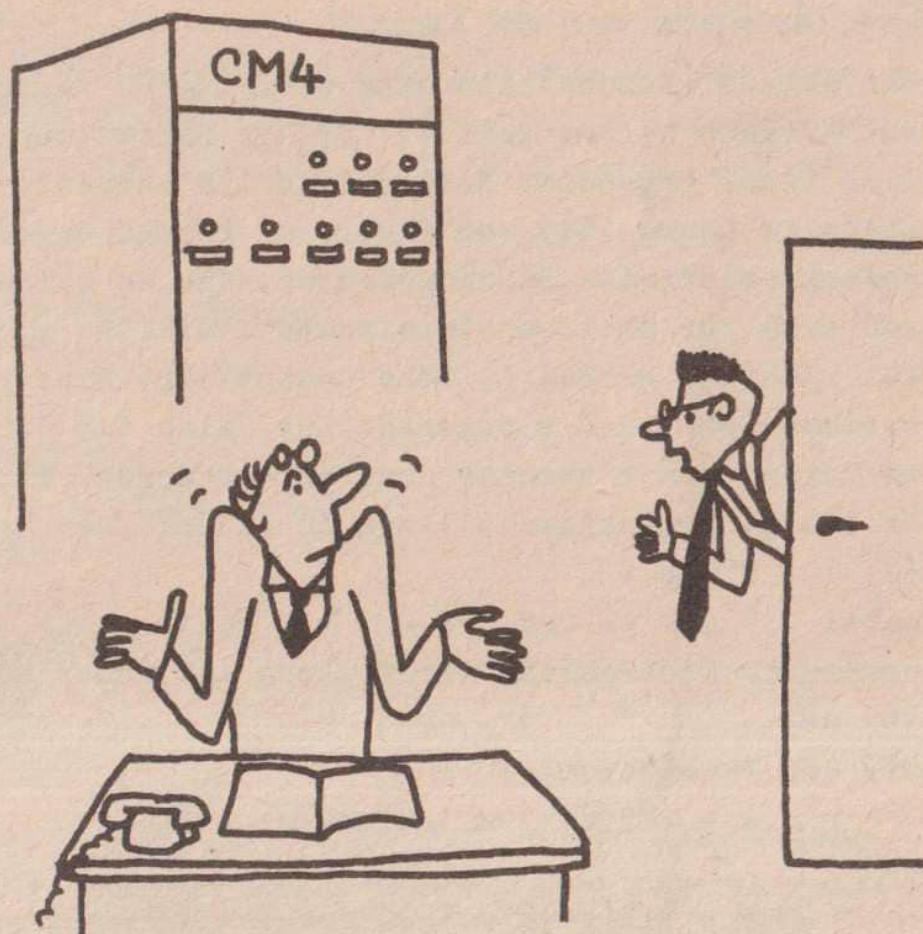




„Wieviel ist 2×2 , Kollege?“
 „Ich weiß nicht, es ist kein Strom da.“

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
 ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
 Jugendobjekt Studienvor-
 bereitung der Sektion
 Mathematik an der
 Friedrich-Schiller-Univer-
 sität Jena

13. Jahrgang
 Index 33 873
 Preis: 0,20 M

1
 79

Primfaktorenzerlegung auf Computern (II)

Die Methode von de Fermat

Wir wollen zunächst ein ganz elementares Verfahren zur Lösung von Aufgabe b) aus Teil I, für die Ermittlung eines echten Teilers einer gegebenen Nichtprimzahl N kennenlernen. Es wurde bereits im Jahre 1643 von Pierre de Fermat angewendet und besitzt charakteristische Besonderheiten, die es für die "Handrechnung" und auch für den Computereinsatz attraktiv machen, jedoch nur bei nicht zu großen N . Ohne wesentliche Einschränkung können wir voraussetzen, daß N ungerade ist, also daß die höchste enthaltene Potenz von 2 bereits abdividiert wurde. Wir betrachten eine beliebige Produktdarstellung in natürlichen Zahlen

$$(2) \quad N = u \cdot v,$$

wobei $1 \leq u \leq \sqrt{N}$ und $\sqrt{N} \leq v \leq N$ gelten soll, und u, v sind beide ungerade. Eine solche Darstellung ist immer möglich, zumindest für $u=1$,

Mit den Bezeichnungen

$$x = 1/2(u+v) = 1/2(u+N/u) = \frac{N+u^2}{2u}$$

und

$$y = 1/2(v-u) = 1/2(N/u-u) = \frac{N-u^2}{2u}$$

(x und y sind ebenfalls natürliche Zahlen!) gilt die Identität

$$(3) \quad N = x^2 - y^2,$$

wovon man sich leicht durch direktes Ausrechnen überzeugt. Somit läßt sich aus jedem Teilerpaar (u, v) von N eine bestimmte Darstellung von N als Differenz zweier Quadratzahlen gewinnen. Umgekehrt zeigt die dritte binomische Formel, daß aus jeder Darstellung (3) von N als Differenz zweier Quadratzahlen sofort eine entsprechende Produktzerlegung $N=(x-y)(x+y)$ mit natürlichen Faktoren folgt. Die Suche nach Faktoren der Zahl N ist damit zurückgeführt auf die Suche von Paaren (x, y) natürlicher Zahlen, die die Gleichung (3) erfüllen.

Um diese Aufgabe zu lösen, formen wir (3) um zu

$$(4) \quad x^2 - N = y^2.$$

Wir müssen also eine Quadratzahl x^2 finden, für die $x^2 - N$ wieder eine Quadratzahl ist.

Welcher Bereich für x kommt dabei in Frage? Aus (4) liest man ab, daß $x^2 - N \geq 0$ ist, also $x \geq \sqrt{N}$. Eine obere Schranke für x ergibt sich folgendermaßen:

Wir nehmen an, daß N einen weiteren Teiler $u_1 > u$ besitzt, der aber noch kleiner oder gleich $\sqrt{N}$ sein soll, und wir bezeichnen $v_1 = N/u_1$, $x_1 = 1/2(u_1 + v_1)$ und $y_1 = 1/2(v_1 - u_1)$. Dann gelten die Beziehungen

$$(5) \quad u < u_1 = x_1 - y_1, \quad v_1 = x_1 + y_1 < v.$$

Daraus leiten wir die Ungleichungen

$$y_1 < x_1 - u$$

$$y_1 < v - x_1$$

ab, die wir durch Addition zu

$$y_1 < 1/2(v-u) = y$$

zusammenfassen. Wegen

$$x_1^2 = y_1^2 + N < y^2 + N = x^2$$

folgt das gewünschte Ergebnis

$$(6) \quad x_1 < x = \frac{N+u^2}{2u}.$$

Das bedeutet:

Von zwei Teilern u und $u_1 \leq \sqrt{N}$ liefert der größere Teiler u_1 den kleineren Wert x_1 . Den größtmöglichen x -Wert erhalten wir bei dem kleinsten Teiler $u=1$, und zwar $x = \frac{N+1}{2}$.

Wir haben aber noch mehr bewiesen. Wie bereits in Teil I erwähnt beginnt man die Faktorenzerlegung von N üblicherweise damit, daß man durch Divisionen mit Rest feststellt, daß N keine Primfaktoren kleiner oder gleich einer geeigneten Schranke k enthält (andernfalls werden diese vorher abgespalten). Dieses Wissen über N verringert den maximal erforderlichen Rechenaufwand der Fermatschen Methode beträchtlich. Setzt man nämlich in (5) ein, daß ein Faktor $u_1 > k$ gesucht wird, d. h. $u=k$, dann bleiben laut (6) nur noch x_1 -Werte im Intervall von $\sqrt{N}$ bis $\frac{N+k^2}{2k}$ ausschließlich zu untersuchen.

Gibt es also in diesem Intervall keine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 - N$ ist Quadratzahl, dann ist N prim, und $N = \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{N-1}{2}\right)^2$ ist die einzige Darstellung (3) für N .

Das Verfahren von Fermat besteht nun darin, in (4) für x nacheinander die kleinste ganze Zahl $x_0 \geq \sqrt{N}$, dann x_0+1 , x_0+2 usw.

einzusetzen und zu überprüfen, ob die Differenzen $x_0^2 - N$, $(x_0+1)^2 - N$, $(x_0+2)^2 - N$ usw. eine Quadratzahl ergeben. Tritt dieser Fall für ein $x < \frac{N+k^2}{2k}$ ein, ist Aufgabe b) gelöst. Wir können die Suche abbrechen, falls er für kein $x < \frac{N+k^2}{2k}$ eintritt, denn dann ist N eine Primzahl (und Aufgabe c) ist gelöst).

Die erste gefundene Lösung von (3) liefert uns den größten Teiler $u \leq \sqrt{N}$ von N und das zugehörige v - im Gegensatz zum Verfahren, alle Primzahlen unterhalb $\sqrt{N}$ als mögliche Teiler auszuprobieren. Dabei wird ja der kleinste Teiler $u > 1$ von N zuerst gefunden.

Beispiel: $N = 9373$, $\sqrt{N} = 96,8\dots$, $x_0 = 97$.

Wir erhalten $x_0^2 - N = 9409 - 9373 = 36 = 6^2$. Das Zahlenpaar $(97, 6)$ erfüllt die Gleichung (3), und $N = 97^2 - 6^2 = 103.91 = 7.13.103$.

In diesem Beispiel führt bereits der erste für x eingesetzte Wert zu einer Zerlegung von N . Ein ähnlich günstiges Beispiel stammt von Fermat; er benötigte 12 Versuche für x , um die Zahl $N = 2\,027\,651\,281$ zu zerlegen.

Diese Zufälle sind aber relativ seltene Ausnahmen. Sie beruhen darauf, daß ein Teilerpaar (u, v) von N existiert, in dem u nur wenig kleiner ist als v , und beide Teiler unterscheiden sich nur wenig von $\sqrt{N}$. Weil dann $y = 1/2(v-u)$ sehr klein ist, genügen einige Versuche für x .

In anderen Spezialfällen, in denen diese Teilerstruktur von N nicht vorliegt, kann man sie manchmal künstlich herbeiführen.

Setzt man etwa $N = 157\,136\,981$, dann gilt $x_0 = 12536$; und erst der Wert $x = 14475$ liefert die Darstellung $N = 14475^2 - 7238^2$ und die Zerlegung $N = u \cdot v = 7237 \cdot 21713$. Um diese Zerlegung zu finden, sind 1940 Versuche erforderlich. Multipliziert man jedoch N mit 3 und zerlegt die Zahl $3N$, dann gilt $x_0 = 21712$, und bereits $x_0^2 - N = 1$ ist Quadratzahl. Man erhält $3N = (3u) \cdot v = 21711 \cdot 21713$ ohne jede Anstrengung, denn $3u \approx v$, und $3N$ besitzt die günstige Teilerstruktur. Wir haben die interessante Tatsache, daß der Faktor 21713 von einem Vielfachen von N wesentlich leichter abgespalten werden kann, als von N selbst.

Im allgemeinen ist aber die Fermatsche Methode dem Verfahren des Durchprobierens aller in Frage kommenden Primzahlen weit unter-

legen. Wir sahen bereits, daß dessen Aufwand im ungünstigsten Fall proportional der Anzahl der Primzahlen unterhalb $\sqrt{N}$ ist, also etwa von der Größenordnung $c\sqrt{N}/\log(\sqrt{N})$ und kleiner als $c\sqrt{N}$. (Auch hier gibt es günstige Fälle, wie z. B. die riesigen Zahlen $n!$, $n=20$ oder $n=30$, die fast im Kopf erledigt werden können.) Wenn ich also eine ungefähr viermal so große Zahl zerlegen will, benötige ich noch nicht einmal den doppelten Rechenaufwand. Die Methode von Fermat erfordert maximal $\frac{N+k^2}{2k} - \sqrt{N}$ Versuche, um den Primzahlcharakter von N zu beweisen oder um einen Faktor von N zu finden. Geht man von der realistischen Beschränkung $k \leq 10^8$ aus, so erhält man, daß der Aufwand dieses Verfahrens im ungünstigsten Fall $c' \cdot N$ beträgt für irgendeinen festen Proportionalitätsfaktor c' . Der Anteil von $-\sqrt{N}$ kann für große N vernachlässigt werden, weil der erste Summand weit überwiegt. Damit ist schon eine etwa doppelt so große Zahl nur mit dem zweifachen Rechenaufwand zerlegbar (wenn keine Verbesserung der Teilerstruktur auftritt!).

Der nächste Teil unserer Artikelfolge soll sich mit Modifikationen des betrachteten Verfahrens beschäftigen, die den Aufwandsfaktor c' stark verringern und größere Zahlen N für die Zerlegung zugänglich machen.

Traugott Schulmeiß
 wiss. Assistent
 im Forschungsbereich
 Sektion Mathematik der FSU

Berichtigungen zu Wurzel 8-9/78

S. 114, Zeile 26: In der angegebenen Formel fehlt der Bruchstrich. Richtig ist:

$$\sqrt{N} / (100000 \cdot \ln(\sqrt{N}))$$

S. 116, Zeile 26: Es muß richtig heißen: "39stellige Fermatzahl".

An Hand der Produktdarstellung von $2^{2^7} + 1$ ist das leicht zu sehen.

S. 123, Zeile 10: Richtig ist: $b_2 = 1 + 1 = 2$

Zeile 29: Gleichung (57)

$$f_{2n} = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} f_s \quad \text{und} \quad g_{2n} = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} g_s$$

Aufgabenlösen oder Forschung

Das Lösen von Aufgaben, wie in der Olympiadebewegung gefordert, und die mathematische Forschung gehen von verschiedenen Voraussetzungen aus.

Mit einer Olympiadeaufgabe liegt bereits eine sinnvolle Fragestellung vor und fast immer ist auch schon das Ergebnis bekannt, denn es wird gefordert: Man beweise, daß ... Eine Fragestellung der Art: Untersuchen Sie, ob ... ist schon selten anzutreffen. Bei der Forschung geht es aber im Gegensatz dazu zunächst um die Formulierung einer sinnvollen Fragestellung. Glaubt man eine gefunden zu haben, so wird man versuchen, diese zu beweisen. Dabei wird man dann sehr häufig erfahren, daß doch keine sinnvolle Fragestellung vorlag oder aber die eigene Beweistechnik zum Beweis nicht ausreicht. Beim Lösen von Aufgaben wird also mit genügendem Training ein gewisser Erfahrungsschatz angelegt, auf den man zurückgreifen kann, während die Forschung Intuition verlangt. Die dargestellte Problematik möchte ich an folgendem Beispiel erläutern.

Sei

$$c_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 c_n + \frac{6n}{(n+1)^2} \quad \text{und} \quad c_1 = a.$$

Man berechne $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$!

Dies ist eine Aufgabe vom Olympiadetyp. Es ist

$$(n+1)^2 c_{n+1} = n^2 c_n + 6n. \quad \text{Mit } a_n = n^2 c_n \quad (1) \text{ folgt}$$

$$a_{n+1} = a_n + 6n \quad (2) \text{ und hieraus durch Aufsummieren von 1 bis } n$$

$$a_{n+1} = a_1 + \sum_{i=1}^n 6i = a_1 + 3n(n+1). \quad (3)$$

(Eine allgemeine Theorie zur Lösung findet der Leser in Markuschewitsch, A.I., Rekursive Folgen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955).

$$\text{Durch Rücksubstitution folgt } c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{a + 3n(n+1)}{(n+1)^2}$$

$$\text{und damit } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 3.$$

Wir wollen nun eine allgemeinere Fragestellung formulieren und versuchen, sie mit der gleichen Lösungsmethode zu bearbeiten. Bei der Substitution (1) könnte man n^2 durch n^γ , $\gamma \in \mathbb{N}$, erset-

zen und bei der Aufsummierung (2), (3) werden nur die Zahlen $6i$ summiert, Man könnte versuchen, $6i$ durch ein Polynom $p(n)$ zu ersetzen. Damit dann aber die neue Folge c_n noch konvergiert, muß $p(n)$ vom Grade kleiner gleich $\gamma - 1$ sein (+), d. h. hier bestand die Möglichkeit, eine unsinnige Frage zu stellen.

Sei also

$$c_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\gamma c_n + \frac{p_{\gamma-1}(n)}{(n+1)^\gamma} \quad \text{und } c_1 = a.$$

Mit $a_n = n^\gamma c_n$ (1.1) folgt $a_{n+1} = a_n + p_{\gamma-1}(n)$ (2.1) und hieraus durch Summieren

$$a_{n+1} = a_1 + \sum_{i=1}^n p_{\gamma-1}(i) \quad (3.1).$$

Durch Rücksubstitution folgt

$$c_{n+1} = \frac{a_1 + \sum_{i=1}^n p_{\gamma-1}(i)}{(n+1)^\gamma}.$$

An dieser Stelle treten also neue Schwierigkeiten auf, die neue Gedanken erfordern.

Sei $p_{\gamma-1}(x) = \sum_{i=0}^{\gamma-1} A_i x^i$, so ist

$$A = \sum_{i=1}^{\gamma-1} p_{\gamma-1}(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{\gamma-1} A_i i^j = \sum_{j=0}^{\gamma-1} \left(A_j \sum_{i=1}^n i^j \right).$$

Die Summen $\sum_{i=1}^n i^j = 1^j + 2^j + \dots + n^j$ bezeichnet man als Newtonsche Summen. Nun ist

$$\sum_{i=1}^n i^j < \int_1^{n+1} x^j dx = \frac{1}{j+1} \left[(n+1)^{j+1} - 1 \right].$$

(Die Summe stellt eine Untersumme im Intervall $[1, n+1]$ der Funktion $y = x^j$ dar) und

$$\sum_{i=1}^n i^j > \int_0^n x^j dx = \frac{1}{j+1} n^{j+1}.$$

(Die Summe stellt eine Obersumme im Intervall $[0, n]$ der Funktion $y = x^j$ dar)

Somit gilt:

$$\sum_{i=1}^n i^j \sim \frac{1}{j+1} n^{j+1}$$

und wir erhalten

$$A \sim \sum_{j=0}^{\gamma-1} \frac{1}{j+1} A_j n^{j+1},$$

also

$$c_n \sim \frac{\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j+1} A_j n^{j+1}}{(n+1)^r} \sim \frac{1}{r} A_{r-1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^r \sim \frac{1}{r} A_{r-1}, \quad (+)$$

$$\text{d. h. } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{r} A_{r-1}$$

Es ist $f(x) \sim g(x)$ (sprich: f ist asymptotisch g), wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)[g(x)]^{-1} = 1$ ist. (Weitere Literatur findet man bei

Berg, L., Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968.)

Wir haben also gesehen, daß einige Veränderungen erhebliche Anstrengungen und neue Ideen in der Lösung erfordern.

In (+) wird übrigens klar, daß $p(n)$ nur ein Polynom höchstens $(r-1)$ -ten Grades sein darf, denn sonst hätten wir im Zähler mindestens eine n -Potenz zuviel.

Wir verallgemeinern die Aufgabenstellung erneut.

Sei $c_{n+\alpha} = \left(\frac{n+\beta}{n+\alpha}\right)^r c_{n+\beta} + \frac{p_{r-1}(n)}{(n+\alpha)^r}$ mit $c_1 = a$ und $\alpha > \beta$.

Mit $a_n = n^r c_n$ (1.3) folgt $a_{n+\alpha} = a_{n+\beta} + p_{r-1}(n)$.

Wir erkennen, daß zur vollständigen Bestimmtheit der Folge mehr als ein Anfangswert vorgegeben sein muß. Wir benötigen die Werte

$c_1, c_2, \dots, c_{\alpha-\beta}$. Bei der Lösung gehen wir wie folgt vor:

Aus a_{β_0} mit $1 \leq \beta_0 \leq \alpha - \beta$ erhalten wir die Teilfolge

$a_{\beta_0+n(\alpha-\beta)}$ und damit $c_{\beta_0+n(\alpha-\beta)}$. Ist der Grenzwert von β_0 unabhängig, so ist unser Problem gelöst. Setzen wir:

$d_n = c_{\beta_0+n(\alpha-\beta)}$, so ist

$$d_{n+1} = d_n + p_{r-1} [\beta_0 - \beta + n(\alpha - \beta)]$$

Weiter erhalten wir durch Summation

$$d_{n+1} = d_0 + \sum_{i=0}^n p_{r-1} [\beta_0 - \beta + i(\alpha - \beta)]$$

und damit

$$c_n \sim \frac{d_0 + \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j+1} A_j \frac{1}{\alpha-\beta} [\beta_0 - \beta + n(\alpha - \beta)]^{j+1}}{(n+\beta)^r} \sim \frac{1}{r} (\alpha - \beta)^{r-1} A_{r-1}.$$

Als Lehre können wir festhalten: Wenn wir nur ein wenig verallgemeinern, dann wird die Beweisführung erschwert oder die Lösungs-

methoden werden wesentlich komplizierter.

Wer formuliert zu diesem Problemkreis weitere Verallgemeinerungen? Lösungen bitte an die Redaktion einsenden! Die besten Arbeiten werden veröffentlicht.

Dr. W. Moldenhauer
Sektion Mathematik
der WPU Rostock

Wenn einer eine Reise tut...

(zum Beispiel im Studentenaustausch nach Tbilissi)

Wenn einer eine Reise tut, dann kann er was erzählen. Dies trifft auch auf uns zu, die wir in diesem Jahr zu den Glücklichen zählten und im Rahmen des alljährlichen internationalen Studentenaustausches von der Universität Tbilissi eingeladen wurden. Im August fuhren wir - acht Jugendfreunde aus dem jetzigen 5. Studienjahr Diplom-Mathematiker und zwei Betreuer - für fast 4 Wochen nach Georgien. Wir hatten zuvor im Juli eine Gruppe georgischer Studenten für angewandte Mathematik der Universität Tbilissi hier bei uns in Jena betreut. Diese Studenten sollten dann während unseres Aufenthaltes dort unsere Gastgeber sein. Durch ihre Erzählungen waren wir sehr gespannt auf Georgien.

Zunächst flog unsere Gruppe nach Batumi am Schwarzen Meer. Es empfingen uns subtropisches Klima und die entsprechende Vegetation. Viele Gewächse, die wir bis dahin nur vom Fernsehen oder aus dem Lexikon kannten, ließen uns staunen, ebenfalls die Delphine mit ihren Kunststückchen im Batumier Delphinarium. Unser Aufenthalt dort war sehr erholend, zumal jeden Tag Baden auf dem Programm stand. Auch ein steiniger Strand und erbarmungslose Sonne konnten uns nicht bremsen. Letztere rächte sich auf ihre Weise. Daß Batumi der feuchteste Ort der Sowjetunion ist, merkten wir nur an einem Tag. Jedoch schlossen wir Freundschaft mit dem guten georgischen Wein. Dies ließ auch unsere Verdauungsorgane

nicht unbeeindruckt. Doch stiegen wir nach einer Woche abends in Batumi in den Zug, gespannt auf das, was sich unseren Augen nach dem Aufwachen wohl zeigen würde.

Tbilissi, die Hauptstadt der Grusinischen SSR, empfing uns mit strahlendem Sonnenschein. Das Wetter sollte sich über mehr als zwei Wochen nicht ändern, so daß unserem Besichtigungsdrang diesbezüglich keine Grenzen gesetzt waren. Doch zunächst erst einmal begann unsere eigentliche Arbeit an der dortigen Universität. Offiziell begrüßt wurden wir vom Dekan im Klub der jungen Wissenschaftler. Unsere Tätigkeit bestand neben dem Kennenlernen zweier Forschungsbereiche und des Rechenzentrums hauptsächlich im Besuch einer Vorlesungsreihe zu einem von uns gewählten Thema (Fourier-Reihen). Eine Vorlesung in georgischer Sprache, wie dort üblich, erschien uns jedoch nicht sehr sinnvoll. Deshalb einigten wir uns mit dem Dozenten auf russisch. Wider Erwarten machte uns das Verstehen dieser Vorlesung aber kaum Schwierigkeiten. Überhaupt können wir sagen, daß sich etwaige Zweifel, ob wir uns mit unseren Gastgebern in russischer Sprache würden verständigen können, schon bald zerstreuten. Es ist erstaunlich, wieviel man doch mit wenigen Vokabeln sagen kann. Sogar unser "Russischexperte" mit einem nach eigenen Angaben 3 Wörter umfassenden Wortschatz hatte kaum Schwierigkeiten mit der Konversation. Durch den engen Kontakt zu unseren Gastgebern bekamen wir einen tiefen Einblick in die dortige Lebensweise. Viele sehr erlebnisreiche und eindrucksvolle Ausflüge ließen uns, wie man so sagt, Land und Leute kennenlernen. Busfahrten führten uns zum Beispiel nach Gori, Mzcheta, der alten georgischen Hauptstadt und entlang der alten georgischen Heeresstraße in den Kaukasus.

Tbilissi selbst ist wohl eine der schönsten sowjetischen Großstädte. Den besten Gesamteindruck erhält man bei einer Fahrt mit einer der zahlreichen Seilbahnen hoch über der Stadt. Einträchtig stehen historische und neue Bauwerke nebeneinander. Im Gegensatz zu den kahlen Bergen, die die Stadt einschließen, überraschen viele Blumenbeete, Grünanlagen und Parks mit auffallend vielen Springbrunnen. Wasserknappheit scheint es dort selbst im Hochsommer nicht zu geben, denn die Anlagen werden sogar mit

Feuerweherschläuchen "gedopt", und wer nicht aufpaßt, bekommt selbst die Möglichkeit, noch etwas zu wachsen.

Die Georgier sind ein sehr gastfreundliches Volk. Es kann einem passieren, daß man von wildfremden Leuten in einer Gaststätte Wein an den Tisch gebracht bekommt. Doch die georgische Lebensweise kann mitunter auch anstrengend sein, wovon wir uns bei Eröffnungs- und Abschlußbanketten, die nach traditionellem Ritual abgehalten wurden, überzeugen konnten.

Schnell war die Zeit unseres Besuches um. Mit Koffern voller Souvenirs, vielen Metern belichteten Films und mit viel Erzählstoff ausgestattet traten wir wieder die Heimreise an.

Wenn einer eine Reise tut, ... dann empfiehlt er sein Reiseziel meist weiter. Vielleicht ist beim Leser der Wunsch entstanden, dieses Land selbst kennenzulernen. Nur zu!

Gunter Blume

Wo steckt der Fehler?

$$\begin{array}{rcl}
 a + b & = & c \\
 4a + 4b & = & 4c \\
 5c & = & 5a + 5b \quad \} + \\
 \hline
 4a + 4b + 5c & = & 4c + 5a + 5b \quad / -9c \\
 4a + 4b - 4c & = & 5a + 5b - 5c \\
 \underline{\underline{4}} & = & \underline{\underline{5}}
 \end{array}$$

Polygone unter sich



„Sie sollten sich auch qualifizieren!“

Preisaufgaben

L 1 Man zeige, daß für alle reellen Zahlen x folgende Ungleichung gilt:

$$|\sin x + \sqrt{3} \cos x| \leq 2$$

L 2 Wieviel Ziffern besitzt die Zahl 2^{100} ?

②

L 3 Man beweise:

$$x^2 - 3y^2 = -1$$

hat keine ganzzahligen Lösungen!

①

L 4 Es sei f eine für alle reellen Zahlen x definierte nullstellenfreie Funktion.

Ist $F(x) = f(2x) + f(3x)$ ebenfalls für alle reellen x definiert und nullstellenfrei?

①

L 5 Man beweise folgende Aussage:

$$\sin x + \sin \left(x + \frac{14}{3}\pi\right) + \sin \left(x - \frac{8}{3}\pi\right) = 0.$$

①

L 6 В правильной усечённой четырехугольной пирамиде стороны оснований равны a и b , а боковая поверхность равна половине полной поверхности. Найти объём пирамиды.

①

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden. Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

Einsendeschluß: 15. 4. 1979

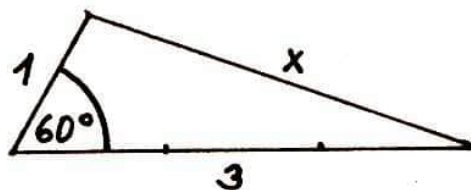
Lösungen

K 43

Man konstruiert ein rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse 4 und einer Kathete der Länge 3. Nach dem Satz des Pythagoras gilt für die Länge x der zweiten Kathete:

$$\begin{aligned}x^2 + 3^2 &= 4^2 \\x &= \sqrt{16-9} \\x &= \sqrt{7}\end{aligned}$$

Eine andere Lösung ergibt sich mittels des Kosinussatzes. Siehe Zeichnung:



$$\begin{aligned}x^2 &= 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \cos(60^\circ) \\x^2 &= 1 + 9 - 3 = 7\end{aligned}$$

K 44

Durch Umformung der Gleichung erhält man

$$\begin{aligned}\lg(kx) &= 2 \lg(x+1) \\ \lg(kx) &= \lg(x+1)^2\end{aligned}$$

Da die Logarithmusfunktion eineindeutig ist, muß also gelten:

$$\begin{aligned}kx &= (x+1)^2 \\ x^2 + (2-k)x + 1 &= 0 \\ x_{1/2} &= \frac{k-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(k-2)^2}{4} - 1}\end{aligned}$$

Damit genau eine Lösung x existiert, muß gelten:

$$(k-2)^2 = 4$$

$$k_1 = 4$$

$$k_2 = 0 \quad (\text{entfällt, da Logarithmusfunktion bei 0 nicht definiert})$$

$k=4$ erfüllt die Bedingungen der Aufgabe und ist auch die einzige Zahl, die dies leistet.

K 45

Das System hat als Lösungen alle Permutationen des Tripels

$$\left(\frac{1}{3}; 1; 3\right).$$

K 46

Es gilt $x^4 \geq 0$ und $y^4 \geq 0$. Also folgt mit $x^4 + y^4 = 1$ sofort:

$$0 \leq x^4 \leq 1, 0 \leq y^4 \leq 1,$$

also gilt auch

$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1.$$

Wie leicht zu sehen ist, kann das Maximum nur für positive x und y angenommen werden.

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

In diesem Bereich gilt jedoch

$$x^9 \leq x^4, y^9 \leq y^4.$$

Also auch

$$x^9 + y^9 \leq x^4 + y^4 = 1.$$

$x^9 + y^9$ nimmt jedoch den Wert 1 genau dann an, wenn eine Variable 0 und die andere 1 ist. Also ist die Lösungsmenge

$$L = \{[0,1], [1,0]\}.$$

K 47

Indem man beide Gleichungen quadriert und dann addiert, erhält man:

$$4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1$$

$$\sin^6 x + (1 - \sin^2 x)^3 = \frac{1}{4}$$

$$3\sin^4 x - 3\sin^2 x + \frac{3}{4} = 0$$

$$\sin^4 x - \sin^2 x + \frac{1}{4} = 0$$

$$(\sin^2 x - \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = (\frac{4k+1}{2} \pm \frac{1}{4})\pi$$

$$x_2 = (\frac{4k+3}{2} \pm \frac{1}{4})\pi$$

1. Fall: $x = \frac{8k+1}{4}\pi$

Daraus folgt: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1. Gleichung: $\sin(y-3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$y-3x = (\frac{4l+1}{2} \pm \frac{1}{4})\pi$$

$$y = (\frac{4l+1}{2} \pm \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{8k+1}{4})\pi$$

$$y = (\frac{8m+1}{4} \pm \frac{1}{4})\pi$$

2. Gleichung: $\cos(y-3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$y-3x = 2\pi k \pm \frac{1}{4}\pi$$

$$y = (2k \pm \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{8k+1}{4})\pi$$

$$y = (\frac{8m+3}{4} \pm \frac{1}{4})\pi$$

Daraus folgt die Lösung:

$$y = \frac{8m+2}{4}\pi$$

$$y = \frac{4m+1}{2}\pi$$

Das erste Lösungspaar lautet also:

$$(\frac{8k+1}{4}\pi, \frac{4m+1}{2}\pi)$$

Analog erhält man folgende Lösungen:

$$(\frac{8k+3}{4}\pi, (2m+1)\pi)$$

$$(\frac{8k+5}{4}\pi, (2m+1)\pi)$$

$$(\frac{8k+7}{4}\pi, (2m+1)\pi)$$

Diese Lösungen erfüllen das Gleichungssystem!

K 48

Für die Wurzeln einer Gleichung $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ gilt:

$$z_1 + z_2 + z_3 = -a$$

$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = b$$

$$z_1z_2z_3 = -c$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt

$$y_1 + y_2 + y_3 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1$$

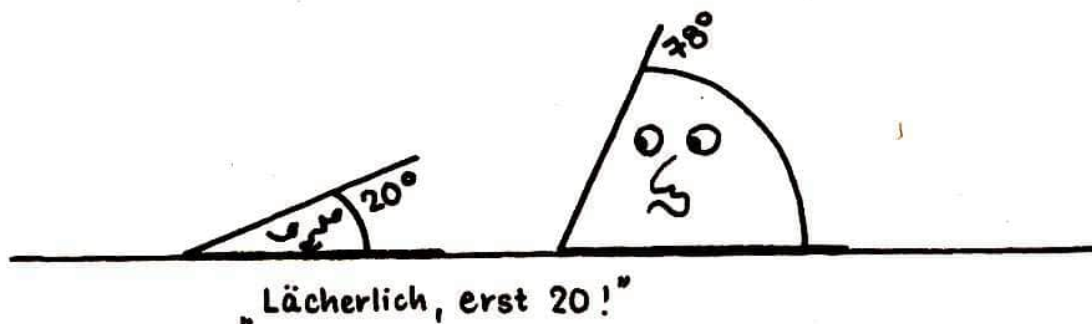
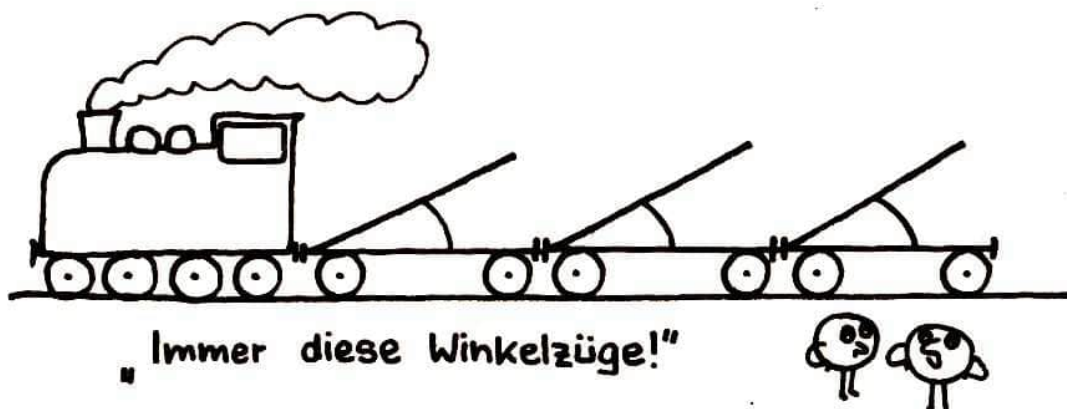
$$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3) = -2$$

$$y_1y_2y_3 = (x_1x_2x_3)^2 = 1$$

Also lautet die gesuchte Gleichung:

$$y^3 - y^2 - 2y - 1 = 0$$

Spitzwinkliges



Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild

Redaktion: G. Blume, H. Gottstein, H. Schwulow, D. Meinhardt, V. Wedler, G. Müller

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 27. 10. 1978.



2

79

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Univer-
sität Jena

13. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Was ist ein Differential? (1. Teil)

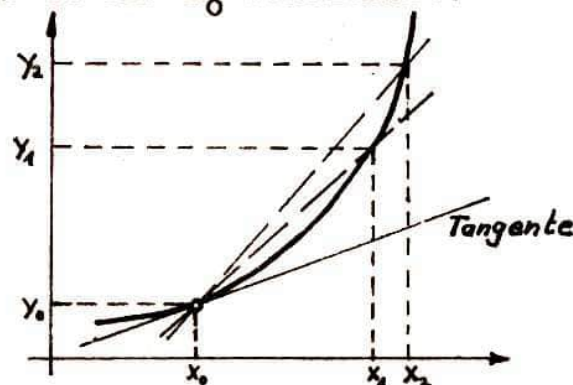
1. Das infinitesimal lineare Verhalten differenzierbarer Funktionen

Eine wichtige Stellung in der mathematischen Analysis nimmt der Begriff der Differenzierbarkeit ein. Um die Differenzierbarkeit einer Funktion $y=f(x)$ an der Stelle $x=x_0$ zu untersuchen, wird das Verhalten des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mit $\Delta y=y-y_0$ und $\Delta x=x-x_0$ für $\Delta x \rightarrow 0$ betrachtet.

Definition 1: Die auf der Menge der reellen Zahlen definierte und reellwertige Funktion $y=f(x)$ heißt an der Stelle $x=x_0$ differenzierbar, wenn

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

existiert. $f'(x_0)$ wird als Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 bezeichnet.



Wie lassen sich Differenzenquotient und Ableitung in der graphischen Darstellung interpretieren?

Die Differenzenquotienten ergeben den Anstieg der Sekanten durch (x_0, y_0) und einen weiteren Punkt (x_1, y_1) (bzw. (x_2, y_2)), die Grenzgerade dieser Sekanten liefert die Tangente an die Funktionskurve im Punkt (x_0, y_0) , deren Anstieg die Ableitung $f'(x_0)$ darstellt.

Unmittelbar aus der Definition der Differenzierbarkeit ergeben sich zwei Probleme:

1. Wie genau ist die Näherung, wenn wir statt der Ableitung $f'(x_0)$ einen Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bei "kleinem" Δx verwenden?
2. Ist es möglich und sinnvoll, in einer Umgebung von x_0 statt

der Funktionsgleichung die Gleichung der Tangente zu verwenden? Man spricht in diesem Fall von linearer Approximation der Funktion.

Es wird vorausgesetzt, daß die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar ist.

Um den Zusammenhang

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x_0) \quad (\text{Problem 1})$$

bzw.

$$\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (\text{Problem 2})$$

für kleine Δx quantitativ zu erfassen, führen wir die von Δx abhängige stetige Fehler- oder Restfunktion $r(\Delta x)$ ein:

$$\begin{aligned} r(\Delta x) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta x \\ \Delta y &= f'(x_0) \Delta x + r(\Delta x). \end{aligned} \quad (1)$$

Aus der Tatsache $\Delta y = 0$ für $\Delta x = 0$ ergibt sich

$$r(0) = 0$$

und aufgrund der Stetigkeit der Funktion $r(\Delta x)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} r(\Delta x) = 0. \quad (2)$$

Die Stetigkeit von $r(\Delta x)$ bei $\Delta x = 0$ folgt aus der Stetigkeit von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$.

Wir dividieren beide Seiten von (1) durch $\Delta x \neq 0$ und erhalten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \frac{r(\Delta x)}{\Delta x},$$

subtrahieren $f'(x_0)$ und gehen zum Grenzwert für $\Delta x \rightarrow 0$ über

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Nach Definition 1 ergibt sich für die linke Seite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0,$$

so daß

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \quad (4)$$

ist.

(Dies ist eine Verschärfung der Beziehung (2), denn aus (4) folgt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} r(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{r(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0 \cdot 0 = 0.$$

Die Gleichung (4) besagt nämlich, daß $r(\Delta x)$ für $\Delta x \rightarrow 0$ "schneller gegen Null geht" als Δx , während (2) lediglich bedeutet, daß $r(\Delta x)$ für $\Delta x \rightarrow 0$ überhaupt gegen Null konvergiert.)

Wir formulieren das Ergebnis (4) als

S a t z 1 : Wenn die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar ist, so gilt die Beziehung

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + r(\Delta x)$$

mit der Eigenschaft

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Diese Beziehung (4) gibt uns ein quantitatives Maß für die "Güte" der linearen Approximation der Funktion $f(x)$ in einer "kleinen" Umgebung von x_0 , die Analysis spricht von einem infinitesimal linearen Verhalten in der Nähe von x_0 .

Antwort auf die Frage, ob aus dem infinitesimal linearen Verhalten in der Nähe von x_0 die Differenzierbarkeit von $f(x)$ in x_0 folgt, gibt

S a t z 2 : Läßt sich für die Funktion $y=f(x)$ eine Darstellung

$$\Delta y = a \cdot \Delta x + r(\Delta x)$$

mit

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

angeben, so ist $f(x)$ in x_0 differenzierbar und $a=f'(x_0)$.

Der Beweis ergibt sich durch Einsetzen der Darstellung für Δy in die Definition der Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \Delta x + r(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} \quad \text{I)} \\ &= a + 0 = a. \end{aligned}$$

Es ist uns damit gelungen, als äquivalentes Kriterium für die Differenzierbarkeit das infinitesimal lineare Verhalten der Funktion $f(x)$ anzugeben.

Daher nehmen viele Standardwerke der mathematischen Fachliteratur die Berechtigung, als Definition der Differenzierbarkeit das infinitesimal lineare Verhalten zu formulieren.

Gregor Weske

Forschungsbereich

I) Aus der Existenz der rechts stehenden Grenzwerte folgt die Existenz der Grenzwerte links vom Gleichheitszeichen.

Berechnung und Eigenschaften von Primzahlzwillingen

In vorangegangenen Artikeln dieser Zeitschrift (WURZEL 3 - 5/77) wurde ausführlich über Definition und grundlegende Eigenschaften der Primzahlen berichtet. In diesem Beitrag wollen wir uns mit den sogenannten Primzahlzwillingen beschäftigen. Beispiele für solche Zwillinge sind: (3,5); (5,7); (11,13); (17,19); (1871, 1873); (1997,1999).

Während seit langer Zeit bekannt ist, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, ist bis heute noch nicht exakt bewiesen, ob es unendlich viele oder endlich viele Primzahlzwillinge gibt. Allerdings besteht heute aus verschiedenen Gründen die berechtigte Vermutung, daß unendlich viele Primzahlzwillinge existieren. Trotz der unregelmäßigen Verteilung der Primzahlzwillinge im Bereich der natürlichen Zahlen scheint für die Anzahl der Primzahlzwillinge für große Bereiche ein ähnliches Gesetz zu gelten wie bei der Primzahlfunktion $\pi(x)$ (siehe WURZEL 5/77).

Da mir für die Berechnung der Primzahlzwillinge nur ein kleiner elektronischer Taschenrechner zur Verfügung stand, habe ich mich aus Zeitgründen auf die Untersuchung der Primzahlzwillinge im Bereich der natürlichen Zahlen bis 100000 beschränkt. Die Auswertung der Ergebnisse führt aber zu interessanten Vermutungen.

Definition und allgemeine Darstellung der Primzahlzwillinge

Definition: Zwei Primzahlen p_1 und p_2 ($1 < p_1 < p_2$) heißen Primzahlzwillinge, wenn gilt: $p_2 = p_1 + 2$.

Da bekanntlich alle Primzahlen $p > 3$ durch die Terme $6n-1$ bzw. $6n+1$ darstellbar sind, lassen sich Primzahlzwillinge allgemein durch

$$p_1 = 6n-1 \quad \text{und} \quad p_2 = 6n+1$$

darstellen.

Die natürliche Zahl $n > 0$ unterliegt dabei gewissen Bedingungen. Im folgenden wollen wir die beiden kleinsten Paare (3,5) und (5,7) nicht berücksichtigen, also $n > 1$ voraussetzen. Dann kann n nur eine natürliche Zahl mit einer Endziffer 2, 3, 5, 7, 8

oder 0 sein. Würde n eine der Endziffern 1, 4, 6 oder 9 haben, wäre eine der Zahlen p_1 oder p_2 durch 5 teilbar, also keine Primzahl.

Die so ausgewählten Zahlenpaare $(6n-1; 6n+1)$ wollen wir als mögliche oder potentielle Primzahlzwillinge bezeichnen. Sie können Primzahlzwillinge sein, müssen aber nicht. Für $n=13$ erhalten wir z. B. $(77; 79)$, also kein Paar von benachbarten Primzahlen, da $77 = 7 \cdot 11$ ist. Für $n=17$ dagegen erhalten wir $(101; 103)$, also ein Paar benachbarter Primzahlen.

Die Anzahl der potentiellen Primzahlzwillinge in einem beliebigen Bereich der natürlichen Zahlen, z. B. zwischen 10 und 10^k ($k \in \mathbb{N}$ und $k > 1$) läßt sich leicht abschätzen.

Es sei $6n-1 \approx 10^k$. Für n folgt daraus $n \approx \frac{10^k+1}{6} \approx \frac{10^k}{6}$.

Da von den möglichen Endziffern 0 - 9 nur 6 in Frage kommen, ergibt sich für die Anzahl der potentiellen Primzahlzwillinge, die wir mit x bezeichnen wollen, $x \approx \frac{10^k}{6} \cdot \frac{6}{10}$, also

$x \approx \frac{10^k}{10} = 10^{k-1}$. Im Bereich der natürlichen Zahlen von 10 bis 100000 müssen also rund $2 \cdot 10000 = 20000$ Zahlen auf ihren Aufbau hin untersucht werden.

Berechnung der Primzahlzwillinge

Die Berechnung der Primzahlzwillinge macht keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Die potentiellen Primzahlzwillinge q und $q+2$ müssen auf ihre Teilbarkeit durch die Primzahlen p ($7 \leq p \leq \sqrt{q}$ bzw. $\sqrt{q+2}$) hin untersucht werden. Bei der Aufstellung einer Tabelle der Primzahlzwillinge kann man folgende Eigenschaften der Primzahlzwillinge benützen, die aus der Struktur der potentiellen Primzahlzwillinge folgen:

Primzahlzwillinge mit den gleichen Endziffern 1 und 3 erfüllen die Beziehung: $p_1 = 11+30 \cdot k$ ($k \in \mathbb{N}$) $p_2 = 13+30 \cdot k$.

Ähnlich ist es bei Primzahlzwillingen mit den Endziffern 7 und 9:

$$p_1 = 17+30 \cdot l \quad (l \in \mathbb{N}) \quad p_2 = 19+30 \cdot l.$$

Für Primzahlzwillinge mit den Endziffern 9 und 1 gilt ebenfalls

$$p_1 = 29+30 \cdot m \quad (m \in \mathbb{N}) \quad p_2 = 31+30 \cdot m.$$

Ferner unterscheiden sich Primzahlzwillinge, die in den beiden Endziffern übereinstimmen, um ein Vielfaches von 300,

Primzahlzwillinge, die in den drei Endziffern übereinstimmen, um

ein Vielfaches von 3000. Die Folgen der Zahlen k bzw. l und m lassen keine Gesetzmäßigkeit erkennen.

