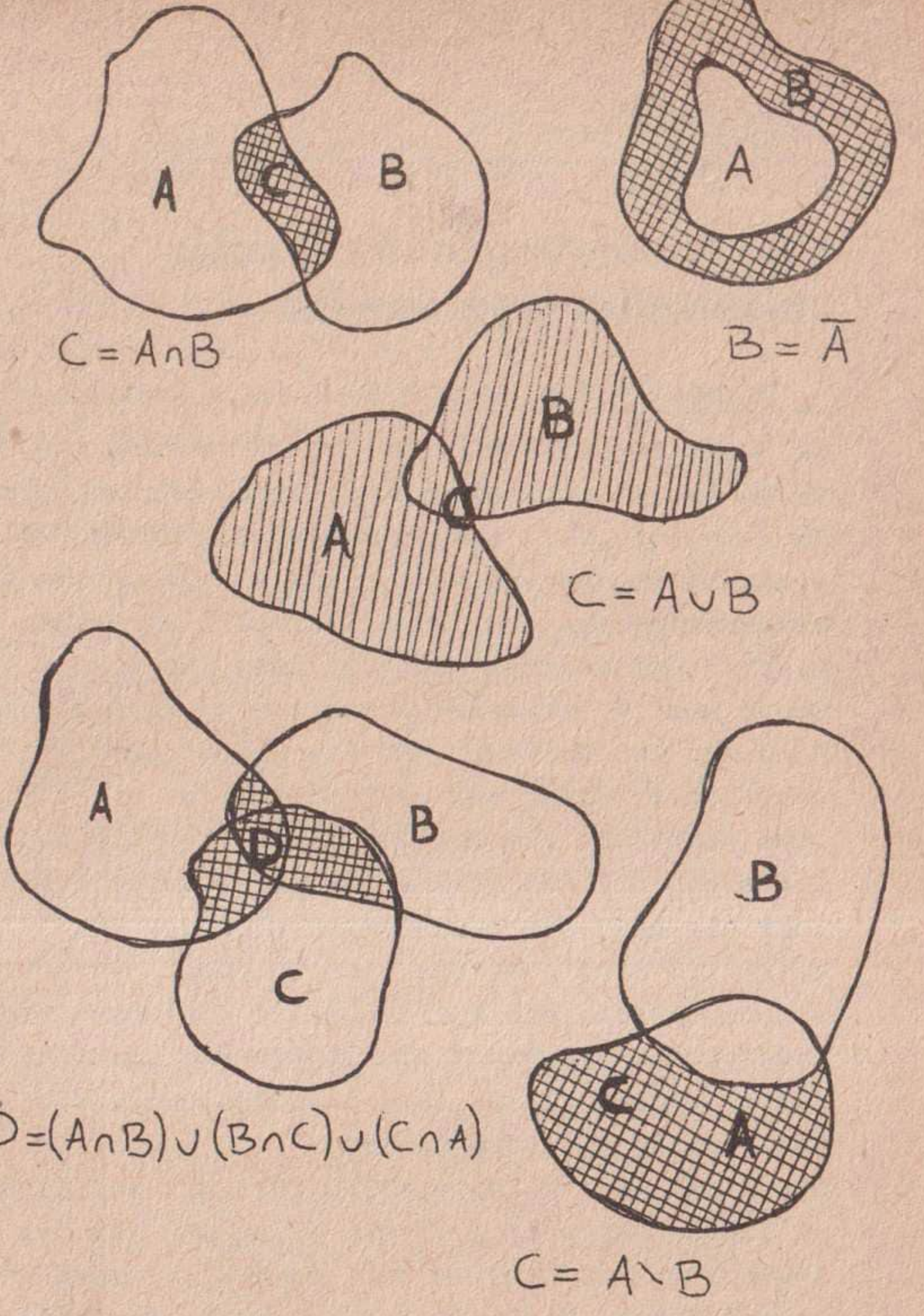


1
77

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

11. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Eine Einführung in die Theorie universeller Algebren (II)

4. Spezielle Algebren

Im Punkt 2. haben wir mit der Einführung des Begriffes der universellen Algebra ausgehend von konkreten Strukturen (z. B. $[\mathbb{N},\{+\}]$, $[\mathfrak{S}_3,\{\circ\}]$ usw.) im gewissen Sinne die größtmögliche Abstraktion vorgenommen, indem wir lediglich die Tatsache verallgemeinerten, daß es sich hierbei um Mengen mit darauf definierten Operationen handelt, ohne daß wir in $[A,\Omega]$ an die Elemente aus Ω irgendwelche weiteren Forderungen stellten.
Wenn man nun fordert, daß die Operationen wohlbestimmte Eigenschaften erfüllen sollen (Axiome), so bleibt das nach wie vor eine sinnvolle Abstraktion, falls nur die Klasse der universellen Algebren, die gerade die geforderten Eigenschaften besitzen, mehr als einen Repräsentanten enthält.
Hier wird aber auch der Sinn solcher Abstraktion deutlich: Eigenschaften, die man lediglich auf Grund der Klassenaxiome beweisen kann, gelten dann notwendig auch für alle Repräsentanten dieser Klasse (und brauchen nicht für jeden Repräsentanten einzeln bewiesen werden).
Dem Leser dieser Zeitschrift sind mit dem Begriff der Halbgruppe (siehe "Wurzel" 2/74 und 3/74) und dem der Gruppe (siehe "Wurzel" 5/74) bereits zwei solcher Klassen universeller Algebren bekannt. Wir wollen hier keine neuen Klassen angeben, bzw. keine Theorie der Gruppen oder Halbgruppen betrieben, sondern diese einfachen Beispiele hier einordnen.
Dabei schreiben wir für eine zweistellige Operation $*$ statt $*(a,b)$ auch $a*b$

D e f i n i t i o n 15 : Eine universelle Algebra $[A,\{*\}]$ heißt Halbgruppe $=_{Df}$

1. $n(*) = 2$
2. $*$ ist assoziativ, d.h. für Elemente a,b,c aus A gilt $a*(b*c) = (a*b)*c$

<u>D e f i n i t i o n 16:</u> Eine universelle Algebra $[A,\{*\}]$ heißt Gruppe $=_{Df}$

1. $[A,\{*\}]$ ist Halbgruppe
2. Es existiert in A ein (neutrales) Element e, so daß für alle a aus A gilt $a*e = e*a = a$.
3. Zu jedem Element a aus A existiert ein (inverses) Element a^{-1} aus A, so daß gilt $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

Damit ist insbesondere also jede Gruppe eine Halbgruppe, aber nicht jede Halbgruppe eine Gruppe.

<u>Beispiel 17:</u> a) $[\mathbb{N},\{+\}]$ ist Halbgruppe, aber keine Gruppe (Eigenschaft 3. in Def. 16 nicht erfüllt)

b) $[\gamma_3,\{\circ\}]$ ist Gruppe ($e = \pi_1$)

c) $[\mathbb{Z},\{+\}]$ ist Gruppe.

Der folgende einfache Satz, der allein auf dem Axiom der Halbgruppe basiert, soll ein Beispiel zur Bekräftigung unserer Aussagen über den Sinn der hier (mit dem Begriff der Halbgruppe) betriebenen Abstraktion sein.
In einer Halbgruppe war nicht die Existenz eines neutralen Elementes e gefordert. Es gilt aber folgender

<u>S a t z 18 :</u> Eine Halbgruppe $[A,\{*\}]$ kann höchstens ein neutrales Element besitzen.

<u>Beweis:</u> Sind e_1, e_2 neutrale Elemente in $[A,\{*\}]$, so ist
$e_1*e_2 = e_1$, weil e_2 neutrales Element ist, und
$e_1*e_2 = e_2$, weil e_1 neutrales Element ist, also ist
$e_1 = e_2$.

Da wir nun wissen, daß jede Gruppe eine Halbgruppe ist, in der wenigstens ein neutrales Element existiert, erhalten wir unmittelbar

<u>F o l g e r u n g 19:</u> In jeder Gruppe gibt es genau ein neutrales Element. Bezogen auf unser Beispiel 17 heißt das sofort für die dort angegebenen konkreten Algebren (auf Grund der Einfachheit der Beispiele wußten wir das natürlich schon vorher): In $[\mathbb{N},\{+\}]$ gibt es höchstens ein neutrales Element bzgl. der Addition, während es in $[\mathbb{Z},\{+\}]$ bzw. in $[\gamma_3,\{\circ\}]$

genau ein neutrales Element bzgl. der Addition bzw. der Hintereinanderausführung von Abbildungen gibt.

Übungsaufgabe 20:

a) Zeigen Sie, daß in jeder Gruppe $[A,\{*\}]$ für a aus A das inverse Element a^{-1} eindeutig bestimmt ist.

b) Zeigen Sie, daß in einer Gruppe $[A,\{*\}]$ für a und b aus A stets gilt: $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$.

c) Verdeutlichen Sie sich a) und b) an den Beispielen 17b und c).

Wenn wir im Punkt 3. alle zueinander homomorphen Algebren als "ähnliche Strukturen" beschreibend herausarbeiteten, wenn man vermöge Homomorphismen strukturelle Gemeinsamkeiten von algebraischen Strukturen hervorheben kann, so wird das durch folgenden Satz untermauert (der analog auch für andere speziellere Algebren gilt):

Satz 21: Sei $[A,\{*\}]$ eine Halbgruppe und φ ein Homomorphismus auf eine gleichartige Algebra $[\hat{A},\{\oplus\}]$, so ist auch $[\hat{A},\{\oplus\}]$ Halbgruppe.

Beweis: Wir haben uns von der Assoziativität von $\oplus$ zu überzeugen. Seien a,b,c Elemente aus $\hat{A}$.
Dann existieren in A Elemente x,y,z mit $\varphi(x) = a$, $\varphi(y) = b$ und $\varphi(z) = c$. Also gilt, da $[A,\{*\}]$ Halbgruppe und φ Homomorphismus ist:

$$\underline{a \oplus (b \oplus c)} = \varphi(x) \oplus (\varphi(y) \oplus \varphi(z)) = \varphi(x) \oplus \varphi(y*z)$$
$$= \varphi(x*(y*z)) = \varphi((x*y)*z) = \varphi(x*y) \oplus \varphi(z)$$
$$= (\varphi(x) \oplus \varphi(y)) \oplus \varphi(z) = \underline{(a \oplus b) \oplus c}$$

Übungsaufgabe 22:

Zeigen Sie, daß unter der Voraussetzung, daß $[A,\{*\}]$ eine Gruppe und φ ein Homomorphismus auf eine gleichartige Algebra $[\hat{A},\{\oplus\}]$ ist, $[\hat{A},\{\oplus\}]$ wieder eine Gruppe darstellt.

Hinweis: Zeigen Sie, daß das Element $\varphi(e)$ das neutrale Element in $[\hat{A},\{\oplus\}]$ ist, falls e das neutrale Element in $[A,\{*\}]$ ist und daß $\varphi(a^{-1})$ bzgl. $\oplus$ das Inverse von $\varphi(a)$ für a aus A ist, wobei a^{-1} das Inverse von a bzgl. $*$ ist.

Wenn Sie die Übungsaufgabe 22 gelöst haben, erhalten Sie mit

Beispiel 17b) und Folgerung 10 sofort, daß $[\{0,1\},\{+\}]$ aus Beispiel 5b) eine Gruppe ist.

Abschließend möchten wir noch auf einen Sachverhalt (ohne diesen hier näher ausführen zu können) verweisen, der die Bedeutung der Homomorphismen als "strukturinvariante" Abbildungen sehr plastisch unterstreicht, indem er im gewissen Sinne die Umkehrung der Behauptungen von Satz 21 und Übungsaufgabe 22 darstellt. Dazu benötigen wir noch den Begriff der Gleichmächtigkeit von Mengen als Verallgemeinerung der Tatsache, daß zwei endliche Mengen die gleiche Anzahl von Elementen besitzen.

Seien A und B Mengen.
Dann heißen A und B gleichmäßig $=_{Df}$.

Es existiert eine eineindeutige Abbildung von A auf B. (Man überlege sich sofort, daß endliche Mengen gleichmächtig sind genau dann, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen besitzen. Ferner sind z. B. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gleichmächtig.)
Damit können wir nun formulieren

S a t z 23: In der Menge M aller Gruppen (Halbgruppen) mit gleichmächtiger Trägermenge, existiert eine Gruppe (Halbgruppe), so daß jede Gruppe (Halbgruppe) aus M homomorphes Bild dieser ausgezeichneten Gruppe (Halbgruppe) ist.

Dieser Satz gilt analog auch für andere algebraische Strukturen und gibt uns daher mit den vorangegangenen Bemerkungen eigentlich die Rechtfertigung dafür, genau die Homomorphismen als Mittel zur Herausarbeitung struktureller Gemeinsamkeiten anzusehen bzw. bei homomorphen Algebren tatsächlich von im algebraischen Sinne "strukturähnlichen"Objekten zu sprechen.

Egbert Creutzburg
Forschungsstudent im
Bereich Math. Kybernetik
und Rechentechnik

Preisaufgaben 1/77

J 1 ① Für alle reellen Zahlen $x \geq 8$ zeige man die Ungleichung

$$2^x > 3x^2 + 10$$

J 2 ① Man zeige, daß die Gleichung

$$|x+y| + |x-y| = |x + \sqrt{x^2-y^2}| + |x - \sqrt{x^2-y^2}|$$

für alle reellen Zahlen x und y gilt.

J 3 ② Man löse die Ungleichung

$$\operatorname{arctg} \sqrt{x} > \arccos(1-x).$$

J 4 ① Man löse das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}x \operatorname{tg}z &= 3 \\ \operatorname{tg}y \operatorname{tg}z &= 6 \\ x+y+z &= \pi \end{aligned}$$

J 5 ① Man berechne die Summe der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots$$

J 6 ② Вокруг треуголника ABC, в котором $a = 2$, $b = 3$ и угол $\gamma = 60°$ описана окружность.
Определить радиусы окружностей, проходящих черес две вержины треуголника и центр описанной окружности.

Lösungen 1/77

Aufgabe H 42: (nach Reiner Lindemann)

Es seien x_1, x_2, x_3 die Lösungen der ersten und x_1, x_4, x_5 die Lösungen der zweiten Gleichung (o.B.d.A. sei x_1 die gemeinsame Wurzel).

Für x_1 gilt:

$$x_1^3 + p_1x_1 + q_1 = 0 = x_1^3 + p_2x_1 + q_2$$

Daraus folgt:

$$x_1 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$$ (laut Voraussetzung gilt $p_1 \neq p_2$)

Nach dem Wurzelsatz von VIETA gilt:

(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ .Daraus folgt: $x_2 = -x_1 - x_2$

(2) $x_1x_2x_3 = -q_1$. Daraus folgt: $x_2x_3 = \frac{-q_1}{x_1}$, $x_1 \neq 0$, da $q_1 \neq q_2$.

(1) in (2) eingesetzt, ergibt: $(-x_1 - x_3)x_3 = \frac{-q_1}{x_1}$.

Daraus folgt: $x_3^2 + x_1x_3 - \frac{q_1}{x_1} = 0$ und

$$x_{2,3} = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{\frac{x_1^2}{4} + q_1\frac{1}{x_1}}$$

Analog gilt: $$x_{4,5} = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{\frac{x_1^2}{4} + q_2\frac{1}{x_1}}$$

mit $x_1 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$

Aufgabe H 49

1. Variante (nach Kirsten Helbig , Frankfurt/Oder)

Aus $(j+1)^5 = j^5 + 5j^4 + 10j^3 + 10j^2 + 5j + 1$ für alle j

folgt: $5j^4 = (j+1)^5 - j^5 - 10j^3 - 10j^2 - 5j - 1$

Wir bilden auf beiden Seiten $\sum\limits_{j=1}^{n}$, dann folgt:

$$5\sum_{j=1}^{n} j^4 = \sum_{j=1}^{n} ((j+1)^5 - j^5 - 10j^3 - 10j^2 - 5j - 1)$$

$$= \sum_{j=2}^{n+1} j^5 - \sum_{j=1}^{n} j^5 - 10 \sum_{j=1}^{n} j - 10 \sum_{j=1}^{n} j^2 - 5 \sum_{j=1}^{n} j$$

$$- \sum_{j=1}^{n} 1$$

$$= (n+1)^5 - 1 - 10 \frac{(n+1)^2 n^2}{4} - 10 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$- 5 \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^4 = \frac{1}{30} (6n^5 + 30n^4 + 60n^2 + 30n - 15n^4 - 30n^3 - 15n^2$$

$$- 20n^3 - 30n^2 - 10n - 15n^2 - 15n - 6n)$$

$$= \frac{1}{30} (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$$

Es ergibt sich also: $S_n^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1).$

2. Variante (nach Eberhard Dürschlang , Röbel)

Aus S_n^1 , S_n^2 , S_n^3 kommt man zur Schlußfolgerung

$$S_n^4 = \frac{1}{60} n(n+1)(2n+1)(6n(n+1)-2)$$

$$= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 1$ $\qquad S_1^4 = \frac{2\cdot 3(12 - 2)}{60} = 1$

Die Aussage ist wahr für n = 1.

<u>Induktionsvoraussetzung:</u> n = k , d.h. die Aussage ist wahr für n = k.

$$S_k^4 = \frac{1}{60}\, k(k+1)(2k+1)(6k(K+1)-2)$$

<u>Induktionsschritt:</u> n = k+1

$$S_{k+1}^4 = \frac{1}{60}\,(k+1)6k+2)(2k+3)(6(k+1)(k+2)-2)$$

Durch Ausrechnen und Zusammenfassen folgt:

(1) $$S_{k+1}^4 = \frac{1}{60}\,(k+1)(12k^4 + 78k^3 + 182k^2 + 178k + 60)$$

Es ist noch zu zeigen:

$$S_{k+1}^4 = S_k^4 + (k+1)^4$$

$$S_k^4 + (k+1)^4 = \frac{1}{60}\,(k+1)k(2k+1)(6k(k+1)-2) + \frac{1}{60}(k+1)6o(k+1)$$

$$+ \frac{1}{60}\,(k+1)\cdot 60(k+1)^3$$

$$= \frac{1}{60}\,(k+1)\,(k(2k+1)(6k^2+6k-2) + 60k^3 + 180k^2$$

$$+ 180k + 60)$$

$$= \frac{(k+1)}{60}\,(k(12k^3+12k^2-4k+6k^2+6k-2) + 60k^3$$

$$+ 180k^2 + 180k + 60)$$

$$= \frac{(k+1)}{60}\,(12k^4+18k^3+2k^2-2k+60k^3+180k^2+180k+60)$$

(2) $$S_k^4 + (k+1)^4 = \frac{1}{60}\,(k+1)(12k^4+78K^3+182k^2+178k+60)$$

Da (1) = (2) , d.h. $S_{k+1}^4 = S_k^4 + (k+1)^4$ gilt, ist die Aussage

bewiesen, d.h. $S_n^4 = \frac{1}{30}\,n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

Lösung der $\boxed{\text{Aufgabe H 52}}$ (nach Kirsten Helbig, Frankfurt)

Gegebenes Gleichungssystem:

(1) $x + y + z = 6$

(2) $x^2+y^2 + z^2 = 14$

(3) $xz + yz = (xy+1)^2$

Wird (1) quadriert und (2) davon subtrahiert, folgt:

(4) $xy + xz + yz = 11$
(3) eingesetzt ergibt:

(5) $xy + (xy+1)^2 = 11 \Longleftrightarrow (xy)^2 + 3xy - 10 = 0$

$\Rightarrow$(6) $(xy)_1 = 2$

$\Rightarrow$(7) $(xy)_2 = -5$

Aus (1); (3) folgt:

(8) $z = 6-(x+y) = \frac{(xy+1)^2}{(x+y)}$; $x+y \neq 0$ (für $x=-y$ folgt $z=6$ und daraus wegen (2) $x^2+y^2 < 0$)

(8) $\Longleftrightarrow$ (9) $(x+y)^2 - 6(x+y) + (xy+1)^2 = 0$

Hieraus folgt mit (6):

$(x+y)^2 - 6(x+y) + 9 = 0$

$\Rightarrow x+y = 3$

(10) $x = 3 - y$ (10) in (6) eingesetzt:

$y^2 - 3y + 2 = 0$

$\Rightarrow y_1 = 2$	$x_1 = 1$ (wegen (10))	$z_1 = 3$ (wegen (8))
$y_2 = 1$	$x_2 = 2$ (wegen (10))	$z_2 = 3$ (wegen (8))

Mit (7) folgt aus (9)

$(x+y)^2 - 6(x+y) + 16 = 0$

Da die Diskriminante für $f(t) = t^2-6t+16 = 0$ (mit $t=x+y$) kleiner als 0 ist, existieren keine reellen Lösungen.

Die beiden reellen Lösungen lauten:

- $(x_1;y_1;z_1) = (1;2;3)$ und $(x_2;y_2;z_2) = (2;1;3)$

Georg Cantor (1845-1918) - Begründer der Mengenlehre

Kein Zweig der Mathematik ist von solch grundlegender Bedeutung für die gesamte moderne Mathematik wie die Mengenlehre. In allen Bereichen der Mathematik hat sich die mengentheoretische Denkweise durchgesetzt und sich als äußerst fruchtbringend erwiesen. Es lassen sich alle heute bekannten mathematischen Begriffe als mengentheoretische Begriffe erklären, so daß man mit gewisser Berechtigung sagen kann:"Mathematik ist Mengenlehre."
Die wichtigsten Begriffe und Schlußweisen verdanken wir dem Schaffen des deutschen Mathematikers Georg CANTOR.
Georg Cantor wurde am 3. März 1845 in St. Petersburg, dem heutigen Leningrad, geboren. Sein Vater, Woldemar Cantor, brachte es als erfolgreicher Kaufnann zu bedeutendem Wohlstand, so daß Georg Cantor Zeit seines Lebens frei von materiellen Sorgen war. Woldemar Cantor war ein vielseitig gebildeter, gütiger Mensch und hatte großen Einfluß auf die Entwicklung seines Sohnes. 1856 übersiedelte die Familie Cantor nach Deutschland. In den Schulen und Gymnasien, die Georg Cantor besuchte, bekam er gute Zeugnisse. Vor allem in mathematischen Disziplinen erhielt er vorzügliche Beurteilungen. So gab schließlich Georg Cantors Vater dem Drängen seines Sohnes nach und erlaubte ihm, Mathematik zu studieren. Von 1862 bis 1867 studierte Georg Cantor Mathematik, zuerst in Zürich und ab 1863 in Berlin, denn dort waren günstigere Bedingungen für ein Mathematikstudium. Von den Lehrern Cantors in Berlin ist vor allem Karl Weierstraß zu nennen, der einen bestimmenden Einfluß auf Georg Cantors wissenschaftliche Entwicklung ausübte (zu WEIERSTRASS vgl. WURZEL 10/75).
1867 promovierte Georg Cantor in Berlin mit einer zahlentheoretischen Arbeit. Im Jahre 1869 habilitierte er sich an der Universität in Halle, und zwar wieder mit einer Arbeit über Zahlentheorie, und lehrte dort zunächst als Privatdozent. 1872 wurde er außerordentlicher Professor.

Im Sommer 1874 heiratete er Vally Guttmann, eine Freundin seiner Schwester.
Georg Cantor erzielte beachtliche Forschungsergebnisse, war als Hochschullehrer erfolgreich, wurde deswegen in zwei wissenschaftliche Gesellschaften aufgenommen und bereits 1879 zum ordentlichen Professor der Mathematik befördert,
Er beschäftigte sich zunächst mit der Theorie der reellen Zahlen, mit Zahlensystemen und mit der Theorie der trigonometrischen Reihen. Letzteres führte ihn aber dann zur Untersuchung der Eigenschaften bestimmter Punktmengen und deren Verallgemeinerung wiederum zu ersten Erbebnissen der Mengenlehre, die von da an zum ausschließlichen Forschungsgebiet Georg Cantors wurde. Von 1874 bis 1884 veröffentlichte Georg Cantor zahlreiche Abhandlungen über Mengenlehre. Diese Abhandlungen wurden zunächst ziemlich wenig beachtet, da viele Ansichten Cantors völlig neu und ungewohnt waren. Manche Mathematiker wurden sogar zu Gegnern von Cantors Theorie.

So waren die Mathematiker bis zu jener Zeit zu folgender Auffassung über das Unendliche gelangt: Das Unendliche existiert nur als potentielles Unendlich, d.h. es gibt keine unendlich großen Größen, sondern nur das unbeschränkte Größer-Werden. Zum Beispiel: Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine noch größere, aber man kann keine letzte natürliche Zahl angeben.
Cantor hat sich aber zu der Auffassung durchgerungen, daß das Unendliche den Charakter des Aktual-Unendlichen bzw. des Vollendet- Unendlichen trägt, d.h. daß auch unendliche Größen denkbar sind. So ist es zum Beispiel möglich, sich die Menge aller natürlichen Zahlen vorzustellen. Allerdings zeigten solche unendlichen Mengen recht erstaunliche Eigenschaften, wie wir nachher noch sehen werden.
Ein wichtiger Begriff in Georg Cantors Abhandlungen war der der Abbildung, speziell der der eineindeutigen Abbildung von einer Menge auf eine andere. Wenn man solch eine Beziehung zwischen zwei Mengen herstellen kann, d.h. wenn man jedem Element der einen Menge ein einziges Element der anderen Menge zuordnen kann und umgekehrt, dann nannte Cantor diese beiden Mengen "gleichmächtig" oder "äquivalent".

Cantor bewies, daß die Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig zu der Menge der geraden Zahlen , also gleichmächtig zu einer ihrer Teilmengen, aber auch gleichmachtig zur Menge der rationalen Zahlen ist.
Auch erwies sich die Menge der reellen Zahlen zwischen Null und Eins als gleichmachtig zur Menge aller reellen Zahlen.
Ein anderes erstaunliches Resultet war die Gleichmächtigkeit der Menge der Punkte einer Strecke mit der Menge der Punkte des mit dieser Strecke gebildeten Quadrates.
Zunächst schienen alle unendlichen Mangen gleichmächtig zu sein. Erst als Georg Cantor einen Beweis dafür gefunden hatte, daß die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar, d.h. nicht gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen ist, erwies sich der Begriff der Gleichmächtigkeit als geeignet zur Unterscheidung unendlicher Mengen. Dann gab es somit zwei verschiedene Mächtigkeiten (gleichbedeutend damit verwendet Cantor den Begriff "Kardinalzahl"):

- Die Kardinalzahl der natürlichen Zahlen
  Cantor bezeichnete sie mit $\aleph_0$ (Aleph-Null, $\aleph$ ist der erste Buchstabe im hebräischen Alphabet).
- Die Mächtigkeit des Kontinuums (der Menge der relllen Zahlen)
  Cantor nannte sie $\aleph$.

Cantor bewies sogar, daß es zu jeder Kardinalzahl eine noch größere gibt mit den später nach ihm benannten Cantor'schen Diagonalverfshren.
Ein weiterer wichtiger Begriff, den Cantor bildete, war der der wohlgeordneten Menge und der Ordnungszahl, worauf wir hier aber nicht weiter eingehen.
Ein Problem allerdings konnte Georg Cantor nicht lösen, nämlich die Kontinuumshypothese, die besagt, daß die Kardinalzahl $\aleph$ die auf die Kardinalzahl $\aleph_0$ unmittelbar folgende ist. Er konnte diese weder beweisen noch widerlegen. Man vermutet, daß die intensive Forschungsarbeit und das vergebliche Bemühen Cantors, das Kontinuumsproblem zu lösen, ein Grund war, der 1884 zu einem schweren geistigen Zusammenbruch Georg Cantors geführt hatte.

Einen anderen Grund dafür sieht man in der Gegnerschaft des einflußreichen Berliner Mathematikers Leopold Kronecker. Dieser lehnte Cantors Theorie ab, trat aber nicht direkt gegen Cantor auf - etwa in einem wissenschaftlichen Meinungsstreit - sondern machte in seinen Vorlesungen abfällige Bemerkungen über die Mengenlehre und beeinflußte andere Mathematiker gegen Cantor. Deshalb wurde Cantor auch nicht an eine größere Universität, z.B. an die in Berlin, berufen.
Seine Nervenkrankheit hat Georg Cantor seitdem nicht wieder verlassen. Sie trat mit Unterbrechungen immer wieder auf. Cantor wollte sich zunächst gänzlich von der Mathematik zurückziehen und beschäftigte sich mit philosophischen Fragen und literarischen Studien. Erst allmählich nahm er seine Vorlesungstätigkeit und seine mathematischen Forschungen wieder auf.

Schon lange vermißte Georg Cantor an der doch relativ kleinen Universität in Halle den direkten wissenschaftlichen Meinungsstreit mit anderen Mathematikern, die bereit und fähig waren, mit Cantor über seine Theorie zu diskutieren. Cantor mußte daher die meisten seiner Gedanken und Ideen in Briefen mit anderen Mathematikern austauschen. Deshalb bemühte er sich beharrlich um den Zusammenschluß der deutschen Mathematiker zu einer Organisation.
1890 wurde die "Deutsche Mathematiker-Vereinigung" unter maßgeblicher Beteiligung von Georg Cantor in Bremen gegründet. Georg Cantor wurde Vorsitzender dieser Vereinigung, mußte aber 1893 auf Grund seiner Krankheit dieses Amt aufgeben.

In den Jahren 1895 bis 1897 veröffentlichte Georg Cantor noch einige Arbeiten über Mengenlehre. Das waren in der Hauptsache zusammenfassende Darstellungen seiner gefundenen Ergebnisse. So gab er zum Beispiel 1895 an, was er unter einer Menge verstand. (Der aufmerksame Leser wird diese Definition sicher schon vermißt haben.)
"Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt

werden) zu einem Ganzen."

(Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen
Herausgegeben von E.Zermelo,Berlin 1932)

Es hat sich aber gezeigt,daß diese Definition zu logischen Widersprüchen (Antinomien der Mengenlehre) führt.Der Leser hat sicher schon von der Russellschen Antinomie gehört,die entsteht,wenn man aufgrund obiger Definition die Menge aller Mengen bildet,die sich nicht selbst als Element enthalten. Diese Menge heißt Russellsche Menge R.Man kann dann leicht ableiten,daß $R \in R$ genau dann,wenn $R \notin R$.
Dieser logische Widerspruch entsteht,weil der Begriff der Russelschen Menge in sich widersprüchlich ist. Das heißt,man kann eben nicht völlig willkürlich Mengen bilden,wie das Cantors "naive" Mengendefinition noch zuläßt. Auch Georg Cantor selbst hat solche Antinomien gefunden und beschrieben,sah jedoch keinen Ausweg.
Diese Antinomien regten zur intensiven Untersuchung der Grundlagen der Mathematik an. Später haben Mathematiker die Mengenlehre mit Hilfe von Axiomen begründet. Diese Axiome schränken die Mengenbildung ein,sodaß solche widersprüchlichen Mengen wie die Russellsche nicht mehr gebildet werden dürfen. Auch konnte man das Kontinuumproblem in dem Sinne lösen,daß man nachwies,daß sowohl die Kontinuumhypothese als auch ihre Negation mit allen übrigen Axiomen der Mengenlehre verträglich sind. Das heißt,beide Aussagen sind unbeweisbar und haben den Charakter eines weiteren Axioms.
Die allmähliche Durchsetzung der Ideen Cantors in der Fachwelt begann Ende der 80er Jahre des 19. Jahrhunderts. Auf den ab 1897 regelmäßig stattfindenden internationalen Mathematikerkongressen standen die Probleme der Mengenlehre im Brennpunkt des Interesses.(Cantor selbst nahm an diesen Kongressen nicht mehr teil.) Viele ausländische Mathematiker erkannten und würdigten die Bedeutung der Forschungen Cantors. Cantor,dessen Gesundheitszustand sich standig verschlechterte, stellte 1902 einen Antrag auf Pensionierung,der aber abgelehnt wurde. Da aber immer öfter Vorlesungen wegen Krankheit Cantors ausfallen mußten,wurde er 1913 schließlich doch von der

Vorlesungstätigkeit entbunden.
Am 6. Januar 1918 starb Georg Cantor in Halle.
"Cantor hatte das Schicksal, das großen Denkern nur selten erspart bleibt: in den Jahren ihres Schaffens fehlt ihnen die ermutigende Anerkennung der Zeitgenossen, die auf dem Wege ins Neuland nur zogernd folgen wollen. Die Würdigung Cantors setzte erst in den Jahren ein, in denen seine Schaffenskraft schon gehemmt war. Die volle Bedeutung seiner Arbeit wurde erst Jahre und Jahrzehnte nach seinem Tode von der Mehrzahl der Mathematiker anerkannt." ((2) S.176)

Literatur:
(1) Biographien bedeutender Mathematiker
Herausgegeben von H.Wußig und W.Arnold Berlin 1975
(2) H.Meschkowski, Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors
Braunschweig 1967

Hans-Joachim Hauschild
Mathematik-Student,
2. Studienjahr

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: K. Bartholmé, R. Jeske, H.-G. Leopold
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

10 JAHRE WURZEL

...wir gratulieren!

2

77

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

11. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Statt eines Vorwortes...

Und wieder halten Sie eine neue Ausgabe der "Wurzel" in Ihren Händen ...
Gewiß, wir haben Sie heute - Ihr Einverständnis voraussetzend - einmal etwas anders gestaltet, dennoch - so glauben wir - sind wir unserem seit nunmehr 10 Jahren verfolgtem Anliegen treu geblieben: Mittler zu sein zwischen Schule und Universität.
Diese Aufgabe ist sehr vielgestaltig. Sie umfaßt die ganze Palette der Anforderungen im Studium aber auch die Erwartungen, die man an das Studium stellt. Dabei haben wir entsprechend dem Profil unserer Zeitschrift uns stets darauf konzentriert, die Schönheit und Attraktivität, den Reichtum und die Exaktheit der Mathematik dem Leser zu vermitteln. Das werden wir auch weiterhin so halten (wenngleich wir ebenfalls unsere Informationen über Studium und Universität insgesamt verbessern werden - nicht vom Umfang her, sondern in erster Linie qualitativ -) weil echte Begeisterung für das Fach, der ständige Wunsch, auf Grund des vorhandenen Wissens Neues kennenzulernen, unabdingbare Voraussetzungen für ein erfolgreiches Studium sind.

Wenn eine Zeitschrift seit 10 Jahren erscheinen kann, so gilt wohl der erste Dank von Herausgeber und Redaktion der treuen Leserschaft! Es ist schon so: Treue reflektiert im gewissen Maße Qualität dessen, dem man treu ist. - Dennoch hängt das Niveau der Realisierung unseres Anliegens entscheidend vom unmittelbaren Kontakt zu Ihnen ab. In diesem Sinne würden wir uns sehr freuen und es würde uns allen zum Nutzen gereichen, wenn die Resonanz auf unsere Arbeit in Zukunft nicht in erster Linie ablesbar ist an der Zahl der Abonenten und den Einsendungen auf die Preisaufgaben, sondern verstärkt auch anhand von Hinweisen, Kritiken, Wünschen und anderen Zuschriften.
Eine Umfrage unter Studenten, die die "Wurzel" aboniert hatten, ergab, daß die große Mehrheit einschätzte, daß die Fachartikel - Hauptbestandteil der Zeitschrift - bei allen Anforderungen, die diese stellen, gut verständlich sind und eine echte Hilfe

bei der Studienvorbereitung darstellen. In der Hoffnung, daß Sie aus Ihrer Sicht dieser Feststellung zustimmen können, möchten wir dieses Kompliment an die Wissenschaftler unserer Sektion weiterreichen. Wir verbinden unseren Dank für ihre bisherige Unterstützung mit der Hoffnung auf eine weitere gute Zusammenarbeit, die getragen ist von dem Bewußtsein um die Verantwortung für die Wissenschaftler von morgen, die nicht erst mit der Aufnahme des Studiums einsetzen kann.

Es ist,so meinen die Unterzeichnenden, legitim, an dieser Stelle auch einmal die Leistungen aller Studenten, die in der Redaktion mitarbeiten oder sonst im Rahmen unseres Jugendobjektes zum Gelingen der Zeitschrift beitragen, hoch anzuerkennen, denn es ist in der Tat viel Begeisterung und Einsatzbereitschaft nötig, um neben der Bewältigung der hohen Studienanforderungen Monat für Monat dafür zu sorgen, daß Sie ein neues Exemplar der "Wurzel" in Ihren Händen halten können. - In diesem Sinne schließen wir in den Kreis derer, denen Anerkennung gebührt, auch diejenigen Mitarbeiter der "Wurzel"-Redaktion mit ein, die in den vergangenen 10 Jahren für die "Wurzel" wirkten und nun im Beruf ihren Mann stehen.

Das Kollektiv der "Wurzel" hat viele Freunde und Helfer, denen sein Dank gilt: die Parteileitung der Sektion, die Sektionsleitung und nicht zuletzt dem Beauftragten der staatlichen Leitung, Dr. Börner, der seit nunmehr ca.7 Jahren mit uns zusammenarbeitet. Wenn wir zuletzt auch den Kollegen in der Druckerei in Rudolstadt unseren Dank sagen für ihre Bemühungen um ein regelmäßiges Erscheinen der "Wurzel", dann soll das keineswegs der letzte Platz in einer Rangfolge sein.

Die gute Zusammenarbeit der verschiedenen Partner für ein regelmäßiges Erscheinen von auf gutem Niveau stehenden Nummern der "Wurzel" sollte eigentlich die Garantie dafür sein, daß wir auch weitere 10 Jahre im Interesse unserer Leser und im Sinne des sozialistischen Bildungswesens wirken können. Wir werden jedenfalls unser Bestes geben.

Die Redaktion

Der folgende Artikel, den uns unsere ehemalige Mitarbeiterin Ursula Heuke zusandte - sie arbeitet heute im VEB(K) Zentronik -, schildert anhand eines Ereignisses - das für uns gar nicht so außergewöhnlich bleiben sollte - und wichtiger Nebenbemerkungen, was es mitunter heißt, ehrenamtlich sozusagen eine Zeitschrift herauszugeben.
Dabei kam es eben manchmal auch darauf an, die Nacht zum Tage zu machen, und davon weiß die Uschi sicherlich noch heute ein Lied zu singen (sie war ja sogar schon mal des nachts eingeschlossen worden, da niemand annahm, daß unsere Redaktion zeitweise auch in der Nacht arbeitet ...)

Die Wurzel zieht um ...

hieß es eines Tages. Nun ja, es war vorauszusehen gewesen, denn die Sektion Mathematik trat ihr "Abbeanum" an die Physiker ab. Für Nichteingeweihte: Das "Abbeanum" ist ein solider, dreistöckiger Backsteinbau, zwar nicht gerade modern, aber ganz brauchbar, eben mit den üblichen Hörsälen und Seminarräumen, wie sie Studenten seit jeher gewohnt sind. Auch die "Wurzel" besaß einen ganz passablen Raum für sich. Als es nun hieß, wir ziehen ins neuerrichtete Universitätshochhaus, ging das Rätselraten los. Jede "Scheibe" (sprich: Etage) dieses "Turms" sollte einen Durchmesser von 34 (?) Metern haben und - abzüglich der Fahrstuhlschächte, Treppenaufgänge und Sanitäreinrichtungen - lediglich in zwei Halbscheiben unterteilt sein. Wenn wir auch bis jetzt relativ beengt gearbeitet hatten - Räume d i e s e r Dimensionen konnten wir ganz gewiß nicht sinnvoll nutzen! Aber unsere Redaktion im Großraumbüro mit anderen zusammen - das war für uns auch nicht recht vorstellbar. Wenn ich allein an die Hektik vor der Fertigstellung einer jeden Nummer dachte! Die letzten Manuskripte gingen trotz eifriger Bemühungen oft erst in letzter Minute ein (wie dieses leider auch - entschuldigt bitte!). Ideen für Titelbilder fehlten uns stets und ständig (aber auch diese Kinderkrankheit scheint noch nicht restlos überwunden zu sein), und wie wir es immer schaffen sollten, das Heft

zum Termin fertigzustellen, wenn das UHH spätestens um 20 Uhr zu verlassen ist, war uns auch nicht klar. So gingen unsere Überlegungen hin und her, und dabei ahnten wir noch nicht einmal, was wirklich auf uns zukommen sollte.
Der Tag des Umzugs war bestimmt, die Kisten und Kästen gepackt, und wir hatten uns so einigermaßen mit dem Gedanken an den Redaktionsraum im Universitätshochhaus abgefunden. Doch welche Enttäuschung wurde uns bereitet! Unsere schöne, unentbehrliche Schreibmaschine, eine Spezialanfertigung in Form von drei nebeneinanderbefindlichen Tastaturen, die mit einem Wagen befahrbar sind, war zu schwer für den Turm. Darauf verzichten konnten wir auf keinen Fall, sonst hätten wir in Zukunft in unseren Artikeln ohne griechische und altdeutsche Buchstaben, ohne Indizes und auch ohne die meisten mathematischen Zeichen auskommen müssen. Beziehungsweise hätten wir sie per Hand hineinmalen müssen, aber darunter hätte das Schriftbild natürlich sehr gelitten. Zeit zum Überlegen blieb kaum, das nächste Manuskript wartete auf seine Fertigstellung. Man wies uns kurzerhand einen kleinen Raum in einem recht alten und nicht gerade zentral gelegenen Gebäude zu, in dem wir mit Ach und Krach die notwendigsten Dinge unterbrachten. Die Fertigstellung der nächsten Wurzel war der reinste Kampf. Aus Zeitgründen begannen wir mit der redaktionellen Arbeit, obwohl wir noch mitten im Umzug steckten. Alles mußten wir uns aus den schier unergründlichen Kartons heraussuchen, und es gab Dinge, die sich bis zum heutigen Tag noch nicht wieder angefunden haben, zum Beispiel ein komplettes Sortiment an Tuschfedern, die leider schwer im Handel erhältlich waren, so daß wir uns mit Faserschreibern behelfen mußten.

Ja, so ein Umzug ist schon ein Erlebnis für sich. Daß diese Form des gründlichen Aufräumens der Redaktion auch in den Folgejahren nicht erspart blieb, ist bis zu mir durchgedrungen, aber 10 Jahre "Wurzel" beweisen: Die Redakteure, Preisaufgabenmacher, Korrektoren, Schreibkräfte und alle anderen fleißigen Redaktionsmitglieder lassen sich durch nichts unterkriegen!

Ursula Heuke
ehemalige Mitarbeiterin der Wurzel

Anmerkung der Redaktion:

Wir mußten seit dem hier geschilderten Umzug weitere zwei Mal die Zelte abbrechen und an anderer Stelle neu aufschlagen: und das alles bei Aufrechterhaltung unseres vollen "Produktionsprogrammes" ... ... und des Studiums.

Noch eine Wortmeldung

Unsere hochverehrten Kollegen von der "Wurzel" können heute auf 10 Jahre erfolgreichen Bemühens um möglichst geneigte Augen und Ohren ihrer zahllosen [1] Leserschar zurückblicken. Und sie tun dies aus der höchst befriedigenden - und sehr wohl in jeder Beziehung erkämpften - Position von Produzenten geistiger Ware, die diese - und damit sich selbst - unentbehrlich gemacht haben.

Obgleich an Alter und Erfahrung keineswegs imstande, der "Wurzel" das Wasser zu reichen, meldet sich dennoch der "NVA-Zirkel" als jüngste Abteilung des Jugendobjektes "Studienvorbereitung" in diesen Tagen zu Wort. Das hängt zum einen damit zusammen, daß diese Abteilung mit ihren Mitarbeitern - überblickt man ihre freilich kurze Historie - doch stets darauf hielt, sich an den üblicherweise zu festlichen Anlässen innerhalb des Jugendobjektes in größeren Massen fließenden Getränken gebührend zu beteiligen, zum anderen gibt uns wohl die auf der Basis der Gemeinsamkeit der Aufgabe entwickelte Zusammenarbeit, das Wirken an gemeinsamer Front (und sei es am gemeinsamen Biertisch), Veranlassung und Recht, uns tatkräftig zu beteiligen, wenn es gilt, ins Jubiläumshorn unserer Zeitschrift zu blasen!

Was viele wissen, unsere Freunde förderten und was wir selbst letztlich geschaffen haben, das gehört zu diesem Jubiläum unbedingt dazu: Die "Wurzel" allein gibt es schon lange nicht mehr, sie hat "Wurzeln geschlagen" (wir zitieren eine geniale Wendung unseres hochverehrten Chefs), und diese "Ableger" sind inzwi-

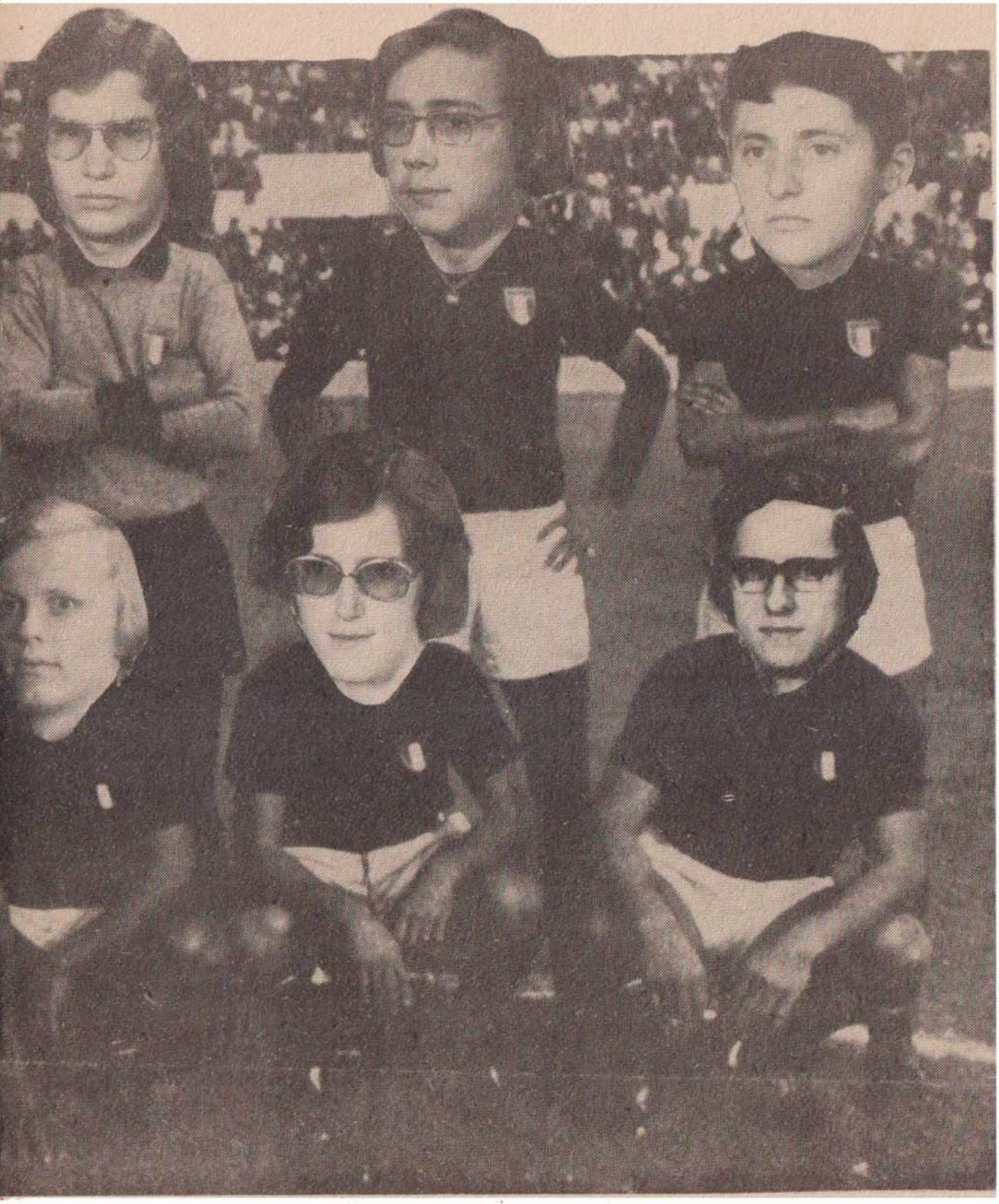
[1] Übertreibungen im Text werden im folgenden nicht gesondert hervorgehoben.

schen erwachsen geworden. So ist es ganz selbstverständlich, daß z. B. Gedanken und Probleme der Bereiche Mathe-Lager und NVA-Zirkel in der "Wurzel" erscheinen, daß Mitarbeiter aller drei Bereiche im Mathe-Lager auftreten und vieles andere mehr.
Im Sinne dieser Einheit des gesamten Jugendobjektes, deren Basis selbstredend stets die "Wurzel" war und bleiben wird (fragen Sie etwa einen Mitarbeiter der Sektion Mathematik nach dem Jugendobjekt "Studienvorbereitung", seine spontane Reaktion wird ungefähr:"???" sein, und fragen sie ihn nach der "Wurzel"!) halten wir es dann nicht für vermessen, wenn wir als NVA-Zirkel in den Zeiten des 10-Jahres-Feiertagstrubels, wenn die Aktiven gefeiert, die Senioren geehrt werden und die "Wurzelväter" hochleben, im Nahmen unserer Freunde bei der NVA recht herzlich gratulieren und versichern, uns für eine erfolgreiche Zukunft des Jugendobjektes einzusetzen.
Darauf und auf die Zukunft unserer Freunde bei der NVA sollten wir bei der 10-Jahres-Feier der "Wurzel" einen trinken!

