konfiguration 1 gleich s sind, ergibt sich $s+3k$ für jede der acht zu betrachtenden Summen des Bildes 6. Mithin ist der Satz 2 bewiesen.

Als drittes sollen alle additiven magischen Zahlquadrate mit neun Feldern bestimmt werden. Zunächst können wir mittels des Satzes 2 jedem beliebigen additiven magischen Zahlquadrat mit neun Feldern ein normiertes magisches Zahlquadrat zuordnen, in dessen Mittelfeld die Zahl 0 steht: Stellt Bild 1 ein beliebiges additives Zahlquadrat dar, so addieren wir zu jeder Zahl dieses Zahlquadrates die zu e entgegengesetzte Zahl $-e$ (Bild 7).

Bei dem normierten additiven magischen Zahlquadrat des Bildes 7 läßt sich sehr einfach erkennen, daß durch die Zahlen $a-e=x$ und $c-e=y$ alle übrigen Zahlen eindeutig bestimmt sind (Bild 8).

Da gemäß Definition und Satz 1 für dieses additive magische Zahlquadrat die Summe der in den Feldern einer Diagonale stehenden Zahlen gleich 0 sein muß, stehen in den beiden anderen Eckfeldern die zu x und y entgegengesetzten Zahlen $-x$ und $-y$ (Bild 9).

Da auch die Summe der in den Feldern der ersten Zeile stehenden Zahlen gleich 0 sein muß, muß im mittleren Feld der ersten Zeile die ganze Zahl $-x-y$ stehen. In analoger Weise sind auch die in die noch leeren Felder einzusetzenden ganzen Zahlen eindeutig bestimmt (Bild 10).

Die in entsprechenden Feldern der Bilder 7 und 10 stehenden Zahlen müssen jeweils die gleichen sein. Aus Bild 10 wird die gesuchte neue Darstellung des beliebigen additiven

Bild 1

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Bild 2

5		
-1		
4		

Bild 3

7		
	-4	

Bild 4

		-5
6		
-4		

Bild 5

-4	5	
3	2	

Bild 6

$a+k$	$b+k$	$c+k$
$d+k$	$e+k$	$f+k$
$g+k$	$h+k$	$i+k$

Bild 7

$a-e$	$b-e$	$c-e$
$d-e$	0	$f-e$
$g-e$	$h-e$	$i-e$

Bild 8

x		y
	0	

Bild 9

x		y
	0	
$-y$		$-x$

Bild 10

x	$-x-y$	y
$-x+y$	0	$x-y$
$-y$	$x+y$	$-x$

Bild 11

$a=x+z$	$b=-x-y+z$	$c=y+z$
$d=-x+y+z$	$e=z$	$f=x-y+z$
$g=-y+z$	$h=x+y+z$	$i=-x+z$

Bild 12

7		
	-1	
-9		

Bild 13

		4
		0
		-7

Bild 14

	-7	
		-3
-5		

Bild 15

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Bild 16

8	1	6
3	5	7
4	9	2

magischen Zahlquadrates des Bildes 1 durch Rückgängigmachen der vorgenommenen Normierung erhalten: Wir addieren zu jeder Zahl des Bildes 10 die Zahl $e=z$ und erhalten die Darstellung von Bild 11.

Bei beliebiger Wahl der ganzen Zahlen x, y und z stellt die Konfiguration des Bildes 11 ein additives magisches Zahlquadrat mit neun Feldern dar. Durch geeignete Wahl der ganzen Zahlen x, y und z läßt sich jedes additive magische Zahlquadrat mit neun Feldern in dieser Weise darstellen.

Nunmehr mögen wiederum die Leser die folgenden Aufgaben selbständig lösen:

▲5▲ Setze in die leeren Felder der Bilder 12, 13 und 14 derart ganze Zahlen ein, daß additive magische Zahlquadrate entstehen! Wieviel Lösungen gibt es in jedem Falle?

▲6▲ Ersetze in den Bildern 2, 3, 4 und 5 jeweils eine ganze Zahl so durch eine andere, daß das so entstandene Bild sich jeweils zu additiven magischen Zahlquadraten ergänzen läßt!

Nachdem nunmehr alle magischen Zahlquadrate mit neun Feldern ermittelt worden sind, sollen anschließend noch Aussagen über Mengen M von ganzen Zahlen mit höchstens neun Elementen gemacht werden, deren Elemente die Zahlen eines additiven magischen Zahlquadrates mit neun Feldern sind. Eine derartige Menge ist z. B. $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,\}$, denn die folgende Konfiguration ist ein additives magisches Zahlquadrat (Bild 15). Durch Spiegelung an der markierten Diagonale entsteht aus diesem additiven magischen Zahlquadrat das Zahlquadrat des Bildes 16 mit ebenfalls neun Feldern (Bild 16).

Da bei der ausgeführten Spiegelung die Felder einer Zeile auf die Felder einer Spalte, die einer Spalte auf die einer Zeile und die Felder einer Diagonale auf die der gleichen Diagonale abgebildet werden, ist das Bildzahlquadrat ebenfalls ein additives magisches Zahlquadrat.

Spiegelungen an einer Diagonale, an der Mittelsenkrechten einer Quadratseite und Drehungen mit den Drehwinkeln 90°, 180°, 270° und 360° um den Mittelpunkt eines Quadrates bilden ein Quadrat auf sich ab. Diese acht Abbildungen werden als Selbstabbildungen eines Quadrates bezeichnet.

Durch eine Selbstabbildung entsteht aus einem additiven magischen Zahlquadrat wieder ein additives magisches Zahlquadrat. Mittels einer geeigneten Selbstabbildung können wir eine für das jetzige Vorhaben geeignete Normierung bei additiven magischen Zahlquadraten vornehmen: Sind $a, b, c, \ldots, h$ und i ganze Zahlen mit der Eigenschaft, daß die Konfiguration des Bildes 1 ein additives magisches Zahlquadrat ist, so folgt aus den dann gültigen Gleichungen VII und IIX die Gleichung $a+i=c+g$. Die Summen der gegenüberliegenden Eckfeldern zugeordneten Zahlen sind einander gleich.

Unter den vier ganzen Zahlen, die den Eckfeldern eines additiven magischen Zahlquadrates zugeordnet sind, gibt es sicher eine, vorübergehend mit α bezeichnet, die nicht kleiner als jede der drei anderen ist. Die in dem Eckfeld, das dem Feld mit der Zahl α gegenüberliegt, stehende Zahl sei mit δ bezeichnet. Die in beiden restlichen Eckfeldern stehenden Zahlen sollen mit β und γ bezeichnet werden. Dabei kann die Wahl der Bezeichnung so getroffen werden, daß $\beta\geqq\gamma$ gilt. Gemäß der getroffenen Auswahl genügt α den Ungleichungen $\alpha\geqq\beta$, $\alpha\geqq\gamma$ und $\alpha\geqq\delta$. Wegen $\alpha+\delta=\beta+\gamma$ folgt aus diesen Ungleichungen $\beta\geqq\delta$ und $\gamma\geqq\delta$. Wegen $\beta\geqq\gamma$ gilt damit insgesamt:

$$\alpha\geqq\beta\geqq\gamma\geqq\delta.$$

Durch eine geeignete Drehung des jetzt betrachteten additiven magischen Zahlquadrates ist zu erreichen, daß das Feld mit der Zahl α auf das Feld zu liegen kommt, das im Bilde 11 die Zahl $x+z$ trägt. Das zum Eckfeld mit der Zahl α benachbarte Eckfeld mit der Zahl β fällt nach Ausführung obiger Drehung entweder bereits auf das Feld des Bildes 11 mit der Zahl $y+z$, oder dies ist durch eine nachträgliche Spiegelung des erhaltenen magischen Zahlquadrates an der Diagonale, auf der das Feld mit der Zahl α liegt, zu erreichen. Nach der so vorgenommenen Normierung gilt für das durch das Bild 11 dargestellte Zahlenquadrat:

$$x+z\geqq y+z\geqq -y+z\geqq -x+z$$

Diese Ungleichungen sind äquivaliert mit

$$X \qquad x\geqq y\geqq -y\geqq -x$$

Da aus $x=y$ stets $-y=-x$ folgt und umgekehrt, sind gemäß der Normierungsvorschrift X die folgenden vier Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $x>y>-y>-x$
2. Fall: $x=y>-y=-x$
3. Fall: $x>y=-y>-x$
4. Fall: $x=y=-y=-x$

Im ersten Fall haben die Punkte, die den neun Zahlen der Bilder 11 auf der Zahlengeraden zugeordnet sind, die folgende Lage (Bild 17a, 17b, 17c):

In diesen Zeichnungen sind Trägerpunkte mit notwendig gleichen Abständen zusätzlich durch gleichartige Maßpfeile markiert worden. Im Falle 1;a ist folgender Spezialfall enthalten: Alle neun Trägerpunkte sind äquidistante Punkte; insbesondere können dies die Trägerpunkte der uns bekannten Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 sein.

Mittels des folgenden aus dem Unterricht bekannten Satzes ist die Gültigkeit der in den Aufgaben 3 und 4 gemachten Aussagen an den Bildern 17a, 17b, 17c, 19, 20 und 21 leicht abzulesen:

Satz 3: Sind P und Q zwei Punkte der Zahlengeraden und sind diesen Punkten die Zahlen p und q zugeordnet, so ist dem Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ das arithmetische Mittel der Zahlen p und q, also die Zahl $m=\frac{p+q}{2}$ zugeordnet (Bild 18).

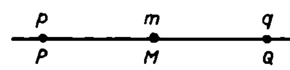


Bild 18

Zu ganzen Zahlen, deren Trägerpunkte auf der Zahlengeraden eine den Bildern 17a, 17b oder 17c entsprechende Lage haben, gehört jeweils genau ein normiertes (Siehe Ungleichungen X!) additives magisches Zahquadrat mit neun Feldern. Die durch Anwenden der acht Selbstabbildungen des Quadrates auf ein solches normiertes Zahlquadrat jeweils entstehenden acht additiven magischen Zahlquadrate sind jeweils sämtlich voneinander verschieden; denn in jedem solchen Zahlquadrat kommen mindestens sieben voneinander verschiedene Zahlen vor.

In den restlichen drei Fällen haben die den Zahlen des Bildes 11 auf der Zahlengeraden zugeordneten Punkte die folgende Lage (Bild 19)

In den letzten drei Fällen sind jeweils höchstens fünf der neun ganzen Zahlen des Bildes 11 voneinander verschieden. Zu dem jeweils gezeichneten Quadrat sind die Symmetrieachsen markiert.

a) Zeichnung für $0<y<\frac{x}{2}$:

b) Zeichnung für $0<y=\frac{x}{2}$:

c) Zeichnung für $0<\frac{x}{2}<y<x$:

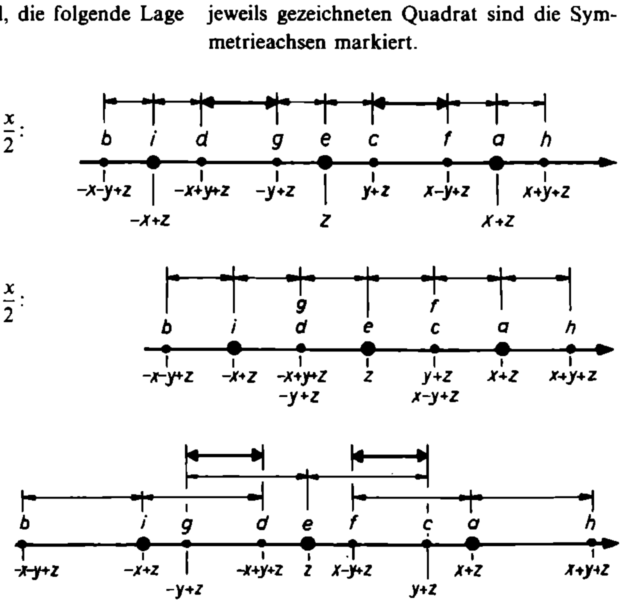
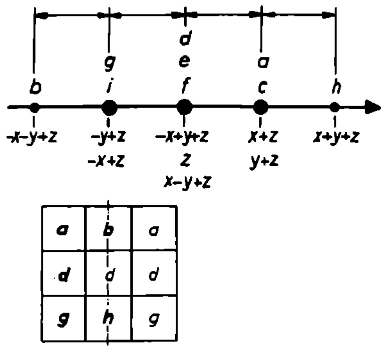


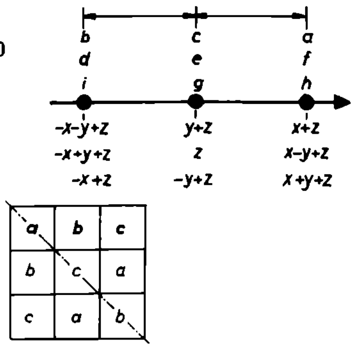
Bild 17

2. Fall

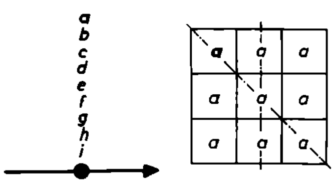
Bild 19



3. Fall
Bild 20



4. Fall
Bild 21



Neun ganze Zahlen, deren zugeordnete Punkte die den Bildern 19 und 20 (2. und 3. Fall) skizzierte Lage auf der Zahlengeraden, lassen sich auf jeweils genau vier Arten zur Bildung eines additiven magischen Zahlquadrates verwenden. Unter neunmaliger Verwendung der gleichen ganzen Zahl (4. Fall) läßt sich jeweils genau ein additives magisches Zahlquadrat bilden. *W. Träger*

Welche — wie viele Möglichkeiten gibt es? Teil 2

In *alpha*, Heft 6/71, haben wir einige Aufgaben lösen gelernt, die die in der Überschrift gestellten Fragen enthalten. Zur Wiederholung, Zusammenfassung und Ergänzung wollen wir folgende Aufgabe lösen:

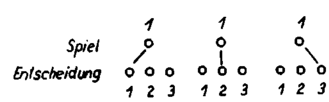
▲6▲ Welche bzw. wie viele Tipmöglichkeiten gibt es beim VEB Fußballtoto?

Ihr wißt, daß man für jedes Spiel drei Entscheidungsmöglichkeiten hat: 1 ≙ Sieg der ersten Mannschaft, 2 ≙ Sieg der zweiten Mannschaft, 0 ≙ unentschieden. Wir wollen die Anzahl der Tipmöglichkeiten für 12 Spiele ermitteln.

Lösungsplan

1. Zwei Mengen: Menge der Spiele, Dreiermenge (der Entscheidungsmöglichkeiten pro Spiel).
2. Da für jedes Spiel genau eine Entscheidung zu treffen ist, ist die Menge der Spiele bei den Zeichnungen oben, die Dreiermenge unten zu notieren.
3. a) Striche dürfen einander schneiden. (Warum?)
b) Zu einem untenstehenden Element dürfen mehrere Striche führen. (Warum?)

Die Anzahl der betrachteten Spiele bezeichnen wir mit m und setzen hierfür der Reihe



nach 1, 2, 3, ... ein. Die Anzahl der Entscheidungsmöglichkeiten pro Spiel beträgt stets $n=3$.

$m=1$. Es gibt 3 Möglichkeiten. (Bild 1)
$m=2$. Es gibt 9 Möglichkeiten. (Bild 2)
$m=3$. (Bild 3)

Das sind 9 Möglichkeiten. Jetzt folgen weiter 9 Möglichkeiten, bei denen der erste Strich zum zweiten und noch einmal 9 Möglichkeiten, bei denen der erste Strich zum letzten untenstehenden Element führt. Es gibt 27 Möglichkeiten.

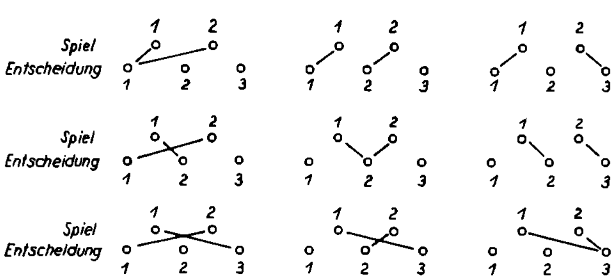
Sicherlich erkennt ihr schon, wie es weitergehen muß. Diese und die folgenden Ergebnisse tragen wir in eine Übersicht ein. (s. unten).

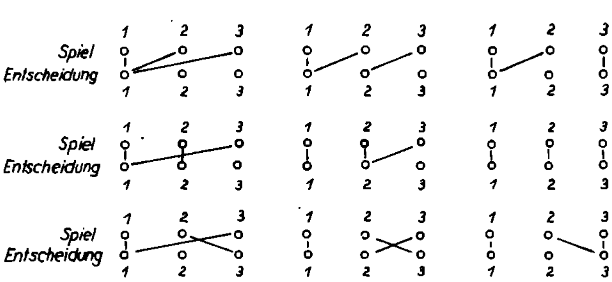
Das Ausfüllen der letzten Spalte ist am schwierigsten. Wir müssen versuchen, die jeweils in einer Zeile stehenden Zahlen der ersten beiden Spalten so miteinander in Beziehung zu bringen, daß wir als Ergebnis jeweils die in der dritten Spalte stehende Zahl dieser Zeile erhalten. Dabei beginnen wir nicht mit der ersten Zeile; diese können wir zuletzt vervollständigen. An Stelle von zwei Faktoren 3 schreiben wir 3^2, an Stelle von drei Faktoren 3 schreiben wir 3^3, an Stelle von vier Faktoren 3 schreiben wir 3^4 usw., an Stelle von m Faktoren n schreiben wir n^m. Wir können nun z. B. 3^{12} ausrechnen:

$3^{12}=3^6\cdot3^6=3^3\cdot3^3\cdot3^3\cdot3^3=27\cdot27\cdot27\cdot27$
$=729\cdot729=531\,441$

Bei 12 Spielen gibt es also 531 441 verschiedene Tipmöglichkeiten. Da wir für m jede beliebige (natürliche) Zahl einsetzen können, ist es nun möglich, für jede beliebige Anzahl von Spielen die Anzahl der Tipmöglichkeiten zu errechnen.

Man kann aber auch eine andere Überlegung anstellen: Wenn es pro Spiel nur zwei Tipmöglichkeiten gibt, etwa „gewonnen“ oder „nicht gewonnen“, so brauchten wir nur $n=2$ zu setzen und könnten im übrigen wie oben rechnen.





Spiele	Anzahl der Entscheidungsmöglichkeiten pro Spiel	Tipmöglichkeiten	Vermutete Gesetzmäßigkeit
1	3	3	$3=3$ $=3^1$
2	3	9	$3\cdot3=3\cdot3$ $=3^2$
3	3	27	$9\cdot3=3\cdot3\cdot3$ $=3^3$
4	3	81	$27\cdot3=3\cdot3\cdot3\cdot3$ $=3^4$
5	3	243	$81\cdot3=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=3^5$
.	.	.	. . .
		.	.
12	3	531 441	3^{12}
.	.	.	
			.
m	n		n^m

Eine Lücke können wir allerdings hier noch nicht schließen: In dem Augenblick, in dem wir an Stelle von Zahlen Variable einsetzen, in unserer Übersicht also in der letzten Zeile, behaupten wir etwas, was wir noch beweisen müssen. Das werdet ihr erst später lernen. Die Älteren von euch wissen, daß das mit Hilfe des *Beweisverfahrens der vollständigen Induktion* geschieht. Da wir bei der Lösung der hier zu besprechenden Aufgaben diesen Beweis nicht führen, formulieren wir in Übersichten immer in der ersten Zeile der letzten Spalte „vermutete Gesetzmäßigkeit". Eine bei vielen Aufgaben dieser Art vorkommende Gesetzmäßigkeit wollen wir durch Aufgabe 7 kennenlernen, die 1965 in der ersten Stufe der Mathematik-Olympiade für Klasse 6 gestellt wurde.

▲7▲ Auf wie viele verschiedenen Weisen kann man in der unten stehenden Tabelle die Wörter „Junge Welt" lesen, ohne dabei Zeilen oder Spalten zu überspringen?

J U N G E W
U N G E W E
N G E W E L
G E W E L T

Da man sich beim Auszählen der Möglichkeiten sicherlich verzählen wird, verfahren wir wie bei Aufgabe 6: Wir zerlegen diese Aufgabe in mehrere einfachere Aufgaben. In der folgenden Übersicht geben wir jeweils links die Buchstaben und rechts die Anzahl der Möglichkeiten an, diese Buchstaben entsprechend zu lesen.

$$\begin{array}{llllll}
J & 1 & J-U & 1\ 1 & \begin{array}{l} J\ 1 \\ | \\ U\ 1 \end{array} & \\
\begin{array}{l} J-U \\ |\quad | \\ U-N \end{array} & \begin{array}{l} 1\ 1 \\ \\ 1\ 2 \end{array} & \begin{array}{l} J-U-N \\ |\quad | \\ U-N \\ \quad | \\ \quad N \end{array} & \begin{array}{l} 1\ 1\ 1 \\ \\ 1\ 2 \\ \\ 1 \end{array} & &
\end{array}$$

Um also „Jun" zu lesen, gibt es, als Zeile bzw. Spalte geschrieben, jeweils eine Möglichkeit, in Quadratordnung zwei Möglichkeiten. Dieses Verfahren setzen wir fort:

$$\begin{array}{l} J-U-N \\ |\quad |\quad | \\ U-N-G \end{array}$$

Um festzustellen, wie oft wir „Jung" in nebenstehender Anordnung lesen können, brauchen wir nur entsprechend den eben gefundenen Ergebnissen 1 (JUN) und 2 $\begin{pmatrix}\text{JU}\\ \text{UN}\end{pmatrix}$ zu addieren. Ihr werdet nun in der Lage sein, folgende Zahlenordnung zu entwickeln:

$$\begin{array}{ll}
J-U-N-G-E-W & 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
|\quad |\quad |\quad |\quad |\quad | & \\
U-N-G-E-W-E & 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\
|\quad |\quad |\quad |\quad |\quad | & \\
N-G-E-W-E-L & 1\ 3\ 6\ 10\ 15\ 21 \\
|\quad |\quad |\quad |\quad |\quad | & \\
G-E-W-E-L-T & 1\ 4\ 10\ 20\ 35\ 56
\end{array}$$

Wir können also „Junge Welt" auf 56 Arten lesen.

Zwischen den hier angegebenen Zahlen bestehen mehrere interessante Beziehungen. Betrachtet diese Zahlenanordnung genau und versucht selbst, solche Beziehungen zu finden!

Wir geben einige an:

1. Die Zahlen in entsprechenden Zeilen und Spalten stimmen überein.
2. In Zeile bzw. Spalte 1 stehen nur Einsen.
3. Jede in einer anderen Zeile bzw. Spalte befindliche Zahl ist die Summe aus denjenigen beiden Zahlen, die unmittelbar davor- und darüberstehen.
4. Jede nicht in der ersten Zeile bzw. Spalte befindliche Zahl ist die Summe derjenigen Zahlen, die in der Zeile darüber bzw. in der Spalte davor bis zu eben dieser Zahl stehen.

Zum Beispiel gilt $1+3+6+10=20$.

Die Lösung von Aufgabe 7 kann man noch schneller durch Multiplikation und Division bestimmter Zahlen finden, wenn man die Regel hierfür kennt. Wir wollen sie uns erarbeiten:

Zur Erleichterung multiplizieren wir in unserer Zahlenanordnung jede Zahl der dritten Zeile mit 2, der vierten Zeile mit 6 und erhalten 2, 6, 12, 20, 30, 42 bzw.
6, 24, 60, 120, 210, 336.

Die jetzt in der ersten Zeile stehenden Zahlen sind die Produkte von jeweils zwei, die in der zweiten Zeile stehenden Zahlen die Produkte von jeweils drei aufeinanderfolgenden Faktoren. Es zeichnet sich wieder eine Gesetzmäßigkeit ab. Findet ihr sie selbst?

Wir geben sie zur Kontrolle an:

$1\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 4,\ 4\cdot 5,\ 5\cdot 6,\ 6\cdot 7$ bzw.
$1\cdot 2\cdot 3,\ 2\cdot 3\cdot 4,\ 3\cdot 4\cdot 5,\ 4\cdot 5\cdot 6,\ 5\cdot 6\cdot 7,\ 6\cdot 7\cdot 8$.

Um nun die Zahlen unserer ursprünglichen Zahlenanordnung zu erhalten, müssen wir die Zahlen der ersten Zeile jeweils durch $2=1\cdot 2$ und die der zweiten Zeile jeweils durch $6=1\cdot 2\cdot 3$ dividieren. Wir führen folgende Symbole ein:

$\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}=\binom{3}{3}$, gelesen 3 über 3,

$\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}=\binom{4}{3}$, gelesen 4 über 3 usw.

$\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}=\binom{2}{2}$, gelesen 2 über 2,

$\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}=\binom{3}{2}$, gelesen 3 über 2 usw.

Berechnet nun z. B. $\binom{7}{3}$, $\binom{8}{2}$, $\binom{9}{4}$!

Wir geben die Lösung der letzten Aufgabe an:

$$\binom{9}{4}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=126$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, wird man stets weitestmöglich dividieren, bevor man multipliziert. Wir werden also den Bruch immer erst kürzen.

Wir setzen $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n=n!$, gelesen „*n* Fakultät".

So ist z. B. $5!=120$.

Um verschiedene Ausdrücke einfacher darstellen zu können, setzen wir noch folgendes fest:

$$1!=0!=1$$

$$\binom{1}{1}=1,\ \binom{2}{1}=2,\ \binom{3}{1}=3,\ \ldots,\ \binom{n}{1}=n;$$

$$\binom{0}{0}=\binom{1}{0}=\binom{2}{0}=\ldots=\binom{n}{0}=1.$$

In $\binom{n}{m}$, gelesen *n* über *m*, darf *m* höchstens gleich *n* sein; es dürfen hierfür natürliche Zahlen eingesetzt werden. Es gilt also

$$\binom{n}{m}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(m-1)]}{m!}.$$

Man nennt $\binom{n}{m}$ einen Binomialkoeffizienten. Unsere im Ergebnis von Aufgabe 7 erhaltene Zahlenanordnung können wir nun wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{lllllll}
\binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \binom{4}{0} & \binom{5}{0} & \ldots \\
\binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \binom{5}{1} & \binom{6}{1} & \ldots \\
\binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \binom{6}{2} & \binom{7}{2} & \ldots \\
\binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \binom{5}{3} & \binom{6}{3} & \binom{7}{3} & \binom{8}{3} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Die Punkte sollen andeuten, daß man diese Zahlenanordnung nach rechts und nach unten beliebig fortsetzen kann. $\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}$ $=56$ läßt sich sehr schnell ausrechnen.

Wie kann man also nun eine solche Aufgabe der mehrfachen Lesbarkeit von Wörtern möglichst rasch lösen?

1. Wir zählen, mit 0 beginnend, die Buchstaben und erhalten die obenstehende Zahl des Binomialkoeffizienten.
2. Wir zählen, wieder mit 0 beginnend, die Zeilen der Anordnung und erhalten die untenstehende Zahl des Binomialkoeffizienten.

Beispiel:

M A T H E M
A T H E M A
T H E M A T
H E M A T I
E M A T I K $\quad\binom{9}{4}=126$

Es gibt also 126 Möglichkeiten, „Mathematik" in dieser Anordnung zu lesen. Habt ihr schon folgende Beziehung bemerkt?

$$\binom{5}{3}=\binom{5}{2},\quad \binom{6}{4}=\binom{6}{2},\quad \binom{8}{5}=\binom{8}{3};$$

wir vermuten also die Gültigkeit von

$$\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}.$$

Nun könnt ihr auch auf eine sehr einfache Art die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen Zahl *n* angeben.

$$1+2=\binom{3}{2}=3 \qquad 1+2+3=\binom{4}{2}=6$$

$$1+2+3+4=\binom{5}{2}=10$$

$$1+2+3+4+5=\binom{6}{2}=15$$

W. Türke

In Heft 3/72 erscheint der letzte Teil dieses Beitrags – eine Aufgabensammlung, d. Red.

Ramanujan —

das mathematische Genie Indiens

Teil 3

Hardy schrieb zum Anfang der Laufbahn *Ramanujans* in Cambridge: „Seine Auffassung vom Wesen eines mathematischen Beweises war mehr als nebelhaft; er gelangte zu allen seinen Ergebnissen, sowohl den frühen als auch den späteren, sowohl den richtigen als auch den falschen, mit Hilfe einer seltsamen Mischung intuitiven Erratens, induktiver Überlegungen und logischer Erörterungen...". „Es war unmöglich, einem solchen Menschen vorzuschlagen, sich systematisch die Grundlagen der Mathematik anzueignen. Gleichermaßen war es aber auch unmöglich, *Ramanujan* mit dem Glauben durchs Leben gehen zu lassen, daß alle Wurzeln der Zetafunktion reell sind." Schließlich erfolgte die Ausbildung *Ramanujans* durch Unterhaltungen und Seminare. In der Diskussion über ungelöste Probleme und durch die schöpferische Arbeit nahmen seine Kenntnisse rasch zu. Nach einiger Zeit kannte er sich in der Funktionentheorie und der analytischen Zahlentheorie recht gut aus. „Natürlich wurde aus ihm kein Mathematiker der neuen Schule", schrieb *Hardy*, „und das war vielleicht gar nicht einmal schlecht, aber er lernte zu begreifen, wann ein Satz bewiesen ist und wann nicht, und der Strom seiner originellen mathematischen Ideen floß weiter ohne geringste Anzeichen von Erschöpfung."

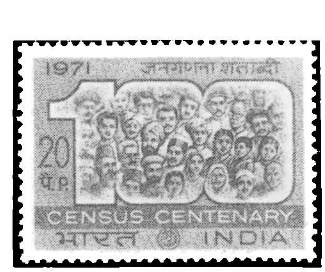
Der im Herbst 1914 beginnende Krieg behinderte die weitere Ausbildung *Ramanujans*. *Littlewood*, der neben *Hardy* ebenfalls mit *Ramanujan* arbeitete, wurde einberufen, und ein Lehrer, so sagte *Hardy*, reichte für einen solchen Schüler nicht aus. Das wissenschaftliche Leben in Cambridge und die internationalen Verbindungen erstarben. Nur in der Wohnung *Hardys* ging die tägliche Beschäftigung mit *Ramanujan* weiter.

Ramanujan arbeitete mit großem Eifer. Alles, was nicht Analysis oder Zahlentheorie war, ließ ihn völlig ungerührt. Für andere exakte Wissenschaften, für die Politik, Philosophie, Literatur und den Sport zeigte er im Gegensatz zu *Hardy* nicht das geringste Interesse. In den seltenen Fällen aber, in denen es *Hardy* gelang, mit *Ramanujan* ein Gespräch über nichtmathematische Themen zu führen, fand er in *Ramanujan* einen recht interessanten Gesprächspartner. *Hardy* beschrieb ihn als einen Menschen, der wie alle hervorragenden Persönlichkeiten seine Besonderheiten hatte, der aber kein „östliches Wunder" war, sondern eben ein kluger Mensch und außerdem noch ein großer Mathematiker.

Im Frühjahr 1917 erkrankte *Ramanujan* und mußte ins Krankenhaus. Dort wurde er regelmäßig von *Hardy* und anderen Cambridger Mathematikern besucht. Den größten Teil seines weiteren Aufenthaltes in England mußte er in Londoner Krankenhäusern verbringen, wohin er sehr bald überführt wurde. Zunächst schien seine Krankheit nicht besonders gefährlich zu sein, aber das feuchte englische Klima, die Kriegs- und Nachkriegsverhältnisse, das Mißtrauen *Ramanujans* gegenüber englischen Ärzten sowie das ständige Beharren auf einer für ihn ungeeigneten Diätkost führten schließlich dazu, daß sich seine Krankheit immer mehr verschlimmerte und in eine offene Tuberkulose überging.

Nach einem langen Kuraufenthalt im Herbst 1918 in einem Sanatorium an der Südwestküste Englands schien sich sein Gesundheitszustand etwas zu verbessern. Mit neuer Energie ging er an die Arbeit. Am 26. November wurde er zum Mitglied der Englischen Königlichen Gesellschaft (Englische Akademie der Wissenschaften) gewählt, gleichzeitig ernannte man ihn zum Professor der Universität Cambridge. Er war der erste Inder, dem diese Ehren zuteil wurden.

Anfang 1919 hatte sich der Gesundheitszustand *Ramanujans* so weit gebessert, daß die besten Mediziner Englands glaubten, er sei außer Gefahr. Er beschloß, wenigstens für eine gewisse Zeit nach Madras zurückzukehren. Die Universität Madras hatte ihm ebenfalls eine Professur angeboten. Offensichtlich war sein Entschluß ein schicksalsschwerer Fehler, denn in Europa hätte seine Krankheit möglicherweise vollständig geheilt werden können. Der Wunsch aber, nach der langen



links: Prof. Dr. Dababhoy Naoroji
Erster indischer Professor für Mathematik und Naturphilosophie — 1874 Erster Minister des ehemaligen Fürstenstaates Baroda — Vertreter im Nationalkogreß — 1886, 1893 und 1906 sein Präsident

rechts: 100 Jahre Volkszählung in Indien — Die Volkszählung vom 10. 3. bis 1. 4. 1971 ergab: 546955945 Einwohner, das sind durchschnittlich 182 Menschen pro km².

Trennung die Verwandten und die Heimat wiederzusehen, war zu stark. Nachdem er sich von seinen Freunden, insbesondere von *Hardy*, verabschiedet hatte, begab er sich im Januar 1919 voller Erwartung nach Indien.

Nach der Abreise *Ramanujans* wartete *Hardy* ungeduldig auf Nachricht. *Ramanujan* hüllte sich aber fast ein ganzes Jahr in Schweigen. Anfang 1920 kam dann der erste und zugleich letzte Brief *Ramanujans* in Cambridge an.

In diesem Brief verlor *Ramanujan* kein Wort über seinen Gesundheitszustand, und *Hardy* nahm an, daß er zumindest zufriedenstellend sei. In Wirklichkeit kam *Ramanujan* am 2. April 1919 sehr geschwächt in Madras an. Die ermüdende Reise hatte seine Gesundheit offenbar endgültig zerrüttet. Seine Kräfte ließen rasch nach, aber er wollte sich nicht in ärztliche Behandlung begeben und arbeitete fieberhaft an seinem letzten Steckenpferd — simulierenden Tetafunktionen. Im Januar 1920 begab er sich unter dem Druck seiner Freunde und der Ärzte in Madras in Behandlung. Es wurde alles für ihn getan, was möglich war, aber vergeblich. Am 26. April 1920 verstarb *Ramanujan* in einem Vorort von Madras.

Seine Arbeit an der Universität Madras hatte er faktisch nicht antreten können.

Die Nachricht vom Tode *Ramanujans* kam für die Cambridger Mathematiker völlig unerwartet. Unter der Leitung von *Hardy* wurde sehr bald intensiv begonnen, den wissenschaftlichen Nachlaß *Ramanujans* zu erforschen, angefangen von den ersten Eintragungen in seinen Notizbüchern bis zu den simulierenden Tetafunktionen. Seine Notizbücher wurden von Freunden in Indien handschriftlich abgeschrieben und nach Cambridge an Prof. *G. N. Watson* geschickt, der es übernahm, sie gründlich zu analysieren. Er war damit einige Jahre beschäftigt.

Obwohl *Hardy* fünf Jahre lang mit *Ramanujan* verkehrt hatte, blieben für ihn noch viele Fragen offen: die ersten Ergebnisse *Ramanujans*; die Wege, über die er zu ihnen gelangte; die Quelle seiner Kenntnisse in bezug auf einige Fragen, die nicht in dem Buch von *Carr* behandelt wurden usw. Später bedauerte das *Hardy* natürlich sehr, aber er konnte sich keine Schuld geben, weil es, wie er sagte, so viele neue und interessante Fragen gab, die unbedingt sofort mit *Ramanujan* erörtert werden mußten, daß die Rückkehr zu den alten Aufgaben immer weiter und weiter aufgeschoben wurde. Außerdem hoffte *Hardy* ja, wieder mit *Ramanujan* zusammenzukommen, denn niemand konnte dessen so baldigen Tod voraussehen. Vieles in den Arbeiten *Ramanujans* bleibt also ein historisches Rätsel.

Ein Jahr nach dem Tode *Ramanujans* schrieb *Hardy:* „Man kann sich darüber streiten, welche Bedeutung die Arbeiten *Ramanujans* haben, nach welchen Kriterien man ihn als Mathematiker einzuschätzen hat und welchen Einfluß er auf die Entwicklung der Mathematik haben wird. Seine Arbeiten sind nicht so einfach und folgerichtig wie die der größten Mathematiker; seine Ergebnisse wären bedeutsamer, wenn sie nicht so ungewöhnlich wären. Sie heben sich jedoch durch eine unbestrittene Eigenschaft hervor — die tiefgehende und unanfechtbare Originalität. Er wäre wahrscheinlich ein größerer Mathematiker geworden, wenn man ihn in der Jugend ausgebildet hätte. Er hätte wahrscheinlich mehr und auch Bedeutsameres entdeckt. Andererseits wäre er dann weniger *Ramanujan,* sondern eher ein europäischer Professor gewesen, und es ist schwer zu sagen, ob das ein Gewinn oder ein Verlust gewesen wäre...“. Die letzten Zeilen sind ganz offensichtlich in der frischen Erinnerung an den Tod des Freundes geschrieben worden, dessen leuchtende Persönlichkeit noch vor seinen Augen stand. 16 Jahre später befaßte sich *Hardy* noch einmal mit der Einschätzung *Ramanujans* und schrieb zu dem eben Zitierten: „Alles, was ich damals gesagt habe, bin ich auch jetzt zu wiederholen bereit, lediglich mit Ausnahme des letzten Satzes, der nach lächerlicher Sentimentalität klingt. Die Wissenschaft hat überhaupt nichts davon gewonnen, daß das Kumbakonamer College den einzigen großen Gelehrten, den es hatte, abwies, und der Verlust war unermeßlich. Das Schicksal *Ramanujans* ist das schlimmste mir bekannte Beispiel für den Schaden, der durch ein wenig effektives und zu starres Bildungssystem verursacht werden kann. Man hätte nicht viel gebraucht, nur jährlich 60 Pfund Sterling für einen Zeitraum von fünf Jahren, Verständnis für Menschen mit wirklichen Kenntnissen und etwas Vorstellungskraft, und die Welt wäre um einen ihrer größten Mathematiker reicher geworden...“.

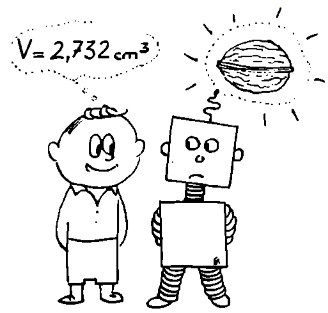
Zu dem von *Hardy* Gesagten braucht man nur hinzuzufügen, daß nicht nur das starre und uneffektive Bildungssystem schuld war. Dieses System war ja nur Folge der allgemeinen Lage Indiens als einer Kolonie, in der jedwede Entwicklung einer Nationalkultur, darunter auch die Entwicklung von nationalen wissenschaftlichen Kadern, unterdrückt wurde.

Ramanujan war der erste indische Mathematiker, der weltweite Anerkennung erhielt. Jetzt verfügt die Republik Indien über bedeutende mathematische Kader, die Wissenschaft in Indien erfährt einen großen Aufschwung. Es ist überflüssig zu sagen, daß das Andenken an *Ramanujan* in den Herzen der indischen Wissenschaftler lebt. Sein Name gilt als Symbol der erwachten Schöpferkraft des indischen Volkes.

V. Lewin

Anekdote über Ramanujan siehe Seite 26, d. Red.

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 1. Juni 1972

5▲882 Wieviel Kilogramm Zinn und wieviel Kilogramm Blei sind einzuschmelzen, um daraus 15 kg Lötzinn herzustellen, wenn auf zwei Gewichtsteile Zinn drei Gewichtsteile Blei kommen?

Uwe Szyszka, 2001 Brohm, Kl. 5

W 5 ■ 883 Von der Zeitschrift „Mosaik" sind bisher die Hefte mit den laufenden Nummern von 1 bis 157 erschienen. Jemand ist im Besitz fast aller Hefte, ihm fehlt genau ein Heft. Dividiert man die Anzahl der im Besitz des Lesers befindlichen Zeitschriften durch 13, so ist dieser Quotient genau dreimal so groß wie der Quotient, den man erhält, wenn man die durch die laufende Nummer der fehlenden Zeitschrift dargestellte Zahl durch 13 dividiert. Welche Nummer der Zeitschrift fehlt dem Leser?

Annegret Kirsten, August-Bebel-OS Leuna, Kl. 7c

W 5 ■ 884 Doris ist Schülerin einer dritten Klasse; sie wurde im Alter von sechs Jahren eingeschult und regelmäßig versetzt. Doris hat zwei jüngere Schwestern, von denen die eine vier Jahre jünger als die andere ist. Addiert man die Zahlen, die das Lebensalter ihrer Schwestern (in ganzen Zahlen) angeben, so erhält man die Zahl des Lebensalters von Doris. Wie alt sind die drei Schwestern?

Waltraud Rohleder, 29 Wittenberge, Friedrich-Ludwig-Jahn-OS I, Kl. 8a

fünf natürlichen Zahlen a, b, c, d und e gelten die folgenden Ungleichungen:

1. $a>e$, 3. $c>e$, 5. $a>b$, 7. $c>a$,
2. $b<c$, 4. $d<e$, 6. $b<d$, 8. $a>d$.

Ordne diese Zahlen nach ihrer Größe; beginne mit der kleinsten! Welche der Ungleichungen werden zur Lösung der Aufgabe nicht benötigt?

* 5 * 886 Alle 36 Schüler einer 5. Klasse beteiligten sich an der ersten Stufe der diesjährigen Mathematikolympiade. Jeder hatte genau vier Aufgaben zu lösen. Die Korrektur durch den Mathematiklehrer dieser Klasse brachte folgendes Ergebnis:
Die Anzahl der Schüler, die keine Aufgabe lösten, war gleich der Anzahl derjenigen, die alle vier Aufgaben lösten. Die Anzahl der Schüler, die nur eine Aufgabe lösten, war gleich der Anzahl derjenigen, die drei Aufgaben gelöst hatten, aber doppelt so groß wie die Anzahl der Schüler mit vier gelösten Aufgaben. Die Anzahl aller von den Schülern insgesamt gelösten Aufgaben war dreimal so groß wie die Anzahl der Schüler mit genau zwei gelösten Aufgaben und doppelt so groß wie die Anzahl aller Teilnehmer. Wieviel Schüler haben keine der vier Aufgaben gelöst? Wieviel Schüler lösten genau eine, genau zwei, genau drei, alle Aufgaben?

6▲887 Es ist zu beweisen, daß für jeden Rhombus das Produkt aus den Maßzahlen der Längen der Diagonalen gleich dem zweifachen Produkt aus den Maßzahlen der Längen einer Rhombusseite und ihrer zugehörigen Höhe ist, wenn alle Längen in der gleichen Maßeinheit gemessen werden.

Herwig Gratias, EOS Sömmerda, Kl. 10

W 6 ■ 888 Durch drei LKW, die jeder 2,7 t Kies je Fuhre laden, sind insgesamt 54 t Kies zu drei verschiedenen Baustellen zu fahren. Jeder dieser LKW fährt für genau eine Baustelle. Für eine Fuhre benötigt der erste LKW 12 min, der zweite 20 min und der dritte 30 min. Wieviel Tonnen Kies erhält jede Baustelle, wenn die Gesamttransportzeiten für jeden LKW gleich groß sind?

Schüler Ulrich Schwarz, 9401 Hundshübel, Kl. 9

W 6 ■ 889 Auf die Frage, wieviel Mädchen und wieviel Jungen der 6. Klassen einer Oberschule sich regelmäßig am *alpha*-Wettbewerb beteiligten, antwortete der Mathematiklehrer dieser Klassen scherzhaft: „Dividiere ich die Anzahl der genau 61 Wettbewerbsteilnehmer durch die Anzahl der teilnehmenden Mädchen, so erhalte ich 10 als Rest. Dabei ist die Anzahl der am Wettbewerb regelmäßig teilnehmenden Jungen mehr als doppelt so groß, aber weniger als dreimal so groß wie die der Mädchen." Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der am Wettbewerb teilnehmenden Jungen und die der Mädchen!

Karin Vetter, 8256 Weinböhla, Kl. 8

* 6 * 890 Es ist zu beweisen, daß jede Primzahl p, die größer als 3 ist, bei Division durch 6 entweder des Rest 1 oder den Rest 5 läßt.

Herwig Gratias, EOS Sömmerda, Kl. 10

* 6 * 891 Zeichne ein Dreieck ABC, konstruiere den Mittelpunkt M der Seite $\overline{AB}$, verbinde C mit M und verbinde einen inneren Punkt P der Strecke $\overline{CM}$ mit den Punkten A und B. Es ist zu beweisen, daß die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle PCA$ und $\triangle PBC$ gleich sind!

Sch.

7▲892 Ermittle alle sechsstelligen natürlichen Zahlen von der Form $xy37yx$, die durch 36 teilbar sind!

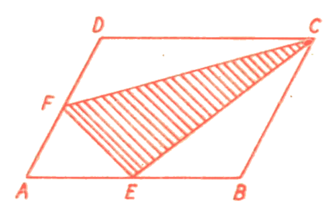
Elke Mietzsch, Pasewalk, Kl. 9

W 7 ■ 893 Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen anzugeben, deren Quadrat eine dreistellige Zahl ist, die auf dieselbe Ziffer endet, mit der die zweistellige Zahl beginnt.

Jürgen Funke, OS Neubrandenburg, Kl. 8

W 7 ■ 894 Die Abbildung stellt ein Parallelogramm $ABCD$ dar. Der Mittelpunkt E der Seite $\overline{AB}$ wurde mit dem Mittelpunkt F der Seite $\overline{AD}$ und mit dem Eckpunkt C, ferner C mit F verbunden. Der Flächeninhalt des Dreiecks ECF ist durch den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ auszudrücken!

Sch.



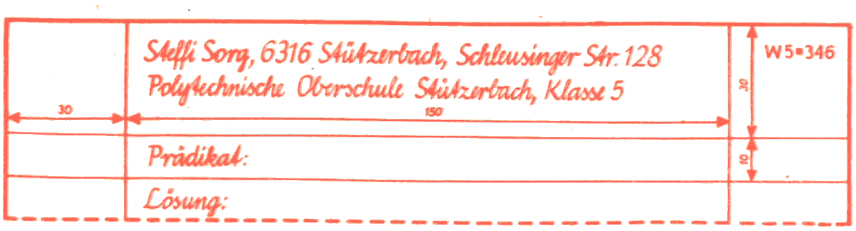
* 7 * 895 Für welche natürlichen Zahlen $a>b>0$ ist die Ungleichung $\frac{a+b}{a-b}>a\cdot b$ erfüllt?

Doris Kopitzke, Neustrelitz, Kl. 8

* 7 * 896 Der Satz „Ergänzen sich die einander gegenüberliegenden Winkel eines konvexen Vierecks zu 180°, so ist das Viereck ein Sehnenviereck" ist indirekt zu beweisen! (Gehe dabei von der Annahme aus, daß sich die einander gegenüberliegenden Winkel zu 180° ergänzen und das Viereck kein Sehnenviereck sei, und leite daraus einen Widerspruch her!)

T.

8▲897 Zum Bau von Werkhallen, Lagerräumen, Garagen u. a. werden bei Anwen-



dung der Leichtbauweise häufig Pur-Al-Platten benutzt, das sind aluminiumbeschichtete Platten aus Polyurethan-Hartschaum. Eine solche Platte von 50 mm Stärke hat eine Masse von 6,3 kg je 1 m^2.
a) Wie groß ist die mittlere Dichte (in $g \cdot cm^{-3}$) einer solchen Platte?
b) Wie groß ist die Masse einer Platte von 15,40 m Länge, 1 m Breite und 80 mm Stärke, wenn die mittlere Dichte ebenso groß wie im Falle a) ist? *L.*

W 8 ■ 898 Am 16. Februar 1972, seinem Geburtstag, stellte ein Mathematiker fest, daß das an diesem Tage von ihm erreichte Alter (in Jahren) mit der Quersumme der Jahreszahl seines Geburtsjahres übereinstimmt. Wie alt ist dieser Mathematiker am 16. Februar 1972 geworden, und in welchem Jahre ist er geboren?

Herwig Gratias, EOS Sömmerda, 10. Klasse

W 8 ■ 899 Es sei $ABCD$ ein Drachenviereck mit der Symmetrieachse BD, mit der Seite $\overline{AD}=5$ cm und der Diagonale $\overline{AC}=8$ cm. Ferner sei $\sphericalangle DAB=90°$.
Es soll die Länge der Diagonale $\overline{BD}$ berechnet werden.

Herwig Gratias, EOS Sömmerda, 10. Klasse

* 8 * 900 Ein Schiff benötigt für die Fahrt auf einer bestimmten Strecke eines Flusses stromaufwärts 4 Std., dagegen bei gleicher Maschinenleistung und gleicher Strömungsgeschwindigkeit stromabwärts nur 3 Std.
a) In welcher Zeit würde dieses Schiff bei gleicher Maschinenleistung eine gleichlange Strecke in einem ruhenden Gewässer zurücklegen?
b) In welcher Zeit würde ein Floß, das stromabwärts treibt, eine gleichlange Strecke zurücklegen?

Ullrich Müller, EOS „Geschwister Scholl", Freiberg, 11. Klasse

* 8 * 901 Es ist zu beweisen, daß für jedes gleichschenklige Trapez gilt:
1. Wenn die Diagonalen eines gleichschenkligen Trapezes aufeinander senkrecht stehen, so ist seine Mittellinie ebenso lang wie seine Höhe.
2. Wenn die Mittellinie eines gleichschenkligen Trapezes ebenso lang wie seine Höhe ist, so stehen die Diagonalen dieses Trapezes aufeinander senkrecht.

StR Lerche, Dresden; OL Polster, Dresden

9 ▲ 902 Es ist zu beweisen, daß sich das Quadrat einer jeden natürlichen Zahl, die größer als 2 ist, als Differenz der Quadrate zweier von Null verschiedener natürlicher Zahlen darstellen läßt, daß also für jede natürliche Zahl n mit $n>2$ gilt:

$$n^2=x^2-y^2,$$

wobei x und y von Null verschiedene natürliche Zahlen sind.

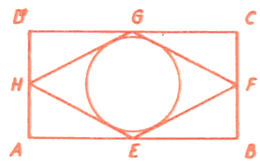
V. Wassiljew, Schüler der Klasse 9 A der Otto-Grotewohl-Schule in Moskau, UdSSR

W 9 ■ 903 Es seien f_1 und f_2 zwei für alle reellen Zahlen x definierte Funktionen mit
$f_1(x)=4x^2-1{,}3$ und
$f_2(x)=5x+2$. Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die
$f_1[f_2(x)]=f_2[f_1(x)]$ gilt.

Rainer Zerck, Wismar, EOS „Geschwister Scholl", Kl. 10

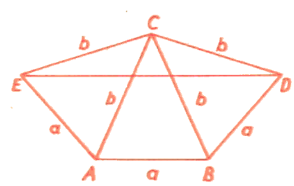
W 9 ■ 904 Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{BC}=a$ und $\overline{AB}=2a$. Ferner seien E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten dieses Rechtecks. Dem Rhombus $EFGH$ sei ein Kreis einbeschrieben (vgl. die Abb.).
Es sind der Radius und der Flächeninhalt dieses Kreises zu berechnen.

Ingolf Kunath, EOS Meißen, Kl. 11



* 9 * 905 Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel an der Spitze kleiner als 60° ist, dessen Basis die Länge a und dessen Schenkel die Länge b haben. Ferner seien EAC und BDC zwei gleichschenklige Dreiecke, deren Basen $\overline{EA}$ und $\overline{BD}$ ebenfalls die Länge a haben und von denen jeweils ein Schenkel mit den Schenkeln des gleichschenkligen Dreiecks ABC zusammenfällt (vgl. die Abb.).
Es ist die Länge der Strecke $\overline{ED}$ aus den gegebenen Längen a und b zu berechnen.

Rüdiger Nützmann, stud. math. Universität Rostock



* 9 * 906 Es ist zu beweisen, daß für den Flächeninhalt A eines Sehnenvierecks, dessen Umkreis den Radius r hat, stets
$A \leq 2r^2$ gilt. *Sch.*

10 ▲ 907 Jemand schließt wie folgt:
„Da für jede reelle Zahl q mit $0<q<1$ und für jede von Null verschiedene Zahl n

(1) $\quad q^n > q^{n+1}$ gilt, folgt (1)

$\lg q^n > \lg q^{n+1}$, also (2)

$n \lg q > (n+1)\lg q.$ (3)

Ich dividiere jetzt auf beiden Seiten durch $\lg q \neq 0$ und erhalte

$n>n+1.$ (4)

Damit habe ich bewiesen, daß jede natürliche Zahl größer als ihr Nachfolger ist."
Offenbar ist das falsch. Wo steckt der Fehler bei dieser Schlußweise?

Technische Universität Dresden Sektion Mathematik

W 10 ■ 908 Es sei z eine (im dekadischen Positionssystem) 1972stellige Zahl, deren erste und letzte Grundziffer gleich 1 ist und deren übrige Grundziffern sämtlich gleich 0 sind:

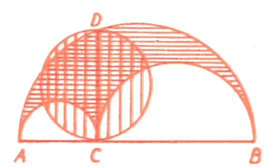
$$z=\underbrace{1000\ldots001}_{1970\ \text{Ziffern}}$$

Man beweise, daß die Zahl z keine Primzahl ist.

Gerd Weißenborn, Berlin, EOS „Heinrich Hertz", Klasse 10

W 10 ■ 909 Einem Halbkreis mit dem Begrenzungsdurchmesser $\overline{AB}$ seien zwei Halbkreise einbeschrieben, deren Begrenzungsdurchmesser $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ auf $\overline{AB}$ liegen und die sich in dem Punkt C berühren (vgl. die Abb.). Ferner sei im Punkt C auf $\overline{AB}$ die Senkrechte errichtet, die den Halbkreis über $\overline{AB}$ in dem Punkt D schneidet. Es ist zu entscheiden, ob der Flächeninhalt des in der Abbildung senkrecht schraffierten Kreises mit $\overline{CD}$ als Durchmesser größer, kleiner oder gleich dem Flächeninhalt der in der Abbildung quer schraffierten Figur ist, die durch die drei Halbkreisbogen über $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ begrenzt wird.
Erst schätzen, dann rechnen und begründen!

„Quant", 1971, Heft 5



* 10 * 910 Es sind alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen anzugeben, deren Quadrate gleich einem Vielfachen von 864 und die kleiner als 864 sind. *L.*

* 10 * 911 Es ist zu beweisen, daß für alle Winkel mit $0<\alpha<45°$ die Gleichung

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad (1)$$

und $$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ erfüllt sind.} \qquad (2)$$

Marlies Eberlein, Niederfrauendorf, EOS „Glück auf", Altenberg, Kl. 12

Achtung — alpha-Wettbewerb

Mit Heft 2/72 endet der *alpha*-Wettbewerb des Schuljahres 1971/72. Die Antwortkarten zum Heft 2/72 werden Anfang der Sommerferien an die Teilnehmer versandt.
Zwischen dem 1. und 10. September 1972 sind alle (richtigen) Antwortkarten *geschlossen* an die Redaktion, 7027 Leipzig, Postfach 14 einzusenden. Wer zwei Urkunden (oder mehr) einsendet, dazu die Karten des Jahres 1971/72, erhält das *Abzeichen in Gold* und sein Name wird in *alpha* veröffentlicht. Bitte alle Einsendungen (und evtl. Rückantwortbriefe) richtig frankieren! Geschwister senden ihre Unterlagen *getrennt* ein. *Red. alpha*

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade (5./6. 2. 1972)

Olympiadeklasse 7

1. Ermittle alle Primzahlen p, die gleichzeitig den folgenden Bedingungen genügen:
(1) $p < 100$.
(2) p läßt sowohl bei Division durch 3 als auch bei Division durch 5 jeweils den Rest 2.
(3) p läßt bei Division durch 4 den Rest 1.

2. In einer Klasse mit 28 Schülern beteiligen sich alle Schüler am außerunterrichtlichen Sport, und zwar jeder an mindestens einer der folgenden vier Sportarten: Fußball, Leichtathletik, Schwimmen und Turnen, in jeder dieser Sportarten mindestens 1 Schüler. Kein Schüler beteiligt sich an einer Sportart, die hier nicht aufgezählt ist.
Bekannt ist von den Schülern dieser Klasse:
(1) Jeder Schüler betreibt höchstens zwei Sportarten.
(2) Genau 18 Schüler beteiligen sich an genau einer Sportart.
(3) Von den Schülern, die Leichtathletik betreiben, nimmt genau die Hälfte auch noch am Turnen teil.
(4) Jeder Schwimmer betreibt zwei Sportarten, wobei alle anderen Sportarten in gleicher Anzahl vertreten sind.
(5) Die Anzahl der Schüler, die nur turnen, ist gleich der Anzahl der Schüler, die nur Fußball spielen.
(6) Die Menge der Schüler, die sowohl turnen als auch Fußball spielen, ist leer.
(7) Die Anzahl der Schüler, die sowohl Turnen als auch Leichtathletik betreiben, ist gleich der Anzahl derjenigen unter den restlichen Schülern, die sich ebenfalls an zwei Sportarten beteiligen.
Ermittle die Anzahlen aller Schüler dieser Klasse, die sich an
a) Fußball
b) Leichtathletik
c) Schwimmen
d) Turnen
beteiligen

3. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Auf BC liege ein Punkt P_1 derart, daß
$\overline{BP_1} = \overline{P_1C}$ gilt, auf CD liege ein Punkt P_2 mit $\overline{P_2D} = 3\,\overline{CP_2}$ und auf DA ein Punkt P_3 mit $\overline{P_3A} = 3\,\overline{DP_3}$.
Ein Punkt P wandere auf Seiten des Quadrates von P_1 über B und A nach P_3.
Es sei nun A_Q der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und A_V der des Vielecks $PP_1P_2P_3$.
Ermittle sämtliche Lagen von P, für die das Verhältnis $A_V : A_Q$
a) am größten
b) am kleinsten ist!
Berechne das Verhältnis für jeden der beiden Fälle!
Dabei sei auch zugelassen, daß P mit P_1 bzw. P_3 zusammenfällt, falls hierbei eines der gesuchten Verhältnisse auftritt.

4. Fritz erzählt: In unserer Klasse gibt es genau doppelt soviel Mädchen wie Jungen. Wären es je 5 Jungen und Mädchen weniger, dann hätten wir genau dreimal soviel Mädchen wie Jungen.
Ermittle die Anzahl aller Mädchen und die aller Jungen dieser Klasse!

5. Beweise den folgenden Satz: Ist P ein Punkt, der im Innern oder auf dem Rande eines Quadrates $ABCD$ liegt, so ist die Summe der Längen der Verbindungsstrecken von P mit den vier Eckpunkten A, B, C, D größer als die doppelte Länge einer Quadratseite.

6. Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 5$ cm, $h_a = 4{,}5$ cm, $s_a = 5{,}5$ cm! Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_a die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch B und C senkrecht steht, und s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Olympiadeklasse 8

1. In ein leeres Gefäß (ohne Abfluß) mit einem Fassungsvermögen von 1000 Liter flossen mit gleichmäßiger Strömungsgeschwindigkeit zunächst in jeder Sekunde genau 30 Liter Wasser und von einem späteren Zeitpunkt t ab in jeder Sekunde genau 15 Liter Wasser. Nach genau 40 s, gemessen vom Anfang an, war das Gefäß gefüllt.
Ermittle, welcher Bruchteil des Gefäßinhalts zum Zeitpunkt t gefüllt war!

2. Von sieben Schülern soll jeder auf sein Zeichenblatt vier voneinander verschiedene Geraden zeichnen. Dabei soll der erste Schüler die Geraden so zeichnen, daß kein Schnittpunkt, der zweite so, daß genau 1 Schnittpunkt auftritt, der dritte so, daß genau 2 Schnittpunkte, der vierte so, daß genau 3 Schnittpunkte, der fünfte so, daß genau vier Schnittpunkte, der sechste so, daß genau 5 Schnittpunkte, und der siebente Schüler so, daß genau 6 Schnittpunkte auftreten. Auch Schnittpunkte, die außerhalb des Zeichenblattes liegen, werden hierbei mitgezählt.
Nach einer gewissen Zeit behaupten der zweite, der dritte und der sechste Schüler, daß ihre Aufgabe nicht lösbar sei.
Stelle fest, wer von den drei Schülern recht und wer nicht recht hat, und beweise deine Feststellung!

3. Ermittle alle reellen Zahlen x, für die ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen
$a = -5x + 12 \quad b = 3x + 20 \quad c = 4x + 16$
existiert! (Überlege, welche Bedingungen a, b und c dabei erfüllen müssen!)

4. Beweise, daß für je zwei rationale Zahlen $a > 2$, $b > 2$ das Produkt ab größer als die Summe $a + b$ ist!

5. Gisela stellt auf einem Pioniernachmittag folgende Aufgabe: „Wenn ich aus diesem Gefäß mit Nüssen an fünf von euch dem ersten die Hälfte und eine halbe Nuß und dann dem zweiten, dem dritten usw. nacheinander jeweils die Hälfte der noch vorhandenen Nüsse und eine halbe dazu gebe, dann habe ich alle verbraucht.
Wie groß ist die Anzahl der Nüsse, die das Gefäß enthielt?
Wie groß ist für jeden der fünf Pioniere die Anzahl der Nüsse, die er erhalten würde?"

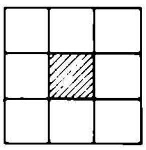
6. Einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, $a > b$, sei ein Parallelogramm $EFGH$ so einbeschrieben, daß die Seiten DA und BC des Rechtecks von Eckpunkten des Parallelogramms im Verhältnis $2:3$ oder $3:2$, die Seiten AB und CD im Verhältnis $3:4$ oder $4:3$ geteilt werden und E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA liegen.
Stelle fest, ob dies auf eine oder mehrere Weisen möglich ist! Ermittle in jedem der möglichen Fälle das Verhältnis der Flächeninhalte von Rechteck und Parallelogramm zueinander!

Olympiadeklasse 9

1. Günter erzählt: „Die sechsstellige Telefonnummer unserer Schule merke ich mir folgendermaßen: Ich schreibe unsere zweistellige Hausnummer hin. Dahinter schreibe ich die Quersumme der Hausnummer und füge nun jeweils die Summe aus den letzten beiden hingeschriebenen Zahlen an, bis sechs Ziffern dastehen.
Übrigens kommt in der Telefonnummer

unserer Schule keine Eins vor, und unsere Hausnummer ist eine durch 3 teilbare Zahl."
Wie lautet Günters Hausnummer und wie die Telefonnummer seiner Schule?

2. In die nebenstehende Figur (Bild A 9; 2) sollen neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so eingetragen werden, daß in jedem Feld genau eine steht und die drei „Zeilensummen", die drei „Spaltensummen" und die zwei „Diagonalsummen" sämtlich einander gleich sind (magisches Quadrat).



Beweisen Sie, daß eine derartige Belegung genau dann möglich ist, wenn in dem schraffierten Feld die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen steht!

3. Beweisen Sie den folgenden Satz: Verhalten sich die Seitenlängen eines Dreiecks $\triangle ABC$ wie $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$, dann stehen zwei Seitenhalbierende dieses Dreiecks senkrecht aufeinander.

4. In einem Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ und $\overline{BC}=\overline{DA}=b$ $(a>b)$ schneide die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAD$ die Seite CD in S_1. Weiter sei S_2 der Mittelpunkt von AB.
Ermitteln Sie das Verhältnis $a:b$ der Seitenlängen eines solchen Rechtecks, bei dem die Halbierende des Winkels $\sphericalangle AS_2C$ die Seite CD in S_1 schneidet!

5. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweisen Sie, daß dann
$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\geqq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right) \text{ gilt!}$$
Geben Sie alle Fälle an, in denen Gleichheit eintritt!

6. Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(x;\, y)$ ganzer Zahlen x, y, die Lösungen der folgenden Gleichung sind:
$2x^2-2xy-5x-y+19=0.$

Olympiadeklasse 10

1. Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(a;\, b)$ reeller Zahlen a, b mit $a\neq 0$, $b\neq 0$, für die folgendes gilt:
(1) Die Summe der beiden Zahlen ist 6.
(2) Die Summe der Reziproken beider Zahlen ist ebenfalls 6.

2. Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(x;\, y)$ jeweils zweistelliger natürlicher Zahlen x und y mit $x>y$, für die folgendes gilt:
(1) Schreibt man die Ziffern der Zahl x in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y.
(2) Schreibt man die Ziffern der Zahl x^2 in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y^2.

3. Gegeben sei die Kathetenlänge $\overline{BC}=a$ eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C, für das $\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$ gilt.
Die Halbierende des rechten Winkels $\sphericalangle ACB$ schneide den Umkreis des Dreiecks außer in C noch in D.
Man berechne die Länge der Sehne CD als Funktion von a.
Hinweis: Nach einem bekannten Satz der ebenen Geometrie teilt im Dreieck die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

4. Ein gerader Kreiskegelkörper mit dem Radius $R=6$ und der Höhenlänge h sei so zylindrisch durchbohrt, daß die Achse des Kegels mit der des Bohrloches zusammenfällt. Wie groß muß der Radius r (R, h, r in Zentimeter gemessen) des Bohrlochs gewählt werden, wenn das Volumen des Restkörpers halb so groß sein soll wie das des Kegelkörpers?

5. Eine Funktion $f(x)$, die für alle reellen Zahlen x definiert sei, sei periodisch mit der Periode p, d. h. für alle reellen x gelte $f(x+p)=f(x)$, wobei p die kleinste positive Zahl sei, für die das gilt. Welche kleinste positive Periode hat dann die Funktion

a) $F(x)=\frac{1}{2}f(x)$, b) $G(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$?

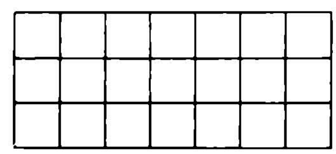
6. Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a-b=3$ cm, $\alpha=70°$ und $\beta=50°$!
Dabei seien a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$.
Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Olympiadeklasse 11/12

1. Gegeben seien in einer Ebene zwei sich schneidende Geraden g und h. Die Größe des einen ihrer vier Schnittwinkel sei $\alpha\leqq 90°$.
a) Es ist zu beweisen: Zwei nacheinander ausgeführte Spiegelungen der Ebene, erst an g, dann an h, lassen sich stets durch eine Drehung der Ebene ersetzen (d. h. sie sind einer Drehung der Ebene äquivalent); deren Drehpunkt und Drehwinkel sind zu ermitteln.
b) Es ist festzustellen, ob sich dieselbe Drehung wie in a) ergibt, wenn man erst an h und dann an g spiegelt.

2. Man beweise, daß die Gleichung
(1) $4^x+6^x=9^x$
keine rationalen Lösungen besitzt.

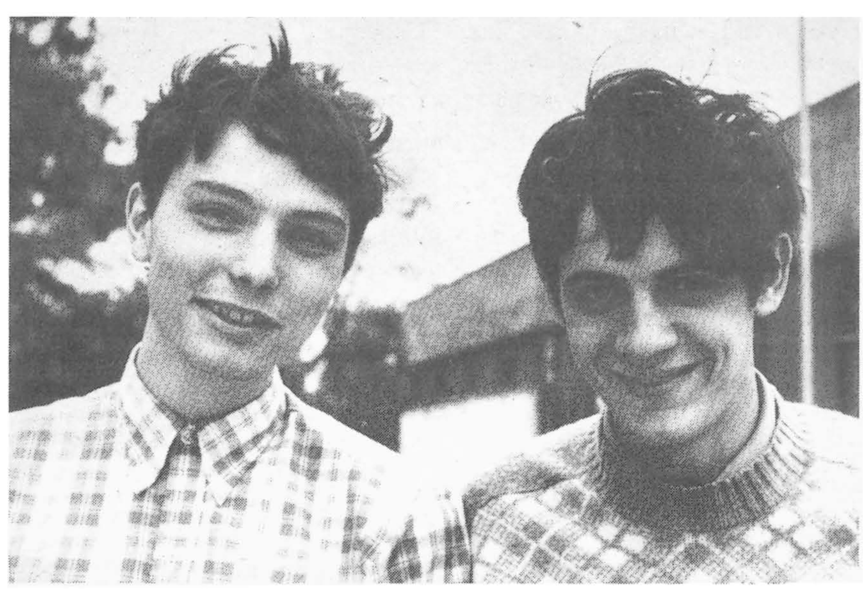
3. 21 leere Felder, die in Form eines Rechtecks von 3 Zeilen und 7 Spalten wie in Bild 11/12; 3 angeordnet sind, sollen so mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 belegt werden, daß jedes Feld mit genau einer der angegebenen Zahlen belegt wird und dabei insgesamt jede dieser Zahlen dreimal vorkommt. Dabei sollen die drei Zahlen jeder Spalte paarweise voneinander verschieden sein, und von den sechs Zahlen in je zwei Spalten dürfen höchstens zwei übereinstimmen.



Man gebe eine Belegung der geforderten Art an und begründe, wie sich eine derartige Belegung finden läßt.

4. a) Es seien $a_0=-4$ und $a_1=2$ die ersten beiden Glieder einer unendlichen Folge $\{a_n\}$. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n\geqq 2$ das arithmetische Mittel der beiden vorhergehenden Glieder.
(Fortsetzung siehe S. 47)

Pierre-Louis Curien (links), Autor unseres Beitrags auf Seite 28 mit seinem Mannschaftskameraden Hervé Pépin.



In freien Stunden alpha heiter

Hexa — Hexa — Flexagon

Macht mit! Wir konstruieren ein sehr merkwürdiges Gebilde, das Euch viel Freude bereiten wird.
Einen Streifen aus 18 gleichseitigen Dreiecken (Bild 1) falten wir um die eingezeichneten Achsen immer in gleicher Richtung. Damit erhalten wir einen Streifen, bei dem jeweils zwei Dreiecke übereinanderliegen. Wir falten weiter entsprechend den folgenden Abbildungen (Bild 2 bis 5). Zum Abschluß kleben wir den Falz auf die vorher markierte Fläche und erhalten unser „Hexa — Hexa — Flexagon".

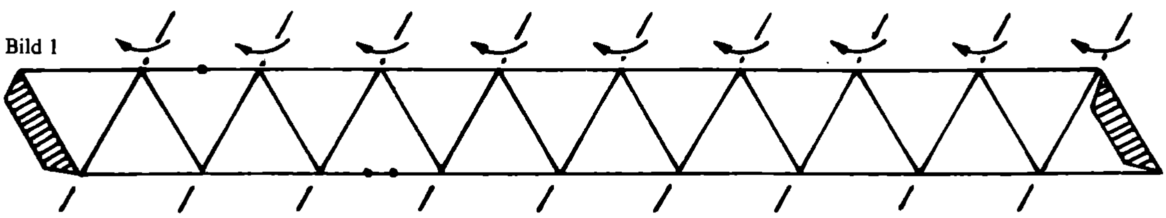


Bild 1

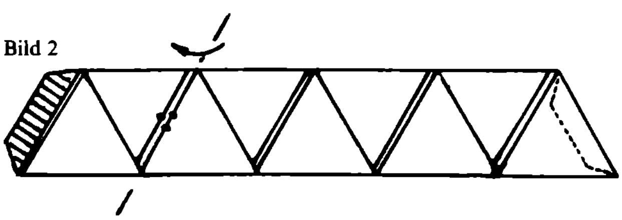
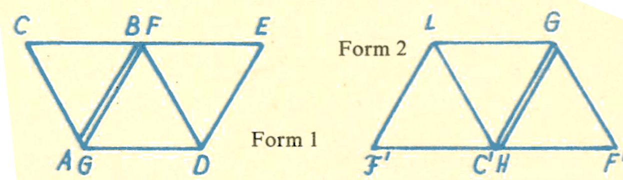


Bild 2

Welche merkwürdigen Eigenschaften hat dieses Gebilde? Kennzeichnet alle sichtbaren Flächen und versucht, das Hexa — Hexa — Flexagon so zu falten, daß ungekennzeichnete Flächen zum Vorschein kommen! Wie ändert sich dabei die Anordnung der einzelnen Dreiecke?
Hinweis: „Ungekennzeichnete" Flächen des Hexa — Hexa — Flexagons erhält man folgendermaßen: Wir falten das Flexagon einmal. Das Dreieck *ABC* halten wir fest, heben die Ecke *F* des Rhombus *GDEF* an und bringen das Gebilde in die Form 2. Dieses Gebilde klappen wir um die Seite $\overline{CF}$ auf die Rückseite und erhalten Form 3. Das Dreieck *FGH* halten wir wieder fest, heben die Ecke I des Rhombus *ICLH* an und bringen das Gebilde in die Form 4. Nun falten wir das Gebilde wieder auf in seine sechseckige Form und erhalten eine „ungekennzeichnete — neue" Fläche.

Setzt man dieses Verfahren fort, erhält man 6 verschiedene Flächen, 9 verschiedene Kombinationen zwischen Vorder- und Rückseite und dann noch verschiedene Anordnungen der Dreiecke bei jeder Fläche.

Mathematikfachlehrer U. Sonnemann, OS Blievenstorf, Krs. Ludwigslust



Form 1 Form 2

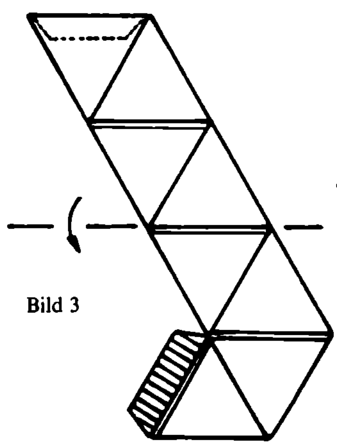


Bild 3

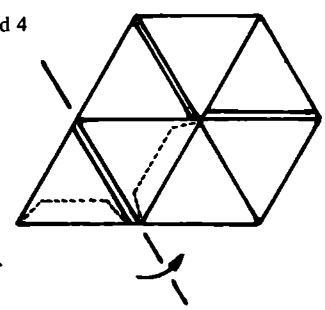


Bild 4

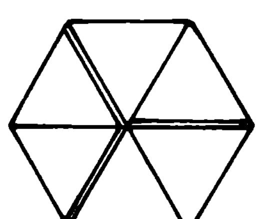
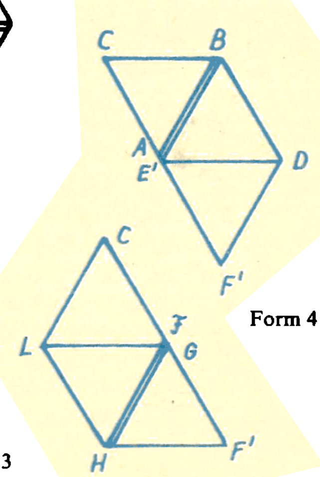


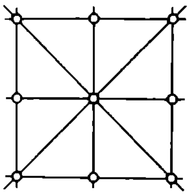
Bild 5

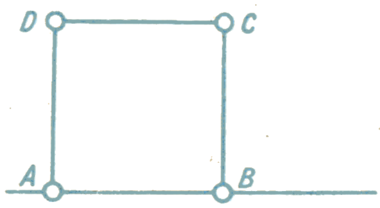


Form 3 Form 4

9 Punkte, 8 Geraden

Die Figur zeigt 9 Punkte und 8 Geraden, von denen jede durch 3 dieser Punkte geht. Finde durch Verlegung von zwei Punkten eine Anordnung von 9 Punkten, so daß 10 Geraden gezeichnet werden können, von denen jede durch drei dieser Punkte geht!





Postkartengeometrie

Wie kann man ohne Zirkel, ohne Lineal — ja sogar ohne Bleistift — mit Hilfe einer Postkarte in der Figur die Seiten eines dem Quadrat *ABCD* flächengleichen Rechtecks finden?

Aus: Schüleralmanach der Mathematik (G. M. Skobelew, W. P. Berman, Kiew)

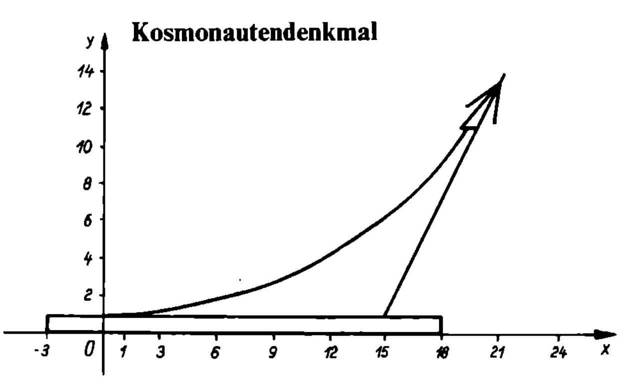
Mathematik hilft zeichnen

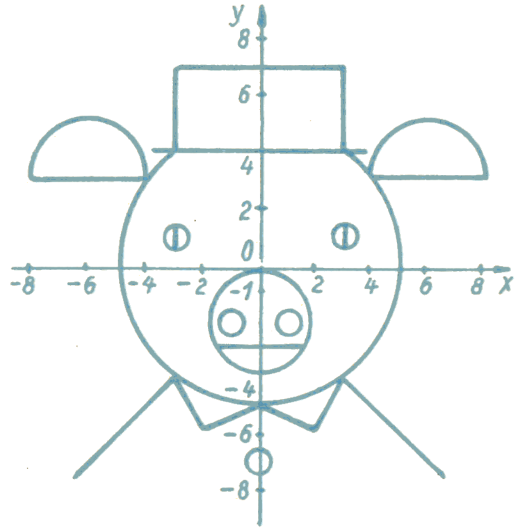
Zeichne die folgenden Funktionen

Der Traktor

Funktionsgleichung	Definitionsbereich
$x=-4$	$5 \leqq y \leqq 8\frac{1}{2}$
$x=-6$	$1 \leqq y \leqq 5$
$y=\ 5$	$-6 \leqq x \leqq 1$
$y=\ 8$	$1 \leqq x \leqq 5$
$y=\ 1$	$-6 \leqq x \leqq 5$
$y=-1$	$-5 \leqq x \leqq 5$
$\lvert y-3 \rvert = 1$	$-5 \leqq x \leqq 0$
$\lvert y-6 \rvert = 1$	$2 \leqq x \leqq 4$
$\lvert x-3 \rvert = 2$	$1 \leqq y \leqq 8$
$\lvert x-3 \rvert = 1$	$5 \leqq y \leqq 7$
$\lvert x+2\frac{1}{2} \rvert = 2\frac{1}{2}$	$2 \leqq y \leqq 4$
$\lvert y \rvert = -\lvert x \rvert + 6$	$-1 \leqq y \leqq 1$

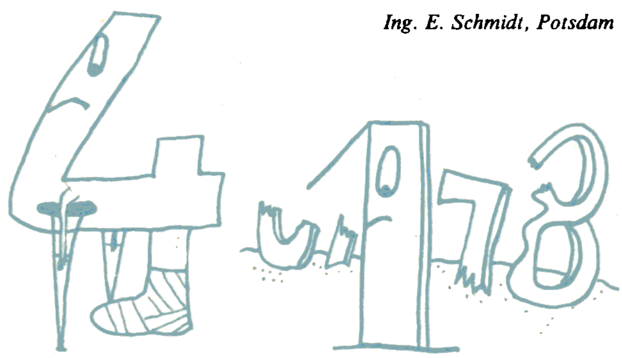
Bei den folgenden Zeichnungen suche der Leser die Funktionsgleichungen und Definitionsbereiche selbst.



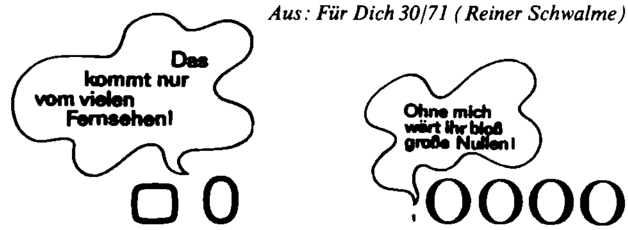


Welche Zahl ist das?

Ing. E. Schmidt, Potsdam



Aus: Für Dich 30/71 (Reiner Schwalme)



▲1▲ Addierst du zum Zehnfachen von x die Zahl 830, so erhältst du 1000. Wie heißt die Zahl x?

▲2▲ $(a+b):c=x$; $a=5432$; $b=589$; $c=3$. Wie groß ist x?

▲3▲ Für welche gerade Zahl x gilt, daß $64-\underline{8\cdot x}>32$?

▲4▲ Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Zahlen. Rechne!

$$5720-p=4500$$
$$p+r=3900$$
$$r:20=Z$$

$$1000-r-p-5966=Z$$

▲5▲ Berechne!

a	b	c	d	
	$a\cdot 10$	$b+3800$		$c+d$
73				50000
112				50000
270				50000

▲6▲ Monika sagt: „Mein Vater ist 42 Jahre alt. Mein Vater ist zwei Jahre älter als meine Mutter. Meine Mutter ist doppelt so alt wie mein Bruder und ich. Ich bin zwei Jahre jünger als mein Bruder. Wie alt sind Uwe, sein Bruder und seine Mutter?

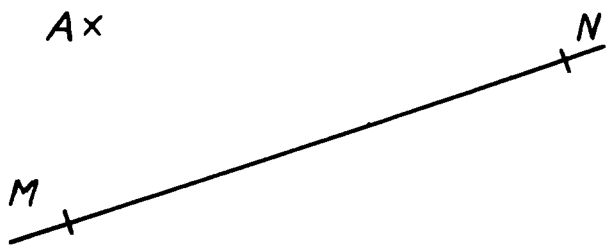
▲7▲ German Titow war ungefähr 25 Stunden und 30 Minuten im Weltall. Eine Erdumkreisung dauerte bei ihm 90 Minuten. Wievielmal umkreiste Titow die Erde?

▲8▲ Jeder von vier Brüdern einer Familie sagt: „Ich habe 2 Schwestern.“ Wieviel Kinder gehören zur Familie?

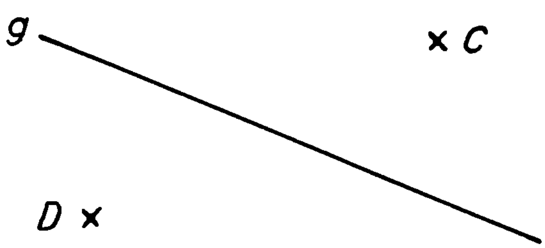
▲9▲ Bestimme die Zahlen, die du für die Variablen einsetzen kannst, so daß
a) $9y<50$ und $9y>25$,
b) $9z+25<60$ und z gerade!

Arbeitsblatt Geometrie (Klasse 6)

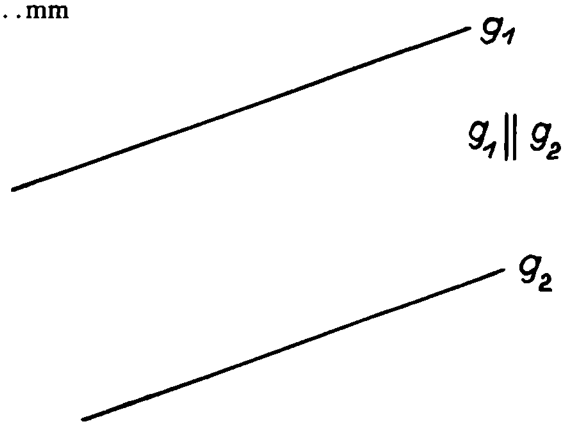
▲1▲ Konstruiere den Punkt P, der die beiden Bedingungen erfüllt:
1. Er liegt auf $\overline{MN}$.
2. Sein Abstand von A ist 3,5 cm



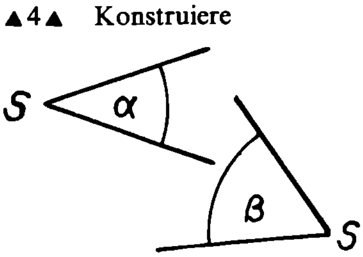
▲2▲ Zeichne die Parallelen zu g durch C und durch D! Miß die Abstände zwischen
a) C und D b) C und g c) den beiden konstruierten Parallelen!
a) ... mm b) ... mm c) ... mm



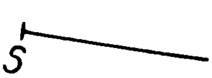
▲3▲ Konstruiere eine Strecke, die den Abstand zwischen g_1 und g_2 darstellt und miß deren Länge a!
$a=\ldots$mm



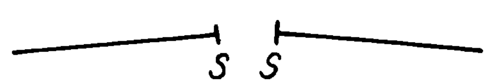
▲4▲ Konstruiere



a) $\alpha+\beta$



b) $\beta-\alpha$ c) $3\alpha-\beta$



▲5▲ Bilde die Umkehrung des Satzes und untersuche den Wahrheitsgehalt des Satzes sowie den seiner Umkehrung!
Streiche Nichtzutreffendes!

Satz: „Wenn zwei Winkel gleich groß sind, so sind sie Scheitelwinkel.“ *w f*
Umkehrung: „Wenn . . . .
. . *w f*

Lösungen

Lösung zu: Zwei Kryptogramme (Heft 1/72, Seite 20), **Aufgabe b**

b) In der Multiplikationsaufgabe

```
**4·*8*
 ***8
  5**2
   ***8
*8*4**
```

bezeichnen wir wieder den ersten Faktor mit x, den zweiten Faktor mit y und das Produkt mit z.

Dann gilt wie im Falle a)

$$634 \leqq x \leqq 744 \qquad (1)$$

und $y = 282, 287, 782$ oder 787.

In dieser Aufgabe kann aber die zweite Ziffer in der 2. Zeile nur gleich 1, 2 oder 3 sein. Wir untersuchen wieder die einzelnen Fälle:

1. y = 282

Wegen (1) gilt $1268 \leqq 2x \leqq 1488$, (2)

also steht in der letzten Zeile an der 1. Stelle eine 1.

Wir erhalten daher

$$180\,408 \leqq z \leqq 189\,498,$$

also wegen $x = \frac{z}{y}$

$$\frac{180\,408}{282} \leqq x \leqq \frac{189\,498}{282},$$

$$639\frac{210}{282} \leqq x \leqq 671\frac{276}{282}.$$

Daher kann x nur gleich 644, 654 oder 664 sein. Wir erhalten für z

181 608, 184 428 oder 187 248.

Nur für $z = 184\,428$ und $x = 654$ ist die Bedingung erfüllt, daß an der 4. Stelle von z die Ziffer 4 steht.

Wir erhalten daher die **Lösung**:

```
654·282
 1308
  5232
   1308
184428
```

2. y = 287

Wir erhalten wie im Fall 1 für x eine der Zahlen 644, 654 oder 664, also für z

184 828, 187 698 oder 190 568.

Hier steht an der 4. Stelle von z niemals die Ziffer 4, so daß dieser Fall ausscheidet.

3. y = 782

Wegen (1) gilt $4438 \leqq 7x \leqq 5208$.

Da an der 2. Stelle von $7x$ nur die Ziffern 1, 2 oder 3 stehen können, gilt

$$5108 \leqq 7x \leqq 5208,$$

$$729\frac{5}{7} \leqq x \leqq 744.$$

x kann also nur eine der Zahlen 734 oder 744 sein. Wir erhalten für z

573 988 oder 581 808.

Da hier in keinem Falle an der 4. Stelle von z die Ziffer 4 steht, erhalten wir keine weitere Lösung.

4. y = 787

Auch hier kann wie im Fall 3 x nur gleich 734 oder 744 sein. Wir erhalten für z

577 658 oder 585 528.

Da auch hier in keinem Falle an der 4. Stelle von z die Ziffer 4 steht, erhalten wir keine weitere Lösung.

Die gestellte Aufgabe hat also nur die unter Ziffer 1 angegebene Lösung.

Lösungen zu: aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht (S. 42)

▲1▲ $x = 17$; ▲2▲ $x = 2007$; ▲3▲ $x = 2$; ▲4▲ $p = 1\,220$; $r = 2680$; $z = 134$; ▲5▲ 73; 730; 4 530; 45 470; 50 000/112; 1 120; 4 920; 45 000; 50 000/270; 2 700; 6 500; 43 500; 50 000 ▲6▲ Monika ist 8 Jahre alt. ▲7▲ $25 \cdot 60 = 1\,500$; $1\,500 + 30 = 1\,530$; $1\,530 : 90 = 17$; G. Titow umkreiste die Erde 17 mal. ▲8▲ Zur Familie gehören 6 Kinder. ▲9▲ $\{3, 4, 5\}$; $\{0, 5\}$.

Lösung des mathematischen Kreuzworträtsels (S. 26):

1	9	8		2	2	7
	7	2	9		3	1
8		4	6	2		5
8	1		5	9	4	
	7	3		7	7	7
5	7	5	7		6	6
1	7		3	3		8

Im folgenden vereinfachen wir die Schreibweise und schreiben z. B. a_w statt „a waagerecht", b_s statt „b senkrecht" usw. Durch die jeweiligen Definitionen sind die folgenden Zahlen bereits eindeutig bestimmt:

a_w) Wegen $18 = 2 \cdot 3^2$ und $33 = 3 \cdot 11$ ist das k.g.V. der Zahlen 18 und 33 gleich $2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 198$.

d_w) Wir erhalten

$$\begin{aligned} 2(x-2) + 3(x+23) &= 1\,200,\\ 2x - 4 + 3x + 69 &= 1\,200,\\ 5x &= 1\,135,\\ x &= 227. \end{aligned}$$

o_s) Das Geburtjahr von Gauß ist 1777.

Nun können wir, von diesen Lösungen ausgehend, weitere Zahlen bestimmen. Wir beginnen mit

b_s) Die einzige Primzahl p mit $91 \leqq p \leqq 99$ ist $p = 97$.

g_w) Die einzige natürliche Zahl 3^n, die eine Potenz der Zahl 3 ist, mit $701 \leqq 3^n \leqq 799$ ist die Zahl $3^6 = 729$.

c_s) Von allen natürlichen Zahlen x mit $821 \leqq x \leqq 829$ ist nur die Zahl $x = 824$ durch 8 teilbar.

l_w) Es gibt genau eine natürliche Zahl x mit $401 \leqq x \leqq 499$, die durch 2, 3 und 7, also durch 42, teilbar ist und nicht auf 0 endet, nämlich $x = 462$.

h_s) Da diese natürliche Zahl durch 5 teilbar ist, muß sie auf 0 oder 5 enden. Nun darf die erste Ziffer unter p_w nicht 0 sein. Daher erhalten wir die Zahl 965.

p_w) Wegen $2 \cdot 198 = 396 < 501$ und $4 \cdot 198 = 792 > 599$ erhalten wir die Zahl $3 \cdot 198 = 594$.

m_s) Da die gesuchte Zahl x mit $291 \leqq x \leqq 299$ durch 9 teilbar ist, muß ihre letzte Ziffer wegen $2 + 9 + 7 = 18$ eine 7 sein, daher gilt $x = 297$.

t_w) Wir erhalten daher hier die Zahl 777.

x_w) Der g.g.T. der Zahlen $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$, $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ und $594 = 2 \cdot 3^3 \cdot 11$ ist $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$.

q_s) Damit entspricht auch die Zahl 476 der gestellten Bedingung.

u_s) Die Quersumme der Zahl unter t_w ist gleich $7 + 7 + 7 = 21$. Aus $7 + 6 + x = 21$ folgt nun $x = 8$. Daher ist die hier gesuchte Zahl gleich 768.

e_s) Für die hier gesuchte Primzahl p ilt $p > 20$ und $p < 25$. Daraus folgt $p = 23$.

i_w) Aus $30 \leqq x \leqq 39$ folgt, da die Quersumme von x gleich 4 ist, $x = 31$.

f_s) Aus $710 \leqq x \leqq 719$ folgt, da die Quersumme von x gleich 13 ist, $x = 715$.

n_w) Die einzige zweistellige Quadratzahl, die auf die Ziffer 1 endet, ist 81.

k_s) Die einzige zweistellige natürliche Zahl, die ein Vielfaches von 11 ist und auf die Ziffer 8 endet, ist 88.

v_s) Die Quersumme von q_s ist gleich $4 + 7 + 6 = 17$. Daher ist die hier gesuchte Zahl gleich $3 \cdot 17 = 51$.

v_w) Die einzige natürliche Zahl x mit $5\,701 \leqq x \leqq 5\,799$, die durch 57 teilbar ist, ist $x = 5\,757$.

s_s) Die einzige zweistellige natürliche Zahl, die auf 5 endet und durch 7 teilbar ist, ist die Zahl 35.

r_w) Damit entspricht auch die Zahl 73 der gestellten Bedingung.

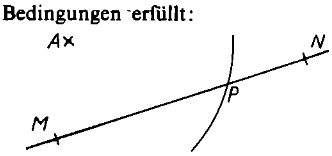
w_s) Wir erhalten die Zahl 73.

z_w) Die einzige zweistellige natürliche Zahl x, die durch 11 teilbar ist und für die $30 \leqq x \leqq 39$ gilt, ist $x = 33$.

Damit haben wir sämtliche Zahlen ermittelt und die folgende Lösung des mathematischen „Kreuzworträtsels" erhalten:

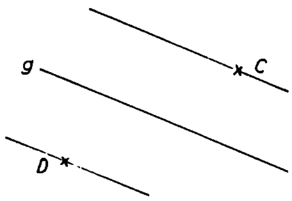
Lösungen zu: Arbeitsblatt Geometrie (siehe Seite 42)

▲1▲ Konstruiere den Punkt P, der die beiden Bedingungen erfüllt:

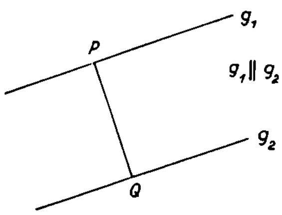


1. Er liegt auf $\overline{MN}$.
2. Sein Abstand von A ist 3,5 cm.

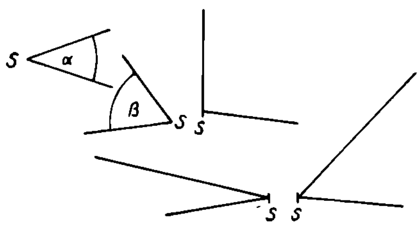
▲2▲ Zeichne die Parallelen zu g durch C und durch D!
Miß die Abstände zwischen a) C und D; b) C und g; c) den beiden konstruierten Parallelen!
a) 53 mm b) 19 mm c) 39 mm



▲3▲ $a = 32$ mm; oder parallel zu PQ und P auf g, Q auf g_2

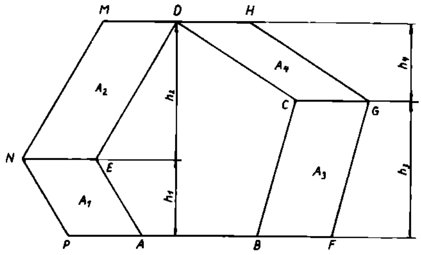


▲4▲ Konstruiere! a) $\alpha+\beta$ b) $\beta-\alpha$ c) $3\alpha-\beta$



▲5▲ Bilde die Umkehrung des Satzes und untersuche den Wahrheitsgehalt des Satzes sowie den seiner Umkehrung! Streiche Nichtzutreffendes!
Satz: „Wenn zwei Winkel gleich groß sind, so sind sie Scheitelwinkel!" w f f
Umkehrung: „Wenn zwei Winkel Scheitelwinkel sind, so sind sie gleich groß. w f w

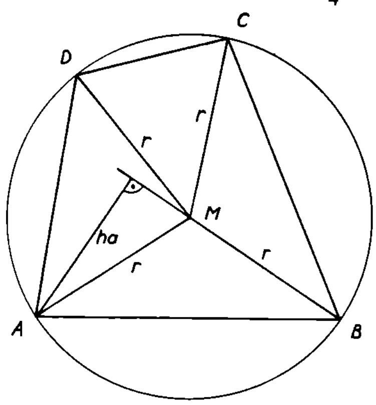
* 6 * 784 Da nach Voraussetzung die über den vier Seiten des Fünfecks gezeichneten Vierecke sämtlich Parallelogramme sind, gilt $\overline{PA}=\overline{BF}=\overline{NE}=\overline{CG}=a$. Wie aus der Zeichnung ersichtlich wird, gilt ferner $h_1+h_2=h_3+h_4$. Aus $A_1=a\cdot h_1$, $A_2=a\cdot h_2$, $A_3=a\cdot h_3$, $A_4=a\cdot h_4$ folgt $A_1+A_2=a\cdot h_1+a\cdot h_2=a(h_1+h_2)$ und $A_3+A_4=a\cdot h_3+a\cdot h_4=a(h_3+h_4)$ und hieraus wegen $h_1+h_2=h_3+h_4$ schließlich $A_1+A_2=A_3+A_4$.



7▲785▲ Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, gilt für den Flächeninhalt des Drachenvierecks

$A=2\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{DS}}{2}=\overline{AC}\cdot\overline{DS}=e\cdot\overline{DS}$,

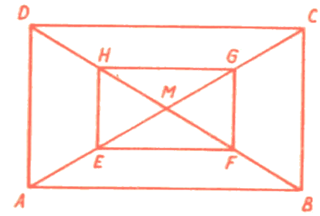
wegen $\overline{DS}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ und $\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}e$ gilt somit $\overline{DS}=\frac{1}{4}e$. Wir erhalten also für den Flächeninhalt des Drachenvierecks $A=\frac{1}{4}e^2$.

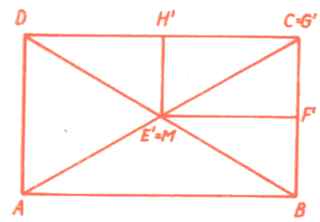


W 7 ■ 786 a) n kann höchstens gleich 99 sein. Dann würden $(n+1)^3=100^3$, also 1000000 Würfel entstehen, von denen jeder die Kantenlänge $\frac{100-n}{n+1}$ mm $=0{,}01$ mm besitzt.
b) Die so erhaltenen Würfel haben zusammen das Gesamtvolumen $V=(100-n)^3\,\text{mm}^3$. Da nicht mehr als 50 % des Volumens des Ausgangswürfels zerspant werden sollen, muß $(100-n)^3 \geqq 500000$ sein. Wegen $79^3=493039$ und $80^3=512000$ gilt $100-n\geqq 80$ und damit $n\leqq 20$.

W 7 ■ 787 Aus b) folgt unmittelbar:
Bernd kennt Axel, Dieter und Eberhard. (1)
Aus e) folgt unmittelbar:
Gerda kennt Helga und Ilona. (2)
Aus b), f) und (2) folgt:
Helga kennt Axel, Dieter, Eberhard und Gerda. (3)
Aus a) und (1) folgt, daß Axel Bernd kennt. Aus e) folgt, daß sich Gerda und Axel nicht kennen. Wegen a) gilt dann:
Axel kennt Bernd, Helga und Ilona. (4)
Aus b) folgt, daß sich Ilona und Bernd nicht kennen. Da sich nach (3) Dieter und Helga kennen, kann wegen c) Ilona mit Dieter nicht bekannt sein. Unter Beachtung von (2) gilt deshalb:
Ilona kennt Axel, Eberhard und Gerda. (5)
Nach (1) und (3) kennt Dieter sowohl Bernd wie auch Helga; nach (4) kennen sich Dieter und Axel nicht. Deshalb gilt wegen c):
Dieter kennt Bernd, Eberhard und Helga. (6)
Aus (1), (6), (3), (5) folgt unter Beachtung von d): Eberhard kennt Bernd, Dieter, Helga und Ilona.

* 7 * 788 Es gilt der Satz: Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten eines Dreiecks ist parallel der dritten Seite und halb so lang wie diese. Verschieben wir das Rechteck $EFGH$ in Richtung der Geraden AC um die Verschiebungsweite $\overline{EM}$, so fällt der Bildpunkt E' des Punktes E mit M und der Bildpunkt G' des Punktes G mit C zusammen. Der Bildpunkt F' des Punktes F ist Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$, der Bildpunkt H' des Punktes H ist Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$. Für den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ gilt $A_1=\overline{AB}\cdot\overline{BC}$, für den des Rechtecks $EFGH$ gilt $A_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{4}A_1$. Die Flächeninhalte verhalten sich wie 4:1.





* 7 * 789 1. *Fall:* Beide fahren in entgegengesetzte Richtungen. Es seien v_A die Geschwindigkeit, s_A der in 15 s zurückgelegte Weg des Fahrers A und v_B, s_B die entsprechenden Angaben für Fahrer B. Dann gilt wegen des physikalischen Gesetzes $s=v\cdot t$

$s_A=15v_A$,
$300-s_A=15v_B$.

Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir $300=15v_A+15v_B$, also $v_A+v_B=20$.
2. *Fall:* Beide fahren in die gleiche Richtung. Es sei s_C der vom Fahrer B zurückgelegte Weg, bis er vom Fahrer A überrundet wurde. Dann gilt

$s_C=150v_B$
$300+s_C=150v_A$.

Subtrahieren wir die erste von der zweiten Gleichung, so erhalten wir $300=150v_A-150v_B$, also $v_A-v_B=2$.
Aus $v_A+v_B=20$ und $v_A-v_B=2$ erhalten wir durch Addition $2v_A=22$ und damit $v_A=11$. Somit gilt $v_B=9$. Fahrer A fährt mit einer Geschwindigkeit von
$11\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}=39{,}6\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$;
Fahrer B hingegen mit der von
$9\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}=32{,}4\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

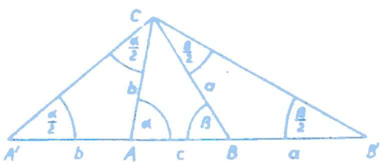
8▲790 *Vorüberlegung:* Es sei ABC das zu konstruierende Dreieck (vgl. die Abb.). Dieses Dreieck können wir nicht unmittelbar konstruieren, da von ihm zwar zwei Winkel, jedoch nicht eine Seite gegeben sind. Wir können aber ein Dreieck konstruieren, dessen eine Seite die Länge $a+b+c$ hat und von dem zwei Winkel gegeben sind.
Verlängern wir nämlich die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC über A hinaus bis A', so daß $\overline{AA'}=b$ ist, und über B hinaus bis B', so daß $\overline{BB'}=a$ ist, so erhalten wir ein Dreieck $CA'B'$, dessen Seite $\overline{A'B}=a+b+c$ ist. Da die Drei-

ecke $A'AC$ und $BB'C$ gleichschenklig sind, gilt nach dem Satz über die Außenwinkel des Dreiecks

$$\sphericalangle CA'A = \sphericalangle ACA' = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{und } \sphericalangle BB'C = \sphericalangle B'CB = \frac{\beta}{2}.$$

Daher läßt sich das Dreieck $A'B'C$ aus der Seite $\overline{A'B'} = a+b+c$ und den beiden anliegenden Winkeln $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ konstruieren.



Konstruktion: Wir konstruieren zunächst dieses Dreieck $A'B'C$. Dann errichten wir auf $\overline{A'C}$ die Mittelsenkrechte, die, weil das Dreieck ACA' gleichschenklig ist, die Seite $\overline{A'B'}$ in A schneidet. Ferner errichten wir auf $\overline{B'C}$ die Mittelsenkrechte, die die Seite $\overline{A'B'}$ in B schneidet. Verbinden wir C mit A und B, so haben wir das verlangte Dreieck ABC konstruiert. Dieses Dreieck ist durch die gegebenen Stücke bis auf kongruente Dreiecke eindeutig bestimmt, weil das Dreieck $A'B'C$ eindeutig bestimmt ist und die konstruierten Mittelsenkrechten jeweils genau einen Schnittpunkt mit der Seite $\overline{A'B'}$ haben.

Bemerkung: Statt der Konstruktion der Mittelsenkrechten können wir auch an CA' in C den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und an CB' in C den Winkel $\frac{\beta}{2}$ antragen.

8 ▲ 791 Da die Anzahl der Diagonalen eines konvexen n-Ecks gleich $\frac{n(n-3)}{2}$ ist, gilt

$$k \cdot \frac{n(n-3)}{2} = n, \qquad (1)$$

wobei k eine positive ganze Zahl ist.

Wegen $n \neq 0$ gilt diese Gleichung genau dann, wenn

$k(n-3)=2$, also $kn-3k=2$, d. h.,

$$n = \frac{3k+2}{k} = 3 + \frac{2}{k}. \qquad (2)$$

Da $n \geq 3$ eine natürliche Zahl ist, ist die Gleichung (2) und damit auch die Gleichung (1) nur für $k=1$, also $n=5$, und $k=2$, also $n=4$, erfüllt.

Daher sind die Bedingungen der Aufgabe nur für das Viereck, bei dem die Anzahl der Diagonalen 2 beträgt, und für das Fünfeck, bei dem die Anzahl der Diagonalen 5 beträgt, erfüllt.

W 8 ■ 792 Da die Aussage (2) falsch ist, reist Christine nicht in den Thüringer Wald und Steffi nicht in die Sächsische Schweiz. Da die Aussage (1) wahr ist, reist Steffi an die Ostsee. Für Christine verbleibt also nur das Reiseziel Sächsische Schweiz und für Marion das Reiseziel Thüringer Wald.

In diesem Falle sind also die Reiseziele eindeutig bestimmt: Steffi reist an die Ostsee; Marion reist in den Thüringer Wald; Christine reist in die Sächsische Schweiz.

b) Da die Aussage (1) falsch ist, reist Steffi nicht an die Ostsee. Würde nun Steffi in den Thüringer Wald reisen, so wäre die Aussage (2) falsch; denn dann könnte weder Christine in den Thüringer Wald noch Steffi in die Sächsische Schweiz reisen. Nun ist aber die Aussage (2) wahr; Steffi kann daher nur in die Sächsische Schweiz reisen. Für Christine verbleibt nun das Reiseziel Ostsee oder Thüringer Wald und entsprechend für Marion Thüringer Wald bzw. Ostsee; in beiden Fällen ist nämlich dann die Aussage (1) falsch und die Aussage (2) wahr, also sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Wir erhalten also im Falle b) zwei Möglichkeiten für die Reiseziele:

1. Steffi reist in die Sächsische Schweiz; Marion reist in den Thüringer Wald; Christine reist an die Ostsee.
2. Steffi reist in die Sächsische Schweiz; Marion reist an die Ostsee. Christine reist in den Thüringer Wald.

W 8 ■ 793 a) Es seien x und y die beiden gedachten natürlichen Zahlen. Ferner seien a die Differenz dieser Zahlen und b die Differenz der Quadrate dieser Zahlen. Dann gilt

$$x - y = a, \qquad (1)$$

$$x^2 - y^2 = b. \qquad (2)$$

Aus (2) folgt $(x+y)(x-y)=b$, also wegen $x-y=a$ $(x+y)a = b$,

also $x+y=\frac{b}{a}$. Durch (3)

Addition erhalten wir aus (1) und (3)

$$2x = a + \frac{b}{a}, \text{ also } x = \frac{1}{2}\left(a+\frac{b}{a}\right).$$

Ferner erhalten wir aus (1) $y = x - a$.

Klaus konnte also mit nur vier Rechenoperationen die gedachten Zahlen x und y ermitteln: Er hat zunächst b durch a dividiert, dann zu dem Ergebnis a addiert, dann die Summe durch 2 dividiert und damit die erste der gedachten Zahlen, nämlich x, erhalten. Durch die Subtraktion der Zahl a hat er dann die zweite der gedachten Zahlen, nämlich y, erhalten.

b) Ist $a=5$ und $b=105$, so erhalten wir

$$x = \frac{1}{2}\left(a+\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}(5+21) = \frac{1}{2}\cdot 26 = 13 \text{ und}$$

$$y = x - a = 13 - 5 = 8.$$

* 8 * 794 Es seien z die gesuchte sechsstellige natürliche Zahl, x die aus den ersten drei Grundziffern und y die aus den letzten drei Grundziffern gebildete Zahl. Dann gilt

$$z = 1000x + y. \qquad (1)$$

Ferner gilt wegen der Bedingung 1 der Aufgabe $x + y = 999$ (2)

und wegen der Bedingung 2

$$6z = 1000y + x. \qquad (3)$$

Durch Addition erhalten wir aus (1) und (3) $7z = 1000(x+y)+(x+y)$ und hieraus wegen (2) $7z = 999999$, also $z = 999999:7 = 142857$.

Wir überzeugen uns durch die Probe davon, daß für diese Zahl z die beiden Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind; wir erhalten nämlich $142+857=999$ und $6 \cdot 142857 = 857142$. Es gibt also genau eine sechsstellige Zahl, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, nämlich die Zahl 142857.

Bemerkung: Die obige Lösung beruht auf dem Kunstgriff, daß man durch die Addition der Gleichungen (1) und (3) eine Gleichung erhält, aus der wegen $x+y=999$ die Zahl z unmittelbar bestimmt werden kann. Wir hätten auch den Wert für z aus (1) und dann den Wert für y aus (2), nämlich $y=999-x$, in die Gleichung (3) einsetzen können und dadurch eine Gleichung für x erhalten, deren Lösung aber etwas umständlicher ist.