Die relative Häufigkeit der Primzahlzwillinge

Zunächst scheint das Vorkommen der Primzahlzwillinge nicht gesetzmäßig zu verlaufen. In der folgenden Tabelle geben wir die Anzahl $z(x)$ der Primzahlzwillinge im Verhältnis zur Anzahl x der potentiellen Primzahlzwillinge an. Wir nennen dieses Verhältnis die relative Häufigkeit der Primzahlzwillinge:

$$r(x) = \frac{z(x)}{x} \quad (500 \leq x \leq 10000).$$

Tabelle der relativen Häufigkeiten der Primzahlzwillinge

x	$r(x) = \frac{z(x)}{x}$	x	$r(x) = \frac{z(x)}{x}$	x	$r(x) = \frac{z(x)}{x}$
500	0,248	3700	0,152	6900	0,1309
600	0,235	3800	0,151	7000	0,1307
700	0,228	3900	0,150	7100	0,1311
800	0,216	4000	0,1485	7200	0,1307
900	0,209	4100	0,147	7300	0,1304
1000	0,203	4200	0,146	7400	0,1295
1100	0,199	4300	0,146	7500	0,1291
1200	0,193	4400	0,145	7600	0,1286
1300	0,186	4500	0,145	7700	0,1283
1400	0,184	4600	0,143	7800	0,1278
1500	0,178	4700	0,1425	7900	0,1273
1600	0,176	4800	0,142	8000	0,1271
1700	0,173	4900	0,142	8100	0,1272
1800	0,173	5000	0,142	8200	0,1271
1900	0,172	5100	0,141	8300	0,1271
2000	0,171	5200	0,141	8400	0,1265
2100	0,170	5300	0,140	8500	0,1265
2200	0,169	5400	0,1396	8600	0,1263
2300	0,169	5500	0,1385	8700	0,1259
2400	0,169	5600	0,138	8800	0,1260
2500	0,164	5700	0,138	8900	0,1257
2600	0,163	5800	0,1372	9000	0,1252
2700	0,161	5900	0,1371	9100	0,1249
2800	0,161	6000	0,1367	9200	0,1248
2900	0,159	6100	0,136	9300	0,1248
3000	0,157	6200	0,135	9400	0,1248
3100	0,155	6300	0,134	9500	0,1248
3200	0,155	6400	0,1336	9600	0,1244
3300	0,155	6500	0,1329	9700	0,1238
3400	0,155	6600	0,133	9800	0,1241
3500	0,155	6700	0,1319	9900	0,1241
3600	0,154	6800	0,1315	10000	0,1237

Näherungsfunktionen für $z(x)$

Es ist heute eine bewiesene Tatsache, daß die Anzahl der Primzahlen kleiner gleich x für sehr große x sich ungefähr wie $\frac{x}{\ln x}$ verhält, also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} : \frac{1}{\ln x} = 1$$

ist (siehe Wurzel 5/77).

Wir wollen nun untersuchen, ob nicht eine ähnliche Gesetzmäßigkeit für die Primzahlzwillinge besteht. Wir betrachten daher das Verhältnis $\frac{z(x)}{x} : \frac{1}{\ln x}$; $z(x)$ ist die Anzahl der Primzahlzwillinge im Bereich der ersten x potentiellen Primzahlzwillinge, $\ln x$ ist der natürliche Logarithmus von x .

Die folgende Tabelle gibt über die Annäherung von $\frac{z(x)}{x}$ durch $\frac{1}{\ln x}$ einigen Aufschluß.

x	$\frac{z(x)}{x}$	$\frac{1}{\ln x}$	$\frac{z(x)}{x} : \frac{1}{\ln x}$
1000	0,203	0,1448	1,402
1500	0,178	0,1367	1,302
2000	0,171	0,1316	1,299
2500	0,164	0,1278	1,283
3000	0,157	0,1249	1,257
3500	0,155	0,1225	1,265
4000	0,1485	0,1206	1,231
4500	0,145	0,1189	1,219
5000	0,142	0,1174	1,209
5500	0,1385	0,1161	1,193
6000	0,1367	0,1149	1,190
6500	0,1329	0,1139	1,167
7000	0,1307	0,1129	1,158
7500	0,1291	0,1121	1,152
8000	0,1271	0,1113	1,142
8500	0,1265	0,1105	1,145
9000	0,1252	0,1098	1,140
9500	0,1248	0,1092	1,143
10000	0,1237	0,1086	1,139

Wenn man bedenkt, daß $x=10000$ im Bereich der unendlich vielen potentiellen Zwillinge noch nicht sehr groß ist, liegt die Vermutung sehr nahe, daß das Verhältnis $\frac{z(x)}{x} : \frac{1}{\ln x}$ für x gegen unendlich gegen 1 strebt. Mir ist bekannt, daß im Bereich der natürlichen Zahlen bis 1000000 über 8000 Primzahlzwillinge mit Computern errechnet wurden, d. h. die relative Häufigkeit der Zwillinge für $x=100000$ etwas größer oder ungefähr gleich 0,08 sein muß. Nun ist für $x=100000$ der Wert von $\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln 100000} = 0,0868$, stimmt also mit der relativen Häufigkeit der Primzahl-

zwillinge annähernd überein. Leider ist mir der genaue Wert der Anzahl der Primzahlzwillinge für $x = 100000$ nicht bekannt. Die Richtigkeit dieser Vermutung wäre ein Beweis dafür, daß es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Wenn man sich auf den untersuchten Bereich bis $x = 10000$ beschränken würde, könnte man auch noch andere Näherungsfunktionen für die relative Häufigkeit der Primzahl-

zwillinge angeben. Aus der graphischen Darstellung der relativen Häufigkeiten $r(x)$ könnte man als Näherungsfunktion ansetzen:

$$f(x) = c \cdot e^{-\lambda x} \text{ bzw. } g(x) = c \cdot x^{-\lambda}.$$

Für beide Funktionen gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

In unserem Bereich bis $x=10000$ eignen sich z. B. folgende Funktionen:

$$f(x) = 0,1629 \cdot e^{-0,0000275x}, \quad g(x) = 0,7733 \cdot x^{-0,199}.$$

Die folgenden Tabellenwerte für $r(x)$, $f(x)$ und $g(x)$ zeigen die gute Annäherung von $f(x)$ und $g(x)$ an $r(x)$.

x	$r(x)$	$f(x)$	$g(x)$
1000	0,203	0,158	0,195
2000	0,171	0,154	0,170
3000	0,157	0,150	0,157
4000	0,1485	0,146	0,1484
5000	0,142	0,142	0,142
6000	0,1367	0,138	0,137
7000	0,1307	0,134	0,1328
8000	0,1271	0,1307	0,1293
9000	0,1252	0,1273	0,1263
10000	0,1237	0,1237	0,1237

Ein Nachteil dieser Näherungsfunktionen besteht darin, daß sie auf den Bereich bis 10000 abgestimmt sind. Man kann aber vermuten, daß $f(x)$ und $g(x)$ rascher gegen Null streben als $r(x)$. Wir haben weiter oben bereits erwähnt, daß $r(100000)$ etwas größer oder ungefähr 0,08 ist. Berechnet man $f(x)$ und $g(x)$ für $x=100000$, so erhalten wir die Werte

$$f(100000) = 0,0104 \text{ und } g(x) = g(100000) = 0,0782$$

$f(x)$ scheint also schneller gegen Null zu streben als $r(x)$.

Wenn diese Vermutung richtig wäre, wäre damit die Existenz unendlich vieler Primzahlzwillinge bewiesen.

Als interessanteste Vermutung in den vorhergehenden Ausführungen erscheint mir die, daß das Verhältnis $\frac{z(x)}{x}$ für gegen unendlich strebende x dem gleichen Wert zustrebt wie das Verhältnis $\frac{\pi(x)}{x}$, nämlich $\frac{1}{\ln x}$. Die wahrscheinlich für viel größere Bereiche errechneten Primzahlzwillinge durch Computer könnten diese Vermutung zwar nicht beweisen, aber wohl unterstützen. Vielleicht wird es einem Mathematiker gelingen, einen exakten Beweis für die Vermutung über das Verhältnis von $\frac{z(x)}{x}$ zu finden.

Unter der Voraussetzung der Richtigkeit dieser Vermutung könnte man für sehr große x $z(x)$ aus der Anzahl der Primzahlen näherungsweise berechnen.

Im Bereich der natürlichen Zahlen bis $10x$ sind rund x potentielle Primzahlen (siehe S. 22 Mitte). Für sehr große x gilt also

$$\frac{\pi(10x)}{10x} \approx \frac{1}{\ln(10x)} = \frac{1}{\ln x + 2,3026}.$$

Da für sehr große x $2,3026 \ll \ln x$, gilt

$$\frac{\pi(10x)}{10x} \approx \frac{1}{\ln x} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\pi(10x)}{10x} \approx \frac{z(x)}{x}, \quad \text{woraus folgt:}$$

$$z(x) \approx \frac{\pi(10x)}{10}$$

=====

Mit anderen Worten: Für sehr große Bereiche der natürlichen Zahlen ist das Verhältnis der Anzahl der Primzahlzwillinge zur Anzahl der Primzahlen 1 : 10.

Unter Verwendung der Angabe der Primzahlen im Bereich bis 10^9 (WURZEL 5/77, S. 69) gäbe es also in diesem Bereich

rund 5084748 Primzahlzwillinge.

Dr. Bruno Hanisch
Halle

Preisaufgaben

L 7 Man zeige, daß kein x existiert, für das gilt:

① $\log_2 x = x$ und x ist reelle Zahl.

L 8 Man berechne:

① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot n! + (n+1)(n+1)!}{(n+2)!}$

L 9 Man löse das Gleichungssystem:

②
$$\begin{aligned} x^{\log_y z} + z^{\log_y x} &= 512 \\ y^{\log_z x} + x^{\log_z y} &= 8 \\ z^{\log_x y} + y^{\log_x z} &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

L 10 Man finde alle x , die folgende Ungleichung erfüllen:

① $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > \frac{6}{x^3}$

L 11 Man beweise, daß $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ gilt, falls $ab > 0$.

①

L 12 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует со стороной основания угол α . Найти угол между боковым ребром и высотой пирамиды и допустимые значения α .

②

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden. Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

Einsendeschluß: 15. 5. 1979

Lösungen

Aufgabe K 49

Durch Umformen erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$xy + z(x+y) = 47 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (2)$$

$$z^2 - z(x+y) + xy = 2 \quad (3)$$

Durch Addition sämtlicher Gleichungen erhält man:

$$z^2 + x^2 + y^2 + 2xy = 49 + z^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 49$$

$$(x+y)^2 = 49$$

$$x + y = \pm 7$$

Durch Subtraktion der Gleichung (1) von (3) ergibt sich:

$$z^2 - 2(x+y)z + 45 = 0$$

$$z^2 \mp 14z + 45 = 0$$

$$z = \mp 7 \pm \sqrt{49-45} = \mp 7 \pm 2$$

Es ergeben sich für z vier mögliche Lösungen:

$$z_1=9, \quad z_2=5, \quad z_3=-5, \quad z_4=-9$$

$$\text{Dabei gilt für } z_1 \text{ und } z_2: \quad x+y = 7$$

$$\text{und für } z_3 \text{ und } z_4: \quad x+y = -7$$

Durch Einsetzen von z in die Gleichungen erhält man folgende Lösungstriplets, die alle das Gleichungssystem erfüllen:

$$(3,4,5); (4,3,5); (-3,-4,-5); (-4,-3,5)$$

Diese sind die einzigen Lösungen des gegebenen Gleichungssystems.

Aufgabe K 50

$$-3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$$

Es gilt $x^2-x+1 > 0$, also kann damit multipliziert werden:

$$-3x^2 + 3x - 3 < x^2 + ax - 2 < 2x^2 - 2x + 2$$

Zunächst wird überprüft, für welche a folgende Ungleichung für alle x erfüllt ist:

$$-3x^2 + 3x - 3 < x^2 + ax - 2$$

$$-4x^2 + (3-a)x - 1 < 0$$

$$4x^2 - (3-a)x + 1 > 0$$

$$x^2 - \left(\frac{3-a}{4}\right)x + 1 > 0$$

Die Parabel $y = x^2 - \frac{3-a}{4}x + 1$ hat ihr Minimum bei $x = \frac{3-a}{8}$, $y = 1 - \left(\frac{3-a}{8}\right)^2$

Die Ungleichung ist erfüllt für

$$1 - \left(\frac{3-a}{8}\right)^2 > 0$$

$$\left(\frac{3-a}{8}\right)^2 < 1$$

$$|3-a| < 8$$

$$\underline{-5 < a < 11}$$

Wir betrachten nun die andere Ungleichung:

$$x^2 + ax - 2 < 2x^2 - 2x + 2$$

$$x^2 - (2+a)x + 4 > 0$$

Die Parabel $y = x^2 - (2+a)x + 4$ hat ihr Minimum bei $x = \frac{2+a}{2}$, $y = 4 - \left(\frac{2+a}{2}\right)^2$.

Die Ungleichung ist also erfüllt für

$$4 - \left(\frac{2+a}{2}\right)^2 > 0$$

$$\left(\frac{2+a}{2}\right)^2 < 4$$

$$|2+a| < 8$$

$$\underline{-10 < a < 6}$$

Als Lösung ergibt sich der Durchschnitt der beiden Lösungsmengen,

Die gegebene Ungleichung ist für beliebiges x erfüllt, wenn a folgende Bedingung erfüllt:

$$\underline{-5 < a < 6}$$

Aufgabe K 51 Die Gleichung besitze für $n=u$ eine Lösung x .

Damit alle Ausdrücke der Gleichung definiert sind, folgt sofort:

- (1) $u > 1$
- (2) $x > 0, x \neq 1$
- (3) $x < 4$

Unter diesen Bedingungen läßt sich die Gleichung äquivalent umformen.

$$\frac{\lg x}{\lg x} + \frac{\lg \frac{4-x}{10}}{\lg x} = \frac{(\lg \lg u - 1)}{\lg x}$$

$$\lg x + \lg \frac{4-x}{10} = \lg \lg u - 1$$

$$\lg x + \lg(4-x) - \lg 10 = \lg \lg u - 1$$

$$\lg x + \lg(4-x) = \lg \lg u$$

$$\lg x(4-x) = \lg \lg u$$

$$x(4-x) = \lg u$$

$$x^2 - 4x + \lg u = 0$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - (\lg u)^2}$$

Damit x reell ist, muß gelten:

$$4 - (\lg u)^2 \geq 0$$

$$(\lg u)^2 \leq 4$$

$$\begin{aligned} \text{1. Fall: } \lg u &\leq 2 \\ u &\leq 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. Fall: } \lg u &\geq -2 \\ u &\geq \frac{1}{100} \end{aligned}$$

Wegen (3) und (2) muß gelten:

$$\sqrt{4 - (\lg u)^2} < 2$$

$$4 - (\lg u)^2 < 4$$

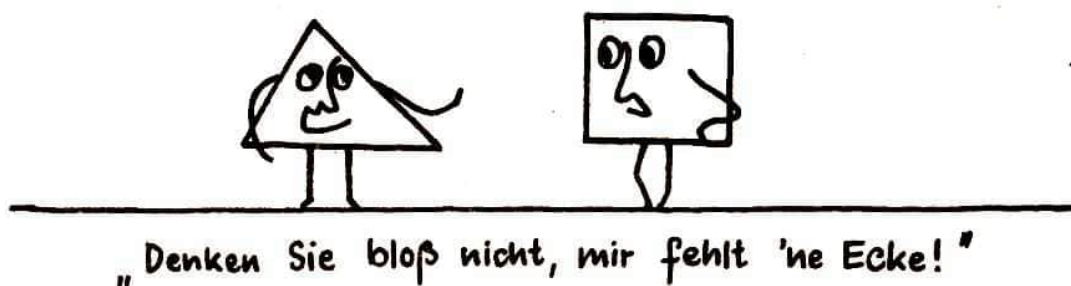
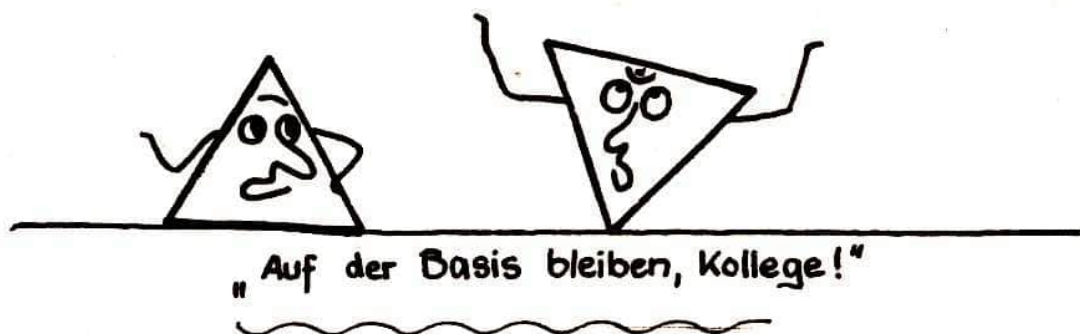
$$(\lg u)^2 > 0$$

Dies ist stets erfüllt.

Also existieren Lösungen für: $1 < u \leq 100$

Jahresinhaltsverzeichnis 1978

Heft		Seite
1	Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (I)	2
	Der Sieger von Palermo (I)	4
2	Die Wurzel in Leipzig	18
	Der Sieger von Palermo (II)	20
	Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (II)	25
3	Der casus irreducibilis	34
	Der Sieger von Palermo (III)	40
4	Die Jensensche Ungleichung	50
	Der Sieger von Palermo (IV)	53
	Lösung der Sonderpreisaufgabe aus Wurzel 3/77	55
5	Unterrichtsplan für Mathematiklager (Teil 1)	66
	Der Sieger von Palermo (V)	71
	Die XVII. OJM in der DDR	77
6	Zum Lösen von Beweisaufgaben I	82
	Der Sieger von Palermo (VI)	86
	Unterrichtsplan für Mathematiklager (Teil 2)	93
7	Der Sieger von Palermo (VII)	98
	Unterrichtsplan für Mathematiklager (Teil 3)	101
	Zum Lösen von Beweisaufgaben II	103
	Zu einer Aufgabe der Bezirksolympiade 1976	109
8/9	Primfaktorenzerlegung auf Computern (I)	114
	Zum Lösen von Beweisaufgaben III	117
	Der Sieger von Palermo (Schluß)	122
	Der FDJ-Studentenklub "Schmiede" stellt sich vor	125
	XI. Karl-Marx-Seminar, Veröffentlichung des Beitrages "Spielt die Mathematik eine Sonderrolle im System der Wissenschaften?"	130
10	Über geometrische Konstruktionsaufgaben	146
	Zum Lösen von Beweisaufgaben (Schluß)	151
11	Ein Operatorenkalkül zur Lösung linearer Differenzengleichungen I. Teil	162
	Gibt es implizite Funktionen?	169
	FDJ-Studentensommer 1978	172
12	Der Begriff des Unendlichen in Mathematik und Philosophie	178
	Lineare Differenzengleichungen 2. Teil	185



Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild

Redaktion: G. Blume, H. Gottstein, H. Schwulow, D. Meinhardt, V. Wedler, G. Müller

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

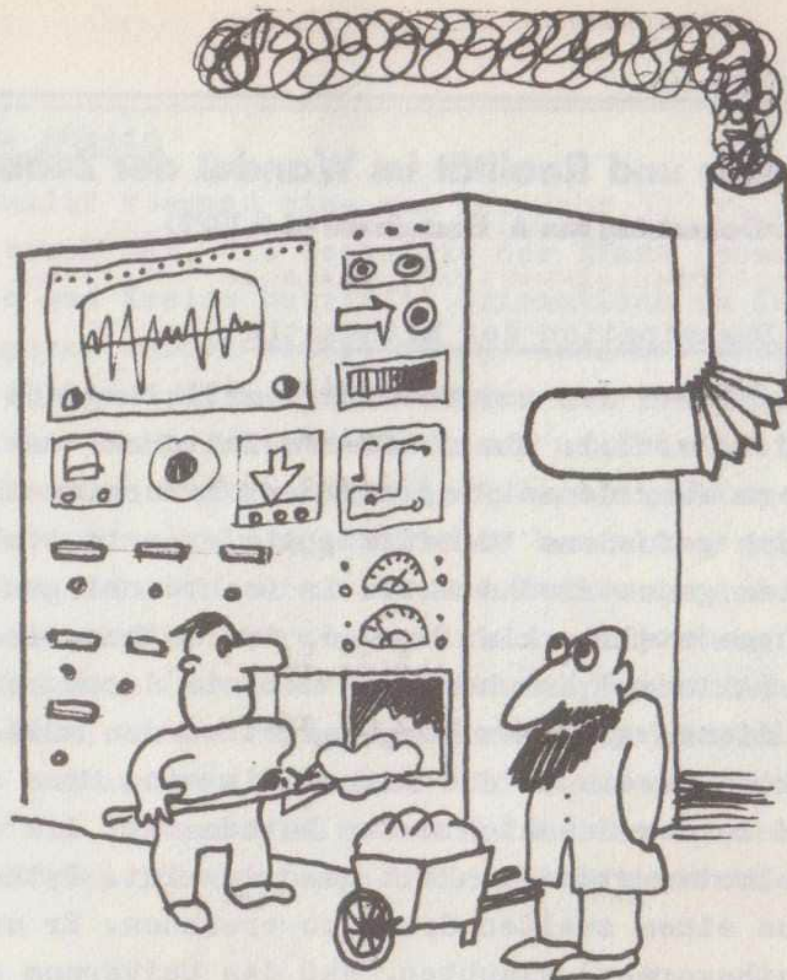
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement

0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 22. 12. 1978



„SIE FÜTTERN WOHL
ZUM ERSTEN MAL
EINEN COMPUTER?“

3 79 WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Univer-
sität Jena

13. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Geometrie und Realität im Wandel der Zeiten

(Zum 100. Geburtstag von A. Einstein am 14.3.1979)

1. Die Emanzipation der Mathematik

Die Geschichte der modernen Mathematik beginnt mit Pythagoras (um 540 v. u. Z.). Bis zu diesem Zeitpunkt war Mathematik, insbesondere aber Geometrie, eine Art Naturwissenschaft. Es gab empirisch gefundene "Gesetze", die experimentell nachprüfbar waren, etwa geometrische Sätze im rechtwinkligen Dreieck usw. Erst Pythagoras stellte klar heraus, daß mathematische Sätze auf Annahmen (Axiomen) beruhen, und daß sie durch rein logische Schlüsse aus diesen Annahmen hergeleitet werden müssen. Er führte den abstrakten Beweis in die Mathematik ein: Eine der größten Leistungen in der Geschichte der Mathematik, die aber heute fast eine Selbstverständlichkeit geworden ist. Pythagoras ist aber noch aus einem zweiten Grund zu erwähnen. Er und seine Schüler (die Pythagoreer) glaubten, daß das Universum durch die ganzen Zahlen $1, 2, 3, \dots$ "regiert" wird. Durch einfache (von den Pythagoreern zugelassene) Prozeduren kommt man zu den negativen ganzen Zahlen und von dort zu den rationalen Zahlen. Die zweite große Entdeckung von Pythagoras war zugleich das Ende dieses Traums. Sie lautet (in unserer heutigen Sprache): $\sqrt{2}$ ist irrational. Dieser Satz ist für das Verständnis, was moderne Mathematik ist, fundamental. Denn bis zu diesem Zeitpunkt waren alle geometrischen Sätze (ganz gleich, ob sie nun empirisch gefunden oder im Sinne von Pythagoras logisch abgeleitet waren) experimentell nachprüfbar (wie naturwissenschaftliche Gesetze). Ob eine gegebene Strecke das rationale oder das irrationale Vielfache einer anderen gegebenen Strecke ist, ist nicht experimentell entscheidbar. D. h., der obige Sachverhalt ($\sqrt{2}$ ist irrational) ist somit ein innermathematischer Satz ohne Bezug zur Realität (sofern man Realität mit dem Attribut der experimentellen Überprüfbarkeit versieht). Die Mathematik hatte sich emanzipiert: Abstrakte Beweise und die Existenz innermathematischer Sätze gaben ihr jenes Gepräge, das sie bis zum heutigen Tage aus der großen Familie aller Wissenschaften in einzigartiger Weise heraushebt.

2. Die Elemente des Euklid

Die Elemente des Euklid stammen etwa aus dem Jahr 325 v. u. Z. und stellen den Versuch dar, die Geometrie der Ebene (soweit sie Punkte, Geraden und Kreise betrifft) axiomatisch zu fassen. Im Sinne von Pythagoras werden einige wenige Annahmen (Axiome) an die Spitze gestellt und alle anderen Sätze aus ihnen durch rein logische Schlüsse hergeleitet. (Daß nach unserer heutigen Auffassung dieser Versuch Lücken aufwies, ändert nichts an seiner überragenden Bedeutung). Im wesentlichen handelt es sich hierbei um Sätze über Geraden, Dreiecke und Kreise in der Ebene, die eine anschauliche unmittelbare geometrische Bedeutung haben. Die empirische Abstammung (zumindest der überwiegenden Mehrzahl) der geometrischen Sätze wird nicht geleugnet. Es geht vielmehr darum, das Arsenal vorhandener Sätze der Geometrie der Ebene systematisch zu ordnen und auf einige wenige Axiome zu reduzieren. Geometrie wird hier idealisierte und mathematisierte Realität.

3. Die analytische Geometrie

Am 8. Juni 1637 erschien jenes Werk von Descartes, das den Grundstein zur analytischen Geometrie legte. Die Ebene, der 3-dimensionale Raum (und seine n -dimensionale Verallgemeinerung) werden mit cartesischen Koordinaten versehen (heute ebenfalls eine Selbstverständlichkeit). Die anschaulichen synthetisch-konstruktiven Methoden der Griechen wurden durch analytische Methoden ersetzt oder doch wenigstens entscheidend ergänzt. Geometrische Gebilde konnten analytisch beschrieben werden, geometrische Fragen konnten auf analytisch - algebraische Fragen reduziert werden.

4. Die Newtonsche Mechanik

Zusammen mit Archimedes und Gauß wird Newton zu den größten Mathematikern gezählt, die bisher gelebt haben. Sein Hauptwerk "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" erschien 1687 und zählt zu den bedeutendsten Büchern, die je geschrieben wurden. Es enthält u. a. die Grundzüge der klassischen Punktmecha-

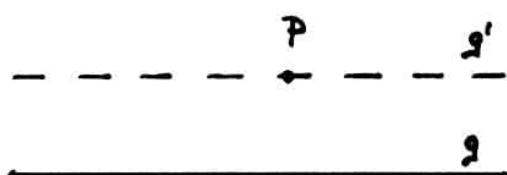
nik, insbesondere eine analytische Beschreibung der Planetenbewegungen. Der 3-dimensionale euklidische Raum und eine "gleichmäßig dahinfließende" Zeit gelten als gegeben. Sie sind gewissermaßen göttliche Einrichtungen, die es dem Menschen ermöglichen, sich mit Physik zu beschäftigen. Ausgerüstet mit der analytischen Geometrie entwickelte Newton die Mechanik aus wenigen Grundprinzipien. Der Eindruck auf seine Zeitgenossen und Nachfolger muß ungeheuer gewesen sein. Und auch heute noch ist es wohl ein guter Test für einen jungen Mathematik- oder Physikstudenten, ob er sich von dem in sich geschlossenen, großartigen Gebäude der klassischen Punktmechanik begeistern läßt oder nicht (ohne Begeisterung geht es nämlich nicht in der Mathematik). 1942, zum 300. Geburtstag Newton's, widmete Einstein seinem großen Vorgänger folgendes Gedicht:

Seht die Sterne, die da lehren,
wie man soll den Meister ehren.
Jeder folgt nach Newton's Plan
ewig schweigend seiner Bahn.

Die Realität des 3-dimensionalen euklidischen Raumes als Hülle, in der Physik passierte, war unumstritten. (Es gab auch keinen Grund für Zweifel, denn solche Zweifel hätten sich, zumindest vom naturwissenschaftlichen Standpunkt aus gesehen, auf experimentell überprüfbare physikalische Fakten stützen müssen. Und diese gab es damals nicht). Geometrie, und insbesondere analytische Geometrie, war das Instrumentarium, diese Realität mathematisch zu beschreiben.

5. Das Parallelenaxiom und seine Folgen

Wie im Punkt 2 gesagt wurde, hat Euklid die Geometrie der Ebene axiomatisiert. Seine Axiome sind durchweg ganz einfach, mit Ausnahme des Parallelenaxioms. Es lautet wie folgt: Ist g eine (nach beiden Seiten unendlich ausgedehnte) Gerade und ist P ein



Punkt, der nicht auf g liegt, so gibt es genau eine (nach beiden Seiten unendlich ausgedehnte) Gerade g' , die durch P geht und g nicht schneidet. Eine solche Gerade heißt

Parallelele. Man bemühte sich 2000 Jahre, dieses komplizierte Axiom aus den anderen, einfacheren Axiomen des Systems von Euklid herzuleiten. Ohne Erfolg. Die Situation um 1800 war etwa folgende: Newton hatte sich bezüglich Raum und Zeit sehr vorsichtig ausgedrückt. Von seinen Nachfolgern wurde der 3-dimensionale euklidische Raum aber zum Dogma erhoben. In ihm und nur in ihm konnten Naturvorgänge ablaufen. Von philosophischer Seite erklärte Kant den 3-dimensionalen euklidischen Raum als denknotwendig. In dieser Situation erscheinen die beiden Alternativen zum obigen Parallelenaxiom, nämlich

1. Es gibt keine Parallele g' ,
2. Es gibt mehr als eine Parallele g' ,

als Ketzerei. Gauß beschäftigte sich intensiv mit dem Parallelenaxiom und er kam (wie wir heute wissen) etwa um 1816 zu der Vorstellung, daß auch andere Geometrien als die euklidische denkmöglich waren. Genauer gesagt: Ersetzt man im System von Euklid das Parallelenaxiom durch eine der beiden angedeuteten Alternativen, so erhält man eine in sich widerspruchsfreie mathematische Theorie, eine nicht-euklidische Geometrie. Gauß publizierte nichts, um sich Anfeindungen zu ersparen. So wurde unabhängig von ihm (und zeitlich etwas später) die Möglichkeit nicht-euklidischer Geometrien von J. Bolyai und Lobatschewski entdeckt. Die erste Publikation zu diesem Thema stammt von Lobatschewski aus dem Jahre 1829/30 im Kasaner Boten. Nachdem der Bann gebrochen war, entwickelten sich in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts zahlreiche Geometrien, die nach rein innermathematischen Gesichtspunkten aufgebaut waren. Geometrie spiegelte nicht mehr Realität wider, die Geometrie hatte sich emanzipiert und von der Physik gelöst. Sie war eine innermathematische Teildisziplin geworden (was physikalische Anwendungen ja nicht ausschließt).

6. Differentialgeometrien

Von besonderem Interesse für die weiteren Betrachtungen sind Differentialgeometrien. Betrachtet man eine 2-dimensionale Fläche im 3-dimensionalen euklidischen Raum, z. B. die Oberfläche einer Kugel, so kann man sich nach den inneren geometrischen

Verhältnissen dieser Fläche erkundigen. Diese fallen im Allgemeinen anders aus als man es von der 2-dimensionalen Ebene gewöhnt ist. Die Welt hypothetisch angenommener 2-dimensionaler Lebewesen auf der Oberfläche einer Kugel ist verschieden von der euklidischen Welt entsprechender 2-dimensionaler Lebewesen in der Ebene. Diese 2-dimensionalen Wesen müssen ihre Geometrie aufbauen, indem sie von ihren (2-dimensionalen) Erfahrungen ausgehen. Wir, die wir mit einer dritten Dimension begabt sind, schauen von "oben" auf diese 2-dimensionalen Welten. Wir sind die Götter dieser Wesen. Unser Wissen, daß diese 2-dimensionale Welt eine Fläche im 3-dimensionalen euklidischen Raum ist, nützt diesen Wesen nichts, da sie keinen Sinn für eine dritte Dimension haben. Die Idee, "innere Geometrien" aufzubauen, geht auf Gauß zurück. Er hat im wesentlichen den anschaulichen (oder wenn man möchte, realen) Fall 2-dimensionaler Flächen im 3-dimensionalen euklidischen Raum behandelt. Hierbei spielen lokale differentielle Eigenschaften von Funktionen eine entscheidende Rolle, daher auch die Bezeichnung "Differentialgeometrie". Entscheidende Verallgemeinerungen stammen von Riemann, einem Schüler von Gauß. Es wurden Differentialgeometrien in beliebigen n -dimensionalen Räumen untersucht. Die Fragestellungen (und, wie man sich denken kann, auch die Antworten) waren rein innermathematisch. Geometrie und Realität (in der Form der Physik) hatten sich endgültig getrennt und gingen ihre eigenen Wege. So sah es jedenfalls am Ende des letzten Jahrhunderts aus.

7. Wie den Göttern die Zeit gestohlen wurde

Um das Jahr 1900 herum vertraten führende Physiker die Meinung, daß ihre Disziplin kurz vor ihrer Vollendung steht (was die theoretischen Grundlagen betrifft). Die wenigen noch offenen Probleme hoffte man im Rahmen der vorhandenen Theorien lösen zu können. Die Mathematik, die diesen Theorien zugrunde lag, war relativ einfach (gemessen am damaligen Stand der Mathematik oder verglichen mit dem heutigen mathematischen Instrumentarium der theoretischen Physik) und hatte wenig mit dem zu tun, was die Mehrzahl der Mathematiker jener Zeit bewegte. Eines der noch offenen Probleme der Physik ergab sich aus den unterschied-

lichen Raum-Zeit Strukturen der Newtonschen Mechanik und der Maxwell'schen Elektrodynamik. Die Newtonsche Auffassung von Raum und Zeit (die sich ja im Laufe von Jahrhunderten in so glänzender Weise bewährt hatte) galt als unantastbar. Sie führte jetzt zu Schwierigkeiten. Im Jahre 1905 ersetzte Einstein die Newtonsche Auffassung von Raum und Zeit durch ein neues Konzept, das zur speziellen Relativitätstheorie führte. Der Bann war gebrochen und eine neue Auffassung von Raum und Zeit setzte sich durch. Bei Newton war die Zeit gegeben, sie wurde durch nichts beeinflusst. Einstein degradierte die Zeit. Sie war nicht mehr a-priori vorhanden, sondern wurde etwa durch einen periodischen Naturvorgang, also durch eine physikalische Prozedur festgelegt. 2 Beobachter vereinbaren lediglich, daß sie ihre "Eigenzeit" nach der gleichen physikalischen Prozedur ermitteln. Anschließend können sie sich dann über ihre Eigenzeiten unterhalten und diese experimentell vergleichen. Hierbei spielen dann die Aufenthaltsorte dieser beiden Beobachter und ihre Relativgeschwindigkeit eine entscheidende Rolle. Rechnen diese zwei Beobachter ihre Raum- und Zeitkoordinaten ineinander um, so vermischen sich Raum und Zeit (Lorentztransformationen). Das hat Minkowski 1909 zu folgendem Satz veranlaßt:

"Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich
zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Art Union
der beiden soll Selbständigkeit bewahren". +)

Die Zeit wurde gewissermaßen den Göttern gestohlen und den Physikern übereignet. Als Trost dürfen die Götter noch bis 1915 den 3-dimensionalen euklidischen Raum behalten. Mit anderen Worten: Physik spielt sich auch in der speziellen Relativitätstheorie im 3-dimensionalen euklidischen Raum ab, der von physikalischen Vorgängen unbeeinflusst ist. Die Formeln der speziellen Relativitätstheorie sind relativ einfach. Es sind die Interpretationen dieser Formeln, die (zusammen mit der Quantenhypothese) eine neue Ära der Physik einläuten.

+) Wilhelm Busch hat sich in "Tobias Knopp" (ohne es zu wissen) wie folgt zum Thema Eigenzeit geäußert:

"Einszweidrei, im Sauseschritt
Läuft die Zeit; wir laufen mit".

(Seriöse Leser bitte ich um Entschuldigung)

8. Die allgemeine Relativitätstheorie

Im Jahre 1915 wird eine der glanzvollsten und geistreichsten Theorien vollendet, die sich menschlicher Geist erdacht hat: Die allgemeine Relativitätstheorie von Einstein. Sie ist eine in sich geschlossene, komplizierte, hoch elegante mathematisch-physikalische Theorie. Ihre Sprache ist die der Riemannschen Geometrie (in einem verallgemeinerten Sinne), von der man doch einst glaubte, daß sie nichts mit Realität zu tun hätte! In dieser Theorie muß schließlich auch die Newtonsche Vorstellung vom ewig real existierenden 3-dimensionalen euklidischen Raum weichen. (Die Götter sind nun arbeitslos). Die Struktur des Raumes wird durch physikalische Vorgänge beeinflusst, z. B. durch schwere Massen. Betrachtet man etwa die hypothetischen 2-dimensionalen Wesen aus Abschnitt 6, so kann man sich vorstellen, daß es viele derartige 2-dimensionale Welten mit unterschiedlichen Geometrien gibt. Eine allgemeine Relativitätstheorie für diese 2-dimensionalen Wesen würde etwa folgende Aussage machen: Die Fläche in der diese 2-dimensionalen Wesen leben ist nicht für immer und ewig vorgegeben, sondern ändert sich im Laufe der Zeit und wird von (2-dimensionalen) physikalischen Vorgängen (schwere Massen, elektromagnetische Wellen) beeinflusst. Unsere reale Welt ist 3-dimensional. Da auch in der allgemeinen Relativitätstheorie Raum und Zeit gekoppelt sind, muß man die Zeit als vierte Dimension hinzunehmen. Physikalisches Geschehen spielt sich somit in einer 4-dimensionalen Raum-Zeit ab, deren Struktur durch eine (verallgemeinerte) Riemannsche Geometrie bestimmt wird, die ihrerseits von physikalischen Vorgängen beeinflusst wird.

9. Ausblick

Geometrie als Sprache der Physik hat sich als überaus fruchtbar erwiesen. Gerade in unseren Tagen erlebt die Geometrisierung physikalischer Vorgänge einen neuen Höhepunkt. Wie nicht anders zu erwarten, ist dies wiederum mit einer Verkomplizierung des verwendeten mathematischen Instrumentariums verbunden. Eine der neuesten Entwicklungen ist die Katastrophentheorie des französischen Mathematikers R. Thom. Sein Buch "Stabilité structurelle

et morphogénèse" (1972) hat großes Aufsehen erregt. Wiederum spielen geometrische Theorien eine entscheidende Rolle. Von Thom stammt der Satz:

"Geometrie ist Magie, die funktioniert ...

Ist nicht alle Magie in dem Maße wie sie
erfolgreich ist, Geometrie?"

Ist das die Zahlenmystik der Pythagoreer im geometrischen Gewande? Könnte dieser Satz nicht auch von Einstein stammen?

10. Schlußbemerkung

Prometheus stahl den Göttern das Feuer
und lehrte, wie es zu nutzen sei.

Einstein stahl den Göttern die Raum-Zeit
und lehrte, wie sie zu nutzen sei.

Prof. Dr. H. Triebel
Sektion Mathematik
Universität Jena

Was ist ein Differential? (2. Teil)

2. Differentiale und Differentialquotient

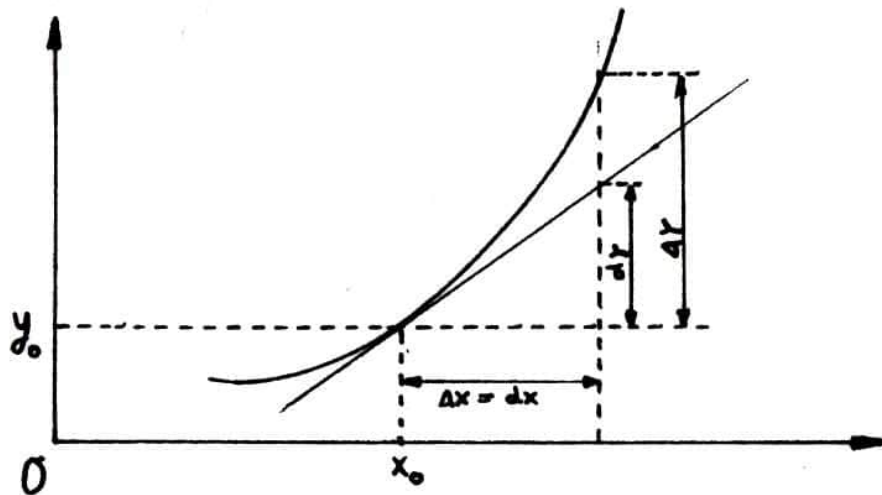
In der Gleichung für das infinitesimale Verhalten

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + r(\Delta x) \quad (1)$$

betrachten wir die lineare Funktion dy von Δx

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (5)$$

Sie liefert die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x)$ bei $x=x_0$.



Definition 2: Die linear von Δx abhängige Funktion

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

 heißt Differential der in $x=x_0$ differenzierbaren Funktion $y = f(x)$.

Das Differential liefert uns für beliebiges Δx eine Näherung für Δy , dabei gibt

$$r(\Delta x) = \Delta y - dy(\Delta x) \quad (1')$$

den Fehler oder Rest der linearen Approximation an. Wenn die Ableitung bekannt ist, läßt sich die Gleichung für dy sofort angeben.

Umgekehrt ist es möglich, aus einem Funktionswert für dy und dem zugehörigen $\Delta x \neq 0$ die Ableitung $f'(x_0)$ nach der Beziehung (5) als

$$f'(x_0) = \frac{dy}{\Delta x} \quad (5')$$

zu berechnen.

$y=f(x)$ sei jetzt eine lineare Funktion, d. h.

$$y = ax + b.$$

Dann ist $f'(x_0)=a$ und daher

$$\begin{aligned} dy &= f'(x_0) \cdot \Delta x \\ &= a \cdot \Delta x. \end{aligned} \quad (6)$$

Das entspricht der bekannten Tatsache, daß die "Tangente" an eine lineare Funktion diese selbst ist. Wenn wir nun den noch spezielleren Fall $y=x$ betrachten, so ergibt sich aus (6) die Beziehung

$$dx = \Delta x. \quad (7)$$

Wir setzen diese Identität in (5') ein und erhalten (für $dx = \Delta x \neq 0$)

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} . \quad (8)$$

Es ist somit möglich, den Wert der Ableitung an der Stelle x_0 als Quotient der Differentiale dy und dx darzustellen. Das ist der Grund, warum man $f'(x_0)$ auch als Differentialquotient bezeichnet.

Beispiel: Wir wollen nach Satz 2 die Differenzierbarkeit der Funktion $y=x^2$ an einer beliebigen Stelle x_0 zeigen sowie Differential und Ableitung ermitteln. Es ist

$$\begin{aligned} \Delta y = y - y_0 &= x^2 - x_0^2 = (x+x_0)(x-x_0) \\ &= [2x_0 + (x-x_0)] (x-x_0) \\ &= 2x_0(x-x_0) + (x-x_0)^2 \\ &= 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Da offensichtlich

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$$

gilt, ist das infinitesimal lineare Verhalten nachgewiesen und

$$dy = 2x_0 \cdot \Delta x = 2x_0 \cdot dx .$$

Damit ergibt sich die Ableitung als

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \frac{2x_0 \cdot dx}{dx} = 2x_0 .$$

Welchen Vorteil bringt die Verwendung von Differentialen? Haben nicht diejenigen Mathematiker recht, die das Differential als unnötige Konstruktion ablehnen?

Die Sprache der Differentiale hat den Vorzug, daß sie sehr anschaulich ist. Unter dy kann man sich bei gegebenem Δx eine Näherung für den tatsächlichen Funktionszuwachs Δy vorstellen, die wegen $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0$ umso besser ausfällt, je kleiner Δx ist.

Nichtvergessen darf man beim Gebrauch von Differentialen, daß es sich im Unterschied zur Ableitung nicht um eine reelle Zahl, sondern stets um eine lineare Funktion von Δx handelt.

Preisaufgaben

L 13

1

Gegeben seien eine geometrische Zahlenfolge $a_1, a_2, \dots$ und eine arithmetische $b_1, b_2, \dots$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$a_1 > 0, \quad \frac{a_2}{a_1} > 0, \quad b_2 - b_1 > 0, \quad a_1 \neq a_2.$$

Man zeige, daß dann eine reelle Zahl c existiert, für die der Ausdruck $\log_c a_n - b_n$ unabhängig von n ist. Man gebe c an.

L 14

1

Für welche ganzen Zahlen n hat die folgende Funktion die Periode 3π :

$$f(x) = \frac{\sin nx}{\sin \frac{5}{n} x} \quad ?$$

L 15

1

Für die Seiten eines Dreiecks gelte folgende Beziehung:

$$a^2 = b^2 + bc.$$

Man zeige, daß für die Winkel dann gilt: $\alpha = 2\beta$!

L 16

1

Man vereinfache

$$(x+a)(x^2+a^2) \cdot \dots \cdot (x^{2^{n-1}} + a^{2^{n-1}})$$

soweit wie möglich!

L 17

1

Man löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} &= a \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} &= a^2 \end{aligned}$$

$a > 0$.

L 18

2

В шар радиуса R вписан конус, боковая поверхность которого в K раз больше площади основания. Найти объём конуса.

Einsendeschluß: 31. 5. 1979

Was ist ein Differential? (3. Teil)

3. Rechenregeln für Differentiale

Anhand der Beziehung (8) fällt es nicht schwer, die aus der Differentialrechnung bekannten Formeln in die Sprache der Differentiale zu übertragen. Hier sollen jedoch einige dieser Beziehungen direkt hergeleitet werden.

Satz 3 : Gegeben seien die in $x=x_0$ differenzierbaren Funktionen $u=f(x)$ und $v=g(x)$ sowie die reelle Zahl a .
Dann ist

$$d(u+v) = du + dv \quad (9)$$

$$\text{und} \quad d(au) = a \cdot du. \quad (10)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \Delta(u+v) &= u + v - (u_0 + v_0) \\ &= u - u_0 + v - v_0 \\ &= \Delta u + \Delta v, \end{aligned}$$

auf Grund der Differenzierbarkeit von u und v an der Stelle x_0 gelten

$$\begin{aligned} u &= du + r_1(\Delta x) \\ v &= dv + r_2(\Delta x), \end{aligned}$$

so daß

$$\Delta(u+v) = du + dv + r_1(\Delta x) + r_2(\Delta x)$$

mit $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r_1(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r_2(\Delta x)}{\Delta x} = 0$

ist. Um die Behauptung zu beweisen, müssen wir die Beziehung

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r_1(\Delta x) + r_2(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

zeigen, die wegen

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r_1(\Delta x) + r_2(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r_1(\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r_2(\Delta x)}{\Delta x}$$

offensichtlich ist.

Zum Beweis von (10) gehen wir von der leicht herleitbaren Darstellung

$$\Delta(au) = a\Delta u + ar_1(\Delta x)$$

aus und erhalten sofort

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a \cdot r_1(\Delta x)}{\Delta x} = a \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r_1(\Delta x)}{\Delta x} = a \cdot 0 = 0.$$

Satz 4 : Wenn die Funktionen $u=f(x)$ und $v=g(x)$ an der Stelle $x=x_0$ differenzierbar sind, so gelten

$$d(uv) = du \cdot v_0 + u_0 \cdot dv \quad (11)$$

$$\text{und} \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v_0 - u_0 \cdot dv}{v_0^2}, \quad (12)$$

falls $v_0 \neq 0$.