Der NVA-Zirkel

EINE BEMERKUNG ZU NACHFOLGENDEM KUNSTWERK

Sollten Sie tatsächlich beim Zählen der abgelichteten Personen auf die verblüffende Anzahl von 11 Spielern kommen, so ist das dennoch kein Widerspruch zu der Tatsache, daß wir eigentlich ein paar Mann mehr im Verein haben.
Erklärung: Die übrigen (unter anderen auch unser Chef) haben leider ihr Bildchen nicht rechtzeitig abgeliefert. Selbst daran schuld! Wir bedauern niemanden!



Unsere Mannschaft Stehend, v.l.: W.Werner, D.Meinhardt, R.Jeske, K.Bartholmé, J.Vogel, W.Schäfer,
Kniend, v.l.: H.-G. Leopold, E. Schäfer, M.Töpel, R.Oehmichen, H.-J. Hauschild .

Ein Wort zum Mathelager

Die Mitgestaltung der Mathematiklager für die mathematisch talentiertesten Schüler des Bezirkes Gera ist ein wesentlicher Bestandteil der Arbeit in unserem Jugendobjekt.

Die Mathematiklager werden vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit viermal pro Jahr organisiert. Dabei gibt es 2 Wochenendlehrgänge jeweils zu Beginn der Herbst- bzw. Frühjahrsferien. Diese werden in der EOS in Schleiz durchgeführt. Noch wichtiger sind die "großen" Lager zu Beginn der Winter- und Sommerferien, die sich jeweils über 10 Tage erstrecken. Diese Lager finden an der neuerbauten Oberschule in Ruppersdorf, einer kleinen, idyllisch gelegenen Gemeinde im Thüringer Wald, statt.

Die Schüler fahren gern in diese Lager. Da die meisten Schüler jedoch immer wieder mitfahren, wird es für den jeweiligen Lagerleiter auch immer etwas schwieriger, ein Programm für die Freizeitgestaltung zusammenzustellen, das den Schülern auch etwas wirklich Neues bietet.

Ein solches Freizeitprogramm läßt sich natürlich nicht aus der hohlen Hand schütteln und es kam in den letzten Lagern doch immer wieder vor, daß Veranstaltungen auf dem Plan standen, die es auch schon vorher mal gab.
Wir können uns denken, daß ähnliche Probleme auch in anderen Bezirken auftreten. Deshalb sind wir interessiert, unser Lager vielleicht einmal mit einem anderen Bezirk auszutauschen. Unsere Kapazität für ein solches Lager beträgt etwa 40 Schüler.

Das Jugendobjekt ist verantwortlich für die Planung und Durchführung des Unterrichts in dem Mathematiklager.
Für die Kontinuität des Unterrichts hat es sich als sehr günstig erwiesen, daß es in den letzten 2 Jahren gelungen ist, eine Gruppe von Studenten zu finden, die immer wieder mit ins Lager fährt.

Die Zusammenarbeit zwischen Schülern und Studenten erstreckt sich aber nicht nur auf den Unterricht, sondern auch auf die Freizeitgestaltung. Wir können sagen, daß sich hier eine wirklich kameradschaftliche Atmosphäre entwickelt hat.

Wir wollen jetzt ein bißchen genauer über das Lagerleben berichten und wer kann das eigentlich besser als die teilnehmenden Schüler selbst.
In jedem Lager wird eine "Lagerchronik" angelegt. Hierzu werden einige Schüler beauftragt, jeweils über den Verlauf eines Tages etwas aufzuschreiben. Diese kleinen Aufsätze werden gesammelt.
Wir wollen jetzt einige Auszüge aus dieser Chronik veröffentlichen:

Wanderung Ruppersdorf-Thimmendorf-Remtendorf-
Triesau-Eliasbrunn-Ruppersdorf

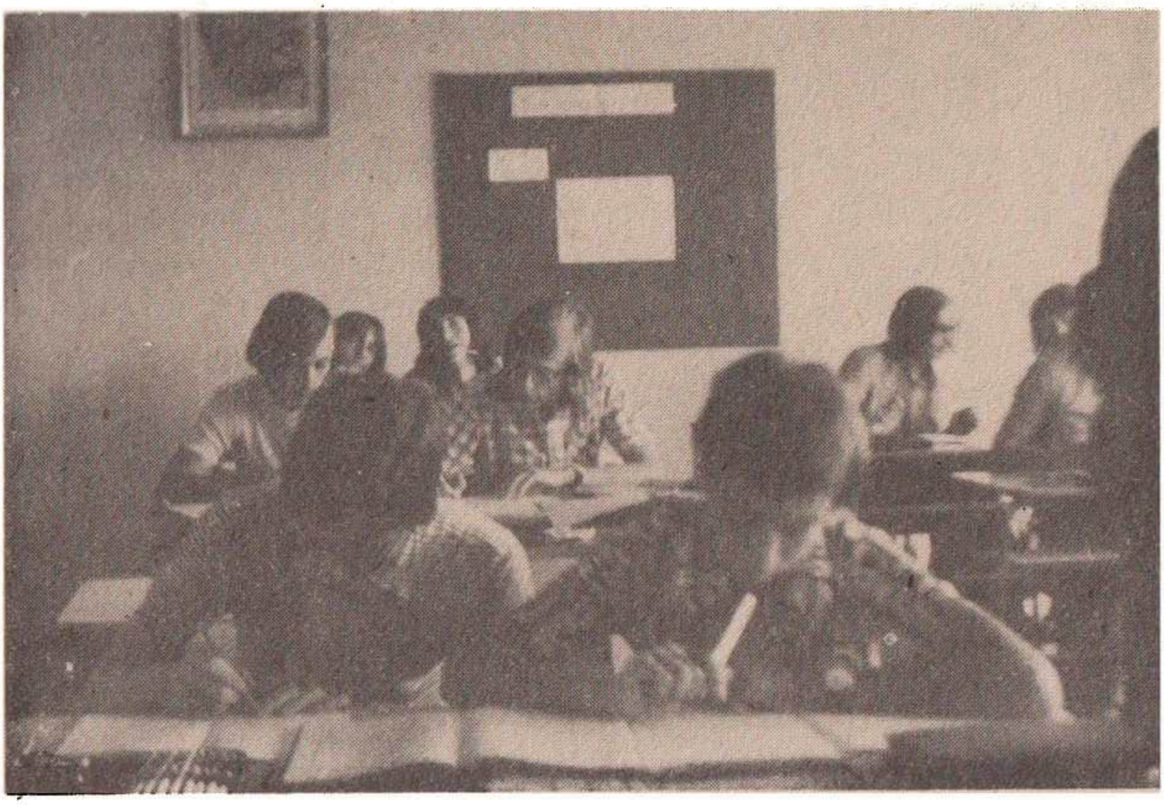
Auf diese Wanderung hatten wir uns alle so sehr(!) gefreut, zumal sie ja nur 20 km lang war!
Wir waren noch kaputt vom Vortag, an dem wir auch schon ziemlich viel gelaufen sind. Doch es half nichts, wir mußten mit!

Diese Wanderung wurde als Orientierungsmarsch bezeichnet. An sechs Kontrollpunkten, bei denen es galt, die Marschrichtungszahl festzustellen, mußte jede Klassenstufe 2 mal ihr Können unter Beweis stellen.
So liefen wir los, eingepackt wie die Schneemänner. Bis Luckenmühle lief alles gut. Dann froren schon einigen die Glieder ein. Als dann endlich die ersten Häuser von Remtendorf in Sicht kamen, waren fast alle erfroren. In der "Goldenen Sonne " wurden wir sehr gut bewirtet. Es gab Hamburger Schnitzel. Natürlich gehörten auch Tee, Cola, Limo, Apfelsaft, Bier und Zigaretten dazu. Als wir dann den zweiten Teil der Wanderung begannen, waren alle satt und lustig. Es wurde gesungen und gelacht. Mit einer kleinen Schneeballschlacht kurz vor Triesau war der schönste Teil der Wanderung vorbei.
Von Triesau über Eliasbrunn nach Ruppersdorf wurde nur noch von der "warmen Stube" gesprochen.
Schließlich waren wir doch froh, als wir das Dach unserer Schule vor uns sahen.
Bis auf die nassen Füße und die kalten Hände hat es eigentlich allen sehr gut gefallen.

Sonntag, 9. Mai

Nach dem Wecken und dem Waschen begaben wir uns wie jeden Tag unserer Lagerzeit in Schleiz pünktlich 7.30 Uhr zum Frühstück. Es gab sogar Kuchen als äußeres Zeichen dafür, daß es Sonntag war. Der tägliche Unterricht fiel trotz sehr schönem Wetter und hörbarem Hochbetrieb an der Schleizer Rennstrecke nicht aus. Und so verbrachten wir also wieder vier Unterrichtsstunden bei unserer mathematischen Beschäftigung.

Wie immer ging es auch an diesem Sonntagvormittag erneut um Definitionen, Sätze, Beweise, Aufgaben und Problemstellungen.



Die herrlich strahlende Sonne, die durch die Fenster in die Klassenräume schien, lockte ständig anziehend an die frische Luft. Waren die Fenster geöffnet, so vernahm man bereits die Geräusche von der Rennstrecke. Nach Abschluß des Unterrichts und der Einnahme des Mittagessens konnte dann jeder zur Rennstrecke gehen und das dortige Geschehen verfolgen. Es bereitete sehr großes Vergnügen, die Rennläufe der zu schnellen "Flitzern" umgebauten PKW's anzusehen.
Viel zu schnell verging die schöne Zeit an der Schleizer Dreiecksrennstrecke.
Pünktlich 18.00 Uhr nahmen wir unser Abendbrot ein. Für den Abend war ein Kinobesuch geplant. Gleich nach dem Abendessen wurde uns deshalb eine Einführung zum Film gegeben. 19.30 Uhr trafen wir uns auf dem Schulhof der "Konrad Duden" EOS und gingen gemeinsam zum Kino. Hier nutzten die "Skatfans" gleich die Gelegenheit, um sich für evtl. beim Skatturnier erlittene Niederlagen zu revanchieren, und spielten im Vorraum.
Um 20.00 Uhr begann dann die Kinoveranstaltung. Es wurde der amerikanische Kriminalfilm "Der Anderson-Clan" gezeigt. Nach dem Kinobesuch kehrten wir ins Internat der EOS zurück und legten uns schlafen.

Dienstag, 11. 5. 1976

Wie immer ging pünktlich 7.00 Uhr der Wecker (B.v.D.) durch die Räume. Diesmal war es Herr Reichel. Nach mehrmaliger Aufforderung hievten sich gegen 7.20 Uhr auch die letzten aus den Kojen, um sich auch noch waschen zu können. Frühstück gab es dann auch noch. Da es der letzte Tag des diesjährigen Frühjahrslagers war, kam dann kein Unterricht, sondern die Auswertung des Lagers. Hier konnte noch einmal jeder seine Meinung zu dem Lager sagen, was aber nicht jeder tat. Auch Herr Jahn und die Lehrkräfte sagten noch einmal ihre Meinung. Allen hat - bis auf kleine Mängel - das Lager sehr gut gefallen, sowohl fachlich als auch in der Freizeitgestaltung. Nach dem Mittagessen befand sich dann alles in Aufbruch- und Abschiedsstimmung. Manche sah man ja das letzte Mal im BKJM, da es ab dem Sommerlager neu gebildet wurde. Da nun alles in Abschiedstimmung ist, werde ich auch gehen. Tschüs bis zum nächsten Mal.

Heinz Primzahl alias Andreas Jescheg

q. e. d.

(qualitativ etwas dürftig)

Und nun zum Preisausschreiben

Wie bereits in den letzten drei Nummern der Zeitschrift "Wurzel" angekündigt, wollen wir an dieser Stelle einige Bemerkungen zu den von uns gestellten Schätzfragen machen. Wir hoffen doch, daß dieses Preisausschreiben Ihre Zustimmung fand und daß Sie bei allen 15 Fragen richtig getippt haben.

Wie sicher spätestens jetzt allen bekannt sein dürfte, feiert die Zeitschrift "Wurzel" in diesem Jahr ihr 10-jähriges Bestehen. In diesem Zeitraum erschienen neben unseren monatlichen Ausgaben 9 Sondernummern, die zum Teil bestimmten gesellschaftlichen Höhepunkten gewidmet waren.

Damit Sie die "Wurzel" regelmäßig erhalten konnten, arbeiteten in den letzten 10 Jahren 24 Mitarbeiter mindestens ein Jahr lang im Bereich "Wurzel" des Jugendobjektes mit.

Wer ein aufmerksamer Leser der Wurzel war, dem wird auch aufgefallen sein, daß sich nicht nur das Format der "Wurzel" geändert hat, sondern daß die Seitenzahl jetzt 16 statt früher 10 beträgt. In unserer Zeitschrift erschienen unter anderem 65 Fachartikel und 46 gesellschaftliche Artikel. Großen Anklang fanden bei den Lesern auch unsere Preisaufgaben. Wir stellten bis Heft 11/76 513 Aufgaben. Laut Statistik ist bekannt, daß im Jahre 1975 die Höchstzahl von Einsendungen zu einer Preisaufgabe 36 betrug und daß wir im Januar des Jahres 1974 die meisten Einsendungen erhielten. Insgesamt erhielten wir zu den Preisaufgaben aus den "Wurzeln" 9/10/73 bis 2/76 2381 Lösungen. Zu einer Aufgabe aus der Zahlentheorie erhielten wir im Jahre 1974 die meisten Einsendungen. Im Durchschnitt wurden 1975 pro Monat 93 Punkte vergeben.
Zu den Preisaufgaben werden von uns auch regelmäßig Lösungen veröffentlicht. Bis zum Heft 5/76 wurden 473 Lösungen gedruckt. Wir beziehen uns dabei auch auf Einsendungen unserer Leser. Im gleichen Zeitraum wurden 68 Lösungen von Lesern veröffentlicht.

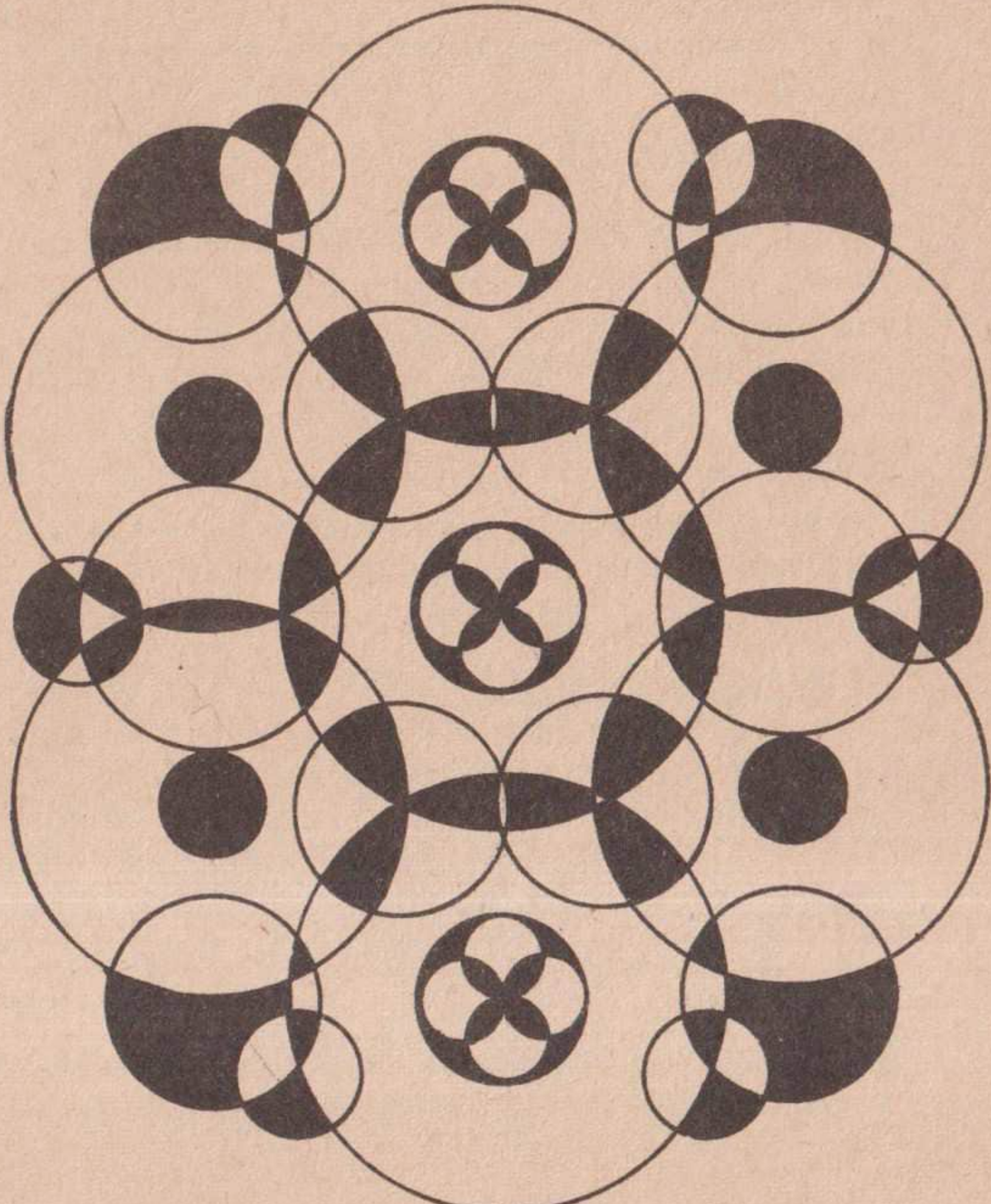
Das Jugendobjekt "Studienvorbereitung", in dem zur Zeit 15 Studenten mitarbeiten, besteht nicht nur aus dem Bereich "Wurzel", sondern u. a. auch aus dem Bereich "NVA-Zirkel", dessen Arbeit wir große Bedeutung beimessen und der 1970 gegründet wurde.
Damit sind nun alle unsere Schätzfragen beantwortet.
Die richtige Lösung lautet also:

Heft 10/76	Heft 11/76	Heft 12/76
B	A	A
C	C	A
A	A	B
A	B	B
B	B	B

In diesem Heft möchten wir die besten Einsender des vergangenen Schuljahres (1975/76) vorstellen. Einsendungen erhielten wir von 78 Schülern bzw. Mitgliedern des NVA-Zirkels. Der allgemeine Punktdurchschnitt liegt bei 17,02 Punkten. Der Punktdurchschnitt derjenigen Einsender, die mehr als 10 Punkte erreichten (Anzahl: 35) liegt bei 33,09 Punkten.

Dittmar KURTZ	Friedrichsroda	10. Klasse	71 Punkte
Reiner LINDEMANN	Cottbus	12. Klasse	71 Punkte
Meinhard MENDE	Lunzenau	(NVA)	64 Punkte
Harald GOTTSTEIN	Tangerhütte		58 Punkte
Eckhard LIEBSCHER	Ilmenau	11. Klasse	57 Punkte
Holger KÖNIG	Jena	11. Klasse	55 Punkte
Michael SCHADER	Magdeburg	12. Klasse	55 Punkte
Michael REISSIG	Halle		54 Punkte
Hermann TENOR	Dessau	9. Klasse	48 Punkte
Roger LABAHN	Anklam	11. Klasse	45 Punkte
Hans-Georg MARTIN	Jena	12. Klasse	43 Punkte
Thomas GONDERMANN	Weidhausen		43 Punkte
Michael HOHN	Teterow	11. Klasse	37 Punkte
Ralf BECKER	Wolmirstedt	11. Klasse	35 Punkte
Friedhelm SCHIEWECK	Blumenberg	12. Klasse	33 Punkte
Norbert SCHIEWECK	Blumenberg	12. Klasse	33 Punkte
Peter DITTRICH	Rudolstadt	10. Klasse	33 Punkte

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: K. Bartholmé, R. Jeske, H.-G. Leopold
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932



3

77

WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

11. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Primzahlen (I)

Man sagt, die Primzahlen bilden die Bausteine beim multiplikativen Aufbau der natürlichen Zahlen 1, 2, 3,.... Was versteht man eigentlich unter einer Primzahl? Bekanntlich ist das Produkt zweier natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl. Also gibt es natürliche Zahlen, die sich als Produkt von zwei natürlichen Zahlen, die beide größer als 1 sind, darstellen lassen. Andererseits gibt es natürliche Zahlen, die nicht Produkt von zwei natürlichen Zahlen größer als 1 sind, z.B. 2, 3, 5, usw. Solche Zahlen wollen wir Primzahlen nennen.

<u>D e f i n i t i o n 1 :</u> Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl größer als 1, die nicht Produkt von zwei natürlichen Zahlen größer als 1 ist.

Wir stellen fest:

<u>S a t z 2 :</u> Eine natürliche Zahl p ist dann und nur dann Primzahl, wenn sie genau zwei natürliche Teiler (1 und p) hat.

<u>Bemerkung:</u> Die natürliche Zahl b heißt Teiler der natürlichen Zahl a (in Zeichen: b/a), wenn es eine natürliche Zahl c gibt, so daß a=bc gilt.

<u>Beweis von Satz 2 :</u>

Wir haben zu zeigen:

1) Eine Primzahl hat nur zwei Teiler.
2) Hat eine natürliche Zahl p genau zwei Teiler, dann ist sie Primzahl.

Der Beweis wird indirekt geführt, d.h. wir gehen von der gegenteiligen Annahme aus und führen diese auf einen Widerspruch.

1) Annahme: Die Primzahl p hat einen weiteren Teiler a, wobei $1 < a < p$. Dann ist $p = ab$ und $1 < b = \frac{p}{a} < p$.

Also müßte p zusammengesetzt sein im Widerspruch zur Primzahleigenschaft.

2) Hat p zwei natürliche Teiler, so muß $p > 1$ sein.
Annahme: p ist keine Primzahl.
Dann muß es eine Zerlegung $p = ab$ mit $1 < a < p$ geben.
Somit wäre aber auch a ein Teiler von p, und p hätte mehr als zwei Teiler.

S a t z 3 : Jede natürliche Zahl $n > 1$ besitzt wenigstens einen Primteiler.

Beweis :

n hat wenigstens einen Teiler größer als 1, z.B. n selbst. Unter den Teilern von n, die größer als 1 sind, gibt es einen kleinsten p mit $p > 1$. Denn wäre p zusammengesetzt, $p = ab$ für $a,b > 1$, so wäre $p > a$ und a wäre ein kleinerer Teiler von n als p.
Ist n eine zusammengesetzte Zahl, $n = ab$ mit $a,b > 1$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \leq b$, so besitzt n sogar wenigstens einen Primteiler kleiner gleich $\sqrt{n}$. Denn wegen $a \leq b$ ist $n \geq a^2$ bzw. $a \leq \sqrt{n}$, und a hat nach Satz 3 mindestens einen Primteiler p, der dann auch n teilt und $p \leq a \leq \sqrt{n}$.
Damit haben wir den

S a t z 4 : Jede zusammengesetzte Zahl $n = ab$ mit $a,b > 1$ hat wenigstens einen Primteiler kleiner gleich n.

Wieviel Primzahlen gibt es ?
Diese Frage beantwortete schon Euklid.

S a t z 5 : Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis : (indirekt)

Annahme: Es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
Wir führen diese Annahme auf einen Widerspruch, indem wir bilden:

(1) $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$

Wir behaupten, P enthält eine weitere Primzahl, die mit keiner der Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ übereinstimmt.
Nach Satz 3 besitzt nämlich P mindestens einen Primteiler q.

Wäre etwa $q = p_k$ $(1 \leq k \leq n)$, so wäre q ein Teiler von P und von $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$, müßte also nach (1) auch ein Teiler von 1 sein, was natürlich nicht zutreffen kann, d.h. unsere Annahme war falsch.

Nun wenden wir uns dem eingangs erwähnten multiplikativen Aufbau der natürlichen Zahlen zu. Dieser wird ausgedrückt im

Satz 6: Fundamentalsatz der Zahlentheorie

1. Jede natürliche Zahl $n > 1$ läßt sich als Produkt von Primzahlen $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ darstellen.
2. Diese Darstellung ist, abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren, eindeutig.

Der Fundamentalsatz besteht also aus zwei Teilen:
1. Die Existenz einer Primfaktorzerlegung
2. Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

Der Beweis von 1. ist ziemlich einfach, von 2. dagegen recht schwierig, weshalb wir ihn auf den zweiten Artikel verschieben wollen. Wenden wir uns dem Beweis von 1. zu:

Die Existenz einer Primfaktorzerlegung:

Nach Satz 3 hat n wenigstens einen Primteiler p_1. Wir können annehmen, p_1 ist der kleinste Primteiler von n. Dann ist $n = p_1 \cdot n_1$. Entweder ist $n_1 = 1$, dann ist n gleich der Primzahl p_1 und der Beweis ist fertig.
Ist $n_1 > 1$, wiederholen wir das Verfahren:
Nach Satz 3 hat n_1 wenigstens einen Primteiler p_2, den wir wieder als den kleinsten Primteiler von n_1 annehmen können. Folglich ist $n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2$. Bei Fortsetzung des Verfahrens erhält man schließlich $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot n_k$. Dabei ist $n > n_1 > \ldots > n_k$. Daher muß an einer Stelle $k = r$ kommen, so daß $n_r = 1$ ist. Jetzt bricht das Verfahren ab, und es ist $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ als Produkt von Primzahlen dargestellt.
In der Darstellung $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ können gewisse Primzahlen einander gleich sein. Faßt man gleiche Primzahlen zusammen,

so erhält man die kanonische Zerlegung von n in Primfaktoren:

(2) $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$

In (2) sind die p_i verschiedene Primzahlen, die a_i natürliche Zahlen.

Prof. Dr. rer. nat. habil. E. Krätzel

XVI. Bezirksmathematikolympiade und Winterlager des Bezirksklubs Junger Mathematiker des Bezirkes Gera

Für die besten Schüler im Fach Mathematik ist die alljährlich am ersten Wochenende in den Winterferien durchgeführte III. Stufe der Mathematikolympiade bereits zu einer guten Tradition geworden.
Die Bezirksolympiade des Bezirkes Gera fand in diesem Jahr zum ersten Mal in Kaulsdorf (Kreis Saalfeld) statt. "Austragungsort" war die in malerischer Landschaft gelegene neue Oberschule von Kaulsdorf.
Hier verbrachten die 140 Teilnehmer, darunter fünf Schüler der sowjetischen Garnisionsschule in Jena und ein chilenischer Jugendfreund, der seit 1973 in Jena lebt, drei anstrengende, aber sicher auch erlebnisreiche Tage.
Neben den beiden Klausuren am Sonnabend- und Sonntagvormittag war eine Vielzahl von kulturellen Veranstaltungen vorbereitet. Echte Höhepunkte hierbei wurden ein Forum mit Renate Stecher und eine "Teestunde am Samowar" .

Am Sonntagabend erhielten die Schüler ihre korrigierten Lösungen zurück, jedoch ohne schon etwas über ihre Platzierung zu erfahren. Dadurch hatten alle die Möglichkeit, bis zum nächsten Morgen bei der Jury einen schriftlich formulierten Einspruch abzugeben, für den Fall, daß sich eventuell Fehler bei der Bewertung der Lösungen ergeben hatten. (Zum Glück für die Korrektoren gab es jedoch nur ganz wenige berechtigte Einsprüche, die auch alle vor der Siegerehrung noch bearbeitet werden konnten.)

So fand dann am Montag als Abschluß der Olympiade die Auszeichnung der besten Teilnehmer statt.
Mit den erreichten Punktzahlen in der 7. Klasse (Durchschnitt 20,3), in der 8. Klasse (21,1) und besonders auch in der 10. Klasse (20,9) kann man durchaus zufrieden sein. Weniger befriedigend waren die Ergebnisse in der 9. Klasse (15,2), in der 12. Klasse (13,9) und besonders in der 11. Klasse (8,8!). Gerade in der 11./12. Klasse erwiesen sich die Aufgaben der zweiten Klausur in ihrer Gesamtheit für die Schüler als zu schwierig.

Zur Siegerehrung konnten 11 Teilnehmer mit einem 1. Preis ausgezeichnet werden:

Klassenstufe 7:	Torsten E i d n e r (Schüler der 6. Klasse, 35 Punkte, Zeulenroda) Frank N e u m a n n (34 Punkte; Saalfeld)
Klassenstufe 8:	Andrea W e i ß (37 Punkte; Jena)
Klassenstufe 9:	Frank R e c k l i e s (35 Punkte; Jena)
Klassenstufe 10:	Thomas P e s c h e l, Andreas S t r a u b (beide 32 Punkte; Jena) Christel M i t z e n h e i m (Schülerin der 9. Klasse, 31 Punkte; Jena) Andreas J e s c h a g (31 Punkte; Jena) Rüdiger W i l d t (31 Punkte; Gera)
Klassenstufe 12:	Reinhard M e i n e l (29 Punkte; Jena) Andreas K l e i n w ä c h t e r (28 Punkte; Jena) .

Die sieben letztgenannten Schüler sind gleichzeitig die Kandidaten des Bezirkes für die DDR-Olympiade.

Außerdem konnten elf 2. Preise, einundzwanzig 3. Preise und fünfundzwanzig Anerkennungsurkunden verliehen werden. Der Schüler Andreas Kleinwächter erhielt für die elegante Lösung einer Aufgabe ein Diplom.

Wir freuten uns auch sehr, als wir erfuhren, daß zwei Preisträger unserer Olympiade, nämlich Ralf Wegner (10. Klasse) und Reinhard Meinel (12. Klasse; beide aus Jena), bei der DDR-Physik-Olympiade, die anschließend in Güstrow stattfand, ebenfalls einen Preis erringen konnten .

Für etwa 30 Teilnehmer ging es von der Bezirksolympiade direkt ins Spezialistenlager des Bezirksklubs "Junge Mathematiker". In der Lobensteiner EOS "Arthur Becker" fand das diesjährige Winterlager nicht gerade ideale Bedingungen vor, aber doch wenigstens statt.
Daß die Teilnehmer zehn Tage lang in einer stark renovierungsbedürftigen Schule wohnen mußten, aber trotzdem mit großer Begeisterung, Disziplin und Wissenshunger bei der Sache waren, verdient schon seine Anerkennung. Deswegen an dieser Stelle nochmals der Dank an alle Teilnehmer!

Für die Gestaltung des Unterrichts und die Betreuung der Schüler in ihrer Freizeit waren fünf Studenten und zwei Mitarbeiter der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität eingesetzt. Kontinuierlich wurde das Lehrprogramm auch in diesem Lager fortgesetzt, jeden Tag vier Stunden. Die 8. Klasse beschäftigte sich im wesentlichen mit Aussagenlogik, Mengenlehre und geometrischen Beweisen, während sich die Neunten mit Graphentheorie und Schaltalgebra abmühten. Die 10. Klasse hörte neben Wahrscheinlichkeitstheorie noch einiges über räumliche Geometrie und komplexe Zahlen und schließlich die Elf-Zwölfer: sie hatten das Vergnügen, mit konvexen Figuren und Problemen der Erkennungstheorie vertraut gemacht zu werden. Natürlich wurden auch die

Aufgaben der Bezirksolympiade ausführlich besprochen und verschiedene Lösungsideen erläutert.

In der Freizeit wurde ein reichhaltiges Programm organisiert, allerdings kamen unserer Meinung nach unbeschwerte und ferienmäßige Veranstaltungen etwas zu kurz. Zu einem Höhepunkt im gesellschaftlichen Leben des BKJM gestaltete sich das Meeting mit zwei ehemaligen Widerstandskämpfern an der Stätte des früheren KZ-Außenlagers Laura. Zwei Jugendfreunde legten am Mahnmal einen Kranz nieder.

Drei langjährige Mitglieder wurden in würdiger Form aus dem BKJM verabschiedet. Ulrich Speer, Andras Kleinwächter und der enorm sanguinistisch veranlagte Ulrich Stöckigt werden in den nächsten Monaten ihr Abitur ablegen.

Wünschen wir uns, daß das kommende Frühjahrslager stärkere Beteiligung und die Vereinigung der guten Schleizer Lern- und Wohnatmosphäre mit dem Lobensteiner Elan bringen wird.

Wolfgang Schäfer
Jörg Vogel

! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! !

Leider ist uns beim Schreiben des Artikels über universelle Algebren in Heft 12/76 S.183 (2. und 8. Zeile von unten) ein sinnentstellender Schreibfehler unterlaufen. In Definition 11 muß es natürlich ISOMORPHISMUS und nicht HOMOMORPHISMUS bei der Definition desselben heißen. Wir bitten um Entschuldigung!

DIE REDAKTION

! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! !

Unterhaltsame Logik

"Man lasse alles Unmögliche weg, und was übrig bleibt ist die Antwort, egal wie wahrscheinlich sie erscheint." Diese Worte stammen von dem berühmten Sherlock Holmes und sollen im weiteren als Grundlage für die Lösung einer bestimmten Art von Aufgaben dienen.

Diese Art von mathematischen Rätseln besteht aus einer Reihe von Aussagen, welche diese oder jene Informationen über die handelnden Personen vermittelt. Gesucht ist eine bestimmte weitere Information, welche sich aus diesen Aussagen ergibt. Zuerst ein Beispiel:

1. Müller, Meier und Schulze arbeiten zusammen in einer Zugbrigade als Maschinist, Schaffner und Zugführer. Die Berufe sind nicht unbedingt in der gleichen Reihenfolge wie die Familiennamen genannt. In ihrem Zug sitzen drei Passagiere mit den gleichen Familiennamen (Zur Unterscheidung werden die Passagiere mit Anführungsstrichen gekennzeichnet, z. B. "Müller").
2. "Schulze" wohnt in Jena.
3. Der Schaffner wohnt in Berlin.
4. "Meier" hat fast die ganze Integralrechnung vergessen, die er in der Fachschule gelernt hatte.
5. Der Passagier mit dem gleichen Familiennamen wie der Schaffner wohnt in Leipzig.
6. Der Schaffner und einer der Passagiere, ein bekannter Mathematiker, gehen öfter gemeinsam zum Fußball.
7. Müller spielt besser Schach als der Zugführer.

Wie heißt der Maschinist?

Um eine gewisse Übersicht bei der Lösung solcher Aufgaben zu behalten, benutzt man Tabellen, deren Inhalt alle Kombinationen der von uns betrachteten Mengen sind. Bei unserer Aufgabe sähe das wie folgt aus:

	Maschinist	Schaffner	Zugführer
Müller			
Meier			
Schulze			

	Jena	Berlin	Leipzig
"Müller"			
"Meier"			
"Schulze"			

In jedes Feld wird eine 1 eingeschrieben, wenn die Kombination zulässig ist, oder eine 0, wenn die Kombination den Bedingungen der Aufgabe widerspricht.

Die Aussage 7 schließt die Möglichkeit aus, daß der Zugführer Müller heißt, und wir schreiben in die rechte obere Ecke der linken Tabelle eine 0. Aus der Aussage 2 folgt, daß wir in die linke untere Ecke der rechten Tabelle eine 1 schreiben können. In die restlichen Felder der unteren Zeile und der linken Spalte schreiben wir 0.
Aus den Aussagen 3 und 6 folgt, daß der Mathematiker in Berlin wohnt, ohne daß wir seinen Namen kennen. Er kann aber weder "Schule" (Kombination "Schulze" - Berlin schon mit 0 besetzt) noch "Meier", der schon die Integralrechnung vergessen hat, heißen. Wir können also in die Kombination "Müller" - Berlin eine 1 und in die restlichen Felder der oberen Zeile und der mittleren Spalte eine 0 einsetzen. Für die letzte 1 bleibt nun noch die Kombination "Meier" - Leipzig übrig. Aus der Aussage 5 folgt nun, daß der Schaffner Meier heißt. Nach dem Einsetzen der entsprechenden 1 und 0 hat die Tabelle folgendes Aussehen:

	Maschinist	Schaffner	Zugführer
Müller		0	0
Meier	0	1	0
Schulze		0	

	Jena	Berlin	Leipzig
"Müller"	0	1	0
"Meier"	0	0	1
"Schulze"	1	0	0

Da aber auch Müller einen Beruf hat, bleibt für ihn nur noch der Maschinist übrig.

Um seine eigenen Fähigkeiten bei der Lösung solcher Aufgaben zu überprüfen, sei noch eine etwas schwerere Aufgabe gegeben:

1. Im Herbst des Jahres 1976 trafen sich drei Ehepaare zu einer großen Familienfeier.
2. Jeder der Ehemänner ist der Bruder einer Ehefrau und jede Ehefrau die Schwester eines Ehemannes (deswegen Familienfeier).
3. Karin ist genau 26 Wochen älter als ihr Ehemann, der im August geboren ist.
4. Die Schwester von Herrn Weiß ist mit dem Schwager von Karins Bruder verheiratet. Die Hochzeit fand an ihrem Geburtstag im Januar statt.
5. Gisela Weiß ist kleiner als Klaus Schwarz.
6. Die Schwester von Wolfgang ist jünger als Marita.
7. Rainer ist in diesem Jahr 24 Jahre alt geworden.

Wie heißt Frau Braun mit Vornamen?

Da diese Aufgabe etwas anders geartet ist als die erste Aufgabe, sei der Anfang einer möglichen Lösung gegeben:

Es gibt zwei Möglichkeiten:

a) Karin Braun und b) Marita Braun.

Wir nehmen an, es gibt die erste Möglichkeit.
Die Schwester von Herrn Weiß kann entweder Karin oder Marita sein. Marita scheidet aber aus, da in diesem Fall der Bruder von Karin Herr Schwarz wäre, und Marita Schwarz mit ihrem eigenen Bruder und nicht mit dessen Schwager verheiratet ist. Dies widerspricht aber der Bedingung 4. So erhalten wir also folgende Geschwisterpaare. Karin - Herr Weiß, Marita - Herr Braun und Gisela - Herr Schwarz.

Aus Bedingung 6 folgt nun, daß Herr Weiß mit Vornamen Wolfgang heißt, da ...

Die weitere Argumentation und die Untersuchung der zweiten Variante überlassen wir von dieser Stelle aus dem Leser. Die vollständige Lösung veröffentlichen wir in einer der nächsten Nummern.

Gleichzeitig stellen wir dieses Problem als Sonderpreisaufgabe (5 Punkte).

Einsendeschluß: 1.6.1977

Eberhard Richter

Preisaufgaben 3/77

I 7 (2)

Man löse das Gleichungssystem

$$\log_2(y-x) - \log_8(3y-5x) = 0$$
$$x^2 + y^2 = 5$$

I 8 (1)

(nach Vorschlag von Lutz Gärtner, Berlin)

Gegeben seien ein Dreieck ABC und drei Punkte A', B', C' auf den Seiten a, b, c, so daß gilt: $\frac{AC'}{c} = \frac{BA'}{a} = \frac{CB'}{b} = k$. Man zeige, daß die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und A'B'C' zusammenfallen!

I 9 (1)

Man löse die Ungleichung

$$x^{\frac{2x-1}{3-x}} < 1 \quad !$$

I 10 (1)

Man finde alle Lösungen der Gleichung

$$4 \sin x + 2 \cos x = 2 + 3 \tan x \quad !$$

I 11 (1)

Man ermittle den Koeffizienten für x^n im Ausdruck

$$(1+x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n)^2 \quad !$$

I 12 (2)

В тетраэдр вписан другой тетраэдр так, что его вершины лежат в точках пересечения медиан граней первого тетраэдра. Найти отношение объемов тетраэдров.

Einsendeschluß: 1.6.1977

Inhaltsverzeichnis 1976

Lösungen

$\boxed{\text{Aufgabe H 58}}$ (nach A.Kasparek,Gräfenheinichen)

(1) $x + y = 1$

(2) $xz + yt = 2$

(3) $xz^2 + yt^2 = 5$

(4) $xz^3 + yt^3 = 14$

Aus (1) folgt: $x = 1 - y$ und somit

(1)' $z + y(t - z) = 2$

(2)' $z^2 + y(t^2 - z^2) = 5$

(3)' $z^3 + y(t^3 - z^3) = 14$

Aus (1)' folgt: $y = \frac{2 - z}{t - z}$. Mit (2)' und (3)' ergibt sich:

(1)'' $z^2 + (2-z)(t+z) = 5$

$2z + t(2-z) = 5$

(2)'' $z^3 + (2-z)(t^2+zt+z^2) = 14$

$t^2(2-z) + tz(2-z) + 2z^2 = 14$

$t(t+z)(2-z) + 2z^2 = 14$

Aus (1)'' folgt: $t = \frac{5 - 2z}{2 - z}$. Für (2)'' ergibt sich:

$$\frac{5 - 2z}{2 - z}(2 - z)\left(\frac{5 - 2z}{2 - z} + z\right) + 2z^2 = 14$$

$$(5 - 2z)(5 - z^2) + 2z^2(2 - z) = 14(2 - z)$$

$$25 - 10z - 5z^2 + 4z^2 = 28 - 14z$$

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

$$(z - 2)^2 = 1$$

Es folgt also $z_1 = 3$ und $z_2 = 1$.

Mit (1)'' folgt $t_1 = 1$ und $t_2 = 3$.

Mit (1)' folgt $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$.

Mit (1) folgt $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

Lösungen sind somit nur die Quadrupel ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 3, 1) und ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, 3).

Aufgabe H 63 (nach R.Becker)

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit q^2 , der zweiten mit p^2 und der dritten mit $-2pq$ ergibt sich:

(1) $(a_1q)^2 + (a_2q)^2 + \ldots + (a_nq)^2 = p^2q^2$

(2) $(b_1p)^2 + (b_2p)^2 + \ldots + (b_np)^2 = p^2q^2$

(3) $-2a_1qb_1p - 2a_2qb_2p - \ldots - 2a_nqb_np = -2p^2q^2$

Aus der Addition der drei Gleichungen folgt:

(4) $(a_1q)^2 + (b_1p)^2 - 2a_1qb_1p + \ldots + (a_nq)^2 + (b_np)^2 - 2a_nqb_np = 0$

Daraus folgt:

(5) $(a_1q - b_1p)^2 + \ldots + (a_nq - b_np)^2 = 0$

Da stets gilt: $(a_iq - b_ip)^2 \geq 0$ $\qquad i = 1,\ldots,n$

folgt:

$a_iq - b_ip = 0 \qquad i = 1,\ldots,n$

Daraus folgt aber:

(6) $\underline{\underline{a_i = k \cdot b_i \qquad \text{mit} \quad k = \frac{p}{q}}}$ ($p \cdot q \neq 0$ nach Voraussetzung)

WUSSTEN SIE SCHON ... WUSSTEN SIE SCHON ... WUSSTEN SIE SCHON

Wären sämtliche Wurzelexemplare in Form einer einseitig bedruckten Papierschlange erschienen, so hätte diese in den 10 Jahren des Bestehens der WURZEL die Länge eines halben Erdumfanges erreicht.

Seit Bestehen unserer Zeitung wurden bisher ca.

$$10^{10^{10}}$$

Schriftzeichen gedruckt !

Wir möchten unsere geneigten Leser schon jetzt darauf aufmerksam machen, daß wir in einer unserer nächsten Nummern eine mehrteilige Artikelserie über die Entwicklung der Mathematik an der Jenaer Universität beginnen werden.
Sollten einigen von Ihnen noch Historien oder Histörchen zu diesem Thema einfallen, so bitten wir Sie, uns diese umgehend mitzuteilen!!!
Im voraus dankt Ihnen herzlichst

DIE REDAKTION

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Egbert Creutzburg
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: K. Bartholmé, R. Jeske, H.-G. Leopold
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

4
77

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

11. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Primzahlen (II)

Wir müssen noch den zweiten Teil des Fundamentalsatzes der Zahlentheorie beweisen, der besagte, daß die Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist. Hierzu stellen wir eine Vorbetrachtung an, die auch für sich interessant ist. Wir wollen uns überlegen, was der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen ist und wie dieser berechnet werden kann.
Es seien a und b zwei natürliche Zahlen. Beide haben gewisse gemeinsame Teiler.
Beispiel: $a = 30$, $b = 45$
Gemeinsame Teiler sind 1, 3, 5, 15.
Unter diesen gemeinsamen Teilern gibt es einen größten d, im Beispiel ist $d = 15$. Wir nennen d den größten gemeinsamen Teiler von a und b und schreiben $(a,b) = d$. Zwei Zahlen heißen teilerfremd, wenn $d = 1$ gilt, z.B. $(14,15) = 1$.

Eigenschaften des größten gemeinsamen Teilers $(a,b) = d$:

1. d/a und d/b .
2. Ist t irgendein Teiler von a und b, t/a und t/b, dann gilt auch: t/d.

Hierdurch ist der größte gemeinsame Teiler eindeutig bestimmt.

Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers durch den Euklidischen Algorithmus :

Es sei $a_1 > a_2 > 1$. Gesucht ist $(a_1,a_2) = d$.
Man teile a_1 durch a_2 so oft es geht, d.h. daß ein kleinerer Rest als a_2 verbleibt:

(3) $a_1 = q_1a_2 + a_3 \quad , \quad 0 \leq a_3 < a_2$.

Man wiederhole das Verfahren mit a_2 und a_3:

(4) $a_2 = q_2a_3 + a_4 \quad , \quad 0 \leq a_4 < a_3$

usw. bis

(5) $a_{n-2} = q_{n-2}a_{n-1} + a_n \quad , \quad 0 \leq a_n < a_{n-1}$

Die Zahlen $a_2, a_3, \dots, a_n$ bilden eine abnehmende Folge. Es sind nichtnegative ganze Zahlen. Folglich muß einmal nach endlich vielen Schritten der Fall eintreten, daß der Rest 0 ist. Das sei im nächsten Schritt der Fall, also $a_{n+1} = 0$:

(6) $a_{n-1} = q_{n-1} a_n$.

Dann ist $a_n = d$. Wir bestätigen das, indem wir die beiden Eigenschaften von d überprüfen:

Nach (6) ist a_n/a_{n-1} und nach (5) a_n/a_{n-2} usw., also nach (4) und (3) a_n/a_2 , a_n/a_1. Das ist die Eigenschaft (1) von d.