* 8 * 795 Aus $b=a+1$ und $c=ab=a(a+1)$ folgt

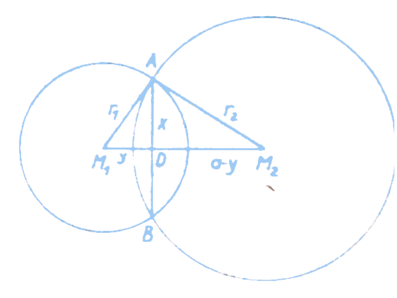
$$\begin{aligned} x &= a^2+b^2+c^2 = a^2+(a+1)^2+a^2(a+1)^2 \\ &= a^2(a+1)^2+2a^2+2a+1 \\ &= a^2(a+1)^2+2a(a+1)+1 \\ &= [a(a+1)+1]^2. \end{aligned}$$

Die Zahl $x=a^2+b^2+c^2$ ist also gleich dem Quadrat der natürlichen Zahl $a(a+1)+1$, und diese Zahl ist ungerade, weil die Zahl $a(a+1)$ als Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen eine gerade Zahl ist.

Beispiel: Es seien $a=7$, $b=8$, $c=7\cdot 8=56$.

Dann ist $x = 49+64+3136 = 3249 = 57^2$.

9 ▲ 796 Es seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte, r_1 und r_2 die Radien der gegebenen Kreise, die sich in den Punkten A und B schneiden mögen. Ferner sei D der Schnittpunkt der Geraden M_1M_2 mit der gemeinsamen Sehne $\overline{AB}$ dieser Kreise (vgl. die Abb.).



Wir setzen $\overline{M_1M_2}=a$, $\overline{AD}=x$, $\overline{M_1D}=y$, also $\overline{M_2D}=a-y$. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2 = r_1^2 - y^2, \qquad (1)$$

$$x^2 = r_2^2 - (a-y)^2, \text{ also} \qquad (2)$$

$$r_2^2 - a^2 + 2ay - y^2 = r_1^2 - y^2,$$

$$2ay = r_1^2 - r_2^2 + a^2,$$

$$y = \frac{a^2+r_1^2-r_2^2}{2a}. \qquad (3)$$

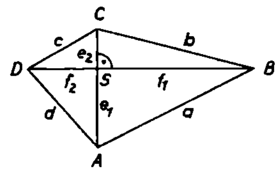
Da die Stücke $a=7\,\text{cm}$, $r_1=4\,\text{cm}$, $r_2=6\,\text{cm}$ gegeben sind, können wir aus der Gleichung (3) y und dann aus der Gleichung (1) x berechnen. Wir erhalten

$$y = \frac{49+16-36}{2\cdot 7}\,\text{cm} = \frac{29}{14}\,\text{cm},$$

$$x^2 = \left(16 - \frac{841}{196}\right)\text{cm}^2 = \frac{2295}{196}\,\text{cm}^2 \approx 11{,}71\,\text{cm}^2.$$

Daraus folgt $x \approx 3{,}42$ cm, also $\overline{AB} \approx 6{,}84$ cm. Der gesuchte Abstand der Schnittpunkte der beiden Kreise beträgt also rd. 6,84 cm.

9 ▲ 797 Es sei S der Schnittpunkt der Diagonalen. Wir bezeichnen die Längen der Abschnitte der Diagonalen wie folgt: $\overline{AS}=e_1$, $\overline{SC}=e_2$, $\overline{BS}=f_1$, $\overline{SD}=f_2$

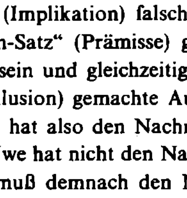


Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras
$a^2=e_1^2+f_1^2$, $b^2=f_1^2+e_2^2$, $c^2=e_2^2+f_2^2$,
$d^2=f_2^2+e_1^2$.
Hieraus folgt durch Addition
$$a^2+c^2=e_1^2+f_1^2+e_2^2+f_2^2,$$
$$b^2+d^2=f_1^2+e_2^2+f_2^2+e_1^2,$$
also, da die Summen auf den rechten Seiten der beiden Gleichungen übereinstimmen, $a^2+c^2=b^2+d^2$, w. z. b. w.

Bemerkung: Diese Gleichung gilt auch dann noch, wenn das Viereck $ABCD$ nicht konvex ist; jedoch darf es sich nicht um ein „überschlagenes Viereck" handeln.

W 9 ■ 798 Da der angegebene „Wenn-So-Satz" (Implikation) falsch ist, muß die im „Wenn-Satz" (Prämisse) gemachte Aussage wahr sein und gleichzeitig die im „So-Satz" (Konklusion) gemachte Aussage falsch sein. Henry hat also den Nachnamen Bergmann, und Uwe hat nicht den Nachnamen Strauch. Uwe muß demnach den Nachnamen Sabel haben. Und der dritte Schüler heißt Peter Strauch.

W 9 ■ 799 Bezeichnet man die Maßzahlen der Flächeninhalte (in cm²) der Dreiecke EBF, DEF, DFC und ADC mit A_1, A_2, A_3, A_4 sowie die Maßzahlen der Längen der Strecken $\overline{AD}$, $\overline{DE}$, $\overline{CF}$ mit x, y, z, so gilt
$$2A_1=15\cdot 20, \qquad (1)$$
$$2A_2=y\cdot 20, \qquad (2)$$
$$2A_3=z\cdot(15+y), \qquad (3)$$
$$2A_4=x\cdot(20+z). \qquad (4)$$
Aus (1) und (2) folgt wegen $A_1=A_2$
$y\cdot 20=15\cdot 20$, also $y=15$. Daher folgt wegen $A_3=A_1$ aus (3) und (1) $z\cdot(15+15)=15\cdot 20$, also $z\cdot 30=15\cdot 20$, d. h., $z=10$. Endlich folgt aus (4) $x\cdot(20+10)=15\cdot 20$, also $x=10$. Die Strecke $\overline{AD}$ hat also die Länge 10 cm.



* 9 * 800 Wir ermitteln zunächst die Zensurenverteilung in diesem Jahr. Zu diesem Zweck zerlegen wir das Produkt 192 in Primfaktoren und erhalten $192=2^6\cdot 3$. (1)
Die folgende Tabelle zeigt die sich dann ergebenden Möglichkeiten für die Zensurenverteilung, wobei die Anzahl der Einsen sich daraus ergibt, daß die Summe der Zensuren 22 beträgt.

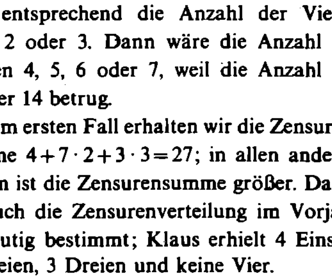
Zensur	1. Möglichkeit Anzahl der Fächer	1. Möglichkeit Summe	2. Möglichkeit Anzahl der Fächer	2. Möglichkeit Summe
1	7	7	7	7
2	6	12	4	8
3	1	3	1	3
4	–	–	1	4
	14	22	13	22

Zensur	3. Möglichkeit Anzahl der Fächer	3. Möglichkeit Summe	4. Möglichkeit Anzahl der Fächer	4. Möglichkeit Summe
1	7	7	7	7
2	2	4	–	–
3	1	3	1	3
4	2	8	3	12
	12	22	11	22

Bei der 1. Möglichkeit beträgt der Zensurendurchschnitt $\frac{22}{14}=1{,}57\ldots<1{,}6$. Die 2., 3. und 4. Möglichkeit scheiden aus, weil hier der Zensurendurchschnitt größer als 1,6 ist; denn $\frac{22}{11}>\frac{22}{12}>\frac{22}{13}>1{,}6$.

Damit ist die Zensurenverteilung in diesem Jahr (1. Möglichkeit) eindeutig festgelegt: Klaus erhielt 7 Einsen, 6 Zweien und 1 Drei.
Die Zensurenverteilung im Vorjahr ergibt sich analog. Wir zerlegen das Produkt 3456 in Primfaktoren und erhalten $3456=2^7\cdot 3^3$. Daraus ergibt sich zunächst, daß Klaus im Vorjahr 3 Dreien gehabt hat. Die Anzahl der Zweien könnte gleich 7, 5, 3 oder 1 sein und entsprechend die Anzahl der Vieren 0, 1, 2 oder 3. Dann wäre die Anzahl der Einsen 4, 5, 6 oder 7, weil die Anzahl der Fächer 14 betrug.
Nur im ersten Fall erhalten wir die Zensurensumme $4+7\cdot 2+3\cdot 3=27$; in allen anderen Fällen ist die Zensurensumme größer. Daher ist auch die Zensurenverteilung im Vorjahr eindeutig bestimmt; Klaus erhielt 4 Einsen, 7 Zweien, 3 Dreien und keine Vier.
Bei der obigen Überlegung wurde die Angabe, wonach Klaus im Vorjahr 4 Einsen hatte, nicht benötigt; denn die Anzahl der Einsen ergab sich bereits aus den übrigen Daten.

* 9 * 801



Es sei $\overline{AB}=a$ die Länge der Strecke $\overline{AB}$. Wir zeichnen zunächst um die Punkte A und B Kreise mit dem Radius a, die sich in dem Punkt P_1 schneiden (vgl. die Abb.).
Dann zeichnen wir stets mit dem gleichen Radius a einen Kreis um P_1, der den Kreis um B in P_2 schneidet,
einen Kreis um P_2, der den Kreis um B in P_3 schneidet, einen Kreis um P_3, der den Kreis um P_2 in P_4 schneidet, einen Kreis um P_4, der den Kreis um P_3 in P_5 schneidet, einen Kreis um P_5, der den Kreis um P_4 *in* P_6 schneidet, einen Kreis um P_6, der den Kreis um P_5 in P_7 schneidet.
Dabei sollen die Punkte P_1, P_2, P_4, P_6 auf derselben Seite der Geraden AB liegen und die Punkte P_3, P_5, P_7 von den Punkten P_1, P_2, P_4 verschieden sein.
Dann liegen die Punkte P_3, P_5, P_7 auf der Geraden AB, weil die Dreiecke ABP_1, P_1BP_2, BP_3P_2 usw. gleichseitig sind.
Nun zeichnen wir um A und P_7 Kreise mit dem Radius $AP_5=P_7B=3a$, die sich in dem Punkt P_8 schneiden. Dann ist das Dreieck AP_7P_8 gleichschenklig, und es gilt $\overline{P_3P_8}=\sqrt{(3a)^2-(2a)^2}=\sqrt{5a^2}=a\sqrt{5}$.
Jetzt zeichnen wir um P_3 mit dem Radius $\overline{P_3P_8}=a\sqrt{5}$ einen Kreis, der den Kreis um A in einem Punkt D schneidet.
Dann ist das Dreieck AP_3D rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{P_3D}$; denn es gilt wegen $\overline{AD}=a$, $\overline{AP_3}=2a$, $\overline{P_3D}=a\sqrt{5}$
$\overline{AD}^2+\overline{AP_3}^2=a^2+(2a)^2=5a^2=\overline{P_3D}^2$.
Daher ist D ein Eckpunkt des gesuchten Quadrats. Wir erhalten weiter den Eckpunkt C dieses Quadrats, indem wir um B und D Kreise mit dem Radius a zeichnen, die sich in dem von A verschiedenen Punkt C schneiden. Damit haben wir die Eckpunkte des Quadrats $ABCD$ nur mit dem Zirkel konstruiert.

W 10/12 ■ 802 Das Geburtsjahr des Mathematikers sei $1000+100x+10y+z$, wobei x, y, z natürliche Zahlen mit $8\leqq x\leqq 9$, $1\leqq y\leqq 9$, $1\leqq z\leqq 9$ sind; denn der Mathematiker muß nach 1800 und vor 1963 geboren sein, und die den Grundziffern seines Geburtsjahres entsprechenden natürlichen Zahlen sind von Null verschieden, weil ihr Produkt von Null verschieden ist.
Dann gilt
$$1\cdot x\cdot y\cdot z=1963-(1000+100x+10y+z). \qquad (1)$$
1. Nun sei $x=9$, also
$9yz=63-(10y+z)$, d. h.,
$$yz=7-\frac{10y+z}{9}. \qquad (2)$$
Also ist $10y+z$ durch 9 teilbar, und es sind wegen $yz>0$ nur die folgenden Fälle möglich:

$10y+z$	$7-\frac{10y+z}{9}$	yz
18	5	8
27	4	14
36	3	18
45	2	20
54	1	20
63	0	18

In keinem Falle stimmen die Zahlen in der 2. und 3. Spalte überein, ist also die Gleichung (2) erfüllt. Also ist $x \neq 9$.

2. Daher kann nur $x=8$ sein, also
$8yz = 163-(10y+z)$, d. h.

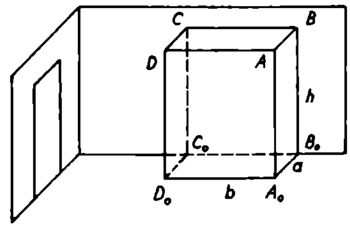
$$yz = 20 - \frac{10y+z-3}{8}. \qquad (3)$$

Also ist $10y+z-3$ durch 8 teilbar, und es sind nur die folgenden Fälle möglich:

$10y+z$	$20-\frac{10y+z-3}{8}$	yz
11	19	1
19	18	9
27	17	14
35	16	15
43	15	12
51	14	5
59	13	45
67	12	42
75	11	35
83	10	24
91	9	9
99	8	81

Nur in der vorletzten Zeile stimmen die Werte der 2. und 3. Spalte überein, ist also die Gleichung (3) erfüllt. Daher ist $y=9$ und $z=1$. Der Mathematiker ist also im Jahre 1891 geboren. Wegen $1 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1 = 72$ hatte er im Jahre 1963 ein Alter von 72 Jahren erreicht. Wegen $1891+72=1963$ ist das tatsächlich eine Lösung der Aufgabe, und zwar, wie oben gezeigt wurde, die einzige Lösung.

W 10/12 ■ 803 Der quaderförmige Schrank habe die rechteckige Grundfläche $A_0B_0C_0D_0$ und die Deckfläche $ABCD$. Dabei gilt
$\overline{A_0B_0} = \overline{AB} = \overline{C_0D_0} = \overline{CD} = a$,
$\overline{B_0C_0} = \overline{BC} = \overline{D_0A_0} = \overline{DA} = b$,
$\overline{A_0A} = \overline{B_0B} = \overline{C_0C} = \overline{D_0D} = h$ (vgl. die Abb.).
Wir berechnen zunächst die Längen der Flächendiagonalen des Quaders und erhalten
$d_1 = \overline{A_0D} = \overline{D_0A} = \overline{B_0C} = \overline{C_0B} = \sqrt{b^2+h^2}$
$= \sqrt{1{,}8^2+2{,}1^2}\ \text{m} = \sqrt{7{,}65}\ \text{m}$, also
$2{,}7\ \text{m} < d_1 < 2{,}8\ \text{m}$;
$d_2 = \overline{A_0B} = \overline{B_0A} = \overline{C_0D} = \overline{D_0C} = \sqrt{a^2+h^2}$
$= \sqrt{0{,}6^2+2{,}1^2}\ \text{m} = \sqrt{4{,}77}\ \text{m}$, also
$2{,}1\ \text{m} < d_2 < 2{,}2\ \text{m}$;
$d_3 = \overline{A_0C_0} = \overline{B_0D_0} = \overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{a^2+b^2}$
$= \sqrt{0{,}6^2+1{,}8^2}\ \text{m} = \sqrt{3{,}60}\ \text{m}$, also
$1{,}8\ \text{m} < d_3 < 1{,}9\ \text{m}$.
Ferner stellen wir fest, daß die Grundfläche ($0{,}6\ \text{m} \cdot 1{,}8\ \text{m}$) des Schrankes mit Spielraum in die Türöffnung ($0{,}8\ \text{m} \cdot 1{,}9\ \text{m}$) paßt.
a) Es scheint zunächst am einfachsten, den Schrank um die Kante $\overline{A_0B_0}$ zu kippen. Das ist aber nicht möglich, da dabei die Kante $\overline{CD}$ wegen $d_1 > 2{,}7\ \text{m} > 2{,}3\ \text{m} = H$ vor Vollendung der Kippung an der Decke anstoßen würde.
b) Wir drehen daher den Schrank um die Kante $\overline{C_0C}$ um 90°. Diese Drehung ist ausführbar, weil $d_3 < 1{,}9\ \text{m} < 2{,}5\ \text{m} = B$. Dann legen wir den Schrank um die Kante $\overline{B_0C_0}$ um; das ist ausführbar, weil $d_2 < 2{,}2\ \text{m} < 2{,}3\ \text{m} = H$. Dann kippen wir den Schrank auf, und zwar um die Kante $\overline{B_0C_0}$; das ist ausführbar, weil $d_3 < 1{,}9\ \text{m} < 2{,}3\ \text{m} = H$ und $a+b<B$. Jetzt kann der Schrank durch Parallelverschiebungen durch die Tür transportiert werden.
c) Der Leser prüfe selbst die dritte Variante: Umlegen um $\overline{A_0D_0}$, Aufkippen um $\overline{A_0A}$ und Drehung um 90° um $\overline{A_0D_0}$.



Fortsetzung von Seite 39

Man zeige, daß die so definierte Folge $\{a_n\}$ eine geometrische Folge ist, und berechne für sie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

b) Es seien a_0 und a_1 die ersten beiden Glieder einer Folge $\{a_n\}$. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ arithmetisches Mittel der beiden vorhergehenden Glieder. Geben Sie in Form von Relationen zwischen a_0 und a_1 eine notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß a_n eine geometrische Folge ist!

5. Es ist zu beweisen, daß

$$\frac{1}{1-\sin 2x} + \frac{1}{1-\sin 2y} \geqq \frac{2}{1-\sin(x+y)} \qquad (1)$$

für alle reellen Zahlenpaare (x, y) mit

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ und } 0 < y < \frac{\pi}{4} \qquad (2)$$

erfüllt ist.
Ferner ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, daß in (1) unter der Nebenbedingung (2) Gleichheit eintritt.
Von den folgenden beiden Aufgaben 6.1 und 6.2 ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

6.1. Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen $u, v, w, \ldots$ heißt eine Gruppe bezüglich einer Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

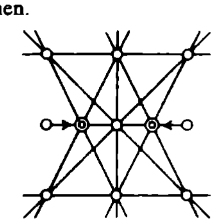
(I) Jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus $\mathfrak{M}$ ist vermöge der Operation A ein Element w aus $\mathfrak{M}$ zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).
(II) Die Operation A ist assoziativ, d. h., für alle Elemente u, v, w aus $\mathfrak{M}$ gilt:
$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
(III) Zu je zwei Elementen u und v aus $\mathfrak{M}$ existiert mindestens ein Element x aus $\mathfrak{M}$, so daß $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus $\mathfrak{M}$, so daß $y \circ u = v$ gilt.
Es sei nun $\mathfrak{K}$ die Menge aller geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a und b, für die $a^2+b^2=1$ gilt. Ferner sei in $\mathfrak{K}$ eine Operation A wie folgt definiert:
$(a, b) \circ (c, d) = (ac-bd, ad+bc)$.
Man beweise, daß
$\mathfrak{K}$ eine Gruppe bezüglich A ist.

6.2 50 weiße und 50 schwarze Kugeln sind so in zwei äußerlich nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen, daß keine Urne leer bleibt und alle Kugeln verwendet werden. Wie ist die Aufteilung der Kugeln auf die beiden Urnen vorzunehmen, wenn die Wahrscheinlichkeit, beim (blindlings erfolgenden) einmaligen Wählen einer der beiden Urnen und Ziehen einer Kugel aus ihr eine weiße Kugel zu ergreifen, so groß wie möglich ausfallen soll?
Hinweise zur Lösung:
a) In der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses als Quotient aus der Anzahl g der für dieses Ereignis „günstigen" Fälle und der Gesamtzahl m aller möglichen Fälle definiert, also $p = \frac{g}{m}$ gesetzt.
b) Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, aus einer Urne, die insgesamt u Kugeln und darunter w weiße enthält, (blindlings) eine weiße Kugel zu ziehen, als $p = \frac{w}{u}$ anzusetzen.
c) Sind zwei Urnen vorhanden, bei denen die Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer weißen Kugel p_1 bzw. p_2 betragen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignis:
„Auswahl einer der beiden Urnen und ziehen einer weißen Kugel aus der gewählten Urne"
zu: $p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$.

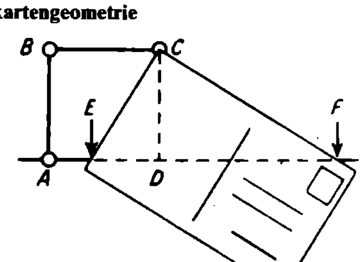
Lösungen zu alpha-heiter (2/72)

9 Punkte, 8 Geraden

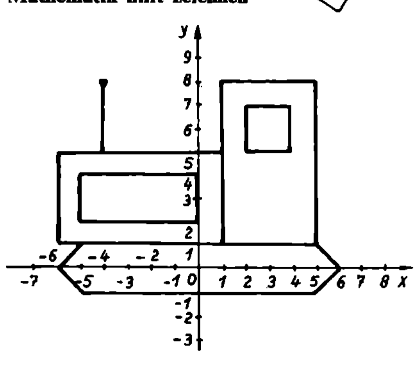
Zwei Geraden gehen verloren, vier neue Geraden werden gewonnen.



Postkartengeometrie



Mathematik hilft zeichnen



Interview mit Prof. Dr. L. A. Kaloujnine

Über eine mathematisch-physikalische Schule in Kiew

Im Januar 1971 weilte Prof. Dr. *L. A. Kaloujnine* besuchsweise in Leipzig. Der Wissenschaftler der Universität Kiew beschäftigt sich besonders mit moderner abstrakter Algebra und mathematischer Logik und ist in der DDR seit Jahrzehnten gut bekannt. Wir wußten, daß er stets auch ein großes Interesse für die Fragen der Modernisierung des Mathematikunterrichts und die stete Aktivierung der außerunterrichtlichen Arbeit zeigt. Sein Buch „Primzahlzerlegung" ist vor kurzem in deutscher Sprache erschienen. Er überbrachte *alpha* die Grüße des *Direktors der mathematisch-physikalischen Fakultät Kiew* und des Chefredakteurs des ukrainischen *Mathematik-Almanachs*. Einen Schwerpunkt des Gesprächs zwischen *Prof. Dr. Kaloujnine* und dem Chefredakteur *alpha* möchten wir herausgreifen, weil wir glauben, daß er unsere Leser besonders interessieren wird:

Chefredakteur: In Kiew gibt es eine mathematisch-physikalische Schule. Wie kam es zu ihrer Gründung?

Prof. Dr. Kaloujnine: Anfang der 60er Jahre wurde beschlossen, neben normalen allgemeinbildenden Schulen Spezialschulen für Mathematik zu schaffen, so wie es diese bereits auf den Gebieten der bildenden Kunst und der Musik gab. Es entstanden Internatsschulen in Moskau, Leningrad, Nowosibirsk, Charkow und bei uns in Kiew.

In den kleineren Städten und auf dem Lande gibt es zahlreiche interessierte und talentierte Schüler. Durch Zusammenfassung in solchen Internatsschulen sollen sie die Möglichkeit erhalten, ihre Fähigkeiten zu erweitern und zu vertiefen.

Ch.: Wie wird man Schüler einer solchen Schule?

Prof. K.: Durch Hinweise unserer Mathematiklehrer, im Rahmen der Mathematikolympiaden, durch die Tätigkeit in Arbeitsgemeinschaften *Junger Mathematiker* werden uns die talentierten Schüler bekannt. Nach der 7. Klasse werden sie zunächst in einem Sommerlager in Kiew zusammengefaßt, das von Wissenschaftlern und erfahrenen Mathematiklehrern betreut wird; dort werden die besten ausgewählt.

Ch.: Wie sieht der Unterricht an der Internatsschule aus?

Prof. K.: Ein großer Teil der unterrichtenden Lehrer sind jüngere Kräfte unserer Hochschule (Assistenten, Dozenten). Jede der obengenannten Schulen hat ein großes Programm, das von dem der normalen Schulen abweicht. Es wird von den „Eltern" der Schule, der Universität und dem Ministerium erarbeitet. Der Rektor der Kiewer Universität ist für die Aufstellung der Pläne verantwortlich.

Der Schüler kann sich beim Eintritt in die Schule für die Spezialrichtung Mathematik, Physik (und in naher Zukunft auch für Chemie) entscheiden.

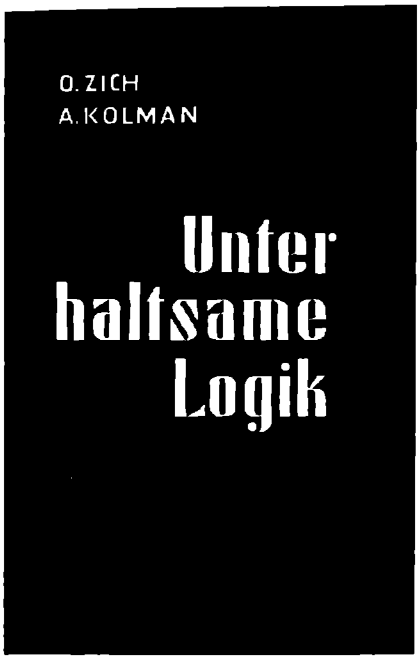
Ch.: Uns interessiert natürlich besonders die Spezialrichtung Mathematik. Würden Sie uns aus dem dreijährigen Programm über das erste Jahr, die Klasse 8, näheres mitteilen?

Prof. K.: In diesem Jahr entstehen Lehrbücher für diese Spezialschule. Sie wurden auf Grund langjähriger Erfahrungen zusammengestellt. In dem Lehrbuch „Algebra für die 8. Klasse" ist enthalten: Über die Sprache der Mengenlehre und Mathematische Logik (als originelle Wiederholung des Schulstoffes der 5. bis 7. Klasse); Arithmetik und Polynome, Einführung der reellen Zahlen, usw. Abschnitte dieses Buches wurden bereits im Fernsehen vorgeführt. Nach Fertigstellung der Bücher werden diese auch eine Hilfe für Spezialarbeitsgemeinschaften und für den fakultativen Unterricht sein können.

Ch.: Kommt bei dieser Spezialisierung nicht die Allgemeinbildung zu kurz?

Prof. K.: Unsere Schüler bewähren sich nicht nur neben dem Mathematikunterricht durch Jahresarbeiten, durch weitere Fachkurse und Olympiaden außerunterrichtlich im Fach Mathematik, sondern sie treiben rege Sport, sind musikalisch interessiert und haben auch hervorragende Erfolge in anderen Fächern. Das ist verständlich, wenn ich darauf hinweise, daß wir nur Schüler aufnehmen, welche in den meisten Fächern gute bis sehr gute Leistungen aufweisen.

Ch.: Wir danken Ihnen, Herr Professor, für dieses Interview. Wir freuen uns über die Bereitschaft, uns die genannten Lehrbücher zu übersenden. Wir werden in *alpha* für unsere Leser geeignete Ausschnitte daraus veröffentlichen.



Der Leser wird sicherlich auch der Meinung sein, daß jedermann — der Physiker wie der Dichter, der Traktorist wie der Chemiker — in der Lage sein muß, folgerichtig zu denken, beweiskräftig zu urteilen und falsche Schlußfolgerungen zu widerlegen. Das ist besonders in unserer Zeit notwendig, die ständig eine Vielzahl von ungewöhnlichen und erstaunlichen Entdeckungen und Erfindungen in den verschiedenen Bereichen hervorbringt.

Wer sich wirklich in all dieser Vielfalt auskennen, eine eigene Meinung haben und diese auch verteidigen will, wer aktiv am Leben teilhaben, forschen, Forschungsvorschläge entwickeln will, mit anderen Worten, wer tatkräftig am Aufbau des Sozialismus helfen will, der muß logisch denken können. Diese Fähigkeit erfordert zu ihrer Weiterentwicklung Übung, ähnlich wie zur Vervollkommnung von Fertigkeiten im Skilaufen die Teilnahme an Skiwettkämpfen unumgänglich ist...

Derjenige, welcher ein wenig die *moderne Logik* kennt, wird in der Regel weitaus schneller mit einer gestellten Aufgabe fertig sein, als ein Anfänger.

Die moderne *formale Logik*, die auch *mathematische Logik* genannt wird, übt einen ständig steigenden Einfluß auf die Methoden des Denkens in unserer Zeit aus.

Leseprobe

Einiges aus der Aussagenlogik

1.1. Aussagen

Sachverhalte der Realität werden in Form von Aussagen erfaßt. Das können sowohl Aussagen aus der Mathematik, der Philosophie oder anderen Wissenschaften als auch aus der Praxis des täglichen Lebens sein. Um die hier benötigten Hilfsmittel aus der Logik anwenden zu können, betrachten wir nur solche Aussagen, für die es nur zwei eindeutig bestimmte Möglichkeiten des Wahrheitsgehaltes gibt, nämlich *wahr* oder *falsch* zu sein. Das ist keineswegs bei allen sprachlichen Äußerungen der Fall, wie folgende Beispiele zeigen.

1. Jede durch 4 teilbare Zahl ist auch durch 2 teilbar.
2. Die Lösung einer bestimmten mathematischen Aufgabe ist ein schwieriges Problem.
3. Verhütet Waldbrände!
4. Ein Kaninchen, falls indessen.

Nur im Fall 1. kann man in eindeutiger Weise von Wahrheit oder Falschheit sprechen. Hier handelt es sich um eine wahre Aussage. Dagegen ist der Wahrheitsgehalt der Aussage im Fall 2. nicht eindeutig bestimmt. Er ist nämlich von den Kenntnissen und Fähigkeiten desjenigen abhängig, der an die Lösung der betreffenden Aufgabe herangeht. Im Fall 3. ist es sinnlos, überhaupt von Wahrheitsgehalt zu sprechen, denn hier wird kein bestimmter Sachverhalt beschrieben, es liegt also gar keine Aussage vor. Im Fall 4. schließlich handelt es sich um eine sinnlose Aneinanderreihung von Wörtern.

Wir haben uns also hier auf solche Aussagen beschränkt, für die es außer „wahr" und „falsch" keine weitere Möglichkeiten des Wahrheitsgehalts gibt. Weiterhin kann eine solche Aussage auch nur einen dieser beiden *Wahrheitswerte* annehmen, da wir natürlich den Widerspruch, daß eine Aussage gleichzeitig wahr und falsch ist, ausschließen müssen.

Die Feststellung, daß einer jeden Aussage genau einer der beiden Wahrheitswerte „wahr" bzw. „falsch" zukommt, bedeutet jedoch nicht, daß man von einer beliebig vorgegebenen Aussage unmittelbar sagen kann, *welchen* von beiden Wahrheitswerten sie besitzt. Diese Frage läßt sich im allgemeinen erst nach einer Beweisführung beantworten. Es gibt Aussagen, für die das bis heute noch nicht gelungen ist, so z. B. die folgende als Goldbachsche Vermutung bekannte mathematische Aussage:

Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, läßt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.

Beispiel: $4 = 2 + 2$
$6 = 3 + 3$
$8 = 5 + 3$
$30 = 11 + 19$
$100 = 87 + 13$

Es scheint so, als ob diese Art der Zerlegung immer möglich wäre. Man darf sich jedoch durch diesen Anschein nicht zu der Überzeugung verleiten lassen, daß dies wirklich für *alle* geraden Zahlen gilt. Das läßt sich hier wegen der unendlich vielen Fälle durch Probieren nicht beweisen; dazu müssen andere Beweisverfahren gefunden werden, was bis heute nicht gelungen ist. Trotzdem kann man mit Sicherheit sagen, daß die Goldbachsche Vermutung genau einen der beiden Wahrheitswerte besitzt.

1.2. Zusammengesetzte Aussagen

Durch Bindewörter wie „und", „oder", „wenn, so", bzw. durch die Verneinung „nicht" lassen sich aus einfachen Aussagen wie „Die Spree ist ein Fluß" oder „2 ist eine gerade Zahl" zusammengesetzte Aussagen bilden. So ist z. B. die Aussage „Die Sonne scheint, und der Wind weht" zusammengesetzt aus den beiden Einzelaussagen a) „Die Sonne scheint" und b) „Der Wind weht". Die Verbindung der beiden Einzelaussagen wird durch das Wort „und" hergestellt. Wir wollen hier konkrete Aussagen abkürzend durch lateinische Buchstaben bezeichnen.

A: Die Sonne scheint.
B: Der Wind weht.

A und B: Die Sonne scheint, und der Wind weht.

Derartige Zusammensetzungen von Einzelaussagen sind wegen ihrer sprachlichen Formulierung nicht immer deutlich zu erkennen. So zeigt sich der Aufbau der Aussage

„Die Zahl 2 ist eine gerade Primzahl"

aus zwei anderen Aussagen erst deutlich, wenn man sie in die Form

„Die Zahl 2 ist gerade, und die Zahl 2 ist eine Primzahl"

bringt.

Mit Hilfe von Bindewörtern wie den obengenannten lassen sich aus vorgegebenen Aussagen neue Aussagen zusammensetzen, die abgesehen von unwesentlichen Unterschieden in der sprachlichen Formulierung, in eindeutiger Weise den Teilaussagen zugeordnet sind.

Wegen dieser Zuordnungen nennt man die durch die jeweiligen Bindewörter gegebenen Zusammensetzungen auch *Aussagenfunktionen*. Diese Aussagenfunktionen werden nun so festgelegt, daß der Wahrheitswert der zugeordneten Aussage nur von den Wahrheitswerten der in der Zusammensetzung auftretenden Einzelaussagen abhängt und nicht von ihrem Inhalt, d. h. nicht von dem von ihnen beschriebenen Sachverhalt. Wie man den Wahrheitswert der zugeordneten Aussage aus den Wahrheitswerten der in die Zusammensetzung eingehenden Aussagen bei der jeweiligen Aussagenfunktion bestimmt, wird durch die Werttabellen in folgendem Abschnitt festgelegt.

In diesen Tabellen benutzen wir die Buchstaben „X", „Y" und „Z" als Variable für Einzelaussagen. Die Wahrheitswerte werden mit „1" (wahr) und „0" (falsch) bezeichnet.

1.3. Die klassischen Aussagenfunktionen

Die Negation. Durch Vorsetzen des Wortes „nicht" vor eine beliebige Aussage X erhalten wir die neue Aussage *„nicht* X". Wir nennen sie die *Negation* von X und schreiben kürzer „$\overline{X}$". Folgende Tabelle gibt an, wie der Wahrheitswert von $\overline{X}$ vom Wahrheitswert von X abhängt.

Die Negation ist eine *einstellige* Aussagenfunktion, d. h. sie ordnet *einer* Aussage eine andere Aussage zu. Die folgenden Funktionen sind dagegen *zweistellige* Aussagenfunktionen, d. h. sie ordnen immer einem *Paar* von Aussagen eine Aussage zu.

X	$\overline{X}$
1	0
0	1

Die Konjunktion. Verbindet man zwei Aussagen X, Y durch das Wort „und“, so erhält man eine neue Aussage „X und Y“, die als *Konjunktion* der Aussagen X, Y bezeichnet wird. Statt „X und Y“ schreibt man kürzer „$X \wedge Y$“. Wie der Wahrheitswert einer Konjunktion von den Wahrheitswerten der verknüpften Einzelaussagen abhängt, gibt die folgende Tabelle an, in der alle möglichen Kombinationen der beiden Wahrheitswerte von X bzw. Y enthalten sind:

X	Y	$X \wedge Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Diese Festlegung der Wahrheitswerte entspricht gerade dem üblichen Gebrauch des Bindewortes „und“; denn eine mit Hilfe dieses Wortes zusammengesetzte Aussage ist wahr, wenn beide Komponenten wahr sind, und in allen anderen Fällen falsch.

Die Disjunktion. Als Disjunktion bezeichnet man die Verbindung zweier Aussagen X, Y mit Hilfe des Bindewortes „oder“. Statt „X *oder* Y“ schreibt man kürzer „$X \vee Y$“. Wie die Wahrheitswerte einer Disjunktion von den Wahrheitswerten ihrer Komponenten abhängen, zeigt folgende Tabelle:

X	Y	$X \vee Y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Beispiel:

Aussage A: Es regnet.
Aussage B: Es ist windig.

Aussage $A \vee B$: Es regnet, oder es ist windig.

Nach den Festlegungen in der Tabelle ist hier Aussage „$A \vee B$“ nur dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsch sind. Bei der durch diese Tabelle festgelegten Aussagenfunktionen handelt es sich um das sogenannte *nicht ausschließende* „oder“, d. h., die zusammengesetzte Aussage ist auch dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind. Im alltäglichen Sprachgebrauch wird dagegen das Bindewort „oder“ im allgemeinen im Sinne von „entweder — oder“ benutzt; dabei ist dann die zusammengesetzte Aussage nur dann wahr, wenn eine der Teilaussagen wahr und die andere falsch ist. Im Falle der Wahrheit der Gesamtaussage schließt also die Wahrheit der einen Teilaussage die Wahrheit der anderen Teilaussage aus.

Die Bezeichnung dieser beiden Aussagenfunktionen ist nicht einheitlich. Die hier als Disjunktion bezeichnete Aussagenfunktion wird oft auch *Alternative* genannt. Da die letztere Bezeichnung im täglichen Sprachgebrauch gerade für das ausschließende „entweder-oder“ verwendet wird, haben wir hier für das nicht ausschließende „oder“ die Bezeichnung *Disjunktion* gewählt.

Die Implikation. Werden Aussagen Y und X zu der Aussage „wenn X, so Y“ verbunden, so wird diese als *Implikation* bezeichnet, man schreibt kürzer „$X \rightarrow Y$“. Die Wahrheitswerte einer Implikation kann man aus folgender Tabelle ablesen:

X	Y	$X \rightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

In einer Implikation „$X \rightarrow Y$“ heißt X *Voraussetzung* und Y *Behauptung*. Man sagt auch: „Aus X folgt Y“. Die in der Tabelle getroffene Festlegung der Wahrheitswerte besagt dann, daß aus einer wahren Voraussetzung nur etwas Wahres folgen kann (Zeilen 1 und 2) und daß aus einer falschen Voraussetzung sowohl etwas Wahres als auch etwas Falsches folgen kann.

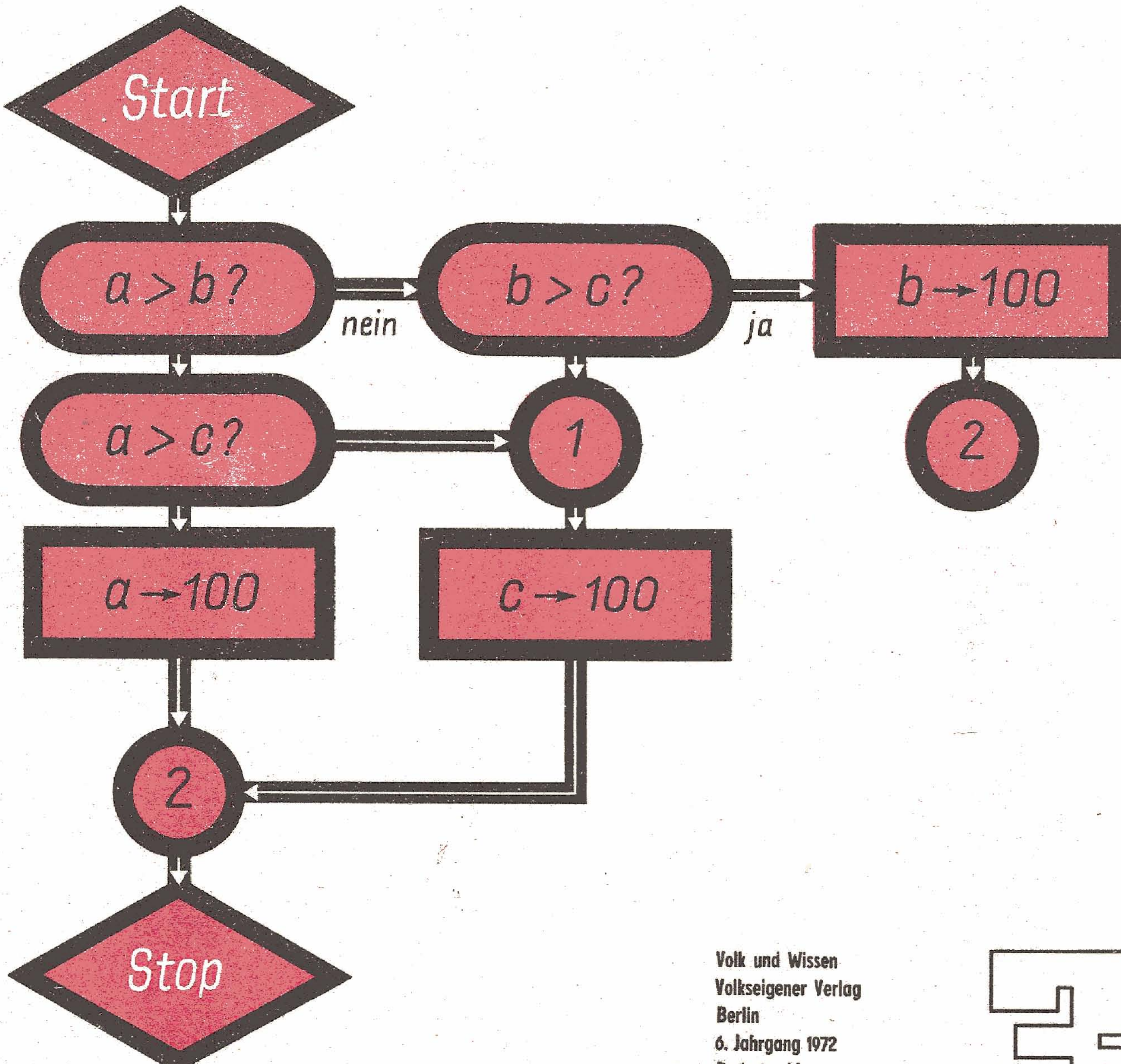
Die Äquivalenz. Häufig tritt die Verbindung „X genau dann, wenn Y“ der beiden Aussagen X und Y auf. Man schreibt kürzer „$X \leftrightarrow Y$“. Die folgende Tabelle gibt wieder die Wahrheitsverteilung dieser Aussagenfunktion an:

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Wie man in der Tabelle erkennt, ist diese Aussagenverbindung wahr, wenn beide Teilaussagen den gleichen Wahrheitswert haben. Sie ist falsch, wenn die Teilaussagen verschiedene Wahrheitswerte haben. Aus diesem Grunde bezeichnet man diese Aussagenfunktion als Äquivalenz.

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
6. Jahrgang 1972
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31 059

3

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Technische Zeichnungen J. Tittel, TU Dresden (S. 49/51); J. Lehmann, Leipzig (S. 58); Vignetten: K.-H. Guckuk, Leipzig (S. 61, S. 63); Vignette: Prof. Dr. Ottescu, Bukarest (S. 63); J. Lehmann, Leipzig (S. 63); Archiv: Klaus Ampler (S. 66); J. Lehmann, Leipzig (S. 67); Graphiken: Parteihochschule „Karl Marx" beim ZK der SED (III. U.-Seite); Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig;
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

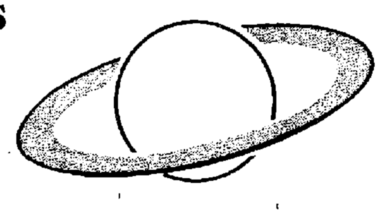
Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 22. März 1972

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises



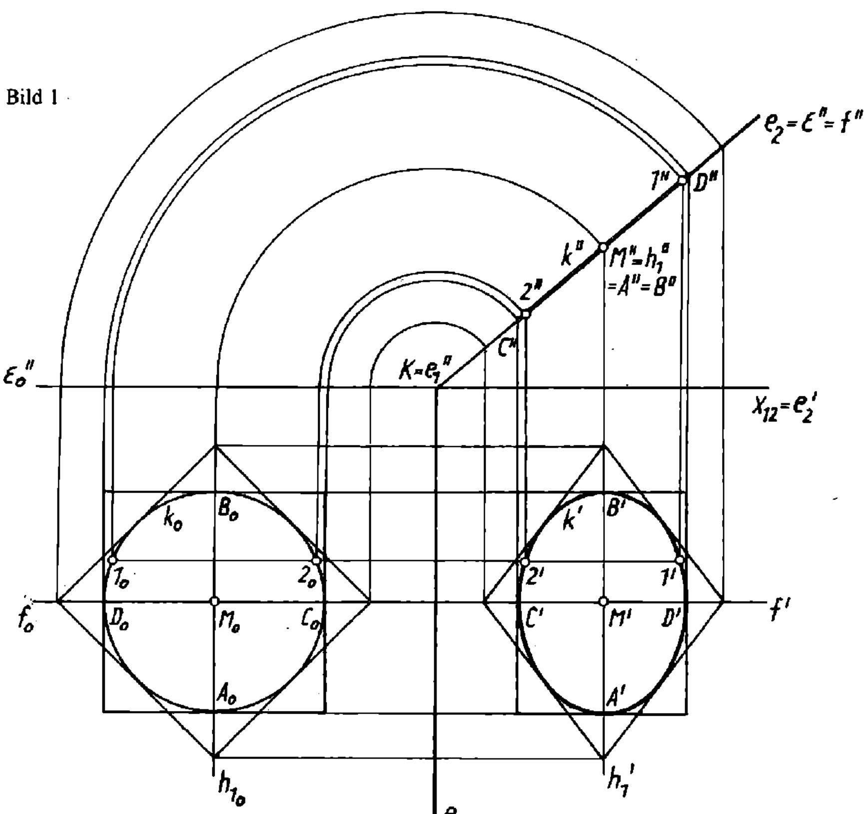
Als die Astronomen zu Beginn des 17. Jahrhunderts (um 1610) über die ersten noch recht primitiven Fernrohre als Arbeitsmittel verfügten, machten sie damit innerhalb unseres Planetensystems für die damalige Zeit einige höchst überraschende Beobachtungen. Neben der Entdeckung der Phasen der Venus nach Art unseres Erdtrabanten und der vier größten Jupitermonde bewegten die Gemüter der Astronomen eigenartige henkelähnliche Ansätze am Saturn, deren Aussehen und Gestalt sich zeitlich änderte. Erst nach mehreren Jahrzehnten vermochte Huygens (1656) diesem am Saturn beobachteten Phänomen die richtige Deutung zu geben. Als vorsichtiger Wissenschaftler teilte er seine Vermutung zunächst nur einigen befreundeten Astronomen in Form eines Anagramms mit, um sich auf diese Weise die Priorität seiner Entdeckung zu sichern. Durch die Verbesserung der optischen Hilfsmittel in der Folgezeit bestätigte sich immer mehr die Huygenssche Hypothese, nach welcher der Saturn von einem ringförmigen Gebilde umgeben ist, dessen Ebene gegen die Ebene der Ekliptik um einen gewissen Winkel (28°) geneigt ist. Infolge der zeitlichen Änderung der Relativstellung zwischen Saturn und Erde innerhalb unseres Sonnensystems entstehen für den Beobachter von unserem Planeten aus zu verschiedenen Zeiten unterschiedliche Eindrücke von diesem ringförmigen Gebilde.

Die von dem menschlichen Auge durch eine angenäherte Parallelprojektion registrierten Bilder des Kreises bezeichnet man als *Ellipse*. Da die Abbildung eines Kreises auf eine Ebene mittels Parallelprojektion nicht nur für Astronomen, sondern auch für Techniker, Naturwissenschaftler und Künstler von Interesse ist, soll dieser Vorgang hier einmal konstruktiv genauer untersucht werden. Das theoretische Rüstzeug dafür ist uns bereits in Heft 4/1968 in dem Beitrag „Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur" gegeben worden. Dort wurde gezeigt, wie man die wahre Gestalt einer durch Grund- und Aufriß vorgegebenen ebenen Figur nach der *Methode des doppelten Zirkelschlages* konstruktiv am einfachsten bestimmt. Die Anwendung des Verfahrens beschränkte sich auf Dreiecke oder Figuren, die sich in Dreiecke zerlegen lassen. Ein Kreis ist jedoch nicht in dieser Weise zerlegbar. Außerdem gehen wir von der uns bekannten wahren Gestalt einer ebenen Figur aus und ermitteln deren Normalprojektion in eine Bildebene. Das uns vertraute Konstruktionsverfahren müssen wir also der neuen Problemstellung und dem andersartigen Objekt unserer Betrachtung anpassen. Zunächst geben wir uns als Träger des Kreises etwa eine zweitprojizierende Ebene durch ihre Spuren e_1 und e_2 in zugeordneten Normalrissen vor. (Bild 1)

Diese spezielle Annahme wird getroffen, um die Konstruktion zu vereinfachen. Ferner legen wir den Kreismittelpunkt M in ε beliebig im ersten Quadranten fest. Da ε zweitprojizierend ist, liegt M'' auf e_2. Nun stellen wir uns die Aufgabe, um M mit dem Radius a einen Kreis zu zeichnen, der ganz in ε liegt. Für den Aufriß ist sie schnell gelöst. Die Aufrisse aller in ε befindlichen Gebilde liegen auf e_2. Folglich brauchen wir nur von M'' aus die Strecke a nach beiden Seiten auf e_2 abzutragen. Die so erhaltene Strecke $\overline{C''D''}$ stellt den Aufriß des Kreises k dar. In diesem Zusammenhang sei erwähnt: auch der Saturn nimmt bezüglich der Erde gelegentlich eine solche Relativstellung an, daß der den Saturn umgebende Ring im Fernrohr nur als feiner Strich sichtbar wird. Über den Grundriß k' des in ε liegenden Kreises k läßt sich allgemein zunächst folgendes sagen:

1. Jeder Kreisdurchmesser (durch M gehende Kreissehne) geht in einen Ellipsendurchmesser über, der von M' halbiert wird, da Teilverhältnisse bei Normalprojektion erhalten bleiben.
2. Tangenten in den Endpunkten eines Kreisdurchmessers gehen in parallele Tangenten der Ellipse über, da Parallelität bei dieser Abbildung erhalten bleibt. Umgekehrt liegen auch die Berührpunkte paralleler Tangenten auf einem Ellipsendurchmesser.
3. Der auf der ersten Hauptlinie durch M liegende Kreisdurchmesser $\overline{AB}$ bildet sich in wahrer Größe ab. Alle anderen Kreisdurchmesser werden bei der Abbildung gestaucht, da ihre Neigungswinkel gegen die Bildebene von 0° verschieden sind. (Unter dem Neigungswinkel einer Geraden g gegen eine Ebene π versteht man denjenigen Winkel, den die Gerade g mit ihrer Normalprojektion g' auf die Ebene π einschließt.)
4. Die stärkste Stauchung erfährt der zur ersten Hauptlinie senkrecht liegende Kreisdurchmesser $\overline{CD}$ bei Normalprojektion auf

Bild 1



π_1, da dessen Neigungswinkel gegen die Bildebene am größten ist. Jene Geraden, aus einer Ebene ε, die mit π_1 den größtmöglichen Winkel einschließen, bezeichnet man als *Fallinien* der Ebene ε. Sie durchsetzen die ersten Hauptlinien von ε senkrecht. Projiziert man die durch M gehende erste Hauptlinie h_1 und die Fallinie f normal auf π_1, so werden sich ihre Projektionen h_1' und f' wieder senkrecht schneiden, da ein Schenkel des abzubildenden rechten Winkels parallel zur Bildebene liegt.

Mit den hier getroffenen Aussagen können wir folgende Definitionen und Zwischenergebnisse festhalten:

1. Der größte Ellipsendurchmesser hat die Länge des Kreisdurchmessers. Man bezeichnet ihn als *Hauptachse* der Ellipse. Die Hauptachse liegt parallel zur ersten Spur e_1 von ε.
2. Der kleinste Ellipsendurchmesser steht senkrecht auf e_1. Man bezeichnet ihn als *Nebenachse* der Ellipse.
3. Haupt- und Nebenachse einer Ellipse stehen aufeinander normal.
4. Die Endpunkte der Hauptachse bezeichnet man als *Hauptscheitel* und die Endpunkte der Nebenachse als *Nebenscheitel* der Ellipse.

Um außer den Scheiteln weitere Ellipsenpunkte zu erhalten, legen wir ε nach π_1 um, wobei e_1 die Drehachse darstellt. Dem umgelegten Kreis k_0 werde nun jenes Quadrat umschrieben, das ein zu e_1 paralleles Seitenpaar besitzt. Führt man dieses Quadrat in die Ausgangslage von ε zurück, stellt sein Grundriß ein Rechteck dar, dessen Seitenlängen mit den Längen von Haupt- und Nebenachse der Bildellipse paarweise übereinstimmen. Man bezeichnet dieses Rechteck als *Achsenrechteck* der Ellipse. Es ist zugleich ein Tangentenrechteck der Ellipse mit den Haupt- und Nebenscheiteln als Berührpunkte. Ferner umschreiben wir dem Kreis k_0 der umgelegten Ebene ε_0 ein Quadrat, dessen Diagonalen parallel bzw. senkrecht zu e_1 liegen. Führt man dieses in die Ausgangslage von ε zurück, so erscheint der Grundriß des Quadrates als ein Rhombus. Seine Seiten stellen gleichfalls Ellipsentangenten mit den Halbierungspunkten als Berührpunkte dar. Nunmehr kennen wir zwei Tangentenvierecke der Ellipse samt ihren Berührpunkten. Damit läßt sich die Ellipse bereits näherungsweise zeichnen. Vor allem bewahren uns die Tangentenvierecke vor dem grundlegenden Fehler, eine Ellipse als Kurve mit zwei Spitzen in ihren Nebenscheiteln darzustellen.

Genügen für unsere Zwecke noch nicht die beiden Tangentenvierecke der Ellipse, so können wir uns – von der Umlegung ausgehend – beliebig viele weitere Ellipsenpunkte wie folgt verschaffen: Eine senkrecht zu e_1 eingezeichnete Ordnungslinie schneidet den umgelegten Kreis k_0 in den Punkten 1_0 und 2_0. Mit Hilfe weiterer Ordnungslinien senkrecht zur Rißachse und Kreisbögen um K als gemeinsamem Mittelpunkt führen wir die Punkte 1 und 2 in den Aufriß.

Bringt man anschließend einander entsprechende Ordnungslinien durch 1″ und 2″ bzw. 1_0 und 2_0 zum Schnitt, ergeben sich die Ellipsenpunkte 1′ und 2′. Auf diese Art lassen sich weitere Ellipsenpunkte in beliebiger Dichte konstruktiv ermitteln. (Vgl. Bild 1)

Anschließend soll nun mit Hilfe räumlicher Betrachtungen an zugeordneten Normalrissen eine einfache und platzsparende, rein *planimetrische* Ellipsenkonstruktion abgeleitet werden. Dabei geht man von Haupt- und Nebenachse als den vorgelegten Bestimmungsstücken der Ellipse aus. Zunächst werde die Lage von ε bezüglich der Bildebenen π_1 und π_2 wie oben vorausgesetzt. $\overline{AB}$ sei der in der ersten Hauptlinie durch M liegende Kreisdurchmesser. $\overline{CD}$ sei ein in der Fallinie durch M liegender Kreisdurchmesser. (Bild 2)

Wir bestimmen die auf der Fallinie durch N liegenden Kreispunkte. Hierzu drehen wir den Kreis k um h_1 parallel zur Bildebene π_1. Es ergibt sich der Kreis k_0. Die Fallinie f_0'' durch N' schneidet k_0' in den Punkten $1_0'$ und $2_0'$. Mittels einer Ordnungslinie führen wir zunächst nur $1_0'$ in den Aufriß. Durch anschließende Drehung von $1_0''$ um h_1'' findet man 1″. Die Ordnungslinie durch 1″ mit dem Grundriß f' der Fallinie f durch N zum Schnitt gebracht, liefert den Punkt 1′. Dieser ist einerseits der Grundriß eines Punktes von k. Andererseits können wir ihn auch als Punkt einer Ellipse mit $\overline{A'B'}$ als Hauptachse und $\overline{C'D'}$ als Nebenachse ansehen.

Der auf f' liegende Ellipsenpunkt läßt sich auch ohne Verwendung des Aufrisses sehr einfach finden. Die Konstruktion mit Beweis sei für den Punkt 2′ gezeigt: Um M' zeichnet man zwei Kreise mit den Radien $a = \overline{M'A'}$ (*Hauptscheitelkreis*) und $b = \overline{M'C'}$ (*Nebenscheitelkreis*). Einen der Schnittpunkte von f′ mit dem Hauptscheitelkreis (hier $2_0'$) verbindet man mit M'. Durch den Schnittpunkt der Verbindungsgeraden mit dem Nebenscheitelkreis zieht man eine Parallele zur Hauptachse. Diese schneidet f' in 2′. Wir behaupten, daß 2′ ein Punkt von k' ist. Beweis: Gemäß unserer Konstruktion gilt die Proportion $a : b = \overline{N'1_0'} : \overline{N'1'}$. Ferner ist aus der Zeichnung die Proportion $a : b = \overline{N'2_0'} : \overline{N'2'}$ abzulesen. Da außerdem die Punkte $1_0'$ und $2_0'$ symmetrisch bezüglich der ersten Hauptlinie h_1 liegen, somit N' die Strecke $\overline{1_0'2_0'}$ halbiert, ist N' auch Halbierungspunkt der Strecke $\overline{1'2'}$. 2′ ist also ein Punkt von k', was zu beweisen war.

Diese Konstruktion erlaubt bei vorgegebener Haupt- und Nebenachse – losgelöst von allen räumlichen Überlegungen – ein einfaches und schnelles Auffinden beliebig vieler Ellipsenpunkte. Da für das Zeichnen der Ellipse nach dieser Art zwei Kreise (Haupt-

Bild 2

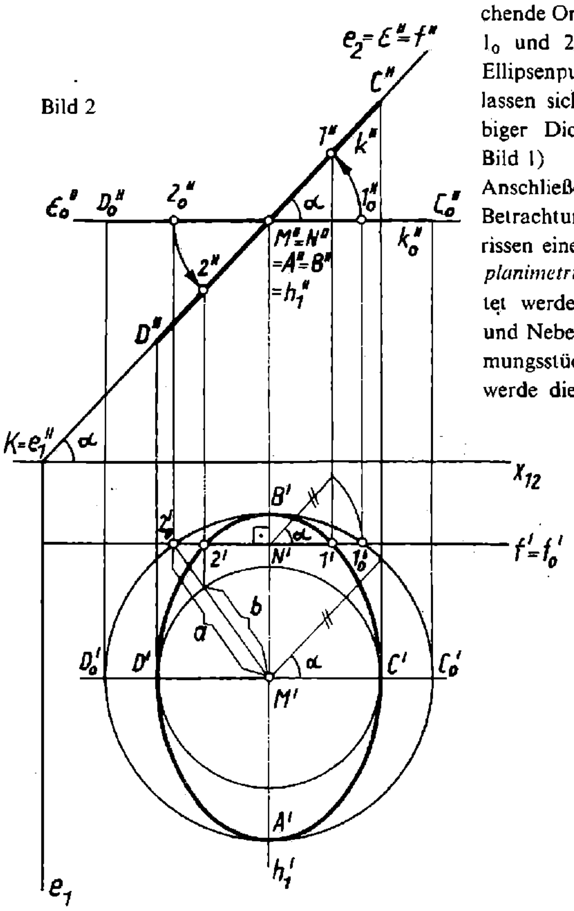
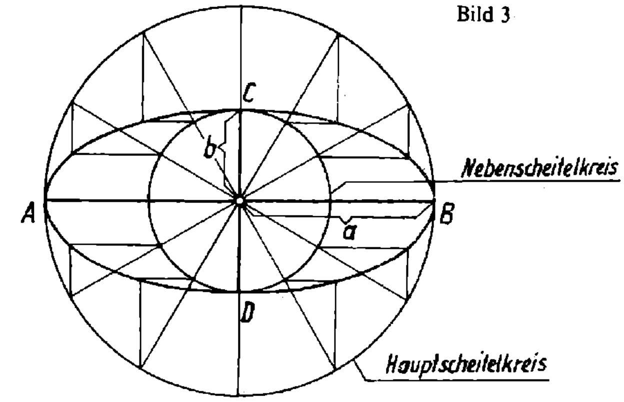


Bild 3



scheitelkreis und Nebenscheitelkreis) die Ausgangselemente bilden, spricht man hier auch von der *Zweikreiskonstruktion* der Ellipse. Diese war bereits in antiker Zeit bekannt. (Bild 3)

Anknüpfend an die letzten Überlegungen des bereits zitierten Aufsatzes aus Heft 4/1968 können wir sagen: Zwischen der Ellipse und ihrem Hauptscheitelkreis besteht die geometrische Verwandtschaft der *perspektiven Affinität*. Die Hauptachse der Ellipse fällt in die *Affinitätsachse* und die Stellung der Nebenachse gibt die *Affinitätsrichtung* an. Auch zwischen Ellipse und zugehörigem Nebenscheitelkreis läßt sich eine Zuordnung mittels perspektiver Affinität herstellen. Durch konstruktive Handhabung dieser geometrischen Verwandtschaft lassen sich beispielsweise von einem außerhalb einer Ellipse liegenden Punkt die Tangenten an die Ellipse allein mit Zirkel und Lineal exakt zeichnen.

Die hier behandelte Normalprojektion eines Kreises, welche uns auf die Ellipse geführt hat, gibt einen kleinen Einblick in die sehr umfangreiche *Lehre von den Kegelschnitten*. Ellipsen entstehen u. a. auch dadurch, daß man einen Drehkegel in gewisser Weise mit einer Ebene zum Schnitt bringt. Diese Betrachtungen führen dann auf andere Definitions- und Konstruktionsmöglichkeiten für Ellipsen.

Nun sollen noch die neu gewonnenen Kenntnisse über die Ellipse an zwei Beispielen ihre Anwendung finden:

1. Gegeben sind ein Drehzylinder (Rohr), der mit einer Mantellinie m die Bildebene π_1 berührt, und eine zweitprojizierende Ebene ε durch ihre Spuren e_1 und e_2. (Bild 4)
Gesucht sind der Grundriß der Schnittkurve von ε mit dem Zylinder und die wahre Gestalt des von dem Zylinder aus der Ebene ausgeschnittenen Flächenstückes. Begründe die Konstruktion und gib dir ähnliche Aufgaben vor!

2. Gegeben sind Haupt- und Nebenachse einer Ellipse und ein Punkt P. Gesucht sind die Tangenten von P an die Ellipse.

Anleitung zum Verständnis der Konstruktion in Bild 5:

Zur gegebenen Ellipse k zeichnet man den Hauptscheitelkreis $\tilde{k}$. Entsprechend der zwischen Ellipse und Kreis bestehenden geometrischen Verwandtschaft bestimmt man den Bildpunkt $\tilde{P}$ von P. Aus $\tilde{P}$ legt man in bekannter Weise (Kreis des Thales!) die Tangenten $\tilde{t}_1$ und $\tilde{t}_2$ mit den Berührpunkten $\tilde{T}_1$ und $\tilde{T}_2$ an $\tilde{k}$. Anschließend transformiert man die gefundenen Kreistangenten samt ihren Berührpunkten in das Ellipsenfeld zurück. Dabei benutzt man die Eigenschaften, daß parallele Geraden in parallele Geraden übergehen und die Punkte der Affinitätsachse bei der Transformation festbleiben.

E. Schröder

Bild 4

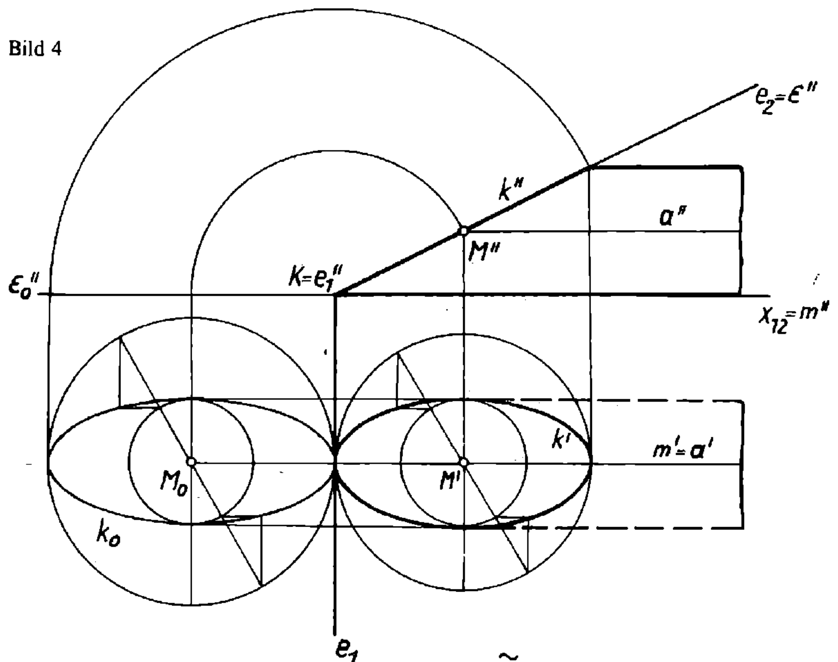
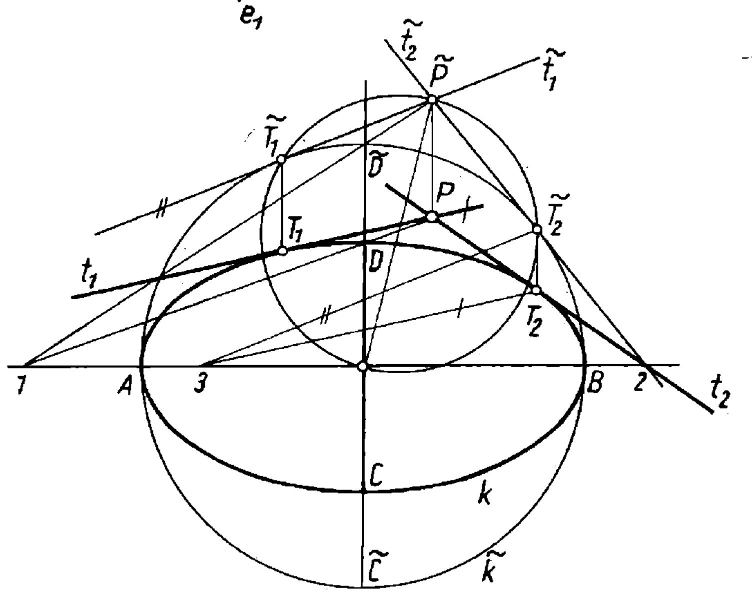


Bild 5



Anagramm von Chr. Huygens (*1629, †1695)

Anagramm von Huygens am Schluß seiner kleinen Schrift über die Entdeckung der ersten (hellsten) Saturntrabanten:

Betrifft die richtige Deutung des Saturnringes: aaaaaaa ccccc d eeeee g h iiiiiii llll mm nnnnnnnnn oooo pp q rr s ttttt uuuuu

Richtige Anordnung der Buchstaben:

Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato

Das heißt auf deutsch: Er wird von einem dünnen, ebenen, nirgends (mit Saturn) zusammenhängenden, gegen die Ekliptik geneigten Ring umgürtet.

Aufgaben:

▲1▲ Einem Kreis, der in einer zweitprojizierenden Ebene liegt, soll ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben werden.
Was läßt sich über den Grundriß des gleichseitigen Dreiecks aussagen, wenn eine Dreieckseite a) parallel zu π_1, b) parallel zu π_2 liegt?

▲2▲ Einem Kreis, der in einer zweitprojizierenden Ebene liegt, soll ein Quadrat einbeschrieben werden.
Unter welchen Voraussetzungen ist der Grundriß des dem Kreis einbeschriebenen Quadrates
a) ein Rechteck,
b) ein Rhombus,
c) ein von Rechteck und Rhombus verschiedenes Parallelogramm?

Mathematikolympiaden in der VR Polen

In der VR Polen werden seit 23 Jahren Mathematikolympiaden durchgeführt. Sie rangieren ihrem Alter nach hinter den ungarischen, rumänischen und den sowjetischen.

Als nach dem 2. Weltkrieg der Oberschulunterricht wieder aufgenommen werden konnte, standen wir vor großen Schwierigkeiten, besonders auf dem Gebiet der Mathematik: Während der ersten Jahre nach der Befreiung besaßen viele unserer Oberschullehrer keine abgeschlossene Hochschulausbildung. Das Niveau des Unterrichts war nicht ausreichend. Die von unserem Volksbildungsministerium ergriffenen Maßnahmen – es organisierte zahlreiche Weiterbildungsveranstaltungen – konnten nicht sofort auf den Unterricht wirken. Da beschloß man, den Mathematikunterricht durch eine direkte Aktion zu unterstützen: Man wandte sich an die Schüler selbst. So wurden die Olympiaden eingerichtet. Die *Polnische Mathematische Gesellschaft* erklärte sich bereit, sie zu organisieren. Das sind ihre Ziele:

- Das Interesse der Schüler für die Mathematik zu wecken,
- das Niveau ihrer Kenntnisse in diesem Fach zu erhöhen,
- besonders befähigte Schüler ausfindig zu machen und ihnen den Weg in die Hochschulausbildung zu ermöglichen.

Die Mathematikolympiaden wurden also nicht nur als ein Wettbewerb zwischen den Besten betrachtet, sondern vielmehr als ein Mittel dazu, eine größere Anzahl von Schülern für mathematische Probleme zu interessieren und sie zur persönlichen Beschäftigung mit der Mathematik anzuregen.

Die Olympiaden werden vom Zentralen Komitee in Warschau mit Unterstützung durch die Bezirkskomitees geleitet, die es in unseren acht Universitätsstädten gibt. Ihre Mitglieder sind Hochschullehrer oder Lehrer an Oberschulen.

Jährlich wird eine Olympiade in drei Stufen durchgeführt. Die 1. Stufe läuft vom 1. Oktober bis zum 15. Januar. Anfang Oktober, November und Dezember erhalten alle Schüler des Landes vom Zentralen Komitee den Text von je vier Aufgaben, dazu vier Vorbereitungsaufgaben (zur Einstimmung), die bis zum Ende des betreffenden Monats zu lösen sind. (Es werden nur Aufgaben für Schüler der Klassen 11 und 12 gestellt.)

Während der drei genannten Monate wird die Beschäftigung mit den gestellten Problemen, die völlig freiwillig ist, in keiner Weise kontrolliert. Die Teilnehmer haben die Möglichkeit, sich gegenseitig zu beraten oder sogar gemeinsam zu arbeiten. Der Lehrer soll nicht helfen, kann die Schüler jedoch auf mögliche Fehler aufmerksam machen.

Sobald die Frist für eine Aufgabengruppe abgelaufen ist, werden den Schulen die zugehörigen Lösungen geschickt. Nun tritt der Lehrer stärker in Aktion. Er diskutiert mit den Schülern über die Lösungen. Das Zentrale Komitee gibt jedes Jahr außerdem ein Heft mit ausführlichen Lösungen und Erklärungen aller in der Olympiade gestellten Aufgaben heraus. Darin werden auch im Zusammenhang mit den Aufgaben Fragen geklärt, die über den Schullehrplan hinausgehen.

Die 2. Stufe der Olympiade wird durch die Bezirkskomitees geleitet. Jedes Komitee prüft die Arbeiten der Schüler seines Bezirks und lädt dann alle diejenigen zum Bezirkswettbewerb ein, die zu der Mehrzahl der Aufgaben einwandfreie Lösungen geliefert haben. Diese Wettbewerbe finden im März gleichzeitig in den acht Städten statt, und zwar an zwei Tagen. An jedem Tag müssen drei Aufgaben innerhalb von fünf Stunden gelöst werden. Die Aufgaben, die für alle Bezirke gleich sind, werden vom Zentralen Komitee ausgewählt.

Die 3. Stufe der Olympiade findet im April in Warschau statt. Dazu werden diejenigen *Jungen Mathematiker* eingeladen, die bei den Bezirkswettbewerben am besten abgeschnitten haben. Die Zusammenstellung der Aufgaben entspricht der des Bezirksausscheides, der Schwierigkeitsgrad ist allerdings etwas höher. Diejenigen Teilnehmer, die gute Resultate erreichen, erhalten das Olympiade-Diplom. Es berechtigt sie, sich an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen oder an einer technischen Fakultät immatrikulieren zu lassen, ohne eine Aufnahmeprüfung ablegen zu müssen.

Viele Teilnehmer an Olympiaden haben sich entschieden, Mathematik zu studieren. Sie gehören zu den besten Studenten. Einige von ihnen haben promoviert, viele sind Dozenten, Lehrer oder Assistenten an Universitäten oder wissenschaftlichen Instituten. Die Olympiaden haben augenfällig dazu beigetragen, den Nachwuchs unserer jungen Mathematiker zu stellen. Für die Organisatoren der Wettbewerbe ergibt sich jedes Jahr wieder die Frage nach einer guten Aufgabenauswahl. Einerseits sollen die Aufgaben Beziehungen zu den Stoffgebieten des Schullehrplans haben, andererseits müssen sie sich wesentlich von den im Unterricht üblichen Aufgaben unterscheiden. Denn seit Anfang an ist es die Leitidee der Olympiade gewesen, die Schüler für Probleme zu interessieren, die zwar im Rahmen der Grundanforderungen bleiben, aber doch ein gutes Maß mathematischer Phantasie und eine gründliche logische Analyse verlangen. Solche Probleme sollten, um ausreichend attraktiv zu sein, interessante Eigenschaften von Zahlen oder Figuren betreffen. Außerdem müssen sie sich in übersichtlicher Weise formulieren lassen. Der Schwierigkeitsgrad der einzelnen Aufgaben einer Stufe wird unterschiedlich gehalten, weil es uns einmal darum geht, die Schüler nicht durch zu hohe Anforderungen zu entmutigen und zum anderen doch das Leistungsvermögen zu prüfen. Im allgemeinen bereiten die Probleme aus der Geometrie die meisten Schwierigkeiten, während Aufgaben mit kombinatorischem Charakter leichter bewältigt werden.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß der schwächste Punkt in den Schülerarbeiten die Darstellung der Lösungen ist. Richtige Gedanken sind oftmals unzureichend dargelegt. Bisweilen muß man viel Mühe aufwenden, um den Gedankengang des Schülers herauszufinden. Andererseits aber zeigen sich die *Jungen Mathematiker* sehr einfallsreich, und recht oft legen sie originelle Lösungen vor, die sich weit von denen unterscheiden, die die Autoren der Aufgaben ins Auge gefaßt hatten.

S. Straszewicz

Aufgaben der XXIII. Mathematik-Olympiade der VR Polen
(Auswahl)

▲1▲ Es ist der Graph der durch den Ausdruck

$$y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

bestimmten Funktion zu zeichnen, wobei der Definitionsbereich dieser Funktion die Menge aller reellen Zahlen x ist, für die die in diesem Ausdruck auftretenden Wurzeln reell sind.

▲2▲ Es sei p eine Primzahl. Es sollen alle positiven rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$, wobei a und b einander teilerfremde natürliche Zahlen sind, ermittelt werden, so daß

$$\frac{a+p}{b+p}-\frac{a}{b}=\frac{1}{p^2} \text{ gilt.}$$

▲3▲ Es seien t eine reelle Zahl und α, β, γ die Größen der Winkel eines Dreiecks. Man beweise, daß dann stets die Ungleichung

$$\cos\alpha+t(\cos\beta+\cos\gamma)\leq 1+\frac{t^2}{2}$$

erfüllt ist.

▲4▲ Es seien ε eine Ebene und A und B zwei Punkte des Raums, die nicht in dieser Ebene liegen. Es soll die Menge aller Punkte P der Ebene ε ermittelt werden, die die folgende Eigenschaft haben:

Der Winkel, den die Gerade AP mit der Ebene ε bildet, ist gleich dem Winkel, den die Gerade BP mit der Ebene ε bildet.

▲5▲ Wieviel von Null verschiedene natürliche Zahlen, die kleiner als 10^n sind ($n=1, 2, 3, \ldots$), haben eine Darstellung im dekadischen Positionssystem, deren Grundziffern eine nicht fallende Folge bilden?
(Es soll also die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen z mit $0<z<10^n$ ermittelt werden, die eine Darstellung
$z=(a_{n-1}\ a_{n-2}\ \ldots\ a_1\ a_0)_{10}$ im dekadischen Positionssystem mit $a_{n-1} \leqq a_{n-2} \leqq \ldots \leqq a_1 \leqq a_0$ haben.)

▲6▲ Gegeben seien sechs Punkte im Raum, die nicht alle in einer Ebene liegen. Man beweise, daß es dann stets unter den durch je zwei dieser Punkte bestimmten Geraden eine Gerade gibt, die zu keiner der übrigen Geraden parallel ist.

▲7▲ Es sind alle Lösungen (x, y) der Gleichung

$$1+x+x^2+x^3+x^4=y^2$$

im Bereich der natürlichen Zahlen zu ermitteln.

▲8▲ Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq 1$ die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$2\sin\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ Wurzeln}}.$$

Aus der VR Polen berichtet

Mathematikzentrum des RGW

top. Aus Warschau kommt die Meldung, daß ein internationales mathematisches Zentrum zur Weiterbildung wissenschaftlicher Kader aus den sozialistischen Ländern gegründet worden ist. Das Institut ist das derzeit einzige seiner Art in der Welt. Es ist zugleich die erste Einrichtung dieses Typs, die auf der Basis eines internationalen Abkommens entstand und von einem paritätisch zusammengesetzten internationalen Rat geleitet wird.
Der Direktor der jüngsten Forschungs- und Lehreinrichtung des RGW, der polnische Wissenschaftler Prof. Dr. *Olech*, erläuterte die Arbeitsweise dieses Zentrums, das 1973 die ersten Hörer aufnehmen wird. Einladungen werden sowohl an führende Experten als auch an junge Mathematiker der Bruderländer ergehen. Sie werden gemeinsam mit polnischen Wissenschaftlern forschen, ihre eigenen Probleme vortragen und mit allen gemeinsam erörtern sowie bestimmte eigene Vorlesungszyklen bieten. Die Fortbildung junger Kader wird im Prozeß breitester Forschungstätigkeit vor sich gehen. Bereits in diesem Jahr wird das Warschauer Mathematik-Zentrum ein Symposium mathematischer Methoden in der Ökonomie veranstalten. Ohne Zweifel wird das eine gute Gelegenheit sein, Erfahrungen für die künftige Forschungsarbeit des Zentrums zu sammeln.
„Die Vertiefung und Vervollkommnung der wirtschaftlichen und wissenschaftlich-technischen Zusammenarbeit und Entwicklung der sozialistischen ökonomischen Integration der Mitgliedsländer des RGW", so heißt es im Komplexprogramm, „sind ein von den kommunistischen und Arbeiterparteien und den Regierungen der Mitgliedsländer des RGW bewußt und planmäßig gestalteter Prozeß der internationalen sozialistischen Arbeitsteilung." Die Gründung des Mathematikzentrums in Warschau gehört zu diesem planmäßig gestalteten Prozeß.

Aus der polnischen Schulreform

Das gegenwärtige gesamte Bildungssystem in Polen umfaßt die allgemeinzugängliche achtklassige Grundschule und das vierjährige allgemeinbildende Lyzeum...
Zur Förderung der vielseitigen Interessen der Schüler dienen im reformierten Lyzeum (entspricht unseren Klassen 9 bis 12) die vier fakultativen Unterrichtsstunden wöchentlich in der vierten Klasse (entspricht unserer 12. Klasse), die der Jugend erlauben, ihre Kenntnisse in den sie interessierenden Wissensgebieten zu vertiefen und zu erweitern...
Der Fortschritt auf dem Gebiet der exakten Wissenschaften wie auch der technische Fortschritt machen es notwendig, die Anzahl der Kandidaten zum Hochschulstudium der mathematisch-physikalischen und technischen Disziplinen zu vergrößern. Zu diesem Zweck wurden in den allgemeinbildenden Lyzeen Klassen mit mathematisch-physikalischem Profil und entsprechend erweitertem Stundenplan für solche Fächer wie Mathematik und Physik organisiert.

Aus einem Interview mit dem Vizeminister für Volksbildung und Hochschulwesen der VR Polen

Wissen, Fortschritt, Modernität

Anläßlich der 25-Jahr-Feier Volkspolens haben wir eine eingehende Beurteilung der von der polnischen wissenschaftlichen Welt erzielten Ergebnisse in allen wissenschaftlichen Bereichen vorgenommen. Wir gingen dabei vom Gesichtspunkt aus, daß die praktische Rolle der Wissenschaft und ihre Wichtigkeit davon abhängt, was sie zur gesellschaftlichen Praxis beiträgt und inwieweit sie den gesellschaftlichen Auftrag erfüllt...
In der Nachkriegszeit, besonders in den ersten Jahren, haben wir trotz des äußerst schwierigen Starts (Zerstörung der wissenschaftlichen Werkstätten, riesige menschliche Verluste, durch den Krieg verursachte Unterbrechung der Forschungsarbeit) und der Notwendigkeit, alles von neuem aufzubauen, uns auf die Erkenntnisse und Leistungen der polnischen Gelehrten der Zwischenkriegszeit gestützt. Wir haben z. B. große Anstrengungen unternommen, um die hohe Position der polnischen Mathematik aufrechtzuerhalten. Die Leistungen der polnischen mathematischen Schule auf dem Gebiet der Topologie, Funktionsanalysis und Mathematischen Logik, Differentialgleichungen, Zahlentheorie und Anwendungen der Mathematik in vielen anderen Bereichen sind doch weltbekannt (Bekannteste Vertreter: *Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Kazimierz Kuratowski*, d. Red.)

Prof. Dr. Janusz Groszkowski,
Präsident der Polnischen Akademie der Wissenschaften

Eine Aufgabe von Lektor Andrzej Makowski

Institut für Mathematik, Universität Warschau

▲912▲ Es sind alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n anzugeben, für die die Zahl n^4+4^n eine Primzahl ist.

Aus dem Beschluß des VI. Parteitages der Polnischen Vereinigten Arbeiterpartei zitiert

Der schöpferische Anteil der Jugend am sozialistischen Aufbauwerk hängt von ihrer Beherrschung der beruflichen Fähigkeiten, von dem Mitverantwortungsgefühl für das Heute und die Zukunft der Nation, von der effektiven Arbeit und der Verwirklichung der humanistischen Ideale des Sozialismus im alltäglichen Leben ab...
Aufgabe der Partei ist es, der Jugend die Richtungen der Aktivität aufzuzeigen, von denen vor allem die weitere Entwicklung des Landes sowie die Schritte abhängen, die zu einem dauerhaften Beitrag der jungen Generation zum Werk der Nation werden können.

Rückblick auf die XIII. IMO

Die teilnehmenden Mannschaften stellten Aufgaben für alpha

VR Bulgarien

Kann man die Zahl $A=13^{1971}$ als Summe von Dezimalzahlen darstellen, in denen insgesamt $\underbrace{11\ldots11}_{k}$ Einsen, $\underbrace{22\ldots22}_{k}$ Zweien, ... schließlich $\underbrace{99\ldots99}_{k}$ Neunen und beliebig viele Nullen vorkommen? k sei eine natürliche Zahl.

ČSSR

Gesucht ist die kleinste Primzahl x mit der Eigenschaft, daß x^3-5x^2 eine positive Quadratzahl ist.

DDR

Gesucht sind alle stetigen reellen Funktionen, die für alle $x\neq 0$ die Gleichung $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)^2}{x^2}$ erfüllen.

Frankreich

Man bestimme die kleinste Zahl n mit der Eigenschaft, daß für jede Primzahl p gilt:

$$p\mid n \text{ genau dann, wenn } p-1\mid n$$

($a\mid b$ bedeutet, daß a ein Teiler von b ist).

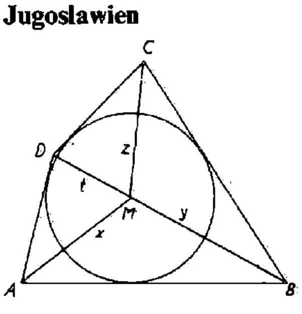
Großbritannien

Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschiedene Zahlen und m eine natürliche Zahl. Weiter sei

$$S=\frac{a_0^m}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_n)}+\frac{a_1^m}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)}+\ldots+\frac{a_n^m}{(a_n-a_0)(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})}.$$

Man beweise, daß für $m<n$ $S=0$ und für $m=n$ $S=1$ gilt.

SFR Jugoslawien



In einem Tangentenviereck mit den Seiten a, b, c, d hat der Mittelpunkt des Inkreises von den Eckpunkten die Abstände x, y, z, t (s. Abb.). Man beweise die Gleichung $(xz+yt)^2=abcd$ und leite daraus die Ungleichung $4xyzt\leq abcd$ her.

Republik Kuba

Es ist zu beweisen, daß die Zahl

$$100!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 100$$

keine Quadratzahl ist.

Mongolische Volksrepublik

An einem Schachturnier nahmen zehn Spieler teil; jeder spielte einmal gegen jeden anderen. Keine zwei Spieler erzielten insgesamt die gleiche Punktzahl. Die Spieler auf den ersten beiden Plätzen haben kein einziges Mal verloren. Die Summe ihrer Punktzahlen ist um 10 größer als die Punktzahl des Spielers auf dem dritten Platz. Der Spieler auf dem vierten Platz erzielte ebensoviele Punkte wie die letzten vier Spieler zusammen. Welche Punktzahlen erzielten die Spieler, die die Plätze 1 bis 6 einnahmen?

Niederlande

Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$2^{2^n}+2^{n^2}=2^5.$$

Es ist zu beweisen, daß die Gleichung mindestens eine nicht ganzzahlige Lösung besitzt.

Österreich

Das Gleichungssystem

$$x^2+xy+y^2=a^2$$
$$x^2+xz+z^2=b^2$$
$$y^2+yz+z^2=c^2 \text{ ist zu lösen.}$$

Hinweis: Zuerst betrachte man $p=x+y+z$ als gegeben und berechne damit x, y, z. Eine Gleichung zur Bestimmung von p erhält man dann durch Einsetzen.

VR Polen

Man beweise, daß 2^n-1 für kein $n>1$ durch n teilbar ist.

SR Rumänien

In der Ebene liegen vier Punkte so, daß der Abstand von je zwei dieser Punkte mindestens $\sqrt{2}$ und höchstens 2 ist. Man beweise, daß die vier Punkte auf einem Kreis vom Radius 1 liegen.

Schweden

Man löse das Gleichungssystem

$a^2+ay+x=0$, $b^2+by+x=0$

(a, b gegeben, $a\neq b$),

ohne eine der üblichen Eliminationsmethoden zu benutzen.

Sowjetunion

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit dem Umkreismittelpunkt 0. Auf eine variable Gerade l durch 0 werden von B und C die Lote BB_1 und CC_1 gefällt (B_1 und C_1 liegen auf l). Das Lot von C_1 auf AB möge das Lot von B_1 auf AC in M schneiden. Man beweise, daß der geometrische Ort aller Punkte M auf einem Kreis liegt.

Ungarische VR

Unter dem harmonischen Mittel der positiven Zahlen $a_1, \ldots, a_i$ versteht man die Zahl

$$H_i=\frac{i}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_i}}.$$

Es ist zu beweisen, daß

$H_1+H_2+\ldots+H_n<2(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ gilt.

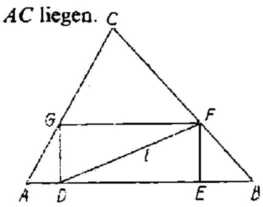
Mitglieder der Mannschaft der DDR, die an der XIII. IMO teilnahmen, stellten Aufgaben für die *alpha*-Leser:

- **Wolfgang Burmeister:** Es sei z eine Lösung der Gleichung

$$x^3-3x+1=0.$$

Man beweise, daß $\frac{1}{1-z}$ eine Lösung derselben Gleichung ist.

- **Harald Englisch:** In ein Dreieck ABC ist ein Rechteck $DEFG$ mit vorgegebener Diagonallänge l einzubeschreiben, so daß die Seite DE auf AB, die Punkte F und G auf BC bzw. AC liegen.



Hinweis: Löse die Aufgabe zuerst für ein rechtwinkliges Dreieck ($\alpha=90°$).

- **Arnulf Möbius:** Klaus und Bernd teilen sich ein dreieckiges Stück Kuchen. Klaus gibt auf dem Kuchen einen Punkt an, durch den Bernd gerade schneiden muß. Bernd nimmt sich dann das größere Stück. Welchen Punkt muß Klaus wählen, um möglichst viel vom Kuchen zu bekommen?

- **Thomas Jentsch:** In einem Koordinatensystem sind die Parabel $y=ax^2$ und die Gerade $y=a(a>0)$ gezeichnet. Auf dem Parabelbogen, im Punkt (0; 0), stellen wir uns einen „Hasen" H, auf der Geraden, im Punkt (0; a), einen (sehr gefräßigen) „Fuchs" F vor. Für welche a kann sich H auf der Parabel bewegen, ohne dabei auch nur einen Moment dem Fuchs F näherzukommen, wenn dieser in (0; a) ruht?

- **Rainer Siegmund-Schultze** (IMO-Kandidat 1971): Man zeige, daß man die Zahl 2^n (n sei eine natürliche Zahl) eindeutig als Summe zweier Quadratzahlen darstellen kann!

- **Gerhard Spens:** Man löse die Gleichung

$$\log_2 x^4+\log_x 2^5=9.$$

- **Reinhard Wobst:** Für jede ganze Zahl x sei der Funktionswert

$$f(x)=x^2+px+q$$

(p, q gegebene ganze Zahlen)

eine Quadratzahl. Man beweise, daß man dann eine Zahl a so finden kann, daß für alle x $f(x)=(x+a)^2$ gilt.

Die Arithmetik der Binomialkoeffizienten

Teil 2

§ 2 Der Rest bei der Division der Binomialkoeffizienten durch Primzahlen

In diesem (und auch im nächsten) Paragraphen werden wir oft den Satz gebrauchen „die Zahlen a und b haben gleichen Rest bei der Division durch p". Gewöhnlich drückt man diesen Sachverhalt gekürzt so aus: $a \equiv b \pmod p$, was also bedeutet, daß sich $a \cdot b$ durch p teilen läßt. So ist z. B. $4 \equiv 1 \pmod 3$, $99999 \equiv 22222 \pmod 7$ usw. Wir erinnern euch an zwei offensichtliche Eigenschaften des Symbols „$\equiv$":

1. Wenn $a \equiv b \pmod p$ und k ganzzahlig, so ist $ka \equiv kb \pmod p$.
2. Wenn $a \equiv b \pmod p$ und $b \equiv c \pmod p$, so ist $a \equiv c \pmod p$. Es sei auch noch daran erinnert, daß sich jede natürliche Zahl a durch eine natürliche Zahl p mit Rest dividieren läßt, d. h. a kann man eindeutig in der Form $a = bp + c$ schreiben, wobei b, c ganze Zahlen mit $0 \leqq c < p$ sind.

Das Hauptziel dieses Paragraphen ist der Beweis folgender Aussage.

Satz 4 Sei p Primzahl, m und n natürliche Zahlen. Seien ferner k und l die Quotienten von der Division der Zahlen m und n durch p, und s und t – die Reste (d. h. $m = kp + s$, $n = lp + t$, wobei k, l, s, t – ganzzahlig und $o \leqq s < p$, $o \leqq t < p$). Dann gilt $C_n^m \equiv C_l^k \cdot C_t^s \pmod p$.

Wie wir später sehen werden, gestattet dieser Satz ohne große Berechnungen den Rest von der Division der Binomialkoeffizienten durch Primzahlen zu finden. Dem Beweis dieses Satzes schicken wir drei Hilfssätze voran.

Hilfssatz 1 Für beliebige Zahlen a, b gilt $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2} b + a^{k-3} b^2 + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1})$.

Der Beweis ist offensichtlich: wenn wir die Multiplikation im rechten Teil ausführen und die möglichen Kürzungen vornehmen, erhalten wir genau den Ausdruck, der im linken Teil steht.

Hilfssatz 2 Wenn p eine Primzahl ist und r eine natürliche Zahl mit $o < r < p$, so läßt sich C_p^r durch p dividieren.

Dies folgt aus Satz 3: da p Primzahl und $r < p$, so sind p und r teilerfremd.

Hilfssatz 3 Das Polynom $(1+x)^p - (1+x^p)$ läßt sich durch p teilen (d. h. jeder Summand dieses Polynoms ist durch p teilbar).

Beweis: Wir haben

$$(1+x)^p - (1+x^p) = 1 + C_p^1 x^2 + \ldots + C_p^{p-1} x^{p-1} + x^p - 1 - x^p = C_p^1 x + \ldots + C_p^{p-1} x^{p-1},$$

und dieser letzte Ausdruck läßt sich nach Hilfssatz 2 durch p teilen.

Gehen wir jetzt zum Beweis des Satzes 4 über. Wir betrachten das Polynom $P(x) = (1+x)^{lp+t} - (1+x)^t (1+x^p)^l$. Auf Grund des Hilfssatzes 1 können wir schreiben

$$P(x) = (1+x)^t \cdot [(1+x)^{pl} - (1+x^p)^l] = (1+x)^t [(1+x)^p - (1+x^p)] [(1+x)^{p(l-1)} + \ldots + (1+x^p)^{l-1}].$$

(Wir setzen in ihm $a = (1+x)^p$, $b = 1 + x^p$ und $k = l$.)

Der zweite Multiplikator läßt sich gemäß Hilfssatz 3 durch p teilen, also auch das ganze Produkt.

Wir bestimmen jetzt in $P(x)$ den Koeffizienten bei x^{kp+1}. In $(1+x)^{lp+t}$ geht das Glied x^{kp+s}, wie wir schon wissen, mit dem Koeffizienten C_{lp+t}^{kp+s} ein.

Das Produkt $(1+x)^t \cdot (1+x^p)^l$ aber ergibt

$$(1 + C_t^1 x + C_t^2 x^2 + \ldots + x^t)(1 + C_l^1 x^p + C_l^2 x^{2p} + \ldots + x^{lp}) = 1 + C_t^1 x + C_t^2 x^2 + \ldots + x^t + C_l^1 x^p$$
$$+ C_l^1 C_t^1 x^{p+1} + C_l^1 C_t^2 x^{p+2} + \ldots + C_l^1 x^{p+t}$$
$$+ C_l^2 x^{2p} + C_l^2 C_t^1 x^{2p+1} + C_l^2 C_t^2 x^{2p+2} + \ldots + C_l^2 x^{2p+t}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ x^{lp} + C_t^1 x^{lp+1} + C_t^2 x^{lp+2} + \ldots + x^{lp+t}.$$

Da $t < p$, so tritt in dieser Summe jede Potenz von x höchstens einmal auf. Der Koeffizient bei x^{kp+s} ist, wie man sieht, gleich $C_l^k C_t^s$ (insbesondere ist er gleich Null, wenn $s > t$).

Somit ist der Koeffizient bei x^{kp+s} in $P(x)$ gleich $C_{lp+t}^{kp+s} - C_l^k C_t^s$. Da sich $P(x)$ durch p teilen läßt, ist auch $C_{lp+t}^{kp+s} - C_l^k C_t^s$ durch p teilbar und Satz 4 ist bewiesen.

Wir wollen zum Schluß des Beweises noch folgendes bemerken: obwohl nur im Hilfssatz 2 die Bedingung benutzt wird, daß p Primzahl ist, ist die Behauptung des Satzes 4 für beliebige ganze Zahlen nicht erfüllt.

Wir wollen jetzt zeigen, wie man mit Hilfe des Satzes 4 den Rest von der Division der Binomialkoeffizienten durch eine Primzahl finden kann. Demonstrieren wir das zum Beispiel an der Division des Koeffizienten C_{119}^{33} durch 5 vor (den Rest könnten wir natürlich auch finden, indem wir C_{119}^{33} mit Hilfe der Formel (2) berechnen, aber das ergäbe eine lange Rechnung – immerhin ist C_{119}^{33} eine 24stellige Zahl!)

Die Zahlen 33 und 119 durch 5 teilend, erhalten wir $33 = 6 \cdot 5 + 3$ und $119 = 23 \cdot 5 + 4$. Nach Satz 4 ist $C_{119}^{33} \equiv C_{23}^6 \cdot C_4^3 \pmod 5$. Genauso untersuchen wir die Zahl C_{23}^6: da $6 = 1 \cdot 5 + 1$ und $23 = 4 \cdot 5 + 3$, so ist $C_{23}^6 \equiv C_4^1 \cdot C_3^1 \pmod 5$. Infolge der Eigenschaft 1) des Symbols „$\equiv$" ist $C_{23}^6 C_4^3 \equiv C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^3 \pmod 5$, und infolge der Eigenschaft 2) haben wir $C_{119}^{33} \equiv C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^3 \pmod 5$.

Somit hat C_{119}^{33} den gleichen Rest bei der Division durch 5 wie $C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$, *d. h.* 3.

Ähnlich findet man den Rest von der Division durch andere Primzahlen; z. B.

$119 = 59 \cdot 2 + 1, \quad 33 = 16 \cdot 2 + 1$
$C_{119}^{33} \equiv C_{59}^{16} C_1^1 = C_{59}^{16} \pmod 2;$
$59 = 29 \cdot 2 + 1, \quad 16 = 8 \cdot 2 + 0,$
$C_{59}^{16} \equiv C_{29}^8 C_1^0 = C_{29}^8 \pmod 2;$
$29 = 14 \cdot 2 + 1, \quad 8 = 4 \cdot 2 + 0,$
$C_{29}^8 \equiv C_{14}^4 \cdot C_1^0 = C_{14}^4 \pmod 2;$
$7 = 3 \cdot 2 + 1, \quad 2 = 1 \cdot 2 + 0,$
$C_7^2 \equiv C_3^1 C_1^0 = C_3^1 = 3 \pmod 2.$

Also hat C_{119}^{33} den gleichen Rest bei der Division durch 2 wie 3, d. h. 1, und C_{119}^{33} ist eine ungerade Zahl.

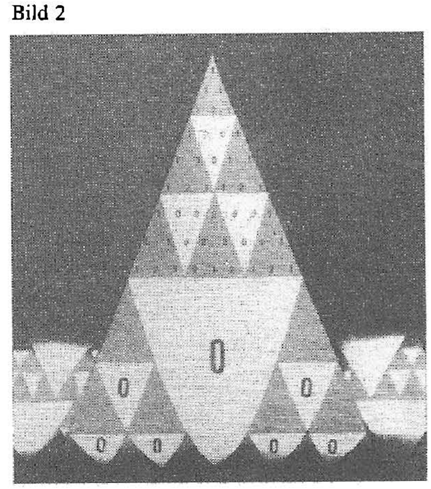
Ein anderes Beispiel:

$119 = 39 \cdot 3 + 2, \quad 33 = 11 \cdot 3 + 0,$
$C_{119}^{33} \equiv C_{39}^{11} \cdot C_2^0 = C_{39}^{11} \pmod 3;$
$39 = 13 \cdot 3 + 0, \quad 11 = 3 \cdot 3 + 2,$
$C_{39}^{11} \equiv C_{13}^3 \cdot C_0^2 = 0 \pmod 3).$

Wir haben hier benutzt, daß $C_0^2 = 0$ ist. Also ist $C_{119}^{33} \equiv 0 \pmod 3$, d. h. C_{119}^{33} läßt sich durch 3 teilen.

Wir wollen hier bemerken, daß bei der Anwendung des Satzes 4 auf C_n^m mit $n \geqq m$, wenn wir $m = kp + s$ und $n = lp + t$ schreiben, natürlich $l \geqq k$ haben; allerdings können wir nicht voraussehen, welche der beiden Zahlen s, t die größere ist. Wenn gilt $s > t$, so ist $C_n^m \equiv C_l^k C_t^s = 0 \pmod p$ laut Satz 4, d. h. C_n^m ist durch p teilbar. Wie wir sahen, muß man zur Bestimmung des Restes bei der Division

Bild 2



von C_n^m durch p Satz 4 mitunter mehrmals hintereinander anwenden, und jedesmal kann eine der oben beschriebenen ähnliche Situation auftreten, wobei das auch jedesmal bedeutet, daß C_n^m durch p teilbar ist. Auf diesem Wege erhielten wir, daß C_{119}^{33} durch 3 teilbar ist.

Wir sehen, daß je größer n desto wahrscheinlicher C_n^m durch p teilbar ist. Man kann leicht die folgende genauere Aussage beweisen: Zahlen C_n^m mit $0 \leq n \leq p^r$, $0 \leq m \leq n$ gibt es $\frac{p^r(p^r+2)}{2}$; von ihnen sind genau $\frac{p^r(p+1)^r}{2^r}$ nicht durch p teilbar (hier ist p – Primzahl, r – eine natürliche Zahl; der Beweis stützt sich nur auf Satz 3, wir überlassen ihn dem Leser).

Wir wollen unterstreichen, daß für große r die Zahl $\frac{p^r(p+1)^r}{2^r}$ um vieles kleiner als $\frac{p^r(p^r+1)}{2}$ ist. So lassen sich z. B. 26,2 % der Zahlen C_n^m mit $0 \leq n \leq 3^5$, $0 \leq m \leq n$ nicht durch 3 teilen, bei $0 \leq n \leq 3^{10}$ schon nur noch etwa 3,6 % und bei $0 \leq n \leq 3^{15}$ nur 0,45 %.

Zum Schluß noch einige Worte über eine recht anschauliche Interpretation des Satzes 4, die man erhält, wenn man das „Pascalsche Dreieck bezüglich mod p" betrachtet. So bezeichnet man das aus dem Pascalschen Dreieck hervorgehende Dreieck, indem man in jenem jede Zahl durch seinen Rest bei der Division durch p ersetzt. Wir werden bezüglich dieses Dreiecks keinerlei Sätze beweisen, schlagen euch aber vor, die Zeichnungen (Bild 1, Bild 2) zu betrachten, auf denen die Pascalschen Dreiecke bezüglich mod 2 und mod 3 abgebildet sind. Bild 1 siehe Heft 2/72, Seite 25, Bild 2 siehe vorige Seite unten. Macht euch bitte mal Gedanken über das Aussehen dieser Dreiecke in dem Teil, der auf den Zeichnungen schon nicht mehr zu sehen ist. Bemüht euch, Satz 4 so zu formulieren, daß es ein Satz über den Aufbau des Pascalschen Dreiecks bezüglich mod p wird.

§ 3 Einiges über die Reste bei der Division der Binomialkoeffizienten durch Potenzen von Primzahlen

Wir wollen hier nicht eine in irgendeiner Form allgemeine Frage nach den Resten bei der Division der Binomialkoeffizienten durch zusammengesetzte Zahlen stellen, sondern nur von einer merkwürdigen noch nicht völlig geklärten Erscheinung erzählen. Wir beginnen mit einigen Berechnungen. Mit Hilfe der Formel (2) für die Binomialkoeffizienten erhalten wir

$C_2^1 = 2$, $C_4^2 = 6$, $C_8^4 = 70$, $C_{16}^8 = 12\,870$, $C_{32}^{16} = 601\,080\,390$.

(Ihr alle wißt natürlich, daß 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... aufeinanderfolgende Potenzen von 2 sind). Die erhaltenen Zahlen selber heben sich durch nichts besonders hervor, ihre Differenzen offenbaren allerdings überraschende Eigenschaften. Werfen wir einen Blick auf diese Differenzen:

$6-2=4=2^2$, $70-6=64=2^6$, $12\,870-70 = 12\,800 = 9^9 \cdot 25$, $601\,080\,390 - 12\,870 = 601\,067\,520 = 2^{12} \cdot 146\,745$.

Wir sehen, daß sich diese Differenzen durch recht hohe Potenzen von 2 dividieren lassen, und zwar durch so hohe, daß es sich hier kaum um eine zufällige Erscheinung handeln wird.

Satz 5 Für $n>1$ läßt sich $\alpha_n = C_{2^{n+1}}^{2^n} - C_{2^n}^{2^{n-1}}$ durch 2^{2n+2} teilen.

Bemerkungen:

1. Die Voraussetzung $n>1$ ist notwendig, da $\alpha_1 = 4$ ist und sich nicht durch $2^{2\cdot 1+2} = 2^4 = 16$ teilen läßt.
2. Es könnte sich durchaus erweisen, daß α_n für $n>1$ sogar durch 2^{3n} teilbar ist: das ist der Fall bei $n=2, 3, 4$. Aber beweisen konnte das bis heute noch niemand.

Beweis: Wir beginnen mit der allgemeinen Bemerkung, daß sich $C_{2^n}^r$ für ungerades r durch 2^n teilen läßt. Tatsächlich, da r ungerade und 2^n außer 2 keine Primteiler hat, so sind r und 2^n teilerfremd und unsere Behauptung folgt aus Satz 3. Wir setzten jetzt $P(x) = (1+x)^{2^{n+1}} - (1-x^2)^{2^n}$.

Das Polynom $P(x)$ enthält x^{2^n} mit dem Koeffizienten $C_{2^{n+1}}^{2^n} - C_{2^n}^{2^{n-1}} = \alpha_n$ (Hier benutzen wir, daß $n>1$ ist; beim Erheben von $(1-x^2) = (1+(-x^2))$ in die Potenz 2^n erhalten wir nicht x^{2^n} mit dem Koeffizienten $C_{2^n}^{2^{n-1}}$, sondern $(-x^2)^{2^{n-1}} = (-1)^{2^{n-1}} x^{2^n}$, und $(-1)^{2^{n-1}}$ ergibt genau 1 bei $n>1$ und -1 bei $n=1$).

Wir können aber auch schreiben

$P(x) = (1+x)^{2^{n+1}} - (1+x)^{2^n}(1-x)^{2^n}$
$= (1+x)^{2^n}\left[(1+x)^{2^n} - (1-x)^{2^n}\right]$.

Dabei ist der Ausdruck in eckigen Klammern

$(1+x)^{2^n} - (1-x)^{2^n} = (1+x)^{2^n} - (1+(-x))^{2^n}$
$= 1 + C_{2^n}^1 x + C_{2^n}^2 x^2 + C_{2^n}^3 x^3 + \ldots -$
$- x^{2^n} - 1 - C_{2^n}^1(-x) - C_{2^n}^2(-x)^2 -$
$- C_{2^n}^3(-x)^3 - \ldots - (-x)^{2^n} =$

(da $(-x)^k$ gleich x^k bei geraden k und $-x^k$ bei ungeraden k ist)

$= 2(C_{2^n}^1 x + C_{2^n}^3 x^3 + C_{2^n}^5 x^5 + \ldots +$
$+ C_{2^n}^{2^n-1} x^{2^n-1})$.

Wir weisen noch einmal darauf hin, daß in dieses Polynom x nur mit ungeraden Potenzen eingeht.

Wir möchten wissen, mit was für einen Koeffizienten x in das Polynom $P(x)$ eingeht, d. h. in das Produkt

$(1+x)^{2^n}\left[(1+x)^{2^n} - (1-x)^{2^n}\right]$
$= 2(1 + C_{2^n}^1 x + C_{2^n}^2 x^2 + C_{2^n}^3 x^3 + \ldots + x^{2^n})$
$+ (C_{2^n}^1 x + C_{2^n}^3 x^3 + C_{2^n}^5 x^5 + \ldots +$
$+ C_{2^n}^{2^n-1} x^{2^n-1})$.

Hieraus erhält man x^{2^n} offenbar als Produkt von x mit x^{2^n-1}, x^2 mit x^{2^n-2}, x^3 mit x^{2^n-3} usw., wobei der erste Faktor aus der ersten und der zweite Faktor aus der zweiten Summe ist. Also ist der Koeffizient bei x^{2^n} in $P(x)$, der, wie wir bereits wissen, gleich α_n ist, auch gleich

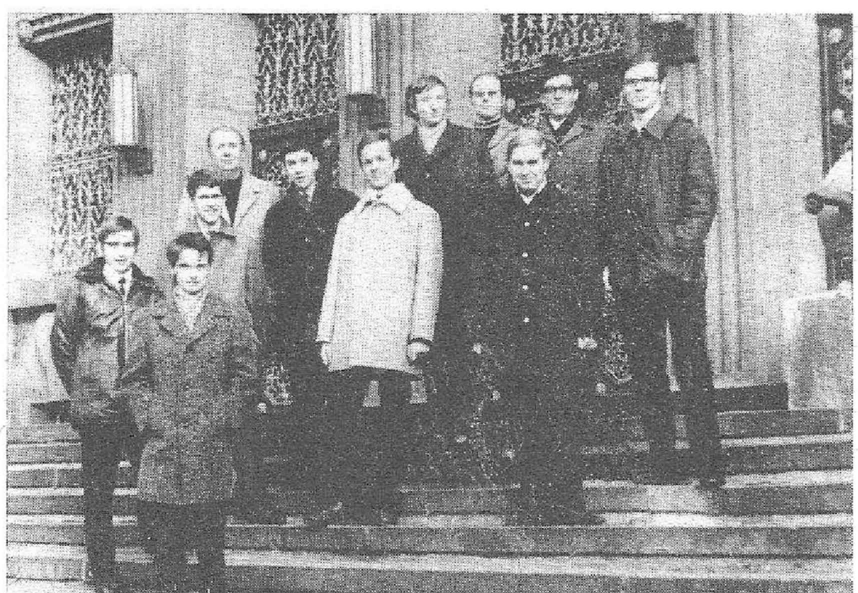
$2(C_{2^n}^1 C_{2^n}^{2^n-1} + C_{2^n}^3 C_{2^n}^{2^n-3} + \ldots + C_{2^n}^{2^n-1} C_{2^n}^1)$.

Wie wir wissen, ist jede der Zahlen $C_{2^n}^1$, $C_{2^n}^2$, ..., $C_{2^n}^{2^n-1}$ durch 2^n teilbar. Also ist jeder Summand in dieser Klammer durch $2^n \cdot 2^n = 2^{2n}$ teilbar. Außerdem steht eine 2 vor der Klammer und jeder Summand ist zweimal in der Klammer enthalten. Hieraus folgt schließlich, daß α_n durch 2^{2n+2} teilbar ist und unsere Behauptung ist bewiesen.