Wir beschränken uns auf den Beweis von (11). Auch hier berechnen wir zunächst $\Delta(uv)$.

$$\begin{aligned} \Delta(uv) &= uv - u_0 v_0 \\ &= uv - u_0 v + u_0 v - u_0 v_0 \\ &= (u - u_0)v + u_0(v - v_0) \\ &= \Delta u \cdot v + u_0 \cdot \Delta v. \end{aligned}$$

Wegen $v = v_0 + \Delta v$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta(uv) &= \Delta u \cdot v_0 + u_0 \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v \\ &= [du + r_1(\Delta x)] v_0 + u_0 [dv + r_2(\Delta x)] + \Delta u \Delta v \\ &= du \cdot v_0 + u_0 \cdot dv + v_0 \cdot r_1(\Delta x) + u_0 \cdot r_2(\Delta x) + \Delta u \Delta v. \end{aligned}$$

Nun müssen wir für die Fehlerfunktion

$$r(\Delta x) = v_0 \cdot r_1(\Delta x) + u_0 \cdot r_2(\Delta x) + \Delta u \Delta v$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \text{ zeigen.}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v_0 \cdot r_1(\Delta x) + u_0 \cdot r_2(\Delta x) + \Delta u \Delta v}{\Delta x} \\ &= v_0 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r_1(\Delta x)}{\Delta x} + u_0 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r_2(\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v \\ &= 0 + 0 + u'_0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Zum Abschluß wollen wir die sogenannte "Kettenregel" der Differentiation herleiten.

Wir betrachten die Funktionen

$$y = f(x)$$

und

$$z = g(y) = g(f(x)),$$

g ist die mit f "verkettete" Funktion, d. h. der Wertevorrat von f ist der Definitionsbereich von g .

f und g sollen an der Stelle $x=x_0$ bzw. $y=y_0=f(x_0)$ differenzierbar sein, sie verhalten sich damit infinitesimal linear.

Speziell gelten

$$\Delta z = dz + r(\Delta y) \quad (13)$$

mit

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{r(\Delta y)}{\Delta y} = 0$$

und

$$\Delta y = dy + r_1(\Delta x) \quad (14)$$

mit

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r_1(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Für $dy \neq 0$ können wir (13) schreiben als

$$\Delta z = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx + r(\Delta y).$$

Nun untersuchen wir

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta y)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{r(\Delta y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta y)}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

gilt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{r(\Delta y)}{\Delta y} = 0.$$

Bekanntlich ist

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{dy}{dx},$$

so daß sich

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta y)}{\Delta x} = 0 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

ergibt.

Was geschieht, wenn für x aus einer Umgebung von x_0 $dy=0$ ist?

In diesem Fall gilt

$$dz = 0,$$

denn nach (14) ist

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta y)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(dy + r_1(\Delta x))}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(r_1(\Delta x))}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(r_1(\Delta x))}{r_1(\Delta x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r_1(\Delta x)}{\Delta x} \\
 &= 0 \cdot 0 = 0.
 \end{aligned}$$

So läßt sich abschließend die Kettenregel der Differentiation formulieren als

Satz 5: Wenn die verketteten Funktionen

$$y = f(x)$$

$$\text{und } z = g(y)$$

an der Stelle $x=x_0$ bzw. $y=y_0=f(x_0)$ differenzierbar sind, so gilt für die Differentiale die Beziehung

$$dz = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx$$

und für die Ableitungen

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Gregor Weske

Forschungsbereich

Sektion Mathematik der FSU

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild

Redaktion: G. Blume, H. Gottstein, H. Schwulow, D. Meinhardt, V. Wedler, G. Müller

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

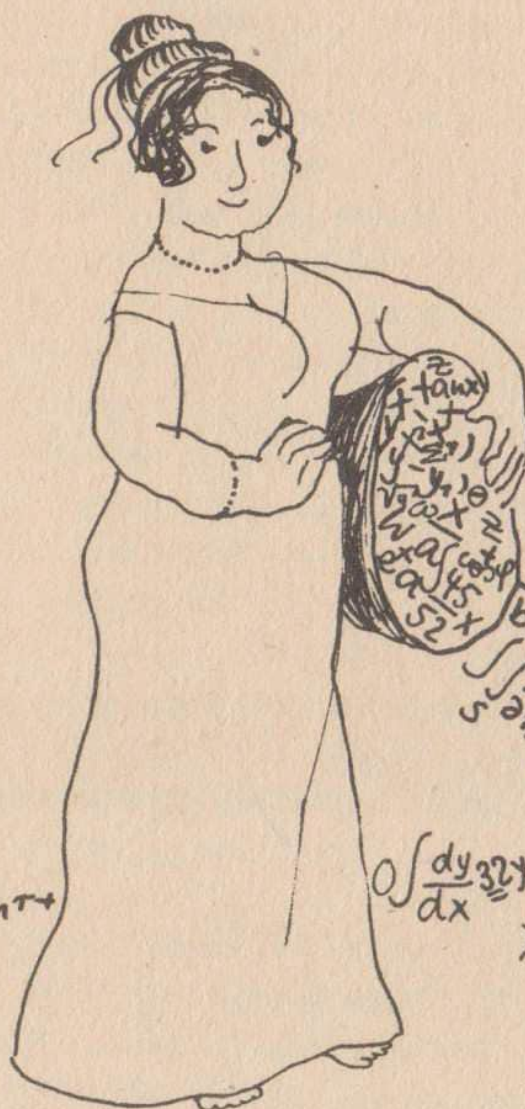
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10832

Redaktionsschluß: 26. 1. 1979.



$$y = mx + n$$

$$\frac{y}{b} = 1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$9,548 \cdot 10^8$$

$$\int \frac{dy}{y} = \ln y + C$$

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha$$

$$y^2 = 2px$$

$$z - a$$

$$r^2 + c_2 = 0$$

$$p_0 e^{\frac{gh}{z}}$$

$$r^2 + c_1 r +$$

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Univer-
sität Jena

13. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

4

79

Primfaktorenzerlegung auf Computern (III)

Siebverfahren und Spezialcomputer

In der WURZEL 1/79 lernten wir das Verfahren von Pierre de Fermat für die Ermittlung eines echten Teilers einer gegebenen natürlichen Zahl N kennen. Es beruht darauf, daß eine natürliche Zahl x gefunden werden muß, die die Darstellung $x^2 - N = y^2$ (y natürliche Zahl) gestattet. x kann dabei im Intervall zwischen x_0 ($2\sqrt{N}$) und $(N+k^2)/2k$ liegen, wobei k eine bekannte untere Schranke für den kleinsten echten Teiler von N sein soll. Ohne zusätzliche Überlegungen müßte man für jeden x -Wert in dem fraglichen Intervall überprüfen, ob $x^2 - N$ eine Quadratzahl ist, um eine solche gesuchte Darstellung zu erhalten.

Bereits Fermat konnte sich die Rechenarbeit bei der Anwendung seines Verfahrens zur Primfaktorenzerlegung wesentlich erleichtern, indem er zunächst nur die Endziffern der Zahlen $x^2 - N$ betrachtete. Wenn nämlich die Differenz $x^2 - N$ auf eine der Ziffern 2, 3, 7 oder 8 endete, konnte sie keine Quadratzahl sein und also auch keine Faktorenzerlegung von N liefern. Fermat brauchte in diesem Fall nicht erst langwierig auszurechnen, ob die Quadratwurzel aus $x^2 - N$ ganzzahlig ist, denn das war von vornherein ausgeschlossen.

Eine weitergehende Untersuchung zeigte ihm, daß Quadratzahlen nur auf eines der 22 Ziffernpaare

$$00, a1, a4, 25, b6, a9$$

enden können (a bezeichnet eine der Ziffern 0, 2, 4, 6, 8, während b für eine der Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 steht.). Berücksichtigt man darüber hinaus auch die drittletzte Ziffer, dann kommen nur noch 159 der 1000 möglichen Zifferntripel zwischen 000 und 999 als Endziffern einer Quadratzahl in Frage, das sind nicht einmal 16 %. Mit der Begründung der Theorie der linearen und quadratischen Kongruenzen durch den jungen C. F. Gauß (in dem berühmten Buch "Disquisitiones arithmeticae", 1801) wurde diese Beobachtung im Rahmen einer weitreichenden Theorie interpretiert und verallgemeinert. Es erwies sich, daß die obigen Einschränkungen der Endziffern von $x^2 - N$ eigentlich Bedingungen an die Restklasse von x modulo 10 (oder modulo 100 bzw. 1000) beinhalten. Gleichzeitig

konnten nun analoge Einschränkungen an x für einen beliebigen Modul m formuliert und ausgenutzt werden.

Um diese Einschränkungen zu finden, muß man in einer einleitenden Rechnung feststellen, für welche Zahlen x die aus der Gleichung $x^2 - N = y^2$ abgeleitete Kongruenzforderung

$$(7) \quad x^2 - N \equiv y^2 \pmod{m}$$

in y lösbar ist. Solche x -Werte wollen wir zulässig modulo m nennen, wobei die Abhängigkeit der Definition von N zu beachten ist. Falls der Modul m eine Primzahl ist, spricht man von der Aufgabe, alle x zu ermitteln, für die $x^2 - N$ ein quadratischer Rest modulo m ist.

Wir wollen das Auffinden der unzulässigen natürlichen Zahlen modulo m an einem Beispiel erläutern. Es sei $N = 551$ und $m = 11$. Im folgenden brauchen wir nur die Restklassen $(\text{mod } 11)$ der beteiligten Zahlen. Dann gilt $N \equiv 1 \pmod{11}$, und die nachstehende Tabelle erfaßt alle möglichen Fälle für x :

$x \equiv$	<u>0</u>	1	2	<u>3</u>	4	<u>5</u>	<u>6</u>	7	<u>8</u>	9	10	$(\text{mod } 11)$
$x^2 \equiv$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1	$(\text{mod } 11)$
$x^2 - N \equiv$	<u>10</u>	0	3	<u>8</u>	4	<u>2</u>	<u>2</u>	4	<u>8</u>	3	0	$(\text{mod } 11)$

Die zweite Zeile der Tabelle zeigt uns, daß eine beliebige Quadratzahl modulo 11 nur einen der Reste 0, 1, 3, 4, 5, 9 besitzen kann. Deshalb brauchen x -Werte, bei denen $x^2 - N$ kongruent zu 2, 8 oder 10 $(\text{mod } 11)$ ist (in der Tabelle eingekreist), nicht weiter untersucht zu werden, denn $x^2 - N$ kann keine Quadratzahl sein. Damit können wir aber bei $N = 551$ alle natürlichen Zahlen $x \equiv 0, 3, 5, 6$ oder $8 \pmod{11}$ im fraglichen Intervall als unzulässig ausschließen (in der Tabelle unterstrichen). Wegen $x_0 = 24$ ist das die Folge 25, 27, 28, 30, 33, ...; sie enthält annähernd $5/11$ oder 45 % aller zu untersuchenden x , weil 5 der 11 möglichen Restklassen ausgeschlossen werden können.

Die Ausnutzung dieses Prinzips ähnelt stark dem Sieb des Eratosthenes, daher trägt die Methode die Bezeichnung Siebverfahren (oder auch Methode der Exkludenten, der Auszuschließenden). Man gibt sich die zu zerlegende Zahl N und mehrere frei wählbare Moduln $m_1, \dots, m_n$ vor, die paarweise teilerfremd sein sollen. Dann streicht man aus der Folge $x_0, x_0+1, x_0+2, \dots$ alle Zahlen x

heraus, die modulo m_1 unzulässig sind. Sie werden* praktisch "herausgesiebt". In der Folge der verbliebenen Zahlen siebt man anschließend modulo m_2 die unzulässigen heraus, dann modulo m_3 usw. Nur diejenigen Zahlen x , die gleichzeitig $\text{mod } m_1, \text{mod } m_2, \dots, \text{mod } m_n$ zulässig sind, verbleiben bis zuletzt im Sieb und können eine Faktorenzerlegung von N liefern!

Beim Sieb des Eratosthenes beträgt der Anteil der mit dem Modul p herausgesiebten Zahlen nicht mehr als $1/p$, weil jeweils nur eine einzige Restklasse (nämlich $x \equiv 0 \pmod{p}$) gestrichen werden kann. Demzufolge verbleiben relativ viele Zahlen (nämlich die Primzahlen) im Sieb. Dagegen zeigen theoretische Untersuchungen an unserem neuen Siebverfahren, daß beim Sieben mit einem Primzahlmodul m für beliebiges N etwa die Hälfte der möglichen x -Werte herausfallen (vergleiche das Beispiel $m=11$). Wenn wir genügend große Intervalle aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durchsieben, dann beseitigt jeder weitere Primzahlmodul auch wieder etwa die Hälfte aller bisher im Sieb verbliebenen x -Werte als unzulässig. Deshalb reduziert das Siebverfahren mit n verschiedenen Primzahlmoduln $m_1, \dots, m_n$ die Anzahl der zu prüfenden x in (4) ungefähr um den Faktor 2^n . Erfahrungsgemäß besteht diese Eigenschaft des Siebverfahrens auch schon in ziemlich kurzen Intervallen, so daß bei n Primzahlmoduln ungefähr ein mittlerer Abstand von 2^n zwischen den zuletzt verbliebenen x -Werten auftritt.

Ein zusammengesetzter Modul m kann wesentlich höhere Ausschließungsraten erzielen, beispielsweise sind für $m = 24$ und $N = 11$ ($\text{mod } 24$) nur die $x \equiv 6 \pmod{12}$ zulässig, bzw. für $N \equiv 23 \pmod{24}$ nur die $x \equiv 0 \pmod{12}$, das sind jeweils nur 8 %.

Wählt man die Anzahl n der Moduln groß genug, so daß nur einige wenige Zahlen zwischen x_0 und $(N+k^2)/2k$ im Sieb übrigbleiben und geprüft werden müssen, dann hat sich der Rechenaufwand für die Faktorenzerlegung von N fast vollständig auf den Siebprozeß verlagert. Dieser muß nun so effektiv wie möglich gestaltet werden.

Zu diesem Zweck wurden von D. H. Lehmer noch vor der Erfindung elektronischer Rechenanlagen geeignete elektromechanische Geräte konstruiert, die dann später durch elektronische Spezialcomputer

ersetzt wurden. Sie lassen für jeden einzelnen Modul m_i ($i=1, \dots, n$) einen Informationsträger T_i mit der Periode m_i zyklisch umlaufen, der darüber Auskunft gibt, ob eine bestimmte Restklasse modulo m_i zulässig oder unzulässig ist. Der Umlauf geschieht mit großer Geschwindigkeit, in sehr kurzen Zeittakten t ändert sich der Zustand aller T_i . Stellt man jeden Informationsträger T_i zum Zeitpunkt 0 auf die Restklasse modulo m_i von x_0 ein, dann zeigt er im Zeitpunkt $q \cdot t$ ($q=1, 2, \dots$) gerade die Zulässigkeit oder Unzulässigkeit modulo m_i von $x_0 + q$ an. Diese Information kann von allen T_i gleichzeitig sehr schnell abgefragt werden, beim Eintritt der Zulässigkeit von $x_0 + q$ für alle Moduln m_1 bis m_n gleichzeitig erfolgt ein Signal oder das Gerät hält an. Das erste solche Gerät entstand im Jahre 1927. Es siebte mit 20 verschiedenen Moduln, die Informationsträger waren geschlossene, von einem Motor angetriebene Ketten. Die Zulässigkeit einer Zahl x für alle Moduln zugleich wurde durch das kurzzeitige Schließen eines Stromkreises angezeigt. Auf Grund mechanischer Instabilitäten konnten nur 50 Zahlen pro Sekunde durchgemustert werden.

Die angesehene Zeitschrift "Mathematische Annalen", Band 109 (1934), enthält die technische Beschreibung der zweiten Maschine. Diese verarbeitete 5000 Zahlen pro Sekunde und besaß für jeden der 30 Primzahlmoduln unterhalb 127 ein sorgfältig ausgewuchtetes Zahnrad. Alle Zahnräder waren hintereinander montiert. Am Rande der Räder konnten genauestens zentrierte Löcher geöffnet oder verschlossen werden, die bei der Zulässigkeit der gerade betrachteten Restklasse einen Lichtstrahl passieren ließen. Der Strahl wurde genau dann hinter dem letzten Rad sichtbar, wenn das dem Zeitpunkt $q \cdot t$ entsprechende x für alle Moduln zulässig war. Die Löcher besaßen einen Durchmesser von nur 2 mm und bewegten sich mit einer linearen Geschwindigkeit von über 100 km/h an der Lampe vorbei, deshalb war der Lichtblitz äußerst kurz und mußte fotoelektrisch ausgewertet werden. Hierzu diente ein sechsstufiger Verstärker, der den Strom der Fotozelle um den Faktor $7 \cdot 10^8$ verstärkte und über eine Relaiskette das Gerät anhielt.

Lehmer zerlegte als Beispiel die Zahl $N = 1537\ 22867\ 20933\ 01419$, einen Faktor von $2^{93} + 1$. Einige tieferliegende Kongruenzbetrachtungen erlaubten es, den durchzusiebenden Bereich auf $37 \cdot 10^6$ Zah-

len x einzuschränken, eine Arbeit von weniger als zwei Stunden für seine Maschine. Jedoch bereits nach drei Sekunden erhielt er ein vollständig zulässiges x und konnte $N = 529\,510\,939$.

$2\,903\,110\,321$ berechnen. Unter der Annahme, daß die im Sieb verbleibenden x -Werte den durchschnittlichen Abstand 2^{30} voneinander besitzen, würde es über 24 Stunden dauern, bis das Gerät eine weitere für alle Moduln gleichzeitig zulässige Zahl entdeckt.

Lehmers nächstes Modell im Jahre 1965 war vollelektronisch und trug die Bezeichnung DLS 127 (Delay Line Sieve, Verzögerungslinien-Sieb), weil es mit den Primzahlmoduln 2 bis 127 einschließlich arbeitete. Es siebte pro Sekunde eine Million Zahlen durch, so daß etwa alle 2000 Sekunden ein vollständig zulässiger x -Wert ausgegeben wurde und überprüft werden mußte. Im Gegensatz zu den frei programmierbaren Universalcomputern konnte dieser Computer nicht einmal $2+2$ berechnen und war daher (nach den Worten seines Erfinders) gut geschützt gegen zweckentfremdete Benutzung. Trotz ihrer Geschwindigkeit benötigte die DLS 127 2600 Stunden (mehr als 100 Tage), um die Zerlegung von $N = (2^{136}+1)/(257 \cdot 383521)$ in zwei Primfaktoren mit 13 bzw. 21 Dezimalziffern zu finden, allerdings nicht nach der Methode von Fermat.

Die Weiterentwicklung der DLS 127 zur DLS 157 erfolgte im Jahre 1974. Sie besaß die gleiche Geschwindigkeit, aber benutzte jetzt die 37 Primzahlmoduln bis 157 einschließlich.

Dagegen gehört die letzte Variante, SRS 181 (Shift Register Sieve, Verschieberegister-Sieb), bereits zur nächsten Computergeneration, da sie etwa 20 Millionen Zahlen pro Sekunde bei 42 Moduln bewältigt. Ihre Ergebnisse sind meines Wissens noch nicht veröffentlicht worden. Man muß sich jedoch vor Augen halten, daß trotz der enormen Geschwindigkeit des Spezialcomputers das Siebverfahren für die Zerlegung von Zahlen $N \geq 10^{35}$ prinzipiell nicht mehr geeignet ist.

Traugott Schulmeiß
wiss. Assistent
im Forschungsbereich
Sektion Mathematik der FSU

Spezialschule »C. F. Gauß« Frankfurt (Oder)

Die Spezialschule physikalisch-technischer Richtung "C.F. Gauß" ist eine EOS mit verstärktem mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht.

In diesem Jahr begeht die Schule den 15. Jahrestag ihrer Gründung.

Im Jahre 1977 wurde ihr aus Anlaß des 200. Geburtstages des großen Mathematikers, Astronomen, Physikers und Geodäten der Name "C. F. Gauß" verliehen.

Ca. 175 Schüler werden von 20 Lehrern nach den gültigen Lehrplänen unterrichtet.

Im Gegensatz zu anderen EOS wird der Unterricht in den Fächern Mathematik, Physik und Chemie zum Teil als Gruppenunterricht erteilt.

Durch eine zusätzliche Wochenstunde im Fach Mathematik können solche Stoffgebiete wie Komplexe Zahlen, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Fehlerrechnung behandelt werden. Große Aufmerksamkeit wird der Förderung besonders interessierter und begabter Schüler auf den Gebieten Mathematik, Physik und Biologie gewidmet.

Außerunterrichtliche Aktivitäten entwickeln unsere Schüler im Fach Mathematik durch aktive Mitarbeit im Mathematik-Kreis- und -Bezirksklub, Teilnahme an Arbeitsgemeinschaften der Schule und Lösen von Wettbewerbsaufgaben der Zeitschriften "alpha", "Wurzel" und "Wissenschaft und Fortschritt". Seit Jahren nehmen unsere Schüler erfolgreich an der Olympiade Junger Mathematiker bis zur 4. Stufe teil. Zuletzt erreichte Axel Fröhlich 1978 in der Klassenstufe 10 einen 1. Preis in der DDR-Olympiade.

Die Kandidaten für die DDR-Olympiade werden innerhalb und außerhalb des Unterrichts vor allem durch zusätzliche Aufgaben besonders gefördert. Das persönliche Engagement der verantwortlichen Lehrer ist dafür die Basis.

Seit ihrer Gründung unterhält unsere Schule enge Patenschaftsbeziehungen zum Halbleiterwerk Frankfurt (Oder).

70 ehemalige Schüler arbeiten zur Zeit nach erfolgreichem Abschluß ihres Studiums in den verschiedenen Abteilungen des Halbleiterwerkes.

Wie an anderen Bildungseinrichtungen unseres Staates wird an unserer Schule trotz ihres besonderen Charakters größter Wert auf die Erziehung allseitig gebildeter sozialistischer Persönlichkeiten gelegt. Erwähnt sei hier nur, daß seit vielen Jahren eine aktive Arbeit in der GST zu den guten Traditionen der Schule gehört.

Ebenso wurde die Schule zum 14. mal im sportlichen Wettstreit mit der Urkunde des Staatsrates ausgezeichnet.

A. Bodmann

Fachlehrer für Mathematik

Spaß muß sein

Auf Jagd

"Schau, da kommt ein Hase angelaufen", sagt ein Jäger zu seinem Begleiter

"Na, der kann sein Testament machen!"

Er legt an und - schießt daneben.

"Dort rennt er", schmunzelt der Begleiter.

"Sicher will er noch schnell zum Notar!"

In einer Gaststätte

Tante Erna zur Serviererin:

"Fräulein, Sie halten ja meinen Kuchen mit dem Daumen auf dem Teller fest!"

Serviererin: "Ist es Ihnen lieber, wenn ich ihn noch einmal in den Dreck fallen lasse?"

Preisaufgaben

L 19 Gegeben ist das Polynom

$$P(x) = x^3 + px + q.$$

Hierbei sind p, q sowie alle Wurzeln reell.

Man zeige, daß aus $q \neq 0$ folgt, daß $p < 0$.

L 20

Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ zeige man die Gültigkeit der folgenden Ungleichung

$$\cot \frac{x}{2} > 1 - \cot x.$$

L 21

Man löse folgende Gleichung:

$$\sin \pi \sqrt{t} + \sin \pi t = 0$$

L 22

Was ist größer:

$$3^{401} \text{ oder } 4^{299} ?$$

L 23

h_1, h_2 und h_3 sind die Höhen eines beliebigen Dreiecks.

Man zeige die Gültigkeit der folgenden Gleichung:

$$\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2 = 1.$$

L 24

В треугольной пирамиде, каждое из боковых ребер которой равно a , один плоский угол при вершине пирамиды прямой, а каждый из остальных равен 60° . Вычислить объем пирамиды.

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind – jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders – unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 15. 7. 1979

Lösungen

Aufgabe K 52

$$(\sin x + \cos x) \sqrt{2} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

Durch Quadrieren ergibt sich:

$$2(1 + \sin 2x) = \frac{4}{\sin^2 2x}$$

Substitution: $\sin 2x = z$

$$2(1+z) = \frac{4}{z^2}$$

$$z^3 + z^2 - 2 = 0.$$

Eine Lösung ist $z=1$.

$$(z^3 + z^2 - 2) = (z-1)(z^2 + 2z + 2).$$

Folglich ist $z=1$ die einzige reelle Wurzel.

$$z = \sin 2x = 1$$

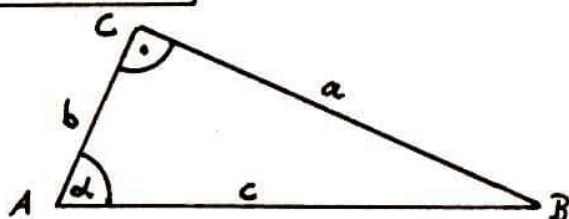
$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Durch Probe wird festgestellt, daß die Gleichung nur für gerade k erfüllt ist, $k=2n$.

Also ergibt sich die Lösung $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$.

Aufgabe K 53



Es gilt: $c = 2R$

$$a = 2R \sin \alpha$$

$$b = 2R \cos \alpha$$

$$A = \frac{1}{2} ab = 2R^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} u.r. \\ = R(\cos \alpha + \sin \alpha + 1)r$$

Folglich gilt: $\frac{R}{r} \sin 2\alpha = \cos \alpha + \sin \alpha + 1$

$$\frac{5}{2} \sin 2\alpha - 1 = \sin \alpha + \cos \alpha.$$

Durch Quadrieren folgt:

$$\frac{25}{4} \sin^2 2\alpha - 5 \sin 2\alpha + 1 = 1 + \sin 2\alpha$$

$$\frac{25}{4} \sin^2 2x - 6 \sin 2x = 0$$

1. Fall: $\sin 2x = 0$ entfällt.

2. Fall: $\sin 2x = \frac{24}{25}$

$$\sin x \cos x = \frac{12}{25}.$$

Da $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ist, so sind sowohl $\sin x$ als auch $\cos x$ positiv

$$\sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{12}{25}$$

$$\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \frac{144}{625} = 0$$

$$\sin \alpha_1 = \sqrt{\frac{25+7}{50}}$$

$$\sin \alpha_2 = \sqrt{\frac{25-7}{50}}$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{3}{5}$$

$$\alpha_1 = 53,15^\circ$$

$$\alpha_2 = 36,85^\circ.$$

Die Angabe eines Winkels reicht bereits, da das Dreieck bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe K 54

Der Eckpunkt der Pyramide SABC, der in der Ebene liegt, sei B. Mit M sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ bezeichnet. Wegen der Orthogonalitätsbedingung gilt: $\overline{SB} = \overline{MB}$.

Mit a sei die Länge einer Seite der Grundfläche bezeichnet.

Dann gilt: $\overline{SB} = \overline{MB} = \frac{a}{2} \sqrt{3}.$

Für die Höhe einer Seitenfläche gilt also:

$$\overline{SM} = \sqrt{\overline{SC}^2 - \overline{CM}^2} = \frac{a}{2} \sqrt{2}.$$

Für das Verhältnis der Flächen folgt dann:

$$A_{\text{Mantelfl.}} : A_{\text{Grundfl.}} = 3 \cdot \frac{a^2 \sqrt{2}}{4} : \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{6}.$$

Aufgabe K 55

Zunächst wird substituiert: $z = \frac{x}{y}$, $x = yz$. Man erhält aus der ersten Gleichung die Lösung $z = 4$.

Also gilt: $x = 4y$.

In die zweite Lösung eingesetzt ergibt sich:

$$y^2 + \frac{5}{4}y - \frac{9}{4} = 0.$$

Als Lösungen erhält man somit:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4, & y_1 &= 1 \\ x_2 &= -9, & y_2 &= -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

Diese Lösungen sind die einzigen und werden durch eine Probe auch bestätigt.

Aufgabe K 56

Nach der Definition des Logarithmus folgt sofort $x > 0$.

$$\log_{1/2} x + \log_3 x > 1$$

$$\frac{\ln x}{\ln 1/2} + \frac{\ln x}{\ln 3} > 1$$

$$\ln x \left(\frac{\ln 1/2 + \ln 3}{\ln 1/2 \cdot \ln 3} \right) > 1$$

$$\ln x \left(\frac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 2 \cdot \ln 3} \right) > 1$$

$$\ln x < \frac{\ln 2 \cdot \ln 3}{\ln 2 - \ln 3} = \frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2/3} = \ln 2^{\frac{\ln 3}{\ln 2/3}}$$

Also ergibt sich als Lösung $0 < x < 2^{\frac{\ln 3}{\ln 2/3}}$

Aufgabe K 57

Nach dem Vietaschen Wurzelsatz gilt:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0$$

$$x_1 x_2 x_3 = 1$$

Folglich gilt auch:

$$\begin{aligned} -a &= y_1 + y_2 + y_3 = (x_2 + x_3) + (x_3 + x_1) + (x_1 + x_2) = \\ &= 2(x_1 + x_2 + x_3) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = (x_2 + x_3)(x_3 + x_1) + (x_3 + x_1)(x_1 + x_2) + \\ &+ (x_1 + x_2)(x_2 + x_3) = \end{aligned}$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)$$

$$= 1 + 0 = 1$$

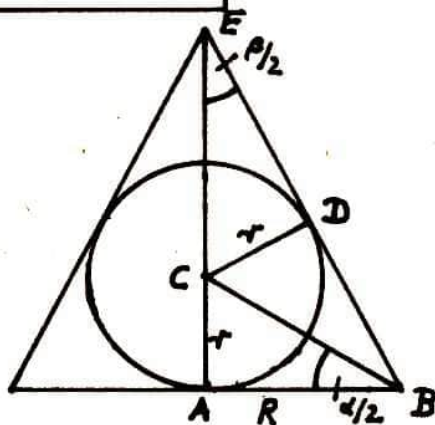
$$-c = y_1 y_2 y_3 = (x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2)$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) - x_1 x_2 x_3 = -1$$

Daraus ergibt sich das Polynom, das die geforderten Eigenschaften besitzt:

$$\underline{y^3 - 2y^2 + y + 1 = 0}$$

Aufgabe K 58



$$\text{Es gilt: } \tan \alpha/2 = \frac{r}{R} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

$$\alpha/2 = 30^\circ$$

Daraus folgt sofort: $\beta = 60^\circ$

Der Winkel an der Spitze des Winkels beträgt folglich 60° .

Voraussetzung:

$$\frac{A_{\text{O Kugel}}}{A_{\text{G Kegel}}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{4}{3}$$

$$\underline{R = \sqrt{3} \cdot r}$$

Aufgabe K 59

$$(1) \quad \sin x \sin y = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2}}$$

$$(2) \quad \tan x \cdot \tan y = \frac{1}{3}$$

Aus (2) folgt $\cos x \cdot \cos y = 3 \sin x \cdot \sin y$

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = 4 \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x-y) = 4 \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \quad (3)$$

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = 2 \sin x \sin y$$

$$\cos(x+y) = 2 \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{4} \sqrt{2} \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt

$$x-y = \arccos \frac{1}{2} \sqrt{2} = \pm \frac{\pi}{4} + 2 l_1 \pi$$

$$x+y = \arccos \frac{1}{4} \sqrt{2} = \pm \arccos \frac{1}{4} \sqrt{2} + 2 l_2 \pi$$

Lösung: $x = \pm \frac{\pi}{8} \pm \arccos \frac{1}{4} \sqrt{2} + 2 k_1 \pi$

$$y = \pm \frac{\pi}{8} \pm \arccos \frac{1}{4} \sqrt{2} + 2 k_2 \pi$$

Unter der Bedingung $0 \leq x, y < 2\pi$ würden also genau 4 Lösungen existieren.

Aufgabe K 60

Für jedes Dreieck gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = r,$$

wobei r der Umkreisradius ist.

Für den Umfang gilt also:

$$u = a+b+c = r \sin \alpha + r \sin \beta + r \sin \gamma$$

$$= r(\sin \alpha + \sin(180^\circ - \alpha - \gamma) + \sin \gamma) = f(\alpha)$$

$$u' = r(\cos \alpha - \cos(180^\circ - \alpha - \gamma))$$

$$u'' = r(-\sin \alpha - \sin(180^\circ - \alpha - \gamma)).$$

Notwendige Bedingung für ein Maximum: $u' = 0$

$$\cos \alpha = \cos(180^\circ - \alpha - \gamma)$$

$$\alpha = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

$$2\alpha = 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta$$

$$\underline{\alpha = \beta}$$

Hinreichende Bedingung: $u'' < 0$

$$u'' = r(-\sin \alpha - \sin(180^\circ - \alpha - \gamma))$$

$$u'' = -2r \sin \alpha, \text{ wobei } 0 < \alpha < 90^\circ,$$

$$\text{also } u'' < 0.$$

Damit ist das gleichschenklige Dreieck das mit dem größten Umfang.

Was sind SI-Einheiten?

Das Internationale Einheitensystem (SI) ist seinem Wesen nach eine weltweite Standardisierung der Meßgrößen und Maßeinheiten. Es umfaßt sieben Basiseinheiten: das Meter für die Länge, das Kilogramm für Masse (Gewicht), die Sekunde für die Zeit, das Ampere für die elektrische Stromstärke, das Kelvin für die Temperatur, das Mol für die (chemische) Stoffmenge und Candela für die Lichtstärke. Aus diesen Bausteinen lassen sich die weiteren notwendigen SI-Maßeinheiten auf einfache Art ableiten, sowohl für alle bekannten Größen der Physik und der Chemie als auch für die übrigen Naturwissenschaften und für die Technik.

Die Mehrheit der abgeleiteten Einheiten ist bereits allgemein gebräuchlich, bei anderen wird es einer längeren Zeit der Umstellung und Gewöhnung bedürfen. Das betrifft unter anderem auch die Maßeinheit der Kraft, die von Kilopond auf Newton umgestellt wird, die Maßeinheit des Druckes - hier erfolgt die Umstellung von der Technischen Atmosphäre, dem Millimeter Wassersäule oder dem Torr auf das Pascal -, sowie die Maßeinheiten der Leistung, die von Pferdestärke auf Watt, und der Wärmemenge, die von Kalorie auf Joule verändert werden.

Zwischen den SI-Einheiten gibt es keine komplizierten Umrechnungen mit schlecht merkbaren Zahlenfaktoren mehr. Sie stehen untereinander nur noch mit dem Zahlenwert 1 in Beziehung.

Die SI-Einheiten sind für die Praxis vielfach zu groß oder zu klein. Man benutzt daher Vorsätze wie Kilo (k), Mega (M), Zenti (c) und Milli (m) zur Bildung von dezimalen Vielfachen und Teilen. 1 Megawatt (MW) ist 1 Million Watt (W), 1 Millimeter (mm) ist 1 tausendstel Meter (m).

Im täglichen Leben werden aber einige wenige Einheiten weiter verwendet, die nicht nach dem Dezimalsystem unterteilt sind, jedoch wegen ihrer Bedeutung weiter zugelassen bleiben, zum Beispiel Minute, Stunde und Tag für die Zeit und der Grad für den Winkel mit seiner Unterteilung in Minute und Sekunde. Sie haben sich weltweit einheitlich durchgesetzt. Diese Maßeinheiten dürfen auch mit SI-Einheiten und deren Vielfachen und Teilen kombiniert werden; Beispiele dafür sind die Kilowattstunde (kWh) und das Kilometer je Stunde (km/h).

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild

Redaktion: G. Blume, H. Gottstein, H. Schwulow, D. Meinhardt, V. Wedler, G. Müller

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10032

Redaktionsschluß: 5. 3. 1979

„Drei Wünsche hast Du frei“, sprach das
Männchen.



Und so wünschte sich der Köhlersohn das
halbe Königreich, des Königs Tochter und ein
Jahresabonnement der „Wurzel“.

5

79

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Univer-
sität Jena

13. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Einführung in die Methode der kleinsten Quadrate

Die folgende mathematische Aufgabe soll gelöst werden: Gegeben seien n Paare reeller Zahlen $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Gesucht sind reelle Zahlen a, b mit der Eigenschaft, daß die Größe

$$g(a, b) = (y_1 - ax_1 - b)^2 + \dots + (y_n - ax_n - b)^2$$

minimal wird.

Die Aufgabe kann geometrisch interpretiert werden. Wir fassen $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ als Punkte in einem x, y -Koordinatensystem auf. Wenn $n > 2$ ist, existiert im allgemeinen keine Gerade, die durch alle n Punkte hindurchgeht. Es gibt aber praktische Problemstellungen, bei denen man daran interessiert ist, eine Gerade mit einer Gleichung $y = ax + b$ zu finden, die "möglichst gut auf die Punkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ paßt". Wir präzisieren die letzte Forderung dahingehend, daß a, b und damit die Gerade so bestimmt werden sollen, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen den Ordinaten $ax_k + b$ (der Geradenpunkte mit den Abszissen x_k) und den vorgegebenen Ordinaten y_k ($k = 1, \dots, n$) minimal wird. Mit anderen Worten, die Größe $g(a, b)$ soll möglichst klein werden.

Wir kommen zur Lösung des eingangs gestellten Problems. Der Leser kann durch Rechnung nachprüfen, daß $g(a, b)$ in folgender Weise darstellbar ist:

$$(1) \quad g(a, b) = g(\hat{a}, \hat{b}) + [(a - \hat{a})x_1 + (b - \hat{b})]^2 + \dots + [(a - \hat{a})x_n + (b - \hat{b})]^2,$$

wobei folgende Abkürzungen benutzt werden

$$\hat{a} = \frac{\frac{1}{n} (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) - \bar{x} \bar{y}}{\sigma^2(x_1, \dots, x_n)},$$

$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a} \bar{x},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n),$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} (y_1 + \dots + y_n),$$

$$s^2(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} (x_1^2 + \dots + x_n^2) - \bar{x}^2.$$

An der neuen Darstellung (1) für $g(a,b)$ kann abgelesen werden, daß stets

$$g(a,b) \geq g(\hat{a}, \hat{b})$$

ist, und daß $g(a,b)$ den minimalen Wert $g(\hat{a}, \hat{b})$ genau dann annimmt, wenn

$$a = \hat{a}$$

und

$$b = \hat{b}$$

ist.

Die gesuchte Gerade genügt also der Gleichung

$$(2) \quad y = \hat{a}x + \hat{b}$$

oder in anderer Schreibweise

$$(3) \quad y - \bar{y} = \hat{a}(x - \bar{x}).$$

Aus der Darstellung (3) ist ersichtlich, daß die ermittelte Gerade durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ des Punktesystems $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ verläuft. Für $n=2$ geht (2) über in die übliche Zweipunktgleichung

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Auf eine Aufgabenstellung der obigen Art kann man etwa durch folgendes praktische Problem geführt werden: Es sei bekannt, daß zwischen zwei variablen physikalischen Größen x, y ein Zusammenhang der Form $y=ax+b$ bestehe. In einem (x,y) -Koordinatensystem kann dieser Zusammenhang graphisch durch eine Gerade veranschaulicht werden. Die Größe x sei in einem gewissen Bereich beliebig wählbar; das zugehörige y kann man durch Messung bestimmen. Alle Messungen der Größe y seien mit zufälligen Meßfehlern behaftet. Die Naturkonstanten a, b seien noch nicht genügend gut bekannt und sollen durch Messungen genauer bestimmt werden. Genauer gesagt, es sollen n Werte $x_1, \dots, x_n$ für x (Meßstellen) gewählt, durch Messung zugehörige $y_1, \dots, y_n$ (Meßwerte) gewonnen und daraus Schätzwerte für a, b ermittelt werden. Durch den Ein-

fluß der zufälligen Meßfehler liegen die Punkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ im (x, y) -Koordinatensystem im allgemeinen nicht auf einer Geraden, schon gar nicht auf der gesuchten Geraden mit der Gleichung $y = ax + b$. Es liegt nahe, Schätzwerte für a, b dadurch zu ermitteln, daß man eine Gerade sucht, die "möglichst gut auf die Punkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ paßt". Häufig wird die Gerade nach dem oben besprochenen Verfahren festgelegt, d.h. man nimmt die oben angegebenen Größen $\hat{a}, \hat{b}$ als Schätzwerte für a, b . Man sagt in diesem Fall, man habe a, b nach der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt. In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen über die Natur der Meßfehler die Methode der kleinsten Quadrate bei festem n besonders gute Schätzwerte liefert, und daß die Schätzungen um so genauer werden, je größer n ist. (Die Meßfehler mitteln sich sozusagen heraus.)

Die besprochene näherungsweise Bestimmung linearer Zusammenhänge zwischen reellen Größen x, y stellt nur einen Spezialfall der Anwendung der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate dar (lineare Regression). Wenn man von der Methode der kleinsten Quadrate spricht, meint man ein viel umfassenderes Prinzip zur näherungsweisen Beschreibung von Zusammenhängen in einem vorgegebenen Zahlenmaterial. Ein spezielles Problem soll als Beispiel noch genannt werden. Es kann etwa zwischen einer unabhängigen Variablen x und einer abhängigen Variablen y ein Zusammenhang der Form $y = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ vorgegeben sein. Aus Meßwerten $y_1, \dots, y_n$, die durch zufällige Meßfehler verfälscht sind, und die vorgegebenen Meßstellen $x_1, \dots, x_n$ zugeordnet sind, sollen Schätzwerte $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m$ für $a_0, a_1, \dots, a_m$ gewonnen werden. Auch hier werden $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m$ so bestimmt, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen y_k und $\hat{y}_k = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_k + \dots + \hat{a}_m x_k^m$ ($k=1, \dots, n$) minimal wird.

Die Methode der kleinsten Quadrate hat sich historisch als Bestandteil der Theorie der Beobachtungsfehler herausgebildet und wurde insbesondere bei der Bearbeitung von Meßdaten in der Astronomie und in anderen Naturwissenschaften angewendet. Sie wurde

von den Mathematikern A.M. LEGENDRE (1752-1833), P.S. LAPLACE (1749-1827) und C.F. GAUSS (1777-1855) entwickelt. Auch in der modernen mathematischen Statistik ist die Methode der kleinsten Quadrate von grundlegender Bedeutung.

Prof. Dr. Mecke
Bereich WMS

Professor Dr. M e c k e - Verfasser des vorstehenden Artikels - ist Bereichsleiter des Bereiches Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena.

Nach Beendigung seines Mathematikstudiums an der Friedrich-Schiller-Universität Jena im Jahre 1961 wurde er zunächst Assi-



stent. Dabei war er in der Grundausbildung der Diplom- und Lehrerstudenten unserer Sektion in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematischer Statistik (WMS) tätig. Er promovierte 1964 und habilitierte 6 Jahre später. Im gleichen Jahr (1970) wurde er Dozent und übernahm damit auch die Spezialausbildung der Mathematikstudenten in diesem Fach. Seit 1973 leitet er den Bereich WMS. Vor zwei Jahren berief man ihn zum Professor.

Seine Tätigkeit in der mathematischen Grundlagenforschung richtet sich auf das Gebiet "Zufällige Maße, Punktprozesse und stochastische Geometrie". Ein Studienaufenthalt in Moskau, Teilnahme an internationalen Tagungen sowie eine Reihe von Veröffentlichungen zeugen von intensiver Arbeit. Für die geleistete Arbeit auf dem Gebiet der Punktprozesse erhielt das Forscherkollektiv, dessen Mitglied Prof. Dr. Mecke ist, den Nationalpreis der DDR.

Diplomlehrer für Mathematik und Physik

Der Zeitpunkt Ihrer Entscheidung für einen Beruf rückt immer näher. Wir möchten Sie heute etwas über den Beruf eines Mathematik-/Physiklehrers informieren. Vielleicht können wir bei Ihnen Interesse für diese wichtige und schöne Tätigkeit wecken.

Zunächst gilt es, die Tätigkeit des Lehrers als eine zutiefst gesellschaftliche zu begreifen. Es ist ein wichtiger Auftrag unserer sozialistischen Gesellschaft, junge Menschen so zu erziehen und zu bilden, daß sie den Willen haben und in der Lage sind, ihre ganze Kraft, ihren Mut, ihre Ideen, ihre ganze Persönlichkeit vorbehaltlos für die Sache des Sozialismus/Kommunismus einzusetzen. Deshalb wird dem Lehrer die Aufgabe gestellt, heute schon, nicht erst in ferner Zukunft, die Schüler zu allseitig entwickelten kommunistischen Persönlichkeiten heranzubilden und zu erziehen, Persönlichkeiten, welche die Qualitäten eines politischen Kämpfers mit hoher Bildung, einem hohen Kulturniveau und körperlicher Leistungsfähigkeit in sich vereinen. L. I. Breschnew charakterisierte auf einem Unionskongress sowjetischer Lehrer die Tätigkeit und die Bedeutung des Lehrers wie folgt:

"In unserem Land ist der Schullehrer einer der ehrenvollsten und vom Volke geachteten Berufe. Man sagt richtig, der Mensch verändert durch seine Arbeit die Natur. Aber die Arbeit des Lehrers ist deshalb wertvoll und schön, weil sie den Menschen selbst formt. Und was der Mensch im Leben auch immer geworden ist - jeder erinnert sich mit dem Gefühl der Dankbarkeit an seine Lehrer, seine Schule. Der Lehrer stellt, bildlich gesprochen, die Verbindung der Zeiten dar. Er ist ein Glied in der Kette der Generationen. Er reicht gleichsam die Stafette aus der Gegenwart in die Zukunft weiter, und das macht seine Arbeit so bezaubernd, fürwahr schöpferisch".

Obwohl Sie als Leser der WURZEL sicher zu den an der Mathematik interessierten jungen Menschen gehören, möchten wir auch Sie darauf hinweisen:

Es gibt keinen Bereich des gesellschaftlichen Lebens, in dem

nicht ständig mathematische Methoden und Verfahren an Bedeutung gewinnen. Ihre Anwendung wird immer vielfältiger. Deshalb ist bereits während der Schulzeit die Herausbildung eines sicheren, exakten, systematisch aufgebauten und anwendungsbereiten mathematischen Wissens und Könnens bei allen Schülern außerordentlich wichtig. Dazu sind viele qualifizierte Fachlehrer für Mathematik nötig.

Der Mathematiklehrer erfüllt eine sehr wichtige Aufgabe. Von ihm hängt es mit ab, wie gut z. B. später ein Naturwissenschaftler, Ökonom oder ein Facharbeiter seinen Platz in der Gesellschaft ausfüllen kann. Ist es nicht ein erstrebenswertes Ziel, eine verantwortungsvolle Aufgabe zu haben, die von großem gesellschaftlichem Nutzen ist? Wir sind selbst seit vielen Jahren Lehrer und Lehrerbildner und stolz darauf, jungen Menschen geholfen zu haben, einen festen Platz in unserer sozialistischen Gesellschaft zu finden.