Nun zur Eigenschaft 2.: t/a_1 und t/a_2 , dann gilt nach (3) t/a_3 , nach (4) t/a_4 usw. und nach (5) t/a_n .

Beispiel:

Gesucht ist $(133,91) = d$:

$$133 = 1 \cdot 91 + 42 \ ,$$
$$91 = 2 \cdot 42 + 7 \ ,$$
$$42 = 6 \cdot 7 \ , \text{ d.h. } d = 7.$$

Jetzt können wir den entscheidenden vorbereitenden Satz für den Beweis der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung darlegen.

S a t z 5 : Sind a und b natürliche Zahlen, und ist ihr Produkt $a \cdot b$ durch eine Primzahl p teilbar, dann ist wenigstens eine der Zahlen a oder b durch p teilbar.

Beweis:

Es ist zu zeigen: Aus $p/a\,b$ folgt p/a oder p/b.
Wir bilden (p,b). Da p Primzahl ist, kommen für (p,b) zwei Werte in Frage: Entweder ist $(p,b) = p$ oder $(p,b) = 1$.
Im ersten Fall gilt p/b und wir sind fertig. Im zweiten Fall folgt aber aus $(p,b) = 1$ sofort $(ap,ab) = a$. Wegen p/ap und p/ab folgt aus der Eigenschaft 2. des größten gemeinsamen Teilers p/a. Damit ist der Beweis ebenfalls fertig.

Folgerung:

Ist p Primzahl und gilt $p/a_1 a_2 \dots a_n$, dann ist wenigstens eine der Zahlen a_1 , a_2 ,..., a_n durch p teilbar.

Den Beweis überlassen wir dem Leser!

Wir zeigen jetzt die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung:

Nehmen wir an, es gibt natürliche Zahlen, die zwei verschiedene Primfaktorzerlegung zulassen. Unter diesen Zahlen gibt es eine kleinste Zahl n:

$$n = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s \; .$$

Die p_i und q_i sind Primzahlen.
Aus p_1/n folgt $p_1/q_1 q_2 \dots q_s$ und nach Satz 5 muß p_1 wenigstens eine der Primzahlen q_1 , q_2 ,..., q_s teilen, etwa p_1/q_1 .
Da p_1 und q_1 beide Primzahlen sind, kann nur $p_1 = q_1$ sein.
Dann muß

$$n' = \frac{n}{p_1} = p_2 \dots p_r = q_2 \dots q_s \quad \text{sein.}$$

Weil aber n' n ist, hat n' nach Voraussetzung eine eindeutig bestimmte Primfaktorzerlegung. Folglich muß $r = s$ sein und, falls die Primzahlen p_i, q_i der Größe nach geordnet sind, gilt:

$$p_2 = q_2 \; , \; p_3 = q_3 \; , \; \dots \; , \; p_r = q_r \; .$$

Daraus folgt, daß unsere Annahme falsch war, denn auch n hat eine eindeutige Primfaktorzerlegung.

Prof. Dr. E. Krätzel

Preisaufgaben 4/77

J 13 Man löse die Gleichung

1

$$\sin \frac{x}{2} (\sin x + \sin 2x + \dots + \sin 100x) = \frac{1}{2} \sin \frac{101x}{2}$$

J 14 (Aufgabenvorschlag von Lutz Gärtner, Berlin)

1

Man ermittle alle reellen Zahlen x, so daß für jede natürliche Zahl n gilt: x ist Nullstelle der Funktion f_n

$$f_n(x) = x^n - 7x^{n-1} + 10x^{n-2} + 3x^5 - 16x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 13x - 15.$$

J 15 Man löse das Gleichungssystem

1

$$\log_a x + \log_{a^2} x = 1$$
$$b^{\log_{\sqrt{b}} \sqrt{y}} + x^2 = 2a$$

J 16 Man löse die Ungleichung

2

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} < 35 - 2x$$

J 17 Man berechne die Summe

1

$$X_n = x + 4x^3 + 7x^5 + 10x^7 + \ldots + (3n-2)x^{2n-1}$$

J 18 Найти все действительные значения a , при которых корни многочлена $x^2 + x + a$ будут действительными и оба корня будут больше a .

2

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.
Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.
Einsendeschluß: 15.6.1977

Lösungen 4/77

Aufgabe H 57 (nach Eckhard Liebscher, Ilmenau)

Da a und x als Basen von Logarithmen vorkommen, muß zur Lösung $a > 0$, $a \neq 1$
$x > 0$, $x \neq 1$

vorausgesetzt werden.

Nach der Kettenregel für Logarithmen ist nun

$$\log_x a = \frac{1}{\log_a x} .$$

Substituiert man in der Gleichung $\log_x a = L$ und wendet die Logarithmengesetze

$\log_u \sqrt[v]{w} = \log_u w^{\frac{1}{v}} = \frac{1}{v} \log_u w$ und

$\log_u(v.w) = \log_u v + \log_u w$ an, so erhält man

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}(1+\tfrac{1}{L}) + \tfrac{1}{4}(L+1)} + \sqrt{\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{L} - 1) + \tfrac{1}{4}(L-1)} = 0$$

$$\sqrt{\frac{(L+1)^2}{L}} + \sqrt{\frac{(L-1)^2}{L}} = 0 \quad (1)$$

Wegen $L \neq 0$ folgt aus (1)

$$|L+1| + |L-1| = 0 \quad (2)$$

Wegen $|L+1| \geq 0$ und $|L-1| \geq 0$ folgt aus (2):

$$L+1 = 0 \quad \text{und} \quad L-1 = 0$$

$$\underline{L = -1} \qquad \underline{L = 1} .$$

Da die Logarithmenfunktion eineindeutig ist, ergibt sich hier ein Widerspruch. Die Gleichung besitzt also keine reelle Lösung.

Aufgabe H 65 (nach Harald Gottstein, Tangerhütte)

Wir bezeichnen $\overrightarrow{AD} = \mathfrak{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathfrak{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{c}$ mit Koordinaten $\mathfrak{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathfrak{b} = (b_x, b_y, b_z)$ und $\mathfrak{c} = (c_x, c_y, c_z)$.

Für das Volumen ergibt sich:

$$(1) \qquad V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

Hieraus folgt:

$$(2) \qquad 36\, V^2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} \\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} \\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} & \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} \end{vmatrix}$$

Es gilt aber: $|\mathfrak{a}| = a$, $|\mathfrak{b}| = b$, $|\mathfrak{c}| = c$ und somit

$$(3) \qquad \mathfrak{a}^2 = a^2 , \quad \mathfrak{b}^2 = b^2 , \quad \mathfrak{c}^2 = c^2 .$$

Außerdem gilt $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = a.b \cos(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$. Aus dem Cosinussatz folgt:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AD} \cos(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) .$$

Hieraus ergibt sich:

$$(4) \qquad \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2} .$$

Analog erhält man:

$$(5) \qquad \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2}$$

$$(6) \qquad \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} .$$

Setzen wir (3), (4), (5), (6) in (2) ein und erhalten

$$(7) \qquad 36V^2 = a^2\left[b^2c^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)^2\right] - \frac{a^2+b^2-c^2}{2}\left(c^2 \frac{a^2+b^2-c^2}{2} - \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right) + \frac{a^2+c^2-b^2}{2}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2} - b^2 \frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right).$$

Vereinfachen von (7) ergibt

$$36\, V^2 = \frac{1}{2} (b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) .$$

Für das Volumen ergibt sich hieraus:

$$V = \frac{1}{12} \sqrt{2(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} .$$

Zum 200. Geburtstag von Carl Friedrich Gauß am 30. April 1977

Der 200. Geburtstag von Carl Friedrich Gauß ist den Mathematikern Anlaß, seine überragenden Leistungen in ihrer Bedeutung für den gegenwärtigen Stand und die weitere Entwicklung der Mathematik zu würdigen. Aus diesem Grunde werden in vielen Ländern Gedenkfeiern durchgeführt. So hat die Akademie der Wissenschaften der DDR ein Gaußkomitee gebildet, das am 21. und 22.4. in Berlin eine zentrale Ehrung des "Fürsten der Mathematiker", wie er auf der in seinem Todesjahr geprägten Gedenkmünze genannt wird, durchführt.

Gauß wurde am 30. April 1777 als Sohn des Tagelöhners Gebhard Gauß in Braunschweig geboren. Seine Mutter Dorothea, geborene Benze, war die Tochter eines Steinhauers, die bis zu ihrer Heirat als Magd diente. Trotz dieser bescheidenen Verhältnisse, in denen Gauß aufwuchs, verlebte er eine unbeschwerte Kindheit, an die er sich im Alter oft und gern erinnerte. Schon als Schüler fiel Gauß durch glänzende Leistungen auf, die es ihm ermöglichten, eine Freistelle am Collegium Carolinum in Braunschweig zu erhalten, dessen Abschluß zum Hochschulstudium berechtigte. Nach glänzend bestandenem Examen erhielt Gauß durch Fürsprache seiner Lehrer die Möglichkeit, ein Studium an der Universität Göttingen aufzunehmen.
Als Student der Mathematik und Philologie machte er bald durch seine großen Kenntnisse und leidenschaftliche Arbeit auf sich aufmerksam, und bereits als Neunzehnjährigem gelang ihm eine große Entdeckung, die Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks mit Zirkel und Lineal (Literatur: (1)).
Schon in der Antike konnte man die regelmäßigen n-Ecke konstruieren, die sich aus den regelmäßigen Dreieck, Viereck, Fünfeck durch Halbieren und Kombination der Seiten ergaben, also auch das regelmäßige 15-Eck. Trotz aller Bemühungen bedeutender Mathematiker war die Frage offen, ob weitere n-Ecke konstru-

iert werden können und ob sich auch angeben läßt, für welche n das der Fall ist. Vor Gauß war bekannt, daß die Konstruktion des regelmäßigen n-Ecks gleichwertig ist mit der Lösung der Gleichung $x^n=1$ in komplexen Zahlen. Am 30. März 1796 fand Gauß nach längeren Bemühungen, daß die Konstruktion möglich ist, wenn n entweder eine Potenz von 2 ist oder eine Primzahl, die man aus dem Ausdruck $2^{2^k}+1$ erhält, wenn man für k eine natürliche Zahl einsetzt. In diesen Fällen läßt sich die Seitenlänge durch eine Schachtelung von Quadratwurzeln angeben. Gauß hat selbst eine elementare Lösung für k=2 d. h. für das 17-Eck angegeben. Er setzt $360^\circ=17\varphi$ und zeigt, daß dann

$$\cos\varphi = -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\cdot\sqrt{17}}$$
$$+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

ist. (siehe Literatur (1) und (2)).

Der Weg, den Gauß beschritt, stellt eine überraschende Erweiterung der griechischen Art, Mathematik zu treiben, dar,und so erregte ihre Bekanntgabe im Intelligenzblatt der allgemeinen Literaturzeitung großes Aufsehen und Gauß selbst maß der Erkenntnis große Bedeutung bei. Sie bestimmte ihn, die gleichstarke Neigung zur Philologie zurückzustellen und sich ganz der Mathematik zu widmen.

Ebenfalls noch als Student in den Jahren 1796-1798 schrieb Gauß sein erstes Buch "Die arithmetischen Abhandlungen". Hier faßte er die Zahlentheorie, die bis zu dieser Zeit eine Sammlung von zahlreichen, sehr wertvollen Einzelkenntnissen darstellte, zu einem einheitlichen und systematischen Wissensgebiet zusammen, das er gleichzeitig durch eigene Untersuchungen erweiterte, so daß man als den Beginn der modernen Zahlentheorie die Veröffentlichung dieses Buches im Jahre 1801 zählt. Mit diesem Werk rückte Gauß unter die führenden Mathematiker seiner Zeit auf. Das ist u. a. daraus ersichtlich, daß Gauß nach Erscheinen des Werkes zum korrespondierenden Mitglied der Petersburger Akademie gewählt wurde. (siehe Literatur (2).
Das Werk gliedert sich in die 3 Hauptteile, Theorie der Kongruenzen, die quadratischen Formen und die Theorie der Kreis-

teilung. In ihm wird das berühmte Reziprozitätsgesetz, das der Schweizer Mathematiker Euler zuerst formuliert hat, von Gauß bewiesen.

Noch während der endgültigen Abfassung und der Drucklegung der "Arithmetischen Abhandlungen" erwarb Gauß im Jahre 1799 mit dem ersten vollständigen Beweis des Fundamentsatzes der Algebra an der Landesuniversität Helmstedt bei dem Mathematiker J.F.Pfaff den Doktorgrad. Über die Arbeit schreibt Pfaff:"Ich kann nicht anders als sehr vorteilhaft urteilen, da sie von des Verfassers vorzüglichen Fähigkeiten und gründlichen Einsichten einen überzeugenden Beweis enthält."

Gauß hatte Göttingen bereits 1798 verlassen und war nach Braunschweig zurückgekehrt, wo er ungestört seine Studien fortsetzen konnte, da ihm die Unterstützung, die man ihm während des Studiums gezahlt hatte, weiter gewährt und später auch erhöht wurde. In Braunschweig heiratete er 1805 und dort wurde auch sein erster Sohn geboren. Im Jahre 1807 wurde Gauß Direktor der Sternwarte und Professor der Astronomie in Göttingen. Die Berufung als Direktor der Sternwarte war veranlaßt durch die großen Verdienste, die Gauß durch seine astronomischen Erkenntnisse für die Entwicklung dieser Wissenschaft erbracht hatte. So war es seinen Berechnungen zu danken, daß der Planetoid Ceres, der nach seiner ersten Beobachtung nur 40 Tage sichtbar war, wieder aufgefunden wurde. Auf ganz neue Art, nur von relativ wenigen beobachteten Bahnelementen ausgehend, berechnete Gauß die Bahn, die es den Astronomen ermöglichte, genau 1 Jahr nach der ersten Entdeckung Ceres wieder zu beobachten. Damals schrieb ihm der bekannte Astronom Olbers:"Das ganze astronomische Europa sieht mit Ungeduld der Bekanntmachung der Methode entgegen." Weitere Arbeiten über Astronomie folgten (z. B. über die Bahnstörungen des Ceres durch andere Planeten) und brachten neue wertvolle Ergebnisse. Sie faßte Gauß im Jahre 1806 zu dem Buch mit dem Titel "Theorie der Bewegung der Himmelskörper" zusammen. Dieses Werk ist noch heute von grundlegender Bedeutung, wenn auch die Rechenmethoden vollständig andere geworden sind.

Im Zusammenhang mit der Astronomie wandte sich Gauß auch Reihenuntersuchungen zu, die bei den Störungsrechnungen auftraten. Er war gezwungen, sich mit Konvergenzbedingungen zu befassen und Wert und Fehler der Reihen abzuschätzen.

Nach 1820 begann Gauß sich für die Geodäsie zu interessieren, als ihm die Vermessung des Königsreiches Hannover übertragen wurde. Der Auftrag zog sich fast über 10 Jahre hin und beanspruchte ihn außerordentlich stark. Gauß hat geschätzt, daß er und seine Mitarbeiter 1 Million Zahlen rechnerisch verarbeitet haben. Er verwandte bei den Vermessungen, die er z. T. selbst durchführte, das von ihm konstruierte Helioskop. Es ist dies ein Leuchtgerät mit Visiereinrichtung, Spiegeln und Fernrohr, das Sonnenlicht vom Zielpunkt zum Beobachtungspunkt reflektiert und auch bei ungünstigem Wetter über größere Entfernungen Messungen gestattet. Es wurde verwandt bei der Triangulation Brocken - Inselsberg - Hoher Hagen, bei der Seitenlängen bis zu 90 km auftraten. Auch "Die Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten Göttingen und Altona" wurde von ihm in dieser Zeit vorgenommen. Die Abhandlung ist der Ausgangspunkt der modernen Geodäsie. Sie gibt auch die erste moderne Definition der Erdgestalt, die zu einem Problem der Potentialtheorie wurde.

Gauß' Freunde haben den großen Aufwand, den diese Vermessungen und Berechnungen verlangten, mehrfach beklagt. Aber Gauß wies das zurück mit dem Hinweis, daß er aus den Forderungen der Praxis die Anregungen zur Vertiefung der Theorie nehme. So kamen diese Anregungen den Arbeiten über Differentialgeometrie und konforme Abbildungen zugute. Auch bei der Behandlung der Methode der kleinsten Quadrate zum Ausgleich von Beobachtungsfehlern wirkte die praktische Tätigkeit von Gauß sich anregend aus.

Im Jahre 1829 machte Gauß die Bekanntschaft des Hallenser Physikers Wilhelm Weber, der ihn zur intensiven Bearbeitung physikalischer Fragen anregte. Als erstes bedeutendes Ergebnis gab Gauß das heute für wissenschaftliche Zwecke grundlegende absolute physikalische Maßsystem bekannt. In ihm werden auch die magnetischen Grundgrößen wie Polstärke, Feldstärke usw.

auf die drei Grundgrößen Länge, Zeit und Masse zurückgeführt. Gauß' physikalische Untersuchungen wurden noch fruchtbarer, als Wilhelm Weber auf sein Betreiben im Jahre 1831 nach Göttingen berufen wurde. Beide führten die bereits vorher von Gauß aufgenommenen Untersuchungen über den Erdmagnetismus weiter. Zur Gewinnung ihrer Resultate verwandten die Forscher neue Meßverfahren, durch die die Änderungen des Erdmagnetismus alle 5 Minuten festgehalten wurden. Die Erde wurde von ihnen als ein Magnet aufgefaßt, das Potential des Erdmagnetismus nach Kugelfunktionen entwickelt, wobei es gelang, die Lage der magnetischen Pole der Erde durch Berechnung zu bestimmen. Die Ergebnisse sind in der Abhandlung "Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus" zusammengestellt, die in den Heften "Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins" abgedruckt ist. Der Göttinger "Magnetische Verein" war von den beiden Wissenschaftlern zum Zwecke der internationalen Zusammenarbeit auf diesem Gebiete im Jahre 1836 gegründet worden.

Die magnetischen Messungen gingen Hand in Hand mit zahlreichen experimentellen Untersuchungen über galvanische Ströme, über Elektromagnetismus, Induktion und Elektrodynamik. Von den auf diesem Gebiete gewonnenen Ergebnissenist die Erfindung der elektromagnetischen Telegraphie, die im Jahre 1833/34 erfolgte, am bedeutendsten. Es mußten viele Hindernisse überwunden werden, bevor es gelang, eine doppelte Drahtverbindung über die beinahe 2 km lange Strecke zwischen dem physikalischen Kabinett und der Sternwarte herzustellen und durch Zuordnung der Buchstaben des Alphabets zu den Induktionsstromstößen eine Nachrichtenübermittlung zu ermöglichen. Gauß erkannte die große Bedeutung dieser Erfindung, konnte aber nur bedauernd feststellen, daß ihm die Mittel zum weiteren Ausbau fehlten. Eine erste Anwendung fand diese Erfindung bei der 1835 zwischen Nürnberg und Fürth in Betrieb genommenen Eisenbahnstrecke.

Gauß hat auch andere Gebiete der Physik, wie die Mechanik und Optik zeitweise in den Bereich seiner Untersuchungen einbezogen. So hat er Untersuchungen über achromatische Doppelobjektive durchgeführt.

Gauß' Schaffen ist es zu verdanken, daß die komplexen Zahlen zum Allgemeingut der Mathematiker wurden. So ist die geometrische Interpretation der komplexen Zahlen unter dem Namen Gaußsche Zahlenebene bekannt.
Die Zahlentheorie jedoch war Gauß' Lieblingsbeschäftigung. Er nannte sie die "Königin der Mathematik". So beschäftigte er sich mit der Verteilung der Primzahlen und vermutete anhand umfangreicher Rechnungen, daß die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x asymptotisch gleich x/lnx ist. Der Beweis der Gaußschen Vermutung konnte aber erst 100 Jahre später erbracht werden. Auch die Untersuchungen über periodische Dezimalbrüche, wie sie bereits in den "Arithmetischen Abhandlungen" sich finden, hat er gelegentlich wieder aufgenommen. Durch diese Untersuchungen wurden Anregungen für den Ausbau der Zahlentheorie gegeben (Literatur: (6)).

Bei den Darlegungen wurde wiederholt auf Gauß' Briefe und die in seinem Nachlaß gefundenen Erkenntnisse hingewiesen. Sie müssen bei der Beurteilung herangezogen werden und ohne sie bleibt eine Würdigung seiner Persönlichkeit lückenhaft, denn Gauß hat über wichtige Probleme und Erkenntnisse, die ihn Jahrzehnte immer wieder beschäftigten, nichts veröffentlicht. Das trifft z. B. für seine Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie zu.

Schon als Student hatte Gauß die Frage aufgegriffen, ob das Euklidische Parallelenaxiom ein unabhängiges Axiom sei oder aus den anderen Axiomen hergeleitet werden könne. Diese Frage hat die Mathematiker fast 2000 Jahre beunruhigt. Es gelang nicht, das Parallelenaxiom zu beweisen. Später versuchten die Mathematiker eine Geometrie aufzubauen, in der an Stelle des Parallelenaxioms eine andere Forderung steht, und erwarteten, daß eine solche Geometrie sich als in sich widersprüchlich erweist. Denn eine Geometrie, bei der durch einen Punkt 2 oder mehrere Parallele gezogen werden, widerspricht der vertrauten räumlichen Erfahrung der Menschen. Gauß war der erste, der sich bereits 1816 zu der Gewißheit durchgerungen hatte, daß Geometrien, die das Parallelenaxiom nicht enthalten, möglich seien.

mit dem genialen, praktischen Blicke für Erfindung neuer Beobachtungsmittel, mit der vollendeten Gewandheit und der unermüdlichen Ausdauer im Rechnen vereinigt. Das macht ihn zum Einzigen seines Jahrhunderts."

Literaturverzeichnis:

(1) E. Worbs — Carl Friedrich Gauß
Köhler & Amelang Leipzig 1955

(2) H. Weber — Weber-Wellstein
Enzyklopädie der Elementarmathematik
B.G. Teubner Leipzig-Berlin 1922
I. Band S. 416-423, S. 259-263

(3) H. Wußing — C. F. Gauß
Teubner 1974

(4) H. Wußing u. W. Arnold
Biographien bedeutender Mathematiker
Volk und Wissen Berlin 1975
S. 300-320

(5) F. Klein — Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus
Verlag Springer Berlin 1924
I. Band S. 110-112

(6) A. Leman-Schoeneberg
Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie
Teubner Leipzig 1952

Prof. Dr. O. Stamfort

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Jörg Vogel
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: K. Bartholmé, R. Jeske, D. Meinhardt
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Er bezweifelte auch die Gültigkeit der allgemein verbreiteten Lehre Kants, wonach unser Raum a priori euklidisch sei. 1832 sandte ihm sein ehemaliger Studienfreund Forkas Bolyai eine Schrift zu, in der sein Sohn Janos dieses Problem behandelte. Gauß antwortete dem Freunde kurze Zeit später: "Jetzt einiges über die Arbeit Deines Sohnes. Wenn ich damit anfange, daß ich eine solche nicht loben darf, so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen. Aber ich kann nicht anders; sie loben, hieße mich selbst loben, denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, stimmen fast durchgehend mit meinen eigenen z. T. schon über 30 bis 35 Jahren angestellten Meditationen überein." Bereits im Jahre 1830 hatte der Kasaner Professor N.J. Lobatschewski diesselbe Problem behandelt und eine Veröffentlichung über nichteuklidische Geometrie mit dem Titel "Über die Anfangsgründe der Geometrie" herausgegeben. Gauß wurde allerdings mit dieser Schrift erst später bekannt, die er lesen konnte, da er die russische Sprache hinreichend beherrschte. Sie wurde 1840 in deutscher Sprache herausgegeben. Gauß erkannte den hohen Wert dieser Publikation und auf seinen Vorschlag hin wurde Lobatschewski korrespondierendes Mitglied der Göttinger Akademie.

Auf die Frage, weshalb Gauß über dieses Problem, das ihn so lange beschäftigt hat, nichts veröffentlicht hat, gibt ein Brief aus dem Jahre 1829 an den Astronomen Bessel Auskunft: Er schrieb dort:"Meine sehr ausgedehnten Untersuchungen ... zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, wird vielleicht bei meinen Lebzeiten nicht geschehen, da ich das Geschrei der Böoter scheue, wenn ich meine Ansichten aussprechen wollte." So revolutionär Gauß bei der Behandlung rein mathematischer Fragen ist, so ängstlich und zurückhaltend war er, wenn seine Erkenntnisse herrschenden weltanschaulichen oder philosophischen Auffassungen seiner Zeit widersprachen. Er vermied alles und wies es zurück, was seine Ruhe stören konnte. So beteiligte er sich nicht an politischen und gesellschaftlichen Ereignissen seiner Zeit, er verurteilte sie sogar eindeutig, wenn sie zu Ruhestörungen führten oder auf Veränderungen der Verhältnisse abzielten. Er protestierte auch nicht wie 7 Göttinger

Professoren, unter ihnen Wilhelm Weber, gegen den Verfassungsbruch des Königs von Hannover. Und gerade sein Protest wäre von Bedeutung gewesen. Er fürchtete Unannehmlichkeiten, die die für eine fruchtbare Arbeit nötige "Heiterkeit des Geistes", wie er sich ausdrückt, nur beeinträchtigten.
Aber Gauß' Leben verlief trotzdem nicht ohne Aufregungen, ganz im Gegenteil haben ihn harte Schicksalsschläge getroffen. So starb nach 14jähriger glücklicher Ehe seine Frau Johanna im Jahre 1809 kurz nach der Geburt ihres dritten Kindes, das er kurz danach im Alter von 5 Monaten verlor. Aus Rücksicht auf seine 2 kleinen Kinder verheiratete Gauß sich 1810 wieder und zwar mit einer Freundin seiner verstorbenen Frau. Die Ehe verlief nicht ohne Spannungen und wurde weiter getrübt, als 1818 seine Frau an Lungentuberkulose erkrankte. Trotz aller Fürsorge und mehrfachen Aufenthaltes in Heilanstalten verschlechterte sich ihr Zustand im Laufe der folgenden Jahre und sie starb 1831. Dann verlor er 1840 seine älteste Tochter im Alter von 32 Jahren. Hinzu kam, daß sein Sohn Eugen ihm großen Kummer bereitete. Der sehr begabte Eugen, der auf seines Vaters Wunsch Jura studierte, bummelte und trieb sich in Kneipen herum, so daß er das Studium aufgeben mußte und dann nach Amerika auswanderte. Auch das Leben seines zweiten Sohnes bereitete ihm Aufregungen. Er verließ das Gymnasium vorzeitig, wurde Landwirt, wechselte aber die Stellen häufiger und wanderte dann ebenfalls nach Amerika aus. Das alles beeinflußte Gauß Gesundheitszustand ungünstig. Er erkrankte zwar nicht ernstlich, aber litt lange Jahre hindurch unter Schlaflosigkeit und schon die geringste Abweichung von der gewohnten Lebensführung hatte nachteilige Folgen für sein Wohlbefinden und lähmten seine Schaffenskraft. Von großer Hilfe war ihm in den vielen Jahren nach dem Tode seiner Frau die vorbildliche Fürsorge seiner Tochter Therese bis zu seinem Tode am 23. Februar 1855.

Das an Höhepunkten und auch an Ehrungen so reiche Leben des großen Gelehrten hat ein Redner auf der Gedenkfeier seines 100. Geburtstages mit kurzen Worten treffend wiedergegeben. Er sagte: "Wie bei wenigen, welche die Geschichte kennt, waren bei ihm der mathematische Tiefsinn mit dem Talent des Beobachters,

Der nett u. glücklich focht, um niemand ſich geſchoren,
vor deſſen frecher Fauſt ein jeder ſich entſetzt
dem kan ein ſchwache Hand die tolle Bruſt durchbohren
Ein Zwerg hat Rieſen offt in Sand u. Grufft geſetzt.

5

77

WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

11. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Primzahlen (III, Schluß)

Es soll jetzt ein Verfahren beschrieben werden, wie man eine Primzahltafel aufstellen kann. Wir wollen alle Primzahlen angeben, die kleiner oder gleich einer gegebenen Zahl x sind. Falls x nicht allzu groß ist, kann man hierzu ein sehr altes und einfaches Verfahren benutzen.

Das Sieb des Eratosthenes:

Stellen wir uns zum Beispiel die Aufgabe, alle Primzahlen kleiner gleich 50 anzugeben. Wir schreiben zunächst alle natürlichen Zahlen von 2 bis 50 auf: 2,3,4,5,6,...,50.

2 ist Primzahl, wir lassen die 2 stehen und streichen alle Vielfachen von 2, wir erhalten:

2,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,43, 45,47,49.

Dann nehmen wir uns die 3 vor und streichen alle Vielfachen von 3. Es bleiben übrig:

2,3,5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35,37,41,43,47,49.

Die nächste Primzahl ist 5, wir streichen also alle Vielfachen von 5:

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,49.

Jetzt streichen wir alle Vielfachen von 7:

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47.

Wir haben damit alle Primzahlen kleiner gleich 50. Die Streichung der Vielfachen von 11,13. usw. braucht nicht mehr vorgenommen zu werden, sie ist schon erfolgt; man bedenke $11^2 > 50$.

Ein interessantes und wichtiges Problem ist die Angabe der Anzahl aller Primzahlen kleiner gleich x. Üblicherweise bezeichnet man mit $\pi(x)$ jene Anzahlfunktion.

So ist $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$, $\pi(5) = 3$,...,
$\pi(50) = 15$.

Das Sieb von Eratosthenes liefert uns eine Methode, $\pi(x)$ zu bestimmen, wenn $\pi(\sqrt{x})$ bekannt ist.

Streichen wir aus der Reihe der natürlichen Zahlen von 2 bis x alle Primzahlen kleiner gleich $\sqrt{x}$ und deren Vielfache weg, so bleiben die Primzahlen größer als $\sqrt{x}$ und kleiner gleich x stehen. Ihre Anzahl ist $\pi(x) - \pi(\sqrt{x})$.
In unserem Beispiel mit x = 50 sind das die Primzahlen 11,13, 17,19,23,29,31,37,41,43,47.
$\pi(50) = 15$ und $\pi(\sqrt{50}) = \pi(8) = 4$ wegen $\sqrt{50} < 8$.
Also ist $\pi(50) - \pi(\sqrt{50}) = 11$.
Nun bestimmen wir diese Anzahl auf andere Weise:
Die Anzahl der Zahlen von 2 bis x ist $[x] - 1$. Dabei ist $[x]$ das größte Ganze von x (x braucht keine ganze Zahl zu sein!), z.B. ist $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, $\left[\sqrt{50}\right] = 7$.

Da wir alle Vielfachen von 2 gestrichen haben, ist von $([x] - 1)$ $\left[\frac{x}{2}\right]$ abzuziehen. Ziehen wir weiter die Anzahl der Vielfachen von 3, $\left[\frac{x}{3}\right]$, ab, so haben wir die Anzahl der Vielfachen von $2\cdot 3$, $\left[\frac{x}{2\cdot 3}\right]$, zuviel abgezogen und müssen sie wieder hinzufügen. Bis dahin haben wir erhalten:

$$[x] - 1 - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{2\cdot 3}\right] .$$

Ziehen wir nunmehr die Anzahl der Vielfachen von 5, $\left[\frac{x}{5}\right]$, ab, so müssen wir entsprechend $\left[\frac{x}{2\cdot 5}\right]$ und $\left[\frac{x}{3\cdot 5}\right]$ wieder hinzufügen. Das ist aber zuviel! Denn die Anzahl der Vielfachen von $2\cdot 3\cdot 5$ haben wir ja jetzt doppelt hinzugefügt. Also müssen wir sie einmal wieder abziehen, d.h. $\left[\frac{x}{2\cdot 3\cdot 5}\right]$. Damit sind wir jetzt auf

$$[x] - 1 - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{2\cdot 3}\right] + \left[\frac{x}{2\cdot 5}\right] + \left[\frac{x}{3\cdot 5}\right] - \left[\frac{x}{2\cdot 3\cdot 5}\right]$$

gekommen. Und so geht es weiter, bis wir alle Primzahlen kleiner gleich $\sqrt{x}$ ausgeschöpft haben. Wir erhalten:

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) = [x] - 1 - \sum_{i}\left[\frac{x}{p_i}\right] + \sum_{i<j}\left[\frac{x}{p_i\cdot p_j}\right] - \sum_{i<j<k}\left[\frac{x}{p_i\cdot p_j\cdot p_k}\right] \pm \ldots$$

Die Reihe besteht aus $\pi(\sqrt{x})$ solcher Summen. Die Summation ist folgendermaßen zu verstehen: In der ersten Summe läuft i von 1 bis $\pi(\sqrt{x})$, d.h. in $\left[\frac{x}{p_i}\right]$ kommen alle Primzahlen kleiner gleich $\sqrt{x}$ nacheinander vor. In der zweiten Summe laufen ebenfalls i

und j von 1 bis $\pi(\sqrt{x})$, aber es muß immer die Bedingung $i < j$ erfüllt sein, usw.
Berechnen wir nach dieser Formel $\pi(50)$:

$$\pi(50) = \pi(\sqrt{50}) + [50] - 1 - \sum_{i}\left[\frac{50}{p_i}\right] + \sum_{i<j}\left[\frac{50}{p_i \cdot p_j}\right] - \sum_{i<j<k}\left[\frac{50}{p_i \cdot p_j \cdot p_k}\right] + \sum_{i<j<k<l}\left[\frac{50}{p_i \cdot p_j \cdot p_k \cdot p_l}\right] .$$

Die Primzahlen kleiner gleich $\sqrt{50}$ sind:
$p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$. $\pi(\sqrt{50}) = 4$.
Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\pi(50) &= 4 + 49 - \left(\left[\frac{50}{2}\right] + \left[\frac{50}{3}\right] + \left[\frac{50}{5}\right] + \left[\frac{50}{7}\right]\right)\\ &\quad + \left(\left[\frac{50}{2\cdot 3}\right] + \left[\frac{50}{2\cdot 5}\right] + \left[\frac{50}{2\cdot 7}\right] + \left[\frac{50}{3\cdot 5}\right] + \left[\frac{50}{3\cdot 7}\right] + \left[\frac{50}{5\cdot 7}\right]\right)\\ &\quad - \left(\left[\frac{50}{2\cdot 3\cdot 5}\right] + \left[\frac{50}{2\cdot 3\cdot 7}\right] + \left[\frac{50}{2\cdot 5\cdot 7}\right] + \left[\frac{50}{3\cdot 5\cdot 7}\right]\right)\\ &\quad + \left[\frac{50}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right]\\ &= 53 - (25 + 16 + 10 + 7) + (8 + 5 + 3 + 3 + 2 + 1)\\ &\quad - (1 + 1 + 0 + 0) + 0\\ &= 53 - 58 + 22 - 2\\ &= 15\end{aligned}$$

Unregelmäßigkeiten in der Primzahlverteilung

Die Aussiebung läßt die Vermutung aufkommen, daß die Primzahlen beim Fortschreiten in der Folge der natürlichen Zahlen immer seltener werden. Jedenfalls treten Unregelmäßigkeiten auf, die sich jedem Gesetz zu entziehen scheinen. Das wird unterstützt durch die Tatsache, daß man in der Folge der Primzahlen beliebig große Lücken entdecken kann. So befindet sich unter den n aufeinanderfolgenden Zahlen $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \dots, (n+1)!+(n+1)$ keine einzige Primzahl, da die erste durch 2, die zweite durch 3, die letzte durch $n+1$ teilbar ist, denn es ist $k! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k$. Andererseits gibt es Primzahlen p und $p+2$ mit dem minimalen Abstand 2.
Beispiele solcher sogenannter Primzahlzwillinge sind:
3,5;5,7;11,13;17,19;29,31;41,43;2309,2311.

Wir wissen bis heute nicht, ob es unendlich oder nur endlich viele solcher Primzahlzwillinge gibt.

Trotz dieser Unregelmäßigkeiten gehorcht die Primzahlfunktion $\pi(x)$ einem Gesetz. Schon GAUSS vermutete, daß $\pi(x)$ für sehr große x sich ungefähr wie $\frac{x}{\log x}$ 1) verhält. Einen ersten Schritt in dieser Richtung tat 1850 TSCHEBYSCHEFF. Er zeigte, daß für hinreichend große x die Ungleichungen

$$\frac{7}{8}\,\frac{x}{\log x} < \pi(x) < \frac{9}{8}\,\frac{x}{\log x}$$

richtig sind. Mit ziemlich tiefliegenden funktionentheoretischen Hilfsmitteln bewiesen 1896 HADAMARD und POUSSIN

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}\ , \text{ d.h. } \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \cdot \log x}{x} = 1\ .$$

Lange Zeit glaubte man nicht an die Existenz eines elementaren Beweises für diesen Primzahlsatz, so daß seine Entdeckung im Jahre 1948 durch SELBERG und ERDÖS eine echte mathematische Sensation bedeutete.

Über die Annäherung von $\pi(x)$ durch $\frac{x}{\log x}$ gibt folgende Tabelle einigen Aufschluß:

x	$\pi(x)$	$\frac{\pi(x) \cdot \log x}{x}$
10^3	168	1,159
10^4	1 229	1,132
10^5	9 592	1,104
10^6	78 498	1,084
10^7	664 579	1,071
10^8	5 761 455	1,061
10^9	50 847 478	1,053

1) Unter $\log x$ verstehen wir immer den natürlichen Logarithmus.

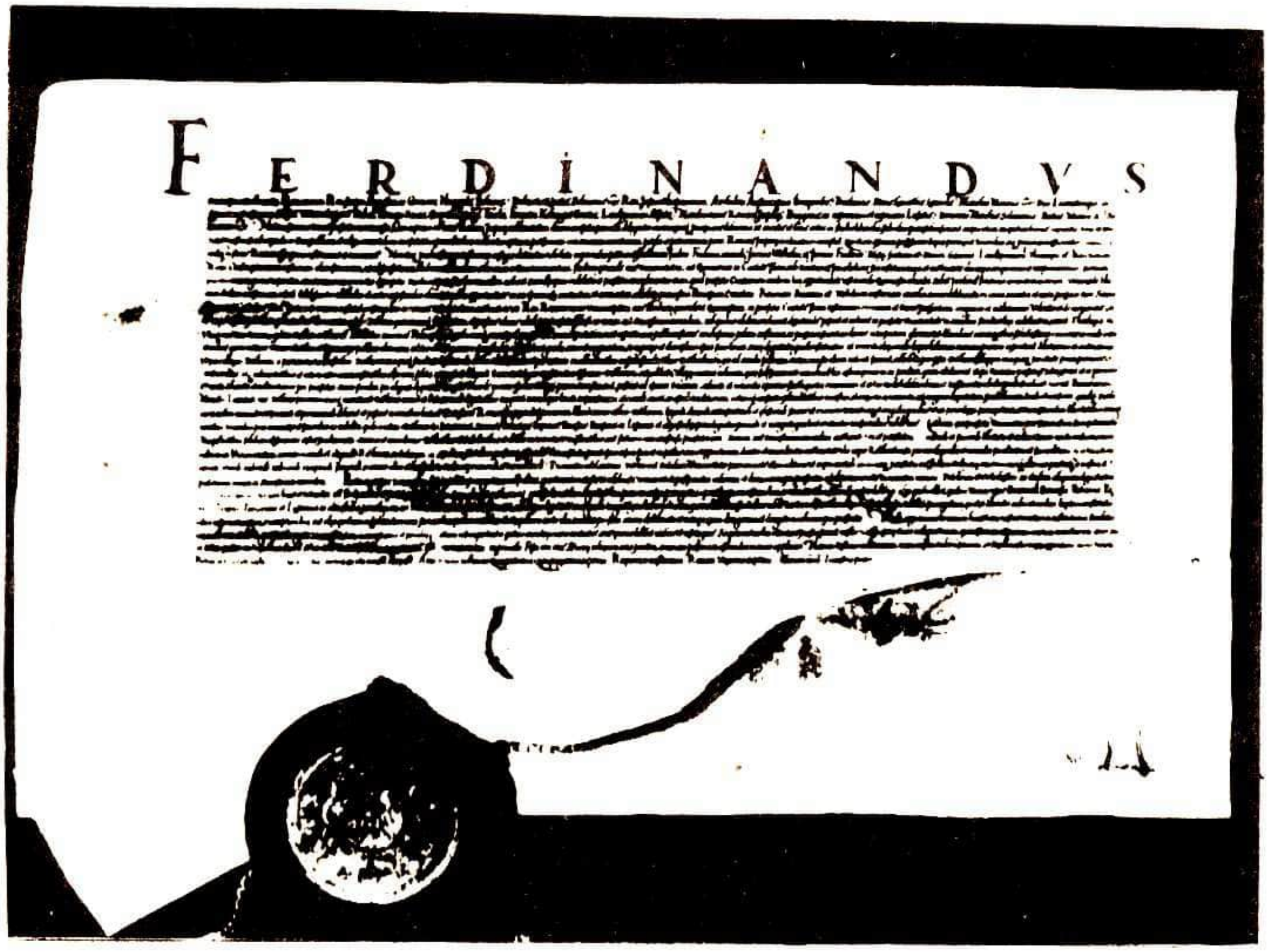
Prof. Dr. rer. nat. habil. E. Krätzel

Die Entwicklung der Mathematik und der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät an der Universität Jena von 1558 bis zur Gegenwart (I)

Am 19. März 1548 wurde in Jena die "Hohe Schule" gegründet. Ihre Unterkunft fand die "Hohe Schule" in der Südwestecke der Stadt, im ehemaligen Dominikanerkloster zu St. Pauli. Das Kloster war 1525 von den Bauern gestürmt worden. Mit Ausnahme der Kirche waren jedoch alle Gebäude gut erhalten. 1527/28 und 1535/36 hatten die Räumlichkeiten des Baues - der Komplex wurde dann Collegium Jenense genannt - für kurze Zeit der nach Jena übergesiedelten Universität Wittenberg, dort herrschte zu jener Zeit die Pest, gedient. Das Grundstück war im Norden durch die heutige Kollegiengasse, im Osten durch einen freien Platz und im Süden und Westen durch die Stadtmauer begrenzt. Das Collegium Jenense ist heute die einzige in dieser Geschlossenheit erhalten gebliebene ältere Universitätsanlage in unserer Republik.

Die 1548 gegründete Schule war noch keine Universität. Erst zehn Jahre später, nach langwierigen Prestige-Verhandlungen mit der katholischen kaiserlichen Majestät, die wenig Interesse an der Gründung einer protestantischen Hochschule hatte, konnte Jenas "Hohe Schule" in den Rang einer Universität erhoben werden. Am 15. August 1557 wurde der Stiftungsbrief für die Universität Jena durch Kaiser Ferdinand unterzeichnet; und nachdem am 25. Januar 1558 der regierende Herzog Johann Friedrich der Mittlere die Statuten der Universität unterschrieben hatte, konnte endlich am 2. Februar 1558 die feierliche Eröffnung der neuen Universität stattfinden. Mit der Erlangung der Privilegien war die Salana - wie die Jenaer Universität gern genannt wurde - gleichberechtigt in die Reihe der deutschen und ausländischen Universitäten getreten.

Unser Foto zeigt den Stiftungsbrief des Kaisers Ferdinand für Universität Jena



Nach der Gründung der Universität organisierten sich die vier Fakultäten (Theologische, Medizinische, Juristische und Philosophische Fakultät), wählten die Dekane und gaben sich ihre Statuten. Alle Fakultäten waren mit dem Recht der Promotion ausgestattet.

Die Philosophische Fakultät vermittelte die Grundlagen für das eigentliche Fachstudium. Mit der Aufnahme des Lehrbetriebes wurde in dieser Fakultät auch Mathematik und Physik gelesen. Aus der großen Zahl weniger bedeutender Männer, die in Jena die

Mathematik meist nach den alten Schemata und Stoffgebieten lehrten, ragt Michael Stifel (1486 - 1567), ein eigenartiger, zwischen Mystik, Theologie und Mathematik hin- und hergerissener Charakter, besonders hervor. Michael Stifel studierte in Wittenberg und war ab 1522 in verschiedenen Orten als Pfarrer tätig. Er befaßte sich mit Zahlenspekulationen und prophezeite den Weltuntergang. Als dieses Ereignis natürlich nicht eintrat, mußte er seine Tätigkeit aufgeben. Jedoch bemühte sich besonders Martin Luther um den begabten Menschen und ließ ihn ernsthafte mathematische Studien treiben. Im Jahre 1544 legte er dann sein Werk "Artithmetica integra" vor, das verschiedene neue Erkenntnisse brachte. Von 1548 - 1550 war er Lehrer an der Hohen Schule und von 1558 bis 1564 gehörte er zum Lehrkörper der Universität. Er starb 1567 im Alter von 81 Jahren. Seine Entdeckungen auf dem Gebiet der rationalen Zahlen (Divisionsregeln, Binomialkoeffizienten, Wurzelziehen) sowie auf dem Gebiet der irrationalen Zahlen, auf dem seit Euklid nur geringe Fortschritte erzielt worden waren, sind von beachtenswerter Bedeutung.

In dem mathematisch und naturwissenschaftlich zurückgebliebenen damaligen Deutschland waren die Voraussetzungen für eine Neuorientierung der Philosophie erst im 17. Jahrhundert gegeben. In Westeuropa hatte sich diese durch den Fortschritt der modernen Mathematik und Naturwissenschaften schon früher notwendig gemacht.