Wir hoffen, daß es dem Leser von *alpha* gelingt, in diese schwierige Frage der Arithmetik der Binomialkoeffizienten etwas Licht zu bringen.

D. B. Fuchs (aus Quant 6/70)

Im Dezember 1971 trafen sich die Mitglieder der DDR-Mannschaft (und Kandidaten) der XIII. IMO in Leipzig zu einem Erfahrungsaustausch. *Unser Foto:* Die FDJler und ihre Gäste nach der Besichtigung der Deutschen Bücherei.



Welche, wie viele Möglichkeiten gibt es?

Teil 3

Wir wiederholen die Aufgabe 4 (aus Heft 6/71):

Aufgabe 4 Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Preise an drei Schüler zu verteilen?

(1) Bei den Preisen kann es sich z. B. um Bücher mit verschiedenen Titeln handeln. Die Preise sind also *unterscheidbar*.

(2) Bei den Preisen kann es sich z. B. auch um wertgleiche Geldprämien handeln. Die Preise sind dann *nicht unterscheidbar*.

(a) Ein Schüler kann *mehrere Preise* erwerben, wie etwa bei einem Sportwettkampf. Er kann z. B. im 60-m-Lauf und im Weitsprung Sieger sein.

(b) Ein Schüler kann *höchstens einen Preis* erwerben, wie etwa bei einer Prüfung für eine besondere Leistung. Diese einzelnen Fälle lassen sich wie folgt verbinden:

(1a), (1b), (2a), (2b).

Wir wollen jetzt Aufgabe 4 allgemein formulieren und unter den genannten Bedingungen ((1a), (1b), (2a), (2b)) lösen.

Aufgabe 8 Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, m Preise (unter den in Aufgabe 4 genannten Bedingungen) an n Schüler zu verteilen?

Versucht, die folgenden vier Übersichten euch weitestmöglich selbständig zu erarbeiten! Wir werden im Anschluß an die letzte Übersicht noch einige Bemerkungen hierzu bringen, die ihr aber auch schon vorher mit lesen könnt.

Fall (1a) Die Preise seien unterscheidbar; ein Schüler kann mehrere Preise bekommen.

Pr.	Sch.	Mög.	verm. Ges.
1	1	1	1^1
1	2	2	2^1
1	3	3	3^1
2	1	1	1^2
2	2	4	2^2
2	3	9	3^2
3	1	1	1^3
3	2	8	2^3
3	3	27	3^3
m	n		n^m

Pr. ≙ Anzahl der Preise
Sch. ≙ Anzahl der Schüler
Mög. ≙ Anzahl der Möglichkeiten
verm. Ges ≙ vermutete Gesetzmäßigkeit

Es gibt n^m Möglichkeiten.

Fall (1b) Die Preise seien unterscheidbar; ein Schüler kann höchstens einen Preis bekommen. Ihr werdet bemerken, daß hier $m \leqq n$ sein muß.

Pr.	Sch.	Mög.	verm. Ges.
1	1	1	$1 = \binom{1}{1} \cdot 1!$
1	2	2	$2 = \binom{2}{1} \cdot 1!$
1	3	3	$3 = \binom{3}{1} \cdot 1!$
2	2	2	$2 \cdot 1 = \binom{2}{2} \cdot 2!$
2	3	6	$3 \cdot 2 = \binom{3}{2} \cdot 2!$
2	4	12	$4 \cdot 3 = \binom{4}{2} \cdot 2!$
3	3	6	$3 \cdot 2 \cdot 1 = \binom{3}{3} \cdot 3!$
3	4	24	$4 \cdot 3 \cdot 2 = \binom{4}{3} \cdot 3!$
3	5	60	$5 \cdot 4 \cdot 3 = \binom{5}{3} \cdot 3!$
4	4	24	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \binom{4}{4} \cdot 4!$
4	5	120	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \binom{5}{4} \cdot 4!$
m	n		$\binom{n}{m} \cdot m!$

Es gibt $\binom{n}{m} \cdot m!$ Möglichkeiten.

Fall (2a) Die Preise seien nicht unterscheidbar; ein Schüler kann mehrere Preise bekommen.

Pr.	Sch.	Mög.	verm. Ges.
1	1	1	$\binom{1}{1} = \binom{1+1-1}{1}$
1	2	2	$\binom{2}{1} = \binom{2+1-1}{1}$
1	3	3	$\binom{3}{1} = \binom{3+1-1}{1}$
2	1	1	$\binom{2}{2} = \binom{1+2-1}{2}$
2	2	3	$\binom{3}{2} = \binom{2+2-1}{2}$
2	3	6	$\binom{4}{2} = \binom{3+2-1}{2}$
3	1	1	$\binom{3}{3} = \binom{1+3-1}{3}$
3	2	4	$\binom{4}{3} = \binom{2+3-1}{3}$
3	3	10	$\binom{5}{3} = \binom{3+3-1}{3}$
m	n		$\binom{n+m-1}{m}$

Es gibt $\binom{n+m-1}{m}$ Möglichkeiten.

Fall (2b) Die Preise seien nicht unterscheidbar; ein Schüler kann höchstens einen Preis bekommen. Hier gilt wieder einschränkend $m \leqq n$.

Pr.	Sch.	Mög.	verm. Ges.
1	1	1	$\binom{1}{1}$
1	2	2	$\binom{2}{1}$
1	3	3	$\binom{3}{1}$
2	2	1	$\binom{2}{2}$
2	3	3	$\binom{3}{2}$
2	4	6	$\binom{4}{2}$
3	3	1	$\binom{3}{3}$
3	4	4	$\binom{4}{3}$
3	5	10	$\binom{5}{3}$
m	n		$\binom{n}{m}$

Es gibt $\binom{n}{m}$ Möglichkeiten.

Wenn ihr diese vier Übersichten miteinander vergleicht, so könnt ihr für die Lösung weiterer Aufgaben folgendes lernen:

1. Die ersten drei Zeilen stimmen jeweils überein (bis auf Spalte 4). Sie haben also nur geringen Wert. Wir können deshalb den Fall, daß die eine Menge nur ein Element enthält, künftig weglassen.
2. Wir beschränken uns zunächst auf leicht unterscheidbare Fälle ($m=2$, $m=3$) und brechen jeweils nach drei oder vier Zeilen ab, weil dann in Spalte 3 das Bildungsgesetz der betreffenden Folge sichtbar wird. Im Fall (1b) kann man die beiden Zeilen für $m=4$ als „Kontrollzeilen" auffassen.
3. Die in Aufgabe 4 in den Fällen (1b) und (2a) jeweils erhaltenen 6 Möglichkeiten beruhen auf unterschiedlichen Gesetzmäßigkeiten. Man muß sich also davor hüten, vorschnell zu verallgemeinern.
4. Nachdem jeweils die Spalten 1 bis 3 ausgefüllt sind, ist es zweckmäßig, das Aus-

füllen von Spalte 4 mit den Fällen $m=2$ oder auch $m=3$ zu beginnen.

5. Wir haben vereinbart, m und n (oder auch andere kleine Buchstaben) hier als Variable für natürliche Zahlen zu betrachten. Gewisse Einschränkungen, wie $m \leqq n$, müssen dann ausdrücklich noch genannt werden.

Das Stoffgebiet, in das euch hier ein Einblick vermittelt wurde, heißt *Kombinatorik* und gewinnt jetzt im Zusammenhang mit der wissenschaftlich-technischen Revolution immer mehr an Bedeutung. Wer Freude an der Kombinatorik gefunden hat, kann noch einige weitere Aufgaben bearbeiten.

Aufgaben

Aufgabe 9 Wie viele Tipmöglichkeiten gibt es beim VEB Zahlenlotto (5 von 90 Ziffern sind anzukreuzen)?

Sind bei einem solchen Problem insbesondere 2 Elemente auszuwählen, so kann man das Ergebnis auch als Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer bestimmten Zahl auffassen. Überlegt euch das anhand der folgenden drei Aufgaben!

Aufgabe 10 Wie viele Handschläge werden gewechselt, wenn von 5 Freunden je zwei einander ein einziges Mal die Hand geben? Ihr könnt euch die Lösung so überlegen: Trifft beim morgendlichen Schulweg der Schüler A seinen Freund B, so geben sich beide die Hand. Treffen A und B ihren Freund C, so gibt er A und B die Hand; der hinzukommende Schüler D gibt dann A, B und C die Hand usw.

Aufgabe 11 Wie oft klingen die Gläser, wenn bei einer Tischrunde von 8 Personen je zwei ein einziges Mal miteinander anstoßen?

Aufgabe 12 Wie viele Verbindungsgeraden sind zwischen 6 Punkten einer Ebene höchstens möglich, wenn keine drei Punkte auf einer Geraden liegen?

Welche Lösung ist zu erwarten, wenn allgemein aus n Elementen 2 Elemente ausgewählt werden sollen, so wie das etwa bei den Aufgaben 10 bis 12 der Fall ist?

Aufgabe 13 Auf wie viele Arten kann man aus 7 Schülern zunächst 2 Schüler und aus den verbleibenden 5 Schülern 3 Schüler auswählen?

Aufgabe 3 können wir wie folgt abändern (siehe Heft 6/71):

Aufgabe 14 Von 15 Jungen und 10 Mädchen einer Klasse soll eine Delegation aus 3 Jungen und 2 Mädchen gebildet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?

Aufgabe 15 Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, beim Kegelspiel insgesamt 0, 1, 2, 3, ..., 9 Kegel auf die vorgesehenen 9 Felder zu stellen?

Es genügen sicherlich folgende Lösungshinweise:

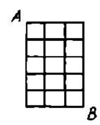
Zwei Mengen: Kegel, Felder usw. Anzahl verringern, etwa 0, 1, 2, 3 Kegel auf 3 Felder.

Besetzt man 3 Felder mit 0 Kegeln, so bleiben die Felder frei; es ergibt sich „das leere Kegelbild“, also eine einzige Möglichkeit usw.

Aufgabe 15 läßt sich aber auch anders lösen, wenn man sich folgendes überlegt:

Jedes Feld kann entweder (von einem Kegel) besetzt oder nicht besetzt sein. Wir können also die Menge der Felder und eine Zweiermenge („besetzt“, „frei“) betrachten, wobei vereinbarungsgemäß im Zuordnungsschema die Menge der Felder jetzt oben, die Zweiermenge unten stehen muß.

Aufgabe 16 Auf wie viele Arten kann man entlang der dargestellten Strecken von A nach B gelangen?



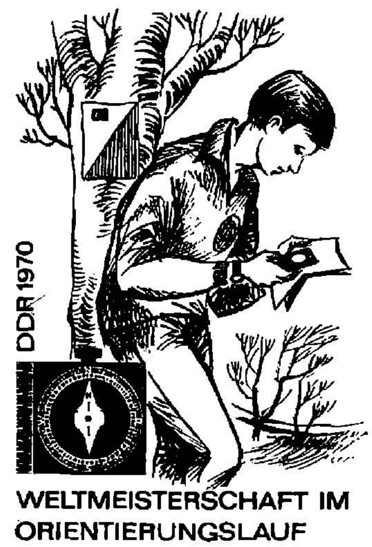
Aufgabe 17 Auf welche bzw. wie viele Arten können sich 3 unterscheidbare Vögel auf 2 Bäume verteilen? (Welche Lösung ist allgemein zu erwarten – k Vögel, r Bäume?)

Aufgabe 18 Auf welche bzw. wie viele Arten könne sich 3 nicht unterscheidbare Vögel auf 2 Bäume verteilen? (Welche Lösung ist allgemein zu erwarten – k Vögel, r Bäume?)

Aufgabe 19 Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, Kraftfahrzeuge – wie bei uns in der DDR üblich – durch zwei Buchstaben und zweimal zwei Grundziffern polizeilich zu kennzeichnen?

Aufgabe 20 Welche bzw. wie viele Dreiecke können $n \geqq 3$ Geraden einer Ebene höchstens bilden, wenn dabei weder drei Geraden durch einen einzigen Punkt gehen noch zwei zueinander parallel sind? *W. Türke*

Nikolaus Kopernikus (Holzschnitt aus dem 16. Jahrhundert) Zu Ehren des 500. Geburtstages (geb. 19. 2. 1473) veröffentlicht *alpha* in Heft 5/72 einen umfassenden Beitrag.
d. Red.



Liebe Pioniere und Jugendfreunde!

Besonders die Sommermonate sind dazu angetan, zu wandern, Geländespiele zu organisieren, Orientierungsläufe durchzuführen. Dabei sollte der Kompaß unser treuer Begleiter sein.

In Zusammenarbeit mit dem in aller Welt bekannten Betrieb: *VEB Freiberger Präzisionsmechanik* stellt die Redaktion *alpha* euch den modernsten Kompaß unserer Zeit vor. Er kann zum Preise von 22,50 M in allen Sportgeschäften erworben werden. Eine kleine Anleitung soll euch die Vielfalt dieses mathematikintensiven Arbeitsmittels zeigen. Schneidet an den Linien die Seite auf, legt die Seiten zusammen und fertig ist ein *Begleiter auf euren Wanderungen!*

Wir wünschen euch, sei es in Ferienlagern, Spezialistenlagern oder im Privatcamping frohe Erholung und viel Erfolg mit dem

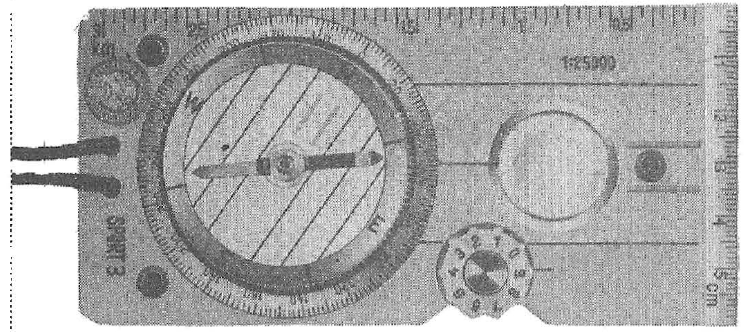
Fluidkompaß Sport 3

Im Jahre 1970 wurden die Weltmeisterschaften im Orientierungslauf durchgeführt. Unsere Fotos zeigen die zu Ehren dieser Weltmeisterschaft herausgegebenen Sonderbriefmarken. Im vergangenen Jahr wurden auch wieder in unserer Republik internationale Wettkämpfe durchgeführt. In der Zeit vom 13. bis 17. 9. 1972 finden die Weltmeisterschaften in der ČSSR statt.

VEB FREIBERGER PRÄZISIONSMECHANIK

DDR 92 Freiberg

Fluidkompaß Sport 3



Trage die Richtungen von A nach C und von B nach C in gleicher Weise ein und bringe sie nötigenfalls durch Verlängern zum Schnitt. Der Schnittpunkt ist C. Die Entfernung $\overline{AC}$ auf dem Papier ergibt maßstäblich umgerechnet die Entfernung in der Natur. Zum Verfolgen bewegter Ziele sind zwei Beobachter notwendig, die auf A und B die Richtungszahlen nach beiden Zielen gleichzeitig messen. Vorher ist jedoch die Standlinie $\overline{AB}$ genau festzulegen.
Verschiebt man den Standpunkt B auf der Standlinie so lange, bis der in B gemessene Richtungsunterschied zwischen A und C gleich 45° ist (Richtungsunterschied bei Gradteilung: 45°), dann wird die zu bestimmende Entfernung zwischen A und C gleich der Länge der Standlinie $\overline{AB}$.
In diesem Falle erübrigt sich die zeichnerische Auswertung durch eine Skizze.

Entfernung auf der Karte – im Gelände:

Maßstab	Karte	Gelände
1 : 25 000	4 cm 1 mm	1 km 25 m
1 : 50 000	2 cm 1 mm	1 km 50 m
1 : 100 000	1 cm 1 mm	1 km 100 m

Handhabung

1. *Entnehmen von Marschrichtungszahlen aus der Karte*

Das Orientieren der Karte ist dazu nicht erforderlich. Magnetische Gegenstände (Taschenmesser und dergl.) beeinflussen die Messung nicht.
Lege den Kompaß mit der Maßstabsteilung an der Längsseite der Grundplatte so an die Verbindungslinie zwischen Ausgangspunkt und Zielpunkt an, daß die Anlegekante an der linken Längsseite der Grundplatte in die Marschrichtung zeigt. Drehe nun den Teilungsring so, daß die Richtungslinien auf dem Boden der Fluidkapsel parallel zu den Kartenmeridianen verlaufen und der Kreisteilungs-Nullpunkt nach Kartennord zeigt. Lies am Indexstrich (Mittelstrich auf der Grundplatte) auf dem Teilungsring deine Marschrichtungszahl ab!

Anmerkung: Der Gang des Teilungsringes ist so abgestimmt, daß bei ausreichendem Druck der Grundplatte auf die Kartenunterlage einhändige Bedienung möglich ist und die rechte Hand zum Aufschreiben der Marschrichtungen und Streckenlängen freibleibt.

Kompaß bestimmt werden. Hierzu ist nach Ziffer 3 der Stand der Sonne zu bestimmen. Die genaue Marschrichtungszahl in Grad, geteilt durch 15 ergibt die Uhrzeit (24-Stundenzeit).

7. *Messen von Entfernungen in der Karte*

Die Karte ist eine Abbildung des Geländes senkrecht von oben. Der Kartenmaßstab ist eine Verhältniszahl, die das Verkleinerungsverhältnis Karte : Gelände angibt. Die Anlegekante der Grundplatte ist in einem der wichtigsten Verkleinerungsverhältnisse, im Maßstab 1 : 25 000 geteilt. Die Querkante besitzt Millimetereinteilung. Sie kann als Maßstab 1 : 1000 verwendet werden.

8. *Messen von Entfernungen im Gelände* (ohne Benutzung der Karte)

Visiere vom Standpunkt A aus Ziel C an. Lies die Marschrichtungszahl ab und vermerke sie in einer Skizze. Markiere den Standpunkt A im Gelände und schreite annähernd rechtwinklig zu $\overline{AC}$ z. B. 100 m ab (Schrittmaß beachten – Richtungsunterschied 90°). Der erreichte Hilfspunkt ist B. Stelle in B die Marschrichtungszahlen nach A und C fest und vermerke die Werte in der Skizze. (Seite 9)
Die zeichnerische Ermittlung der Entfernung $\overline{AC}$ erfolgt in folgender Weise:
Entsprechend dem Bild auf Seite 9 wird auf einem Blatt Papier (gute ebene Unterlage) – an

2. *Aufsuchen des Marschzieles im Gelände*

Stelle den Teilungsring auf die vorgegebene Marschrichtungszahl ein. Halte den Kompaß mit annähernd horizontaler Grundplatte etwa in Brusthöhe. Drehe dich mit dem Kompaß so, daß das Nordende der Magnetnadel genau zwischen den Leuchtstrichen auf dem Kompaßboden einspielt. Visiere über die Längskante der Grundplatte einen markanten Geländepunkt an. Dieser Geländepunkt liegt in Richtung deines Marschzieles.

3. *Feststellen einer Marschrichtung im Gelände*

Halte den Kompaß mit annähernd horizontaler Grundplatte etwa in Brusthöhe. Visiere über die Längskante der Grundplatte den Richtungspunkt im Gelände an. Drehe den Teilungsring so, daß das Nordende der Magnetnadel genau zwischen den Leuchtstrichen auf dem Kompaßboden einspielt. Lies am Indexstrich auf dem Teilungsring deine Marschrichtungszahl ab.

4. *Übertragen einer Marschrichtung in die Karte*

Stelle mit dem Teilungsring die gegebene Marschrichtungszahl auf den Indexstrich ein. Lege den Kompaß so auf die Karte, daß die Anlegekante durch den Standpunkt geht, und drehe die Grundplatte um diesen Punkt bis die Richtungslinien auf dem Kapselboden

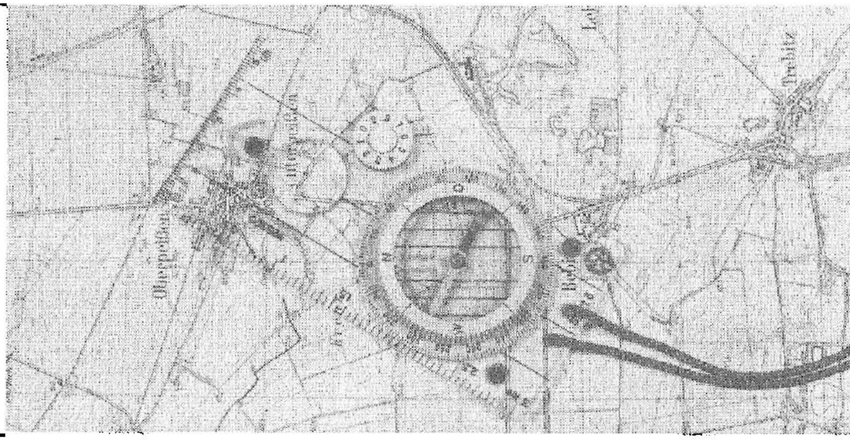
Technische Daten

Teilungsringdurchmesser	56 mm
Skalenwert der Kreisteilung (rechtsläufig)	2°
Schätzung	0,5°
Einschwingdauer der Magnetnadel	7 s
Mittlere Einspielunsicherheit der Magnetnadel	±0,5°
Längsteilung	1 : 25 000
Skalenwert der Längsteilung	50 m
Schätzung	5 m
Querteilung	60 mm
Skalenwert der Querteilung	1 mm
Schätzung	0,2 mm
Funktionsfähigkeit im Temperaturbereich	−30 °C bis +50 °C

Der Fluidkompaß Sport 3
ist ein Sport- und Touristenkompaß, der insbesondere den Forderungen des Orientierungslaufes angepaßt wurde. Sein Vorteil liegt in der besonders schnellen Meßbereitschaft und einfachen Bedienung.
In die Grundplatte des Sport 3 (Abmessungen: 125 mm × 60 mm × 11 mm, Masse: 55 g) wurde zur Erleichterung des Kartenlesens eine Lupe mit 3,5facher Vergrößerung eingelassen. Eine gleichfalls auf der Grundplatte angeordnete Schrittmerkscheibe dient als Hilfsmittel für die Schrittzählung beim Einhalten der Routenskizze, beim Umgehen von Hindernissen oder beim Kompaßgang in unmarkantem Gelände.

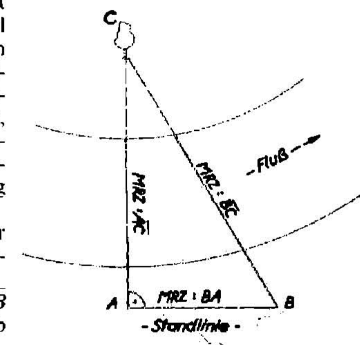
2

Der Fluidkompaß **Sport 3**
ein Sport- und Touristenkompaß,
den Forderungen des Orientierungslaufes angepaßt, besonders schnelle Meßbereitschaft und einfache Bedienung



4

einer seiner Lage im Bestimmungsdreieck *ABC* entsprechenden Stelle – der Hilfspunkt *B* markiert. Stelle die Marschrichtungszahl von *B* und *A* auf dem Kompaß ein. Lege den Kompaß mit dem Teilungsende des Millimeterstabes der Anlegekante an den Hilfspunkt *B* an und drehe den Kompaß so lange, bis das Nordende der Magnetnadel (Leuchtmarkierung) zwischen den Doppelleuchtstrichen einspielt. Ziehe von *B* aus entlang der Anlegekante eine Gerade.
Die Lage des Blattes darf nun während der weiteren Auswertung nicht verändert werden.
Trage an der Geraden die Entfernung $\overline{AB}$ (Standlinie) in einem bestimmten Maßstab ab.



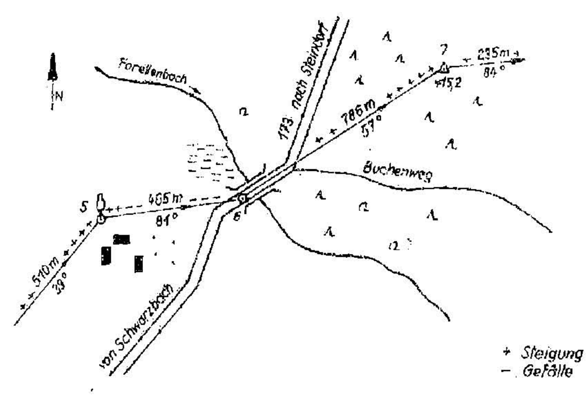
9

parallel zu den Kartenmeridianen (senkrechter Kartenrand) verlaufen und der Doppelleuchtstrich nach Karten-Nord zeigt. Ziehe mit weichem Bleistift eine Hilfslinie entlang der Anlegekante durch den Standpunkt in Richtung der Anlegekante. Diese Hilfslinie gibt Deine Marschrichtung auf der Karte an.

5. Anlegen der Routenskizze
Die Routenskizze (Seite 7) enthält eine annähernd maßstäbliche Aneinanderreihung von Marschrichtungszahlen zwischen je zwei Knickpunkten einer Marschroute. An jede Seite des auf diese Weise entstehenden gebrochenen Linienzuges wird die Marschrichtungszahl in Grad und die Streckenlänge in Meter oder im Schrittmaß angeschrieben. Die Knickpunkte werden mit den als Richtungspunkte verwendeten markanten Geländezielen oder Kontrollposten bezeichnet.
Die Routenskizze dient sowohl zur Vorbereitung einer Marschroute und zur Erleichterung der Kompaßarbeit im Gelände als auch zum Fixieren des bereits zurückgelegten Marschweges.

6. Bestimmen der Uhrzeit mit dem Kompaß
Ebenso wie gelegentlich Himmelsrichtungen mit der Uhr bestimmt werden müssen, kann beim Versagen der Uhr die Zeit mit dem

6

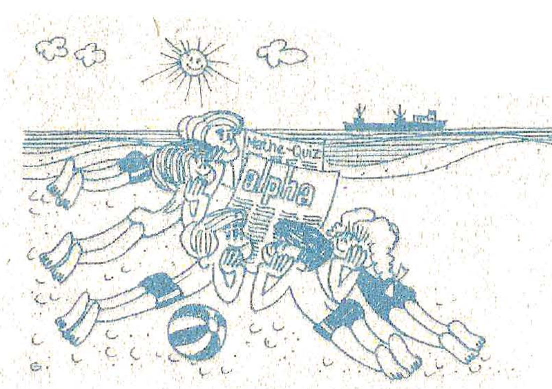


7

Klasse 9/10

▲1▲ $26^2 \cdot 10^4$
▲2▲ $x=2a-a\sqrt{2}=a(2-\sqrt{2})$
▲3▲ Es gewinnt der Spieler, der so ziehen kann und stets auch so zieht, daß für die nach Ausführung seiner Züge auf dem Tische liegenden Murmeln entweder die Aussage 1 oder 2 gilt: 1 Die Anzahl der blauen Murmeln auf dem Tisch ist durch 3 teilbar und die Anzahl der roten Murmeln auf dem Tisch ist durch 2 teilbar.
2 Die Anzahl der blauen Murmeln auf dem Tisch läßt beim Teilen durch 3 den Rest 1 und die Anzahl der roten Murmeln auf dem Tisch ist ungerade.

▲4▲ Nach geeignetem Aufschneiden längs einiger Kanten läßt sich der Würfel so aufbiegen, daß seine Flächen in der Ebene liegen. Die Strecke, die die beiden markierten Punkte zu Eckpunkten hat, ist – sofern alle Punkte dieser Strecke dem Würfelnetz angehören – gegebenenfalls die gesuchte kürzeste Verbindung. Die Einschränkung „gegebenenfalls" bedeutet dabei, daß aus diesen Strecken, die sich bei verschiedenartigem Aufschneiden des Würfels ergeben, die kürzeste auszuwählen ist. Ohne Zerschneiden des Würfels kann diese kürzeste Verbindung auch durch einen straff gespannten Faden gefunden werden, der beide Punkte verbindet.

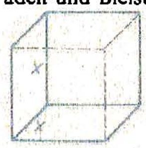


Unterhaltsame Mathematik

alpha

Mathematik-Quiz im Ferienlager

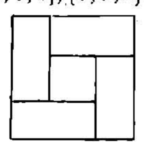
zu bestimmen! Als Hilfsmittel stehen bereit: Schere, Zirkel, Faden und Bleistift.



Lösungen

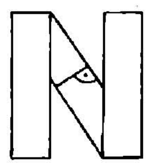
Klasse 5

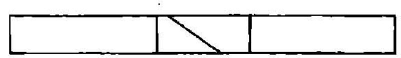
▲1▲ {6; 6; 1}, {6; 5; 2}, {6; 4; 3}, {5; 5; 3}, {5; 4; 4}.
▲2▲



Klasse 6

▲1▲ $x=2; 5; 8$
▲2▲





▲4▲ Die drei Ringe der dreigliedrigen Kette sind aufzuschneiden. Mittels dieser drei Ringe sind die übrigen drei Ketten zu einer geschlossenen Kette zu verbinden.

„Pannen" zu vermeiden: Sollten bei schwierigeren Aufgaben alle Quiz-Rundenteilnehmer überhaupt nicht mit der Aufgabe zurecht kommen, so muß der Spielleiter helfende Hinweise geben!
Vergeßt nicht, kleine Preise für die Sieger der einzelnen Quiz-Runden zu besorgen!
Sollen wir im nächsten Jahr wieder ein derartiges Heft gestalten? Wer hilft mit, das nächste Heft zusammenzustellen?

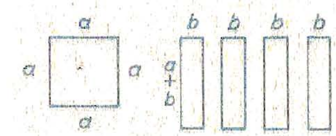
Frohe Ferien wünscht
Eure Redaktion *alpha!*

Autoren dieses Heftes: StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Leipzig) – Mathematikfachlehrer W. Träger (Döbeln)

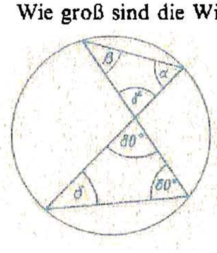
Klassenstufe 5

▲1▲ Ein Wurf mit 3 Würfeln zeigt 13 Augen. Gib alle Möglichkeiten für die Augenzahl 13 mit 3 Würfeln an!

▲2▲ Lege die vier kongruenten Rechtecke und das Quadrat so aneinander, daß insgesamt ein Quadrat entsteht. Wer schafft es als Erster?

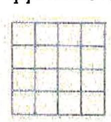


▲2▲ Wie groß sind die Winkel?



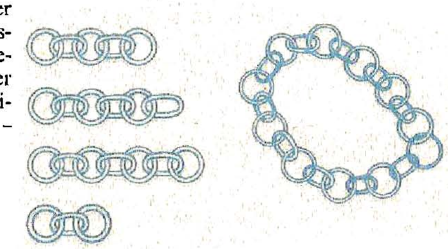
▲3▲ Jeder Mitspieler erhält ein Stück gut biegsamen Draht und soll daraus einen Würfel (oder eine Pyramide) biegen. Wer schafft das beste Modell?

▲4▲ Zur Verfügung stehen 16 gleichgroße quadratische Pappstücke, von denen je vier gelb, grün, blau und rot gefärbt sind. Lege diese 16 Pappstücke so aneinander, daß sie zusammen wieder ein Quadrat bilden.
Dabei sollen in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale jeweils nur verschiedenfarbige Pappstücke liegen.



Nachbar hat nunmehr einen weiteren mathematischen Begriff zu nennen, der den zweiten oder dritten Buchstaben des vorgenannten Begriffes als Anfangsbuchstaben hat. Schon genannte Begriffe dürfen nicht ein zweites Mal benutzt werden. Der Mitspieler, der innerhalb 20 Sekunden nicht bedingungsgemäß antworten kann, scheidet aus. Gewinner dieser Quiz-Runde ist der als letzter übrig bleibende Mitspieler. Beispiel: Dreieck – rechter Winkel – Ebene – Eckpunkt – Kathete – Teiler – ....

▲4▲ Aus den vier Papierschlangen ist durch Aufschneiden von weniger als vier Papierringen und Wiederzusammenkleben eine geschlossene Kette herzustellen! Dabei sind alle Ringe zu verwenden!



alpha – für frohe Freizeitgestaltung

Die Idee zu unserem kleinen Heft entstand nach einer Ring-frei-Veranstaltung des *Kreisklubs Junger Mathematiker Döbeln*. Ein kleines Arbeitskollektiv stellte euch für Bergfeste, Quiz-Nachmittage, Spezialistenlager oder Gruppennachmittage Material zusammen, das eure Mitspieler zum Nachdenken über mathematische Probleme anregen soll. Eine gewissenhafte Vorbereitung sichert den Erfolg! Jede Aufgabe muß der Spielleiter vorher selbst durchprobieren! Geeignetes Arbeitsmaterial (Stoppuhr, Schere, Papier usw.) muß bereitgelegt werden. Damit auch die Zuschauer der einzelnen Quiz-Runden aktiv mitarbeiten, müssen die einzelnen Aufgaben allen Veranstaltungsteilnehmern bekanntgegeben werden (z. B. mittels Lichtschreiber oder Manipermtafel). Während die Quizrundenteilnehmer knobeln, sollten *alle* Zuschauer mittels mitgebrachter Arbeitsgeräte (Block, Bleistift) sich ebenfalls an der Lösung versuchen. Bevor die nächste Aufgabe gestellt wird, ist jeweils die Lösung der letzten Aufgabe bekanntzugeben. Auch hierbei muß der Spielleiter variabel sein und muß die Zuschauer wieder mit aktiv einschalten. Weiterhin sind jeweils von der Jury die von den einzelnen Quiz-Rundenteilnehmern erreichten Punkte bekanntzugeben. Noch eine Bemerkung sei gemacht, um 2

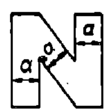
▲3▲ Zwei oder mehrere Schüler werden mit verbundenen Augen vor Wandtafeln gestellt. Wer kann das eleganteste Quadrat, wer den besten Kreis, das schönste Trapez zeichnen? Die Zuschauer entscheiden!

▲4▲ Jeder Mitspieler erhält ein quadratisches Stück Papier (möglichst groß) und soll durch Falten und Reißen ein möglichst schönes Ornament gestalten. Die Jury entscheidet, wer der Beste ist. (Man kann auch eine Schere und evtl. Scherenschnittpapier geben).

Klassenstufe 6

▲1▲ Bestimme die Grundziffer x so, daß die Aussage $3|472x6$ wahr ist!

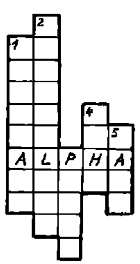
▲2▲ Zerschneide den Buchstaben „N“ geeignet in Teile und setze diese zu einem Rechteck zusammen.



▲3▲ Die Teilnehmer der Quiz-Runde stellen sich in einem Kreis auf. Einer von ihnen nennt einen mathematischen Begriff. Sein 4

Klassenstufe 7

▲1▲ Setze Wörter der angegebenen Bedeutung in die Spalten ein!



1. natürliche Zahl mit genau zwei Teilern, 2. spezielle Bewegung, 3. geometrischer Grundbegriff, 4. besondere Linie im Dreieck, 5. wahre Aussage

▲2▲ Eines der beiden kongruenten Quadrate ist geeignet in Teilflächen zu zerschneiden. Diese Teilflächen sind so an das andere Quadrat anzulegen, daß wieder ein Quadrat entsteht.

▲3▲ Jedem Mitspielenden wird ein Löschblatt überreicht. Die Mitspieler sollen dieses so einreißen, daß sie durch das Löschblatt durchkriechen können.

▲4▲ Die Teilnehmer der Quiz-Runde werden zu Paaren zusammengefaßt. Auf dem Fußboden sind möglichst weit voneinander entfernt zwei Kreidekreise mit dem Durchmesser 0,5 m markiert. Der eine der beiden Spieler wird in den einen Kreis gestellt. 6

Nachdem ihm die Augen verbunden worden sind, wird er vom Spielleiter mehrere Male um seine Körperachse gedreht, so daß er die Orientierung verloren hat. Sein Mitspieler hat ihn durch Kommandos möglichst schnell in den anderen Kreis zu dirigieren. Zugelassen sind nur Kommandos wie: „Drehen um $+30°$, Drehen um $-45°$“, „Laufe $+3\frac{1}{2}$ Schritt“ und „Laufe -2 Schritt“. Erst nachdem der zu dirigierende Schüler ausgerufen hat „Kommando ausgeführt“, darf sein Mitspieler das nächste Kommando geben. Sieger ist das Duett, das diese Aufgabe am schnellsten löst!

Hinweis: Durch ein Pluszeichen sind Drehungen im mathematisch positiven Sinn und Vorwärtsbewegungen gekennzeichnet. Durch ein Minuszeichen sind Drehungen im mathematisch negativen Sinn und Rückwärtsbewegungen gekennzeichnet.

Klassenstufe 8

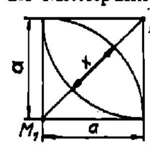
▲1▲ 8 FDJler tragen ein Schachturnier aus. Jeder spielt dabei gegen jeden genau eine Partie. Wieviele Partien werden ausgetragen?

7

Klassenstufe 9/10

▲1▲ Die Kennzeichen für Kraftfahrzeuge haben in der DDR diese Form: AX 08-74. Wieviele Kraftfahrzeuge können in der DDR maximal zugelassen werden, wenn alle Fahrzeuge verschiedene Kennzeichen haben sollen?

▲2▲ Berechne x bei gegebenem a! (M_1 – M_2 sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.)



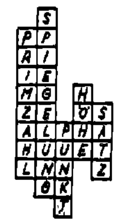
▲3▲ Je zwei Mitspieler sitzen an einem Tisch, auf den vom Spielleiter eine bestimmte Anzahl blaue und eine bestimmte Anzahl rote Murmeln gelegt wurden. Abwechselnd haben beide Spieler Murmeln vom Tisch zu nehmen und zwar bei jedem Zug entweder eine oder zwei blaue Murmeln oder eine rote Murmel. Gewonnen hat der Spieler, der mit seinem letzten Zug die letzte Murmel vom Tisch nimmt.

▲4▲ Auf zwei längs einer Kante zusammenstoßenden Flächen eines Pappwürfels ist je ein Punkt markiert. Der kürzeste auf der Würfeloberfläche verlaufende Streckenzug, der diese beiden Punkte verbindet, ist

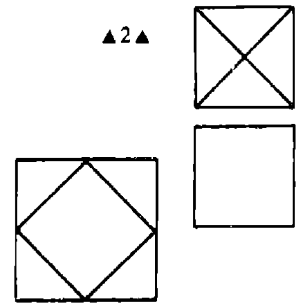
9

Klasse 7

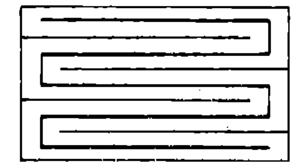
▲1▲



▲2▲



▲3▲ Das Löschblatt kann wie folgt eingerissen werden (Bild).



11

Klasse 8

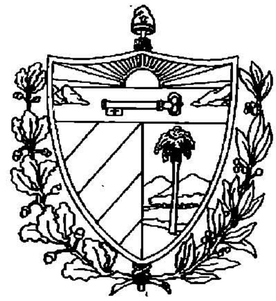
▲1▲ $\frac{8 \cdot 7}{2} = 7+6+5+4+3+2+1$

▲2▲ $\alpha = 60°$; $\beta = \delta = 40°$; $\gamma = 80°$

▲4▲

rot	grün	blau	gelb
blau	gelb	rot	grün
gelb	blau	grün	rot
grün	rot	gelb	blau

Mathematikolympiaden in der Republik Kuba



Auf der XIII. IMO erstmalig dabei

In Kuba wurde im Jahre 1971 die erste Mathematikolympiade durchgeführt. An der 1. Stufe (Schulolympiade) beteiligten sich 1 100 Schüler. Daraus wurden für die 2. Stufe 25 Schüler ausgewählt und daraus qualifizierten sich wiederum sechs Schüler, von denen vier – also noch eine unvollständige Mannschaft – an der XIII. IMO teilnahmen (siehe Foto).

In diesem Schuljahr wurde in der gesamten Republik Kuba (ähnlich organisiert wie in der DDR) die 2. MO durchgeführt.

Aufgaben der 1. Stufe

Klassenstufe 11/12 (Auswahl)

▲1▲ Es sei E eine nichtleere Menge. Ferner sei zu jeder Teilmenge A von E eine eindeutige Abbildung f_A von der Menge A in die Menge $\{0, 1\}$ definiert, so daß

$$f_A(x)=\begin{cases}1, \text{ wenn } x\in A\\ 0, \text{ wenn } x\notin A.\end{cases}$$

a) Nun seien A, B beliebige Teilmengen von E. Es sollen $f_{A\cap B}(x)$, $f_{E\setminus A}(x)$, $f_{A\cup B}(x)$ durch $f_A(x)$, $f_B(x)$, $f_E(x)$ ausgedrückt werden.

b) Man beweise, daß zu jeder eindeutigen Abbildung f von der Menge E in die Menge $\{0, 1\}$ eine Teilmenge A von E existiert, so daß für alle $x\in E$ $f(x)=f_A(x)$ gilt.

c) Es sei g eine eindeutige Abbildung von der Menge E in die Menge P der reellen Zahlen. Man beweise, daß dann für alle $x\in E$ $g(x)=[g(x)]^2$ genau dann gilt, wenn es eine Teilmenge A von E gibt, so daß

$$g(x)=f_A(x)$$

für alle $x\in E$ gilt, wobei f_A eine eindeutige Abbildung, wie oben definiert, ist.

▲2▲ Es seien ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$.

$2s=a+b+c$ der Umfang dieses Dreiecks und F sein Flächeninhalt. Ferner sei ϱ der Radius des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises, der die Hypotenuse in dem Punkt D berührt, und es sei $\overline{AD}=m$, $\overline{DB}=n$.

Man beweise, daß dann stets gilt

$$F=\varrho s, \qquad (1)$$

$$F=mn. \qquad (2)$$

▲3▲ Es ist die Basis x mit $x\leqq 10$ eines x-adischen Positionssystems so zu bestimmen, daß es zwei natürliche Zahlen a und b mit $0<a<x$ und $0<b<x$ gibt und das Quadrat der Zahl $(aa)_x$ gleich $(bbbb)_x$ ist.

El Orientador

Im Jahre 1971 wurde erstmals ein *Magazin für Mathematiklehrer* herausgegeben. Es enthält auch Mathematikprobleme. Wir veröffentlichen einige Aufgaben für diejenigen *alpha*-Leser, die höhere Klassen besuchen und sich für die Lösung schwieriger Aufgaben interessieren:

▲8▲ In der Menge M aller geordneten Paare (a, b) von reellen Zahlen a und b seien eine Addition und eine Multiplikation von zwei solchen geordneten Paaren wie folgt definiert:

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d), \qquad (1)$$

$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd, ad+bc+2bd). \qquad (2)$$

a) Man beweise, daß dann das Distributivgesetz der Multiplikation in Verbindung mit der Addition stets erfüllt ist, d. h., daß für alle geordneten Paare (a, b), (c, d), (f, g) aus M

$$(a, b)\cdot[(c, d)+(f, g)]=(a, b)\cdot(c, d)+(a, b)\cdot(f, g) \text{ und} \qquad (3)$$

$$[(c, d)+(f, g)]\cdot(a, b)=(c, d)\cdot(a, b)+(f, g)\cdot(a, b) \text{ gilt.} \qquad (4)$$

b) Man untersuche, ob in der Menge M ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation existiert, d. h., ein Element $e=(x, y)$, so daß

$$(a, b)\cdot(x, y)=(a, b) \text{ und } (x, y)\cdot(a, b)=(a, b) \qquad (5)$$

für alle Elemente (a, b) aus M gilt.

Gegebenenfalls bestimme man dieses neutrale Element e.

▲9▲ Über den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC seien nach außen drei gleichseitige Dreiecke ABC', BCA', CAB' konstruiert.

Man beweise, daß dann stets gilt:

a) $\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}$.

b) Die Geraden AA', BB' und CC' schneiden sich in genau einem Punkt, und jede dieser Geraden halbiert den Winkel, der von den beiden anderen Geraden gebildet wird.

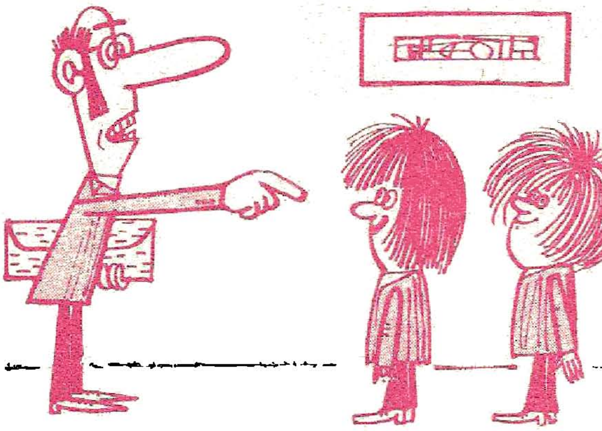
Unser neuer Auslandskorrespondent

Zwischen dem kubanischen Ministerium für Erziehung, Sektor Mathematik und der Redaktion *alpha* bestehen seit dem „Jahr der Produktivität" (1971) freundschaftliche Verbindungen; *alpha* stellt unseren kubanischen Auslandskorrespondenten vor:

Dr. Luis J. Davidson

Die vier kubanischen Teilnehmer an der XIII. IMO

In freien Stunden alpha heiter

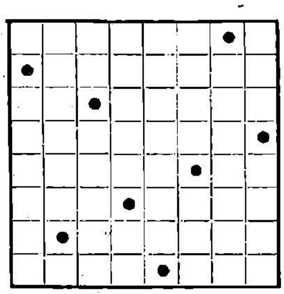


„Mit solchen Haaren kommt ihr in die Schule?"
„Zu Ehren des Kopernikus, Herr Lehrer!"

aus: Karuzela 18 71, Karol Baraniecki

Acht Damesteine

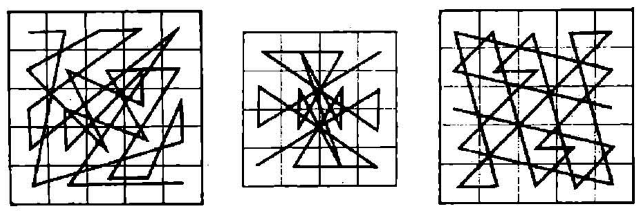
Acht Damesteine stellt man so auf, daß so viele Felder wie nur möglich vom Schach frei bleiben. Hier ist eine der Lösungen, bei der 11 Felder frei bleiben:

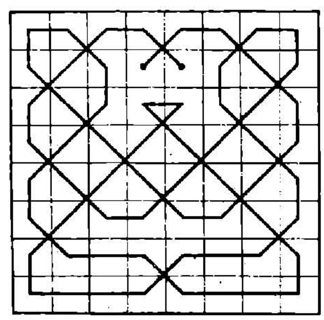


Es gibt noch andere Stellungen der Damesteine. Es ist noch nicht gelungen, eine andere ausfindig zu machen, bei der mehr freie Felder entstehen.

Geometrische Diagramme magischer Quadrate

Den Aufbau eines jeden magischen Quadrates kann man mit Hilfe von Diagrammen darstellen, die die jeweilige Verteilung der Zahlen auf den Feldern darstellen, wobei sich nicht selten diese Linien zu recht interessanten Figuren vereinigen. Als Skizzen geben wir ein Diagramm eines Quadrates von 4×4, zweier Quadrate von 5×5 und ein ungewöhnlich symmetrisches Diagramm des Quadrates von 8×8 an. Den Aufbau des letztgenannten Quadrates sollte man insbesondere untersuchen, indem man die Zahlen von 1 bis 64 in beliebiger Richtung von den Ausgangspunkten nach rechts oder links setzt.





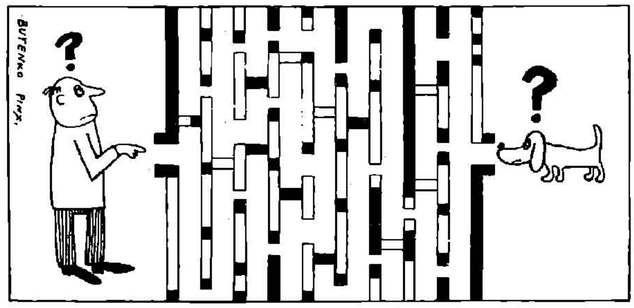
Coś nie coś o 100

$$100=111-11$$
$$100=3\cdot 33+(3:3)$$
$$100=5\cdot(5+5+5+5)$$
$$100=1+2+3+4+5+6+7+8\cdot 9$$
$$\underbrace{\begin{array}{r} 12+4=16\\ 20-4=16\\ 4\cdot 4=16\\ 64:4=16 \end{array}}$$
$$12+20+4+64=100$$
$$100=1+8+27+64=1^3+2^3+3^3+4^3$$
$$100=75+24+\frac{3}{6}+\frac{9}{18}$$
$$100=99\frac{99}{99}$$
$$100=94+5+\frac{38}{76}+\frac{1}{2}$$

Kryptarithmetik

Ersetze Buchstaben durch Ziffern, so daß wahre Aussagen entstehen. (Gleiche Buchstaben entsprechen gleichen Ziffern)

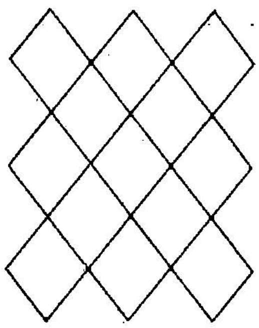
ABCDE	ICC·IN	INU·NU	EMA
+EDCBA	NTT	LNU	UEMA:MA
FFFFF	ICC	NUS	MA
	IANT	OINU	TM
			AS
			EMA
			EMA

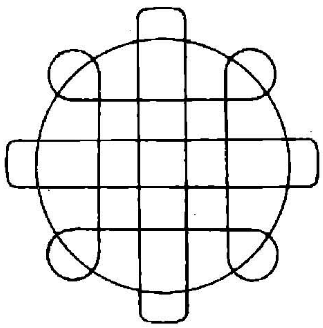


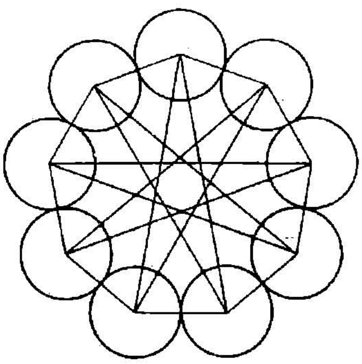
Auf welchem Weg gelangt der Hund zu seinem Herrchen? *aus: Polen 5/69, B. Butenko*

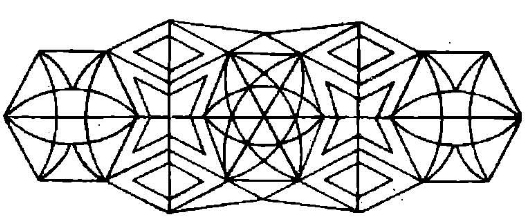
Figuren in einem Zug zu umreißen

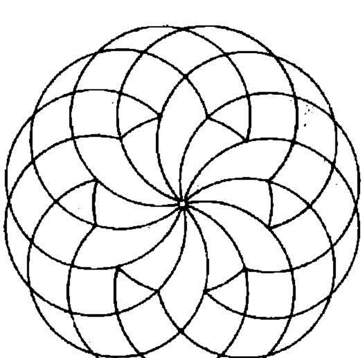
Die folgenden Figuren kann man in einem Zuge umreißen, ohne dabei auf eine schon gezeichnete Linie zurückzukehren:

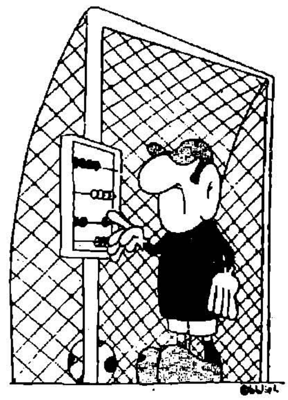




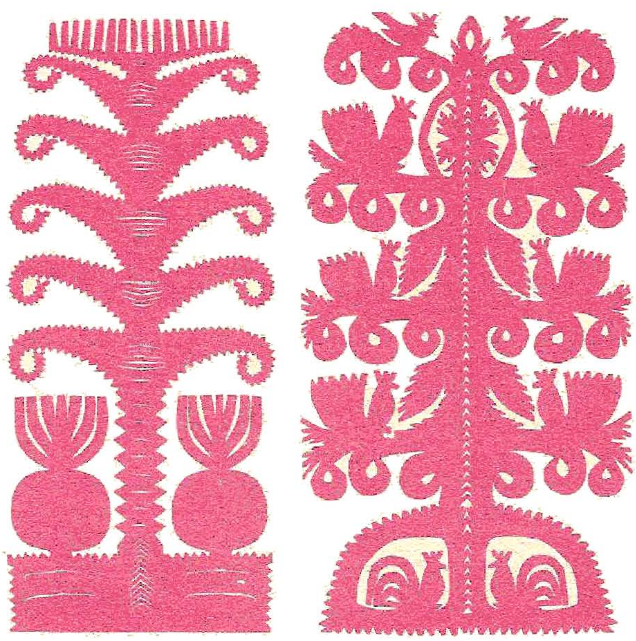


A  Z





Wieslaw Fuglewicz, Wroclaw aus: Polen 5/71



aus: Der volkstümliche polnische Scherenschnitt Verlag der Kunst. 1960

Mathematik und Sport

Klasse 5

5▲913 Bei einem Skispringen standen die Zuschauer in drei Reihen an der Sprungschanze. In der ersten Reihe standen doppelt soviel Zuschauer wie in der zweiten, in der dritten Reihe standen dreimal soviel wie in der ersten. In der ersten Reihe konnten genau 82 Personen gezählt werden. Wieviel Menschen standen als Zuschauer an der Sprungschanze?

5▲914 Welcher Abstand zwischen den einzelnen Hürden ergibt sich aus den folgenden Wettkampfbestimmungen für den Hürdenlauf?

Gesamtstrecke:	119,14 m
Anlauf:	13,72 m
Auslauf:	14,02 m
Anzahl der Hürden:	10

5▲915 Wieviel Kubikmeter Sand müssen in einer 2,75 m breiten und 9,60 m langen Sprunggrube aufgeschüttet werden, wenn der Sand 40 cm hoch liegen soll?

5▲916 Bei den Fußball-Weltmeisterschaften im Jahre 1954 in der Schweiz wurden in 26 Spielen zusammen 884000 Zuschauer gezählt. Im Verlaufe der Spiele wurden insgesamt 140 Tore geschossen.
a) Berechne die durchschnittliche Zuschauerzahl je Spiel!
b) Zwischen welchen ganzzahligen Werten liegt die durchschnittliche Torquote je Spiel?

5▲917 Das Ergebnis turnerischer Übungen der Meisterklasse ermittelt man in „offener Zehnpunktwertung" durch vier Kampfrichter. Von den vier Wertungen wird die höchste und die niedrigste Wertung nicht gezählt. Aus den beiden verbleibenden Werten wird durch das arithmetische Mittel die endgültige Punktzahl errechnet. Berechne die Punktzahl, wenn die Kampfrichter folgende Urteile abgaben:

9,3; 9,1; 9,2; 9,0 Punkte.

5▲918 Hans und Uwe machen an der Reckstange Klimmzüge. Einer von ihnen schafft genau zehn Klimmzüge. Hans sagt: „Der dritte Teil der Anzahl meiner Klimmzüge ist genau soviel wie zweimal der fünfte Teil der Anzahl deiner Klimmzüge." Wie viele Klimmzüge schafft Uwe, wie viele Hans?

Klasse 6

6▲919 Die Bedingungen für das Sportleistungsabzeichen verlangen im 100-m-Lauf folgende Mindestzeiten:
Männer 12,8 s; Frauen 14,6 s.
Um wieviel leistungsfähiger werden Männer eingeschätzt bzw. welchen Vorsprung müßten sie im Ziel haben?

6▲920 Der Kurzstreckenlauf ist seit den ältesten Zeiten sehr verbreitet. Bei den Spielen zu Ehren der Göttin Hera war der Kurzstreckenlauf der einzige Wettkampf für Frauen; sie mußten die 192,27-m-Bahn des Olympia-Stadions zu $\frac{5}{6}$ durchlaufen. Über welche Strecke ging ihr Lauf?

6▲921 Die Sportler A, B, C und D sind die Wettkämpfer einer $4 \cdot 100$-m-Staffel. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge, in der sie laufen?

6▲922 Eine Übung eines Leichtathleten während des Trainings besteht in rhythmischem Gehen mit anschließendem Nachfedern im Stand. Die Länge der Übungsstrecke beträgt 30 m. Am Anfang und am Ende stehen Fahnenstangen. Der Sportler legt die Strecke auf folgende Weise zurück: Zwei Schritte vor; nachfedern; dann einen Schritt zurück, nachfedern, dann wieder zwei Schritte vor und so fort, bis er die zweite Fahnenstange erreicht. Welches ist die genaue Anzahl von Schritten, die er unter den angegebenen Bedingungen insgesamt macht, wenn seine Schrittlänge genau 50 cm beträgt?

6▲923 Nach einem Scheibenschießen verglichen vier Sportschützen E., R., G. und J. ihre Schußleistungen. Es ergab sich folgendes:
a) J. erzielte mehr Ringe als G.
b) E. und R. erreichten gemeinsam dieselbe Ringzahl wie J. und G. zusammen.
c) E. und J. erzielten zusammen weniger Ringe als R. und G. Es ist auf Grund dieser Angaben die Reihenfolge der Sportschützen nach fallender Ringzahl zu bestimmen!

Eine Aufgabe von Klaus Ampler

Deutsche Hochschule für Körperkultur Leipzig

▲924a Vier Straßenradrennsportler hatten sich vorgenommen, eine 95 km lange Trainingsstrecke in einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $47\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurückzulegen. Diese Vierergruppe durchfuhr die Trainingsstrecke in einer Fahrzeit von 2:04:08 h (2 Std., 4 Min. und 8 Sek.). Haben diese Sportler ihr Trainingsvorhaben schon erreicht?

▲924b Ein Bahnradsportler hat eine Strecke von 500 m bei einer Übersetzung von 91,1 Zoll in einer Zeit von 36,8 s durchfahren. Welche Trittfrequenz T entwickelte der Sportler?
(*Hinweis:* Die Übersetzung von 91,1 Zoll gestattet es, eine Strecke von 7,26 m bei einer vollen Umdrehung der Tretkurbel zurückzulegen. Unter der Trittfrequenz T verstehen wir die Anzahl der Umdrehungen der Tretkurbel in einer Minute.)

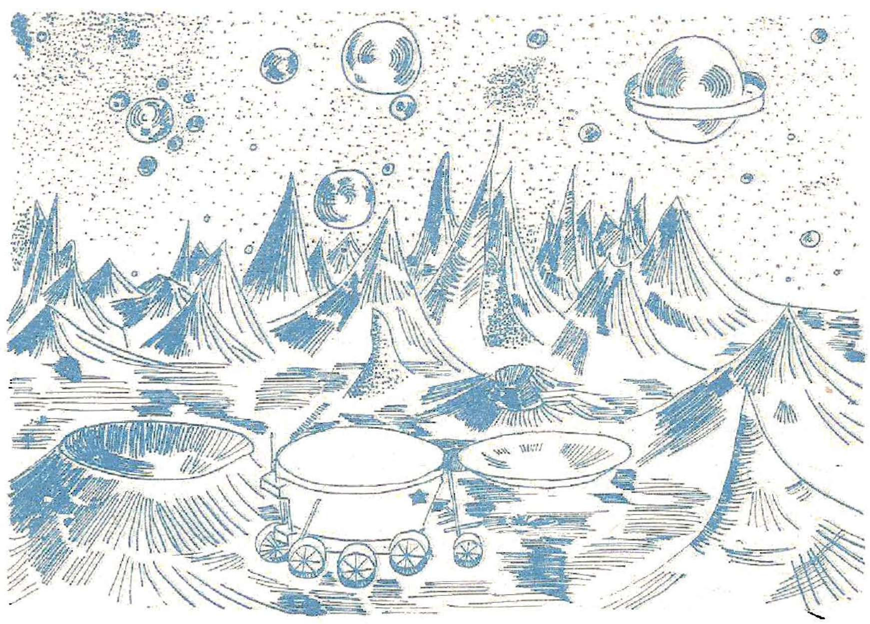
▲924c Einem Bahnradsportler wurde während des Trainings die Trittfrequenz $T = 120\frac{\text{U}}{\text{min}}$ und die Übersetzung von 91,8 Zoll vorgegeben. Welche Zeit benötigte der Sportler zum Durchfahren der Strecke von 200 m, und mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr er?

Unser Foto: Klaus Ampler beim Zeitfahren (Qualifikation 1967) – Erfolge des Friedensfahrtteilnehmers *Klaus Ampler*, der jetzt Student an der *Deutschen Hochschule für Körperkultur* und Übungsleiter für Radsport-Nachwuchs ist:
8 × Teilnehmer der Friedensfahrt
1 × Gesamtsieger, Einzel 1963
3 × Gesamtsieger, Mannschaft 1963, 1964, 1969
5 × Etappensieger

alpha stellt vor

Kerstin Bachmann

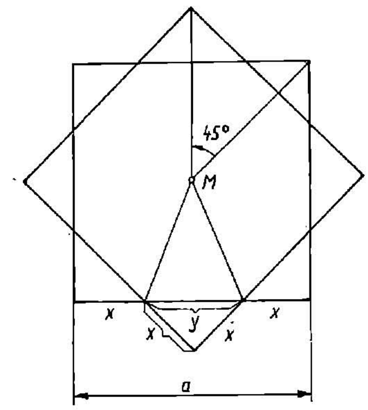
Ich heiße *Kerstin Bachmann* und bin Schülerin der Klasse 8a der Kröllwitzschule in Halle/Saale.
Die Zeitschrift *alpha* lese ich schon seit ihrer Gründung 1967, obwohl ich damals erst die 3. Klasse besuchte. In jedem neu erscheinenden Heft schlage ich zuerst die Seite „alpha heiter" auf, die ihr sicher mit gleicher Spannung wie ich erwartet. Natürlich beteilige ich mich – wie auch mein Bruder – in jedem Jahr am *alpha*-Wettbewerb. Dabei freue ich mich über jede gefundene Lösung, wenn ich mitunter auch länger überlegen und in anderen Büchern nachschlagen muß. Das Lösen dieser Aufgaben hat mir viel geholfen, mein mathematisches Wissen und Können zu erweitern und zu vertiefen. Damit dient es mir zugleich zur Vorbereitung auf die Mathematikolympiaden.
Außer einigen Preisen im *alpha*-Wettbewerb konnte ich bisher bei Kreisolympiaden in der Stadt Halle dreimal einen 1. Platz und einmal einen 2. Platz erringen. Meine schönsten Erfolge sind jedoch die zwei 1. Plätze in Klassenstufe 7 und 8 bei den Bezirksolympiaden 1971 und 1972.
In meiner Freizeit spiele ich Geige im Jugendsinfonieorchester der Bezirksmusikschule Halle (Konservatorium). Zu vielen Anlässen wie z. B. den Händelfestspielen oder der Einweihung des *Hauses des Lehrers* in Halle interpretierten wir Werke von Händel, Haydn, Gerstner u. a. Der „Kunstpreis der Stadt Halle", den wir im Oktober 1971 verliehen bekamen, spornt uns zu weiteren Leistungen an. Natürlich bin ich in Jugend- und Schülerkonzerten auch solistisch tätig. Erst vor kurzem spielte ich das Violinkonzert a-moll von J. S. Bach.
Ausgleich und Entspannung von Mathematik und Musik finde ich beim Malen und Zeichnen. Versuche ich einmal selbst, meine Gedanken und Beobachtungen in einem Bild festzuhalten, so habe ich – wie beim Lösen von Mathematikaufgaben und beim Geigenspiel – das Gefühl schöpferischer Tätigkeit, das ich bei all meiner Arbeit nie missen möchte. Für die Leser von *alpha* lege ich eine Zeichnung und zwei Scherenschnitte bei!
Meine gesellschaftliche Betätigung beschränkt sich aber nicht nur auf die außerschulische Beschäftigung mit Mathematik, Musik und Zeichnen. Im vergangenen Schuljahr war ich Gruppenratsvorsitzende unserer Klasse. Als schönsten Erfolg unserer gesellschaftlichen Arbeit möchte ich die *Ehrenurkunde des Zentralrates der FDJ* nennen, die wir als beste Pioniergruppe unserer Schule erhielten. Inzwischen bin ich als Mitglied der ZGOL unserer Schule gewählt worden und habe neue Aufgaben übernommen.



Den Lesern von *alpha* möchte ich nun an einer (von mir selbst gestellten) Aufgabe zeigen, wie ich vorgehe, um eine Lösung dieser Aufgabe zu finden.

Aufgabe

Einem Quadrat sei ein regelmäßiges 8-Eck so einbeschrieben, daß je zwei Ecken auf einer Quadratseite liegen (s. Figur). Wie verhält sich der Flächeninhalt des Quadrates zum Flächeninhalt des 8-Ecks?



Lösung

1. Ein regelmäßiges 8-Eck der geforderten Art kann man sich erzeugt denken, indem zunächst zwei kongruente Quadrate der Seitenlänge a miteinander zur Deckung gebracht werden. Anschließend dreht man das eine der beiden Quadrate um den gemeinsamen Mittelpunkt M gegen die Ausgangslage um 45°. Die Berandung des beiden Quadraten gemeinsamen Gebietes stellt ein regelmäßiges 8-Eck dar, das bezüglich beider Quadrate die in der Aufgabenstellung geforderten Lagebeziehungen erfüllt.
2. Die 8 überstehenden Dreiecke in der Figur sind nach Konstruktion gleichschenklig rechtwinklig. Die Länge der Katheten werde mit x, die der Hypotenusen mit y bezeichnet. Gemäß der durchgeführten Drehung gelten folgende Gleichungen:

$$y^2=2x^2, \qquad (1)$$

$$2x+y=a. \qquad (2)$$

Dies sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten; Gleichung (1) ist quadratisch und Gleichung (2) linear in x und y.

3. Zwecks Bestimmung der Unbekannten löse ich zunächst Gleichung (2) nach y auf und quadriere sie anschließend, also:

$$y=a-2x,\quad y^2=a^2-4ax+4x^2. \qquad (3)$$

Das Quadrieren stellt keine äquivalente Umformung dar. Deshalb ist zu erwarten, daß die weitere Rechnung auch Lösungen liefern wird, die für unsere Aufgabe unbrauchbar sind.

4. Die rechten Seiten von (1) und (3) kann ich gleichsetzen. Das führt auf die quadratische Gleichung

$$2x^2=a^2-4ax+4x^2.$$

Diese bringe ich auf die Normalform

$$x^2-2ax+\frac{a^2}{2}=0.$$

5. Die Wurzeln sind nach der für quadratische Gleichungen bekannten Auflösungsformel

$$x_1=a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad x_2=a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Da nach Konstruktion $0<x<a$ gilt, scheidet x_1 als Lösung aus. Man erhält somit als einzig brauchbare Lösung $x=a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Daraus folgt mit Gleichung (2):

$$y=\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1). \qquad (4)$$

6. Das regelmäßige 8-Eck läßt sich in 8 kongruente gleichschenklige Dreiecke zerlegen. Mit dem für y gefundenen Wert ergibt sich für den Flächeninhalt A eines Dreiecks

$$A=\frac{1}{2}ay=\frac{a^2}{4}(\sqrt{2}-1).$$

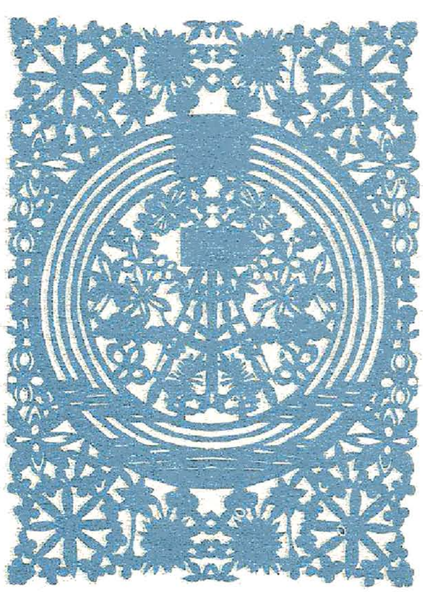
Daraus folgt für den Inhalt des regelmäßigen 8-Ecks

$$A_1=2(\sqrt{2}-1)a^2.$$

7. Ferner hat das umbeschriebene Quadrat mit der Seitenlänge a den Inhalt $A_2=a^2$. Folglich besteht für die Inhalte von Quadrat und regelmäßigem 8-Eck die Proportion

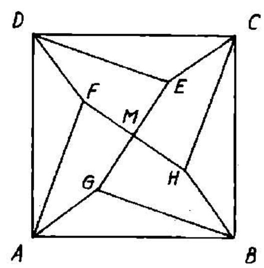
$$A_1:A_2=(\sqrt{2}+1):2.$$

K. Bachmann



Lösungen

* 10/12 * 804 1. Die Dreiecke ABG und CDE sind kongruent, weil sie nach Konstruktion in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Der Punkt G hat also von der Seite $\overline{AB}$ den gleichen Abstand wie der Punkt E von der Seite $\overline{CD}$. (vgl. die Abb.).



Da M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EG}$ ist, hat M von der Parallelen durch G zu $\overline{AB}$ den gleichen Abstand wie von der Parallelen durch E zu $\overline{CD}$; M hat also auch den gleichen Abstand von der Seite $\overline{AB}$ wie von der Seite $\overline{CD}$. Analog beweist man, daß M auch den gleichen Abstand von der Seite $\overline{BC}$ wie von der Seite $\overline{AD}$ hat. M ist daher der Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$.

Führen wir nun eine Drehung um M mit dem Drehwinkel 90° im positiven Drehsinn aus, so wird wegen $MG\perp MH$ und $\overline{MG}=\overline{MH}$ der Punkt G in den Punkt H übergeführt; ferner werden die Punkte A und B in die Punkte B und C übergeführt. Daraus folgt $\triangle ABG\cong\triangle BCH$. Analog beweist man, daß auch

$\triangle ABG\cong\triangle CDE\cong\triangle DAF$ gilt.

Daraus folgt die 1. Behauptung:

$$\overline{HC}=\overline{ED}=\overline{FA}=\overline{GB}.$$

2. Bei einer Drehung um M mit dem Drehwinkel 180° geht die Gerade HC in die Gerade FA über; daraus folgt die 2. Behauptung:

$$HC\parallel FA.$$

3. Bei einer Drehung um M mit dem Drehwinkel 90° im positiven Drehsinn geht die Gerade HC in die Gerade ED über; daraus folgt $HC\perp ED$. Analog beweist man, daß auch $FA\perp GB$ gilt, womit die 3. Behauptung bewiesen ist.

* 10/12 * 805 Es ist zweckmäßig, zunächst die Zahl p^2 und dann erst die Zahl p abzuschätzen. Wir erhalten nämlich

$$p^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}\cdot\ldots\cdot\frac{49^2}{50^2}. \qquad (1)$$

Daraus folgt

$$p^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^2}{2\cdot4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)2n}\cdot\ldots\cdot\frac{49^2}{48\cdot50}\cdot\frac{1}{50}. \qquad (2)$$

Nun gilt für alle natürlichen Zahlen n mit $n>1$

$$\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)2n}=\frac{(2n-1)^2}{(4n^2-4n+1)-1}=\frac{(2n-1)^2}{(2n-1)^2-1}>1,$$

weil $(2n-1)^2-1<(2n-1)^2$.

Daher sind in (2) alle Quotienten mit Ausnahme des ersten und des letzten größer als 1, und wir erhalten

$$p^2>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{50}=\frac{1}{100},\ \text{also}\ p>\frac{1}{10}=0{,}1. \qquad (3)$$

Andererseits gilt wegen (1)

$$p^2=\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot7}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\ldots\cdot\frac{49\cdot51}{50^2}\cdot\frac{1}{51}. \qquad (4)$$

Nun gilt für alle natürlichen Zahlen n mit $n\geqq1$

$$\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}=\frac{(2n)^2-1}{(2n)^2}<1,$$

weil $(2n)^2-1<(2n)^2$.

Daraus folgt wegen (4)

$$p^2<\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{1}{51}<\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{50}=\frac{3}{200}=\frac{6}{400},\ \text{also}$$

$$p<\sqrt{\frac{6}{400}}=\frac{1}{20}\sqrt{6}<\frac{1}{20}\cdot2{,}45<0{,}123. \qquad (5)$$

Aus (3) und (5) erhalten wir $0{,}1<p<0{,}123$, womit die Behauptung bewiesen ist.

von Prof. Dr. Th. Riedrich

▲808 Man überzeugt sich leicht davon, daß es genügt, die Eigenschaft (3) unter den Voraussetzungen zu beweisen, die in der Zeichnung angenommen wurden. Der Satz von Pythagoras liefert sofort die Beziehung $y'=\sqrt{a^2-x^2}$ und, wenn t den Winkel der Strecke QP' gegen die positive x-Richtung bezeichnet, gilt $\tan t=\frac{y'}{x}$. Offensichtlich ist nun $|QP'|=a-e\cos t$.

Aus der bekannten Beziehung

$\cos t=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$ erhalten wir durch Einsetzen von $\tan t$ und von y' die Gleichung

$$\cos t=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y'}{x}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+(y')^2}}=\frac{x}{a}.$$

Also ist $|QP'|=a-\frac{ex}{a}$. Zum anderen ist (wieder nach Pythagoras) $|SP|=\sqrt{(x-e)^2+y^2}$, woraus wir unter Verwendung von (1) und (2) die Gleichungen

$$|SP|=\left[(x-e)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[(x^2-2ex+e^2)+(a^2-e^2)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[a^2-2ex+\frac{e^2}{a^2}x^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\left(a-\frac{ex}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left|a-\frac{ex}{a}\right|=a-\frac{ex}{a}$$

erhalten (letztere Gleichung wegen $0<x<a$ und $0<e<a$), woraus die behauptete Gleichheit $|SP|=|QP'|$ hervorgeht.

Lösungen zu: aufgepaßt — nachgedacht — mitgemacht

Mathematik und Sport

5▲913 In der ersten Reihe standen genau 82 Zuschauer; das waren doppelt soviel wie in der zweiten. In der zweiten Reihe standen demnach $82:2=41$ Zuschauer. In der dritten Reihe standen dreimal soviel Zuschauer wie in der ersten, also $3\cdot 82=246$ Zuschauer. An der Sprungschanze standen insgesamt

$82+41+246=369$ Zuschauer.

5▲914 Wir rechnen $119{,}14\text{ m}-13{,}72\text{ m}-14{,}02\text{ m}=91{,}40\text{ m}$; der Abstand zwischen der ersten und zehnten Hürde beträgt 91,40 m. Zwischen den zehn Hürden liegen neun gleichlange Zwischenräume. Aus $91{,}40\text{ m}:9\approx 10\text{ m}$ folgt, daß der Abstand zwischen zwei benachbarten Hürden rund 10 m beträgt.

5▲915 $V=a\cdot b\cdot c$, $V=2{,}75\cdot 9{,}60\cdot 0{,}40\text{ m}^3=10{,}56\text{ m}^3$; es sind rund $10\frac{1}{2}\text{ m}^3$ Sand aufzuschütten.

5▲916 $884\,000:26=34\,000$; bei jedem Spiel waren durchschnittlich 34000 Zuschauer zugegen.

$5\cdot 26=130<140<6\cdot 26=156$;

die Torquote bewegt sich zwischen fünf und sechs Toren je Spiel.

5▲917 Die Punktzahlen 9,3 und 9,0 fallen weg. $(9{,}1+9{,}2):2=9{,}15$; es wurden 9,15 Punkte erreicht.

5▲918 Die Anzahl der Klimmzüge kann nur durch eine natürliche Zahl angegeben werden. Die Aufgabe $10:3$ ist im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar. Deshalb gilt $(10:5)\cdot 2=4$ und $4\cdot 3=12$; Uwe schaffte zehn, Hans 12 Klimmzüge.

6▲919 Frauen müssen 100 m in 14,6 s zurücklegen, d. h. in 1 s wenigstens $\frac{100}{14{,}6}$ m. In $(14{,}6-12{,}8)\text{ s}=1{,}8\text{ s}$ (nach Erreichen des Zieles durch Männer) müssen sie noch $\frac{1{,}8\cdot 100}{14{,}6}\text{ m}\approx 12{,}3\text{ m}$ laufen.

6▲920 $\frac{5}{6}\cdot 192{,}27\text{ m}\approx 160{,}22\text{ m}$.

6▲921 Wir nehmen eine lexikographische Anordnung für drei der vier Sportler vor:

A B C; A C B;
B A C; B C A;
C A B; C B A.

Jede dieser sechs Möglichkeiten für die Lauffolge läßt sich mit dem vierten Sportler D derart kombinieren, daß D einmal vor dem ersten Läufer, einmal vor dem zweiten, einmal vor dem dritten und einmal nach dem dritten eingesetzt wird. Wir erhalten insgesamt also $6\cdot 4=24$ Möglichkeiten.

6▲922 Nach drei Schritten (zwei Schritte vor, einen zurück) ist der Sportler um genau einen Schritt, also um 50 cm vorangekommen. Aus $3000:50=60$ und $60\cdot 3=180$ folgt, daß der Sportler bis zum Ziel 180 Schritte machen muß.

6▲923 Bezeichnet man die Ringzahlen der Sportschützen mit den Anfangsbuchstaben ihrer Namen, so erhält man aus den Angaben der Aufgabe folgendes:

(1) $J>G$,
(2) $E+R=G+J$,
(3) $E+J<G+R$.

Aus (2) und (3) ergibt sich durch Addition $2E+J+R<2G+J+R$, also $E<G$. Hieraus und aus (2) folgt $R-J=G-E>0$, also $J<R$.

Daher gilt $R>J>G>E$.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Klaus Ampler

▲924a Aus $t=2\text{ h }4\text{ min }8\text{ s}=7448\text{ s}$ und $s=95\text{ km}$ folgt $v=\frac{s}{t}=\frac{95}{7448}\frac{\text{km}}{\text{s}}$

$$=\frac{95\cdot 60\cdot 60}{7448}\frac{\text{km}}{\text{h}}\approx 45{,}918\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Es wurde eine durchschnittliche Geschwindigkeit von rund $45{,}918\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und somit das Trainingsvorhaben noch nicht erreicht.

▲924b Der Bahnradsportler legt eine Strecke von 7,26 m bei einer Umdrehung der Tretkurbel, also 500 m bei x Umdrehungen der Tretkurbel zurück, und es gilt

$$x=\frac{500}{7{,}26}\text{ Umdrehungen}\approx 68{,}87\text{ Umdrehungen}.$$

In 36,8 s schaffte der Sportler 68,87 Umdrehungen der Tretkurbel, in 1 s somit y Umdrehungen, und es gilt

$$y=\frac{68{,}87}{36{,}8}\frac{\text{U}}{\text{s}}.$$

Die Trittfrequenz beträgt somit

$$T=\frac{6887\cdot 60}{3680}\frac{\text{U}}{\text{min}}\approx 112{,}3\frac{\text{U}}{\text{min}}.$$

▲924c Bei einer Übersetzung von 91,1 Zoll legt der Bahnradsportler bei einer vollen Umdrehung der Tretkurbel 7,26 m, bei der Übersetzung von 91,8 Zoll legt er x m zurück, und es gilt

$$x=\frac{7{,}26\cdot 91{,}8}{91{,}1}\frac{\text{m}}{\text{U}}\approx 7{,}32\frac{\text{m}}{\text{U}}.$$

Bei der vorgegebenen Trittfrequenz werden in 1 min somit $120\cdot 7{,}32\text{ m}=878{,}40\text{ m}$, in y min werden 200 m durchfahren, und es gilt

$$y=\frac{200}{878{,}4}\text{ min}\approx 13{,}7\text{ s}.$$

Weiterhin gilt

$$v=\frac{s}{t}=\frac{200\text{ m}}{13{,}7\text{ s}}=\frac{0{,}2\cdot 3600}{13{,}7}\frac{\text{km}}{\text{h}}\approx 52{,}6\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Zum Durchfahren von 200 m benötigte der Bahnradsportler rund 13,7 s; er fuhr dabei mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von rund $52{,}6\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Lösungen zu: Welche — wie viele Möglichkeiten gibt es?
(Heft 6/71, 1/72)

9. Es gibt $\binom{90}{5}=43\,949\,268$ Tipmöglichkeiten.
10. Es werden $1+2+3+4=\binom{5}{2}=10$ Handschläge gewechselt.
11. Die Gläser klingen $1+2+\ldots+7=\binom{8}{2}=28$mal.
12. Es gibt $1+2+3+4+5=\binom{6}{2}=15$ Verbindungsgeraden.
13. Auf $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{3}=21\cdot 10=210$ Arten.
14. Es gibt $\binom{15}{3}\cdot\binom{10}{2}$ Möglichkeiten.
15. Nach der ersten Lösungsart erhalten wir

$$\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9}=$$

$$=2\cdot\left[\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}\right]$$

$=2\cdot(1+9+36+84+126)$
$=2\cdot 256=512$ Möglichkeiten.

Nach der zweiten Lösungsart erhalten wir folgende Ergebnisse:

0 Felder – 1 Möglichkeit
(„das leere Bild")
1 Feld – 2 Möglichkeiten
(„besetzt", „frei", in Zeichen b, f, also b und f)
2 Felder – 4 Möglichkeiten
(bb, bf, fb, ff)
3 Felder – 8 Möglichkeiten
(bbb, bbf, bfb, bff, fbb, fbf, ffb, fff) usw.

1, 2, 4, 8,... ist die Folge der Zweierpotenzen, wobei $2^0=1$ gesetzt wird.

Wir erhalten also $2^9=512$ Möglichkeiten.

16. Auf $\binom{8}{5}=\binom{8}{3}=56$ Arten.
17. Auf $2^3=8$ (allgemein r^k) Arten.
18. Auf 4 Arten (allgemein $\binom{r+k-1}{k}$).
19. Es gibt $26^2\cdot 10^2\cdot 10^2=6\,760\,000$ Möglichkeiten.
20. $\binom{n}{3}$ Dreiecke.

5▲810 936:4=234; auf jedem Beet wurden 234 Pflanzen gesetzt. 234:9=26; auf einem der Beete gingen 26 Pflanzen ein. $26 \cdot 15=390$; es gehen voraussichtlich 390 Erdbeeren verloren.

5▲811

		Quersumme	
	11	Quersumme	2
+	23	„	5
+	29	„	11
+	41	„	5
+	43	„	7
+	47	„	11
+	61	„	7
+	67	„	13
+	83	„	11
+	89	„	17
	494		

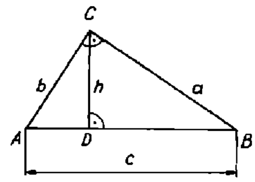
W 5 ■ 812 Abbildung a) Das Quadrat $ABCD$ wurde an der Geraden BC als Symmetrieachse gespiegelt. A' ist Bildpunkt von A, D' Bildpunkt von D. $\overline{CD}=\overline{CD'}$, $\overline{BA}=\overline{BA'}$, $DD' \perp BC$, $AA' \perp BC$.
Abbildung b) Das Quadrat $ABCD$ wurde in Richtung der Geraden AB um den Verschiebungspfeil $\vec{AB}$ verschoben. B ist Bildpunkt von A, B' Bildpunkt von B, C Bildpunkt von D, C' Bildpunkt von C.
Abbildung c) Das Quadrat $ABCD$ wurde um B als Drehzentrum um einen Drehwinkel von 90° im mathematisch negativen Sinne gedreht. C ist Bildpunkt von A, D' Bildpunkt von D, C' Bildpunkt von C.

W 5 ■ 813 Gegeben: Länge: $a=325$ m,
Breite: $b=25$ m,
Höhe: $c=4{,}3 \text{ m}-0{,}5 \text{ m}=3{,}8$ m
Gesucht: $V=a \cdot b \cdot c=30\,875 \text{ m}^3 \approx 30\,900 \text{ m}^3$

* 5 * 814 Die Abfahrtzeiten in Pillnitz lauten 4.38 Uhr, 4.53 Uhr, 5.08 Uhr, 5.23 Uhr, 5.38 Uhr usw. Die zugehörigen Ankunftszeiten in Radebeul (89 Minuten später) sind 6.07 Uhr, 6.22 Uhr, 6.37 Uhr, 6.52 Uhr, 7.07 Uhr usw. Der um 8.35 Uhr in Radebeul abfahrende Wagenzug trifft um 10.04 Uhr in Pillnitz ein.
Der erste Wagenzug des Gegenverkehrs, dem er begegnet, trifft um 8.37 Uhr in Radebeul ein und ist demnach um 7.08 Uhr in Pillnitz abgefahren; der letzte Wagenzug des Gegenverkehrs, dem er begegnet, fährt um 9.53 Uhr in Pillnitz ab. Zwischen diesen beiden Wagenzügen des Gegenverkehrs liegt bezüglich ihrer Abfahrtzeiten eine Zeitspanne von 165 Minuten. Der in Radebeul abfahrende Wagenzug trifft demnach auf zwölf Wagenzüge des Gegenverkehrs.

* 5 * 815 Aus $8 \cdot 0{,}1$ mm = 0,8 mm und $48:0{,}8=60$ folgt, daß 60 Bogen A 4 zu Notizzetteln zerschnitten werden müssen.

6▲816 Für den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC gilt einerseits $A=\frac{1}{2}ab$, andererseits aber auch $A=\frac{1}{2}ch$. Durch Gleichsetzen erhalten wir daraus $\frac{1}{2}c \cdot h=\frac{1}{2}a \cdot b$ bzw. $h=\frac{a \cdot b}{c}$.

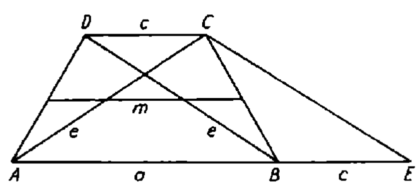


6▲817 Aus 87 ml − 75 ml = 12 ml und 12 ml : 50 = 0,24 ml folgt, daß jede der Stahlkugeln ein Volumen $V=0{,}24$ ml $=0{,}24 \text{ cm}^3=240 \text{ mm}^3$ besitzt.

W 6 ■ 818 Aus $v=\frac{s}{t}=\frac{200 \text{ m}}{10 \text{ s}}=20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ folgt $v=0{,}02 \cdot 60 \cdot 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}=72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Nein, der Fahrer hat die zulässige Höchstgeschwindigkeit von 50 km · h^{-1} überschritten.

W 6 ■ 819 Aus $A_0=6a^2$ und $V=a^3$ folgt wegen $A_0=V$ die Gleichung $a^3=6a^2$. Wegen $a>0$ gilt somit $a=6$. Ein Würfel mit einer Kantenlänge von 6 cm erfüllt die Bedingung der Aufgabe.

* 6 * 820 In dem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ sind die Diagonalen gleich lang; es gilt also $\overline{AC}=\overline{BD}=e$. Wir ziehen durch C eine Parallele zu BD, ihr Schnittpunkt mit der Geraden AB sei E. Das Viereck $BECD$ ist dann ein Parallelogramm, und es gilt $\overline{BE}=\overline{CD}=c$ und $\overline{EC}=\overline{BD}=e$.



Für die Seiten des Dreiecks $\triangle AEC$ gilt die Beziehung
$$\overline{AC}+\overline{EC}>\overline{AE} \text{ bzw. } 2e>a+c.$$
Wegen $m=\frac{1}{2}(a+c)$ folgt aus der Forderung $m=e$ die Gleichung $2e=a+c$, die nicht erfüllbar ist, da stets $2e>a+c$ gilt.

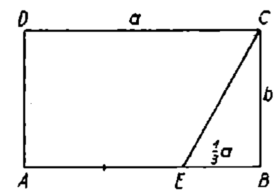
* 6 * 821 Da das Zahlenrätsel nur echte Brüche enthält, folgt aus der Additionsaufgabe der letzten Spalte ◪ = 1. Nunmehr folgt aus der letzten Zeile ◫ = 2. Gemäß der ersten Spalte muß eine von 0 und 1 verschiedene natürliche Zahl k existieren, so daß ⧅ · k = ▚ und ◪ · k − ◪ = ◫, also $k-1=2$ gilt.
Hieraus folgt $k=3$. Wegen ⧅ > 2 und ⧅ · 3 = ▚ muß ⧅ = 3 und ▚ = 9 sein. Aus der ersten Zeile folgt nunmehr ⊟ = 7, und aus der zweiten Zeile folgt ■ = 4.

$$2\frac{1}{3} : 3=\frac{7}{9}$$
$$- \quad \cdot \quad +$$
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$
$$2\frac{2}{9}-1=1\frac{2}{9}$$

7▲822 4 t 300 kg = 4 300 kg. Angenommen, die Schüler der Schule C haben x kg Altpapier gesammelt, dann gilt
$$(840+x)+(x-650)+x=4\,300,$$
$$3x+190=4\,300,$$
$$3x=4\,110,$$
$$x=1\,370.$$

Schule	Altpapier in kg	Geldbetrag in Mark
A	2 210	331,50
B	720	108,00
C	1 370	205,50

7▲823 Da der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ gleich $a \cdot b$ und der des Dreiecks EBC gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a \cdot b=\frac{1}{6}ab$ ist, gilt für den Flächeninhalt des Trapezes $AECD$ somit $A=ab-\frac{1}{6}ab=\frac{5}{6}ab$.



W 7 ■ 824 Die kleinste, von Null verschiedene, durch 3, 4, 6 und 8 teilbare natürliche Zahl ist 24. Die nächst kleinere Zahl (48) ist bereits größer als 30. An der Leistungskontrolle waren also 24 Schüler beteiligt.
Aus $\frac{1}{3} \cdot 24=8$ und $\frac{1}{4} \cdot 24=6$ und $\frac{1}{6} \cdot 24=4$ und $\frac{1}{8} \cdot 24=3$ und $8+6+4+3=21$ folgt, daß 21 Schüler die Aufgaben fehlerhaft hatten. Demnach hatten 3 Schüler alle Aufgaben richtig.

W 7 ■ 825 Klaus habe n-mal die Note 1 und k-mal die Note 2 erhalten. Dann gilt $\frac{n \cdot 1+k \cdot 2}{n+k}=1{,}4$. Durch Umformungen erhalten wir daraus $n+2k=1{,}4n+1{,}4k$,
$$0{,}6k=0{,}4n,$$
$$3k=2n.$$
Die kleinsten natürlichen Zahlen k und n, die diese Gleichung erfüllen, lauten $k=2$ und $n=3$, also $n+k=5$. Klaus hat mindestens fünf Klassenarbeiten geschrieben; bei fünf Klassenarbeiten erhielt er dreimal die Note 1, zweimal die Note 2.

* 7 * 826 Es wurden $4 \cdot 3=12$ Spiele ausgetragen und damit insgesamt 12 Punkte vergeben. Axel habe a, Bruno b, Dieter d und Ernst e Punkte erzielt, dann gilt:
$$b+d=a+e+1. \quad (1)$$
$$d+e=7. \quad (2)$$
$$b+e=a+d+5. \quad (3)$$
Aus (1)−(3) folgt
$$d-e=e-d-4 \text{ bzw. } e-d=2. \quad (4)$$
Aus (2) und (4) folgt $e=4{,}5$ und $d=2{,}5$.
Durch Einsetzen der bereits errechneten Werte in (1) erhalten wir
$$b-a=3. \quad (5)$$

Fernerhin gilt, da insgesamt 12 Punkte vergeben wurden,

$$b+a=5. \qquad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt $b=4$ und $a=1$.

Name	Punktzahl
Axel	1
Bruno	4
Dieter	2,5
Ernst	4,5

*7*827 Die sechs aufeinanderfolgenden Zahlen seien n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ und $n+5$. Dann gilt

$z_1=100(n+2)+10(n+1)+n=111n+210$,

$z_2=100(n+3)+10(n+4)+(n+5)$
$=111n+345$.

Daraus folgt $z_2-z_1=135$ und
$z_1+z_2=222n+555=111(2n+5)$.

8▲828 1. Von den fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen

$$p-2,\ p-1,\ p,\ p+1,\ p+2$$

ist genau eine durch 5 teilbar. Das kann aber nicht die Zahl p sein, da p Primzahl und größer als 5 ist. Also ist einer der vier Faktoren des Produkts durch 5 teilbar: $5 \mid P$.

2. Die Primzahl p ist größer als 5, also eine ungerade Zahl; daher sind die beiden Zahlen $p-1$ und $p+1$ gerade. Nun ist von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen stets eine durch 2 und die andere wenigstens durch 4 teilbar. Daraus folgt, daß das Produkt P durch 8 teilbar ist: $8 \mid P$.

3. Die Primzahl p ist nicht durch 3 teilbar, da sie größer als 5 ist. Daher sind entweder die beiden Zahlen $p-2$ und $p+1$ oder die beiden Zahlen $p-1$ und $p+2$ durch 3 teilbar, mithin gilt $9 \mid P$.

4. Das Produkt P ist also durch 5, 8 und 9 teilbar. Da diese Zahlen paarweise teilerfremd sind, ist das Produkt P auch durch $5\cdot 8\cdot 9=360$ teilbar: $360 \mid P$, w.z.b.w.

Bemerkung: $a \mid P$ bedeutet, daß a Teiler von P ist.

8▲829 Da die Quersumme der Zahl z gleich 300 ist, ist z durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Wäre nun z gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl, also $z=t^2$, so wäre auch t durch 3 teilbar. Dann wäre aber z durch 9 teilbar, was nicht möglich ist, da die Quersumme von z nicht durch 9 teilbar ist. Daher ist die Zahl z niemals eine Quadratzahl.

W 8 ■ 830 Es seien
x die Anzahl der Goldmedaillen,
y die Anzahl der Silbermedaillen,
z die Anzahl der Bronzemedaillen,
die die DDR erhielt.

Dann gilt $x+y+z=32$, (1)

$$y=\frac{39}{3}=13, \qquad (2)$$

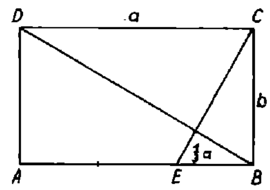
$$\frac{37}{6}<z<\frac{37}{5}. \qquad (3)$$

Aus (3) folgt $6\frac{1}{6}<z<7\frac{2}{5}$,

also gilt, da z ganzzahlig ist, $z=7$.

Aus $y=13$, $z=7$ folgt wegen (1) $x=12$. Die DDR erhielt also 12 Goldmedaillen, 13 Silbermedaillen und 7 Bronzemedaillen.

W 8 ■ 831 ≦ Wir zeichnen die Diagonale $\overline{BD}$ des Vierecks $ABCD$ (vgl. die Abb.). Nach Voraussetzung gilt $\overline{AE}:\overline{AB}=\overline{AH}:\overline{AD}=2:3$. Daraus folgt nach der Umkehrung des Strahlensatzes $EH \parallel BD$. Ferner gilt $\overline{CF}:\overline{CB}=\overline{CG}:\overline{CD}=2:3$ und folglich auch $FG \parallel BD$. Aus $EH \parallel BD$ und $FG \parallel BD$ folgt $EH \parallel FG$. In analoger Weise läßt sich nachweisen, daß auch $EF \parallel HG$ gilt, das heißt, das Viereck $EFGH$ ist ein Parallelogramm.



*8*832 Für $p=2$ erhalten wir $z=2^2+1=5$, also ist in diesem Fall z eine Primzahl.
Nun ist jede von 2 verschiedene Primzahl p eine ungerade Zahl; also ist auch p^2 eine ungerade Zahl und $z=p^2+1$ eine gerade Zahl. Wegen $z>2$ kann daher in diesem Fall z nicht Primzahl sein. Es gibt also genau eine Primzahl p, nämlich $p=2$, für die die Zahl $z=p^2+1$ eine Primzahl ist.

*8*833 Es seien
x die Anzahl der 50-Pf-Stücke,
y die Anzahl der 20-Pf-Stücke,
z die Anzahl der 10-Pf-Stücke,
u die Anzahl der 5-Pf-Stücke,
v die Anzahl der 1-Pf-Stücke,

die beim Wechseln des Betrages von 1 M benötigt werden.
Dann gilt

$$50x+20y+10z+5u+v=100, \qquad (1)$$

wobei x, y, z, u, v natürliche Zahlen mit $x\leqq 2$, $y\leqq 5$, $z\leqq 10$, $u\leqq 20$, $v\leqq 100$ sind.
Wir könnten nun eine Tabelle aufstellen, aus der alle Lösungen von (1) abzulesen sind; das ist aber sehr umständlich, da die Anzahl der Lösungen sehr groß ist.
Wir gehen daher anders vor und beachten zunächst, daß die Summen $5u+v$ und $20y+10z$ durch 10 teilbar sind und daher nur die Werte 0, 10, 20, ..., 100 annehmen können. Ferner kann x nur gleich 0, 1 oder 2 sein.
Nun hat die Gleichung $5u+v=0$ genau eine Lösung, die den obigen Bedingungen entspricht, nämlich $u=v=0$;
die Gleichung $5u+v=10$ genau 3 Lösungen, nämlich $u=0$, $v=10$; $u=1$, $v=5$; $u=2$, $v=0$;
die folgende Tabelle zeigt jeweils die Anzahl der Lösungen, wobei auch die Anzahl der Lösungen für die Gleichung $20y+10z=100$, 90, 80 usw. angegeben ist.

$5u+v$	Anzahl d. Lösungen	$20y+10z$	Anzahl d. Lösungen
0	1	100	6
10	3	90	5
20	5	80	5
30	7	70	4
40	9	60	4
50	11	50	3
60	13	40	3
70	15	30	2
80	17	20	2
90	19	10	1
100	21	0	1

Die Anzahl der Lösungen der Gleichung (1) ist also gleich

$$\begin{aligned} n=\ &1\cdot(21+19)+2\cdot(17+15)+3\cdot(13+11)\\ &+4\cdot(9+7)+5\cdot(5+3)+6\cdot 1\\ &+1\cdot(11+9)+2\cdot(7+5)+3\cdot(3+1)+1; \end{aligned} \qquad (2)$$

dabei stehen in der ersten und zweiten Zeile der rechten Seite dieser Gleichung die Anzahl der Lösungen für $x=0$, in der dritten Zeile für $x=1$ und für $x=2$ (nur 1 Lösung). Denn im Falle $20y+10z=0$ oder 10 erhalten wir jeweils eine Lösung für diese Gleichung und 21 Lösungen für die Gleichung $5u+v=100$ sowie 19 Lösungen für die Gleichung $5u+v=90$ usw.
Aus (2) erhalten wir weiter
$n=40+64+72+64+40+6+20+24+12+1$,
$n=343$.
Es gibt also genau 343 verschiedene Möglichkeiten, den Betrag von 1 M zu wechseln.

9▲834 Wir erhalten

$$c^2=a^2+b^2=a^2+\left[\frac{(a-1)(a+1)}{2}\right]^2$$

$$=a^2+\frac{(a^2-1)^2}{4}=\frac{1}{4}(a^4+2a^2+1)=\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{a^2-1}{2}+1\right)^2=\left[\frac{(a-1)(a+1)}{2}+1\right]^2$$

$$=(b+1)^2,$$

womit bewiesen ist, daß $c=b+1$ eine natürliche Zahl ist.
Ferner erhalten wir für
$a=3$: $b=4$, $c=5$, also $3^2+4^2=5^2$;
$a=5$: $b=12$, $c=13$, also $5^2+12^2=13^2$;
$a=7$: $b=24$, $c=25$, also $7^2+24^2=25^2$;
$a=9$: $b=40$, $c=41$, also $9^2+40^2=41^2$ usw.
Bemerkung: Wir haben damit eine Reihe von pythagoreischen Zahlen erhalten, d. h. von natürlichen Zahlen a, b, c die von Null verschieden sind und für die

$$a^2+b^2=c^2$$

gilt. Wir haben aber nicht alle pythagoreischen Zahlen erhalten; denn mit a, b, c sind auch ka, kb, kc pythagoreische Zahlen, wobei k eine natürliche Zahl ist; z. B. sind auch die Zahlen 6, 8 und 10 pythagoreische Zahlen.
Es gibt aber noch weitere solcher Zahlen, z. B. die Zahlen 8, 15 und 17.
Allgemein erhalten wir alle pythagoreischen Zahlen aus den Gleichungen

$$a=uv, \qquad (1)$$

wobei u und v beliebige ungerade natürliche Zahlen mit $u>v$ sind,

$$b=\frac{u^2-v^2}{2}, \qquad (2)$$

$$c=\frac{u^2+v^2}{2}. \qquad (3)$$

Dann gilt nämlich

$$a^2+b^2=u^2v^2+\frac{(u^2-v^2)^2}{4}=\frac{1}{4}(4u^2v^2+u^4-2u^2v^2+v^4)$$
$$=\frac{1}{4}(u^4+2u^2v^2+v^4)=\frac{1}{4}(u^2+v^2)^2=c^2.$$

Für $u=7$, $v=5$ erhalten wir z. B. $a=35$, $b=12$, $c=37$, und es gilt $35^2+12^2=37^2$.

Weiteres zu dem Problem der pythagoreischen Zahlen finden wir in dem folgenden Buch:

W. Lietzmann: Der Pythagoreische Lehrsatz. Mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. 7. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner 1965.

W 9 ■ 835 a) Es seien n und $n+1$ die gesuchten aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Dann gilt

$$(n+1)^3-n^3=2611, \qquad (1)$$

also

$$3n^2+3n+1=2611,$$
$$3n^2+3n-2610=0,$$
$$n^2+n-870=0. \qquad (2)$$

Diese quadratische Gleichung hat genau eine positive Lösung, nämlich

$$n=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+870}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3481}{4}}$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{59}{2}=29.$$

Die beiden gesuchten natürlichen Zahlen sind also 29 und 30. Es gilt $30^3-29^3=27000-24389=2611$.

Bemerkung: Die Gleichung (2) läßt sich auch ohne Anwendung der Lösungsformel für die quadratische Gleichung lösen. Wir erhalten nämlich aus (2)

$n(n+1)=870$. Nun gilt
$n^2<n(n+1)<(n+1)^2$, also
$n^2<870<(n+1)^2$. Daraus folgt
$n<30$ und $n+1>29$,

also $n=29$ wie oben. Ein solches Verfahren führt insbesondere dann zum Ziel, wenn wir nicht eine quadratische Gleichung für n, sondern eine Gleichung höheren Grades erhalten, wie das bei der Aufgabe b) der Fall ist.

b) Es seien n und $n+1$ die gesuchten natürlichen Zahlen. Dann gilt

$$(n+1)^4-n^4=39775,$$
$$[(n+1)^2+n^2]\,[(n+1)^2-n^2]=39775,$$
$$(2n^2+2n+1)(2n+1)=39775. \qquad (3)$$

Nun gilt aber

$$39775=(2n^2+2n+1)(2n+1)>2n^2\cdot 2n=4n^3,$$

also $n^3<\frac{39775}{4}<9944$, d. h. $n<22$.

Andererseits gilt

$$39775=(2n^2+2n+1)(2n+1)<(2n^2+4n+2)(2n+2)=4(n+1)^3,$$

also

$$(n+1)^3>\frac{39775}{4}>9943, \text{ d. h. } n+1>21, \text{ also}$$
$$n>20. \qquad (5)$$

Aus (4) und (5) folgt, da n eine ganze Zahl ist, $n=21$.

Die beiden gesuchten natürlichen Zahlen sind also 21 und 22. Es gilt $22^4-21^4=234256-194481=39775$.

W 9 ■ 836 Nach dem Strahlensatz gilt

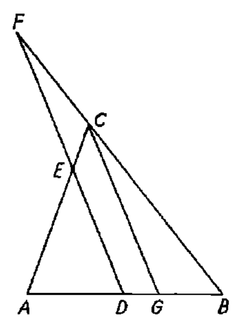
$$\frac{\overline{CG}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AG}}{\frac{c}{2}}=\frac{2\cdot\overline{AG}}{c}$$

und $\frac{\overline{CG}}{\overline{FD}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{BG}}{\frac{c}{2}}=\frac{2\cdot\overline{BG}}{c}$. Daraus folgt

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{ED}}+\frac{\overline{CG}}{\overline{FD}}=\frac{2\cdot\overline{AG}+2\cdot\overline{BG}}{c}=\frac{2(\overline{AG}+\overline{BG})}{c}$$

$=\frac{2c}{c}=2$, also $\overline{CG}\left(\frac{1}{\overline{ED}}+\frac{1}{\overline{FD}}\right)=2$ und somit

$$\overline{CG}=\frac{2\cdot\overline{ED}\cdot\overline{DF}}{\overline{ED}+\overline{DF}}, \text{ w. z. b. w.}$$



*9*837 Es seien x bzw. y der Konsumtionsfonds bzw. der Akkumulationsfonds am Ende des 9. Fünfjahrplans. Dann gilt, da das gesamte Nationaleinkommen zu diesem Zeitpunkt 373 Mrd. Rubel beträgt,

$$x+y=373. \qquad (1)$$

Zu Beginn des 9. Fünfjahrplans beträgt der Konsumtionsfonds, da er sich um 41% erhöht, $\frac{x}{1{,}41}$ und der Akkumulationsfonds $\frac{y}{1{,}375}$. Wir erhalten daher die Gleichung

$$\frac{x}{1{,}41}+\frac{y}{1{,}375}=266{,}3. \qquad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) können wir nun x und y bestimmen. Wir erhalten aus (1) $y=373-x$ und aus (2)

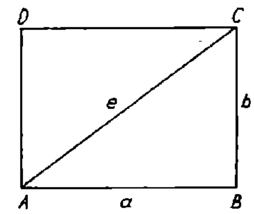
$$1{,}375x+1{,}41y=266{,}3\cdot 1{,}41\cdot 1{,}375, \text{ also}$$
$$1{,}375x+1{,}41\,(373-x)=516{,}3,$$
$$1{,}375x+525{,}9-1{,}41x=516{,}3,$$
$$0{,}035x=9{,}6$$
$$x=\frac{9{,}6}{0{,}035}\approx 274.$$

Ferner erhalten wir

$$y=374-277=99.$$

Am Ende des 9. Fünfjahrplanes beträgt also der Konsumtionsfonds rd. 274 Mrd. Rubel und der Akkumulationsfonds rd. 99 Mrd. Rubel.

*9*838 Es seien (vgl. die Abb.)



a die Maßzahl der Länge der Seite $\overline{AB}$,
b die Maßzahl der Länge der Seite $\overline{BC}$,
e die Maßzahl der Länge der Diagonale $\overline{AC}$
(jeweils in cm). Dann gilt nach den Voraussetzungen der Aufgabe

$$a=7-b \qquad (1)$$
$$e=b+2 \qquad (2)$$

und nach dem Satz des Pythagoras

$$a^2+b^2=e^2. \qquad (3)$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$(7-b)^2+b^2=(b+2)^2.$$

$b^2-18b+45=0$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$b_1=9+\sqrt{81-45}=9+6=15,$$
$$b_2=9-6=3.$$

Die Lösung $b_1=15$ entspricht wegen $a=7-b$ nicht den Bedingungen der Aufgabe.

Daher gilt $b=3$, $a=7-3=4$, $e=3+2=5$.

Die Probe zeigt, daß für $a=4$, $b=3$, $e=5$ die Gleichungen (1), (2) und (3) und damit die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Das Rechteck $ABCD$ hat also die Seitenlängen $\overline{AB}=4$ cm, $\overline{BC}=3$ cm und die Länge der Diagonale $\overline{AC}=5$ cm.

Lösungen zu alpha-heiter

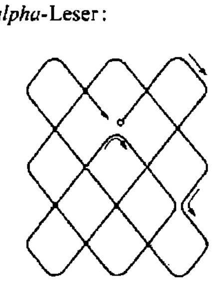
Kryptarithmetik

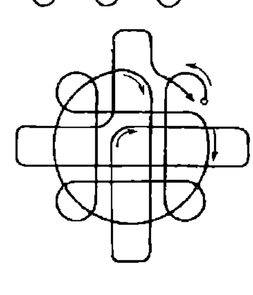
$144\cdot 12=1728$; $125\cdot 25=3125$;
$3125:25=125$

30241	34201	41230	43210
14203	10243	03214	01234
44444	44444	44444	44444

Figuren — in einem Zug zu umreißen

Lösung zu zwei Beispielen als Anleitung für die *alpha*-Leser:





Das vorliegende Material wurde entnommen aus: „Arbeitsmaterial zur Direktive des VIII. Parteitages der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands zum Fünfjahrplan für die Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR 1971 bis 1975", herausgegeben von der Parteihochschule „Karl Marx" beim ZK der SED, erschienen im Verlag *Die Wirtschaft*, Berlin.

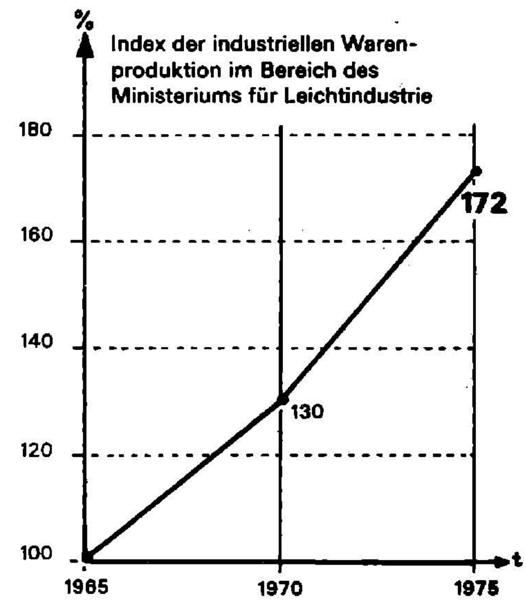
Preis der Mappe 6,20 M geblockt einseitig bedruckt. Auf 62 Tafeln wird mit mehrfarbigen Schaubildern und graphischen Darstellungen die Direktive zum Fünfjahrplan erläutert. Hervorragend für Unterricht, außerunterrichtliche Arbeit, insbesondere für Wandzeitungen geeignet.