Den Erfordernissen an den Lehrerberuf Rechnung tragend, erfolgt in unserer Republik die Ausbildung von Diplomlehrern an den Universitäten oder Hochschulen für jeweils zwei Unterrichtsfächer. Im Rahmen unserer Ausführungen ist es nur möglich, auf das Studium in Mathematik etwas näher einzugehen.

Die Lehrerausbildung schafft alle notwendigen Grundlagen und Voraussetzungen, damit der Absolvent der Hochschule oder Universität befähigt wird, den vielgestaltigen Anforderungen der Lehrertätigkeit gerecht zu werden. Das geschieht durch die Vermittlung umfangreicher theoretisch fundierter Kenntnisse in Marxismus-Leninismus, Pädagogik, Psychologie, Methodik, Mathematik und Physik, durch Vorbereitung auf die politische Funktion und Verantwortung des Lehrers.

Ein umfangreiches Wissen in Analysis, Algebra und Arithmetik, höherer Geometrie und anderen für das tiefere Verständnis des Schulstoffes wichtigen Disziplinen der Mathematik erhalten die Studenten in einem sich über vier Semester erstreckenden Grundkurs Mathematik. Dabei werden auch Bezüge zum Mathematiklehrgang der Klassen 1 bis 12 hergestellt. An den Grundkurs schließen sich solche Lehrgebiete an wie Numerische Mathematik und Rechen-

technik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik, Geschichte der Mathematik und weltanschaulich-philosophische Aspekte der Mathematik. Auch für das Fach Physik gibt es einen Grundkurs. Hier erfolgt aus theoretischer und experimenteller Sicht u. a. eine Einführung in die Mechanik, die Thermodynamik und Elektronik. Durch die Ausbildung in Theoretischer Physik und das Fachpraktikum werden diese Kenntnisse erweitert.

Das Fachstudium erfordert auf Grund der Abstraktheit und des Umfangs des Gegenstandes sehr beharrliche Arbeit. Günstig bzw. fast unerlässlich ist es für die Vorbereitung auf dieses Studium, sich durch längere außerunterrichtliche Tätigkeit auf dem Gebiet der Mathematik - Teilnahme an Mathematikolympiaden und an Zirkeln, Lösen von Aufgaben aus den Zeitschriften WURZEL oder "alpha" u. a. - bereits ein gewisses Vertrautsein mit mathematischen Denkweisen über den Unterricht hinausgehend zu erwerben.

Solche Charaktereigenschaften wie Beharrlichkeit, kritische Einschätzung der eigenen Arbeitsergebnisse, Zielstrebigkeit, die Fähigkeit, mit Rückschlägen und Belastungen in Prüfungssituationen fertigzuwerden, sind für ein Studium unerlässlich.

Im 2. bzw. 3. Studienjahr beginnt die Ausbildung in Methodik des Physik- und Mathematikunterrichts. Hier werden in der theoretischen und schulpraktischen Ausbildung wesentliche Voraussetzungen dafür geschaffen, daß Sie einen wissenschaftlichen, parteilichen und lebensverbundenen Fachunterricht erteilen können. Sie lernen, welchen Beitrag Sie als Mathematik/Physik-Lehrer zur Entwicklung kommunistischer Schülerpersönlichkeiten leisten können. Sie lernen, wie man z. B. ein neues Stoffgebiet einführt, wie man Beweise führt, Experimente vorbereitet und durchführt, Hausaufgaben stellt und Leistungen ermittelt und bewertet.

Die Praktika, z. B. das Pionierlagerpraktikum und das Große Schulpraktikum sind Höhepunkte und Bewährungsproben in der schulpraktischen Ausbildung. Sie haben die ersten Kontakte mit den Schülern. Hier sehen Sie die Ergebnisse Ihrer Arbeit direkt, erleben Sie, wie schön es sein kann, junge Menschen zu bilden und zu erziehen. Sie erkennen aber auch, wie sich Fehler und

Mängel in der Erziehung auswirken. Hier spüren Sie das Vertrauen Ihrer Schüler, hier erleben Sie, wie schwer und widersprüchlich der Weg ist, bis Sie als Freund, Helfer und Vorbild junger Menschen anerkannt werden. Dabei sind solche Eigenschaften wie hohe Einsatzbereitschaft, Initiative und Verantwortungsbewußtsein besonders bedeutsam für den jungen Lehrer.

Im vorletzten Jahr Ihres Studiums erhalten die Studenten das Thema ihrer Diplomarbeit. Erfahrene Betreuer beraten bei deren Anfertigung. Mit der Verteidigung der Diplomarbeit schließen die Studenten ihr Studium ab und erreichen den akademischen Grad "Diplomlehrer für Mathematik und Physik".

Während des 3. und 4. Studienjahres werden mit ihnen Gespräche über den zukünftigen Einsatz geführt. Er erfolgt in der Regel in den Klassen 5 bis 10 der POS, in Ausnahmefällen auch an anderen Bildungseinrichtungen.

Nicht wenige unserer Absolventen sind heute erfolgreich als Fachlehrer, Fachzirkelleiter an den Schulen, als Fachberater oder Direktoren tätig und finden Freude und Befriedigung in ihrer Arbeit.

Großzügige Vergünstigungen unserer Regierung für die Lehrer, wie z. B. die zusätzliche Altersversorgung der Intelligenz, die Landlehrerzulage, die jährliche zusätzliche Vergütung und die umfangreichen Möglichkeiten zur Weiterbildung werden von allen im Schuldienst Tätigen hoch eingeschätzt.

Haben Sie Interesse an der Mathematik und Physik und auch Freude daran, sie anderen zu vermitteln, anderen zu helfen, sich diese Fächer anzueignen, dann können wir aus eigener langjähriger Erfahrung sagen: Diplomlehrer für Mathematik und Physik - ein interessanter Beruf für Sie!

Oberlehrer Gisela Schulze

Klaus Scheibe

Dr. Reinhold Mattasch

wiss. Mitarbeiter im Bereich

Methodik des Mathematikunterrichts

Preisaufgaben

L 25 Man löse das Gleichungssystem

①

$$7 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 48$$

$$7 \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) = 48$$

L 26 Man beweise für alle positiven a, b und c die folgende Ungleichung:

①

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

L 27 Man berechne die rationalen Lösungen der Gleichung

①

$$\frac{\sqrt{x+2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{x+2}} = \frac{4}{3} \sqrt{3}$$

L 28 Man zeige, daß die Funktion

②

$$\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1} = f(x)$$

für alle x mit $1 \leq x \leq 2$ konstant ist.

L 29 Es seien g und h zwei nichtparallele Geraden auf einer Ebene. Man finde dasjenige Objekt, das aus allen Punkten besteht, für die die Summe der Abstände zu g und h gleich einer Konstanten a ist.

①

L 30 Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно q. Найти отношение объемов этих тел.

②

Lösungsbedingungen

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 15. 8. 1979

Lösungen

Aufgabe K 61

$$5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1} = 5^3 \cdot 25^{n-1} + 3^3 \cdot 6^{n-1}$$

Es gilt: $25 \equiv 6 \pmod{19}$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 5^3 \cdot 25^{n-1} + 3^3 \cdot 6^{n-1} &\equiv (5^3 \cdot 6^{n-1} + 3^3 \cdot 6^{n-1}) \pmod{19} \\ &\equiv (5^3 + 3^3) 6^{n-1} \pmod{19} \\ &\equiv 152 \cdot 6^{n-1} \pmod{19} \\ &\equiv 19 \cdot 8 \cdot 6^{n-1} \pmod{19} \\ &\equiv 0 \pmod{19} \end{aligned}$$

Also gilt, daß für alle $n \geq 1$ die Zahl $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ durch 19 teilbar ist.

Aufgabe K 62

Wir bilden aus den 1000 gegebenen Zahlen $z_1, \dots, z_{1000}$ Partialsummen:

$$s_1 = \sum_{k=1}^1 z_k.$$

1. Fall: Es existiert ein s_1 mit

$$s_1 \equiv 0 \pmod{1000}.$$

2. Fall: Es existiert kein solches s_1 .

Wir haben 1000 Partialsummen s_i , es existieren jedoch jedoch nur 999 von 0 verschiedene Kongruenzklassen mod 1000. Folglich existieren i und j mit $j \neq i$, für die gilt:

$$s_j \equiv s_i \pmod{1000}.$$

Es gilt somit:

$$s_j - s_i = \sum_{k=i+1}^j z_k \equiv 0 \pmod{1000}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe K 63

$$a-x = \sqrt{a^2-x^2} \sqrt{x^2+a^2}$$

Es muß also stets $a \geq x$ gelten.

$$(a-x)^2 = a^2 - x\sqrt{x^2+a^2}$$

$$x(x-2a) = -x\sqrt{x^2+a^2}$$

Die erste Lösung ist also $x = 0$, was durch die Probe auch bestätigt wird; diese Lösung ist richtig für alle $a \geq 0$. Es wird jetzt $x \neq 0$ vorausgesetzt.

$$2a-x = \sqrt{x^2+a^2}$$

$$4a^2 - 4ax + x^2 = x^2 + a^2$$

$$a(3a - 4x) = 0$$

1. Fall: $a = 0$.

$$-x = \sqrt{0-x\sqrt{x^2-0}} = \sqrt{-x \cdot |x|}$$

Folglich sind alle $x \leq 0$ in diesem Falle Lösungen.

2. Fall: $a \neq 0$

$$3a - 4x = 0$$

$$x = \frac{3}{4}a$$

Aus der Bedingung $a \geq x$ folgt jetzt sofort $a \geq 0$.

Die Probe bestätigt diese Lösung.

Es ergeben sich somit folgende Lösungen:

$$a = 0 ; \quad x \leq 0 \text{ beliebig}$$

$$a > 0 ; \quad x = 0, \quad x = \frac{3}{4}a$$

Für $a < 0$ existieren keine Lösungen.

Aufgabe K 64

$$a \tan \alpha + b \tan \beta = (a+b) \tan \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= (a+b) \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$(a \tan \alpha + b \tan \beta) 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= (a+b) 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(a \tan \alpha + b \tan \beta) (\cos \alpha + \cos \beta) = (a+b)(\sin \alpha + \sin \beta)$$

Durch einfaches Umstellen ergibt sich die Behauptung

$$a \cos \beta = b \cos \alpha .$$

Aufgabe K 65

Der Beweis wird induktiv geführt.

Für $n = 1$ gilt die Behauptung offensichtlich. Nun gelte die Behauptung für n .

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = \sum_{k=1}^n k \cdot k! + (n+1)(n+1)! =$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$$= (1+(n+1))(n+1)! - 1$$

$$= (n+2)(n+1)! - 1$$

$$= (n+2)! - 1.$$

Somit gilt die Behauptung auch für $n+1$, und damit gilt sie nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle natürlichen Zahlen.

Aufgabe K 66

Gegeben sei das Viereck ABCD und auf den Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ die Mittelpunkte M und N. Auf der Geraden durch D und N wird ein Punkt E so festgelegt, daß $\overline{DN} = \overline{NE}$ gilt. E wird jetzt mit A verbunden. Da $\overline{MN}$ die Mittellinie des Dreiecks AED ist, gilt:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AE}}{2} .$$

Nach Kongruenzsatz gilt offensichtlich:

$$\triangle NBE \cong \triangle CND$$

und somit auch $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{BE} = \overline{CD}$. Nach Voraussetzung gilt aber $\overline{MN} = \frac{\overline{AB+CD}}{2}$ und folglich auch $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AE}$. Dies ist jedoch nur möglich, wenn B auf $\overline{AE}$ liegt und damit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Damit ist die Aussage bewiesen.

EOS „Heinrich Hertz“ Berlin - Spezialschule mathematischer Richtung

Die EOS "Heinrich Hertz", Spezialschule mathematischer Richtung, besteht seit 1961. Je Klassenstufe gibt es vier Klassen, in denen die Schüler alle gleichermaßen eine zusätzliche Ausbildung in Mathematik im Rahmen des Unterrichts erfahren. Der Lehrplan umfaßt neben dem Schulstoff in Anfängen solche Gebiete wie Logik, Mengenlehre und führt aufbauend auf dem Schulstoff noch weiter in Analysis und lineare Algebra ein. Die wöchentliche Stundenzahl in Mathematik beträgt 8. Die in der Abiturstufe vorgesehenen Stunden für fakultativen Unterricht sind obligatorische Mathematikstunden für alle Schüler. Neben dem Unterricht bestehen noch weitere Möglichkeiten der Beschäftigung mit der Mathematik, z. B. im Rahmen der MSG, die von der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität und der Abteilung Volksbildung betreut wird. Da unsere Schule enge Kontakte zur Humboldt-Universität hat, besteht für besonders begabte Schüler die Möglichkeit der speziellen Förderung durch Wissenschaftler.

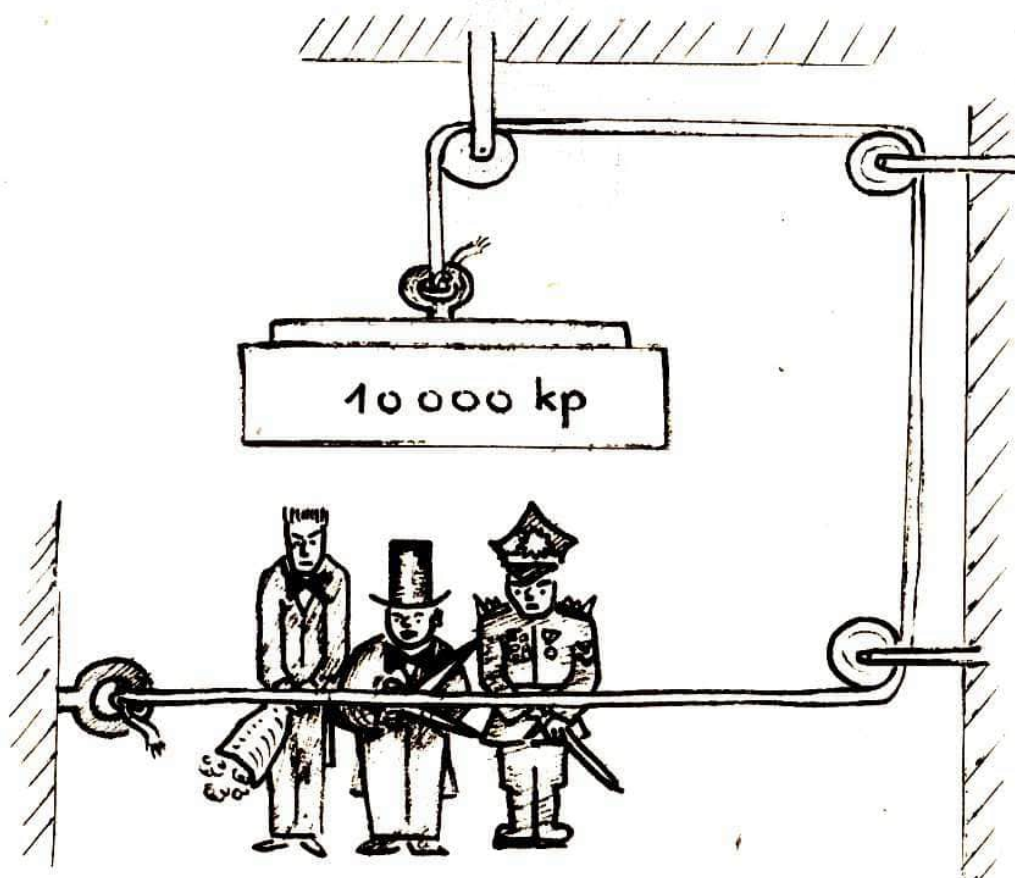
Neben der Mathematik werden auch in den anderen Naturwissenschaften, besonders der Physik, höhere Anforderungen gestellt. Die Erfolge zeigen sich besonders bei den Mathematik- und Physik-Olympiaden der DDR, aber auch bei den internationalen Olympiaden, an denen oft Schüler unserer Schule teilnehmen. Es kann hier leicht der Eindruck entstehen, daß bei uns nur auf mathematischem Gebiet große Aktivitäten zu verzeichnen sind. Es ist aber vielmehr so, daß eine gute Allgemeinbildung und Persönlichkeitsbildung nicht aus dem Auge gelassen wird. Das äußert sich, wie bereits erwähnt, in den höheren Anforderungen in den anderen Fächern, nicht nur den Naturwissenschaften, sondern auch in den Gesellschaftswissenschaften und Sprachen. Hervorzuheben sind an dieser Stelle auch die Arbeitsgemeinschaften Sport, Literatur, Biologie, Physik, Russisch, der Singeklub und der Schulklub. Viele Schüler beschäftigen sich außerunterrichtlich mit Musik u. v. a. m. Zusammengefaßt besteht die Aufgabe der Schule in der Erziehung von Persönlichkeiten mit spezieller mathematischer und hoher Allgemeinbildung. Daraus ergeben sich auch die Studienrichtungen, auf

die schwerpunktmäßig orientiert wird: Mathematik, Physik, Mathematik/Physik-Lehrer, Offizier und die technischen Studienrichtungen. Jährlich nehmen einige Schüler von uns ein Studium in einem der befreundeten Bruderländer auf.

Jetzt noch ein paar Worte dazu, wie man überhaupt an unsere Schule kommt. Eine Delegation in eine Vorbereitungs-klasse der EOS ist Voraussetzung für einen Antrag auf Besuch der Schule. Die entsprechenden Schüler legen dann Anfang des 2. Halbjahres der 8. Klasse eine schriftliche Prüfung ab, die den Stoff der 7. und 8. Klasse umfaßt und 4 Stunden dauert. Dieser Prüfung schließt sich ein Gespräch an, das auch dazu dienen soll, den Schüler als Persönlichkeit, seine Haltung, Arbeit in der FDJ usw. einzuschätzen und dem Schüler die Möglichkeit der Selbsteinschätzung zu geben. Die Delegation erfolgt auf Grund der Prüfungen und Gespräche unter Beachtung der sozialen Zusammensetzung. Wer nicht delegiert wird, besucht eine Vorbereitungs-klasse einer anderen Schule. Da die Schule nicht über Internatsplätze verfügt, ist es bisher nur Schülern aus Berlin und der näheren Umgebung möglich, aufgenommen zu werden.

Zum Abschluß möchte ich noch kurz meine eigene Meinung zu "meiner" Schule äußern. Jetzt kann ich sagen, es hat Spaß gemacht. Wir haben viel gelernt, was wir jetzt brauchen können, nicht nur fachlich, sondern auch rein methodisch. Ich glaube, wir haben auch einfach so fürs Leben einiges mitbekommen. Die vier Jahre waren sicherlich nicht immer einfach und mit etlichen Tiefpunkten und Rückschlägen verbunden. Doch diese aus eigener Kraft und mit Hilfe anderer zu überwinden, Schwierigkeiten nicht auszuweichen - das lernte ich vor allem hier.

Dorothea Heinrich
Mathematikstudentin
1. Studienjahr



Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild

Redaktion: G. Blume, H. Gottstein, H. Schwulow, D. Meinhardt, V. Wedler, G. Müller
D. Heinrich und J. Heß

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

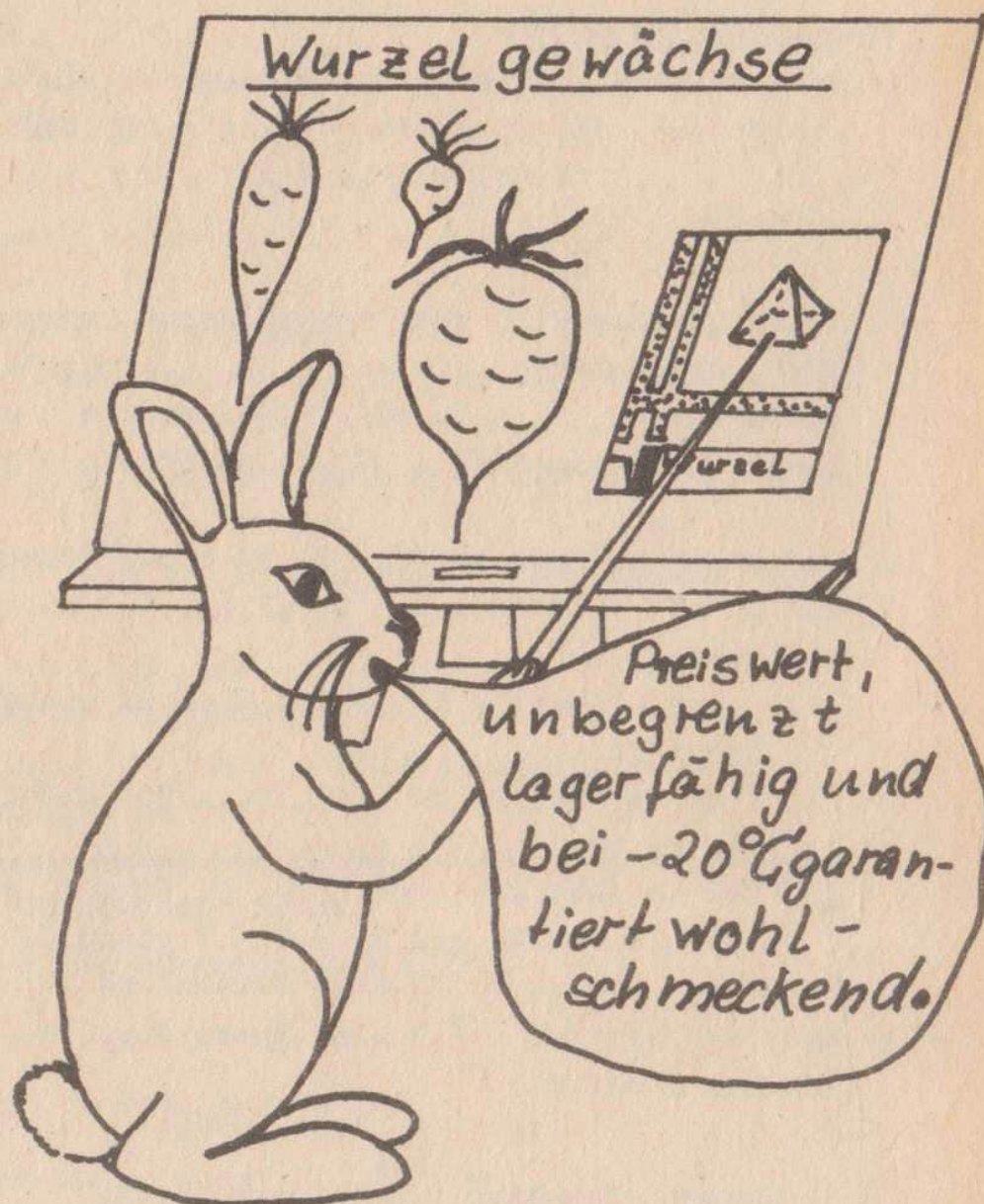
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement
0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der
DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 6. 4. 1979



WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Univer-
sität Jena

13. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

6

79

Aufgaben der Bezirkssolympiade 1979

(Klassenstufe 11/12)

1. Man ermittle alle diejenigen Polynome $f(x)$ (mit reellen Koeffizienten), die für alle reellen x die Gleichung

$$f(x+1) - f(x) = x+1$$
 erfüllen.

 2. Im Raum seien A, B zwei verschiedene Punkte und ϵ eine Ebene. Für jede mögliche Lage von A, B, ϵ ermittle man zu diesen gegebenen A, B, ϵ alle diejenigen Punkte C auf ϵ , für die die Abstandssumme $\overline{AC} + \overline{BC}$ möglichst klein ist.

 3. Es ist zu untersuchen, ob es in einer Menge M von 22222 Elementen 50 Teilmengen M_i ($i=1,2,\dots,50$) gibt mit den folgenden Eigenschaften:
 - (1) Jedes Element m von M ist Element mindestens einer der Mengen M_i .
 - (2) Jede der Mengen M_i ($i=1,2,\dots,50$) enthält genau 1111 Elemente.
 - (3) Für je zwei der Mengen M_i, M_j ($i \neq j$) gilt: Der Durchschnitt von M_i und M_j enthält genau 22 Elemente.
-
4. Man beweise: Ist $n \geq 2$ eine ganze Zahl, so ist die für alle reellen x durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \cos(x\sqrt{k})$$
 definierte Funktion f nichtperiodisch.

 5. Es sei $n \geq 2$ eine gegebene ganze Zahl. Man untersuche, ob sich unter allen denjenigen reellen Zahlen $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, für die $x_1 + \dots + x_n = 1$ gilt, auch solche befinden, für die der Wert $x_1^3 + \dots + x_n^3$
 - a) möglichst groß
 - b) möglichst klein
 ist. Ist dies der Fall, so ermittle man diesen größten bzw. kleinsten Wert.
-

- 6A) Es sei (a_n) ($n=0,1,2,\dots$) eine Folge reeller Zahlen, für die $a_0 = 0$ sowie $a_{n+1}^3 = \frac{1}{2}a_n^2 - 1$ für alle $n=1,2,\dots$ gelte.

Man zeige, daß es dann eine positive reelle Zahl $q < 1$ gibt, so daß für alle $n=1,2,\dots$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q |a_n - a_{n-1}|$$

gilt, und gebe eine derartige reelle Zahl q an.

- 6B) Ist $\triangle ABC$ ein Dreieck, so bezeichne
 A' den Bildpunkt von A bei Spiegelung an der Geraden durch B und C ,
 B' den Bildpunkt von B bei Spiegelung an der Geraden durch C und A ,
 C' den Bildpunkt von C bei Spiegelung an der Geraden durch A und B .

Mit diesen Bezeichnungen beweise man: Genau dann ist

$\triangle A'B'C'$ ein zu $\triangle ABC$ ähnliches Dreieck - mit jeweils A, A' bzw. B, B' bzw. C, C' als entsprechenden Ecken-, wenn $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

Lösungen der Olympiadeaufgaben (Bezirksolympiade 1979, Klassenstufe 11/12)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Zunächst wird gezeigt, daß kein Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

vom Grad $n \geq 3$ mit $a_n \neq 0$ die geforderte Eigenschaft haben kann. Für jedes solche Polynom ist nämlich in

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= a_n ((x+1)^n - x^n) + a_{n-1} ((x+1)^{n-1} - x^{n-1}) + \dots + \\ &\quad + a_1 ((x+1) - x) \end{aligned} \quad (1)$$

jeweils

$$(x+1)^i - x^i \quad (1 \leq i \leq n)$$

(nach Entwicklung von $(x+1)^i$ und nach Zusammenfassen) ein Polynom, das x^{i-1} als höchste Potenz mit von 0 verschiedenem Koeffizienten enthält, und daher kommt insgesamt in (1) die Potenz x^{n-1} als höchste Potenz mit von 0 verschiedenem Koeffizienten

vor. Also kann (1) nicht für alle reellen x gleich dem Polynom $x+1$ sein (das wegen $n \geq 3$ bei x^{n-1} den Koeffizienten 0 hat), da Polynome nur dann für alle reellen x übereinstimmen, wenn sie gliedweise (d. h. in ihren Koeffizienten jeweils bei der gleichen Potenz von x) übereinstimmen.

Somit können nur Polynome

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

die verlangte Eigenschaft haben. Ein solches Polynom hat wegen

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= a_2(x^2 + 2x + 1) + a_1(x+1) + a_0 - a_2 x^2 - a_1 x - a_0 \\ &= 2a_2 x + a_2 + a_1 \end{aligned} \quad (2)$$

genau die geforderte Eigenschaft, wenn (2) gliedweise mit $x+1$ übereinstimmt, d. h. genau dann, wenn a_2, a_1, a_0 reelle Zahlen sind, die die Gleichungen

$$2a_2 = 1,$$

$$a_2 + a_1 = 1$$

erfüllen. Diese sind äquivalent mit

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{2}.$$

Daher sind genau alle Polynome

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x + a_0$$

(mit beliebigem reellem a_0) die gesuchten.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

- (1) Die Strecke AB habe nichtleeren Durchschnitt $^1)$ mit ε . Für jeden Punkt C auf ε , der zu diesem Durchschnitt gehört, d. h., der auf der Strecke AB liegt, gilt $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$. Für jeden Punkt C auf ε dagegen, der nicht auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt, gilt $\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AB}$. Liegt ein solcher Punkt C nämlich auf der Verlängerung von BA über A hinaus, so gilt sogar $\overline{BC} > \overline{AB}$; liegt C auf der Verlängerung von AB über B hinaus, so gilt sogar $\overline{AC} > \overline{AB}$; liegt aber C nicht mit A, B auf derselben Geraden, so besagt die Dreiecksungleichung, daß $\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AB}$ gilt.

Daher haben im Falle (1) genau alle Punkte C des Durchschnitts von ε mit der Strecke AB die geforderte Eigenschaft.

(2) Die Strecke AB habe keinen Punkt mit ε gemeinsam.

Durch Spiegelung von A an ε entstehe A'. Dann gilt einerseits für jeden Punkt C, der auf ε liegt, $\overline{A'C} = \overline{AC}$. Andererseits hat nun die Strecke A'B genau einen Schnittpunkt mit ε . Wendet man daher (1) auf A'B an, so folgt: Im Falle (2) hat genau der Schnittpunkt C von ε mit der Strecke A'B die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Angenommen, für 50 derartige Teilmengen M_i seien (1), (2), (3) erfüllt. Dann folgt:

Für jedes $k=1, \dots, 50$ bezeichne N_k die Menge aller derjenigen Elemente von M, die die Eigenschaft haben, Element von genau k verschiedenen unter den Mengen M_i zu sein. Enthält jeweils N_k genau n_k Elemente, so gilt nach (1)

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{50} = 22\,222. \quad (4)$$

Ordnet man jeweils einem Element aus M genau dann die Zahl k zu, wenn es in N_k liegt, und addiert hiernach die zugeordneten Zahlen aller Elemente von M ^{*)}, so erhält man dieselbe Summe, die man bekommt, wenn man für jedes $i=1, \dots, 50$ die Anzahl der Elemente in M_i bildet und diese Anzahlen addiert. Wegen (2) beträgt jede dieser Anzahlen 1 111, also gilt

$$1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + \dots + 50 \cdot n_{50} = 50 \cdot 1\,111 = 55\,550. \quad (5)$$

Für jedes Paar (i, j) ganzer Zahlen mit $1 \leq i < j \leq 50$ bezeichne D_{ij} den Durchschnitt von M_i und M_j . Es gibt genau $\binom{50}{2} = 1225$ solcher Paare. Ordnet man jeweils einem Element m aus M genau dann die Zahl h zu, wenn genau h verschiedene dieser Paare (i, j) mit $m \in D_{ij}$ existieren, und addiert hiernach die zugeordneten Zahlen aller Elemente von M, so erhält man wegen (3) die Summe $1225 \cdot 22 = 26950$.

Liegt andererseits ein Element m von M in N_k , so existieren zu ihm mindestens k-1 verschiedene Paare (i, j) mit $m \in D_{ij}$, also gilt $0 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 + \dots + 49 \cdot n_{50} \leq 26950$. (6)

¹⁾ Falls A und B auf ε liegen, ist dieser Durchschnitt die gesamte Strecke AB, anderenfalls besteht er aus genau einem Punkt.

Aus (4) und (6) folgt

$$1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + \dots + 50 \cdot n_{50} \leq 22\,222 + 26\,950 = 49\,172.$$

Da dies (5) widerspricht, muß die eingangs gemachte Annahme falsch sein. Es kann also 50 derartige Teilmengen nicht geben.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Angenommen, f wäre periodisch. Dann gäbe es eine Zahl $p \neq 0$ mit $f(p) = f(0)$. Aus dieser Gleichung, d. h. aus

$$\sum_{k=1}^n \cos(p \sqrt{k}) = n$$

folgte wegen $\cos(p \sqrt{k}) \leq 1$ ($k=1, \dots, n$), daß

$$\cos(p \sqrt{k}) = 1 \text{ für alle } k=1, \dots, n.$$

also wegen $n \geq 2$ insbesondere

$$\cos p = 1 \tag{1}$$

$$\text{und} \quad \cos p\sqrt{2} = 1 \tag{2}$$

gelten müßte.

Aus (1) folgte die Existenz einer ganzen Zahl m_1 mit

$$p = 2m_1 \pi,$$

aus (2) folgte die Existenz einer ganzen Zahl m_2 mit

$$p\sqrt{2} = 2m_2 \pi.$$

Wegen $p \neq 0$ wäre auch $m_1 \neq 0$, und es ergäbe sich der Widerspruch, daß

$$\sqrt{2} = \frac{m_2}{m_1}$$

eine rationale Zahl wäre. Damit ist die Annahme, f wäre periodisch, widerlegt.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

a) Für alle genannten x_i gilt $x_i \leq 1$, also $x_i^3 \leq x_i$ ($i=1, \dots, n$) und daher $x_1^3 + \dots + x_n^3 \leq x_1 + \dots + x_n = 1$.

Ferner erfüllen z. B. $x_1 = 1, x_2 = \dots = x_n = 0$ die Bedingungen, $x_i \geq 0$ und $x_1 + \dots + x_n = 1$, und für diese Zahlen ist $x_1^3 + \dots + x_n^3 = 1$.

*) Hierfür besteht auch die Ausdrucksweise, jedes Element von M "werde k -fach gezählt", wenn es in N_k liegt.

Daher befinden sich unter den genannten x_i auch solche, für die $x_1^3 + \dots + x_n^3$ möglichst groß ist; der größte Wert beträgt 1.

b) Die Zahlen $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$ erfüllen die Bedingungen $x_i \geq 0$ und $x_1 + \dots + x_n = 1$, und für diese Zahlen ist

$$x_1^3 + \dots + x_n^3 = n \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Sind ferner $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ beliebige Zahlen mit $x_1 + \dots + x_n = 1$, so seien $d_1, \dots, d_n$ diejenigen Zahlen, für die $x_i = \frac{1}{n} + d_i$ ($i=1, \dots, n$) gilt. Wegen $x_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ gilt dann $d_i \geq -\frac{1}{n}$ ($i=1, \dots, n$) und $\sum_{i=1}^n d_i = 0$, also

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^3 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} + d_i \right)^3 \\ &= n \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^2} \sum_{i=1}^n d_i + \sum_{i=1}^n d_i^2 \left(\frac{3}{n} + d_i \right) \\ &\geq n \cdot \frac{1}{n^3} + \sum_{i=1}^n d_i^2 \cdot \frac{2}{n} \\ &\geq \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Daher befinden sich unter den genannten x_i auch solche, für die $x_1^3 + \dots + x_n^3$ möglichst klein ist; der kleinste Wert beträgt $\frac{1}{n^2}$.

Aufgabe 6A (7 Punkte)

Es wird zuerst durch vollständige Induktion bewiesen, daß für alle $n=1, 2, \dots$

$$-1 \leq a_n \leq -\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \quad (1)$$

gilt:

Es gilt $a_1^3 = \frac{1}{2} a_0^2 - 1 = -1$, also $a_1 = -1$; somit ist (1) für $n=1$ richtig. Angenommen, für einen Wert $n=k \geq 1$ sei (1) richtig. Dann gilt

$$-1 \leq a_k \leq -\frac{1}{\sqrt[k]{2}}.$$

Daraus folgt $0 < \frac{1}{\sqrt[k+1]{4}} \leq a_k^2 \leq 1$, also $-1 < \frac{1}{2} a_k^2 - 1 = a_{k+1}^3 \leq -\frac{1}{2}$, $-1 \leq a_{k+1} \leq -\frac{1}{\sqrt[k+1]{2}}$, d. h. die Richtigkeit von (1) für den Wert $n=k+1$.

Damit ist (1) bewiesen.

Für alle $n=1,2,\dots$ gilt nun

$$a_{n+1}^3 - a_n^3 = \frac{1}{2} (a_n^2 - a_{n-1}^2), \text{ also}$$

$$(a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_n^2) \cdot |a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{2} |a_n + a_{n-1}| \cdot |a_n - a_{n-1}|. \quad (2)$$

Da wegen (1) für alle $n=1,2,\dots$

$$a_{n+1}^2 + a_{n+1} a_n + a_n^2 \geq 3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \text{ und } -2 \leq a_n + a_{n-1} < 0^1),$$

$$\text{also } \frac{1}{2} |a_n + a_{n-1}| \leq 1$$

gilt, so folgt aus (2)

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \cdot |a_n - a_{n-1}|.$$

Wegen $\sqrt[3]{4} > 4$ ist $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ eine positive Zahl kleiner als 1. Damit ist der geforderte Beweis geführt; als eine Zahl der gesuchten Art ist

$$q = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

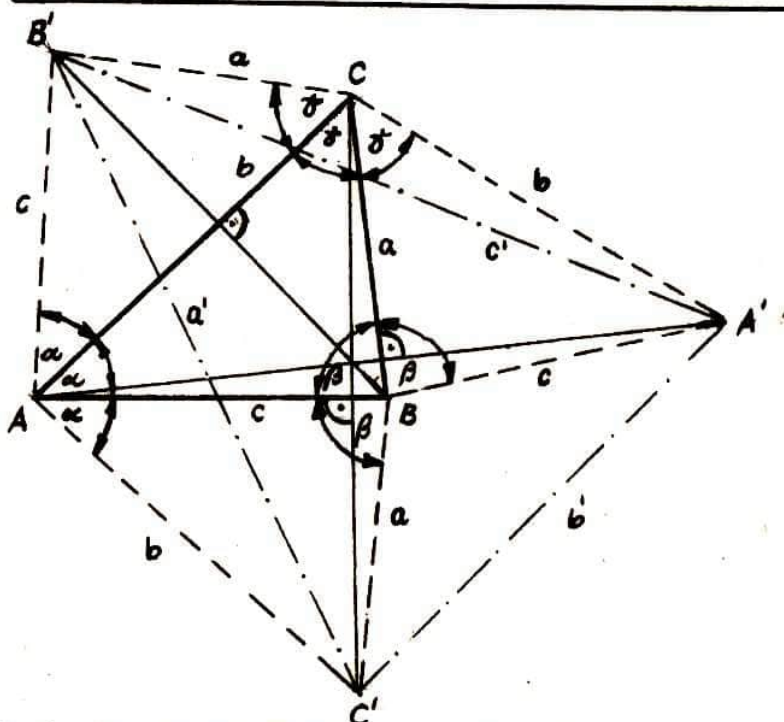
nachgewiesen.

Aufgabe 6B (7 Punkte)

Die Seitenlängen und Winkelgrößen des Dreiecks ABC seien wie üblich mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ bezeichnet, die Längen $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$ mit a' , b' bzw. c' . Nach Definition von B' und C' gilt $\overline{AB'} = c$, $\overline{AC'} = b$, $\sphericalangle B'AC = \sphericalangle CAB = \sphericalangle BAC = \alpha$; ferner liegen B und B' auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A, C, und es liegen C und C' auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A, B. Also hat der (nicht überstumpfe) Winkel, den die Strecken $\overline{AB'}$ und $\overline{AC'}$ einschließen, eine der Größen 3α , $360^\circ - 3\alpha$, $3\alpha - 360^\circ$. Wegen $\cos 3\alpha = \cos (360^\circ - 3\alpha) = \cos (3\alpha - 360^\circ)$ folgt daher aus dem Kosinussatz (oder, wenn $3\alpha = 180^\circ$ ist, aus $\cos 180^\circ = -1$ und $\overline{B'C'} = \overline{B'A} + \overline{AC'}$ bzw., wenn $3\alpha = 360^\circ$ ist, aus $\cos 360^\circ = 1$ und $\overline{B'C'} = |\overline{B'A} - \overline{AC'}|$):

$$a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 3\alpha. \quad (1)$$

1) für $n=1$ folgt dies direkt aus $a_0 = 0$, $a_1 = -1$.



Nach dem Kosinussatz und den Additionstheoremen des Kosinus und des Sinus gilt

$$\cos \alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc},$$

$$4 \cos^2 \alpha - 3 = \frac{1}{b^2 c^2} (a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - 2a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4),$$

$$\cos 3\alpha = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$$

$$= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = (4 \cos^2 \alpha - 3) \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{2b^3 c^3} (-a^6 + 3a^4 b^2 - 3a^2 b^4 + b^6 + 3a^4 c^2 - 3a^2 c^4 - 3a^2 b^2 c^2 - 3a^2 c^4 + c^6), \text{ also}$$

$$a'^2 = \frac{1}{b^2 c^2} (a^6 - 3a^4 b^2 + 3a^2 b^4 - b^6 - 3a^4 c^2 + 3a^2 b^2 c^2 + b^4 c^2 + 3a^2 c^4 + b^2 c^4 - c^6).$$

Durch zyklische Vertauschung von a, b, c ergibt sich

$$b'^2 = \frac{1}{a^2 c^2} (-a^6 + 3a^4 b^2 - 3a^2 b^4 + b^6 + a^4 c^2 + 3a^2 b^2 c^2 - 3b^4 c^2 + a^2 c^4 + 3b^2 c^4 - c^6).$$

Daher ist die Beziehung $a:b = a':b'$ der Reihe nach äquivalent mit

$$a'^2 b^2 = b'^2 a^2,$$

$$2(a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6 - 2a^4c^2 + 2b^4c^2 + a^2c^4 - b^2c^4) = 0,$$

$$(a^2 - b^2) ((a^2 - b^2)^2 - 2(a^2 + b^2)c^2 + c^4) = 0,$$

$$(a^2 - b^2) ((a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2) = 0. \quad (2)$$

Nun gilt $1 > |\cos \gamma| = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2ab}$, also

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0.$$

Somit ist (2) weiter äquivalent mit

$$a^2 - b^2 = 0,$$

$$a = b.$$

Entsprechend folgt, daß $b : c = b' : c'$ äquivalent mit $b = c$ ist. Daher gilt genau dann $a : b : c = a' : b' : c'$, wenn $a = b = c$ gilt, w.z.b.w.

Preisaufgaben

L 31 Was ist größer:

① $\log_3 4$ oder $\log_4 5$?

L 32 Wieviele Lösungen hat die Gleichung

① $\sin x = \frac{x}{100}$

L 33 Man berechne den kleinsten Wert der Funktion

① $y = x(x+1)(x+2)(x+3)$
ohne Benutzung der Differentialrechnung.

L 34 Man finde alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung:

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{250}$.

L 35 Man zeige:

② $\sin 36^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

L 36 На плоскости дан квадрат на стороной a . Найти объем

① тела, состоящего из всех точек пространства, расстояние которых до части плоскости, ограниченной квадратом, не больше a .

Einsendeschluß: 15. 9. 1979

Der zweite Versuch

Liebe Leser!

Unser Mitarbeiter, der jeden Monat 6 knifflige Preisaufgaben für Euch auswählt, versuchte neulich einmal seine Preisaufgaben selbst zu lösen und - verrechnete sich dabei. Die in Wurzel 2/79 auf den Seiten 28, 29 und 30 abgedruckten Lösungen der Preisaufgaben K 49, K 50 und K 51 sind völlig falsch! Wir bemerkten unsere Fehler erst, als Eure richtigen Lösungen bei uns eintrafen. Da war die Wurzel 2/79 aber schon gedruckt.

Also, liebe Leser, seid nicht traurig, wenn Euch einmal eine Lösung mißlingt, dasselbe passiert auch Mathematikstudenten im 4. Studienjahr! Aber wenn Ihr die Preisaufgaben richtig lösen könnt, dann schreibt uns schnell, damit wir auch wissen, was herauskommt!

Im folgenden unser zweiter Versuch, die Preisaufgaben K 49, K 50 und K 51 zu lösen:

Aufgabe K 49

Wir formen die dritte Gleichung um:

$$z^2 + xy - z(x+y) = 2.$$

Wir substituieren z^2 mit Hilfe der zweiten und $z(x+y)$ mit Hilfe der ersten Gleichung. Wir erhalten

$$x^2 + y^2 + xy + xy - 47 = 2 \quad (1)$$

$$(x+y)^2 = 49$$

$$x + y = \pm 7 \quad (2)$$

Wir addieren das Doppelte der ersten Gleichung zur zweiten und formen gleich um:

$$(x+y)^2 + 2z(x+y) = 94 - z^2 \quad (3)$$

1. Fall: In (1) gelte $x + y = 7$

Eingesetzt in (2) ergibt sich:

$$z^2 - 14z + 45 = 0$$

$$z_{11} = 9$$

$$z_{12} = 5$$

Es ergibt sich dann für $z = 9$ in (1) $xy = -16$.

$$x_{11} = \frac{7 + \sqrt{113}}{2}, \quad y_{11} = \frac{7 - \sqrt{113}}{2}$$

$$x_{12} = \frac{7 - \sqrt{113}}{2}, \quad y_{12} = \frac{7 + \sqrt{113}}{2}$$

Für $z = 5$ ergibt sich in (1) $xy = +12$ und damit die Lösungen:

$$x_{13} = 4, \quad y_{13} = 3$$

$$x_{14} = 3, \quad y_{14} = 4$$

Analog ergeben sich für $x + y = -7$ folgende Lösungen:

$$z_{21} = -9; \quad x_{21} = \frac{-7 - \sqrt{113}}{2}, \quad y_{21} = \frac{-7 + \sqrt{113}}{2}$$

$$x_{22} = \frac{-7 + \sqrt{113}}{2}, \quad y_{22} = \frac{-7 - \sqrt{113}}{2}$$

$$z_{22} = -5; \quad x_{23} = -4, \quad y_{23} = -3$$

$$x_{24} = -3, \quad y_{24} = -4$$

Es ergeben sich also genau acht Lösungstripletts.

Aufgabe K 50

Da für alle reellen x die Ungleichung $x^2 - x + 1 > 0$ gilt, kann mit $x^2 - x + 1$ multipliziert werden. Es ergeben sich die Ungleichungen:

$$-3x^2 + 3x - 3 < x^2 + ax - 2$$

$$x^2 + ax - 2 < 2x^2 - 2x + 2$$

oder

$$4x^2 + (a-3)x + 1 > 0$$

$$x^2 - (a+2)x + 4 > 0$$

Die erste Ungleichung ist genau dann für alle x erfüllt, wenn die Diskriminante kleiner als Null ist, also

$$(a-3)^2 - 16 < 0.$$

Analog ergibt sich: $(a+2)^2 - 16 < 0.$

Als Lösungen ergeben sich:

$$-4 < a-3 < 4; \quad -1 < a < 7$$

$$-4 < a+2 < 4; \quad -6 < a < 2$$

Also ist die Lösung:

$$\underline{-1 < a < 2}$$

Aufgabe K 51

Damit alle Ausdrücke der Gleichung definiert sind, folgt sofort:

- (1) $n > 1$
- (2) $x > 0, x \neq 1$
- (3) $x < 4$

Unter diesen Bedingungen läßt sich die Gleichung äquivalent umformen

$$\frac{\lg x}{\lg x} + \frac{\lg \frac{4-x}{10}}{\lg x} = \frac{\lg \lg n - 1}{\lg x}$$

$$\lg x + \lg \frac{4-x}{10} = \lg \lg n - 1$$

$$\lg x + \lg(4-x) - \lg 10 = \lg \lg n - \lg 10$$

$$\lg x(4-x) = \lg \lg n$$

$$x(4-x) = \lg n$$

$$x^2 - 4x + \lg n = 0$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - \lg n}$$

Damit x reell ist, muß gelten

$$4 - \lg n \geq 0$$

$$\lg n \leq 4$$

$$n \leq 10000$$

Mit (1) ergibt sich die Lösung:

$$1 < n \leq 10000$$

Was sonst noch passierte

Bäcker: "Junge, was starrst du mich so an?"