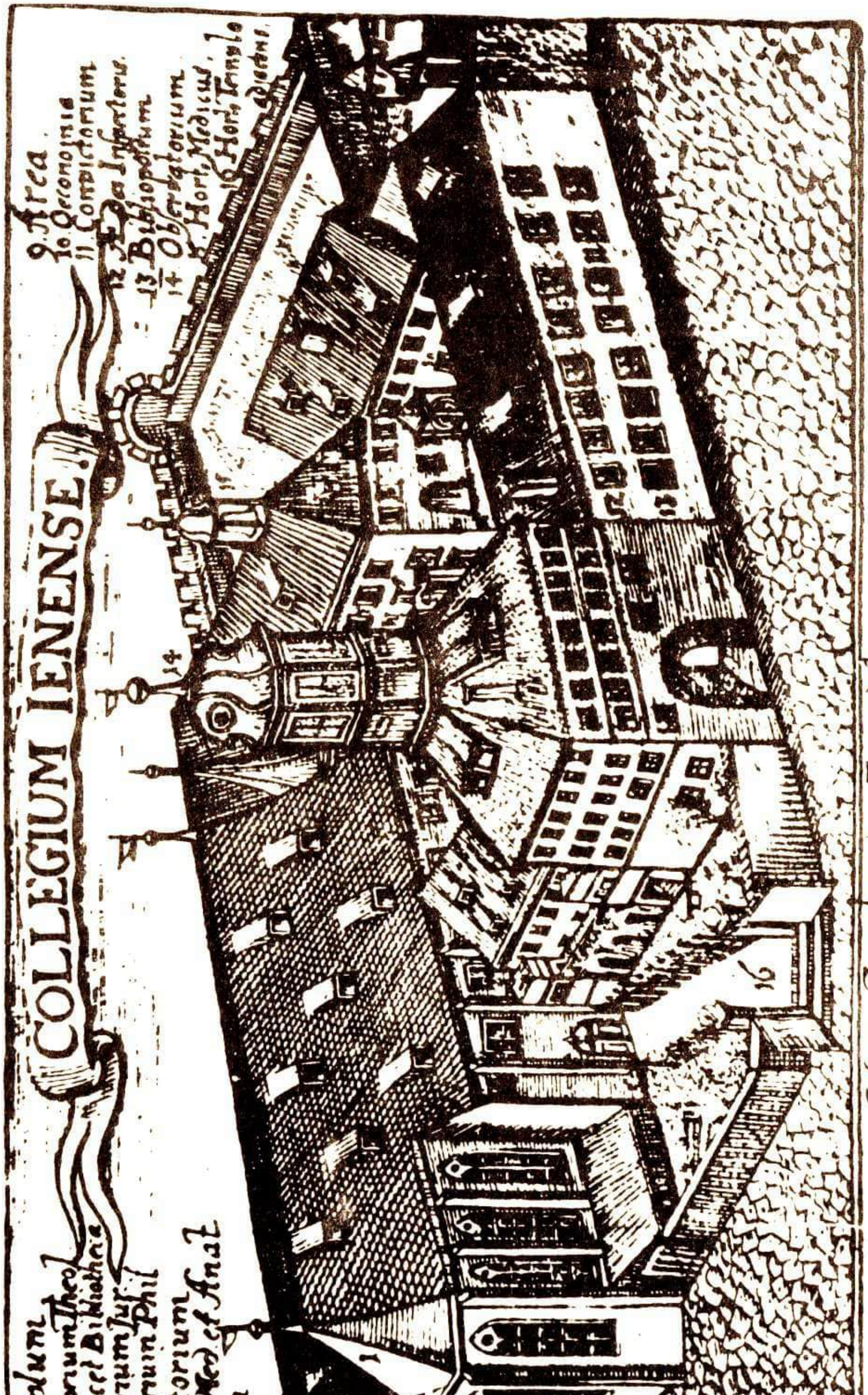
Der bedeutendste Vertreter der modernen Wissenschaft in Jena, der zugleich die Mathematik und Naturwissenschaft und die modernen philosophischen Strömungen in sich vereinigte, war Erhard Weigel (1625 - 1699). Er war eine der hervorragendsten Persönlichkeiten im wissenschaftlichen Leben des 17. Jahrhunderts. Nachdem Weigel 1650 zum Magister der Philosophie promoviert worden war, begann er, an der Universität Leipzig Vorlesungen zu halten. Weigel war eine höchst wichtige Persönlichkeit und ein überaus erfolgreicher akademischer Lehrer. Durch die große Zahl seiner Hörer sowie zahlreicher Veröffentlichungen verschaffte er sich bald einen geachteten Namen. Sein Ansehen wuchs so rasch, daß er als 27-jähriger nach Jena berufen wurde, nachdem 1652 der Jenaer Mathematiker H e i n r i c h H o f f m a n n (1576 - 1652) gestorben war. Von Herzog Wilhelm IV. von Weimar, den er in der Astronomie unterrichtete, wurde ihm der Titel eines Hofmathematikers verliehen. Weigel war mehrere Male Dekan der Philosophischen Fakultät und sogar das Rektorat der Universität wurde ihm dreimal (1657, 1675, 1695) übertragen. Im Alter von 74 Jahren starb Weigel in Jena nach über 46-jähriger erfolgreicher Lehrtätigkeit. Seine Vorlesungen waren anschaulich und lebendig. Dabei kam ihm in seinen Spezialfächern Mathematik, Astronomie und Physik sein Talent zum Zeichnen und Experimentieren sehr zugute. Weigel hatte ein außerordentlich vielseitiges Vorlesungsprogramm; so hielt er Vorlesungen über gewöhnliches Rechnen, Bruchrechnen, Geometrie, ebene und spärische Trigonometrie, Arithmetik, Logarithmenrechnen, Zeitrechnung, Statik, Mechanik, theoretische und praktische Optik, Architektur und sogar über Instrumentenkunde. Die Mathematik ist nach Weigels Auffassung die Grundlage aller Wissenschaften. Ihr tatsächlicher Entwicklungsstand war im damaligen Deutschland jedoch sehr niedrig. So ist Weigels Verdienst um die Mathematik vor allm dadurch begründet, daß er bemüht war, ihr an den deutschen Universitäten mehr Eingang zu verschaffen.

Michael Platen

Fortsetzung im nächsten Heft

Die Abbildung auf der nächsten Seite zeigt das Collegium Jenense, das Universitätshauptgebäude von 1558 bis 1861.

<u>Zum Titelbild:</u> Der fesche junge Mann auf der Titelseite ist ein Jenaer Student im 17. Jahrhundert.


COLLEGIUM IENENSE.

Die 4. Jenaer Informationstage

Vom 24. bis 26. Februar fanden die diesjährigen "Jenaer Informationstage" statt. Diese Veranstaltung, an der über 900 zukünftige Studenten teilnahmen, wurde vor vier Jahren auf Initiative der FDJ-Hochschulgruppenleitung anstelle der vorher durchgeführten "Tage der offenen Tür" ins Leben gerufen. Ihr Ziel ist es, die zukünftigen Studenten mit den Anforderungen des Studiums vertraut zu machen und ihnen bei der Vorbereitung auf den neuen Lebensabschnitt einige Tips zu geben.

Um diesem Ziel gerecht zu werden, waren die 3 Tage mit einem umfangreichen Programm ausgefüllt. Neben den zentralen Veranstaltungen, wie die Eröffnungsveranstaltung und die erste Vorlesung zur Geschichte der Universität, fanden auch mehrere Zusammenkünfte im Sektionsrahmen statt. Dabei ging es uns neben den speziellen Informationen zum Studienbeginn, zur Belastung während des Studiums und detaillierten Aussagen zum Studienplan vor allem um die Herstellung erster Kontakte zu den Hochschullehrern, Assistenten und FDJ-Funktionären, um die Formierung der FDJ-Kollektive.
Andere wichtige Anliegen waren die Vorbereitung des Studentensommers, in dem die Studenten das erstemal eine längere Zeit zusammenkommen und dem damit ein bedeutender Beitrag bei der Herausbildung der Gruppenkollektive zukommt, und nicht zuletzt ein erstes Vertrautmachen mit der Stadt, die für Jahre ein zweites Zuhause werden soll.

Obwohl wir noch nicht immer die effektivsten Formen für die einzelnen Veranstaltungen gefunden haben, sind wir der Meinung, daß sich die "Jenaer Informationstage" bewährt haben. Dafür spricht auch die ständig steigende Teilnehmerzahl.

JIT *** JIT *** JIT *** JIT *** JIT *** JIT *** JIT *** JIT

Eberhard Pichler

Preisaufgaben 5/77

J 19 ① Man löse die Gleichung

$$\sin x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x$$

J 20 ① Man löse die Ungleichung

$$4\log_{16}\cos 2x + 2\log_4 \sin x + \log_2 \cos x + 3 < 0.$$

J 21 ① Man löse das Gleichungssystem

$$y - 2\cdot|x| + 3 = 0$$
$$|y| + x - 3 = 0$$

J 22 ① Man berechne die Summe

$$S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} .$$

J 23 ② Es sind die beiden Geraden g_a und g_b vorgegeben. Auf g_a liegt das Punktetripel A_1, A_2, Z_a (A_1, A_2 in Reihenfolge der Indizes gerichtet). Auf g_b liegt analog das Tripel B_1, B_2, Z_b. Unter der Verwendung der Definition: ein orientiertes Parallelgeradenpaar ist ein Band, sollen zwei Bänder, eines durch $A_1 A_2$ und das andere durch $B_1 B_2$, gefunden werden, so daß der Scheitel der Bänder XY auf der Gerade $Z_a Z_b$ liegt.

J 24 ② Найти все значения a, при которых система

$$(x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2$$

$$a + bxy + x^2 y = 1$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b (a,b,x,y - действительные числа).

Einsendeschluß: 1.7.1977

Lösungen

Aufgabe H 67 (nach Reiner Lindemann, Cottbus)

Bei den Lösungen der Aufgaben mit Winkelfunktionen fiel uns auf, daß in vielen Lösungen nicht berücksichtigt wurde, ob die Funktionen überhaupt definiert sind und ob die Rechenoperationen mit ihnen erlaubt sind. So z. B. Division durch 0 (mit cos x und $x = \frac{\pi}{2}$) oder Multiplikation von Ungleichungen mit negativen Werten (Vorzeichen der Winkelfunktionen in den einzelnen Quadraten nicht berücksichtigt.) Deshalb hier nun eine Lösung, in der diese Besonderheiten sorgfältig beachtet wurden:

Man löse das Gleichungssystem

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = a \qquad (1)$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y = 2 \qquad (2)$$

Zunächst muß $x;y \neq \frac{\pi}{2} \cdot k \quad k \in G$ gelten, damit die Winkelfunktionen definiert sind.

Hat das System bei $a=0$ eine Lösung?

Wäre $a=0$, so folgt $\tan x = -\cot y$

daraus folgt $\cot x = -\tan y$

$$\underline{0 = 2} \quad \text{Widerspruch.}$$

Wir können also den Fall $a=0$ ausschließen und multiplizieren die Gleichungen miteinander.

Da $\tan x \cdot \cot x = \tan y \cdot \cot y = 1$ gilt, folgt daraus

$$\tan x \cdot \tan y + \cot x \cdot \cot y = 2(a-1)$$

Wir setzen $\tan x \cdot \tan y = b \qquad (3)$

$$b + \frac{1}{b} = 2(a-1)$$

$$b_{1,2} = (a-1) \pm \sqrt{a(a-2)} \qquad (4)$$

Die Diskussion der Diskriminante liefert sofort, daß bei $0 < a < 2$ keine Lösungen existieren.

Setzen wir $\tan y = \frac{b}{\tan x}$ in (2) ein, so ergibt sich

$$\cot x + \frac{b}{\tan x} = 2$$

$$1 + b = 2 \tan x$$

$$\underline{\underline{x = \operatorname{arc} \tan \frac{b+1}{2}}} \qquad (5)$$

Setzen wir $\cot x = \frac{\tan y}{b}$ in (2) ein, so ergibt sich

$$\underline{\underline{y = \operatorname{arc} \cot \frac{b+1}{2b}}} \qquad (6)$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $b \neq 0$ und $b \neq -1$ ist

$$(a-1)^2 = a^2 - 2a$$

$$\underline{1 = 0} \qquad \text{Widerspruch} \Longrightarrow \quad b \neq 0$$

$$-a = \pm\sqrt{a^2 - 2a}$$

$$\underline{a = 0} \qquad \text{wurde schon ausgeschlossen}$$

Setzt man (4) in (5) und (6) ein, so erhält man die Lösungsmenge

$$x_{1,2} = \operatorname{arc} \tan \frac{a \pm \sqrt{a(a-2)}}{2} + k\cdot\pi$$

$$y_{1,2} = \operatorname{arc} \cot \frac{a \pm \sqrt{a(a-2)}}{2((a-1) \pm \sqrt{a(a-2)})} + k\cdot\pi$$

Aufgabe H 59

Die Gleichung $(\sin x+3\cos x).\sin 4x = 2$ besitzt eine Lösung.

$f(x)=(\sin x+3\cos x).\sin 4x$ ist stetig als Summe und Produkt stetiger Funktionen. Für $x=0 \Rightarrow f(x)=0$ und für $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{4} + \frac{1}{3}\sqrt{3} > 2$.

Nach dem Zwischenwertsatz stetiger Funktionen existiert ein $\xi \in (0; \frac{\pi}{6})$ mit $f(\xi)=2$.

Damit ist widerlegt, daß die Gleichung $(\sin x+3\cos x).\sin 4x = 2$ keine Lösung besitzt.

FDJ-Studententage in Jena

Anfang Mai finden zum 6. Mal an unserer Universität die FDJ-Studententage statt. FDJ-Studententage stehen einmal im Studienjahr auf dem Programm und liegen zumeist in der ersten Maiwoche. In der Regel finden während dieser Tage keine bzw. nur wenig Lehrveranstaltungen statt, um den Studenten die Möglichkeit zu geben, Bilanz über die Ergebnisse des zu Ende gehenden Studienjahres in der fachlichen und gesellschaftlichen Arbeit zu ziehen. Organisiert werden die Studententage von den FDJ-Leitungen der einzelnen Sektionen. In diesem Jahr dienen sie dem Ziel, den Erfüllungsstand des "FDJ-Auftrages IX. Parteitag" in Vorbereitung des 60. Jahrestages der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution zu dokumentieren. Dazu dienen solche Veranstaltungen, wie die Studienjahreskonferenzen, die wissenschaftlichen Studentenkonferenzen, die Leistungsschau der Sektion, das Karl-Marx-Seminar, militärpolitische Foren, Argumentationswettstreit, Sportfest, Solidaritätsarbeitseinsätze und eine Vielfalt kultureller Veranstaltungen.

In den Studienjahreskonferenzen legen die einzelnen Studienjahre Rechenschaft ab über die Erfüllung der Kampfprogramme der FDJ-Gruppen, die fachliche Qualifikation der Studenten und den Stand der Kollektiv- und Persönlichkeitsentwicklung. Bewährt hat sich,in diesem Gremium mit Dozenten, Assistenten und allen Lehrkräften über Probleme des Studienprozesses zu diskutieren. Die wissenschaftliche Studentenkonferenz dient in diesem Jahr der Vorstellung der Arbeiten zur zentralen wissenschaftlichen Studentenkonferenz in Leipzig und ist dem Andenken des großen Mathematikers Carl Friedrich Gauß gewidmet, der in seiner Zeit in hervorragender Weise die Einheit von Theorie und Praxis verwirklichte. In fünf Arbeitskreisen werden hervorragende, eigenständige Arbeiten von Studenten unserer Sektion vorgestellt.

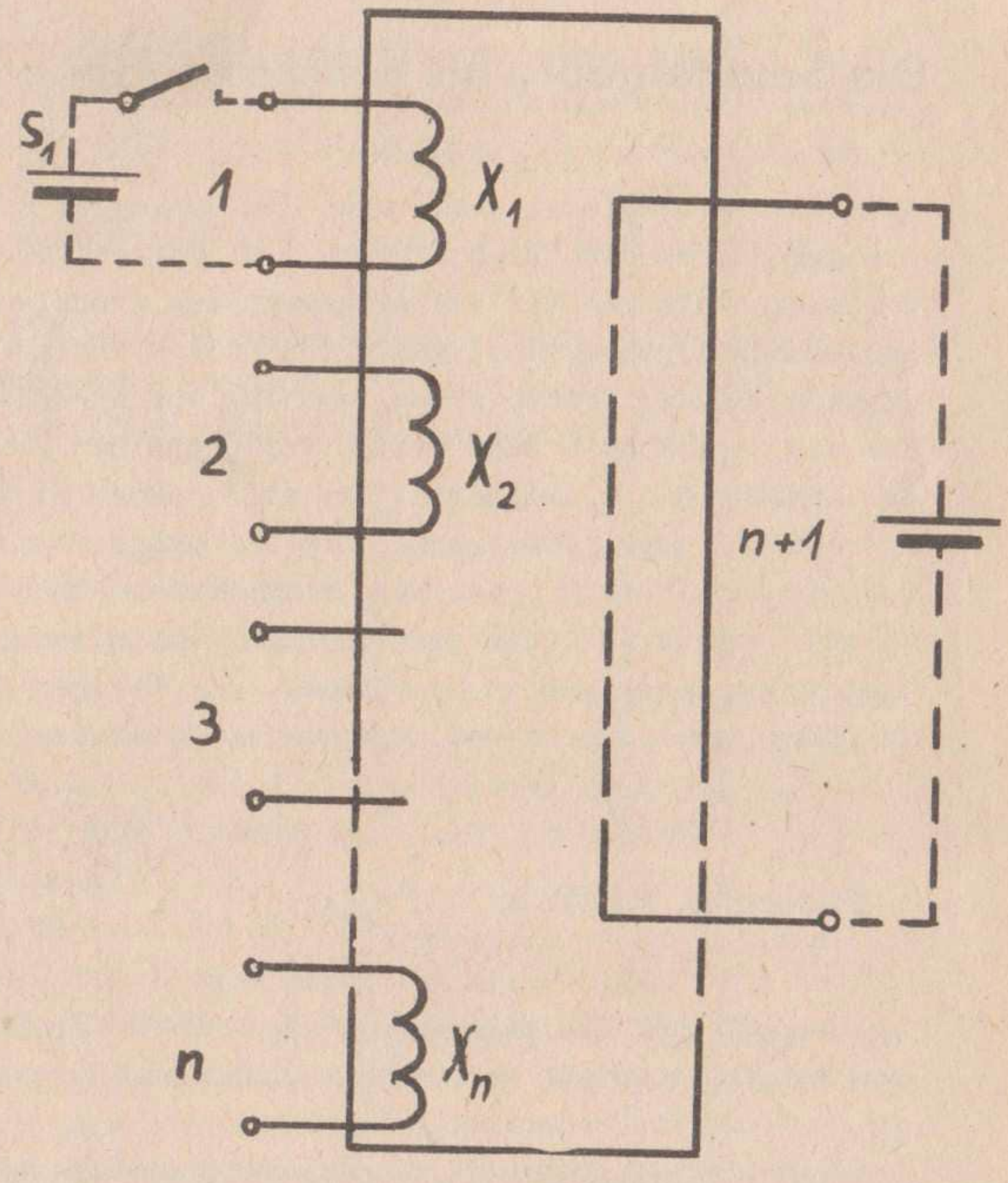
die Ausdruck der schöpferischen Bestrebungen unserer Studenten sind, die Mathematik in der Praxis wirksam werden zu lassen. In erster Linie sind das Arbeiten, die von den Studenten im Rahmen des Betriebspraktikums oder des Diplomverfahrens erstellt wurden.

Anliegen des Karl-Marx-Seminars ist es, wissenschaftlich fundiert in einer öffentlichen Diskussion zu konkreten gesellschaftspolitischen und philosophischen Fragen zu argumentieren. Dieses Jahr geht es darum, die Notwendigkeit einer selbständigen politischen Organisation der Jugend herauszuarbeiten; zu klären, was es gegenwärtig für die FDJ bedeutet, ihren Beitrag zur Verwirklichung der historischen Mission der Arbeiterklasse zu leisten; und zu erläutern, welche Aufgaben sich speziell für die FDJ-Studenten bei der weiteren Gestaltung der entwickelten sozialistischen Gesellschaft ergeben.

Wir können an dieser Stelle nicht auf alle Veranstaltungen detailliert eingehen. Jedenfalls bieten die Studententage den Seminargruppen über das Genannte hinaus genügend Möglichkeiten der kulturellen Betätigung (etwa in den FDJ-Studentenclubs) und der individuellen Gruppengestaltung (etwa Wochenendfahrten etc.). Den Initiativen der Studenten sind keine Grenzen gesetzt und auch dieses Jahr werden die Studententage sicherlich wieder der Höhepunkt unseres FDJ-Lebens an der Universität.

Hartmut Pleßke

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Jörg Vogel
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: K. Bartholmé, R. Jeske, D. Meinhardt
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932



6

77

WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

11. Jahrgang

Index 33 873

Preis: 0,20 M

Die Schaltalgebra als Boolesche Algebra

In dieser Artikelserie soll eine Einführung in die Schaltalgebra gegeben werden. Dies wird in drei Teilen erfolgen:
Der erste Teil enthält die allgemeinsten Grundlagen in Form der Booleschen Algebra, der zweite Teil die Grundlagen der Schaltalgebra und der dritte einen Ausblick auf Anwendungen. Günstig für das Verständnis sind einige Vorkenntnisse des Lesers aus der Logik und der Axiomatik. Sie sind jedoch nicht unbedingt notwendig - der Artikel kann auch als unkonventionelle Einführung in die Logik dienen. Aus Platzgründen können nur zwei Sätze bewiesen werden, die grundlegenden Charakter tragen. Es bleibt dem Leser selbst überlassen, die übrigen Beweise selbst zu führen oder sie in der angegebenen Literatur nachzulesen.

1. Boolesche Algebren

Der Begriff der Booleschen Algebra wird in der Literatur in zweifacher Bedeutung verwendet. Einmal versteht man darunter ein System von Rechenregeln (entsprechend dem früheren Gebrauch des Begriffes "Algebra"), in der modernen Literatur werden dagegen spezielle Systeme von Dingen mit gewissen Verknüpfungen als Boolesche Algebren bezeichnet (analog den Begriffen "Gruppe", "Ring" usw.). Wir wollen im folgenden den Begriff in seiner neueren Bedeutung verwenden.
Als Begründer der Theorie Boolescher Algebren gilt George B o o l e (1815-1864), der an die Arbeiten von Leibniz und den Brüdern Bernoulli anschloß. Boole beschäftigte sich vor allem mit der Aussagenalgebra (Logik). Im 20. Jahrhundert wurde der allgemeine axiomatische Aufbau der Theorie geschaffen. Besondere Bedeutung besitzt die Theorie gegenwärtig für die

Kybernetik.

1. Grundbegriffe

Definition 1: Eine binäre Operation (&) auf einer Menge M ist eine Vorschrift, die jedem geordneten Paar (a,b) von Elementen aus M ein eindeutig bestimmtes Element c=a&b aus M zuordnet.

(Das verwendete Zeichen "&" ist allgemein; es hat nichts mit "und" zu tun.)

Definition 2: Ein Element e einer Menge M heißt neutrales Element (Einselement) bezüglich einer binären Operation genau dann, wenn für jedes Element a aus M gilt: a&e=e&a=a.

Definition 3: Eine Menge M mit den auf ihr erklärten binären Operation (.) und (+) heißt Boolesche Algebra genau dann, wenn folgende Axiome gelten:

A1: Die Operationen (.) und (+) sind kommutativ, d.h. für alle Elemente a und b aus M gilt a.b=b.a bzw. a+b=b+a.

A2: Jede Operation ist distributiv bezüglich der anderen, d.h. für alle Elemente a, b und c aus M gilt (a+b).c=(a.c)+(b.c) bzw. (a.b)+c=(a+c).(b+c).

A3: In M existiert für die beiden Operationen (.) bzw. (+) ein neutrales Element, genannt 1 bzw. 0.

A4: Zu jedem Element a aus M existiert ein Element a' aus M (genannt Komplement von a), für das gilt a.a'=0 und a+a'=1.

Diese Axiome wurden zum erstenmal von Huntington 1904 angegeben. Häufig wird eine dritte Operation ($\bar{\ }$) in die Definition mit aufgenommen, die dem Axiom 4 genügt, d.h. das Komplement bildet. Die Operation (.) heißt Konjunktion oder logisches Produkt, die Operation (+) Alternative oder logische Summe (häufig aus Disjunktion) und die Operation ($\bar{\ }$) Negation. Wir vereinbaren, daß die Negation vor der Konjunktion und die Konjunktion vor der Alternative ausgeführt werden, und daß das Zeichen (.) weggelassen werden kann.

Definition 4: Unter einem Term verstehen wir folgendes:

(1) Die neutralen Elemente 0 und 1 sind Terme.
(2) Die Variablen sind Terme.
(3) Ist T ein Term, dann ist auch $\bar{T}$ (bzw. T') ein Term.
(4) Sind T_1 und T_2 Terme, so sind auch T_1T_2 und T_1+T_2 Terme.

Mit Hilfe der Termdarstellung definieren wir nun einige weitere, abgeleitete Operationen.

Definition 5:

(1) Implikation: $(a \rightarrow b) =_{Df} (\bar{a}+b)$
(2) Äquivalenz: $(a \leftrightarrow b) =_{Df} (\bar{a}\bar{b}+ab)$
(3) Disjunktion: $(a \oplus b) =_{Df} (\bar{a}b+a\bar{b})$
(4) Sheffersche Operation: $(a \downarrow b) =_{Df} \overline{(ab)}$
(5) Peircesche Operation: $(a \uparrow b) =_{Df} \overline{(a+b)}$

Die Bezeichnungen und Symbole sind in der Literatur sehr unterschiedlich.
Die Alternative wird häufig als Disjunktion bezeichnet und die hier definierte Disjunktion dann als Antivalenz bzw. als "Entweder-Oder". Vor allem in der technischen Literatur werden die Sheffersche Operation als NAND-Operation und die Peircesche Operation als NOR-Operation bezeichnet. Zur besseren Orientierung sollen in der folgenden Tabelle einige Zeichen gegenübergestellt werden:

$a + b$	$a \wedge b$			a&b	a et b		
$a + b$	$a \vee b$				a vel b		
$a \rightarrow b$	$a \supset b$				a seq b		
$a \leftrightarrow b$	$a \sim b$	$a \equiv b$			a äq b		
$a \oplus b$	$a + b$				a aut b		
$a \downarrow b$		a / b	$a \mid b$		a sh b		
$a \uparrow b$		$a \triangle b$					
$\bar{a}$					non a	a'	$\sim a$

In den einzelnen Spalten sind die Zeichen zusammengefaßt, die meist gemeinsam benutzt werden. Manche Autoren verwenden jedoch auch noch andere Zusammenstellungen.

2. Umformungsregeln

Aus den Axiomen von Huntington lassen sich einige Sätze herleiten, die auch als Umformungsregeln der Booleschen Algebra bezeichnet werden.

(1) Assoziativitätsgesetze

$(ab)c = a(bc)$ $\qquad$ $(a+b)+c = a+(b+c)$

(2) Idempotenzgesetz der Netagion

$\overline{\overline{a}} = a$

(3) Die de Morganschen Formeln

$\overline{ab} = \overline{a}+\overline{b}$ $\qquad$ $\overline{a+b} = \overline{a}\,\overline{b}$

(4) Die Idempotenzgesetze der Konjunktion und Alternative

$a = aa$ $\qquad$ $a = a+a$

(5) $a0 = 0$ $\qquad$ $a+1 = 1$

(6) $a(a+b) = a$ $\qquad$ $a+ab = a$

(7) $\overline{0} = 1$ $\qquad$ $\overline{1} = 0$

Prinzipiell lassen sich alle (richtigen) Gleichungen als Umformungsregeln auffassen.

Anhand des Satzes $a=aa$ soll gezeigt werden, wie diese Sätze mit Hilfe der Axiome aus der Definition bewiesen werden:

$a = a1$ (nach A2)

$= a(a+a')$ (nach A4)

$= aa+aa'$ (nach A3)

$= aa+0$ (nach A4)

$= aa$ (nach A2)

Beim Betrachten der Regeln (1) bis (7) zeigt sich zwischen den linken und rechten Ausdrücken eine Symmetrie bezüglich Konjunktion und Alternative, die charakteristisch für die Boolsche Algebra ist. Diese Symmetrie wird als Dualitätsprinzip bezeichnet.

Satz 1: Ersetzt man in einer gültigen Gleichung der Booleschen Algebra an allen Stellen das Zeichen "." durch das Zeichen "+" sowie das neutrale Element 1 durch das neutrale Element 0 (und umgekehrt), so erhält man wieder eine gültige Gleichung.

Ein Term T_1, der aus dem Term T durch Anwenden dieser Vertauschungen hervorgegangen ist, heißt der zu T duale Term.

Eine derartig hohe Symmetrie bezüglich der Operationen besitzt die aus der Schule bekannte Algebra nicht.

3. Beispiele für Boolesche Algebren

Die bekannteste Boolesche Algebra ist die Algebra der Aussagen über einen bestimmten Gegenstandsbereich (Aussagenlogik). Die Theorie der Booleschen Algebren entstand ja auch durch Verallgemeinerung der Aussagenlogik.
Als Menge, auf der die Operationen erklärt werden, wählen wir die Menge der Aussagen über einen vorgegebenen Gegenstandsbereich, von denen eindeutig festgestellt werden kann, ob sie wahr oder falsch sind. Wir führen die Operationen Negation (bezeichnet mit $\sim a$), Konjunktion ($a \wedge b$) sowie Alternative ($a \vee b$) ein. Eine Aussage $\sim a$ ist genau dann wahr, wenn die Aussage a falsch ist. Eine Aussage $a \wedge b$ ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen a und b wahr sind. Eine Aussage $a \vee b$ ist genau dann wahr, wenn wenigstens eine der Aussagen a und b wahr ist.

S a t z 2 : Die Aussagenalgebra ist eine Boolesche Algebra.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt, indem man die eingeführten Begriffe daraufhin untersucht, ob sie den Axiomen A1 bis A4 genügen (vgl. den Beweis im Abschnitt 2.3.). Lesern, die den Beweis selbst durchführen wollen, sei folgender Hinweis gegeben: Dem neutralen Element 1 entspricht die Aussage, die immer wahr ist und dem Element 0 entsprechend die Aussage, die immer falsch ist.

S a t z 3 : Die Mengenalgebra ist eine Boolesche Algebra.

Als Mengenalgebra bezeichnen wir dabei die Menge von Untermengen einer vorgegebenen Menge mit den Operationen "Bilden der Komplementärmenge", "Durchschnitt" und "Vereinigung". Wer die Mengenlehre kennt, sieht leicht, daß diese Mengenalgebra der Definition 3 genügt.
Weitere Anwendungen findet die Theorie der Booleschen Algebren z. B. für die Wahrscheinlichkeitstheorie und für die Theorie der Neuronennetze. (Die Nervenzellen, Neurone genannt, gehorchen dem Alles-oder-Nichts-Gesetz: Entweder geben sie ein Signal ab oder sie bleiben in Ruhe, Zwischenstellungen gibt es nicht. Von

der Stärke des Reizes ist nur die Anzahl der Signale abhängig, deren Größe ist konstant.)
Mit der Schaltalgebra, einer der wichtigsten Interpretationen der Booleschen Algebra, beschäftigen wir uns im nächsten Teil.

Wolfgang Dick
Student an der
ABF „Walter Ulbricht" in Halle

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Die XVI. OJM der DDR fand in der Zeit vom 3. bis 7. April 1977 traditionsgemäß in der Jugendhochschule "Wilhelm Pieck" am Bogensee statt. Aus allen Bezirken der DDR konnten sich 203 Schüler, darunter 19 Mädchen, in den vorhergehenden Kreis- und Bezirksolympiaden für die DDR-Olympiade qualifizieren. Für die Wurzel-Leser schildert ein Teilnehmer aus Jena seine Eindrücke von dieser Olympiade.

Sonntag: Die Delegationen treffen in der Jugendhochschule am Bogensee ein. Zunächst werden organisatorische Fragen erledigt. Die Delegationsleiter der einzelnen Bezirke und die zentralen Organisatoren der XVI. OJM weisen den Teilnehmern ihre Zimmer zu. Alle richten sich gemütlich ein. Die FDJ-Sekretäre der Delegationen konstituieren sich zur FDJ-Leitung der Olympiade. Sie besprechen noch Details des Programmes für die kommenden Tage. Nach dem Abendbrot ist dann die feierliche Eröffnung der Olympiade. Alle Teilnehmer werden von Prof. Dr. Bausch herzlich willkommen geheißen.

Anschließend spielt die Gruppe "MTS". Am vielfachen Applaus zeigt sich, daß die Gruppe mit ihren satirisch-ironischen Liedern sehr gut angekommen ist. Danach begeben sich die meisten Teilnehmer gleich zur Ruhe, um am nächsten Tage fit zu sein.

Montag: 6.30 Uhr werden alle Teilnehmer geweckt. Nach letzten Hinweisen bei der Klausureröffnung beginnt die erste Klausur dann 9.30 Uhr. Die meisten haben doch etwas Lampenfieber und

das ist verständlich. Doch nun ist es soweit: alle Teilnehmer haben 3 Aufgaben vor sich liegen, die Starter in Klassenstufe 10 sogar 4, da sie am ersten Tag 2 Wahlaufgaben bekommen, von denen genau eine zu lösen ist. Nach viereinhalb Stunden, eingerechnet eine halbe Stunde Pause, angestrengtester Arbeit ist die erste Klausur beendet. Beim Mittagessen wird natürlich über die Aufgaben und über Lösungsvarianten diskutiert. Am Nachmittag können sich die Teilnehmer bei Volleyball-, Fußball- und Tischtennisturnieren abreagieren und erholen. Trotz einiger heftiger Regenschauer machen die im Freien stattfindenden Fußball- und Volleyballspiele sehr viel Spaß.
Nach dem Abendessen hält Nationalpreisträger Prof. Dr. Reichhard einen interessanten Vortrag zum 200. Geburtstag von Carl Friedrich Gauß. Thema ist: Theorie und Praxis bei Gauß. Besonders die Vielseitigkeit von Gauß ist manchem Teilnehmer neu, denn wer weiß schon, daß Gauß noch im Alter von 62 Jahren perfekt Russisch lernte, um die Arbeiten des russischen Mathematikers Lobatschewski über nichteuklidische Geometrie im Orginal zu lesen.

<u>Dienstag:</u> Die 2. Klausur beginnt. Diesmal hat die Klassenstufe 11/12 eine Wahlaufgabe zu lösen. Nach nervenaufreibender Arbeit werden die Aufgaben von vielen Teilnehmern allerdings als relativ leicht eingeschätzt.
Nach dem Mittagessen finden ein Forum mit Hans-Georg Aschenbach und ein Vortrag über Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik in der Kriminalistik statt. Außerdem spielt Rainer Knaak, internationaler Großmeister, gegen 32 Bewerber simultan Schach. Ein Schüler kann dabei gegen Rainer Knaak gewinnen.
Nach dem Abendbrot spielt die Gruppe "Generation". Gegen 22.00 Uhr ist es soweit: die korrigierten Lösungen werden an die Teilnehmer ausgeteilt. Die Preisträger sind ermittelt und die IMO-Kandidaten aufgestellt. Die Freude bei den Siegern ist natürlich groß.

<u>Mittwoch:</u> Auch am Mittwoch können wir nicht ausschlafen, denn bereits um 7.30 Uhr fahren wir mit Bussen zur Besichtigung des

Konzentrationslagers Sachsenhausen. Gemeinsam sehen wir einen Film über die Entstehung des Lagers, die Verbrechen, die hier begangen worden sind, aber auch über den Widerstandskampf im Lager. Es ist immer wieder erschütternd, zu sehen, zu was für grausamen Mißhandlungen doch Menschen fähig sind.
Um 12.00 Uhr ist gemeinsames Mittagessen im Gesellschaftshaus Oranienburg. Danach fahren die einzelnen Delegationen nach Berlin, um individuell die Stadt zu besichtigen. Viele Teilnehmer sehen sich besonders ausgiebig den Palast der Republik an.
Nach einem hervorragenden Abendessen ist Siegerehrung im Auditorium der Humboldt-Universität. Sogar das Fernsehen ist da. Es spricht der stellvertretende Minister für Volksbildung.

Donnerstag: Alle bereiten sich auf die Abreise vor. Die Zimmer werden gereinigt.

An dieser Stelle sollte auch noch einmal gesagt werden, daß diese Tage für alle recht erlebnisreich waren. Dafür herzlichen Dank an alle Organisatoren und Verantwortlichen.
Ich möchte noch erwähnen, daß jeder Teilnehmer eine von der Akademie gestiftete Erinnerungsmedaille von Carl Friedrich Gauß und eine Teilnehmerurkunde erhielt.

Andreas Kleinwächter
Carl-Zeiss-Spezialschule

Preisaufgaben 6/77

Einsendeschluß: $\boxed{5.9.77}$ (In "Wurzel" 9/77 werden die Lösungen veröffentlicht)

J 25 (1)

Für die durch $a_0=0$, $a_1=1$ und für alle $k \geq 2$ $a_{k+1}=a_k+ka_{k-1}$ gegebene Folge $\{a_k\}$ ist zu zeigen, daß es kein Polynom $P(x)$ gibt mit $a_k=P(k)$.

J 26 (2)

Man löse das Gleichungssystem

$$y x^{\lg_y x} = x^{5/2}$$

$$\lg_4 y \; \lg_y (y-3x) = 1.$$

J 27 (1)

Man finde die Summe

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)\,x^n \,.$$

J 28 (2)

Man beweise, daß für $0 < \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\beta}{\beta} \qquad \text{ist.}$$

J 29 (1)

Man beweise die Richtigkeit der Gleichung

$$4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4} \,.$$

J 30 (1)

В треуголънике ABC проведены высоты AA_I, BB_I, CC_I, основанния которых соединены между собой. Определить отношение площади треугольника $A_IB_IC_I$ и площади треугольника ABC , если угол треугольника ABC известны.

• Im Hörsaal entdeckt:

„Ich beobachte Sie schon eine ganze Weile!"

DANKSAGUNG *** DANKSAGUNG *** DANKSAGUNG *** DANKSAGUNG

Anfang April erhielten wir von unserem Leser Wolfgang Michael einen interessanten Brief folgenden Inhaltes:

"Betr.: Heft 12/76 Artikel ' Angenäherte Bestimmung von Pi durch Nadelwürfe ' H.SCHIRRMEISTER

Ich bin Lehrer für Mathematik und Physik an der hiesigen EOS 'Thomas Mann'. Als ich den oben genannten Artikel las, konnte ich meinen Schülern der 11. Klassen eine gute Begründung für das im Lehrbuch der Klasse 11 genannte Hausexperiment zum Nadelproblem geben. Dafür zunächst vielen

Dank. Seit mehreren Jahren führe ich dieses Experiment mit den 11. Klassen durch und sammle die Ergebnisse. Dabei bin ich mir bewußt, daß die abweichenden Experimentierbedingungen der einzelnen Schüler die Aussage nicht statistisch rein erscheinen lassen. Trotzdem ist das Ergebnis recht interessant. Z. Z. stehen folgende Zahlen zur Verfügung:

	Anzahl der Versuche	53 742
	Anzahl der 'Treffer'	17 111
	Quotient	3,1408

Die Näherung für die Zahl Pi wurde von Jahr zu Jahr besser. Mit den jetzigen Werten gelang es mir, auch die letzten Schüler vom objektiven Wirken statistischer Gesetze zu überzeugen.

Mit freundlichen Grüßen

W. Michael , Oschatz "

Wir möchten uns auf diesem Wege erst einmal recht herzlich für die obige Zuschrift bedanken. Außerdem hielten wir es für angebracht, dieses doch schon verblüffend genaue Resultat zu veröffentlichen. Möglicherweise können auch andere Mathematik- oder Physiklehrer diese Ergebnisse nutzen, um ihre Schüler für die Schönheit der Mathematik zu begeistern.

Die Redaktion

Die Entwicklung der Mathematik an der Universität Jena von 1558 bis zur Gegenwart II

Die erste Hälfte des 18. Jahrhunderts steht in Deutschland unter dem Eindruck eines Aufschwungs der Naturwissenschaften, der sich aus der Notwendigkeit der Entwicklung der Produktivkräfte ergab. Noch lange Zeit sollte freilich auf diesem Gebiet das politisch und wirtschaftlich weiterentwickelte Westeuropa - vor allem die Niederlande - führend bleiben.
Die Naturwissenschaften in Jena ragten in dieser Zeit im deut-

schen Rahmen nicht wesentlich heraus. Das Kennzeichen einer Intensivierung der Naturwissenschaften, die stärkere Aufgliederung in Spezialfächer, beginnt dann erst in der klassischen Zeit nach 1775. Jedoch blieb hier das Niveau, auf dem sich Mathematik und Physik in Jena befanden, gegenüber dem großen und bedeutungsvollen Aufschwung der Medizin, der Chemie, Botanik und Mineralogie, sehr niedrig.

Im 19. Jahrhundert sind dann wieder einige Jenaer Mathematiker erwähnenswert. So bekam 1823 der bekannte Philosoph Jakob Friedrich F r i e s das Ordinariat für Mathematik und Physik übertragen. Seine naturwissenschaftlichen Hauptveranstaltungen umfaßten Infinitesimalrechnung, analytische Geometrie, Stereometrie, Trigonometrie, Arithmetik, angewandte Mathematik, Astronomie und Experimentalphysik. 1843 starb Fries; sein Nachfolger wurde Karl S n e l l , der ebenso wie Fries außer der gesamten Mathematik die Experimentalphysik vertrat. Seine zweibändige "Einleitung in die Differential- und Integralrechnung" (1846-1851) stellt die Grundlagen der höheren Mathematik dar.

Besonders wichtig für die Mathematik und Physik an der Universität Jena wurde die Lehrtätigkeit Hermann S c h a e f f e r s, der fünfzig Jahre lang - von 1850 bis 1900 - an der Universität wirkte. Seine Hauptaufgabe sah er darin, die jüngeren Semester in die Mathematik und Physik einzuführen. Aus seinen bescheidenen Mitteln hatte er sich ein eigenes Laboratorium zusammengestellt. Er wollte damit den Studenten beweisen, wie mit einfachsten Mitteln zum Teil recht komplizierte Experimente durchgeführt werden können. Nach seinem Tod diente seine Sammlung noch lange Zeit dem Physikunterricht für die Jenaer Bevölkerung.

Bis zum Jahre 1879 gab es in Jena nur einen Lehrstuhl für Mathematik und Physik gemeinsam, ehe durch die Berufung des Freiburger Ordinarius Johannes T h o m a e (1840-1921) im Jahre 1879 die Mathematik in Jena zu einem selbständigen Lehrfach wurde. Thomae hat dann der Universität 40 Jahre lang angehört und galt als einer ihrer bedeutendsten Gelehrten.

1879 erschien auch die "Begriffsschrift" von Gottlob Frege, mit dem der Weg der modernen Logik vorgezeichnet wurde, die aber bei ihrem Erscheinen keine zustimmende Resonanz fand. Gottlob Frege (1848-1925) wirkte seit 1874 an der Jenaer Universität und wurde erst nach seinem Tode als bedeutender Forscher auf dem Gebiet der Mathematik und der Logik anerkannt.

Am 29. Januar 1925 wurde dann der erste Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät an der Universität Jena gewählt, nämlich der Chemiker Prof. Alexander G u t b i e r. Vom Sommerhalbjahr 1925 an ist im Vorlesungsverzeichnis die Mathematisch-Naturw. Fakultät als fünfte Fakultät genannt. Die Ursache für diese Neugründung ist in der zunehmenden Bedeutung und dem Ausbau der naturwissenschaftlichen Fächer seit dem Ende des 19. Jahrhunderts zu suchen. An der Universität war die alte Philosophische Fakultät zu unbeweglich und vor allem unübersichtlich geworden. Deshalb lag es im Interesse der wissenschaftlichen Arbeit, die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer aus dem Verband der Philosophischen Fakultät herauszulösen und ihnen die ihrer Bedeutung zukommende wissenschaftlich-organisatorische Selbständigkeit einzuräumen. Von den insgesamt 32 Anstalten und Sammlungen der Philosophischen Fakultät gingen jetzt 19 an die neue Fakultät über.

In dieser Zeit entstanden auch einige neue Bauwerke für die Jenaer Universität, die vom Weimarischen Bauhausstil geprägt waren, wie die Mensa, Philosophenweg (1928/30) und vor allem das Abbeanum, Lessingstraße/Fröbelstieg (1930). Beide Gebäude wurden von den Professoren der Weimarer Hochschule für Baukunst, B a r t n i n g und N e u f e r t entworfen.

(wird fortgesetzt)

Michael Platen

Lösungen

Aufgabe H 71 (nach Andreas Kasparek, Gräfenhainichen)

Wegen $2\sqrt{2} - (\sin x + \cos x) > 0$ ist der Ausdruck auf der linken Seite der Ungleichung genau dann definiert, wenn $3(\sin x + \cos x - \sqrt{2}) = 3\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \geq 0$ ist, also $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \geq \frac{1}{3}$ gilt. (*)

Somit entfällt auf der linken Seite der Ungleichung die Wurzel und es folgt nunmehr:

$\frac{3(\sin x + \cos x) - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - (\sin x + \cos x)} > 1$. Durch Umformen erhalten wir:

$4(\sin x + \cos x) > 3\sqrt{2}$.

Wegen $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$ folgt sofort:

$$4\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) > 3\sqrt{2},$$

damit also: $\sin(x + \frac{\pi}{4}) > \frac{3}{4}$ (* *).

Aus (* *) ergibt sich die Lösung der Ungleichung:

$K \in G$

$$2K\pi + \arcsin\frac{3}{4} < x + \frac{\pi}{4} < 2K\pi + \pi - \arcsin\frac{3}{4},$$

dies heißt, alle x mit

$$2K\pi - \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{3}{4} < x < (2K+1)\pi - \frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{3}{4}$$

erfüllen die gegebene Ungleichung.

Aufgabe H 71 (nach Thomas Gundermann, Weidhausen, 10. Klasse)

$$\sqrt{\frac{3(\sin x+\cos x) - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - (\sin x+\cos x)}} > 1$$

Wir quadrieren

$$\frac{3(\sin x+\cos x) - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - (\sin x+\cos x)} > 1$$

Da $\sin x \leq 1$, $\cos x \leq 1$, ist auch $\sin x + \cos x \leq 2 < 2\sqrt{2}$,

also $2\sqrt{2} - (\sin x + \cos x) > 0$ für alle reellen x.

Deshalb ist

$$3(\sin x+\cos x) - \sqrt{2} > 2\sqrt{2} - (\sin x+\cos x)$$

$$4(\sin x+\cos x) > 3\sqrt{2}$$
$$\sin x + \cos x > \frac{3}{4}\sqrt{2} > 1 \quad .$$

Deshalb muß $\sin x > 0$ und $\cos x > 0$ gelten.
Wir quadrieren

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x > \frac{9}{8}$$
$$\sin 2x + 1 > \frac{9}{8}$$
$$\sin 2x > \frac{1}{8}$$

Es sei die Menge $\{z\}$ gegeben durch

$\arcsin \frac{1}{8} < z \leq \frac{\pi}{2}$, also $\sin z > \frac{1}{8}$.

Es ist nun $x = \frac{1}{2} z + k.\pi$ oder $x = \frac{\pi}{2} - \frac{z}{2} + k\pi$ für die x, die die Ungleichung

$$\frac{1}{8} < \sin 2x$$

erfüllen, wobei k ganz.
Für ungerade k wird sin x negativ entgegen der obigen Voraussetzung $\sin x > 0$.
Wir erhalten also als Lösungsmenge alle x mit

$$x \in P, \quad x = \frac{1}{2} z + 2k\pi \quad \text{oder } x = \frac{\pi - z}{2} + 2k\pi$$

mit $\arcsin \frac{1}{8} < z \leq \frac{\pi}{2}$, k ganz, beliebig.