Entwicklung der Leichtindustrie

Die industrielle Warenproduktion ist im Bereich des Ministeriums für Leichtindustrie auf mindestens 132%, die Arbeitsproduktivität auf etwa 135% gegenüber 1970 zu steigern.

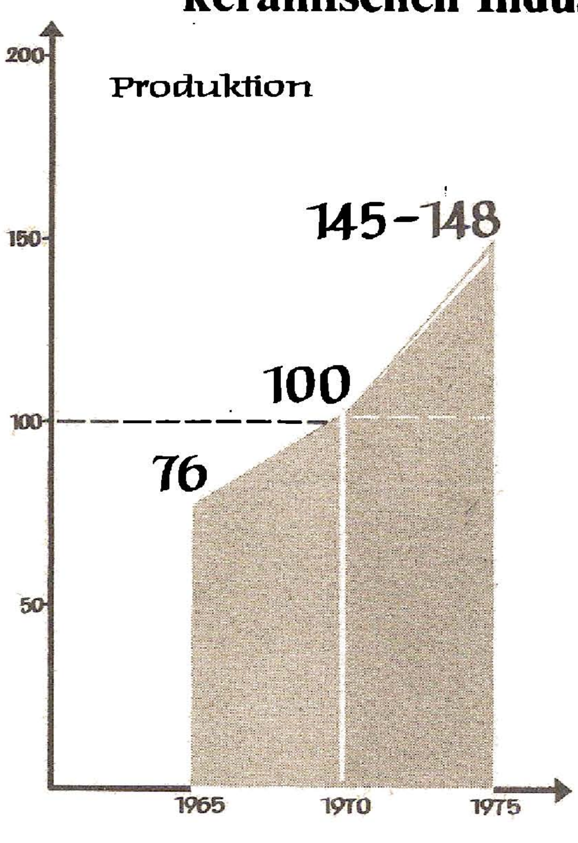
Ausgewählte industrielle Konsumgüter

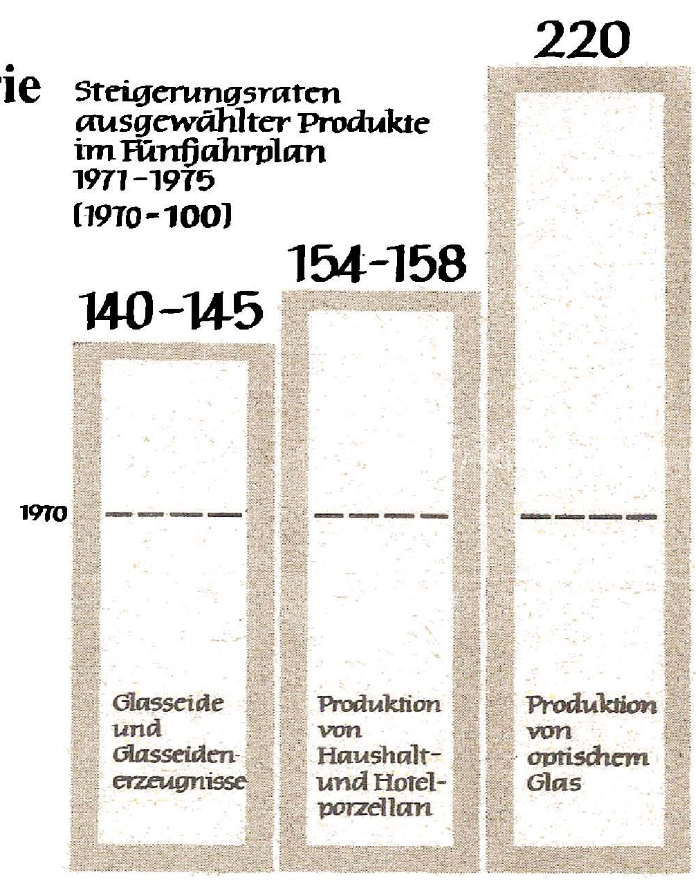
Erzeugnis	1965	1970	1975
Herrenoberbekleidung in Mio Stück	10,2	11,0	13,3
Damenoberbekleidung in Mio Stück	18,8	19,6	23,3
Kinderoberbekleidung in Mio Stück	16,6	18,7	22,1
Möbel in Mio Mark IAP	1760	2697	3800



Die Leichtindustrie hat die Produktion von Konsumgütern für die Versorgung der Bevölkerung und den Export qualitativ und quantitativ so zu steigern, daß eine ständig bessere Übereinstimmung mit dem wachsenden und sich verändernden Bedarf gesichert wird.

Entwicklung der Glas- und keramischen Industrie



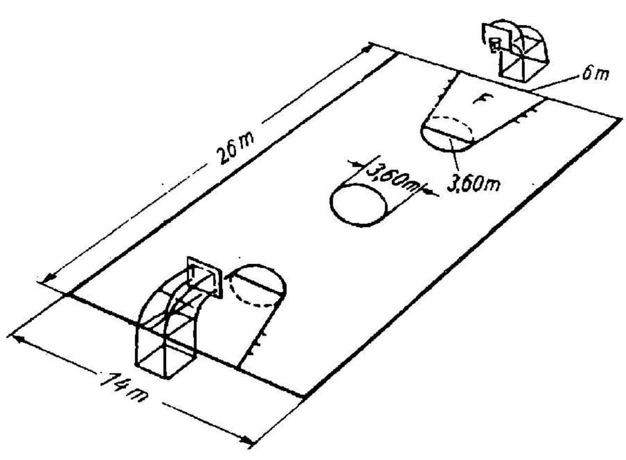


Ergebnisse bei Olympischen Spielen

1948 London: 1. USA 2. Frankreich 3. Brasilien
1952 Helsinki: 1. USA 2. UdSSR 3. Uruguay
1956 Melbourne: 1. USA 2. UdSSR 3. Uruguay
1960 Rom: 1. USA 2. UdSSR 3. Brasilien
1964 Tokio: 1. USA 2. UdSSR 3. Brasilien
1968 Mexiko: 1. USA 2. Jugoslawien 3. UdSSR
1972 München:

Aus der Geschichte des Basketballspiels

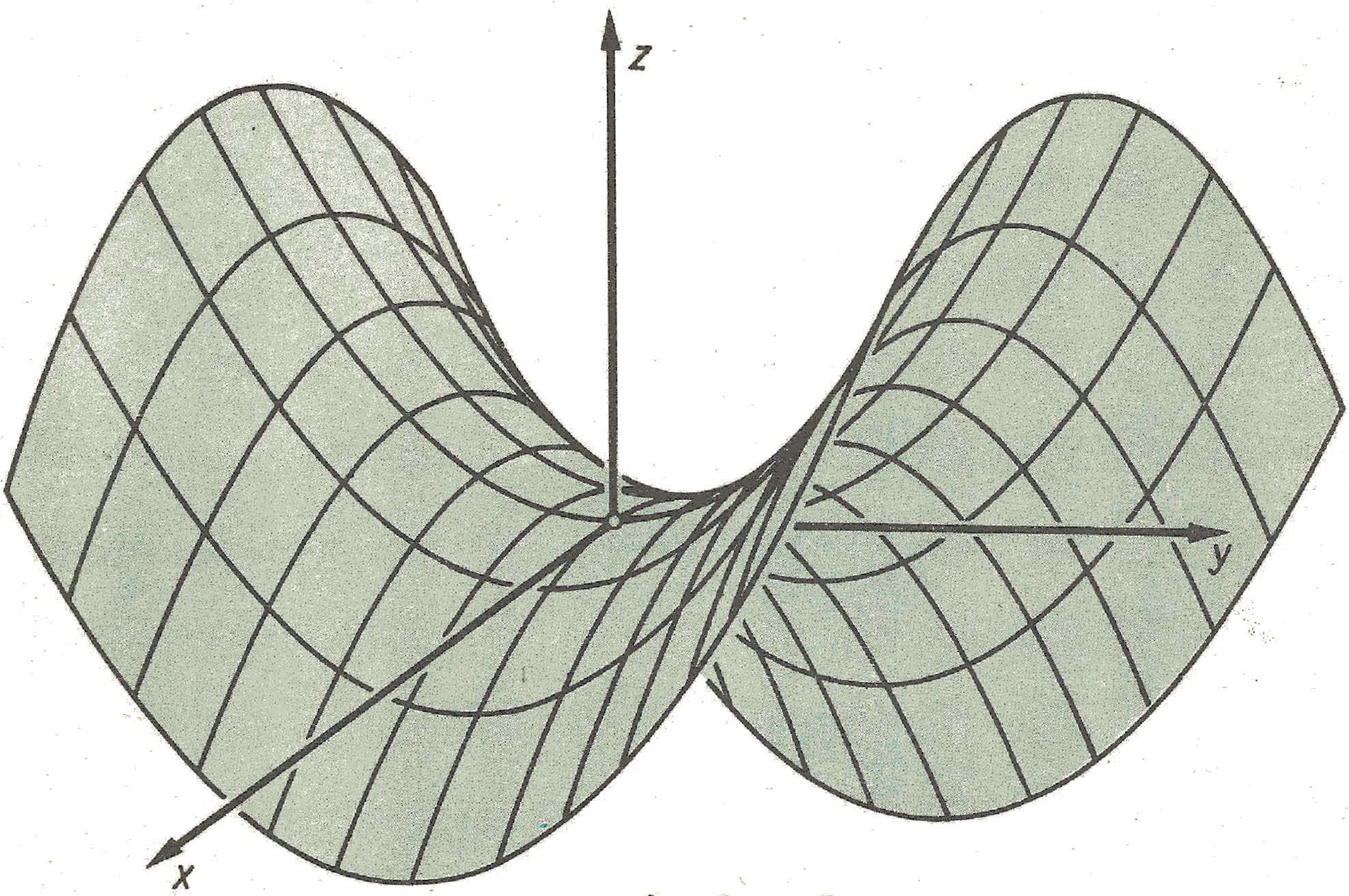
Seine ältesten Vorfahren finden wir schon vor fast 1000 Jahren in Frankreich. Als Körbe dienten damals flache, mit einem Loch versehene Steine, die an den die Spielflächen begrenzenden Mauern angebracht waren. – Die Grundlage des heutigen Basketballspiels schuf Prof. *Naismith* (USA) im Jahre 1894. Er ließ in einer Höhe von 10 Fuß = 3,05 m an der Galerie der Sporthalle Pfirsichkörbe befestigen, in die der Ball geworfen und stets wieder mit einer Leiter herausgeholt werden mußte. Die begeisterten Zuschauer auf den Rängen versuchten häufig, auf den Korb geworfene Bälle abzuwehren oder hineinzulenken, so daß später als Schutz vor dem „mitspielenden" Publikum Spielbretter angebracht wurden. Erst 1906 lösten Metallringe mit daran befestigten Korbnetzen die originellen Pfirsichkörbe ab.



Basketball (engl. basket, Korb), Hohlball aus Leder oder Kunststoff, 600 bis 650 g, Umfang 75 bis 80 cm; Spielzeit 2mal 20 min, Halbzeitpause 10 min, 5 Spieler (gegen 5 bis 7 Ersatzspieler austauschbar)

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



$$x^2-y^2+z=0$$

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
6. Jahrgang 1972
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31 059

4

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 74); O. Krötenheerdt/K. Vetter (Eigenfotos); Vignetten aus: Formeln — und was dann? (S. 75/76); J. Lehmann, Leipzig (S. 77); Vignette, zur Verfügung gestellt von H. Decker, Köln (S. 77); H. Worner, Berlin (S. 80/81); J. Lehman, Leipzig (S. 85); Vignette J. Uhlmann, Wandlitzsee (S. 87); J. Lehmann, Leipzig (S. 89); Postkarte, Foto A. Marušin (S. 90); J. Lehmann, Leipzig (S. VII.)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelblatt: Dr. E. Schröder (Dresden) · W. Fahr (Berlin)

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 15. Mai 1972

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

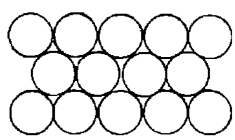
Mathematikstudenten im Forschungsstudium

Im Zuge der 3. Hochschulreform in der DDR wurde das Forschungsstudium als eine neue Ausbildungsform an Universitäten und Hochschulen eingeführt. Die besten Studenten erhalten die Möglichkeit, nach sechs- bzw. siebenjährigem Studium unter Einsparung des Diploms den akademischen Grad „Doktor eines Wissenschaftszweiges“ zu erwerben. Die Auswahl dieser Studenten erfolgt nach dem 3. bzw. 4. Studienjahr nach dem Leistungsprinzip, den gesellschaftlichen Erfordernissen und unter Berücksichtigung der sozialen Struktur der Bevölkerung. Die künftigen promovierten Kader, die durch das Forschungsstudium gehen und deren Einsatz in vielerlei Einrichtungen der Wissenschaft und Praxis vorgesehen ist, sollen wissenschaftlich hochqualifizierte sozialistische Persönlichkeiten sein. Bereits während ihrer Ausbildung sollen sie in Forschungskollektiven unter Anleitung erfahrener Wissenschaftler arbeiten lernen, und sie sollen solche charakterliche Eigenschaften und politische Fähigkeiten entwickeln, mit denen sie in die Lage versetzt werden, später selbst einmal sozialistische Kollektive leiten zu können.

Jeder Forschungsstudent arbeitet 3 Jahre nach einem Studienprogramm, das mit dem Forschungsprofil der jeweiligen Sektion im Einklang steht und zu dem eine vertiefte Ausbildung in Marxismus-Leninismus und eine Vervollkommnung in zwei Fremdsprachen gehören. Ein angemessenes Stipendium, welches sich von Jahr zu Jahr erhöht, und eventuell noch die Vergütung für 2 Stunden Lehrveranstaltungen in jeder Woche bewahren jeden Forschungsstudenten vor materiellen Sorgen.

In der Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle gibt es Forschungsstudenten in der Analysis und in der Numerischen Mathematik und einige wenige auch in der Algebra und in der Geometrie. Die Forschungsstudenten der beiden letztgenannten Disziplinen sind in erster Linie Lehrerstudenten, die nach ihrer Promotion zunächst als Lehrer etwa 3 Jahre schulpraktische Erfahrungen sammeln werden, um dann anschließend selbst in der Ausbildung und Weiterbildung von Mathematiklehrern tätig zu sein.

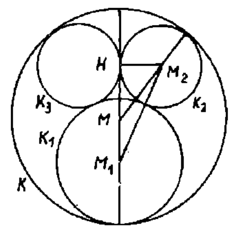
Einige dieser Forschungsstudenten bearbeiten in einem kleinen Kollektiv Probleme der zweidimensionalen geometrischen Kristallographie, und im Rahmen dieser Thematik werden gegenwärtig auch spezielle Kreislagerungsfragen in der Ebene behandelt. Wenn kongruente Kreise in der Ebene so gelagert werden sollen, daß keine 2 Kreise gemeinsame innere Punkte besitzen und daß der von den Kreisflächen bedeckte Teil der Ebene möglichst groß ist, so müssen die Kreise wie in Bild 1 angeordnet werden. Auch wenn diese Anordnung als sogenannte dichteste Kreislagerung von der Anschauung her fast selbstverständlich erscheint, muß sie streng begründet werden, und das haben Mathematiker getan. Sollen nun Kreise mit unterschiedlichen Radien in der Ebene in entsprechender Weise möglichst dicht gelagert werden, so sind Anordnungen, die wesentlich von den Radien abhängen, im allgemeinen nicht bekannt; sogar bei Verwendung von nur zwei unterschiedlichen Radien kennt man derartige Anordnungen nur für spezielle Verhältnisse der Radien.



Bei der Behandlung spezieller Kreislagerungsfragen sind wir am Rande unserer Arbeit auf mehrere interessante geometrische Aufgaben gestoßen, die mit den Mathematikkenntnissen der 10. Klasse, und bei gewissen Spezialisierungen der gegebenen Größen schon mit den Mathematikkenntnissen der 8. Klasse gelöst werden können. Mit einigen dieser Aufgaben möchten wir im folgenden die Leser der Schülerzeitschrift „alpha“ bekannt machen.

Aufgabe 1

Gegeben seien drei paarweise sich von außen berührende Kreise K_1, K_2, K_3 mit $r_1 \geqq r_2 = r_3$. Wie groß ist die Radiusmaßzahl r des flächenkleinsten Kreises K, welcher K_1, K_2, K_3 im Inneren enthält?



Lösung

Im Dreieck M_1M_2H (siehe Bild 2) erhält man als Maßzahl der Strecke M_1H nach dem Satz des Pythagoras

$$\sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2}.$$

Die Maßzahl der Strecke MH ist

$$\sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2} - (r - r_1),$$

und somit gilt im rechtwinkligen Dreieck MHM_2 die Beziehung
$(r-r_2)^2=r_2^2+(\sqrt{r_1^2+2r_1r_2}-(r-r_1))^2$.
Daraus folgt
$r\cdot(r_1-r_2+\sqrt{r_1^2+2r_1r_2})-(r_1^2+r_1r_2+r_1\cdot\sqrt{r_1^2+2r_1r_2})=0$, das heißt

$$r=\frac{r_1\cdot(r_1+r_2+\sqrt{r_1^2+2r_1r_2})}{r_1-r_2+\sqrt{r_1^2+2r_1r_2}}$$

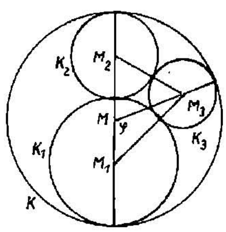
Erweitert man noch mit $r_1-r_2-\sqrt{r_1^2+2r_1r_2}$, so erhält man schließlich

$$r=\frac{r_1\cdot(2r_1+r_2+2\cdot\sqrt{r_1^2+2r_1r_2})}{4r_1-r_2}$$

Bemerkung:
Eine Spezialisierung der Aufgabe ergibt sich im Falle $r_1=r_2=r_3$; eine Verallgemeinerung entsteht durch die Bedingung $r_1>r_2>r_3$.

Aufgabe 2

Gegeben seien zwei sich von außen berührende Kreise K_1 und K_2 mit $r \geqq r_2$ und der flächenkleinste Kreis K, welcher K_1 und K_2 im Inneren enthält. Wie groß ist die Radiusmaßzahl r_3 eines größtmöglichen Kreises K_3, welcher ebenfalls im Innern von K liegt und welcher von K_1 und K_2 außen berührt wird?



Lösung
Durch Anwendung des Kosinussatzes auf das Dreieck M_1M_3M und auf das Dreieck M_2M_3M (siehe Bild 3) erhält man die beiden Gleichungen
$(r_1+r_3)^2=r_2^2+(r_1+r_2-r_3)^2-2r_2(r_1+r_2-r_3)\cdot\cos\varphi$,
$(r_2+r_3)^2=r_1^2+(r_1+r_2-r_3)^2+2r_1(r_1+r_2-r_3)\cdot\cos\varphi$
mit den beiden Unbekannten r_3 und φ. Nach Elimination von
$(r_1+r_2-r_3)\cdot\cos\varphi$ folgt

$$\frac{(r_1+r_3)^2-r_2^2-(r_1+r_2-r_3)^2}{2r_2}=\frac{-(r_2+r_3)^2+r_1^2+(r_1+r_2-r_3)^2}{2r_1}\text{, das heißt}$$

$$\frac{2r_1r_3-r_2^2-r_1r_2+r_2r_3}{r_2}=\frac{-2r_2r_3+r_1^2+r_1r_2-r_1r_3}{r_1}\text{. Daraus ergibt sich}$$

$$r_3\cdot\left(\frac{2r_1}{r_2}+2+\frac{2r_2}{r_1}\right)=2r_1+2r_2 \text{ und schließlich}$$

$$r_3=\frac{r_1r_2\cdot(r_1+r_2)}{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}.$$

Bemerkung: Im Sonderfall $r_1=r_2$ genügt zur Lösung der Satz des Pythagoras, und die Rechnungen vereinfachen sich ganz wesentlich; man erhält $r_3=\frac{2}{3}r_1$.

O. Krötenheerdt

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. sc. O. Krötenheerdt

Sektion Mathematik der „Martin-Luther-Universität" Halle/Wittenberg

▲ 925 ▲ Gegeben seien zwei sich von außen berührende Kreise K_1 und K_2 mit $r_1\geqq r_2$. Wie groß sind die Maßzahlen der Seiten eines flächenkleinsten Rechtecks R, welches K_1 und K_2 im Inneren enthält?

Wir werden Mathematik studieren

Karin Vetter, EOS „Ernst Schneller" Meißen (Kl. 10): Die *alpha* abonniere ich seit Klasse 6. Sie hat mir oft beim Lösen mathematischer Probleme geholfen. Mir gefällt auch die Angabe exakter Lösungswege zu den gestellten Problemen; kurz: *alpha* ist aktuell, lehrreich, vielseitig, auch die Satire kommt nicht zu kurz.

Sonja Körber, Magdeburg – erfolgreiche Teilnehmerin der XI. OJM: In meiner Freizeit beschäftige ich mich oft mit mathematischen Problemen, besonders aus *alpha*. Die Mathematik wurde im Laufe der Schulzeit zu meinem Lieblingsfach.

alpha-Wettbewerb Physik

Letzter Einsendetermin: 1. Oktober 1972

Liebe *alpha*-Leser!
In diesem Heft findet Ihr genau wie im Vorjahr Wettbewerbsaufgaben zur Physik. An der Lösung der Probleme kann sich jeder beteiligen. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Richtlinie: Schuljahr 1971/72) Schüler der Klassenstufe 11/12 und Erwachsenen lösen die Aufgaben, welche mit P ■ 11 und 12 gekennzeichnet sind. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm mal 297 mm). Am Kopf der Lösung müssen stehen: Name, Vorname, Adresse der Schule und Name des Physiklehrers, der ihn im Schuljahr 1971/72 unterrichtete. Die besten Lösungen werden von der Redaktion prämiiert. Die Namen der aktivsten Teilnehmer werden veröffentlicht. Jeder Einsender erhält eine Antwortkarte, die für den *alpha*-Wettbewerb 1972/73 gewertet wird. Die Lösungen sind einzusenden an:

Redaktion alpha
7027 Leipzig
Postfach 14

Kennwort auf Briefumschlag: Physik-Wettbewerb 1972

P 6 ■ 926 In der einen Waagschale einer Balkenwaage befindet sich ein Eisenkörper, in der anderen ein Körper aus Pappe. Der Waagebalken ist bei der Wägung im Gleichgewicht. Die Waage mit den Probekörpern wird dann in einen Behälter gestellt, in dem Vakuum ist.
a) Befindet sich dann die Waage immer noch im Gleichgewicht?
b) Welche Seite des Waagebalkens sinkt nach unten?
c) Erkläre die Erscheinung!

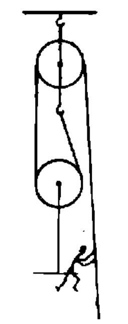
P 6 ■ 927 Ein Weltklassesprinter läuft die 100 m in 10,0 s. Welche Geschwindigkeit (in km/h) muß ein Pkw fahren, um die 100 m ebenfalls in 10,0 s zurückzulegen?

P 6 ■ 928 In den beiden Waageschalen einer Balkenwaage befinden sich je ein Gefäß mit der gleichen Menge Äther. Ein Gefäß davon ist verschlossen. Was kann nach einiger Zeit festgestellt werden?

P 7 ■ 929 An einem mit 120 km/h fahrenden Zug fährt in entgegengesetzter Richtung ein 100 m langer Zug vorbei, der eine Geschwindigkeit von 60 km/h hat.
Wie lange sieht ein im ersten Zug sitzender Beobachter den zweiten Zug an sich vorbei fahren?

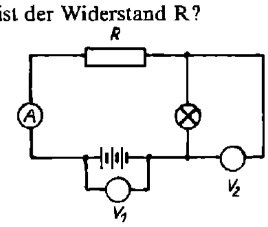
P 7 ■ 930 Ein 10 m langer Balken mit dem Gewicht 80 kp wird von zwei Arbeitern auf den Schultern getragen. Einer hat den Balken am äußersten Ende auf den Schultern liegen, der andere trägt ihn 60 cm vom Ende entfernt. Welche Last entfällt auf jeden von den beiden?

P 7 ■ 931 Ein Mann wiegt 75 kp und zieht sich selbst mittels des angegebenen Flaschenzuges nach oben. Welche Kraft benötigt er? Das Holzbrett ist zu vernachlässigen.

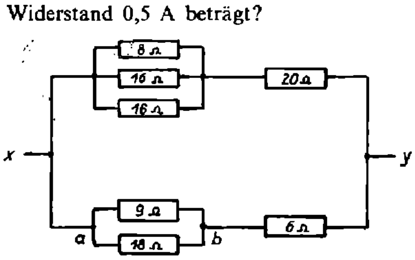


P 8 ■ 932 Um die Temperatur einer Bunsenflamme zu bestimmen, wurde ein Eisenstück von 6,85 g darin erhitzt und darauf in ein kupfernes Mischungskalorimeter geworfen, an welchem eine Änderung der Temperatur von 18,5 auf 21,3 °C beobachtet wurde. Die Masse des Kalorimeters betrug 152,5 g, die Wasserabfüllung 300 g. Wie heiß war die Flamme?

P 8 ■ 933 In der durch die Abbildung wiedergegebenen Zeichnung zeigt das Voltmeter V_1 die Spannung $U_1 = 25$ V und das Voltmeter V_2 die Spannung $U_2 = 22$ V. Das Amperemeter mißt einen Strom von $I = 0{,}6$ A. Wie groß ist der Widerstand R?

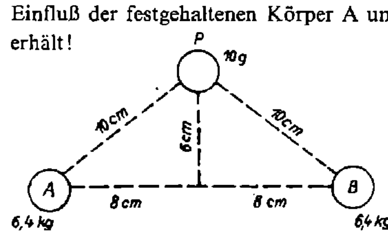


P 8 ■ 934 a) Berechne den Gesamtwiderstand zwischen den Punkten *x* und *y*.
b) Wie groß ist die Spannung zwischen den Punkten *a* und *b*, wenn der Strom im 8 Ω Widerstand 0,5 A beträgt?

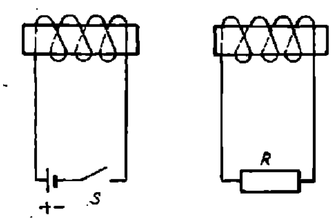


P 9 ■ 935 Ein Aufzug mit der Masse $m = 1200$ kg wird bei der Aufwärtsbewegung aus dem Ruhestand auf die Geschwindigkeit $v = 3$ m/s beschleunigt; er erreicht diese Geschwindigkeit nach $s = 2$ m. Wie groß ist die auf das Seil wirkende Kraft?

P 9 ■ 936 Berechne Größe und Richtung der Beschleunigung, die Körper P unter dem Einfluß der festgehaltenen Körper A und B erhält!



P 9 ■ 937 Bestimme die Richtung des Stromes im Widerstand R
a) beim Öffnen
b) beim Schließen von Schalter S (Lenzsche Regel).



P 10 ■ 938 An einer Schraubenfeder mit der Richtgröße 9 N/m hängt ein Körper, durch den die Feder um 10 cm gedehnt wird. Dem Körper wird aus der Ruhelage eine Geschwindigkeit von 50 cm/s erteilt.
a) Wie groß ist die Schwingungsdauer und die Amplitude der entstehenden Schwingung ($g = 10$ m/s^2)?
b) Wie groß ist die Masse des Körpers?

P 10 ■ 939 Eine vertikal hängende Spiralfeder wird zuerst mit 300 g belastet, wobei sie sich um 6,4 cm verlängert. Wie groß ist die Schwingungsdauer einer an der Feder hängenden Masse von 500 g?

P 11 ■ 940 Ein von einer Turmspitze herabfallender Körper ist schon eine Strecke l gefallen, als ein zweiter Körper von einem Punkt zu fallen beginnt, der sich im Abstand h unterhalb der Turmspitze befindet. Beide Körper erreichen zu gleichem Zeitpunkt den Erdboden. Wie hoch ist der Turm?

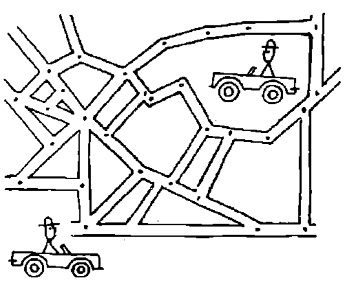
P 11 ■ 941 In einem Gefäß befindet sich Wasser, dessen Oberfläche sich in der Höhe h über dem Boden befinden soll (h = const). Aus zwei Öffnungen strömt Wasser, wobei die untere in der Höhe $^1/_3$ h angebracht sein soll. In welcher Höhe muß sich die zweite Öffnung befinden, wenn beide Strahlen auf dem gleichen Punkt auftreffen sollen?

P 12 ■ 942 Zwei Körper werden nacheinander ($t = 5$ s) von einem Punkt aus mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 29{,}4$ m/s nach oben geworfen. Nach welcher Zeit *t*, vom Startmoment des ersten Körpers aus gerechnet, und in welcher Höhe treffen sie sich? (Luftreibung wird vernachlässigt).

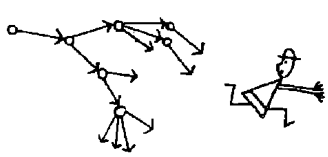
Norma Feistauer

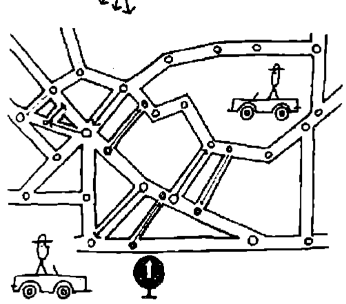
Der Graph

Auf einer Eisenbahnkarte oder einem Stadtplan (Bild 1) werden die Bahnstrecken bzw. Straßen der Stadt durch ein Netz aus Linien dargestellt. Jede Linie verbindet zwei Punkte, die *Knoten* genannt werden. Ein Netz aus Punkten und den zugehörigen Verbindungslinien trägt den sinnvollen Namen *Graph*.

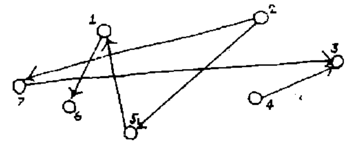


Der Plan des Wasserleitungsnetzes einer Stadt ist ebenfalls ein Graph. Im Unterschied zum Straßenverkehr kann das Wasser in den Leitungen jedoch nur in einer Richtung fließen. Vermerkt man auf den Kanten (Verbindungslinien) des Graphen die Bewertungsrichtung des Wassers durch Pfeile, so erhält man einen gerichteten oder orientierten Graphen (Bild 2). Wegen des immer stärker werdenden Straßenverkehrs erklärt man immer mehr Straßen zu Einbahnstraßen. Deutet man im Stadtplan die Verkehrsrichtung dieser Straßen durch Pfeile an, während die in beiden Richtungen befahrenen Straßen ohne Pfeil bleiben, so erhält man einen gemischten Graphen (Bild 3).

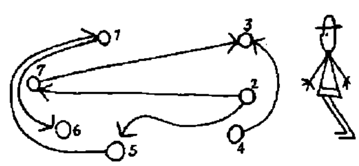




Die Ergebnisse eines Schachturniers kann man ebenfalls in Form eines Graphen darstellen (Bild 4). Man zeichnet auf dem Papier für jeden Turnierteilnehmer einen Kreis und bezeichnet die Kreise mit den Startnummern der Teilnehmer. Das Ergebnis eines jeden Spiels wird durch eine Kante dargestellt, die die Kreise der Spieler verbindet. Eine Pfeilspitze zeigt vom Gewinner zum Verlierer. Endet das Spiel Remis, so wird an die Kante kein Pfeil gemacht.



Am Ende des Turniers ist jeder Kreis mit jedem anderen verbunden. Ein solcher Graph heißt *vollständig*. Gewinner des Turniers ist der Spieler, von dessen Kreis die meisten Pfeile wegführen. Wenn alle Teilnehmer jeweils zwei Partien gegeneinander zu bestreiten haben (weiß und schwarz), so muß man jeweils zwei Kanten ziehen. Bild 4 zeigt die Situation, in der außer dem vierten und dem sechsten alle Teilnehmer je zwei Partien gespielt haben, der vierte und sechste jedoch nur eine. Den ersten Platz hält zu diesem Zeitpunkt der Teilnehmer Nummer zwei.



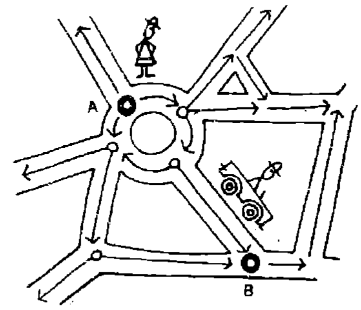
Man könnte vermuten, daß die nicht durch Kreise gekennzeichneten Schnittpunkte der Kanten des Graphen auch irgend etwas bedeuten. Sie haben jedoch keinerlei Bedeutung. Das macht man sich am besten dadurch klar, daß man sich den Graphen im Raum vorstellt: dann schneiden sich seine Kanten nicht. Die Kanten eines Graphen brauchen auch nicht unbedingt geradlinie zu sein. So sind die Graphen in den Bildern 4 und 5 in dem Sinne gleich, daß einer durch eine stetige Transformation in den anderen übergeführt werden kann. Solche Graphen nennen die Mathematiker *isomorph*.

Es ist übrigens nicht immer gleichgültig, ob man einen Graphen so zeichnen kann, daß sich seine Kanten nicht schneiden. So ist z. B. das Schaltbild eines Rundfunkempfängers ein Graph, dessen Knoten die Widerstände, Kondensatoren, Röhren usw. sind, während die Leitungen die Kanten sind. Hier ist es unwesentlich, ob sich die gezeichneten Kanten schneiden oder nicht. Bei der praktischen Realisierung der Schaltung schneiden sich die Leitungen nicht; man kann sie übereinanderlegen und Kurzschlüsse durch Isolation verhindern.

In den letzten Jahren werden jedoch immer mehr gedruckte Schaltungen verwendet. Eine gedruckte Schaltung besteht aus einer mit Bauelementen bestückten Leiterplatte, auf der die dem Schaltbild entsprechenden Leitungszüge verlaufen. Dabei ist es wichtig, daß man die Knoten des Graphen (der Schaltung) durch sie nicht schneidende Linien verbinden kann.

Es gibt also Fälle, in denen es notwendig ist, einen gegebenen Graphen in der Ebene so darzustellen, daß sich seine Kanten nur in den Knoten schneiden. Wenn das möglich ist, heißt der Graph eben. Man kann eine Methode angeben, nach der entschieden werden kann, ob ein Graph eben ist oder nicht. Das ist eine für die Praxis wichtige Aufgabe.

Bei der Einrichtung von Einbahnstraßen in einer Stadt muß die Verkehrspolizei die Verkehrseinrichtungen so festlegen, daß es keine Stellen gibt, zu denen man überhaupt nicht gelangen oder von denen man nicht mehr weiterfahren kann. So kann man z. B. im Bild 6 von A nach B fahren, jedoch nicht von B nach A. Derartige Aufgabenstellung können wir bereits als *allgemeine Aufgabe* über die Struktur eines gerichteten ebenen Graphen formulieren.



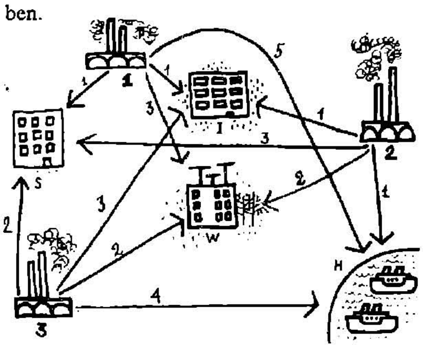
Natürlich würde die Verkehrspolizei zu Recht kritisiert werden, wenn sie die Verkehrsregeln nur nach den Gesetzen der Graphentheorie aufstellen würde.

Die Lenkung des Verkehrs in einer großen Stadt ist eine sehr schwierige Aufgabe, die wegen des Anwachsens der Anzahl der Fahrzeuge von Jahr zu Jahr komplizierter wird. Immerhin ist es aber eine mathematische Aufgabe, die eng mit der Graphentheorie zusammenhängt, jedoch nicht nur mit dieser.

Sie haben sicher schon Glossen gelesen, in denen kritisiert wird, daß man Badeanzüge in die Arktis schickt oder daß sich eine Sendung Spaten z. B. von Rostock nach Suhl mit einer Sendung gleicher Spaten von Suhl nach Rostock kreuzt. Solche Glossen sind oft sehr geistreich geschrieben, doch die Autoren können meist, wenn man sie fragt, wie die Mängel abzustellen seien, nur vorschlagen, die Verantwortlichen zur Rechenschaft zu ziehen. Aber wie kann man es besser machen? Natürlich, unqualifizierte Mitarbeiter bringen manchmal etwas durcheinander, doch meist liegt das Problem tiefer. Die Planung des Transports und die Lagerhaltung sind komplizierte Aufgaben, und ein Fuhrparkleiter oder ein Lagerverwalter sind gar nicht immer ohne weiteres in der Lage, sie zu lösen.

Die Graphentheorie in Verbindung mit einigen anderen mathematischen Disziplinen gibt die Möglichkeit, solche Aufgaben zu lösen.

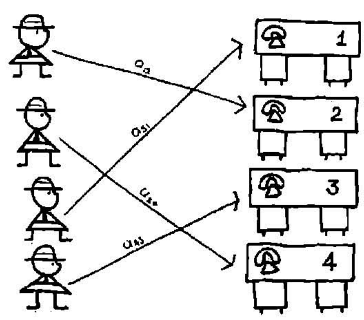
Ich werde einmal kurz das Wesen der Transportoptimierung erläutern.
Die Zeiten ändern sich, und, sagen wir, in der Stadt Surbagan, deren Entstehen wir der Phantasie des utopischen Schriftstellers *Alexander Grin* verdanken, wird intensiv gebaut. Eine Schule, ein Institut für Hochseeschiffahrt, ein sechzehnstöckiges Wohnhaus und ein Hafen sollen zur gleichen Zeit entstehen. In der Nähe der Stadt gibt es drei Werke für Baumaterial. Doch die Baustellen sind weit voneinander entfernt und befinden sich außerdem in verschiedenen Entfernungen von den Werken. Der Verantwortliche für die Versorgung der Baustellen muß den Transport des Baumaterials so organisieren, daß der Materialbedarf der Baustellen gedeckt wird und die recht beträchtlichen Transportkosten von den Werken zu den Baustellen möglichst niedrig bleiben. Diese Aufgabe ist prinzipiell lösbar; man braucht dazu jedoch Erfahrung und vor allem solide mathematische Kenntnisse und die moderne Rechentechnik, insbesondere wenn die Anzahl der Baustellen und Werke größer ist. Ich werde nun den Lösungsweg dieser Aufgabe skizzieren.
Wir stellen einen gerichteten Graph auf, in dem die Werke mit den Ziffern 1, 2 und 3 bezeichnet sind und die Baustellen die Buchstaben S (Schule), I (Institut), W (Wohnhaus) und H (Hafen) tragen; von den Werken zu allen Baustellen sind Kanten gezogen (Bild 7), die mit Zahlen versehen sind, die die relativen Transportkosten einer Einheit Fracht auf dem betreffenden Weg angeben.



Die Lösung der Aufgabe scheint zunächst offensichtlich zu sein: Der Schulneubau ist am günstigsten durch das Werk Nr. 1 zu versorgen, die Baustelle Hafen durch das Werk Nr. 2. Der Institutsneubau kann sowohl vom Werk Nr. 1 als auch vom Werk Nr. 2 versorgt werden; die Baustelle des Wohnhauses kann man durch das Werk Nr. 2 oder das Werk Nr. 3 beliefern lassen. Es hat den Anschein, daß man das Werk Nr. 3 überhaupt nicht benötigt. Doch so einfach liegen die Dinge in Wirklichkeit nicht.
Stellen Sie sich vor, daß die drei Werke einen unterschiedlichen Produktionsausstoß haben und ihre Gesamtproduktion den Bedarf der Baustellen gerade deckt. Außerdem möge das Werk Nr. 3 den höchsten Ausstoß haben und Werk 2 den geringsten. Derartige Bedingungen erschweren die Lösung der Aufgabe bedeutend. Trotzdem kann man durch Betrachtung der möglichen Varianten die Lösung finden, die die Versorgung der Baustellen bei minimalen Transportkosten garantiert.
Aus dem vorstehenden Beispiel kann man eine Erkenntnis ableiten: Plant man den Transport nur „über den Daumen", so führt das unweigerlich zu Störungen in der Versorgung, besonders wenn die Gesamtmenge des erzeugten Materials den Bedarf nicht wesentlich übersteigt. Die Benutzung der günstigsten Variante des Transports kann außerdem riesige Einsparungen bringen.
Nun wollen wir noch eine Klasse von Aufgaben betrachten, die auf Probleme der Graphentheorie hinauslaufen.
Stellen Sie sich eine Werkhalle mit n verschiedenen Maschinen und m Arbeitern ($n<m$) vor. Die Bedingung jeder Maschine ist nur einigen Arbeitern entsprechend ihrer Qualifikation möglich. Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit die Bedienung sämtlicher Maschinen gewährleistet ist?
Ähnlich ist die Situation, wenn Arbeitskräfte möglichst rationell eingesetzt werden sollen. Angenommen, wir haben n Mitarbeiter und ebenso viele Arbeiten; jeder Mitarbeiter kann jede der Arbeiten verrichten, doch die Leistungen sind unterschiedlich. Wenn a_{ij} die Leistung a (in gewissen Maßeinheiten) bei der Erfüllung der Arbeit Nummer j durch den Mitarbeiter Nummer i ist, dann ist z. B. a_{24} die Leistung des Mitarbeiters Nr. 2 bei der Arbeit Nr. 4. Es ist vorteilhaft, die Mitarbeiter so einzusetzen, daß sie alle mit hoher Effektivität arbeiten. Diese Situation wird durch Bild 8 illustriert. Als Kennziffer für die Arbeit des gesamten Kollektivs der Mitarbeiter kann man die Summe der Leistungen nehmen. Dann ist für die Situation im Bild 8 die

Gesamtleistung $= a_{12}+a_{24}+a_{31}+a_{43}$.

Die Aufgabe des günstigsten Einsatzes der Mitarbeiter wird durch die Arbeitseinteilung gelöst, bei der die Gesamtleistung maximal wird.



Man könnte die Arbeit eines Kollektivs auch an der Effektivität des schwächsten Mitarbeiters messen. Die Aufgabe des günstigsten Einsatzes der Mitarbeiter besteht dann darin, den schwächsten Mitarbeiter am wirksamsten einzusetzen. Das läßt sich so formulieren: Die Arbeit ist so aufzustellen, daß die kleinste Leistung ihren größten Wert hat. Die kleinste Leistung muß also größer sein als die kleinste Leistung bei irgendeiner anderen Aufteilung. In der Sprache der Graphentheorie würde sich das folgendermaßen ausdrücken lassen: Angenommen, a_{31} sei die kleinste Leistung im Graphen (Bild 8). Man kann nun die Arbeiten anders aufteilen, z. B. so, daß sich die Leistungen a_{11}, a_{23}, a_{32} und a_{44} ergeben. Ist nun a_{44} die kleinste Leistung, a_{44} aber größer als a_{31}, so ist die zweite Arbeitseinteilung der ersten vorzuziehen. Die Aufgabe besteht also darin, die Anordnung der Pfeile so zu bestimmen, daß die kleinste der jeweils vier auftretenden Zahlen für die Leistungen maximal ist.
Die optimale Variante kann bei der vorstehenden Aufgabe, bei dem bereits betrachteten Transportproblem und einer Reihe weiterer Aufgaben in der Praxis natürlich nicht durch das Probieren gefunden werden. Man benutzt die Methoden der Spieltheorie und der linearen bzw. nichtlinearen Optimierung und findet so einen systematischen Lösungsweg, der auch den Einsatz von Rechenautomaten ermöglicht.
Die Graphentheorie wird heute in den verschiedensten Gebieten von Wissenschaft und Technik benutzt. Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist die Netzwerkplanung. Ursprünglich hatte ich die Absicht, einen Abschnitt darüber zu schreiben. In letzter Zeit ist jedoch so viel darüber geschrieben worden, daß ich die mir zur Verfügung stehenden Seiten lieber benutzen will, um über weniger bekannte Probleme zu sprechen.

Zur Information: alpha veröffentlicht ab Heft 6/72 einen umfassenden Beitrag zur Graphentheorie, d. Red.

Die „счеты“ — ein Souvenir aus der Sowjetunion

Von einer Sommerreise im vergangenen Jahr habe ich mir ein Andenken aus der Sowjetunion mitgebracht. Pflichtgemäß hatte ich bei der Rückkehr in unsere Republik alle dort gekauften Gegenstände unseren Zollorganen mitgeteilt. Nur mein wohl nicht sehr häufig vorkommendes Souvenir mußte ich vorweisen. Nun, eine Rechenmaschine wird sicher nicht jeden Tag aus der Sowjetunion in unsere Republik im Handgepäck eingeführt. Der junge Genosse vom Zoll hat dann etwas geschmunzelt, als ich ihm meine „счеты" zeigte und hat natürlich keine zusätzlichen Einfuhrgebühren verlangt.
Wenn man die Sowjetunion besucht, ist man beim Einkauf immer wieder überrascht, wie schnell viele Verkäuferinnen, ohne Papier und Bleistift zu benutzen, den Gesamtpreis der erstandenen Waren ermitteln. Sie verwenden hierzu eine einfache Rechenmaschine, die „конторские счеты". Frei übersetzt können wir dazu Geschäftsrechenbrett oder kurz Rechenbrett sagen.
In der Sowjetunion werden schon die Kinder an den Umgang mit dem Rechenbrett herangeführt. Für sie gibt es in den Läden mit Artikeln für den Schulbedarf „счеты ученические", Schülerrechenbretter, zu kaufen. Ich habe mir ein solches aus Moskau mitgebracht und möchte euch nun erläutern, wie es aufgebaut ist und wie man damit umzugehen hat.

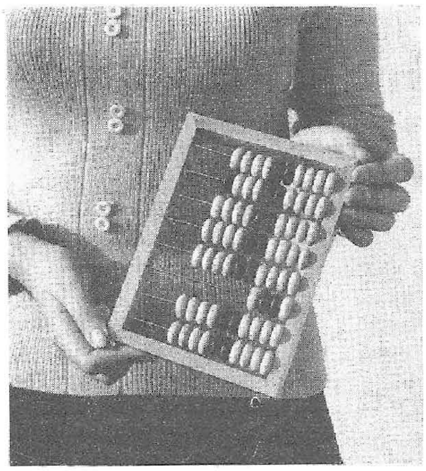


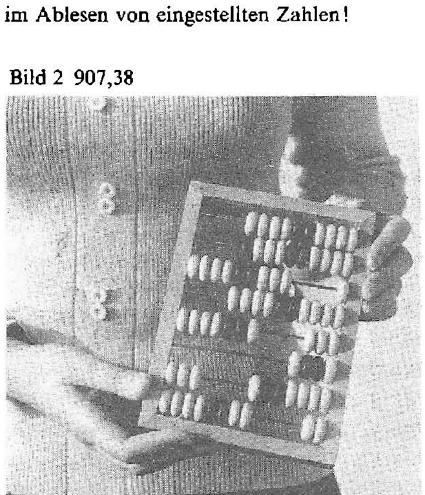
Bild 1 „счеты ученические"

1. Der Aufbau der „счеты" und das Einstellen der Zahlen

Unsere einfache Rechenmaschine ist so, wie es Bild 1 angibt, aufgebaut. Auf 8 Drähten befinden sich weiß oder schwarz gefärbte „Steine". Das sind hölzerne Scheiben, die an den Seiten abgerundet sind. Nach Bild 1 könnt ihr euch selbst ein Rechenbrett bauen. Zur Anfertigung eines Modells kann man sich auf einem Stück Papier auch parallele gerade Linien ziehen, auf die man entsprechend Bild 1 verschieden gefärbte Scheiben oder Knöpfe legt.
Das Rechenbrett ist nach dem Dezimalsystem aufgebaut. Jeder Draht, mit Ausnahme des dritten, entspricht einer Dezimalstelle, und jeder Stein auf dem entsprechenden Draht bedeutet eine Einheit der entsprechenden Stelle.

Zum besseren Abzählen sind die Steine farblich unterschieden. Der 3. Draht von unten enthält nur 4 Steine und wird als unvollständiger Draht bezeichnet. Er dient als Komma. Die zwei unteren Drähte sind für das Rechnen mit Dezimalbrüchen bestimmt.
Bevor man mit der „счеты" rechnet, ist es wichtig zu lernen, wie darauf die Zahlen einzustellen und abzulesen sind. Beim Einstellen beginnt man so, wie man im Russischen die Zahlen spricht, mit der höchsten Dezimalstelle.
Beispiel 1: In Bild 2 ist auf dem Rechenbrett die Zahl 907,38 eingestellt. Bildet jetzt selbständig Zahlen, die ihr einstellt, und übt euch im Ablesen von eingestellten Zahlen!

Bild 2 907,38



2. Das Addieren unter Benutzung des Rechenbrettes

Das Rechenbrett kann zum Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren benutzt werden. Am häufigsten wird es sicherlich zum Addieren verwendet. Deshalb soll diese Rechenart auch am ausführlichsten beschrieben werden. Zu Beginn müssen bei jeder Rechnung alle Steine auf der rechten Seite liegen. Mit der höchsten Stelle beginnend wird der erste Summand nach links geschoben. Die nächsten Summanden werden einzeln nacheinander danach ebenfalls nach links geschoben, bis nach dem Verschieben des letzten Summanden die Summe auf dem Rechenbrett sofort ablesbar ist.

Beispiel 2: 2423+565. Diese Aufgabe ist ohne Schwierigkeiten nach der soeben angegebenen Vorschrift auf dem Rechenbrett zu lösen. Man stellt zuerst den ersten Summanden ein und schiebt danach den zweiten Summanden nach links. Die Summe 2988 kann man danach vom Rechenbrett sofort ablesen.

Beispiel 3: 386+572. Hier handelt es sich um eine Aufgabe mit „Überschreiten". Zur Lösung ist 386 einzustellen. Danach schieben wir zu den drei Steinen auf der linken Seite des 6. Drahtes noch 5 Steine hinzu. Zu den 8 Steinen des 5. Drahtes müßten wir noch 7 Steine hinzufügen. Hierzu reichen aber die Steine rechts nicht aus. Beim weiteren Rechnen benutzen wir die Tatsache, daß 10 Steine eines Drahtes soviel wie ein Stein des darüber befindlichen Drahtes bedeuten. Jetzt benutzen wir die Tatsache, daß 7 gleich 10−3 ist. Wir fügen auf dem 6. Draht einen Stein hinzu und nehmen auf dem 5. Draht durch Schieben nach rechts 3 Steine fort. Zu den 6 Steinen auf dem 4. Draht schieben wir noch 2 und können jetzt als Summe von 386 und 572 die Zahl 958 ablesen. Die Rechengeschwindigkeit wird beim Umgang mit dem Rechenbrett wesentlich erhöht, wenn man Rechenvorteile ausnutzt. Das soll das nächste Beispiel zeigen:

Beispiel 4: 1583+298. Diese Aufgabe kann gelöst werden, indem man zuerst 1583 einstellt. Dann fügt man 298=300−2 hinzu, indem man zum 6. Draht 3 Steine nach links schiebt und vom 4. Draht 2 nach rechts. Danach kann man 1881 als Summe ablesen.
Die Addition von Dezimalzahlen wird, wie in den Beispielen 3 und 4 erläutert wurde, unter Berücksichtigung des Kommas durchgeführt. Wenn mehr als zwei Stellen hinter dem Komma vorhanden sind, nimmt man über dem 3. Draht liegende Drähte noch dazu. Bei drei Dezimalstellen liegt das Komma dann zwischen dem 4. und 5. Draht. Versucht nach diesen Beispielen selbständig Additionsaufgaben auch mit mehr als zwei Summanden zu lösen!

3. Das Subtrahieren mit dem Rechenbrett

Die Subtraktion ist ähnlich wie die Addition auszuführen. Man stellt zuerst den Minuenden ein. Danach schiebt man den Subtrahenden, mit der höchsten Stelle wieder beginnend, von links nach rechts. Die links verbliebenen Steine geben die Differenz an.

Beispiel 5: 746 – 534. Zuerst schiebt man auf dem Rechenbrett die Zahl 746 zur Seite. Danach werden auf dem 6. Draht 5 Steine, auf dem 5. Draht 3 Steine und auf dem 4. Draht 4 Steine nach rechts geschoben. Auf der linken Seite bleibt die gesuchte Differenz 212 zurück.

Beispiel 6: 527 – 374. Nachdem man 527 eingestellt hat, schiebt man die entsprechenden Steine des Subtrahenden nach rechts. Zuerst werden von der linken Seite des 6. Drahtes drei Steine weggenommen. Auf dem 5. Draht sind weniger Steine vorhanden als nach rechts zu schieben sind. Aus diesem Grunde schiebt man vom 6. Draht einen Stein nach rechts. Dieser Stein hat dieselbe Bedeutung wie 10 Steine des 5. Drahtes. Von diesen gedachten 10 Steinen des 5. Drahtes subtrahiert man im Kopf 7. Die Differenz, 3 Steine, fügt man dann den zwei Steinen des 5. Drahtes noch hinzu. Nachdem man vom 4. Draht vier Steine nach rechts geschoben hat, kann man als Ergebnis 153 vom Rechenbrett ablesen.

Beispiel 7: 565 – 367. Beim Verschieben der Steine des Subtrahenden nach rechts müßt ihr von den Steinen des 6. Drahtes einen Stein in 10 Steine des 5. Drahtes „verwandeln". Auf dem 5. Draht werden aber nur 9 nach links geschoben. Ein Stein des 5. Drahtes wird in 10 Steine des 4. Drahtes „verwandelt". Beim 4. Draht werden 3 Steine (10 – 7 = 3) nach links geschoben.

Bildet und löst jetzt selbständig Subtraktionsaufgaben auf dem Rechenbrett! Berücksichtigt dabei, daß man auch bei der Subtraktion, ähnlich wie im Beispiel 4 für die Addition erläutert wurde, Rechenvorteile ausnutzen kann. Zum Schluß noch ein Hinweis: Es läßt sich besser mit der „счеты" rechnen, wenn ihr die Zahlen russisch aussprecht.

4. Das Multiplizieren und Dividieren mit dem Rechenbrett

Obwohl das Rechenbrett hauptsächlich zum Addieren und Subtrahieren benutzt wird, wollen wir uns noch kurz dem Multiplizieren mit einstelligen Faktoren und dem Dividieren durch einstellige Divisoren zuwenden.

Das Multiplizieren wird bei der Benutzung des Rechenbretts als wiederholtes Addieren aufgefaßt. Zum Beispiel ist für 134·2 auf dem Rechenbrett 134 + 134 zu lösen. Soll eine Zahl mit 3 multipliziert werden, so ist diese Zahl dreimal als Summand zu wiederholen. Um eine beliebige Zahl mit 4 zu multiplizieren, verdoppeln wir ihr Produkt mit 2. Zur Multiplikation einer Zahl mit 5 multipliziert man im Kopf zuerst mit 10 und dividiert dann durch 2. Bei der Division durch 2 schiebt man jeweils die Hälfte der Steine des Dividenden, mit der niedrigsten Stelle beginnend, nach rechts.

Beispiel 8: 369·5. Auf dem Rechenbrett wird die Zahl 3690 eingestellt. Auf dem 5. Draht sind 9 Steine. Wir können also nicht die Hälfte der Steine von links nach rechts schieben. Wir ersetzen jetzt einen Stein auf dem 5. Draht durch 10 Steine auf dem 4. Draht. Danach schieben wir 5 Steine des 4. Drahtes und 4 Steine des 5. Drahtes nach rechts. Von den 6 Steinen des 6. Drahtes werden 3 Steine nach rechts geschoben. Auf dem 7. Draht schieben wir zum Schluß 1 Stein nach rechts und auf dem 6. Draht 5 Steine nach links. Als Ergebnis können wir 1845 ablesen. Um eine Zahl mit 6 zu multiplizieren, wird das Dreifache dieser Zahl verdoppelt. Bei der Multiplikation einer Zahl mit 7 wird zuerst mit 5 multipliziert und dann zweimal die betreffende Zahl zu diesem Produkt addiert. Multipliziert man mit 8, so ist zuerst mit 10 zu multiplizieren und dann zweimal die betreffende Zahl von diesem Produkt zu subtrahieren. Zur Multiplikation mit 9 ist zuerst mit 10 zu multiplizieren und dann der erste Faktor einmal zu subtrahieren.

Das Dividieren wird ähnlich wie beim schriftlichen Rechnen, mit den höchsten Stellen des Dividenden beginnend, ausgeführt.

Beispiel 9: 4524:6. Auf dem Rechenbrett wird der Dividend 4524 eingestellt. 45, die Zahl, die zu den beiden vorderen Ziffern gehört, teilt man durch 6. Die 7, als höchste Stelle des Quotienten, wird auf dem 1. Draht von oben eingestellt. Danach wird 6·7 = 42 von 45 subtrahiert. Nachdem man 32 durch 6 geteilt hat, schiebt man auf dem 2. Draht von oben 5 Steine nach links. Anschließend wird von 32 das Produkt 6·5 = 30 subtrahiert. Es bleibt jetzt nur noch die Zahl 24 übrig. Nachdem man 24 durch 6 geteilt hat, schiebt man 4 Steine auf dem 3. Draht von oben nach links und subtrahiert noch 6·4 = 24 von 24. Die Lösung 764 kann man zum Schluß vom Rechenbrett ablesen. Sollte bei der Division einmal ein Rest entstehen, so bleibt er auf dem 5. Draht von oben stehen.

5. Von der „счеты" zur elektronischen Rechenmaschine

Unsere „счеты" können wir auch in ein einfaches Modell einer elektronischen Rechenmaschine umbauen (siehe Bild 3). Wir ordnen hierzu die Drähte — wir können sie auch durch Striche auf Papier ersetzen — nebeneinander an. Da elektronische Rechenmaschinen nach dem Zweier — oder Dualsystem aufgebaut sind, müssen wir zuerst, um mit ihr arbeiten zu können, wiederholen, wie Zahlen im Dualsystem geschrieben werden. Man kann dazu das Lehrbuch der 4. Klasse (Ausgabe 1971, Seite 49) oder *alpha* Heft 3/1969, Seite 53 benutzen.

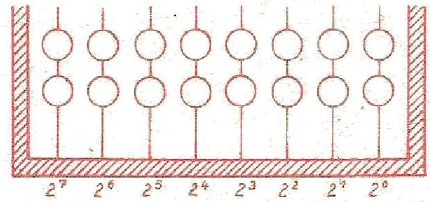


Bild 3

Im Dualsystem ist O = O und L = 1. Bei der Arbeit mit unserem Modell einer elektronischen Rechenmaschine ist ferner zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} O + O &= O, \\ O + L = L + O &= L, \\ L + L &= LO. \end{aligned}$$

Beim Addieren mit unserem Modell ist zuerst der erste Summand im Dualsystem zu schreiben und danach von oben nach unten „einzugeben".

Beispiel 10:

$$\begin{array}{ccccccc} 43 = & 1\cdot 2^5 + & O\cdot 2^4 + & 1\cdot 2^3 + & O\cdot 2^2 + & 1\cdot 2^1 + & 1\cdot 2^0 \\ = & L & O & L & O & L & L \end{array}$$

Soll jetzt zu 43 noch eine Zahl addiert werden, so wird der zweite Summand zuerst wieder im Dualsystem geschrieben und danach ebenfalls von rechts nach links nach unten geschoben. Befindet sich auf einem Draht schon ein Stein, so ist der zweite Stein wieder nach oben zu schieben und solange nach links zu übertragen, bis er unten eine freie Stelle findet. Anschließend ist das Ergebnis abzulesen und in die dezimale Schreibweise zu verwandeln.

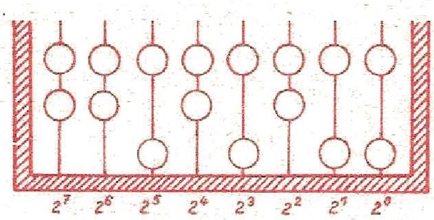
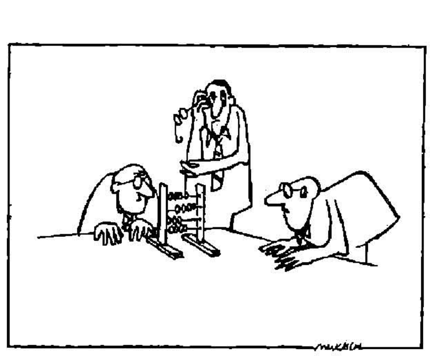


Bild 4 43 = LOLOLL eingegeben

A. Mertens



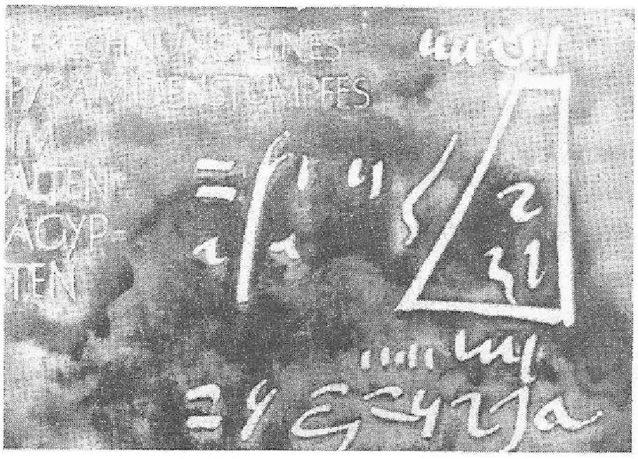
Mathematik – plastisch

Im Januar 1969 erhielt ich vom Ingenieur-Hochbau Berlin den Auftrag, für den Neubau des *VEB Maschinelles Rechnen* in der Hans-Beimler-Straße, Berlin, plastische Gitter anzufertigen.
Es war unserem Künstler-Kollektiv (Architekt W. Kötteritsch, Graphiker H. Lüttger, Metallbildhauer Karl-Heinz Hillert und der Autor dieses Beitrags) von Anfang klar, daß wir an der exponierten Fassade dem Vorübergehenden etwas über die Mathematik aussagen mußten. Nach fünf Monaten intensiver Entwurfsarbeit und dem Durchsehen der verschiedensten Bücher, besonders der *Kleinen Enzyklopädie Mathematik*, hatten wir uns auf das vorliegende Resultat geeinigt.
In den Mittelpunkt setzten wir „den Menschen als Maß aller Dinge" nach den Proportionslehren von *Leonardo da Vinci* und *Albrecht Dürer*. Links und rechts davon zeigen wir die Entwicklung der Mathematik von den alten Ägyptern bis zu *Ziolkowski*, dem Vater der Raumfahrt. Den Abschluß bilden zu beiden Seiten die Konstruktionen eines Dreiecks und einer Hyperbel.
Entsprechend dem modernen Charakter der Architektur verwendeten wir Materialien wie verchromten Stahl, Messing und Kupfer. Die bildlichen Darstellungen sind Kupferätzungen.

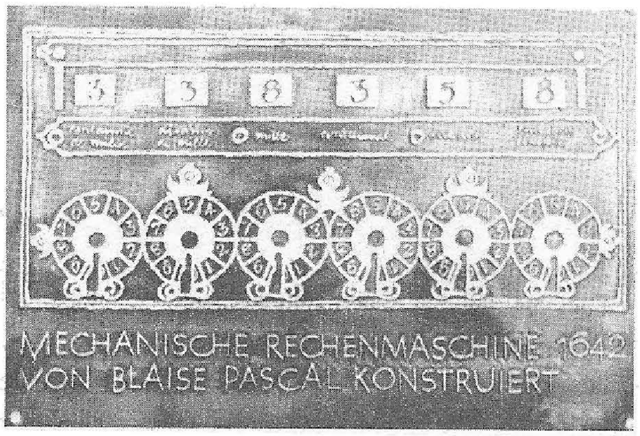
Die Entwicklung der Mathematik wird durch folgende Kupferätzungen gezeigt:

Beim Zählen im alten Ägypten und Zahlensysteme alter Kulturen · Berechnung eines Pyramidenstumpfes (Ägypten) · Griechisches Alphabet mit dem Hinweis: In der Mathematik haben die alten Griechen mit Beweisen operiert, dadurch wurde diese zur Wissenschaft · Lehrsatz des Pythagoras in Anwendung beim Entfernungsmessen · Porträt Albrecht Dürer · Proportionskanon von Albrecht Dürer · Porträt Adam Ries · Porträt Galileo Galilei · Ballistische Berechnung Galileis · Porträt Blaise Pascal · Abbildung der ersten Rechenmaschine von Pascal · Porträt G. W. Leibniz · Rechenmaschine von Leibniz und Darstellung des Binären Systems von Leibniz, das die Grundlage für die heutige Rechenautomatik ist · Porträt Isaac Newton · Formel: Berechnung der Entfernung zweier Punkte im Raum · Diagramm aus Newtons Principia · Porträt Leonhard Euler · Eulersche Dreiecke · Porträt C. F. Gauß mit Formel vom 17-Eck · Porträt Albert Einstein · Datenspeicher eines Computers · Porträt K. E. Ziolkowski mit Formel zur Berechnung kosmischer Geschwindigkeiten (Fundamentalgleichung der Raketen-Technik) · Raumstationen im Weltall.

H. Worner

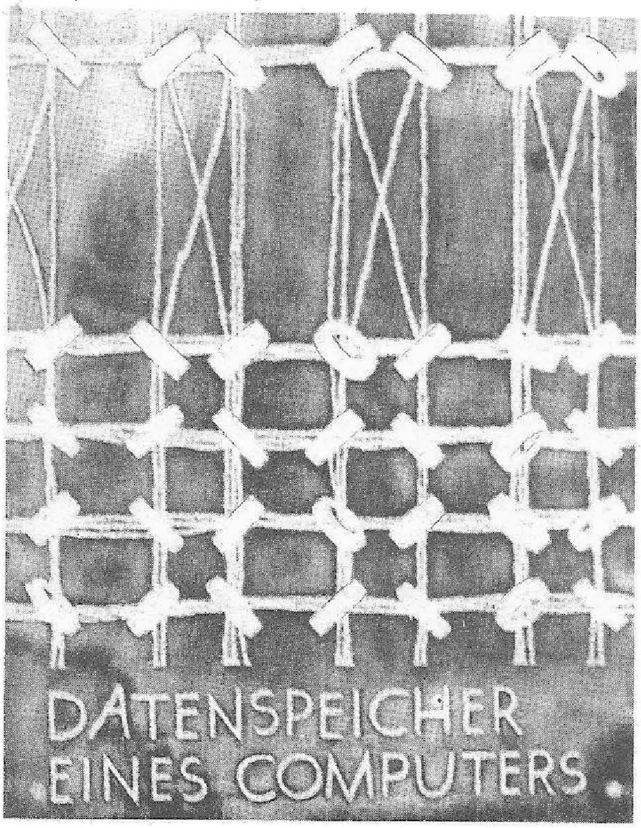


Berechnung eines Pyramidenstumpfes im alten Ägypten



Mechanische Rechenmaschine 1642 von Blaise Pascal konstruiert

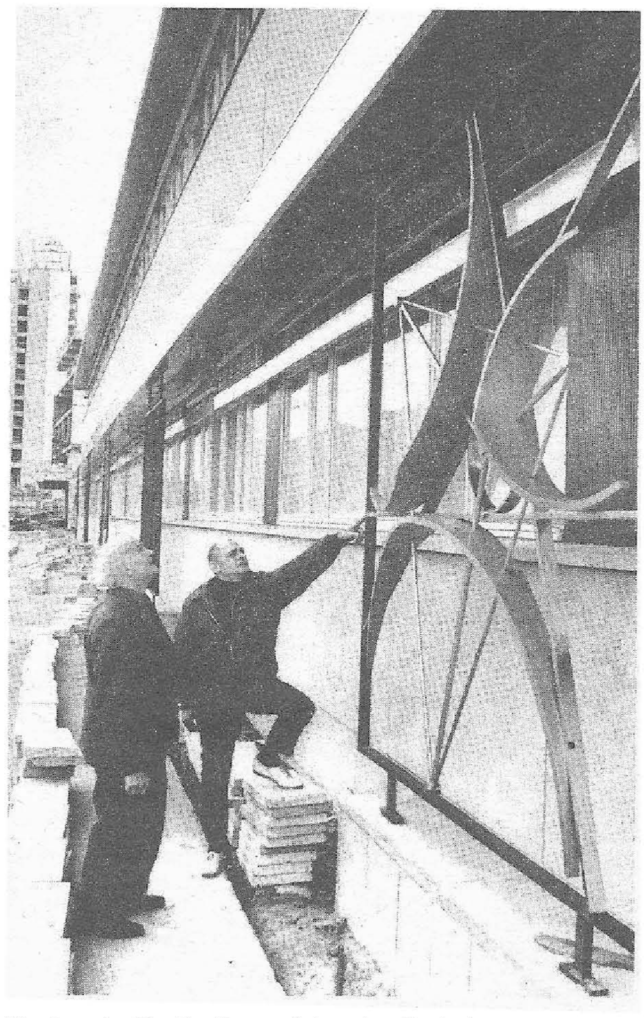
Datenspeicher eines Computers



alpha stellt vor:

Bildhauer Heinz Worner

Seine Entwicklung ist typisch für einen jungen Menschen, den die Arbeiterklasse geformt hat. Der Vater, ein Tischler, fiel im 1. Weltkrieg, die Mutter starb an Tuberkulose. Tagsüber als Steinbildhauer und Stukkateur und des Abends als Schüler der Kunstgewerbeschule und Marxistischen Arbeiter-Hochschule erhielt er sein Rüstzeug fürs Leben. Bei den Naturfreunden, im Arbeitersportverein Fichte und seit 1931 in der Kommunistischen Partei Deutschlands war er am politischen Leben Berlins aktiv beteiligt.



Montage der Plastik: Konstruktion eines Dreiecks (Masse etwa 0,6 t) — im Bild links der Autor dieses Artikels

Im Oktober 1933 wurde H. Worner von der Gestapo verhaftet. Nach der Entlassung war er freischaffend tätig. Erneute illegale Arbeit zwang ihn 1937 Deutschland zu verlassen. Das „goldene Prag" gab ihm viele künstlerische Anregungen, zeigte ihm aber auch das harte Los der politischen Emigration. 1939 gelang es ihm, über Polen nach England zu kommen. Während des 2. Weltkrieges war er im Freien Deutschen Kulturbund tätig, dessen größte Aufgabe es war, der englischen Bevölkerung das andere, das bessere Deutschland zu zeigen. 1946 nach Berlin zurückgekehrt, arbeitete er zunächst im Volk-und-Wissen-Verlag, später an der Hochschule für Bildende und Angewandte Kunst in Berlin-Weißensee. Seit 1957 ist er freischaffend tätig.

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin (beim Mathematiklehrer): 14. Oktober 1972

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

Die Lösungen sowie die Punktbewertungstabellen werden ab 14. Oktober 1972 veröffentlicht.

Olympiadeklasse 5

1. Auf einer Geburtstagsfeier stellt Rainer seinen Gästen folgende — schon im Altertum bekannte — Knobelaufgabe:
Eine Schnecke beginnt am Anfang eines Tages vom Erdboden aus eine 10 m hohe Mauer emporzukriechen.
In der folgenden Zeit kriecht sie während der ersten 12 Stunden je eines Tages um 5 m höher und gleitet während der restlichen 12 Stunden des gleichen Tages jeweils um 4 m nach unten.
Nach wieviel Stunden hat sie erstmals die gesamte Mauerhöhe erreicht?

2. Heinz, Gerd und Jochen haben sich in einem Zeltlager für Thälmann-Pioniere kennengelernt. Von diesen drei Jungen ist folgendes bekannt:
(1) Mindestens zwei von ihnen spielen Tischtennis, mindestens zwei Fußball.
(2) Einer von ihnen wohnt in Berlin, einer in Leipzig und einer in Rostock. Keiner von ihnen wohnt gleichzeitig in zwei dieser Orte.
(3) Nur Heinz und der Berliner sind Tischtennisspieler.
(4) Nur Gerd und der Leipziger sind Fußballspieler.
(5) Jochen, der Handball spielt, ist älter als der Leipziger.
(6) Keiner der Tischtennisspieler spielt auch Handball.
(7) Der Handballspieler ist nicht der älteste der drei Jungen.
Gib von jedem der drei Jungen an, wo er wohnt und welche der drei Sportarten er betreibt! Wer ist der älteste und wer der jüngste der drei Jungen?

3. Von einem Bahnhof wurden mit zwei LKW Kartoffeln abtransportiert, und zwar insgesamt 170 t. Der erste LKW, der bei jeder Fahrt mit 4 t Kartoffeln beladen wurde, führte insgesamt 20 Fahrten aus.
Wieviel Fahrten führte der zweite LKW insgesamt aus, wenn er bei jeder Fahrt mit 5 t der Kartoffeln beladen wurde, die der erste LKW nicht abtransportiert hatte?

4. Erklärung:
Mit der Schreibweise einer „fortlaufenden Ungleichung" $a<b<c<d$ drückt man aus, daß die drei Ungleichungen $a<b$, $b<c$ und $c<d$ gelten.
Es gelten dann auch die Ungleichungen $a<c$, $a<d$ und $b<d$.
Aufgabe:
Es seien w, x, y, z vier natürliche Zahlen, für die folgende Ungleichungen gelten:
(1) $z>x$ (2) $z<w$ (3) $w>x$
(4) $x<y$ (5) $y>w$ (6) $z<y$
Stelle fest, ob sich alle diese Ungleichungen in Form einer fortlaufenden Ungleichung schreiben lassen!

Olympiadeklasse 6

1. Von 30 Schülern einer Klasse lesen regelmäßig 20 Schüler die Zeitschrift „Fröhlichsein und Singen" (Frösi), 12 Schüler die mathematische Schülerzeitschrift „alpha" und 6 Schüler weder „Frösi" noch „alpha".
Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Klasse, die beide Zeitschriften lesen!

2. Ein Betrieb will unter Verwendung des gleichen Uhrwerks Uhren verschiedener Ausführung herstellen. Zu diesem Zwecke stehen sechs verschiedene Gehäuseausführungen, vier verschiedene Ausführungen von Zifferblättern und drei verschiedene Zeigerausführungen zur Verfügung.
Gib die Anzahl aller verschiedenen Ausführungen von Uhren an, die sich unter diesen Umständen herstellen lassen!

3. In einem Raum mit einer rechteckigen Bodenfläche von 11 m Breite und 36 m Länge stehen 6 Maschinen mit Standflächen von folgendem Flächeninhalt:

Maschine A: 15 m^2	Maschine D: 60 m^2
Maschine B: 5 m^2	Maschine E: 18 m^2
Maschine C: 18 m^2	Maschine F: 50 m^2

Für die Lagerung und Bereitstellung der zu bearbeitenden Werkstücke werden an den Maschinen weitere Flächen mit folgendem Flächeninhalt benötigt:

Maschine A: 14 m^2	Maschine D: 21 m^2
Maschine B: 6 m^2	Maschine E: 13 m^2
Maschine C: 15 m^2	Maschine F: 17 m^2

Die restliche Bodenfläche soll für Transportwege genutzt werden.
a) Berechne (in m^2) den Flächeninhalt der Bodenfläche, die für Transportwege zur Verfügung steht!
b) Wir nehmen an, daß die Anordnung der Maschinen und der Lagerplätze es gestattet, die Transportwege aus Rechteckflächen von gleicher Breite zusammenzusetzen. Die Summe der Längen dieser Rechteckflächen wollen wir dann als „Gesamtlänge der Transportwege" bezeichnen.
Wie breit sind diese Transportwege, wenn sie eine Gesamtlänge von 48 m besitzen?

4. Eine Strecke von 168 m Länge soll in drei Teilstrecken geteilt werden, deren Längen der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet seien. Dabei soll die zweite Teilstrecke dreimal so lang wie die erste und die dritte Teilstrecke viermal so lang wie die erste sein.
Ermittle alle Möglichkeiten, die Längen a, b, c der Teilstrecken so anzugeben, daß eine Teilung mit diesen Eigenschaften entsteht!

Olympiadeklasse 7

1. Klaus hatte an einem Sonnabend um 12.00 Uhr seine Armbanduhr nach dem Zeitzeichen von Radio DDR eingestellt. Er bemerkte am folgenden Sonntag um 12.00 Uhr beim Zeitzeichen, daß seine Uhr um genau 6 Minuten nachging, vergaß aber, sie richtig zu stellen. Er wollte am folgenden Montag früh genau um 8.00 Uhr fortgehen.
Welche Zeit zeigte seine Uhr zu dieser Uhrzeit an, wenn angenommen wird, daß seine Uhr während der ganzen Zeit gleichmäßig lief?

2. Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:
(1) Die Zahl z ist sowohl durch 9 als auch durch 11 teilbar.
(2) Vertauscht man bei der Zahl z die an der Hunderterstelle stehende Ziffer mit der an der Einerstelle stehenden, so erhält man eine neue dreistellige Zahl z', die $\frac{2}{9}$ der Zahl z beträgt.

3. Beweise den folgenden Satz:
Stehen in einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ $(\overline{AD}=\overline{BC})$ die Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander, dann ist die Länge der Mittellinie dieses Trapezes gleich der Länge seiner Höhe.

4. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Ein Punkt C_1 soll folgende Eigenschaften haben:
(1) Das Dreieck $\triangle ABC_1$ ist flächengleich zu dem Dreieck $\triangle ABC$,
(2) $\overline{AC}=\overline{AC_1}$,
(3) $C \neq C_1$.

a) Gib eine Konstruktion an, durch die man alle Punkte C_1 erhalten kann, die die Eigenschaften (1), (2), (3) besitzen!

b) Untersuche, wie die Anzahl der Punkte C_1 mit den Eigenschaften (1), (2), (3) von Eigenschaften des gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ abhängt (Fallunterscheidung)!

Olympiadeklasse 8

1. Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Quersumme der Zahl z beträgt 12

(2) Die aus der Zehner- und aus der Einerziffer (in dieser Reihenfolge) der Zahl z gebildete zweistellige Zahl ist das Fünffache der aus der Hunderterziffer von z bestehenden (einstelligen) Zahl.

2. Von einem Würfel mit der Kantenlänge $a=9$ cm seien an jeder seiner Ecken jeweils ein Würfel mit einer Kantenlänge $b<\frac{a}{2}$ herausgeschnitten. (Die Flächen der herausgeschnittenen Würfel seien parallel zu den entsprechenden Flächen des großen Würfels).

a) Zeichne ein Schrägbild des Restkörpers ($\alpha=60°$, 1:3) für $b=3$ cm!

b) Es gibt genau einen Wert von b, für den das Volumen V_R des Restkörpers 217 cm^3 beträgt.

Ermittle diesen Wert!

3. Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000000 fortlaufend nebeneinander geschrieben. Es entsteht die Zahl mit der Ziffernfolge 123456789101112.....

Welche Ziffer steht in dieser Zahl an der 300001. Stelle?

4. Gegeben sei ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$. Konstruiere um jeden der Punkte A, B, C einen Kreis derart, daß die so entstandenen Kreise einander paarweise von außen berühren!

Olympiadeklasse 9

1. Zeigen Sie, daß es für jede ganze Zahl $n\geq 4$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit genau n Ecken und genau n Flächen gibt. (Es genügt die Angabe je eines Beispiels.)

2. Während einer GST-Übung schätzten Andreas und Frank die Länge einer Strecke. Wenn Andreas um 10% weniger geschätzt hätte, hätte er die genaue Länge getroffen.

Wenn Franks Schätzwert um 10% höher gelegen hätte, hätte er die genaue Länge der Strecke getroffen.

Bei welcher der beiden Schätzungen ist der absolute Betrag des absoluten Fehlers geringer?

3. Ein Durchmesser AB eines Kreises werde von einer Sehne CD in einem Punkt E geschnitten, der AB innen im Verhältnis 2:5 teilt.

Dabei schneide die Sehne CD den Durchmesser AB unter einem Winkel von 30°.

Ermitteln Sie den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt M des Kreises, wenn die Länge d des Durchmessers gegeben ist!

4. Es ist die größte siebenstellige Zahl zu ermitteln, die mit paarweise verschiedenen Ziffern dargestellt werden kann und durch 72 teilbar ist.

Olympiadeklasse 10

1. Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion vier ebenflächig begrenzte Körper mit jeweils genau 6 Ecken, von denen der erste genau 5, der zweite genau 6, der dritte genau 7 und der vierte genau 8 Flächen besitzt!

Ermitteln Sie jeweils für diese Körper die Anzahl aller Kanten!

Hinweise zur Anfertigung der Zeichnungen: Sämtliche Zeichnungen sind unter Benutzung des Lineals anzufertigen. Von Flächen verdeckte Kanten sind gestrichelt zu zeichnen. Die Projektion ist so zu wählen, daß die Eckpunkte sämtlich voneinander verschiedene Projektionen haben.

2. In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sei eine Parabel durch die Gleichung $y=x^2$ gegeben.

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Geraden an, die nicht parallel zur y-Achse verläuft und mit der Parabel genau einen Punkt P mit der Abszisse 3 gemeinsam hat!

3. Gegeben seien zwei Strecken mit der Länge a und b.

Konstruieren Sie eine Strecke der Länge

$$\frac{a\cdot b}{a+b}!$$

4. In einem alten Lehrbuch wird in einer Aufgabe über folgenden Handel berichtet:

Ein Bauer wollte bei einem Viehhändler mehrere Tiere kaufen. Der Viehhändler verlangte für jedes den gleichen Preis. Dem Bauern gelang es, diesen Preis um genau so viel Prozent des geforderten Preises herunterzuhandeln, wie er (in Groschen) betragen sollte. Er bezahlte jetzt 21 Groschen pro Tier. Bei dem ursprünglichen Preis hätte sein Geld genau für drei Tiere gereicht. Jetzt konnte er mehr Tiere kaufen, wobei er sein Geld vollständig ausgab.

Wie viele Tiere konnte der Bauer insgesamt kaufen?

Olympiadeklasse 11/12

1. Eine „utopische Aufgabe": Als im dritten Jahrtausend u. Z. innerhalb von zwei Tagen nacheinander vier Kosmonauten von Planeten anderer Sonnensysteme auf einem Kosmodrom der Erde landeten, war die Verständigung der Erdenbewohner mit ihnen, aber auch die der Kosmonauten untereinander zunächst schwierig. Zwar waren diese durch die Farben rot, gelb, schwarz und blau ihrer Raumanzüge leicht zu unterscheiden, über ihre Herkunft aber war nichts bekannt.

Erst nach einiger Zeit konnte festgestellt werden, daß sie von vier verschiedenen Planeten A, B, C und D zur Erde kamen. Folgende Informationen konnte man erhalten: Der rote und der schwarze Kosmonaut waren schon einmal auf einer kosmischen Reise zusammengetroffen und kannten sich daher. Der von A kommende Kosmonaut war dagegen nicht mit dem von B und der von C stammende Kosmonaut nicht mit dem von D bekannt. Der rote und der schwarze Kosmonaut konnten sich gut verständigen, und bald konnten das auch der gelbe und der blaue Kosmonaut, während sich die Kosmonauten von A und D nach wie vor nur schlecht verständigen konnten.

Nach langwierigen Berechnungen konnte festgestellt werden, daß der gelbe Kosmonaut älter war als der blaue. Ferner war der von D kommende Kosmonaut älter als der von B kommende und der von A stammende älter als der von C stammende.

Beim Versuch festzustellen, welcher Kosmonaut von welchem Planeten kam, zeigte sich, daß die obigen Angaben dazu noch nicht ausreichten. Immerhin konnte man ermitteln, daß für eine der vier Anzugsfarben nur noch der Kosmonaut von A oder der von D in Frage kam. Auf Grund weiterer Informationen ergab sich, daß der von D stammende Kosmonaut diese Farbe trug. Damit war auch die Anzugsfarbe des von B kommenden Kosmonauten ermittelt, aber bei den beiden übrigen noch keine Klarheit darüber vorhanden, welche Anzugsfarbe zu welchem Planeten gehörte. Erst durch die zusätzliche Information, daß der Anfangsbuchstabe der (in deutscher Sprache bezeichneten) Farbe des Raumanzuges des von A kommenden Kosmonauten im Alphabet hinter dem Anfangsbuchstaben der Farbe des Raumanzugs des von C kommenden Kosmonauten steht, konnte die Herkunft der Kosmonauten schließlich geklärt werden.

Von welchem Planeten stammte der rote, von welchem der gelbe, von welchem der schwarze und von welchem der blaue Kosmonaut? (Es sei bekannt, daß sich alle Bedingungen der Aufgabe realisieren lassen.)

2. Man beweise den folgenden Satz:

Gelten für die Maßzahlen a, b, c der mit gleicher Maßeinheit gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks die Bedingungen

$1<a<\sqrt{2}$, $1<b<\sqrt{2}$, $1<c<\sqrt{2}$,

so ist das Dreieck spitzwinklig.

3. Gegeben seien drei reelle Zahlen a, b und c. Zu der Funktion

$$y=x^3+ax^2+bx+c \qquad (1)$$

soll eine Funktion

$$y=x^3+mx+n \qquad (2)$$

ermittelt werden, so daß der Graph von (2) in einem rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystem durch eine Verschiebung des Graphen von (1) parallel zur x-Achse entsteht. Man zeige, daß dies immer möglich ist, und daß die Funktion (2) eindeutig bestimmt ist. Die dabei auftretenden Zahlen m und n sind anzugeben.

4. Es sind alle geordneten Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen x und y $(x \leqq y)$ anzugeben. Für die die Gleichung

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1980} \text{ erfüllt ist.}$$

Wissenschaftliche Haupttagung

der Mathematischen Gesellschaft der DDR

Vom 28. August bis 2. September findet die Wissenschaftliche Haupttagung der MG 1972 an der Technischen Universität Dresden statt. Sie steht unter dem Thema: *Mathematik und wissenschaftlich-technische Revolution.*
Das Programm wird in acht Tagungssektionen durchgeführt: Analysis und physikalische Anwendungen · Mathematische Kybernetik und Rechentechnik / Mathematische Grundlagen der Informationsverarbeitung · Mathematische Methoden der Operationsforschung · Mechanik · Numerische Mathematik · Theoretische Mathematik · Unterricht und Ausbildung · Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik.
Eine Gruppe von 50 *Jungen Mathematikern* (vorwiegend Preisträger der letzten DDR-Olympiade) führen zur gleichen Zeit einen zentralen Ferienlehrgang in Dresden durch. Sie nehmen an der feierlichen Eröffnung, dem Hauptvortrag und einigen weiteren für sie wertvollen Vorträgen der Wissenschaftlichen Haupttagung teil.

Technische Universität Dresden

Gegründet im Jahre 1828 als (Königlich-) Technische Bildungsanstalt und 1851 zur Polytechnischen Schule erhoben, hatte die heutige TU Dresden während der ersten Jahrzehnte ihrer Existenz die Aufgabe, Mechaniker, Meister und Techniker für die sächsische Industrie auszubilden. Die Gründung dieser wie auch anderer Technischer Bildungsanstalten im damaligen Deutschland war unter dem Zwang der industriellen Revolution (etwa 1815 bis 1870) erfolgt, die mit der Einführung von Maschinen in die gewerbliche Produktion und deren damit verbundener Umwandlung in die „große Industrie" (Marx) die Wissenschaft als Produktivkraft im Dienste des Kapitals notwendig machte. Im Jahre 1871 erhielt die Polytechnische Schule den Status eines Polytechnikums und wurde damit in den Rang einer höheren Fachschule erhoben, ohne daß die erneute Namensänderung die Gleichstellung mit einer Universität bedeutete. Das letzte Drittel des 19. Jahrhunderts ist durch ein stürmisches Wachstum der Produktivkräfte und den damit verbundenen Übergang vom Kapitalismus der freien Konkurrenz zum Imperialismus charakterisiert. Gut ausgebildete Ingenieure, Physiker, Chemiker, Mathematiker und Architekten wurden in immer größerer Zahl gebraucht, um im Zuge der wissenschaftlichen Durchdringung der Produktion das Bestreben des deutschen Kapitalismus, nach der Weltmacht zu greifen, materiell zu fundieren. In diesen 30 Jahren vervierfachte sich die Zahl der Studenten am Dresdner Polytechnikum, das im Jahre 1890 die seit langem geforderte Bezeichnung Technische Hochschule erhielt.

Das naturwissenschaftliche Weltbild wurde um die Jahrhundertwende durch epochale Entdeckungen in der Physik, Chemie und Mathematik vertieft und erweitert.

Die TH Dresden leistete wertvolle Beiträge zum naturwissenschaftlichen und technischen Fortschritt; hervorragende Wissenschaftler lehrten und forschten an dieser hohen Bildungsstätte (Grübler, Hempel, Förster, Mollier, Zeuner, Hallwachs). Bis zum zweiten Weltkrieg, aber auch noch in den Jahren der Weimarer Republik, bildete sich die TH Dresden zu einer der größten technischen Bildungseinrichtungen Deutschlands heraus.
In der Zeit der Herrschaft des deutschen Faschismus gerieten sowohl die Wissenschaften wie das studentische Leben in den Bann des nazistischen Ungeistes. Die Zahl der Studenten ging rapide zurück (1932/33: 3550, 1938: 1130 Studenten).
Der verbrecherische Angriff anglo-amerikanischer Bomber auf Dresden am 13. Februar 1945 führte zur Vernichtung von etwa 85% aller Bauten der TH und ihrer Einrichtungen.
Im Oktober 1946 wurde die TH Dresden wiedereröffnet. Im Zuge der demokratischen Umgestaltung des Hochschulwesens erlangten die im gleichen Jahr eröffneten Vorsemesterkurse, die später unter dem Namen „Vorstudienanstalt" weitergeführt wurden und 1949 als ABF ihre endgültige Form erhielten, besondere Bedeutung. Mit dem Beschluß des Parteivorstandes der SED über den „Zweijahrplan für 1949/50" begann eine neue Etappe. Im Mittelpunkt von Lehre und Forschung standen von nun an die zentralen im Plan vorgegebenen volkswirtschaftlichen Aufgaben. 1950 studierten an der TH bereits wieder 2545 Direkt- und 1123 Fernstudenten an sieben Fakultäten mit 76 Instituten. Im Zuge der II. Hochschulreform 1951 erfolgte der Übergang zur sozialistischen Hochschule. Mit der Einführung des obligatorischen gesellschaftswissenschaftlichen Grundstudiums wurde der Marxismus-Leninismus zur weltanschaulich-theoretischen Grundlage des gesamten Studiums. Die Wiederherstellung der Altgebäude wurde beendet, das Hochschulgelände vergrößert, 75 Mill. Mark von 1949 bis 1955 investiert. Die Studentenzahlen wuchsen in schnellem Tempo; 1956 waren 14600, 1960 16800 Studierende (einschl. Fernstudenten) immatrikuliert. Am 5. Oktober 1961 wurde der TH Dresden der Status einer Technischen Universität verliehen und damit dem qualitativen und quantitativen Wachstum in Lehre, Erziehung und Forschung Rechnung getragen.

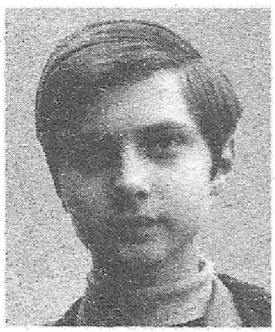
Die Mathematik — zunächst im Rahmen der damals bestehenden Möglichkeiten nach 1945 in der Pädagogischen Fakultät konzentriert — wurde im Herbst 1949 in der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften mit dem Mathematischen Seminar und drei Abteilungen für Reine Mathematik, Angewandte Mathematik und Geometrie installiert. Seit der im Jahre 1968 begonnenen III. sozialistischen Hochschulreform sind alle mathematischen Disziplinen in der Sektion Mathematik vereinigt.
Der Inhalt der Ausbildung wird von den internationalen Entwicklungstendenzen der Mathematik sowie von der Entwicklung der führenden Zweige der Volkswirtschaft der DDR bestimmt. Die Studenten werden auch an dieser Sektion mit den Problemen der Forschung und der wissenschaftlichen Arbeit in der Industrie bekannt gemacht und aktiv in deren Lösungen einbezogen.
Im Grundstudium werden den Studenten Kenntnisse vor allem im Marxismus-Leninismus, den marxistisch-leninistischen Organisationswissenschaften sowie in der Analysis, Funktionsanalysis, Algebra, Geometrie, Mengenlehre und Logik, mathematischer Kybernetik, numerischen Mathematik, Rechentechnik und Informationsverarbeitung, Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik und in allgemeiner Physik vermittelt.
Das Fachstudium wird in den folgenden Fachstudienrichtungen durchgeführt: Numerische Mathematik, Mathematische Kybernetik und Rechentechnik, Wahrscheinlichkeitstheorie und numerische Statistik.
Der Einsatz der Absolventen erfolgt in volkseigenen Betrieben und Forschungszentren, die sich mit der Entwicklung und Einsatzvorbereitung von Datenverarbeitungsanlagen beschäftigen, in Rechenzentren und Hochschuleinrichtungen, Forschungs- und Planungsinstitutionen auf den Gebieten der Problemanalysen und Programmierung.

R. Sonnemann

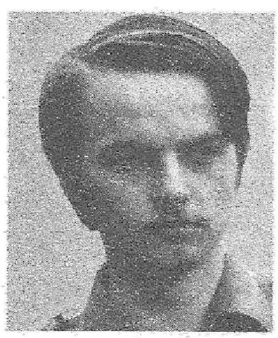
XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade (28. 3. bis 30. 3. 1972)

Erste Preise wurden vergeben:

Bernd Klipps, EOS „Heinrich Heine“, Teterow (Klasse 9)
Ralph Lehmann, EOS Strausberg, Bez. Frankfurt
(beide Olympiadeklasse 10)

Harald Englisch, EOS „Karl Marx“, Leipzig
Hans-Jürgen Fischer, Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt
(beide Olympiadeklasse 12)

Zweite Preise wurden vergeben:
In Olympiadeklasse 10 an: Uwe Jungnickel, EOS Dresden-Süd; Ulf Brüstel, EOS „Karl Marx“, Altenburg (Bez. Leipzig); Jörg Bergmann, Martin-Andersen-Nexö-OS, Dresden (Kl. 9)
In Olympiadeklasse 11 an: Guntram Pausch, EOS „Wilhelm Pieck“, Borna (Bez. Leipzig); Albrecht Heß, EOS Dresden-Süd (Kl. 10); Gerd Weißenborn, EOS „Heinrich Hertz“, Berlin (Kl. 10)
In Olympiadeklasse 12 an: Olaf Böhme, EOS „Bertolt Brecht“, Dresden; Rolf Haftmann, Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt (ehem. Dresden);

Dritte Preise wurden vergeben:
In Olympiadeklasse 10 an: Klaus Heckemann, EOS „Bertolt Brecht“, Dresden; Helmut Roßmann, Antonin-Zapotocky-OS, Neubrandenburg; Hans-Jürgen Koppatz, EOS „Heinrich Hertz“, Berlin (Kl. 9); Martin Hanke, EOS „Heinrich Hertz“, Berlin; Heidrun Wabnitz, Spezialschule VEB Carl Zeiss, Jena; Karl-Heinz Jäckel, EOS „Geschwister Scholl“, Belzig (Bez. Potsdam); Mario Ziller, Edgar-André-OS, Berlin; Matthias Gatzsche, Antonin-Zapotocky-OS, Neubrandenburg; Ute Winkler, EOS Kleinmachnow (Bez. Potsdam); Rolf Böllmann, Adolf-Diesterweg-OS, Nordhausen (Bez. Erfurt); Ernst Gruhlke, EOS Lübben (Bez. Cottbus); Matthias Richter, EOS „Romain Rolland“, Dresden;
In Olympiadeklasse 11 an: Matthias Günther, EOS „Hermann von Helmholtz“, Leipzig (Kl. 10); Reinhard Schuster, EOS „Hermann von Helmholtz“, Leipzig (Kl. 10); Brigitte Prawitz, EOS „Heinrich Hertz“, Berlin;
In Olympiadeklasse 12 an: Roland Mattheis, Spezialschule VEB Carl Zeiss Jena; Christoph Heinze, EOS „Artur Becker“ Wilkau-Haßlau (Bez. Karl-Marx-Stadt); Pawel Kröger, 49. OS Leipzig (Kl. 7); Bernd Hofmann, Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt (ehem. Dresden); Jan Paun, Spezialklasse der Humboldt-Universität Berlin; Rainer Siegmund-Schultze, EOS „Heinrich Hertz“, Berlin; Gerit Schrade, EOS „Alexander Puschkin“, Prenzlau

Ein Diplom für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe erhielt Reinhard Illge, EOS „Juri Gagarin“, Hermsdorf (Bez. Gera)

Anerkennungsurkunden für gute Leistungen erhielten 42 Schüler.

An der XI. OJM nahmen 176 Jungen und 25 Mädchen teil.

Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. a) Man beweise den folgenden Satz:
Ist die Summe dreier Primzahlen, von denen jede größer als 3 ist, durch 3 teilbar, dann sind alle Differenzen je zweier dieser Primzahlen durch 6 teilbar.
b) Man beweise, daß die Behauptung des Satzes nicht immer wahr ist, wenn die Einschränkung, daß jede der Primzahlen größer als 3 ist, fallengelassen wird.

2. Es sind alle geordneten Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) positiver ganzer Zahlen zu ermitteln, die die folgenden Eigenschaften haben:
(1) Das Produkt dieser vier Zahlen ist gleich 82944000000.
(2) Ihr größter gemeinsamer Teiler (ggT) ist gleich 24.
(3) Ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) ist gleich 120000.
(4) Der größte gemeinsame Teiler von x_1 und x_2 ist gleich 1200.
(5) Das kleinste gemeinsame Vielfache von x_2 und x_3 ist gleich 30000.

Von den nachstehenden Aufgaben 3.1 und 3.2 ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

3.1. Es sei $ABCD$ ein konvexes Drachenviereck mit
$\overline{AB}=\overline{AD}>\overline{BC}=\overline{CD}$. Ferner sei F ein auf AB zwischen A und B gelegener Punkt, für den $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{FB}$ gilt.
Schließlich sei E derjenige im Inneren von $ABCD$ gelegene Punkt, für den $\overline{EC}=\overline{BC}$ $(=\overline{CD})$ und $\overline{FE}=\overline{FB}$ gilt.
Beweisen Sie, daß E auf dem von D auf die Gerade durch A und B gefällten Lot liegt!

3.2. Dirk erklärt Jürgen den Nutzen der Differentialrechnung an Hand der Lösung der folgenden Aufgabe:
Es sei $ABCDE$ ein ebenes konvexes Fünfeck derart, daß A, B, C, E die Eckpunkte eines Rechtecks und C, D, E die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden.
Als Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$ werde nun ein geeigneter Wert F vorgeschrieben.
Man ermittle, ob unter allen diesen Fünfecken eines von kleinstem Umfang u existiert. Ist das der Fall, so berechne man für alle derartigen Fünfecke minimalen Umfangs den Wert $a:b$, wobei $\overline{AB}=a$ und $\overline{BC}=b$ bedeutet.
Am nächsten Tage teilt Jürgen Dirk mit, daß er eine Lösung dieser Aufgabe ohne Verwendung der Differentialrechnung gefunden habe. Man gebe eine Lösung an, die Jürgen gefunden haben könnte.

Fortsetzung auf Seite 92

Arbeitspläne Mathematik

für die außerunterrichtliche Tätigkeit der Klassen 5/6

Die Erfahrung zeigt, daß die erfolgreiche Teilnahme an den Mathematik-Olympiaden eine systematische Vorbereitung voraussetzt, die vor allem in außerunterrichtlicher Betätigung vollzogen wird. Ein Aufgabentraining ist hierzu zwar unbedingt erforderlich, reicht aber allein nicht aus und würde auch der Aufgabenstellung des Gesetzes über das Einheitliche Sozialistische Bildungssystem und dem Mathematikbeschluß nicht entsprechen. Die außerunterrichtliche Tätigkeit im Fach Mathematik soll deshalb die im Mathematikunterricht vermittelten Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten vertiefen, ergänzen und hinsichtlich weiterer Stoffgebiete erweitern.

Zur Erfüllung dieser Forderungen wurden im Rahmen der *Mathematischen Schülergesellschaft* an der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin Vorschläge für mögliche Inhalte der außerunterrichtlichen Tätigkeit in Mathematik entwickelt. Wesentlicher Ausgangspunkt hierfür war, neben einem fundierten Grundwissen und -können, die Schüler systematisch mit solchen Arbeitsweisen vertraut zu machen, wie sie für das Lösen mathematischer Probleme im allgemeinen und unter Olympiadebedingungen im besonderen notwendig sind. Bei der Auswahl der Stoffe wurde auch davon ausgegangen, daß immer mehr moderne mathematische Teilgebiete (Logik, Mengenlehre, Gruppentheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Optimierung) an Bedeutung für Ökonomie, staatliche Planung und Leitung und Landesverteidigung gewinnen. Diese Gebiete sind aber entweder noch nicht oder nur in sehr geringem Maße Gegenstand des Mathematik-Unterrichts an Oberschulen. Sie spielen jedoch eine zunehmende Rolle in den Mathematik-Olympiaden.

Es erscheint jedenfalls möglich, in jeder Klassenstufe bestimmte spezifische mathematische Arbeitsmethoden zu vermitteln und die Schüler mit zunehmendem Alter an wissenschaftliches Denken heranzuführen. Dabei bilden in jeder Klassenstufe die Teilgebiete Logik, Mengenlehre und Algebra eine wichtige Grundlage.

Es muß hier noch hinzugefügt werden, daß die Effektivität der mathematischen Ausbildung der Schüler in dem Maße steigt, indem es gelingt, die Gemeinsamkeiten und Beziehungen zwischen den einzelnen Stoffkomplexen (z. B. Mengenlehre: Mengenoperationen; Logik: Aussagenlogik, Operationen) und deren Anwendungen herauszuarbeiten und den Schülern zu vermitteln. Der nachfolgende Vorschlag für die Klassenstufen 5 und 6 ist insgesamt für etwa 45 Unterrichtsstunden veranschlagt. Natürlich ist es ohne weiteres möglich, für ein geringes Zeitvolumen hieraus auszuwählen; dabei sollten aber möglichst alle angeführten Teilgebiete berücksichtigt werden.

Mit der Veröffentlichung unseres Vorschlages wollen wir auch den Schülern Anregung für das Selbststudium und die Selbstbeschäftigung geben. Dazu sei vor allem auch auf die inzwischen recht zahlreich vorhandenen Veröffentlichungen in der *Mathematischen Schülerbücherei* (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik) und die *Übungen für Junge Mathematiker* verwiesen. Es sei abschließend darauf hingewiesen, daß es sich bei diesem Vorschlag um ein Stoffangebot handelt, welches lediglich eine Orientierung für die außerunterrichtliche Betätigung in Mathematik geben kann.

K. D. Klöpfel/W. Rautenberg

alpha stellt die beiden Autoren dieses Beitrags vor.

Klassenstufe 5

1. Logik

1. Der Gebrauch von Variablen, einfache Terme und Aussageformen, Indizierungen,
2. Klassischer Wahrheitsbegriff (am Beispiel einfacher Aussagen demonstriert). Die Wahrheitsfunktion Negation, Konjunktion, Disjunktion und Implikation und ihre Verwendung an zahlreichen Beispielen. Anwendung auf die logische Struktur von Aussagen und zur Schulung des mathematischen Ausdrukkes.

2. Mengenlehre

1. Menge, Element, Elementbeziehung, Identität von Mengen, Teilmengen
2. Spezielle Mengen (leere Menge, Einer-, Zweiermenge, endl. und unendl. Mengen), auf den Unterschied x (Element), $\{x\}$ (Menge) eingehen
3. Bezeichnungsweisen von Mengen, z. B. $\{a_1, \ldots, a_n\}$
4. Potenzmenge

3. Algebra

1. Belegung von Variablen in Termen (einschl. Bedingungsanalyse wann bei Belegung Ergebnis im vorgegebenen Bereich, Beispiel: Wann ist $3a+2$ gerade Zahl?)
2. Begriff Gleichung Beispiele linearer Gleichung mit einer Variablen, Lösen durch systematisches Probieren (Tabellenverfahren), z. B. $x+3=2x-1$
3. Begriffe Operation – Umkehroperation (anschaulich interpretiert an Addition/Subtraktion)
4. Potenzen mit ganzen Zahlen (Multiplikation $2^3 \cdot 2^4$, Division $3^4 : 3^2$)

4. Zahlentheorie

1. Division mit Rest, Anwendung auf Dezimal- und Dualstellung, nat. Zahlen
2. Umrechnungen der Positionssysteme
3. Kryptogramme und Verwandtes (z. B. Magische Quadrate), z. B. $*3* \cdot 7 = 9*8$ Ziffern gesucht.

5. Analysis

1. Punktmengen auf Geraden, Zahlenstrahl
2. Unterschied $a \leqq b$, $a < b$
3. Einfache lineare Ungleichung mit einer Variablen, Transitivität von Ungleichungen, Dualität ($a < b$, gdw. $b > a$)

6. Geometrie

1. Grundlagen

a) Dreiecke, Vierecke (allgem. Eigenschaften, bes. Linien wie Höhen, Seitenhalbierenden u. a. bzw. Diagonalen u. a.)

b) Räumliche Figuren (Quader, Pyramiden, Tetraeder) Beschreibungen, Dreieck als einfachste Ebene, Tetraeder als einfachste räumliche Figur

c) Anzahl der notwendigen und hinreichenden Bestimmungsstücke von Dreiecken und Vierecken

d) Klassifizierung von geometrischen Figuren (Dreiecke, Vierecke) unter Verwendung der $\subseteqq$-Relation

2. Konstruktionen

a) Grundkonstruktionen und Bezeichnungen (Lot fällen, Senkrechte errichten, Strecke bzw. Winkel halbieren, übertragen, Strecken addieren und subtrahieren)

b) Verschiebungen (Addition und Subtraktion)

c) Inhalt von Konstruktionsbeschreibungen (ohne Beweis und Determination)

3. Berechnungen

a) Addition und Subtraktion von Strecken (Unterschied $a-(b+c)$, $a-b+c$)

b) Flächeninhalte von Vierecken (Quadrat, Rechteck), rechtwinkliges Dreieck

7. Kombinatorik

1. Anordnungen, lexikografische Anordnungen und Permutationen an Beispielen (z. B. Wieviel 4-stellige Zahlen aus den Ziffern 1 bis 4)
2. Anwendung auf Mengen: Anzahl der Indizierung endl. Mengen, Anwendung der Dualzahlen zur Bestimmung des Umfanges von Potenzmengen

8. Spieltheorie

Einfache Spiele, Gewinnchancen (z. B. n Hölzer gegeben, wahlweise 1 bis $k<n$ abwechselnd wegnehmen, wer letztes Holz nimmt hat verloren), Strategie, optimales Verhalten anschaulich am Beispiel (z. B. Zahlenraten u. a.) erläutern

9. Algorithmentheorie

Anschaulicher Begriff Algorithmus, Darstellung als Anweisungsschema (Algorithmen der Rechenoperationen im Dezimal- und Dualsystem), Nachrichtenverschlüsselung dual (Morsealphabet)

Klassenstufe 6

1. Logik

1. Freie Variable, Aussage, Aussageform, Verwendung von Variablen für Aussagen, Klammernregeln für Terme und zusammengesetzte Aussagen
2. Beispiele allgemeingültiger Aussagen und für einfache logische Äquivalenzen (z. B. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$)
3. Einsetzungs- und Abtrennungsregel

2. Mengenlehre

1. Mengenalgebra, Durchschnitt, Vereinigung, Differenz, Komplement
2. Einfache Regeln, z. B. $M \cup M = M$ oder falls $M \subseteqq N$ so $M \wedge N = M$ und $M \cup N = N$
3. Analogie zur Aussagenlogik z. B. Implikation von Aussagen – Enthaltenseinbeziehung von Mengen, Konjunktion – Durchschnitt u. a.

3. Algebra

1. Vergleiche algebraische Operationen – Mengenoperationen, Gesetze der vier Grundrechenoperationen (Assoziativität, Kommutativität, Distributivität)
2. Lineare Gleichungen mit einer Variablen
3. Beispiele für algebraische Strukturen (als Mengen mit gewissen Operationen zwischen den Elementen), z. B. Multiplikation und Division mit gebrochenen Zahlen, Strukturerweiterungen (z. B. natürliche Zahlen — Brüche)

4. Zahlentheorie

1. Allgemeine Eigenschaften der Teilbarkeit (z. B. aus $a|b$ und $a|c$ folgt $a(b+c)$
2. Besondere Teilbarkeitsregeln (8, 7, 11, 9, 99)
3. Analogie zu Mengen (z. B. Durchschnitt der durch drei teilbare Zahlen mit den durch 2 teilbaren Zahlen ist die Menge der durch 6 teilbaren Zahlen)
4. Primzahlzerlegung, vor allem der grundlegende Hilfssatz: Wenn $p \mid ab$, so $p \mid a$ oder $p \mid b$. *Sieb des Eratosthenes*
5. Euklidischer Algorithmus

5. Analysis

1. Punktmengen in der Ebene, konvexe Mengen, Randpunkte, innere Punkte, abgeschlossene und offene Intervalle.
2. Mengenoperation mit Punktmengen, insbesondere mit solchen, die durch Ungleichungen bestimmt sind (z. B. $M = \{a | 1 \leqq 9 \leqq 3\} = [1, 3]$, $N = \{b | 2 \leqq b < 4\} = [2, 4)$, gesucht $M \cap N$ oder $N \cup M$).