Junge: "Mutti schickt mich her, ich soll gucken, ob sie Schweinsohren haben!"

✱

Lehrer: "Man durchschneidet mit einer Ebene eine Kugel.
Was entsteht dabei?"

Schüler: "Eine Ellipse!"

Lehrer: "Falsch! Ein Kreis!"

Schüler: "Aber ich will die Kugel doch schief durchschneiden!"

Lösungen

Aufgabe L 1

Es gilt für alle x :

$$\left| \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \right| \leq 1$$

$$\left| \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cos x \right| \leq 1$$

$$\left| \sin x + \sqrt{3} \cos x \right| \leq 2$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen.

Aufgabe L 2

Es gilt $\lg 2^{100} = 100 \cdot \lg 2$
und

$$0,301 \leq \lg 2 \leq 0,302$$

$$30,1 \leq 100 \cdot \lg 2 \leq 30,2$$

$$10^{30,1} \leq 2^{100} \leq 10^{30,2}$$

$$10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$$

Also hat die 2^{100} im dekadischen System genau 31 Ziffern.

Aufgabe L 3

Wir nehmen an, daß die Gleichung $x^2 - 3y^2 = -1$ ganzzahlige Lösungen besitzt. Wir formen die Gleichung um.

$$3y^2 = x^2 + 1$$

Es gilt nun $3y^2 \equiv 0 \pmod{3}$,
also auch $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$
 $x^2 \equiv 2 \pmod{3}$.

1. Fall: $x \equiv 0 \pmod{3}$
 $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$

2. Fall: $x \equiv 1 \pmod{3}$
 $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$

3. Fall: $x \equiv 2 \pmod{3}$
 $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$

Folglich gibt es keine Quadratzahl, die bei Division durch 3 den Rest 2 läßt. Wir erhalten also einen Widerspruch.

Damit hat die Gleichung $x^2 - 3y^2 = -1$ keine ganzzahligen Lösungen.

Aufgabe L 4

Wir definieren:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 3 \\ -1 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

So folgt für F:

$$F(1) = f(2) + f(3) = 1 - 1 = 0.$$

Also besitzt F eine Nullstelle.

Also folgt aus der Nullstellenfreiheit von f im allgemeinen nicht die Nullstellenfreiheit von F mit $F(x) = f(2x) + f(3x)$. Ist f jedoch außerdem noch stetig, so ist F nullstellenfrei und natürlich auch stetig.

Aufgabe L 5

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin\left(x + \frac{14}{3}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{8}{3}\pi\right) = \\ &= \sin x + \sin x \cos \frac{14}{3}\pi + \cos x \sin \frac{14}{3}\pi + \\ & \quad + \sin x \cos \frac{8}{3}\pi - \cos x \sin \frac{8}{3}\pi = \\ &= \sin x \left(1 + \cos \frac{14}{3}\pi + \cos \frac{8}{3}\pi\right) + \cos x \left(\sin \frac{14}{3}\pi - \sin \frac{8}{3}\pi\right) = \\ &= \sin x \left(1 + \cos \frac{2}{3}\pi + \cos \frac{2}{3}\pi\right) + \cos x \left(\sin \frac{2}{3}\pi - \sin \frac{2}{3}\pi\right) = \\ &= \sin x \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Beziehung bewiesen.

Aufgabe L 6

Die Kantenlänge von Grundfläche bzw. Deckfläche sei mit a bzw. b bezeichnet. Die Höhe des Pyramidenstumpfes sei h und die Höhe der Seitenfläche (Trapeze) sei s.

Für die Mantelfläche gilt nun:

$$A_M = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot s$$

Für die Gesamtoberfläche gilt:

$$A_G = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot s + (a^2 + b^2).$$

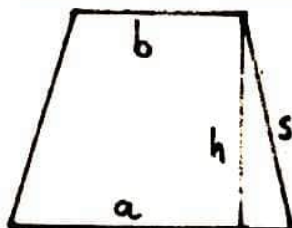
Nach Aufgabenstellung gilt:

$$A_G = 2 \cdot A_M.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot s &= a^2 + b^2 \\ s &= \frac{a^2 + b^2}{2(a+b)} \end{aligned} \quad (1)$$

Wir legen nun einen Schnitt durch den Pyramidenstumpf:



Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Mit (1) ergibt sich nun:

$$h^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}\right)^2 - \frac{(a-b)^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2}$$

$$h = \frac{ab}{a+b} \quad (2)$$

Für das Volumen gilt:

$$V = \frac{h}{3} (a^2 + b^2 + ab)$$

Mit (2) folgt sofort:

$$V = \frac{ab(a^2 + b^2 + ab)}{3(a+b)}$$

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild

Redaktion: G. Blume, H. Gottstein, H. Schwulow, D. Meinhardt, V. Wedler, G. Müller
D. Heinrich und J. Heß

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

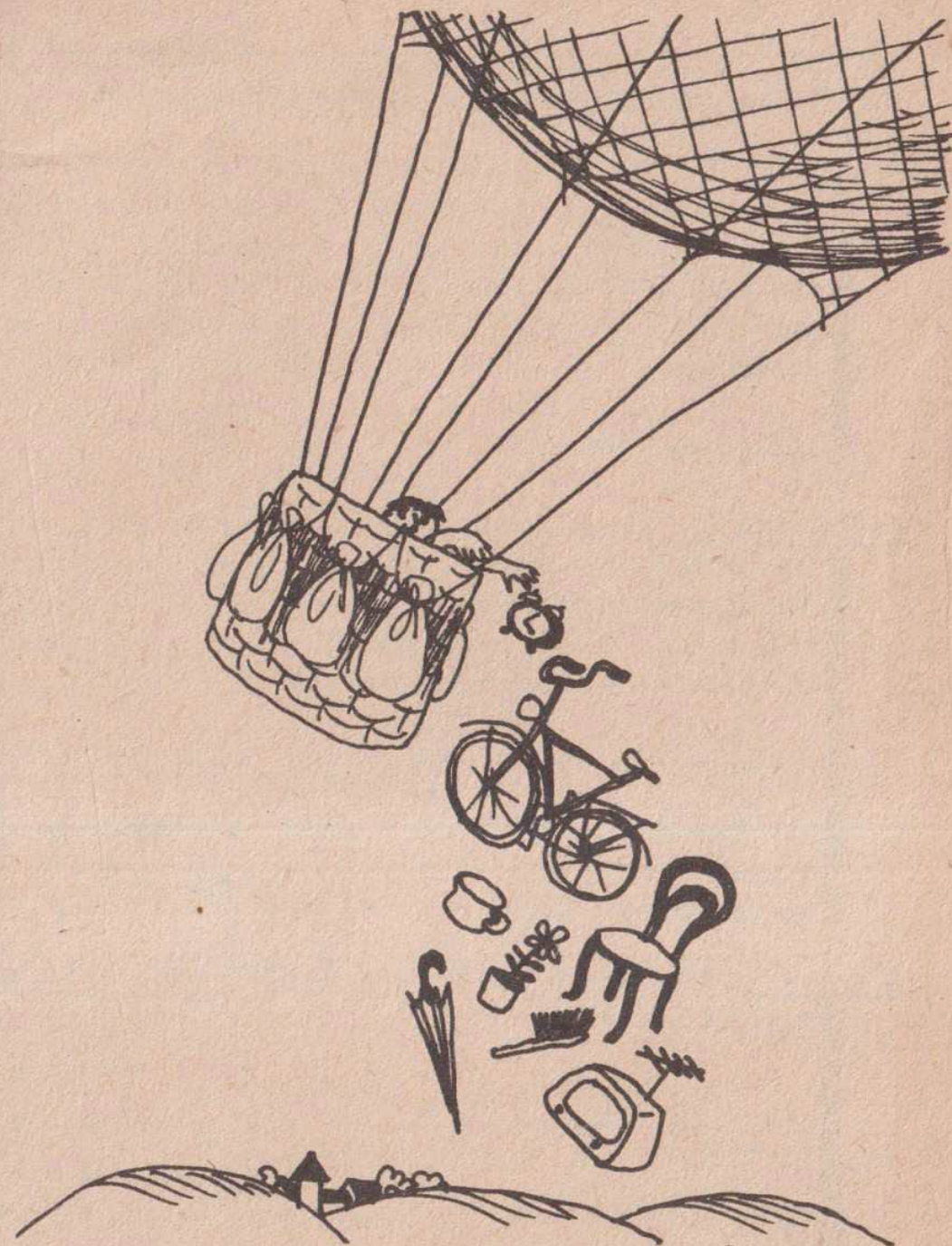
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 4. Mai 1979



7\8

79

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Univer-
sität Jena

13. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,40 M

Schlußfolgerungen aus einem Grenzwert

Definition 1. Die Funktion $f(x)$ sei für alle $x > x_0$ definiert, x_0 ist eine beliebige reelle Zahl. Die Zahl A heißt **eigentlicher Grenzwert** von $f(x)$ für x gegen plus Unendlich, wenn für jede noch so kleine positive Zahl ε eine (von ε abhängige) Zahl $x_\varepsilon > x_0$ existiert, so daß für alle $x > x_\varepsilon$ die Ungleichungen

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

gelten. Man schreibt: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Definition 2. Die Funktion $f(x)$ sei für alle $x > x_0$ definiert. Das Symbol " $+\infty$ " heißt **uneigentlicher Grenzwert** von $f(x)$ für x gegen plus Unendlich, wenn für jede noch so große Zahl M eine (von M abhängige) Zahl $x_M > x_0$ existiert, so daß für alle $x > x_M$ die Ungleichung

$$M < f(x)$$

gilt, man schreibt: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Die Funktion $f(x)$ hat für x gegen plus Unendlich den **uneigentlichen Grenzwert** " $-\infty$ ", wenn die Funktion $-f(x)$ den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$ besitzt.

Satz. Es seien m und n nichtnegative ganze Zahlen, sei $a_0 \cdot b_0 \neq 0$, so ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } m < n \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{wenn } m = n \\ \pm \infty, & \text{wenn } m > n, \end{cases}$$

dabei hat im letzten Fall das Symbol ∞ das Vorzeichen des Produktes $a_0 b_0$.

Beweis: Das Polynom im Nenner hat höchstens n verschiedene reelle Nullstellen, sei x_0 seine größte. Wenn keine positiven reellen Nullstellen vorhanden sind, so ist $x_0 = 0$ zu wählen, auf jeden Fall ist dann $f(x)$ für alle $x > x_0 \geq 0$ definiert.

Es gilt

$$f(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} = x^{m-n} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_m}{x^m}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_n}{x^n}} = x^{m-n} \cdot \varphi(x).$$

Wir betrachten zunächst $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß a_0 und b_0 positiv sind, alle anderen Fälle kann man durch elementare Umformungen darauf zurückführen. Sei

$$p = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_m|$$

$$\text{und} \quad q = |b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|,$$

so ist für $x > 1$

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_m}{x^m} &\leq a_0 + \left| \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_m}{x^m} \right| \leq \\ &\leq a_0 + \left| \frac{a_1}{x} \right| + \dots + \left| \frac{a_m}{x^m} \right| = a_0 + \frac{|a_1|}{x} + \dots + \frac{|a_m|}{x^m} < \\ &< a_0 + \frac{|a_1| + \dots + |a_m|}{x} = a_0 + \frac{p}{x}. \end{aligned}$$

Analog erhält man, daß für $x > 1$

$$b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_n}{x^n} > b_0 - \frac{q}{x}.$$

Die letzte Differenz ist positiv, wenn $b_0 > \frac{q}{x}$ ist, d. h. wenn $x > \frac{q}{b_0}$ gilt. Sei x im weiteren größer als die größte der Zahlen $x_0, 1$ und $\frac{q}{b_0}$, so ist demzufolge

$$\varphi(x) < \frac{a_0 + \frac{p}{x}}{b_0 - \frac{q}{x}} = \frac{a_0}{b_0 - \frac{q}{x}} + \frac{p}{b_0 x - q}.$$

Nun ist

$$\frac{a_0}{b_0 - \frac{q}{x}} = \frac{a_0}{b_0} + y$$

und

$$y = \frac{a_0}{b_0 - \frac{q}{x}} - \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_0 b_0 - a_0 b_0 + \frac{a_0 q}{x}}{b_0^2 - \frac{b_0 q}{x}} = \frac{a_0 q}{b_0^2 x - b_0 q},$$

damit erhält man wegen $q \geq 0$

$$\varphi(x) < \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_0 q}{b_0^2 x - b_0 q} + \frac{p}{b_0 x - q} \leq \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_0 q + b_0 p}{b_0^2 x} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{c}{x},$$

wobei $\frac{a_0 q + b_0 p}{b_0^2} = c$ gesetzt wurde.

Andererseits gilt

$$\varphi(x) > \frac{a_0 - \frac{p}{x}}{b_0 + \frac{q}{x}} = \frac{a_0}{b_0} - \frac{a_0 q}{b_0^2 x + b_0 q} - \frac{p}{b_0 x + q} \geq \frac{a_0}{b_0} - \frac{a_0 q + b_0 p}{b_0^2 x} = \frac{a_0}{b_0} - \frac{c}{x},$$

zusammengefaßt resultiert

$$\frac{a_0}{b_0} - \frac{c}{x} < \varphi(x) < \frac{a_0}{b_0} + \frac{c}{x}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$, so ist, wenn $x > \frac{c}{\varepsilon}$ ist,

$$\frac{a_0}{b_0} - \varepsilon < \varphi(x) < \frac{a_0}{b_0} + \varepsilon,$$

hierbei ist ε beliebig nahe am Null wählbar. Faßt man alle Bedingungen an x zusammen, so sieht man, daß man x_ε z. B. durch den Ausdruck

$$x_\varepsilon = x_0 + 1 + \frac{q}{b_0} + \frac{c}{\varepsilon}$$

darstellen kann, wegen $x_0 \geq 0$ folgen dann aus der Ungleichung $x > x_\varepsilon$ die Einzelungleichungen $x > x_0$, $x > 1$, $x > \frac{q}{b_0}$ und $x > \frac{c}{\varepsilon}$.

Im Sinne von Definition 1 gilt damit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \frac{a_0}{b_0}.$$

Wichtig ist folgende Schlußfolgerung: Es gibt für den speziellen Wert $\varepsilon = \frac{a_0}{2b_0}$ ein $x_\varepsilon = \bar{x}$, so daß für alle $x > \bar{x}$ gilt

$$\frac{a_0}{2b_0} < \varphi(x) < \frac{3a_0}{2b_0}.$$

Sei nun $m < n$, so gilt für $\varepsilon > 0$ und $x > \bar{x}$

$$f(x) = x^{m-n} \varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{x^{n-m}} < \frac{3a_0}{2b_0 x^{n-m}} < \varepsilon,$$

wenn $x^{n-m} > \frac{3a_0}{2b_0 \varepsilon}$ ist, andererseits gilt auch

$$f(x) > \frac{a_0}{2b_0 x^{n-m}} > 0 > -\varepsilon, \text{ so daß für } x > x_\varepsilon = \bar{x} + \frac{n-m}{\varepsilon} \sqrt{\frac{3a_0}{2b_0}}$$

die Ungleichungen

$$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$$

resultieren.

Also ist $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ für $m < n$.

Bei $m=n$ ist $f(x) = \varphi(x)$, also $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0}$

Sei abschließend $m > n$, so ist für einen beliebigen Wert von M die Ungleichung

$$f(x) = x^{m-n} \varphi(x) > \frac{x^{m-n} \cdot a_0}{2b_0} > M$$

erfüllt, wenn $x > \bar{x} + \frac{m-n}{\sqrt{\frac{2b_0 M}{a_0}}} = x_M$ ist, demzufolge gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

q.e.d.

Schlußfolgerung 1.

Wir betrachten einen kugelförmigen Ballon mit dem Radius r . Das Gewicht von Gondel und Nutzlast sei zusammen G , der Auftrieb von einer Raumeinheit Ballonfüllung sei A . Das Gewicht von einer Flächeneinheit Ballonhülle und -netz sei H . Das Gesamtgewicht der Seile ist dem Ballonradius etwa proportional, sei es $S \cdot r$, so ergibt sich die nach oben gerichtete resultierende Kraft

$$F(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot A - 4 \pi r^2 \cdot H - S \cdot r - G =$$

$$= \frac{\frac{4\pi A}{3} r^3 - 4\pi H r^2 - S \cdot r - G}{1 \cdot r^0},$$

und wegen $3 > 0$ ist $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = +\infty$.

Speziell existiert damit ein r_0 , so daß für alle $r > r_0$ $F(r) > 0$ gilt, d. h. für jede noch so große Nutzlast und massive Gondel existiert (zumindest theoretisch) ein Ballonradius derart, daß das Fluggerät aufsteigt, obwohl Takelage und Ballonhülle mit wachsender Größe auch schwerer werden.

Schlußfolgerung 2.

GULLIVER berichtet von den Bewohnern des Landes Brobdingnag: "... So hielt er mich drei Ellen von seinen Augen entfernt, ... ungefähr in der Höhe von sechzig Fuß...", man kommt also auf eine

Körpergröße von etwa 19 m oder rund dem zehnfachen von Unserem. Andererseits: "... ich muß hierauf erwidern, daß sie durchaus keinen häßlichen Menschenschlag darstellen;...", daß sie also, von ihrer Größe abgesehen, nicht anders gebaut sind als etwa MICHELANGELOS David.

Der Verfasser hat nicht die Absicht, billige Kritik an einer der glänzendsten Satiren der Weltliteratur zu üben, aber Überlegen wir uns einmal, mit welchen Problemen sich ein solches Wesen konfrontiert sieht:

Vergrößert man alle linearen Abmessungen eines Körpers (z. B. eines menschlichen) auf das Zehnfache, so wächst seine Oberfläche auf das 100fache und Volumen und Gewicht auf das 1000fache.

Der Bodendruck eines Brobdingnager ist das Verhältnis seines Gewichts zur Fläche seiner Fußsohlen und somit der Zehnfache unseres. Das setzt einestells festen Untergrund voraus und da andererseits NEWTONs Grundgesetze überall gelten, ist der Druck des Bodens auf die Fußsohlen auch zehnfach größer. Der Riese hat also ein Gefühl in den Knöcheln, das wir mit etwa einer dreiviertel Tonne Last auf dem Rücken empfinden würden. Die Belastung der Fußknochen und -muskeln steigt auch um denselben Faktor, kurzum, eine schreitende Fortbewegung erscheint unmöglich, einziger Ausweg wären Elefantenbeine. Käme der Riese doch von der Stelle, so würde das bedeuten, daß Mutter Natur bei unserer Erschaffung sträfliche Materialverschwendung betrieben hätte. Übrigens müßten die Liliputaner aus analogen Gründen Spinnenbeinchen besitzen.

Das Problem der Fortbewegung wäre jedoch geradezu bedeutungslos angesichts der Lebensunfähigkeit dieser Wesen. Die hundertmal größere Lungenoberfläche läßt zwar auch hundertmal mehr Sauerstoff in den Organismus, der braucht jedoch tausendmal mehr! Die einzige Alternative zum sofortigen Erstickungstod wäre eine völlig andere Biochemie, aber daß sich die nicht auf die äußere Form auswirkt? ...

Übrigens wurde GULLIVER in Liliput auch direkt mit diesem Problem konfrontiert:

"... daß der Kaiser in dem letzten Artikel der Urkunde ... mir soviel Speise und Trank bewilligte, wie für 1824 Liliputaner ge-

nügen würden. ... Die Mathematiker hätten die Größe meines Körpers mit einem Quadranten aufgenommen, und da sie nun berechneten, daß diese die ihrige im Verhältnis von 12 zu 1 übertraf, zogen sie aus der Ähnlichkeit unserer Körper den Schluß, daß der meinige wenigstens 1824 der ihrigen enthalten müsse und deshalb ebensoviel Nahrung erfordere wie jene Zahl Liliputaner."

Rätselhaft ist an diesem scharfsinnigen Schluß nur die Zahl $1824 = 12 \cdot 8 \cdot 19$ statt $12^3 = 1728$.

Abschließend betont der Verfasser, daß er sich in diesen Fragen völlig der Meinung von Akademiemitglied FLAMENT anschließt (s. I. TICHY, Tagebücher, XXV. Reise, herausgegeben von S. LEM).

Schlußfolgerung 3.

Sei M die Masse in dem Volumen V , so bezeichnet $\varrho = \frac{M}{V}$ die mittlere Dichte in dem betrachteten Volumen. Gehen wir von der Hypothese des dreidimensionalen unbeschränkten Weltalls aus, betrachten wir irgendeinen Punkt als Bezugspunkt und um ihn eine Kugel mit dem Radius r , so befindet sich darin die Masse $M(r)$ und die mittlere Dichte ist

$$\varrho(r) = \frac{3}{4\pi} M(r) \cdot r^{-3},$$

der Grenzwert $\varrho_\infty = \lim_{r \rightarrow +\infty} \varrho(r)$ wäre dann als mittlere Dichte des Weltalls zu interpretieren.

Sei $K(r, R)$ eine Kugel von dem Radius R , deren Mittelpunkt vom gewählten Bezugspunkt den Abstand r hat. Wir nehmen an, daß das Verhältnis $q = R/r$ viel kleiner als 1 ist, so daß man sich die in der Kugel befindliche Masse bezüglich ihrer Gravitationswirkung im Bezugspunkt als im Kugelmittelpunkt konzentriert denken kann. Wenn r und R genügend groß sind, gilt für die Masse $M(r, R)$ in $K(r, R)$ etwa

$$M(r, R) = \frac{4}{3} \pi R^3 \varrho_\infty = Q r^3$$

mit $Q = \frac{4}{3} \pi q^3 \varrho_\infty$. Nach dem NEWTONschen Gravitationsgesetz übt die Masse $M(r, R)$ auf eine im Bezugspunkt befindliche Masse M_0 eine Anziehungskraft

$$F = \gamma \cdot \frac{M_0 \cdot M(r, R)}{r^2} = \gamma \cdot M_0 \cdot Q \cdot r$$

aus. Entfernt man nun die Kugel $K(r, R)$ vom Bezugspunkt und ver-

größert sie gleichzeitig derart, daß das Verhältnis $q = R/r$ konstant bleibt, so wird nach der letzten Formel

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} F = +\infty.$$

Da der Bezugspunkt beliebig gewählt war, ebenso die Richtung von ihm zum Kugelmittelpunkt, so erhält man damit, daß in diesem Weltall in jedem Punkt aus jeder Richtung unendlich große Kräfte einwirken, und das ist physikalisch unreal. Man muß also eine von drei Möglichkeiten betrachten:

1. Das Weltall ist in jedem größeren Gebiet und jeder Richtung soweit gleich, so daß sich die in jedem Punkt angreifenden Kräfte dort bis auf einen endlichen Rest gegenseitig aufheben. -
Die Hypothese erscheint unwahrscheinlich.
2. Die Grundannahme eines unbeschränkten Weltalls ist (zumindest in dieser Einfachheit) falsch.
3. Der Faktor $\gamma \cdot M_0 \cdot Q$ ist gleich Null.

Aus dem letzten Fall folgt notwendigerweise $S_\infty = 0$, d. h. die Dichte des Weltalls ist Null. Hieraus folgt nicht, daß das Weltall "leer" oder nur mit einer endlichen Masse gefüllt ist, sondern nur, daß diese Masse nicht gleichmäßig verteilt sein kann. Betrachten wir das folgende vereinfachte Beispiel:

Auf der positiven Halbachse befestigen wir in jedem Punkt $x=n$ eine Masse m , damit ist die mittlere "lineare Dichte" ebenfalls $m/\text{Längeneinheit}$. Wenn wir jetzt die Masse aus dem Punkt $x=n$ in den Punkt $x=n^2$ verschieben und diese Operation mit allen Massestücken ausführen, so hat sich die "Gesamtmasse" nicht geändert, denn es ist bei dieser Umverteilung nichts verlorengegangen. Auf dem Abschnitt $[0, n^2]$ befindet sich insgesamt die Masse $n \cdot m$, die mittlere Dichte auf diesem Abschnitt ist also $\frac{nm}{n^2} = \frac{m}{n}$. Vergrößert man n , so erhält man beim Grenzübergang $n \rightarrow +\infty$, daß diese einfache Umverteilung der Masse die mittlere Dichte auf der gesamten Halbachse zu Null gemacht hat, wohl-gemerkt, ohne etwas an Masse zu verlieren. Die Masse ist nun allerdings nicht mehr gleichmäßig verteilt, im Abschnitt $[1, 100]$ befinden sich 10 Massestücke, im ebensolangen Abschnitt

[10001, 10101] findet man dagegen nicht ein einziges, da dieser Abschnitt keine Quadratzahl enthält. Anders ausgedrückt, mit dieser Umverteilung wurde erreicht, daß bei Vergrößerung des betrachteten Gebietes der Abstand relativ schneller wächst als die Masse darin.

Ähnliches läßt sich auch tatsächlich beobachten. Die kleinste Zusammenfassung von Himmelskörpern ist das System Planet - Monde, hierbei sind die Ausmaße der Körper gering im Vergleich zum Abstand zwischen ihnen. Die nächstgrößere Konfiguration, das Sonnensystem, übertrifft seinerseits diese Teilsysteme um ein Vielfaches an Ausdehnung, ist aber winzig im Vergleich zu den Abständen zwischen den Fixsternen im Milchstraßensystem, das im Rahmen der sogenannten "lokalen Gruppe" in relativer Nachbarschaft zum bekannten Andromedanebel, den Magellanschen Wolken u. a. steht.

Schlußfolgerung 4.

1. Gegeben sei eine Tabelle mit $n+1$ Wertepaaren (x_i, y_i) , $i=0,1,2,\dots,n$, gesucht ist dasjenige Polynom $p(x)$ vom Grade n , für das $p(x_i) = y_i$ für $i=0,1,\dots,n$ gilt. Hierbei wird vorausgesetzt, daß alle Werte x_i paarweise verschieden sind.

Man erkennt leicht, daß es höchstens ein derartiges Polynom $p(x)$ geben kann. In der Tat, wenn noch ein Polynom $q(x)$ vom Grade n existieren würde, so wäre das Polynom

$$r(x) = p(x) - q(x)$$

ebenfalls vom Grade n (oder geringer), hätte aber wegen

$$r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = y_i - y_i = 0$$

$n+1$ Nullstellen. Das ist nur möglich, wenn $r(x)$ identisch gleich Null ist, und damit muß $p(x) = q(x)$ sein.

Wir definieren die Polynome

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)},$$

für $x=x_i$ sind Zähler und Nenner gleich und damit ist $l_i(x_i)=1$, andererseits ist für $i \neq j$ offensichtlich $l_i(x_j)=0$. Damit löst das Polynom

$$p(x) = y_0 \cdot l_0(x) + y_1 \cdot l_1(x) + \dots + y_n \cdot l_n(x) \quad (*)$$

und nur dieses die gestellte Aufgabe. Dieses Polynom heißt Interpolationspolynom zu der gegebenen Wertetabelle.

Angenommen, es sind in N Stellen $\bar{x}_k$ die Werte $p(x_k)$ zu berechnen, so ist das mit der aufgeführten Formel zwar möglich, aber nicht zu empfehlen, wenn $N > n$ ist. Definiert man die Werte c_i mit

$$(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) \dots (x_1 - x_{i-1})(x_1 - x_{i+1}) \dots (x_1 - x_n) \cdot c_i = 1,$$

und sei $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, so ist

$$p(x) = \omega(x) \left[\frac{y_0 \cdot c_0}{x - x_0} + \frac{y_1 \cdot c_1}{x - x_1} + \dots + \frac{y_n \cdot c_n}{x - x_n} \right], \quad (**)$$

und diese Formel hat im Vergleich zur vorigen Darstellung von $p(x)$ wesentliche rechentechnische Vorteile.

Rechenautomaten arbeiten zwar schnell, aber trotzdem nicht zeitlos, und Rechenzeit ist teuer. Hieraus resultiert die Notwendigkeit, Formeln so darzustellen, daß ihre Berechnung möglichst schnell erfolgen kann. Ein Maß hierfür ist die Zahl der benötigten Rechenoperationen, wobei man meist nur die Multiplikationen und Divisionen zählt (und zwar als eine Operation, obwohl die Division meist länger dauert), weil der Zeitbedarf für Addition und Subtraktion vergleichsweise vernachlässigt werden kann.

Zur Berechnung von $l_1(x)$ braucht man demzufolge $2n-1$ Operationen, wenn man Zähler und Nenner einzeln berechnet und anschließend dividiert, und ebenso viel, wenn man die einzelnen Brüche miteinander multipliziert. Insgesamt braucht man also $(2n)(n+1)$ Operationen als Mindestanzahl zur Berechnung von $p(x)$. Für die Berechnung der ganzen Tabelle $p(\bar{x}_k)$ sind damit nach der Formel (*) gerade

$$K_1(n, N) = 2n^2N + 2nN$$

Operationen nötig.

Benutzt man die Darstellung (**), so sind zunächst mit je n Operationen die Werte c_i zu berechnen, danach erhält man mit $3n+2$ Operationen den Wert von $p(x)$. Damit wird

$$K_2(n, N) = n^2 + n + (3n+2)N.$$

Die Gleichung $K_1(x, y) = K_2(x, y)$, d. h.

$$2x^2y + 2xy = x^2 + x + 3xy + 2y,$$

führt zu $y(2x^2 - x - 2) = x^2 + x$

und damit zu der Kurve

$$y = \frac{x^2 + x}{2x^2 - x - 2} \quad \text{für } x > 0 \text{ und } 2x^2 - x - 2 \neq 0,$$

die die Gebiete $K_1(x,y) < K_2(x,y)$ und $K_1(x,y) > K_2(x,y)$ voneinander trennt. Hieraus erhält man, daß

$$K_1(1,N) < K_2(1,N) \quad \text{für alle } N \geq 1 \text{ gilt,}$$

außerdem ist $K_1(2,1) < K_2(2,1)$, für alle anderen Kombinationen von n und N ist $K_1(n,N) > K_2(n,N)$, d. h. die Formel $(**)$ ist weniger aufwendig. Je größer n ist, desto größer ist der Unterschied, denn

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_2(n,N)}{K_1(n,N)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + (3n+2)N}{2n^2N + 2nN} = \frac{3n+2}{2n^2 + 2n}$$

u. das letzte Verhältnis ist für große Werte von n klein. Für $n=5$ z. B. erhält man $\frac{17}{54} = 0,3148\dots$, d. h. der Rechenaufwand der Formel $(**)$ beträgt nur ca. 31,5 % von dem der Formel $(*)$.

2. Das lineare Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

sei zu lösen. Verfährt man in der Weise, daß man z. B. die letzte Gleichung nach x_n auflöst und diesen Ausdruck in alle vorigen Gleichungen einsetzt, danach x_{n-1} usw., so hat man insgesamt ca. $\frac{1}{3}n^3$ Operationen auszuführen. Unter bestimmten Bedingungen kann man aber auch völlig anders rechnen:

Angenommen, es ist für $i=1,2,\dots,n$

$$\frac{|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|}{a_{i1}} = q_i < 1,$$

so ist auch der Wert Q , der das Maximum der Zahlen $q_1, q_2, \dots, q_n$ sein soll, kleiner als 1. Systeme von Gleichun-

gen mit dieser speziellen Eigenschaft tauchen relativ häufig auf bzw. sind durch spezielle Umformungen aus gegebenen Systemen herzuleiten.

Wir setzen $c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ und $d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$, so wird

$$x_1 = c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n + d_1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{n,n-1}x_{n-1} + d_n.$$

Wir definieren $t_i^{(0)} = 0$ und setzen für $i=1,2,\dots,n$ und $K=1,2,3,\dots$

$$t_i^{(K)} = c_{i1}t_1^{(K-1)} + \dots + c_{i,i-1}t_{i-1}^{(K-1)} + c_{i,i+1}t_{i+1}^{(K-1)} + \dots + c_{in}t_n^{(K-1)} + d_i.$$

Am Beispiel des folgenden Systems ist dieser Prozeß leicht zu verfolgen:

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 &= 2x_3 = 5, \end{aligned}$$

hierbei ist $q_1 = 0,75$, $q_2 = q_3 = 0,5$ und $Q = 0,75 < 1$. Das System erhält durch Umformung die Gestalt

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,25x_2 - 0,5x_3 - 0,25 \\ x_2 &= 0,25x_1 - 0,25x_3 + 0,25 \\ x_3 &= 0,5x_1 - 2,5. \end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß $t_1^{(1)} = -0,25$, $t_2^{(1)} = 0,25$ und $t_3^{(1)} = -2,5$ gilt. Weiter erhält man

$$t_1^{(2)} = 0,25 \cdot 0,25 - 0,5 \cdot (-2,5) - 0,25 = 0,0625 + 1,25 - 0,25 = 1,0625 \text{ usw.}$$

Man gelangt zu der folgenden Tabelle

K	0	1	2	3	4	5	6	7
$t_1^{(K)}$	0	-0,25	1,0625	1,2656	1,0273	0,9482	0,9866	1,0089
$t_2^{(K)}$	0	0,25	0,8125	1,1719	1,0586	0,9736	0,9836	1,0031
$t_3^{(K)}$	0	-2,5	-2,6250	-1,9888	-1,8672	-1,9863	-2,0259	-2,0067
	8	9	10	11	12			
	1,0041	0,9988	0,9989	1,0001	1,002			
	1,0039	0,9999	0,9992	0,9999	1,0002			
	-1,9956	-1,9979	-2,0006	-2,0005	-1,9999			

Das betrachtete Gleichungssystem hat die Lösungen $x_1 = x_2 = 1$ und $x_3 = -2$, und genau diesen Werten nähern sich die $t_i^{(K)}$ mit wachsendem K . Das ist kein Zufall, wie die folgende Untersuchung der Differenz $t_i^{(K)} - x_i$ zeigt. Unter wiederholter Ausnutzung der bekannten Ungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$ erhält man für $K > 0$

$$\begin{aligned} |t_i^{(K)} - x_i| &= |(c_{i1}t_1^{(K-1)} + \dots + c_{i,i-1}t_{i-1}^{(K-1)} + c_{i,i+1}t_{i+1}^{(K-1)} + \dots + c_{in}t_n^{(K-1)} + d_i) - \\ &\quad - (c_{i1}x_1 + \dots + c_{i,i-1}x_{i-1} + c_{i,i+1}x_{i+1} + \dots + c_{in}x_n + d_i)| = \\ &= |c_{i1}(t_1^{(K-1)} - x_1) + \dots + c_{i,i-1}(t_{i-1}^{(K-1)} - x_{i-1}) + \\ &\quad + c_{i,i+1}(t_{i+1}^{(K-1)} - x_{i+1}) + \dots + c_{in}(t_n^{(K-1)} - x_n)| \leq \\ &\leq |c_{i1}| \cdot |t_1^{(K-1)} - x_1| + \dots + |c_{in}| \cdot |t_n^{(K-1)} - x_n|, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile der Hinweis auf den fehlenden Summanden weggelassen wurde. Es bezeichne nun D_K die größte der Differenzen $|t_i^{(K)} - x_i|$, so ist weiter

$$\begin{aligned} |t_i^{(K)} - x_i| &\leq D_K \leq |c_{i1}| \cdot D_{K-1} + \dots + |c_{in}| \cdot D_{K-1} = \\ &= (|c_{i1}| + \dots + |c_{i,i-1}| + |c_{i,i+1}| + \dots + |c_{in}|) D_{K-1} = \\ &= \left(\left| -\frac{a_{i1}}{a_{i1}} \right| + \dots + \left| -\frac{a_{i,i-1}}{a_{i1}} \right| + \left| -\frac{a_{i,i+1}}{a_{i1}} \right| + \dots + \left| -\frac{a_{in}}{a_{i1}} \right| \right) D_{K-1} = \\ &= q_i D_{K-1} \leq Q D_{K-1}. \end{aligned}$$

Analog erhält man $D_{K-1} \leq Q D_{K-2}$ usw., es folgt damit die Ungleichung

$$D_K \leq Q^K D_0.$$

Nun ist D_0 der größte der Werte

$$\begin{aligned} |t_i^{(0)} - x_i| &= |x_i| = |c_{i1}x_1 + \dots + c_{i,i-1}x_{i-1} + c_{i,i+1}x_{i+1} + \dots + c_{in}x_n + d_i| \\ &\leq |c_{i1}x_1| + \dots + |c_{in}x_n| + |d_i|, \end{aligned}$$

und wenn D^* den größten Betrag $|d_1|$ bezeichnet, so folgt hieraus

$$D_0 \leq QD_0 + D^*,$$

und wegen $0 \leq Q < 1$ ist damit

$$D_0 \leq \frac{D^*}{1-Q}.$$

Abschließend resultiert demzufolge

$$|t_1^{(K)} - x_1| \leq D_K \leq \frac{Q^K D^*}{1-Q}, \text{ und der rechts stehende Wert wird}$$

bei wachsendem K beliebig klein. Für das betrachtete Beispiel erhalten wir z. B. wegen $D^* = 2,5$

$$D_{10} \leq \frac{0,75^{10} \cdot 2,5}{1-0,75} = 10 \cdot 0,75^{10} < 0,563.$$

In Wirklichkeit ist $D_{10} = |t_1^{(10)} - x_1| = 0,0011$ viel kleiner als der erhaltene Wert 0,563. Das liegt daran, daß bei der Herleitung der Ungleichung $D_K \leq \frac{Q^K D^*}{1-Q}$ vom ungünstigsten Fall ausgegangen werden muß, um eine universelle Abschätzung zu erhalten, die sich dann allerdings in Spezialfällen als sehr grob erweist. Der Vorteil dieser Ungleichung liegt darin, daß D_K nur durch die Größen D^* und Q abgeschätzt wird, die sofort zugänglich sind, ohne daß man die $t_1^{(K)}$ berechnet. Möchte man die Werte x_1 mit der Genauigkeit $\varepsilon > 0$ bestimmen, d. h. soll $|t_1^{(K)} - x_1| \leq \varepsilon$ für alle Werte von i erfüllt sein, so genügt es,

$$\frac{Q^K D^*}{1-Q} \leq \varepsilon$$

zu fordern, dann ist auch $D_K \leq \varepsilon$. Hieraus erhält man

$$Q^K \leq \frac{(1-Q)\varepsilon}{D^*}$$

und daraus

$$K \cdot \lg Q \leq \lg \frac{(1-Q)\varepsilon}{D^*} = \lg(1-Q) + \lg \varepsilon - \lg D^*.$$

Wegen $0 < Q < 1$ ist $\lg Q < 0$ und damit

$$K \geq \frac{\lg(1-Q) + \lg \varepsilon - \lg D^*}{\lg Q} = S(\varepsilon).$$

Macht man also soviel Berechnungen von $t_1^{(K)}$, daß K gerade größer oder gleich $S(\varepsilon)$ ist, so kann man eine Genauigkeit von minde-

stens ε garantieren (von den unvermeidlichen Rundungsfehlern abgesehen). Fordern wir also z. B. in unserem Beispiel, daß $t_i^{(K)}$ in den ersten drei Stellen nach dem Komma mit den exakten Werten übereinstimmen soll, so ist $\varepsilon = 0,0005$ und diese Forderung ist sicher erfüllt, wenn

$$K \geq \frac{\lg 0,25 + \lg 0,0005 - \lg 2,5}{\lg 0,75} = 34,42,$$

d. h. ab $K=35$. Wie die Tabelle zeigt, ist es aber überflüssig, $t_i^{(35)}$ auszurechnen, $t_i^{(12)}$ leistet bereits das gewünschte. Zur Berechnung aller $t_i^{(K)}$ aus den $t_i^{(K-1)}$ muß man nun im Normalfall genau $n(n-1)$ Operationen ausführen, insgesamt erhält man damit, da man in der Praxis gleich bei $t_i^{(1)} = d_i$ beginnt, für die Rechnung bis $t_i^{(K)}$ genau $(K-1)(n^2-n) \approx Kn^2$ Operationen. Verglichen mit den $\frac{n^3}{3}$ Operationen bei der "exakten" Berechnung ist das wesentlich weniger, wenn K viel kleiner als $n/3$ ist. Wenn man berücksichtigt, daß man für manche Aufgaben Gleichungssysteme von $n=10^4$ lösen muß, so kann der Unterschied beträchtlich sein.

Die Zahl der Operationen ist nicht das einzige Kriterium bei der Beurteilung von Rechenverfahren, aber auch in anderer Hinsicht ergibt sich oft ein ähnliches Bild.

Der zu Beginn formulierte Grenzwert ist somit als Beispiel dafür zu sehen, wie mathematische Aussagen teils unmittelbar, teils auch über viele Zwischenstufen mit Prozessen und Erscheinungen der objektiven Realität verknüpft sind, letztlich also in diesen wurzeln und aus ihnen durch immer weiterführende Abstraktion gewonnen werden.

W. Rosenheinrich

Bereich Numerik/Operationsforschung

Wurzel-Humor

Man wird doch einmal fragen dürfen! - oder; ein Schelm, wer Arges dabei denkt!

Student: Darf man einen Professor einen Esel nennen?

Professor: Nein, natürlich nicht!

Student: Darf man aber einen Esel Professor nennen?

Professor: Das ist nicht verboten.

Student: Danke, Herr Professor!

Mathematische Modelle der diskreten Optimierung

Seit einigen Jahren arbeitet eine kleine Gruppe von Mitarbeitern der Sektion Mathematik auf dem Gebiet der diskreten Optimierung. Die mathematischen Methoden der Optimierung haben sich in den letzten 40 Jahren besonders stürmisch entwickelt, weil die objektiven Bedürfnisse in der Praxis gestiegen sind, weil die Entwicklung der Rechentechnik - EDV gute Voraussetzungen geschaffen hat.

Während der Schulzeit werden Sie mit Extremalaufgaben bekanntgemacht, für eine gegebene Funktion ist ein Maximum oder Minimum zu errechnen. Bei allgemeinen Optimierungsproblemen muß man annehmen, daß die Variablen aus einem bestimmten, dem zulässigen Bereich, kommen. Damit ergibt sich formal als Aufgabe

$$f(x) \rightarrow \max_{x \in M}.$$

Entsprechend der Art der Zielfunktion, der zulässigen Bereiche und der Lösungsmethoden entwickelten sich spezielle Teilgebiete der Optimierung.

Lineare Optimierung:

$$\begin{array}{l} cx \rightarrow \min \\ \left. \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} M \end{array}$$

(Dabei sind c und x n -komponentige Vektoren, A ist eine Matrix, bestehend aus m Zeilen und n Spalten. Damit ist durch $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem angegeben, wenn b ein m -komponentiger Spaltenvektor ist. Mit cx wurde das Skalarprodukt der Vektoren c und x bezeichnet. $x \geq 0$ soll bedeuten, daß alle Komponenten von x nichtnegativ sind)

Zielfunktion also linear, zulässiger Lösungsbereich ist durch ein lineares Gleichungssystem gegeben.

Nichtlineare Optimierung beinhaltet Zielfunktionen $f(x)$, die von cx verschieden sind.

Die diskrete Optimierung beschäftigt sich mit solchen Problemen, deren zulässiger Bereich M eine diskrete Menge ist. Das sind z. B. eine Menge von Permutationen, die Menge aller ganzzahligen Punkte im R_n (also alle Vektoren mit ganzzahligen Komponenten), die Menge aller $(0,1)$ -Vektoren oder aber auch die Menge

aller Ecken einer polyedrischen Menge (z. B. $Ax=b$, $x \geq 0$).

In diesem Artikel möchten wir einige praktische Probleme anführen, die auf mathematische Modelle der diskreten Optimierung führen.

1. Transportproblem
2. Rundreise und k-Touren-Problem
3. Standortverteilungsproblem
4. Problem der optimalen Standardisierung.

1. Das Transportproblem

Ein Verkehrsbetrieb realisiert den Transport eines Produkts (z. B. Milch) aus Produktionspunkten i in Bedarfspunkte j . In den m Produktionspunkten i (z. B. Molkereien) werden a_i Einheiten hergestellt. In den n Bedarfspunkten j besteht ein Bedarf von b_j Einheiten des Produkts. Der Transport einer Einheit des Produkts aus i nach j verursacht c_{ij} Kosten (Mark). Gesucht ist ein solcher Transportplan X (x_{ij} bezeichnet die Anzahl der Produkteinheiten, die aus i nach j transportiert werden), der die Kosten minimiert und die Bedürfnisse in jedem Punkt j befriedigt, und sichert, daß alle produzierten Produkte aus den Punkten i abtransportiert werden. Somit erhalten wir folgendes mathematisches Modell:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min (\max) \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j=1, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i=1, \dots, m \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \begin{matrix} i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \end{matrix} \quad (4)$$

$$x_{ij} \text{ ganze Zahl} \quad (5)$$

Dabei bedeutet (1), die gesamten aufsummierten Transportkosten sollen minimal werden. (2) beinhaltet, daß aus beliebigen Produktionspunkten i jeweils x_{ij} , insgesamt aber b_j , Einheiten geliefert werden müssen. (3) besagt, daß aus jedem Produktionspunkt i genau a_i abtransportiert werden. Die Bedingung (4) wird ökonomisch begründet, daß aus Bedarfspunkten nie etwas zurück-

transportiert wird in Produktionspunkte. Außerdem (5) sollen die Transporte jeweils aus ganzen Einheiten des Produkts (Milchkästen) bestehen.

Summiert man (2) über $j=1, \dots, n$ und (3) über $i=1, \dots, m$ auf, so erhalten wir $\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i$. Daher

nennen wir dieses Transportproblem bilanziert, es wird genau soviel produziert, wie verbraucht wird.

Ein mathematisches Modell läßt mehrere inhaltliche Interpretationen zu, so ist das Zuordnungsproblem ein spezielles Transportproblem. Dabei sind $m = n$ und alle $a_i = b_i = 1$.

In einem Betrieb sind m Maschinen von m Arbeitern zu bedienen. Es ist zu entscheiden, welcher Arbeiter i an welcher Maschine j arbeiten soll. Mit c_{ij} bezeichnen wir hier die Produktivität des Arbeiters i an der Maschine j . Ziel ist es, die Aufteilung der Arbeiter i auf die Maschinen j so zu gestalten, daß die Produktivität maximal wird (1) und jeder Arbeiter an einer Maschine arbeiten soll (3) und jede Maschine durch genau einen Arbeiter bedient wird (2). Die Variablen $x_{ij} = 0$ oder 1 drücken aus, daß der Arbeiter i an der Maschine j arbeitet ($x_{ij}=1$) oder nicht ($x_{ij}=0$).