Aufgabe H 68 (nach Rainer Lindemann, Cottbus)

Wegen $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$ gilt:

$\sin(\alpha_1 - \alpha_i) < 0 \qquad i=2,3,\ldots,n$

$$\sum_{i=1}^{n} (\sin(\alpha_1 - \alpha_i)) < 0 \tag{1}$$

$\sin(\alpha_n - \alpha_i) > 0 \qquad i=1,2,\ldots,n-1$

$$\sum_{i=1}^{n} (\sin(\alpha_n - \alpha_i)) > 0 \tag{2}$$

Unter Anwendung der Additionstheoreme für Winkelfunktionen folgt aus (1) und (2):

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\sin \alpha_1 \cos \alpha_i - \cos \alpha_1 \sin \alpha_i\right] < 0 \tag{3}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\sin \alpha_n \cos \alpha_i - \cos \alpha_n \sin \alpha_i \right] > 0 \qquad (4)$$

Aus (3) bzw. (4) ergibt sich:

$$\sin \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \cos \alpha_i > \cos \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i \qquad (5)$$

und

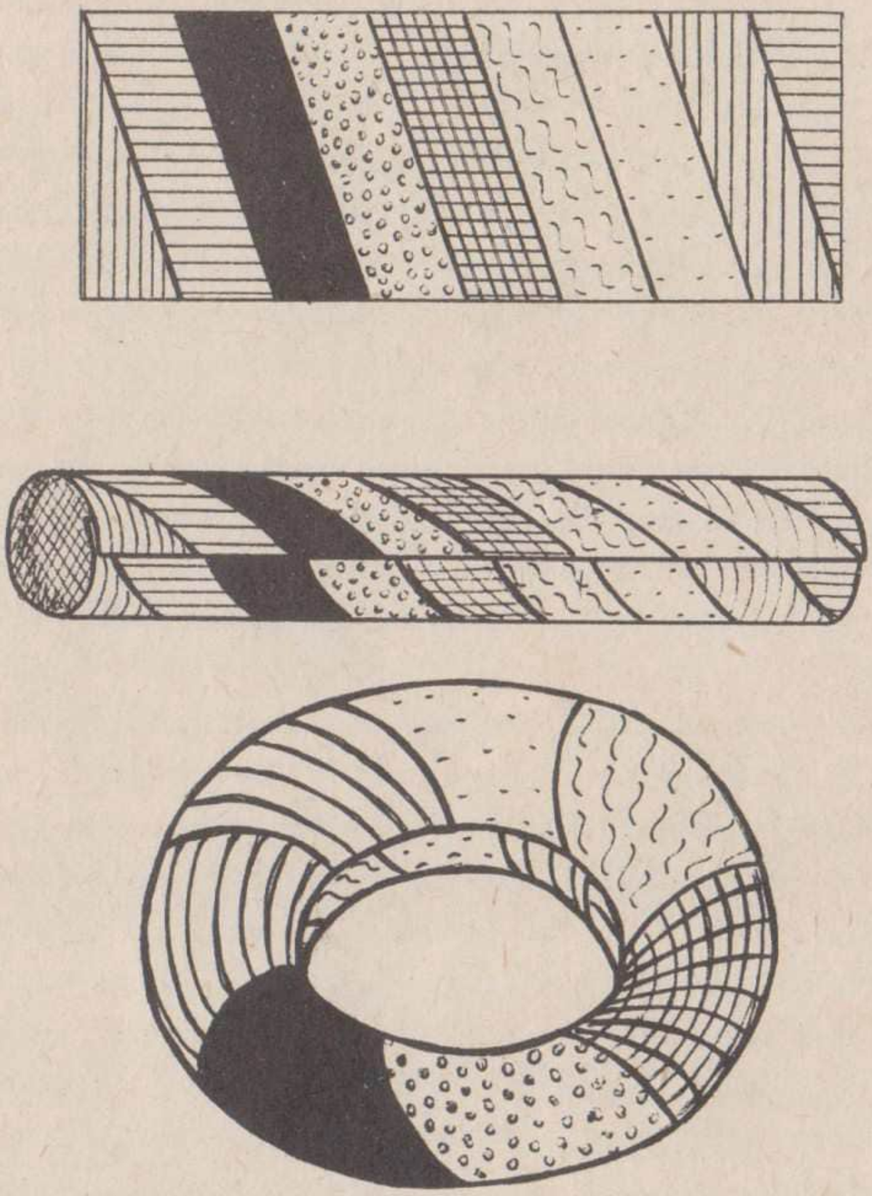
$$\sin \alpha_n \sum_{i=1}^{n} \cos \alpha_i > \cos \alpha_n \sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i \qquad (6)$$

Wegen $\cos \alpha_1 \neq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \cos \alpha_i \neq 0$, $\cos \alpha_n \neq 0$

folgt schließlich die Behauptung

$$\tan \alpha_1 < \frac{\sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} \cos \alpha_i} < \tan \alpha_n \qquad (7)$$

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Jörg Vogel
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: K. Bartholmé, R. Jeske, D. Meinhardt
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932



7

77

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

11. Jahrgang

Index 33 873

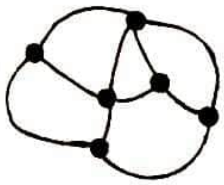
Preis: 0,20 M

Das Vierfarbenproblem

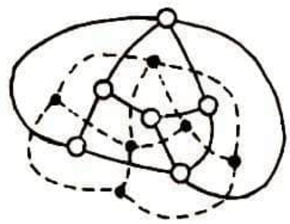
Als im Jahre 1852 der Londoner Student der Mathematik Francis Guthrie, übrigens ein Schüler des bekannten Mathematikers Augustus de Morgan, eine Landkarte Englands färbte, kam er auf einen Gedanken, der wie so viele Dinge der Mathematik auf den ersten Blick recht einfach und außerdem völlig nutzlos erscheint. Sicher ahnte er damals nicht, daß seine Vermutung, für die Färbung überhaupt jeder denkbaren Landkarte würden vier Farben ausreichen, in der Folgezeit viele namhafte Mathematiker beschäftigen sollte und daß das durch ihn erstmalig formulierte "Vierfarbenproblem" erst nach 124 Jahren (1976) gelöst sein würde.
Sein Lehrer de Morgan gab das Problem an viele Mathematiker seiner Zeit - unter anderem an W. R. Hamilton - weiter. Weltweite Aufmerksamkeit erregte es jedoch erst, als A. Cayley, ebenfalls ein wohlbekannter Mathematiker jener Jahre, es 1878 in den "Proceedings of the London Mathematical Society" veröffentlichte. Cayley hatte offenbar erkannt, daß das Vierfarbenproblem trotz oder vielleicht gerade wegen seiner begrifflichen Einfachheit bestens geeignet war, zur Behandlung bis dahin kaum beachteter kombinatorisch-topologischer Problemstellungen zu führen. Aus den mehr als ein Jahrhundert währenden Bemühungen um die Lösung des Problems erwuchs eine Reihe tiefliegender Erkenntnisse über die Struktur endlicher Graphen, die, zusammengefaßt, ein tragfähiges Gerüst für die gesamte Graphentheorie abgaben. Es geht in der Theorie des Vierfarbenproblems also nicht so sehr um die Lösung dieses speziellen Problems der Unterhaltungsmathematik (die als solche kaum von besonderer mathematischer Bedeutung ist) als vielmehr um die Schaffung wirkungsvoller mathematischer Methoden zur Behandlung mannigfacher Probleme, bei deren Lösung ähnliche Fragestellungen auftauchen.
Unter einer (Land-)Karte wollen wir im folgenden eine Einteilung

der Oberfläche der Kugel in endlich viele Länder verstehen, von denen jedes von einer sogenannten Jordankurve berandet wird. Dabei können wir uns unter einer Jordankurve aneinandergelegte Bogenstückchen vorstellen, die aus einer Strecke (etwa einem Gummiband) durch solche Deformationen erzeugt werden, bei denen keine Verschlingungen entstehen (siehe Wurzel Nr. 8/75, S. 120ff. "Was ist eine Kurve").

Einen Punkt der Karte, wo mindestens drei Ländergrenzen zusammenlaufen, wollen wir als Knotenpunkt bezeichnen. Oft erweist es sich als sinnvoll, von einer gegebenen Karte K zu ihrer "dualen Karte" D(K) überzugehen, die dadurch entsteht, daß wir in das Innere jedes Landes einen Punkt einzeichnen und diese dann so durch Jordankurven verbinden, daß keine Knotenpunkte von K auf den Verbindunglinien liegen und diese die "Grenzen" von K nur je einmal schneiden:



Karte K



duale Karte D(K)

Wenden wir diese Prozedur nochmals auf D(K) an, so entsteht wieder die ursprüngliche Karte K, wenn wir davon ausgehen, daß zwei Karten, die sich zwar durch Größe und Gestalt einander entsprechender Länder, aber nicht durch deren Lage zueinander unterscheiden, für uns als identisch anzusehen sind.

Eine Färbung der Länder (bzw. Knotenpunkte) einer Karte nennen wir zulässig, wenn je zwei längs einer Kante benachbarte Länder (bzw. durch eine Kante verbundene Knotenpunkte) verschiedene Farben haben. Der eben angedeutete Übergang zur dualen Karte ermöglicht uns nun, die Vierfarbenvermutung in zwei Versionen zu formulieren:

(I) Die Länder einer beliebigen Karte K können mit vier Farben zulässig gefärbt werden.

und äquivalent dazu:

(II) Die Knotenpunkte einer beliebigen Karte K können mit vier Farben zulässig gefärbt werden.

In der Sprache der Graphentheorie würde das heißen:

(II') Die Knotenpunkte jedes schlingenlosen ebenen Graphen G können mit vier Farben zulässig gefärbt werden.

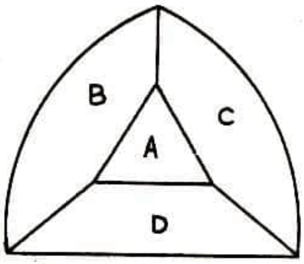


Abb. 1

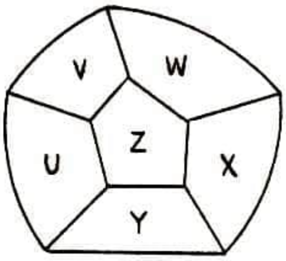
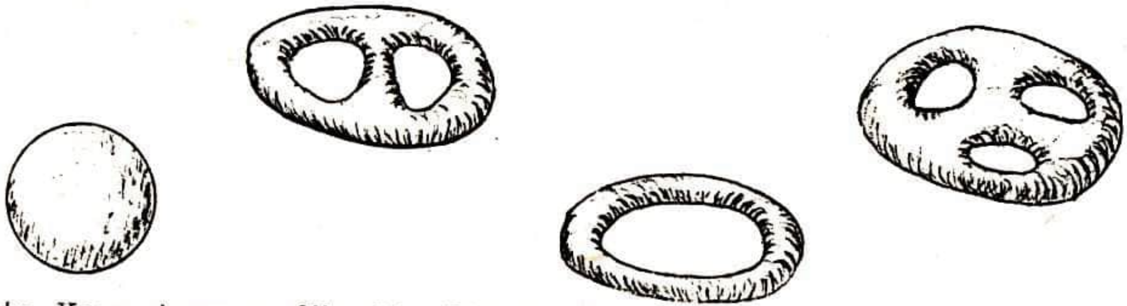


Abb. 2

Die obigen zwei Abbildungen zeigen, daß man auf keinen Fall mit weniger als vier Farben auskommen kann. Abb. 1 zeigt das einfachste solcher Beispiele: Jedes der vier Länder A, B, C, D berührt jedes der anderen entlang eines Kurvenstückes.
Ein analoges Beispiel mit fünf Ländern gibt es, wie man sich unschwer überlegen kann, nicht. Viele Amateure gingen bei ihren Versuchen, das Problem zu lösen, von der falschen Annahme aus, daß eine Karte, die keine zulässige Färbung durch vier Farben erlaubt, fünf Länder enthalten müsse, von denen jedes die anderen berührt und produzierten so eine ganze Reihe von Pseudobeweisen. Abb. 2 zeigt beispielsweise eine einfache Karte, zu deren zulässiger Färbung vier Farben nötig sind, obwohl keine vier dieser Länder die Eigenschaft haben, daß jedes die anderen drei berührt.
Innerhalb eines Jahres nach der Veröffentlichung des Problems durch Cayley 1878 publizierte A. B. Kempe, ein prominentes Mitglied der Londoner Mathematischen Gesellschaft, einen Beweis der Vierfarbenvermutung. Im Jahre 1890 entdeckte allerdings der Mathematiker P. J. Heawood einen grundlegenden Fehler in Kempes Beweisführung, dessen Reparatur erst nach 86 Jahren vollständig gelingen sollte. Die Grundidee von Kempes Beweis wurde nämlich

später immer wieder aufgegriffen und führte schließlich 1976 auch zum Ziel. In der Wurzel Nr. 8/77 wollen wir uns ausführlicher mit diesen Beweismethoden und ihrer Vervollkommnung beschäftigen.

Auf den ersten Blick erscheint es noch wesentlich schwerer, ein analoges "n-Farbenproblem" für Karten auf komplizierteren Oberflächen als der der Kugel zu lösen. In Wirklichkeit konnte das Problem jedoch zuerst für solche komplizierteren Oberflächen vollständig gelöst werden. Es ist klar, daß für die gegebene Problemstellung Oberflächen, die durch Deformation auseinander hervorgehen (etwa alle Oberflächen, die man aus einem Luftballon durch Verformen, Aufblasen oder Luft ablassen erhalten kann - vorausgesetzt derselbe platzt nicht dabei - identisch sind. Ebenso klar ist, daß Flächen im Inneren eines Körpers (etwa die Löcher im Schweizer Käse) ohne Komplikationen separat gefärbt werden können. Die folgende Abbildung zeigt vier einfache Oberflächen, die dagegen wesentliche Unterschiede besitzen und sich in der Anzahl der zum zulässigen Färben benötigten Farben natürlich unterscheiden:



Erste Vermutungen für die Lösung des "n-Farbenproblems" auf solchen Flächen äußerte schon Heawood im Jahre 1890. Durch Ringel 1954 sowie Gustin, Ringel und Young 1967 wurden diese Vermutungen für alle Oberflächen außer der der Kugel bewiesen.

Auf dem Titelblatt dieser "Wurzel" ist eine Karte auf dem sogenannten Torus (oben die dritte Figur von links) angegeben, die mindestens 7 Farben zu ihrer zulässigen Färbung benötigt. Man stelle sich die rechteckige Ausgangsfläche aus Gummi vor, so daß ein Zusammenlegen der zueinander passenden Enden der Rolle möglich ist.

Georg Baumbach
Assistent im Bereich Analysis

Georg B A U M B A C H ,

der Autor dieses Artikels über das Vierfarbenproblem, ist seit 1971 wissenschaftlicher Assistent im Bereich Analysis der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Er war von 1968 bis 1971 Verantwortlicher für die Durchführung der Mathematik-Spezialistenlager (Bezirk Gera) im "WURZEL"-Kollektiv. In "Wurzel" 8/77 erscheint ein weiterer Artikel von Georg Baumbach mit dem Titel "Das Vierfarbentheorem". In ihm wird über die Lösung des Vierfarbenproblems mit Hilfe von Computern berichtet.

2. Schaltalgebra

Nachdem wir die Boolesche Algebra als Grundlage der Schaltalgebra kennengelernt haben, wenden wir uns nun speziell der letzteren zu. Es ist aber der Hinweis notwendig, daß die Begriffe der Schaltalgebra manchmal auch allgemein für jede Boolesche Algebra definiert werden. So bezeichnet man dann z. B. die Schaltfunktionen als Boolesche Funktionen.
Die Begriffe führen wir zunächst nur abstrakt ein. Welche Bedeutung sie in der Technik besitzen, werden wir später sehen.

2.1. Schaltfunktionen

Definition 6: Schaltfunktionen heißen Funktionen, bei denen Argumente und Funktionswerte nur zwei verschiedene Werte annehmen können. Die zwei Werte werden mit 0 und 1 bezeichnet. Besitzt eine Schaltfunktion n Argumente, heißt sie n-stellig und wird mit f^n bezeichnet.

Aus der Definition folgt, daß der Definitionsbereich endlichstelliger Schaltfunktionen endlich ist; er hat genau 2^n verschiedene Elemente. Z. B. hat die Funktion f^2 den Definitionsbereich DB = $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Die Elemente des Definitionsbereiches bezeichnen wir als Belegungen der Argumente bzw. der sie repräsentierenden Variablen.

Jede endliche Schaltfunktion läßt sich darstellen, indem alle Belegungen und alle zugehörigen Funktionswerte zusammen aufgeschrieben werden. Dies kann in Tabellenform geschehen:

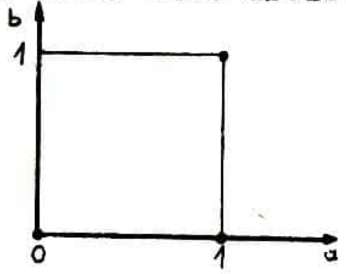
x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f^n(x_1,x_2, \ldots , x_{n-1}, x_n)$
0	0	...	0	0	f(0, 0, ... , 0, 0)
0	0	...	0	1	f(0, 0, ... , 0, 1)
0	0	...	1	0	f(0, 0, ... , 1, 0)
0	0	...	1	1	f(0, 0, ... , 1, 1)
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
1	1		1	1	f(1, 1, ... , 1, 1)

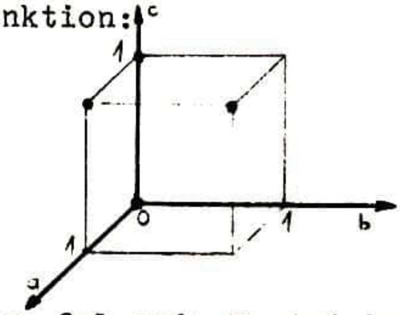
Eine weitere Darstellungsmöglichkeit sind Diagramme, z. B. Veitch-Diagramme und Karnaugh-Tafeln. Dies sind quadratische oder rechteckige Wertetabellen. Jedem Feld wird eindeutig eine Belegung zugeordnet, in das Feld wird der entsprechende Funktionswert als 0 oder 1 eingetragen. Die Zuordnung der Belegungen zu den Feldern eines Veitch-Diagramms, das eine dreistellige Funktion beschreibt, ist folgendermaßen festgelegt:

		x_3	
	(0, 0, 0)	(0, 0, 1)	
	(0, 1, 0)	(0, 1, 1)	x_2
x_1	(1, 0, 0)	(1, 0, 1)	
	(1, 1, 0)	(1, 1, 1)	x_2

Analog erfolgt die Zuordnung für andere Funktionen. Veitch-Diagramme werden also zeilenweise - wie ein Buch - gelesen. Die Variablen werden an den Rand der Zeilen oder Spalten geschrieben, in denen sie den Wert 1 haben.

Die Zuordnung der Funktionswerte zu den Belegungen kann auch graphisch mit Hilfe von Würfeln erfolgen. Jedem Eckpunkt des Würfels wird eine Belegung zugeordnet. Entspricht dieser Belegung der Funktionswert 1, wird der Eckpunkt gekennzeichnet, ansonsten bleibt er frei. Für eine n-stellige Schaltfunktion ist dazu ein n-dimensionaler Würfel notwendig. Damit ist klar, daß die graphische Darstellungsweise beschränkt ist; denn es lassen sich höchstens vierdimensionale Würfel mit genügender Übersichtlichkeit zeichnen. Am besten ist es, den Würfel in ein Koordinatensystem einzuordnen, dessen Achsen die Argumente repräsentieren. Die folgenden beiden Diagramme zeigen Beispiele für eine zwei- oder eine dreistellige Funktion:





Die zweistellige Funktion besitzt also folgende Wertetabelle und folgendes Veitch-Diagramm:

a	b	f(a,b)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

		b
	1	0
a	1	1

2.2. Spezielle Schaltfunktionen

Mit Hilfe von Wertetabellen, die eine Schaltfunktion bekanntlich eindeutig charakterisieren, definieren wir nun einige Funktionen.

Die folgende Tabelle enthält alle voneinander verschiedenen Funktionen mit zwei Variablen:

a	b	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Da F_1 und F_{16} nicht von den Variablen a und b abhängen, bezeichnet man sie als nullstellige konstante Funktionen. F_4 und F_{13} hängen nur von a, F_6 und F_{11} nur von b ab, sie sind also einstellig. F_{11} und F_{13} sind die identischen Funktionen, F_4 und F_6 heißen Negation.

Weiterhin benennen wir einige zweistellige Funktionen, die besondere Bedeutung besitzen. F_2 heißt Peircesche Funktion, F_7 Disjunktion, F_8 Sheffersche Funktion, F_9 Konjunktion, F_{10} Äquivalenz, F_{12} Implikation und F_{15} Alternative.
Welchen Zusammenhang diese Funktionen mit den Operationen der Booleschen Algebra besitzen, werden wir im nächsten Abschnitt sehen.

2.?. Operationen der Schaltalgebra

Mit Hilfe verketteter Funktionen der Form $F(f_1,f_2)$ können wir nun drei Operationen auf den Funktionen definieren:

Definition 7: Negation: $\bar{f} =_{Df} F_4(f)$
Konjunktion: $f_1 f_2 =_{Df} F_9(f_1,f_2)$
Alternative: $f_1+f_2 =_{Df} F_{15}(f_1,f_2)$

Damit sind auch gleichzeitig die Verknüpfungen der Variablen und der Werte 0 und 1 definiert, denn es gilt z. B.
$a+b = F_{13}(a) + F_{11}(b)$ sowie $0+1 = F_1+F_{16}$.
Analog könnten wir auch weitere Operationen definieren.
Aus dem Teil 1 (d. h. aus der Booleschen Algebra)entnehmen wir nun den Termbegriff und erhalten damit eine weitere Darstellungsmöglichkeit für Schaltfunktionen - die Termdarstellung. So läßt sich z. B. die oben im Würfel dargestellte dreistellige Funktion auch ausdrücken als $f(a,b,c) = (a+\bar{b})(\bar{a}+c)$.
Bisher wurde häufig der Begriff "Schaltalgebra" verwendet, ohne daß er genauer erklärt wurde. An dieser Stelle ist es aber möglich, ihn zu definieren:

Definition 8: Schaltalgebra heißt die Menge aller endlichstelligen Schaltfunktionen mit den auf ihnen definierten Operationen Negation, Konjunktion und Alternative.

Satz 4: Die Schaltalgebra ist eine Boolesche Algebra.

Diesen Satz beweisen wir, indem wir zeigen, daß die eingeführten Operationen tatsächlich den Axiomen der Booleschen Algebra genügen:

A1: Daß die Konjunktion und die Alternative kommutativ sind, ist sofort ersichtlich, wenn analog zu dem Beweis für A2 eine

Wertetabelle aufgestellt wird.

A2:

a b c	a+b	(a+b)c	ac	bc	ac+bc
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	0	0
0 1 0	1	0	0	0	0
0 1 1	1	1	0	1	1
1 0 0	1	0	0	0	0
1 0 1	1	1	1	0	1
1 1 0	1	0	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1	1

Es ist ersichtlich, daß (a+b)c = ac + bc gilt. Der Leser kann selbst beweisen, daß auch ab+c = (a+c)(b+c) gilt.

A3: In der Menge der Schaltfunktionen existieren zwei neutrale Elemente, nämlich F_1 und F_{16}, die identisch sind mit 0 und 1. Daß tatsächlich $f^n+F_1=f^n$ und $f^nF_{16}=f^n$ gilt, kann wieder mit einer Wertetabelle bewiesen werden.

A4: Es existiert tatsächlich zu jedem Element f ein Element f', für das f+f'=1 und ff'=0 gilt. f' ist nämlich gleich dem Negat $\bar{f}$ von f (Beweis wieder mit Wertetabelle).

2.4. Vollständige Systeme von Schaltoperationen

Wir erweitern zunächst den Termbegriff, indem wir jede Verknüpfung von Termen mit beliebigen Operationen (die wir mit Hilfe der Schaltfunktionen entsprechend Definition 7 erklären können) als Term bezeichnen.

Definition 9: Ein System von Operationen heißt vollständig, wenn mit Hilfe dieser Operationen jede Schaltfunktion als Term dargestellt werden kann.

Ein vollständiges System von Operationen lernten wir bereits kennen - das System Negation, Konjunktion und Alternative. Eigentlich ist bereits das System Negation-Konjunktion oder Negation-Alternative vollständig, da $a+b=\overline{\bar{a}\bar{b}}$ und $ab=\overline{\bar{a}+\bar{b}}$ gilt (de Morgansche Regeln). In der Praxis erweist es sich jedoch als günstig, die dritte Operation mit aufzunehmen.

Der folgende Satz gibt die notwendigen und hinreichenden Kriterien dafür an, ob ein System von Operationen vollständig ist.

Satz 5: Ein System von Operationen ist genau dann vollständig, wenn es wenigstens eine nichtmonotone und wenigstens eine nichtlineare Operation enthält.

Um zu verstehen, was monotone und lineare Operationen sind, müßten wir wesentlich tiefer in die Theorie eindringen. Satz 5, der auch als Vollständigkeitssatz von Kuznezow bezeichnet wird, soll deshalb auch nur ein Ausblick sein und zur weiteren Beschäftigung mit der Schaltalgebra anregen.
Eine lineare Operation ist z. B. die Negation, nichtlinear sind Konjunktion und Alternative. Konjunktion und Alternative sind dagegen monoton, während die Negation eine nichtmonotone Funktion ist. Mit Hilfe des Satzes kann man also zeigen, daß Negation und Konjunktion bereits ein vollständiges System darstellen.

Die Sheffersche und die Peircesche Operation (die den Shefferschen und Peirceschen Funktionen entsprechen) sind beide nichtlinear und nichtmonoton, d. h. eine der Operationen allein bildet bereits ein vollständiges System. Sie besitzen deshalb besondere Bedeutung in der Schaltalgebra.

An dieser Stelle schließen wir die theoretischen Betrachtungen ab und wenden uns im dritten und letzten Teil der Anwendungen zu.

Wolfgang Dick
Student
ABF »Walter Ulbricht« Halle

Preisaufgaben 7/77

J 31 Man bestimme alle reellen Zahlen a, die folgende Gleichung erfüllen:

1

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}} = a + \cfrac{a}{a+\cfrac{a}{a+\cfrac{a}{a+\ldots}}}$$

J 32 Man löse das Gleichungssystem

1

$$x + y + z = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3$$

J 33 Man löse die Gleichung

2

$$\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$$

J 34 Man beweise, daß

1

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - 2\operatorname{ctg} 2x$$

ist.

J 35 Man beweise, daß für $a > b > 0$ und $m > n$

1

$$\frac{a^m - b^m}{a^m + b^m} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$$

J 36 Исключить x и y из системы уравнений

2

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \cos^2 x = 1$$
$$a \cdot \cos^2 y + b \cdot \sin^2 y = 1$$
$$a \cdot \tan x = b \cdot \tan y$$

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.
Die Lösungen sind – jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders – unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 30.9. 1977

»Gut gesagt«

"Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man mit ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas Anders."

J. W. v. Goethe

Die Entwicklung der Mathematik und der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät an der Universität Jena von 1558 bis zur Gegenwart (III)

Nach der Niederlage des deutschen Faschismus wurde die Friedrich-Schiller-Universität am 15. Oktober 1945 neueröffnet. Sie war damit die erste Universität auf deutschem Boden, die nach der Beendigung des zweiten Weltkrieges ihre Arbeit wieder aufnahm. Zum ersten Mal in ihrer langen Geschichte erhielt die Universität jetzt ihren gesellschaftlichen Auftrag von der Arbeiterklasse. 1951 begann dann in Jena das erste Zehn-Monate-Studienjahr anzulaufen. Erstmals wurden feste Studienpläne für den größten Teil der einzelnen Disziplinen erarbeitet. Das war der Anfang einer heute zur Selbstverständlichkeit gewordenen Praxis, Wissenschaft und Erziehung langfristig zu planen.

Am Ende der 60er Jahre trat die Universität in den Prozeß ihrer 3. Hochschulreform. Die Verwirklichung der Ziele dieser Reform ist der spezifische Beitrag der Universität in der entwickelten sozialistischen Gesellschaft. Die 3. Hochschulreform hat eine Vielzahl tiefgreifender Veränderungen mit sich gebracht. Das Lehr- und Forschungspotential der Hochschule wurde bewußt neu festgelegt und auf Schwerpunkte orientiert. Die Universität, die bis 1967/68 in eine Fülle kleiner Institute zersplittert war, hat ihre Kräfte zusammengefaßt und ein neues Leitungssystem entwickelt. An die Stelle der Einzelinstitute und traditionellen Fakultäten traten neue, leistungsstarke Sektionen. Einen besonderen Rang im Gesamtgefüge der Universität besitzen die Forschungen für den wissenschaftlichen Gerätebau, die Lehrerausbildung, sowie die medizinische Betreuung der Bevölkerung.

Zu den größten Sektionen der Universität gehört heute die Sektion Mathematik. In ihr arbeiten etwa 150 Assistenten und Hochschullehrer in den verschiedensten Fachbereichen wie z. B. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Analysis, Kybernetik u. a. Der 1974 neu gegründete Forschungsbereich, der sich mit speziellen Fragen der Stochastik und Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt, hat etwa 35 Mitarbeiter. An der Sektion Mathematik werden Mathematik/

folgt:

$$V^2 = -\frac{1}{36}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p_1p_1 & p_1p_2 & p_1p_3 & p_1p_4 \\ 1 & p_2p_1 & p_2p_2 & p_2p_3 & p_2p_4 \\ 1 & p_3p_1 & p_3p_2 & p_3p_3 & p_3p_4 \\ 1 & p_4p_1 & p_4p_2 & p_4p_3 & p_4p_4 \end{vmatrix} .$$

Multipliziert man jetzt die Spalten mit Ausnahme der ersten mit (-2) und dividiert die erste Zeile durch (-2) und die rechte Seite der Gleichung durch (-8), so ergibt sich

$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2p_1p_1 & -2p_1p_2 & -2p_1p_3 & -2p_1p_4 \\ 1 & -2p_2p_1 & -2p_2p_2 & -2p_2p_3 & -2p_2p_4 \\ 1 & -2p_3p_1 & -2p_3p_2 & -2p_3p_3 & -2p_3p_4 \\ 1 & -2p_4p_1 & -2p_4p_2 & -2p_4p_3 & -2p_4p_4 \end{vmatrix} .$$

Man addiert jetzt das Produkt der ersten Zeile und der ersten Spalte mit den Zahlen p_1^2, p_2^2, p_3^2 und p_4^2 der Reihe nach zu den anderen Zeilen und Spalten. Der Wert der Determinante ändert sich dabei nicht, und es ergibt sich die Behauptung. Der Beweis ist somit vollständig.

Da nun in unserem Fall $a_{1} = a_{34} = c$, $a_{23} = a_{14} = a$ und $a_{13} = a_{24} = b$, ergibt sich daraus

$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 & a^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{144} a^2 (b^4 + c^4)$$

Daraus folgt: $V = \frac{a}{12}\sqrt{b^4+c^4}$. Dies ist das gesuchte Volumen.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Jörg Vogel
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: K. Bartholmé, R. Jeske, D. Meinhardt
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Physik-Lehrer und Diplommathematiker ausgebildet. Zusammen sind das gegenwärtig etwa 600 Studenten.

Michael Platen

Der Autor dieses Artikels wurde 1951 in Suhl geboren und absolvierte an der FSU Jena ein Studium in der Fachrichtung Geschichte/Deutsch. Seit 1976 ist Herr Platen als wissenschaftlicher Assistent an der Sektion Geschichte unserer Universität tätig. Aufbauend auf einer von ihm zusammengestellten Vortragsreihe über die Geschichte der Stadt Jena schrieb er uns freundlicherweise diesen Beitrag.

Literatur:

- Vom Collegium Jenense zur Volksuniversität, Jena 1960
- Geschichte der Universität Jena 1548/58 - 1958
  Festausgabe zum vierhundertjährigen Universitätsjubiläum, Jena 1958
- Mühlmann, Ottogerd: Die Universitätsstadt Jena, Jena 1956
- Steiger, Günter: "Ich würde doch nach Jena gehn ...", Jena 1971

Lösungen

$\boxed{\text{Aufgabe H 65}}$ (nach Frank Zickermann, 89 Görlitz)

Gegeben sei ein beliebiges Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ mit $P_i(x_i, y_i, z_i)$. Dann ist der Rauminhalt des Tetraeders V gegeben durch:

$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2 \\ 1 & a_{41}^2 & a_{42}^2 & a_{43}^3 & 0 \end{vmatrix},$$

wobei a_{ik} den Abstand $\overline{P_iP_k}$ bezeichnet.

Beweis: Das gemischte Produkt der Vektoren $\mathfrak{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\mathfrak{b} = \overrightarrow{P_1P_3}$ und $\mathfrak{c} = \overrightarrow{P_1P_4}$ ergibt den Rauminhalt des von den Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ aufgespannten Parallelepipeds. (Vorzeichen unbeachtet!) Da sich ein solches Parallelepiped in zwei dreiseitige Prismen zerlegen läßt, deren Grundfläche und Höhe mit der des Tetraeders übereinstimmen, ist der Rauminhalt des Parallelepipeds sechsmal so groß wie der des Tetraeders. Damit ist

$$\pm V = \frac{1}{6}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$$ oder mit Koordinaten

$$\pm V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} .$$

Für diese Determinante kann man auch schreiben

$$\pm V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 & 0 \end{vmatrix} .$$

Durch triviale Umformungen erhält man hieraus:

$$\pm V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} .$$

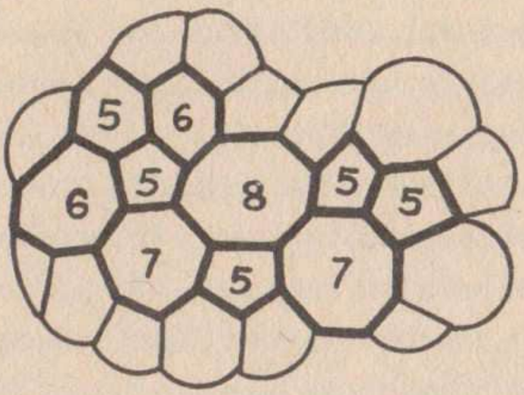
Diese Determinante wird nun entwickelt zu:

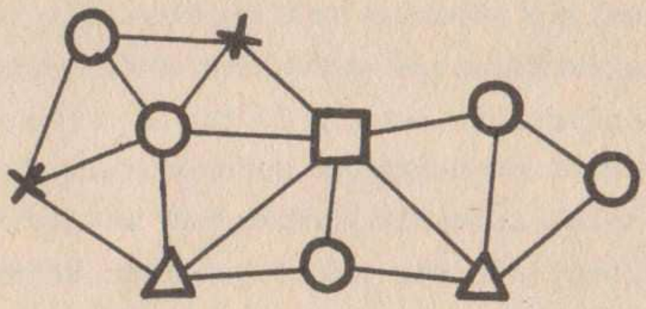
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ 0 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ 0 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ 0 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} .$$

Wenn man in dieser Determinante noch die erste mit der letzten Spalte vertauscht und diese beiden Determinanten miteinander multipliziert, erhält man:

$$V^2 = -\frac{1}{36}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ 0 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ 0 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ 0 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 \end{vmatrix} .$$

Nun wird dies ausmultipliziert und die Ortsvektoren p_1, p_2, p_3 und p_4 zu den entsprechenden Punkten eingesetzt. Es





8
77

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

11. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Das Vierfarbentheorem

Wie wir aus Wurzel Nr. 7/77 wissen, lautet das Vierfarbentheorem: "Jede (Land-)Karte auf der Oberfläche der Kugel läßt sich durch vier Farben zulässig (gleichfarbige Länder haben nur endlich viele Randpunkte gemeinsam) färben".
Für die genauere Erläuterung der Begriffe und Aufgabenstellung bitten wir, dort nachzulesen. Wenden wir uns dem Beweis dieses Theorems zu. Uns ist bereits bekannt, daß wir zur zulässigen Färbung schon ganz einfacher Karten (Abb. 1) mindestens vier Farben benötigen. Es bleibt, im Sinne eines indirekten Beweises die Aufgabe, die Existenz einer Karte, die fünf Farben dafür benötigt, zum Widerspruch zu führen. Den ersten ernsthaften Beweisversuch in dieser Richtung publizierte A. B. Kempe im Jahre 1879. Kempes Grundüberlegung ist einfach: Wenn es Karten gibt, zu deren zulässiger Färbung fünf Farben nötig sind, so muß es unter diesen eine kleinste geben (eine Karte soll immer aus endlich vielen Ländern bestehen). Es bleibt also nur zu zeigen, daß die Annahme der Existenz einer solchen fünf Farben benötigenden Karte, dergestalt, daß alle Karten mit weniger Ländern bereits durch vier Farben zulässig gefärbt werden können, zu einem Widerspruch führt. Eine solche Karte wird "minimal fünfchromatisch" genannt. Man erkennt relativ leicht, daß kein Land einer solchen Karte nur zwei oder drei Nachbarländer besitzen kann. Wir führen die Überlegung für letzteres durch:

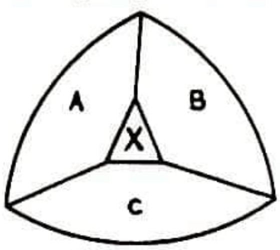


Abb. 1

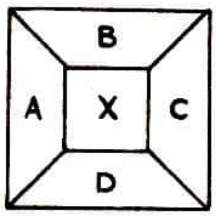
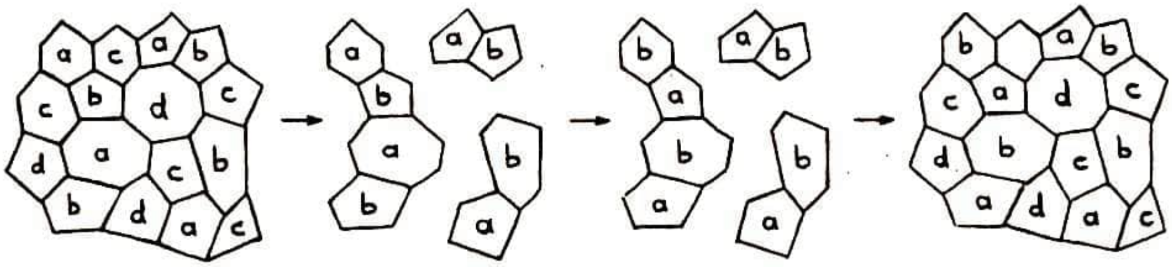


Abb. 2

Angenommen, das Land X habe die Nachbarn A, B, C (Abb. 1), so könnten wir beispielsweise A und X vereinigen (die Grenze entfernen). Da die Ausgangskarte die kleinste war, die für eine zulässige Färbung 5 Farben benötigt, muß die so entstehende Karte mit vier Farben zulässig färbbar sein. Führen wir die somit existierende zulässige Färbung mit vier Farben durch und trennen anschließend wieder das Land X ab, so können wir es mit derjenigen Farbe, die beim Färben von A, B, C nicht benutzt wurde, färben und so eine zulässige Vierfärbung der minimalen fünfchromatischen Karte erhalten. Das ist jedoch ein Widerspruch.

Kempe konnte auch beweisen, daß kein Land in einer minimalen fünfchromatischen Karte ein Land mit exakt vier Nachbarn enthalten kann. Nehmen wir wieder an, es gäbe eine solche Karte und eines ihrer Länder X habe die Nachbarn A, B, C, D (Abb. 2). Durch die gleiche Überlegung wie eben erhalten wir, daß jedes Land außer X durch vier Farben zulässig gefärbt werden kann - wir vereinigen z. B. A und X, die so entstehende Karte muß sich durch vier Farben zulässig färben lassen, dann spalten wir X wieder ab. Würden dabei zum Färben von A, B, C und D nur drei Farben benötigt, könnten wir natürlich sofort X die vierte geben und hätten den Widerspruch. Sind die Länder A, B, C, D alle verschieden gefärbt, so konnte Kempe zeigen, daß eine Änderung der zulässigen Vierfarbenfärbung möglich ist, die beim Färben von A, B, C, D nur mit drei Farben auskommt. Die Beweismethode beruht auf folgendem Sachverhalt:

Ist eine Karte mit den Farben a, b, c und d zulässig gefärbt und wir nehmen diejenigen Länder heraus, die mittels der Farben a und b gefärbt sind, so entsteht, wenn wir in einer Komponente der durch a und b gefärbten Unterkarte, einer sogenannten Kempe-Kette, die Farben a und b vertauschen, erneut eine zulässige Färbung:



Gehören A und D nicht zu einer gemeinsamen Kette, so haben wir durch das eben erläuterte Umfärben einer der beiden zugehörigen Ketten erreicht, daß A und D die gleiche Farbe haben, also nur drei Farben für A, B, C und D ausreichen. Der wesentliche Gedanke besteht nun darin, daß jeder Weg von B nach D, der nicht durch X und nicht durch Knotenpunkte geht, einen solchen von A nach C schneiden muß. Daher können anderenfalls B und C nicht zu einer gemeinsamen Kette gehören (man denke sich die Länder entlang des Weges "aufgefädelt").

Kempe bewies - und das ist relativ unkompliziert -, daß jede beliebige Karte mindestens ein Land mit fünf oder weniger Nachbarn enthalten muß. Es blieb also noch zu zeigen und er glaubte, es mit der bereits angedeuteten Reduktionsmethode bewiesen zu haben, daß eine minimale fünfchromatische Karte auch kein Land mit genau fünf Nachbarn enthalten kann. Dieser Beweis erwies sich jedoch als fehlerhaft.

Man kann dieses Vorgehen verallgemeinern:

- Er hatte bewiesen, daß die Menge der Länder mit genau zwei, drei, vier oder fünf Nachbarn so beschaffen ist, daß jede Karte mindestens ein Element dieser Menge enthalten muß. Wir wollen eine solche Menge "zwingend" nennen.

- Er wollte beweisen, daß jedes dieser Länder "reduzierbar" in dem Sinne ist, daß, wenn eine Karte dieses Land enthält und fünf Farben zu zulässiger Färbung benötigt, stets eine noch kleinere Karte ebenfalls fünf Farben benötigen würde.

Gehen wir nun davon ab, nur einzelne Länder zu betrachten, so wird es genügen, eine Menge von Länderkonstellationen (mehrere Länder, die in bestimmter Weise zueinander liegen - siehe Titelblatt) zu finden, die so beschaffen ist, daß jede Karte eine solche Konstellation enthalten muß (die Menge zwingend ist) und wo wir von jeder dieser Konstellationen beweisen können, daß sie reduzierbar im obigen Sinne ist.

Seit 1913 wird diese Idee verfolgt. G. D. Birkhoff bewies als

erster von einer Konstellation (natürlich aus Ländern mit jeweils mehr als vier Nachbarn, denn dafür bewies es ja schon Kempe), daß sie reduzierbar sei. Im Laufe der Jahre wurde eine Reihe neuer Methoden entwickelt, mit denen es Mathematikern wie Franklin, Mayer, Winn, Bernhart und Heesch gelang, diesen Beweis für weitere Länderkonstellationen zu führen. Natürlich erwies sich das als immer schwieriger und mühevoller je komplizierter die Konstellationen wurden. Obwohl von immer mehr Länderkonstellationen die Reduzierbarkeit bewiesen werden konnte, rückte die praktische Durchführbarkeit der verallgemeinerten Kempe-Idee in immer weitere Ferne. Niemand hatte auch nur die geringste Vorstellung davon, wie eine Menge reduzierbarer Konstellationen, von denen in jeder Karte mindestens eine vorkommt, aussehen könnte, so daß man auch nicht zielgerichtet ganz bestimmte Konstellationen auf Reduzierbarkeit untersuchen konnte.
H. Heesch konnte für Karten mit bestimmten einschränkenden Eigenschaften eine solche zwingende Menge reduzierbarer Konstellationen konstruieren. Er formalisierte einige der bereits bekannten Methoden soweit, daß der zeitraubende komplizierte Nachweis der Reduzierbarkeit von Computern übernommen werden konnte und entwickelte spezielle Prozeduren, um solche Konstellationen für diesen Nachweis auszuwählen, von denen dann mindestens eine in der betrachteten Sorte von Karten enthalten sein mußte.
Ende 1960 bemerkte W. Haken, daß diese Ideen sich stark vereinfachen und weiterführen ließen. Insbesondere stellte er fest, daß sich Konstellationen mit bestimmten Eigenschaften relativ "leicht" auf Reduzierbarkeit untersuchen ließen, andere nur sehr schwer. Im Jahre 1972 begannen K. Appel, W. Haken und J. Koch eine zwingende Menge aus solchen "netten" Konstellationen zu suchen. Sie verwendeten auch dafür ein umfangreiches Computerprogramm, das es ermöglichte, durch geringe Variation der Eingabeparameter des Programmes sehr viele Methoden zu nutzen.

Im Juni 1976 erhielten sie nach der Analyse von ca. 10000 Länderkonstellationen, von denen bei über 2000 die Reduzierbarkeit nachgewiesen werden konnte , und nach Verwendung von über 1000 Stunden Rechenzeit auf verschiedenen Komputern eine zwingende Menge von knapp 2000 reduzierbaren Länderkonstellationen. Damit ist - vorausgesetzt das Riesencomputerprogramm hält einer strengen Prüfung durch die Mathematiker der Welt stand - die Nichtexistenz einer minimalen fünfchromatischen Karte, also das Vierfarbentheorem bewiesen.

Natürlich wird, da ja die Entwicklung mathematischer Lösungsmethoden im Vordergrund steht und in dieser Hinsicht der erbrachte, höchst unelegante Beweis nicht befriedigen kann, die Suche nach einem elementaren direkten Beweis mit Sicherheit weitergehen. Auch ist es das erste Mal in der Geschichte der Mathematik, daß der Beweis eines mathematischen Theorems wegen des Scheiterns aller klassischen Methoden an der Kompliziertheit der Problemstellung (vorerst jedenfalls) Computern überlassen wurde. Abgesehen von einer Prüfung des benutzten Programmes muß man sich nun, das soll nicht verschwiegen werden, generell die Frage stellen, ob man den Beweis als geführt werten kann oder nur als Bestätigung bestehender Vermutungen, die noch eines "exakten" Beweises bedarf. Der Verfasser hat diesbezüglich seine Meinung zum Ausdruck gebracht.
Das Titelbild dieser "Wurzel" zeigt ein kleines Beispiel aus der konstruierten zwingenden Menge reduzierbarer Länderkonstellationen: Es kommt nur auf die Lage der Länder zueinander und die Anzahl ihrer Nachbarn an, man kann sich dieses Gebilde in die verschiedensten Karten eingebettet denken. Daneben sieht man die entsprechende duale Karte (siehe Wurzel Nr. 7/77), die sich zur Untersuchung leichter handhaben läßt - ein Kreis symbolisiert dabei ein Land mit fünf, ein Kreuz mit sechs, ein Dreieck mit sieben und ein Quadrat mit acht Nachbarn.

Georg Baumbach
Assistent im Bereich Analysis

Quellenangaben

1) Appel, K.
"The proof of the four-colour theorem"
New Scientist 1976 , 21.10. 1976

2) Sachs, H.
"Neuere Ergebnisse in der Theorie des Vierfarben-problems"
Vortragsauszug der Haupttagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR 1974

3) Enzyklopädie Mathematik S.595

Der Fachartikel über Schaltalgebra von Wolfgang Dick wird in Wurzel Nr. 10/77 fortgesetzt.

Preisaufgaben 8/77

Einsendeschluß: 15.11.77

J 37 ② Im Dreieck ABC ($\gamma=90°$, $\beta=30°$, $b=1$) ist die Seitenhalbierende $\overline{CD}$ eingezeichnet. Außerdem ist vom Punkt D aus unter einem Winkel von 15° zur Hypothenuse eine Gerade gezogen, die die Strecke $\overline{BC}$ im Punkte F schneiden möge. Gesucht ist der Flächeninhalt des Dreieckes CDF. Man gebe für ihn einen Näherungswert in Form eines Dezimalbruches der Genauigkeit 0,01 an !

J 38 ② Man löse die Ungleichung

$$\frac{7}{9^x - 2} \geq \frac{2}{3^x - 1}$$

J 39 ① Man löse das Gleichungssystem

$$\sin x + \sin y = \sin(x+y)$$
$$|x| + |y| = 1$$

J 40 ① Man beweise, daß das Polynom

$$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$$

für alle reellen Zahlen x positiv ist.

J 41 ① Man löse die Gleichung

$$\sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{1-x^2}$$

J 42 ② В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 20°. На боковых сторонах AB и BC взяты, соответственно, точки Q и P так, что ∢ ACQ = 60°, а ∢ CAP = 50°. Доказать, что ∢ APQ = 80°.