6. Geometrie

1. Grundlagen

a) Sätze über geschnittene Parallelen mit Umkehrungen (Wiederholung)

b) Ebene Figuren als Punktmengen

c) Dreiecksgleichungen, Analogie beim Tetraeder (Summe der Flächeninhalte dreier Seiten stets größer als die dritte)

d) Flächengleichheit, Flächenverwandlung

e) Invarianten bei Bewegungen (z. B. Fixpunkte, Maße)

f) Anwenden der Mengenoperationen (z. B. Durchschnitt Rechtecke/Rhomben = Menge der Quadrate)

2. Konstruktionen

a) Dreiecks- und Viereckskonstruktionen (auch mit Hilfskonstruktionen)

b) Konstruktion spezieller Winkel (z. B. 90°, 60°, 30°, 45°)

3. Berechnungen

a) Kombinatorische Geometrie (z. B. Berechnung der Anzahl von Geraden, Strecken, Dreiecken durch vorgegebene Punkte)

b) Ungleichungen, die sich aus Dreiecksungleichungen ableiten lassen (z. B. halber Umfang eines Dreiecks ist größer als jede Dreiecksseite)

7. Kombinatorik

1. Berechnungsformel für Anzahl der Permutationen anwenden, Permutationen mit Wiederholungen
2. Kombination von n Elementen zur Klasse 2 und 3, Anwendung in kombinatorischer Geometrie

8. Graphentheorie

1. Eulersches Brückenproblem, Zeichnen von Graphen in einem Zug (notwendige und hinreichende Bedingung)
2. Darstellung des Vierfarbenproblems als graphentheoretisches Problem (nur Einführung in die Problematik).

9. Algorithmentheorie

Darstellen der Algorithmen von Euklid, Eratosthenes als Flußdiagramm.

Zahlreiche Beispiele zur Festigung der Flußdiagrammtechnik.

Preisträger

der FDGB-Urlauberolympiade 1972
(Heft 1/72)

Folgende *alpha*-Leser erhielten Ehrenurkunde und Buchpreise: Kirsten Helbig, POS Schöneberg (Kl. 6); Andreas Schlosser, KKS Zwickau (Kl. 9); Rolf Sydow, POS Joachimsthal (Kl. 10); Petra Mittelstedt, Halle (Kl. 9); Rainer Guse, POS Bretleben (Kl. 9); Heike Kleffel, Suhl (Kl. 12); Joachim Päßler, POS Bärenstein (Kl. 8); Ellen Hartenstein, POS Radegast (Kl. 8); Mathias Otto, POS I Markneukirchen (Kl. 8); Annegret Kirsten, August-Bebel-OS Leuna (Kl. 7); Marid Helbig, 1321 Schöneberg (Kl. 3)

▲1▲ Einer Schulklasse gehören genau 30 Schüler an. Genau zehn von ihnen können schwimmen, genau 15 von ihnen können radfahren. Acht Schüler dieser Klasse können sowohl schwimmen als auch radfahren. Bestimme die Anzahl derjenigen Schüler, die
a) schwimmen, aber nicht radfahren können,
b) radfahren, aber nicht schwimmen können,
c) weder radfahren noch schwimmen können.

▲2▲ In einer Klasse mit genau 31 Schülern gibt es genau 19 Schüler, die schwimmen und genau 21 Schüler, die radfahren können. Wieviel Schüler gibt es mindestens und wieviel höchstens, die sowohl schwimmen als auch radfahren können?

▲3▲ Es sind alle natürlichen Zahlen x zu bestimmen, die die folgenden drei Ungleichungen zugleich erfüllen:
$8<x<20$; $14<x<24$; $18<x<26$.

▲4▲ Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die jeweils gleich der 3. Potenz ihrer Quersumme sind.

▲5▲ Ein Rechteck, das doppelt so lang wie breit ist, hat einen Umfang von 18 cm Länge. Berechne den Flächeninhalt dieses Rechtecks!

▲6▲ Der Flächeninhalt eines Rechtecks betrage 24 cm². Welches von allen möglichen Rechtecken besitzt den größten Umfang; wenn die Maßzahlen der Seitenlängen natürliche Zahlen sind?

▲7▲ Warum ist die Summe aus den Längen der beiden Diagonalen eines Vierecks kleiner als die Summe aus den Längen seiner vier Seiten? Die Antwort ist zu begründen!

▲8▲ Die Schüler einer Klasse hatten zusammen 350,— M für eine gemeinsame Ferienexkursion gespart. Es bildeten sich drei Wandergruppen, und zwar zu 8, 11 und 16 Pionieren. Die Ersparnisse wurden entsprechend der Stärke der Wandergruppen aufgeteilt. Wieviel Mark entfielen auf jede der drei Wandergruppen?

▲9▲ Ein Blumenbeet, das die Gestalt eines Rechtecks besitzt, ist 7 m lang und 4 m breit. Rund herum sollen Sträucher gepflanzt werden, die voneinander einen Abstand von 25 cm aufweisen. Wie viele Sträucher sind zu pflanzen?

D. Michels/Th. Scholl

Über unsere Arbeit

mit der mathematischen Schülerzeitschrift alpha

Seit Jahren bestehen an der Polytechnischen Oberschule Lübtheen Arbeitsgemeinschaften, in denen Schüler ihre mathematischen Kenntnisse aus dem Unterricht vertiefen, ergänzen und sich mit solchen Bereichen der Mathematik auseinandersetzen, die nicht im Unterricht behandelt werden.
Die Schüler der AG, Klassenstufe 9/10, beschäftigen sich (unter Leitung von Oberlehrer K. Becker) vorwiegend mit Problemen der Zahlentheorie einschließlich der diophantischen Gleichungen, kombinatorischen Fragen und kniffligen geometrischen Konstruktionen (wöchentlich zwei Stunden).
Die Aufgabe 1 der diesjährigen Schulolympiade für Klasse 10 war eine diophantische Gleichung. Ihr findet sie im Heft 4/71 unserer mathematischen Schülerzeitschrift alpha.
Ein Raum soll mit 32 Glühlampen so ausgestattet werden, daß sich eine Gesamtleistung von 1800 Watt ergibt. Es stehen je ausreichend viele Glühlampen von je 40 Watt, 60 Watt und 75 Watt, aber keine anderen zur Verfügung.
Gib alle Möglichkeiten einer derartigen Ausstattung an! Wie wir diese Aufgabe gelöst haben, möchten wir euch jetzt zeigen.
Bezeichnet man die Anzahl der Glühlampen von 40, 60 bzw. 75 Watt jeweils mit x, y bzw. z, so ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} \quad x+y+z=32 \\ &\text{(II)} \quad 40x+60y+75z=1800 \end{aligned} \quad \text{mit } x,y,z \in N.$$

Setzt man

$$\text{(I*)} \quad z=32-x-y$$

in (II) ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\text{(III)} \quad 35x+15y=600.$$

Da der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten von x und y ein Teiler des absoluten Gliedes der Gleichung ist, also
$(35; 15)=5$ und $5|600$,
besitzen die Gleichung (III) und die dazu äquivalente

$$\text{(IV)} \quad 7x+3y=120$$

Lösungen $[x; y]=[x_0+3t; y_0-7t]$ mit $t \in G$, wobei $[x_0; y_0]$ eines der Lösungspaare ist.
Dieses Paar kann mit Hilfe zahlentheoretischer Kongruenzen ermittelt werden. Dazu empfehlen wir euch, die Beiträge über das Rechnen mit Resten in den Heften 3 bis 6 des Jahrganges 1969 sowie in den Heften 1 und 2 des Jahrganges 1970 unserer alpha zu lesen.
Auch die „Übungen für Junge Mathematiker, Teil 1: Zahlentheorie" aus der Teubnerschen Verlagsgesellschaft Leipzig geben euch viele Hinweise.
Aus (IV) folgt

$$\begin{aligned} 7x &\equiv 120 \bmod 3 \\ x &\equiv 0 \bmod 3. \end{aligned}$$

Damit können wir $x_0=0$ wählen und erhalten durch Einsetzen in (IV) dann $y_0=40$. Die Lösungsmenge für (III) ist somit
$L_{III}=\{[0+3t; 40-7t]\}$ mit $t \in G$.

Aus der Wertetafel

t ⋯	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$ ⋯
$x=3t$ ⋯	-3	0	3	6	9	12	15	18 ⋯

$y=$	$40-7t \cdots$	47	40	33	26	19	12	5
		$\leftarrow$				$-2 \cdots$		
$z=32-x-y$	$\cdots$	-12	-8	-4	0	4	8	12
		$\leftarrow$				$16 \cdots$		

ist ersichtlich, daß wegen $x, y, z \in N$ nur die Tripel $[x; y; z]$ für $t \in \{2; 3; 4; 5\}$ Lösungen der Olympiadeaufgabe sind.

Bei vielen Problemen, die wir in unseren Zirkelnachmittagen besprechen, ist uns also die Zeitschrift alpha eine große Hilfe. Wie arbeiten wir nun mit unserer mathematischen Schülerzeitschrift?

Vornehmlich wählen wir jene Beiträge aus, die den Themen unseres Arbeitsplanes entsprechen. Bis zur nächsten Zusammenkunft macht sich dann jeder von uns im Selbststudium mit dem Inhalt des entsprechenden Artikels bekannt, fertigt eine Inhaltsübersicht an und zieht die wesentlichen Definitionen, Sätze und Übungsbeispiele heraus. Einer von uns hält dann anhand dieser Aufzeichnungen einen Kurzvortrag. Danach erörtern wir offengebliebene Fragen und dringen so tiefer in den Inhalt des Beitrages ein. Anschließend werden Übungsaufgaben gerechnet, deren Lösungswege wir diskutieren. Darunter waren auch folgende diophantische Gleichungen:

▲1▲ Bestimmt die ganzzahligen Lösungen der Gleichung $6x+5y=40$!

▲2▲ Die Zahl 100 soll im Bereich der natürlichen Zahlen in zwei Summanden zerlegt werden, von denen der eine durch 6 und der andere durch 8 teilbar ist. Bestimmt die möglichen Lösungspaare!

Wenn ihr so vorgeht, wie in dem obigen Beispiel und euch außerdem noch Rat aus den erwähnten Artikeln unserer Schülerzeitschrift holt, dann werdet ihr die Lösungen bestimmt ermitteln.

Sabine Pioch, Jochen Kummer
Mitglieder der AG 9/10 der POS Lübtheen

Kennt ihr

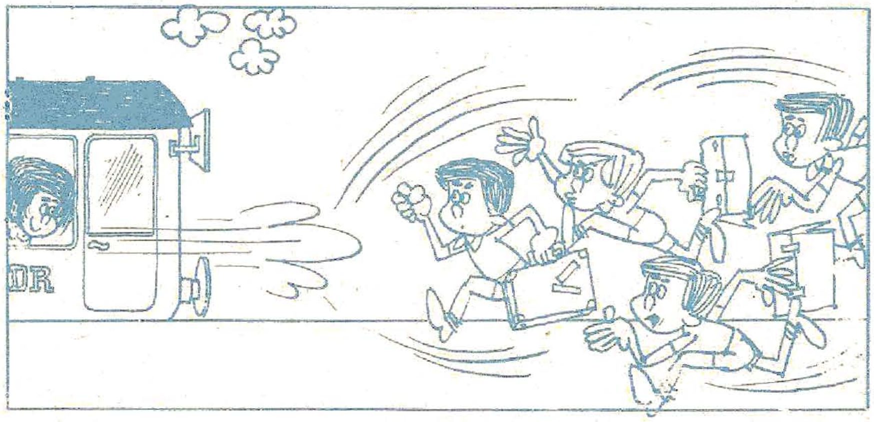
impuls 68

Seit fünf Jahren wird in Jena an der Sektion Physik der Friedrich-Schiller-Universität eine Zeitschrift für Schüler herausgegeben.

Die Redaktion besteht zum größten Teil aus Studenten. In der Zeitschrift erscheinen Artikel aus den Gebieten der Physik, Chemie, Biologie und Gesellschaftswissenschaften. Dabei werden nicht nur Jena-spezifische Themen behandelt, sondern auch Themen, die an anderen Universitäten und Hochschulen vorrangig sind. Die Zeitschrift „impuls 68" soll die Schüler auf ein späteres Studium in einer dieser Fachrichtungen vorbereiten, sie soll darüber informieren, wie ein Studium an einer Hochschule oder Universität abläuft.

Wer Interesse hat, unsere Zeitschrift zu lesen, der schreibt bitte an Redaktion „impuls 68", 69 Jena, Max-Wien-Platz 1

Für Junge Mathematiker: Mathematik frei Haus



Was macht ein Junger Mathematiker des Bezirkes Leipzig, wenn er seine mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten vervollkommnen und erweitern will, aber wegen ungünstiger Fahranschlüsse oder auch aus anderen Gründen nicht an einem Mathematik-Kreiszirkel bzw. als mathematisch hervorragender Schüler nicht an den Spezialzirkeln des Bezirkes in der Messestadt Leipzig teilnehmen kann?

Er wird Mitglied des Mathematik-Korrespondenzzirkels.

Seit mehr als einem Jahr erhalten die *Jungen Mathematiker* in diesem Zirkel im Abstand von etwa acht Wochen fünfmal jährlich Mathematikaufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades mit der Post frei Haus zugestellt. Etwa sechs bis acht Wochen nach Erhalt der Aufgaben ist Lösungseinsendeschluß. Vier bis sechs Wochen danach veröffentlicht die Aufgabenkommission Lösungsvorschläge. Jeweils mit den Aufgaben der übernächsten Serie erhalten die Zirkelmitglieder ihre korrigierten Einsendungen zurück, dazu eine Auswertung der eingesandten Lösungen. Gleichzeitig veröffentlichen wir besonders gute Lösungsbeispiele von Mitgliedern unseres Zirkels.

Alles Material erhalten die Zirkelmitglieder kostenlos zugestellt. Pro Aufgabenserie hat das Zirkelmitglied als seinen „Mitgliedsbeitrag" mindestens eine Lösung einzusenden. Erfolgreichste Zirkelmitglieder waren 1971: Kerstin Müller (Brandis), Klaus Schulze (Brandis), Mariana Klöpper (Borsdorf) und Steffen Etzold (Altkirchen).

Seit Beginn des Jahres 1972 erfolgt die Arbeit des Zirkels in Kooperation mit alpha. Die Aufgaben des alpha-Wettbewerbs sind Arbeitsmaterial des Zirkels, das wir durch drei weitere Aufgaben von unserer Seite ergänzen. Mit diesen Aufgaben und dazugehörigen Handreichungen orientieren wir schwerpunktmäßig auf bestimmte Sachgebiete, z. B. auf das Lösen von Konstruktionsaufgaben. Für jede richtig gelöste Aufgabe des alpha-Wettbewerbs erhalten die Zirkelmitglieder, sofern sie die Wettbewerbsbedingungen erfüllten, von uns im Auftrag von alpha die alpha-Antwortkarten. Die eingesandten Lösungen werden im Zirkel diskutiert.

Zum Schluß möchte ich drei Aufgaben überreichen, die 1971 in unserem Zirkel gelöst wurden:

▲1▲ Die Quersumme einer natürlichen Zahl n mit zweistelliger Dezimaldarstellung ist 12. Vertauscht man in der Dezimaldarstellung von n die Ziffern und subtrahiert die so erhaltene Zahl von n, so erhält man 54. Man bestimme n!

▲2▲ Wieviel Dreiecke mit dem Umfang 16 LE (LE = Längeneinheiten) gibt es, deren Seitenlängen natürliche Zahlen als Maßzahlen haben?

▲3▲ Es ist zu beweisen, daß die Summe aus den Quadraten der Abstände irgendeines Punktes auf dem Umkreis eines regelmäßigen Sechsecks von den Eckpunkten dieses Sechsecks unabhängig von der speziellen Lage des Umkreispunktes konstant ist!

Viel Erfolg beim Lösen wünscht

R. Bergmann

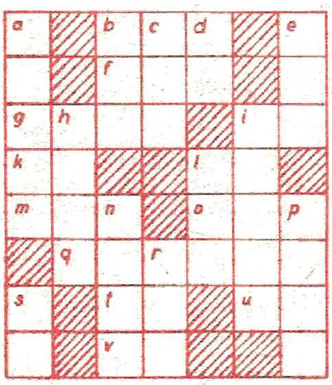
In freien Stunden alpha heiter

Entdeckerfreuden

Aus: LVZ v. 6. 11. 1971 – Reißig

Mathematisches Kreuzworträtsel

In die freien Felder des Schemas sind Ziffern, und zwar jeweils eine der Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 einzutragen, so daß sich in waagerechter bzw. senkrechter Anordnung die weiter unten definierten Zahlen ergeben.



Dabei bedeuten:

Waagerecht

b) Die größte natürliche Zahl, die kleiner als 100π ist.
f) Die kleinste von Null verschiedene natürliche Zahl, die durch 16 und 49 teilbar ist.
g) Die Lösung der Gleichung $\frac{x}{30}=1+\frac{2x}{61}$.
i) Die größte Primzahl, deren 11faches kleiner als 1 000 ist.
k) Die größte zweistellige Quadratzahl.
l) Die größte gerade zweistellige Quadratzahl.
m) Die Lösung der Gleichung $2x-100=666$.
o) Die Lösung der Gleichung $9(x-111)=5(x+9)$.
q) Die Lösung der Gleichung $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=15\,293$.
t) Eine Primzahl, die kleiner als 50 ist und deren Nachfolger durch 11 teilbar ist.
u) Eine zweistellige Primzahl, die aus zwei gleichen Ziffern besteht.
v) Zwei natürliche Zahlen, deren Summe gleich 3 ist und bei denen die Differenz aus der zweiten und der ersten Zahl ebenfalls gleich 3 ist.

Senkrecht

a) Die Zahl $(x-12)(x-2)(x+2)(2x+11)$, wobei $x=15$ ist.
b) Die kleinste Primzahl, die größer als 370 ist.
c) Die Maßzahl der Größe eines gestreckten Winkels (in Grad).
d) Die kleinste von Null verschiedene natürliche Zahl, die durch 4 und 11 teilbar ist.
e) Die Summe der ersten zehn Primzahlen.
h) Die ersten vier Dezimalstellen hinter dem Komma des Bruches $\frac{9}{11}$.
i) Die Lösung der Gleichung $423(x-100)=422(x+100)+111$.
l) Eine dreistellige Zahl, die die vierte Potenz einer Primzahl ist.
n) Die ersten vier Dezimalstellen hinter dem Komma für das Bogenmaß des Winkels, dessen Gradmaß gleich 22° ist (wobei die letzte Stelle gerundet worden ist).
p) Zwei zweistellige natürliche Zahlen, von denen die erste der Nachfolger der zweiten ist und deren Summe 31 beträgt.
r) Die größte natürliche Zahl, deren Dreifaches kleiner als 1 000 ist.
s) Die größte zweistellige natürliche Zahl.

Karin Vetter, Oberschule Weinböhla, Kl. 8

Mathematisch formulierte Vornamen — Wer errät sie?

Mathematischer Ausdruck	Mögliche Bedeutung
r_{ik}, p_{tr}, h_{gn}	Elemente einer Matrix
u_t	von der Zeit t abhängige Lösung einer Differentialgleichung
$\mathfrak{n}_\varphi$	Einheitsvektor in φ-Richtung ($[r, \varphi]$ Polarkoordinaten)
m_a, t_a	indizierte Variable
t^o	obere Grenze eines Zeitintervalls
$a \cdot \mathfrak{i}_e$	skalares Produkt des Vektors $\mathfrak{i}_e$ mit der reellen Zahl a
$\min(n, a)$	Minimum der beiden Zahlen n und a
$G \wedge E_r$	logische Verknüpfung der Aussagen G, E_r
$ln\, a$	natürlicher Logarithmus der positiven Zahl a
$I(e)$	Funktion I, abhängig von einer Veränderlichen e

Dipl. Math. Ch. Pollmer, TU Dresden

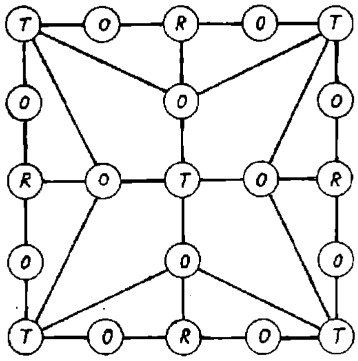
Nachgedacht — mitgemacht

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & CA \\ - & & + & & + \\ \hline D & + & F & = & GH \\ \hline C & \cdot & GA & = & KA \end{array}$$

Schüler Manfred Riemer, EOS „Rainer Fetscher“, Pirna Kl. 11

Rotor

Verfolgt man in dem Graphen die Wege, so kann man das Wort „Rotor“ mehrfach lesen.
Auf wieviel Arten ist das möglich, wenn Anfangs- und Endbuchstabe R nicht zusammenfallen dürfen?

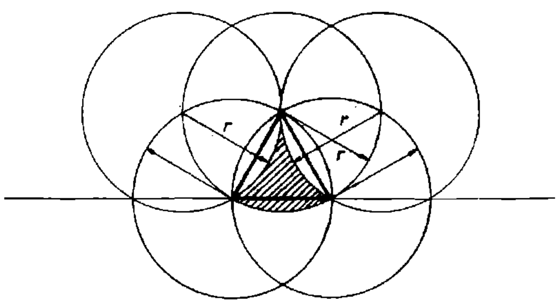


Oberlehrer Dipl.-Mathematiklehrer K. Becker, OS Lübtheen

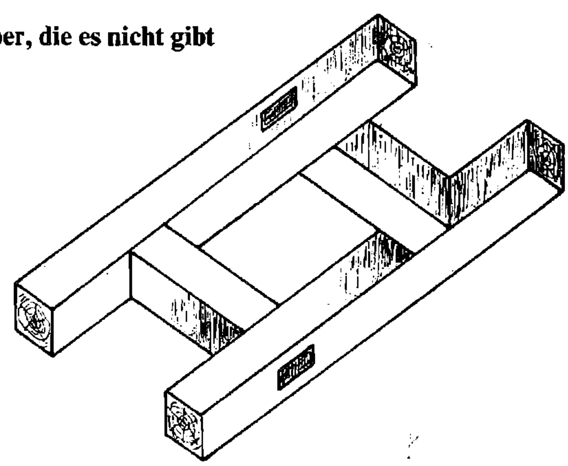
Fünf olympische Ringe — einmal anders

Es ist der Flächeninhalt A der schraffierten Figur zu berechnen!

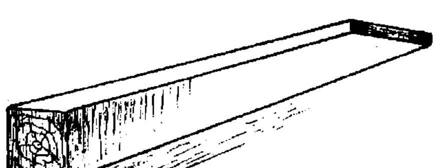
Schüler Hans-Reinhard Berger, EOS Lichtenstein, Kl. 12



Körper, die es nicht gibt

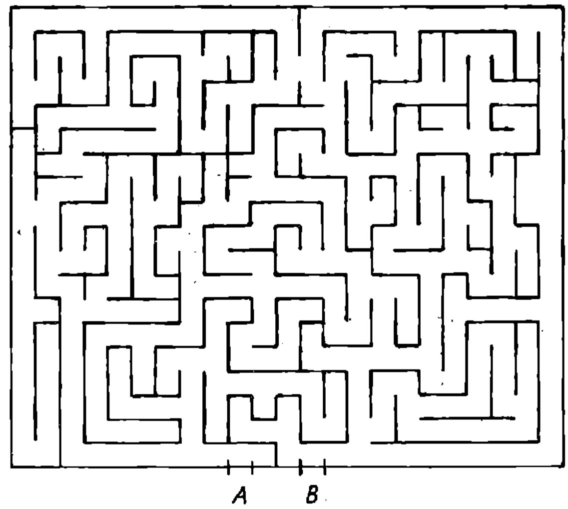


Dipl.-Ing. Dr. M. Skalicky, Wien



Labyrinth

Wer findet den kürzesten Weg von A nach B?



Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz

Ein Mathematik-Olympionik löst eine Aufgabe

Einzudringen in die schloßverhängten Gänge,
hievt er Werkzeug aus den Gruben seines Hirns,
eingelagert einst mit Paukenschlag,
entwickelt auch im eigenen Labor.

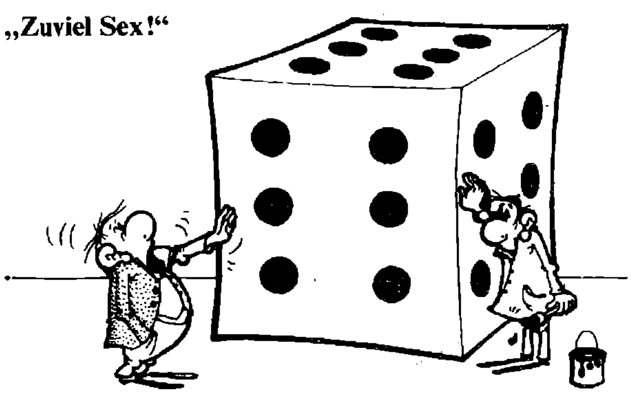
Mit dem Sinus bohrt er hier,
setzt dort den Vektorhebel an,
feilt sich einen Integraldietrich,
um aufzuzwingen das Schloß.

Er wickelt seinen Tintenfaden ab,
um zurückzufinden aus den Sackgassen,
die sein wegeoptimierender Computer
nicht erfaßt hat.

Eine Kommission wird
ihm einen weißen Wimpel schenken,
der ihn ausweist als geübten Schlosser,
zähen Schatzsucher
und sorgfältigen Gedankenvereiniger.

Silvia Kortmann (18)
2. Zentrales Poetenseminar der FDJ in Schwerin (1971)

„Zuviel Sex!“



G. Langelotz
Aus: Kunststücke, Eulenspiegelverlag

Fortsetzung von Seite 89

4. Ermitteln Sie alle Tripel (m, x, y) aus einer reellen Zahl m, einer negativen ganzen Zahl x und einer positiven ganzen Zahl y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

(1) $-2x+3y=2m$

(2) $x-5y=-11$.

5. Gegeben seien ein Quadrat $ABCD$ und auf der Geraden h durch A und C ein vom Mittelpunkt M des Quadrats verschiedener Punkt P. Die auf h senkrechte durch A laufende Gerade sei g_1, die auf h senkrechte durch C laufende Gerade sei g_2. Ferner sei h_1 die Gerade durch P und B und h_2 die Gerade durch P und D. Der Schnittpunkt von g_1 und h_1 sei Q, der von g_2 und h_1 sei R, der von g_2 und h_2 sei S und der von g_1 und h_2 sei T genannt. Die Schnittpunkte der Parallelen durch Q und S zu AB sowie durch R und T zu AD seien so mit E, F, G, H bezeichnet, daß $EFGH$ ein Rechteck ist.
Schließlich sei I_1 der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und I_2 der des Rechtecks $EFGH$.
Ermitteln Sie $I_1 : I_2$!

6. Es seien A, B, C, D die Ecken eines (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders, S ein in seinem Innern gelegener Punkt und A', B', C', D' die Schnittpunkte der aus A, B, C bzw. D durch S verlaufenden Strahlen mit den Flächen der Dreiecke $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ bzw. $\triangle ABC$.
Man beweise, daß dann
$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{AA'}}+\frac{\overline{SB'}}{\overline{BB'}}+\frac{\overline{SC'}}{\overline{CC'}}+\frac{\overline{SD'}}{\overline{DD'}}=1 \text{ gilt.}$$

Olympiadeklasse 11/12

1. Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die der Ausdruck
$$\frac{2x}{|x-3|-5}+\frac{1}{x+2} \qquad (1)$$
existiert, und unter diesen alle x zu ermitteln, die die folgende Ungleichung (2) erfüllen
$$\frac{2x}{|x-3|-5}+\frac{1}{x+2}\geqq 1 \qquad (2)$$

2. Es sei $f(x)=$
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2+\tan^2 x} & \text{für alle reellen } x, \text{ für die } x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ gilt } (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \\ 0 & \text{für alle } x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi. \end{cases}$$
Man beweise, daß die für alle reellen x durch $F(x)=f(x)+f(ax)$ definierte Funktion F genau dann periodisch ist, wenn die Konstante a eine rationale Zahl ist.

3. Es seien P_1, P_2, P_3, Q die Eckpunkte eines nicht notwendig regelmäßigen Tetraeders. Die Strahlen aus Q durch je zwei Punkte P_i, P_j $(i, j=1, 2, 3)$ bilden einen Winkel, dessen Größe α_{ij} zwischen 0° und 180° liegt. Man beweise, daß für diese Größen die Ungleichung
$$\alpha_{23}+\alpha_{31}>\alpha_{12} \text{ gilt.}$$

4. a) Man ermittle alle geordneten Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die die Gleichung
$$x^3z+x^2y+xz+y=x^5+x^3$$
erfüllen.
b) Man gebe unter den in (a) gesuchten Tripeln alle diejenigen an, in denen von den drei Zahlen x, y, z genau eine positiv, genau eine negativ und genau eine gleich Null ist.

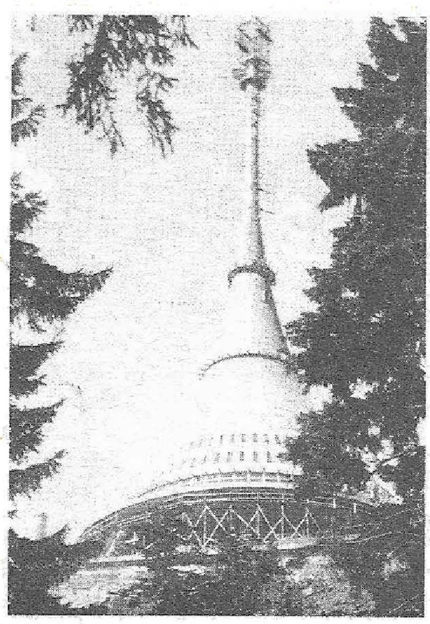
5. Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen x, geschrieben im dekadischen Positionssystem, für die gilt:
Fügt man an die Ziffernfolge der Zahl x rechts die Ziffernfolge $x+1$ an, so erhält man die Ziffernfolge einer sechsstelligen Quadratzahl.

Von den nachstehenden Aufgaben 6.1 und 6.2 ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

6.1. Es sei n eine natürliche Zahl, für die $4\leqq n\leqq 8$ gilt. In der Ebene seien n Punkte so angeordnet, daß auf jeder Geraden durch je zwei dieser Punkte wenigstens noch ein weiterer dieser n Punkte liegt.
Man beweise, daß dann eine Gerade existiert, auf der alle diese n Punkte liegen.

6.2. Als „Abstand" zweier Funktionen f und g, die im gleichen Intervall definiert sind, bezeichne man den größten aller in diesem Intervall auftretenden Werte $|f(x)-g(x)|$, falls ein solcher größter Wert existiert.
Es seien die im Intervall $-2\leqq x\leqq 2$ durch $f(x)=2-|x|$ und die im gleichen Intervall durch $g(x)=-ax^2+2$ (a eine positive reelle Zahl) definierten Funktionen f und g gegeben. Man untersuche, ob es einen Wert a gibt, für den der „Abstand" von f und g möglichst klein ist.
Gibt es ein solches a, so gebe man alle derartigen Werte a an.

Kartengruß an *alpha*: Als Anerkennung für 5- bzw. 4jährige Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb erhielten 9 Schüler der POS Burkau eine Reise nach der ČSSR (Liberec-Ješcěd).



Lösungen

Lösung der Aufgabe von Lektor A. Makowski

▲912 Wir setzen $f(n)=n^4+4^n$, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, und unterscheiden die folgenden Fälle:

1. Fall: Es sei $n=1$.
In diesem Falle erhalten wir
$f(1)=1^4+4^1=1+4=5$, also eine Primzahl.

2. Fall: Es sei $n=2k$ eine gerade natürliche Zahl mit $n>1$, d. h. $k\geqq 1$. Dann gilt
$f(n)=n^4 4^n=(2k)^4+4^{2k}=16k^4+16^k$
$=16(k^4+16^{k-1})$.
In dieser Faktorenzerlegung sind wegen $k-1\geqq 0$ beide Faktoren ganzzahlig, und 16 ist nicht Primzahl, also ist auch $f(n)$ nicht Primzahl.

3. Fall: Es sei $n=2k+1$ eine ungerade natürliche Zahl mit $n>1$, also $k\geqq 1$. Dann gilt
$$f(n)=n^4+4^n=2^{2n}+2\cdot 2^n\cdot n^2+n^4-2^{n+1}\cdot n^2 \qquad (1)$$
$$=(2^n+n^2)^2-2^{n+1}\cdot n^2,$$
$$f(n)=(2^n+n^2+2^{\frac{n+1}{2}}\cdot n)(2^n+n^2-2^{\frac{n+1}{2}}\cdot n). \qquad (2)$$
Da n ungerade ist und $n\geqq 3$ gilt, ist $\frac{n+1}{2}=k+1$ eine natürliche Zahl, und beide Faktoren in der Faktorenzerlegung von (2) sind ganzzahlig. Wir müssen nun noch zeigen, daß beide Faktoren größer als 1 sind; dann ist nämlich $f(n)$ nicht Primzahl.
Nun ist der erste Faktor größer als 1, da alle Summanden größer als 1 sind. Ferner gilt für den zweiten Faktor in (2)
$$2^n+n^2-2^{\frac{n+1}{2}}\cdot n=n^2-2\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\cdot n+2^{n-1}+2^n-2^{n-1}$$
$$=(n-2^{\frac{n-1}{2}})^2+2^{n-1}\cdot(2-1)$$
$$=(n-2^{\frac{n-1}{2}})^2+2^{n-1}\geqq 4,$$
da $n-1\geqq 2$ gilt.

Also ist auch der zweite Faktor in (2) größer als 1, d. h. $f(n)$ ist im 3. Fall niemals eine Primzahl.
Damit wurde bewiesen, daß es genau eine von Null verschiedene natürliche Zahl n gibt, nämlich $n=1$, für die die Zahl n^4+4^n eine Primzahl ist.

Lösungen zu: Aufgepaßt — nachgedacht — mitgemacht (Heft 4/72)

▲1▲ Aus $10-8=2$ folgt, daß zwei Schüler schwimmen, aber nicht radfahren können. Aus $15-8=7$ folgt, daß sieben Schüler radfahren, aber nicht schwimmen können. $10+15-8=17$ und $30-17=13$ folgt, daß 13 Schüler weder radfahren noch schwimmen können.

▲2▲ Aus $19+21=40$ und $40-31=9$ folgt, daß mindestens neun Schüler sowohl schwimmen als auch radfahren können. Es kann der Fall eintreten, daß alle 19 Schüler, die schwimmen können zugleich auch radfahren können, da $19<21$ gilt. Es gibt demnach höchstens 19 Schüler, die sowohl schwimmen als auch radfahren können.

▲3▲ Die Ungleichung $8<x<20$ wird von den Zahlen 9, 10, 11, ..., 18, 19 erfüllt.
Die Ungleichung $14<x<24$ wird von den Zahlen 15, 16, 17, ..., 22, 23 erfüllt.
Die Ungleichung $18<x<26$ wird von den Zahlen 19, 20, 21, ..., 24, 25 erfüllt.
Nur die Zahl 19 erfüllt demnach alle drei Ungleichungen.

▲4▲ Wegen $4^3=64<100$ und $10^3=1000>999$ brauchen nur die dritten Potenzen der Zahlen 5, 6, 7, 8 und 9 untersucht werden. Nun gilt $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$ und $9^3=729$. Die zugehörigen Quersummen lauten 8, 9, 10, 8 und 18. Nur die Zahl 512 erfüllt die Bedingung.

▲5▲ Es sei a die Länge und b die Breite des Rechtecks, dann gilt $a=2b$. Der Umfang beträgt somit
$2\cdot(b+2b)=18$ cm, also $3b=9$ cm und $b=3$ cm. Daraus folgt $a=6$ cm. Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt demnach
$A=a\cdot b=6\cdot 3\text{ cm}^2=18\text{ cm}^2$.

▲6▲ Aus $a\cdot b=24=1\cdot 24=2\cdot 12=3\cdot 8=4\cdot 6$ ergeben sich für den Umfang des Rechtecks folgende Möglichkeiten, die in der nachstehenden Tabelle angeführt sind:

a	b	$a+b$	$2\cdot(a+b)$
1	24	25	50
2	12	14	28
3	8	11	22
4	6	10	20

Das Rechteck mit den Seitenlängen $a=1$ cm und $b=24$ cm besitzt somit den größten Umfang.

▲7▲ In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.
$$a+b>e,\quad b+c>f,$$
$$c+d>e,\quad a+d>f.$$
Durch Addition dieser vier Ungleichungen erhalten wir
$2\cdot(a+b+c+d)>2\cdot(e+f)$ und somit
$a+b+c+d>e+f$.

▲8▲ Aus $8+11+16=35$ und $350:35=10$ folgt, daß für jeden Schüler 10 M zur Verfügung stehen. Die erste Wandergruppe erhält demnach $10\cdot 8$ M $=80$ M, die zweite $10\cdot 11$ M $=110$ M, die dritte $10\cdot 16$ M $=160$ M.

▲9▲ Das rechteckige Blumenbeet hat einen Umfang von $2\cdot(7+4)\text{ m}=22$ m. Auf das erste Meter kommen 5 Pflanzen, auf das letzte Meter kommen 3 Pflanzen, auf die übrigen 20 Meter kommen jeweils 4 Pflanzen. Insgesamt sind somit $5+3+80=88$ Pflanzen zu stecken.

▲10▲ Angenommen es haben x Schüler die Note 4 erhalten, dann haben $2x$ Schüler die Note 2 erhalten und $(23-3x)$ Schüler die Note 1. Demnach gilt
$$\frac{(23-3x)\cdot 1+2x\cdot 2+8\cdot 3+x\cdot 4}{31}=2,$$
$$23-3x+4x+24+4x=62,$$
$$47+5x=62,$$
$$5x=15,\ \text{also}\ x=3.$$
14 Schüler erhielten die Note 1, sechs Schüler die Note 2, acht Schüler die Note 3 und drei Schüler die Note 4.

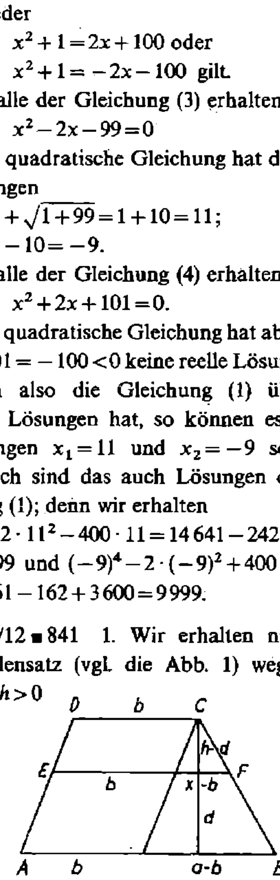
Lösung zu: Eine Aufgabe von R. Gutschke

▲944▲ Da der Briefumschlag und vier Blatt Schreibpapier zusammen genau soviel wiegen wie sechs Blatt Schreibpapier, wiegt der Umschlag allein genau soviel wie zwei Blatt Schreibpapier. Ein Umschlag und zwei Blatt Schreibpapier wiegen genau 20 g; deshalb wiegen fünf Blatt Schreibpapier ebenfalls 20 g, also ein Blatt 4 g und ein Umschlag 8 g. Ein Umschlag und zehn Blatt Schreibpapier würden somit $8\text{ g}+10\cdot 4\text{g}=48$ g wiegen. Zum Frankieren des Briefes benötigt man eine 40-Pf-Briefmarke.

10▲839 Wir führen den Beweis indirekt.
a) Angenommen, die Ungleichung (1) sei falsch. Dann gilt
$$\sqrt{10}-\sqrt{9}\geqq\sqrt{9}-\sqrt{8}, \tag{3}$$
also $\sqrt{10}+\sqrt{8}\geqq 2\sqrt{9}$.
Hieraus folgt, da die Terme auf beiden Seiten der Ungleichung positiv sind, durch Quadrieren
$$10+2\sqrt{80}+8\geqq 4\cdot 9,$$
$$8\sqrt{5}\geqq 18,$$
$$4\sqrt{5}\geqq 9.$$
Hieraus folgt weiter durch Quadrieren $80\geqq 81$. Damit erhalten wir einen Widerspruch. Daher ist die Ungleichung (3) falsch, und es gilt, wie behauptet,
$$\sqrt{10}-\sqrt{9}<\sqrt{9}-\sqrt{8}.$$
b) Wir führen auch den allgemeinen Beweis indirekt und nehmen an, daß
$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\geqq\sqrt{n}-\sqrt{n-1} \tag{4}$$
gilt. Dann erhalten wir analog wie unter a)
$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\geqq 2\sqrt{n},$$
$$n+1+2\sqrt{(n+1)(n-1)}+n-1\geqq 4n,$$
$$2\sqrt{n^2-1}\geqq 2n,$$
$$\sqrt{n^2-1}\geqq n,$$
$$n^2-1\geqq n^2,\ \text{also}\ -1\geqq 0.$$
Das ist aber ein Widerspruch; also ist die Ungleichung (4) falsch, und es gilt, wie behauptet, für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n
$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}.$$

W 10/12 ■ 840 Wir formen die gegebene Gleichung
$$x^4-2x^2-400x=9999 \tag{1}$$
zunächst so um, daß wir auf beiden Seiten Quadrate von Binomen erhalten. Zu diesem Zweck addieren wir zunächst auf beiden Seiten $400x+1$:
$$x^4-2x^2+1=400x+10000.$$
Nun addieren wir auf beiden Seiten $4x^2$ und erhalten
$$x^4+2x^2+1=4x^2+400x+10\,000,$$
also
$$(x^2+1)^2=(2x+100)^2. \tag{2}$$
Die Gleichung (2) ist genau dann erfüllt, wenn entweder
$$x^2+1=2x+100\ \text{oder} \tag{3}$$
$$x^2+1=-2x-100\ \text{gilt.} \tag{4}$$
Im Falle der Gleichung (3) erhalten wir
$$x^2-2x-99=0 \tag{5}$$
Diese quadratische Gleichung hat die reellen Lösungen
$x_1=1+\sqrt{1+99}=1+10=11;$
$x_2=1-10=-9.$
Im Falle der Gleichung (4) erhalten wir
$$x^2+2x+101=0. \tag{6}$$
Diese quadratische Gleichung hat aber wegen $1-101=-100<0$ keine reelle Lösung.
Wenn also die Gleichung (1) überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Lösungen $x_1=11$ und $x_2=-9$ sein. Tatsächlich sind das auch Lösungen der Gleichung (1); denn wir erhalten
$11^4-2\cdot 11^2-400\cdot 11=14\,641-242-4400$
$=9999$ und $(-9)^4-2\cdot(-9)^2+400\cdot 9$
$=6561-162+3600=9999.$

W 10/12 ■ 841 1. Wir erhalten nach dem Strahlensatz (vgl. die Abb. 1) wegen $a>b$ und $h>0$



$$\frac{x-b}{a-b}=\frac{h-d}{h},$$
also
$$x-b=(a-b)\left(1-\frac{d}{h}\right),$$
$$x-b=a-b-\frac{a-b}{h}d,$$
$$x=a-\frac{a-b}{h}d$$
und
$$d=\frac{a-x}{a-b}h.$$
2. Wir erhalten im Falle
a) $x=\dfrac{a+b}{2}$, also $d=\dfrac{a-\frac{a+b}{2}}{a-b}h=\dfrac{h}{2}$,
also $d=2{,}5$ cm; ferner gilt $h-d=\dfrac{h}{2}$;

b) $x=\sqrt{ab}$, also $d=\frac{a-\sqrt{ab}}{a-b}h$

$=\frac{h\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}=\frac{h\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, also $d=3$ cm;

ferner gilt $h-d=\frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

c) $x=\frac{2ab}{a+b}$, also $d=\frac{a-\frac{2ab}{a+b}}{a-b}h$

$=\frac{a^2+ab-2ab}{(a-b)(a+b)}h=\frac{a(a-b)}{(a-b)(a+b)}h=\frac{ha}{a+b}$,

also $d=\frac{45}{13}$ cm $\approx 3{,}46$ cm; ferner gilt

$h-d=\frac{hb}{a+b}$;

d) $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, also

$d=\frac{h}{a-b}\left(a-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)$, also

$d=\frac{5}{5}\left(9-\sqrt{\frac{81+16}{2}}\right)$ cm

$=\left(9-\sqrt{\frac{97}{2}}\right)$ cm $\approx 2{,}04$ cm;

ferner gilt $h-d=\frac{h}{a-b}\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-b\right)$.

3. Aus $A_1=\frac{x+b}{2}(h-d)$ und $A_2=\frac{a+x}{2}d$

folgt $A_1:A_2=(x+b)(h-d):(a+x)d$, also im Falle

a) $A_1:A_2=\left(\frac{a+b}{2}+b\right)\frac{h}{2}:\left(a+\frac{a+b}{2}\right)\frac{h}{2}$

$=(a+3b):(3a+b)=21:31$;

b) $A_1:A_2=\frac{(\sqrt{ab}+b)h\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\frac{(a+\sqrt{ab})h\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$=\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{b}:\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a}$

$=b:a=4:9$;

c) $A_1:A_2=\left(\frac{2ab}{a+b}+b\right)\frac{hb}{a+b}:\left(a+\frac{2ab}{a+b}\right)\frac{ha}{a+b}$

$=(2ab+ab+b^2)b:(a^2+ab+2ab)a$

$=b^2(3a+b):a^2(a+3b)$

$=16(27+4):81(9+12)=496:1\,701$;

d) $A_1:A_2=\frac{\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+b\right)h\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-b\right)}{a-b}$

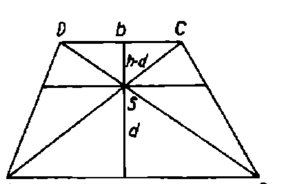
$\frac{\left(a+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)h\left(a-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)}{a-b}$

$=\left(\frac{a^2+b^2}{2}-b^2\right):\left(a^2-\frac{a^2+b^2}{2}\right)$

$=(a^2-b^2):(a^2-b^2)=1:1$.

4. Die Parallele EF geht durch den Schnittpunkt S der Diagonalen des Trapezes $ABCD$ (vgl. die Abb. 2) genau dann, wenn

$b:a=\overline{SC}:\overline{SA}=(h-d):d$



gilt; das trifft aber für beliebige a, b nur im Falle c) zu.

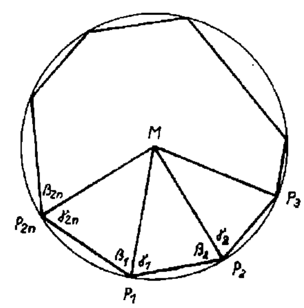
5. Die beiden Teiltrapeze $EFCD$ und $ABFE$ sind einander ähnlich genau dann, wenn

$b:x=x:a$, also $x^2=ab$

gilt; das trifft aber für beliebige a, b nur im Falle b) zu.

W 10/12 ■ 842 Wir verbinden den Mittelpunkt M des Umkreises des Sehnenvielecks mit den Eckpunkten dieses Vielecks (vgl. die Abb.). Dann wird jeder Innenwinkel α_i des Vielecks in zwei Winkel β_i, γ_i ($i=1, 2, \ldots, 2n$) zerlegt, und es gilt

$$\alpha_1=\beta_1+\gamma_1,\quad \alpha_2=\beta_2+\gamma_2,\quad \ldots\ldots,\quad \alpha_{2n}=\beta_{2n}+\gamma_{2n} \qquad (1)$$



Ferner gilt, da die Dreiecke MP_1P_2, MP_2P_3, ..., $MP_{2n}P_1$ gleichschenklig sind,

$$\gamma_1=\beta_2,\quad \gamma_2=\beta_3,\quad \ldots\ldots,\quad \gamma_{2n}=\beta_{2n},\quad \gamma_{2n}=\beta_1. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\ldots+\alpha_{2n-1}=(\beta_1+\gamma_1)+(\beta_3+\gamma_3)+(\beta_5+\gamma_5)+\ldots(\beta_{2n-1}+\gamma_{2n-1})$

$=\gamma_{2n}+\beta_2+\gamma_2+\beta_4+\gamma_4+\beta_6+\ldots+\gamma_{2n-2}+\beta_{2n}$

$=(\beta_2+\gamma_2)+(\beta_4+\gamma_4)+\ldots+(\beta_{2n}+\gamma_{2n})$

$=\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2n}$, w. z. b. w. (3)

Bemerkung: Im speziellen Fall $2n=4$ erhalten wir ein Sehnenviereck, und es gilt

$\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2+\alpha_4$.

Damit haben wir gleichzeitig den bekannten Satz bewiesen, wonach in jedem Sehnenviereck die Summen je zweier gegenüberliegender Winkel gleich sind und, da die Summe aller Innenwinkel 360° beträgt, 180° betragen.

* 10/12 * 843 Wir erhalten zunächst

$s_n\cdot\bar{s}_n=(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$

$=\left(\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}\right)+\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\ldots+\frac{a_2}{a_n}\right)$

$+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_n}{a_2}+\ldots+\frac{a_n}{a_n}\right)$

$=\left(\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\ldots+\frac{a_n}{a_n}\right)+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_n}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)$

$+\ldots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}\right).$ (1)

Nun gilt für alle positiven reellen Zahlen a_i und a_k

$\frac{a_i}{a_k}+\frac{a_k}{a_i}=\frac{a_i^2+a_k^2}{a_ia_k}\geqq 2$; denn aus (2)

$(a_i-a_k)^2\geqq 0$ folgt

$a_i^2+a_k^2-2a_ia_k\geqq 0$,

$a_i^2+a_k^2\geqq 2a_ia_k$, also wegen $a_i>0$, $a_k>0$

$\frac{a_i^2+a_k^2}{a_ia_k}\geqq 2$.

Nun ist auf der rechten Seite der Gleichung (1) die Summe der n ersten Summanden gleich n, während jedes weitere der $\frac{n(n-1)}{2}$ Paare von Summanden wegen (2) größer oder gleich 2 ist.

Wir erhalten daher

$s_n\cdot\bar{s}_n\geqq n+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n+n^2-n=n^2$, (3)

womit die Behauptung bewiesen ist.

Das Gleichheitszeichen gilt in (2) und daher auch in (3) genau dann, wenn $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Bemerkung: Unter der Voraussetzung der Ungleichung, wonach das arithmetische Mittel von n positiven reellen Zahlen stets größer oder gleich dem geometrischen Mittel dieser Zahlen ist, können wir die Behauptung schneller beweisen. Wir erhalten nämlich

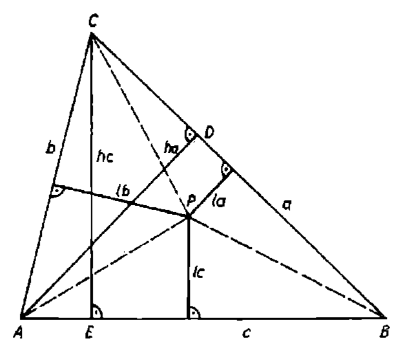
$s_n\cdot\bar{s}_n=(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$

$\geqq n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\cdot n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1a_2\ldots a_n}}=n^2.$

Lösungen zu: Ursula Baier, EOS Ernst Schneller, Meißen (Heft 1/72, S. 3)

▲8▲844 Es sei $a\leqq b\leqq c$; dann gilt $h_a\geqq h_b\geqq h_c$. Für den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC gilt

$2A=a\cdot l_a+b\cdot l_b+c\cdot l_c=a\cdot h_a=c\cdot h_c$.



Aus $a\leqq b\leqq c$ folgt $a\cdot l_a+a\cdot l_b+a\cdot l_c\leqq a\cdot h_a$, also $a(l_a+l_b+l_c)\leqq a\cdot h_a$ und somit $l_a+l_b+l_c\leqq h_a$.

Aus $a\leqq b\leqq c$ folgt ferner $c\cdot l_a+c\cdot l_b+c\cdot l_c\geqq c\cdot h_c$, also $c(l_a+l_b+l_c)\geqq c\cdot h_c$ und somit $l_a+l_b+l_c\geqq h_c$.

Folglich gilt auch $h_c\leqq l_a+l_b+l_c\leqq h_a$.

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a=b=c$ ist.

▲9▲845 Es sei $z=0,\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$ ein reinperiodischer Dezimalbruch mit der n-stelligen Periode $a_1a_2a_3\ldots a_n$, und es sei a_i eine natürliche Zahl für die $0\leqq a_i\leqq 9$ gilt. Dann gilt auch $z\cdot 10^n=a_1a_2a_3\ldots a_n;\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$.

Durch Subtraktion erhalten wir $z\cdot 10^n-z$

$= a_1a_2a_3 \ldots a_m$ also $z(10^n - 1) = a_1a_2a_3 \ldots a_n$ und somit $z = \frac{a_1a_2a_3 \ldots a_n}{10^n - 1} = \frac{a_1a_2a_3 \ldots a_n}{999 \ldots 9}$.
Im Nenner des gemeinen Bruches z steht genau n-mal die Ziffer 9.

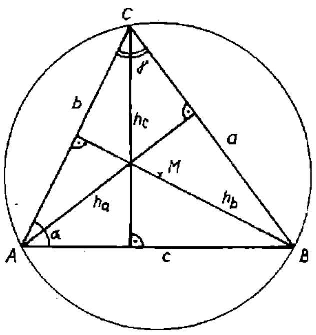
▲10/12▲846 Für jedes Dreieck gilt $A = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma$ und damit auch $A^2 = \frac{1}{4} a^2b^2 \cdot \sin^2\gamma = \frac{a}{4 \sin\alpha} \cdot b \cdot \sin\gamma \cdot a \cdot \sin\gamma \cdot b \cdot \sin\alpha$. (1)

Ferner gilt $\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$, (2)

$b \cdot \sin\gamma = h_a$, (3)

$a \cdot \sin\gamma = h_b$, (4)

$b \cdot \sin\alpha = h_c$. (5)



Setzen wir (2), (3), (4) und (5) in Gleichung (1) ein, so erhalten wir $A^2 = \frac{2r}{4} \cdot h_a \cdot h_b \cdot h_c$ bzw. $A = \sqrt{\frac{r}{2} \cdot h_a \cdot h_b \cdot h_c}$.

5▲847 Das Grundstück ist $3 \cdot 60$ m $= 180$ m lang; es hat einen Umfang von $2 \cdot (60 + 180)$m $= 480$ m. Aus $480 : 4 = 120$ und $120 \cdot 16{,}60$ M $= 1992$ M und 1992 M + 210 M = 2202 M ergeben sich die Gesamtkosten für die Einzäunung des Grundstücks.

5▲848 Die Wassermenge des Troges hat das Volumen $V = 87 \cdot 13 \cdot 2{,}5\ m^3 = 2827{,}5\ m^3$; sie hat daher eine Masse von 2827,5 t. Die Masse der Stahlträger, auf denen der Trog ruht, beträgt 2827,5 t − 1600 t = 1227,5 t. Es ist eine Last von $2 \cdot 2827{,}5$ t $= 5655$ t zu heben.

W 5 ■ 849 Aus 336 kg Altpapier lassen sich $336 \cdot 700$ g $= 235200$ g reines weißes Papier herstellen. Deshalb lassen sich aus dem gesammelten Altpapier maximal $235200 : 30 = 7840$ Schreibhefte herstellen.

W 5 ■ 850 Auf Grund der Bedingungen der Aufgabe könnte die Zahl z gleich 13, 26 oder 39 sein. Die durch Vertauschen der Ziffern entstehenden Zahlen lauten dann 31, 62 und 93. Aus $31 - 13 = 18$ und $62 - 26 = 36$ und $93 - 39 = 54$ folgt, daß es genau eine solche Zahl z gibt, nämlich die Zahl 26.

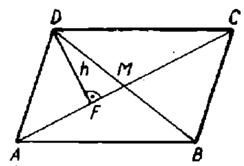
5 851 Der Rolls Royce hat eine wirkliche Länge von $8 \cdot 55$ cm $= 440$ cm $= 4{,}40$ m. Der Daimler hat demnach eine wirkliche Länge von 440 cm − 62 cm = 378 cm = 3,78 m. Aus $378 : 45 = 8{,}4$ folgt, daß das Matchboxauto vom Typ Daimler 8,4 cm lang ist.

5 852 Es sei x die Anzahl der anwesenden Jungen, dann waren $(x + 68)$ Mädchen und damit $(2x + 68)$ Kinder anwesend. Von den beiden Gleichungen

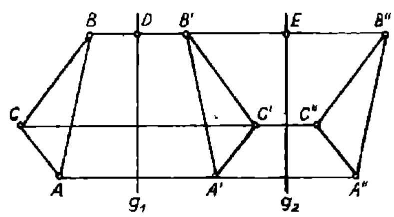
a) $2x + 68 = 520 - 17$, $2x = 435$ b) $2x + 68 = 520 - 16$, $2x = 436$, $x = 218$

ist die erste im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar. Es waren 218 Jungen und 286 Mädchen im Theater; von den 520 Plätzen waren 504 besetzt und 16 blieben frei.

6▲853 Es sei $\overline{DF}$ Höhe des Dreiecks ACD zur Seite $\overline{AC}$. Dann gilt $A_{AMD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{DF}$ und $A_{MCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{DF}$. Wegen $\overline{AM} = \overline{MC}$ folgt daraus $A_{AMD} = A_{MCD}$. Die Kongruenz der Dreiecke $\triangle ABM \cong \triangle MCD$ und $\triangle BCM \cong \triangle AMD$ schließt ihre Flächengleichheit ein. Deshalb sind alle vier Teildreiecke flächengleich.



6▲854 Ist das Dreieck $A''B''C''$ das durch Verschiebung entstandene Bild des Dreiecks ABC, so ist zu beweisen, daß folgendes gilt: $AA'' \parallel BB'' \parallel CC''$ und $\overline{AA''} = \overline{BB''} = \overline{CC''}$ und $\overline{BB''} = 2 \cdot \overline{DE}$.

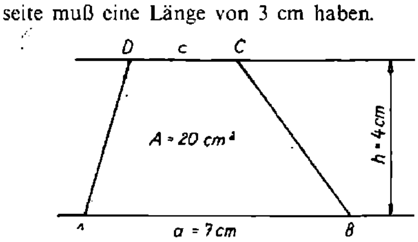


Auf Grund der ausgeführten Spiegelungen gilt $BB' \perp g_1$ und $B'B'' \perp g_2$. Wegen $g_1 \parallel g_2$ gilt deshalb auch $BB'' \perp g_1$ und $BB'' \perp g_2$. Gleiches läßt sich auch für AA'' und CC'' nachweisen. Daraus folgt $AA'' \parallel BB'' \parallel CC''$.
Auf Grund der Spiegelungen gilt $\overline{BD} = \overline{DB'}$ und $\overline{B'E} = \overline{EB''}$; ferner gilt $\overline{DE} = \overline{DB'} + \overline{B'E}$. Daraus folgt $\overline{BB''} = 2 \cdot \overline{DE}$. Gleiches läßt sich auch für $\overline{AA''}$ und $\overline{CC''}$ nachweisen. Daraus folgt schließlich $\overline{AA''} = \overline{BB''} = \overline{CC''} = 2 \cdot \overline{DE}$.

W 6 ■ 855 Wegen $A = \frac{a + c}{2} \cdot h$ gilt

$20 = \frac{7 + c}{2} \cdot 4$

und damit $c = 3$. Die zweite parallele Grundseite muß eine Länge von 3 cm haben.



W 6 ■ 856 $27 : 3 = 9$; es erhielten 9 Aufgaben das Prädikat „gut gelöst". $27 - 9 = 18$, $\frac{7}{9} \cdot 18 = 14$; es erhielten 14 Aufgaben das Prädikat „sehr gut gelöst".
$18 - 14 = 4$, $4 : 2 = 2$; je 2 Aufgaben erhielten das Prädikat „gelöst" bzw. „nicht gelöst".

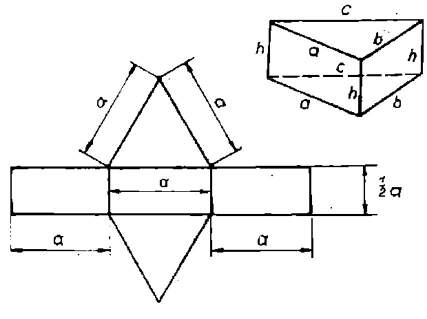
6 857 Da vom Tip n alle Angaben falsch waren, kam B nicht auf den 1. Platz. Nach Tip p folgt dann: 2. Platz − F, 4. Platz − D, 6. Platz − A.
Aus dem Vergleich der Tips p und m folgt, daß B nicht auf den 5. Platz kommt. Da B wegen Tip n auch nicht den 1. Platz einnahm, muß B den 3. Platz erkämpft haben. Nach Tip p kommt C nicht auf den 5. Platz, folglich auf den 1. Platz und somit E auf den 5. Platz.
Der Einlauf war folgender:

1.	2.	3.	4.	5.	6. Platz
C	F	B	D	E	A

6 858 Wir untersuchen zunächst die Quersummen der gesuchten vierstelligen natürlichen Zahlen.
$0 + 1 + 2 + 3 = 6$; $1 + 2 + 3 + 4 = 10$; $2 + 3 + 4 + 5 = 14$; $3 + 4 + 5 + 6 = 18$; $4 + 5 + 6 + 7 = 22$; $5 + 6 + 7 + 8 = 26$; $6 + 7 + 8 + 9 = 30$.
Nur die aus den Ziffern 3, 4, 5 und 6 gebildeten Zahlen haben eine Quersumme (18), die durch 9 teilbar ist. Aus diesen Ziffern lassen sich folgende Zahlen zusammenstellen, die auf eine gerade Ziffer enden:
3456, 3546, 4356, 5346, 5436, 6354, 3564, 3654, 4536, 5364, 5634, 6534.
Diese Zahlen untersuchen wir auf ihre Teilbarkeit durch 8. Nur die Zahlen 3456 und 4536 sind durch 8 teilbar.

7▲859 Angenommen, x Jungen lesen die „Junge Welt"; dann lesen $(23 - x)$ Jungen die „Trommel", und es gilt $0{,}15x + (23 - x) \cdot 0{,}10 = 2{,}70$ und damit $x = 8$.
8 Jungen lesen die „Junge Welt", 15 die „Trommel".
Wegen $41 - 23 = 18$ und $4 \cdot 2{,}70$ M − 0,40 M $= 10{,}40$ M gilt analog $0{,}70y + (18 - y) \cdot 0{,}50 = 10{,}40$ und damit $y = 7$. 7 Mädchen lesen „Frösi", 11 lesen „alpha".

7▲860 Es seien a, b und c die Längen der Grundkanten und h die Länge der Höhe eines geraden dreiseitigen Prismas, das die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft hat. Nach Voraussetzung gilt dann $u = a + b + c = 2a + 2h = 2b + 2h = 2c + 2h$. Daraus folgt $a = b = c$. Grund- und Deckfläche eines solchen Prismas sind demnach zwei kongruente gleich-



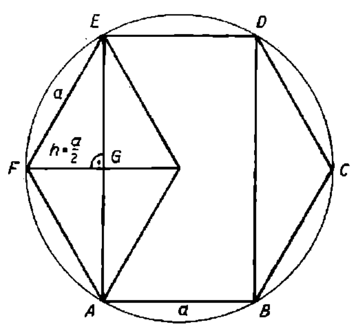
seitige Dreiecke. Aus $a+b+c=2a+2h$ und $a=b=c$ folgt weiter $3a=2a+2h$, also $a=2h$ bzw. $h=\frac{1}{2}a$. Die Höhe eines solchen Prismas ist also halb so lang wie eine Grundkante. Daher erfüllt jedes gerade gleichseitige dreiseitige Prisma, dessen Höhe halb so lang wie eine der Grundkanten ist, die Bedingungen der Aufgabe.

W 7 ▪ 861 Aus 464,25 M − 312,00 M = 152,25 M und 152,25 : 0,75 = 203 folgt, daß das Kino 203 Parkettplätze besitzt. Angenommen, es gebe x Plätze im Sperrsitz und y Plätze in den Logen, dann gilt

$$1{,}00x+1{,}25y=312{,}00, \quad (1)$$
$$x+\quad y=304, \quad (2)$$
also $$4x+\quad 5y=1248 \quad (3)$$
und $$4x+\quad 4y=1216 \quad (4)$$

Subtrahieren wir Gleichung (4) von Gleichung (3), so erhalten wir $y=32$ und damit $x=272$.
Das Kino hat demnach 272 Plätze im Sperrsitz und 32 Logenplätze.

W 7 ▪ 862 Bekanntlich läßt sich jedes regelmäßige Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegen, da sich der Radius des Umkreises des Sechsecks auf der Peripherie genau sechsmal abtragen läßt. Die Höhe $\overline{FG}$ zur Seite $\overline{AE}$ des Dreiecks AEF ist gleich $\frac{1}{2}a$. Für seinen Flächeninhalt gilt demnach $A_1=\frac{1}{4}a\cdot\overline{AE}$. Für den Flächeninhalt des Rechtecks $ABDE$ gilt $A_2=a\cdot\overline{AE}$. Daraus folgt $A_1:A_2=1:4$.



Mitarbeiter gesucht

- Beiträge über den Inhalt und die Durchführung von Arbeitsgemeinschaftsnachmittagen
- Beiträge über die Beteiligung von *Jungen Mathematikern* oder Arbeitsgemeinschaften auf *Messen der Meister von Morgen* (Facharbeiten, mathematische Modelle u. a.)
- Beiträge über lebendige Arbeit mit mathematischen Jugendbüchern
- Beispiele kontinuierlicher Wandzeitungsarbeit.

Zahlreiche Einsendungen erwartet
Eure Redaktion *alpha*.

Lösungen zu alpha-heiter (3/72)

Mathematisches Kreuzworträtsel

2		3	1	4		1
7		7	8	4		2
1	8	3	0		8	9
8	1			6	4	
3	8	3		2	6	1
	1	8	3	5	1	6
9		4	3		1	1
9		0	3			5

Zur Erläuterung der Lösung geben wir die folgenden Hinweise:

Waagerecht

b) Wegen $100\pi\approx 314{,}16$ lautet die gesuchte Zahl 314.
f) Da die Zahlen 16 und 49 teilerfremd sind, lautet die gesuchte Zahl $16\cdot 49=784$.
g) Wir erhalten $61x=1830+60x$, also $x=1830$.
i) Aus $11x<1000$ folgt $x<\frac{1000}{11}=90\frac{10}{11}$; daher ist die gesuchte Primzahl gleich 89.
k) Die größte zweistellige Quadratzahl ist gleich $9^2=81$.
l) Die gesuchte Quadratzahl ist gleich $8^2=64$.
m) Wir erhalten $2x=766$, also $x=383$.
o) Wir erhalten $9x-999=5x+45$, also $4x=1044$, $x=261$.
q) Wir erhalten $\frac{x}{12}=15293$, also $x=183516$.
t) Unter den Zahlen 11, 22, 33 und 44 ist nur der Vorgänger von 44, d. h. die Zahl 43 eine Primzahl.
u) Da alle zweistelligen Zahlen, die aus zwei gleichen Ziffern bestehen, durch 11 teilbar sind, ist unter diesen Zahlen nur 11 eine Primzahl.
v) Aus $x+y=3$ und $y-x=3$ folgt $x=0$ und $y=3$.

Senkrecht

a) Setzen wir $x=15$, so erhalten wir $(15-12)(15-2)(15+2)(2\cdot 15+11)$ $=3\cdot 13\cdot 17\cdot 41=27183$.
b) Wegen $371=7\cdot 53$ ist diese Zahl nicht Primzahl. Die Zahl 373 ist aber eine Primzahl, weil sie nicht durch 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 und 19 teilbar ist.
c) Die Maßzahl ist gleich 180.
d) Die Zahl lautet $4\cdot 11=44$
e) Die Summe der ersten zehn Primzahlen ist gleich $2+3+5+7+11+13+17+19+23+29=129$.
h) Wir erhalten $9:11=0{,}8181\ldots$.
i) Wir erhalten $423x-42300=422x+42200+111$, also $x=84611$.
l) Es gilt $3^4=81<100$, $5^4=625$, $7^4=2401>1000$; daher ist die gesuchte Zahl gleich 625.
n) Aus dem Tafelwerk, 7.–12. Klasse, entnehmen wir $\operatorname{arc} 22°\approx 0{,}3840$.
p) Aus $x+(x-1)=31$ erhalten wir $2x=32$, also $x=16$.
Die Zahlen lauten 16 und 15.
r) Wegen $3x<1000$ ist $x<\frac{1000}{3}=333\frac{1}{3}$. Die gesuchte Zahl ist daher gleich 333.
s) Die größte zweistellige natürliche Zahl ist gleich 99.

Mathematisch formulierte Vornamen — Wer errät sie?

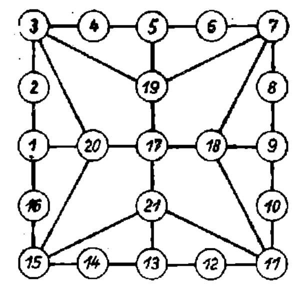
Erika, Peter, Hagen, Ute, Evi, Emma, Thea, Theo, Amalie, Minna, Gunter, Elena, Yvonne.

Nachgedacht — mitgemacht

$$\begin{array}{ccccc} 5 & \cdot & 7 & = & 35 \\ - & & + & & + \\ 2 & + & 8 & = & 10 \\ \hline 3 & \cdot & 15 & = & 45 \end{array}$$

Rotor

Wir numerieren die Knoten. Ausgehend vom Knoten 1 sind dann folgende 5-Tupel möglich, die das Wort „Rotor“ ergeben:



1	2	3	4	5	1	16	15	21	13
1	2	3	19	5	1	16	15	14	13
1	20	3	4	5	1	20	17	21	13
1	20	3	19	5	1	20	15	21	13
1	20	17	19	5	1	20	15	14	13
1	20	17	18	9					

Geht man von den Knoten 5, 9 oder 13 aus, so findet man wegen der Symmetrie des Graphen jeweils weitere 11 Wege. Insgesamt läßt sich somit das Wort „Rotor“ auf der vorgeschriebenen Art genau 44 mal lesen.

Fünf olympische Ringe — einmal anders

$$A=\frac{r^2}{4}\sqrt{3}-\left(\frac{\pi\alpha}{180°}-\sin\alpha\right)\frac{r^2}{2}$$
$$=\frac{r^2}{4}\sqrt{3}-\left(\frac{\pi}{3}-\sin 60°\right)\frac{r^2}{2}$$
$$=\frac{r^2}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}r^2+\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$$
$$=\frac{r^2}{2}\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}r^2$$
$$=\frac{r^2}{6}(3\sqrt{3}-\pi)$$
$$\approx 0{,}342\,r^2$$

Zum Fünfjahrplan für die Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR 1971 bis 1975

Vorliegendes Material wurde entnommen aus: „Arbeitsmaterial zur Direktive des VIII. Parteitages der SED zum Fünfjahrplan für die Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR 1971 bis 1975" — erschienen im Verlag Die Wirtschaft, Berlin.
62 Tafeln — Preis 6,20 M

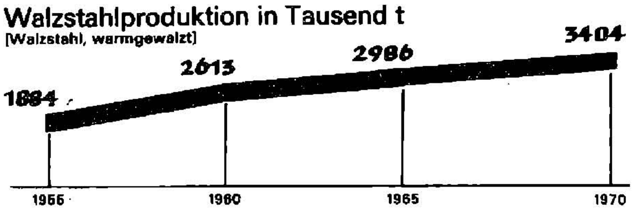
Entwicklung der chemischen Industrie

roduktion von		1950	1955	1960	1965	1970	1975
Plasten	in kt	44,0	72,1	115,1	218,6	370	700-750
Synthesefasern	in kt	0,7	3,4	7,8	19,0	47	100-105

Anteil der Synthesefasern am gesamten Faserverbrauch der Textilindustrie

Entwicklung der Metallurgie

Walzstahlproduktion in Tausend t
(Walzstahl, warmgewalzt)



Die Produktion von Walzstahl insgesamt ist bis 1975 auf 128 bis 132 Prozent zu erhöhen.

Achtung, alpha-Wettbewerb

Zwischen dem 1. und 10. September 1972 sind alle Antwortkarten einzusenden an:

Redaktion alpha
7027 Leipzig
Postfach 14

Wer seine Karten zurückhaben möchte, lege einen richtig frankierten Briefumschlag mit seiner Adresse bei. Geschwister senden ihre Karten *getrennt*. Schulen legen eine Übersicht mit den Namen der Schüler, der Klassenstufe und des Wohnortes bei.
Zur Erleichterung der Arbeit bitten wir genau aufzuschreiben, wer Anspruch auf das Abzeichen in Gold für 3-, 4- oder 5-jährige Mitarbeit hat. Die Namen werden (nach Klassenstufen geordnet) als Anerkennung veröffentlicht. Auf den Urkunden wird die mehrjährige Mitarbeit gekennzeichnet. Wie in jedem Jahr erhalten 100 Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb Buchprämien.

Unser eifriger *alpha*-Leser *Rainer Gutsche* aus Klasse 5 der OS Herzberg sandte uns eine schöne Aufgabe:

▲944▲ Bernd, der seine Lösungen zu den Aufgaben im *alpha*-Wettbewerb stets auf Schreibpapier vom Format A 4 anfertigt, stellte fest, daß ein Briefumschlag vom Format A 6 und vier Blatt Schreibpapier zusammen genau so viel wiegen wie sechs Blatt Schreibpapier. Bernd schickte in einem Briefumschlag genau drei Blatt Schreibpapier mit Aufgabenlösungen ab. Mit einer Briefwaage stellte er dabei fest, daß der verschlossene Brief genau 20 g wog und somit die bereits aufgeklebte 20-Pf-Briefmarke gerade noch reichte. Wie schwer wäre ein Brief, der zehn Blatt Schreibpapier mit Aufgabenlösungen enthält, gewesen? Welchen Wert müßte eine Briefmarke zum Frankieren dieses Briefes haben?

POSTKARTE

Gebühren-
frei!

Postamt

....
(PLZ)

Sofort an den zuständigen
Postzeitungsvertrieb weiterleiten.

VLV Spremberg Ag 310 69 DDR 2761
I 20 8 986 Z 6

1. Auflage 1972, etwa 320 Seiten, etwa 200 zweifarbige Zeichnungen, Ganzgewebe etwa 12,80 M
Best.-Nr.: 653 1958

Dieses Buch zeigt, daß Mathematik und Physik unterhaltsam und fesselnd sein können, und widerlegt alle Skeptiker, die diese Wissenschaften als trocken und hölzern verschreien. Ein bißchen Köpfchen und — „Gut gedacht ist halb gelöst!" Unter diesem Motto werden hier 200 Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten von Mathematik und Physik vorgestellt. Für jeden ist etwas dabei — vom mathematischen „Anfänger" bis zu dem, der schon manch „harte Nuß" geknackt hat. In anregender Weise bieten uns die Autoren eine Vielzahl mathematischer und physikalischer Knobeleien — zur Belehrung, zum Vergnügen und Zeitvertreib. Viele Aufgaben tragen den Schein kleiner „Zaubereien" in sich, manche Lösung ist verblüffend einfach. Andere Aufgaben sind schon etwas schwieriger, einige Lösungswege fordern sogar ein klein wenig Rechenfertigkeit. Das Buch bringt aber nicht nur die Aufgaben und die Resultate, auch auf eine ausführliche Begründung der Lösungsmethode wird jederzeit Wert gelegt. Wie ist ein Problem anzupacken, welche Wege sind einzuschlagen? Auch auf diese Fragen gibt das Buch Antwort, ohne daß der Leser etwa eine Mathematikstunde absolvieren müßte. Eine Portion gesunder Pfiffigkeit genügt, um in unserer Denkschule mit Erfolg abzuschneiden. Versuchen Sie es! Dieses Buch wendet sich an denkfreudige Junge und Alte, an Lehrende und Lernende.

Bestellschein

Empfangsstellennummer des PZV | Zustellbezirk | Einziehbezirk

Ich bestelle hiermit ab ______ zur Zustellung/Abholung *)
Überwiesen wird

Artikelnummer | WGr

Stück ______ Titel der Zeitung/Zeitschrift ______

Karteinummer

zu den Bezugsbedingungen lt. Postzeitungsliste zum Abonnementspreis von ______ M

In Blockschrift ausfüllen:

Name, Vorname: ______

Anschrift: ______
(Postleitzahl, Wohnort, Straße, Hausnummer, Gebäudeteil, Stockwerk)

Das Abonnementsgeld wird bar bezahlt *)
ist abzubuchen vom Konto Nr. ______ beim ______
(Postscheckamt, Bankinstitut u. a.)

*) Nichtzutreffendes streichen

Ich versichere, daß ich den obengenannten Bezieher geworben habe

______
(Unterschrift des Werbers)

______
(Eigenhändige Unterschrift des Bestellers)

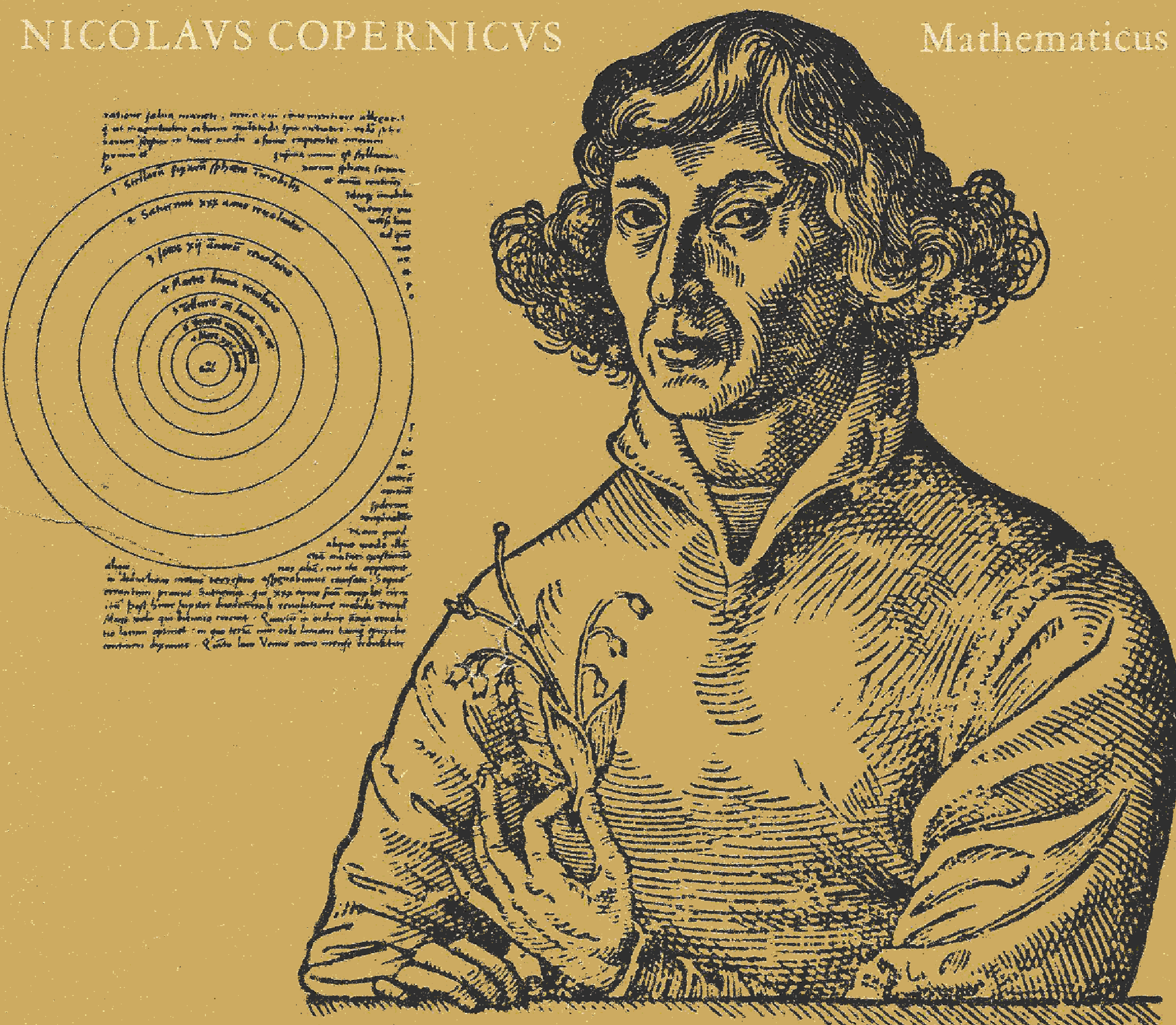
Die stark umrandeten Felder werden von der Deutschen Post ausgefüllt

Bezieherkarte/ Kundenkarte berichtigt	Adreßplatte geprägt/ Z 47 ausgefertigt	Bestellvermerk	Verteilkarte berichtigt	Vermerke

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

NICOLAVS COPERNICVS Mathematicus



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
6. Jahrgang 1972
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Briefmarken stellte zur Verfügung: W. Unze, Leipzig (S. 97); Bildstelle der Hochschule für Architektur und Bauwesen, Weimar (S. 99); G. Pause, Döbeln (S. 103); J. Lehmann, Leipzig (S. 104/105); Vignette: F. Fricke, Berlin (S. 106); C. Thannhausser, Eigenfoto, Linz (S. 111); J. Lehmann, Leipzig (S. 114); Briefmarken stellte zur Verfügung: H. Decker, Köln (S. 120);
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelblatt: Idee J. Lehmann, Leipzig · Gestaltung: W. Fahr, Berlin

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 27. Juli 1972

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* *bedeutet:* Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

Nicolaus Copernicus

Am 19. Februar 1973 wird man überall in der Welt, wo sich Engagement für wissenschaftlichen und gesellschaftlichen Fortschritt begegnen, des 500. Geburtstages von *Nicolaus Copernicus* festlich gedenken. Seine weltbewegende Leistung der Begründung des wissenschaftlichen astronomischen Weltbildes, sein Eintreten für seine polnische Heimat, seine Tätigkeit als Arzt, als Berater in Währungsfragen und anderen ökonomischen Problemen der Zeit, seine Tätigkeit als einer der ersten bedeutenden osteuropäischen Kenner der griechischen Sprache — all dies macht *Copernicus* zu einer der großen Gestalten der Renaissance, von der *Friedrich Engels* schreibt:

„Es war die größte progressive Umwälzung, die die Menschheit bis dahin erlebt hatte, eine Zeit, die Riesen brauchte und Riesen zeugte, Riesen an Denkkraft, Leidenschaft und Charakter, an Vielseitigkeit und Gehorsamkeit. Die Männer, die die moderne Herrschaft der Bourgeoisie begründeten, waren alles, nur nicht bürgerlich beschränkt ... Was ihnen aber besonders eigen, das ist, daß sie fast alle mitten in der Zeitbewegung, im praktischen Kampf leben und weben, Partei ergreifen und mitkämpfen, der eine mit Wort und Schrift, der andere mit dem Degen, manche mit beiden."

I

Copernicus wurde hineingeboren in eine Zeit tiefgreifender gesellschaftlicher Umschichtungen. Im Schoße der sich zersetzenden Feudalgesellschaft begann sich eine neue Klasse zu formieren, das Bürgertum. Tiefe soziale Widersprüche in Stadt und Land, zahllose Kriege, die Herausbildung der Nationalstaaten, das Aufblühen der Städte, gärende geistige und religiöse Bewegungen prägten das Bild des Übergangs zur frühkapitalistischen Gesellschaft. Dazu gehörte eine noch nicht gekannte glanzvolle Entfaltung von Wissenschaft und Kunst. *Copernicus* erlebte den Großen Deutschen Bauernkrieg und die Hinrichtung *Thomas Müntzers*, die Entdeckung Amerikas, die Reformation; er war Zeitgenosse von *Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Michelangelo* und *Raffael*.
Als *Copernicus* geboren wurde, war *Johannes Gutenberg*, der Erfinder des Buchdruckes mit beweglichen Lettern, bereits fünf Jahre tot. Als *Copernicus* alterte, standen die Türken vor Wien, flammten in Westeuropa die Scheiterhaufen auf, mit denen die Inquisition gegen den Zerfall der katholischen Kirche ankämpfte, und in Oberitalien wurden die ersten großen Manufakturen eingerichtet, mit der eine neue, progressive Produktionsweise aufkam.

Auch die Heimat von *Copernicus*, das nördliche Polen, durchlitt während der Lebenszeit von *Copernicus* eine unruhige, kriegerische Zeit. In der historischen Schlacht von Grunvald (Grunewald) hatte 1410 ein vereinigtes polnisch-litauisch-russisches Heer dem aggressiven Deutschritterorden eine vernichtende Niederlage beigebracht. Nach einem 13jährigen blutigen Krieg gegen den Ordensritterstaat von 1454 bis 1466 konnten die ehemaligen westpreußischen Handelsstädte — unter ihnen Gdańsk und Toruń — sowie die Bistümer Chełmno (Kulm) und Varmia (Ermland) wieder in den Verband des Königreiches Polen zurückgeführt werden, das sich zur europäischen Großmacht entwickelt hatte. Doch trotz dieser Niederlage blieb der Deutschritterstaat ein gefährlicher Nachbar.

Von dieser politischen Situation sollte das Leben von *Nicolaus Copernicus* bestimmt werden, eines Domherren im Bistum Varmia, das geographisch vom Territorium des Ordensstaates nahezu umschlossen wurde. *Copernicus* hat sich den Forderungen, die seine Zeit an ihn stellte, nicht verschlossen und leidenschaftlich für die Belange seiner Heimat Partei ergriffen.

polnische Briefmarken, herausgegeben aus Anlaß des 500. Geburtstages von *Nicolaus Copernicus*.

II

Copernicus wurde am 19. Februar 1473 in Toruń geboren, als Sohn eines aus Kraków zugewanderten polnischen Kaufmannes, der in seiner neuen Heimat in die hochangesehene Familie der *Watzenrodes* eingeheiratet hatte. Toruń, an der Wisła (Weichsel) gelegen, war damals eine der mächtigsten Handelsstädte Preußens; ihre Handelsverbindungen reichten bis Skandinavien, Rußland, bis Brügge in Flandern und bis Ungarn.

Mit 10 Jahren (1483) erlitten *Nicolaus* und seine Geschwister *Andreas, Barbara* und *Katharina* durch den Tod des Vaters einen schweren Verlust. Ein Onkel mütterlicherseits, *Lucas Watzenrode* nahm sich der Erziehung insbesondere seiner Neffen mit großer Sorgfalt an.

Lucas Watzenrode war ein hervorragender Vertreter des Humanismus, stieg im Dienst der Kirche 1489 zum Bischof von Varmia auf und gehörte zu den entschiedensten und erfolgreichsten Verfechtern der polnischen Sache im Kampf gegen den Deutschen Ritterorden.

Der Onkel sandte seinen Neffen 1491 zum Studium an die Universität Kraków, die zu den ältesten und berühmtesten Hohen Schulen Europas gehörte und unter anderem eine hervorragende mathematisch-astronomische Tradition besaß. 1494 oder 1495 erhielt *Copernicus* durch Vermittlung seines Onkels eine Stellung als Kanonikus (Domherr) am Dom zu Frombork (Frauenburg), der Domkirche des Bistums Varmia. Auf Wunsch des Onkels, der selbst in Italien studiert hatte, setzte *Copernicus* 1496 seine Studien in Italien fort und hielt sich, mit nur einer kurzen Unterbrechung, dort bis 1503 oder 1504 auf. Er studierte in Bologna, Padua und Ferrara Rechtswissenschaft, Theologie, Astronomie, Mathematik und Medizin. 1503 promovierte er zum Doktor der Rechte.

Mit einer selbst für diese Zeit ganz außergewöhnlich umfassenden und tiefgründigen Ausbildung kehrte *Copernicus* nach Frombork zurück und trat dann, 1506, als eine Art Leibarzt in den unmittelbaren Dienst des Bischofs von Varmia, seines Onkels, in Lidzbark (Heilsberg), der dort nach Art weltlicher Feudalherren Hof hielt.

III

Bereits in Kraków, vor allem aber dann in Bologna, sah sich *Copernicus* mit dem unbefriedigenden Zustand der Astronomie konfrontiert. Das aus der griechisch-hellenistischen Antike überlieferte astronomische Weltbild hatte in dem berühmten Buch „Almagest" des alexandrinischen Astronomen *Ptolemäus* eine in sich abgerundete Darstellung gefunden, die mathematisch weitgehend durchgebildet war. Die Erde steht danach ruhend im Mittelpunkt der Welt. Die Planeten — unter ihnen die Sonne — umlaufen die Erde, und zwar so, daß sie die Planeten auf Kreisen bewegen, deren Mittelpunkte ihrerseits sich auf Kreisen um die Erde bewegen. Diese komplizierte Bewegung auf Epizykloiden hatten die antiken Astronomen annehmen müssen, um die Beobachtungen am Himmel mit dem aus idealistischen Vorstellungen abgeleiteten Postulat des hochangesehenen antiken Philosophen *Platon* einigermaßen in Übereinstimmung bringen zu können, wonach nur Kreise für die Bewegungen der Himmelskörper denkbar seien. Mit der sich steigernden Beobachtungsgenauigkeit bei den arabischen Astronomen und in Europa zu Beginn der Neuzeit gerieten die auf ptolemäischer Grundlage angestellten Berechnungen immer offensichtlicher im Widerspruch zum wirklichen Lauf der Planeten am Himmel. Es blieb dennoch die Vorstellung von der zentralen Stellung der Erde unerschütterlich, zumal deswegen, weil nach christlicher Ideologie der Wohnsitz des von Gott erschaffenen Menschen nur im Mittelpunkt der Welt denkbar erschien. Das Dogma von der Zentralstellung der Erde war somit wesentlicher Teil des christlichen Weltbildes; ein Angriff darauf mußte daher zugleich als ein Angriff auf die Kirche selbst aufgefaßt werden.

IV

Nachweislich hat *Copernicus* bereits in Kraków eingehende astronomische Studien betrieben und in Bologna und Rom im Anschluß an die weitgehenden Bemühungen des hervorragenden Astronomen *Regiomontanus* Beobachtungen angestellt. Als er in seine Heimat zurückkehrte, trug er bereits revolutionäre Ansichten über die Neubegründung der Astronomie in sich. Vermutlich in Lidzbark, zwischen 1506 und 1511, legte *Copernicus* seine Grundideen in einer kleinen Schrift nieder, die, ungedruckt geblieben, unter dem Namen „Commentariolus" (Entwurf) in die Geschichte der Wissenschaften eingegangen ist. *Copernicus* stellt die Sonne in den Mittelpunkt der Welt und alle Planeten (unter ihnen die Erde) umkreisen die Sonne. Das Dogma von der Zentralstellung der Erde ist durchbrochen — ein Schritt von großer gedanklicher Kühnheit ist getan. Die Bestätigung war durch eine mathematische Durchbildung dieses Ansatzes und durch weitere Beobachtungen zu erbringen.

Doch rückten aufkommende politische Fragen zunächst in den Vordergrund und forderten die Tatkraft von *Copernicus*.

H. Wußing

Dieser Beitrag wird in Heft 6 fortgesetzt.

Studienmöglichkeiten an der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar

An der Hochschule für Architektur und Bauwesen schließen die Absolventen nach einem vierjährigen Studium mit dem akademischen Grad Diplom-Ingenieur ab. Im Rahmen der 3. Hochschulreform haben sich die Studienmöglichkeiten an unserer Schule bedeutend erweitert.

Zunächst ist die Entscheidung zwischen den in der Tabelle angegebenen Grundstudienrichtungen zu fällen (siehe unten). In zwei Jahren werden hier breite Grundlagenkenntnisse in naturwissenschaftlichen, technischen und gesellschaftswissenschaftlichen Disziplinen erworben und bereits in praxisbezogenen Belegaufgaben angewandt sowie die Sprachkenntnisse und sportlichen Fähigkeiten erweitert.

Daran schließen sich vielseitige Möglichkeiten in den Fachstudienrichtungen unserer Hochschule an, für die sich die Bewerber frühzeitig, am besten schon bei der Aufnahme des Studiums entscheiden, und aus denen sich dann die sozialistische Gemeinschaftsarbeit mit Hochschullehrern, wissenschaftlichen Mitarbeitern, jungen Arbeitern und erfahrenen Facharbeitern aus den Kooperationsbetrieben der Hochschule entwickelt.

Gesellschaftlich aktive Studenten mit sehr guten fachlichen Leistungen können nach der Hauptprüfung für ein dreijähriges Forschungsstudium ausgewählt werden, das mit der Promotion zum Doktor-Ingenieur abschließt. Ihr Einsatz erfolgt dann in verantwortungsvollen Funktionen der sozialistischen Baupraxis oder als Nachwuchswissenschaftler im Hochschulwesen. *D. Schwaab*

Sektion Architektur, Vorbereitung auf die Verteidigung eines Entwurfs

Voraussetzungen für die Aufnahme eines Studiums:	Abitur mit guten bis sehr guten Leistungen in Staatsbürgerkunde, Mathematik, Physik und Chemie		
Grundstudiumsrichtungen je 2 Jahre	I. Architektur	II. Bauingenieurwesen	III. Verfahrensingenieurwesen
Fachstudienrichtungen je 2 Jahre	1. Architektur 2. Städtebau	1. Ingenieurbau 2. Tiefbau 3. Informationsverarbeitung im Bauwesen 4. Technische Gebiets- und Stadtplanung	1. Prozeßverfahrenstechnik 2. Systemverfahrenstechnik 3. Anlagenbau

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. phil. et rer. nat. habil.

Horst Matzke

Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar

(Sektion Rechentechnik und Datenverarbeitung)

▲929▲ Eine Kurve (sie kann auch aus mehreren getrennten Zweigen bestehen) in einer Ebene heißt „Mittelpunktskurve", wenn in der Ebene ein Punkt M existiert, der folgende Eigenschaft besitzt: Jede Gerade durch M, die die Kurve schneidet, muß die Kurve in genau zwei Punkten P_1 und P_2 schneiden, und die Strecken $\overline{MP_1}$ und $\overline{MP_2}$ müssen gleiche Länge haben. (Solche Mittelpunktkurven sind z. B. der Kreis, das Bild der Funktion $y=\frac{1}{x}$, regelmäßige Vielecke mit gerader Eckenzahl.) Alle in den Beispielen angegebenen Kurven besitzen, wie man leicht feststellen kann, zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen, die sich im Mittelpunkt schneiden.

Es ist zu untersuchen, ob

a) jede Mittelpunktskurve zwei sich in M schneidende Symmetrieachsen besitzt und

b) jede ebene Kurve mit zwei orthogonalen Symmetrieachsen Mittelpunktskurve ist.

In der Zeit vom 26. Juni bis 2. Juli 1972 fand unter der Schirmherrschaft der Hochschule für Architektur und Bauwesen, Sektion Rechentechnik und Datenverarbeitung, der

VI. Internationale Kongreß über die Anwendung der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften (ikm)

statt. Kongreßleiter war Prof. Dr. *Matzke*. Den Festvortrag hielt Prof. Dr. *F. K. Mann*, Berlin: Anwendung der EDV zur Rationalisierung der bautechnischen Projektierung und technologischen Vorbereitung von Investitionen. Wissenschaftler aus 26 Ländern hielten Vorträge.

Darstellende Geometrie und Architekturausbildung

In diesem Artikel soll ein kurzer Überblick über die Probleme gegeben werden, mit denen sich der Architekt während seiner Ausbildung im Fach „Darstellende Geometrie" beschäftigt. Wir weisen aber zugleich darauf hin, daß in diesem Rahmen die angegebenen Definitionen und Erklärungen nicht umfassend sein können. Das muß einer größeren Arbeit vorbehalten bleiben, die sich gründlich mit der oben genannten Problematik auseinandersetzen kann.

Wir gehen von einer Definition aus, die *E. Müller*, ein Wiener Geometer, angegeben hat: „Die darstellende Geometrie lehrt, wie man Raumgebilde nach geometrischen Grundsätzen durch Zeichnung abbildet und Aufgaben über die dargestellten Gebilde auf Grund der Abbildung löst."

An die Abbildungsverfahren werden in der Praxis folgende zwei Forderungen gestellt. Sie sollen 1. anschaulich und 2. maßgerechte Bilder liefern. Wir erläutern diese Eigenschaften:

1. *anschaulich:* Wir nennen ein Bild eines Gegenstandes anschaulich, wenn es den Eindruck vermittelt, den wir vom Gegenstand selbst erhalten.
2. *maßgerecht:* Der Aufwand zur Konstruktion des Bildes vom gegebenen Gegenstand ist gering, oder aus dem Bild lassen sich mit geringem Konstruktionsaufwand die wirklichen Größen des ursprünglichen Gegenstandes bestimmen.

Es gibt aber kein Abbildungsverfahren, das die beschriebenen zwei Eigenschaften gleichzeitig erfüllt. Eine Fotografie eines Gebäudes z. B. vermittelt einen plastischen und naturgetreuen Eindruck, also ein anschauliches Bild. Jedoch ist ein großer Zeitaufwand nötig, um aus den Abmessungen des Gebäudes das Bild herzustellen, das uns die Fotografie liefert. Es ist auch nicht einfach, aus der Fotografie die Abmessungen von Gebäudeteilen zu konstruieren.

In der darstellenden Geometrie bedient man sich der folgenden Projektionsarten:

1. *Zentralprojektion*

Bei der Zentralprojektion gehen von einem Zentrum O (liegt außerhalb der Bildebene) zu jedem Punkt des abzubildenden Körpers Strahlen (Projektionsstrahlen) aus, die eine Bildebene in Punkten, den Bildpunkten des Körpers, durchstoßen.

2. *Parallelprojektion*

Verlaufen die Projektionsstrahlen zueinander parallel, so sprechen wir von Parallelprojektion. Wir unterscheiden zwischen orthogonaler und schiefer Parallelprojektion, je nachdem, ob die Projektionsstrahlen senkrecht oder schief auf die Bildebene einfallen.

Da die Methoden und Ergebnisse der darstellenden Geometrie die Voraussetzungen für die Arbeit des Architekten schaffen, ist eine gründliche Einführung der Studenten der Architektur in dieses Fach notwendig. Es ist darum erforderlich, daß sich die Studenten mit den Projektionsarten und den geometrischen Eigenschaften von ebenen Gebilden, die beim Projektionsvorgang erhalten bleiben, den sogenannten Invarianten, vertraut machen. Eigenschaften von ebenen Gebilden, die unter diesem Aspekt betrachtet werden, sind z. B. Flächentreue, Winkeltreue, Parallelität und Teilverhältnis. Die Kenntnis der Invarianten bezüglich der Abbildung gestattet wesentliche Konstruktionsvereinfachungen in der darstellenden Geometrie.

Eine Aufgabe der Architekturstudenten besteht darin, ein räumliches Objekt perspektiv abzubilden, d. h. ein räumliches Objekt mit Hilfe der Zentralprojektion auf eine Bildebene zu projizieren. Das entstandene Bild des Objektes entspricht etwa dem, welches wir beim einäugigen Sehen wahrnehmen. Das Objekt kann entweder im Grund- und Aufriß oder in seiner Gestalt und in seinen Abmessungen bekannt sein. Da man im ersten Fall an Grund- und Aufriß gebunden ist, spricht man von „gebundener Perspektive", im zweiten Fall von freier Perspektive. Neben der Aufgabe perspektivischer Konstruktion des Objektes tritt auch die Aufgabe in der Umkehrung auf:

Aus einem zentralperspektiven Bild sind die zugeordneten Normalrisse zu rekonstruieren. Diese Aufgabe hat sowohl Bedeutung in der Architektur (Rekonstruktion zerstörter Gebäude aus Fotografien usw.) als auch in der Geodäsie (Entzerrung von Luftbildaufnahmen des Objektes). Die Fotogrammetrie beschäftigt sich mit diesen Problemen.

Viele Konstruktionsmethoden der Perspektive erfordern Hauptrichtungen (Länge, Breite, Höhe) des abzubildenden Objektes. Bei Geländeaufgaben sind sie nicht vorhanden, und man verwendet zur Gewinnung des zentralperspektiven Bildes vorteilhaft die rechnerische Durchstoßmethode.

In einer räumlichen Skizze wird die perspektive Abbildung eines Quaders gezeigt (Bild 1). Zunächst sind jedoch einige grundsätzliche Bemerkungen notwendig:

O ist das Zentrum der Projektionsstrahlen. σ ist eine waagerechte Standebene, und darauf wird der Quader gestellt. Mit π bezeichnen wir die zu σ senkrechte Bildebene, mit s die Standlinie (Schnittgerade zwischen π und σ). Die Lote von O auf σ und π schneiden die Ebenen σ und π im Standpunkt St und Hauptpunkt H. Die Parallele zu s durch H nennen wir die Horizontlinie h, die Strecke $\overline{OH}$ die Distanz d und die Strecke $\overline{OSt}$ die Horizonthöhe a. Denken wir uns in O das unbewegliche menschliche Auge, gerichtet auf den Hauptpunkt H, so kann es nur innerhalb eines geraden Kreiskegels mit einem räumlichen Öffnungswinkel von 36° die Konturen des Körpers scharf und unverzerrt erkennen. Diesen geraden Kreiskegel mit der Spitze in O und der Achse $\overline{OH}$ nennen wir den Sehkegel. Sp ist der Spurkreis des Sehkegels in π. Nach diesen Vereinbarungen beschäftigen wir uns mit der perspektiven Abbildung von Punkten und Geraden.

Abbildung eines Punktes:

P sei ein Raumpunkt. Indem wir den Strahl $\overline{OP}$ (von O nach P) mit der Bildebene π zum Schnitt bringen, erhalten wir P^*, den Bildpunkt von P. Zu jedem Raumpunkt (mit Ausnahme von O) gibt es eindeutig einen Bildpunkt, zu jedem Bildpunkt unendlich viele Raumpunkte (alle Punkte auf dem Projektionsstrahl $\overline{OP}$). Die Raumpunkte (mit Ausnahme von O), die in der zu π parallelen und durch O verlaufenden Ebene liegen, werden auf die unendlich fernen Punkte von π abgebildet.

Abbildung einer Geraden (Bild 2):

Das Bild g^* einer Geraden g ist bestimmt durch die Bilder zweier Punkte der Geraden. Jede Gerade g, die nicht parallel zu π verläuft, durchstößt π in einem Punkt, dem Spurpunkt Sg der Geraden. Wir senden von O aus Projektionsstrahlen zu den Punkten der Geraden, die jenseits der Bildebene π liegen. Die Durchstoßpunkte der Projektionsstrahlen durch π sind Bildpunkte der Geraden. Dabei gelangt schließlich der Projektionsstrahl in paralleler Lage zu g, der zum unendlich fernen Punkt der Geraden g zeigt. Der Schnittpunkt dieses Projektionsstrahles mit π heißt der Fluchtpunkt Fg der Geraden g und der Projektionsstrahl selbst der Fluchtstrahl FS.

Der Fluchtpunkt einer Geraden ist das Bild ihres unendlich fernen Punktes; er wird

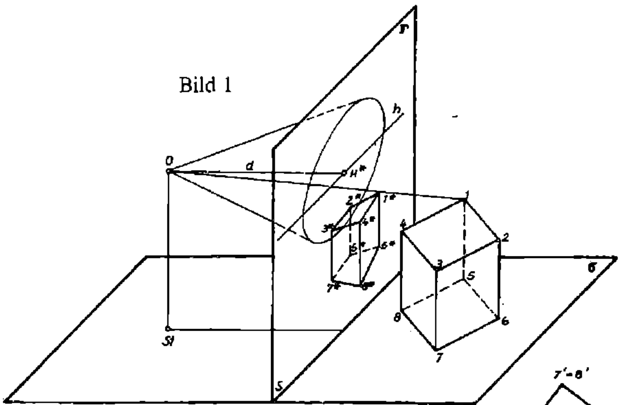


Bild 1

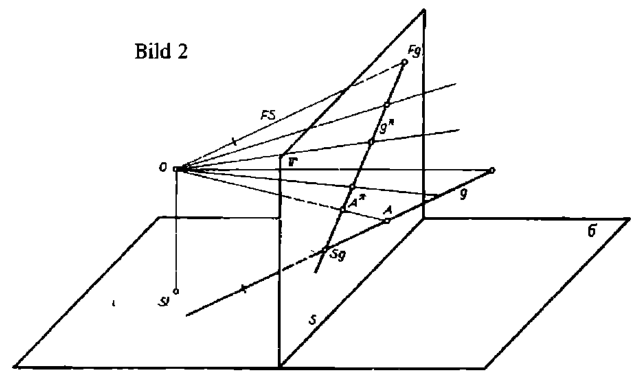


Bild 2

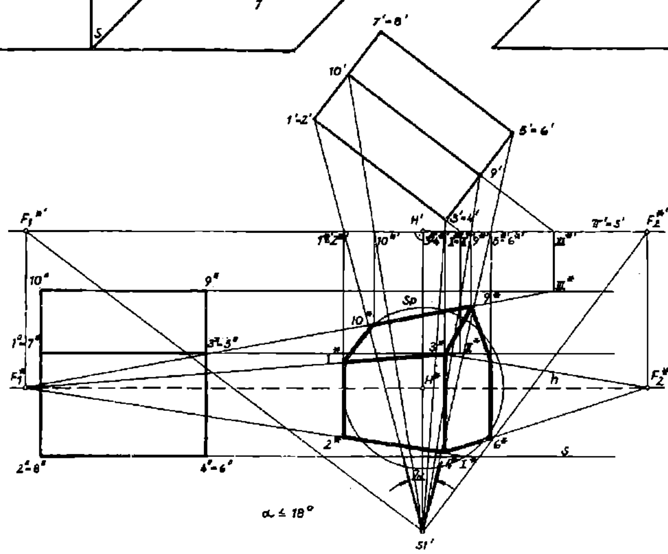


Bild 3

gefunden als Durchstoßpunkt des zur Geraden parallelen Projektionsstrahles durch die Bildebene π.

Hieraus läßt sich schlußfolgern:
Die Bilder paralleler Geraden gehen durch denselben Fluchtpunkt.

Sonderfälle:
Eine Gerade, die senkrecht zur Bildebene π steht, bezeichnet man als Tiefenlinie. Der Fluchtpunkt der Tiefenlinie ist der Hauptpunkt H.
Eine Gerade, die senkrecht zur Standebene σ steht, wird als Gerade senkrecht zur Standlinie s abgebildet. Flucht- und Spurpunkt sind der unendlich ferne Punkt der Geraden.
Liegt eine Gerade sowohl parallel zur Standebene σ als auch zur Bildebene π, heißt sie Breitenlinie. Das Bild einer Breitenlinie ist eine Gerade parallel zur Standlinie s. Spur- und Fluchtpunkt sind der unendlich ferne Punkt der Bildgeraden. Nach diesen Überlegungen konstruieren wir das perspektive Bild in der Architektenanordnung des im Grund- und Aufriß gegebenen Hausmodells (Bild 3). Im ersten Schritt heften wir den auf Transparent vorhandenen Grundriß des Hausmodells auf unser Zeichenblatt (Grundrißebene = Standebene σ) und tragen die Bildebene π in σ ein. Sie zeigt sich, da sie senkrecht auf σ steht, als Standlinie $s' = s$. Im zweiten Schritt wählen wir den Standpunkt St' so, daß der größere Winkel, den $St'H'$ mit einem der beiden äußersten Sehstrahlen im Grundriß einschließt, etwa 18° beträgt. Im dritten Schritt bestimmen wir die Grundrißbilder der Fluchtpunkte F_1 und F_2. Der Fluchtpunkt F_1 ist der Fluchtpunkt der zur Standebene σ parallelen Geraden, die die Kanten $\overline{13}$, $\overline{24}$, $\overline{75}$, $\overline{86}$, $\overline{910}$ enthalten. Er liegt auf der Horizontlinie. Wir finden $F_1{}^{*\prime}$, indem wir durch St' eine Parallele zu $\overline{1'3'}$ ziehen und mit π' zum Schnitt bringen. F_2 ist der Fluchtpunkt der Geraden, die die Kanten $\overline{46}$, $\overline{28}$ enthalten und befindet sich ebenfalls wie F_1 auf der Horizontlinie, da $\overline{46}$, $\overline{28}$ parallel zu σ verlaufen. Die Parallele zu $4'6'$ durch St' trifft π' in $F_2{}^{*\prime}$. Im vierten Schritt klappen wir die Bildebene π in die Standebene σ. Da sich in unserem Bild dann zwei Figuren überlagern würden, verschieben wir die umgeklappte Bildebene, so daß s unterhalb von s' und parallel zu s' ist. Wir heften dann das auf Transparent gezeichnete Aufrißbild des Hausmodells auf s an. Dann tragen wir die Horizontlinie im angegebenen Abstand a von s sowie die Fluchtpunkte F_1 und F_2 (senkrecht zu s' unter $F_1{}^{*\prime}$ bzw. $F_2{}^{*\prime}$) auf der Horizontlinie ein. Im fünften Schritt bestimmen wir die Spurpunkte der Geraden g_1, g_2 bzw. g_3, auf denen die Kanten $\overline{24}$, $\overline{13}$ bzw. $\overline{109}$ liegen. Wir verlängern die Kanten $\overline{24}$, $\overline{13}$ bzw. $\overline{109}$ über 4, 3 bzw. 9 hinaus, bis sie die Bildebene π in I*, II* bzw. III* durchstoßen. In unserem Bild treffen die Verlängerungen von $\overline{2'4'}$, $\overline{1'3'}$ und $\overline{10'9'}$ π' in den Punkten I*', II*', III*' (I*' = II*'). In der ungeklappten Ebene liegen I*, II* und III* senkrecht unter I*', II*' = I*' und III*' und zwar I* auf der Standlinie s, II* in der Höhe der Punkte 1'' und 3'' und III* in der Höhe der Punkte 10'' und 9'' darüber.
Das Bild von g_1 ist die Gerade I*F_1*, von g_2 die Gerade II* F_1* und von g_3 die Gerade III*F_1*. Nun verbinden wir $1' = 2'$, $3' = 4'$, $10'$ und $9'$ mit St' (Sehstrahlen im Grundriß) und erhalten auf π' 1*' = 2*', 3*' = 4*', 10*' und 9*'. Die Senkrechte zu s' durch 1*' = 2*' markiert auf II*F_1* den Punkt 1* und auf I*F_1* den Punkt 2* und die Senkrechte zu s' durch 3*' = 4*' auf II*F_1* den Punkt 3* und auf I*F_1* den Punkt 4*. 10* und 9* ergeben sich als Schnittpunkte der Senkrechten durch 10*' und 9*' zu s' mit der Geraden III*F_1*. 1*, 2*, 3*, 4*, 9*, 10* stellen die perspektiven Bilder von 1, 2, 3, 4, 9, 10 dar. Die Bilder der Kante $\overline{46}$ bzw. der Hilfsgeraden $\overline{35}$ weisen in die Richtung 4*F_2* und 3*F_2*. Indem wir wieder die Durchstoßpunkte der Sehstrahlen nach 5 und 6 durch π bestimmen, ist das perspektive Bild des Hausmodells fertig. Die unsichtbaren Kanten werden weggelassen, da es uns nur auf ein anschauliches Bild ankommt. Zum Schluß geben wir den Spurkreis an.