2. Das Rundreise- oder k-Touren-Problem

In einer Stadt existieren n Briefkästen (numeriert von $1, \dots, j, \dots, n$). Sie werden in einer Fahrt geleert, der Postbeamte muß also, von einem Briefkasten i zum anderen j fahrend, alle leeren. Er wird seine Fahrt so einrichten, daß seine Fahrt so kurz wie möglich wird.

Sind mit c_{ij} die Entfernung zwischen den Briefkästen i und j gegeben, so erhalten wir folgendes mathematisches Modell

$$\sum_{i=1}^n c_i \pi_i \longrightarrow \min_{(\pi_1, \dots, \pi_n) \in S_n},$$

wobei $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ ein Zyklus, also eine Permutation der Zahlen $(1, \dots, n)$, die sichert, daß ausgehend von Briefkasten 1 alle Briefkästen folgend geleert werden.

Dieses Problem wurde zuerst für Handlungsreisende formuliert und

ist daher auch unter dem Namen Problem des Handlungsreisenden oder Rundreiseproblem bekanntgeworden.

Nehmen wir nun an, daß der Platz im Wagen des Postbeamten nicht ausreicht, um den Inhalt aller Briefkästen darin unterzubringen. Daher wird der Postbeamte in mehreren (k -)Touren alle Kästen leeren, somit kommen wir zum Tourenproblem

$$\sum c_i \pi_i \longrightarrow \min_{(\pi_1, \dots, \pi_n) \in Z_{n,k}},$$

wobei $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ eine Permutation ist, die aus k Zyklen besteht ($Z_{n,k}$ Menge aller Permutationen der Zahlen $1, \dots, n$, die genau k Zyklen besitzen).

Auch hier möchten wir eine weitere inhaltliche Interpretation zum mathematischen Modell des k -Touren-Problems geben:

In einem Gummikombinat werden auf k Produktionslinien n Gummisorten hergestellt. Dabei entstehen beim Umrüsten der Produktionslinien von der Gummisorte i zur Sorte j Kosten c_{ij} . Die n Gummisorten sind nun so herzustellen, daß die Umrüstkosten $\sum_{i=1}^n c_i \pi_i$ minimal werden (wobei $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ ein k -Zyklus ist).

3. Standortverteilungsproblem

Zur Herstellung eines bestimmten Produkts (z. B. Elektroenergie) sollen Werke errichtet werden. Dabei liegen für mögliche Produktionspunkte i Projekte mit beliebiger Kapazität vor. Zur Herstellung des Produkts sind Rohstoffe (Kohle) aus Lieferpunkten (Tagebau) anzuliefern, dabei entstehen Transportkosten c_{ij} für eine Einheit des Rohstoffs aus dem Lieferpunkt j in den Produktionspunkt i . Hierbei ist die Kapazität der Lieferpunkte j durch b_j Einheiten beschränkt. Bezeichnen wir nun mit $f_i(y_i)$ die Investitionskosten zur Errichtung eines Werkes mit der Verarbeitungskapazität y_i im Punkt i , und dem Transportplan x_{ij} aus den Lieferpunkten j in die Produktionspunkte, so erhalten wir das folgende Modell:

$$\sum_{i=1}^m f_i(y_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = y_i, \quad i=1, \dots, m \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j=1, \dots, n \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (4)$$

Die Nebenbedingungen (3) - (4) beschreiben ein Polyeder G im euklidischen Raum $E^{m \cdot n}$ der Dimension $m \cdot n$. Auf Grund ökonomischer Überlegungen kann man annehmen, daß die Funktionen $f_i(y_i)$ konkav sind (die Investitionskosten sind relativ geringer bei größeren Kapazitäten). Daher ist das Minimum in den Ecken des Lösungspolyeders G zu erwarten. Damit kann die Aufgabe (1) - (4) als Aufgabe über der Menge $v(G)$ der Ecken des Polyeders betrachtet werden.

$$\min_{x \in v(G)} \sum_{i=1}^m f_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right) + \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \quad (5)$$

Andere inhaltliche Interpretationen sind möglich, z. B. die Transportkosten aus den Produktionspunkten in Bedarfspunkte, nicht Investitionskosten, sondern Investitionskosten plus Produktionskosten, Vorlage von Projekten bestimmter Kapazitäten.

4. Probleme der optimalen Standardisierung

In allen Bereichen der Volkswirtschaft, auch des täglichen Lebens, begegnen wir der Standardisierung, der Beschränkung auf eine bestimmte Menge von Gegenständen, die alle Bedürfnisse befriedigen können.

Gegeben seien Teile j ($j=1, \dots, n$) mit einem Bedarf b_j . Gesucht ist ein standardisiertes Produktionssortiment von Teilen i ($i=1, \dots, m$), eine (Qualifikations-)Matrix $Q = \|q_{ij}\|_{m \times n}$ gibt eine Aussage über die Ersetzbarkeit von Teilen j durch Teile i : $q_{ij} > 0$ bedeutet, daß ein Teil i q_{ij} Teile j ersetzen kann, $q_{ij} = 0$ - keine Ersetzbarkeit. Mit y_i bezeichnen wir den Produktionsumfang an Teilen i , mit x_{ij} die Anzahl der Teile i , die zum Ersatz von Teilen j produziert werden.

Die Produktionskosten $f_i(y_i)$ für y_i Teile i wachsen bei größeren Serien relativ geringer als bei kleiner Anzahl, d. h. $f_i(y_i)$ sind monoton wachsend (besser: nicht fallend) und konkav. Damit ergibt sich folgendes mathematisches Modell:

$$\sum_{i=1}^m f_i(y_i) \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{1j} = y_1, \quad i=1, \dots, m \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m q_{ij} x_{ij} = b_j, \quad j=1, \dots, n \quad (3)$$

$$x_{ij} \begin{cases} \geq 0 & \text{wenn } q_{ij} > 0 \\ = 0 & \text{wenn } q_{ij} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Dieses Problem kann (bei $f_1(y_1)$ konkav) wieder betrachtet werden als diskretes Optimierungsproblem über den Ecken des zulässigen Lösungspolyeders H , das durch (2) - (4) beschrieben wird.

Als einfaches Beispiel können wir uns den Bedarf einer Baustelle an Brettern verschiedener Länge und Dicke (einer Breite) vorstellen. Jeder Balken erhält nun zwei Parameter (Länge, Dicke). Die Ersetzbarkeit ist damit bekannt. Jedes Brett größerer Länge kann durch Zersägen bzw. Absägen auf der Baustelle kürzere ersetzen. Jedes dickere Brett kann dünnere ersetzen.

Wichtig ist, daß das gelieferte Material nicht zu viele Sorten enthält und billig bleibt (also so wenig wie möglich Abfall). In Abhängigkeit von der Anzahl der kennzeichnenden Parameter spricht man häufig auch von ein-, zwei-, ..., mehrparametrischen Problemen.

In einigen Problemen tritt noch die Forderung auf, daß das standardisierte Produktionssortiment nicht mehr als $k \leq m$ Teile beinhalten darf. Daraus erhält man die Bedingung

$$\sum_{i=1}^m \text{sign } y_i \leq k, \quad (5)$$

wobei $\text{sign } y_i = \begin{cases} 0 & y_i = 0 \\ 1 & y_i > 0 \end{cases}$ ist.

Zu diesem mathematischen Modell lassen sich auch andere Probleme führen, wie das Problem eines einheitlichen Maschinenparks. Mit Maschinen i sind gewisse Arbeiten j ausführbar. Bekannt ist der Umfang b_j der Arbeiten j und die Produktivität q_{ij} der Maschinen i bei der Arbeit j (eine Maschine i erledigt in einer Zeiteinheit q_{ij} Arbeiten j , $q_{ij}=0$ - Maschine i zur Arbeit j ungeeignet). Ist es nun das Ziel, die Instand- und Unterhaltskosten für den Maschinenpark minimal zu gestalten, so kommen wir zum

Problem (1) - (4). Die Bedingung (5) würde lauten: im Maschinenpark dürfen höchstens k verschiedene Maschinentypen enthalten sein (z. B. weil das Ersatzteillager zu klein ist).

Es wird aus dem Modell sichtbar, daß das Standardisierungsproblem als spezielles Standortverteilungsproblem (ohne Transportkosten) betrachtet werden kann.

Aus diesen Beispielen wird deutlich, daß ein mathematisches Modell stets nur einen bestimmten Teil, den für die Optimierung wesentlichen, an Informationen des realen Prozesses enthält. Natürlich sind genaue Modelle besser, aber sie haben oft den Nachteil, daß sie nicht mehr in annehmbarer Zeit berechnet werden können. Betrachten wir zum Beispiel das Rundreiseproblem. Sind $n=5$ Briefkästen gegeben, so ist es recht einfach, eine optimale, kürzeste Tour zu finden, auf der alle Briefkästen liegen, da es nur 24 Touren gibt. Ist $n=70$, so ist die Anzahl der möglichen Touren schon eine 100stellige Zahl.

Dr. E. Girlich

Bereich Numerik/Operationsforschung

Preisaufgaben

L 37 Man finde alle reellen Lösungspaare (x,y) der Gleichung

$$x^2 + 2x \sin xy + 1 = 0.$$

L 38 Man zeige, daß für jede natürliche Zahl n eine natürliche Zahl k mit folgender Eigenschaft existiert:

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

L 39 Man beweise, daß aus

$$\frac{x(y+z-x)}{\lg x} = \frac{y(z+x-y)}{\lg y} = \frac{z(x+y-z)}{\lg z}$$

folgt, daß

$$x^y y^x = z^y y^z = x^z z^x.$$

L 40 Es ist bekannt, daß $x^2 + x + 1 = 0$ gilt. Man berechne

$$x^{14} + \frac{1}{x^{14}}.$$

- L 41 Gegeben seien vier positive Zahlen a, b, c, d , deren Produkt gleich 1 ist. Man zeige folgende Eigenschaft:

1

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$$

- L 42 Доказать, что если в треугольной пирамиде две высоты пересекаются то две другие также пересекаются.

2

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden. Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

Einsendeschluß: 15. 10. 1979

Lösungen

Aufgabe L 7

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x - \log_2 x$.

Es gilt $f'(x) = 1 - \frac{1}{x \cdot \ln 2} \geq 0$ für alle $x \geq \frac{1}{\ln 2}$, also auch für alle $x \geq 2$, da $2 > \frac{1}{\ln 2}$.

1. Fall: $0 < x < 1$

Es folgt $\log_2 x < 0$, also $f(x) = x - \log_2 x > 0$.

2. Fall: $x = 1$

Es gilt $\log_2 1 = 0$, also $f(1) = 1 - 0 = 1 > 0$.

3. Fall: $1 < x \leq 2$

Es gilt $0 < \log_2 x \leq 1$, also $f(x) = x - \log_2 x > 0$.

4. Fall: $x > 2$

Es gilt $f'(x) > 0$, d. h. in diesem Bereich ist $f(x)$ monoton wachsend. Also gilt für jedes $x > 2$ die Abschätzung $f(x) > f(2) = 1$. Also gilt auch hier $f(x) > 0$.

Für alle $x > 0$ gilt $f(x) = x - \log_2 x > 0$, d. h. $x > \log_2 x$.

Also kann die Gleichung

$$x = \log_2 x$$

keine reellen Lösungen besitzen.

Aufgabe L 8

Durch einfache Umformungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{n^2 \cdot n! + (n+1)(n+1)!}{(n+2)!} &= \frac{n!(n^2 + (n+1)^2)}{n!((n+1)(n+2))} = \\ &= \frac{2n^2 + 2n + 1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck besitzt aber für $n \rightarrow \infty$ offensichtlich den Grenzwert 2.

Aufgabe L 9

Leider ist die Aufgabe durch einen kleinen Druckfehler verfälscht worden. Da aber viele Leser den Fehler erkannt haben, wollen wir hier die Lösung der ursprünglichen Aufgabe veröffentlichen. Die Lösungen der fehlerhaften Aufgabe werden jedoch trotzdem anerkannt.

Das korrekte Gleichungssystem lautet:

$$x^{\log_y z} + z^{\log_y x} = 512$$

$$\frac{\log_z x}{y} + \frac{\log_z y}{x} = 8$$

$$\frac{\log_x y}{z} + \frac{\log_x z}{y} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

Man erkennt, daß gelten muß $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Durch eine Substitution

$$x = 2^a, \quad y = 2^b, \quad z = 2^c$$

erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$2^{\frac{ac}{b}} + 2^{\frac{ac}{b}} = 2^9$$

$$2^{\frac{ah}{c}} + 2^{\frac{ab}{c}} = 2^3$$

$$2^{\frac{bc}{a}} + 2^{\frac{bc}{a}} = 2^{3/2}$$

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad & \frac{ac}{2^b} = 2^8 \\ & \frac{ab}{2^c} = 2^2 \\ & \frac{bc}{2^a} = 2^{1/2} \end{aligned}$$

Mit der Eindeutigkeit der Exponentialfunktion folgt sofort:

$$ac = 8b$$

$$ab = 2c$$

$$bc = \frac{a}{2}$$

Dieses Gleichungssystem hat folgende Lösungen:

$$(4, 1, 2), (4, -1, -2), (-4, -1, 2), (-4, 1, -2).$$

Damit ergeben sich die Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems:

$$(16, 2, 4), (16, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{16}, \frac{1}{2}, 4), (\frac{1}{16}, 2, \frac{1}{4}).$$

Aufgabe L 10

$$\text{1. Fall: } x > 0 \quad \text{Es folgt } x^2 + x - 6 > 0 \quad (1)$$

$$\text{2. Fall: } x < 0 \quad \text{Es folgt } x^2 + x - 6 < 0 \quad (2)$$

Die Parabel $x^2 + x - 6 = y$ hat ihre Nullstellen bei $x = -3$ und $x = 2$ und ist nach oben geöffnet. Also gilt für alle x mit $x < -3$ oder $x > 2$ die Beziehung (1) und für alle x mit $-3 < x < 2$ die Beziehung (2). Daraus ergibt sich jedoch die Lösung der Ungleichung $x > 2$ oder $-3 < x < 0$.

Aufgabe L 11

Offensichtlich gilt immer

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

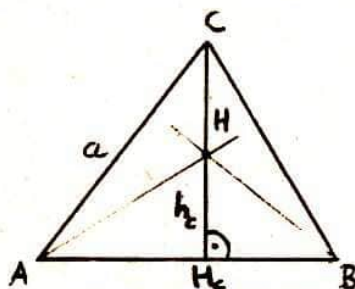
$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Nach Voraussetzung gilt $a \cdot b > 0$, also kann durch $a \cdot b$ dividiert werden, ohne daß sich das Relationszeichen ändert.

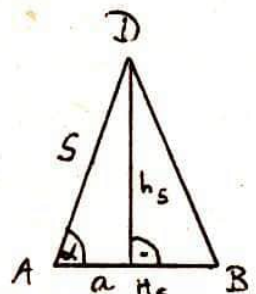
$$\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} \geq 2$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

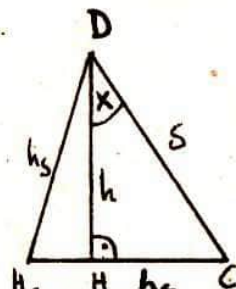
Aufgabe L 12



1) Grundfläche



2) Seitenfläche



3) Schnitt

$$h_c = \overline{H_c C}$$

Nach Dreieckssätzen gilt:

$$h_c = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

$$\overline{HC} = \frac{2}{3} h_c = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Es gilt:

$$\cos \alpha = \frac{a}{2s}$$

$$\sin x = \frac{\overline{HC}}{s} = \frac{a}{\sqrt{3}s}$$

$$\frac{\sin x}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{x = \text{Arc sin} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \alpha \right)}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \text{Arc sin} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \alpha \right) < \frac{\pi}{2}.$$

Da der Sinus in diesem Bereich streng monoton steigend ist, folgt:

$$0 < \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \alpha < 1$$

$$0 < \cos \alpha < \frac{1}{2} \sqrt{3} \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

Da der Cosinus in diesem Bereich streng monoton fallend ist, folgt:

$$\text{Arc cos } 0 > \alpha > \text{Arc cos } \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{2} > \alpha > \frac{\pi}{6}$$

Die Grenzfälle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = \frac{\pi}{6}$ entsprechen auch den geometrischen Entartungen der Pyramide, Prisma mit unendlicher Höhe und Dreieck.

Die XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Vom 8.-12. April 1979 in der Jugendhochschule

„Wilhelm Pieck“ am Bogensee

Ein Bericht von Stefan Müller-Pfeiffer, Spezialschule „Carl Zeiss“ Jena

Sonntag, 8. April

Am Sonntag, dem 8. April, wurde in der Jugendhochschule "Wilhelm Pieck", die der 4. Stufe der Olympiade Junger Mathematiker nun schon traditionell als Austragungsort dient, die XVIII.OJM der DDR eröffnet. Bei strahlendem Sonnenschein waren 155 Jungen und 28 Mädchen, darunter 33 Frühstarter, aus allen Bezirken der Republik angereist, um ihre mathematischen Kräfte zu messen. Rund 80 Betreuer und Korrektoren sollten die jungen Mathematiker unterstützen und später ihre Lösungen korrigieren.

Am Abend wurde die Olympiade feierlich eröffnet. Für die kulturelle Umrahmung sorgte der Singeklub des Instituts für Lehrerbildung Templin.

Montag, 9. April

An diesem Tag sollte es nun ernst werden, denn es wurde die erste Klausur geschrieben.

Nach dem Aufstehen um 6.15 Uhr, der nachfolgenden Morgentoilette und dem Frühstück fieberte schon alles auf die Aufgaben. Nach einer kurzen Einweisung über organisatorische Fragen konnte es nun endlich losgehen. In 4 1/2 Stunden waren 3 Aufgaben zu bearbeiten, davon in der Klassenstufe 10 eine Wahlaufgabe.

Nach Abschluß der Klausur wurden dann von allen Teilnehmern die Aufgaben heftig diskutiert.

Den Nachmittag nutzten die Teilnehmer in vielfältiger Weise zur Erholung und Entspannung. Am Abend sprach Prof. Dr. Herneck über Leben und Werk von Albert Einstein, wobei er auch weniger be-

kannte Aspekte seines Lebens beleuchtete, wie z. B. sein Verhältnis zur Mathematik. Angesichts der 2. Klausur am nächsten Tag gingen dann alle Olympioniken rasch zu Bett.

Dienstag, 10. April

An diesem Tag sollte nun die zweite Klausur gestartet werden, und es war zu erwarten, daß an diesem Tag die Aufgaben gestellt würden, die die höchsten Schwierigkeiten enthalten. In diesem Sinne verlief der Tagesbeginn wie am Vortag. In der Klausur waren wieder 3 Aufgaben in gut 4 Stunden zu lösen.

Nach Abschluß der Klausur wurden wieder heftige Streitgespräche über die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten geführt.

Nach dem Mittagessen fuhren alle Teilnehmer der Olympiade nach Berlin. Der Nachmittag diente der individuellen Freizeitgestaltung, die meistens darin bestand, Einkäufe zu tätigen.

Nach dem Abendessen in der zentralen Betriebsgaststätte Clara-Zetkin-Straße waren dann Konzert- und Theaterbesuche geplant. Die Olympioniken konnten entweder im Berliner Ensemble das "Leben des Galilei", im Maxim-Gorki-Theater Rasputins "Geld für Maria", in der Komischen Oper das Ballett "Schwarze Vögel" oder im Metropol-Theater ein Konzert besuchen.

Erst spät in der Nacht kehrten wir in die Jugendhochschule zurück. Doch an Ruhe war noch nicht zu denken, dazu war die Spannung auf die Ergebnisse viel zu groß. Endlich, nachdem die Neugier befriedigt worden war, kehrte Ruhe ein.

Mittwoch, 11. April

Auch an diesem Tag war es uns nicht vergönnt, länger schlafen zu können, denn nach dem Frühstück bekamen wir die korrigierten Lösungen unserer Aufgaben zurück, damit man noch Protest einlegen konnte, falls man sich ungerecht beurteilt fühlte.

Den Rest des Vormittags hatten dann die Koordinatoren Zeit, die Proteste zu bearbeiten.

Am Nachmittag fand im Festsaal der Jugendhochschule die Siegerehrung statt.

Nach dem Kulturprogramm des FDJ-Ensembles des Pionierhauses wurden die Sieger ausgezeichnet und die IMO-Kandidaten berufen. Das Fernsehen der DDR drehte einen Filmbericht, der am Abend in der Aktuellen Kamera gesendet wurde.

Nach der Siegerehrung fuhren die ersten Delegationen nach Hause, während die anderen am Abend noch eine Filmveranstaltung ansehen konnten.

Donnerstag, 12. April

An diesem Tag erfolgte die Abreise des Restes der Delegationen. Nach dem Frühstück setzten wir uns in einen Autobus und wurden bis zum Bahnhof Bernau gefahren.

Preisträger

Olympiadeklasse 11/12

Einen 1. Preis erhielten:

Stefan Schuster	EOS "Ernst Schneller" Meissen
Steffen Zopf	EOS "Karl Marx" Leipzig
Lutz Dietrich	Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt Sektion Mathematik, Spezialklasse

Einen 2. Preis erhielten:

Andreas Kasperek	Spezialklasse der Martin-Luther-Universität Halle
Uwe Szyszka	EOS "Friedrich Engels" Neubrandenburg
Tilo Brock	BBS BMK Süd Leipzig
Frank Eisenhaber	Spezialschule Mathematik/Physik der Humboldt-Universität Berlin
Axel Fröhlich	Spezialschule "C. F. Gauß" Frankfurt/O.
Frank Erdmann	Spezialklasse der Martin-Luther-Universität Halle
Matthias Gelbrich	EOS "Heinrich Hertz" Berlin
Holger Rücker	Spezialklasse Mathematik/Physik der Humboldt-Universität Berlin
Norbert Münde	Erw. Goethe-Oberschule Bad Doberan

Einen 3. Preis erhielten:

Thomas Gundermann, Sonneberg	Uwe Mehlhorn, Stollberg
Bernd Kreußler, Berlin	Kerstin Rudolf, K-M-Stadt
Friedemann Schuricht, Leipzig	Gerald Werner, Meiningen
Erasmus Scholz, Dresden	Thomas Apel, K-M-Stadt
Steffen Ewald, Frankenberg	Bodo Heise, Görlitz
Grit Werner, Magdeburg	Jens Galley, Berlin
Maik Hellmund, Meiningen	Peter Düring, Rostock

Olympiadeklasse 10

Einen 1. Preis erhielten:

Andreas Goede	General-Walter-EOS Strausberg
Jürgen Gräfenstein	EOS "M.-Andersen-Nexö" Dresden
Detlef Horbach	EOS "Friedrich-Engels" K-M-Stadt
Axel Schüler	Gerhard-Eisler-OS Kleinmachnow

Einen 2. Preis erhielten:

Jens Heinrich	Goethe-Schule Jüterbog
Michael Giesecke	Spezialsch. f. Elektrn. Industrie "Martin-Andersen-Nexö" Dresden
Steffen Grunewald	EOS Kleinmachnow
Marid Helbig	Spezialschule "C. F. Gauß" Frankfurt/O.
Jens Franke	15. POS "R. Scheffel" Gera
Bernd Kirchheim	EOS "Friedrich Schiller" Weimar
Gabriele Drauschke	EOS "Clara Zetkin" Neustrelitz
Ralf Hortig	13. POS Cottbus
Stefan Thäter	EOS "Friedrich Schiller" Weimar

Einen 3. Preis erhielten:

Ralf Muschall, Eisenach	Jörn-Uwe Müller, Kleinmachnow
Mario Binkowski, Demmin	John Matzke, Erfurt
Michael Baranowski, Leipzig	Stefan Müller-Pfeiffer, Jena
Uwe Fetzner, Suhl	Peter Zienicke, Magdeburg
Volkmar Heinrich, Templin	Kai Seyffarth, Rostock
Norbert Koks, Dresden	

Aufgaben der DDR-Mathematikolympiade 1979

Olympiadeklasse 11/12

1. Man ermittle alle ganzen Zahlen a mit der Eigenschaft, daß zu den Polynomen

$$f(x) = x^{12} - x^{11} + 3x^{10} + 11x^3 - x^2 + 23x + 30,$$

$$g(x) = x^3 + 2x + a$$

ein Polynom $h(x)$ so existiert, daß für alle reellen x die Gleichung $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ gilt.

2. Im Staat Wedonien gibt es ein Straßennetz. An jeder Kreuzung und an jeder Einmündung von Straßen dieses Netzes steht ein Verkehrsposten. Die Länge eines jeden Straßenabschnittes zwischen je zwei benachbarten dieser Posten ist kleiner als 100 km. Jeder Verkehrsposten läßt sich von jedem anderen auf einem Gesamtweg innerhalb des Netzes erreichen, der kürzer als 100 km ist. Ferner gilt für jeden Straßenabschnitt zwischen zwei benachbarten Verkehrsposten: Wird genau dieser Straßenabschnitt gesperrt, so ist immer noch jeder Verkehrsposten von jedem anderen auf einem Gesamtweg erreichbar, der sich nur aus ungesperrten Straßenabschnitten des Netzes zusammensetzt.

Man beweise, daß dies auf einem Weg erfolgen kann, der kürzer als 300 km ist.

3. (a) In einer Ebene sei $P_1 P_2 \dots P_n$ ein beliebiges ebenes konvexes n -Eck E .

Man beweise folgende Aussage (1):

Sind im Innern oder auf dem Rande von E Punkte $Q_1, \dots, Q_n$ so gelegen, daß $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ ein zu E kongruentes n -Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i ($i=1, \dots, n$) eine Ecke von E . (1)

(b) Gibt es nicht-konvexe n -Ecke E , für welche die Aussage (1) falsch ist?

(c) Ist für jedes nicht-konvexe n -Eck E die Aussage (1) falsch?

4. Man beweise, daß für alle positiven ganzen Zahlen m, n mit $m > n$ die durch

$$s(m, n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |i-j|$$

definierte Summe $s(m, n)$ den Wert

$$s(m, n) = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{2}mn(m-n)$$

hat.

5. Es sei n eine natürliche Zahl größer als 1. Man zeige, daß es zu jeder der n Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ mit $a_j = n! + j$ ($j=1, 2, \dots, n$) eine Primzahl p_j gibt, die die Zahl a_j , aber keine weitere Zahl a_k ($k \neq j$) dieser n Zahlen teilt.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild

Redaktion: G. Blume, H. Gottstein, H. Schwulow, D. Meinhardt, V. Wedler, G. Müller
D. Heinrich und J. Heß

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

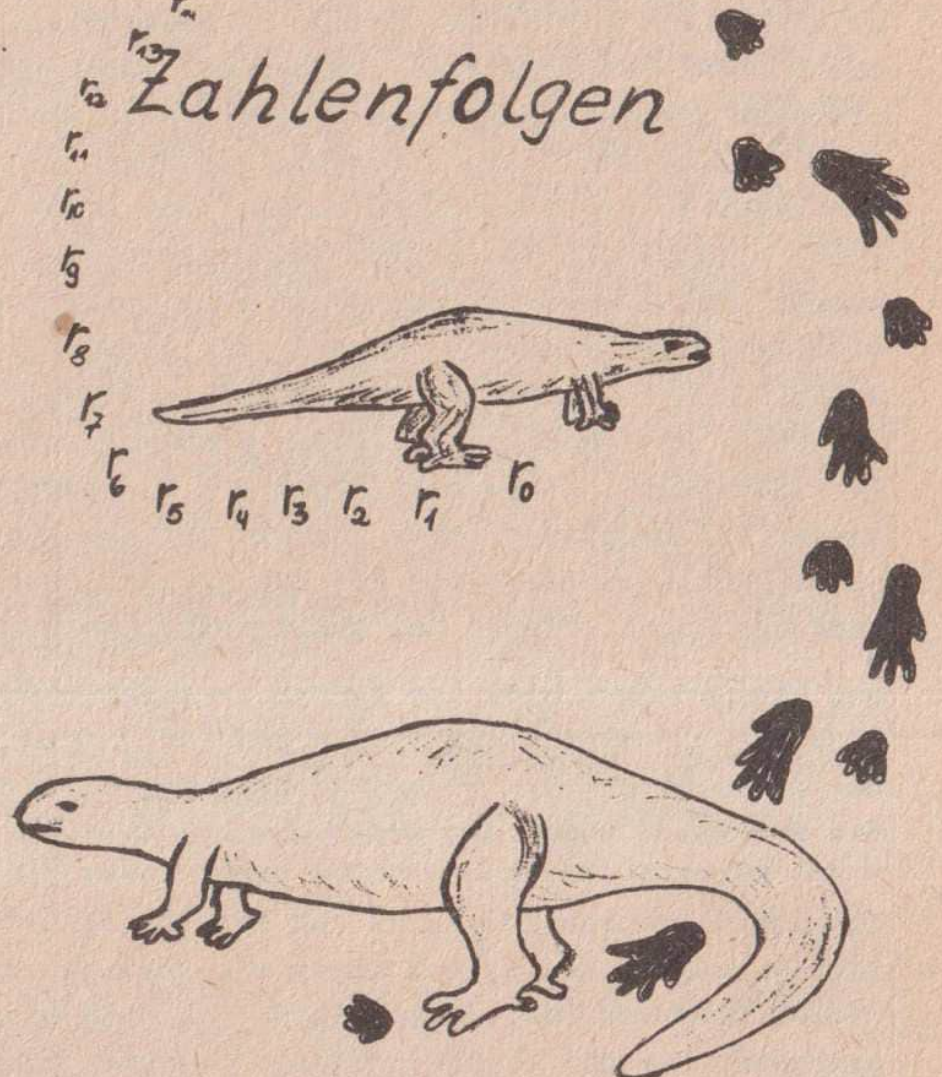
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement
0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der
DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 21. Juni 1979

Zur Identifizierung von Sauriern und Zahlenfolgen



WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Univer-
sität Jena

13. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

9

79

Zur Identifizierung von Sauriern und Zahlenfolgen

Im Jahre 1824 wurden in England in Sandsteinen des Trias versteinerte handförmige Fährten unbekannter Tiere gefunden. Fährten offenbar gleichen Ursprungs wurden später als Versteinerungen an verschiedenen Orten entdeckt, wie etwa 1834 bei Hildburghausen (Thür.). Diese Abdrücke wurden 1835 durch A. v. HUMBOLDT (1769 - 1859) als Spuren von Beuteltieren gedeutet. Im Jahre 1924 konnte anhand einer sorgfältigen Fährtenanalyse eine Rekonstruktion der Tiere angegeben werden, die diese Spuren hinterlassen haben. Danach handelt es sich nicht um Beuteltiere, sondern um Vertreter der Thecodontia, einer Stammgruppe der Riesensaurier (s. Titelbild). Diese ungefähr 4 - 5 m großen Reptilien des Trias trugen die Hauptlast ihres Körpers auf den Hinterbeinen und sind entwicklungsgeschichtlich mit den Krokodilen verwandt. Bis heute sind von diesen Tieren nur Fährtenabdrücke bekannt.

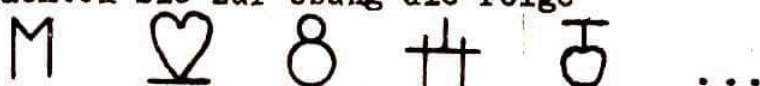
Uns interessiert hier die dieser beschriebenen Rekonstruktion zugrunde liegende prinzipielle Methode. Anhand einer Detailinformation wurde auf die Gesamtstruktur des Objektes geschlossen, aus den Fußspuren wurde gewissermaßen induktiv der Körperbau dieser Tiere entwickelt. Ohne Zweifel waren dabei Kenntnisse über die Umweltbedingungen des Trias von Nutzen. Derartige induktive Identifizierungsvorgänge, bei denen aus vorliegenden speziellen Kenntnissen über ein bestimmtes, im Ganzen noch unbekanntes Objekt Hypothesen über die Struktur dieses Objektes aufgestellt werden - natürlich mit dem Ziel, durch diese Hypothesen die tatsächliche Struktur des noch unbekannten Objektes so gut wie möglich zu beschreiben - sind mit der Entwicklung der Wissenschaften von Beginn an auf das engste verbunden.

Im vorliegenden Artikel sollen Fragen der induktiven Erkennung unendlicher Zahlenfolgen betrachtet werden; mit diesem Themenkreis ist der Leser gewiß bereits des öfteren konfrontiert worden. Als Anfang einer unendlichen Zahlenfolge $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ seien etwa die Werte

$$r_0=1, r_1=2, r_2=4, r_3=8$$

gegeben, im Sinne unseres einleitenden Beispiels spielen diese

Werte die Rolle des Fußabdruckes. Es ist eine explizite Darstellung der Zahlen r_n dieser Folge gesucht, d. h., eine allgemeine Beschreibung der Folge $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$. Anhand der gegebenen Detailinformation r_0, r_1, r_2, r_3 stellen wir die Hypothese " $r_n = 2^n$ " auf, ebenso könnten wir die Hypothese " $r_n = r_{n-1} + 2(n-1)$, für $n \geq 2$ " und viele andere mehr aufstellen. Erhalten wir als nächste Information über die Folge $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ den Wert $r_4 = 14$, so hat sich unsere erste Hypothese " $r_n = 2^n$ " als falsch erwiesen, wogegen dieser Wert mit unserer zweiten Hypothese übereinstimmt. Offenbar hätten wir die falsche Hypothese " $r_n = 2^n$ " nicht aufgestellt, wenn uns zuvor als "Umweltinformation" (im einleitenden Beispiel waren dieses Kenntnisse über die Umweltbedingungen des Trias) gesagt worden wäre, daß diese Folge $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ keine geometrische Folge ist. Zur Identifizierung von Zahlenfolgen werden stets gewisse Zusatzkenntnisse (a-priori-Informationen) erforderlich sein, wie etwa über den Typ der zu erwartenden allgemeinen Darstellung der Zahlen r_n . Betrachten Sie zur Übung die Folge



Ihre a-priori-Information ist mit dem Charakter dieser Zeitschrift gegeben, d. h., es ist keine Entwicklung altgermanischer Runen zu erwarten.

Aufgaben

1. Es sei $r_0 = 5$, $r_1 = 7$. Geben Sie die explizite Formel der Zahlen r_n der arithmetischen Folge $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ an!

2. Beginnend mit $r_0 = 7$ seien die nächsten Elemente einer Folge $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit den Werten

22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, ...

in dieser Reihenfolge gegeben. Unter Kenntnis des Bildungsgesetzes dieser Folge können wir nun den Wert von r_0 verändern, etwa zu 12, und würden diesem Bildungsgesetz zufolge als weitere Folgeelemente 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, ... erhalten. Wie lautet dieses Bildungsgesetz und enthalten alle Folgen, die nach diesem Bildungsgesetz aufgebaut sind (bei beliebigem ganzzahligem r_0), unendlich oft den Wert 1?

3. Für eine Folge $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ sei bekannt, daß $r_0=0$ ist und für alle $n \geq 0$ stets

$$\sum_{i=0}^n r_i = \frac{1}{6}(n+1) - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{3}(n+1)^3$$

gilt.

Geben Sie für die Zahlen r_n eine allgemeine Darstellung an!

Es sei nun $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen. Für diese Folge sei bekannt, daß sie eine rekursive Folge zweiter Ordnung ist, d. h., es existieren reelle Zahlen a_1 und a_2 so, daß für $n \geq 2$ stets

$$r_n = a_1 r_{n-1} + a_2 r_{n-2}$$

erfüllt ist. Die Werte r_0, r_1 können beliebig vorgegeben sein. Für derartige Folgen wollen wir nun folgende Fragen betrachten:

- (A) Es seien die Werte $r_0, r_1, \dots, r_m$ gegeben. Wie groß muß m gewählt sein, um sicher sein zu können, daß unter alleiniger Kenntnis dieser Werte die Angabe einer expliziten Formel für die rekursive Folge $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ zweiter Ordnung möglich ist?
- (B) Existiert eine allgemeine Lösungsvorschrift, nach welcher, ausgehend von hinreichend vielen Anfangswerten im Sinne von (A), in jedem Fall für rekursive Folgen zweiter Ordnung die explizite Formel zu entwickeln ist?
- (C) Kann man für endliche Folgen $s_0, s_1, \dots, s_m$ reeller Zahlen entscheiden, ob sie ein Anfangsstück einer rekursiven Folge zweiter Ordnung sind oder nicht?

Diese Fragen werden durch den folgenden Satz und die Ausführungen im Beweis dieses Satzes umfassend beantwortet.

Satz: Eine rekursive Folge zweiter Ordnung ist durch ihren Anfang r_0, r_1, r_2, r_3 bereits eindeutig bestimmt. Aus diesen vier Werten kann anhand eines allgemeinen Lösungsverfahrens die explizite Formel für r_n berechnet werden. Vier reelle Zahlen r_0, r_1, r_2, r_3 beschreiben genau dann keinen Anfang einer rekursiven Folge zweiter Ordnung, falls $r_1^2 = r_0 r_2$ gilt sowie

1. $r_0 = 0$, aber $r_2 \neq 0$ oder $r_3 \neq 0$; oder
2. $r_0 \neq 0$, aber $r_3 \neq \frac{r_1}{r_0} \cdot r_2$.

Beweis. Es seien vier reelle Zahlen r_0, r_1, r_2, r_3 gegeben. Diese Zahlen seien Anfang einer rekursiven Folge zweiter Ordnung mit dem Bildungsgesetz

$$(1) \quad r_n = a_1 r_{n-1} + a_2 r_{n-2}, \text{ für } n \geq 2.$$

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$r_2 = a_1 r_1 + a_2 r_0$$

$$r_3 = a_1 r_2 + a_2 r_1.$$

Für dieses Gleichungssystem erhalten wir die Lösungen

$$(2) \quad a_1 = \frac{r_0 r_3 - r_1 r_2}{r_0 r_2 - r_1^2} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{r_1 r_3 - r_2^2}{r_1^2 - r_0 r_2},$$

wobei natürlich $r_0 r_2 \neq r_1^2$ vorauszusetzen ist. In diesem Fall verfügen wir bereits über die Werte a_1 und a_2 und somit über die Rekursionsdarstellung (1). Den Fall $r_0 r_2 = r_1^2$ werden wir am Ende des Beweises betrachten.

Es sei $a_1^2 + 4a_2 = 0$. Wir zeigen, daß dann

$$(3) \quad r_n = \frac{a_1^{n-1}}{2^n} (2nr_1 - (n-1)a_1 r_0), \text{ für } n \geq 0$$

gilt. Für $n=0$ ist $r_0 = \frac{1}{a_1} (0 + a_1 r_0) = r_0$.

$$\text{Für } n=1 \text{ ist } r_1 = \frac{1}{2} (2r_1 - 0) = r_1.$$

$$\text{Für } n=2 \text{ ist } r_2 = \frac{a_1}{4} (4r_1 - a_1 r_0) = a_1 r_1 - \frac{a_1^2}{4} r_0 = a_1 r_1 + a_2 r_0,$$

da $a_2 = -\frac{a_1^2}{4}$ nach Voraussetzung. Die Darstellung $r_2 = a_1 r_1 + a_2 r_0$ entspricht (1). Im Induktionsschritt erhalten wir

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= a_1 r_{n+1} - \frac{a_1^2}{4} r_n = \frac{a_1^{n+1}}{2^{n+1}} (2nr_1 + 2r_1 - na_1 r_0 - nr_1 + \frac{n}{2} a_1 r_0 - \frac{a_1 r_0}{2}) \\ &= \frac{a_1^{n+1}}{2^{n+2}} (2(n+2)r_1 - (n+1)a_1 r_0). \end{aligned}$$

Somit ist (3) bewiesen.

Es sei nun $a_1^2 + 4a_2 \neq 0$ vorausgesetzt. Wir betrachten die geometrische Folge $1, q, q^2, \dots$ als Lösung von (1), d. h., es sei $q^2 = a_1 q + a_2$. Für diese quadratische Gleichung erhalten wir die Lösungen

$$(4) \quad \alpha = \frac{1}{2} (a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}) \text{ und } \beta = \frac{1}{2} (a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2}),$$

welche möglicherweise komplexe Zahlen sein können (falls $a_1^2 + 4a_2 < 0$). Wir gehen weiterhin von dem Ansatz $r_n = \alpha^{n-1}x + \beta^{n-1}y$ aus und suchen Werte für x und y , so daß diese Gleichung für $n \geq 1$ stets erfüllt ist. Für $n=1$ und $n=2$ müssen also die Gleichungen

$$r_1 = x + y$$

$$r_2 = \alpha x + \beta y$$

gelten. Nach der Voraussetzung $a_1^2 + 4a_2 \neq 0$ ist $\alpha \neq \beta$; wir erhalten die Lösungen

$$(5) \quad x = \frac{r_2 - \beta r_1}{\alpha - \beta} \quad \text{und} \quad y = \frac{r_2 - \alpha r_1}{\beta - \alpha}.$$

Mit diesen Lösungen x und y ist nun

$$(6) \quad r_n = \alpha^{n-1}x + \beta^{n-1}y, \text{ für } n \geq 1$$

erfüllt: Für $n=1,2$ ist dies gerade das oben als Ausgangspunkt gewählte Gleichungssystem. Im Induktionsschritt gilt

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= a_1 r_{n+1} + a_2 r_n = a_1 (\alpha^n x + \beta^n y) + a_2 (\alpha^{n-1} x + \beta^{n-1} y) \\ &= \alpha^{n-1} (a_1 \alpha + a_2) x + \beta^{n-1} (a_1 \beta + a_2) y \\ &= \alpha^{n-1} \alpha^2 x + \beta^{n-1} \beta^2 y = \alpha^{n+1} x + \beta^{n+1} y. \end{aligned}$$

Zum Abschluß des Beweises ist noch der Fall $r_0 r_2 = r_1^2$ zu betrachten. Für $r_0 = 0$ ist auch $r_1 = 0$ und gemäß (1) also

$$(7) \quad r_n = 0, \text{ für } n \geq 0.$$

Für $r_0 \neq 0$ zeigen wir, daß für $n \geq 0$ stets $r_{n+1} = \frac{r_1}{r_0} \cdot r_n$ gilt. -

Für $n=0$ ist natürlich $r_1 = \frac{r_1}{r_0} \cdot r_0$ erfüllt. Für $n=1$ gilt

$r_2 = \frac{r_1}{r_0} \cdot r_1$ nach obiger Voraussetzung ($r_0 r_2 = r_1^2$). Im Induktionsschritt betrachten wir $r_{n+2} = a_1 r_{n+1} + a_2 r_n$. Es gilt

$$r_{n+2} = \frac{r_1}{r_0} (a_1 r_n + a_2 r_{n-1}) = \frac{r_1}{r_0} \cdot r_{n+1}. \quad - \text{ Da für } n \geq 0 \text{ stets}$$

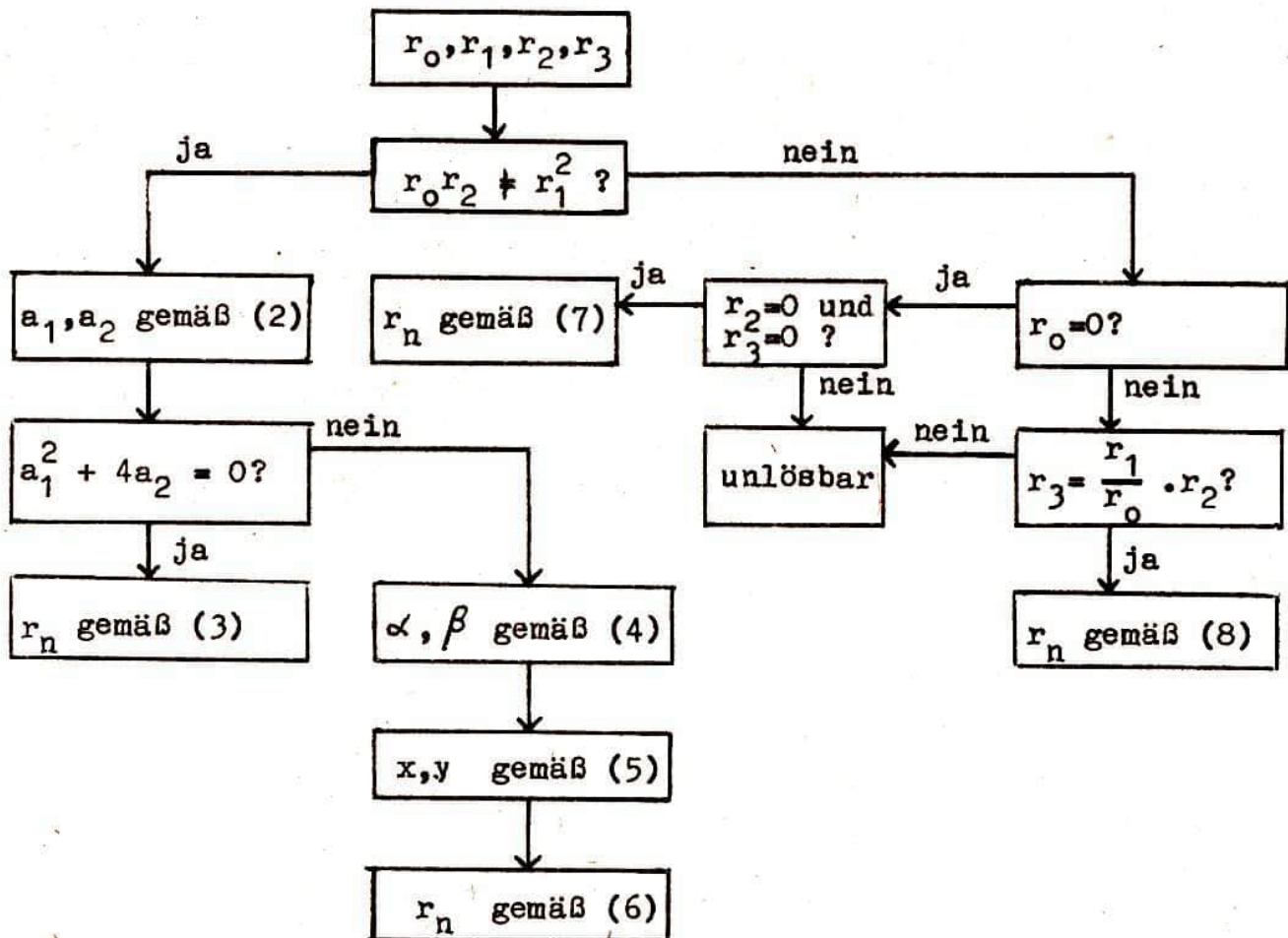
$$r_{n+1} = \frac{r_1}{r_0} \cdot r_n \text{ gilt, ist}$$

$$(8) \quad r_n = r_0 \cdot \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^n, \text{ für } n \geq 0$$

erfüllt.