Kreuzworträtsel

W a a g e r e c h t :

1. mondnächster Punkt der Mondumlaufbahn
7. Pronomen
9. rechtwinklig
13. engl.: Schinken
14. Präposition
15. männlicher Vorname
16. Säugetier
18. chemisches Symbol für Titan
19. engl.: oder

S e n k r e c h t :

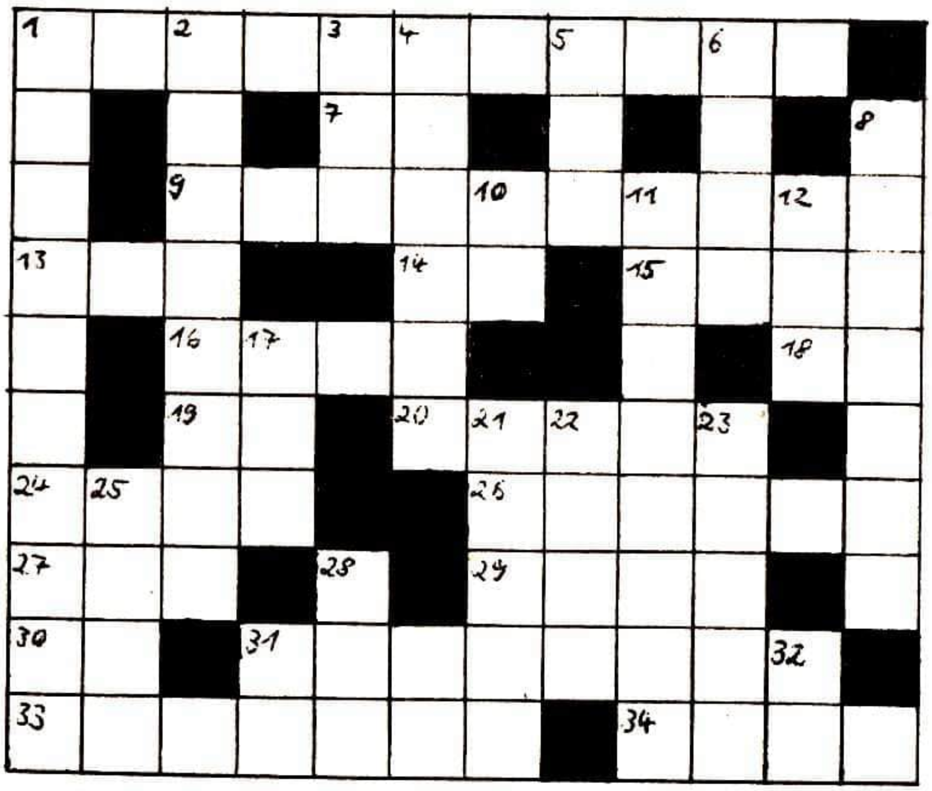
1. Mathematiker des Altertums
2. regelmäßiger Körper
3. DDR-Popgruppe
4. männlicher Vorname
5. schmal
6. Stadt in Nordrhein-Westfalen
8. geometrischer Ort der Punkte, deren Abstandssumme von zwei festen Punkten konstant ist

W a a g e r e c h t :

20. Hauptstadt von Senegal
24. Handelsorganisation für Obst und Gemüse
26. Langspielplatte von M. Krug
27. Teil des Autos
29. männlicher Vorname
30. chemisches Symbol für Aluminium
31. bedeutendes Buch von Ptolemäus
33. Handwerker
34. beim Dividieren auftretende Erscheinung

S e n k r e c h t :

10. Fluß in Sibirien
11. ein Polyeder
12. Sorte, Gattung
17. Werk des altgriechischen Dichters Ovid
21. anderes Wort für landwirtschaftlich
22. Behältnis
23. Fahrt
25. feine Gaderobe
28. Universum
31. chemisches Symbol für Astat
32. Motorradserie aus Zschopau



Lösungen

Im nun folgenden Lösungsteil unserer "WURZEL" wollen wir damit beginnen , die Auflösungen sämtlicher 1977 gestellter Preisaufgaben abzudrucken. Dies wird jedoch bei den meisten dieser Losungen nicht so ausführlich der Fall sein, wie das bisher gewohnt ist. Dennoch lassen wir es uns nicht nehmen, einige wenige Aufgaben gründlich zu besprechen, so, wie es bereits seit langem üblich ist.

Aufgabe J 1

1. Lösungsvariante
(nach A. Kasparek, Grafenhainichen)

Für $n=8$ gilt: $2^n > 3(n+1)^2 + 10$
Es sei diese Ungleichung für $n = k$ mit $k > 8$ und $k \in N$ erfüllt.
Dann gilt:

$$2^{k+1} > 6(k+1)^2 + 20 = \underline{3(k+2)^2} + 10 + 3k^2 + 4 >$$
$$> 3(k+2)^2 + 10$$

Somit gilt für alle $n \in N$ mit $n \geq 8$:

$$2^n > 3(n+1)^2 + 10 \qquad (1)$$

Jede reelle Zahl x mit $x > 8$ läßt sich darstellen in der Form $x = m + n$.
Dabei ist $n \in N$ mit $n \geq 8$ und $m \in R$ mit $0 \leq m < 1$.
Wegen strenger Monotonie von 2^x gilt:

$$2^x = 2^{m+n} \geq 2^n \qquad (2)$$

Wegen $0 \leq m < 1$ gilt:

$$n + m \leq n + 1 \qquad (3)$$

Aus (1),(2) und (3) folgt dann:

$$2^x = 2^{m+n} \geq 2^n > 3(n+1)^2 + 10 \geq 3(m+n)^2 + 10 = 3x^2 + 10$$

für $x \geq 8$.

2. Lösungsvariante
(nach R. Lindemann, Cottbus)

Wir betrachten die differenzierbare Funktion

$$f(x) = \frac{x}{2} - \log_2(2x) \qquad \text{für } x \geq 8$$

Es gilt: $f(8) = 0$ und

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x \cdot \ln 2}$$

Wegen $x \geq 8$ und $\ln 2 > \frac{1}{2}$ folgt:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x \cdot \ln 2} > 0$$

Somit wächst $f(x)$ für alle $x \geq 8$ streng monoton.
Wegen $f(8) = 0$ gilt für $x > 8$ auch

$f(x) > 0$ und damit

$$\frac{x}{2} > \log_2(2x)$$

$$x > \log_2(2x) + \log_2(2x)$$

$$x > \log(2x \cdot 2x)$$

$$x > \log_2(4x^2)$$

$$2^x > 4x^2$$

Da $x^2 > 10$ für $x > 8$, gilt also

$$2^x > 3x^2 + 10$$

Da ferner $2^8 > 3 \cdot 8^2 + 10$ gilt, ist die Ungleichung $2^x > 3x^2 + 10$ für alle $x \geq 8$ erfüllt.

Aufgabe J 2 (nach Andreas Weller, Altenberg)

__1. Fall:__ $x = y$ oder $x = -y$
Untersuchte Gleichung wird äquivalent zu: $|2x| = 2|x|$

__2. Fall:__ $x+y > 0$ $x-y > 0$
Es folgt $x > -y$, $x > y$, $x > 0$ und damit $|x| > |y|$
In der Gleichung werden sämtliche Betragsstriche überflüssig.
Sie geht über in: $2x = 2x$.

<u>3. Fall:</u> $x+y > 0 \quad x-y < 0$

Es folgt $x > -y, \quad x < y, \quad y > 0$ und damit $|x| < |y|$

Linke Seite: $2y$

Rechte Seite: $|x + i\sqrt{y^2-x^2}| + |x - i\sqrt{y^2-x^2}|$

$$= 2\sqrt{x^2+y^2-x^2} = 2y$$

Vergleich: $2y = 2y$

<u>4. Fall:</u> $x+y < 0 \quad x-y > 0$

Es folgt $x < -y, \quad x > y, \quad y < 0$ und damit $|x| < |y|$.

Linke Seite: $-2y$

Rechte Seite: $|x + i\sqrt{y^2-x^2}| + |x - i\sqrt{y^2-x^2}|$

$$= 2\sqrt{x^2+y^2-x^2} = 2\sqrt{y^2} = -2y$$

Vergleich: $-2y = -2y$

<u>5. Fall:</u> $x+y < 0 \quad x-y < 0$

Es folgt $x < -y, \quad x < y, \quad x < 0$ und damit $|x| > |y|$

und die Gleichung wird äquivalent zu: $-2x = -2x$.

<u>Anmerkung:</u> Von fast allen Einsendern wurde der Fall $|y| > |x|$ nicht berücksichtigt! In diesem Fall ist

$\sqrt{x^2-y^2}$ nicht reell, obwohl x und y reelle Zahlen sind.

Man muß dann wissen, daß

$\sqrt{-a^2} = i\,|a|$, wobei $i = \sqrt{-1}$ und

$|a + ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ gilt.

Aufgabe J 3

Die angegebene Ungleichung besitzt keine Lösung.

Aufgabe J 4

Sei $x_0 = \frac{\pi}{4}$, y_0 der Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ mit $\tan y_0 = 2$ ($y_0 \approx 63{,}4^\circ$), z_0 der Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ mit $\tan z_0 = 3$ ($z_0 \approx 71{,}6^\circ$). Dann ist die Lösungsmenge die Menge aller Tripel

$(x,y,z) = (x_0+k_1\pi,\ y_0+k_2\pi,\ z_0+k_3\pi)$ mit $k_1+k_2+k_3 = 0$

vereinigt mit der Menge aller Tripel

$(x,y,z) = (-x_0+k_1\pi,\ -y_0+k_2\pi,\ -z_0+k_3\pi)$ mit $k_1+k_2+k_3 = 2$.

Aufgabe J 5 (nach R. Becker, Wolmirstedt)

Behauptung:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$$

Beweis durch vollstandige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

Die Behauptung ist für $n = 1$ richtig.

Induktionsvoraussetzung: $n = r$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{2r+3}{2^r}$$

Induktionsschritt: $n = r+1$

$$\sum_{k=1}^{r+1} \frac{2k-1}{2^k} = \sum_{k=1}^{r} \frac{2k-1}{2^k} + \frac{2r+1}{2^{r+1}}$$

$$= 3 - \frac{2r+3}{2^r} + \frac{2r+1}{2^{r+1}}$$

$$= 3 - \frac{2r+5}{2^{r+1}}$$

$$= 3 - \frac{2(r+1)+3}{2^{r+1}}$$

Daraus folgt, daß die Behauptung richtig ist für alle n.

Man erhält somit:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{2n+3}{2^n}\right)$$

$$= 3 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2^n} \right)$$

Mit Hilfe der l'Hospitalschen Regel folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n \cdot \ln 2} = 0$$

Damit erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2^k} = 3$$

Aufgabe J 6

Der Radius des Kreises durch A, B und den Mittelpunkt M des Umkreises beträgt $\frac{1}{3}\sqrt{21}$. Der Radius des Kreises durch B, C und M beträgt $\frac{7}{12}\sqrt{3}$ und der des Kreises durch A, C und M $\frac{7}{3}\sqrt{3}$.

Aufgabe J 7

Man erweitere den linken Logarithmus zur Basis 8. Dann erhält man:

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Aufgabe J 8

Wir legen das Dreieck ABC folgendermaßen in ein Koordinatensystem: $A(0,0)$, $B(x_B,0)$, $C(x_C,y_C)$ (1)

A', B', C' liegen laut Aufgabenstellung so auf den Seiten des Dreiecks ABC, daß gilt:

$$\frac{AC'}{c} = \frac{BA'}{a} = \frac{CB'}{b} = k \qquad (2)$$

Es gilt: $x_{C'} : x_B = k$, also $x_{C'} = kx_B$ und da $y_{C'} = 0$

folgt: $C'(kx_B, 0)$

$\overrightarrow{OA'} = (x_B, 0) + k(x_C - x_B, y_C) \Rightarrow A'((1-k)x_B + kx_C, ky_C)$

$\overrightarrow{OB'} = ((1-k)x_C, (1-k)y_C) \Rightarrow B'((1-k)x_C, (1-k)y_C)$

Der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC wird errechnet mit

$S(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3})$.

Man erhält: $S(\frac{x_B+x_C}{3}, \frac{y_C}{3})$

Analog wird S', der Schwerpunkt des Dreiecks A'B'C' errechnet.

$$S'(\frac{(1-k)x_B + kx_C + (1-k)x_C + kx_B}{3}, \frac{ky_C + (1-k)y_C}{3})$$

$S'(\frac{x_B+x_C}{3}, \frac{y_C}{3})$ Damit ist nachgewiesen, daß die beiden Schwerpunkte zusammenfallen.

Aufgabe J 9 Lösung: $\frac{1}{2} < x < 1$, $x > 3$ und $x = -2$.

Aufgabe J 10 $x \in \{ 2k\pi \mid k \in \Gamma \} \cup$

$\cup \{ k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} \mid k \in \Gamma \} \cup \{ 2k\pi - 2\arctan 0{,}5 \mid k \in \Gamma \}$

Aufgabe J 11 Das Ergebnis lautet: $\frac{n(n^2 + 11)}{6}$

Aufgabe J 12 Das innere Tetraeder ist $\frac{1}{2}$ mal so groß wie das äußere.

Aufgabe J 13

$x \in \{ \frac{k\pi}{50} + (-1)^k \frac{\pi}{300} \mid k \in \Gamma \} \cup \{ \frac{2k\pi}{101} \mid k \in \Gamma \}$

Aufgabe J 14

Es muß gelten: $f_n(x_o) = f_{n+1}(x_o)$. Daraus ergeben sich die beiden Lösungen $x_{01} = 5$ und $x_{02} = 1$

Aufgabe J 15

Für $0 < a < 1$, $1 < a < 8$ und $b > 0$, $b \neq 1$ erhält man

$x = \sqrt[3]{a^2}$ und $y = 2a - \sqrt[3]{a^4}$

Aufgabe J 16 $0 \leq x < 841/144$

Aufgabe J 17 $s_n = \dfrac{x - (3n-2)x^{2n+1}}{1 - x^2} + \dfrac{3x^3(1-x^{2(n-1)})}{(1-x^2)^2}$

Aufgabe J 18 $a < -2$

Aufgabe J 19

1. Fall: $\sin x = 0$, daraus folgt $x = k\pi$, $k \in G$
2. Fall: $\sin x \neq 0$, daraus folgt $x = \arccos 0.5 \sqrt[3]{4}$

Aufgabe J 20 $2k\pi < x < \frac{\pi}{24} + 2k\pi$

$\frac{5\pi}{24} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Aufgabe J 21 $(x,y) \in \{ (2,1), (0,-3), (-6,9) \}$

Aufgabe J 22 $s = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Aufgabe J 24 Es gilt nur für $a = 1$

Zur Preisaufgabe J 23 erscheint in der Wurzel 10/77 eine ausführliche Lösung.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Jörg Vogel
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: K. Bartholmé, R. Jeske, D. Meinhardt
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

9

77

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

11. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Die »Wurzel« in Berlin

Am 27. Mai 1977 wurde entsprechend eines Vorschlages von Erich Honecker erstmals der Tag der Jugendbrigaden in unserer Republik begangen.

Dieser Tag soll alljährlich eine besondere Würdigung hervorragender Leistungen von Jugendkollektiven darstellen. Die besten dieser Jugendkollektive werden ausgezeichnet mit dem Titel "Hervorragendes Jugendkollektiv der Deutschen Demokratischen Republik".

Es erfüllt uns mit großer Freude, Ihnen, lieber "Wurzel"-Leser, mitteilen zu können, daß unser Kollektiv des Jugendobjektes "Studienvorbereitung" mit zu den ersten gehörte, die anläßlich des Tages der Jugendbrigaden diese hohe Auszeichnung aus den Händen des Vorsitzenden des Ministerrates der DDR, Gen. Willi Stoph, entgegennehmen konnten.

Indem unser Studentenkollektiv nach 1967 bereits das zweite Mal die höchste Auszeichnung für Jugendkollektive in unserer Republik erhalten konnte, sehen wir das vor allem auch als Anerkennung unserer Bemühungen, den sich ständig entwickelnden Anforderungen unseres Bildungswesens gerecht zu werden, und wir versichern Ihnen, daß wir in diesen Anstrengungen nicht nachlassen werden. Wenn an dieser Stelle ein Wunsch gestattet ist, dann der, daß wir uns in beiderseitigem Interesse einen noch engeren Kontakt mit Ihnen, dem Leser unserer Zeitschrift wünschen. Wir sind an jeder Kritik, jedem Hinweis - vor allem auch von den Lehrern und Leitern von Arbeitsgemeinschaften - interessiert, denn das hilft uns, unsere Arbeit Ihren Bedürfnissen entsprechend zu gestalten.

Bei all den vielen Höhepunkten, die wir am Tag der Jugendbrigaden in Berlin erleben konnten, wie die Auszeichnungsveranstaltung im Gebäude des Staatsrates, den Ball der Jugend im Palast der Republik oder eine Fahrt mit der Weißen Flotte, empfanden wir als besonders angenehm einen Empfang und eine Aussprache mit weiteren Jugendkollektiven beim Stellvertreter des Ministers

für Hoch- und Fachschulwesen der DDR, Gen. Dr. Peter Fiedler. Es war beeindruckend, in welch freimütiger und freundschaftlicher Atmosphäre der Minister und weitere verantwortliche Mitarbeiter mit uns Studenten über Probleme des Studiums diskutierten. Es ging vor allem um die weitere Ausprägung des schöpferischen Charakters des Studiums und dabei eben um solche Fragen wie die Einbeziehung der Studenten in die Forschung, die Praxisverbundenheit des Ausbildungsprozesses, das Verhältnis von Hochschullehrern und Studenten und die Realisierung der sozialistischen Demokratie bei der Klärung dieser Fragen an den einzelnen Hoch- und Fachschulen.
Allein schon die Tatsache, daß es bei diesem Gespräch nicht nur um ein gegenseitiges Vorstellen von Positionen ging, sondern um das wahrlich gemeinsame Bemühen, den erreichten Stand und die noch zu lösenden Aufgaben herauszukristallisieren, machte diese Diskussion wertvoll.

Egbert Creutzburg
Jörg Vogel

Grenzwerte von Folgen und Funktionen

<u>Definition 1:</u> (Grenzwert einer Folge)

Wir sagen "die Folge (x_n) konvergiert gegen die reelle Zahl x" und schreiben " $\lim x_n = x$ " , wenn zu jeder positiven Zahl ε ein Index n_0 existiert, so daß $|x_n - x|$ kleiner als ε wird, falls $n \geq n_0$.

<u>Definition 2:</u> (Grenzwert einer Funktion)

Wir sagen "$f(x)$ hat für $x \to x_0$ den Grenzwert b" und schreiben " $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ ", wenn es zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ gibt, so daß für alle $x \in D$ (D=Definitionsbereich) $|f(x)-b|$ kleiner ε wird, sobald $0 < |x-x_0| < \delta$ gilt.

<u>Satz:</u> $f(x)$ besitzt für $x \to x_0$ einen Grenzwert b genau dann, wenn für alle Folgen (x_n) mit $x_i \in D$ und $x_i \neq x_0$ $(i=1,2,3,..)$ aus $\lim x_n = x_0$ folgt, daß $\lim f(x_n) = b$.

Beweis:

I. Voraussetzungen: A) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=b$ B) (x_n) Folge mit $\lim x_n=x_0$ wobei $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$

zu zeigen: $\lim f(x_n)=b$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Nach Vor. A) und Def. 2 existiert zu diesem ε eine Zahl $\delta > 0$, so daß $|f(x)-b| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $0 < |x-x_0| < \delta$.

Zu diesem δ bestimmen wir gemäß Vor. B) und Def. I eine natürliche Zahl n_0, so daß $|x_n-x_0| < \delta$ für $n \geq n_0$.

Dann gilt für $n \geq n_0$: $|f(x_n)-b| < \varepsilon$.

Da man auf diese Weise für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ eine solche geeignete Zahl n_0 finden kann, gilt $\lim f(x_n)=b$, w.z.b.w.

II. Voraussetzung: Aus $\lim x_n=x_0$ $(x_n \in D,\ x_n \neq x_0)$ folgt $\lim f(x_n)=b$ für alle Folgen (x_n).

Behauptung: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=b$

Beweis indirekt - Annahme: Es gilt nicht $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=b$, d.h. es existiert eine positive Zahl ε_0, für die zu jeder Zahl $\delta > 0$ Elemente x des Definitionsbereiches existieren, für welche zwar $0 < |x-x_0| < \delta$ gilt, aber $|f(x)-b| \geq \varepsilon_0$ ist.

x_n sei ein solches nach obiger Annahme existierendes x für $\delta = \frac{I}{n}$ $n=I,2,3,\ldots$, d.h. $0 < |x_n-x_0| < I/n$ und $|f(x_n)-b| \geq \varepsilon_0$.

Es gilt $\lim x_n=x_0$, denn für $n \geq N = [I/\varepsilon] + I$ ist $|x_n-x_0| < \varepsilon$.

Nach Vorausetzung folgt daraus $\lim f(x_n)=b$.

Das bedeutet aber, daß es zu ε_0 einen Index n_0 gibt, für welchen $|f(x_n)-b| < \varepsilon_0$ für alle $n \geq n_0$. Andererseits gilt $|f(x_n)-b| \geq \varepsilon_0$ für $n=I,2,3,\ldots$. Wir können diesen Widerspruch nur beseitigen, indem wir unsere Annahme fallen lassen.

Somit ist nachgewiesen, daß die im Satz angegebene Bedingung sowohl notwendig (siehe I.) als auch hinreichend (siehe II.) ist für die Gültigkeit von $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=b$ gemäß Definition 2.

(Nachtrag für Fortgeschrittene: Sowohl bei Def. I als auch beim Satz muß vorausgesetzt werden, daß x_0 Häufungspunkt von D ist)

Der Widerstreit

Seit Anbeginn dessen, was wir Mathematik nennen, streiten sich zwei Seelen in der Brust dieses Ungeheuers: einmal die Schönheit der Idee, sich etwa widerspiegelnd in einem eleganten Beweis, einer verblüffenden Konstruktion oder im Aufbau einer ganz neuen Theorie - und zum anderen der Zwang "ekler, plumper Berechnung". Das erste scheint zart zu sein, ätherisch und verwandt mit den Künsten, das zweite hingegen verbunden mit Masse, Langwierigkeit, Fallunterscheidungen, auch mit Nutzen, mit "Erdwerten": Geld, Einsparung, Abschätzung, Gewinst - auch dies ist Dialektik.

Den Kampf solcher Gegensätze wollen wir in der Geometrie einmal miterleben. Da gab es für uns Schüler die Zeit der euklidischen Beweise, Winkelsätze, Schnittpunkte und Tangentenlagen, kurz: jene Welt, die Schöngeister wie Galois und Einstein zu Geniestreichen inspirierten.

Dann kam Pythagoras, also sein Satz. Geben wir es zu, die Wurzel ist nun mal kein Symbol der Eleganz! (Mitarbeiter einer Zeitschrift gleichen Namens mögen mir verzeihen.) Und mit Pythagoras kam der Kosinussatz gezogen, Resultat der trigonometrischen Funktionen, deren Verläufe man um Himmelswillen zu lernen hatte, weil sie so nützlich waren. Man vergaß die heitere Welt Euklids und - rechnete.

Aber es kommt noch schlimmer. Dieser Kosinussatz ist imstande, Schönheit und Inspiration zu zerstören. Wie ein Moloch. Zum Exempel: Erinnern wir uns der Aufgabe, aus zwei Seiten und der Seitenhalbierenden zur dritten das zugehörige Dreieck zu konstruieren (Abb. 1)! Wem sich die Phantasie nicht regt, der ist verloren, der kommt nicht drauf: man muß das Dreieck zum Parallelogramm (Abb. 2) ergänzen. Dann wird alles klar, die Seiten von Δ ACC' sind sämtlich bekannt und damit die Aufgabe leicht zu lösen.

Ist dies aber nicht Eingebung, schöne Eingebung?

Abb. 1

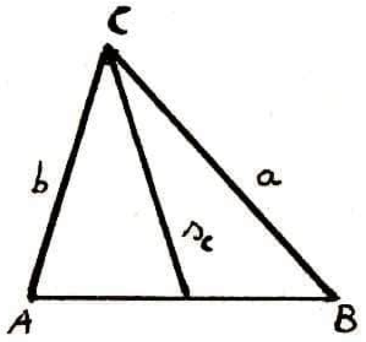
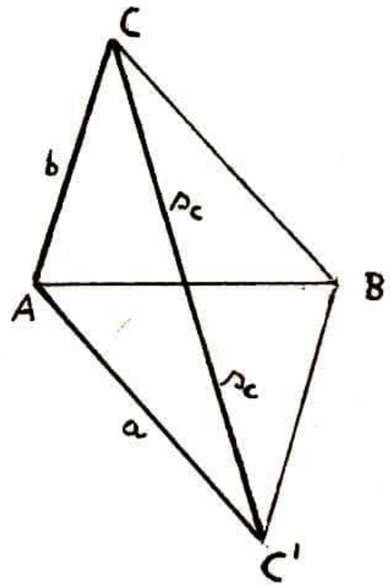


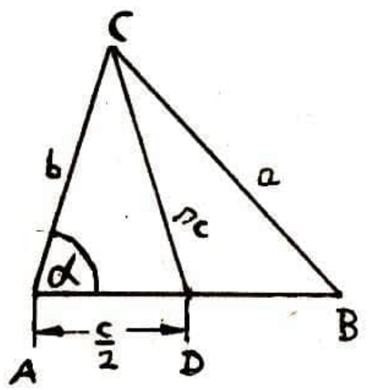
Abb. 2



Wenn man jedoch den Kosinussatz kennt, bedarf es dieser Eingebung überhaupt nicht mehr; man kann plump und mit brutaler Folgerichtigkeit "alles ausrechnen". Man tut so, als ob man s_c nicht kennt, sondern aus a, b, d, den Dreiecksseiten, finden muß.

Es folgt (im $\triangle$ ADC) (Abb. 3)

Abb. 3



(1) $$s_c^{\,2} = b^2 + (\tfrac{c}{2})^2 - 2b \cdot \tfrac{c}{2} \cdot \cos\alpha = b^2 + (\tfrac{c}{2})^2 - bc \cdot \cos\alpha \,.$$

Bliebe nun $\cos\alpha$. Wieder hilft der Kosinussatz. Da nämlich (im $\triangle$ ABC)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \quad ,$$

so wird

(2) $\cos\alpha = \frac{1}{2bc}\left(b^2+c^2-a^2\right)$.

Setzen wir (2) in (1) ein, so erhalten wir

$$s_c^{\,2} = b^2 + (\tfrac{c}{2})^2 - bc \cdot \frac{1}{2bc}\left(b^2+c^2-a^2\right) ,$$

also

(3) $s_c^{\,2} = \frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-c^2\right)$.

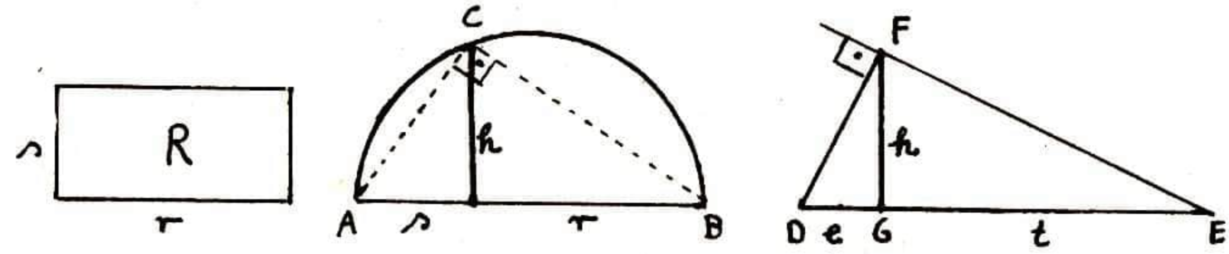
Jetzt kennen wir aber s_c und a und b. Aus (3) finden wir dann c^2 zu

(4) $c^2 = 2a^2 + 2b^2 - 4s_c^{\,2}$.

Man macht das graphisch so: Man konstruiert (für $2a^2$) das Quadrat über a und verdoppelt es, desgleichen für $2b^2$ und entsprechend für $4s_c^{\,2}$. Diese drei Rechtecke "transformiert" man flächengleich auf "Norm", d. h. in Rechtecke mit ein und derselben Seitenlänge e (etwa 10 cm oder so). Wie macht man das?

Ganz allgemein wollen wir das am Rechteck R mit den Seiten r,s demonstrieren. Ziel ist also: Konstruktion von t mit rs=et.

Abb. 4



Erster Schritt: Verwandlung von R flächengleich in ein Quadrat Q. (Vgl. Abb. 4: $rs=h^2$, Höhensatz, Konstruktion von $\triangle$ABC mit Thaleskreis).

Zweiter Schritt: Flächengleiche Verwandlung von Q in das gewünschte Rechteck R mit den Seiten e,t. (Vgl. Abb. 4: $h^2=et$, Konstruktion von $\triangle$ DEF aus $\triangle$ DGF und dem rechten Winkel bei F.)

Nun können wir Rechtecke "addieren" und "subtrahieren". Für c^2 erhalten wir also ein Rechteck. Wir verwandeln es flächengleich wie gehabt in ein Quadrat (Höhensatz "$h^2=pq$"; auch "$a^2=cp$" wäre verwendbar) und haben endlich c. Aus a,b,c konstruieren wir das Dreieck.

Auf diese Weise sind auch andere Dreieckskonstruktionen möglich. Immer bestimmt man diejenigen Stücke, die keine Dreiecksseiten sind, mit dem Kosinussatz (aus den Dreiecksseiten a,b,c) und "rechnet graphisch" dann die fehlenden Seiten "rückwärts" aus. Allerdings muß alles mit den vier Grundrechenarten zuzüglich Quadratwurzelziehen möglich sein, sonst geht es nicht. (Bohrt man hier tiefer, stößt man natürlich auf Gauß und die Konstruierbarkeit, vgl. z. B. auch L. Rédei, Algebra (Leipzig 1959), § 179 Geometrische Konstruierbarkeit).

Der Kosinussatz schafft tatsächlich allerhand:

Höhe h_c auf c $\qquad h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

Seitenhalbierende s_c auf c $\qquad s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$

Winkelhalbierende w_c auf c $\qquad w_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab\left[(a+b)^2-c^2\right]}$

Inkreisradius $\qquad \varrho_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}$

Umkreisradius $\qquad \varrho_u = a.b.c\,\frac{1}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$

(Tips: über cos γ und dann sin γ ; unser Beispiel; harmonische Teilung; Winkelhalbierung und Kongruenz; Mittelpunktswinkel)

Die Frage der Konstruierbarkeit (mit Zirkel und Lineal) ist ganz allgemein entschieden. Dennoch: eine elegante Konstruktion vermag immer wieder mathematische Herzen zu erfreuen. A propos: Weit über unseren Köpfen spielt sich ein ähnlicher Kampf zwischen Umfassendheit und Tiefe ab, nämlich am Vierfarbenproblem. Es scheint gelöst (siehe dazu Wurzel 7/77 und 8/77).

- aber mit Computern, über eine -zigfache Fallunterscheidung. Man müßte ein Maß für Schönheit in der Mathematik einführen!

<u>Anhang:</u> Bei diesen Betrachtungen sind mir noch zwei nette Dinge aufgefallen, wo man ohne Trigonometrie auskommt.

1. Berechnung der Höhenabschnitte

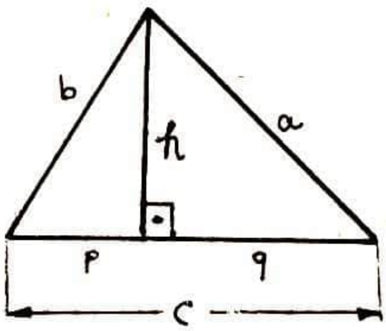
Es gilt

(5) $h^2+p^2=b^2,\ h^2+q^2=a^2$.

Differenzbildung liefert

(6) $p^2-q^2=b^2-a^2$,

also $(p+q)(p-q)=b^2-a^2$,



Nun gilt aber p+q=c, d. h.

(7) $p-q=\frac{1}{c}(b^2-a^2)$, $p+q=c$.

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für p,q. Es ergibt sich

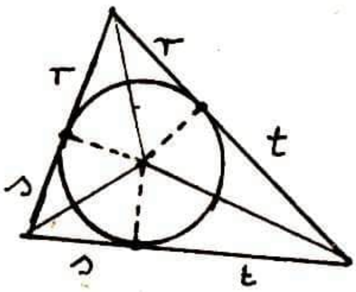
(8) $p=\frac{1}{2c}(c^2+b^2-a^2)$, $q=\frac{1}{2c}(c^2+a^2-b^2)$.

2. Berechnung der Inkreisabschnitte

Es gilt

(9) $s+r=b$, $s+t=c$, $r+t=a$.

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für r,s,t. Wir erhalten



(10) $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$,

$s=\frac{1}{2}(-a+b+c)$,

$t=\frac{1}{2}(a-b+c)$.

Überhapt scheinen sich Abschnitte auf den Dreiecksseiten leichter berechnen zu lassen als Innenstücke (bei der Winkelhalbierenden verhalten sich die Abschmitte zueinander wie die beiden anderen Dreiecksseiten).

Dr. K. Wohlrabe
Berlin

Preisaufgaben 9/77

J 43 Man löse die Gleichung

$$\log_{\sin(-x)}\left(\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2}\right) = 1$$

J 44 Drei Kugeln, von denen zwei gleich sind, berühren eine Ebene P und paarweise einander. Die Spitze eines geraden Kreiskegels liege auf der Ebene P, die Kegelachse stehe senkrecht auf P. Alle drei Kugeln liegen außerhalb des Kegels und berühren je eine Mantellinie des Kegels. Gesucht ist der Kosinus des Winkels, der von der Mantellinie des Kegels und der Ebene P gebildet wird, wenn noch bekannt ist, daß einer der Winkel des Dreiecks, gebildet durch die Berührungspunkte der Kugeln mit P, gleich 150° ist.

J 45 Man beweise die Richtigkeit der folgenden Gleichung!

$$1^5 + 2^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2+2n-1).$$

J 46 Man löse die Ungleichung

$$\sqrt{3-x} > x-2$$

J 47 Man löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ (x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) &= 1 \\ x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) &= -6 . \end{aligned}$$

J 48 kann aus technischen Gründen erst in WURZEL IO/77 abgedruckt werden.

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens IO Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als IO Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.
Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 30.II.77

Die Auflösung der Preisaufgaben erfolgt in WURZEL I/78 .

Preisaufgabe außer Konkurrenz

Der Vater ist heute 25 Jahre älter als sein Sohn und in genau 7 Jahren wird er fünfmal so alt sein wie er.
Was macht der Vater jetzt ?

Auflösung der Preisaufgaben aus Heft 6/77

Aufgabe J 25

Angenommen es gäbe ein Polynom in k (k durchläuft die natürlichen Zahlen) - sagen wir n-ten Grades - mit
$P(k)=c_nk^n+\ldots+c_Ik+c_o=a_k$ (k=0,I,2,...) $c_n\neq 0$,
wobei $a_o=0$, $a_I=I$ und $a_{k+I}=a_k+a_{k-I}$ für $k\geq I$ ist.
Offenbar ist $P(k+I)-P(k) = c_n(k+I)^n+\ldots+c_o -c_nk^n-\ldots-c_o$
ein Polynom höchstens (n-I)-ten Grades, da sich c_nk^n weghebt.
Andererseits muß auf Grund unserer Annahme
$P(k+I)-P(k)=kP(k-I)=kc_n(k-I)^n+\ldots+kc_o=c_n\binom{n}{0}k^{n+I}\ldots$
ein Polynom (n+I)-ten Grades sein.
Wir gelangen also zu einem Widerspruch und müssen unsere Annahme fallen lassen.

Aufgabe J 26

Zunächst müssen wir $x > 0$ und $y > 0$ voraussetzen.

Die erste Gleichung des Systems formen wir dann um zu

$$\log_y (y\, x^{\log_y x}) = \log_y (x^{5/2})$$

$$\log_y y + (\log_y x)^2 = 2{,}5 \log_y x$$

$$(\log_y x)^2 - 2{,}5 \log_y x + 1 = 0$$

und erhalten nach der Substitution $u = \log_y x$ als Lösungen der quadratischen Gleichung $u^2 - 2{,}5u + 1 = 0$

$$(\log_y x)_1 = 0{,}5 \quad \text{d.h.} \quad x_1 = \sqrt{y_1}$$

$$(\log_y x)_2 = 2 \quad \text{d.h.} \quad x_2 = y_2^2$$

Die zweite Gleichung des Systems

$$\log_4 y \; \log_y (y-3x) = 1$$

ist zu $\log_4 (y-3x) = 1$

und damit zu $y - 3x = 4$ äquivalent.

Damit ergibt sich nun :

1. Fall

$$y_1 - 3\sqrt{y_1} = 4$$

$$y_1^2 - 17y_1 + 16 = 0$$

$$y_{1,1} = 1 \qquad x_{1,1} = 1$$

$$y_{1,2} = 16 \qquad x_{1,2} = 4$$

2. Fall

$$y_2 - 3\,y_2^2 = 4$$

$$y_2^2 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{4}{3} = 0$$

im Bereich der reellen Zahlen nicht lösbar

Da die Basis des Logarithmus von 1 verschieden seien muß, entfällt die Lösung $y_{1,1}$ und die Probe bestätigt uns als Lösungen des Gleichungssystems nur die Werte (4 , 16) .

Aufgabe J 27:

$$\begin{array}{rl} s_n &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)\,x^n \\ -xs_n &= \quad x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + n\,x^n + (n+1)x^{n+1} \\ \hline =(1-x)s_n &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - (n+1)x^{n+1} \end{array}$$

und wegen $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (n-te Partialsumme der geometr. Reihe)

folgt: $(1-x)s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}$

$$s_n = \frac{1-x^{n+1}-(n+1)x^{n+1}(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$s_n = \frac{1-x^{n+1}-(n+1)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

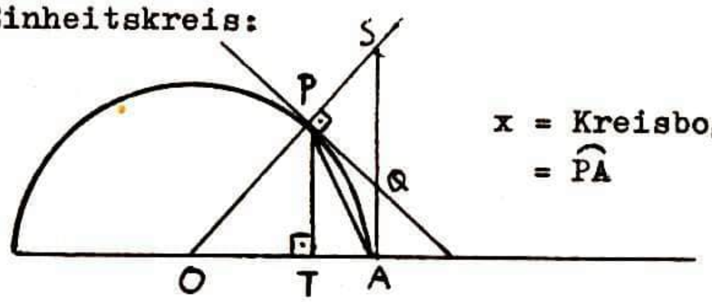
$$s_n = \frac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

Unter Zuhilfenahme der Differentialrechnung kann man die Aufgabe auch auf folgende Weise lösen

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n}(k+I)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}(x^{k+I})' \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} x^{k+I}\right)' \\ &= \left[\frac{I - x^{n+2}}{I - x}\right]' \\ &= \frac{-(n+2)x^{n+I}(I-x) + (I - x^{n+2})}{(I-x)^2} \\ &= \left[I - (n+2)x^{n+I} + (n+I)x^{n+2}\right] / (I-x)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe J 28

Einheitskreis:



x = Kreisbogen PA
$= \widehat{PA}$

für $x < \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\sin x = \overline{PT} < \overline{PA} < \widehat{PA} = x < \overline{PQ} + \overline{QA} < \overline{AQ} + \overline{QS} =$$
$$= \overline{AS} = \frac{\overline{AS}}{1} = \frac{\overline{AS}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{OT}} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x \qquad \text{für } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$x \cos x < \sin x$$

$$x \cos x - \sin x < 0$$

$$g(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} < 0$$

betrachte $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = g(x)$$

wegen $f'(x) < 0$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist streng monoton fallend für $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\beta}{\beta} \qquad \text{für } 0 < \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

q.e.d.

Aufgabe J 29

Wir führen die Bezeichnungen

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} = \alpha \quad , \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = \beta \quad , \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{239}$$

ein. Für diese Winkel gilt offensichtlich ($\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$)

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{4} \quad .$$

Somit ist die zu beweisende Gleichung mit

$$4\alpha = \frac{\pi}{4} + \beta \qquad (+)$$

äquivalent, wobei sowohl die linke, als auch die rechte Seite der Gleichung im Intervall $(0, \pi)$ liegen. Deshalb genügt zum Beweis von (+) der Nachweis der Gültigkeit von

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \quad .$$

(i.a. folgt sonst aus $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$ nur die Beziehung $x = y + k\pi$, k beliebige ganze Zahl)

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{2\,\dfrac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}}{1 - \left(\dfrac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{120}{119}}}$$

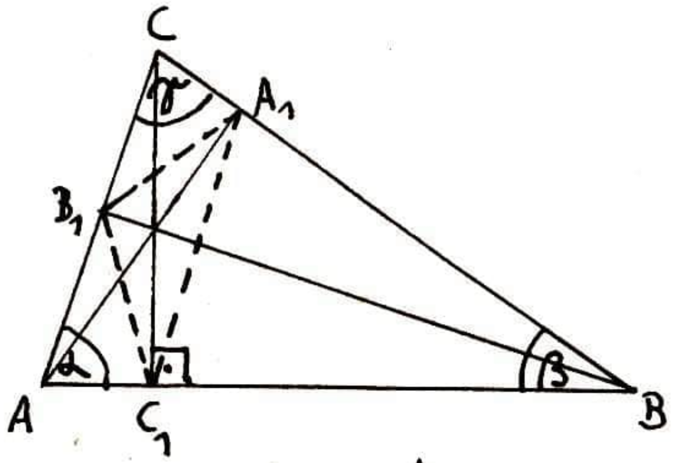
da nach Definition $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$ gilt.

Außerdem erhalten wir

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \frac{1 + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\beta}$$

$$= \underline{\underline{\frac{120}{119}}} \quad .$$

Aufgabe J 30



Das gesuchte Verhältnis sei $q = \frac{A_{\Delta A_I B_I C_I}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{I}{A} A_{\Delta A_I B_I C_I}$

$I - q = \frac{I}{A}\left(A_{\Delta AC_I B_I} + A_{\Delta BA_I C_I} + A_{\Delta CB_I A_I} \right)$ wobei $A = A_{\Delta ABC}$

$$A_{\Delta AC_I B_I} = \frac{I}{2} \overline{AC_I}\ \overline{AB_I} \sin\alpha$$
$$= \frac{I}{2} \overline{AC} \cos\alpha\ \overline{AB} \cos\alpha \sin\alpha$$
$$= A \cos^2\alpha$$

Analog erhält man: $A_{\Delta BA_I C_I} = A \cos^2\beta$ und $A_{\Delta CB_I A_I} = A \cos^2\gamma$

Also: $I - q = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$

$$\underline{\underline{q = I - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)}}$$

Da $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$ läßt sich mittels Additionstheoreme das Ergebnis noch weiter umformen.

$$\underline{\underline{q = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}$$

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Jörg Vogel
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: K. Bartholmé, R. Jeske, D. Meinhardt
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

10
77

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

11. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski

So um 325 v. u. Z. schrieb der griechische Mathematiker Euklid von Alexandria sein Werk „Die Elemente" , welches aus I3 Büchern besteht. Im Buch I (über Geometrie) beginnt Euklid mit einer Reihe von Definitionen und Postulaten. Das fünfte Postulat, das sogenannte Parallenpostulat: „daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß wenn auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind" erlangte besondere Berühmtheit. (zitiert nach: Eukleides von Alexandria „Die Elemente", Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 235, Leipzig I933)

In der Folgezeit versuchten die Mathematiker immer wieder vergeblich, das Parallelenpostulat zu beweisen. Man fand lediglich Aussagen, die zu dem Parallelenpostulat logisch äquivalent sind. „Die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte." und "Zu einer Geraden gibt es durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt genau eine Parallele." seien hier als Beispiele genannt.

Der deutsche Mathematiker Gauß erkannte, daß das fünfte Postulat von den übrigen unabhängig (somit nicht beweisbar) ist und daß man eine in sich widerspruchsfreie Geometrie aufbauen kann, in der an die Stelle des Parallelenpostulats eine andere Forderung tritt, z. B. „Zu einer Geraden gibt es durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt mindestens zwei (und somit unendlich viele) Parallelen." Gauß veröffentlichte seine Ergebnisse jedoch nicht, weil diese den herrschenden philosophischen Ideen und der gewohnten Anschauung widersprachen. (siehe dazu auch WURZEL 4/77)

Erst der russische Mathematiker Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski, der unabhängig von Gauß zu diesem Resultat kam, veröffentlichte ab I829 Abhandlungen über eine solche nichteuklidische Geometrie. Heute nennen wir diese Geometrie, in der es zu einer Geraden unendlich viele Parallelen durch einen gegebenen Punkt gibt und in der somit die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei Rechte ist, hyperbolische oder Lobatschewskische Geometrie.

Auch der ungarische Mathematiker Janos Bolyai arbeitete unabhängig von Gauß und Lobatschewski die nichteuklidische hyperbolische Geometrie aus und veröffentlichte diese im Jahre 1832 .
Als er jedoch erfuhr (siehe WURZEL 4/77) , daß Gauß schon 30 Jahre vor ihm dieselben Resultate erzielt hatte, gab er es auf, sich weiter mit Mathematik zu beschäftigen.
Nur Lobatschewski hatte sowohl den Mut als auch die Beharrlichkeit eine nichteuklidische Geometrie zu begründen, zu publizieren und weiter auszubauen. Das brachte ihm - allerdings erst nach seinem Tode - den Titel „Kopernikus der Geometrie" ein.

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski wurde 1792 in Nishni-Nowgorod (dem heutigen Gorki) geboren. Von 1807 bis 1811 studierte er Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität in Kasan.
Er schloß sein Studium mit dem akademischen Grad eines Magisters ab und begann im Jahre 1811 seine Lehrtätigkeit an dieser Universität. 1816 wurde er außerordentlicher und 1822 ordentlicher Professor. Er wurde in mehreren Jahren zum Dekan der Physikalisch-Mathematischen Fakultät gewählt, vor allen auf Grund seiner Verdienste bei der Reorganisation der Universitätsbibliothek.
Von 1827 bis 1846 war Lobatschewski Rektor der Universität in Kasan. 1846 vollendete Lobatschewski sein 30. Dienstjahr als Professor und mußte deshalb nach den damaligen Bestimmungen seine Lehrtätigkeit beenden.
Er hatte hauptsächlich Vorlesungen über Zahlentheorie, Mechanik der Himmelskörper und über Geometrie gehalten. Seine ersten Geometrievorlesungen enthielten tatsächlich noch einen angeblichen „Beweis" des Parallelenpostulats. In seiner weiteren Auseinandersetzung mit dieser Problematik veränderte er zunächst den Aufbau seiner Geometrie. Er behandelte zunächst alle geometrischen Sätze, die sich ohne Benutzung des Parallelenpostulates beweisen lassen, und dann erst die übrigen, weil er nämlich die besondere Stellung des Parallelenpostulats bei der Charakterisierung der Euklidischen Geometrie erkannt hatte. Erst später kam Lobatschewski zu der Überzeugung, daß das Parallelenpostulat sich nicht mit mathematischen und logischen Mitteln beweisen läßt, sondern der Bestätigung durch die Erfahrung, d. h. durch Experimente und Beobachtungen, bedarf, genau wie z. B. physikalische Gesetze.

Lobatschewski hielt 1826 einen Vortrag über „Grundlagen der Geometrie ..." vor seiner Fakultät. Das war die Geburtsstunde der nichteuklidischen Geometrie. Die bereits erwähnten Abhandlungen Lobatschewskis über nichteuklidische Geometrie erschienen in den Jahren 1829 bis 1840 . Er fand bei seinen Zeitgenossen keine Resonanz. Kein bedeutender Mathematiker Rußlands war bereit mit ihm über nichteuklidische Geometrie zu diskutieren. Von den Wertschätzungen seiner Arbeiten durch den deutschen Mathematiker C. F. Gauß erfuhr er nichts. Lobatschewski gab aber nicht auf. In seinen letzten Lebensjahren und bereits erblindet, diktierte er eine umfassende Darstellung seiner Geometrie, die 1855 erschien. Im Jahre 1856 starb Lobatschewski.