E. Kühn

Mathematikern über die Schulter geschaut

Es gehörte nicht immer zu den Selbstverständlichkeiten, daß Schüler regelmäßigen Zugang zu Einrichtungen einer Hochschule haben, lange bevor sie selbst Studenten sind. Seit einigen Jahren gehören Schüler der EOS Friedrich Schiller Weimar zu dem Bild unserer Hochschule. In allen Sektionen nehmen sie als Mitglieder *Wissenschaftlich-Praktischer Arbeitsgemeinschaften* (WPA) unmittelbar Anteil an vielfältigen Forschungsvorhaben. Schulkenntnisse in Mathematik, Physik, Chemie und in Gesellschaftswissenschaften können sie unmittelbar bei der Lösung technischer und ökonomischer Probleme anwenden, neue Kenntnisse werden dazugewonnen. Die Arbeit in wissenschaftlichen Einrichtungen ist ihnen nicht mehr etwas Fremdes, sie gewinnen ein klares Bild von der Art der Aufgaben, die später auf sie zukommen. Darüber hinaus haben die Mathematiker der Sektion Rechentechnik/Datenverarbeitung, die Mitglieder der Mathematischen Gesellschaft der DDR sind, eine Arbeitsgemeinschaft für *Junge Mathematiker* zur Vorbereitung auf die OJM eingerichtet. Die besten Schüler der 11. und 12. Klassen der EOS Friedrich Schiller Weimar kommen hier einmal wöchentlich zusammen und lösen unter Anleitung eines Mathematikers schwierige Aufgaben aus den verschiedenen Gebieten, die in den OJM eine Rolle spielen.

Ein Beispiel aus einem solchen AG-Nachmittag sei hier angeführt:
Im Mittelpunkt stand eine geometrische Konstruktionsaufgabe. Am Beispiel sollte die Methode gezeigt werden, wie man eine Konstruktionsmethode durch Rechnung ermitteln kann, besonders wenn man die geometrischen Hilfsmittel nicht voll beherrscht. Die erste Lösung war etwas umständlich, später wurde dann die im nächsten *alpha*-Heft gebotene Lösung gefunden. Und welche Lösung findest du, lieber Leser, zu dem gestellten Problem?

▲926▲ In einer Ebene seien drei parallele Geraden g_1, g_2 und g_3 gegeben. g_2 liege zwischen g_1 und g_3. Der Abstand von g_2 zu g_1 sei m, der Abstand von g_2 zu g_3 sei n. Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Eckpunkte A, B und C auf je einer der drei Geraden liegen. *H. Bode*

Mathematik und Russisch

Liebe *alpha*-Leser!
Übersetzt die nachstehenden in russischer Sprache abgedruckten Mathematikaufgaben ins Deutsche! Als Übersetzungshilfe sind im Anschluß an jede Aufgabe die Vokabeln angegeben, die nicht zum Wortschatz der achten Klasse gehören.
Löst anschließend diese Mathematikaufgaben und versucht, zumindest das Ergebnis in russischer Sprache zu formulieren! Damit ihr eure Arbeit kontrollieren könnt, werden im gleichen Heft die Übersetzungen dieser Aufgabentexte in russischer Sprache abgedruckt. (Siehe Seite 114)
Die folgenden Mathematikaufgaben sind zwei Schriften entnommen:
1. F. F. Nagibin, Das mathematische Schatzkästchen, 2. Ausgabe, Staatlicher Pädagogischer Verlag des Ministeriums für Volksbildung der RSFSR, Moskau 1961.
2. Wissenschaft und Leben, Heft 10/1970.

▲1▲ Два брата разговорились о том, сколько они скопили денег. Старший говорит младшему: «Дай мне 80 копеек, тогда у меня будет денег в два раза больше, чем у тебя.» Младший подумал и ответил: «Нет, у тебя и так больше денег, чем у меня. Лучше ты дай мне 80 копеек, тогда денег у нас будет поровну.» Сколько денег накопил каждый брат?

разговориться	ins Gespräch kommen
о том	darüber
скопить	anhäufen, sparen
в два раза больше	doppelt soviel
и так	ohnehin
лучше	lieber
поровну	zu gleichen Teilen

▲2▲ Дочери в настоящее время 8 лет, а матери 38. Через сколько лет мать будет в трое старше дочери?

в настоящее время	gegenwärtig, zur Zeit
через	in (zeitl.)
в трое старше	dreimal so alt

▲3▲ Яша идёт от дома до школы 30 минут, а брат его Петя 40 минут. Петя вышел из дома на пять минут раньше Яши. Через сколько минут Яша догонит Петю?

вышел	verließ
на пять минут раньше	5 Minuten früher
догнать	einholen
через	in (zeitl.)

▲4▲ Диаметр опалённой площади тайги от взрыва Большого Тунгусского метеорита равен примерно 38 км. Какая площадь тайги была опалена?

диаметр	Durchmesser
опалённый	versengt
площадь	Fläche
взрыв	Explosion
равен	gleich
примерно	ungefähr, etwa

▲5▲ Как четырьмя прямыми линиями, не отрывая карандаш от бумаги, перечеркнуть девять точек, расположенных так, как показано на рисунке?

o o o

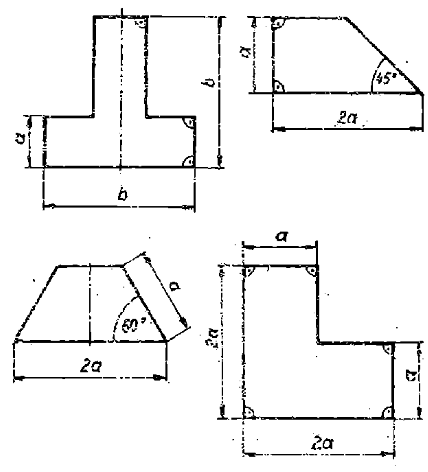
рисунок o o o

o o o

четырьмя	5. Fall von четыре
не отрывая	ohne abzusetzen
перечеркнуть	durchstreichen (hier: verbinden)
расположенный	gelegen
показано	dargestellt

▲6▲ Нарисуй каждую из фигур и разрежь её на четыре конгруэнтные части.

нарисуй	zeichne
каждый из	jeder der, jeder von
разрежь	zerlege
конгруэнтный	kongruent
часть	Teil

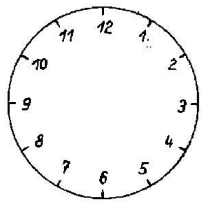


▲7▲ Арбуз стоит 10 копеек и ещё поларбуза. Сколько стоит арбуз?

арбуз	Melone
поларбуза	eine halbe Melone (hier: der Preis für eine halbe Melone)

▲8▲ Этот циферблат надо разрезать на 6 частей любой формы, — так, однако, чтобы во всех частях сумма чисел была одинакова.

разрезать	zerlegen, zerschneiden
любой	beliebig
однако	jedoch
была	hier: ist
чисел	2. Fall Mehrz. v. число
одинакова	gleich



▲9▲ Тождество $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ можно написать, употребляя все десять цифр. Например: $\frac{1}{2}=\frac{3485}{6970}$.

Сможете ли вы найти ещё пять аналогичных примеров, где слева была бы дробь $\frac{1}{2}$?

Попробуйте поискать другие примеры, где равные дроби выражались бы десятью разными цифрами, например: $\frac{3}{6}=\frac{1485}{2970}$ или $\frac{1}{2}=\frac{35}{70}=\frac{48}{96}$.

тождество	Gleichung
употребляя	indem man verwendet
аналогичный	analog
дробь	Bruch
попробуйте	probiert
равный	gleich
где выражались бы	wo ausgedrückt werden können
десятью	durch zehn

Dolmetscherbüro hilft alpha

Seit vier Jahren besteht an der *Schloßberg-Oberschule* in Döbeln ein Dolmetscherbüro. In dieser Arbeitsgemeinschaft sind Jungen und Mädchen der Klassenstufen 8 bis 10 tätig. An der Schule gibt es etwa 150 feste Briefverbindungen mit Freunden in der Sowjetunion. Schüler der unteren Klassen der Schloßberg-Oberschule tragen häufig Wünsche an das Dolmetscherbüro heran, ihnen bei der Übersetzung oder Beantwortung von Briefen zu helfen.

Alles von unserem Moskauer *alpha*-Korrespondenten Prof. Dr. *Lewin* übersandte Material wurde im Dolmetscherbüro übersetzt und vom Mathematikfachlehrer *W. Träger*, der an der gleichen Schule tätig ist, bearbeitet.

Wir wünschen unseren Lesern viel Erfolg beim Übersetzen und beim Knobeln der Probleme unserer sowjetischen Freunde.

Redaktion *alpha*

Sammelbildserie Berühmte Mathematiker

Der Verlag VEB Bild und Heimat, 98 Reichenbach, gab eine Postkartenserie zum Preise von 2,00 M heraus. In einer Sammelmappe sind 9 Porträts (und dazu auf der Rückseite die Biographie) folgender Mathematiker enthalten: *R. Descartes, I. Newton, G. W. Leibniz, L. Euler, J.-L. Lagrange, C. F. Gauß, N. J. Lobatschewski, K. Weierstraß* (Bild und Text der Rückseite dieser Karte siehe unten), *D. Hilbert.*

Bestellungen können für größere Mengen bei LKG-Bilderdienst, 701 Leipzig, Querstr. 16 erfolgen.

Einzelbestellungen sind beim Buchhaus Leipzig, 705 Leipzig, Täubchenweg 83 möglich.

Die einzelnen Postkarten, unter Glas und Rahmen gebracht, mit der entsprechenden Biographie versehen, eignen sich hervorragend für die Ausgestaltung von Kabinetten, für Wandzeitungen usw. Redaktion *alpha*

Karl Weierstraß (1815 bis 1897)

Erst gegen Ende seines Jurastudiums begann sich der in Ostenfelde als Sohn eines Bürgermeistereisekretärs geborene *Karl Weierstraß* für mathematische Probleme zu interessieren. In Münster ließ es sich daraufhin vom nicht übermäßig begabten, aber als sehr tüchtig bekannten Professor *Christoph Gutermann* mathematisch ausbilden. Bereits nach sechs Semestern legte er die Oberlehrerprüfung mit Auszeichnung ab und wurde nach einem Praktikantenjahr mit einer Gymnasiallehrstelle im damaligen Deutsch-Krone betraut, wo er zu seinem Leidwesen in allen möglichen Fächern, auch Schönschreiben, unterrichten mußte.

Nach mehr als einem halben Jahrzehnt endlich wurde *Weierstraß* ausschließlich als Mathematiklehrer an das Braunsberger Gymnasium versetzt. In dieser Stadt verfaßte er seine erste aufsehenerregende Abhandlung „Beiträge zur Theorie der Abelschen Integrale", für die die Universität Königsberg ihm die Ehrendoktorwürde verlieh. Die Schulleitung indes erwirkte ihm einen längeren bezahlten Studienaufenthalt nach Berlin. Der Gelehrte ahnte nicht, daß er Spreeathen niemals mehr verlassen würde. Denn kaum hier eingetroffen, erhielt er den frei gewordenen Lehrstuhl der reinen Mathematik am Königlichen Gewerbeinstitut sowie eine Mathematikprofessur an der Berliner Universität.

Weierstraß' wissenschaftlicher Ruhm beruht auf seinen bahnbrechenden Arbeiten zur Variationsrechnung, Differentialgeometrie und Theorie der Elementarteiler. Weierstraß „klärte", wie sich der Mathematikhistoriker Dirk Struik in seinem „Abriß der Geschichte der Mathematik" (1963) ausdrückt, „die Begriffe des Minimums, der Funktion und der Ableitung völlig auf und beseitigte damit die noch vorhandene Unbestimmtheit der Ausdrucksweise in den grundlegenden Begriffen der Infinitesimalrechnung".

Struik rühmt ihn als einen der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten, als „das mathematische Gewissen schlechthin".

XIV. Internationale Mathematikolympiade

Toruń/Warszawa 1972

Aufgaben

1. Gegeben sei eine Menge von zehn beliebigen paarweise verschiedenen zweistelligen positiven ganzen Zahlen (Dezimalsystem). Zeige, daß es zwei elementfremde Teilmengen der gegebenen Menge gibt, deren Elemente die gleiche Summe haben.

(UdSSR, 5 Punkte)

2. Zeige, daß für alle $n \geqq 4$ folgender Satz gilt: Jedes Viereck, für welches ein Umkreis existiert, läßt sich in n Vierecke zerlegen, von denen jedes wieder einen Umkreis hat.

(Niederlande, 6 Punkte)

3. Es seien m und n beliebige nichtnegative ganze Zahlen. Zeige, daß

$\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$ eine ganze Zahl ist.

(Beachte: $0! = 1$).

(Großbritannien, 7 Punkte)

4. Bestimme alle Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ des folgenden Ungleichungssystems

$$(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leqq 0$$
$$(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leqq 0$$
$$(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leqq 0$$
$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leqq 0$$
$$(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leqq 0,$$

wobei x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 positive reelle Zahlen sein sollen.

(Niederlande, 7 Punkte)

5. Es seien f und g reelle, im Intervall $(-\infty, +\infty)$ definierte Funktionen, die für alle x und y der Gleichung

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,g(y)$$

genügen.

Zeige: Ist $f(x)$ nicht identisch gleich Null und gilt $|f(x)| \leqq 1$ (für alle x), so gilt auch $|g(y)| \leqq 1$ (für alle y).

(VR Bulgarien, 7 Punkte)

6. Es seien vier voneinander verschiedene parallele Ebenen gegeben. Zeige, daß ein regelmäßiges Tetraeder existiert, welches in jeder der gegebenen Ebenen einen Eckpunkt hat.

(Großbritannien, 8 Punkte)

Die beiden Klausuren wurden an einer Oberschule in Toruń am 10. und 11. Juli 1972 durchgeführt. Für die erste standen 4 Stunden und für die zweite (wegen des erhöhten Schwierigkeitsgrades) $4\frac{1}{2}$ Stunden reine Arbeitszeit zur Verfügung.

Ein 1. Preis wurde vergeben für 40 Punkte, ein zweiter für 39 bis 30 Punkte, ein dritter für 29 bis 19 Punkte.

Preisträger der XIV. IMO

Land	Teilnehmer 1	2	3	4	5.	6.	7.	8	Gesamtpunktz.	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Sonderpreis
Bulgarien	17	3	15	22	11	29	10	13	120	—	—	2	—
ČSSR	26	5	11	10	19	18	20	21	130	—	—	4	—
DDR	31	35	29	19	31	40	27	27	239	1	3	4	1**
Großbritannien	33	13	21	26	36	10	21	19	179	—	2	4	—
SFR Jugoslawien	25	11	47	23	17	2	15	26	136	—	—	3	—
Republik Kuba*	10	2	2	—	—	—	—	—	14	—	—	—	—
Mongolische VR	12	5	4	8	4	8	2	5	48	—	—	—	—
Niederlande	7	4	7	7	12	5	7	2	51	—	—	—	—
Österreich	26	16	22	19	20	20	11	2	136	—	—	5	—
VR Polen	40	11	15	8	15	37	25	9	160	1	1	1	1
SR Rumänien	16	15	35	35	15	40	19	31	206	1	3	1	1
Schweden	9	27	4	1	0	19	0	0	60	—	—	2	—
UdSSR	39	40	33	28	40	38	22	30	270	2	4	2	—
Ungarische VR	40	25	19	30	40	36	33	40	263	3	3	2	—
									2012***	8	16	30	3

* Aus der Republik Kuba nahmen nur 3 Schüler teil

** Pawel Kröger (DDR) erhielt einen Sonderpreis als jüngster Teilnehmer der IMO (bei voller Punktzahl)

*** Insgesamt wurden von der Jury 2012 Punkte vergeben, das sind 47% der erreichbaren Gesamtpunktzahl (Im Vergleich: Zur XIII. IMO 1971 wurden nur 28% der erreichbaren Gesamtpunktzahl erzielt.)

DDR-Teilnehmer der XIV. IMO

Pawel Kröger 1. Preis
dazu: Sonderpreis als jüngster Teilnehmer der XIV. IMO
49. Oberschule, Leipzig, Klasse 7

Harald Englisch 2. Preis
Erweiterte Oberschule „Karl Marx", Leipzig, Klasse 12

Albrecht Heß 2. Preis
Erweiterte Oberschule Dresden-Süd, Klasse 10

Olaf Böhme 2. Preis
Erweiterte Oberschule „Bertolt Brecht", Dresden, Klasse 12

Hans-Jürgen Fischer 3. Preis
Spezialklasse für Mathematik an der TH Karl-Marx-Stadt, Klasse 12

Gerd Weißenborn 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Heinrich Hertz", Berlin, Klasse 10

Rainer Siegmund-Schultze 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Heinrich Hertz", Berlin, Klasse 12

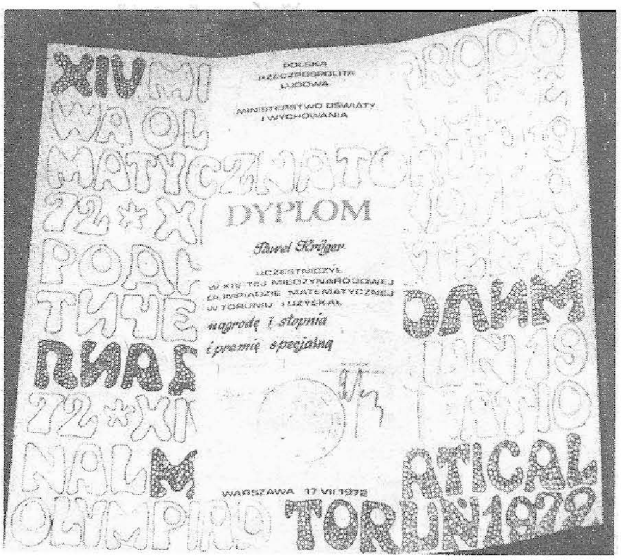
Matthias Günther 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Hermann von Helmholtz", Leipzig, Klasse 10

Einen ersten Preis erhielten (für volle Punktzahl):

1 Pawel Kröger, Leipzig (DDR)
2 Füredi Zoltán, Budapest (Ungarische VR)
3 Komornik Vilmos, Budapest (Ungarische VR)
4 Tuza Zsolt, Budapest (Ungarische VR)
5 Mircea Martin, Alba (SR Rumänien)
6 Wladimir Burkow, Wladimir (UdSSR)
7 Sergej Konjalin, Saratow (UdSSR)
8 Grzegorz Andrzejcak, Pabianice (VR Polen)

Pawel Kröger (DDR), Schüler einer 7. Klasse, 1. Preisträger und Träger eines Sonderpreises gibt Autogramme (oben) – seine Urkunde (unten)

Die Abschlußfeier der *XIV. Internationalen Mathematikolympiade* fand am 17. 8. 1972 in der *Hochschule für Elektrotechnik* in Warszawa statt. (Über die Rundfahrt der Teilnehmer der XIV. IMO vom 12. 8. bis 16. 8. berichtet *alpha* in Heft 6/72, d. Red.)

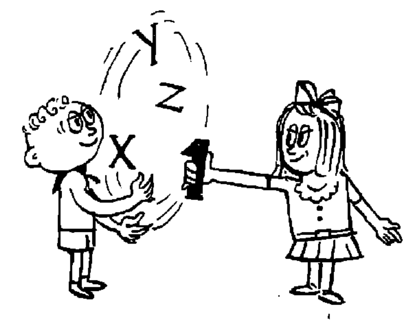


Die erfolgreiche sowjetische Mannschaft mit ihren Delegationsleitern

An der XIV. IMO nahmen zwei Mädchen teil:
Hanna Garyga (Wrocław) und Eva Janielity (Warszawa)

Wer löst mit?

alpha -Wettbewerb

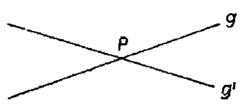


Letzter Einsendetermin: 3. Januar 1973

5▲927 Wenn man die Anzahl der Einfamilienhäuser unseres Ortes zunächst verdoppelt, das so erhaltene Produkt mit 3 und das neue Produkt mit 4 multipliziert, dann erhält man als Ergebnis eine dreistellige natürliche Zahl, die aus gleichen Grundziffern besteht. Wie viele Einfamilienhäuser gibt es in diesem Ort?

Anke Mentkowski, POS Eichwalde, Kl. 7 a

5▲928 Die Abbildung stellt eine Gerade g und ihre durch Spiegelung erzeugte Bildgerade g' dar, wobei sich g und g' im Punkt P schneiden.
Bestimme alle zu den Geraden g und g' zulässigen Symmetrieachsen! *T.*



W 5 ■929 In einer Schachtel befinden sich nicht mehr als 100 Knöpfe. Genau der dritte Teil dieser Knöpfe sind Hemdenknöpfe, genau der vierte Teil Mantelknöpfe, und die restlichen Knöpfe sind Druckknöpfe.
a) Wieviel Knöpfe liegen höchstens in der Schachtel?
b) Wieviel Druckknöpfe sind in diesem Fall in der Schachtel?

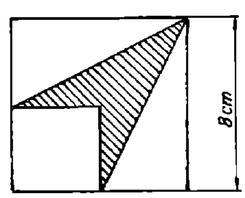
Hannelore Schiefer, Karl-Marx-Stadt

W 5 ■930 Nach Abschluß der Kreisolympiade Junger Mathematiker wurde ein Schüler gefragt, wieviel Punkte er erreicht habe. Scherzhaft antwortete er: „Addiert man zu der Zahl meiner erreichten Punkte 10, und verdoppelt man die so erhaltene Summe, dann fehlen noch 10 Punkte an 100." Wieviel Punkte erzielte dieser Schüler?

W 5 * 931 Nach einem Eishockeyspiel sagte der Kapitän der siegreichen Mannschaft: „Wir haben dreimal soviel Tore erkämpft wie unsere Gegner, die weniger als fünf Tore erzielten." Wie lautet der Endstand dieses Spieles, wenn insgesamt weniger als 15, aber mehr als 9 Tore geschossen wurden?

Anke Mentkowski, POS Eichwalde, Kl. 7 a

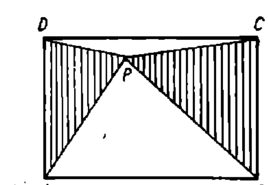
W 5 * 932 Die Mitten zweier benachbarter Seiten eines Quadrates sind mit dem Schnittpunkt der Diagonalen und mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt, wie aus der Zeichnung ersichtlich, verbunden. Wieviel Quadratzentimeter beträgt die schraffiert gezeichnete Fläche, wenn die Quadratseite 8 cm lang ist? *Sch.*

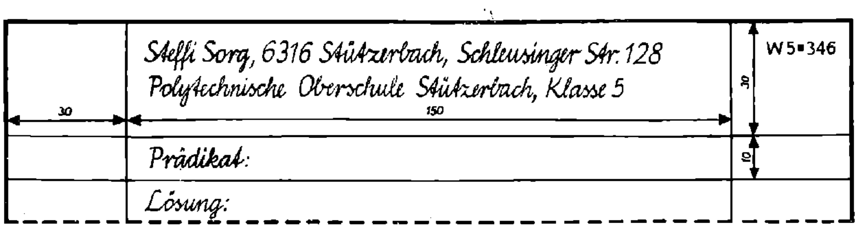


6▲933 Gegeben sei ein spitzer Winkel α mit seinem Scheitelpunkt S. Zeichne die Halbierungslinie des Winkels α, lege auf ihr einen Punkt P fest und zeichne durch P die Parallelen zu den Schenkeln des Winkels α. Beweise, daß die dabei entstandenen Streifen gleich breit sind! *Sch.*

6▲934 Es sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen anzugeben, die durch 12 teilbar sind und die Form 9*7* haben. Dabei ist jedes der Sternchen durch eine der Grundziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen. *T.*

W 6 ■935 Ein innerer Punkt P eines Rechtecks $ABCD$ wurde mit den Eckpunkten des





Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W * 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.

Der Jahreswettbewerb 1972/73 läuft von Heft 5/72 bis Heft 2/73. Zwischen dem 1. und 10. September 1973 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/73 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1972/73 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders ~~nicht~~ vergessen wird. Redaktion *alpha*

Rechtecks verbunden. Ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABP$ und $\triangle CDP$ kleiner, gleich oder größer als die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle BCP$ und $\triangle DAP$? Die Antwort ist zu begründen! *Sch.*

W 6 ■ 936 Holger berichtet: „Gestern erzielte ich beim Würfeln mit genau drei Würfeln einen besonderen Wurf. Die Augenzahl jedes der drei Würfel war eine Primzahl, und die Gesamtaugenzahl aller drei Würfel war ebenfalls eine Primzahl." Nach kurzem Nachdenken meint Bernd: „Bei diesem Wurf zeigten genau zwei Würfel die gleiche Augenzahl." Begründe Bernds Antwort, und gib die Augenzahlen für alle möglichen Würfe an! *T.*

W 6 * 937 Gegeben sei ein Dreieck ABC. Durch Konstruktion sind ein innerer Punkt D der Seite $\overline{AC}$ und ein innerer Punkt E der Seite $\overline{AB}$ derart festzulegen, daß $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB}$ gilt. Unter welchen Bedingungen ist die geforderte Konstruktion ausführbar?

W 6 * 938 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ schneide die Kathete $\overline{BC}$ in D derart, daß $\overline{BD}=2\cdot\overline{CD}$ gilt. Es ist die Größe des Winkels $\sphericalangle CAB=\alpha$ zu ermitteln!

Jörg Lehnert, Tutow, Kl. 11

7 ▲ 939 In einem Kreis k mit der Sehne $\overline{AB}$, die kleiner als der Durchmesser des Kreises ist, verbinde man die Punkte A und B mit dem Mittelpunkt M des Kreises. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle AMB$ schneide den Kreis k im Punkte C, der mit M auf der gleichen Seite von $\overline{AB}$ liegt. Man verbinde C mit A und B. Es ist zu beweisen, daß $\sphericalangle ACB+\sphericalangle BMC=180°$ gilt.

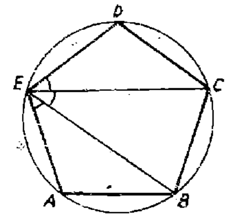
Bernd Zimdars, Templin, Kl. 9

7 ▲ 940 Genau 8 % aller Schüler der Klassen 5 bis 10 einer Oberschule abonnieren die Schülerzeitschrift *alpha* bereits das vierte Jahr, $1\frac{1}{2}$ mal soviel bereits das dritte, zweimal soviel das zweite und viermal soviel Schüler das erste Jahr. Genau 144 Schüler der Klassen 5 bis 10 sind nicht Abbonnent dieser Zeitschrift.

a) Wieviel Schüler der Klassen 5 bis 10 besuchen diese Schule?
b) Wieviel Schüler abonnieren die Schülerzeitschrift *alpha* das vierte, dritte, zweite oder erste Jahr?

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Meuselwitz

W 7 ■ 941 Regelmäßige konvexe n-Ecke haben n gleiche Seiten und n gleiche Innenwinkel. Jedem regelmäßigen konvexen n-Eck läßt sich ein Kreis umbeschreiben, in dem die n-Eck-Seiten Sehnen sind. In dem abgebildeten regelmäßigen Fünfeck wurden alle von genau einem Eckpunkt ausgehenden Diagonalen eingezeichnet, die einen Innenwinkel in drei Teilwinkel zerlegen. Welche Größe hat jeder dieser Teilwinkel? *T.*



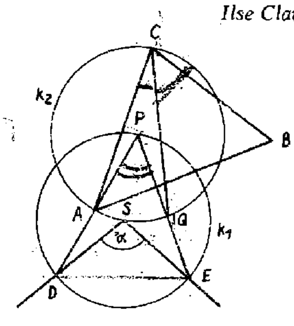
W 7 ■ 942 Es sind alle natürlichen Zahlen a und b anzugeben, für die die Gleichung $2a+3b=27$ erfüllt ist.

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Meuselwitz

W 7 * 943 Es sind alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen m und n anzugeben, deren Summe halb so groß wie ihr Produkt ist. *Sch.*

W 7 * 944 Aus einem gegebenen Winkel $\alpha<180°$ mit dem Scheitelpunkt S wurde ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ auf folgende Weise konstruiert:
Zunächst wurde um S ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 gezeichnet, auf seiner Peripherie ein Punkt P festgelegt und mit den Schnittpunkten D und E des Kreises k_1 mit den Schenkeln von α verbunden. Um P wurde ein zweiter Kreis k_2 mit dem Radius $r_2=r_1$ gezeichnet, auf k_2 ein Punkt C festgelegt, danach C mit A (Schnittpunkt von k_2 mit DP) und C mit Q (Schnittpunkt von k_2 mit EP) verbunden. Schließlich wurde in C an CQ der Winkel $\sphericalangle DPE$ angetragen; auf seinem freien Schenkel wurde die Strecke $\overline{CA}$ von C bis B abgetragen, und es wurde A mit B verbunden. Es ist zu beweisen, daß der Winkel $\sphericalangle ACB=\frac{3}{4}\alpha$ ist.

Ilse Clauder, Spielberg



8 ▲ 945 Am 23. März 1969 erreichte Manfred Wolf (DDR) auf der Skiflugschanze in Planica (FVR Jugoslawien) mit einer Sprungweite von 165 m den Weltrekord im Skiflug. Für seinen Skiflug benötigte er eine Zeit von 5,22 s.

a) Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit während des Fluges? Diese Geschwindigkeit soll in $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ mit einer Dezimale nach dem Komma angegeben werden. Dabei soll die Abweichung der Flugbahn von der Distanz von 165 m nicht berücksichtigt werden.
b) Zwischen welchen Werten liegt die mittlere Geschwindigkeit, wenn die angegebene Sprungweite mit einem Fehler von 0,5 m und die angegebene Zeit mit einem Fehler von 0,005 s behaftet sein kann? *L.*

8 ▲ 946 Bei der Erneuerung des Oberbaus auf den Hauptstrecken der Deutschen Reichsbahn werden moderne Gleisjoch-Verlegeeinrichtungen eingesetzt, mit deren Hilfe 8 Arbeiter in einer Stunde 90 m Gleise verlegen können. Dagegen verlegen in traditioneller Handarbeit 40 Arbeiter in einer Arbeitswoche, das sind $43\frac{3}{4}$ Arbeitsstunden, 1 125 m Gleise.

1. Wieviel Arbeitsstunden benötigen 8 Arbeiter, um mit modernen Geräten 9 km Gleise zu verlegen?
2. Wieviel Arbeitsstunden benötigen 8 Arbeiter, um diese Arbeit in traditioneller Handarbeit zu verrichten?
3. Wieviel Kilometer Gleise können 8 Arbeiter in einer Arbeitswoche, das sind $43\frac{3}{4}$ Arbeitsstunden, verlegen, wenn sie
a) in traditioneller Handarbeit,
b) mit modernen Geräten arbeiten?
4. Wie verhält sich die Arbeitsproduktivität im Falle b) zu der im Falle a), d. h., wievielmal so groß ist die Länge der im Falle b) verlegten Gleise wie die Länge der im Falle a) verlegten Gleise? *L.*

W 8 ■ 947 Bei der inoffiziellen Mannschaftswertung der XI. Olympischen Winterspiele im Februar 1972 in Sapporo errang die DDR nach der UdSSR und vor allen übrigen Ländern den zweiten Platz mit insgesamt 84 Punkten. Dabei wurden für je eine Goldmedaille 7 Punkte, für je eine Silbermedaille 5 Punkte, für je eine Bronzemedaille 4 Punkte und für je einen 4., 5. bzw. 6. Platz 3, 2 bzw. 1 Punkte angerechnet.
Die Mannschaft der DDR erhielt sieben Bronzemedaillen, einen 4. Platz, drei 5. Plätze und vier 6. Plätze.
Wieviel Goldmedaillen und wieviel Silbermedaillen errang die Mannschaft der DDR? *L.*

W 8 ■ 948 Es ist zu beweisen, daß jede Strecke, die zwei Punkte paralleler Seiten eines Parallelogramms verbindet und durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht, in diesem Schnittpunkt halbiert wird. *Sch.*

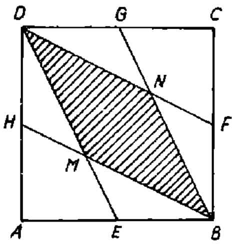
W 8 * 949 In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ seien die Längen der von A bzw. C ausgehenden Höhen gleich 12 cm bzw. 10 cm. Es ist die Länge der Basis $\overline{AB}$ zu berechnen.

Karl Krause, Mansfeld, Lehrer i. R.

W 8 * 950 Es sind alle natürlichen Zahlen a und b anzugeben, für die die Zahl a^3+b^3 eine Primzahl ist.

Erich Hoy, EOS „Lucas Cranach", Kl. 9 Wittenberg-Piesteritz

9▲951 Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB}=a=6$ cm dar. Die Mitte E der Seite $\overline{AB}$ und die Mitte F der Seite $\overline{BC}$ wurden mit D, die Mitte G der Seite $\overline{CD}$ und die Mitte H der Seite $\overline{AD}$ wurden mit B verbunden (vgl. die Abb.). Der Schnittpunkt der Geraden BH und DE sei M, der Schnittpunkt der Geraden DF und BG sei N.



Es ist zu beweisen, daß das Viereck $BNDM$ ein Rhombus ist, und es ist sein Flächeninhalt A_R zu berechnen.

Martin Theuer, Fachlehrer für Mathematik, Crussow

9▲952 In dem folgenden Schema sind die Sternchen jeweils durch eine der Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Divisionsaufgabe entsteht. Dabei darf am Anfang einer der Zahlen nicht die Ziffer 0 stehen.

```
* * * * * * * * * * : * * * = * * * * * * 2
* * *
―――
    * * * *
     * * *
    ―――――
       * * * *
       * * * *
       ―――
          0
```

Obwohl nur eine Ziffer, nämlich die letzte Ziffer 2 des Quotienten gegeben ist, läßt sich diese Aufgabe eindeutig lösen. *L.*

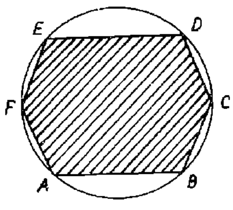
W 9 ■ 953 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die Gleichung

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=(x+3)^3$$

erfüllt ist. *Frank Harz, Käthe-Kollwitz-OS, Kl. 7, Weimar*

W 9 ■ 954 Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB}=a$. Der Kreis k um A mit $\overline{AB}$ als Radius schneide die Diagonale $\overline{AC}$ im Punkte E. Die Parallele zu BC durch E schneide die Diagonale $\overline{BD}$ im Punkte F. Es ist zu beweisen, daß $\overline{CE}=\overline{EF}=\overline{FB}$ gilt. *Sch.*

W 9 * 955 Einem Kreis sei ein Sechseck $ABCDEF$ einbeschrieben, dessen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DE}$ gleichlang und doppelt so lang wie jede der einander gleichlangen Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ und $\overline{FA}$ sind (vgl. die Abb.).



Es ist zu entscheiden, ob der Flächeninhalt dieses Sechsecks größer, kleiner oder gleich $\frac{3}{4}$ des Flächeninhaltes des Kreises ist.

Erst schätzen, dann rechnen!

Günter Stolz, Königs Wusterhausen, Fachlehrer für Mathematik

W 9 * 956 Es sind alle geordneten Paare (a, b) natürlicher Zahlen anzugeben, für die die Gleichung

$$10a+(a-9)b^2=88+(6a-54)b$$

erfüllt ist. *Knut Taeger, EOS Dessau, Kl. 11*

10/12▲957 Es sind alle reellen Zahlen a zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben:

Die Ungleichung $x^2+ax-a>0$ ist für alle reellen Zahlen x erfüllt. *S.-H.*

10/12▲958 Die Gleichung

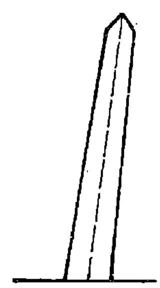
$$x^3+x^2+ax+b=0,$$

wobei a und b reelle Zahlen sind, habe drei (nicht notwendig voneinander verschiedene) reelle Wurzeln.

Man beweise, daß dann stets $a\leq\frac{1}{2}$ gilt.

Jürgen Hopfe, Student, Merseburg

W 10/12 ■ 959 In Samarkand (Usbekische SSR) wurden kürzlich die Arbeiten zur Rettung eines vom Einsturz bedrohten alten Minaretts aus dem 14. Jahrhundert erfolgreich abgeschlossen. (Skizze, nicht maßstäblich)



Der 18 m hohe Turm, der um 1,47 m geneigt war (d. h. die Turmspitze war um 1,47 m in der Horizontalen verschoben), wurde mit einer mächtigen Hebewinde aufgerichtet.

a) Wie groß war der Neigungswinkel der Achse des Turmes gegen die Horizontale vor der Aufrichtung des Turmes?

b) Um wieviel Meter erhöhte sich der Turm nach seiner Aufrichtung, wenn man berücksichtigt, daß nach der Aufrichtung die Achse des Turmes gleich seiner Höhe ist? *L. L.*

W 10/12 ■ 960 Jemand will möglichst schnell eine Näherungslösung für das Gleichungssystem

$$89{,}5x+30{,}2y=2137{,}4, \qquad (1)$$
$$29{,}4x+10{,}1y=83{,}5 \qquad (2)$$

finden. Zu diesem Zweck rundet er die Koeffizienten und erhält die beiden Gleichungen

$$90x+30y=2137, \qquad (3)$$
$$29x+10y=84. \qquad (4)$$

Er erhält weiter aus (4) durch Multiplikation mit 3

$$87x+30y=252 \qquad (5)$$

und durch Subtraktion aus (3) und (5)

$$3x=1885,\ x\approx 628.$$

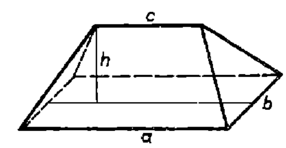
Ferner erhält er aus (4)

$$10y=84-29x\approx -18128,\ y\approx -1813.$$

Es ist durch eine genaue Rechnung zu überprüfen, ob diese erhaltenen Lösungen als Näherungslösungen brauchbar sind. Wenn das nicht der Fall ist, ist eine Begründung anzugeben. *L.*

W 10/12 * 961 Das Volumen des von einem abgewalmten Dach mit den Kantenlängen a, b und c sowie der Höhe h begrenzten Körpers (vgl. die Abb.) kann nach der folgenden Formel berechnet werden:

$$V=\frac{1}{6}(2a+c)bh.$$

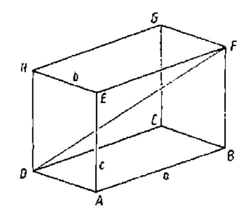


a) Es ist die Richtigkeit dieser Formel zu beweisen.

b) Es ist das Volumen für $a=16m$, $b=6m$, $c=8m$, $h=4m$ zu berechnen.

Hinweis zur Lösung: Es empfiehlt sich, den Dachkörper durch zwei senkrechte Schnitte, die durch die Endpunkte des Dachfirstes gehen, in zwei Pyramiden und ein Prisma zu zerlegen und die Volumina dieser Körper nach den bekannten Formeln zu berechnen.

W 10/12 * 962 Ein als Drahtmodell ausgebildeter Quader mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H habe Kanten der Längen a bzw. b bzw. c (vgl. die Abb.). Die Verbindungsstrecke $\overline{DF}$ stellt eine Raumdiagonale des Quaders dar.



Gesucht sind die Längen der Gemeinlote l_a von AB und DF, l_b von EH und DF sowie l_c von AE und DF.

Erklärung: Unter dem Gemeinlot zweier windschiefer Geraden g und h versteht man jene Gerade l, die g und h senkrecht schneidet. Für nichtparallele windschiefe Geraden gibt es genau ein Gemeinlot. Der Abstand der Schnittpunkte des Gemeinlotes mit g und h ist die Länge des Gemeinlotes.

Lösungshinweis: Stellen Sie den Quader mit der Raumdiagonalen $\overline{DF}$ in Grund-, Auf- und Kreuzriß dar! In je einen der drei Risse läßt sich sofort je ein Gemeinlot einzeichnen. Aus jedem der drei Risse ist auch die Formel für die Länge des betreffenden Gemeinlotes sofort ableitbar.

Dozent Dr. E. Schröder, Technische Universität Dresden

Kleine Worte — Große Wirkung Teil 1

Als Klaus seine letzte Mathematikarbeit korrigiert zurückbekam, war er recht erstaunt. „Unser Mathematiklehrer ist ja wirklich kleinlich", meinte er zu seinem Freund Bernd. „Ich habe bis auf ein paar kleine Wörtchen alles richtig aufgeschrieben und doch erhielt ich bei keiner der ersten vier Aufgaben die volle Punktzahl."

Die ersten vier Aufgaben der Mathematikarbeit lauteten:

▲1▲ Wann ist die Division im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar?

▲2▲ Wieviel Punkte des Zahlenstrahls sind einer einzigen natürlichen Zahl zugeordnet?

▲3▲ Ist die Zahl 3 741 111 durch 3 teilbar? Begründe deine Antwort!

▲4▲ a) Entscheide, ob die Aussage
Alle natürlichen Zahlen haben einen Vorgänger
wahr ist!
b) Falls die Aussage falsch ist, so berichtige sie, indem du die Aussage verneinst!

Klaus hat als Antwort folgendes geschrieben:
Zu 1: Die Division ist im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar, wenn der Dividend a ein Vielfaches des Divisors b ist oder wenn b nicht Null ist.
Zu 2: Jeder natürlichen Zahl ist ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet.
Zu 3: Die Zahl 3 741 111 ist durch 3 teilbar. *Begründung:* Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so ist auch die Quersumme dieser Zahl durch 3 teilbar.
Zu 4a: Die Aussage ist falsch, denn die Null hat keinen Vorgänger.
Zu 4b: Alle natürlichen Zahlen haben keinen Vorgänger.

Während sich die beiden Jungen die Lösungen betrachteten, fuhr Klaus fort: „Nur weil ich bei der ersten Aufgabe statt **und oder** geschrieben habe, war es nicht richtig. Bei der zweiten Aufgabe habe ich das kleine Wörtchen **genau** vergessen und bekam nicht die volle Punktzahl, obwohl die Aussage ja richtig ist. An die Lösung der dritten Aufgabe schrieb unser Mathematiklehrer: ‚Falsche Begründung!' Hans hatte als Begründung geschrieben: ‚Da die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist, so ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar.' Er bekam die volle Punktzahl. Ich finde jedoch zwischen unseren beiden Begründungen kaum einen Unterschied. Bei der vierten Aufgabe bin ich tatsächlich reingefallen, denn ich hätte wirklich merken müssen, daß der Satz
Alle natürlichen Zahlen haben keinen Vorgänger
auch wieder eine falsche Aussage ist."

Aus dem Gespräch unserer beiden Freunde können wir folgendes entnehmen:

- Kleine, fast unscheinbare Wörtchen, wie z. B. **und, oder, genau** usw., können eine große Wirkung haben.
- Nicht nur die kleinen Wörtchen selbst, sondern auch deren Stellung im Satz ist sehr bedeutend, z. B. **wenn-, so, nicht**.

Damit wir in Zukunft nicht auch solche Fehler machen wie Klaus in seiner Mathematikarbeit, wollen wir uns in *alpha* mit diesen kleinen Wörtchen und ihrer großen Bedeutung beschäftigen.

Mindestens — höchstens — genau

Wenden wir uns zunächst der Aussage zu:
Jeder natürlichen Zahl ist ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet.
Natürlich ist diese Aussage richtig. Sie bringt aber denselben Sachverhalt zum Ausdruck wie die Aussage:
Jeder natürlichen Zahl ist mindestens ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet.
Mit diesen Sätzen wird also festgestellt, daß jeder natürlichen Zahl ganz sicher ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet wird, es könnten jedoch auch mehrere sein, weniger auf keinen Fall. Wie man sieht, ist der Informationsgehalt dieser Aussagen viel geringer als wenn man formuliert:
Zu jeder natürlichen Zahl gehört **genau ein** *Punkt auf dem Zahlenstrahl.*
Nun fällt es uns auch leicht, folgende Aussagen zu überprüfen.
1. Es gibt genau drei einstellige natürliche Zahlen, die durch 3 teilbar sind.
2. Es gibt drei einstellige natürliche Zahlen, die durch 3 teilbar sind.
3. Es gibt mindestens drei einstellige natürliche Zahlen, die durch 3 teilbar sind.

Die erste Aussage ist natürlich falsch, weil mehr als drei, nämlich vier einstellige natürliche Zahlen durch 3 teilbar sind.
(Dies sind die Zahlen 0, 3, 6, 9.)
Dagegen sind die beiden anderen Aussagen wahr. Sie bringen ja auch denselben Sachverhalt zum Ausdruck.
Nun fällt es uns auch leicht festzustellen, daß die Aussage
Zwischen 1 und 100 gibt es mindestens 50 natürliche Zahlen, die durch 2 teilbar sind
falsch ist, da tatsächlich nur 49 (also weniger als 50) Zahlen zwischen 1 und 100 die Bedingung erfüllen.
Gewiß gibt es Leser unter euch, die der Meinung sind, daß die Aussage
Die DDR hatte am 1. 1. 1971 **höchstens** *50 000 000 Einwohner*
falsch sei, da die Einwohnerzahl der DDR etwa bei 17 000 000 liegt. Dieses Argument ist aber nicht zutreffend, weil mit der Wendung *höchstens 50 000 000 Einwohner* zum Ausdruck gebracht wird, daß es zwar weniger, aber keinesfalls mehr als 50 000 000 Einwohner sein können. Die Aussage ist also wahr.
Überlege nun selbst einmal, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!
a) Es gibt **höchstens** neun einstellige natürliche Zahlen.
b) Es gibt **höchstens** zwei gerade Primzahlen.
c) Dreiecke haben **höchstens** drei spitze Winkel.
d) Die Gleichung $3^x=27$ hat im Bereich der natürlichen Zahlen **höchstens** eine Lösung.
e) Dreiecke haben **mindestens** einen rechten Winkel.
f) Die Gleichung $3^x=27$ hat **mindestens** eine Lösung.
g) Zwischen 1 und 1 000 gibt es **mindestens** 50 natürliche Zahlen, die durch 2 teilbar sind.
h) Die Gleichung $3^x=27$ hat **genau** eine Lösung.
i) Die Zahl 60 hat im Bereich der natürlichen Zahlen **genau** zehn Teiler.
j) Jeder natürlichen Zahl ist **höchstens** ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet.
Treffen für einen Sachverhalt gleichzeitig die Redeweisen
Es gibt mindestens ein x... und
Es gibt höchstens ein x...
zu, so kann man dafür auch sagen
Es gibt genau ein x...,
das diesen Sachverhalt erfüllt. (Vergleiche die Aussagen *d, f, h*!) *L. Flade*

Vorbildlich: Anläßlich eines Pionierfestes des Pionierhauses „Juri Gagarin", Karl-Marx-Stadt, wurde zur Werbung von Lesern ein alpha-Stand eingerichtet, der bei jeder weiteren Gelegenheit zum Einsatz kommt.

Diophantische Gleichungen

Ein sehr interessantes Gebiet der Zahlentheorie sind die diophantischen Gleichungen. Erstmalig wurden derartige Gleichungen von dem griechischen Mathematiker *Diophantos* (250 u. Z.) behandelt, und trotz jahrhundertlanger Forschungsarbeit sind heute noch mehrere Probleme dieser Theorie ungeklärt.

Gegenstand dieses Artikels soll nur ein spezieller Typ von diophantischen Gleichungen sein: Wir wollen nur *lineare* Gleichungen betrachten.

Definition 1:
G ist *lineare diophantische Gleichung* genau dann, wenn G die Form $ax+by=c$ hat, wobei a, b, c gegebene ganze Zahlen darstellen und x, y Variable für ganze Zahlen sind.

(Im folgenden wollen wir unter diophantischen Gleichungen immer nur lineare diophantische Gleichungen verstehen.)

Definition 2:
L ist *Lösung der diophantischen Gleichung* $ax+by=c$ genau dann, wenn L ein Paar $[x_0, y_0]$ von ganzen Zahlen ist, für das $ax_0+by_0=c$ gilt.

Allgemein ist bekannt, daß man die Gleichung $ax+by=c$ als Geradengleichung interpretieren kann, falls x und y aus dem Bereich der reellen Zahlen gewählt werden dürfen. Die Forderung „x, y ganzzahlig" kann man nun so verstehen, daß wir auf der vorliegenden Geraden nach Punkten mit ganzzahligen Koordinaten, sogenannten Gitterpunkten, suchen werden. Das *Ziel* besteht nun darin, *sämtliche Lösungen L der diophantischen Gleichung $ax+by=c$ anzugeben.* Rein anschaulich kann man sich überlegen, daß es Geraden geben kann, die nicht durch Gitterpunkte hindurchführen. Mit anderen Worten bedeutet das: Nicht jede diophantische Gleichung muß lösbar sein. Bevor man also an das Lösen von diophantischen Gleichungen herangehen wird, muß man die Lösbarkeitsfrage klären.

Eine Antwort darauf gibt

Satz 1:
Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der diophantischen Gleichung $ay+by=c$ ist, daß der größte gemeinsame Teiler von a und b auch ein Teiler von c ist.

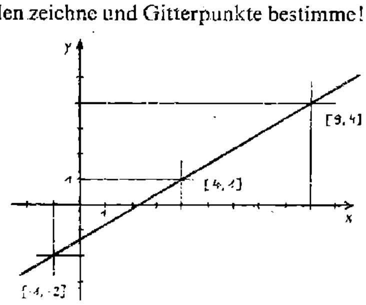
Bemerkungen:
(1) Die natürliche Zahl $d (d \neq 0)$ *heißt Teiler der ganzen Zahl c*, in Zeichen $d \mid c$, wenn es eine ganze Zahl e gibt, so daß $c=d \cdot e$ gilt. Gibt es keine solche Zahl, dann schreibt man $d \nmid c$.
(2) Unter (a, b) verstehen wir den *größten gemeinsamen Teiler* von a und b. Ist $(a,b)=1$, so nennen wir a und b *teilerfremd*.

Beweis von Satz 1:
Es sei $ax+by=c$ lösbar und $(a, b)=d$. Unter Berücksichtigung der Zerlegungen $a=\alpha \cdot d$ und $b=\beta \cdot d$ mit ganzzahligen α und β ergibt sich durch Einsetzen: $d(\alpha x+\beta y)=c$, und daraus folgt $d \mid c$.
Die Frage der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung haben wir damit auf das Vergleichen der ganzen Zahlen a, b, c zurückgeführt. Besitzen a, b, c den größten gemeinsamen Teiler d, dann wollen wir ihn stets aus der diophantischen Gleichung herausgekürzt denken, so daß wir nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit für lösbare Gleichungen stets $(a, b)=1$ voraussetzen können.

Aufgabe:
Man versuche wenigstens je 2 Lösungen $[x, y]$ für die diophantischen Gleichungen

$$6x+3y=1 \quad (1)$$
$$3x-5y=7 \quad (2)$$

anzugeben, indem man die zugehörigen Geraden zeichne und Gitterpunkte bestimme!



Ergebnis:
(1) Da $(6, 3)=3$ und $3 \nmid 1$, folgt unmittelbar Unlösbarkeit!
(2) Aus der angefertigten Zeichnung kann man erkennen, daß z. B. die Paare $[-1, -2]$, $[4, 1]$ und $[9, 4]$ zur Lösungsmenge gehören, wie man durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung bestätigen kann. Auffallend ist, daß sich die x- bzw. y-Werte um Vielfache von 5 bzw. 3 unterscheiden. Diese Eigenschaft legt die *Vermutung* nahe, daß, *falls eine diophantische Gleichung lösbar ist, beliebig viele Lösungen existieren.*
Hiermit haben wir ein erstes, wenn auch umständliches Verfahren zur Lösung diophantischer Gleichungen kennengelernt. Es gibt jedoch wesentlich elegantere Methoden. Zwei Verfahren werden wir im folgenden behandeln.

Erste Methode:
Das Eulersche Reduktionsverfahren
Wir erarbeiten uns den Lösungsalgorithmus an Hand des Beispiels der diophantischen Gleichung $3x-5y=7$.

1. Schritt: Man stelle die Gleichung $3x-5y=7$ nach einer Variablen um (aus rechentechnischen Gründen nach derjenigen, deren Koeffizient den kleineren Betrag hat).

$$x=\frac{7+5y}{3}$$

2. Schritt: Man führe die Division so weit wie möglich aus.

$$x=2+y+\frac{1+2y}{3}$$

3. Schritt: Da beide Variable x, y ganzzahlig sind, folgt, daß der verbleibende Bruch ebenfalls ganzzahlig sein muß. Man führe dafür eine neue Variable z ein.

$$z=\frac{1+2y}{3}$$

Hieraus folgt:

$$3z-2y=1$$

Das *Ergebnis dieser 3 Schritte* besteht darin, daß wir die diophantische Gleichung $3x-5y=7$ auf die diophantische Gleichung $3z-2y=1$ zurückgeführt haben. Auf diese neu gewonnene diophantische Gleichung wenden wir das Verfahren abermals an und wiederholen es so lange, bis sich eine Gleichung ergibt, in der eine Variable den Koeffizienten 1 hat. (Dieser Fall wird stets erreicht, da bei diesem Verfahren die Koeffizienten ihrem Betrage nach kleiner werden.)

1. Schritt: $y=\frac{3z-1}{2}$

2. Schritt: $y=z+\frac{z-1}{2}$

3. Schritt: $u=\frac{z-1}{2}$, $\quad 2u-z=-1$

1. Schritt: $z=2u+1$

Damit ist der Algorithmus beendet.
Um die Lösungen $[x, y]$ zu erhalten, müssen wir nun lediglich $z=2u+1$ in $y=\frac{3z-1}{2}$ einsetzen. Wir erhalten $y=1+3u$. Einsetzen in $x=\frac{7+5y}{3}$ liefert $x=4+5u$.

Ergebnis:
Die Lösungen der diophantischen Gleichung $3x-5y=7$ lauten:

$$x=1+3u$$
$$y=4+5u$$

mit beliebigem ganzzahligem u.
Damit haben wir überdies gezeigt, daß — wie oben vermutet — die Gleichung unendlich viele Lösungen hat.

Zweite Methode:
Verfahren mittels linearer Kongruenzen
Wir lernen hier die wichtigsten Eigenschaften linearer Kongruenzen kennen. Mit Hilfe dieser Theorie lassen sich diophantische Gleichungen, wie wir sehen werden, sehr schnell lösen.

Definition 3:
Zwei ganze Zahlen a, b heißen kongruent modulo m, in Zeichen
$a \equiv b\,(m)$, wenn $m \mid a-b$ gilt.
Man sagt: *a, b sind inkongruent modulo m,* in Zeichen
$a \not\equiv b\,(m)$, wenn $m \nmid a-b$ ist.

Die *natürliche Zahl m* nennt man den *Modul der Kongruenz.*

Beispiele: $15 \equiv 5(5)$

$537 \equiv 117(10)$

$3 \not\equiv 4(2)$

Satz 2:

Die Kongruenz $a \equiv b(m)$ gilt dann und und nur dann, wenn a und b bei der Division durch m denselben Rest lassen.

Beweis: Wir haben zweierlei zu beweisen:

(1) Falls $a \equiv b(m)$ gilt, dann folgt, daß a und b bei der Division durch m denselben Rest lassen.

(2) Umkehrung zu (1)

Zu (1):

$a \equiv b(m)$ ist äquivalent mit $m \mid a-b$ bzw. $a=b+km$ mit ganzzahligem k. Für b nehmen wir o. B. d. A. die Zerlegung $b=qm+r$ mit $0 \leqq r<m$ und ganzzahligem q an. Folglich ergibt sich für a die Zerlegung $a=(k+q)m+r$.

Zu (2):

$a=qm+r$ und $b=pm+r$ mit $0 \leqq r<m$ und q, p ganzzahlig. Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$a-b=(q-p)m$, d. h. $m \mid a-b$ und somit $a \equiv b(m)$.

Der Vorteil der Schreibweise $a \equiv b(m)$ für die Teilbarkeitsbeziehung $m \mid a-b$ liegt vor allem darin, daß mit Kongruenzen bezüglich Addition, Subtraktion und Multiplikation so gerechnet werden kann wie mit Gleichungen.

Satz 3:

Gegeben sind die Kongruenzen

$a_1 \equiv b_1\ (m)$

$a_2 \equiv b_2\ (m)$.

Dann gelten die Kongruenzen

$a_1+a_2 \equiv b_1+b_2\ (m)$

$a_1-a_2 \equiv b_1-b_2\ (m)$

$a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2\ (m)$

Aufgabe:

Man versuche die Beweise selbständig zu führen, indem man Definition 2 anwende!

Anders verhält es sich hingegen mit der *Division.* Wir wissen bereits, daß aus der Gleichung $ax=ay$ stets $x=y$ folgt, falls $a \neq 0$ vorausgesetzt wird. Bei Kongruenzen ist dies jedoch nicht immer richtig.

Zum Beispiel ist $2 \cdot 5 \equiv 2 \cdot 10\ (10)$, aber $5 \not\equiv 10\ (10)$ bei Division durch 2.

Eine *hinreichende Bedingung* dafür, wann in einer diophantischen Gleichung dividiert werden darf, liefert

Satz 4:

Die Kongruenz $ax \equiv ay(m)$ kann durch a dividiert werden, falls $(a, m)=1$ gilt.

Beweis: $ax \equiv ay(m)$ bedeutet nach Definition 2 $m \mid a(x-y)$. Da $m \nmid a$ ist, folgt $m \mid x-y$. D. h. $x \equiv y$ (m).

An einem Beispiel wollen wir jetzt das „Verfahren mittels linearer Kongruenzen" anwenden lernen.

Beispiel: Die diophantische Gleichung $3x-5y=7$ (siehe Eulersches Reduktionsverfahren) soll mit dieser Methode gelöst werden.

1. Schritt: Wir verwandeln die diophantische Gleichung $3x-5y=7$ in eine lineare Kongruenz. Als Modul wählen wir dabei einen der Koeffizienten der Variablen, z. B. 5:

$3x-5y \equiv 7(5)$. Da $-5y \equiv 0(5)$ und $5 \equiv 0(5)$ sind, folgt durch Subtraktion $3x \equiv 2\ (5)$.

2. Schritt: Wir versuchen, durch geschickte Rechnung auf der linken Seite der Kongruenz den Koeffizienten 1 zu erzeugen. (Man kann beweisen, daß dies stets erreichbar ist, und zwar auf Grund der oben getroffenen Voraussetzung $(a, b)=1$.)

$3x \equiv 2(5) \quad | \cdot 2$

$6x \equiv 4(5)$

Da $5x \equiv 0(5)$ gilt, folgt unmittelbar $x \equiv 4\ (5)$.

3. Schritt: Wir schreiben die so ermittelte Kongruenz als Gleichung auf. Mit diesem Ausdruck für x wird in die Ausgangsgleichung eingegangen und y bestimmt.

$x=4+5u$; $3(4+5u)-5y=7$; $y=1+3u$

Ergebnis: $x=4+5u$

$y=1+3u$

mit beliebigem ganzzahligem u.

Der Leser möge sich nun selbst weitere Gleichungen vorgeben und sie nach den angegebenen Methoden lösen.

H. Menzer, aus „Wurzel", Heft 2/72

Leser fragen—alpha antwortet

Frage:

Cornelia Thannhausser aus Linz (Österreich), seit drei Jahren *alpha*-Leser, Schülerin eines naturwissenschaftlichen Realgymnasiums, Kl. 9, fragt:

Bei uns an der Schule ist ein Streitgespräch entbrannt über die „sinnvolle Festlegung" von Grund- und Definitionsmenge:

„$x-3=2x-4$ Grundmenge $\mathbb{N}$"

Einige sind der Ansicht, daß die Definitionsmenge dafür $D=\{x|x>3\}$ — und somit $L=\varnothing$ — sein müsse aus folgenden Gründen:

- Wenn man zur Feststellung der Richtigkeit der Lösung zur Probe $x=1$ einsetzt, erhält man auf beiden Seiten der Gleichung nicht in $\mathbb{N}$ liegende Zahlen $(-2=-2)$, zumal unter Umständen ein Schüler erst mit natürlichen Zahlen rechnen kann.

- Wenn eine Rechenmaschine nur für natürliche Zahlen programmiert ist, kann sie das Beispiel auch nicht lösen, weil sie ja auf negative Zahlen stößt, wenn man als $x=1, 2$ einsetzt.

Antwort:

Das Wort „Grundmenge" hat keine einheitlich festgelegte Bedeutung. Daher beschreibt der Text

„$x-3=2x-4$ Grundmenge $\mathbb{N}$"

nicht eindeutig eine Aufgabe. *Man muß genauer formulieren, wonach eigentlich gefragt werden soll.* Hierzu bestehen im vorliegenden Zusammenhang im wesentlichen zwei Auffassungsmöglichkeiten.

1. Auffassung: „Zu ermitteln ist die Menge L aller derjenigen $x \in \mathbb{N}$, für die $x-3=2x-4$ gilt!"

2. Auffassung: „Zu ermitteln ist die Menge L aller derjenigen $x \in \mathbb{N}$, für die $x-3 \in \mathbb{N}$ und $2x-4 \in \mathbb{N}$ und $x-3=2x-4$ gilt."

In der 1. Auffassung heißt „Grundmenge" so viel wie „vorgeschriebener *gemeinsamer Definitionsbereich* der beiden Funktionen $f(x)=x-3$ und $g(x)=2x-4$". In der 2. Auffassung heißt „Grundmenge" so viel wie „vorgeschriebene Menge, von der *der gemeinsame Definitionsbereich und beide Wertebereiche* Untermengen sein sollen". – Ob die 1. oder 2. Auffassung „sinnvoll" ist, hängt vom „Sinn", d. h. vom Verwendungszweck ab.

Ein Beispiel für eine Anwendungsaufgabe im Sinne der *1. Auffassung* ist etwa: „In einem Behälter war am Anfang einer Serie von Experimenten die Temperatur 0 °C festgestellt worden. Ein Experiment E, das die Temperatur um 1° erhöht, soll x mal durchgeführt werden, und danach soll durch ein Experiment F die Temperatur um 3° verringert werden. Dabei soll dieselbe Endtemperatur entstehen, wie wenn man (ausgehend von 0 °C) das Experiment E zunächst $2x$ mal durchgeführt und danach durch ein Experiment G die Temperatur um 4° verringert hätte. Zu ermitteln sind alle Möglichkeiten, die Anzahl x diesen Forderungen gemäß zu wählen."

Denkt man sich dieses Beispiel dadurch abgeändert, daß statt „Temperatur" und statt „0 °C", „1 °C", „3 °C", „4 °C" überall „Masse" und „0*g*", „1*g*", „3*g*" bzw. „4*g*" gesagt wird, so erhält man ein Beispiel im Sinne der *2. Auffassung.*

Dr. L. Stammler, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Lösungen

DDR-Olympiade, Olympiadeklasse 10

Lösung des Schülers Ulf Brüstel, Altenburg (Bez. Leipzig)

1. a) Für jede Primzahl p, die größer als 3 ist, gilt entweder $p \equiv 1 \pmod 6$ oder $p \equiv -1 \pmod 6$.

Die drei Primzahlen seien p_1, p_2, p_3, und ich untersuche, wann $p_1+p_2+p_3$ durch 3 teilbar ist.

Fall 1: Alle drei Primzahlen lassen bei der Division durch 6 denselben Rest, d. h. es ist entweder $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv 1 \pmod 6$ oder $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv -1 \pmod 6$. Dann ist $p_1+p_2+p_3 \equiv 3 \equiv -3 \pmod 6$.

In diesem Fall ist die Summe der drei Primzahlen durch 3 teilbar.

Fall 2: Die drei Primzahlen lassen bei der Division durch 6 nicht denselben Rest. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p_1 \equiv 1 \pmod 6$ und $p_2 \equiv -1 \pmod 6$. Damit wird

$p_1+p_2+p_3 \equiv 1-1+p_3 \equiv p_3 \pmod 6$.

Da p_3 nicht durch 3 teilbar sein kann ($p_3>3$), ist in diesem Fall die Summe $p_1+p_2+p_3$ nicht durch 3 teilbar.

Wenn $p_1+p_2+p_3$ durch 3 teilbar ist, muß also

$$p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \pmod 6$$

sein. Daraus folgt

$p_1-p_2 \equiv p_2-p_1 \equiv p_1-p_3 \equiv p_3-p_1 \equiv p_2-p_3 \equiv p_3-p_2 \equiv 0 \pmod 6$

d. h., alle Differenzen je zweier der betrachteten Primzahlen sind durch 6 teilbar.

b) Es genügt, ein Gegenbeispiel anzugeben. Ich wähle z. B. $p_1=3$, $p_2=5$, $p_3=7$. Dann ist zwar

$$p_1+p_2+p_3=15 \equiv 0 \pmod 3),$$

aber p_2-p_1 ist nicht durch 6 teilbar (was sogar für alle zu betrachtenden Differenzen gilt).

Bemerkungen: Teil a) wurde von fast allen Schülern gemeistert. Überraschenderweise trat in den Bearbeitungen für b) ein Fehler ziemlich häufig auf: Es wurden Bedingungen formuliert, die zu Gegenbeispielen führen könnten, aber nichts über die Realisierbarkeit dieser Bedingungen geschrieben. So läßt die Formulierung „Ist $p_1=3$, $p_2 \equiv 1 \pmod 3$, $p_3 \equiv -1 \pmod 3$, dann ist $p_2-p_1 \not\equiv 0 \pmod 3$" die Frage offen, ob es solche Primzahlen p_2 und p_3 überhaupt gibt. Sie bringt lediglich zum Ausdruck „Wenn es Primzahlen p_2, p_3 mit $p_2 \equiv 1 \pmod 3$ und $p_3 \equiv -1 \pmod 3$ gibt, dann ist $p_2-p_1 \not\equiv 0 \pmod 3$", und damit ist kein Gegenbeispiel angegeben und auch seine Existenz nicht bewiesen.

Die Punktstufen verteilen sich wie folgt auf die Bearbeitungen:

Punkte	5	4	3	2	1	0
Schüler	46	41	6	2	4	2 .

Dr. Klaus-Dieter Drews, Universität Rostock

2. Von den Schülern wurde oft folgender günstiger Lösungsweg beschritten, der hier kurz wiedergegeben wird.

Angenommen, (x_1, x_2, x_3, x_4) ist ein Quadrupel der gewünschten Art. Die Zahl 82944000000 wird in Primfaktoren zerlegt. Nach (1) ist dann $x_1x_2x_3x_4=2^{16}\cdot 3^4 \cdot 5^6$ (*).

Auf Grund der Eigenschaften (2) und (4) gibt es positive ganze Zahlen y_1, y_2, y_3 und y_4 derart, daß

$x_1=2^4\cdot 3\cdot 5^2 y_1$, $x_2=2^4\cdot 3\cdot 5^2 y_2$, $x_3=2^3\cdot 3y_3$ und $x_4=2^3\cdot 3y_4$.

Aus (*) folgt dann $y_1y_2y_3y_4=2^2\cdot 5^2$ (**). Wegen (5) ist $y_2 \leqq 25$ und x_2 oder x_3 durch 5^4 teilbar, und demnach ist y_2 durch 5^2 oder y_3 durch 5^4 teilbar. Nach (**) kann nur $5^2 \mid y_2$ gelten. Also ist $y_2=5^2$. Die Eigenschaft (3) bedeutet schließlich, daß wenigstens eines der x_1, x_2, x_3 und x_4 durch 2^6 teilbar, also y_1 durch 2^2 oder y_3 durch 2^3 oder y_4 durch 2^3 teilbar ist. Nach (**) ist nur $y_1=2^2$ und folglich $y_3=y_4=1$ möglich. Damit ist gezeigt, daß es *höchstens* ein Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) der gewünschten Art gibt. — Eine Probe zeigt, daß (4800, 30000, 24, 24) eine Lösung ist.

Bemerkungen: Einige Schüler haben nicht alle Eigenschaften (1) bis (5) genügend ausgewertet. Sie erhielten bis zu 46 verschiedene Quadrupel, die meistens noch unbesehen als Lösungen angeboten wurden. Dabei hätte bereits eine Probe zum erfolgreichen Abschluß der Aufgabe geführt. Dieser einfache Existenzbeweis fehlte leider auch bei ca. 18 Teilnehmern, die zu dem Ergebnis gekommen waren, daß höchstens eine Lösung existiert. 50 Teilnehmer — etwa die Hälfte der Starter — erreichten 6 Punkte oder die volle Punktzahl 7. (Das bestärkt den Eindruck, daß die Aufgabe 10/2 leicht ist.) Dagegen konnten 12 Schüler keinen Lösungsansatz finden. 13 Teilnehmern gelang es nicht, an Hand des Ansatzes (*) die Eigenschaften (1) bis (5) auszuwerten.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß bei dem obigen Einzigkeitsbeweis weder Teilerfremdheit von y_1, y_2, y_3, y_4 (wegen (2)) noch die Teilerfremdheit von y_1, y_2 (wegen (4)) verwendet wurde. Die Eigenschaften (2) und (4) können also abgeschwächt werden zu

(2′) Ein gemeinsamer Teiler ist gleich 24.

(4′) Ein Teiler von x_1 und x_2 ist gleich 1200,

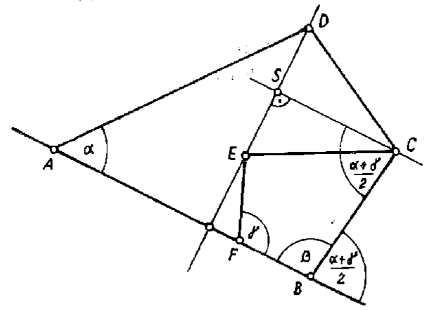
ohne daß sich an der Lösung der Aufgabe etwas ändert. Das wurde nicht bemerkt.

Dr. E. Quaisser, PH Potsdam

3.1 (nach der Lösung von J. Bergmann, Bez. Dresden):

Vorausgesetzt sind folgende Beziehungen:

(1) $\overline{AB}=\overline{AD}>\overline{CB}=\overline{CD}$
(2) $\overline{AB} : \overline{BC}=\overline{BC} : \overline{FB}$
(3) $\overline{CE}=\overline{CB}\ (=\overline{CD})$
(4) $\overline{FE}=\overline{FB}$



Wegen der Längengleichheit der Strecken $\overline{CE}$ und $\overline{CB}$ einerseits und $\overline{FE}$ und $\overline{FB}$ andererseits ist das Viereck $BCEF$ ein Drachenviereck, das zum gegebenen ähnlich ist, denn wegen (1) und (2) gilt $\overline{CB}=\overline{CE}>\overline{FE}=\overline{FB}$, also sind in beiden Drachenvierecken die Größen der Innenwinkel zwischen den verschiedenlangen Seiten gleich ($\sphericalangle FBC = \sphericalangle ABC$), und entsprechende Seitenverhältnisse stimmen nach (2) überein. Durch C werde die Winkelhalbierende im gleichschenkligen Dreieck ΔCDE gelegt, die gleichzeitig Mittelsenkrechte von $\overline{ED}$ ist. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit g_{ED} (Gerade durch E und D) sei S.

$$\alpha=\overline{\sphericalangle DAB}=\overline{\sphericalangle BCE}$$
$$\beta=\overline{\sphericalangle ABC}$$
$$\gamma=\overline{\sphericalangle BCD}=\overline{\sphericalangle EFB}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

$$\overline{\sphericalangle SCB}=\alpha+\frac{\gamma-\alpha}{2}=\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

$$\alpha+2\beta+\gamma=360°, \text{ also}$$

$$\frac{\alpha+\gamma}{2}=180°-\beta.$$

Werden zwei verschiedene Geraden g_1 und g_2 von einer dritten geschnitten und stimmen zwei Wechselwinkel überein, dann sind g_1 und g_2 parallel.

Damit ist g_{AB} parallel zu g_{SC}. Außerdem war g_{SC} senkrecht zu g_{DE}. So folgt unmittelbar, daß g_{DE} senkrecht zu g_{AB} verläuft, d. h. E liegt auf dem Lot von D auf die Gerade durch A und B.

Bemerkungen: Die Aufgabenkommission benutzt bei ihrem Lösungsvorschlag nur Winkelbeziehungen in den entstehenden Dreiecken. Außer den Symmetrieachsen der Drachenvierecke werden keine weiteren Hilfsgeraden verwendet. So erscheint die Aufgabe als recht elementar. Eine Analyse der Schülerleistungen liefert ein anderes Ergebnis. Von 101 Startern wählten 44 diese Aufgabe, von denen 25 keinen brauchbaren Lösungsansatz fanden. Nur 11 Schüler erreichten 6, 7 oder 8 Punkte. Einige Schüler hatten offenbar erst versucht, die Aufgabe 10/IV/3.2 zu bearbeiten. Als sie damit nicht zurechtkamen, beschäftigten sie sich mit der Aufgabe 3.1. kamen aber infolge Zeitmangels nicht mehr zur Lösung.

Interessante Lösungswege wurden u. a. von *H. Redlin* (Bez. Berlin) und *K. Heckemann* (Bez. Dresden) angegeben. Der Schüler *H. Redlin* gelangte über den Nachweis der Längengleichheit zweier geeigneter Strecken mit trigonometrischen Mitteln zum Ziel, während *K. Heckemann* durch geschickte Hilfslinien auf ähnliche rechtwinklige Dreiecke und schließlich auf ein passendes Rechteck kam.

Hans-Jürgen Vogel,
Pädagogische Hochschule „Karl Liebknecht" Potsdam

3.2. Jürgen könnte etwa folgende Lösung gefunden haben:

1. Angenommen $ABCDE$ sei ein Fünfeck der gesuchten Art mit vorgegebenem Flächeninhalt F, dann gilt

$$u = 3a+2b \qquad (1)$$

und $F = ab+\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

Addiert man das $2a$-fache der ersten Gleichung zum (-4)-fachen der zweiten, so erhält man

$$2au-4F=6a^2-a^2\sqrt{3}, \text{ also}$$

$$a^2-\frac{2u}{6-\sqrt{3}}a+\frac{4F}{6-\sqrt{3}}=0. \qquad (2)$$

Die Gleichung (2) hat nur dann reelle Lösungen, wenn für die Diskriminante

$$D=\left(\frac{u}{6-\sqrt{3}}\right)^2-\frac{4F}{6-\sqrt{3}}\geqq 0$$

gilt, d. h. wenn

$$u^2\geqq 4F(6-\sqrt{3}), \text{ also}$$

$$u\geqq 2\sqrt{F(6-\sqrt{3})} \text{ ist.} \qquad (3)$$

Wenn es also ein Fünfeck der gesuchten Art gibt, so gilt für die Ungleichung (3).

2. Angenommen, es gäbe sogar ein Fünfeck der gesuchten Art mit vorgeschriebenem Flächeninhalt F, für das

$$u=2\sqrt{F(6-\sqrt{3})} \qquad (4)$$

gilt, dann gilt (wie in 1.) die Gleichung (2) wegen (4) sogar mit $D=0$. Also hat (2) nunmehr nur die einzige Lösung

$$a=\frac{u}{6-\sqrt{3}},$$

woraus man unter Berücksichtigung von (4)

$$a=2\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}} \text{ findet.} \qquad (5)$$

Aus (1) und (4) sowie (5) folgt dann

$$b=\frac{u}{2}-\frac{3a}{2}=\sqrt{F(6-\sqrt{3})}-3\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}$$

$$=(6-\sqrt{3}-3)\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}=(3-\sqrt{3})\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}. \qquad (6)$$

Wenn es also ein Fünfeck der gesuchten Art, für das sogar (4) gilt, gibt, so ist

$$a=2\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}} \text{ und } b=(3-\sqrt{3})\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}$$

3. Angenommen a und b haben die in (5) bzw. (6) genannten Werte, dann gibt es ein Fünfeck mit vorgeschriebenem Flächeninhalt F und kleinstmöglichem Umfang u; denn ein Fünfeck mit (5) und (6) hat den Flächeninhalt

$$ab+\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}=\frac{2(3-\sqrt{3})F}{6-\sqrt{3}}+\frac{F\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}=F,$$

also den vorgeschriebenen Wert. Es gibt also Fünfecke der gesuchten Art.

Daß dabei der Umfang u möglichst klein ist, folgt so: Nach 1. gilt für diese Fünfecke der verlangten Art die Ungleichung (3). Für ein Fünfeck mit (5) und (6) wird der Umfang

$$u=3a+2b=6\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}+2(3-\sqrt{3})\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}$$

$$=2(6-\sqrt{3})\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}=2\sqrt{F(6-\sqrt{3})},$$

also möglichst klein.

4. Damit wird der Umfang eines Fünfecks der verlangten Art möglichst klein genau dann, wenn (5) und (6) gelten, d. h. wenn $a:b=2:(3-\sqrt{3})$ ist.

Bemerkungen: Von 101 Schülern bearbeiteten 57 die Wahlaufgabe 3.2. Dabei traten folgende typische Fehler auf:

1. Die in der angegebenen Lösung in 3. dargestellten Überlegungen wurden von keinem Schüler angestellt, d. h. es wurde nicht gezeigt, daß es Fünfecke der gesuchten Art mit kleinstmöglichem Umfang gibt. Dafür wurden 2 Punkte abgezogen.

2. Fünf Schüler lösten die „inverse" Aufgabe: Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck der beschriebenen Art. Als Umfang dieses Fünfecks wird ein geeigneter Wert u vorgeschrieben. Dann wird untersucht, ob es unter allen derartigen Fünfecken eines von größtem Flächeninhalt gibt. Dabei ergeben sich a und b wie in (5) und (6). Es ist dabei aber von keinem Schüler nachgewiesen worden, daß beide Probleme äquivalent sind.

3. Drei Schüler rechneten mit speziellen Werten $F=1$, $F=10$ (bzw. von den unter 2 genannten mit $u=2$) ohne nachzuweisen, daß diese Werte zulässig sind bzw. daß sich die Aufgabe unabhängig vom Wert von F (bzw. von u) lösen läßt.

4. Sieben Schüler schrieben in Formel (1) für den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a

$$F_1=\frac{a^2}{2}\sqrt{3} \text{ bzw. } F_2=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

und rechneten mit diesen falschen Werten weiter.

5. Zwei Schüler wendeten Differentialrechnung zur Lösung an, obwohl das in der Aufgabenstellung ausdrücklich verboten war.

Punktverteilung für Aufgabe 3.1 und 3.2 (beide Wahlaufgaben gemeinsam).

Punkte	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Schüler	4	4	19	7	2	4	11	24	26

Dr. K. Rosenbaum, Pädagogische Hochschule „Dr. Theodor Neubauer", Erfurt

4. a) Angenommen, es gibt ein Tripel (m, x, y) mit den geforderten Eigenschaften. Dann gilt wegen (2) und $x<0$

$$x=5y-11<0; \qquad (3)$$

wegen $y>0$ und ganzzahlig folgt daraus

$$y_1=1,\ y_2=2.$$

Durch Einsetzen in (3) erhält man

$$x_1=-6,\ x_2=-1.$$

Nach (1) ist dann

$$m_1=\frac{15}{2},\ m_2=4.$$

Also können höchstens die Tripel $\left(\frac{15}{2}, -6, 1\right)$ und $(4, -1, 2)$ Lösung der Aufgabe sein.

b) Die Probe zeigt, daß diese beiden Tripel das Gleichungssystem erfüllen und die übrigen geforderten Eigenschaften besitzen. Die Lösung der Aufgabe lautet: $\left(\frac{15}{4}, -6, 1\right)$; $(4, -1, 2)$.

Bemerkungen: Bei Aufgaben dieser Art müssen grundsätzlich Analyse (a) und Synthese (b) durchgeführt werden. Während die Analyse alle Tripel ergibt, die möglicherweise Lösung der Aufgabe sind, sondert die Synthese aus diesen die Lösung aus. In der vorliegenden Aufgabe erfüllt jedes in (a) gefundene Tripel alle gegebenen Bedingungen; jedes ermittelte Tripel ist tatsächlich Lösung der Aufgabe.

Bei mehr als der Hälfte der Schüler, die diese Aufgabe bearbeiteten, fehlte der Teil b), was Punktabzug zur Folge haben mußte.

Dipl.-Mathematiker Ingeborg Bartsch, Universität Rostock

5. Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission:

O. B. d. A. genügt es, drei Fälle zu unterscheiden: (1) A zwischen P und M,
(2) P zwischen A und M,
(3) $A=P$.

Im Fall 1 und 2 gilt

$$\triangle PMB\cong\triangle PMD \text{ (sws), also}$$
$$\sphericalangle MPB=\sphericalangle MPD.$$

Im Fall 1 ist dies dasselbe wie

$$\sphericalangle APQ=\sphericalangle APT.$$

Im Fall 2 folgt die letzte Gleichung ebenfalls, und zwar durch Übergang zu den Scheitelwinkeln.

Daher gilt in den Fällen (1) und (2)

$$\triangle PAQ\cong\triangle PAT \text{ (wsw), also}$$
$$\overline{AQ}=\overline{AT}, \qquad (1)$$

und diese Gleichung trifft auch im Fall 3 zu. Der weitere Beweis verläuft für alle 3 Fälle gemeinsam.

Die Gerade g durch B, D ist parallel zu g_1 und g_2, und es gilt $\overline{AM}=\overline{MC}$. Daraus folgt nach einem der Strahlensätze

$$\overline{QB}=\overline{BR}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt nach Umkehrung eines der Strahlensätze

$$AB \parallel TR$$

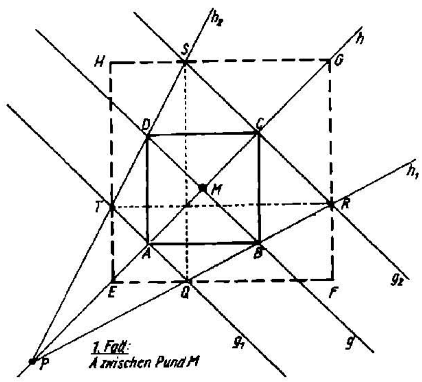
und dann nach einem der Strahlensätze

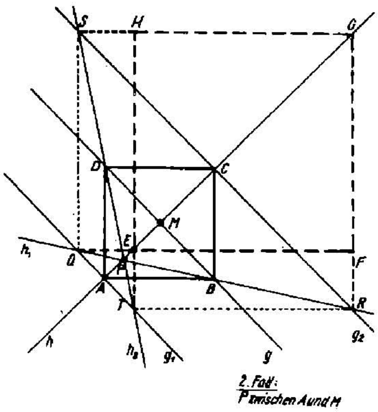
$$\overline{AB}:\overline{TR}=1:2.$$

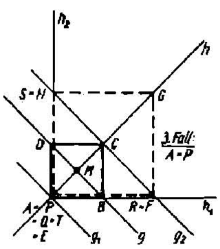
Analog erhält man $AD \parallel QS$ und $\overline{AD}:\overline{QS}=1:2$.

Die Seiten des Rechtecks $EFGH$ sind folglich parallel zu TR bzw. QS, und da diese Seiten bzw. ihre Verlängerungen durch Q, R, S, T gehen, haben sie selbst die Längen $\overline{TR}$ bzw. $\overline{QS}$, also $2\overline{AB}$ bzw. $2\overline{AD}$.

Somit gilt $I_2=4I_1$, d. h. $I_1:I_2=1:4$.







Bemerkungen: Der größte Teil der Schüler versuchte ebenfalls mit elementaren geometrischen Mitteln – häufig auch unter Ausnutzung der Symmetrie – die Aufgabe zu lösen. Kritisch muß hierzu aber angemerkt werden, daß mit diesen Mitteln sehr oft umständlich operiert wurde. Lediglich der Schüler Bernd Klipps erreichte auf diesem Wege die volle Punktzahl. Einige wenige Schüler verwendeten zur Lösung Methoden der analytischen Geometrie: Legt man die gesamte Figur in ein Koordinatensystem, so kann man für die Geraden g_1, g_2, h_1 und h_2 die zugehörigen Funktionsgleichungen aufstellen, mit diesen die Schnittpunkte R, S, T und Q berechnen, weiterhin die Punkte E, F, G und H. Aus den Entfernungen der Punkte E und F bzw. F und G erhält man dann schließlich das Verhältnis $I_1 : I_2$. Nach dieser Methode vorgehend, erhielt als zweiter Schüler Martin von Mickwitz für seine Lösung die volle Punktzahl. Den geringsten Erfolg zeigte die Methode, mit Mitteln der ebenen Trigonometrie die Lösung zu gewinnen.

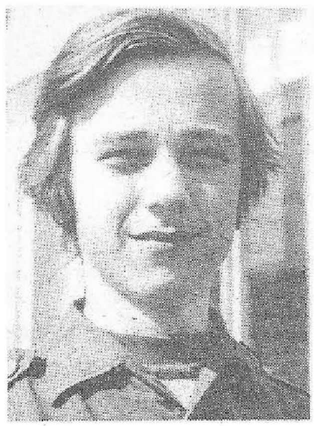
Der häufigste Fehler, der unabhängig von der gewählten Methode auftrat, war der, daß die oben dargestellte Fallunterscheidung nicht gemacht wurde. Lediglich 15 Schüler konnten eine vollständige Fallunterscheidung vorweisen.

Die Punktverteilung sieht folgendermaßen aus: 2 Schüler 7 Punkte, 9 Schüler 6 Punkte, 47 Schüler 5 bzw. 4 Punkte 25 Schüler 3 bzw. 2 Punkte und 18 Schüler 1 bzw. 0 Punkte. Die Punkteverteilung zeigt, daß diese Aufgabe dazu beitrug, das Teilnehmerfeld zu differenzieren, d. h. einen angemessenen Schwierigkeitsgrad aufwies.

Dr. H. J. Sprengel, Pädagogische Hochschule „Karl Liebknecht“ Potsdam

In diesem Jahr erhielt nur ein Schüler ein Diplom für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe:

Reinhard Illge, EOS „Juri Gagarin“, Hermsdorf (Bez. Gera). Er führte den im folgenden eleganten Beweis:



6. Beweis: 1. Durch den inneren Punkt S wird das Tetraeder $ABCD$ in die vier Teiltetraeder $ABCS$, $BDCS$, $ACDS$, $ABDS$ zerlegt. Für das Volumen $V = V_{ABCD}$ des gesamten Tetraeders gilt dann

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4,$$

wobei $V_1 = V_{ABCS}$, $V_2 = V_{BDCS}$, $V_3 = V_{ACDS}$, $V_4 = V_{ABDS}$ bedeuten.

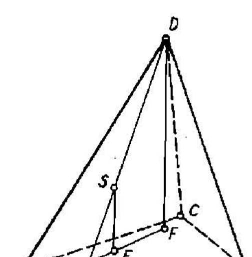
Also ist $\frac{V_1}{V} + \frac{V_2}{V} + \frac{V_3}{V} + \frac{V_4}{V} = 1$. (1)

2. Es seien F bzw. E die Fußpunkte der Lote von D bzw. S auf die Ebene durch A, B, C. Das Volumen des Tetraeders $ABCD$ bzw. $ABCS$ ist

$$V = \frac{1}{3} F_{ABC} \overline{DF} \text{ bzw. } V_1 = \frac{1}{3} F_{ABC} \overline{SE},$$

wobei F_{ABC} den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bedeutet.

Dann ist $\frac{V_1}{V} = \frac{\overline{SE}}{\overline{DF}}$. (2)



Die beiden Dreiecke $\triangle ED'S$ und $\triangle FD'D$ sind ähnlich, denn sie stimmen in zwei Winkeln überein:

$$\sphericalangle D'ES = \sphericalangle D'FD \text{ und}$$
$$\sphericalangle SD'E = \sphericalangle DD'F.$$

Folglich ist $SE \parallel DF$,

und nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{\overline{SD'}}{\overline{DD'}} = \frac{\overline{SE}}{\overline{DF}} \qquad (3)$$

Wegen (2) und (3) ist

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\overline{SD'}}{\overline{DD'}}. \qquad (4)$$

Analog findet man

$$\frac{V_2}{V} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{AA'}}, \frac{V_3}{V} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{BB'}}, \frac{V_4}{V} = \frac{\overline{SC'}}{\overline{CC'}}. \qquad (5), (6), (7)$$

Setzt man (4), (5), (6) und (7) in (1) ein, so folgt die Behauptung

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{SB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{SC'}}{\overline{CC'}} + \frac{\overline{SD'}}{\overline{DD'}} = 1.$$

Bemerkungen: 1. Der hier angegebene Lösungsweg wurde, oft in abgewandelter Form, von den meisten Schülern gewählt. Zwei Schüler verwendeten das analoge Ergebnis für die Ebene als Ausgangspunkt ihrer Betrachtungen. Da dieses aber nicht als bekannt vorausgesetzt werden konnte, sondern seinerseits bewiesen werden mußte, wurde die gesamte Lösung dann nur länger.

2. 13 Schüler erhielten für die Behandlung des Spezialfalles, daß das Tetraeder regelmäßig und S der Schwerpunkt des Tetraeders ist, nur einen Punkt.

Punkteverteilung für die Aufgabe

Punkte	7	6	5	4	3	2	1	0
Schüler	9	4	3	0	0	1	13	71

Dr. K. Rosenbaum, Pädagogische Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“, Erfurt

Die Lösungen zu den Aufgaben der Olympiadeklasse 11/12 werden in der Zeitschrift „Mathematik in der Schule“, Heft 12/72, veröffentlicht, d. Red.

Mathematik und Russisch

Übersetzung des Aufgabenteils (Seite 102)

▲1▲ Zwei Brüder kamen darüber ins Gespräch, wieviel Geld sie gespart haben. Der ältere sagt zum jüngeren: „Gib mir 80 Kopeken, dann habe ich doppelt soviel wie du.“ Der jüngere dachte nach und sagte: „Nein, du hast ohnehin schon mehr Geld als ich. Gib du mir lieber 80 Kopeken, dann haben wir beide gleichviel.“ Wieviel Geld hatte jeder von ihnen?

▲2▲ Die Tochter ist 8 Jahre alt, ihre Mutter 38 Jahre. In wieviel Jahren wird die Mutter dreimal so alt sein wie die Tochter?

▲3▲ Jascha geht (braucht) von zu Hause bis zur Schule 30 Minuten, sein Bruder Petja 40 Minuten. Petja ging 5 Minuten früher als Jascha aus dem Hause. In wieviel Minuten holt Jascha Petja ein?

▲4▲ Der Durchmesser der durch die Explosion des großen Tunguska-Meteoriten verwüsteten Taigafläche beträgt 38 km. Wie groß ist die versengte Taigafläche?

▲5▲ Wie kann man mit 4 geraden Linien 9 Punkte verbinden, die so angeordnet sind, wie es auf der Zeichnung dargestellt ist, aber ohne den Bleistift abzusetzen?

▲6▲ Zeichne jede der Figuren und zerlege sie in 4 kongruente Teilfiguren!

▲7▲ Eine Melone kostet 10 Kopeken und noch den Preis einer halben Melone. Wieviel kostet eine Melone?

▲8▲ Dieses Zifferblatt soll in 6 Teile beliebiger Form zerlegt werden, jedoch so, daß auf allen Teilen die Summe der Zahlen gleich ist.

▲9▲ Die Gleichung $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ kann man so schreiben, daß alle zehn Ziffern Verwendung finden, z. B.: $\frac{1}{2}=\frac{3485}{6970}$. Könnt ihr noch fünf analoge Beispiele finden, wo der Bruch $\frac{1}{2}$ stehen kann?

Versucht, andere Beispiele zu finden, wo die gleichen Brüche durch zehn verschiedene Ziffern ausgedrückt werden können, z. B.:

$\frac{3}{6}=\frac{1485}{2970}$ oder $\frac{1}{2}=\frac{35}{70}=\frac{48}{96}$.

---

*7*863 Der Lösungsweg ist folgender Tabelle zu entnehmen:

1. Zahl: n
2. Zahl: $n+5$
3. Zahl: 23 oder 29
4. Zahl: $2n+5$
5. Zahl: $2n+7$
6. Zahl: $3n$

Entweder $9n+40=175$ oder $9n+46=175$

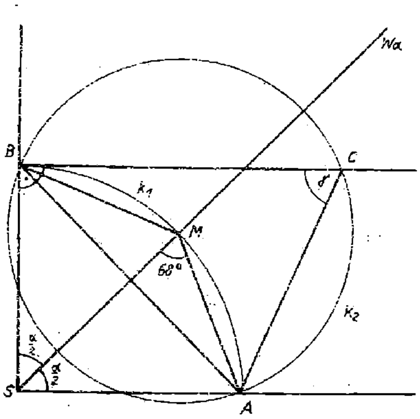
$9n=135$ $\quad 9n=129$

$n=15$

Nicht lösbar, da 129 kein Vielfaches von 9.

Herr Schulze tippte die Zahlen 15, 20, 23, 35, 37 und 45.

*7*864 Zeichnet man nach Ausführung der Konstruktionen die Verbindungsgeraden AB, AM und BM, so erhält man wegen $\overline{SA}=\overline{SM}=\overline{SB}$ die gleichschenkligen Dreiecke



$\triangle AMS$ und $\triangle MBS$, die einander kongruent sind. Deshalb gilt $\sphericalangle SMA=\frac{1}{2}\cdot(180°-44°)$ $=68°$ und somit $\sphericalangle AMB=136°$. Da $\sphericalangle AMB$ (Zentriwinkel und $\sphericalangle ACB$ (Peripheriewinkel) über der gemeinsamen Sehne $\overline{AB}$ stehen, gilt $\gamma=\frac{1}{2}\cdot 136°=68°$.

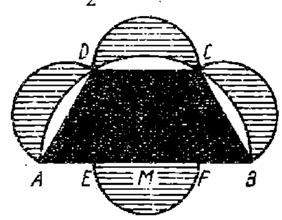
8▲865 Wir bezeichnen den Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ mit M und die Länge der Seite $\overline{CD}$ mit a. Dann gilt nach Voraussetzung $\overline{AM}=\overline{MB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=a$.

Es sei nun A_1 der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

Wir erhalten die Summe A_2 der Flächeninhalte der drei Mondsicheln und des Halbkreises unterhalb von AB, indem wir die Flächeninhalte der vier Halbkreise über $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ und $\overline{EF}$, die sämtlich den Durchmesser a haben, sowie den Flächeninhalt A_1 des Trapezes addieren und dann den Flächeninhalt des Halbkreises über $\overline{AB}$, der den Durchmesser $2a$ hat, subtrahieren. Daher gilt

$$A_2=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}a^2+A_1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}(2a)^2$$

$$=\frac{\pi}{2}a^2+A_1-\frac{\pi}{2}a^2=A_1.$$



Es gilt also $A_1=A_2$, d. h. der Flächeninhalt des Trapezes ist *gleich* der Summe der Flächeninhalte der drei Mondsicheln und des Halbkreises unterhalb von AB.

8▲866 Bezeichnet man die Maßzahl der Höchstgeschwindigkeit (in km/h) mit x, so gilt, da die mittlere Geschwindigkeit während der ersten 18 min und während der letzten 17 min gleich $\frac{x}{2}$ war,

$$\frac{18}{60}\cdot\frac{x}{2}+\frac{36}{60}\cdot x+\frac{17}{60}\cdot\frac{x}{2}=1900,$$

also $\quad 18x+72x+17x=1900\cdot 120,$

$$107x=228\,000,$$

$$x=\frac{228\,000}{107}\approx 2\,130.$$

Die Höchstgeschwindigkeit der TU 144 betrug also rund 2130 km/h. Diese Geschwindigkeit ist doppelt so groß wie die Schallgeschwindigkeit (1065 km/h in 16000 m Höhe) und mehr als $2\frac{1}{2}$ mal so groß wie die Geschwindigkeit der bisherigen Passagierflugzeuge (etwa 800 km/h).

W 8■867 Da genau eine der drei Aussagen (1), (2), (3) wahr ist, haben wir die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Die Aussage (1) sei wahr.

Dann hat Sabine entweder den Ball oder das Sprungseil. Nun kann die Aussage (3) höchstens dann falsch sein, wenn Sabine das Sprungseil nicht hat. Also muß Sabine den Ball haben. Damit die Aussage (3) tatsächlich falsch ist, müßte auch Werner den Ball haben. Das widerspricht aber der Voraussetzung; daher kann dieser Fall nicht eintreten.

2. Fall: Die Aussage (2) sei wahr.

Dann hat Werner den Ball und Elke das Sprungseil. Also muß Sabine den Kreisel haben. Die Aussagen (1) und (3) sind daher falsch. Es sind also bei dieser Verteilung alle Voraussetzungen erfüllt.

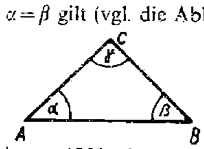
3. Fall: Die Aussage (3) sei wahr.

Da die Aussage (1) falsch ist, hat Sabine den Kreisel. Werner kann daher nur den Ball oder das Sprungseil haben, und auch Elke kann nur den Ball oder das Sprungseil haben. Da die Aussage (2) falsch ist, hat also Werner das Sprungseil, oder Elke hat den Ball. Das trifft aber nur zu, wenn Werner das Sprungseil und Elke den Ball hat. Bei dieser Verteilung ist die Aussage (3) wahr und es sind alle Voraussetzungen erfüllt.

Aus der Untersuchung der drei Fälle ergibt sich, daß nur der 2. und 3. Fall eintreten können. In jedem Falle hat also Sabine den Kreisel.

Aus der Untersuchung der drei Fälle ergibt sich, daß nur der 2. Fall eintreten kann. Daher hat Werner den Ball, Elke das Sprungseil und Sabine den Kreisel.

W 8■868 Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC}=\overline{BC}$, das die geforderten Eigenschaften besitzt, und es seien α, β, γ die Größen der Winkel dieses Dreiecks, wobei $\alpha=\beta$ gilt (vgl. die Abb.).



Dann ist $\gamma=180°-2\alpha$, und es gilt nach Voraussetzung $\gamma=n\cdot 2\alpha$, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. Daraus folgt

$$2n\alpha=180°-2\alpha,$$

$$2(n+1)\alpha=180°,$$

$$\alpha=\frac{90°}{n+1}.$$

Nun ist 90 nur durch die folgenden natürlichen Zahlen teilbar:

1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

Da die Maßzahl des Winkels α eine ganze Zahl und da n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, kann also n nur die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte annehmen, woraus sich dann jeweils die in der Tabelle für die Winkel α, β, γ angegebenen Werte ergeben. Andererseits sind für diese Winkelgrößen und nur für diese die geforderten Eigenschaften erfüllt.

n	$\alpha=\beta$	γ	n	$\alpha=\beta$	γ
1	45°	90°	14	6°	168°
2	30°	120°	17	5°	170°
4	18°	144°	29	3°	174°
5	15°	150°	44	2°	176°
8	10°	160°	89	1°	178°
9	9°	162°			

*8*869 Der Umfang eines Reifens von 28 Zoll Durchmesser beträgt $\pi \cdot 28$ Zoll und der Umfang eines Reifens von 26 Zoll Durchmesser $\pi \cdot 26$ Zoll. Nun verhält sich der tatsächlich von dem Radfahrer zurückgelegte Weg von x km zu dem von dem Kilometerzähler angezeigten Weg von 50 km wie der Umfang eines Reifens von 28 Zoll Durchmesser zu dem Umfang eines Reifens von 26 Zoll Durchmesser; denn jede Umdrehung des Rades wird durch einen Stift auf das Zahnradwerk des Kilometerzählers übertragen. Wir erhalten daher

$x:50=\pi \cdot 28:\pi \cdot 26$, also

$$x=\frac{50 \cdot 28}{26} \approx 53{,}8.$$

Die tatsächlich von dem Radfahrer zurückgelegte Entfernung beträgt also rund 53,8 km, sie ist um 3,8 km größer als die von dem Kilometerzähler angezeigte Entfernung.

*8*870 a) Von jedem der gegebenen 5 Punkte aus kann man jeweils genau 4 Strecken ziehen, die diesen Punkt als Anfangspunkt und einen der anderen Punkte als Endpunkt haben. Insgesamt gibt es also $\frac{5 \cdot 4}{2}=10$ verschiedene Strecken, da bei dieser Betrachtung jede Strecke doppelt gezählt wurde.
Nun gibt es zu jeder dieser 10 Strecken genau 3 Dreiecke, deren Eckpunkte der gegebenen Punktmenge angehören. Dabei wurde aber jedes Dreieck dreimal gezählt; denn jede Strecke kann dreimal als Seite eines Dreiecks auftreten. Wir erhalten also insgesamt $\frac{10 \cdot 3}{3}=10$ verschiedene Dreiecke, die den gestellten Bedingungen entsprechen.

b) Analog wie oben erhält man $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene Strecken und

$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n-2}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ verschiedene Dreiecke, die den gestellten Bedingungen entsprechen.

9▲871 Wir berechnen zunächst das Volumen des Stahlrohrs je 1 m Länge und erhalten, da es sich um einen Hohlzylinder mit einem äußeren Durchmesser von $d_1=1{,}220$ m, einem inneren Durchmesser von $d_2=1{,}190$ m und einer Höhe von $h=1$ m handelt,

$$V=\frac{\pi}{4} \cdot (d_1{}^2-d_2{}^2) \cdot h=\frac{\pi}{4} \cdot (d_1+d_2)(d_1-d_2) \cdot h$$
$$=\frac{\pi}{4} \cdot 2{,}410 \cdot 0{,}030 \text{ m}^3 \approx 0{,}05678 \text{ m}^3.$$

Die Masse des Stahlrohrs von 1 m Länge beträgt also

$m=V \cdot \varrho \approx 0{,}05678 \cdot 7{,}85 \text{ t} \approx 0{,}4457$ t.

Da die Länge der Fernleitung 850 000 m beträgt, werden insgesamt $0{,}4457 \cdot 850\,000$ t $\approx 379\,000$ t Stahl benötigt.

W9■872 Es sei x eine solche Zahl. Dann gilt

$$x^4-x^2=72(x^2+x), \quad (1)$$

also

$$(x^2+x)(x^2-x)=72(x^2+x),$$
$$(x^2+x)(x^2-x-72)=0. \quad (2)$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$x^2+x=0, \text{ d. h., } x(x+1)=0, \quad (3)$$

oder wenn

$$x^2-x-72=0. \quad (4)$$

Nun hat die Gleichung (3) die Lösung $x_1=0$, $x_2=-1$. Ferner hat die quadratische Gleichung (4) die Lösungen

$$x_3=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+72}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{289}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{17}{2}=9,$$
$$x_4=\frac{1}{2}-\frac{17}{2}=-8.$$

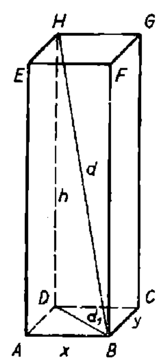
Daher hat die Gleichung (1) genau vier reelle Lösungen, nämlich

$x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=9$, $x_4=-8$.

Daher gibt es genau vier reelle Zahlen, für die die gestellte Bedingung erfüllt ist, nämlich 0, -1, 9, -8.

W9■873 Es seien x und y die Maßzahlen der Längen der Grundkanten (in cm) und $h=12$ die Maßzahl der Länge der Höhe des Quaders $ABCDEFGH$ (vgl. die Abb.). Dann gilt für die Maßzahl d_1 der Diagonale $\overline{BD}$ der rechteckigen Grundfläche

$d_1^2=x^2+y^2$.



Ferner gilt für die Maßzahl d der Raumdiagonale $\overline{BH}$

$d^2=d_1^2+h^2=x^2+y^2+h^2$.

Wegen $d=13$ und $h=12$ erhalten wir daher die Gleichung

$x^2+y^2+12^2=13^2$, also

$$x^2+y^2=25. \quad (1)$$

Da das Volumen des Quaders 144 cm³ beträgt, gilt ferner

$$xy \cdot 12=144, \text{ also } xy=12. \quad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) können wir nun x und y berechnen. Wir erhalten aus (2) wegen $x \neq 0$ $y=\frac{12}{x}$ und durch Einsetzen in (1)

$$x^2+\frac{144}{x^2}=25,$$
$$x^4-25x^2+144=0. \quad (3)$$

Diese quadratische Gleichung für x^2 hat die Lösungen

$$x_1{}^2=\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-144}$$
$$=\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{25}{2}+\frac{7}{2}=16,$$
$$x_2{}^2=\frac{25}{2}-\frac{7}{2}=9.$$

Wegen $x>0$ und wegen (2) erhalten wir also die beiden Lösungen der Aufgabe

$$x_1=4, \quad y_1=\frac{12}{4}=3;$$
$$x_2=3, \quad y_2=\frac{12}{3}=4.$$

Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß für diese Werte auch die Gleichung (1) erfüllt ist.
Der Quader hat also Grundkanten mit den Längen 4 cm und 3 cm.

*9*874 Um nachzuweisen, daß die Ungleichung (1) stets erfüllt ist, gehen wir davon aus, daß für alle reellen Zahlen a und b stets

$$(a-b)^2 \geqq 0 \quad (2)$$

gilt, da das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ ist. Aus (2) folgt nun

$a^2-2ab+b^2 \geqq 0$, also

$$a^2+b^2 \geqq 2ab. \quad (3)$$

Wegen $a>0$ folgt hieraus, wenn man durch a dividiert,

$$a+\frac{b^2}{a} \geqq 2b. \quad (4)$$

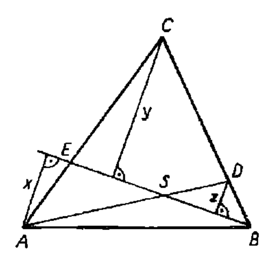
Ferner folgt durch Addition von a^2 auf beiden Seiten von (4)

$a^2+a+\frac{b^2}{a} \geqq 2b+a^2$, also

$$a(a+1)+\frac{b^2}{a} \geqq 2b+a^2. \quad (5)$$

Damit ist bewiesen, daß die Ungleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen a und b erfüllt ist.
Das Gleichheitszeichen gilt in der Ungleichung (2) und damit auch in den Ungleichungen (3), (4) und (5), also auch in der Ungleichung (1), genau dann, wenn $a-b=0$, d. h., $a=b$ gilt.

*9*875 Es seien x, y bzw. z die Längen der von den Punkten A, C bzw. D auf die Gerade BE gefällten Lote (vgl. die Abb.). Dann gilt nach dem Strahlensatz



$$x:y=\overline{AE}:\overline{EC}=p:q, \quad (1)$$
$$y:z=\overline{BC}:\overline{BD}=(r+s):r. \quad (2)$$

Gesucht ist das Verhältnis

$$k=\overline{AS}:\overline{SD}=x:z. \quad (3)$$

Nun folgt aus (2) und (1) durch Multiplikation, da alle Glieder in den Proportionen von Null verschieden sind,

$$\frac{x}{z}=\frac{p(r+s)}{qr}.$$

Das gesuchte Teilverhältnis ist also gleich

$$k=\frac{p(r+s)}{qr}.$$

Bemerkung: Im Falle $p:q=1:1$ und $r:s=1:1$ sind die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$

Seitenhalbierende des Dreiecks ABC. Wir erhalten in diesem Falle $k=2:1$, d. h., zwei Seitenhalbierende eines Dreiecks schneiden sich so, daß die Teilstrecken sich wie $2:1$ verhalten. Damit haben wir gleichzeitig einen bekannten Satz der Geometrie bewiesen.

10▲876 Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, daß je zwei beliebige unter den 17 Punkten einen Abstand haben, der größer oder gleich $\frac{2}{3}r$ *ist*.