Q.E.D.

Den im Beweis entwickelten Lösungsalgorithmus können wir schematisch wie folgt darstellen.



Aufgaben

1. Geben Sie für folgende Anfänge rekursiver Folgen zweiter Ordnung allgemeine Darstellungen für r_n an:

a) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

b) $-1, 1, 8, 28$

2. Gegeben sei die Folge $r_0=2, r_1=3$ und $r_{n+2}=2r_{n+1}-r_n$, für $n \geq 0$. Geben Sie eine explizite Formel für r_n an!

3. Entwickeln Sie für die Folge $r_0=1$, $r_1=2$ und $r_{n+2}=r_{n+1}+2r_n$, für $n \geq 0$, eine explizite Darstellung für r_n !

Abschließend betrachten wir ein Beispiel für den Fall komplexer Werte für α und β . Es sei die Folge $r_0=2$, $r_1=\sqrt{3}$ und $r_{n+2}=\sqrt{3}r_{n+1}-r_n$, für $n \geq 0$, gegeben. Für α und β erhalten wir zunächst die Lösungen

$$\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) \quad \text{und} \quad \beta = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i),$$

wobei $i=\sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit ist. Mittels (5) führt dies auf die Werte

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i),$$

d. h., wir haben für r_n die explizite Formel

$$r_n = \frac{1}{2^n} ((\sqrt{3}+i)^n + (\sqrt{3}-i)^n)$$

gefunden. Diese Werte für r_n sind für $n \geq 0$ stets reell, es gilt

$$r_n = 2 \cdot \cos \frac{n\pi}{6}, \quad \text{für } n \geq 0.$$

Beweis. Für $n=0$ ist $r_0=2 \cdot \cos 0 = 2$. Für $n=1$ ist $r_1=\sqrt{3} = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}$. Im Induktionsschnitt erhalten wir

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= \sqrt{3} r_{n+1} - r_n = 2 \left[\sqrt{3} \cdot \cos \frac{(n+1)\pi}{6} - \cos \frac{n\pi}{6} \right] \\ &= 2 \left[2 \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{(n+1)\pi}{6} - \cos \frac{n\pi}{6} \right] \\ &= 2 \left[\cos \frac{(n+2)\pi}{6} + \cos \frac{n\pi}{6} - \cos \frac{n\pi}{6} \right] \\ &= 2 \cos \frac{(n+2)\pi}{6}. \end{aligned}$$

Dr. Reinhard Klette
Bereich Mathematische Kybernetik
und Rechentechnik

Lehrer werden...

Wenn man an unserer Sektion einen Lehrerstudenten danach fragt, ob er von Anfang an Lehrer für Mathematik und Physik werden wollte, so muß man feststellen, daß viele zuvor den Beruf des Lehrers ergreifen wollten, aber nicht in dieser Fachkombination. Erst durch das aktive Auseinandersetzen mit einer Vielzahl von mathematischen und physikalischen Problemen während des Studiums, insbesondere in der Grundkursausbildung in den beiden Fächern, findet man zu einem persönlichen Verhältnis und vor allem zu größerem Interesse an Mathematik und Physik. Der Lehrerstudent steht nicht nur vor der Aufgabe, den Schulstoff von einem höheren wissenschaftlichen Standpunkt sehen zu lernen, sondern er soll sich mit den Methoden und Arbeitsweisen der Erkenntnisfindung vertraut machen. Ein Lehrerstudium stellt also keinesfalls niedrigere Anforderungen an das math. Wissen und Können als ein Mathematikstudium. Die Mathematikausbildung der Lehrer zeigt besonders den lückenlosen logischen Aufbau der Mathematik von den Anfängen bis zu seinem heutigen Entwicklungsstand. Dieser Sachverhalt verlangt von einem Lehrerstudenten, sich kontinuierlich mit Vorlesungen und Seminaren auseinanderzusetzen. Setzt man in dieser Hinsicht wirklich hohe Maßstäbe, so wird man durch sein wachsendes Verständnis auch Freude an der Mathematik und Physik finden. Die persönliche Begeisterung für seine Schulfächer ist eine wesentliche Voraussetzung für eine gute Unterrichtsgestaltung in der späteren Berufspraxis. Nur der Lehrer kann das Interesse an seinen Fächern bei den Schülern wecken, der selbst ein gutes Verhältnis zur Mathematik und Physik hat.

Von Beginn des Studiums an hat der Lehrerstudent eine breite Palette von Möglichkeiten, seine pädagogischen Kenntnisse und Fähigkeiten in der Praxis zu erproben. Im ersten Studienjahr nimmt man unter der Anleitung eines Klassenlehrers an der Gestaltung des Pionierlebens teil. Nachdem der Lehrerstudent im Rahmen des Hospitationspraktikums seine ersten Stunden selbst gehalten hat, werden im 3. Studienjahr schulpraktische Übungen in den beiden Fächern durchgeführt, bei denen das spezifische Unterrichtsverhalten eines jeden Studenten kritisch analysiert

werden kann. In dem 10-wöchigen großen Schulpraktikum muß man sich als Lehrerstudent zum ersten Mal über längere Zeit in der Schulpraxis behaupten.

Peter M. Schmidt
Lehrerstudent für Mathematik
und Physik
3. Studienjahr FSU Jena

Jenaer Geschichten

- 1979 - //

Gast im Studentenhotel: "Das war eine schreckliche Nacht. Wegen der Kakerlaken habe ich kein Auge zugemacht!"

Heimleiterin: "Hätten Sie doch Licht gemacht und die Biester gefangen!"

Gast: "Ich bitte Sie! Ich habe bei Ihnen ein Zimmer gemietet und keine Jagd gepachtet!"

- 1971 - //

Professor X. sitzt angetrunken in der HO-Gaststätte "Satellit". Da betreten 2 Studenten das Lokal. Der Professor schaut sie verwundert an: "Eigentlich müßtet ihr jetzt in meiner Vorlesung sitzen!"

- 1913 - (Medizinvorlesung) //

Professor: "Wie Sie sehen, meine Herren, ist das linke Bein des Patienten kürzer als das rechte. Was würden Sie in einem solchen Falle tun?"

Ein Hörer: "Hinken."

1679 - In jener Zeit waren die Studenten in Jena als derbe Raufbolde bekannt (siehe auch WURZEL 5/77) //

Ein Ausländer, der die Jenaer Sitten noch nicht kannte, fragte verwundert: "Wie kommt es, daß die Studenten hier so viele Narben im Gesicht haben?"

Antwort: "Da können Sie mal sehen, was das Studium doch für Kopfzerbrechen bereitet!"

Preisaufgaben

- L 43 Gegeben sei eine Folge reeller Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots$, für die gilt

1

$$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 1.$$

Man berechne a_n mit Hilfe von

$$a_1, a_2 \text{ und } n.$$

- L 44 Man löse folgendes Gleichungssystem:

2

$$\begin{aligned} x \cdot \sqrt{x} - y \cdot \sqrt{y} &= a(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \\ x^2 + xy + y^2 &= b^2 \\ a > 0, \quad b > 0. \end{aligned}$$

- L 45 Man löse die Gleichung:

1

$$(\cot x)^2 = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$$

- L 46 Man berechne das Produkt

1

$$\left[1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right] \cdot \dots \cdot \left[1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right],$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ gilt.

- L 47 Für welche Werte von x und a ist die folgende Ungleichung erfüllt:

1

$$\log_2 x + \log_x 2 + 2 \cos a \leq 0 ?$$

- L 48 Все три плоских угла некоторого трёхгранного угла являются острыми. Один из них равен α ; двухгранные углы, прилежащие к этому плоскому углу, равны, соответственно, β и γ . Найти два других плоских угла.

2

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkt erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 15. 12. 1979

Lösungen

Aufgabe L 13

Es ist bekannt $a_1 > 0$, $\frac{a_2}{a_1} = q > 0$, $q \neq 1$,

$$b_2 - b_1 = d > 0,$$

wobei q und d die Parameter der geometrischen bzw. der arithmetischen Folge sind.

Es folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ b_n &= b_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\log_c a_n - b_n = (n-1)(\log_c q - d) + \log_c a_1 - b_1.$$

Dieser Ausdruck ist genau dann von n unabhängig, wenn

$\log_c q - d = 0$ gilt, also

$$c = q^{1/d}.$$

Da $q > 0$, $q \neq 1$ und $d > 0$, so gilt auch $c > 0$ und $c \neq 1$, womit der Logarithmus definiert ist.

Aufgabe L 14

Es ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\sin n(x + 3\pi)}{\sin \frac{5}{n}(x + 3\pi)} = \frac{\sin n x}{\sin \frac{5}{n} x},$$

folglich

$$(-1)^n \sin \frac{5}{n} x = \sin \frac{5x}{n} \cos \frac{15\pi}{n} + \cos \frac{5x}{n} \sin \frac{15\pi}{n}.$$

Für $x = 0$ folgt $0 = \sin \frac{15\pi}{n}$. Eingesetzt ergibt sich

$$(-1)^n \sin \frac{5}{n} x = \sin \frac{5}{n} x \cos \frac{15\pi}{n}.$$

Da diese Gleichung für alle x gelten soll, folgt

$$\cos \frac{15\pi}{n} = (-1)^n.$$

Diese Gleichung hat ganzzahlige Lösungen für

$n = -15; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 15$. Diese Lösungen erfüllen auch das Anfangsproblem.

Aufgabe L 15

Gegeben sei das Dreieck ABC. Man verlängere AC über A hinaus um die Strecke c. Man erhält den Punkt D. Aus der Beziehung $a^2 = b^2 + bc$ folgt:

$$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}.$$

Daraus folgt, daß die Dreiecke CAB und CBD ähnlich sind.

Weiterhin ist das Dreieck DBA gleichschenkelig. Folglich gilt:

$$\alpha = \angle CBD$$

$$\beta = \angle BDA = \angle DBA.$$

Also auch

$$\alpha = \beta + \angle DBA = 2\beta.$$

Damit ist die Eigenschaft bewiesen.

Aufgabe L 16

Es sei $Z = (x+a)(x^2+a^2) \cdot \dots \cdot (x^{2^{n-1}} + a^{2^{n-1}})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (x-a) \cdot Z &= (x-a)(x+a)(x^2+a^2) \cdot \dots \cdot (x^{2^{n-1}} + a^{2^{n-1}}) = \\ &= (x^2-a^2)(x^2+a^2) \cdot \dots \cdot (x^{2^{n-1}} + a^{2^{n-1}}) = \\ &= (x^4-a^4)(x^4+a^4) \cdot \dots \cdot (x^{2^{n-1}} + a^{2^{n-1}}) = \\ &\vdots \\ &= (x^{2^{n-1}} - a^{2^{n-1}})(x^{2^{n-1}} + a^{2^{n-1}}) = \\ &= (x^{2^n} - a^{2^n}). \end{aligned}$$

Folglich gilt für $x \neq a$:

$$Z = \frac{x^{2^n} - a^{2^n}}{x - a}$$

Für $x = a$ gilt

$$Z = 2^n a^{2^n-1}.$$

Aufgabe L 17

Durch Quadrieren der ersten Gleichung ergibt sich:

$$\sqrt{x^2 - y^2} = x - \frac{a^2}{2}. \quad (1)$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung erhält man:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3a^2}{2} - x. \quad (2)$$

Indem man die zweite Gleichung quadriert folgt

$$\sqrt{x^2+y^2} \sqrt{x^2-y^2} = \frac{a^2}{4} - x^2.$$

(1) und (2) in diese Gleichung eingesetzt ergibt

$$\frac{a^2}{4} - x^2 = (x - \frac{a^2}{2})(\frac{3a^2}{2} - x).$$

Man erhält $x = \frac{5}{8} a^2$ und damit auch sehr leicht

$$y_1 = a^2 \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad y_2 = -a^2 \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Durch Probe findet man die einzige Lösung des Gleichungssystems $(\frac{5}{8} a^2, a^2 \sqrt{\frac{3}{8}})$.

Aufgabe L 18

Es sei h die Höhe des Kegels, r der Radius der Grundfläche, l die Seitenlinie des Kegels und α der Winkel zwischen Höhe und Seitenlinie. Nach Aufgabenstellung gilt $\pi r l = k \pi r^2$, folglich

$$l = k \cdot r \quad \text{und somit} \quad \sin \alpha = \frac{1}{k}.$$

Weiterhin gilt $r = 2R \cos \alpha \sin \alpha = 2R \frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2}$

$$h = 2R \cos \alpha \cos \alpha = 2R \frac{k^2-1}{k^2}.$$

Für das Volumen des Kegels gilt dann:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{8}{3} \pi R^3 \left(\frac{k^2-1}{k^3} \right)^2.$$

Aufgabe L 19

Es seien x_1, x_2 und x_3 die Wurzeln des Polynoms $P(x) = x^3 + px + q$. Nach dem Vietaschen Wurzelsatz gilt:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 &= p. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2p = 0.$$

Da x_1, x_2, x_3 reell sind und ungleich Null ($q \neq 0$), gilt

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0 \quad \text{und somit} \quad p < 0.$$

Aufgabe L 20

Da $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ gilt, kann man die Ungleichung umformen:

$$\cot \frac{x}{2} > \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x}{\sin x}.$$

Da für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\sin x > 0$ gilt, kann man beide Seiten der Ungleichung mit $\sin x$ multiplizieren:

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} > \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x$$

oder

$$1 > \sin x.$$

Da alle Umformungen umkehrbar sind, ist die Ungleichung bewiesen.

Aufgabe L 21

$$\sin \pi \sqrt{t} + \sin \pi t = 0$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme erhält man:

$$2 \sin \pi \frac{t + \sqrt{t}}{2} \cos \pi \frac{t - \sqrt{t}}{2} = 0$$

$$1. \text{ Fall: } \sin \pi \frac{t + \sqrt{t}}{2} = 0$$

Es folgt: $t + \sqrt{t} = 2k$, k ganze Zahl.

Durch Auflösen dieser Gleichung und Ausscheiden der unmöglichen Fälle ergibt sich die Lösung

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{1+8k}}{2} + 2k, \quad k \in \mathbb{N}, k > 0$$

$$2. \text{ Fall: } \cos \pi \frac{t - \sqrt{t}}{2} = 0$$

Analog erhält man:

$$t_2 = \frac{3 + \sqrt{5+8k}}{2} + 2k, \quad k \in \mathbb{N}, k > 0.$$

Aufgabe L 22

$$\begin{aligned} 3^{401} &> 3^{400} = (3^4)^{100} = 81^{100} > \\ &> 64^{100} = (4^3)^{100} = 4^{300} > 4^{299} \end{aligned}$$

Aufgabe L 23

Als Beispiel wählen wir das gleichseitige Dreieck. Hier gilt $h_1 = h_2 = h_3$ und folglich

$$\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2 = 1 + 1 = 2 \neq 1.$$

Damit gilt die angegebene Eigenschaft nicht für alle Dreiecke.

Aufgabe L 24

Das Volumen der Pyramide beträgt:

$$V = \frac{a^3}{12} \sqrt{2}.$$

Spruch des Monats

Ich war so mutlos und so schwach,
Seufzte von morgens bis abends nur ach!
Jetzt bin ich heiter, fühl' mich so frisch
Wie im Wasser ein munterer Fisch.

Denn das Ende von meinem Kummer
brachte mir die neueste WURZEL-Nummer.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild

Redaktion: G. Blume, H. Gottstein, H. Schwulow, D. Meinhardt, V. Wedler, G. Müller
D. Heinrich und J. Heß

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 20. 7. 1979



30
JAHRE
DDR

10

79

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Univer-
sität Jena

13. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Lieber mathematisch interessierter Schüler!

Wir haben das Heft 10/79 Deiner Zeitschrift "Wurzel" etwas anders gestaltet als Du es sonst von uns gewöhnt bist. Alle 3 Beiträge in dieser Ausgabe sind einer Thematik gewidmet, den Beziehungen zwischen Mathematik und sozialistischer Praxis. Anlaß dazu ist der 30. Jahrestag unserer Republik, den wir in diesem Monat festlich begehen. Mit der Wurzel 10/79 wollen wir dieses Ereignis auf unsere Weise würdigen. Uns scheint es wichtig zu sein, darauf hinzuweisen, daß es nicht egal ist, in welcher Gesellschaftsordnung Mathematik betrieben wird. Das wirst auch Du, lieber Schüler und Wurzel-Leser, wenn Du es Dir genau überlegst, anhand Deiner eigenen Erfahrungen bestätigen können. Du bist im Verlaufe Deiner Schulzeit und Deiner Beschäftigung mit Mathematik in den Genuß vielfältiger Förderungsmaßnahmen gekommen. So werden in unserer Republik Mathematikolympiaden veranstaltet, Mathematik-Spezialistenlager durchgeführt, es gibt Schülerzirkel für Mathematik, Physik und vieles mehr. Unabhängig vom Verdienst Deiner Eltern kannst Du, im Falle Deiner Eignung, ein Mathematikstudium aufnehmen.

Dies ist alles nur möglich, dank der fleißigen Arbeit vieler Werktätiger, sie schaffen die Voraussetzungen für Dein Lernen und Studieren. Du solltest Dir deshalb auch darüber im klaren sein, daß - trotz einer gewissen Selbständigkeit der Mathematik - diese letzten Endes mit dem Ziel betrieben wird, sie in der Praxis anzuwenden.

Niemand braucht einen Stubengelehrten, der sein Studium nicht als Klassenauftrag der Arbeiterklasse begreift, der sein Wissen nicht in der Praxis umsetzen kann. Deswegen haben wir uns erlaubt, anläßlich des 30. Jahrestages unserer Republik, die Wurzel 10/79 dieser Problematik unterzuordnen.

Die Beiträge sollen Dir helfen, folgende Fragen zu klären, die Du sicherlich hast: Wozu ist die Mathematik überhaupt nütze? Was kann sie leisten? Braucht man in der Industrie Mathematiker? Kann man schon als Mathematikstudent praxiswirksam werden?

Wir wünschen Dir viel Spaß bei der Lektüre!

Die Redaktion

Die Sektion Mathematik der FSU im 30. Jahr unserer Republik

Die Neueröffnung der Friedrich-Schiller-Universität erfolgte vor der Gründung unserer Republik. Sie war die erste Universität, die nach 1945 wieder eröffnet wurde. Die erste und schwierige Aufgabe bestand damals darin, die geistigen und materiellen Trümmer des faschistischen Krieges zu beseitigen und solche Bedingungen zu schaffen, die einen wahrhaftigen Neubeginn unserer Universität ermöglichten. Es war eine bescheidene kleine Gruppe von Mathematikern, die sich dieser Aufgabe, die Mathematik betreffend, mit ganzer Kraft widmeten.

Es entstanden zwei mathematische Institute, die mit insgesamt etwa 20 Mathematikern für ein geregeltes Mathematikstudium für nur wenige Studenten sorgten. Erst die Zerschlagung des Hitlerfaschismus machte es der Arbeiterklasse und der fortschrittlichen Intelligenz mit der brüderlichen Hilfe der Sowjetunion möglich, solche politischen und gesellschaftlichen Bedingungen zu entwickeln, die eine qualitativ höhere Bewertung der Wissenschaften als Bestandteil einer neu aufzubauenden Gesellschaftsordnung erforderlich machten. Die vollständige Integration der Forschung, Lehre und Erziehung in das politische und gesellschaftliche Leben des Sozialismus, die Vervollkommnung der Wissenschaft zur Produktivkraft bestimmten auch für die Entwicklung der Mathematik an unserer Universität neue Maßstäbe. Unter Berücksichtigung der wachsenden Bedeutung der Mathematik für die gesellschaftliche Praxis entstand die Aufgabe, die mathematische Forschung und Ausbildung zu konzentrieren und sie gemäß den gesellschaftlichen Erfordernissen zu entwickeln. Aus diesem Grunde wurden Anfang der 60er Jahre die beiden mathematischen Institute zu einem einheitlichen Institut zusammengeführt. Kurze Zeit später konnte die Friedrich-Schiller-Universität als erste Bildungseinrichtung der DDR die Sektion Mathematik ins Leben rufen, die durch ihre neue Struktur und Organisationsform den qualitativ höheren Aufgabenstellungen entsprach. Das wissenschaftliche Potential der Universitäten so zu konzentrieren, daß enge Verflechtungen zwischen Universitäten, Hochschulen und sozialistischer Industrie sowie anderen wissenschaftlichen Forschungseinrichtungen hergestellt werden können, war die Forderung der 3. Hochschulreform und bil-

dete die Grundlage für die Entwicklung der Sektion Mathematik in Jena. In den 60er Jahren vollzog sich an unserer Sektion ein enormer qualitativer und quantitativer Aufschwung in der Forschung, Lehre und Erziehung. Die wissenschaftlichen Grundlagen für diesen Aufschwung bildeten die in diesem Zeitraum geschaffenen drei Hauptforschungsrichtungen, die bis heute das Forschungsprofil unserer Sektion bestimmen. Es sind dies Funktionalanalysis und Differentialgleichungen, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, mathematische Kybernetik und Rechentechnik. Diese Forschungsrichtungen werden von namhaften Wissenschaftlern geleitet, und die bis zum heutigen Tage vorliegenden Forschungsergebnisse begründen den wissenschaftlichen Ruf unserer Sektion, der international hoch anerkannt wird. Die Fachausbildung der Mathematikstudenten, die für den Einsatz in der Industrie ausgebildet werden, vollzieht sich im Rahmen dieser drei Forschungsrichtungen. Ende der 60er Jahre reifte die Aufgabe heran, eine große Anzahl mathematischer Kader in sehr kurzer Zeit für die in allen Teilen unseres Landes aufzubauenden Rechenzentren im Rahmen der sich entwickelnden Computertechnik auszubilden. Außerdem entstanden qualitativ neue Anforderungen für die Ausbildung einer großen Anzahl von Fachlehrern für die Fächer Mathematik und Physik, um bereits in den Schulen Voraussetzungen zu schaffen, der wachsenden Rolle der Mathematik in der sozialistischen Industrie Rechnung tragen zu können. Infolge der Lösung dieser Aufgaben studierten 1972 an der Sektion Mathematik etwa 800 Studenten beider Berufsziele und der Lehrkörper bestand aus etwa 100 qualifizierten Mathematikern sowie Mathematik- und Physikmethodikern. Hinzu kamen mathematische Ausbildungsverpflichtungen unserer Sektion gegenüber den Sektionen Technologie und Wirtschaftswissenschaften. Die Bedürfnisse der sozialistischen Industrie, der Schulpraxis sowie unsere Ausbildungsverpflichtungen gegenüber anderen Sektionen unserer Universität machten es auch erforderlich, die Ausbildungsinhalte neu zu konzipieren. So entstanden neben den Hauptforschungsrichtungen für die Ausbildung kleinere Forschungsgruppen der Numerik und mathematischen Optimierung, der mathematischen Statistik sowie für die Ausbildung der Fachlehrer Geometrie, Zahlentheorie, Algebra, Mathematik- und Physikmethodik. Eine wichtige Bedeutung hatte an unserer Sektion der Aufbau eines rechentechnischen Prakti-

kums für die künftigen Industriemathematiker. Außerdem spielte der Aufbau stabiler Praxisbeziehungen zu den Schulen und der sozialistischen Großindustrie, insbesondere dem Kombinat VEB Carl Zeiss für den Aufbau effektiver Praktika in der Ausbildung eine wesentliche Rolle. Im Bericht von Kurt Hager vor der Kommission des Staatsrates zur Weiterführung der 3. Hochschulreform 1969 heißt es: "An der FSU Jena wurde auf dem Gebiet des wissenschaftlichen Gerätebaus der konzentrierte Einsatz des Forschungspotentials der Sektionen Physik, Chemie, Mathematik in Angriff genommen. Die Gemeinschaftsarbeit führender Wissenschaftler und Experten innerhalb der Forschungsgemeinschaft Automatisierung und Rationalisierung führte zu wissenschaftlichen Ergebnissen, die bei der internationalen Fachwelt auf der Leipziger Frühjahrsmesse 1969 stärkste Beachtung fanden. In dieser Forschungsgemeinschaft haben Wissenschaftler und Studenten der Sektion Mathematik und anderer Sektionen der FSU einen hervorragenden Anteil."

Wir können heute einschätzen, daß unsere Sektion im Sinne der Forderung der 3. Hochschulreform stabile Praxisbeziehungen insbesondere mit dem VEB Carl Zeiss aufgebaut hat. Diese Beziehungen werden im wesentlichen durch interdisziplinäre Forschungskollektive getragen, die sich mit Problemen der Bearbeitung mathematischer Grundlagen und Gerätesoftware für die Zeiss-Elektronenstrahlbearbeitungsanlage, der mathematischen Modellierung optischer Systeme, der Untersuchung automatischer Bildverarbeitung, der Entwicklung von Yagi-Antennen beschäftigen. Außerdem stellt die Konsultationsstelle unserer Sektion ein Bindeglied zu praxisorientierten Aufgaben dar. Es gehört heute zum normalen Bild unseres Ausbildungsprofils, daß neben der Spezialausbildung unserer Diplommathematiker in den drei Hauptforschungsrichtungen auch praxisorientierte Diplomarbeiten im Rahmen dieser interdisziplinären Forschungsgruppen angefertigt werden.

Heute, im dreißigsten Jubiläumsjahr unserer Republik, besteht unsere Sektion aus 150 Wissenschaftlern und etwa 400 Studenten mit dem Berufsziel Diplommathematiker und Diplom-Fachlehrer für Mathematik und Physik. Sie hat sich im Verlaufe der 30jährigen Entwicklung unseres Landes durch ihre Forschungs-, Ausbildungs- und Erziehungsergebnisse einen geachteten Platz in unserer Gesellschaft erworben. Dieser Platz muß künftig durch neue Leistungen,

die den wachsenden Bedürfnissen unserer Gesellschaft entsprechen, ständig neu erobert werden. Darin besteht auch die Aufgabe der gegenwärtigen und künftigen Studentengeneration.

Prof. Dr. M. Walk

Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie in der DDR und an der Sektion Mathematik der FSU Jena

Die Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena gehört heute zu den größten mathematischen Forschungsstätten im Hochschulwesen der DDR. Sie wurde im Oktober 1966 im Rahmen der III. Hochschulreform als eine der ersten Sektionen im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich unseres Hochschulwesens gegründet und gibt mit ihrem eigenen Weg ein lebendiges Beispiel für die Entwicklung der Wissenschaften in der DDR und auch für die Entwicklung unserer brüderlichen Beziehungen zur Sowjetunion, beginnend mit einer großzügigen Unterstützung unseres Neuaufbaus bis zu unserem Hineinwachsen in die Rolle eines Partners auf einigen bei uns bearbeiteten Gebieten.

Innerhalb der Grundlagenforschung auf ausgewählten Teilgebieten der Mathematik und einer breiten angewandten Forschung nimmt die Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik einen zentralen Platz in unserer Sektion ein. Das entspricht sowohl dem ständig wachsenden Bedarf weiterer Bereiche der gesellschaftlichen Praxis nach einer mathematischen Behandlung von mit dem Zufall verbundener Erscheinungen als auch der damit eng verbundenen stürmischen Entwicklung dieser mathematischen Disziplin in der internationalen Forschung.

Was sind die objektiven Ursachen für diese Entwicklung, wie konnten wir in den letzten 15 Jahren ein umfangreiches und leistungsfähiges Forschungspotential auf diesem Gebiet aufbauen und welche Probleme werden heute an unserer Sektion auf diesem Gebiet bearbeitet?

Wir wollen versuchen, auf diese Fragen eine Antwort zu geben.

Wozu wird Wahrscheinlichkeitstheorie benötigt?

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist ein Teilgebiet der modernen Mathematik. Sie stellt mathematische Methoden und Modelle zur Beschreibung und damit zur Beherrschung von Erscheinungen in Natur und Gesellschaft, die mit zufälligen Ereignissen verbunden sind, bereit.

Im alltäglichen Sprachgebrauch nennt man Ereignisse zufällig, die unerwartet und nicht vorhersehbar eintreten. Ein Gewinn im Zahlenlotto, das unverhoffte Zusammentreffen mit einem ehemaligen Kollegen in einer fremden Stadt oder die Beobachtung einer seltenen Naturerscheinung sind Beispiele dafür. Durch Worte wie unwahrscheinlich, wenig wahrscheinlich oder sehr wahrscheinlich wird häufig noch der Grad der Zufälligkeit solcher Ereignisse bewertet. Über lange historische Zeiträume reichte ein solches wenig präzisiertes Verhältnis zu zufälligen Ereignissen praktisch völlig aus. Eine Ausnahme bildeten höchstens Leute, die versuchten, bei Glücksspielen zu Geld zu kommen. Ihre Fragen an die Mathematiker förderten auch tatsächlich den Beginn der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie um die Mitte des 17. Jahrhunderts.

Heute ist die Situation völlig verändert. Der Drang nach rationellsten Produktionstechnologien, die Forderung nach strengster Materialökonomie und nach hoher Qualität der Produkte, das Bedürfnis nach möglichst exakter Bilanzierung ökonomischer und soziologischer Prozesse haben dazu geführt, daß zufällige Erscheinungen nicht mehr nur als störende Randeffekte behandelt werden können, sondern selbst qualitativ und quantitativ beherrscht werden müssen. Noch weit ausgeprägter ist diese Entwicklung in der naturwissenschaftlichen und technischen Grundlagenforschung.

Wir wollen das an zwei einfachen Beispielen erläutern.

Im Physikunterricht soll das spezifische Gewicht von Kupfer ermittelt werden. Dazu wird von einem Stück Kupfer das Gewicht mit einer Federwaage und das Volumen durch Eintauchen in einen zum Teil mit Wasser gefüllten Meßzylinder bestimmt. Der Quotient aus Gewicht und Volumen ergibt dann das spezifische Gewicht. Dabei muß den Schülern die Erkenntnis vermittelt werden, daß dieser Quotient unabhängig von der Gestalt und dem Volumen bzw. Gewicht des gewählten Stückes Kupfer immer den gleichen Wert hat. Nun zeigt aber die Erfahrung, daß wiederholte Messungen schon des gleichen Stückes Kupfer bei hinreichend genauer Beobachtung nie zweimal den gleichen Wert ergeben. Ursachen dafür sind unmerkliche Veränderungen der Versuchsbedingungen, wie z. B. Änderungen der Temperatur des Wassers oder des Kupfers oder eine unterschiedliche Menge von am Kupfer haftender Luftbläschen. Im Rahmen eines solchen Versuchs sind solche Veränderungen als unkontrollierbar und nicht vorhersehbar, d. h. als zufällig anzusehen. Jeder Physiklehrer begegnet den Auswirkungen dieser zufälligen Effekte, die zu zufälligen Abweichungen des gemessenen Wertes vom wahren Wert führen, durch die Benutzung des arithmetischen Mittels der Meßwerte aus einer größeren Anzahl von unter gleichen Bedingungen durchgeführten Versuchen. Jeder physikalische Versuch in irgend einem Forschungslaboratorium ist mit dieser Problematik verbunden.

In modernen Spinnereien findet man riesige Hallen mit vielen gleichartigen Spinnmaschinen. Einige Teile dieser Maschinen unterliegen einem hohen Verschleiß und müssen nach Ausfall zur Vermeidung von Produktionsverlusten möglichst schnell ausgewechselt werden. Es entsteht das Problem, zur Wartung einer gegebenen Anzahl solcher Maschinen die richtige, d. h. ökonomischste Anzahl von Arbeitskräften einzusetzen. Zu wenig Arbeitskräfte führen zu langen Stillstandszeiten und damit zu hohen Produktionsausfällen, zu viele Arbeitskräfte zu deren häufigen Beschäftigungslosigkeit. In beiden Fällen treten also hohe

ökonomische Verluste auf. Zur Bestimmung der optimalen Anzahl von Arbeitskräften sind aber sehr genaue Kenntnisse über die Ausfallzeiten der Verschleißteile erforderlich. Die genaue Lebensdauer eines solchen Teils läßt sich jedoch im allgemeinen nicht vorhersagen, ohne dieses Teil zu zerstören. Sie ist also im gegebenen Zusammenhang als zufällig anzusehen.

Fast jeder von uns kommt heute im täglichen Leben mit solchen Erscheinungen in Berührung. Viele neuere Entwicklungen in der Technik und in der Natur- und Gesellschaftswissenschaften sind ohne ausreichende Kenntnisse über Gesetzmäßigkeiten, denen zufällige Erscheinungen unterliegen, nicht mehr verständlich. Deshalb gehört ein Wissen über die Möglichkeiten und die Art und Weise der Beherrschbarkeit zufälliger Erscheinungen zu einer modernen wissenschaftlichen Bildung.

Der Aufbau der wahrscheinlichkeitstheoretischen Forschung in der DDR

Der im Mai 1945 endlich zerschlagene deutsche Faschismus hatte auch in der Wissenschaft nur Trümmer hinterlassen. Viele bedeutende Mathematiker waren emigriert. So z. B. die Wahrscheinlichkeitstheoretiker Wilhelm Feller und Richard von Mises. Auf dem Gebiet der heutigen DDR arbeiteten nur noch zwei bekannte Statistiker: Erna Weber in Jena und Felix Burkhardt in Leipzig-Markleeberg. Zu der stürmischen internationalen Entwicklung der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie in den dreißiger und vierziger Jahren fehlte jede Beziehung. Für diesen so wichtigen Zweig der Mathematik war ein völliger Neuaufbau notwendig.

Im Jahre 1954 übernahm B. W. Gnedenko, ein bedeutender Vertreter der die internationale Forschung wesentlich mitbestimmenden großen sowjetischen wahrscheinlichkeitstheoretischen Schule, eine Gastprofessur an der Berliner Humboldt-Universität. Seine Vorlesungen und Seminare und die durch seinen Ruf von vielen internationalen Vertretern der modernen Wahrschein-

lichkeitstheorie besuchte wissenschaftliche Tagung im Oktober 1954 in Berlin wurden zum Ausgangspunkt dieses Neuaufbaus. Der überwiegende Teil der ersten Generation von Hochschullehrern in der DDR, die auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie arbeiten, und damit auch ein großer Teil unseres gesamten Forschungspotentials auf diesem Gebiet ist aus einem Kreis junger Mathematiker und Studenten um Klaus Matthes, damals Assistent am I. Mathematischen Institut der Humboldt-Universität und heute Direktor des Zentralinstituts für Mathematik und Mechanik der Akademie der Wissenschaften der DDR, hervorgegangen, der sich durch das Wirken von B. W. Gnedenko angeregt in den folgenden Jahren diesem Teilgebiet der Mathematik zuwandte. Viele von ihnen erhielten die Möglichkeit zu einem zum Teil mehrjährigen Studienaufenthalt an sowjetischen Forschungseinrichtungen. In dieser Atmosphäre konnte dann auch Erna Weber, Ende der fünfziger Jahre nach Berlin berufen, den Grundstein für eine heute bekannte wissenschaftliche Schule auf dem Gebiet der Mathematischen Statistik legen.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie in Jena

Im Jahre 1962 wurde Johannes Kerstan aus diesem Berliner Kreis an die Friedrich-Schiller-Universität nach Jena berufen. Wenig später erfolgte die Berufung von Klaus Matthes nach Jena, und zwei weitere jüngere Mitarbeiter siedelten aus Berlin nach Jena um. Damit begann in Jena die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Der aus Berlin mitgebrachte Forschungsgegenstand, die Untersuchung zufälliger Punktprozesse, hat über ein Jahrzehnt die wahrscheinlichkeitstheoretische Forschung in Jena bestimmt, und die daraus gewachsenen neuen Richtungen sind noch heute das Arbeitsgebiet zweier großer Forschungsgruppen.

Zufällige Punktprozesse sind mathematische Modelle für auf einer Geraden, einer Ebene, in einem Raum oder auch in komplizierteren mathematischen Räumen zufällig angeordnete Punkt-

ensembles. Die Untersuchung solcher Objekte wurde Ende der fünfziger Jahre durch zwei praktische Fragestellungen angeregt.

Durch Anfragen von Mitarbeitern der Deutschen Post wurde das Interesse auf Fragen der Bedienungstheorie gelenkt. Ausgangspunkt für viele dort vorliegende Probleme ist ein Strom von Forderungen, wie z. B. eine Folge von Zeitpunkten, in denen Kunden mit bestimmten Wünschen an einer Bedienungseinrichtung (Fernsprechvermittlungszentrale, Fahrkartenschalter u. ä. m.) eintreffen. Aussagen über die notwendige Kapazität solcher Bedienungseinrichtungen lassen sich dann nur bei genauer Kenntnis der Struktur solcher, ihrer Natur nach zufälliger Forderungsströme treffen. Dazu bedarf es einer mathematischen Theorie solcher Strukturen. Wichtige Vorarbeiten dazu lagen von dem bekannten sowjetischen Wahrscheinlichkeitstheoretiker A. J. Chintschin aus den Jahren 1955/56 vor.

Die zweite Anregung war eine Anfrage des Physikers K. Mic zum Rauschen in Elektronenröhren. Eine der Quellen dieser Rauscherscheinungen liegt in der Zufälligkeit der Zeitpunkte, in denen Elektronen aus der Kathode einer solchen Röhre emittiert werden. Auch hier mußte also ein mathematisches Modell für zufällige Folgen von Zeitpunkten entwickelt werden. Erste Untersuchungen stammten von S. O. Rice aus dem Jahre 1944/45, sie benutzten Methoden von Campbell aus dem Jahre 1909.

Aus diesen Anregungen heraus wurde in den folgenden Jahren eine mathematische Theorie zufälliger Punktprozesse entwickelt. Ihre Ergebnisse bestimmen u. a. heute wesentliche Teile der Bedienungstheorie mit. Bei der Ausarbeitung dieser Theorie wurden auch andere Gebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie einbezogen und weiterentwickelt. Ein Beispiel dafür ist die Theorie der Verzweigungsprozesse. In ihr wird die Entwicklung, d. h. das Vermehren und Sterben, von Populationen untersucht,

in denen die Individuen eine zufällige Anzahl von Nachkommen hervorbringen. Solche Modelle interessieren z. B. bei der Untersuchung von Epidemien und dem Wachstum von Bakterienkulturen. Während in der klassischen Theorie nur die Anzahl der zu einem Zeitpunkt vorhandener Individuen einer Population beschrieben wurde, war es durch die in der Theorie der Punktprozesse entwickelten Methoden möglich, auch ihre räumliche Ausbreitung zu behandeln.

Die in der DDR geleistete Arbeit auf diesem Gebiet regte Ende der sechziger, Anfang der siebziger Jahre eine umfangreiche internationale Forschung an. Sie wurde von den in Jena und später auch in Berlin arbeitenden Wahrscheinlichkeitstheoretikern unseres Landes wesentlich mitbestimmt. Heute gehören die erzielten Ergebnisse zum festen Bestand der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Ausgehend von diesen Arbeiten haben sich in Jena zwei neue Arbeitsrichtungen herausgebildet, die stochastische Geometrie und die Untersuchung von abhängigen Bewegungen großer Teilchensysteme.

In der stochastischen Geometrie werden u. a. zufällige Verteilungen von geometrischen Objekten im Raum und die Gestalt zufällig geformter Objekte untersucht. Solche Fragen sind für die Erkundung von Rohstofflagerstätten, für die Entwicklung automatischer Bildauswertegeräte und auch bei der Bearbeitung von hochpräzisen Oberflächen in der optischen und metallverarbeitenden Industrie von großem Interesse.

Bewegungsvorgänge in Systemen aus vielen Teilchen, die sich gegenseitig beeinflussen, liegen vielen physikalischen Modellvorstellungen zugrunde. Für die Beschreibung einer Annäherung an Gleichgewichtszustände, für die Charakterisierung solcher Gleichgewichtszustände oder auch für die Beschreibung von Phasenübergängen fehlen bisher hinreichend feine mathematische Modelle. Ihre Entwicklung ist für das Verständnis dieser

Vorgänge von grundlegendem Interesse.

Diese beiden Richtungen sind heute nicht die einzigen auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie an unserer Sektion.

Eine größere Forschungsgruppe arbeitet an Problemen aus der Theorie Markowscher Prozesse, insbesondere der Steuerung solcher Prozesse. Markowsche Prozesse sind mathematische Modelle für Entwicklungsvorgänge mit zufälligen Effekten, die eine wohlbestimmte Abhängigkeitsstruktur aufweisen: Ist der gegenwärtige Zustand bekannt, so ist die zukünftige Entwicklung von weiteren Informationen über den Prozeßverlauf in der Vergangenheit völlig unabhängig. Ihren Namen tragen sie nach dem russischen Wahrscheinlichkeitstheoretiker A. A. Markow, der als erster solche Abhängigkeitsformen untersuchte. Durch diese Struktur lassen sich solche Prozesse einerseits theoretisch weitgehend analysieren. Andererseits sind sie allgemein genug, um wichtige reale Erscheinungen zu beschreiben. Beispiele dafür sind eine Reihe von Produktionsprozessen. Die Ausarbeitung der Theorie dieser Prozesse liefert z. B. die Grundlage für das Auffinden optimaler Steuerstrategien für solche Prozesse. Ihre Beherrschung ist deshalb von großer volkswirtschaftlicher Bedeutung. Die Entstehung dieser Arbeitsgruppe ist ein weiteres Beispiel für unsere engen wissenschaftlichen Beziehungen zur Sowjetunion. Der heutige Leiter absolvierte eine dreijährige Aspirantur an der Moskauer Lomonossow-Universität.

Bei den bisher vorgestellten Arbeitsgebieten handelt es sich in erster Linie um mathematische Grundlagenforschung. Die wahrscheinlichkeitstheoretische Forschung an der Sektion ist aber heute auch auf vielfältige Weise mit den Anwendungen der Mathematik in der Volkswirtschaft verbunden. Dabei konzentrieren wir uns auf Probleme des wissenschaftlichen Gerätebaus und der Physik.

Nicht unerwähnt bleiben soll, daß dieses wissenschaftliche Potential die Grundlage für eine solide Spezialausbildung etwa der Hälfte aller Studenten der Fachrichtung Mathematik in Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik bildet. Die Studenten werden im Rahmen ihrer Ausbildung auch in die Lösung von Aufgaben aus der Praxis einbezogen.

Prof. Dr. K. Nawrotzki

Dr. W. Radecke

Der obenstehende Beitrag erscheint mit freundlicher Genehmigung der Redaktion "Mathematik in der Schule". Es handelt sich um eine gekürzte Fassung des Artikels "Wahrscheinlichkeitstheoretische Forschung an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena" (Mathematik in der Schule 9/79)

Konsultationsstelle „Mathematik“ an der FSU Jena

Seit mehr als vier Jahren arbeitet an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena eine Konsultationsstelle für Anwender der Mathematik in der Praxis. Warum wurde eine solche Einrichtung gebildet, welche Aufgaben und Ziele hat sie, wem bringt sie welchen Nutzen? Auf diese Fragen soll im folgenden eine Antwort gegeben werden.

Die Mathematik ist in der heutigen Zeit eine Wissenschaft, die wohl aus keiner Sphäre des gesellschaftlichen Lebens mehr wegzudenken ist. Die Beherrschung der vielfältigen, meist sehr kompliziert verlaufenden Prozesse in Natur, Wissenschaft und Gesellschaft ist häufig ohne Anwendung der Mathematik nicht

möglich. Auch in solchen Wissenschaften, die für den uneingeweihten Betrachter überhaupt nichts mit Mathematik zu tun haben, wie beispielsweise Landwirtschaftswissenschaft, Biologie, Medizin und Ökonomie, um nur einige zu nennen, sind inzwischen mathematische Methoden und Verfahren unentbehrlich geworden. Ein einfaches Beispiel aus der Medizin soll das Gesagte verdeutlichen. Wenn ein neues Medikament entwickelt wird, so wird es, bevor es zum Einsatz kommt, gründlich hinsichtlich seiner beabsichtigten Wirkung sowie möglicher Nebenwirkungen getestet. Nun ist aber bekannt, daß nicht jeder Organismus in der gleichen Weise auf ein Medikament reagiert: Bei dem einen schlägt es stärker an, bei dem anderen weniger oder vielleicht gar nicht, auch eventuelle Nebenwirkungen werden sich mehr oder weniger stark zeigen. Die Ergebnisse hängen oft von einer Vielzahl von Faktoren ab, deren Einfluß nicht exakt oder überhaupt nicht meßbar ist, so daß die Versuchsergebnisse in gewisser Weise zufällig sind. Trotzdem ist in der Regel eine wissenschaftliche Auswertung der erhaltenen Daten möglich. Verfahren der mathematischen Statistik liefern dabei wichtige und auch notwendige Entscheidungshilfen.

Bei der Vielzahl der bereits existierenden mathematischen Verfahren ist es für den Anwender von Vorteil, wenn er sich mit Spezialisten der entsprechenden mathematischen Disziplin beraten kann. Solche Beratungen werden von der Konsultationsstelle der Sektion Mathematik der FSU Jena zu allen Gebieten der Mathematik durchgeführt: Zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik, Numerik, Kybernetik und Rechen-technik, Analysis und zur theoretischen Mathematik (speziell Geometrie). Es erfolgt dabei eine Unterstützung bei der Auswahl mathematischer Modelle, Methoden und Verfahren sowie deren Nutzung für die Lösung praktischer Problemstellungen.

Bisher wurden die Konsultationsmöglichkeiten in ständig wachsendem Maße genutzt. So ist die Zahl der an die Konsultationsstelle aus der Praxis herangetragenen Probleme von 11 aus dem Jahre 1975 auf 36 aus dem Jahre 1978 angewachsen, so

daß zur Zeit insgesamt bereits mehr als 100 Aufgabenstellungen aus etwa 30 Betrieben und Einrichtungen bearbeitet wurden.

Mit einigen Großbetrieben, beispielsweise dem VEB Kombinat Carl Zeiss Jena und dem Kombinat Keramische Werke Hermsdorf, in denen eine Vielzahl interessanter mathematischer Fragestellungen zu lösen ist, wurde eine längerfristige und stabile Zusammenarbeit aufgebaut. Es hat sich gezeigt, daß ein schöpferisches Zusammenwirken von Mathematikern und Spezialisten anderer Wissensgebiete sich besonders fruchtbar für alle Beteiligten auswirkt.

In die Tätigkeit der Konsultationsstelle werden auch die Studenten unserer Sektion einbezogen, und zwar hauptsächlich über die Betriebs- und Fachpraktika. Das bedeutet speziell für das Fachpraktikum, daß die Studenten hier nicht mehr wie früher sogenannte "gestellte" Aufgaben lösen, sondern an der Lösung echter Probleme aus der unmittelbaren betrieblichen Praxis mitarbeiten. Damit sind auch die Attraktivität und der Nutzeffekt des Praktikums wesentlich gestiegen. Geeignete Themen werden sogar bis zur Anfertigung der Diplomarbeit weitergeführt.