Eine weitere nichteuklidische Geometrie stellte 1854 der deutsche Mathematiker Bernhard Riemann auf. Die Annahme, daß es zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt keine Parallele gibt, führt zu einer Geometrie, die wir heute elliptische Geometrie nennen. In ihr ist die Innenwinkelsumme eines Dreiecks größer als zwei Rechte.

Literatur: Biographien bedeutender Mathematiker, herausgegeben von H. Wußing und W. Arnold, Berlin 1975

Der Unterschied

Mathematiklehrerin vor der Klasse:
„Es heißt ‚der größere Teil' und nicht ‚die größere Hälfte'! Aber die größere Hälfte von euch begreift das nie."

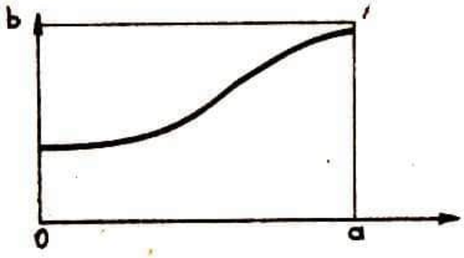
Mathematik im Alltag

Mutter (zu ihrer Tochter) :
„Schämst du dich gar nicht ? Mit 15 Jahren schon einen festen Freund - aber den 30. Geburtstag deiner Mutter vergessen !"

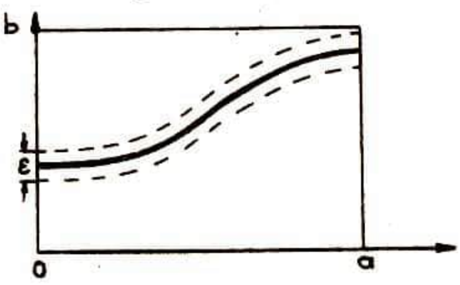
Korridore und Labyrinthe im Banachzentrum von Warschau (1. Teil)

Im Herzen der polnischen Hauptstadt befindet sich in der Mokotowska-Straße Nr. 25 ein kleines Palais. Hinter seinen Fassaden verbergen sich ein Hörsaal, zwei Seminarräume und mehrere Arbeitsräume. Es ist eine Stätte internationaler mathematischer Zusammenarbeit, die ihren Namen dem berühmten polnischen Mathematiker Stefan Banach verdankt - das "Banachzentrum" . In jedem Semester treffen sich hier viele Fachleute auf mathematischen Spezialdisziplinen, um Erfahrungen zu sammeln und weiterzugeben. Auch Gäste aus nichtsozialistischen Ländern werden eingeladen, um ihre Forschungsergebnisse vorzutragen. Diese von den RGW-Ländern finanzierte Institution ist also ein Beispiel guter internationaler Zusammenarbeit.
In dem zur Zeit laufenden 7. Semester über "Diskrete Mathematik" sprach Prof. B. Sendov, Rektor der Universität Sofia, zum Thema: "Korridore und Labyrinthe". Dieser Vortrag ist gut geeignet, dem WURZEL-Leser an einem leicht zu formulierenden Problemkreis internationale Forschungsarbeit zu demonstrieren.

Wir betrachten zunächst reellwertige Funktionen im Rechteck $[0,a] \times [0,b]$, also solche Funktionen $f(x) = y$, deren x-Werte aus dem Intervall $[0,a]$ zu nehmen sind, während die Funktionswerte y im Intervall $[0,b]$ definiert sind.



Es sei nun eine beliebige kleine Zahl $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann bestimmt jede Funktion einen Streifen der Breite ε im Rechteck $[0,a] \times [0,b]$ (siehe Abbildung!) Das Rechteck $[0,a] \times [0,b]$ wird nun in Quadrate unterteilt. Für positive ganze Zahlen p und q gelte dabei:



$$\varepsilon . p = a \quad \text{und} \quad \varepsilon . q = b.$$

d. h. ε wurde bereits passend zu a und b gewählt.
Unter Korridoren versteht man nun spezielle "Streifen" in unserem unterteilten Rechteck (Abb. 1). Durch einen Korridor ist jeweils eine stetige reellwertige Funktion zu führen. So sind zum Beispiel mit "Schleifen" keine Korridoren gegeben (Abb. 2),

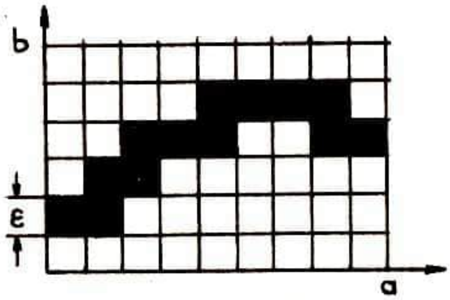


Abb. 1

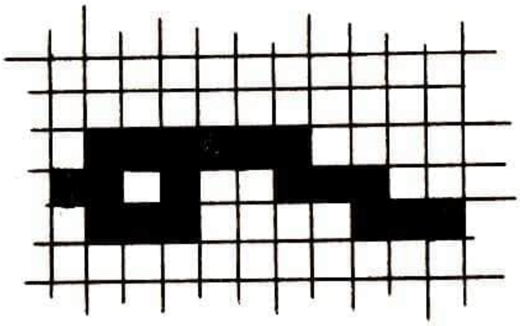
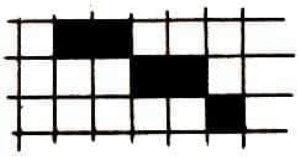
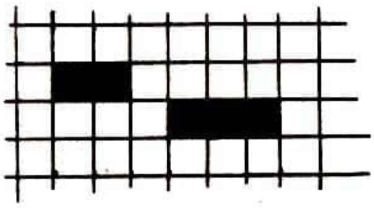


Abb. 2

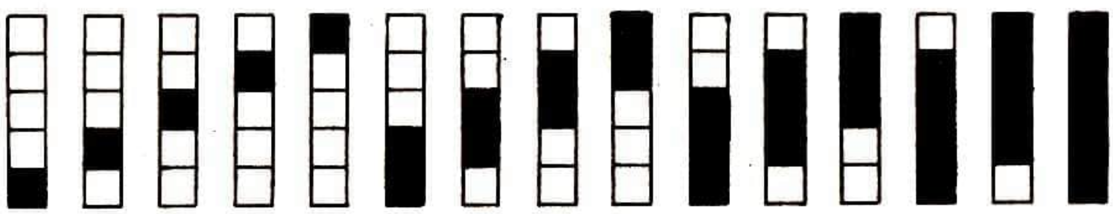
ebenso nicht mit verbundenen Ecken





oder gar Unterbrechungen.

Für ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b, wobei $\varepsilon \cdot p = a$ und $\varepsilon \cdot q = b$, sei mit $k_{p,q}$ die Zahl aller möglichen Korridore in diesem durch ε unterteiltem Rechteck gegeben. Für einen vertikalen Steifen aus q Quadraten gibt es genau $\binom{q+1}{2} = \frac{q(q+1)}{2}$ Möglichkeiten, einen Korridor gemäß zu "schwärzen". Für den Fall q=5 erhalten wir zur Demonstration folgende 15 Fälle:



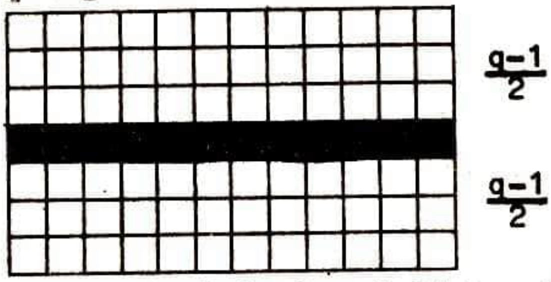
Setzen wir in unsere allgemeine Formel ein, finden wir Übereinstimmung: $\binom{5+1}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6.5}{1.2} = 15$. Wir haben nun vereinbarungsgemäß genau p derartige vertikale Streifen aus q Quadraten.

Damit läßt sich $k_{p,q}$ in recht grober Näherung wie folgt nach oben abschätzen:

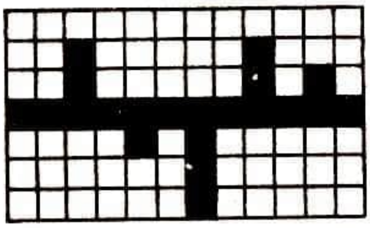
$$(1) \qquad k_{p,q} \leq \left(\frac{q+1}{2}\right)^p = \left(\frac{q\cdot(q+1)}{2}\right)^p \lesssim 2^{-p}q^{2p} \;;$$

wobei mit $f(x) \lesssim g(x)$ gebräuchlicherweise die Ungleichung $f(x) \leq g(x) + c$ bezeichnet wird (c - positive ganzzahlige Konstante).

Es sei nun q ungerade und wir betrachten den Fall:

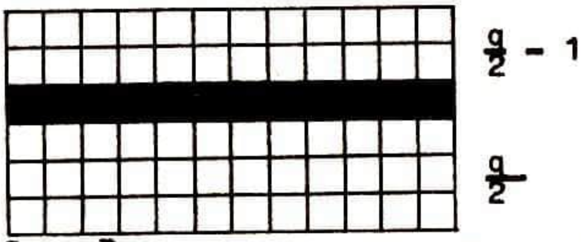


Dieser "gerade Pfad" ist ein möglicher Kooridor. Durch Abzweigungen nach unten oder oben wie etwa zum Beispiel:



kann man aus diesem einen Pfad genau $(\frac{q+1}{2})^{2p}$ Korridore erhalten.

Für gerade q erhält man aus dem geraden Pfad auf analoge Weise



genau $(\frac{q}{2})^p(\frac{q}{2}+1)^p$ Korridore. Als untere Abschätzung von $k_{p,q}$ erhält man also insgesamt:

$$(2) \qquad k_{p,q} \geq \left(\frac{q}{2}\right)^{2p} = 4^{-p}\, q^{2p} \;.$$

Zusammen mit (1) folgt:

$$(3) \qquad 4^{-p}\, q^{2p} \leq k_{p,q} \lesssim 2^{-p}\, q^{2p} \;.$$

Um eine zweistellige Funktion in Abhängigkeit von p und q genauer abschätzen zu können, führen wir folgende Substitution durch:

$$k_{p,q} = (\lambda(p,q).q)^{2p} .$$

Mit (3) erhalten wir zunächst folgende Ungleichung

$$\frac{1}{4^p} \leq \lambda(p,q)^{2p} \leq \frac{1}{2^p} .$$

Nun ziehen wir die 2p-te Wurzel und erhalten für $\lambda(p,q)$ die Abschätzung

$$\frac{1}{2} \leq \lambda(p,q) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} . \tag{4}$$

Von Prof. Sendov wurde dargelegt, daß zur Zeit noch sehr wenig über diese Funktion $\lambda(p,q)$ bekannt ist. Von großem Interesse sind zum Beispiel diesbezüglich die beiden folgenden Fragen:

1. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{p\to\infty} \lambda_{p,q} = \lambda_q$ für fixierte Zahlen q?
2. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} \lambda_{p,q} = \lambda$?

Unter der Annahme der Existenz dieser Limites, ist nun interessant, diese exakt zu bestimmen. Von dem bulgarischen Mathematiker Ch. Chitow wurde die Hypothese aufgestellt, daß $\lambda = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$, wobei e die bekannte Eulersche Zahl (e=2,71...) ist. Der sowjetische Mathematiker A. A. Panow gab 1975 für folgenden Schätzwert an $\lambda = 0,6755169 \ldots$.

Gisela Klette
Forschungsbereich

Der zweite und letzte Teil erscheint in der Wurzel 11/77

Preisaufgaben 10/77

J 49 ①

Man beweise die Richtigkeit der folgenden Gleichung

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

J 50 ②

Für die Zahlen r, s, t gilt $r < s < t$. Es ist bekannt, daß nach Substitution von y durch eine beliebige der drei Zahlen r, s, t in der Gleichung

$$x^2 - (9-y)x + y^2 - 9y + 15 = 0$$

mindestens eine der restlichen beiden Zahlen Wurzel der so entstandenen quadratischen Gleichung ist.
Man zeige, daß $-1 < r < 1$ gilt.

J 51 ①

Man löse die Gleichung

$$\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}\,\log_5 x = -1$$

J 52 ①

Für $a > 0$, $b > 0$ und $c > 0$ löse man das Gleichungssystem

$$x^2 = a + (y-z)^2$$
$$y^2 = b + (z-x)^2$$
$$z^2 = c + (x-y)^2 .$$

J 53 ①

Man löse die Ungleichung

$$\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8} .$$

J 54 ②

В треугольный пирамиде KABC ребра KA, KC и KB попарно перпендикулярны, $AB=BC=a$, $KB=b$.
Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

Einsendeschluß: 15.12.1977

Preisaufgabe

J 48 (Nachtrag aus Wurzel 9/77)

②

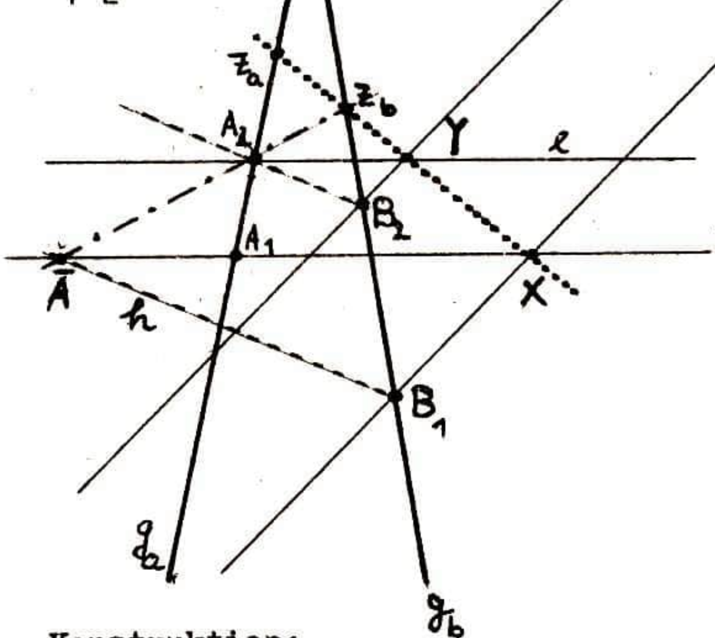
Многочлен p(x) дает при делении на (x-a) остаток A, при делении на (x-b) - остаток B, при делении на (x-c) - остаток C. Найти многочлен, получающийся в остатке при делении p(x) на (x-a)(x-b)(x-c), предполагая, что среди чисел a, b и c нет равных.

Einsendeschluß: 30.11.77

Lösung der Preisaufgabe J 23

Aufgabe J 23

Angegeben wird eine Konstruktion der Punkte X und Y. Danach zeige ich, daß XY der Scheitel zweier Bänder durch A_1A_2 und B_1B_2 ist.



Anmerkung:

Der Hintergrund der Aufgabe besteht offenbar darin, zu zwei gegebenen zentrischen Streckungen

$$\varrho_a\left(z_a, s_a = \frac{z_aA_2}{z_aA_1}\right) \quad \text{und}$$

$$\varrho_b\left(z_b, s_b = \frac{z_bB_2}{z_bB_1}\right)$$

die Streckungszentren X und Y der Abbildungen $\varrho_a \circ \varrho_b$ und $\varrho_b \circ \varrho_a$ zu finden, welche wieder zentrische Streckungen (mit dem Faktor $s_a \cdot s_b$) sind.

Konstruktion:

(1) Konstruiere $\bar{A}$ durch: Gerade h mit $h \parallel g(B_2A_2)$ und $B_1 \in h$

$h \cap g(z_bA_2) = \bar{A}$

(2) $g(A_1\bar{A}) \cap g(z_az_b) = X$

(3) Konstruiere Gerade l mit $l \parallel g(A_1X)$ und $A_2 \in l$

(4) $l \cap g(z_az_b) = Y$

XY ist der gesuchte Scheitel der Bänder.

Beweis: a) nach (3) und (4) ist $[g(A_1X), g(A_2Y)]$ ein Band durch A_1A_2

b) $[g(B_1X)\ g(B_2Y)]$ ist ein Band durch B_1B_2

Auf Grund der Gültigkeit des Strahlensatzes und seiner Umkehrungen genügt es, zu zeigen: $\frac{z_bX}{z_bY} = \frac{z_bB_1}{z_bB_2}$.

Es ist $\frac{z_bX}{z_bY} = \frac{z_b\bar{A}}{z_bA_2}$,

denn nach (3) ist $l = g(A_2Y) \parallel g(A_1X) = g(AX)$ und nach (1) $\bar{A} \in g(A_2z_b)$ und es gilt der Strahlensatz

sowie $\frac{z_b\bar{A}}{z_bA_2} = \frac{z_bB_1}{z_bB_2}$

nach (1) und der Gültigkeit des Strahlensatzes bzw. nach (1) und den Eigenschaften einer zentrischen Streckung.

Also insgesamt: $\frac{z_bX}{z_bY} = \frac{z_bB_1}{z_bB_2}$

Die Lösungen zu den Preisaufgaben aus Wurzel 7/77 werden im Heft 11/77 veröffentlicht.

BERICHTIGUNG

In der "WURZEL" 5/77 spielte uns der Druckfehlerteufel wieder einmal einen Streich. Der Verfasser des Artikels über die 4. Jenaer Informationstage heißt EBERHARD PIEHLER. Er ist Forschungsstudent im Bereich Analysis. Wir bitten Herrn Piehler und unsere Leser um Entschuldigung!

3. Anwendungen und Beispiele aus der Schaltalgebra

Nachdem wir in den Teilen 1 und 2 die Grundbegriffe der Schaltalgebra eingeführt haben, wollen wir nun ihre praktische Bedeutung betrachten. Es ist klar, daß dies nur ein kleiner Einblick sein kann - tatsächliche Probleme aus der Praxis sind wesentlich komplizierter.

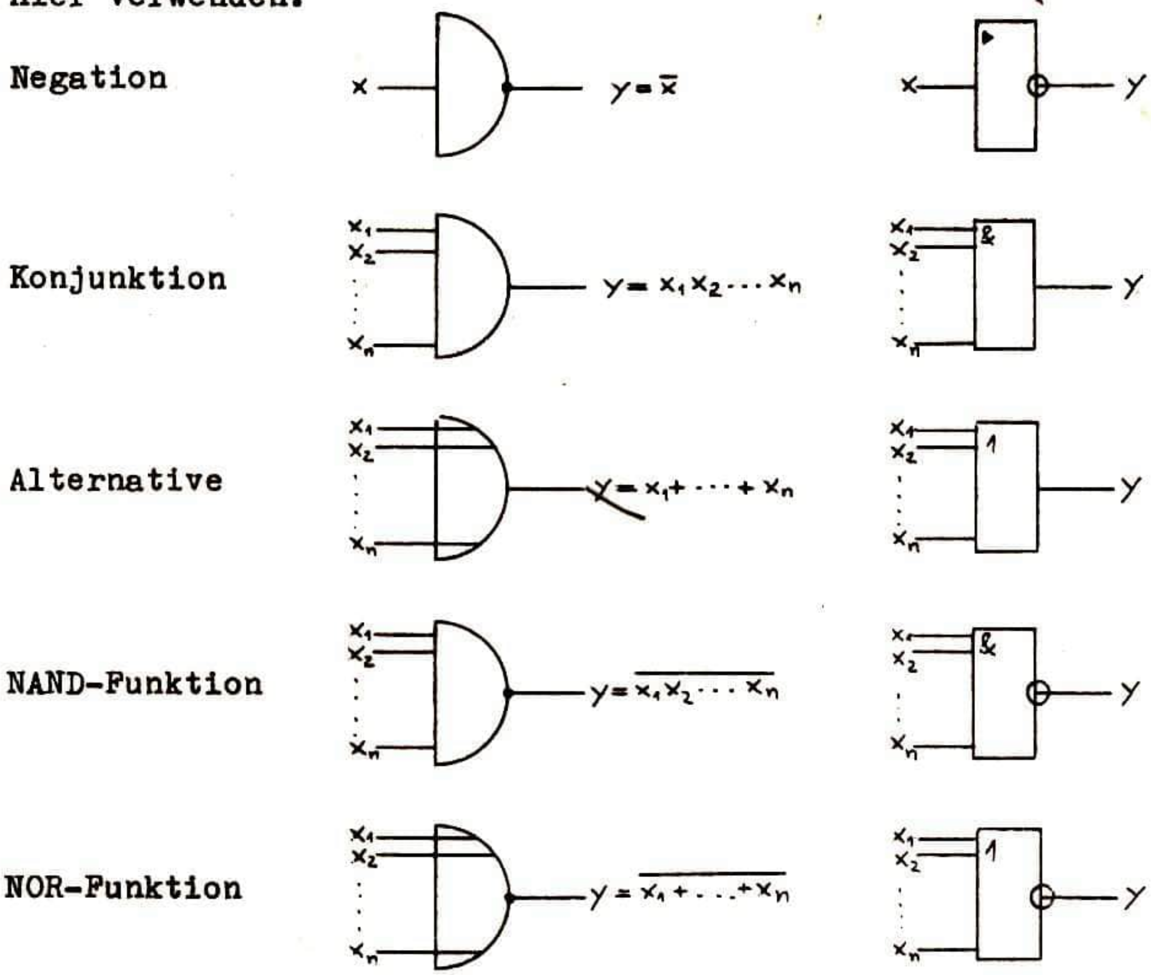
1. Technische Realisierung von Schaltfunktionen

Wir untersuchen zunächst eine Reihenschaltung zweier Schalter. Den leitenden Zustand bezeichnen wir mit "Ein", den nichtleitenden mit "Aus". In eine Tabelle tragen wir nun die Abhängigkeit des Zustandes der ganzen Schaltung von den Zuständen der einzelnen Schalter ein:

a	b	Gesamtschaltung
Aus	Aus	Aus
Aus	Ein	Aus
Ein	Aus	Aus
Ein	Ein	Ein

Es ist ersichtlich, daß die erhaltene Tabelle der Wertetabelle der Konjunktion gleicht, d. h. die Schaltung realisiert die Konjunktion. Entsprechend könnten wir dies auch mit parallelen Schaltern durchführen; in diesem Fall erhalten wir die Wertetabelle der Alternative. Die Negation läßt sich realisieren, indem zwischen Ein- und Ausschaltern unterschieden wird. Mit Hilfe von Relais ist es möglich, mehrere Stromkreise zu koppeln und so umfangreiche Schaltungen aufzubauen.
Tatsächlich realisiert werden die Schaltfunktionen in der Technik aber auf eine andere Weise. Man baut mit Hilfe von Halbleiterbauelementen (heute meist integrierte Schaltkreise) Funktionseinheiten auf, die jeweils eine Funktion verwirklichen. An jedem Eingang bzw. Ausgang sind jeweils zwei Spannungszustände möglich. Dem einen Spannungswert ordnet man willkürlich den Wert 0 und dem anderen den Wert 1 zu (in der Technik auch oft mit 0 und L bezeichnet).
Im folgenden sind für fünf Funktionen die Schaltzeichen darge-

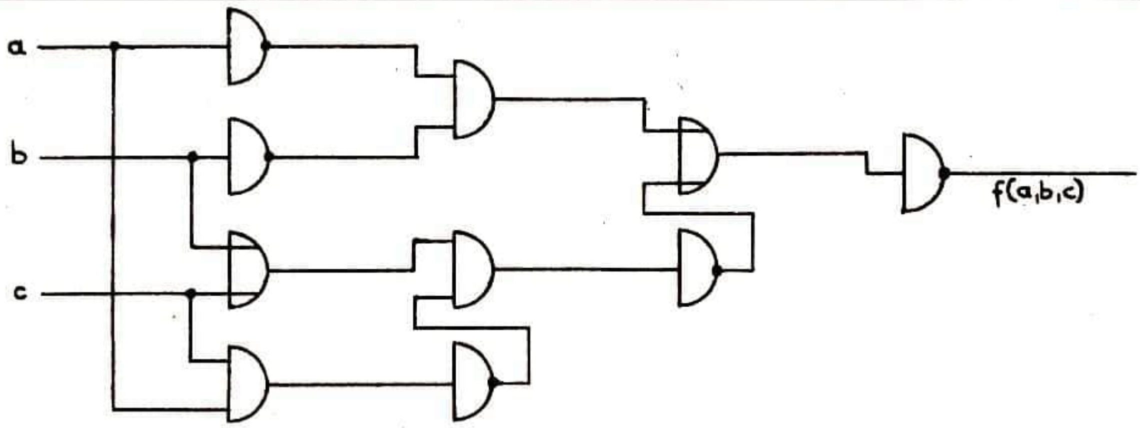
stellt. Es ist zu beachten, daß seit Anfang 1977 für die technische Literatur neue Schaltzeichen gültig sind, die rechts angegebenen wurden (siehe dazu /1/). Da es uns jedoch nicht auf technische Einzelheiten, sondern nur auf die Grundprinzipien ankommt, außerdem in der vorliegenden weiterführenden Literatur die alten Schaltzeichen benutzt wurden, werden wir diese auch hier verwenden.



Aus ökonomischen Gründen ist es günstig, möglichst viele Bausteine der gleichen Art herzustellen. Im Abschnitt 2.4. hatten wir gesehen, daß sich alle Funktionen mit Hilfe von NAND- bzw. NOR-Funktionen darstellen lassen. Nun können wir verstehen, welche Bedeutung in der Praxis dies hat. Es ist möglich, nur NAND- oder NOR-Bausteine herzustellen und so den Preis in Grenzen zu halten. In Analogie zum Begriff des vollständigen Systems von Operationen spricht man hier von einem vollständigen Baukasten.

2. Vereinfachung von Schaltungen

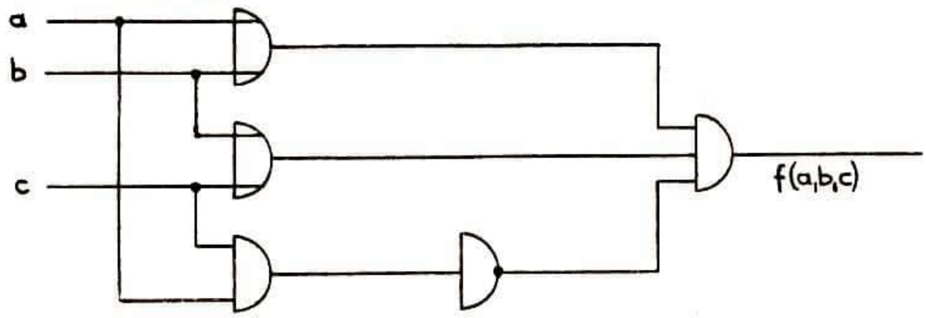
Gegeben sei folgende Schaltung:



Gefordert ist, sie zu vereinfachen. Dazu schreiben wir die Funktion in Termdarstellung auf und versuchen dann, den Term mit Hilfe der Umformungsregeln der Booleschen Algebra (die auch für die Schaltalgebra gelten, da diese ja eine Boolesche Algebra ist) zu vereinfachen.

$$f(a,b,c) = \overline{\bar{a}\bar{b} + \overline{(b+c)\,\overline{ac}}}$$
$$= \overline{\overline{\bar{a}\bar{b}}}\;\overline{\overline{(b+c)\overline{ac}}} \qquad \text{(de Morgansche Regel)}$$
$$= (\bar{\bar{a}}+\bar{\bar{b}})\,\overline{\overline{(b+c)\overline{ac}}} \qquad \text{(de Morgansche Regel)}$$
$$= (a+b)(b+c)\overline{ac} \qquad \text{(Idempotenzgesetz)}$$

Wir erhalten somit folgende Schaltung, die wesentlich einfacher als die Ausgangsschaltung ist:



Vereinfachungen auf diese Art sind natürlich nicht systematisch. Es gibt jedoch in der Schaltalgebra eine umfangreiche Theorie der Minimierung, mit deren Methoden minimale Formen von Schaltungen konsequent berechnet werden können. Außerdem müssen natürlich einige technische Regeln beachtet werden, die sich aus der endlichen Schaltzeit der Bausteine ergeben.

3. Sequentielle Schaltungen

Bisher hatten wir nur sogenannte kombinatorische Schaltungen besprochen, deren Zustand lediglich vom momentanen Wert der Eingangsgrößen abhängt. Noch größere Bedeutung besitzen aber Schaltungen, deren Verhalten zeitabhängig ist.

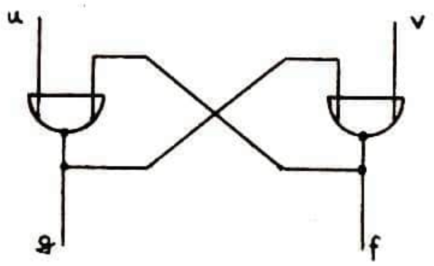
Definition 10: Schaltungen, deren Verhalten von den Verzögerungseigenschaften (z. B. endlichen Schaltzeiten) der Bausteine abhängig ist, heißen sequentielle Schaltungen.

Man sagt auch, der Schaltzustand hängt von der Vorgeschichte der Schaltung wesentlich ab.
Es werden drei Arten sequentieller Schaltungen unterschieden:

Definition 11: Ein sequentielles Glied erster Art ist eine Schaltung, deren Ausgangsgröße von dem momentanen und endlich vielen vorhergehenden Zuständen der Eingangsgrößen abhängt. Sequentielle Glieder zweiter Art sind Schaltungen, deren sämtliche Eingangsgrößen von den vorhergehenden Ausgangsgrößen abhängen.

Sequentielle Glieder dritter Art sind durch Vereinigung des Schaltverhaltens von Gliedern erster und zweiter Art gekennzeichnet.
Die sequentiellen Glieder dritter Art werden mit gewissen Einschränkungen auch als endliche Automaten bezeichnet.
Ein sequentielles Glied dritter Art ist z. B. der Flip-Flop, der mit NAND- oder NOR-Gliedern realisiert wird:

	u	0	0	1
	v	0	1	0
f	g	f'g'	f'g'	f'g'
0	1	0 1	0 1	1 0
1	0	1 0	0 1	1 0



(f,g) ist der innere Zustand des Flip-Flops in dem Moment, in dem die Eingangsbelegung (u,v) angelegt wird. (f',g') ist der innere Zustand, der sich daraufhin einstellt. Die Eingangsbelegung (1,1) sowie die inneren Belegungen (0,0) und (1,1) sind verboten, da sie zu Wettlauferscheinungen führen, so daß der sich einstellende innere Zustand zufällig wird.
Wird an den Eingang u eine Folge von abwechselnd Nullen und Einsen und an den Eingang v das Negat dieser Folge angelegt, so erscheint am Ausgang f wieder eine Folge von Nullen und Einsen, allerdings mit der halben Frequenz (Man überprüfe dies anhand

der Wertetabelle.). Der Flip-Flop läßt sich also als Frequenzteiler 2:1 verwenden. Da mit g gleichzeitig das Negat von f zur Verfügung steht, lassen sich leicht mehrere Teilerstufen hintereinanderschalten.
Die Grundschaltung des Flip-Flop besitzt grundlegende Bedeutung in der binären Schaltungstechnik. Auf ihr bauen viele andere sequentielle Schaltungen auf.

Damit schließen wir unsere Einführung in die Schaltalgebra. Für Leser, die weiter in die Theorie eindringen möchten, werden einige weiterführenden Bücher angegeben.

/1/ Thomas, J.: Neue Symbole zur Darstellung logischer binärer Elemente, radio fernsehen elektronik 25 (1976) H. 18, S. 595

/2/ Gluschkow, V. M.: Einführung in die technische Kybernetik, Band 1, Berlin 1968

/3/ Metz, J.; Merbeth, G.: Schaltalgebra, Leipzig 1970

/4/ Peschel, M.: Moderne Anwendungen algebraischer Methoden, Berlin 1967

/5/ Vladimirov, D. A.: Boolesche Algebren, Berlin 1972

/6/ Whitesitt, J. E.: Boolesche Algebren und ihre Anwendungen, Braunschweig 1973

Wolfgang Dick
Student an der
ABF »Walter Ulbricht« in Halle

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Jörg Vogel
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: K. Bartholmé, R. Jeske, D. Meinhardt
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

11

77

WURZEL

zeitschrift für mathematik an

ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

11. Jahrgang

Index 33 873

Preis: 0,20 M

Geschlossene Summation

Oftmals ward sie berichtet, die erfreuliche Geschichte vom kleinen Gauß, der die - vom Lehrer anbefohlene - Zusammenzählung der ersten hundert Zahlen so löste:

(1) $100+(1+99)+(2+98)+(3+97)+\ldots+(49+51)+50 = 5050$

und damit nicht nur den frappanten Nutzen einer neuen (An)ordnung (eigentlich rühren die meisten Ideen nur von einer ungewöhnlichen neuen Anordnung von bekanntem Einzelnen her), sondern auch im Speziellen sofort das Umfassende, hier die formelmäßige Summation allgemein der n ersten Zahlen, ins Auge rückte:

(2) $1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}\, n\, (n+1)$;

aus den Pünktchen wird eine geschlossene Formel, in Zeichen geschrieben:

(3) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\, n\, (n+1)$.

Was geschieht, wenn wir statt des speziellen Summanden k irgendeine Funktion f(k) vor uns haben:

(4) $\sum_{k=1}^{n} f(k) = F(n)$?

Wann können wir einen ähnlich geschlossenen Ausdruck (wie im obigen Falle $\frac{1}{2}\, n\, (n+1)$) hier finden? (Denkbar wäre es, daß ein spezieller Summenwert, etwa $\sum_{k=1}^{2000} f(k)$, enorm leicht zu finden wäre; dies ist mir aber bei Summation noch nicht begegnet, wohl aber bei der "infinitesimalen Summation", der Integration, z. B. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.) Die Antwort lautet, grob gesagt: Meistens nicht! Geometrische und arithmetische Reihen bilden rühmliche Ausnahmen. Letzteres besagt, daß "geschlossene Summierbarkeit" auftritt, falls f ein Polynom ist. Aber sonst? Läßt sich denn wenigstens eine einfachere Beziehung zwischen f und F als die in (4) finden? Jawohl, das geht. Es ist doch

(5) $\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = F(n-1)$ und

(6) $\sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Daraus folgt

(7) $F(n-1) + f(n) = F(n)$.

Eine solche Beziehung nennt man eine Funktionalgleichung (für F bei gegebenem f). (Durch (7) ist F bis auf eine Konstante bestimmt).

Wir setzen nun f als gebrochen rational voraus,

(8) $f(k) = \frac{P(k)}{Q(k)}$, P, Q Polynome.

(Wann) gibt es da ein (geschlossen angebbares) F? Wieder lautet die Antwort: Im allgemeinen nicht. Aber tiefliegendere Überlegungen, die wir hier nicht erörtern können, zeigen zumindest eines: Wenn es ein solches F gibt, dann ist es wieder gebrochen rational; wir bleiben vollkommen in unserem Bereich (ganz wie die Summenformeln der geometrischen und arithmetischen Reihen im Strukturbereich ihrer jeweiligen Summanden bleiben; im arithmetischen Falle steigt der Polynomgrad um 1).

Wäre f unecht gebrochen, so könnten wir f nach Partialdivision als die Summe eines Polynoms und einer echt gebrochen rationalen Funktion darstellen. Das Polynom können wir geschlossen summieren, bliebe nur der Rest. Also setzen wir jetzt f gleich als echt gebrochen rational voraus. Dann muß aber F bis auf eine Konstante, die aus $f(1) = F(1)$ zu bestimmen ist und im weiteren ohne Bedeutung bleibt, ebenfalls echt gebrochen rational sein, was leicht aus (7) zu ersehen ist.

Noch spezieller setzen wir

(9) $f(k) = \frac{ak+b}{ck^2+dk+e}$

Zähler und Nenner teilerfremd, voraus. F setzen wir an zu

(10) $F(n) = \frac{A(n)}{B(n)}$

und zwar A, B teilerfremd, d. h. "ausgekürzt". Nach (7) wird

(11) $f(n) = \frac{an+b}{cn^2+dn+e} = F(n) - F(n-1) = \frac{A(n)B(n-1)-A(n-1)B(n)}{B(n-1)B(n)}$

Kann der Bruch rechts kürzbar sein? Nehmen wir an, daß B(n) einen Teiler enthalte, der auch den Zähler teilt. Dann muß er also auch A(n)B(n-1) teilen; da aber B(n) und B(n-1) von gleichem Grade sind, müßte er in $A(n)$ allein aufgehen, $A(n)$ und $B(n)$ waren aber als teilerfremd vorausgesetzt. (Analoges gilt für $B(n-1)$ statt $B(n)$.) Also ist unser Bruch, so wie er steht, "ausgekürzt".

Was bedeutet dies aber? Nun, daß wir bei beiden Brüchen in (11) direkt die Zähler und Nenner für sich gleichsetzen können:

(12) $\quad cn^2 + dn + e = B(n-1)\,B(n)$,

(13) $\quad an + b = A(n)B(n-1) - A(n-1)B(n)$.

Aus (12) folgt sofort, daß $c=0$ unmöglich ist, falls $d\neq 0$ (für $c=d=0$ wird f Polynom). Denn der Grad des Nenners von f muß ja das Doppelte des Grades von B sein. Formen $(rk + s)^{-1}$, d. h. reziprok-lineare Summanden sind also niemals geschlossen summierbar. Dies ist in gewisser Weise ein Seitenstück zur Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}$.

Jedenfalls muß B den Grad Eins haben. Welchen Grad hat nun A? Wenn $a\neq 0$, dann muß die rechte Seiten von (13) den Grad Eins ~~haben~~. Vorsicht! Bei der dort vorgenommenen Subtraktion sinkt der Grad um Eins! Wir müssen also Grad A auch zu Eins nehmen; Grad $A(n)B(n-1)$ = Grad $A(n-1)B(n) = 2$, aber eben Grad$(A(n)B(n-1) - A(n-1)B(n)) = 1$.

Wenn aber A und B beide echt linear sind, dann ist F nicht echt gebrochen rational. Wir könnten eine Konstante abspalten. Der neue Grad von A (für ein neues, echt gebrochen rationales F) wäre dann aber Null, wobei (7) erfüllt bliebe. Dann war also die Voraussetzung $a\neq 0$ falsch, d. h. $a=0$ ist notwendig.

Zwischenresultat: Eine geschlossen summierbare echt gebrochen rationale Funktion mit einem Nennerpolynom höchsten zweiten Grades muß von der Gestalt

(14) $\quad f(k) = \dfrac{b}{ck^2+dk+e}$, $c\neq 0$, $d\neq 0$, $b\neq 0$

sein.

Dann können wir aber b in (14) auch als multiplikative Konstante von F betrachten und in (7) durch b dividieren und kommen zu der neuen Frage: Wann ist f mit

(15) $\quad f(k) = (ck^2 + dk + e)^{-1}$

geschlossen summierbar? Gewiß ist dann $A = \pm 1$, denn sonst würde sich ja ein Zählerfaktor $b \neq 1$ ergeben. Setzen wir $A = -1$ und kehren zu (12) und (13) zurück! Dann erhalten wir

(16) $\quad cn^2 + dn + e = B(n-1)\,B(n)$,

(17) $\quad 1 = B(n) - B(n-1)$.

Setzen wir $B(n) = un + v$, so wird aus (17)

(18) $\quad 1 = un + v - (u(n-1) + v) = u$, d. h.

(19) $\quad B(n) = n + v$.

Für (16) bedeutet dies

(20) $\quad cn^2+dn+e = (n+v)(n-1+v) = n^2+(2v-1)n+v(v-1)$.

Sofort folgt $c=1$. Weiter wird

(21) $\quad d = 2v-1$ und

(22) $\quad e = v(v-1)$.

Lösen wir (21) nach v auf, so erhalten wir

(23) $\quad v = \frac{1}{2}(d+1)$.

Dies in (22) eingesetzt gibt

(24) $\quad e = \frac{1}{4}(d+1)(d-1)$ oder

(25) $\quad 4e+1 = d^2$.

Damit haben wir folgendes Resultat:
Eine echt gebrochen rationale Funktion mit einem Nenner von höchstens zweiten Grades ist genau dann geschlossen summierbar, wenn sie bis auf eine multiplikative Konstante von der Form $(n^2+dn+e)^{-1}$ ist, wobei $4e+1=d^2$.

(Dazu ein Beispiel: $f(k) = \frac{1}{k^2+3k+2}$ $(d=3, e=2)$. Die Bedingung $4e+1=d^2$ ist offensichtlich erfüllt. Wir bekommen $F(n) = -\frac{1}{n+v}$ mit $v = \frac{1}{2}(d+1) = 2$ (nach (19) und (23); $A=-1$). Wir fügen eine additive Konstante C hinzu: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = C - \frac{1}{n+2}$. Aus $n=1$ folgt $\frac{1}{6} = C - \frac{1}{3}$, d. h. $C = \frac{1}{2}$. Der Leser prüfe bitte die Richtigkeit von $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$ durch spezielle Wahl von n (n=2,3, usw.).

Die Schwierigkeit und die Gefahr bei solchen im einzelnen vollkommen elementaren Überlegungen ist, daß man sich zwischen den vielen Beziehungen "verlaufen" kann und daß im Zuge der ständigen Vereinfachungen es einem passieren kann, daß man plötzlich überhaupt "nichts Ordentliches" mehr hat. Wachsamkeit einerseits und Konsequenz andererseits sind aber ohnehin Attribute logischen Denkens. Dem Leser werde empfohlen, sich diesbezüglich dem Fall von f mit einem Nenner dritten Grades zuzuwenden.

Reizvoll bleibt die Frage nach allgemeinen Kriterien für geschlossene Summierbarkeit. Vermutlich würde dies ein Seitenstück zur geschlossenen Integrierbarkeit bilden, die man ja in den Integraltafeln (unbestimmte Integrale) verfolgen kann. Ob man analog dazu auch Tafeln für geschlossene Summierbarkeit aufstellen soll (gewisse Zusammenhänge könnten da schon sichtbar werden), ist eine Frage des Nutzens, der Verwendbarkeit. So "angewandt" geschlossene Ausdrücke nämlich auch erscheinen mögen, sie gehören dennoch eigentlich zur "reinen" Mathematik. Nun ist es durchaus nicht so, daß reine Mathematik unnütz für die Praxis wäre, etwa für die Arbeit mit elektronischen Rechnern. Stets sind von ihr Methoden ausgegangen, die sich dort als fruchtbar erwiesen. Allerdings kann man im Augenblick und auch für die nächsten Jahre meist nicht sagen, wann welche (und ob überhaupt) Untersuchungen in reiner Mathematik (z. B. Zahlentheorie) sich "auszahlen". Ein "selbstprogrammierender" angewandter Mathematiker sagte mir einmal, geschlossene Ausdrücke erlaubten eine Senkung des Rechenfehlers, und das sei "nicht unwichtig". Also kann man von vornherein doch nicht solcherlei Tafeln als unnütz abtun.

Aber auch sonst verbietet nichts die Beschäftigung mit Fragen dieser Art. Man vergesse nicht, daß Mathematik auch Kultur ist. Und kulturelles Wohlbefinden scheint mir zumindest ebenso wichtig wie wirtschaftliches.

K. Wohlrabe
Berlin

Preisaufgaben 11/77

J 55 ② (Aufgabenvorschlag von Müller, Straußberg)

Gegeben sind ein Parallelogramm mit den Seitenlängen $\sqrt{19}$ und $\frac{\sqrt{2}}{6}$ und einem Winkel von 45° zwischen den Seiten und ein Quadrat der Seitenlänge $\frac{3\sqrt{2}}{5}$. Man untersuche, welcher der Flächeninhalte beider Figuren größer ist!

J 56 ② (Aufgabenvorschlag von Müller, Straußberg)

Man löse das Gleichungssystem

$$7^y \cdot \log_5 x = -2$$
$$4 \cdot 7^y \cdot \log_5 x = 2 .$$

J 57 ① Man finde alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x + y + z = 2$$
$$2xy - z^2 = 4$$

J 58 ① Man löse die Gleichung

$$2 \operatorname{ctg} 2x - 3 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$$

J 59 ① Man löse die Ungleichung

$$\lg_{1/3} \left[\lg_4(\sin x + 2\sqrt{2} \cos x)\right] > 0$$

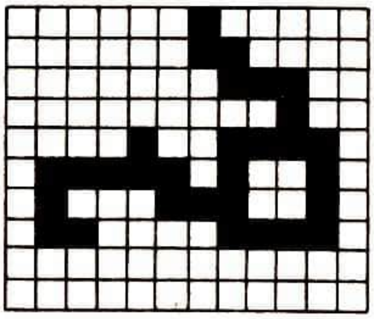
J 60 ② Найти коэффициент при x^8 в разложении

$$(I + x^2 - x^3)^9$$

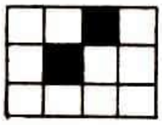
Einsendeschluß: 20.12.1977

Korridore und Labyrinthe im Banachzentrum von Warschau (II)

Ähnliche Probleme wie bei der Betrachtung der Anzahl der Korridore ergeben sich bei Labyrinthen.



Ein Labyrinth ist dabei ein geschlossenes geschwärztes Gebilde, in dem ebenfalls keine Ecken der Art



vorkommen. Mit $l_{p,q}$ wird die Anzahl der Labyrinthe im Rechteck mit den Seitenlängen $a = p.\varepsilon$ und $b = q.\varepsilon$ bezeichnet. Es gilt zum Beispiel:

$l_{1,1}=1$, $l_{2,1}=l_{1,2}=3$, $l_{2,2}=13$, $l_{2,3}=l_{3,2}=39,\ldots,l_{5,5}=2\,301\,878$, ...

Offenbar hat man mit q^{pq} sofort eine obere Abschätzung, da es genau 2^{pq} Möglichkeiten gibt, im Rechteck mit den Seiten $a = \varepsilon.p$, $b = \varepsilon.q$ auf beliebige Art zu schwärzen.
Dabei schwärzt man auch nichtzusammenhänge Gebilde, erhält aber unter allen möglichen Schwärzungen auch alle Labyrinthe.
Betrachtet man ein Gebilde der Art (Abb. 1), so erhält man durch die Betrachtung der möglichen Querverbindungen zwischen den geschwärzten Streifen (Abb. 2) die untere Abschätzung

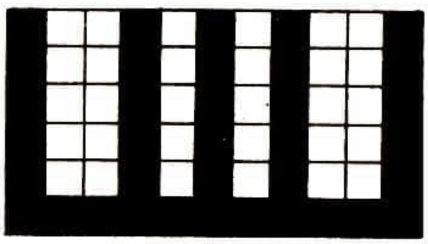


Abb. 1

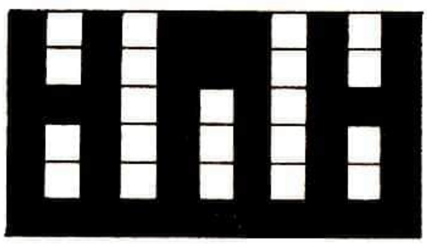


Abb. 2

$(2^q)^{[1/2]p} = 2^{[1/2]pq}$ für $l_{p,q}$, also insgesamt

(8) $$2^{\frac{1}{2}pq} \le l_{p,q} \le 2^{pq} .$$

Durch $l_{p,q} = 2^{\Theta(p,q) \cdot p \cdot q}$ wird nun eine Funktion Θ definiert, für die gemäß (8) gilt:

(9) $$\frac{1}{2} \le \Theta(p,q) \le 1 .$$

Der ungarische Mathematiker Paul Erdös bewies

(10) $$\frac{3}{4} \le \Theta(p,q) \le 1 .$$

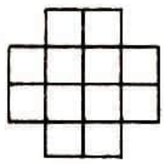
Auch hier tauchen die Fragen auf:

1. Existiert der Limes $\lim\limits_{p \to \infty} \Theta_{p,q} = \Theta_q$ für fixiertes q?
2. Existiert der Limes $\lim\limits_{\substack{p \to \infty \\ q \to \infty}} \Theta_{p,q} = \Theta$?