Es sei nun um jeden der 17 Punkte ein Kreis mit dem Radius $\frac{r}{3}$ gezeichnet. Dann haben keine zwei dieser 17 Kreise einen Punkt gemeinsam, weil sonst der Abstand von zwei Punkten kleiner als $\frac{2}{3}r$ wäre. Andererseits liegen alle diese 17 Kreise mit dem Radius $\frac{r}{3}$ im Innern eines Kreises mit dem Radius

$$r+\frac{r}{3}=\frac{4}{3}r.$$

Daher ist der Flächeninhalt dieses Kreises mit dem Radius $\frac{4}{3}r$ größer oder gleich der Summe der Flächeninhalte der 17 Kreise mit dem Radius $\frac{r}{3}$; es gilt also

$$\pi\left(\frac{4}{3}r\right)^2 \geqq 17\pi\left(\frac{r}{3}\right)^2,$$

$$\frac{16}{9}r^2 \geqq \frac{17}{9}r^2,$$

was wegen $16<17$ und $r>0$ zu einem Widerspruch führt.

Daher ist unsere Annahme falsch, und es gibt unter den 17 Punkten stets zwei Punkte, deren Abstand kleiner als $\frac{2}{3}r$ ist, w.z.b.w.

W 10/12 ■ 877 Es sei (x, y, z) eine reelle Lösung des gegebenen Gleichungssystems. Dann gilt wegen (3)

$$z(1+x)=14-x. \qquad (4)$$

Dabei ist $x \neq -1$; denn aus $x=-1$ würde $0=15$ folgen, was nicht möglich ist. Wir erhalten daher aus (4)

$$z=\frac{14-x}{1+x}. \qquad (5)$$

Setzen wir diesen Wert in (2) ein, so erhalten wir

$$y+\frac{14-x}{1+x}+\frac{y(14-x)}{1+x}=11,$$

$$y+xy+14-x+14y-xy=11+11x,$$

$$15y-12x=-3,$$

$$y=\frac{12x-3}{15}. \qquad (6)$$

Setzen wir diesen Wert (1) ein, so erhalten wir

$$x+\frac{12x-3}{15}+\frac{(12x-3)x}{15}=19,$$

$$15x+12x-3+12x^2-3x=285,$$

$$12x^2+24x-288=0,$$

$$x^2+2x-24=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat genau zwei reelle Lösungen, nämlich

$x_1=-1+\sqrt{1+24}=-1+5=4$,

$x_2=-1-5=-6$.

Wir erhalten weiter aus (6)

$$y_1=\frac{12\cdot 4-3}{15}=3, \quad y_2=\frac{12\cdot(-6)-3}{15}=-5,$$

und aus (5)

$$z_1=\frac{14-4}{1+4}=2, \qquad z_2=\frac{14+6}{1-6}=-4.$$

Wir überzeugen uns durch die Probe davon, daß das gegebene Gleichungssystem tatsächlich die Lösungen H

$x_1=4$, $y_1=3$, $z_1=2$ und $x_2=-6$, $y_2=-5$, $z_2=-4$ hat;

wir erhalten nämlich durch Einsetzen in die Gleichungen (1), (2), (3) die wahren Aussagen

$4+3+4\cdot 3=19$, $\quad -6-5+(-6)(-5)=19$,

$3+2+3\cdot 2=11$, $\quad -5-4+(-5)(-4)=11$,

$2+4+2\cdot 4=14$, $\quad -4-6+(-4)(-6)=14$.

W 10/12 ■ 878 siehe Heft 6/92!

* 10/12 * 879 Es seien

x die Anzahl der Kugeln, die je 1 g wiegen und je 4 Pf kosten,

y, die Anzahl der Kugeln, die je 4 g wiegen und je 9 Pf kosten,

z die Anzahl der Kugeln, die je 8 g wiegen und je 12 Pf kosten,

u die Anzahl der Kugeln, die je 10 g wiegen und je 18 Pf kosten.

Dann gilt, weil 100 Kugeln gekauft werden, die zusammen 500 g wiegen und zusammen 1000 Pf kosten,

$$x+y+z+u=100, \qquad (1)$$
$$x+4y+8z+10u=500, \qquad (2)$$
$$4x+9y+12z+18u=1000. \qquad (3)$$

Aus diesem System von 3 Gleichungen mit 4 Variablen eliminieren wir zunächst die Variable x. Aus (1) und (2) erhalten wir durch Subtraktion

$$3y+7z+9u=400. \qquad (4)$$

Ferner erhalten wir aus (1) durch Multiplikation mit 4

$$4x+4y+4z+4u=400, \qquad (5)$$

also aus (3) und (5) durch Subtraktion

$$5y+8z+14u=600. \qquad (6)$$

Aus den Gleichungen (4) und (6) können wir jetzt die Variable y eliminieren. Wir erhalten, wenn wir in der Gleichung (4) mit 5 und in der Gleichung (6) mit 3 multiplizieren,

$$15y+35z+45u=2000,$$
$$15y+24z+42u=1800$$

und hieraus durch Subtraktion

$$11z+3u=200,$$

$$u=\frac{200-11z}{3}. \qquad (7)$$

Da u und z natürliche Zahlen sind, ergibt sich aus der Gleichung (7), daß z nur gleich 1, 4, 7, 10, 13 oder 16 sein kann. Wir erhalten dann aus der Gleichung (7) u, aus der Gleichung (4) $y=\frac{400-7z-9u}{3}$ und aus der Gleichung (1) $x=100-y-z-u$.

Die folgende Tabelle zeigt die sich ergebenden Werte:

z	u	y	x
1	63	negativ	
4	52	negativ	
7	41	negativ	
10	30	20	40
13	19	46	22
16	8	72	4

Die Werte der ersten drei Zeilen entsprechen nicht den Bedingungen der Aufgabe. Dagegen sind für die Werte der 4., 5. und 6. Zeile die Gleichungen (1), (2) und (3) und damit die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Es gibt also die folgenden Möglichkeiten für den Einkauf der Kugeln:

1. 40 Kugeln d. 1. Sorte, 20 Kugeln d. 2. Sorte, 10 Kugeln d. 3. Sorte, 30 Kugeln d. 4. Sorte.
2. 22 Kugeln d. 1. Sorte, 46 Kugeln d. 2. Sorte, 13 Kugeln d. 3. Sorte, 19 Kugeln d. 4. Sorte.
3. 4 Kugeln d. 1. Sorte, 72 Kugeln d. 2. Sorte, 16 Kugeln d. 3. Sorte, 8 Kugeln d. 4. Sorte.

Lösungen zu alpha-heiter

Wo steckt der Fehler?

Der Fehler liegt in den Gleichungsketten an der Stelle

$\ldots=\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}=\ldots$

Die Gleichungsketten sind wahre Aussagen, wenn geschrieben wird:

$\ldots\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}=\ldots$

Kryptarithmetik

$1296\cdot 36=46656$

Rösselsprung

Jedes konvexe Viereck mit einem Paar zueinander parallelen Gegenseiten heißt *Trapez*.

Logisch gedacht

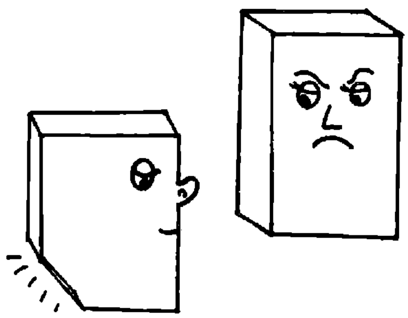
1. Die Aufgabe ist so nicht lösbar. 2. In der Vorgabe 1 muß anstelle von „in“ „neben“ eingesetzt werden. (In einem Haus kann ja nur ein Mann wohnen — Allg. Bemerkung A.) 3. Herr Meier ißt gern Quarktorte. 4. Herr Heinze züchtet Blumen.

Lösungsschema:

Haus	1	2	3	4	5
Farbe	gelb	blau	rot	grau	grün
Hausbesitzer	Meier	Schulze	Lehmann	Anton	Heinze
Hobby	Reiten	Fliegen	Mod.Eisb.	Briefmarken	Blumen
Nahrungs- und Genußmittel	Quarktorte	Wein	Zigarren	Konfekt	Kaffee
Benutztes Verkehrsmittel	Auto	Motorrad	Fahrrad	Eisenbahn	Omnibus

In freien Stunden alpha heiter

Pedant
aus: Für Dich 17/74



„Wie oft hab ich dir schon gesagt, daß du das Treppengeländer nicht hinabrutschen sollst!"

Schüler Andrej Jendrusch, Glienicke b. Berlin

Wo steckt der Fehler?

$\sqrt{29} = 7$, denn $\sqrt{29} = \sqrt{25+4} = \sqrt{25} + \sqrt{4} = 5+2=7$

$\sqrt{100} = 14$, denn $\sqrt{100} = \sqrt{64+36} = \sqrt{64} + \sqrt{36} = 8+6=14$

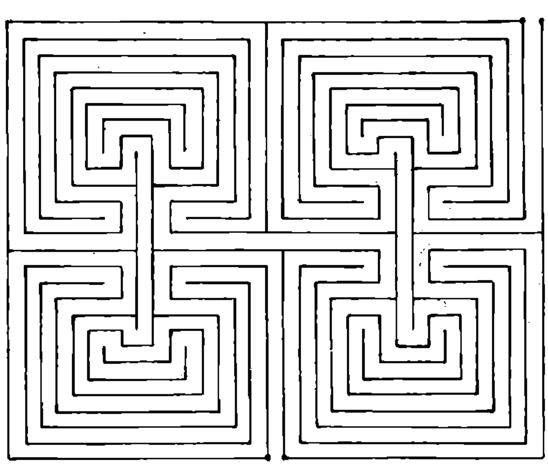
$\sqrt{50} = 8$, denn $\sqrt{50} = \sqrt{49+1} = \sqrt{49} + \sqrt{1} = 7+1=8$

$\sqrt{90} = 12$, denn $\sqrt{90} = \sqrt{81+9} = \sqrt{81} + \sqrt{9} = 9+3=12$

$\sqrt{15} = 3$, denn $\sqrt{15} = \sqrt{16-1} = \sqrt{16} - \sqrt{1} = 4-1=3$

Mathematikfachlehrer Joachim Kühn, POS Löbejün — Saalkreis

Labyrinth



Ein vierfaches Troja-Diagramm, eingesandt von Dr. Max Skalicky, Wien

Kryptarithmetik

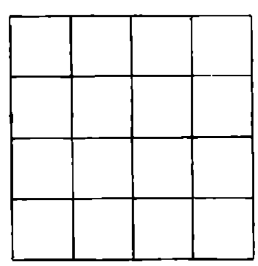
$$\begin{array}{r} \underline{a\,b\,c\,d \cdot e\,d} \\ e\,f\,f\,f \\ \underline{g\,g\,g\,d} \\ h\,d\,d\,i\,d \end{array}$$

Wolfgang Riedel, TH Karl-Marx-Stadt, Spezialklasse 12

mathematics

1. This is a game for 2 people.
2. You need 16 counters.
3. Place the counters on the 16 squares of the board.
4. Object: to make your opponent take the last counter.
5. Rules: each player in turn takes any number of counters from any one row or column. Counters cannot be removed if there is a gap between them in the row or column.

Aus einem englischen Lehrbuch



Rösselsprung

	pez	je	nem	xe	
des	ei	ge	tra	pa	paar
gen	heißt	der	re	len	vier
an	kon	mit	ten	zu	ral
	sei	ein	le	eck	

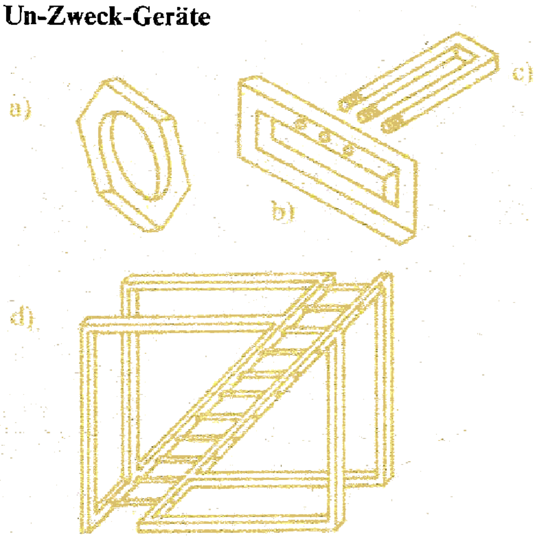
Die Lösung ist eine aus dem Mathematikunterricht der Klasse 6 bekannte Definition.

Lehrerin Irmgard Träger, Dr.-R.-Sorge-OS Ebersbach b. Döbeln

Aus der heiteren Feder von IMO-Teilnehmern

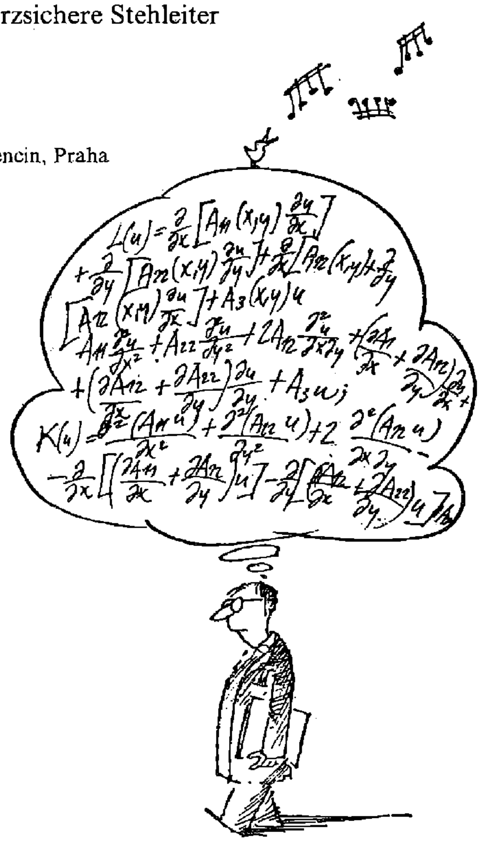
- Was ist eine Gerade? — Der geometrische Ort aller Punkte, die hintereinander liegen!
- Es ist die Länge einer Aschenbahn zu berechnen. Lehrer: „Dabei vernachlässigen wir natürlich die Breite.“ Schüler: „Dann gehen die Läufer wohl auf dem Strich?“
- Ein Punkt ist ein Winkel, dem man die Schenkel ausgerissen hat.

Un-Zweck-Geräte



a) quergebälkter Rahmen
b) Zwillingsbolzen mit permanentem Drillingseffekt,
c) der doppelwindigen Allmutter
d) umsturzsichere Stehleiter

Vladimir Rencin, Praha



Logisch gedacht

Allgemeine Bemerkungen:

A. Jedes der 5 Häuser, welches je einem anderen Besitzer gehört, ist in einer anderen Farbe verputzt.

B. Jeder Hausbesitzer hat ein anderes Hobby.

C. Jeder Hausbesitzer frönt einem anderen Nahrungs- und Genußmittel.

D. Jeder Hausbesitzer benutzt täglich ein anderes Verkehrsmittel, um zur Arbeit zu gelangen.

Um die Aufgabe lösen zu können, sind 15 Vorgaben notwendig:

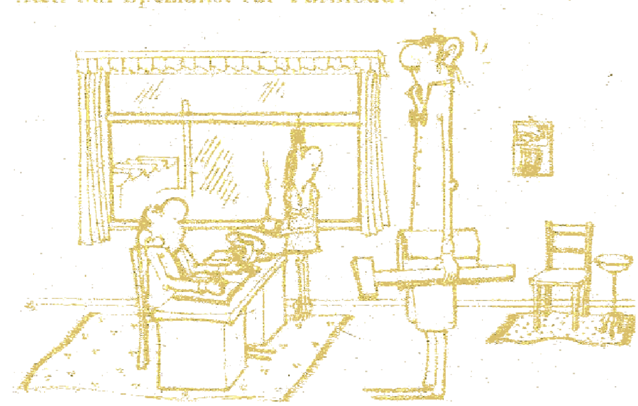
1. Der Mann, der mit dem Motorrad zur Arbeit fährt, wohnt in dem Haus mit dem Mann, der gern reitet.
2. Da stehen 5 Häuser nebeneinander.
3. Familie Anton sammelt Briefmarken.
4. Herr Schulz trinkt gern Wein.
5. Der Mann, der gern mit der Modelleisenbahn spielt, benutzt täglich sein Fahrrad.
6. Der stärkste Raucher wohnt im mittleren Haus.
7. Der Benutzer der Eisenbahn nascht gern Konfekt.
8. Familie Meier wohnt in dem gelben Haus.
9. Familie Lehmann hat ein rot angestrichenes und verputztes Haus.
10. Im grünen Haus wird gern Kaffee getrunken.
11. Der Besitzer des gelben Hauses fährt im Auto zum Dienst.
12. Familie Meier wohnt im ersten Haus.
13. Der Mann mit dem Hobby Fliegen wohnt neben dem Autofahrer.
14. Herr Heinze fährt mit dem Autobus zur Arbeit.
15. Das graue Haus steht (vom Lösenden gesehen) links neben dem grünen Haus.

Fragen:

1. Ist diese Aufgabe überhaupt lösbar?
2. Wenn nein, welche Präposition muß durch welche ersetzt werden?
3. Wer ißt gern Quarktorte?
4. Wer züchtet Blumen als Hobby?

Dr. G. Blosfeld, Halle

„Ich bin Spezialist für Turmbau!“



Mathematik einst

Aus dem Jahre 1790 ein Beispiel für die mathematische Ausbildung an universitätsvorbereitenden Schulen:

J. D. F. Wolff war dazu ausersehen, das Rektorat der Schule in Saalfeld im damaligen Ostpreußen zu übernehmen. Den Nachweis zu seiner Befähigung mußte er in einer zweitägigen, mündlichen und schriftlichen Prüfung erbringen.

Über den mathematischen Teil wird folgendes berichtet; zunächst zum mündlichen:

„Während er in der Arithmetik eine genügende Sicherheit zeigte, befand er sich in der Geometrie nur im Besitz der allerersten Anfangsgründe. Den Unterschied zwischen einem Zentri- und Peripheriewinkel wußte er wohl anzugeben, nicht aber den Beweis dafür zu liefern, daß einer der ersteren auf gleichem Bogen doppelt so groß als einer der letzteren ist, und bedurfte er der Einhilfe beim pythagoräischen Lehrsatz."

Über die schriftliche mathematische Prüfung heißt es:

„Aus der Arithmetik wurden ihm die Aufgaben gestellt:

1. Welches ist die Summe von $4\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{5}$, $8\frac{5}{6}$ und $3\frac{2}{7}$?

und dieselbe auf $25\frac{31}{35}$ von ihm angegeben, und

2. Es stirbt ein Schuldner, dem vier Kreditoren Geld geliehen haben, nämlich der erste 1 000, der zweite 800, der dritte 600 und der vierte 450 Taler. Er hinterläßt aber nur 1 596 Taler, wieviel wird ein jeder von dem geliehenen Gelde wiederbekommen? Die Antwort war: A. 560, B. 448, C. 336, D. 252 Taler.

Endlich wurde aus der Geometrie die Lösung folgender Aufgaben verlangt:

1. Durch drei gegebene Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu ziehen und
2. Zu zwei gegebenen Linien die dritte Proportionale zu finden.

Beide wurden mit Hinzufügung von Zeichnungen richtig gelöst."

Der Kandidat wurde für das Amt bestätigt, erhielt allerdings die Mahnung zu fortgesetztem Fleiß in der Latinität, Geschichte und Geographie. Offenbar hatte er den Anforderungen in der Mathematik genügt. *Eingesandt von Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden*

Zehn mathematische Formeln, welche die Gestalt der Welt veränderten

Im vergangenen Jahr gab das südamerikanische Land *Nicaragua* eine Briefmarkenserie über die hauptsächlichsten Grundlagen der Mathematik heraus. Auf der Rückseite der 42 mm × 31 mm großen Marken ist jeweils ein erläuternder Text (in Spanisch) dargeboten. Als Beispiel bieten wir den Inhalt der Marke von *J. Napier*:

J. Napier (1550 bis 1617)

Mit der Entwicklung des Logarithmus schenkte *Napier* der Welt eine bedeutsame Vereinfachung der Arithmetik. Sie erlaubt den Menschen, zu multiplizieren oder zu dividieren einfach durch Addition oder Subtraktion der Logarithmen der Zahlen und bedeutet, daß diese und weit kompliziertere Operationen mit großen, vielstelligen Zahlen schnell zu Ende geführt werden können. Die Einführung des Logarithmus auf Gebieten wie der Astronomie und der Navigation ist bedeutungsvoll und vergleichbar dem revolutionierenden Computer-Verfahren von heute.

Importlieferungen aus der UdSSR für die DDR —

eine Grundlage für die sichere Versorgung und die stabile Entwicklung unserer Volkswirtschaft

Gegenwärtig deckt die DDR z. B. ihren Bedarf an

Erdöl	zu 90 %
Eisenerz	zu 90 %
Walzstahl	zu 40 %
Zink	zu 70 %
Primäraluminium und Blei	zu 60 %
Schnittholz	zu 40 %
Baumwolle	zu 85 %

durch Importe aus der Sowjetunion.

Allein 1966 bis 1970 lieferte uns die Sowjetunion unter anderem

37,5	Mio Tonnen Erdöl
8	Mio Tonnen Koks
12	Mio Tonnen Walzstahl und Rohre
6	Mio Tonnen Eisenerz [100 Prozent Fe]
500 000	Tonnen Aluminium
10,6	Mio Kubikmeter Holz
280 000	Tonnen Zellulose
410 000	Tonnen Wolle
75 000	Tonnen Wolle

Maschinen, Anlagen und Rationalisierungsmittel nehmen einen steigenden Anteil an den Importen aus der Sowjetunion ein. Im letzten Fünfjahrplan bezog unsere Republik beispielsweise

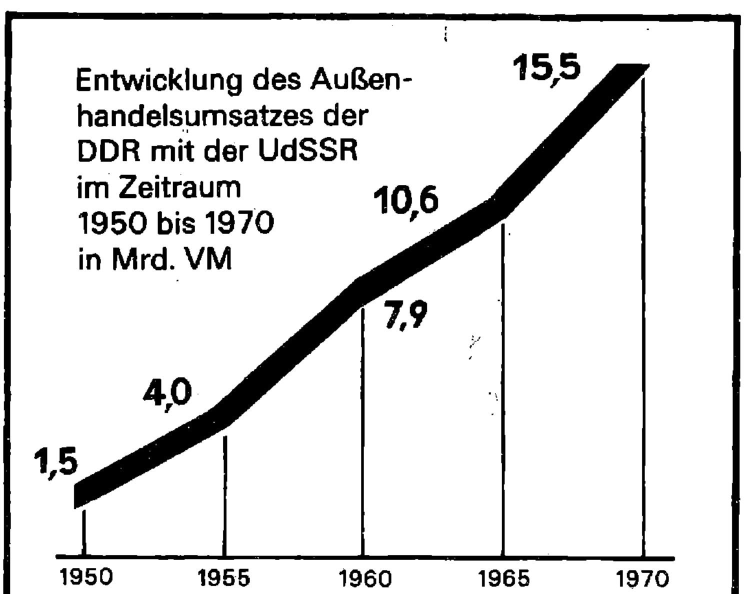
8 500	Werkzeugmaschinen
15 800	Traktoren
6 000	schwere Lastkraftwagen
450	Spezialbagger

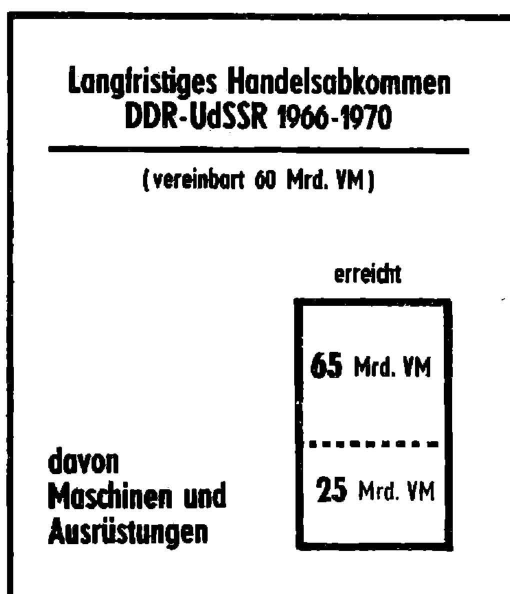
Im Rahmen des langfristigen Handelsabkommens für die Jahre 1971 bis 1975 wird die Sowjetunion außerdem in größerem Umfang

- Mittel der elektrischen Datenverarbeitungstechnik
- Chemieanlagen
- Diesellokomotiven
- Ausrüstungen für Wärme- und Kernkraftwerke
- elektronische Bauelemente
- Diamantenwerkzeuge

und andere wichtige Rationalisierungsmittel in die DDR liefern.

Das vorliegende Material wurde entnommen aus: „Arbeitsmaterial zur Direktive des VIII. Parteitages der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands zum Fünfjahrplan für die Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR 1971 bis 1975", herausgegeben von der Parteihochschule „Karl Marx" beim ZK der SED, erschienen im Verlag *Die Wirtschaft*, Berlin.
Preis der Mappe 6,20 M geblockt einseitig bedruckt. Auf 62 Tafeln wird mit mehrfarbigen Schaubildern und graphischen Darstellungen die Direktive zum Fünfjahrplan erläutert. Hervorragend für Unterricht, außerunterrichtliche Arbeit, insbesondere für Wandzeitungen geeignet.





Mihaly Kovács

Rechenautomaten und logische Spiele

Übersetzung aus dem Ungarischen

212 Seiten, 102 Bilder, 12 cm × 19 cm, Broschur (cellophoniert) 8,00 M

INTERNATIONALES JAHR DES BUCHES 1972

Der Autor will die Möglichkeiten, die der Einsatz elektronischer Schaltungen für die Lösung von mathematischen und logischen Aufgaben bietet und die letzten Endes in der EDV zum Ausdruck kommen, seinen Lesern zugänglich machen. Es werden besonders Arbeitsgemeinschaften und Bastelgruppen angesprochen, die einfache elektronische Geräte bauen wollen, durch die logische Operationen realisiert werden. Das Buch wird aber auch für alle die nützlich sein, die sich beruflich mit diesen Fragen beschäftigen.

Leserkreis: Schüler der 8. bis 12. Klassen der polytechnischen und erweiterten Oberschulen, Berufsschüler, Fachschüler, schulische Arbeitsgemeinschaften, Bastler

Wo hat es so etwas schon gegeben: ein Buch, nach dessen Instruktionen man sich Dutzende verschiedener Computer selbst bauen kann — Automaten, die tatsächlich allesamt funktionieren, mit denen man rechnen, Probleme simulieren oder einfach spielen kann.

Der ungarische Autor hat sich zunächst das Ziel gesetzt, uns mit einigen Grundgedanken über die Beziehungen zwischen Mathematik, Logik, Physik und Kybernetik zu konfrontieren. Getreu der alten Weisheit, daß die aktive Beschäftigung mit einer Sache das Verständnis dafür am besten fördert, empfiehlt uns Kovács gleichzeitig, diese Beziehungen an selbstgebastelten, einfachen Geräten zu überprüfen. Die gewichtige Bezeichnung Computer scheint im Zusammenhang mit diesen Apparaturen mitunter etwas hoch gegriffen. Sie trifft aber, wenn wir es genau bedenken, immer und ohne Einschränkung zu.

Lediglich drei Potentiometer, zwei zweipolige Umschalter, zwei Stromquellen und drei Meßinstrumente ergeben in sinnvoller Kombination z. B. einen einfachen Analogrechner, mit dem wir bei beachtlicher Genauigkeit immerhin addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren können. Nicht, weil wir anders nicht rechnen könnten, sollen wir uns den Automaten bauen, sondern weil wir auf diese Weise erstaunlich leicht verstehen lernen, wie ein Analogrechner funktioniert.

Die andere große Gruppe, die Digitalrechner, arbeitet nach einem etwas komplizierteren Schema. Um es zu verstehen, benötigt man schon etwas mehr Theorie, die Kovács auf rund 80 Druckseiten gekonnt darlegt. Er beginnt mit dem allereinfachsten Rechensystem, dem System der Dualzahlen, Null ist Null und „L“ ist Eins. Wofür wir von der ersten Schulklasse an die Ziffern 1 bis 9 und zusätzlich die 0 benötigen, bewältigt jeder Digitalrechner viel schneller und sicherer mit zwei Zeichen. Der Autor führt es eindrucksvoll vor. So nebenbei erklärt er noch, was ein Multivibrator ist oder eine logische Grundoperation; er erläutert, wozu Speicher und Zählwerke, Lochkarten und -bänder erforderlich sind.

Wenn wir das alles verdaut haben — und das schafft jeder, der die zehn Jahre Mathe-Unterricht in der Schule nicht gerade verschlafen hat —, dürfen wir endlich spielen: mit Spielmaschinen. Kovács zeigt uns in Wort und Schaltbild, was wir zu tun haben. Vielleicht spielen wir das aus Indien stammende „Nim“-Spiel? Auf dem Tisch liegt ein Häufchen Streichhölzer.

Die Spieler nehmen immer der Reihe nach entweder 1, 2 oder 3 Hölzchen weg. Verloren hat, wer das letzte Streichholz bekommt. Es gibt verschiedene Versionen des Spiels. Wenn der selbstgebastelte Computer mitspielt, gewinnt er immer. Wie er das macht? Wenn wir Kovács' Buch gelesen haben, wissen wir es.

Wem das noch zu einfach ist, baut sich einen Kartenspielautomaten oder eine „Wundermühle“, mit der er etwas ähnliches wie das bekannte „Mühle“ spielen kann. Vielleicht konstruiert er sogar ein einfaches Modell der künstlichen Maus „Theseus“, zur Zeit eine Spitzenleistung unter den kybernetischen Maschinen.

Günter Heinze (aus JW)

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Mit Zirkel und Zeichendreieck

Figur 1: Vergleiche die schraffierte Fläche (Rosette) mit der Quadratfläche ($a=2r$); F. 2: Berechne den Flächeninhalt der vier *Möndchen* und vergleiche ihn mit dem des Quadrats. F. 3: Klappe zwei der in Figur 2 abgebildeten *Möndchen* nach innen. Vergleiche die schraffierte Fläche mit der Quadratfläche! F. 4: Vergleiche Figur 4 und 6! F. 5: Vergleiche die schraffierte Fläche mit der nichtschraffierten! (Lösungen siehe 6/72)

J. Lehmann

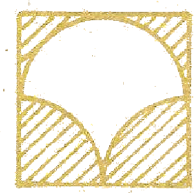
Figur 1

Figur 2

Figur 3

Figur 4

Figur 5

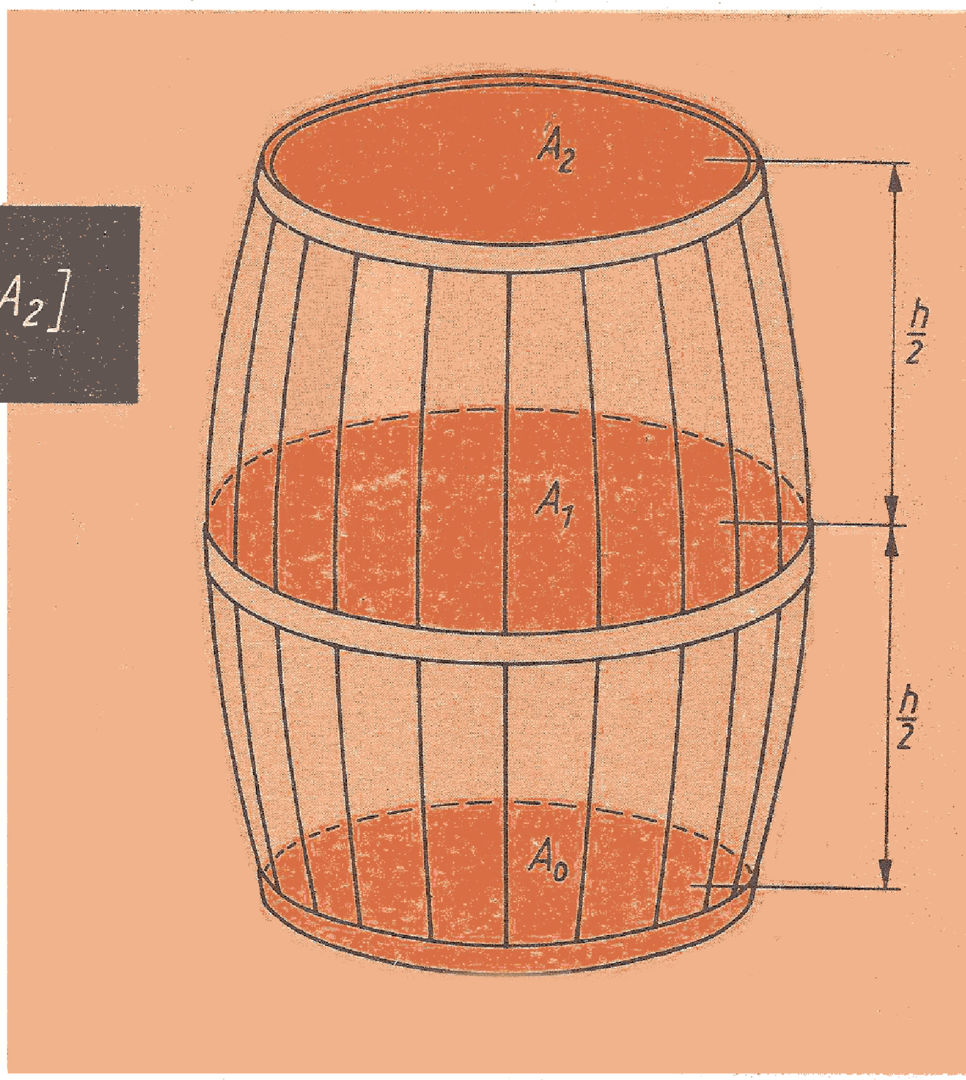


Figur 6

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha

$$V=\frac{h}{6}\left[A_0+4A_1+A_2\right]$$



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
6. Jahrgang 1972
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31 059

6

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Nedeljko Dragic, Zagreb (S. 129); F. Deubner — A. Ries (S. 136); Rentierzüchter am Schwarzen Meer: Aminodow Kanjewski, Moskau (S. 137); J. Lehmann, Leipzig (S. 144)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 26. September 1972

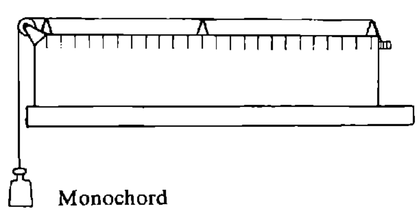
alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Mathematik im Reich der Töne

Bei der Betrachtung von Farbkombinationen z. B. an Kleidern und Stoffen findet man die eine Farbzusammenstellung schön und ansprechend, während sich bei anderen Kombinationen die Farben zu „beißen" scheinen. Für unser unterschiedliches Empfinden machen wir unseren persönlichen Geschmack, die Mode, unsere psychische Einstellung zu gewissen Farben und vielleicht auch die eigene Voreingenommenheit verantwortlich. Die wenigsten werden die Ursachen für ihre Freude oder ihr Unbehagen beim Anblick bestimmter Farbkombinationen in mathematisch-physikalischen Bereichen suchen. Es ist jedoch gewiß, daß zwischen dem vom Auge aufgenommenen äußeren physikalischen Reiz und dem dadurch ausgelösten psychischen Empfinden ein mathematisch faßbarer Zusammenhang besteht.
Bekanntlich ist mit jeder Lichtausstrahlung ein elektromagnetischer Schwingungsvorgang verknüpft. Diese Schwingungen breiten sich mit der Geschwindigkeit $c = 300\,000$ km · s^{-1} aus. Wegen der Größe dieser Geschwindigkeit kann man im allgemeinen für irdische Entfernungen die Zeit zwischen dem Aufleuchten eines Lichtblitzes und der Wahrnehmung durch das menschliche Auge gleich Null setzen.
Als weitere meßbare Größe hat man beim Licht die Wellenlänge λ. Experimentell läßt sich ein weißer Lichtstrahl mit Hilfe eines Glasprismas in Farben zerlegen. Man erhält ein Farbspektrum, das von rot über gelb, grün, blau nach violett geht. Jeder Farbe läßt sich eine bestimmte Wellenlänge und wegen der allen Farben gemeinsamen Ausbreitungsgeschwindigkeit c auch eine bestimmte Frequenz f nach der Formel $c = f \cdot \lambda$ zuordnen. Die Wellenlängen liegen zwischen 380 μm und 760 μm für violett bzw. rot. Entsprechend obiger Formel folgt für die zugehörigen Schwingungszahlen $0{,}8 \cdot 10^{15}$ bzw. $0{,}4 \cdot 10^{15}$ pro Sekunde. Die elektromagnetischen Wellen dieses Frequenzbereiches vermag das menschliche Auge sinnlich zu erfassen.
Eine völlig andere Welt von Schwingungen erschließt sich dem Menschen durch sein Gehör. Es sind die akustischen Schwingungen der Luft. Wie müssen wir uns ihre Erzeugung und Ausbreitung vorstellen? Denken wir einmal an Explosionen von Kraftstoff im Verbrennungsmotor eines Autos! Als Folge jeder Explosion tritt verdichtetes Gas durch die Auspufföffnung ins Freie. Dieser Verdichtungsstoß breitet sich mit Schallgeschwindigkeit (etwa 335 m · s^{-1}) kugelförmig nach allen Seiten aus. Nur durch materielle Hindernisse, wie Häuserwände oder den Straßenbelag, wird der Schall reflektiert und absorbiert. Von unserem Ohr wird der Verdichtungsstoß als Knall registriert.
Wechseln Luftverdichtung und Luftverdünnung mit einer ganz bestimmten Frequenz, z. B. 100mal pro Sekunde, so nimmt unser Gehörorgan dies als einen bestimmten Ton wahr. Physikalisch bezeichnet man diese Wellenart als Longitudinalwellen, weil die Luftteilchen als Träger der Wellen in der Fortpflanzungsrichtung hin und her schwingen. Der Blick von einer Anhöhe auf ein wogendes Kornfeld vermittelt eine anschauliche Vorstellung von der Energieübertragung durch Longitudinalwellen. Hingegen schwingen bei Transversalwellen, wie man sie z. B. an Wasseroberflächen beobachten kann, die Materieteilchen als Träger der Wellen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung. Longitudinalwellen lassen sich graphisch in Transversalwellen umsetzen, indem man den Luftdruck als Funktion der Zeit aufzeichnet. Die so aufgenommenen akustischen Wellen lassen eine wissenschaftliche Klanganalyse zu.
Sind die Verdichtungsstöße unregelmäßig, d. h. läßt sich keine bestimmte Frequenz angeben, so empfinden wir ein Geräusch. Zum Beispiel erzeugen eine fahrende Straßenbahn oder eine aufheulende Fabriksirene charakteristische Geräusche. Hingegen wird beim Anschlagen einer Glocke, eines Weinglases oder der Saite eines Instrumentes ein bestimmter, dem schwingenden Körper eigentümlicher Ton erzeugt.
Durch das Zusammensetzen von Tönen und Tonfolgen unter Einhaltung gewisser Regeln gelangt man zur Musik: Im folgenden soll nicht von Musik, sondern von den Bausteinen der Musik, den Tönen und den sich daraus aufbauenden Tonleitern die Rede sein.
Wir wollen mit Hilfe einfacher Gedankenexperimente an den Aufbau von Tonfolgen aus Tönen herangehen. Dabei halten wir uns an den geschichtlichen Entwicklungsgang, weil dieser uns den verständlichsten Zugang zu diesem Problemkreis eröffnet. Außerdem lassen sich immer wieder aufschlußreiche Querverbindungen zur Geschichte der Mathematik, Physik, Philosophie und Instrumentenkunde herstellen. Die ältesten Beiträge zu diesem Gegenstand sind uns mit Sicherheit von dem Bund der Pythagoreer (um 550 v. u. Z.) überliefert. Als Hilfsmittel für ihre Untersuchungen benutzten sie das Monochord. Dieses einsaitige Instrument besteht aus einem quaderförmigen Kasten, über den zwischen zwei Stegen eine Saite gespannt ist. Diese Saite ist mit dem einen Ende am Kasten fest verankert. Das andere Ende wird über eine feste Rolle geführt und mit einem Gewicht angespannt. Nun kann die mittels des frei hängenden Gewichtes angespannte Saite durch Anzupfen in Schwingung versetzt werden. Der Kasten ist resonanzfähig gebaut, d. h. er wird durch die Saite zum Mitschwingen angeregt und wirkt dadurch klangverstärkend. Mit diesem einfachen Instrument lassen sich Tonintervalle durch Änderung der Saitenspannung oder Saitenlänge unabhängig voneinander erzeugen. So haben wohl schon die Pythagoreer das Intervall einer Oktave, das sich mit dem Gehör besonders leicht kontrollieren läßt, auf zwei Weisen erzeugt. Vervierfacht man nämlich das am freien Ende der Saite befindliche Gewicht, so erzeugt die hierdurch stärker gespannte

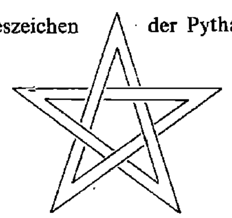


Monochord

Saite einen Ton, der um eine Oktave über dem ursprünglichen liegt. Die Schwingungszahlen der Töne waren den Pytagoreern noch nicht bekannt. Später wurde experimentell gezeigt, daß sich die Frequenzen zweier eine Oktave darstellende Töne wie 1:2 verhalten.
Wird die Schwingungszahl eines beliebigen Tones verdoppelt, so liegt der erzeugte Ton eine Oktave über dem Ausgangston. Durch Änderung der Saitenspannung kann also die Höhe des erzeugten Tones variiert werden. Dieses Prinzip findet beim Stimmen von Streichinstrumenten eine jedem Laien vertraute Anwendung.
Eine andere Möglichkeit zur Erzeugung von Tonintervallen besteht darin, die Länge der schwingenden Saite durch Verschieben des beweglichen Steges zu verändern. Wird z. B. der Anteil der schwingenden Saite halbiert, so liegt der neue Ton eine Oktave über dem von der ganzen Saite erzeugten Ton. Mit dieser Entdeckung war Pythagoras und seinen Schülern Anreiz gegeben, Tonintervalle auf

Streckenverhältnisse und damit auf Zahlenverhältnisse zurückzuführen. Ihre vornehmste Aufgabe erblickten sie mit darin, die Konsonanz oder Dissonanz zweier Töne aus den Verhältnissen von Saitenlängen und damit von Zahlen zu ergründen. Die Grundlage der Philosophie des pythagoreischen Bundes bildete die Lehre von den Zahlen. Der Überlieferung nach gipfelte ihre Lehre in dem Satz, daß das Wesen der Welt mit Zahlen erfaßbar sei. Gemeint waren dabei die natürlichen Zahlen.

Bundeszeichen der Pythagoreer



Das Bundeszeichen der Pythagoreer bildete ein Fünfstern, auch Pentagramm genannt. Ausgerechnet an geometrischen Betrachtungen zu diesem Bundeszeichen entdeckte ein Anhänger des Pythagoras durch scharfsinnige Überlegungen, daß das Verhältnis von Seite zu Diagonale bei einem regelmäßigen Fünfeck nicht durch zwei auch noch so große natürliche Zahlen ausdrückbar ist. In unserer heutigen Sprechweise würden wir sagen: Man entdeckte, daß es neben den rationalen Zahlen auch irrationale Zahlen gibt. Diese dem Hippasos von Metapontion um 450 v. u. Z. zugeschriebene Entdeckung löste die erste historisch belegbare Grundlagenkrise in der Mathematik aus. Auch am Quadrat fand man bald heraus, daß das Verhältnis von Diagonalen- zu Seitenlänge nicht im Sinne des Meisters durch ganze Zahlen auszudrücken war. Unter dem Eindruck dieser Entdeckungen kam es zur Spaltung des Bundes in zwei Gruppen. Die Akusmatiker (Hörer) schworen weiter auf die Worte ihres Lehrers, während die Mathematiker sich keinerlei Fesseln in ihrem Erkenntnisdrang auferlegten und unter Überwindung der philosophischen Lehren des Pythagoras weiteren Forschungen vor allem in der Geometrie nachgingen*.

Bleiben wir zunächst noch in dem „Goldenen Zeitalter der Pythagoreer"! Auf der weiteren Suche danach, das harmonisch Zusammenklingende zahlenmäßig zu erfassen, bot sich das Verhältnis 2 : 3 für die Längen der schwingenden Saiten an. Das dabei entstehende Tonintervall bezeichnen wir als Quinte. Der gefällige Zusammenklang beider Töne hatte gemäß der Lehre des Pythagoras seine Ursache in dem mit kleinen Zahlen faßbaren Längenverhältnis.

Auch das Verhältnis 3:4 wurde auf seinen akustischen Effekt untersucht. Das zugehörige Tonintervall wird in der Musiktheorie als Quarte bezeichnet. Die Pythagoreer beschränkten sich auf diese beiden Zahlenverhältnisse zum Aufbau einer aus 8 Tönen bestehenden Tonleiter. Hierbei wandten sie die Erkenntnis mit an, daß zwei Tonintervalle gleichzusetzen sind, wenn die Längen der schwingenden Saitenabschnitte am Monochord im gleichen Verhältnis zueinander stehen.

Wir wollen uns den Aufbau einer Tonleiter in einer etwas moderneren Sprechweise klarmachen. Deshalb werden wir nicht die Saitenlängen l, sondern die Frequenzen f der Töne in Beziehung zueinander setzen. Als Grundlage für diese Überlegungen dient die allgemein geläufige Beziehung $l=\frac{k}{f}$, wobei k eine dieser zugeschnittenen Größengleichung angepaßte Konstante ist. Zwei Tonintervalle sind daher genau dann gleichsetzbar, wenn ihre Schwingungszahlen im gleichen Verhältnis zueinander stehen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir für die zunächst nur wichtigen Verhältniszahlen die Bezeichnungen der C-Dur-Tonleiter übernehmen, also $c-d-e-f-g-a-h-c'$.

Bisher wurde mit unseren Gedankenexperimenten am Monochord über folgende Verhältniszahlen bezüglich des Grundtones c verfügt:

c	f	g	c'	Tonbezeichnung
1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	Verhältniszahl
(Prime)	(Quarte)	(Quinte)	(Oktave)	Intervallbezeichnung

Es sind also noch vier Leerstellen auszufüllen. Die pythagoreische Tonleiter setzt sich aus fünf großen und zwei kleinen Tonschritten zusammen. Der große Tonschritt wird aus Quarte und Quinte wie folgt erklärt: Setzt man $q_1=\frac{3}{2}$ und $q_2=\frac{4}{3}$, so gilt für den großen Tonschritt $q=\frac{q_1}{q_2}=\frac{9}{8}$. Die diesem Verhältnis entsprechende Schrittweite liegt bereits von f nach g vor. Sie wird ferner beim Fortschreiten von c nach d, von d nach e sowie von g nach a und a nach h übernommen. Nun stehen noch die Quotienten offen, welche den Schritt von e nach f und h nach c' beschreiben. Für beide Intervalle ergibt sich zwangsläufig aus den bisherigen Festlegungen das Zahlenverhältnis $\frac{256}{243}$. Dieser Bruch kann nicht gekürzt werden. Er fällt wegen der Dreistelligkeit von Zähler und Nenner etwas aus dem Rahmen. Auch in akustischer Hinsicht liefern die Töne keinen guten Zusammenklang. Durch eine Zusammenstellung der Zahlenverhältnisse bezogen auf den Grundton und den darunter liegenden Nachbarton wollen wir uns eine Übersicht von dem Pythagoreischen Tonsystem verschaffen:

Tonbezeichnung	c	d	e	f	g	a	h	c'
Schwingungszahl bezogen auf c	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
bezogen auf Nachbarton		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

Die gleiche Tonleiter kann man sich auch über den sogenannten „Quintenzirkel" erzeugt denken. Dabei geht man in folgender Weise vor: Man zeichnet einen Kreis und teilt diesen mit dem Winkelmesser in sieben gleiche Teile. In den Teilungspunkten trägt man im Uhrzeigersinn die Tonbezeichnungen in das Bild ein, wobei wir mit c vom obersten Teilungspunkt ausgehen wollen. Da sich dieser mit c' decken soll, werden wir ihn besonders stark markieren. Nun machen wir, von c ausgehend, im Uhrzeigersinn Quintensprünge. Durch Überspringen von je drei Teilungspunkten des Kreises gelangt man der Reihe nach auf g, d, a, e und h. Bei jedem Sprung multiplizieren wir die zuletzt erreichte Zahl mit $\frac{3}{2}$. Wird bei einem Quintensprung die zu c gehörige Markierung überquert, so lautet der Faktor $\frac{3}{4}$ statt $\frac{3}{2}$. Man sieht, daß auf diese Weise gleichfalls die Verhältniszahlen der pythagoreischen Tonleiter erzeugbar sind. Die noch fehlende Verhältniszahl für f ergibt sich durch eine Quintendrehung im Gegenzeigersinn. Wir müssen deshalb die zu c gehörige Verhältniszahl mit dem Kehrwert von $\frac{3}{2}$ multiplizieren und – da dieser Sprung als Überschreitung der Markierung zu werten ist – noch mit dem Faktor zwei versehen. Ferner ist zu bemerken, daß sich der Quintenzirkel nicht exakt schließt. Nach dem beschriebenen Verfahren lassen sich zwar die zu sieben Tönen der Tonleiter gehörigen relativen Schwingungszahlen exakt auffinden. Die zu c' gehörige Zahl 2 kann jedoch nach dem hier beschriebenen Verfahren nicht konstruiert werden.

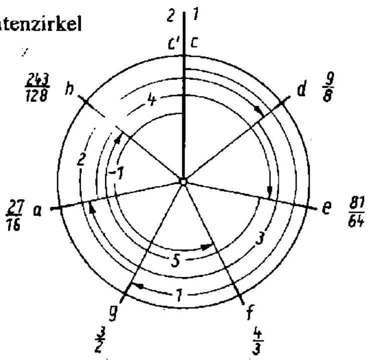
Teilt man nun die fünf großen Intervalle der pythagoreischen Tonleiter in je zwei Teilintervalle, so sind beim Durchlaufen

* Der Nachweis der Existenz irrationaler Zahlen durch elementare geometrische Überlegungen soll Gegenstand eines späteren Beitrages sein.

der Oktave von c nach c' insgesamt 12 Tonschritte auszuführen. An Tastinstrumenten erkennt man deutlich gemäß der Klaviatur die Einschaltung der fünf Zwischentöne. Führen wir nun entsprechend der hier vorgelegten Tonleiter zwölf Quintendrehungen im Uhrzeigersinn mit unserem Zirkel durch und beachten, daß beim Überqueren der c-Marke der Faktor $\frac{3}{4}$ und sonst $\frac{3}{2}$ zu setzen ist, so ergibt sich als Endwert

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{531\,441}{524\,288}=1{,}0137.$$

Quintenzirkel



Hätte sich der Quintenzirkel nach 12 Sprüngen (7 Umläufen) exakt geschlossen, wären wir auf die Zahl eins gekommen. Das diese Abweichung charakterisierende Zahlenverhältnis (531 441 : 524 288) bezeichnet man in der Musiktheorie als „pythagoreisches Komma“.

Durch diesen Quotienten wird also das Intervall zwischen der zwölften Quinte und der siebenten Oktave bezüglich eines gemeinsamen Grundtones zahlenmäßig erfaßt. Das hier erläuterte Stimmungsprinzip, nach welchem alle Töne aus einer Quintenreihe abgeleitet werden, bezeichnet man in der Musiktheorie als pythagoreisches Stimmungsprinzip. Es ist keineswegs nur von theoretischer oder musikgeschichtlicher Bedeutung. Vor allem bei solistischen Darbietungen an Streichinstrumenten neigen die Künstler zur Verwendung dieser pythagoreischen Tonstufen. Sie fördern vor allem den melodiösen Klang der Musik. Ferner vermitteln uns diese numerischen Betrachtungen eine Vorstellung von der Problematik, die beim Instrumentenbau hinsichtlich des Zusammenklanges vieler Instrumente in einem großen Klangkörper (Orchester) zu bewältigen sind.

Gegen das pythagoreische Quintensystem ist der Einwand der Klangarmut vor allem beim Anschlagen von Akkorden bezüglich der angeregten Obertöne erhoben worden. Wir kehren deshalb zu unserem Monochord zurück und vollziehen nun in Gedanken noch den Schritt, den Didymos (geb. 63 v. u. Z.) über die Pythagoreer hinausgehend getan hat. Wir setzen am Monochord den beweglichen Steg so ein, daß $\left(\frac{4}{5}\right)$ der ursprünglichen Saite zur Schwingung freigegeben sind. Bezüglich des Grundtones ergibt sich nach moderner Sprechweise die große Terz. Der Kehrwert $\frac{5}{4}$ entspricht dem Verhältnis der Schwingungszahlen. Unter Mitverwertung dieses Tonschrittes läßt sich eine weitere Tonleiter aufbauen, die für die Musiktheorie von fundamentaler Bedeutung ist. Man bezeichnet sie als diatonische Tonleiter.

Zunächst fassen wir von den bis jetzt bekannten Intervallen Oktave, Quinte, Quarte und große Terz die auf den Grundton bezogenen Verhältniszahlen zusammen:

c	·	e	f	g	·	·	c'
1		$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$			$\frac{2}{1}$

Zwischen f und g bleibt also bei der aufzubauenden Tonleiter der pythagoreische Ganztonschritt unverändert bestehen. Das Intervall von e nach f stellt einen halben Tonschritt dar, welcher durch den Bruch $\frac{16}{15}$ fixiert wird. Nun sind offenbar noch die Lücken zwischen c und e sowie zwischen g und c' durch einen bzw. zwei Töne in geeigneter Weise zu schließen. Geht man von c um einen pythagoreischen Ganztonschritt nach d, bleibt für den Übergang von d nach e noch der Faktor $\frac{10}{9}$ frei. Um Quotienten von möglichst kleinen ganzen Zahlen zur Beschreibung der Tonleiter zu sichern, ist eine Unterscheidung zwischen großen und kleinen ganzen Tonschritten zu treffen, je nachdem die Verhältniszahl beim Übergang zum nächst höheren Ton $\frac{9}{8}$ oder $\frac{10}{9}$ lautet.

Auf diese Weise lassen sich dreistellige Verhältniszahlen zwischen Nachbartönen, wie sie bei der pythagoreischen Stimmung auftreten, ausschalten.

Mit den vorgegebenen Intervallgrößen sind nun noch die beiden Leerstellen zwischen g und c' zu besetzen. Geht man von e um eine Quinte nach oben, ergibt sich h mit der Verhältniszahl $\frac{15}{8}$ bezüglich des Grundtones c. Damit bleibt für das Intervall von h nach c' der halbe Tonschritt $\frac{16}{15}$. Das noch offene Intervall zwischen g und h stellt eine große Terz entsprechend dem Bruch $\frac{5}{4}$ dar. Wegen $\frac{5}{4}=\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}$ ist es naheliegend, a so einzupassen, daß das Intervall $g-a$ einem großen und $a-h$ einem kleinen Ganztonschritt entspricht. Damit ist die Konstruktion der acht Töne umfassenden diatonischen Tonleiter aus den Brüchen $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$ und $\frac{16}{15}$ abgeschlossen.

E. Schröder

(In Heft 1/73 folgt ein 2. Teil, d. Red.)

Knobellied

2. *d* Quadrat mal *pi* durch 4,
g mal *h* durch 2,
solche Rätsel lösen wir
ganz ohne Zauberei.
Knobeln heißt das...

3. Mathe schärft das Denken dir,
Mathe schafft Verstand,
darum, lieber Pionier,
nimm doch das Buch zur Hand.
Knobeln heißt das...

(Entnommen aus: „Geschichten aus Knirpsenstadt“ – Autor: *Matthias Wenzlaff*)

Nicolaus Copernicus

Teil 2

V

Der Tod von *Lucas Watzenrode* und die nachfolgende Wahl des neuen Bischofs, dessen Bestätigung durch die polnische Krone schwierig zu erreichen war, schuf eine unsichere Lage im Inneren des Bistums. Bedrohlicher noch wurde die außenpolitische Lage. 1519 brach, wie lange befürchtet, ein neuer blutiger Krieg mit dem Deutschen Ritterorden aus, der erst 1525 mit dem Frieden zu Kraków beigelegt werden konnte und nun den Orden endgültig in seine Schranken wies. Unterdessen hatten religiöse Auseinandersetzungen mit der auch in Varmia zunehmenden Zahl von Anhängern der Reformation um sich gegriffen.
Copernicus spielte in allen diesen verwickelten Situationen eine hervorragende Rolle, als Domherr in Frombork, als Statthalter und später als eine Art Militärkommandant der Festung Olsztyn (Allenstein), als Generaladministrator des Bischofs, als Diplomat bei den Friedensverhandlungen.
Als schließlich umfassende Anstrengungen unternommen wurden, die durch die Folgen der lange dauernden kriegerischen Verwicklungen völlig zerrüttete preußische Währung in Ordnung zu bringen, wurde *Copernicus* zu Rate gezogen. In mehreren Denkschriften (1522, 1527 und danach) unterbreitete *Copernicus* Vorschläge, die ihn als weitblickender Kenner der frühkapitalistischen Währungsgesetze auswiesen.

VI

Auch in den dreißiger Jahren, als allmählich in Varmia wieder ruhigere Zeiten einkehren konnten, blieb *Copernicus*, nun schon im fortgeschrittenen Alter stehend, treuer Diener seines Bistums, u. a. bei der Regelung des Brotpreises, als Finanzrevisor, als Verwalter der der Kirche vermachten Stiftungen und als sehr geschätzter Arzt.
Doch nun konnte er mit voller Konzentration an die Ausarbeitung seines wissenschaftlichen Lebenswerkes gehen. Im Wechsel zwischen astronomischen Beobachtungen (wobei ihm das Fernrohr noch nicht zur Verfügung stand) und außerordentlich umfangreichen komplizierten Rechnungen (wobei er sich das mathematische Werkzeug, die Trigonometrie, teilweise erst selbst bereitstellen mußte), schuf *Copernicus* ein umfangreiches Werk. Es trug den Titel „De revolutionibus", was soviel wie „Über die Umläufe" (der Planeten) bedeutet.
Das endgültige Manuskript, das aus vielen Vorentwürfen hervorgegangen ist, wurde von *Copernicus* in seiner klaren Handschrift, teilweise mit farbiger Tinte, vermutlich zwischen 1529 und Mitte 1532 niedergeschrieben. Dieses wunderschöne Manuskript blieb über alle Stürme der Zeiten hinweg erhalten und befindet sich heute als eines der Glanzstücke in den Museen von Kraków.

VII

Bereits Mitte der zwanziger Jahre hatte sich der Ruf von *Copernicus* als eines bedeutenden Gelehrten und vorzüglichen Astronomen weithin verbreitet, sogar bis nach Rom. *Copernicus* wurde u. a. wegen der anstehenden Kalenderreform vom päpstlichen Stuhl zu Rate gezogen und schließlich 1536 aufgefordert, über seine neue Theorie zu berichten.
Doch *Copernicus* zögerte. Er sah die Auseinandersetzungen voraus, wenn er seine heliozentrische Auffassung der damals unbestrittenen geozentrischen Auffassung gegenüberstellen würde und suchte daher in weiteren Beobachtungen und Rechnungen unwiderlegliche Beweise für seine Erkenntnis zu erbringen. Andererseits drängten ihn seine Freunde, das Werk „De revolutionibus" durch Drucklegung der Öffentlichkeit zu übergeben; es gehöre der ganzen Menschheit. Insbesondere der engste Freund von *Copernicus, Tiedemann Giese,* Bischof von Chełmno, bestürmte *Copernicus* unaufhörlich.
Den letzten Anstoß zur Drucklegung lieferte ein Besucher von der Universität Wittenberg, dem Zentrum der Reformation. Obwohl sich Luther höchstpersönlich gegen die heliozentrische Lehre ausgesprochen hatte, war der noch sehr junge Professor der Mathematik und Astronomie an der Wittenberger Universität, *Georg Joachim Rheticus,* der Auffassung, man müsse sich an den Quellen über die Wahrheit informieren.
Im Mai 1539 traf *Rheticus* in Frombork ein und vermochte in jugendlicher Begeisterung, *Copernicus* völlig für sich einzunehmen. *Copernicus* unterwies *Rheticus,* man diskutierte zusammen und besuchte gemeinsam *Tiedemann Giese.*
Im Herbst 1539 schrieb *Rheticus* einen ausführlichen Brief an einen seiner früheren Lehrer nach Nürnberg und berichtete über *Copernicus,* sein Werk und seine Arbeitsweise. Der Brief trägt den Charakter einer wissenschaftlichen Abhandlung; unter dem Titel „Narratio prima" (Erster Bericht) wurde sie Winter 1539/40 in Gdańsk gedruckt, die erste gedruckte Bekanntgabe der revolutionären neuen Astronomie.
Bis zum Herbst 1541 blieb *Rheticus* in Frombork.

Er hatte, zusammen mit *Giese,* die prinzipielle Einwilligung zur Drucklegung der „De revolutionibus" von *Copernicus* erwirkt. Doch behielt sich *Copernicus* noch Verbesserungen und Ergänzungen vor.

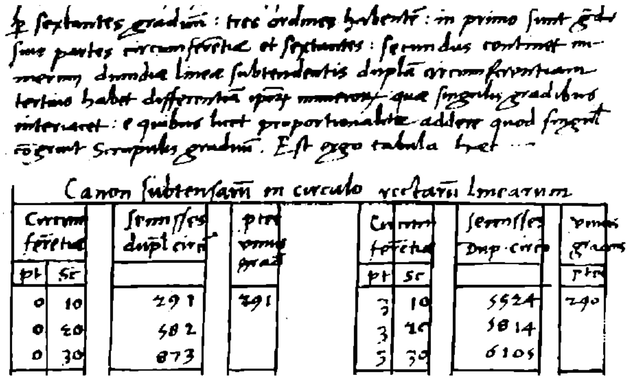
VIII

Inzwischen näherte sich *Copernicus* der Vollendung seines siebenten Lebensjahrzehntes, ein Alter, das die Menschen der damaligen Zeit höchst selten erreichten.

Im Winter 1541/42 scheint *Copernicus* erkannt zu haben, daß er nicht mehr die Kraft haben würde, sein Manuskript selbst druckreif zu machen. Verabredungsgemäß übergab er es daher seinem Freund *Giese,* der es an *Rheticus* weiterleitete. Dieser erhielt von dem damals weitberühmten Drucker *Petreius* in Nürnberg eine Zusage; im Mai 1542 begab sich *Rheticus* nach Nürnberg und leitete die Drucklegung von „De revolutionibus" ein, eines der bedeutendsten naturwissenschaftlichen Werke, das je erschienen ist. Der Druck des umfangreichen Werkes, das mehr als 420 engbeschriebene großformatige Seiten umfaßt, zog sich hin. Im Sommer 1542 scheinen die körperlichen Kräfte von *Copernicus* schnell nachgelassen zu haben. Im Herbst war er schon recht schwach. Ende November oder Anfang Dezember erlitt er einen schweren Schlaganfall. Doch bei der guten Pflege, die *Copernicus* zweifellos zuteil wurde, überlebte *Copernicus* noch den Winter. Im Frühjahr 1543 verschlechterte sich der Zustand weiter; lange Perioden der Bewußtlosigkeit traten ein.

Am 24. Mai 1543, im Alter von 70 Jahren, drei Monaten und fünf Tagen starb *Nicolaus Copernicus,* einer der bedeutendsten Gelehrten der Menschheitsgeschichte. Er wurde im Dom zu Frombork beigesetzt. Gerade an seinem Todestage gelangte das erste ausgedruckte Exemplar von „De revolutionibus" nach Frombork. Man brachte es eilends zu *Copernicus,* der es noch mit der Hand berührt, aber nicht mehr erkannt hat. Wenige Stunden darauf starb er.

Als Mensch und Wissenschaftler besaß *Copernicus* eine unzerstörbare Liebe zur Wahrheit. Große Gesten lagen ihm fern; in der Sache aber blieb er unbeugsam.



Energie und Beharrlichkeit verbanden sich mit Kühnheit des Denkens und außerordentlicher Vielseitigkeit. Alle Nachrichten über den Charakter von *Copernicus* betonen Bescheidenheit und Toleranz, aber auch nüchterne und kühle Sachlichkeit. Bei aller Verschlossenheit und Zurückhaltung wird zugleich seine Hilfsbereitschaft im persönlichen und wissenschaftlichen Leben gerühmt.

IX

Copernicus Werk „De revolutionibus" gehört zum unveräußerlichen Bestandteil der Weltkultur und des menschlichen Wissens. Die Nürnberger Erstausgabe besteht aus ungefähr 400 Druckseiten. Das ganze Werk ist in sechs Abschnitte (Bücher) eingeteilt, die je aus 20 bis 30 Kapiteln bestehen.

Leider wurden – ohne das Wissen des kranken *Copernicus* natürlich – bei der Drucklegung am Manuskript zwei Eingriffe vorgenommen, die schon den Charakter einer Fälschung besitzen, und zwar durch den protestantischen Theologen *Osiander,* dem *Rheticus* bei der Wiederaufnahme seiner Tätigkeit in Wittenberg die Überwachung der weiteren Drucklegung in Nürnberg anvertraut hatte.

Osiander erweiterte den ursprünglichen Titel „De revolutionibus" zu „De revolutionibus orbium coelestium" (schwer übersetzbar: Über die Umläufe der Himmelskreise oder Himmelssphären) und unterstellte damit *Copernicus* indirekt die Ansicht, als habe dieser an die Existenz der bei *Ptolomäus* postulierten Himmelssphären geglaubt.

Schwerwiegender aber noch war der folgende Umstand: *Osiander* fügte vor die von *Copernicus* gegebene Widmung an den damaligen Papst Paul III noch ein Vorwort an den Leser ein, unsigniert, ohne Unterschrift, so daß jeder mit der Sache nicht näher Vertraute denken mußte, daß *Copernicus* auch der Autor dieses Vorwortes sei. Und dort wird, gegen die klare, mehrfach explizit von *Copernicus* geäußerte Meinung, das heliozentrische Weltbild als bloße mathematische Hypothese hingestellt, nicht, wie von *Copernicus* selbst beabsichtigt, als Widerspiegelung und mathematische Beschreibung der Wirklichkeit.

H. Wußing

Aus der Graphentheorie

Teil

Dieser Artikel soll euch einen Einblick in eine mathematische Disziplin vermitteln, deren systematische Entwicklung mit einer Arbeit *Eulers* aus dem Jahre 1736 ihren Anfang nahm, die aber gerade in den letzten Jahrzehnten mehr und mehr an Bedeutung gewann – in die Graphentheorie.

Was ist eigentlich ein „Graph"?

Bevor wir die Definition des Begriffes angeben, wollen wir uns einige Beispiele ansehen.

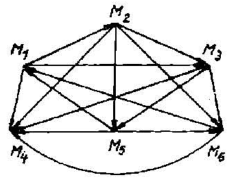
Beispiel 1: An einem Volleyballturnier aller 10. Klassen einer Stadt beteiligten sich sechs Mannschaften M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. Das folgende Ergebnis wurde erzielt:

M_i	gesiegt gegen	verloren gegen
M_1	M_2, M_3, M_4	M_5, M_6
M_2	M_3, M_4, M_5, M_6	M_1
M_3	M_4, M_5, M_6	M_1, M_2
M_4	—	M_1, M_2, M_3, M_5, M_6
M_5	M_1, M_4, M_6	M_2, M_3
M_6	M_1, M_4	M_2, M_3, M_5

Tabelle 1

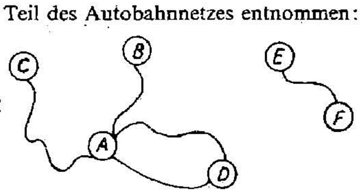
Der Mannschaft M_i ($i=1, \ldots, 6$) ordnen wir einen – ebenfalls mit M_i bezeichneten – Punkt (kleinen Kreis) auf einem Zeichenblatt zu. Haben die Mannschaften M_i und M_j ein Spiel miteinander ausgetragen, so verbinden wir die Punkte M_i und M_j durch eine Linie, die wir mit einem nach M_j gerichteten Pfeil versehen, wenn M_i M_j besiegt hat. Wir erhalten das Schema des Bildes 1, das der Tabelle 1 entspricht:

Bild 1



Beispiel 2: Aus einem Autoatlas haben wir einen Teil des Autobahnnetzes entnommen:

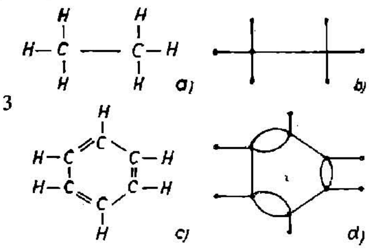
Bild 2



Durch die Buchstaben *A* bis *F* werden hierbei Großstädte bezeichnet.

Beispiel 3: Der Verbindung C_2H_6 (Äthan) entspricht die Strukturformel des Bildes 3a, der wir das Schema des Bildes 3b zuordnen können, wenn wir die Atome durch Punkte und die Bindungen durch Strecken darstellen.

Bild 3



Ebenso können wir beispielsweise der Strukturformel des Benzols (Bild 3c) ein Punkt-Linien-Schema zuordnen (Bild 3d).

Beispiel 4: Die Ecken-Kanten-Beziehungen der regelmäßigen Polyeder können wir auch durch ebene Punkt-Linien-Gebilde veranschaulichen, (Bild 4).

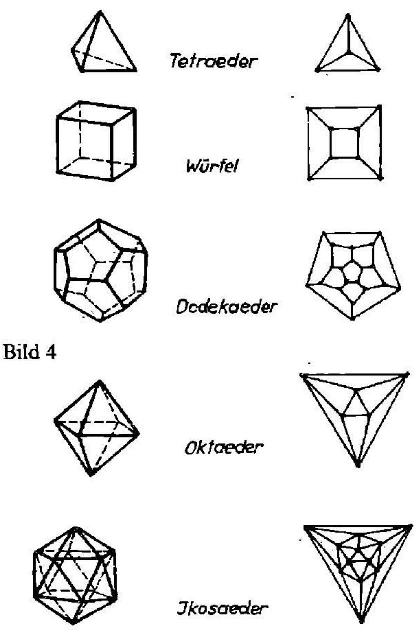


Bild 4

Die in den Beispielen 1 bis 4 angegebenen Punkt-Linien-Schemata stellen Graphen dar. Wir wollen nun den Begriff „Graph" inhaltlich fixieren.

Definition 1: Wir sagen, es liege ein Graph vor, wenn folgendes gegeben ist:

- Eine endliche Menge X; die Elemente von X werden auf dem Blatt durch Punkte (kleine Kreise) dargestellt. Sie können etwa Personen, irgendwelche Gegenstände, Zustände oder andere Dinge bezeichnen.
- Eine Menge U von ungeordneten oder geordneten Paaren (a, b) mit $a \in X$, $b \in X$; ein solches Paar wird auf dem Blatt durch eine die Punkte a und b verbindende Linie dargestellt (die mit einem Richtungspfeil versehen wird, falls es auf die Reihenfolge der Elemente ankommt).

Dabei soll es möglich sein, daß es für zwei Punkte a und b mehr als eine die beiden verbindende Linie gibt. Sind etwa $r (r>1)$ solche Linien vorhanden, so wollen wir sie durch Indizes unterscheiden; wir bezeichnen sie beispielsweise mit $(a, b)_1$, $(a, b)_2$, $\ldots$, $(a, b)_r$.

Die Mengen X und U bestimmen den Graphen $G =_{Def} [X, U]$. G heißt *gerichteter Graph* (Bild 1), falls die Elemente von U geordnete Punktepaare sind. Sind die Elemente von U hingegen nicht geordnete Punktepaare (Bild 2 bis 4), so ist G ein *ungerichteter Graph.*

Die Elemente der Menge X bezeichnen wir als *Knotenpunkte*, die Elemente der Menge U als *Kanten* (bei gerichteten Graphen auch als *Bögen*) des Graphen G.

Wir können sie – wie wir es in Bild 1 bis 4 bereits getan haben – durch Punkte und Linien in der Zeichenebene oder auf anderen Flächen veranschaulichen.

Die Knotenpunkte a und b heißen „Endpunkte" der Kante (a, b) (bzw. Endpunkte einer jeden der Kanten $(a, b)_i$).

Es sei bemerkt, daß Graphenzeichnungen den gleichen Graphen veranschaulichen, wenn sich ihre Knotenpunktmengen so eindeutig aufeinander abbilden lassen, daß je zwei Bildpunkte durch ebenso viele Kanten (bzw. gleichgerichtete Bögen) verbunden sind wie ihre Originalpunkte. In Bild 5 sind einige Darstellungen ein und desselben Graphen gegeben.

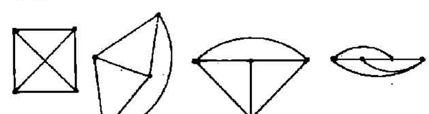


Bild 5

Wir wollen noch zwei wichtige Begriffe definieren und einige allgemeingültige Bemerkungen machen. Dann werden wir bereits in der Lage sein, einen einfachen – aber sehr wichtigen – Satz (Satz 1) zu formulieren und zu beweisen.

Definition 2: Zwei Knotenpunkte heißen *adjazent*, wenn sie durch eine Kante verbunden sind. Ein Knotenpunkt *inzidiert* mit einer Kante, wenn er Endpunkt dieser Kante ist.

Definition 3: Inzidiert ein Knotenpunkt in G mit genau r Kanten, so heißt r die *Valenz* des Knotenpunktes in G.

In Bild 2 beispielsweise hat Knotenpunkt A die Valenz 4, D hat die Valenz 2, während die übrigen Knotenpunkte die Valenz 1 haben.

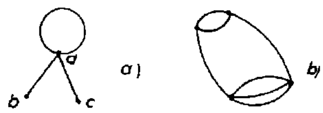
Unter einem Graphen werden wir im folgenden einen ungerichteten Graphen verstehen; verwenden wir einen gerichteten Graphen, werden wir das ausdrücklich betonen. —

Die Paare $(a, a) \in U$ wollen wir ausschließen, d. h. *Schlingen* (Bild 6a) sind nicht zugelassen. –

Zuweilen werden wir Graphen verwenden, in denen es Knotenpunkte gibt, die mit keiner Kante inzidieren. Solche Knotenpunkte heißen *isoliert*. Die von uns betrachteten Graphen sollen stets nur endlich viele Knotenpunkte und endlich viele Kanten haben, also *endliche Graphen* sein.

Definition 4: Enthält der Graph G keine Mehrfachkanten (Bild 6b), d. h. sind je zwei Knotenpunkte von G durch höchstens eine Kante verbunden, so heißt G *schlicht*.

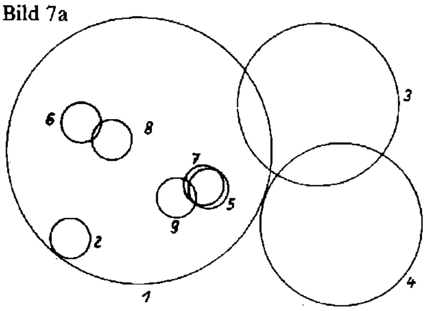
Bild 6



Ehe wir uns dem Satz 1 zuwenden, wollen wir die Begriffe, die wir bisher eingeführt haben, noch etwas einüben, – und das kann man schließlich am besten tun, indem man einige Aufgaben löst.

▲1▲ In einer Ebene seien n Kreislinien gegeben, die mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., n numeriert seien. Wir wollen den Graphen $G = [X, U]$ wie folgt definieren:
Es ist $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ und es ist $(i, j) \in U$ genau dann, wenn die mit den Zahlen i und j bezeichneten Kreislinien wenigstens einen Punkt gemeinsam haben. In Bild 7a sind neun numerierte Kreislinien veranschaulicht; man bilde den entsprechenden Graphen G.

Bild 7a



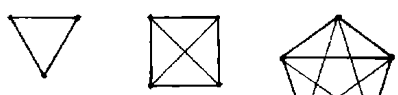


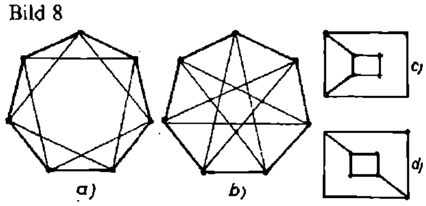
Bild 7b

$n=3$ $n=4$ $n=5$

▲2▲ In dieser Aufgabe – wie auch in zwei der später folgenden spielt der Graph G eine Rolle, der n Knotenpunkte besitzt von denen je zwei durch genau eine Kante verbunden sind. Dieser Graph G wird „vollständiger n-Graph" genannt. (Bild 7b zeigt den vollständigen n-Graphen für $n = 3, 4, 5$.) Wie viele Kanten hat der vollständige n-Graph?

▲3▲ a) Stellen die Bilder 8a und 8b den gleichen Graphen dar?

Bild 8

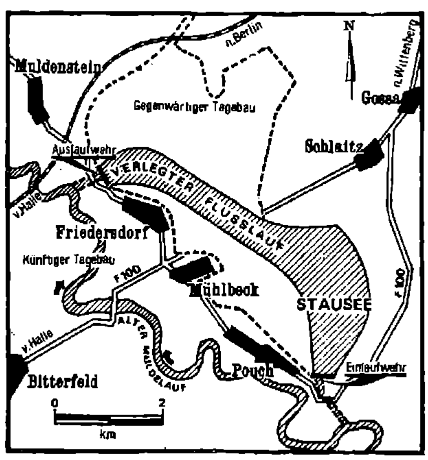


b) Stellen die Bilder 8c und 8d den gleichen Graphen dar?

▲4▲ Was könnt ihr über die Valenzen der Knotenpunkte eines jeden Graphen des Bildes 4 aussagen? *W. Voß*

Flußwanderung bei Muldenstein

Nordöstlich von Bitterfeld schlängelt sich die Mulde durch ein mächtiges Braunkohlefeld. Viele Überlegungen wurden angestellt, um an diese Lagerstätte mit 90 Millionen Tonnen Vorräten heranzukommen.
Eine Variante sah vor, den 50 Meter breiten Fluß in einer Riesenschleife um einen zum größten Teil ausgekohlten Tagebau herumzulegen. Riesige Erdmassen hätten bewegt werden müssen. Hunderte Hektar Ackerland wären zerstört worden und die Bauzeit wäre unverantwortlich lang gewesen.



Fachleute legten schließlich die sogenannte Restlochvariante vor, die alle herkömmlichen Methoden über den Haufen warf:
11 Kilometer Mulde erhalten ein neues Bett, das fast ausschließlich durch das weite Gelände des jetzigen Tagebaues Muldenstein führt. Das Restloch des Tagebaues wird künftig als Stausee dienen und voraussichtlich 1975 gefüllt. Mit vier Quadratkilometer Fläche und rund 100 Millionen Kubikmeter Wasserinhalt wird es dann größtes Gewässer im Raum Bitterfeld/Gräfenhainichen und z. B. der Rappbodetalsperre ebenbürtig sein. Nach gründlicher Prüfung aller Faktoren entschlossen sich die Projektanten für den Einsatz sowjetischer Schreitbagger, bei denen z. B. ein Kubikmeter transportierte Erde 41 Pfennige kostet, mit herkömmlichen Geräten dagegen 1,40 Mark. Insgesamt sind bei der Muldenverlegung 16,5 Millionen Kubikmeter Erdreich zu bewegen.

(Aus ND vom 25. Juni 1971)

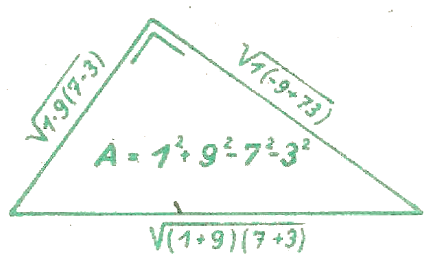
▲1001a▲ Berechne unter der Annahme, daß der im Restloch des Tagebaues Muldenstein entstehende Stausee überall gleich tief ist, seine Tiefe!

▲1001b▲ Berechne unter der Annahme, daß alle beim Projekt „Muldenverlegung" zu bewegende Erde mittels sowjetischer Schreitbagger transportiert wird, die Kosten für die gesamten Baggerarbeiten!

▲1001c▲ Um wieviel steigt durch diese Baggerarbeiten der Preis je Tonne Kohle? Dabei soll angenommen werden, daß die durch Schätzung ermittelten Vorräte restlos abgebaut werden können. *W. Träger*

Aus der „Entschließung des VIII. Parteitages der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands zum Bericht des Zentralkomitees": Die Hauptaufgabe der Industrie besteht darin, die materiell-technische Basis unserer Volkswirtschaft weiterzuentwickeln und zu vervollkommnen. Es ist unerläßlich, das technische Niveau der Produktion durch Nutzung neuer wissenschaftlich-technischer Erkenntnisse weiter zu erhöhen, die Kosten systematisch zu senken und die Qualität der Erzeugnisse zu verbessern.

Redaktion alpha wünscht allen Lesern ein gesundes, frohes und erfolgreiches



Darstellende Geometrie und Architekturausbildung

Teil 2

In unserem Beispiel war die Bildebene π senkrecht zur Standebene σ. Jedoch tritt auch der Fall oft auf, daß die Bildebene zur Standebene geneigt ist [$\sphericalangle (\pi, \sigma) \neq 90°$]. Dann haben auch die Bilder der Höhen des Quaders einen gemeinsamen Fluchtpunkt.
Zur Belebung perspektiver Bilder und zur Erhöhung ihrer Raumwirkung werden oft Schatten eingezeichnet. Sowohl Parallelbeleuchtung als auch Zentralbeleuchtung werden dabei verwendet. Daneben sind auch die Spiegelungen ein Mittel der Gestaltung. Bei nahen kleineren räumlichen Objekten oder auch bei vom Beobachter weit entfernten größeren Objekten bedient sich der Architekt anstelle der Zentralperspektive auch der Axonometrie. Der Aufwand zur Herstellung eines axonometrischen Bildes ist wesentlich geringer als beim zentralperspektiven Bild. Außerdem erscheint das axonometrische Bild bei unseren Voraussetzungen im Vergleich zum perspektiven nicht so stark verzerrt. Ein perspektives Bild ist vom Augpunkt O einäugig zu betrachten. Da die geringste deutliche Sehweite 25 cm beträgt, sollte die Augdistanz mindestens ebenso groß sein. Auch wenn der Betrachter sein Auge in einer größeren Umgebung des Augpunktes justiert (einstellt), erhält er noch einen günstigen Bildeindruck. Beim Betrachten axonometrischer Bilder ist das Auge jedoch möglichst weit vom Bild zu wählen, um das Auge der Parallelprojektion anzupassen, durch die das Bild erzeugt wird.
In der Axonometrie wird dem Objekt ein räumliches kartesisches Koordinatensystem zugeordnet, und mit diesem gemeinsam wird es durch Parallelprojektion auf eine Ebene abgebildet. Fallen die Projektionsstrahlen senkrecht bzw. schief auf die Bildebene ein, so spricht man von orthogonaler bzw. schiefer Axonometrie. Der *Satz von Pohlke*, der die Konstruktion in der schiefen Axonometrie sichert, besagt: „Drei beliebige von einem Punkt unter beliebigen Winkeln ausgehende Strecken können stets als das durch Parallelprojektion erzeugte Schattenbild von drei aufeinander senkrechten gleich langen Strecken im Raum aufgefaßt werden." (*Salkowski*: Darstellende Geometrie, Leipzig 1963, Verlagsgesellschaft *Geest & Portig*). Nach der Wahl eines ebenen Dreibeins kann man sich auf den 3 Achsenbildern je eine Längeneinheit vorgeben. Danach fügt man das Bild des Objektes ein, wie an einem Beispiel gezeigt werden soll (Entwurf nach *Gropius*) (Bild 4).

P

PERSPEKTIVE

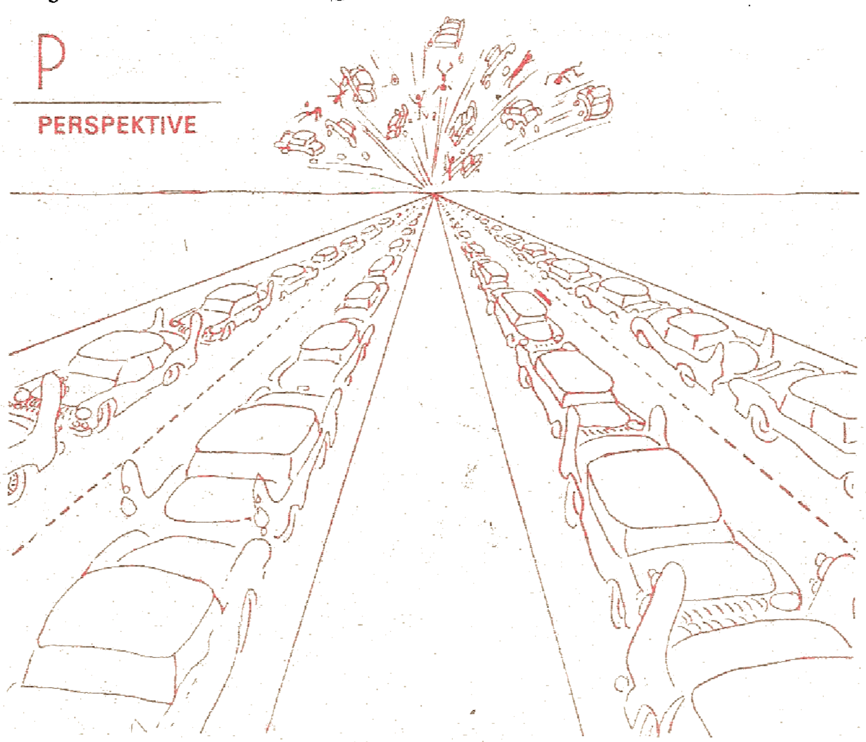
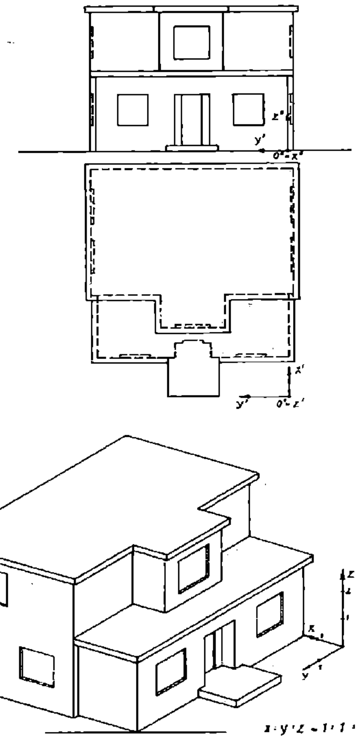
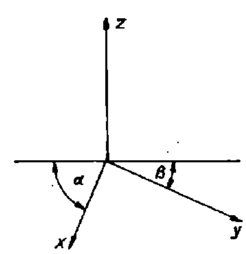


Bild 4



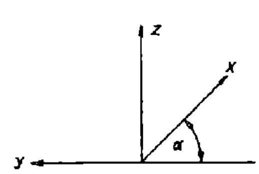
Das Verhältnis $x:y:z = 1:1:1$ bedeutet, auf allen drei Achsen sind gleiche Längeneinheiten gewählt worden. In der Praxis werden oft die beiden schiefen Axonometrien, Militärperspektive und Kavalierperspektive, verwendet. Für sie gilt:

Bild 5



Militärperspektive (Bild 5)	Kavalierperspektive (Bild 6)
$\alpha+\beta=90°$	$\alpha=45°$
$x:y:z=1:1:1$	$x:y:z=\frac{1}{2}:1:1$

Bild 6



Da der Betrachter meist eine Zeichnung senkrecht zur Blickrichtung hält, erscheinen orthogonalaxonometrische Bilder weniger verzerrt als schiefaxonometrische. Sehr gebräuchliche orthogonale Axonometrien, die Dimetrie und Isometrie, sind durch folgende Angaben bestimmt:

Bild 9

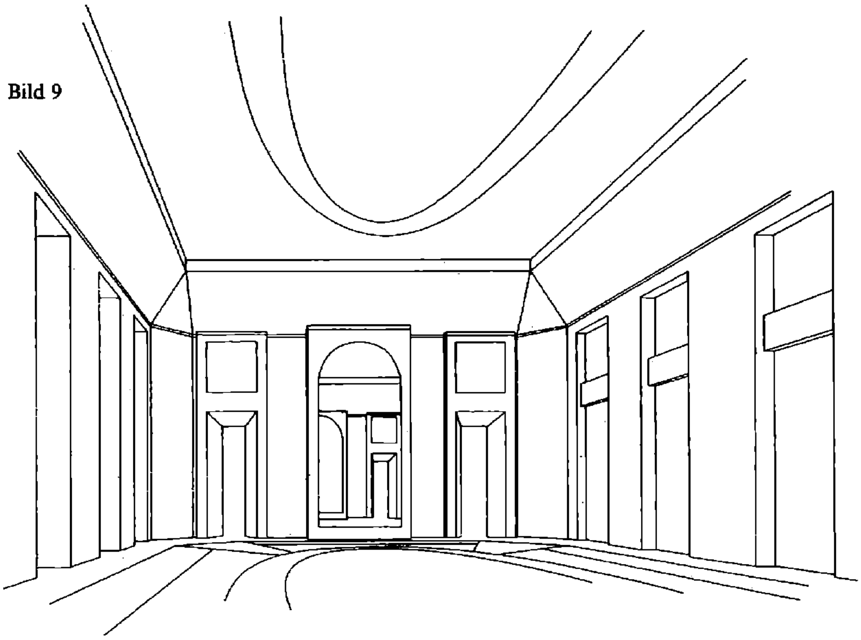
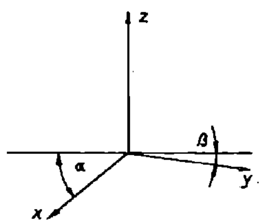


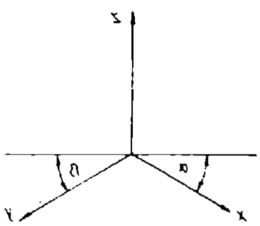
Bild 7



Dimetrie (Bild 7)
$\alpha=42°$, $\beta=7°$
$x:y:z=\frac{1}{2}:1:1$

Isometrie (Bild 8)
$\alpha=30°$, $\beta=30°$
$x:y:z=1:1:1$

Bild 8

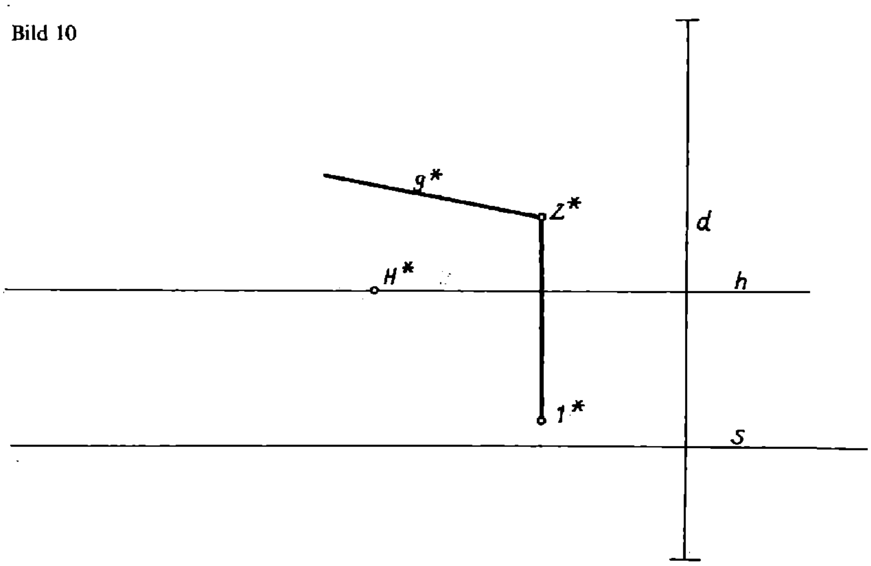


Schattenkonstruktionen werden auch in der Axonometrie ausgeführt. Neben den oben genannten Aufgaben sind die Grundaufgaben des Zweitafelverfahrens (Grund- und Aufrißverfahren) und der kotierten Projektion für den Architekten sehr wichtig. Sie erschließen ihm Probleme, wie z. B. das überschlägige Bestimmen von Baumassen beim Anlegen von Straßen, die Überdachung von Gebäuden, Durchdringung von Flächen 2. Ordnung (Schalen). Die darstellende Geometrie ist also für den Architekten ein unentbehrliches Hilfsmittel für vielfältige Anwendungen.
Als Beispiel liegt eine Innenraumperspektive eines Festsaales mit Spiegelung vor (Bild 9).

▲999▲ Zur weiteren Anregung und zur Vertiefung des oben Dargelegten soll folgende Aufgabe dienen:
Es seien Horizontlinie h, Hauptpunkt H^*, Augdistanz d und Standlinie s vorgegeben. Es ist das zentralperspektive Bild eines auf der Standebene σ liegenden Würfels zu konstruieren, wenn das Bild einer vertikalen Kante und die Richtung g einer horizontalen Kante gegeben sind (Bild 10).

E. Kühn

Bild 10



Literatur zum Fachgebiet Architektur

Nikolai Brunow
Entwicklungsetappen der Architektur
12 cm × 19 cm, ca. 360 Seiten mit 120 Abb., Broschur mit Kartonumschlag, 4,80 M
VEB Verlag die Kunst, Dresden

Georg Piltz
Streifzug durch die deutsche Baukunst
147 Seiten, Pappband mit Folie, 5,20 M
Der Kinderbuchverlag, Berlin

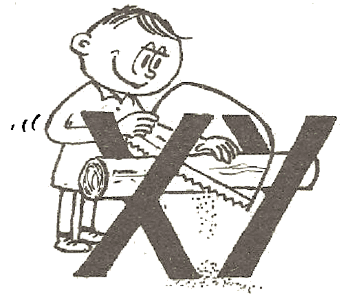
Danielowski/Pretzsch
Architekturperspektive
17 cm × 24,5 cm, 226 Seiten, zahlreiche Abb., Halbleinen, M
VEB Verlag Bauwesen, Berlin

Georg Piltz
Bauwerke — Baustile
Streifzüge durch die deutsche Architektur
295 Seiten, zahlreiche Fotos und Gaphiken, 13 cm × 20 cm, Halbleinen, 12,80 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Herbert Kürth/Aribert Kutschmar
Baustilfibel
Bauwerke und Baustile von der Antike bis zur Gegenwart
17,0 cm × 23,5 cm, 240 Seiten, 360 Zeichnungen und 16 Kunstdrucktafeln, Halbleinen, 20,00 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Karl Czok
Die Stadt
Ihre Stellung in der deutschen Geschichte
17,0 cm × 23,5 cm, 181 Seiten, zahlreiche Abb., 15,00 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Wer löst mit?
alpha -Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 5. März 1973

5▲963 Birgit kauft ein und erhält von ihrer Mutter dafür 10 Mark. Das Gemüse kostet 2,36 M. Für Brot und Brötchen zusammen zahlt sie 52 Pf weniger als für das Gemüse. Fleisch und Wurstwaren hingegen waren doppelt so teuer wie Brot und Brötchen. Welchen Geldbetrag bringt Birgit nach dem Einkauf wieder mit zurück?

5▲964 Ein Park mit einer Fläche von sechs Hektar wird durch ein angrenzendes rechteckiges Grundstück von 350 m Länge und 150 m Breite erweitert. Wieviel Hektar beträgt nach dieser Erweiterung die Fläche des Parkes?

Karl-Heinz Gentzsch, 7404 Meuselwitz
Mathematikfachlehrer

W 5 ■ 965 In Berlin ist der längste Tag eines Jahres ungefähr zehn Stunden länger als die kürzeste Nacht. Wieviel Stunden dauert dieser längste Tag an? *Sch.*

W 5 ■ 966 Ein Mathematiklehrer hatte während einer Urlaubsreise in die Sowjetunion Fotoaufnahmen in Minsk, Leningrad und Moskau gemacht und daraus 112 Dias hergestellt. Über die Stadt Minsk waren es 12 Dias weniger, über Leningrad 20 Dias weniger als über die Hauptstadt Moskau. Ermittle die Anzahl der Dias von Minsk, Leningrad und Moskau.

Karl-Heinz Gentzsch, 7404 Meuselwitz
Mathematikfachlehrer

W 5 * 967 Ute besitzt doppelt soviel Buntstifte wie Regine, Sabine hingegen 13 weniger als Regine. Wieviel Buntstifte besitzt jedes der drei Mädchen, wenn die Anzahl der Buntstifte, die sie zusammen besitzen, gleich einer Primzahl ist, die kleiner als 50 ist und deren Quersumme 11 beträgt?

Anke Mentkowski, Eichwalde, Kl. 7

W 5 * 968 Ein Fußballspieler wurde nach dem Ausgang eines Fußballspieles gefragt. Scherzhaft antwortete er: „Meine Mannschaft hat gewonnen. Wenn man die neunfache Anzahl der von meiner Mannschaft geschossenen Tore durch die dreifache Anzahl der vom Gegner erzielten Tore dividiert, so erhält man 9 als Ergebnis. Insgesamt wurden weniger als sechs Tore geschossen." Wieviel Tore schoß jede der beiden Mannschaften, wenn wenigstens ein Tor gefallen war?

Roland Zabel, 4114 Wettin, Kl. 7

6▲969 Ein Dreieck ABC habe die Eigenschaft, daß sich die Mittelsenkrechten der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt D der Seite $\overline{AB}$ schneiden. Es ist die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ zu bestimmen.

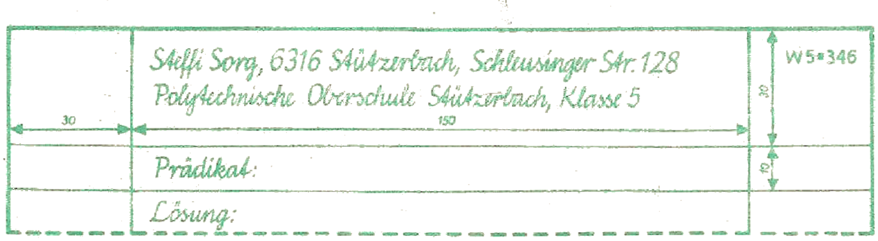
Petra Peters, Harzgerode, Kl. 12

6▲970 Gegeben sei ein Rhombus $ABCD$ mit der Seite $\overline{AB}=a$ und dem Innenwinkel $\sphericalangle DAB=\alpha=60°$. Untersuche und begründe, ob die Rhombusseite $\overline{AB}$ kleiner, gleich oder größer als die Diagonale $\overline{BD}$ ist. Beweise ferner, daß jede der beiden Diagonalen eines beliebigen Rhombus $ABCD$ stets kleiner ist als $2\cdot\overline{AB}=2a$.

Hans-Ulrich Auster, 1824 Niemegk, Kl. 7

W 6 ■ 971 In der gleichen Ebene seien zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q sowie eine beliebige durch P gehende Gerade g gegeben. Es ist nachzuweisen, daß der Abstand d des Punktes Q von der Geraden g genau dann am größten ist, wenn die Gerade g senkrecht auf der Geraden PQ steht. *T.*

W 6 ■ 972 Es ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 96 und 27 231 381 324 zu bestimmen. *T.*



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W * 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.

Der Jahreswettbewerb 1972/73 läuft von Heft 5/72 bis Heft 2/73. Zwischen dem 1. und 10. September 1973 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/73 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1972/73 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück).

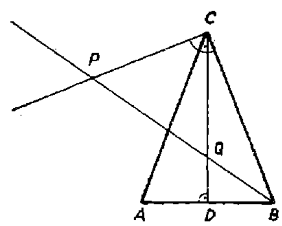
Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

W 6 * 973 In der fünfstelligen natürlichen Zahl 48*7* sind die Sternchen jeweils durch eine der Grundziffern 0, 1, 2, ..., 9 so zu ersetzen, daß eine durch 3 teilbare natürliche Zahl entsteht. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

T.

W 6 * 974 Die Figur stellt ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ dar, dessen Winkel an der Spitze $\sphericalangle ACB$ kleiner als 90° ist. Von C aus wurde das Lot auf $\overline{AB}$ gefällt, sein Fußpunkt sei mit D bezeichnet. Durch C wurde ferner die Senkrechte zur Geraden BC gezogen. Die Halbierungslinie des Winkels $\sphericalangle ABC$ schneidet diese Senkrechte im Punkt P und die Gerade CD in Q. Beweise, daß das Dreieck PQC ebenfalls gleichschenklig ist! *Sch.*



7 ▲ 975 Gegeben seien ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M sowie ein äußerer Punkt P und ein innerer Punkt Q dieses Kreises. Es sei ferner A der Randpunkt des Kreises k, der auf der Geraden PM zwischen P und M liegt. Es ist zu beweisen, daß stets $\overline{PA} < \overline{PQ}$ gilt. *T.*

7 ▲ 976 Die 31 Schüler einer 5. Klasse erzielten in der letzten Mathematikarbeit einen Notendurchschnitt von 2,0. Kein Schüler erhielt die Note 5. Genau acht Schülern wurde die Note 3 erteilt. Mit der Note 2 waren doppelt so viele Arbeiten bewertet worden wie mit der Note 4. Wieviel Schüler erhielten die Note 1, 2, 3 oder 4?

W 7 ■ 977 Es sei H der Schnittpunkt der drei Höhen eines Dreiecks ABC. Es ist das Dreieck $\triangle ABC$ aus $\overline{AB} = c = 11$ cm, $\overline{AH} = 6$ cm und $\overline{BH} = 7$ cm zu konstruieren. Die Konstruktion ist zu begründen! *Sch.*

W 7 ■ 978 Bernd stellte eine Kochsalzlösung von 100 g Masse her, die zu 99 % (der Masse) aus Wasser und zu 1 % (der Masse) aus Kochsalz besteht. Nach einigen Tagen stellte Bernd fest, daß die Kochsalzlösung, die er in einem offenen Gefäß aufbewahrte, nur noch zu 98 % (der Masse) aus Wasser bestand. Wieviel Gramm Masse besaß nunmehr die Kochsalzlösung? *Michael Reissig, 402 Halle, Kl. 8*

W 7 * 979 Für eine mathematische Arbeitsgemeinschaft wurden insgesamt 100 Arbeitsmittel zum Gesamtpreis von genau 100,— M angeschafft, und zwar Rechenstäbe zum Einzelpreis von 10,— M, Zirkel zum Einzelpreis von 3,— M und Zeichenhefte zum Einzelpreis von 0,50 M. Wieviel Rechenstäbe, Zirkel und Zeichenhefte wurden eingekauft?

Sylvia Persch, 1071 Berlin, Kl. 7

W 7 * 980 Es ist ein Dreieck ABC aus den Stücken $\sphericalangle CAB = \alpha = 70°$, $\overline{CE} = h_c = 4$ cm und $\overline{BC} + \overline{AB} - \overline{AC} = a + c - b = 5$ cm mit $b < c$ zu konstruieren. Die Konstruktion ist zu begründen.

Nach E. Hameister, Geometrische Konstruktionen und Beweise
Mitgeteilt von Christine Kohlmann, 8701 Lawalde, Kl. 12

8 ▲ 981 Es sind alle natürlichen Zahlen zu ermitteln, deren Fünffaches um 1 größer als das Quadrat ihres Nachfolgers ist.

Norbert Siedow, Neuruppin, Alexander-Puschkin-Schule, Kl. 9

8 ▲ 982 Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, von dem die Winkel $\sphericalangle BCA = \gamma = 90°$, $\sphericalangle CAB = \alpha = 30°$ und der Radius des Umkreises $r = 3$ cm gegeben sind. Ferner ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks zu berechnen.

Ulrike Weise, Karl-Marx-Stadt, EOS „Friedrich Engels", Kl. 12

W 8 ■ 983 Bei einem Wettlauf starten Ellen, Gabriele und Sabine. Welches von diesen drei Mädchen läuft am schnellsten und welches am langsamsten, wenn die folgenden drei Aussagen wahr sind?

1. Sabine läuft schneller als Gabriele.
2. Wenn Ellen nicht schneller als Sabine läuft, so läuft Gabriele schneller als Ellen.
3. Wenn Sabine schneller als Ellen läuft, so läuft Gabriele schneller als Sabine.

Marlies Faupel, POS III Heiligenstadt, Kl. 8

W 8 ■ 984 In einem Kreis der DDR waren bei der Getreideernte 1972 insgesamt 14000 ha abzuernten. Zur Verfügung standen 35 moderne Mähdrescher des Typs E 512 und 18 ältere Mähdrescher des Typs E 175. Die Tagesleistung eines Mädreschers E 512 beträgt 15 ha, die eines Mähdreschers E 175 beträgt 4 ha (jeweils Arbeit in zwei Schichten vorausgesetzt). Da die Erntekosten mit den modernen Mähdreschern E 512 erheblich geringer sind, sollen diese voll eingesetzt werden.

Wieviel Mähdrescher des Typs E 175 müssen zusätzlich eingesetzt werden, damit die gesamte Ernte

a) in 24 Einsatztagen,
b) in 25 Einsatztagen,
c) in 26 Einsatztagen

eingebracht werden kann?

Ferner soll die Anzahl y der einzusetzenden Mähdrescher E 175 als Funktion der Anzahl t der Einsatztage dargestellt werden. *L.*

W 8 * 985 Es sind alle natürlichen Zahlen n zu ermitteln, für die die Zahl

$$z = n! - 1$$

gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist. (Es gilt $0! = 1$, $1! = 1$ und $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ für $n \geq 2$.)

Olaf Böhme, stud. math., Dresden, Träger eines zweiten Preises bei der IMO 1972

W 8 * 986 Man beweise, daß in einem Dreieck, das nicht gleichschenklig ist, weder die (von einem Eckpunkt ausgehende) Höhe und die (von diesem Eckpunkt ausgehende) Seitenhalbierende noch die Höhe und die Winkelhalbierende noch die Seitenhalbierende und die Winkelhalbierende zusammenfallen können.

Hans-Gert Gräbe, EOS Erfurt, Kl. 11

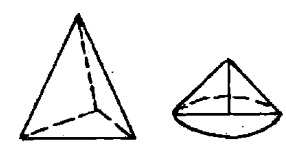
9 ▲ 987 Es sei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Man beweise, daß dann die natürliche Zahl

$$z = n^6 + 8n^2 - 1$$

niemals eine Primzahl ist.

Erich Hoy, Wittenberg-Piesteritz, EOS „Lucas Cranach", Kl. 10

9 ▲ 988 Welcher geometrischer Körper hat das größere Volumen: ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge $2a$ oder ein gerader Kreiskegel mit dem Grundkreisradius a und der Höhe a? (vgl. die Abb.)



Olaf Böhme, stud. math., Dresden, Träger eines zweiten Preises bei der IMO 1972

W 9 ■ 989 Man ermittle die Lösungsmenge (im Bereich der reellen Zahlen) der Ungleichung

$$\frac{9}{x-2} \leq 3.$$

Dr. Gerhard Hesse, Dresden

W 9 ■ 990 Bereits mit Hilfe der Automatischen Station Venus 7 konnten im Jahre 1970 die Temperaturen in der Atmosphäre der Venus gemessen werden. Man erhielt eine Temperatur von 25 °C in 62 km Höhe und von 475 °C in 0 km Höhe über der Venusoberfläche.

a) Es ist die Maßzahl y der Temperatur (in °C) als Funktion der Maßzahl x der Höhe (in km) über der Venusoberfläche darzustellen, wobei ein linearer Verlauf angenommen werden soll.

b) Es sind die mit Hilfe dieser Funktion ermittelten Werte der Temperatur für die Höhen $x_1 = 25$ km und $x_2 = 40$ km mit den von der Venussonde gemessenen Werten der Temperatur (320 °C und 200 °C) zu vergleichen, und es ist jeweils der prozentuale Fehler zu berechnen.

c) Es ist der Graph der Funktion zu zeichnen; in die Zeichnung sind auch die gemessenen Temperaturwerte einzutragen.

Anleitung: Man setze $y = mx + n$ und berechne m und n, indem man in diese Gleichung einerseits $x = 0$, $y = 475$, andererseits $x = 62$, $y = 25$ einsetzt. *L.*

W 9 * 991 Es seien a, b, c drei reelle Zahlen, für die

$$a+b+c=0 \qquad (1)$$

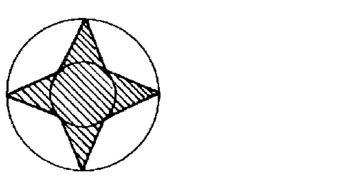
und $$a^2+b^2+c^2=1 \text{ gilt.} \qquad (2)$$

Man berechne

$$z=a^4+b^4+c^4.$$

Frank Müller, Finsterwalde

W 9 * 992 Es sei $ABCDEFGH$ ein sternförmiges Achteck, bei dem die Eckpunkte A, C, E, G auf einem Kreis um den Punkt M mit dem Radius R und die Eckpunkte B, D, F, H auf einem Kreis um den Punkt M mit dem Radius r liegen, wobei $R \geqq r$ gilt (vgl. die Abb.). Ferner sei dieses Achteck symmetrisch mit den Symmetrieachsen AE, CG, BF und DH.



a) Es ist eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts dieses Stern-Achtecks aus den Radien R und r anzugeben.
b) Es ist eine Formel für die Berechnung der Seitenlänge dieses Stern-Achtecks aus den Radien R und r anzugeben.
c) Welche Formeln erhält man, wenn man in den Formeln zu a) und b) $R=r$ setzt?

10/12 ▲ 993 Es sind alle geordneten Paare (x, y) natürlicher Zahlen zu ermitteln, für die die Gleichung

$$2^x=y!+304$$

erfüllt ist.
Bemerkung: Es gilt $0!=1$, $1!=1$ und $y!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot y$ für $y\geqq 2$.

Hans-Dietrich Gronau, stud. math. Neustrelitz

10/12 ▲ 994 Es seien n und a mit $a\geqq 2$ positive ganze Zahlen. Man beweise, daß dann stets die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\sqrt[n]{a+2}-\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{a-1}.$$

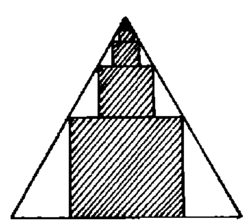
Olaf Böhme, stud. math., Dresden

W 10/12 ■ 995 Die Erdölvorkommen in dem arabischen Staat Kuweit am Persischen Golf betragen nach offiziellen Schätzungen etwa 10 Mrd. t. Im Jahre 1969 wurden in diesem Land 144,5 Mill. t Erdöl gefördert. Wieviel Jahre werden die Vorräte (von 1970 ab gerechnet) noch reichen, wenn künftig
a) die jährliche Förderung ebenso hoch wie im Jahre 1969 sein wird;
b) die Förderung sich jährlich jeweils um 7 % gegenüber dem Stand des Vorjahres erhöhen wird, wie das in den Jahren 1970 und 1971 bereits der Fall war?
Dabei soll die Anzahl der Jahre mit einer Dezimalstelle nach dem Komma angegeben werden.
Anleitung zur Lösung: Bezeichnet man im Falle b) die Erdölförderung des Jahres 1969 mit a, so beträgt sie 1 Jahr danach aq, 2 Jahre danach aq^2, allgemein n Jahre danach aq^n, wobei $q=1{,}07$ ist. Zur Lösung kann dann die Formel

$$aq+aq^2+\ldots+aq^n=aq\frac{q^n-1}{q-1}$$

benutzt werden. *L.*

W 10/12 ■ 996 Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a sei eine Folge von Rechtecken wie in der beigefügten Abbildung einbeschrieben. Dabei sei eine Seite des ersten Rechtecks halb so lang wie die Dreieckseite, auf der sie liegt, eine Seite des zweiten Rechtecks halb so lang wie die Seite des ersten Rechtecks, auf der sie liegt, eine Seite des dritten Rechtecks halb so lang wie die Seite des zweiten Rechtecks, auf der sie liegt, usw.



Wie groß ist die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke dieser Folge, also der Flächeninhalt der in der Abbildung schraffiert gezeichneten treppenförmigen Figur?

Wolfgang Enghardt, Lunzenau, ehem. EOS Rochlitz

W 10/12 * 997 Es sei n eine natürliche Zahl mit $n\geqq 2$, und es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Zahlen, die gleich 1 oder -1 sind. Man beweise, daß dann das Gleichungssystem

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a_1+a_2+\ldots+a_n, \qquad (1)$$
$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=a_1a_2\ldots a_n \qquad (2)$$

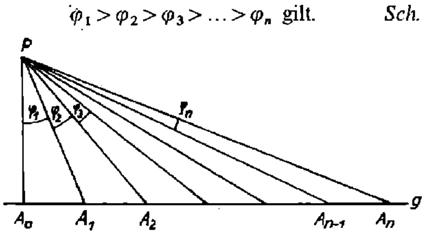
keine ganzzahlige Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hat, wenn $a_1=a_2=\ldots=a_n$ gilt oder wenn n eine gerade natürliche Zahl ist.
Man beweise ferner, daß in allen anderen Fällen dieses Gleichungssystem mindestens eine ganzzahlige Lösung hat, und gebe eine solche Lösung an.

Ralph Lehmann, EOS Diesterweg, Kl. 10, Strausberg

W 10/12 * 998 Es sei g eine Gerade, auf der die Punkte $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n\geqq 2)$ mit $\overline{A_0A_1}=\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\ldots=\overline{A_{n-1}A_n}$ liegen (vgl. die Abb.). Ferner sei P ein Punkt, der auf der in A_0 auf g errichteten Senkrechten liegt und nicht mit A_0 zusammenfällt. Die Größen der Winkel, die die Strahlen PA_0, PA_1, PA_2, ..., PA_n miteinander bilden, seien wie folgt bezeichnet:
$\varphi_1=\sphericalangle A_0PA_1, \varphi_2=\sphericalangle A_1PA_2, \varphi_3=\sphericalangle A_2PA_3, \ldots, \varphi_n=\sphericalangle A_{n-1}PA_n$. Man beweise, daß dann stets

$$\varphi_1>\varphi_2>\varphi_3>\ldots>\varphi_n \text{ gilt.}$$

Sch.



alpha-Wettbewerb

Abzeichen in Gold für fünfjährige Teilnahme

Ralph Lehmann, 1273 Petershagen; **Bernd Mathiszik**, 50 Erfurt; **Sabine Anders**, 75 Cottbus; **Kerstin Bachmann**, 402 Halle; **Annegret Kirsten**, 422 Leuna; **Wolfgang Richter**, 83 Pirna; **Ute Winkler**, 153 Teltow; **Jörg Hutschenreiter**, 8020 Dresden; **Wolfgang Riedel**, 90 Karl-Marx-Stadt; **Herwig Gratias**, 523 Sömmerda; **Bettina Zabel**, 57 Mühlhausen; **Jürgen Zabel**, 57 Mühlhausen; **Harald Herrmann**, 9301 Hammerunterwiesenthal; **Lutz Püffeld**, 1422 Hennigsdorf; **Johannes Blümlein**, 6112 Heldburg; **Christian Endter**, 6088 Steinbach-Hallenberg; **Uwe Lewandovski**, 705 Leipzig; **Eckhard Schadow**, 14 Oranienburg; Uta Zebisch, 6081 Fambach; Angela Rohrbeck, 2302 Franzburg; Ole-André Strzalla, 22 Greifswald; Frank Kretzschmar, 7043 Leipzig; Karin Weyh, 6081 Fambach; Christoph Scheurer, 9611 Glauchau-Gesau; Karin Fischer, 8036 Dresden; Roswitha Leyh, 59 Eisenach; Beate Recknagel, 608 Schmalkalden; Heike Jurack, 8502 Burkau; Henrik Frank, 22 Greifswald; Monika Seiler, 53 Weimar; Eberhard Manske, 608 Schmalkalden; Joh. Chr. Albrecht, 1281 Rüdnitz; Eberhard Eff, 6088 Steinbach-Hallenberg; Rainer Nothnagel, 6088 Steinbach-Hallenberg; Volker Boos, 4601 Dabrun; Bernd Heymann, 7027 Leipzig; Rainer Schwierz, 8502 Burkau; Dagmar Rißmann, 8021 Dresden; Carmen Schneider, 6081 Fambach; Renate Zimmermann, 8036 Dresden; Sabine Dittrich, 9402 Bernsbach; Matthias Albrecht, 1281 Rüdnitz; Gudrun Manske, 608 Schmalkalden; Rita Koch, 6089 Trusetal; Ute Heymel, 6081 Fambach; Andreas Gehb, 6081 Fambach; Claus-Detlef Bauermeister, 8019 Dresden; Andreas Eidner, 9271 Falken; Rainer Wilde, 1953 Fehrbellin; Hans-Jochen Rodner, 3014 Magdeburg; Karin Krüger, 453 Roßlau; Gernot Spievok, 22 Greifswald; Matthias Löffler, 5603 Dingelstädt. Rainer Zerck, 53 Wismar; Peter Linhardt, 7305 Waldheim; Ehrenfried Zschech, 86 Bautzen.

Abzeichen in Gold für vierjährige Teilnahme

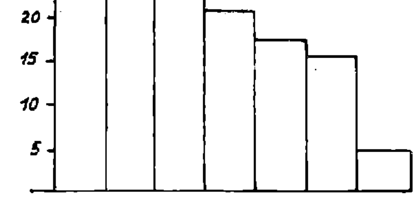
Kirsten Helbig, 1321 Schöneberg; **Andreas Schlosser**, 95 Zwickau; **Ute Wittat**, 9507 Ebersbrunn; **K.-H. Hering**, 50 Erfurt; **Ines Greiner**, 7039 Leipzig; **Ute Greiner**, 725 Wurzen; **Astrid Rösel**, 205 Teterow; **Detlef Poppe**, 57 Mühlhausen; **Guido Blosfeld**, 402 Halle; **Sabine Mamerow**, 202 Altentreptow; **Regina Hildenbrandt**, 6316 Stützerbach; **Hans-Peter Tams**, 259 Ribnitz-Damgarten; **Wolfgang Kögler**, 9529 Wiesenburg; **Sybille**

Rohrbeck, 2302 Franzburg; **Bärbel Anders,** 75 Cottbus; Gerlinde Koch, 6089 Trusetal; Harald Lehmann, 7961 Görlsdorf; Bärbel Rahnefeld, 901 Karl-Marx-Stadt; Beate Reiher, 99 Plauen; Marina Schulz, 89 Görlitz; Norbert Littig, 8501 Lichtenberg; Bernd Hanke, 8708 Großschweidnitz; Michael Schnelle, 754 Calau; Claus Scheffler, 88 Zittau; Irene Hanske, 8507 Putzkau; Thomas Rudolph, 92 Freiberg; Lothar Jennig, 2031 Gülzowshof; **Harald Anders,** 8502 Burkau; Christian Hofmann, 7404 Meuselwitz; Christoph Schmidt, 821 Freital; Barbara Recknagel, 6088 Steinbach-Hallenberg; Ulrich Bittner, 22 Greifswald; Hans-Ullrich Ihm, 8717 Oppach; Petra Zimmermann, 8036 Dresden; Regina Katzer, 8502 Burkau; Gabriele Gnauck, 8502 Burkau; Reiner Wagner, 8502 Burkau; Brigitte Hildenbrandt, 6316 Stützerbach; Barbara Wettengel, 992 Oelsnitz; Hanna Heinold, 15 Potsdam; Hedi Wegener, 1157 Berlin-Karlshorst; Reiner Lindemann, 75 Cottbus; Dietmar Ihle, 9335 Seiffen; Rüdiger Blach, 754 Calau; Petra Haebler, 1055 Berlin; Wolfgang Herrmann, 9306 Elterlein; Martin Emrich, 3703 Elbingerode.

Abzeichen in Gold für dreijährige Teilnahme

Jens Haupt, 90 Karl-Marx-Stadt; **Uwe Risch,** 327 Burg; **Hermann Tenor,** 45 Dessau; **Sven-Thorsten Freitag,** 95 Zwickau; **Olaf Richter,** 83 Pirna; **Dirk Sprengel,** 15 Potsdam; **Frank Richter,** 793 Herzberg; **Jens-Uwe Richter,** 9134 Kemtau; **Birgit Kühnstedt,** 5001 Erfurt; **Norbert Heß,** 8019 Dresden; **Horst Kohlschmidt,** 801 Dresden; **Ralf Weber,** 85 Bischofswerda; **Heike Anders,** 1636 Dahlewitz; **Harry Reimann,** 1136 Berlin; **Ulli Riedel,** 938 Flöha; **Wilfried Carl,** 402 Halle; **Andreas Näther,** 925 Mittweida; **Bernd Derlich,** 205 Teterow; **Bernd Redlich,** 6841 Wernburg; **Birgit Krötenheerdt,** 402 Halle; **Hellfried Schumacher,** 2111 Ahlbeck; **Ulrike Bandemer,** 92 Freiberg; **Thomas Hantschel,** 88 Zittau; **Steffen Gattert,** 7043 Leipzig; **Lars Luther,** 26 Güstrow; **Arndt Petzold,** 9034 Karl-Marx-Stadt; Holger Kuchling, 110 Berlin; Norman Bitterlich, 90 Karl-Marx-Stadt; Thomas Rehm, 128 Bernau; Gerd Köhler, 926 Hainichen; Rainer Gutsche, 793 Herzberg; Bernd Peters, 2402 Wismar; Heidrun Scheinhardt, 4203 Bad Dürrenberg; Astrid Kammel, 353 Havelberg; Angela Bagola, 759 Spremberg; Manfred Seidler, 75 Cottbus; Carola Kuhnt, 205 Teterow; Thorsten Langrock, 53 Weimar; Andreas Hochhaus, 57 Mühlhausen; Heiner Schulz, 126 Strausberg; Andreas Neubert, 943 Schwarzenberg; Kurt Frischmuth, 57 Mühlhausen; Uwe Haufe, 8291 Oberlichtenau; Caroline Oelsnitz, 205 Teterow; Werner Wehr, 5603 Dingelstädt; Bettina Zimmermann, 6088 Steinbach-Hallenberg; Sabine Kämpf, 6088 Steinbach-Hallenberg; Manfred Zmeck, 1281 Rüdnitz; Frank-G. Krause, 784 Senftenberg; Gisbert Löwe, 655 Schleiz; Gisela Gottlieb, 402 Halle; Ina Schmidt, 6541 Dorna; Elke Genath, 6088 Steinbach-Hallenberg; Fred Rempel, 75 Cottbus; Reiner Hofmann, 705 Leipzig; Monika Juppe, 8301 Bahratal; Horst Theel, 1034 Berlin; Jörg Päßler, 934 Marienberg; Birgit Weiß, 128 Bernau; Reinhold Albrecht, 4401 Rotta; Steffi Bittorf, 6085 Oberschönau; Falk Bahner, 6088 Steinbach-Hallenberg; Matthias Heine, 8601 Schwarznaußlitz; Hans-Peter Delius, 402 Halle; Konrad Schneider, 95 Zwickau; Ilona Drews, 2801 Wöbbelin; Andreas Schürer, 93 Annaberg-Buchholz; H.-Dirk Dunker, 7114 Zwenkau; Beate Brandtner, 7295 Schildau; Hiltrud Manske, Martina Wahl, Armin Endter, alle 6088 Steinbach-Hallenberg; Frank Günther, 7403 Lucka; Sabine Steinert, 8027 Dresden; Ute Neupert, 6085 Oberschönau; Bettina Ulrich, 6085 Oberschönau; Birgit Arnold, 6082 Breitungen; Michael Zeidler, 938 Flöha; Rainer König, Gabi Reumschüssel, Jens König, Angela Gotthelf, alle 6088 Steinbach-Hallenberg; Martina Weisheit, 6085 Oberschönau; Christina Seifert, 6082 Breitungen; Claudia Heuer, 1922 Meyenburg; Heidrun Weichler, 6081 Fambach; Bernd Reddemann, 36 Halberstadt; Torsten Waldeck, 90 Karl-Marx-Stadt; Christine Frenzel, 7222 Groitzsch; Jochen Kluge, 7403 Lucka; Helge Wilsky, 286 Lübz; Gisbert Schultz, 45 Dessau; Ingrid Hauenschild, 90 Karl-Marx-Stadt; Karin Heller, 6082 Breitungen; Gerhard Brunck, 6082 Breitungen; Birgit Recknagel, 6088 Steinbach-Hallenberg; Thomas Köhler, 4401 Reuden; Sabine Puppe, 8502 Burkau; Thomas Köhler, 4401 Rotta; Bärbel Manteuffel, 301 Magdeburg; Andreas Socher, 7817 Schwarzheide; Thomas Brückner, 9030 Karl-Marx-Stadt; Hannelore Weiß, 205 Teterow; Gina Jahnke, 801 Dresden; Marion Rüter, 3561 Valfitz; Martina Gröschke, 75 Cottbus; Gabriele Angelus, 402 Halle; Manfred Lehrmann, 3241 Wahlbeck; Claudia Schlosser, 901 Karl-Marx-Stadt; Kerstin Müller, 7253 Brandis; Birgit Siewert, 14 Oranienburg; Karola Kibelksties, 1292 Wandlitz; Doris Böttcher, 7551 Straupitz; Frank Rönick, 582 Bad Langensalza; Heike Rommel, 62 Bad Salzungen; Astrid Schulz, 4401 Rotta; Ute Schneider, 1281 Danewitz; Reiner Sturm, 8502 Burkau; Karin Küchler, 6088 Steinbach-Hallenberg; Manuela Jäger, 6085 Oberschönau; Bettina Hujer, 6082 Breitungen; Annelie Römhild, 6082 Breitungen; Udo Grünert, 8225 Wurgwitz; Gerd Reif, 6051 Silbach; Birgit Lorenz, 83 Pirna; Gerd Sieber, 9122 Adorf; Ingolf Lehnert, 2034 Tutow; Heidrun Köpke, 205 Teterow; Hartmut Liebkopf, 6051 Hinternah; Andreas Stolze, 7817 Schwarzheide; Peter Pichler, 75 Cottbus; Ursula Barth, 5101 Kleinfahner; Uwe Jurzok, 6575 Pausa; Annegret Prievenau, 3241 Neuenhofe; Birgit Wittwer, 7403 Lucka; Olaf Kylau, 8502 Burkau; Frank Menz, 6088 Steinbach-Hallenberg; Jutta Weck, 6082 Breitungen; Kornelia Nothnagel, 6085 Oberschönau; Ria Kirschke, 409 Halle-Neustadt; Ulrike Claußnitzer, 14 Oranienburg; Ulli Klaus, 50 Erfurt; Stephan Fleischmann, 606 Zella-Mehlis; Gunter Schölzel, 93 Annaberg-Buchholz; Sabine Beck, 1195 Berlin; Jürgen Bergau, 205 Teterow; Annette Steinert, 8027 Dresden; Ehrenfried Zschech, 86 Bautzen; Peter Herrlich, 8122 Radebeul; Katrin Götz, 1195 Berlin; alpha-Klub, 23 Stralsund; Annerose Geyer, 793 Herzberg; Martina Fiedler, 4271 Freist; Barbara Pahl, 3241 Neuenhofe; Gudrun Möller, 8019 Dresden; Bärbel Seiler, 53 Weimar; Jürgen Galle, 4401 Gniest; Ruth Pienkny, 1281 Rüdnitz; Karin Holland-Cunz, 6088 Steinbach-Hallenberg; Wolfgang Ernst, 6088 Steinbach-Hallenberg; Steffi Schleicher, 6082 Breitungen; Siegmar Rekkenbeil, 6081 Fambach; Frank Reglin, 116 Berlin; Jutta Becker, 2822 Lübtheen; Stefan Claußnitzer, 14 Oranienburg; Roland Wendenburg, 427 Hettstedt; Gert Kirschke, 409 Halle-Neustadt; Jörg Schubert, 9331 Pfaffroda; Matthias Gerth, 59 Eisenach; Bert Lubner, 77 Hoyerswerda; Frank Meister, 1401 Oranienburg; Wolfram Ulrici, 7027 Leipzig; Wolfgang Schweizer, 4735 Roßleben; Holger Harz, 53 Weimar; Siglinde Puller, 759 Spremberg; Henry Bergmann, 73 Döbeln; Dietmar Huhn, 4401 Radies; Ralf Wittig, 8512 Großröhrsdorf; Marlene Matthes, 6402 Mengersgereuth; Dietmar Kochrian, 7816 Schipkau; Gunther Rösch, 934 Marienberg; Evelin Lohse, 8601 Bautzen; Steffi Jurzok, 6575 Pausa; Andreas Gröschke, 75 Cottbus; Bernd Griefahn, 25 Rostock; Irene Lux, Karin Zwieck, 4253 Helbra; Hans Schmidt, 1017 Berlin; Ingrid Juppe, 8301 Bahratal; Birgit Sandig, 9201 Clausnitz; Wieland Guttzeit, 5321 Wiegendorf; Annelie Günther, 5602 Bernterode; Achim Bobeth, 806 Dresden; Joachim Päßler, 9303 Bärenstein; Elvira Neubauer, 9413 Schönheide; Jutta und Karin Schuster, 27 Schwerin; Heike und Harald Müller, 2901 Blüthen; Jens Walter, 4255 Benndorf; Evelin Heinrich, 9025 Karl-Marx-Stadt; Beate Esch, 4271 Thaldorf; Pia-Gabriele Preußer, 22 Greifswald; Petra Dietzel, 4271 Adendorf; Uwe Briese, 2002 Burg Stargard.

Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1967/72 — aufgeschlüsselt nach Schuljahren



Kleine Worte — Große Wirkung Teil 2

Das kleine Wörtchen „und“

Das Wörtchen **und** ist uns schon einmal begegnet, und zwar bei dem Satz über die Division von natürlichen Zahlen (siehe Klassenarbeit von Klaus).

Mit dem Wörtchen **und** ist man in der Lage, zwei oder mehrere Teilaussagen zu einer neuen Aussage zusammenzufügen. Eine solche Aussagenverbindung, die mit Hilfe von **und** entstanden ist, nennt man *Konjunktion*.

Hier gleich ein Beispiel:

Die Zahl 3 erfüllt die Ungleichung $x<7$ **und** die Zahl 3 erfüllt auch die Ungleichung $x>2$.

In unserem Fall liegen zwei Teilaussagen vor.

a) Die Zahl 3 erfüllt die Ungleichung $x<7$. (Wahre Aussage)

b) Die Zahl 3 erfüllt die Ungleichung $x>2$. (Wahre Aussage)

Eine Konjunktion ist wahr, wenn alle Teilaussagen, aus denen sie entstanden ist, auch wahr sind. (siehe unser obiges Beispiel) Ist nur eine Teilaussage oder etwa gar keine Teilaussage wahr, so ist die mit „und“ aus diesen Teilaussagen gebildete Aussagenverbindung falsch.

Zum Beispiel: „300 ist der Nachfolger von 200 und 1000 ist der Vorgänger von 2000“ ist falsch, denn beide Teilaussagen sind falsch;

„0 ist die kleinste natürliche Zahl und 100000000000 ist die größte natürliche Zahl“ ist falsch, denn eine der beiden Teilaussagen ist falsch.

Kommen wir nochmals zu dem Satz über die Division von natürlichen Zahlen zurück:

Da die Division $a:b$ nur dann ausführbar ist, wenn **sowohl** a ein Vielfaches von b **als auch** $b\neq 0$ ist, so ist die Verwendung des Bindewortes **oder** unzulässig und muß durch **und** ersetzt werden.

Der Mathematiklehrer hat also mit Recht die Antwort von Klaus beanstandet. („Die Division ist im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar, wenn der Dividend a ein Vielfaches des Devisors b ist **oder** wenn b nicht 0 ist“. Ein Beispiel dazu: $a=15$, $b=4$. Hier ist $b\neq 0$, die Bedingung „a ist ein Vielfaches von b **oder** $b\neq 0$“ wird also erfüllt, aber $a:b$ ist nicht ausführbar.) Untersucht nun selbst einmal, ob die folgenden Aussagen wahr sind!

a) $461 \cdot 7^2=3217$ **und** $414:6=54$

b) In jedem Dreieck gibt es höchstens einen rechten Winkel, **aber auch** mindestens einen spitzen Winkel.

c) Die Zahl 19 erfüllt **sowohl** die Ungleichung $17<x<27$ **als auch** die Ungleichung $19<x<29$.

d) Die Zahl 714 ist gerade und **außerdem** durch 7 teilbar.

Wie wir aus den obigen Aussagen sehen, gibt es noch andere Bindewörter (z. B. „aber auch“, „sowohl als auch“, „und außerdem“), die dieselbe Wirkung haben wie unser „und“. Man kann sie alle durch „und“ ersetzen, ohne den Wahrheitswert der Aussage zu verändern.

Entweder „oder“ oder „entweder — oder“

Auch das Wörtchen „oder“ und die Wendung „entweder — oder“ sind in der Lage, Aussagen zu neuen Aussagen zu verbinden. Jedoch ist es dabei sehr wichtig, welches Bindewort Verwendung findet. Wenn die Mutti an der Kaffeetafel zu Tante Lilly sagt: „Möchtest du Zucker **oder** Milch?“, so ist niemand verwundert, wenn die Tante sowohl Zucker als auch Milch oder nur eins von beiden in ihren Kaffee nimmt. Dagegen wird unsere Mutti mit Recht böse auf uns sein, wenn sie zu uns sagt: „Entweder du gehst heute nachmittag ins Schwimmbad oder ins Kino“, und wir waren im Schwimmbad und anschließend im Kino.

Wie ihr seht, ist es nicht egal, ob man das Bindewort „oder“ oder die Wendung „entweder – oder“ verwendet.

Eine mit **oder** gebildete Aussagenverbindung (auch Alternative genannt) ist wahr, wenn **mindestens** eine Teilaussage wahr ist. Sind alle Teilaussagen falsch, so ist die Aussagenverbindung falsch.

Die mit **entweder — oder** gebildete Aussagenverbindung (auch Disjunktion genannt) ist nur wahr, wenn genau eine Teilaussage wahr ist, ansonsten ist sie falsch.

So ist die Aussage

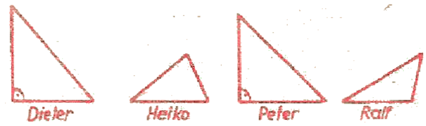
„2772 ist durch 3 oder durch 9 teilbar“ wahr, denn beide Teilaussagen sind wahr.

Dagegen ist die Aussage

„2772 ist entweder durch 3 oder durch 9 teilbar“ falsch. Schauen wir uns dazu ein anderes Beispiel an:

Der Lehrer einer 5. Klasse stellte die Aufgabe: „Zeichnet ein Dreieck, das rechtwinklig oder gleichschenklig ist!“

Die folgenden Abbildungen zeigen, was die Schüler Dieter, Heiko, Peter und Ralf gezeichnet haben:



Wer von ihnen hat die Aufgabe richtig gelöst?

Dieter ja, denn sein Dreieck ist rechtwinklig, Heiko auch, denn sein Dreieck ist gleichschenklig, aber auch Peter hat die Aufgabe richtig gelöst, denn sein Dreieck ist rechtwinklig. Es ist außerdem auch noch gleichschenklig, aber das war ja nicht verboten. Nur Ralfs Zeichnung ist nicht in Ordnung: Das Dreieck ist nicht rechtwinklig und auch nicht gleichschenklig.

Hätte der Lehrer aber gesagt: „Zeichnet ein Dreieck, das entweder rechtwinklig oder gleichschenklig ist!“, dann wären nur Dieters und Heikos Zeichnungen richtig gewesen.

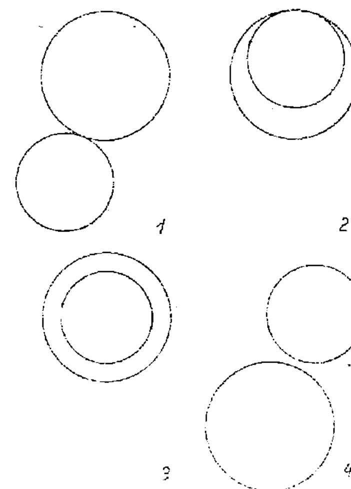
Untersucht einmal selbst, welche Figuren der folgenden Abbildung richtig gezeichnet sind, wenn die Aufgabe lautet:

a) Zeichnet zwei Kreise, die sich gegenseitig berühren **oder** bei denen einer ganz im Inneren des anderen liegt!

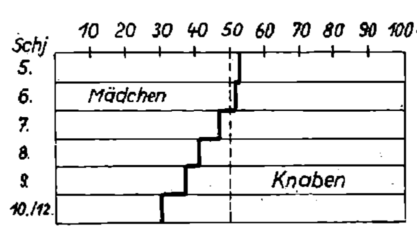
b) Zeichnet zwei Kreise, die sich **entweder** gegenseitig berühren **oder** bei denen einer ganz im Inneren des anderen liegt!

c) Zeichnet zwei Kreise, die sich gegenseitig berühren **und** bei denen einer ganz im Inneren des anderen liegt!

L. Flade



Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1967/72 aufgeschlüsselt nach Jungen und Mädchen



VEB Verlag Technik, Berlin 1971; 168 S., 101 Abb., 10 Tafeln; 9,50 M

Wer es bei naturwissenschaftlichen oder technischen Untersuchungen genau nimmt mit den physikalischen Größen und ihren Maßeinheiten, der kennt bereits den „Padelt/Laporte", ein nützliches Nachschlagewerk der Meßtechnik, in der 1. Auflage 1964 im Fachbuchverlag Leipzig erschienen.
Nun hat Frau *Dr. E. Padelt*, ehemals Mitglied der *Deutschen Gesellschaft für Meßtechnik und Automatisierung*, ein Buch für ein breiteres Publikum geschrieben. Im Geleitwort wird betont, daß es ein besonderes Anliegen der Sektion Technik beim Präsidium der URANIA gewesen sei, populärwissenschaftliches Material zur Zeit- und Längenmessung zu veröffentlichen. Frau *Dr. Padelt* nahm sich in gekonnter Weise dieser Aufgabe an, ist sie doch durch ihr Studium der Physik und Mathematik und ihrer langjährigen Tätigkeit auf dem Gebiet der Wäge- und Volumenmeßtechnik dazu prädestiniert.
Da die Sekunde als Grundeinheit der Zeit und das Meter als Grundeinheit der Länge ursprünglich astronomisch definierte Maßeinheiten darstellen und die im Laufe der Wissenschaftsgeschichte benutzten Techniken der Zeit- und Längenmessung aufs engste mit astronomischen Beobachtungsmethoden verknüpft sind, ist dieses Buch auch für den Astronomen interessant.
„Sich darum kümmern, wie und wo die heutigen Früchte der Meßtechnik gewachsen sind", das sollte nicht nur Anliegen des Ingenieurs oder Physikers sein, sondern gehört geradezu zum Lehrstoff des Astronomieunterrichts.
Einige Kapitelüberschriften unterstreichen diese enge Beziehung zum Fach Astronomie: „Gnomon und Sonnenuhr" (S. 22), „Die Definition der Sekunde" (S. 44), „Der Kalender" (S. 51), „Gründung der internationalen Meterkonvention" (S. 81), „Messung sehr großer Längen" (S. 100), „Winkelmessung" (S. 140), „Geschwindigkeitsmessung" (S. 148).
Zahlreiche Photos und Zeichnungen illustrieren das preiswerte Buch und vermitteln an sich schon einen Eindruck von der gewaltigen Entwicklung der Meßtechnik während eines Zeitraumes von Jahrtausenden. Schließlich ist dieser Entwicklungsprozeß in einer umfassenden Zeittafel am Ende des Buches noch einmal zusammengefaßt.
Wegen der übersichtlichen Gliederung läßt sich „Menschen messen Zeit und Raum" als Nachschlagewerk benutzen, obwohl es als solches nicht geschrieben ist. Die sich in das jeweilige Zeitbild harmonisch eingliedernden technischen Beschreibungen nehmen dem Buch den trockenen, strengen Charakter, den sonst Literatur mit ähnlicher Thematik hat. „Eine Geschichte der Meßtechnik von den Anfängen bis zur Gegenwart", könnte der Untertitel lauten. Der Inhalt ist ein Beweis dafür, wie mit der Entwicklung der Produktivkräfte der menschlichen Gesellschaft die Anforderungen an Genauigkeit und Schnelligkeit der Meßverfahren gestiegen sind.

W. K.

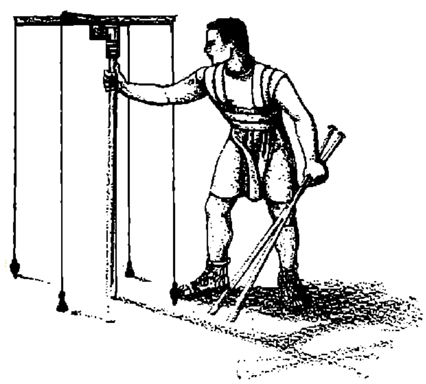
Aus Wissenschaft und Fortschritt
Heft 6/72

Um zu einer „gerechten Rute" zu kommen, hatte *Jacob Kölbel* 1584 vorgeschlagen, den Wert von 16 hintereinandergestellten Füßen zu wählen.

alpha stellt vor
Dr. phil. Eva Padelt

E. Padelt ist über die Grenzen der DDR hinaus bekannt geworden durch ihr Eintreten für die Vereinheitlichung auf dem Gebiet der physikalisch-technischen Einheiten.
Nach dem Studium der Physik und Mathematik arbeitete sie vor allem auf dem Gebiet der Wägetechnik und Vakuummeßtechnik in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, danach im *Deutschen Amt für Meßwesen und Warenprüfung der DDR*. Auch nach der Erreichung des Rentenalters ist sie noch wissenschaftlich tätig.

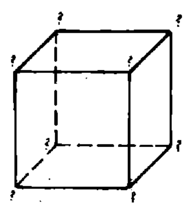
Bei den Ausgrabungen von Pompeji stieß man auf ein *Groma*, eines der ältesten Visiergeräte. Man visierte über die Fäden der Lote in der Diagonalen, um den rechten Winkel zu bestimmen.



In freien Stunden alpha heiter

Magischer Würfel

Man ordne den acht Ecken eines Würfels die acht Zahlen 1 bis 8 so zu, daß in jeder der sechs Seitenflächen die vier Zahlen in den Quadratecken die gleiche Summe ergeben. Aufteilungen der Zahlen auf die Würfelecken sind nur dann als voneinander verschieden anzusehen, wenn die vier Eckzahlen wenigstens eines Quadrats des einen Würfels nicht als Eckzahlen eines Quadrats des anderen Würfels auftreten – unabhängig von der Reihenfolge. *Dr. G. Hesse, Dresden*



Aus der Zeit des Adam Ries

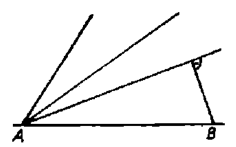
Die mittelalterlichen Rechenmeister fühlten sich oft unentbehrlich, da sie von Herren und Städten zu wichtigen Geschäften herangezogen wurden. Sie zeigten deshalb vielfach übersteigertes Standesbewußtsein und unerträglichen Dünkel.

Nicht so der bekannte Annaberger Rechenmeister *Adam Ries* (1492 bis 1559), der mehr leistete als mancher andere, dabei aber trotzdem bescheiden blieb.

Von ihm wird folgendes erzählt: *A. Ries* traf einmal mit einem solchen hochnäsigen Feldmesser zusammen, der an seinem Hut einen silbernen Zirkel trug, um sich damit als *Meister der geometrischen Kunst* zu erkennen zu geben. *A. Ries* – der trotz seines geometrischen Könnens den Zirkel nicht trug – ärgerte sich über das Auftreten dieses Mannes und schlug ihm deshalb einen kleinen Wettbewerb vor: Wer über einer vorgegebenen Strecke $\overline{AB}$ in einer bestimmten Zeit die meisten rechten Winkel konstruieren konnte, sollte Sieger sein.

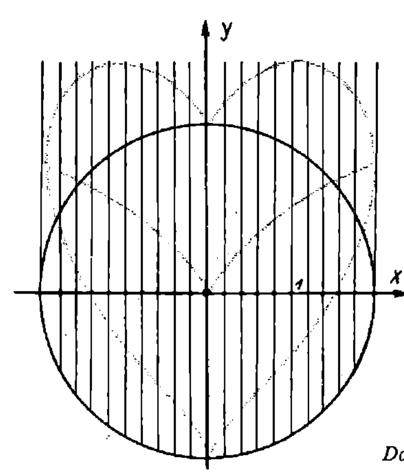
Der Feldmesser nahm die Herausforderung an und begann sogleich von A ausgehende, in spitzem Winkel zu $\overline{AB}$ geneigte Strahlen zu zeichnen. Dann wollte er von B auf diese Strahlen das Lot fällen und so rechte Winkel über $\overline{AB}$ gewinnen.

Unter Anwendung eines alten Lehrsatzes kam *A. Ries* sehr schnell zum Ziel. Kennst du, lieber Leser, diesen Satz? *Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden*



Mathematik mit

Der Graph der Relation
$y=f(x)=\sqrt[3]{x^2}\pm\sqrt{4-x^2}$
sieht für $E=2$ cm folgendermaßen aus:



R Schwantes, Dornstetten (BRD)

Turmsprung

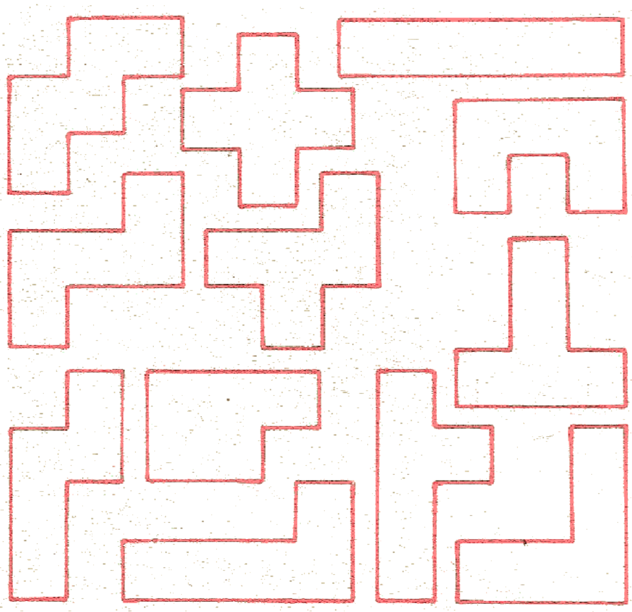
Für eine geeignete Folge von Turmzügen gilt: Die Felder der obigen Figur, auf denen der Turm nacheinander steht, tragen Silben, die in dieser Reihenfolge einen aus dem Mathematikunterricht der Klasse 6 bekannten Satz darstellen. Dabei darf der Turm niemals auf einem schraffierten Feld stehen und über ein solches hinwegspringen.

recht	der	senk				hen	eck	ste
	an	go	in	a	dem	di	je	
len	ein	na	auf		dra	die	vier	chen

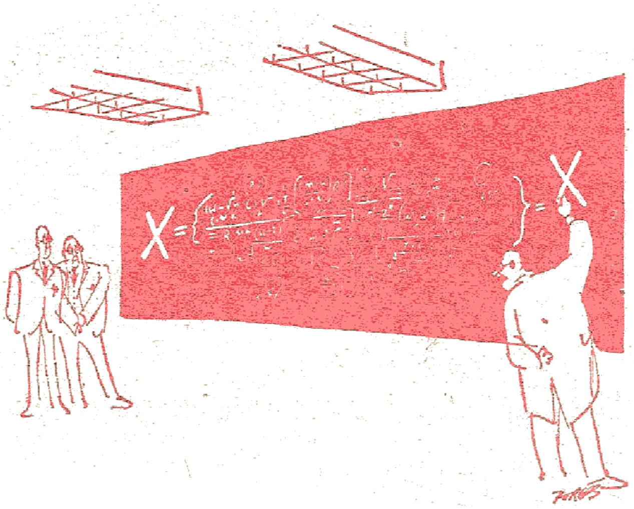
Lehrerin Irmgard Träger,
Dr.-Richard-Sorge-OS, Ebersbach

Legespiel

Zahlreiche Teilnehmer der XIV. Internationalen Mathematikolympiade kauften sich in Toruń ein Legespiel.
Die 12 Teile sind so zusammenzusetzen, daß ein Rechteck entsteht. Wer schafft's, einfach ist es nicht!



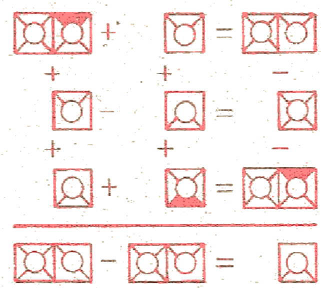
Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig



„... und das bringt uns genau dorthin, von wo wir ausgegangen waren ..."

Eingesandt von Ing. H. Decker, Köln

Kryptarithmetik

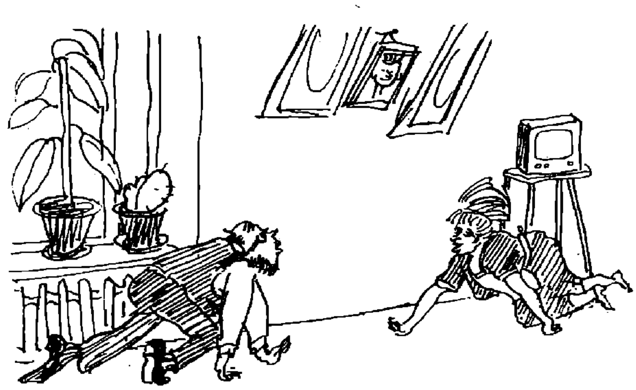


Udo Wilke, Wandlitzsee bei Berlin, Kl. 7

Romantiker

Auf Integralsuche ziehen wir aus
am Morgen.
Unsere Wohnungen sind
Quadratwurzeln. Den Durst
löschen wir aus den breiten Strömen
der Sinuskurven.
Abends,
nach bestandenen Differenzen mit
Drachenvierecken,
ist Tanz im schnellen Logarithmus.
Unser Ziel liegt dort,
wo die Parallelen verschmelzen;
bis dahin müssen sie
in Bewegung bleiben.

Iris Schilke, Oberschülerin (17 Jahre)
(2. Zentrales Poetenseminar der FDJ, Schwerin)



„Ich wiederhole die Aufgabe: Aus den Städten A und B fuhren sich zwei Züge entgegen ..."

Aminodow Kanjewski, Moskau

Aufgabe 1000

Eine Aufgabe der DDR-Mannschaft XIV. Internationale Mathematikolympiade

Letzter Einsendetermin: 5. März 1973

Wer entsprechend den Wettbewerbsbedingungen (siehe Seite 130) die nachfolgenden Aufgaben löst, erhält **zwei** Antwortkarten. Die elegantesten Einsendungen werden außerdem prämiert. Bei der nun folgenden Aufgabe, gegliedert nach Klassenstufe 5 bis 10/12, wünschen wir viel Erfolg!

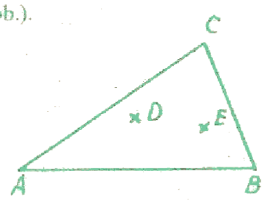
W 5 ■ 1000

Ein spitzwinkliges Dreieck ABC soll in 3 Parallelogramme und 4 Dreiecke zerlegt werden.

(Die Konstruktion soll mit Hilfe eines Lineals und eines Zeichendreiecks ausgeführt werden.)

W 6 ■ 1000

Es seien ABC ein Dreieck und D und E zwei Punkte, die im Inneren dieses Dreiecks liegen und deren Verbindungsgerade nicht durch einen Eckpunkt dieses Dreiecks geht (vgl. die Abb.).



Es soll bewiesen werden, daß man dann stets zwei Eckpunkte des Dreiecks ABC so auswählen kann, daß diese zusammen mit den beiden inneren Punkten D und E ein konvexes Viereck bilden, d. h. ein Viereck, bei dem alle Innenwinkel kleiner als 180° sind. (Das konvexe Viereck ist zu zeichnen und durch Schraffur kenntlich zu machen.)

W 7 ■ 1000

Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$. Dieses Dreieck soll in 7 Rhomben und 8 gleichschenklige Dreiecke zerlegt werden.

(Die Zerlegung ist durch eine Zeichnung zu erläutern und zu begründen.)

W 8 ■ 1000

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm, dessen Innenwinkel sämtlich von 90° verschieden sind, das also kein Rechteck ist.

Dieses Parallelogramm soll in 1972 gleichschenklige Dreiecke und 1971 gleichschenklige Trapeze zerlegt werden.

(Da es mühsam ist, 1972 gleichschenklige Dreiecke und 1971 gleichschenklige Trapeze zu zeichnen, ist die Konstruktion nicht auszuführen. Es ist nur das Verfahren der Konstruktion anzugeben und zu begründen, sowie durch eine (nicht maßstäbliche) Zeichnung zu erläutern.)

W 9 ■ 1000

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Dieses Dreieck soll in 6 gleichschenklige Dreiecke zerlegt werden.

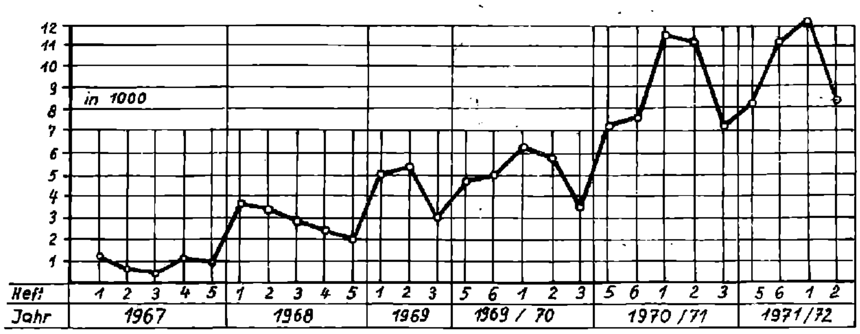
(Die Konstruktion ist auszuführen und zu begründen.)

W 10/12 ■ 1000

Man zeige, daß für $n \geq 4$ der folgende Satz gilt:

Jedes Viereck, für das ein Umkreis existiert, läßt sich in n Vierecke zerlegen, von denen jedes wieder einen Umkreis hat.

(Diese Aufgabe wurde bei der XIV. Internationalen Mathematikolympiade 1972 in Toruń, VR Polen, gestellt. Es empfiehlt sich, den Satz zunächst für $n=4$ zu beweisen, indem man das Sehnenviereck in zwei gleichschenklige Trapeze und zwei weitere Sehnenvierecke zerlegt, und dann den Beweis für $n>4$ zu führen.)



Wir stellen noch einmal die Mitglieder der DDR-Mannschaft, Teilnehmer der XIV. IMO vor — gezeichnet von *Prof. Dr. Leon Jeśmanowicz*, Sektion Mathematik der Copernicus-Universität Toruń — Stellv. Vorsitzender der Jury der XIV. IMO:

Pawel Kröger — Harald Englisch (Initiator der vorliegenden Aufgaben) — *Albrecht Heß — Olaf Böhme — Hans-Jürgen Fischer — Gerd Weißenborn — Rainer Siegmund-Schultze — Matthias Günther*

Bilanz 1972

Eingegangene Lösungen: 41 000

Verliehene Urkunden und Abzeichen: 2 300 (davon 300 in Gold) Übersandte Preise: 200

Auf weiterhin gute Zusammenarbeit!

Eure Redaktion *alpha*

Seit Gründung der Zeitschrift gingen über 150 000 Lösungen ein. Ebenso viele Antwortkarten erhielten ihre Einsender. Über die Hälfte aller Aufgaben stammten aus der Feder unserer Leser. In unermüdlicher Kleinarbeit wurden alle Aufgaben von Nationalpreisträger Oberstudienrat *Dr. R. Lüders* und Studienrat *Th. Scholl* (beide Berlin) bearbeitet und exakte Lösungen dazu formuliert. Dafür sagen wir all unseren Mitarbeitern herzlichen Dank und sprechen Anerkennung aus für die hervorragenden Leistungen. Unser Dank gilt aber auch den Korrektoren und dem Verlag Volk und Wissen, der die umfangreichen Geldmittel für den *alpha*-Wettbewerb bereitstellte.

Lösungen

W 10/12 ■ 878 Wir berechnen die Differenz der beiden Werte und erhalten

$V'-V$

$=\frac{\pi}{2}h(r_1^2+r_2^2)-\frac{\pi}{3}h(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$

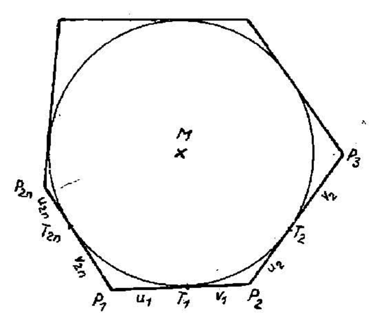
$=\frac{\pi}{6}h(3r_1^2+3r_2^2-2r_1^2-2r_1r_2-2r_2^2)$

$=\frac{\pi}{6}h(r_1^2-2r_1r_2+r_2^2)$

$=\frac{\pi}{6}h(r_1-r_2)^2.$

Nun ist nach Voraussetzung $r_1-r_2\neq 0$, also $(r_1-r_2)^2>0$. Daraus folgt $V'-V>0$, d. h., $V'>V$. Der Näherungswert V' ist also größer als der genaue Wert V.

* 10/12 * 880 Wir bezeichnen die Längen der Strecken, in die jede der Seiten des Vielecks durch die Berührungspunkte zerlegt wird, der Reihe nach mit $u_1, v_1; u_2, v_2; \ldots; u_{2n}, v_{2n}$ (vgl. die Abb.).



Dann gilt

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1+v_1,\\ s_2 &= u_2+v_2,\\ &\ldots\ldots\ldots,\\ s_{2n} &= u_{2n}+v_{2n}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Ferner gilt, da die Abstände des Schnittpunktes zweier Tangenten eines Kreises von den Berührungspunkten gleich sind,

$$\begin{aligned} v_1 &= u_2,\\ v_2 &= u_3,\\ &\ldots\ldots,\\ v_{2n-1} &= u_{2n},\\ v_{2n} &= u_1. \end{aligned} \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\begin{aligned} &s_1+s_3+s_5+\ldots+s_{2n-1}=(u_1+v_1)+(u_3+v_3)\\ &+(u_5+v_5)+\ldots+(u_{2n-1}+v_{2n-1})\\ &=v_{2n}+u_2+v_2+u_4+v_4+u_6+\ldots+v_{2n-2}+u_{2n}\\ &=(u_2+v_2)+(u_4+v_4)+\ldots+(u_{2n}+v_{2n})\\ &=s_2+s_4+\ldots+s_{2n}, \text{ w.z.b.w.} \end{aligned} \qquad (3)$$

Bemerkung:
Im speziellen Fall $2n=4$ erhalten wir ein Tangentenviereck, und es gilt $s_1+s_3=s_2+s_4$. Damit haben wir gleichzeitig den bekannten Satz bewiesen, wonach in jedem Tangentenviereck die Summen der Längen je zweier gegenüberliegender Seiten gleich sind.

5 ▲ 882 Zwei Gewichtsteile Zinn und drei Gewichtsteile Blei ergeben fünf Gewichtsteile Lötzinn. Aus $15:5=3$ folgt, daß $3\cdot 2\,\text{kg}=6\,\text{kg}$ Zinn und $3\cdot 3\,\text{kg}=9\,\text{kg}$ Blei zur Herstellung von 15 kg Lötzinn benötigt werden.

W 5 ■ 883 Wir rechnen $157-1=156$, $156:13=12$, $12:3=4$. Aus $x:13=4$ folgt dann $x=52$. Dem Leser fehlt die laufende Nummer 52 dieser Zeitschrift.

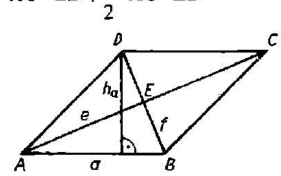
W 5 ■ 884 Da Doris Schülerin einer dritten Klasse ist, im Alter von sechs Jahren eingeschult und regelmäßig versetzt wurde, muß sie entweder 8 oder 9 Jahre alt sein.
Aus $8=1+7=2+6=3+5=4+4$ und $7-1=6\neq 4$, $6-2=4$, $5-3=2\neq 4$, $4-4=0\neq 4$ folgt, daß die Schwestern 2, 6 und 8 Jahre alt sind.
Aus $9=1+8=2+7=3+6=4+5$ und $8-1=7\neq 4, 7-2=5\neq 4, 6-3=3\neq 4, 5-4=1\neq 4$ folgt, daß die obige Lösung die einzige ist.

* 5 * 885 Wir stellen einige der Ungleichungen so um, daß alle Ungleichungen das gleiche Relationszeichen enthalten.
1. $e<a$, 3. $e<c$, 5. $b<a$, 7. $a<c$,
2. $b<c$, 4. $d<e$, 6. $b<d$, 8. $d<a$.
Aus der Verknüpfung der Ungleichungen unter 6., 4., 1. und 7. erhalten wir die fortlaufende Ungleichung $b<d<e<a<c$. Die Ungleichungen unter 2., 3., 5. und 8. werden zur Lösung nicht benötigt.

* 5 * 886 Es sei z_0 die Anzahl der Schüler, die keine Aufgabe lösten, und es seien z_1, z_2, z_3, z_4 die Anzahlen derjenigen, die genau eine, genau zwei, genau drei bzw. genau vier Aufgaben lösten. Dann beträgt die Anzahl der insgesamt gelösten Aufgaben $2\cdot 36=72$. Ferner gilt $z_2=72:3=24$. Aus $36-24=12$ folgt nun $z_0+z_1+z_3+z_4=12$. Wegen $z_0=z_4$ und $z_1=z_3=2\cdot z_4$ folgt daraus durch Einsetzen $z_4+2\cdot z_4+2\cdot z_4+z_4=12$ und damit $6\cdot z_4=12$, also $z_4=2$. Damit erhalten wir weiter $z_0=2$, $z_1=4$ und $z_3=4$.
Zwei Schüler lösten keine der vier Aufgaben, vier Schüler lösten genau eine, 24 Schüler genau zwei, vier genau drei und zwei genau vier Aufgaben.

6 ▲ 887 Für den Flächeninhalt eines Rhombus $ABCD$ gilt einmal $A=a\cdot h_a$, zum anderen

$A=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{EB}+\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{ED}$



$=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot(\overline{EB}+\overline{ED})=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\frac{1}{2}\cdot e\cdot f.$

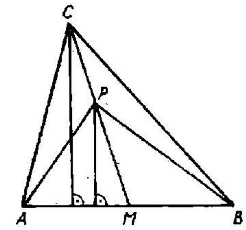
Daraus folgt $2a\cdot h_a=e\cdot f$.

W 6 ■ 888 Aus $54:2{,}7=20$ folgt, daß insgesamt 20 Fuhren verladen wurden. Angenommen, der zweite LKW habe während der Arbeitszeit x Fuhren verladen, dann kommen in der gleichen Zeit auf den ersten LKW $\frac{5}{3}x$ Fuhren und auf den dritten LKW $\frac{2}{3}x$ Fuhren. Aus $\frac{5}{3}x+x+\frac{2}{3}x=20$ folgt $\frac{10}{3}x=20$, also $x=6$.
Der erste LKW beförderte 10, der zweite 6 und der dritte 4 Fuhren. Die Baustellen erhielten somit 27 t, 16,2 t und 10,8 t Kies.

W 6 ■ 889 Es sei m die Anzahl der am Wettbewerb teilnehmenden Mädchen und j die der Jungen. Wegen $61-10=51$ gilt dann $k\cdot m=51$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Aus $51=1\cdot 51=3\cdot 17=17\cdot 3=51\cdot 1$ folgt, daß m gleich 51, 17, 3 oder 1 sein kann. Wegen $j+m=61$ ist dann j gleich 10, 44, 58 oder 60. Nur im Falle $m=17$, $j=44$ gilt aber $j>2m$ und $j<3m$.
Am alpha-Wettbewerb beteiligten sich demnach regelmäßig 17 Mädchen und 44 Jungen aus diesen beiden Klassen.

* 6 * 890 Bei Division einer natürlichen Zahl durch 6 können die Reste 0, 1, 2, 3, 4 oder 5 auftreten.
Angenommen, p lasse bei Division durch 6 den Rest 2. Dann ist $p-2$ durch 6 teilbar, also eine gerade Zahl. Dann muß p selbst gerade sein, was nicht möglich ist.
Angenommen, p lasse bei der Division durch 6 den Rest 3. Dann ist $p-3$ durch 6 und damit auch durch 3 teilbar. Dann muß p selbst durch 3 teilbar sein, was nicht möglich ist.
Angenommen, p lasse bei Division durch 6 den Rest 4. Dann ist $p-4$ durch 6 und damit auch durch 2 teilbar, also eine gerade Zahl. Dann muß p selbst gerade sein, was nicht möglich ist. Daraus folgt, daß jede Primzahl $p>3$ bei Division durch 6 entweder den Rest 1 oder den Rest 5 läßt.
Zum Beispiel läßt bei Division durch 6 die Primzahl 7 den Rest 1 und die Primzahl 11 den Rest 5.

* 6 * 891 Da die Dreiecke AMC und MBC und auch die Dreiecke AMP und MBP jeweils eine gleich lange Grundlinie und Höhe haben (vergl. d. Bild), gilt für ihre Flächeninhalte:
$A_{AMC}=A_{MBC}$ und $A_{AMP}=A_{MBP}$.

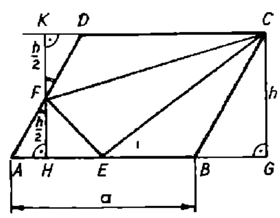


Daraus folgt
$A_{PCA} = A_{AMC} - A_{AMP} = A_{MBC} - A_{MBP} = A_{PBC}$, w. z. b. w.

7 ▲ 892 Wenn eine Zahl durch 36 teilbar ist, so ist sie auch durch 9 und durch 4 teilbar. Wegen $3+7=10$ und wegen der Teilbarkeit durch 9 gilt für die Quersumme der übrigen vier Ziffern entweder $2 \cdot (x+y) = 8$, also $x+y=4$, oder $2 \cdot (x+y) = 26$, also $x+y=13$. Wegen $x \neq 0$ erhalten wir für die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl, die durch 4 teilbar sein soll, folgende Möglichkeiten:
04, 13, 22, 31, 49, 58, 67, 76, 85, 94. Von diesen Zahlen sind nur 4 und 76 durch 4 teilbar. Es gibt genau zwei Zahlen, die die Bedingungen erfüllen, sie lauten 403 704 und 673 776.

W 7 ■ 893 Die zweistellige Zahl sei $z = 10a + b$ mit $1 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$. Wegen $40^2 = 1600 > 999$ gilt $a < 4$. Quadratzahlen enden nur auf die Ziffern 0, 1, 4, 5, 6 oder 9. Daraus folgt wegen $a \neq 0$ somit auch $a \neq 2$ und $a \neq 3$, also $a = 1$. Deshalb gilt $b = 1$ oder $b = 9$.
Es gibt also genau zwei Zahlen, die die gestellte Bedingung erfüllt, sie lauten 11 und 19, und es gilt $11^2 = 121$ und $19^2 = 361$.

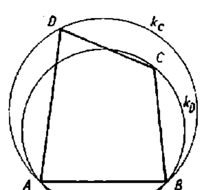
W 7 ■ 894 Wir fällen von C das Lot $\overline{CG} = h$ auf die Gerade AB und ziehen durch F die Parallele zur Geraden CG; sie schneide AB in H und CD in K. Für die Dreiecke $\triangle AHF$ und $\triangle DKF$ gilt $\overline{AF} = \overline{DF}$, $\sphericalangle AHF = \sphericalangle DKF = 90°$ und $\sphericalangle AFH = \sphericalangle DFK$ (Scheitelwinkel); deshalb gilt
$\triangle AHF \cong \triangle DKF$
und somit auch $\overline{FH} = \overline{FK} = \frac{h}{2}$.
Für die Flächeninhalte gilt demnach
$A_{ABCD} = a \cdot h$, $A_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{ah}{8}$,
$A_{EBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h = \frac{2ah}{8}$, $A_{CDF} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{h}{2} = \frac{2ah}{8}$.

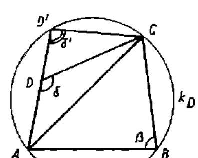


Daraus folgt $A_{ECF} = A_{ABCD} - A_{AEF} - A_{EBC} - A_{CDF}$, also $A_{ECF} = \frac{8ah}{8} - \frac{ah}{8} - \frac{2ah}{8} - \frac{2ah}{8}$
$= \frac{3}{8} \cdot a \cdot h = \frac{3}{8} A_{ABCD}$.

* 7 * 895 Da a und b natürliche Zahlen sind und $a > b$ ist, gilt $a - b \geqq 1$. Multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit $a - b$, so erhalten wir $a + b > ab(a - b)$. Wegen $a - b \geqq 1$ gilt dann auch $a + b > ab$ und wegen $a > b$ gilt $2a > ab$, also $b < 2$, das heißt $b = 1$. Für $b = 1$ erhalten wir nach Belegung $\frac{a+1}{a-1} > a$. Durch entsprechende Umformungen ergibt sich daraus wegen $a - 1 \geqq 1$ somit $a + 1 > a^2 - a$ bzw. $a^2 - 2a - 1 < 0$. Addieren wir zu jeder Seite 2, so erhalten wir $a^2 - 2a + 1 < 2$, also $(a-1)^2 < 2$. Nur die natürliche Zahl $a = 2$ erfüllt diese Ungleichung. Es gibt genau eine Lösung, das geordnete Paar $(a, b) = (2, 1)$ erfüllt die gegebene Ungleichung unter den gestellten Voraussetzungen.

* 7 * 896 Angenommen, es gäbe ein Viereck $ABCD$ mit $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$, das kein Sehnenviereck ist. Aus den Winkelbeziehungen folgt zunächst $\alpha, \beta, \gamma, \delta < 180°$. Die Diagonale $\overline{AC}$ zerlegt das Viereck $ABCD$ in zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$, die keine inneren Punkte gemeinsam haben. Da Viereck $ABCD$ kein Sehnenviereck ist, liegt D nicht auf dem durch die Punkte A, B und C gehenden Kreis k_D. Der Punkt D ist dann entweder innerer oder äußerer Punkt des Kreises k_D.
1. Fall: D sei innerer Punkt von k_D. Die Verlängerung von $\overline{AD}$ über D hinaus schneidet k_D dann in einem Punkt D'. Da Viereck $ABCD'$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\beta + \delta' = 180°$. Da laut Ausnahme auch $\beta + \delta = 180°$ gilt, muß $\delta = \delta'$ sein. In diesem Falle stimmen die Dreiecke $\triangle ACD$ und $\triangle ACD'$ in zwei Winkeln und einer Seite überein, sind also kongruent. Damit müßte D' mit D zusammenfallen. Dies widerspricht der Annahme, daß D innerer Punkt von k_D ist. Also kann dieser Fall nicht eintreten.





2. Fall: D sei äußerer Punkt von k_D. Dann liegt C im Innern des Kreises k_C, der durch die Punkte A, B und D geht. Bezeichnen wir nun D mit A, A mit B, B mit C, C mit D und k_D mit k_C, so läßt sich dieser Fall auf den ersten zurückführen. Also kann auch der zweite Fall nicht eintreten.
Da beide möglichen Fälle zum Widerspruch führen, ist der Satz wahr und bewiesen.

8 ▲ 897 a) Das Volumen einer Platte von 1 m² Fläche und 50 mm Stärke beträgt
$V = 1 \cdot 0{,}05 \text{ m}^3 = 0{,}05 \text{ m}^3$,
die Masse beträgt
$m = 6{,}3 \text{ kg} = 0{,}0063 \text{ t}$.
Daher beträgt die Dichte
$\varrho = \frac{0{,}0063}{0{,}05} \text{ t} \cdot \text{m}^3 = 0{,}126 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.
b) Wir erhalten die Masse der Platte von 15,40 m Länge
$m_1 = 15{,}40 \cdot 1 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}126 \text{ t} \approx 0{,}155 \text{ t}$
$m_1 \approx 155$ kp.

W 8 ■ 898 Da die Quersumme der Jahreszahl seines Geburtsjahres nicht größer als $1+8+9+9=27$ ist, ist der Mathematiker höchstens 27 Jahre alt und daher in diesem Jahrhundert geboren. Es sei nun $1900 + 10x + y$ das Geburtsjahr des Mathematikers, wobei x und y natürliche Zahlen mit $0 \leqq x \leqq 9$ und $0 \leqq y \leqq 9$ sind. Dann hat der Mathematiker das Alter $1+9+x+y$.
Wir erhalten daher die Gleichung

$$(1900 + 10x + y) + (1 + 9 + x + y) = 1972 \quad (1)$$

Daraus folgt

$$1910 + 11x + 2y = 1972,$$
$$11x + 2y = 62, \quad (2)$$
$$11x = 62 - 2y. \quad (3)$$

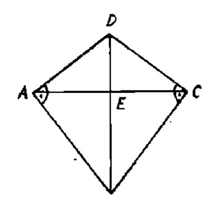
Wegen $0 \leqq y \leqq 9$ gilt $0 \leqq 2y \leqq 18$,
also $44 \leqq 11x \leqq 62$, d. h. $4 \leqq x \leqq \frac{62}{11}$.
Da x eine natürliche Zahl ist, gilt also $x = 4$ oder $x = 5$.
Für $x = 4$ erhalten wir aus (2)
$2y = 62 - 11x = 62 - 44 = 18$, also $y = 9$.
Für $x = 5$ erhalten wir $2y = 62 - 55 = 7$, was nicht möglich ist, da y eine natürliche Zahl ist.
Daher hat die Gleichung (3) und damit auch die Gleichung (1) genau eine Lösung, die den gegebenen Bedingungen entspricht, nämlich $x = 4$, $y = 9$.
Das Geburtsjahr des Mathematikers ist daher 1949, sein Alter ist $1+9+4+9=23$ Jahre. Wir erhalten ferner $1949 + 23 = 1972$.

W 8 ■ 899 Da BD die Symmetrieachse des Drachenvierecks $ABCD$ ist, gilt $\overline{AE} = \overline{EC} = 4$ cm, $\overline{AD} = \overline{CD} = 5$ cm und $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB = 90°$. Ferner stehen die Diagonalen $\overline{BD}$ und $\overline{AC}$ aufeinander senkrecht. Wir können daher die Länge der Strecke $\overline{DE}$ nach dem Satz des Pythagoras aus dem rechtwinkligen Dreieck AED berechnen:
$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AE}^2 = 25 \text{ cm}^2 - 16 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2$,
$\overline{DE} = 3$ cm.
Nunmehr können wir nach dem Kathetensatz die Länge der Seite $\overline{BD}$ aus dem rechtwinkligen Dreieck ABD berechnen und erhalten

$$\overline{AD}^2 = \overline{DE} \cdot \overline{BD},$$

also

$$\overline{BD} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{DE}} = \frac{25}{3} \text{ cm} = 8\frac{1}{3} \text{ cm}.$$



Die gesuchte Länge der Diagonale $\overline{BD}$ beträgt also $8\frac{1}{3}$ cm.

* 8 * 900 Es sei a die Maßzahl der Länge (in km) der von dem Schiff zurückgelegten Strecke. Ferner sei x die Maßzahl der Zeit (in Stunden), die das Schiff benötigt, um eine Strecke von a km Länge in einem ruhenden Gewässer zurückzulegen, und y die Maßzahl der Zeit, in der die Strömung des Flusses – also auch ein Floß auf diesem Fluß – eine Strecke von a km zurücklegt.

Dann ist die Geschwindigkeit des Schiffes in einem ruhenden Gewässer gleich $\frac{a}{x}\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ und die Geschwindigkeit der Strömung gleich $\frac{a}{y}\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Für die Fahrt stromabwärts benötigt das Schiff $3h$, seine Geschwindigkeit beträgt also $\frac{a}{3}\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Diese Geschwindigkeit erhalten wir aber auch, wenn wir die Geschwindigkeit des Schiffes in einem ruhenden Gewässer und die Geschwindigkeit der Strömung addieren.

Es gilt also $\frac{a}{x}+\frac{a}{y}=\frac{a}{3}$. (1)

Nun erhalten wir die Geschwindigkeit des Schiffes bei der Fahrt stromaufwärts durch Subtraktion von $\frac{a}{x}$ und $\frac{a}{y}$: $\frac{a}{x}-\frac{a}{y}=\frac{a}{4}$. (2)

Hieraus erhalten wir weiter durch Addition

$$\frac{2a}{x}=\frac{a}{3}+\frac{a}{4},\quad \frac{2a}{x}=\frac{7a}{12}$$

und hieraus wegen $a\neq 0$

$$\frac{2}{x}=\frac{7}{12},\quad x=\frac{24}{7}.$$

Ferner erhalten wir durch Subtraktion aus (1) und (2)

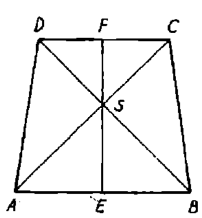
$$\frac{2a}{y}=\frac{a}{3}-\frac{a}{4},\ \text{also}\ \frac{2}{y}=\frac{1}{12},\ y=24.$$

Das Schiff benötigt also für eine gleichlange Strecke in einem ruhenden Gewässer

$$\frac{24}{7}\,\mathrm{h}=3\frac{3}{7}\,\mathrm{h}\approx 3\,\mathrm{h}\,26\,\mathrm{min}.$$

Ein Floß, das stromabwärts treibt, würde eine gleichlange Strecke in 24 h zurücklegen.

*8*901 1. Es sei $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit $\overline{AD}=\overline{BC}$, in dem die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ aufeinander senkrecht stehen. Ferner seien S der Schnittpunkt der Diagonalen und E bzw. F die Projektionen von S auf $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ (vgl. die Abb.).



Dann gilt $\sphericalangle AES=90°$ und, da EF die Symmetrieachse des Trapezes ist, $\sphericalangle ESA=45°$, also auch $\sphericalangle SAE=45°$. Daraus folgt $\overline{AE}=\overline{ES}$. Analog beweist man, daß auch $\overline{DF}=\overline{FS}$ gilt. Daher gilt

$$\overline{EF}=\overline{ES}+\overline{FS}=\overline{AE}+\overline{DE}=\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{CD}}{2}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}.$$

Damit haben wir bewiesen, daß die Höhe $\overline{EF}$ ebenso lang wie die Mittellinie ist.

2. Es sei $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit $\overline{AD}=\overline{BC}$, in dem die Höhe ebenso lang wie die Mittellinie ist, in dem also

$$\overline{EF}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}=\overline{AE}+\overline{DF}\ \text{gilt.}\qquad(1)$$

Da EF die Symmetrieachse des gleichschenkligen Trapezes ist, gilt

$$\sphericalangle AES=\sphericalangle SFD=90°,$$
$$\sphericalangle ESA=\sphericalangle FSC=\sphericalangle DSF,$$

also $\triangle AES\sim\triangle FDS$. Daraus folgt

$$\overline{ES}:\overline{FS}=\overline{AE}:\overline{DF},$$
$$\overline{ES}=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{FS}}{\overline{DF}}.\qquad(2)$$

Aus (1) und (2) erhalten wir daher

$$\overline{ES}+\overline{FS}=\overline{EF}=\overline{AE}+\overline{DF},$$
$$\frac{\overline{AE}\cdot\overline{FS}}{\overline{DF}}+\overline{FS}=\overline{AE}+\overline{DF},$$
$$\frac{\overline{FS}(\overline{AE}+\overline{DF})}{\overline{DF}}=\overline{AE}+\overline{DF},$$
$$\overline{FS}=\overline{DF}.$$

Also ist das rechtwinklige Dreieck SFD gleichschenklig, und es gilt

$$\sphericalangle FDS=\sphericalangle DSF=45°$$

Ferner ist aus Symmetriegründen auch $\sphericalangle FSC=45°$, also $\sphericalangle DSC=90°$, d. h., die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ stehen aufeinander senkrecht, w. z. b. w.

Bemerkung: Wir können die unter 1 und 2 bewiesenen Aussagen auch wie folgt zusammenfassen:

In jedem gleichschenkligen Trapez stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht genau dann, wenn die Höhe des Trapezes ebenso lang wie seine Mittellinie ist.

9▲902 Es ist zweckmäßig, zur Lösung dieser Aufgabe zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: n ist eine ungerade natürliche Zahl, also $n=2a+1$, wobei a eine natürliche Zahl mit $a\geqq 1$ ist. Dann ist auch

$$n^2=(2a+1)^2=4a^2+4a+1=2(2a^2+2a)+1=2k+1$$

eine ungerade natürliche Zahl.

Nun gilt für jede natürliche Zahl k

$$(k+1)^2-k^2=k^2+2k+1-k^2=2k+1.$$

Wir erhalten daher

$$n^2=2k+1=2(2a^2+2a)+1=(2a^2+2a+1)^2-(2a^2+2a)^2,$$

d. h., wir können das Quadrat einer jeden ungeraden natürlichen Zahl $n=2a+1$ mit $a\geqq 1$ als die Differenz der Quadrate der von Null verschiedenen Zahlen $2a^2+2a+1$ und $2a^2+2a$ darstellen. Zum Beispiel erhalten wir für

$a=1$: $3^2=5^2-4^2$,
$a=2$: $5^2=13^2-12^2$,
$a=3$: $7^2=25^2-24^2$.

2. Fall: n ist eine gerade natürliche Zahl, also $n=2a$, wobei a eine natürliche Zahl mit $a>1$ ist. Nun gilt für alle natürlichen Zahlen a

$$(a^2+1)^2-(a^2-1)^2=a^4+2a^2+1-a^4+2a^2+1=4a^2,$$

also $(2a)^2=(a^2+1)^2-(a^2-1)^2$,

d. h., das Quadrat einer jeden geraden natürlichen Zahl $2a$ mit $a>1$ läßt sich als Differenz der Quadrate der von Null verschiedenen natürlichen Zahlen a^2+1 und a^2-1 darstellen, w. z. b. w., z. B. erhalten wir für

$a=2$: $4^2=5^2-3^2$,
$a=3$: $6^2=10^2-8^2$,
$a=4$: $8^2=17^2-15^2$.

W 9 ■ 903 Es sei x eine reelle Zahl, für die die gestellten Bedingungen erfüllt sind. Nun gilt

$$f_1[f_2(x)]=f_1[5x+2]=4(5x+2)^2-1{,}3=4(25x^2+20x+4)-1{,}3=100x^2+80x+14{,}7.\qquad(1)$$

Ferner gilt

$$f_2[f_1(x)]=f_2[4x^2-1{,}3]=5(4x^2-1{,}3)+2=20x^2-4{,}5.\qquad(2)$$

Wegen $f_1[f_2(x)]=f_2[f_1(x)]$ folgt aus (1) und (2)

$$100x^2+80x+14{,}7=20x^2-4{,}5,\qquad(3)$$
$$80x^2+80x+19{,}2=0,$$
$$x^2+x+0{,}24=0.\qquad(4)$$

Diese quadratische Gleichung hat genau zwei reelle Lösungen, nämlich

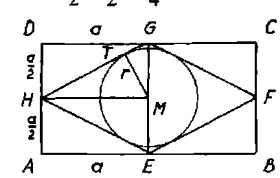
$$x_1=-0{,}5+\sqrt{0{,}25-0{,}24}=-0{,}5+\sqrt{0{,}01}=-0{,}5+0{,}1=-0{,}4,$$
$$x_2=-0{,}5-0{,}1=-0{,}6.$$

Daher sind für die reellen Zahlen $x_1=-0{,}4$ und $x_2=-0{,}6$ und nur für diese die Gleichung (4), also auch die Gleichung (3) und damit die gestellten Bedingungen erfüllt.

Es gibt also genau zwei reelle Zahlen, nämlich $x=-0{,}4$ und $x=-0{,}6$, für die $f_1[f_2(x)]=f_2[f_1(x)]$ gilt.

W 9 ■ 904 Es sei M der Mittelpunkt des Rechtecks $ABCD$, und es sei $\overline{MT}$ das von M auf die Seite $\overline{GH}$ des Rhombus $EFGH$ gefällte Lot (vgl. die Abb.). Dann ist $\overline{MT}=r$ der Radius des dem Rhombus eingeschriebenen Kreises. Man kann diesen Radius leicht berechnen; denn der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks HMG ist einerseits gleich

$$A_1=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4},$$



andererseits, wenn wir die Seite $\overline{GH}$ als Grundseite wählen, gleich

$$A_1=\frac{1}{2}\overline{GH}\cdot\overline{MT}=\frac{1}{2}\overline{GH}\cdot r.$$

Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{GH}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=\frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Wir erhalten daher

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{5}\cdot r=\frac{a^2}{4},\quad \sqrt{5}\cdot r=a,$$
$$r=\frac{a}{\sqrt{5}}=\frac{a}{5}\sqrt{5}.$$

Der Radius des eingeschriebenen Kreises ist daher gleich $r=\frac{a}{5}\sqrt{5}$; der Flächeninhalt dieses Kreises beträgt

$$A_2=\pi r^2=\pi\left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{\pi}{5}a^2.$$

*9*905 Es seien F und G die Schnittpunkte der Geraden ED mit den Geraden AC bzw. BC. Ferner sei $\sphericalangle BCA=\alpha$. Dann ist, weil die Dreiecke ABC, EAC und CBD nach Voraussetzung kongruent sind, auch $\sphericalangle ACE$

$= \sphericalangle DCB = \sphericalangle BCA = \alpha$, also $\sphericalangle DCE = 3\alpha$. Wegen $\alpha < 60°$ ist $3\alpha < 180°$. Daher ist das Fünfeck *CEABD* konvex, und die Punkte *F* und *G* sind innere Punkte dieses Fünfecks. Ferner gilt

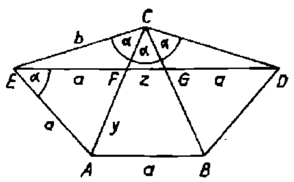
$$\sphericalangle CEA = \sphericalangle EAC = 90° - \frac{\alpha}{2} \text{ und}$$

$$\sphericalangle CED = 90° - \frac{3}{2}\alpha,$$

also $\sphericalangle FEA = \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90° - \frac{3}{2}\alpha\right) = \alpha.$

Nun ist $\sphericalangle AFE$ Außenwinkel des Dreiecks *CEF*; es gilt also

$$\sphericalangle AFE = \alpha + 90° - \frac{3}{2}\alpha = 90° - \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle EAF.$$



Daher ist auch das Dreieck *EAF* gleichschenklig, und wir erhalten $\overline{EF} = \overline{EA} = a$.
Andererseits gilt $\triangle EAF \sim \triangle CEA$.
Wir erhalten also, wenn wir $\overline{AF} = y$ setzen,

$$y : a = a : b,$$

$$y = \frac{a^2}{b}.$$

Setzen wir ferner $\overline{FG} = z$, so erhalten wir wegen $FG \parallel AB$ nach dem Strahlensatz

$$z : a = (b - y) : b,$$

$$z = \frac{a(b-y)}{b} = \frac{a\left(b - \frac{a}{b}\right)^2}{b} = \frac{a(b^2 - a^2)}{b^2}.$$

Nun gilt $\overline{EF} = \overline{GD} = a$, also

$$\overline{ED} = \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GD} = 2a + z$$

$$= 2a + \frac{a(b^2 - a^2)}{b^2} = \frac{2ab^2 + ab^2 - a^3}{b^2}$$

$$= \frac{3ab^2 - a^3}{b^2}, \text{ also } \overline{ED} = \frac{a(3b^2 - a^2)}{b^2}.$$

Bemerkung: Wir haben diese Aufgabe auf elementargeometrischem Wege gelöst. Wir können die Aufgabe aber auch mit Hilfe der Trigonometrie lösen. Für eine solche Lösung, die etwas komplizierter ist, benötigen wir die Formel für $\cos 3\alpha$ und den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie. Wir erhalten nämlich, wenn wir dieselben Bezeichnungen wie oben wählen,

$$\overline{ED}^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cos 3\alpha = 2b^2(1 - \cos 3\alpha).$$

Nun gilt

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2b}, \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{a^2}{2b^2}, \text{ also}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$= 4\left(1 - \frac{a^2}{2b^2}\right)^3 - 3\left(1 - \frac{a^2}{2b^2}\right)$$

$$= 4\left(1 - \frac{3a^2}{2b^2} + \frac{3a^4}{4b^4} - \frac{a^6}{8b^6}\right) - 3 + \frac{3a^2}{2b^2}$$

$$= 1 - \frac{9a^2}{2b^2} + \frac{3a^4}{b^4} - \frac{a^6}{2b^6}. \text{ Daraus folgt}$$

$$\overline{ED}^2 = 2b^2(1 - \cos 3\alpha)$$

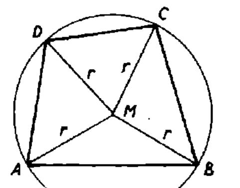
$$= 2b^2\left(\frac{9a^2}{2b^2} - \frac{3a^4}{b^4} + \frac{a^6}{2b^6}\right)$$

$$= a^2\left(9 - \frac{6a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}\right) = a^2\left(3 - \frac{a^2}{b^2}\right)^2$$

und hieraus wegen $3b^2 > a^2$

$$\overline{ED} = a\left(3 - \frac{a^2}{b^2}\right) = \frac{a(3b^2 - a^2)}{b^2} \text{ wie oben.}$$

* 9 * 906 Es sei *ABCD* ein Sehnenviereck, dessen Umkreis den Mittelpunkt *M* und den Radius *r* hat (vgl. die Abb.).



Dann gilt für den Flächeninhalt dieses Sehnenvierecks

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$

wobei A_1, A_2, A_3, A_4 die Flächeninhalte der Dreiecke *MAB, MBC, MCD, MDA* sind. Ist h_a die Länge der von *A* ausgehenden Höhe in dem Dreieck *BMA*, so gilt

$$A_1 = \frac{1}{2} r\, h_a;$$

denn wenn wir die Seite $\overline{MB}$ als Grundseite wählen, ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks gleich dem halben Produkt aus der Länge *r* der Grundseite und der Länge h_a der zugehörigen Höhe. Nun ist aber $h_a \leqq r$; denn in jedem Dreieck ist eine Höhe kleiner als jede der ihr anliegenden Seiten. Wir erhalten daher

$$A_1 \leqq \frac{1}{2} r^2.$$

Analog erhalten wir die Ungleichungen

$A_2 \leqq \frac{1}{2} r^2$, $A_3 \leqq \frac{1}{2} r^2$, $A_4 \leqq \frac{1}{2} r^2$. Daher gilt

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$\leqq \frac{1}{2}(r^2 + r^2 + r^2 + r^2) = 2r^2, \text{ w.z.b.w.}$$

Bemerkung: Wir können den Beweis auch trigonometrisch führen. Wir erhalten nämlich

$$A_1 = \frac{1}{2} r^2 \sin\varphi_1 \leqq \frac{1}{2} r^2, \text{ wobei}$$

$$\varphi = \sphericalangle BMA \text{ und } \sin\varphi_1 \leqq 1 \text{ gilt.}$$

Wie oben erhalten wir dann weiter die Ungleichungen

$$A_2 \leqq \frac{1}{2} r^2, \; A_3 \leqq \frac{1}{2} r^2, \; A_4 \leqq \frac{1}{2} r^2$$

und hieraus

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \leqq 2r^2.$$

10 ▲ 907 Die Ungleichung (3) ist noch richtig: $n \lg q > (n+1) \lg q$.
Dabei ist aber $\lg q$ negativ, weil $0 < q < 1$ gilt. Nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation für Ungleichungen ist aber, wenn man auf den beiden Seiten einer Ungleichung mit der gleichen negativen Zahl $\left(\text{hier } \frac{1}{\lg q}\right)$ multipliziert, das Zeichen $>$ durch das Zeichen $<$ zu ersetzen, was bei der falschen Schlußweise oben nicht beachtet worden ist. Daher ergab sich die falsche Ungleichung $n > n+1$. Richtig folgt aus der Ungleichung (3)

$$n < n + 1.$$

W 10 ■ 908 Es gilt

$$z = 10^{1971} + 1 = 10^{657 \cdot 3} + 1$$

$$= (10^{657})^3 + 1^3.$$

Nun gilt für alle reellen Zahlen *a* und *b* (vgl. Tafelwerk, 7.–12. Klasse, S. 57)

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Wir setzen $a = 10^{657}$, $b = 1$ und erhalten hieraus

$$z = (10^{657} + 1)(10^{657 \cdot 2} - 10^{657} + 1).$$

In dieser Zerlegung sind beide Faktoren ganzzahlig und größer als 1; daher ist *z* keine Primzahl, w.z.b.w.

W 10 ■ 909 Es sei $\overline{AC} = x$, $\overline{CB} = y$, $\overline{CD} = z$. Dann ist der Flächeninhalt des Kreises mit $\overline{CD}$ als Durchmesser (vgl. die Abb.) gleich

$$A_1 = \frac{\pi}{4} z^2. \tag{1}$$

Ferner sind die Flächeninhalte der Halbkreise über $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ gleich

$$A_2 = \frac{\pi}{8}(x+y)^2, \quad A_3 = \frac{\pi}{8} x^2, \quad A_4 = \frac{\pi}{8} y^2. \tag{2}$$

Daher ist der Flächeninhalt der in der Abbildung waagrecht schraffierten, durch die drei Halbkreisbogen begrenzten Figur gleich

$$A_5 = A_2 - A_3 - A_4 = \frac{\pi}{8}(x+y)^2 - \frac{\pi}{8} x^2 - \frac{\pi}{8} y^2$$

$$= \frac{\pi}{8}(x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - y^2)$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot 2xy = \frac{\pi}{4} xy. \tag{3}$$

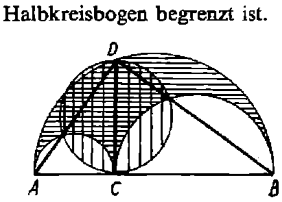
Nun ist nach dem Thalessatz das Dreieck *ABD* rechtwinklig; daher gilt nach dem Höhensatz

$$z^2 = xy.$$

Wir erhalten daher wegen (1) und (3)

$$A_1 = \frac{\pi}{4} z^2 = \frac{\pi}{4} xy = A_5. \tag{4}$$

Der Flächeninhalt des senkrecht schraffierten Kreises mit $\overline{CD}$ als Durchmesser ist also gleich dem Flächeninhalt der in der Abbildung waagrecht schraffierten Figur, die durch die drei Halbkreisbogen begrenzt ist.



* 10 * 910 Es sei *x* eine natürliche Zahl von der geforderten Eigenschaft; dann gilt

$$x^2 = 864n = 2^5 \cdot 3^3 \cdot n,$$

wobei *n* eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. x^2 ist also teilbar durch 2^5 und 3^3; daher ist *x* teilbar durch 2^3 und 3^2, also, da 2 und 3 teilerfremd sind, durch $2^3 \cdot 3^2 = 72$. *x* ist also ein Vielfaches von 72; es gilt daher $x = 72$ m, wobei *m* wegen $x \neq 0$ eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. Andererseits gilt für jede natürliche Zahl $x = 72m$

$$x^2 = (72m)^2 = 72^2 m^2 = 72 \cdot 12 \cdot 6m^2$$

$$= 864 \cdot 6m^2, \text{ d. h.}$$

x^2 ist ein Vielfaches von 864.
Daher haben alle natürlichen Zahlen, die von Null verschieden, Vielfache von 72 und kleiner als 864 sind, und nur diese Zahlen, die geforderte Eigenschaft, also genau die Zahlen 72, 144, 216, 288, 360, 432, 504, 576, 648, 720, 792.

Lösungen zu
Mit Zirkel und Zeichendreieck (5/72)

Figur 1: Quadratfläche Rosette
Verhältnis $1:(\pi-2)$
Figur 2: Quadratfläche vier Möndchen
Verhältnis 1:1
Figur 3: Quadratfläche zwei Möndchen
Verhältnis 2:1
Figur 4: Schraffierte Fläche $A=r^2(4-\pi)$
Figur 5: Die schraffierte Fläche beträgt die Hälfte des großen Quadrats
Figur 6: Die schraffierte Fläche beträgt $2r^2$ bzw. die Hälfte der Quadratfläche

Lösungen zu alpha-heiter (Heft 6/72)

Magischer Würfel

Die Summe der vier Zahlen in den Ecken eines jeden Seitenquadrates des Würfels sei s. Zwei einander gegenüberliegende Quadrate enthalten alle acht Zahlen, also ist $2s$ gleich der Summe der Zahlen von 1 bis 8:
$2s=36$ $s=18$.
Wir ordnen ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit der Würfelecke rechts oben vorn die Zahl 1 zu. Von diesem Punkt gehen drei Kanten aus nach drei Punkten mit den Zahlen a, b, c (Bild 1).
Werden die Quadrate, von außen gesehen, rechtsherum umlaufen, so erhalten wir geordnete Zahlenfolgen, wobei jeweils die dritte Zahl durch einen Punkt angedeutet wird.
Oberes Quadrat $1a \cdot b$
Vorderes Quadrat $1b \cdot c$
Seitliches Quadrat $1c \cdot a$
Wir erkennen, daß die drei Folgen paarweise gekoppelt sind durch die Zahlen a, b, c. Nunmehr stellen wir mit vier Zahlen alle Kombinationen auf, die die Zahl 1 enthalten und die Summe $s=18$ haben.
I. 1278 II. 1368 III. 1458 IV. 1467
Mit je drei von ihnen bilden wir geordnete Zahlenfolgen nach dem obigen Schema.

II 1638	I 1728	I 1728
III 1854	III 1854	II 1836
IV 1476	IV 1467	IV 1647

Die Zahlenkombinationen I, II, II lassen sich nicht koppeln; sie enthalten schon alle acht Zahlen.
Es gibt somit drei verschiedene Zuordnungen der Zahlen 1 bis 8 auf die Ecken eines Würfels derart, daß die Summe der vier Zahlen in den Ecken eines jeden Seitenquadrats 18 ist. (Bild 2, 3, 4)

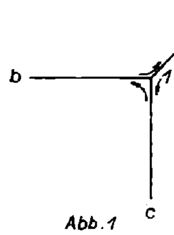


Abb. 1

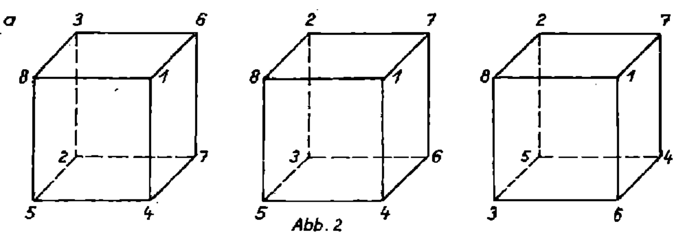
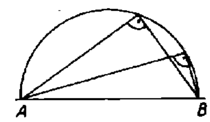


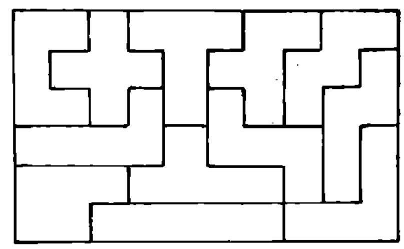
Abb. 2

Aus der Zeit des Adam Ries

A. Ries hatte in der Zwischenzeit längst den Thaleskreis über $\overline{AB}$ geschlagen und konnte so mit großer Geschwindigkeit einen rechten Winkel nach dem anderen zeichnen. *A. Ries* hatte also – statt des Zirkels am Hut – die Konstruktionen im Kopf.



Legespiel



Turmsprung

In jedem Drachenviereck stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.

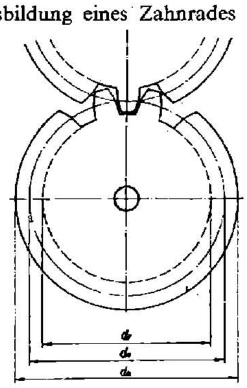
Kryptarithmetik

10	+	5	=	15
÷		+		–
5	–	4	=	1
÷		+		–
4	+	6	=	10
19	–	15	=	4

Vero Construc

für die Schöpfer der Welt von morgen

Skizze zur Ausbildung eines Zahnrades



Teilnehmer des alpha-Clubs der 29. OS Leipzig beim Bau von Modellen nach eigener Fantasie.

Wir Erwachsenen haben als 10- und 12jährige mit dem Metall-Konstruktionsbaukasten gespielt, mit Lochstäben, Schrauben, Muttern, Schraubenziehern, Mutternschlüsseln. Heute jonglieren die 10- bis 12jährigen schon mit ganz anderen Begriffen herum: Schaltung, Relais, Transistor; und schon die Dreikäsehochs, die noch nicht zur Schule gehen, wollen nicht mehr nur Bauklötzchen auf Bauklötzchen legen, sie wollen schon an Vatis Werkzeugschrank, wollen konstruieren und erfinden.

Für diese Jungen Techniker wurde in den 60er Jahren in einer Seiffener Spielzeugentwicklungsstelle das „bau-mit"-System entwickelt, eine Vorstufe des Vero-Construc. In den guten alten Bauklotzwürfel wurden Gewindelöcher gebohrt, er wurde zum Knotenstück. Dazu kamen Leisten mit Löchern, große Schrauben und Muttern, den aus z. T. farbig gebeiztem Buchenholz. Bald merkten die Spielzeuggestalter, daß sich aus dem System viel mehr machen ließ, daß es sich schnell nach allen Regeln der Technik ausbauen ließ.

Beim Würfel fing es wieder an. Aus seiner Kantenlänge ergab sich der Grundraster, sie war bisher 30 mm. 30 war aber keine Vorzugszahl, beim Raster 30 würden viele Rechenexempel nicht aufgehen, z. B. wenn einmal Zahnräder entwickelt werden. Es müßte ein 32er Würfel sein, das ging aber aus produktionstechnischen Gründen nicht. Schweren Herzens blieb man beim Raster 30. Kantenlänge des Würfels und Lochabstand bei den Lochleisten waren die Bezugspunkte.

VC 100 und VC 200 erschienen in den Spielzeuggeschäften – Baukästen mit Gewindewürfeln, – Quadern und Lochleisten aus gebleichtem Buchenholz, Schrauben, Muttern, Gewindestäben, Felgen, Bereifung aus farbenfreudigen Plasten. Dann kamen also die Zahnräder.

Wenn Kinder elementare, mechanische Funktionen kennenlernen sollten, kam man um Zahnräder nicht herum. Übersetzung und Untersetzung sollten veranschaulicht werden, die Zahnradgrößen mußten so abgestuft sein, daß sich die Veränderung der Drehbewegung entsprechend der Größe des Zahnrades klar erkennen läßt. Drei Zahnräder sollten es deshalb sein, die große Toleranzen zulassen, denn für diesen Baukasten mit seinen vielen Holzteilen waren große Passungen notwendig.

Es kam nur ein großer Modul (Zahnteilung) in Frage, große Zähne, die ihren Zweck erfüllten, auch wenn die Toleranz der Achsabstände ± 1 mm betrug. Verschiedene Forderungen mußten also in Einklang gebracht werden. Auf dem 30er Raster wurden 3 verschieden große sich berührende Kreise gefunden, die Teilkreise (d_0 [d Null]) der Zahnräder, die sich durch den geforderten Modul 6 (m 6) teilen lassen. $m\,6 = 6 \cdot \pi = 18{,}84$ mm von Zahnmitte zu Zahnmitte auf den Teilkreis bezogen.

Die Teilkreise sind: ⌀36, ⌀78, ⌀96 mm

Die Zähnezahl (Z) wird errechnet: $Z = \frac{d_0}{m}$

Beispiel: Rad $2 = 78 : 6 = 13$ Zähne

Den Modul 6 auf ⌀36 (Rad 1) anzuwenden, unterschreitet die Grenze des technisch Möglichen. Es wird ein sogenanntes korrigiertes Zahnrad verwendet, bei dessen Berechnung noch andere Grundsätze beachtet werden müssen. Es kann deshalb für unser Rechenexempel nur als theoretisches Beispiel dienen.

Ergebnisse: Rad $1 = 6$; Rad $2 = 13$; Rad $3 = 16$ Zähne

Nach diesen Ergebnissen wurden die Kopfkreise (d_k) und die Fußkreise (d_f) ermittelt, die die Begrenzung der Zähne nach oben und unten angeben:

$$d_k = (Z+2) \cdot m$$
$$d_f = (Z-2{,}5) \cdot m$$

Beispiel:

$d_k\,1 = (6+2) \cdot 6 = 8 \cdot 6 = 48$ mm

$d_f\,1 = (6-2{,}5) \cdot 6 = 3{,}5 \cdot 6 = 21$ mm

Die Durchmesser des 1. Zahnrades müßten also sein:

$d_0 = 36$ mm; $d_k = 48$ mm; $d_f = 21$ mm

Mit Rücksicht auf die großen Toleranzen des Systems mußten die Ergebnisse jedoch etwas abgewandelt werden.

VC 300 heißt der Kasten mit den bunten Zahnrädern.

Mit dem Motor VC 400 und dem dazugehörigen Batteriekasten werden alle Construc-Modelle zum Leben erweckt. Die vorgegebene Form des Motorgehäuses, abgeleitet aus dem Raster, war $30 \times 30 \times 120$ mm. Aus dem Innenquerschnitt 27 mm ergab sich die maximale Größe des Motors, in Frage kam ein Motor – für 4,5 V Batterie – mit dem Durchmesser 27 mm, der Leistung von 14 cm p bei 2400 U/min. Die Aufgabe bestand nun darin, in dem noch verbliebenen Gehäuseraum von $39\text{ mm} \times 27\text{ mm} \times 27$ mm (Motorritzel – Mitte bis Ausgang – Mitte) ein Getriebe unterzubringen, das 2400 U/min auf ca. 100 U/min reduziert. Das wurde so erreicht:

1. Das Motorritzel mit der Zähnezahl Z 10 überträgt 2400 U/min auf ein Tellerrad mit Z 36.

$$36 : 10 = 3{,}6$$
$$2400 : 3{,}6 = 667 \text{ U/min}$$

2. Das Tellerrad hat 667 U/min. Am Tellerrad ist ein Ritzel Z 10 befestigt, das also ebenfalls 667 U/min hat. Das Ritzel überträgt die Bewegung auf das 1. Stirnrad Z 38.

$$38 : 10 = 3{,}8$$
$$667 : 3{,}8 = 175 \approx 180 \text{ U/min}$$

3. Am 1. Stirnrad ist das 2. Stirnrad Z 16 befestigt, das die Bewegung (180 U/min) auf das 3. Stirnrad Z 30 überträgt.

$$30 : 16 = 1{,}8$$
$$180 : 1{,}8 = 100 \text{ U/min}$$

Die Kraftübertragung mußte so gewählt werden, daß bei Anschluß der Plastezahnräder VC 300 an den fertigen Motor keine Gefahren durch Einklemmen entstehen. Wenn also ein Finger oder Hemdzipfel zwischen die bunten, rotierenden Zahnräder gerät, hält der Motor sofort an. Trotzdem ist er stark genug, die verschiedensten Maschinen aus Construc-Teilen anzutreiben.

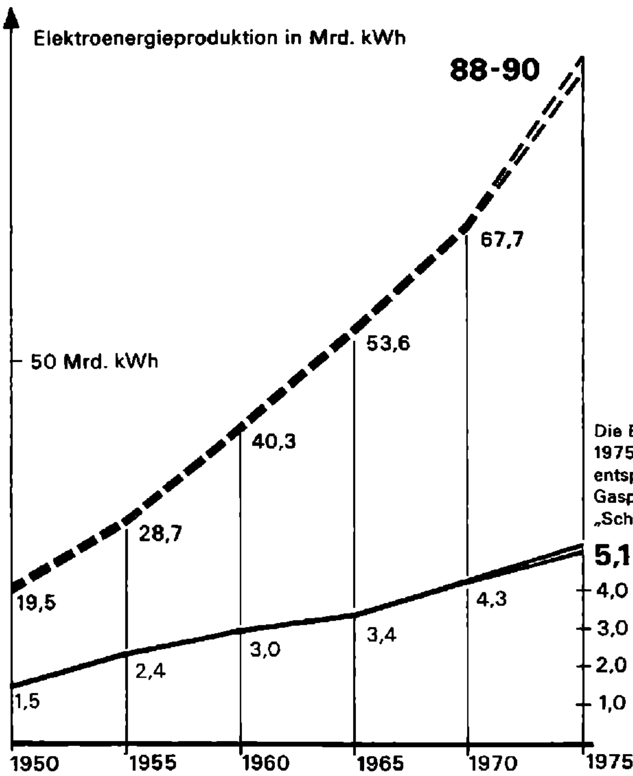
Was lag nun näher, als mit dem Motor Fahrzeuge zu bauen?

VC 210 bringt dafür spanlos verformte Holzteile, mit denen sich Fahrzeuge bauen lassen. Im VC 500 sind die verschiedensten Beleuchtungselemente, mit denen sich Scheinwerfer, Blinkleuchten, beleuchtete Verkehrsschilder usw. montieren lassen.

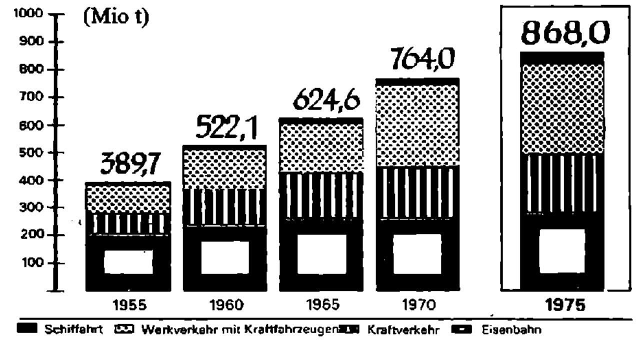
Die neueste Entwicklung, der VC 220, enthält Glieder für Raupenfahrzeugketten und Baggerschaufeln, die, mit den Ketten kombiniert, Schaufelbänder für Bagger ergeben. Die Kettenglieder, nach dem Raster 30×15 mm groß, lassen sich nach einem einfachen Prinzip zusammenstecken und mit den bereiften Rädern in das System einfügen. Das Vero-Construc-System ist also genau das Richtige für die kleinen Konstrukteure, es gibt den 5jährigen und auch den 12jährigen Gelegenheit zu vielen kniffligen Knobelaufgaben.

B. Scheithauer

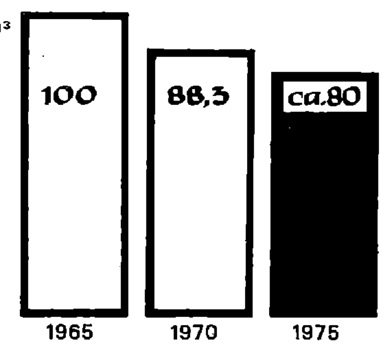
Entwicklung der Energiewirtschaft



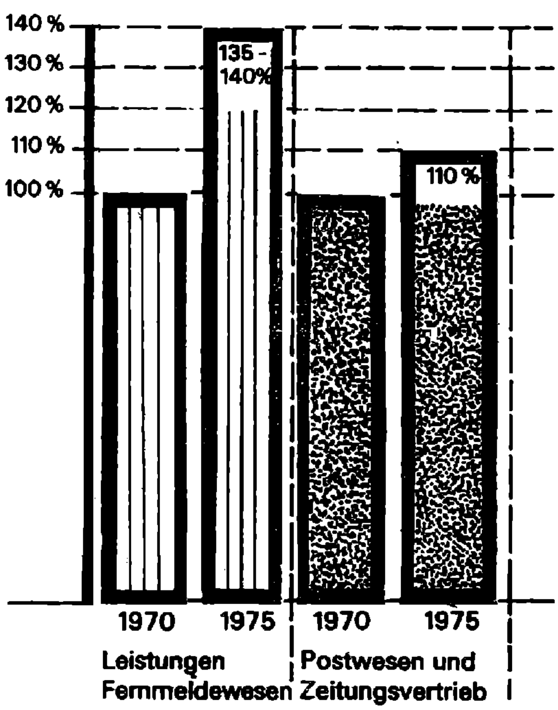
Entwicklung des Verkehrswesens



Der spezifische Verbrauch an Elektroenergie, bezogen auf die Warenproduktion in der Industrie, ist jährlich um 2 Prozent zu senken.

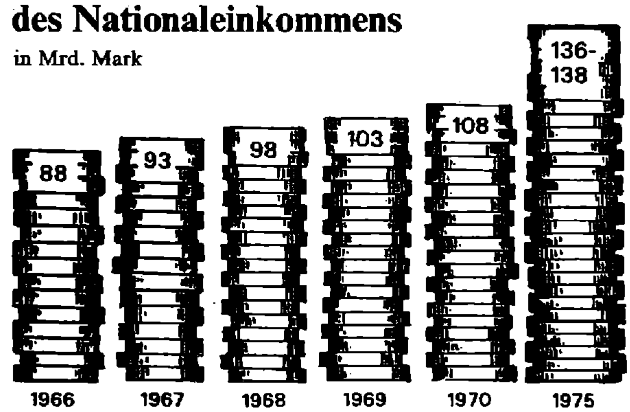


Entwicklung im Post- und Fernmeldewesen



Entwicklung des Nationaleinkommens

in Mrd. Mark



Das vorliegende Material wurde entnommen aus: „Arbeitsmaterial zur Direktive des VIII. Parteitages der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands zum Fünfjahrplan für die Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR 1971 bis 1975", herausgegeben von der Parteihochschule „Karl Marx" beim ZK der SED, erschienen im Verlag *Die Wirtschaft*, Berlin.

Preis der Mappe 6,20 M geblockt einseitig bedruckt. Auf 62 Tafeln wird mit mehrfarbigen Schaubildern und graphischen Darstellungen die Direktive zum Fünfjahrplan erläutert. Hervorragend für Unterricht, außerunterrichtliche Arbeit, insbesondere für Wandzeitungen geeignet.

Das Buch — unser Freund und Helfer

Autorenkollektiv

Rund um die Mathematik

160 Seiten, zahlreiche Abb., cellophaniert, 20 cm × 29 cm Pappeinband, 9,80 M

Der Kinderbuchverlag Berlin

A. Ewert

Modernes Stabrechnen

197 Seiten, 218 Bilder, 163 durchgerechnete Beispiele und 9 Tabellen. 14,7 cm × 21,5 cm Halbgewebeeinband, 8,50 M

VEB Fachbuchverlag Leipzig

v. Mangoldt

Einführung in die höhere Mathematik, Bd. I

564 Seiten, 116 Abb., 15,5 cm × 23 cm Leinen, 22,00 M

S. Hirzel Verlag Leipzig

W. Göhler

Höhere Mathematik Formeln — Hinweise — Kleiner Wissensspeicher

105 Seiten, 16,5 cm × 23 cm kartoniert, 6,80 M

VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig

E. Salkowski

Darstellende Geometrie

210 Seiten, 371 Abb., 16,5 cm × 23 cm, gebunden, 9,50 M

Verlag Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G.

A. I. Markuschewitsch

Mathematische Aufgabensammlung: Geometrie

246 Seiten, zahlreiche Abb., Halbleinen, 16,5 cm × 23 cm, 7,80 M

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Aus dem Inhalt: Einführung in die Geometrie – Ähnlichkeitslehre, Flächenberechnung – Trigonometrie – Stereometrie – Darstellende Geometrie – Analytische Geometrie – Vektorrechnung

J. Flachsmeyer

Kombinatorik

Einführung in die mengentheoretische Denkweise

230 Seiten, 45 Abb., 14,5 cm × 20,5 cm, Pappeinband, 15,00 M

EB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

B. Klotzek

Geometrie

318 Seiten, 322 Abb., 16,5 cm × 23 cm, cellophaniert, Pappeinband, 19,80 M

VEB Verlag der Wissenschaften Berlin

Grabowski/Fucke/Schroedter

Praktische Mathematik

(Hilfsmittel und Verfahren)

438 Seiten, 47 Bilder, 5 Tafeln, 203 Beispiele, 16,5 cm × 23 cm Ganzgewebeeinband, 23,80 M

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Z. Pawlowski

Einführung in die mathematische Statistik

441 Seiten, zahlreiche Abb., 14,5 cm × 20,0 cm, Halbleinen 39,00 M

Verlag die Wirtschaft Berlin

Körth/Förster

Mathematik für Wirtschaftskaufleute

360 Seiten, zahlreiche graphische Darstellungen und Aufgaben, 15,0 cm × 20,0 cm Pappeinband, 10,25 M

Verlag Die Wirtschaft Berlin

Autorenkollektiv

Arbeitsblätter für die Berufsausbildung

Grundlagen der Datenverarbeitung, 2,50 M

Verlag Die Wirtschaft Berlin

E. Hofmann

Wörterbuch: Datenverarbeitung

englisch – deutsch; deutsch – englisch

13000 Stichworte, Halbleinen 12,60 M

Verlag Die Wirtschaft Berlin

J. A. Belik

Die Wirtschaft der UdSSR im neunten Planjahrfünft

80 Seiten, Broschur, 2,50 M

Verlag Die Wirtschaft Berlin

K. Reich

Das goldene 1 × 1

24 Seiten, Halbleinen, 5,80 M

Ein Buch, das Vorschulkinder in das Reich der Zahlen 1 bis 10 führt. (Als Geschenk größerer Geschwister für ihre kleinen Geschwister.)

Der Kinderbuchverlag Berlin

R. Gullasch

Denkpsychologische Analysen mathematischer Fähigkeiten

224 Seiten, 27 Abb., 6,60 M

VEB Volkseigener Verlag Volk und Wissen

B. N. Iwanow

Die neue Physik

Die grundlegenden Prinzipien der modernen Physik

135 Seiten, kartoniert, 5,60 M

VEB Volkseigener Verlag Volk und Wissen Berlin

L. D. Landau/Ju. B. Rumer

Was ist die Relativitätstheorie?

58 Seiten, 17 Abb., 12 cm × 19 cm, kartoniert 3,60 M

Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig

G. Pippig

Zur Entwicklung mathematischer Fähigkeiten

272 Seiten, 22 Abb. (graphische Darstellungen), 7,00 M

VEB Volkseigener Verlag Volk und Wissen Berlin

Gilde/Starke

Ideen muß man haben

158 Seiten, 24 Zeichnungen, Pappband, 3.80 M

Für eine immer größere Fülle von Aufgaben, zur Bewältigung unzähliger Probleme werden neue Lösungswege gesucht: Ideen darüber, was erfunden, was verändert, was in Zukunft und auch schon heute für die Zukunft getan werden muß.

Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Dr. J. Riechert und K. Schwarz

Erfolgreich studieren — sich qualifizieren

Eine Anleitung

200 Seiten, 25 Bilder, 19,7 cm × 21,5 cm, kartoniert, 7,80 M

VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Berlin