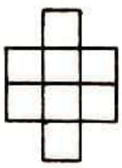
Unter der Annahme der Existenz der Limites bewies A.A. Panow, daß

(11) $$2^{\Theta} \le 1{,}975.$$

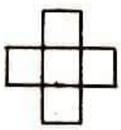
Er kam zu dieser Abschätzung über die Einteilung der quadratierten Fläche in Gebilde der Art



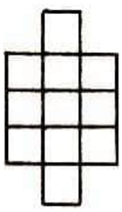
Für große p und q kann man Ungenauigkeiten, die sich daraus ergeben, daß Gefüge aus derartigen Gebilden nicht immer ein vollständiges Rechteck ergeben, vernachlässigen. Der Rostocker Mathematiker W. Harnau erhielt für andere Einteilungen der Fläche folgende Verbesserungen der Abschätzung von A. A. Panow:



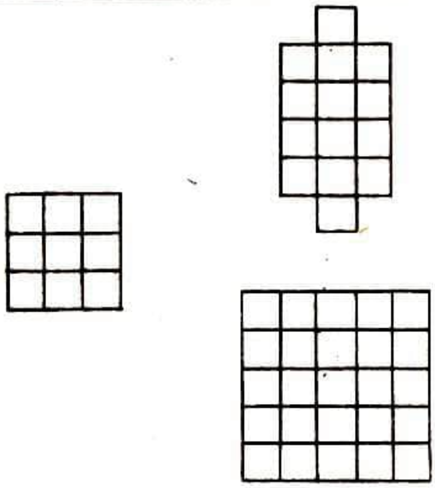
entspricht $\sqrt[8]{239} \approx 1{,}9829$,



entspricht $\sqrt[5]{31} \approx 1{,}9874$,



entspricht $\sqrt[11]{1843} \approx 1{,}98092$,



entspricht $\sqrt[14]{14215} \approx 1,97982,$

entspricht $\sqrt[9]{496} \approx 1,993,$

entspricht $\sqrt[25]{23052.4^5} \approx 1,96753.$

Derartige Abschätzungen der Anzahl der Labyrinthe und Korridore spielen in vielen technischen Problemen eine Rolle, nicht zuletzt bei der sich in jüngster Zeit rasch entwickelnden automatischen Erkennung oder Klassifizierung von technischen Zeichen, Mikroskopaufnahmen u. a. m.

Giesela Klette
Forschungsbereich

Lösungen

$\boxed{\text{Aufgabe J 31}}$ (nach Ekkhard Liebscher, Ilmenau)

Setze $\qquad p = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a \ldots}}}$ (1)

und $\qquad p = a + \cfrac{a}{a + \cfrac{a}{a + \cfrac{a}{\ldots}}}$ (2)

Für (1) gilt $\qquad p = \sqrt{a+p}$

$\longrightarrow \qquad p^2 - p - a = 0$ (3)

Für (2) gilt $\qquad p = a + \frac{a}{p}$

$\longrightarrow \qquad p^2 - ap - a = 0$ (4)

Da für die Ausgangsgleichung (3) und (4) gleichzeitig gelten müssen, folgt durch Subtraktion

$$p(1-a) = 0 \; . \qquad (5)$$

Aus (5) ergeben sich 2 Fälle:

1. Fall $a = 1$

Aus (3) und (4) ergibt sich $p = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

Die Lösung ist also möglich.

2. Fall $p = 0$

Hieraus folgt direkt $a=0$. **Das steht im Widerspruch zu (2).** $a=1$ **ist also einzige Lösung der Aufgabe.**

Aufgabe J 32 **(nach Reiner Lindemann)**

Sicher gilt:

(1) $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3y^2(x+z)+3z^2(x+y)+6xyz$

Wegen $x+y+z=a$ **und** $x^3+y^3+z^3=a^3$ **folgt aus (1):**

$a^3 = a^3+3x^2(a-x)+3y^2(a-y)+3z^2(a-z)+6xyz \quad |-a^3$

durch Umordnen folgt:

(2) $0 = 3a(x^2+y^2+z^2) - 3(x^3+y^3+z^3) + 6xyz$

Wegen $x^2+y^2+z^2=a^2$ **und** $x^3+y^3+z^3=a^3$ **folgt aus (2)**

$0 = 3a^3 - 3a^3 + 6xyz$ **und weiter**

(3) $0 = xyz$

O. B. d. A. sei $x=0$. **Dann gilt n. V.**

$y + z = a$ **oder** $y^2+2yz+z^2 = a^2$ (4)

und $y^2+z^2 = a^2$ (5)

Aus (4) und (5) folgt $yz = 0$. **Daraus folgt o. B. d. A.** $y=0$ **und** $z=a$. **Durch Analogieschluß erhält man als Lsg. die Tripel:**

$(0;0;a)$, $(0;a;0)$, $(a;0;0)$.

Aufgabe J 33 **(nach Kirsten Helbig, Frankfurt)**

(*) $\sin^3x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$

1. Fall:

(1) $\sin 2x + \sin 3x = 0$

$$\sin^3 2x + \sin^3 3x = 0$$

Aus (*) folgt

$\sin^3 x = \sin^3 x$, d. h. alle $x \in P$, die (1) erfüllen, erfüllen auch (*).

(1) ist äquivalent mit

$$-\sin 2x = \sin 3x$$

$$\longleftrightarrow \quad 3x = -2x + 2k\pi \longleftrightarrow x = \frac{2}{5} k\pi \qquad (2)$$

oder

$$3x = \pi + 2x + 2k\pi \longleftrightarrow x = (2k+1)\pi \qquad (3)$$

2. Fall:

$$\sin 2x + \sin 3x \neq 0 \qquad (4)$$

Dann folgt aus (*):

$$\sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3 - \sin^3 x$$

$$\longleftrightarrow (\sin 2x + \sin 3x)(\sin^2 2x - \sin 2x \sin 3x + \sin^2 3x) =$$

$$= (\sin x + \sin 2x + \sin 3x - \sin x)\left[(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^2 + \right.$$
$$\left. + (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)\sin x + \sin^2 x\right]$$

$$\longleftrightarrow (\sin^2 2x - \sin 2x \sin 3x + \sin^2 3x) = \sin^2 x + \sin^2 2x +$$
$$+ \sin^2 3x + 2\sin x \sin 2x + 2\sin x \sin 3x + 2\sin 2x \sin 3x$$
$$+ \sin^2 x + \sin 2x \sin x + \sin 3x \sin x + \sin^2 x$$

$$\longleftrightarrow \quad \sin x \sin 2x + \sin 2x \sin 3x + \sin x \sin 3x + \sin^2 x = 0 \quad (5)$$

Fall 2.1:

$$\sin x = 0 \qquad x = k\pi \qquad (6)$$

Fall 2.2:

$$\sin x \neq 0$$

Dann folgt aus (5) durch Division durch $\sin^2 x$ und vorherige Substitution von

$$\sin 2x = 2\sin x \cos$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$2\cos x + 6\cos x - 8\cos x \sin^2 x + 3 - 4\sin^2 x + 1 = 0$$

$$8\cos x - 8\cos x(1-\cos^2 x) + 4 - 4(1-\cos^2 x) = 0$$

$$2\cos^3 x + \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x\,(2\cos x + 1) = 0$$

$$\longleftrightarrow \cos^2 x = 0 \quad \longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (7)$$

oder

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \longleftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \qquad (8)$$

$$x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \qquad (9)$$

Eine Zusammenfassung ergibt folgende Lösungen:

$$x_1 = k\,\frac{\pi}{2}$$

$$x_2 = \frac{2}{5}\,k\pi$$

$$x_3 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$x_4 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

Aufgabe J 34 (nach Kirsten Helbig)

Beweis über vollständige Induktion

Anfang: $h=0$

z.z. $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1+\cot^2 x - \cot^2 x}{\cot x} =$$

$$= \cot x - 2\cot 2x \quad (\text{wegen } \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x})$$

Voraus.: für alle $k > 0$ gelte:

$$\tan x = \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k} - 2\cot 2x\,.$$

Behauptung:

$$\tan x + \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{x}{2^{k+1}} - 2\cot 2x$$

Beweis:

nach Voraus. gilt:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{2^i}\tan\frac{x}{2^i} = \frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k} - 2\cot 2x + \frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^{k+1}}\,,$$

haben also zu zeigen:

$$\frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k} - 2\cot 2x + \frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{x}{2^{k+1}} - 2\cot 2x \qquad (*)$$

substituieren: $\frac{x}{2^{k+1}} = \alpha$

(*) geht äquivalent über in

$$2\cot 2\alpha + \tan\alpha = \cot\alpha$$

$$\longleftrightarrow \quad \frac{\cot^2\alpha - 1 + 1}{\cot\alpha} = \cot\alpha \quad \left(\text{wegen } \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}\right)$$

$$\longleftrightarrow \quad \cot\alpha = \cot\alpha$$

d. h., wir haben (*) äquivalent auf wahre Aussage zurückgeführt.

<u>Schluß:</u> Für alle $x \in P$; $x \neq k\cdot\frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\tan\frac{x}{2^i} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - 2\cot 2x \qquad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe J 35 (nach Christel Mitzenheim u. a.)

Voraussetzung: $a > b > 0$ und $m > n$

$$\longrightarrow \quad a^{m-n} > b^{m-n} \qquad \Big|\cdot 2a^n b^n$$

$$2a^m b^n > 2b^m a^n \qquad \Big| - a^m b^n \; ; \; -b^m a^n$$

$$a^m b^n - a^n b^m > a^n b^m - a^m b^n$$

$$a^{m+n} - b^{m+n} + a^m b^n - a^n b^m > a^n b^m - a^m b^n + a^{m+n} - b^{m+n}$$

$$(a^m - b^m)(a^n + b^n) > (a^m + b^m)(a^n - b^n)$$

und wegen $a^m + b^m > 0$

$a^n + b^n > 0$

$$\longrightarrow \quad \frac{a^m - b^m}{a^m + b^m} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \qquad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe J 36 (nach Kirsten Helbig)

geg.:

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = 1 \qquad (1)$$

$$a \cos^2 y + b \sin^2 y = 1 \qquad (2)$$

$$a \tan x = b \tan y \qquad (3)$$

wegen (3) $\Longrightarrow x;y = \frac{\pi}{2} + k\pi$

<u>1. Fall:</u> $a = b$

$\Longrightarrow$ $a = b = 1$, so daß (1), (2) von allen $x,y \in P$ erfüllt werden

aus (3) $\longrightarrow \tan x = \tan y$

$\longrightarrow \underline{x = y + k\pi}$; y beliebig reell

<u>2. Fall:</u> $a \neq b$

Da aus $a=1$ wegen (1) $b=1$ folgen würde und umgekehrt, kann ich voraussetzen: $a,b \neq 1$

aus (1) folgt äquivalent:

$$a \sin^2 x + b\,(1-\sin^2 x) = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1-b}{a-b}$$

analog folgt aus (1)

$$\cos^2 x = \frac{1-a}{b-a}$$

$$\longrightarrow \tan^2 x = \frac{b-1}{1-a} \qquad (4)$$

aus (2) folgt äquivalent:

$$\sin^2 y = \frac{1-a}{b-a}$$

und

$$\cos^2 y = \frac{1-b}{a-b}$$

$$\longrightarrow \tan^2 y = \frac{1-a}{b-1} \qquad (5)$$

Aus (3) folgt äquivalent:

$$a^2 \tan^2 x = b^2 \tan^2 y$$

$$a^2 \frac{b-1}{1-a} = b^2 \frac{1-a}{b-1} \qquad \text{(wegen (4), (5))}$$

$$a^2 (b-1)^2 = b^2 (1-a)^2$$

$$a(b-1) = \pm b(1-a)$$

$$ab - a = \pm b \mp ab$$

$$2ab - a = b$$

$$a(2b-1) = b \qquad (6) \qquad \text{oder } -a = -b$$

(Widerspruch zu $a \neq b$)

wegen (6) folgt $b \neq \frac{1}{2}$ (für $b = \frac{1}{2}$ Widerspruch)

$$\longrightarrow a = \frac{b}{2b-1} \qquad (7)$$

aus (7) und (4) $\longrightarrow \tan^2 x = \dfrac{b-1}{1-\frac{b}{2b-1}} = 2b-1$

$$\tan x = \pm\sqrt{2b-1} \qquad \text{für } b > \frac{1}{2}$$

$$\underline{x_{1/2} = \operatorname{arc\,tan} \pm\sqrt{2b-1} + k\pi}$$

aus (5) folgt

$$\tan^2 y = \frac{1}{\tan^2 x} = \pm\sqrt{\frac{1}{2b-1}} \qquad \text{für } b > \frac{1}{2}$$

$$\underline{y_{1/2} = \operatorname{arc\,cot} \pm\sqrt{2b-1} + k\pi}$$

Ergebnis:

$x = y + k\pi$; $y \in P$, $k \in \Gamma$ für $a = b = 1$

$x_{1/2} = \operatorname{arc\,tan} \pm\sqrt{2b-1} + k\pi$

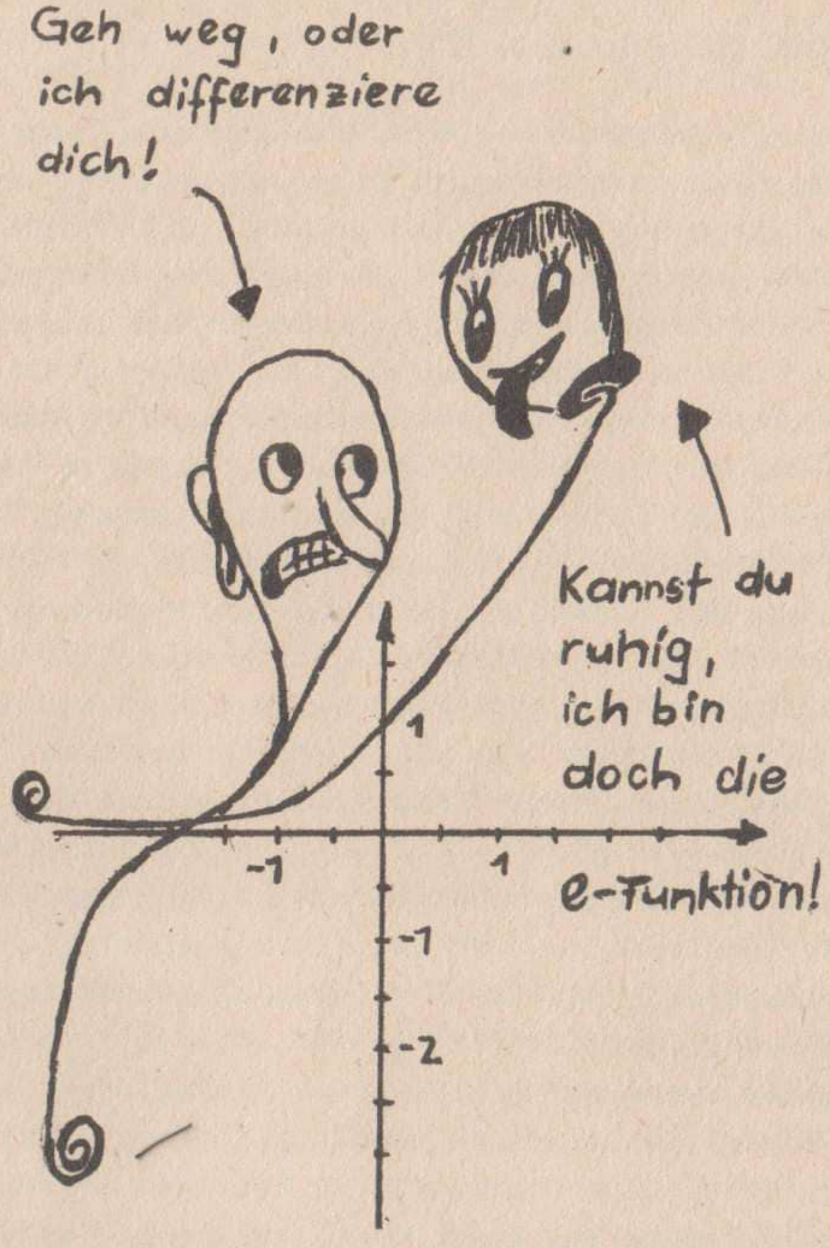
$y_{1/2} = \operatorname{arc\,cot} \pm\sqrt{2b-1} + k\pi$; für $a = \frac{b}{2b-1}$

$k \in \Gamma$; $b > \frac{1}{2}$

für sonstige a;b existieren keine Lösungen.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Jörg Vogel
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: K. Bartholmé, R. Jeske, D. Meinhardt, G. Blume
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Artikel-Nr. (EDV): 10932



12
77

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

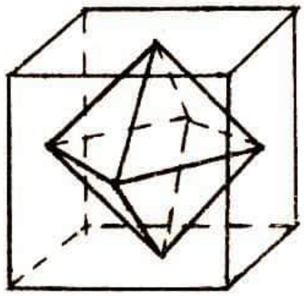
11. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Drehungen eines Würfels

Beim Spielwürfel sind die Zahlen Eins bis Sechs immer in ganz bestimmter Anordnungsweise aufgetragen. Die Summe gegenüberliegender Augenzahlen ist stets sieben, und schaut man von oben auf den eine Sechs zeigenden Würfel, so liegen die übrigen Zahlen im Uhrzeigersinn gesehen meist in der Reihenfolgen zwei - drei - fünf - vier. Offenbar kann man die Zahlen aber auch anders auf den Würfel anordnen. Wieviele Möglichkeiten gibt es? Jemand möchte zu jeder solchen Möglichkeit je einen Würfel herstellen, er würde dann lauter sich durch die Anordnung der Zahlen unterscheidende Würfel bekommen. Er überlegt hierfür so: "Für die Bezifferung der ersten Fläche habe ich sechs mögliche Zahlen, für die zweite Fläche bleiben dann fünf (das gibt insgesamt schon 6.5 Möglichkeiten), für die dritte Fläche kann ich noch unter vier Zahlen wählen, für die vierte unter drei, für die fünfte unter zwei, und die sechste Fläche bekommt die übriggebliebene Zahl. Insgesamt gibt es 6.5.4.3.2.1 Möglichkeiten, ich kann also 720 verschiedene Würfel herstellen", und er baut auf Grund dieser Überlegung die Würfel. Am Schluß stellt er jedoch fest, daß sich eine großer Teil der Würfel in der Anordnung der Zahlen nicht unterscheidet!

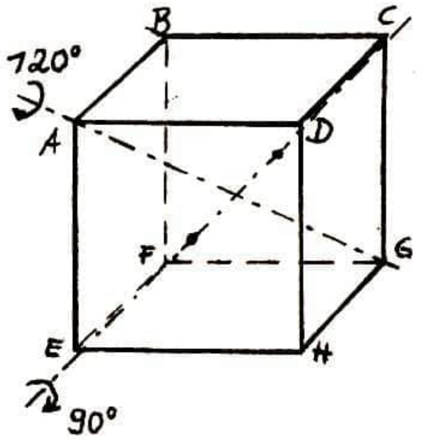
Um dieser Sache auf den Grund zu gehen, überlegen wir, wie man zwei Würfel auf gleiche Anordnung der Zahlen hin überprüft. Man bringt sie doch - wenigstens in Gedanken - zunächst ungeachtet der Bezifferung zur Deckung und versucht dann durch Bewegungen des einen Würfels eine Übereinstimmung der Augenzahlen herbeizuführen. Die Bewegungen, an die wir dabei denken, sind Drehungen, bei denen sich die Lage der einzelnen Flächen zwar ändert, der Würfel als Ganzes aber die alte Lage unverändert wieder einnimmt (z. B. 90°-Drehung um die Mittelsenkrechte einer Fläche). Es ist klar, daß man stets z. B. die beiden Einsen zur Deckung bringen kann. Bei den weiteren Bewegungen müssen dann die Fläche mit der Eins und demzufolge die ihr gegenüberliegende Fläche als Ganzes ungeändert bleiben, man kann also nur noch um die die beiden Flächenmittelpunkte verbindende Achse drehen, und zwar um 90°, 180° und 270°. Wenn so keine Übereinstimmung der Augenzahlen erreichbar ist, dann sind die Würfel sicher verschieden beziffert. Nun ist auch zu sehen, inwiefern sich unser Würfelfabrikant verrechnet hat: Er hat nicht berücksichtigt, daß sich viele der nach seiner Vorschrift hergestellten Würfel durch Bewegung zur Deckung bringen lassen. Die richtige Zahl der verschiedenen Anordnungen bekommt man erst, wenn man diese Bewegungen mit berücksichtigt. Man könnte so überlegen: Eine erste Fläche bekommt die Zahl Eins, für die gegenüberliegende Fläche gibt es dann fünf Möglichkeiten der Bezifferung, die sicher alle auf Anordnungen führen, die sich nicht durch Bewegungen ineinander überführen lassen. Für die übringen vier Flächen sind alle Bezifferungen auszusuchen, die sich nicht durch Drehung um die Mittelsenkrechte der Eins-Fläche ineinander überführen lassen. Das bedeutet, daß man eine der vier Flächen willkürlich mit einer der vier noch verfügbaren Zahlen besetzen kann, und daß alle möglichen Anordnungen der drei übringen Zahlen auf den drei restlichen Flächen - es gibt sechs Möglichkeiten hierfür - dann zu nicht ineinander überführbaren Anordnungen führen. Insgesamt stellen wir fest: Es gibt $5.6 = 30$ verschiedene Möglichkeiten, einen Würfel mit den sechs Augenzahlen zu besetzen. Übrigens, wenn die Summe gegenüberliegender Zahlen immer sieben sein soll, gibt es nur zwei Möglichkeiten, beide kann man auf den handelsüblichen Würfeln verwirklicht finden.

Bei einem mathematischen Schülerwettbewerb in der Schweiz wurde folgende Aufgabe gestellt (veröffentlicht in der Zeitschrift "Elemente der Mathematik", Januar 1968): "Die Seitenflächen eines regulären Oktaeders werden durch acht gegebene Farben gefärbt, wobei jede Fläche eine verschiedene Farbe erhalten muß. Wieviele nicht äquivalente Färbungen sind möglich? (Äquivalent bedeutet durch Rotation überführbar)". Diese Aufgabe kann man auch



so formulieren: Auf wieviel verschiedene Weisen kann man auf die acht Ecken eines Würfels acht Farben verteilen, wobei solche Färbungen nicht verschieden sind, die sich durch Drehung des Würfels ineinander überführen lassen? Denn die Flächenmittelpunkte eines Würfels bilden die Ecken eines regulären Oktaeders, und jede Bewegung, die den Würfel in sich überführt, führt auch das Oktaeder in sich über. Bei der Lösung dieser Aufgabe analog zu den obigen Überlegungen wird man die 120°-Drehungen um die Raumdiagonale des Würfels zu berücksichtigen haben, sie führen offenbar den Würfel in sich über und lassen dabei sogar zwei Ecken fest.

Wir wollen uns nun einen Überblick über sämtliche Bewegungen verschaffen, die einen Würfel als Ganzes in sich überführen. Zwei Sorten solcher Bewegungen wurden schon genannt:
1. Drehung um die Verbindungsachse der Mittelpunkte gegenüberliegender Flächen, Drehwinkel sind 90°, 180° und 270°,
2. Drehung um die Raumdiagonalen, Drehwinkel sind 120° und 240°.
Von der ersten Sorte gibt es pro Achse drei Drehungen und, da drei Achsen möglich sind, insgesamt neun Drehungen. Von der zweiten Sorte gibt es pro Raumdiagonale zwei, insgesamt acht Drehungen. Wenn man einen Würfel zuerst um eine Raumdiagonale und anschließend um eine Achse durch Flächenmittelpunkte dreht, so ergibt sich insgesamt eine Bewegung, bei der der Würfel als Ganzes wiederum fest geblieben ist. Wir führen diese "Zusammensetzung von Bewegungen" einmal an einem Beispiel an Hand der Figur durch. Die 120°-Drehung um die in der Figur angegebene



Achse wird durch folgende Tabelle beschrieben:

Punkt:	A	B	C	D	E	F	G	H
geht über in:	A	D	H	E	B	C	G	F

Und zur 90°-Drehung um die eingezeichnete Achse gehört die folgende Tabelle:

Punkt:	A	B	C	D	E	F	G	H
geht über in:	D	C	G	H	A	B	F	E

Um zu sehen, in welchen Punkt z. B. B bei der Zusammensetzung der beiden Drehungen übergeht, entnimmt man der ersten Tabelle: B geht über in D; der zweiten Tabelle entnimmt man, daß dann D bei der zweiten Drehung in H übergeht. Also geht bei der zusammengesetzten Bewegung B in H über. Insgesamt findet man für die Zusammensetzung folgende Tabelle:

Punkt:	A	B	C	D	E	F	G	H
geht über in:	D	H	E	A	C	G	F	B

Bei der Veranschaulichung dieser Bewegung findet man, daß es sich um eine 180°-Drehung handelt, deren Achse die Verbindung der Mittelpunkte der Kanten AD und FG ist. Dies ist eine dritte Sorte von Bewegungen, die den Würfel in sich überführen. Insgesamt haben wir jetzt

- 8 Drehungen um die Raumdiagonalen
- 9 Drehungen um die Verbindungsgeraden von Mitten gegenüberliegender Flächen
- 6 Drehungen um die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Kanten,

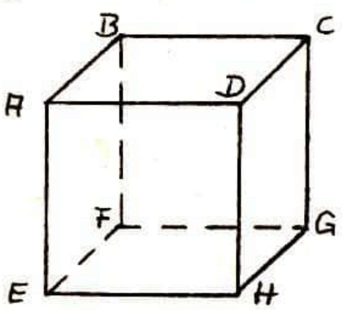
insgesamt 23 Drehungen. Da die Drehung um 0° auch den Würfel als Ganzes fest läßt, wollen wir sie dazuzählen, so daß wir von 24 Drehungen reden können. Wir wollen nun zeigen, daß es keine weiteren Drehungen gibt, d. h., wir beweisen den folgenden Satz:

Satz: Es gibt genau 24 Drehungen, die den Würfel als Ganzes in sich überführen.

Dazu treffen wir drei Vorbereitungen:

1. Wir stellen einige spezielle 180°-Drehungen zusammen, mit denen wir anschließend operieren wollen. Es sei

α_B die 180°-Drehung um die Verbindung der Mitten von AB und GH
α_D " " " " " " " " " AD " FG
α_E " " " " " " " " " AE " CG
α_G " " " " " " " " " DH " BF
α_C " " " " " Mittelsenkrechte der Fläche ABCD
α_F " " " " " " " " ABFE
α_H " " " " " " " " ADHE
α_A die Drehung mit dem Drehwinkel 0°.



Die Bezeichnung haben wir so gewählt, daß immer derjenige Punkt in A übergeht, der als Index bei α steht; der Leser soll sich hiervon bei jeder der angegebenen Drehungen an Hand der Figur selbst überzeugen.

2. Wir stellen fest: Es gibt genau drei Bewegungen, bei denen der Punkt A fest bleibt: die 120°- und die 240°-Drehung um die Raumdiagonale AG und natürlich die 0°-Drehung; wir bezeichnen sie mit α_1, α_2 und α_0.

3. Wenn man irgendeine 180°-Drehung mit sich selbst zusammensetzt, so ergibt sich die 0°-Drehung. Denn wenn man zweimal um dieselbe Achse um 180° dreht, so sind insgesamt Anfangs- und Endlage der einzelnen Würfelecken gleich.

Nun beweisen wir den Satz. Es sei β eine beliebige Bewegung, die den Würfel in sich überführt. Bei β geht der Punkt A in einen wohlbestimmten Eckpunkt X über. Setzt man jetzt β mit der oben mit aufgezählten Drehung α_X zusammen, indem man zuerst β, dann α_X anwendet, so geht bei dieser Zusammensetzung A in sich selbst über, denn bei β geht A nach X, bei α_X geht dann X nach A. Also ist diese Zusammensetzung eine von den in Vorbereitung 2. genannten Bewegungen, d. h., gleich α_1 oder gleich α_2 oder gleich α_0.
Wir schreiben hierfür:

$$\beta \circ \alpha_X = \alpha_i \,, \quad i = 0 \text{ oder } 1 \text{ oder } 2,$$

wobei die linke Seite gelesen werden kann: " β zusammengesetzt mit α_X". Jetzt wenden wir noch einmal die Drehung α_X an und bekommen $(\beta \circ \alpha_X) \circ \alpha_X = \alpha_i \circ \alpha_X$.
Man darf auf der linken Seite die letzten beiden "Faktoren" zusammenfassen, sie bedeuten ja Zusammensetzung von α_X mit sich selbst, d. h., wie wir in 3. feststellten, die Drehung um 0°. Wenn man aber β mit der 0°-Drehung zusammensetzt, so erhält man nur β . Somit gilt $\beta = \alpha_i \circ \alpha_X$.
Diese Formel bedeutet, daß sich eine beliebige den Würfel als Ganzes festlassende Bewegung aus einer der drei Drehungen α_i und einer der acht Drehungen α_A bis α_H zusammensetzen läßt. Und das wiederum bedeutet, daß es nur 3.8=24 Möglichkeiten für eine Bewegung β gibt. Damit ist der Satz bewiesen.
Jetzt können wir noch einmal auf das eingangs genannte Problem der Anordnung der Augenzahlen auf den Würfelflächen zurückkommen. Bei einer die Drehungen des Würfels nicht berücksichtigenden Überlegungen waren wir auf 720 Möglichkeiten gekommen. Inzwischen wissen wir, daß es 24 Drehungen des Würfels in sich

gibt. Die 720 Zuordnungen der Zahlen zu den Flächen gruppieren sich demnach in Klassen zu je 24, die jeweils innerhalb einer Klasse alle durch Drehung auseinander hervorgehen. Somit gibt es 720 : 24 = 30 verschiedene nicht ineinander überführbare Bezifferungen. Dem Leser wird es nicht schwerfallen, in analoger Weise auch die Aufgabe über die Oktaederfärbung zu lösen.

Dr. Walter Börner
Lektor
an der Sektion Mathematik der
Friedrich-Schiller-Universität
Jena

Preisaufgaben 12/77

Einsendeschluss 15.2.78

J 61 2

Man löse die Gleichung

$$\sqrt{2+\operatorname{ctg} x - \sin^2 x} - \sqrt{\frac{4}{17} - \sin^2 x} = \sqrt{\frac{30}{17} + \operatorname{ctg} x}$$

J 62 2

Man bestimme alle positiven Zahlen a, für die es unendlich viele Paare (x;y) von Zahlen x,y gibt, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$18x^2 + \frac{3}{2}(1-a)(x^3+9x) - \frac{1}{8}\,a(x^2+9)^2 \leq 0$$

$$\frac{6x}{x^2+9} = \frac{1}{9y} + \frac{ay}{3} + \frac{a}{6}, \qquad y > 0$$

J 63 1

Man löse die Ungleichung

$$\log_{\sqrt{3}}(4-x) < 4+2\log_3(x+3)$$

J 64 2

Man löse das Gleichungssystem

$$2^{\frac{x-2y}{2}} + 2^{\frac{x-2y}{4}} = 20$$

$$2^{\frac{x}{2}} - 4^{-\frac{y}{2}} = 10$$

J 65 ①

Auf dem Umkreis des Dreiecks ABC wird der Punkt z beliebig gewählt. Man spiegelt z an den Geraden g(AB), g(BC) und g(CA). Es entstehen drei Bildpunkte z_1, z_2 und z_3. Man beweise, daß z_1, z_2, z_3 auf einer Geraden liegen.

J 66 ②

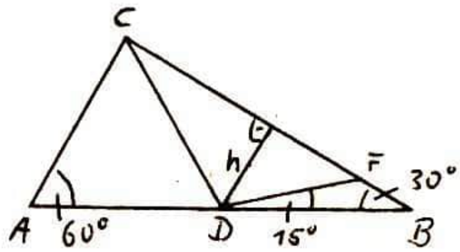
Доказать, что во всяком треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.
Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.
Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

Lösungen

Aufgabe J 37



Wie man leicht sich überzeugen kann, ist AB=2. Daraus folgt sofort, daß $\triangle$ ADC gleichseitig ist; hierbei gilt $\sphericalangle$ ADC=60°.
Daraus folgt unmittelbar
$\sphericalangle$ CDF = 105°.
Wir haben für $\triangle$ CDF weiterhin: CD = 1, $\sphericalangle$ FCD = 30°, $\sphericalangle$ DFC = 45°.

Nach Sinussatz gilt:

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{DF}{1} = DF = \frac{1/2}{1/2\sqrt{2}} = 1/2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sin 105^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{CF}{1} = CF = \sqrt{2} \cdot \sin 105^\circ$$

$$\sin 105^\circ = \sin(90^\circ+15^\circ) = \sin 90^\circ \cos 15^\circ + \cos 90^\circ \sin 15^\circ =$$

$$= \cos 15^\circ = \cos \frac{30^\circ}{2} = 1/2\ (\sqrt{1+\sin 30^\circ} + \sqrt{1-\sin 30^\circ}) =$$

$$= 1/2\ (\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}})$$

$$CF = \sqrt{2} \cdot 1/2\ (\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}) = 1/2\ (\sqrt{3} + 1)$$

Wir berechnen h:

$$\frac{DF}{h} = \cos(90^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Daraus folgt $h = 1/2.$

$$A_{\triangle CDF} = CF \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{8}(\sqrt{3} + 1) \approx 0{,}34$$

Folglich beträgt der Flächeninhalt 0,34 cm^2.

Aufgabe J 38

Zunächst ersetzen wir 3^x durch z und erhalten die Ungleichung

$$\frac{7}{z^2 - 2} \geq \frac{2}{z-1}, \quad z > 0$$

z kann niemals die Werte $\sqrt{2}$ und 1 annehmen.
Wir müssen folgende Fälle unterscheiden:

1) $z > \sqrt{2}$

$7z - 7 \geq 2z^2 - 4$

$z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{3}{2} \leq 0$

$(z - \frac{7}{4})^2 \leq \frac{25}{16}$

$|z - \frac{7}{4}| \leq \frac{5}{4}$ $\qquad$ $z - \frac{7}{4} > 0$ gilt wegen $z > \sqrt{2} > \frac{7}{4}$

$z \leq 3$ $\qquad$ $\underline{\underline{\sqrt{2} < z \leq 3}}$

2) $1 < z < \sqrt{2}$

$7z - 7 \leq 2z^2 - 4$

(Rechnung analog Fall 1, nur mit anderen Relationszeichen)

$\left|z - \frac{7}{4}\right| \leq \frac{5}{4}$

$z \geq 3$ für $z \geq \frac{7}{4}$

$z \leq 1/2$ für $z < \frac{7}{4}$

keine Lösungen

3) $0 < z < 1$

$7z - 7 \geq 2z^2 - 4$

$\left|z - \frac{7}{4}\right| \leq \frac{5}{4}$ $z - \frac{7}{4} < 0$ gilt wegen $z < 1 < \frac{7}{4}$

$z \geq 1/2$ $\underline{\underline{1/2 \leq z < 1}}$

Indem wir für z wieder 3^x einsetzen erhalten wir folgende Lösungsintervalle:

$$-\log_3 2 \leq x < 0 \quad ; \qquad 1/2 \log_3 2 < x \leq 1.$$

Aufgabe J 39

Indem wir die erste Gleichung umformen und gleichzeitig Additionstheoreme anwenden, erhalten wir folgende Beziehung:

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \left(\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2}\right) = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet aber:

1) $x = -y + 2k\pi$
2) $y = 2\,l\pi$, x beliebig
3) $x = 2\,m\pi$, y beliebig ,

wobei k, l, m beliebige ganze Zahlen sind.

Nach Dreiecksgleichung gilt: $|x| + |y| \geq |x+y|$

Daraus folgt mit (1): $|x| + |y| \geq 2|k|\pi$,

woraus man leicht erkennt, daß $k=0$ sein muß.

Für (1) erhalten wir also die Beziehung $x = -y$.

Wir erhalten somit die Lösungen:

$$x_1 = 1/2 \,,\ y_1 = -1/2 \quad ; \qquad x_2 = -1/2 \,,\ y_2 = 1/2$$

Analog erhalten wir für die Fälle (2) und (3) die Lösungen:

$x_3 = 1 \quad , y_3 = 0 \quad ; \quad x_4 = -1 \quad , y_4 = 0$

$x_5 = 0 \quad , y_5 = 1 \quad ; \quad x_6 = 0 \quad , y_6 = -1$.

Das Gleichungssystem hat genau die sechs angegebenen Lösungen.

Aufgabe J 40

Wir betrachten drei Fälle:

1) $x \leq 0$; es folgt $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$, da alle auftretenden Potenzen von x nicht negativ sind.

2) $0 < x < 1$; wir stellen das Polynom wie folgt um:

   $x^8 + (x^2 - x^5) + (1-x) = x^8 + x^2\,(1-x^3) + (1-x)$.

   Hier sind aber, wie leicht zu sehen ist, alle Teile positiv, woraus folgt, daß das Polynom echt größer als Null ist.

3) $x \geq 1$; nach einer erneuten Umstellung ergibt sich:

   $$x^5\,(x^3-1) + x\,(x-1) + 1.$$

   Die ersten beiden Teile sind nicht negativ, folglich gilt auch für diesen Fall: $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$.

Aufgabe J 41

Wie leicht zu sehen ist, ist $x=1$ keine Lösung der Gleichung. Unter der Voraussetzung $x = 1$ können wir beide Seiten durch $\sqrt[m]{(1-x)^2}$ teilen und erhalten:

$$\sqrt[m]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} - 1 = \sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}$$

Wir ersetzen $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}$ durch t und erhalten die Gleichung

$t^2 - 1 = t$ oder $t^2 - t - 1 = 0$.

Daraus folgt

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} .$$

Da der zweite Ausdruck negativ ist, entfällt er für gerade m und wir erhalten in diesem Fall:

$$\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

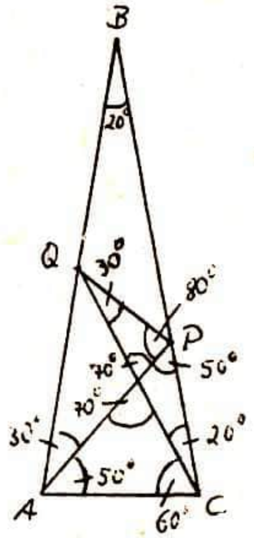
$$\frac{1+x}{1-x} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m$$

$$x = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - 1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + 1}, \quad m \text{ gerade.}$$

Andernfalls ergibt sich:

$$x_{1/2} = \frac{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^m - 1}{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^m + 1}, \quad m \text{ ungerade.}$$

Aufgabe J 42



Man sieht leicht, daß der Winkel bei P genau dann 80° beträgt, wenn die Dreiecke $\triangle$ ABP und $\triangle$ PCQ ähnlich sind.
Wir müssen also zeigen, daß diese Dreiecke ähnlich sind.
Für diesen Fall gilt die Beziehung:

$$\frac{AB}{CQ} = \frac{PB}{CP} \qquad (1)$$

Wenn wir AB = 1 nennen, erhalten wir aus den Beziehungen im Dreieck CQB:

$$CQ = \frac{1}{2\cos 20^\circ}.$$

Andererseits gilt wegen PC = AC:

$$PC = 21 \sin 10^\circ \text{ und } BP = 1 - 21 \sin 10^\circ .$$

Eingesetzt in (1) ergibt sich die Gleichung

$$4 \sin 10^\circ \cos 20^\circ = 1 - 2 \sin 10^\circ \qquad (2)$$

Nach Additionstheoremen gilt aber:

$$\sin 10^\circ \cos 20^\circ = \frac{\sin(10^\circ+20^\circ) + \sin(10^\circ-20^\circ)}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin 10^\circ ,$$

womit die Behauptung bewiesen wäre.

Die Entwicklung des Funktionsbegriffes

> "Die Funktionen der Mathematik sind nicht das willkürliche Produkt unseres Geistes, sondern Widerspiegelung von Gesetzmäßigkeiten der objektiven Realität"

Es gibt zwei Grundbegriffe, die im Zentrum der Mathematik stehen. Das sind Mengen und Funktionen.

Nach G. Cantor, dem genialen Begründer der Mengenlehre, verstehe man unter einer Menge jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen (siehe auch WURZEL-Nr. 1/77). Da die "Menge" als Elementarbegriff angesehen werden muß, darf die Cantorsche Formulierung nicht als eine Definition, sondern nur als eine Umschreibung aufgefaßt werden.

Ist nun eine Vorschrift gegeben, die jedem Element x aus einer Menge M ein Element y aus einer Menge N zuordnet, so spricht man von einer Funktion und schreibt $y=F(x)$. Der Funktionsbegriff kann aus dem Mengenbegriff abgeleitet werden, weil sie eine Funktion als Menge von geordneten Paaren (x,y) auffassen läßt. Während die Mengen gewissermaßen die statischen Grundbausteine der Mathematik sind, kann man die Funktionen als ihre dynamischen Elemente betrachten.

Beispiele für Funktionen gibt es schon im Altertum. So versuchten etwa die Griechen, eine eindeutige Beziehung zwischen den rationalen Zahlen und den Punkten der Geraden herzustellen. Die dabei auftretenden Lücken konnten jedoch erst durch die Einführung der reellen Zahlen ausgefüllt werden.
Bei Apollonius findet man Vorschriften, durch die unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes jedem Punkt der Ebene eine Gerade zugeordnet wird.

Der wesentliche Begriff der reellen Funktion kristallisierte sich aber erst in der Zeit ab 1640 heraus. Bahnbrechend war die von R. Descartes begründete Idee der analytischen Geometrie, weil man dadurch diese Funktionen als Kurven in einem (x,y)-Koordinatensystem veranschaulichen konnte. Nachteilig wirkte sich allerdings seine Forderung aus, daß die Funktionswerte y aus den Werten der Veränderlichen x ausschließlich durch algebraische Operationen berechenbar sein sollten. Bald entschloß man sich jedoch auch zur Betrachtung von weiteren Funktionen, wie etwa der Logarithmus - oder Sinuskurven. Der allgemeine Begriff des analytischen Ausdruckes wurde 1667 durch J. Gregory als eine Größe definiert, die man aus vorgegebenen Größen durch eine Folge von algebraischen oder anderen denkbaren Operationen erhält.

G. W. Leibniz und J. Bernoulli haben 1698 für einen auf algebraische oder transzendente Weise gebildeten Ausdruck die Bezeichnung "Funktion von x" eingeführt. Bedingt durch sein großes Interesse an der Mechanik vertrat I. Newton eine kinematische Auffassung. Seine "Fluenten" waren Größen, die sich in Abhängigkeit von einem universellen Zeitparameter veränderten.

Bei L. Euler findet man um 1770 bereits einen allgemeineren geometrischen Standpunkt. Er betrachtete Funktionen, die zeichnerisch durch einen oder mehrere Kurvenbögen gegeben sind.

In seinem fundamentalen Werk "Théorie des fonctions analytiques" (1797) versuchte J. L. Lagrange den Funktionsbegriff dadurch zu präzisieren, daß er stets von Potenzreihenentwicklungen ausging

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n .$$

Das bedeutete jedoch eine sehr starke Einschränkung. Andererseits bereitete er dadurch die Theorie der komplexen Funktionen vor, die später durch C. F. Gauß und A. Cauchy begründet wurde.

Als Gegenstück zu der Methode von J. L. Lagrange kann man die trigonometrischen Entwicklungen ansehen, die J. Fourier um 1807 bei seinen Untersuchungen der Wärmeleitung erhielt:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx).$$

Dabei ergab sich, daß man auch recht komplizierte periodische Funktionen auf diese Weise darstellen kann. Die Fourierschen Überlegungen stellen gewissermaßen den Keim des modernen Funktionsbegriffes dar.

Die exakte Definition der stetigen reellen Funktion wurde schließlich in den Jahren 1820 bis 1870 durch A. Cauchy und K. Weierstraß herausgearbeitet. Dabei stellte man fest, daß es stetige Funktionen gibt, die in keinem Punkte differenzierbar sind. Dadurch entstand die Notwendigkeit, die anschauliche Interpretation einer Funktion als Kurve teilweise aufzugeben. Dieser Schritt wurde schon vorher durch P. L. Dirichlet (1829) und B. Riemann (1866) eingeleitet. Sie gingen zur Betrachtung von stückweise stetigen und monotonen Funktionen über. Später definierte P. L. Dirichlet seine berühmte Funktion, die jeder rationalen Zahl den Wert 1 und jeder irrationalen Zahl den Wert 0 zuordnet. Die beliebigen reellen Funktionen wurden in der Mathematik endgültig anerkannt, als H. Lebesgue um 1904 seine Integrationstheorie veröffentlichte.

Relativ früh wurden auch mehrdimensionale reelle Funktionen betrachtet, die man als Abbildungen in der Ebene oder im Raum interpretieren kann. So entspricht etwa die Funktion

$$y_1 = y_1 \cos \varphi - y_2 \sin \varphi$$
$$y_2 = x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi$$

eine Drehung um den Winkel φ . Solche Bewegungen findet man in der geometrischen Form bereits bei Euklid.
Eine Reihe von mathematischen Problemen (Wärmeleitungsgleichung, Wellengleichung, Fouriertransformation, Variationsrechnung) führten zur Betrachtung von "Funktionen von Funktionen", die man dann Funktionale nannte. Um 1900 bildet sich die Funktionalanalysis heraus, die sich mit derartig allgemeinen Funktionen beschäftigt. Aber nicht nur in der Analysis nimmt der Funktionsbegriff eine zentrale Stellung ein.
Beispielsweise kann man in der Algebra die Summe x_1+x_2 als Funktion der beiden Elemente x_1 und x_2 auffassen.
Eine zahlentheoretische Funktion ergibt sich, wenn für jede natürliche Zahl x die Anzahl ihrer Teiler bestimmt wird.

In der Logik ordnet man jeder Aussage den Wahrheitswert 1 (richtig) oder 0 (falsch) zu. Die sogenannten Algorithmen können ebenfalls als Funktionen, oder besser als Verfahren zur Berechnung von Funktionswerten beschrieben werden.

Die Versuche zur Verallgemeinerung der Flächen- und Inhaltsmessung führten zu den additiven Mengenfunktionen, die als Maße bezeichnet werden. Die Maßtheorie wiederum bildet die Basis für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

In der Geometrie beschäftigt man sich mit Translationen, Drehungen und Spiegelungen.

Abschließend können wir feststellen, daß es am Ende des vorigen Jahrhunderts in der Mathematik viele Beispiele von Funktionen, Funktionalen,Abbildungen, Operatoren, Operationen und Transformationen gab. Diese anscheinend verschiedenen Begriffe wurden dann schließlich durch R. Dedekind (1882) und G. Peano (1895) auf der Basis der Cantorschen Mengenlehre zum heutigen Konzept der "Funktion" zusammengefaßt.

Prof. Pietsch
Bereich Analysis

Ein Satz von Einstein

Als Albert Einstein seine Doktorarbeit zum Thema "Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen" einreichte, wurde diese, da sie nur einen Umfang von 21 Seiten hatte, mit der Bemerkung zurückgegeben, sie sei zu kurz für ein solches Werk. Nachdem Einstein noch einen Satz hinzugesetzt hatte, wurde sie ein Jahr später angenommen. Mit ihr promovierte Einstein zum Dr. phil.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung", Leiter: Jörg Vogel
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: K. Bartholmé, R. Jeske, D. Meinhardt, G. Blume, V. Wedler
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932