Dr. R. Günther

Leiter der Konsultationsstelle



Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild

Redaktion: G. Blume, H. Gottstein, H. Schwulow, D. Meinhardt, V. Wedler, G. Müller
D. Heinrich und J. Heß

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

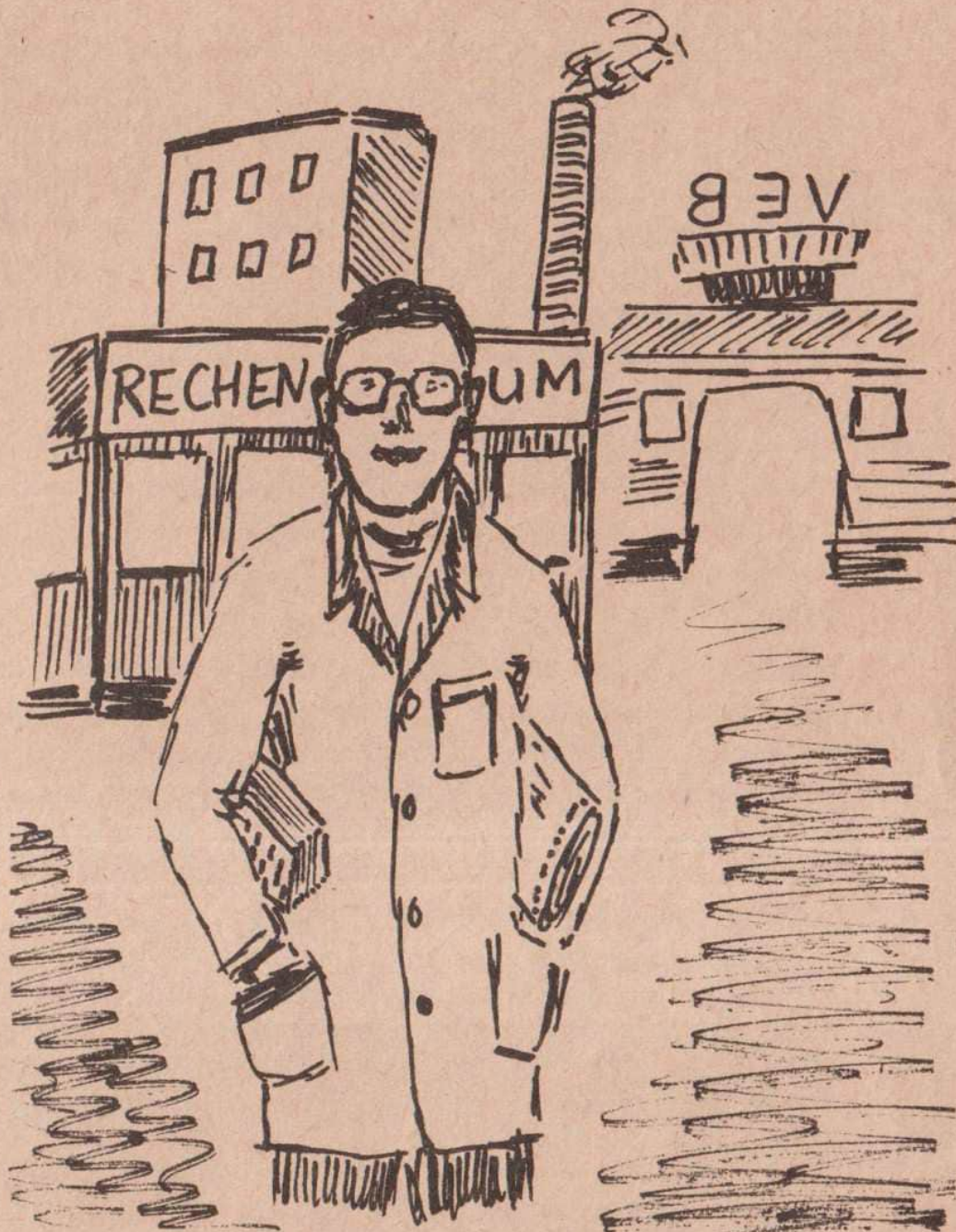
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 1. 8. 79



11

79

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Univer-
sität Jena

13. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Mathematik und Praxis

(Einige Bemerkungen zum Industriepraktikum
der Mathematikstudenten)

Alljährlich findet in den Monaten Mai bis Juli das 12-wöchige Industriepraktikum für die zukünftigen Diplommathematiker unserer Sektion statt. Für diese Zeit vertauschen die Studentinnen und Studenten des 3. Studienjahres die kahlen Hörsäle und Seminarräume der Universität mit modern ausgestatteten Büroräumen in Rechenzentren oder Forschungsabteilungen von Großbetrieben, Akademie- oder anderen wissenschaftlichen Instituten.

Die wichtigsten Praktikumsbetriebe für unsere Studenten sind das Forschungszentrum im Kombinat VEB Carl Zeiss Jena, die Volkseigenen Betriebe Jenapharm, Jenaer Glaswerke Schott & Gen., Keramische Werke Hermsdorf, Maxhütte Unterwellenborn sowie das Jenaer Zentralinstitut für Mikrobiologie und Experimentelle Therapie bei der AdW der DDR. Zu diesen Betrieben bestehen bereits seit sehr vielen Jahren enge Kooperationsbeziehungen.

Wenn man nun schildern will, womit sich die Studenten im Praktikum beschäftigen, so ist es sinnvoll, erst einmal etwas ausführlicher auf die Arbeit der Mathematiker allgemein einzugehen.

Mathematiker - was ist das für ein Beruf?

Diese Frage stellt sich früher oder später sicher jeder, der sich in irgendeiner Weise für Mathematik interessiert. Ganz Neugierige stellen diese Frage auch ganz offen jemanden, der es eigentlich wissen müßte (z. B. einem Mathematik-Lehrer). Selbstverständlich erhalten sie auch Antwort. Darin wimmelt es nur so von Begriffen wie Computer, Programmierung, wissenschaftlich-technischer Fortschritt, interdisziplinäre Forschungsgruppen usw., so daß dem Fragesteller gar nichts

weiter übrigbleibt, als nach kurzer Zeit in Ehrfurcht zu erstarren und sich konkreteren Berufsgruppen zuzuwenden. So bleiben nur noch ganz wenige übrig, die sich nicht abschrecken lassen und trotzdem Mathematik studieren. Und so ganz allmählich gewinnen sie einen Eindruck vom Berufsbild des Mathematikers. Die Studenten der höheren Studienjahre bestätigen uns immer wieder, daß das Industriepraktikum hierzu maßgeblich beiträgt.

Dabei ist es eigentlich gar nicht so schwer, zumindest einen groben Eindruck vom Einsatz der Mathematiker zu vermitteln. Im wesentlichen kann man drei Gruppen unterscheiden.

Gruppe 1: Da sind zunächst die Mathematiker, die an Universitäten und Hochschulen tätig sind. Sie haben Forschungs-, Lehr- und Erziehungsaufgaben zu lösen.

In der Grundlagenforschung werden mathematische Theorien ausgebaut und auch neu entwickelt, wobei die Anregungen für neue Theorien oder sogar neue Teildisziplinen der Mathematik sowohl aus der mathematischen Theorie selbst als auch aus der Praxis kommen.

In der Anwendungsforschung, die erst seit wenigen Jahren in stärkerem Maße an den Hochschulen betrieben wird, werden in direkter Zusammenarbeit mit Forschungs- und Entwicklungsabteilungen von Industriebetrieben Aufgabenkomplexe (zusammen mit Ingenieuren und Wissenschaftlern anderer Disziplinen) bearbeitet, deren Lösung grundsätzliche ökonomische oder technologische Verbesserungen nach sich zieht und die vom Schwierigkeitsgrad des mathematischen Gehalts her nicht mehr von den Mathematikern im Betrieb allein - falls solche überhaupt vorhanden sind - bewältigt werden können.

Neben seiner Forschungstätigkeit (die ihm die Möglichkeit der Qualifizierung zum Dr. rer. nat. und Dr. sc. gibt - die allerbesten können auch zum Dozenten und Professor berufen werden) übt der Mathematiker an der Universität und Hochschule in der Regel auch noch eine gewisse Lehrtätigkeit aus, um den Studenten sein Wissen weiterzuvermitteln und sein

eigenes Wissen in der Breite zu festigen und auszubauen.

Gruppe 2: Der "Industriemathematiker" kann in seinem Betrieb nur dann Anerkennung finden und gute Arbeit leisten, wenn er

- a) über ein solides, möglichst breites mathematisches Wissen verfügt und
- b) in der Lage ist, sich bis zu einem gewissen Grade in andere Fachdisziplinen (wie z. B. Physik, Mikrobiologie, Mikroelektronik, Metallurgie, Ökonomie) einzuarbeiten, damit er sich mit den Spezialisten der anderen - in seinem jeweiligen Betrieb bestimmenden - Fachrichtungen sachlich verständigen kann. Natürlich müssen auch die anderen Spezialisten ein gewisses mathematisches Wissen haben. Beides (a und b) ist außerordentlich wichtig, wenn in der Phase der Modellbildung (das ist die Phase, in der aus der praktisch gegebenen, verbal formulierten Aufgabenstellung eine mathematische Aufgabe, z. B. in Form einer Gleichung, herauskristallisiert wird) ein brauchbares mathematisches Modell entstehen soll. Damit ist ein Modell gemeint, das einerseits den praktischen Sachverhalt möglichst gut widerspiegelt, und das andererseits auch mit den derzeit bekannten mathematischen Lösungsmethoden behandelt werden kann. Die praktischen Sachverhalte sind so kompliziert, daß man sie, ohne Vereinfachungen vorzunehmen, gar nicht als mathematische Aufgabe formulieren bzw. lösen kann. Deshalb ist es gerade in der Phase der Modellbildung sehr wichtig zu wissen, was die Mathematik heute leisten kann, denn zu starke Vereinfachungen führen natürlich zu einem Modell, das den wirklichen Sachverhalt nicht mehr mit zufriedenstellender Genauigkeit widerspiegelt.

Über die Modellbildung hinaus obliegt dem Mathematiker im Betrieb natürlich auch die Verantwortung für die Lösung der mathematischen Aufgabe, also die Auswahl der Lösungsverfahren und ihre rechentechnische Realisierung, wobei in der Regel auch die Programmierung von ihm selbst durchgeführt wird.

Gruppe 3: Schließlich gibt es noch eine Gruppe von Mathematikern, die es nur ihrer Berufsbezeichnung nach sind (da sie nämlich ein Hochschulstudium als Diplommathematiker abgeschlossen haben), die aber ihren Tätigkeitsmerkmalen nach eine andere Tätigkeit ausüben. Hierzu zählen vor allem Tätigkeiten als Programmierer, in der Betriebswirtschaft oder in verschiedensten Leitungsgremien.

Der Student im Praktikum...

... leistet eine ähnliche Arbeit wie der Mathematiker, nur ist seine Aufgabe wesentlich abgegrenzter. Zu diesem Zweck wird in Vorbereitung des Praktikums zwischen dem betrieblichen Betreuer und dem Betreuer aus der Universität genau abgesprochen, welche Teilaufgaben im Praktikum zu bearbeiten sind. Es wird hierfür ein Arbeitsplan aufgestellt. Das ist notwendig, damit der Student - der ja jetzt zum erstenmal relativ selbständig eine so umfangreiche praktische Aufgabe bearbeiten muß - nicht in irgendwelchen "Sackgassen" steckenbleibt. Das systematische Herangehen und Bearbeiten einer sehr umfangreichen Aufgabe, das selbständige Einteilen des zur Verfügung stehenden Zeitfonds will erst einmal gelernt sein!

Die beiden Betreuer tragen also eine große Verantwortung dafür, daß das Praktikum für den Studenten zu einem Erfolgserlebnis wird, das ihn für sein weiteres Studium stimuliert und ihm klarere Vorstellungen von seinem späteren Einsatz als Mathematiker vermittelt.

Nur am Rande sei vermerkt, daß die Studenten im Praktikum nicht isoliert sind, sondern voll in das Betriebsleben integriert werden.

Und unsere Studenten vertreten die Universität würdig! In den letzten 6 Jahren ist von den Betrieben nicht eine Kritik an der Arbeit und am Auftreten der Studenten geübt worden.

Und wenn das Praktikum vorbei ist...

... wird erst einmal Urlaub gemacht! Aber im September geht es dann mit frischer Kraft und neuen Erfahrungen in das vorletzte Studienjahr hinein. Auch im 4. Studienjahr gibt es ein Praktikum, das sogenannte Fachpraktikum. Mit einem Zeitaufwand von 4 Stunden pro Woche werden hier mathematische Aufgaben bearbeitet (und dazu eine Jahresarbeit angefertigt), die

a) in die Spezialisierungsrichtung des Studenten "passen" und

b) von praktischen Aufgabenstellungen abgeleitet sind.

Da liegt es natürlich nahe, daß man an geeigneten Stellen das Fachpraktikum dazu nutzt, die Arbeit aus dem Industriepraktikum weiterzuführen. Das ist in der Tat in vielen Fällen möglich und entspricht häufig auch den Vorstellungen der Betriebe. Im einigen Fällen werden die Themen sogar bis hin zur Diplomarbeit weiterbearbeitet.

Wußten Sie schon...

... daß das Praktikum noch zu Beginn der 70-er Jahre nur 4 Wochen dauerte? Über die Zwischenstufen 6, 8, 10 Wochen hat sich jetzt endlich eine Dauer von 12 Wochen herauskristallisiert, die nach allgemeiner Ansicht optimal ist.

... daß die Arbeit im Praktikum zwar nicht benotet wird, daß aber ein erfolgreicher Abschluß notwendig für den Hochschulabschluß ist?

... daß 1978 die Praktikumsbetriebe an 9 (von 32) Studenten Prämien in einer Gesamthöhe von 780,- M zahlten?

... daß der Anteil der Praktikanten, die nach unserer Einteilung (siehe Seiten 163 bis 165) in Gruppe 3 einzuordnen wären, noch im Jahre 1975 14 % betrug, 1979 dagegen 0 % ? In Gruppe 2 stieg der Anteil von 24 % (1975) auf 89 % (1979), und in der Gruppe 1 fiel er von 62 % auf 11 % .

... daß die besten Praktikumsarbeiten alljährlich in der MMM-Bewegung ausgestellt werden? So werden z. B. in diesem Herbst wieder 2 Arbeiten bei zentralen Veranstaltungen in Leipzig vorgestellt.

Dr. Grützmann
Bereich Numerik/Operationsforschung

Da lacht selbst das Wurzelmännchen

In der Schule

Lehrerin (zum kleinen Peter): "Warum hast Du Dir nicht Dein Gesicht gewaschen, ehe Du zur Schule gingst? Man kann noch sehen, daß Du heute Ei zum Frühstück gegessen hast."

Der kleine Peter: "Nein Fräulein, das war gestern!"

In der Prüfung

Professor: "Und welche Meinung würden Sie vertreten in dieser Sache?"

Kandidat: "Ganz die Ihre, Herr Professor!"

Adelstolz

Der alte Graf Krumholz läßt immer seinen Sohn vor sich ins Zimmer treten - weil dieser einen Ahnen mehr hat.

Die freie Wahl

Vater (zu seinem Sohn): "Willst Du wohl Deine Linsen aufessen!"

Oma (zum Vater): "Man soll den lieben Kindern nichts aufzwingen, sondern ihnen stets die freie Wahl lassen."

Vater(zu seinem Sohn): "Also mein Junge, Du hast die freie Wahl. Willst Du Deine Linsen essen oder fürchterliche Hiebe von mir bekommen?"

Der Rest

Arzt (etwas schroff zu einem verschüchterten Patienten): "Ausziehen, aber dalli!"

Patient (zögernd): "Alles?"

Arzt: "Ihre Brille können Sie aufbehalten."

Preisaufgaben

L 49

Man bestimme alle reellen Zahlen λ , für die die folgenden Gleichungen gemeinsame Lösungen besitzen und gebe diese an:

$$\lambda x^3 - x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$$

L 50

Man löse das Gleichungssystem

$$\log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1$$

$$x^2 - y^2 = 2$$

L 51

Man beweise, daß im rechtwinkligen Dreieck die Summe der Katheten gleich der Summe der Durchmesser von In- und Umkreis ist.

L 52

Man zeige, daß aus $x \neq 0$ und $y \neq 0$ die folgende Ungleichung folgt:

$$3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10 \geq 0$$

L 53

Man berechne $\sin x$, wenn

$$\sin a + \sin(x-a) + \sin(2x+a) = \sin(x+a) + \sin(2x-a)$$

gilt und x ein Winkel im dritten Quadranten ist.

L 54

Конус и цилиндр имеют общее основание, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Чему равен угол между осью конуса и его образующей, если известно, что полная поверхность цилиндра относится к полной поверхности конуса как 7 : 4.

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 15. 3. 1980

Eine Eigenschaft der Zahl 30

In der Menge der natürlichen Zahlen heißt bekanntlich eine Zahl $p > 1$ Primzahl, wenn sie nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Wir ordnen die Primzahlen der Größe nach und bezeichnen $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5, \dots$, so daß also p_r die r -te Primzahl bedeutet.

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl größer als 1. Wir nennen alle Primzahlen p mit $p < n$ "absolute Primzahlen" und alle natürlichen Zahlen q mit $1 < q < n$, die mit n keinen gemeinsamen Teiler haben, "relative Primzahlen". Wir müßten in beiden Fällen eigentlich "bezüglich n " hinzufügen, was wir aber stets unterlassen werden, da keine Verwechslungen zu befürchten sein werden.

Betrachten wir als Beispiel die Zahl $n=9$. Die zugehörigen absoluten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7 und die relativen Primzahlen 2, 4, 5, 7, 8. Wie nicht anders zu erwarten, erscheinen unter den relativen Primzahlen auch zusammengesetzte Zahlen. Ein anderes Beispiel zeigt, daß das nicht so sein muß. So sind die zu $n=8$ gehörigen relativen Primzahlen 3, 5, 7 sämtlich absolute Primzahlen.

Es erhebt sich nunmehr die Frage: Welche Zahlen besitzen die Eigenschaft, daß ihre relativen Primzahlen sämtlich zugleich absolute Primzahlen sind?

Wir wollen die Menge A der Zahlen mit dieser Eigenschaft bestimmen. Zunächst rechnen wir 2 zu A , obwohl 2 gar keine relativen Primzahlen besitzt. Es ist $3 \in A$, da die relative Primzahl 2 zugleich absolute Primzahl ist. Ebenso ist $4 \in A$. Alle in Betracht zu ziehenden Zahlen $n > 4$ müssen durch 2 teilbar sein, damit die zusammengesetzte Zahl 4 nicht relative Primzahl wird. Für die Zahlen n mit $4 < n \leq 9$ kommen daher nur die Zahlen $n=6, 8$ in Frage. Beide Zahlen gehören auch tatsächlich zu A . Für die Zahlen $n > 9$ kommt als weitere Bedingung $3|n$ hinzu, damit die zusammengesetzte Zahl 9 nicht relative Primzahl wird. Zwischen 9 und 25 sind also nur die durch 6 teilbaren Zahlen 12, 18, 24 in Erwägung zu ziehen. Sie gehören auch alle zu A . Die Zahlen $n > 25$ müssen entsprechend noch durch 5 teilbar sein. Von den Zahlen n mit $25 < n \leq 49$ müssen folglich die zu A gehörenden Zahlen durch 30 teilbar sein. Das ist nur die Zahl 30 selbst. Wir überzeugen uns leicht von der Zugehörigkeit von 30 zu A . Auf diese Weise können

wir beliebig fortfahren. Halten wir fest: Wir überprüfen die Zahlen n mit $p_r^2 < n \leq p_{r+1}^2$ ($r=1,2,\dots$) auf ihre Zugehörigkeit zu A . Dabei können wir uns auf diejenigen Zahlen n beschränken, die durch $p_1 p_2 \dots p_r$ teilbar sind. Das bedeutet aber $p_1 p_2 \dots p_r \leq n$. Zusammen mit $n \leq p_{r+1}^2$ führt das auf die notwendige Bedingung

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r < p_{r+1}^2,$$

wobei das Gleichheitszeichen weggelassen wurde, da es ohnehin nicht auftreten kann. Rekapitulieren wir:

$r = 0:$		$2, 3, 4 \in A$
$r = 1:$	$p_1 = 2 < 9 = p_2^2$	$6, 8 \in A$
$r = 2:$	$p_1 p_2 = 2 \cdot 3 = 6 < 25 = p_3^2$	$12, 18, 24 \in A$
$r = 3:$	$p_1 p_2 p_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 < 49 = p_4^2$	$30 \in A$

Für $r=4$ ist

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 121 = p_5^2,$$

so daß zwischen $49=p_4^2$ und $121=p_5^2$ keine Zahlen aus A liegen können. Ebenso ist

$$p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 > 169 = p_6^2,$$

woraus sich ergibt, daß zwischen $121=p_5^2$ und $169=p_6^2$ keine Zahlen aus A liegen. Sollten wir sogar

$$(1) \quad p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_r > p_{r+1}^2$$

nicht nur für $r=4,5$, sondern auch für $r \geq 6$ beweisen können, so würde das bedeuten, daß es kein $n \in A$ mit $n > 30$ geben kann. Und dies können wir tatsächlich nachweisen! Wir stützen uns dabei auf die Richtigkeit der Ungleichung

$$(2) \quad p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_s > p_{2s+2}$$

für $s \geq 3$. Nehmen wir dies im Moment einmal an. Sei dann speziell für $r \geq 6$ die Zahl s die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $\frac{r}{2}$ ist. Dann folgt aus (2)

$$p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_r > (p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_s)^2 > p_{2s+2}^2 \geq p_{r+1}^2,$$

also (1).

Es verbleibt schließlich der Nachweis von (2) für $s \geq 3$. Wir vermerken zunächst für $s=1,2$

$$p_1=2 < 7 = p_4, \quad p_1 p_2=2 \cdot 3=6 < 13 = p_6$$

und für $s=3$

$$p_1 p_2 p_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 19 = p_8.$$

Sei jetzt stets $s > 3$. Wir nehmen die gegenteilige Aussage

$$(3) \quad p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_s < p_{2s+2}$$

an (Das Gleichheitszeichen ist nicht möglich!). Nun bilden wir die Zahlen

$$K = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_{s-1}^k - 1$$

mit $k=1,2,\dots,p_s$. Wegen (3) ist $1 \leq K < p_{2s+2}$. Da ein Primteiler p von K keine der Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_{s-1}$ sein kann, muß p eine der Primzahlen $p_s, p_{s+1}, \dots, p_{2s+1}$ sein. Für p bestehen folglich $s+2$ Möglichkeiten. Sind

$$K_\nu = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_{s-1}^{k_\nu} - 1, \quad \nu=1,2$$

zwei so gebildete Zahlen, und sind beide durch dieselbe Primzahl p teilbar, so ist auch

$$p \mid p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_{s-1} (k_1 - k_2).$$

Da p nicht zu den ersten $s-1$ Primzahlen gehört, ist also $p \mid (k_1 - k_2)$. Nun ist aber $p > |k_1 - k_2|$ und daher $k_1 = k_2$. Die Annahme eines gemeinsamen Primteilers von K_1, K_2 führt demnach zu $K_1 = K_2$. Folglich gibt es p_s verschiedene Zahlen K , von denen je zwei teilerfremd sind. Da für die Primteiler p der Zahlen K insgesamt $s+2$ Möglichkeiten bestehen, erhalten wir $s+2 \geq p_s$. Diese Ungleichung ist aber für $s > 3$ falsch. Daher ist (3) falsch, also (2) richtig.

Somit haben wir die bemerkenswerte Eigenschaft der Zahl 30: Die Zahl 30 ist die größte natürliche Zahl, deren relative Primzahlen zugleich auch absolute Primzahlen sind.

Prof. Dr. E. Krätzel



Mathematik und Erkenntnistheorie (I)

Die marxistisch-leninistische Erkenntnistheorie untersucht die grundlegenden Fragen nach dem Gegenstand, den Grundlagen und Triebkräften, den Quellen und dem Wesen sowie der Wahrheit der Erkenntnis im Rahmen der einheitlichen Theorie des dialektischen Materialismus. Die Aussagen, die die marxistisch-leninistische Erkenntnistheorie macht, treffen insbesondere auf die einzelnen Wissenschaften, also auch auf die Mathematik zu. Eine detailliertere Betrachtung der einzelnen Wissenschaften unter dem Aspekt der Erkenntnistheorie läßt jedoch besondere Schwerpunkte hervortreten. So macht in der Physik und der Chemie die Frage nach dem Forschungsgegenstand eine Diskussion des Materiebegriffes erforderlich. In der Biologie führt diese Frage zu der Problemstellung der Definition lebender Materie. In der Mathematik führt die Frage nach dem Forschungsgegenstand unmittelbar zum Abstraktionsbegriff. Auch das Problem der Wahrheit der Erkenntnis verdient am Beispiel der mathematischen Forschung eine besondere Erörterung, da die Mathematik einen "internen" Wahrheitsbegriff, den der formal-logischen Ableitbarkeit, verwendet. Im Zusammenhang mit dem Gegenstand und den Methoden der Forschung gilt es, auf eine wissenschaftstheoretische Frage, nämlich die der Stellung der Mathematik im System der Wissenschaften, einzugehen.

Die Triebkräfte für die mathematische Forschung

Der Erkenntnisfortschritt hat seine Grundlagen und entscheidenden Triebkräfte in der gesellschaftlichen Praxis. Vor allem die der materiellen Produktion entspringenden praktischen Bedürfnisse üben einen entscheidenden Einfluß auf die Entwicklungsrichtung und die Aufgaben der wissenschaftlichen Forschung aus. Daher besteht ein wesentlicher Zusammenhang zwischen dem Stand der Produktivkräfte und der wissenschaftlichen Forschung. Aber auch die Produktionsverhältnisse beeinflussen die Entwicklungsrichtung, die Ideen und die Organisationsformen der Forschung wesentlich.

Betrachten wir am Beispiel des alten Orients, wie die Mathematik sich über das sehr primitive urgesellschaftliche Stadium, das nur einen unvollkommenen Zahlbegriff und sehr grobe Längen- und Raummaße kannte, hinaus entwickelte. Im Bereich der großen Ströme (Nil, Euphrat, Tigris, Indus, Huangho u. a.) konnte eine ergiebige Landwirtschaft betrieben werden. Die dazu erforderliche "... Regulierung der Wasserversorgung erforderte den gemeinsamen Einsatz der Kräfte von räumlich weit entfernten Gegenden, ... Dies führte zur Schaffung zentraler Verwaltungsorgane, ... Der verhältnismäßig große Überfluß, der durch den gewaltig verbesserten, intensivierten Ackerbau entstand, erhöhte den Lebensstandard der gesamten Bevölkerung, führte aber auch zur Herausbildung einer von mächtigen Häuptlingen beherrschten städtischen Aristokratie. ... Die Verwaltung der öffentlichen Banken wurde in die Hände einer Gruppe von Berufsbeamten gelegt, die mit dem Ablauf der Jahreszeiten, der Fortbewegung schwerer Lasten, der Kunst, der Aufteilung von Ländereien, der Anlage von Lebensmittelvorräten und der Einziehung von Steuern gut Bescheid wußte. ... Sowohl die Angehörigen der Beamtenschaft als auch die Handwerker erwarben im großen Umfange technische Kenntnisse ... Zu diesen Kenntnissen gehörte auch die Kunst des Rechnens und Messens." (D.J. STRUIK: Abriß der Geschichte der Mathematik, DVW, Berlin 1965, S. 10)

Dieser neue Stand der Produktivkräfte und die Produktionsverhältnisse der frühen Sklavenhalterordnung machten eine Weiterentwicklung der Mathematik erforderlich. So benutzte man in Mesopotanien bereits 2100 v.u.Z. ein Stellenwertzahlensystem (mit der Grundzahl 60). Zur Zeit Hammurabis (1950 v.u.Z.) war die Arithmetik bereits in der Lage, quadratische Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten aufzulösen. Die Geometrie entwickelte sich auf der Grundlage praktischer Probleme des Messens. Längen- und Flächenmaße gewannen bei der Landvermessung insbesondere in Gebieten mit häufigen Überschwemmungen Bedeutung, wurden aber auch beim Handel z. B. von Geweben unentbehrlich. Raummaße wurden z. B. beim Handel und bei der Lagerung von Getreide und von Flüssigkeiten notwendig. Aus den Erfordernissen der Kalenderberechnung und der Schifffahrt wurde man in der Astronomie zu exakten Messungen veranlaßt. Dies wirkte sich sowohl auf die Geometrie - Winkelmessung - als auch auf die Arithmetik - Umgang mit Zahlen

größerer Stellenzahl - aus. Die Mathematik des alten Orients kam jedoch nicht über eine Art Handwerk hinaus. Sie bestand aus einer großen Zahl von Regeln des Messens und Rechnens, kannte jedoch keine exakten Beweise. Damit waren der weiteren Entwicklung der Mathematik Grenzen gesetzt, die später von der griechischen Mathematik überwunden wurden.

Wir wollen noch ein Beispiel aus der jüngsten Geschichte der Mathematik hinzufügen. Bei der Entwicklung und beim Betrieb komplizierter technischer Systeme machte sich in den vierziger Jahren unseres Jahrhunderts immer mehr eine automatisch gesteuerte Informationsverarbeitung notwendig. So ist es zum Beispiel bei der Automatisierung von Produktionsprozessen erforderlich, sehr zuverlässig und schnell große Datenmengen zu verarbeiten. Mit der wissenschaftlich-technischen Revolution ergab sich für die Planung und Leitung der Wirtschaft die Aufgabe, immer komplexere Organisationsformen der Produktion zu überschauen und zu lenken, so daß die dabei zu berücksichtigende Informationsmenge sich vervielfachte. Die damit notwendig gewordene Konstruktion von Rechenautomaten stellte an eine Reihe von mathematischen Disziplinen (z. B. Informationstheorie, Algorithmentheorie, Logik) neue Anforderungen und verlieh ihrer Weiterentwicklung entscheidende Impulse.

Die Wirkung der gesellschaftlichen Praxis auf die Entwicklung der Mathematik ist nicht schematisch, sondern setzt sich in einem komplizierten dialektischen Prozeß durch. Ein wichtiges Moment der Erkenntnis besteht darin, daß das menschliche Denken vom Konkreten zum Abstrakten aufsteigt. Auf diese Weise ist es möglich, Gesetze und Gesetzmäßigkeiten aufzudecken, die dann auf umgekehrtem Wege, nämlich durch ihre Anwendung auf konkrete Gegenstände unseres Denkens, dem Menschen letztlich dazu dienen, Probleme der materiellen Produktion und der gesellschaftlichen Entwicklung zu lösen. Daraus ergibt sich für alle Wissenschaften eine Zergliederung in praxisbezogene und theoretische Disziplinen. Hierzu schrieb Friedrich Engels: "Wie alle anderen Wissenschaften ist die Mathematik aus den Bedürfnissen der Menschen hervorgegangen: aus der Messung von Land und Gefäßinhalten, aus Zeitrechnung und Mechanik. Aber wie in allen Gebieten des Den-

kens werden auf einer gewissen Entwicklungsstufe die aus der wirklichen Welt abstrahierten Gesetze von der wirklichen Welt getrennt, ihr als etwas Selbständiges gegenübergestellt, als von außen kommende Gesetze, wonach die Welt sich zu richten hat. So ist es in Gesellschaft und Staat hergegangen, so und nicht anders wird die reine Mathematik nachher auf die Welt angewandt, obwohl sie eben dieser Welt entlehnt ist und nur einen Teil ihrer Zusammensetzungsformen darstellt - und gerade nur deswegen überhaupt anwendbar ist." (F. ENGELS: Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft (Anti-Dühring). In: Marx/Engels, Werke Band 20, S. 36)

Ein wichtiges Merkmal der Mathematik ist der sehr hohe Abstraktionsgrad, der zu einem stark ausgeprägten Eigenleben dieser Wissenschaft führt. Der in der Grundlagenforschung tätige Mathematiker ist oft nicht in der Lage, einen Zusammenhang zwischen seinem Forschungsgegenstand und der Praxis zu erkennen. Daher kann sich der in der Grundlagenforschung tätige Mathematiker oft nur an innermathematischen Gesichtspunkten orientieren. Zum Beispiel besteht der Wert der Verbandstheorie im wesentlichen darin, daß sie gewisse strukturelle Untersuchungen, wie sie in einzelnen mathematischen Disziplinen auftreten, zusammenfaßt und somit durch abstrakte Begriffsbildungen einer zunehmend divergent verlaufenden Entwicklung der Mathematik entgegenwirkt. Ein häufig zitiertes Beispiel einer mathematischen Theorie, die zunächst sehr praxisfern schien, aber plötzlich durch eine Weiterentwicklung der Produktivkräfte unmittelbare Anwendung fand, ist die Aussagenlogik. Zunächst diente sie einer Formalisierung des "logischen Denkens" und war damit ein Hilfsmittel beim Verständnis von mathematischen Beweisen. Die Symbolik und die Methoden der Aussagenlogik fanden später bei der Entwicklung von Rechenautomaten eine direkte praktische Anwendung.

Dr. G. Lischke
Dr. B. Goetze
Bereich Kybernetik

Der Diebstahl

Früher galt die Mathematik als eine brotlose Kunst.
In dieser Zeit schrieb ein armer Mathematikstudent verzweifelt
einen Brief an den lieben Gott.

Lieber Gott im Himmel!

Schicke mir bitte 100 Mark! (in Worten: Hundert)

Mit bestem Dank im voraus

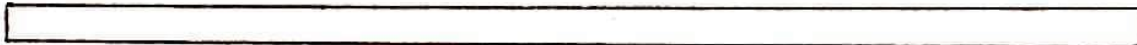
stud. math. Albrecht Kotz von Orlamünda

Die Mitarbeiter im Postverteileramt wußten aber nicht so recht,
wohin sie den Brief weiterleiten sollten. (Der Himmel hatte
keine Postleitzahl) So wurde der Brief geöffnet.
Die Postbeamten sammelten spontan Geld für den armen Studenten.
Es kamen 96 Mark zusammen. Diese schickten sie dem Studenten.

Einige Tage später erhielt die Post einen weiteren Brief an den
lieben Gott.

Lieber Gott!

Ich danke Dir von Herzen für Deine rettende Spende. Aber stell
Dir vor, haben doch die Postbeamten 4 Mark in die eigene Ta-
sche gesteckt ...



Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild

Redaktion: G. Blume, H. Gottstein, H. Schwulow, D. Meinhardt, V. Wedler, G. Müller
D. Heinrich und J. Heß

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement
0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der
DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 16. 10. 1979

Primzahl -



12

79

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studienvor-
bereitung der Sektion
Mathematik an der
Friedrich-Schiller-Univer-
sität Jena

13. Jahrgang
Index 33 873
Preis: 0,20 M

Berechnung und Eigenschaften von Primzahlzwillingen

(Fortsetzung des gleichnamigen Artikels in WURZEL 2/79, S.21-26)

In WURZEL 2/79 wurde die Vermutung ausgesprochen, daß für Primzahlzwillinge ein dem Primzahlsatz ähnliches Gesetz gilt. Bekanntlich sagt der Primzahlsatz folgendes aus:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} : \frac{1}{\ln x} = 1.$$

$\pi(x)$ ist die Anzahl der Primzahlen $p \leq x$, $x \in \mathbb{N}$, $\ln x$ ist der natürliche Logarithmus von x (siehe WURZEL 5/77).

Während in dem oben genannten Artikel die Eigenschaften der Primzahlzwillinge im Bereich der natürlichen Zahlen bis 100000 untersucht wurden, wollen wir im folgenden den Bereich bis 400000 erweitern und die Ergebnisse, die wieder mit einem elektronischen Taschenrechner gefunden wurden, kritisch untersuchen.

Zum besseren Verständnis der folgenden Ausführungen ist es angebracht, einige Definitionen und Grundbegriffe noch einmal zusammenzustellen.

Definitionen und Grundbegriffe

1. Zwei Primzahlen p_1, p_2 ($1 < p_1 < p_2$), für die $p_2 - p_1 = 2$ ist, nennen wir Primzahlzwillinge bzw. ein Primzahl-Zwillingspaar.
2. Für Primzahlzwillinge mit $p_1 > 3$ gilt folgende Darstellung:
 $p_1 = 6n - 1$ und $p_2 = 6n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$); $n > 0$
 Lassen wir die kleinsten Paare (3,5) und (5,7) unberücksichtigt, so kann n nur eine natürliche Zahl mit einer Endziffer 0,2,3,5,7 oder 8 sein. Bei einer anderen Endziffer wäre p_1 oder p_2 durch 5 teilbar.
3. Die Zahlenpaare $(6n - 1, 6n + 1)$ mit den in 2. angegebenen Einschränkungen für n nennen wir potentielle Primzahlzwillinge. Da nicht alle potentiellen Primzahlzwillinge wirklich Primzahlzwillinge sind, ist die Menge der Primzahlzwillinge eine echte Teilmenge der Menge der potentiellen Primzahlzwillinge. Es läßt sich leicht nachweisen (siehe WURZEL 2/79, S. 22), daß im Bereich der natürlichen Zahlen bis 10^k ($k > 1$) rund 10^{k-1} potentielle Primzahlzwillinge vorhanden sind, also z. B. bis 400000 rund 40000 potentielle Primzahlzwillinge. Im Bereich der natürlichen Zahlen von 10 bis 400000 müssen also rund

2.40000=80000 Zahlen auf ihren Aufbau hin untersucht werden.

4. Bezeichnen wir mit $z(x)$ die Anzahl der Primzahlzwillinge im Bereich der ersten x potentiellen Zwillinge (die Paare (3,5) und (5,7) mitgerechnet), so nennen wir das Verhältnis

$$r(x) = \frac{z(x)}{x}$$

die relative Häufigkeit der Primzahlzwillinge in diesem Bereich.

Tabelle der relativen Häufigkeiten

In der folgenden Tabelle der relativen Häufigkeiten beschränken wir uns auf den Bereich $1000 \leq x \leq 40000$, der dem Bereich der natürlichen Zahlen von 10000 bis 400000 entspricht.

x	$r(x) = \frac{z(x)}{x}$	x	$r(x) = \frac{z(x)}{x}$
1000	0,203	21000	0,1081
2000	0,171	22000	0,1067
3000	0,157	23000	0,1061
4000	0,1485	24000	0,1051
5000	0,142	25000	0,1044
6000	0,1367	26000	0,1034
7000	0,1307	27000	0,1028
8000	0,1271	28000	0,1021
9000	0,1252	29000	0,1016
10000	0,1237	30000	0,1006
11000	0,1212	31000	0,10026
12000	0,1198	32000	0,09984
13000	0,1178	33000	0,0999
14000	0,1159	34000	0,09906
15000	0,1144	35000	0,0984
16000	0,1135	36000	0,0979
17000	0,1116	37000	0,0972
18000	0,1108	38000	0,0965
19000	0,1101	39000	0,0960
20000	0,1088	40000	0,0958

Näherungsfunktionen für $r(x)$

Die graphischen Darstellungen der beiden Funktionen

$$r(x) = \frac{z(x)}{x} \quad \text{und} \quad f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

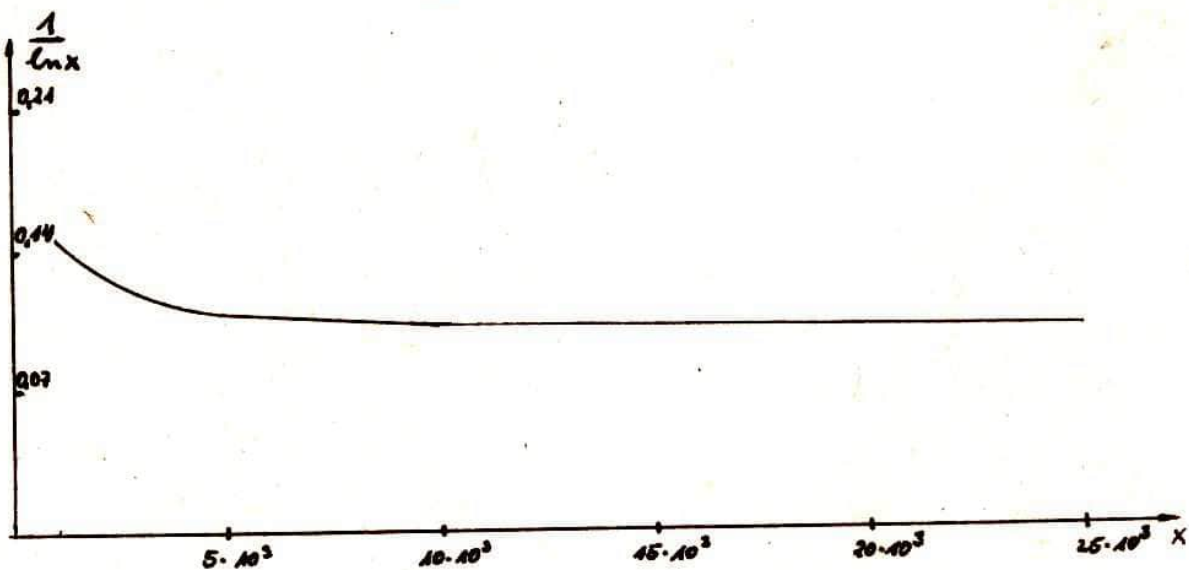
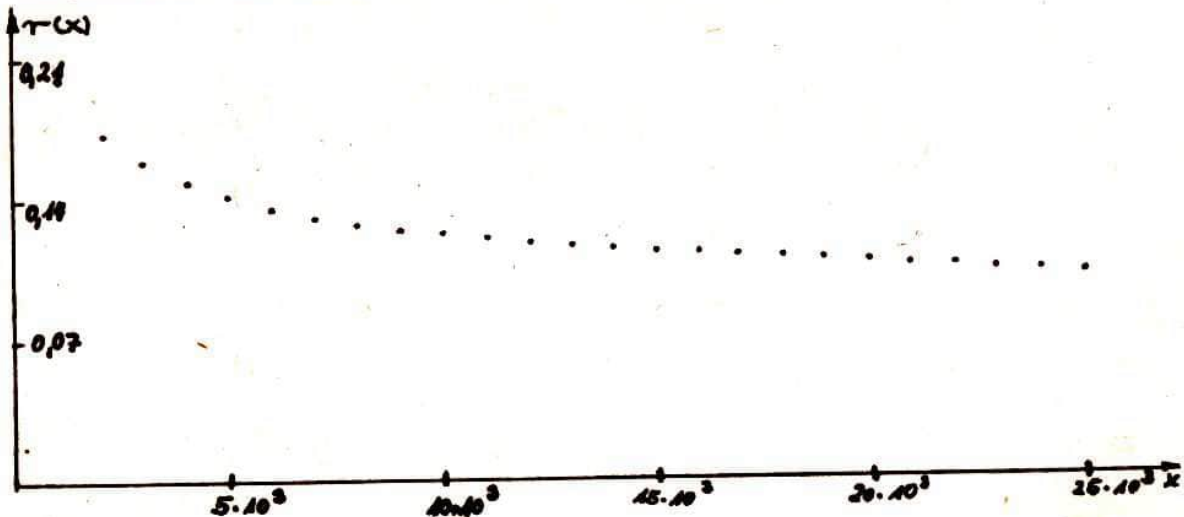
lassen vermuten, daß für große Werte von x $\frac{z(x)}{x} \approx \frac{1}{\ln x}$ gilt oder exakter ausgedrückt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{z(x)}{x} : \frac{1}{\ln x} = 1 \quad \text{ist.}$$

In der folgenden Tabelle geben wir Aufschluß über das Verhältnis $\frac{z(x)}{x} : \frac{1}{\ln x}$ im Bereich $1000 \leq x \leq 40000$

x	$\frac{z(x)}{x}$	$\frac{1}{\ln x}$	$\frac{z(x)}{x} : \frac{1}{\ln x}$
1000	0,203	0,1448	1,402
5000	0,142	0,1174	1,209
10000	0,1237	0,1086	1,139
15000	0,1144	0,1040	1,100
20000	0,1088	0,10097	1,0775
25000	0,1044	0,09875	1,0568
30000	0,1006	0,0970	1,0374
35000	0,0984	0,09557	1,0296
40000	0,0958	0,09437	1,0149

Die Vermutung, daß $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{z(x)}{x} : \frac{1}{\ln x} = 1$ ist, gewinnt durch diese Ergebnisse an Wahrscheinlichkeit.



Aus der graphischen Darstellung der Funktion $r(x)$ könnte man noch auf andere Näherungsfunktionen schließen. Für den untersuchten Bereich hat sich die Funktion $g(x) = 0,7733 \cdot x^{-0,199}$ als gute Näherungsfunktion erwiesen (WURZEL 2/79, S. 25), wie die folgende Tabelle beweist.

x	r(x)	$g(x)=0,7733 \cdot x^{-0,199}$	$r(x) : g(x)$
5000	0,142	0,142	1,0
10000	0,1237	0,1237	1,0
15000	0,1144	0,1141	1,0026
20000	0,1088	0,1077	1,0102
25000	0,1044	0,1031	1,0126
30000	0,1006	0,0994	1,012
35000	0,0984	0,0964	1,0207
40000	0,0958	0,0939	1,0202

Man kann vermuten, daß die Funktion $g(x)$ etwas rascher gegen Null strebt als $r(x)$. Die Richtigkeit dieser Vermutung wäre ein Beweis dafür, daß es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Ein exakter Beweis für diese Behauptung steht noch aus.

Verteilung der Primzahlzwillinge im Bereich der Primzahlen

Der kleinste Abstand zweier Primzahl-Zwillingspaare ist, wenn man von dem Zahlentripel (3,5,7) absieht, 4. Beispiele hierfür sind die Primzahlzwillinge (11,13,17,19) oder (101,103,107,109). Es ist üblich, 2 Zwillingspaare mit dem Abstand 4 als Primzahlvierlinge zu bezeichnen. In unserem Bereich bis 400000 lassen sich 88 Primzahlvierlinge nachweisen.

Andererseits können die Abstände zweier benachbarter Primzahlzwillinge auch beliebig groß werden, vorausgesetzt natürlich, daß es unendlich viele Zwillingspaare gibt. Z. B. liegen zwischen den Zahlen $n!+2$, $n!+3$, $n!+4$, usw. ... bis $n!+n$ keine Primzahlen, also auch keine Zwillinge.

Im Bereich 10 - 100000 liegen 40 Primzahlvierlinge,
 im Bereich 100000- 200000 liegen 14 Primzahlvierlinge,
 im Bereich 200000- 300000 liegen 19 Primzahlvierlinge,
 im Bereich 300000- 400000 liegen 15 Primzahlvierlinge.

Darstellung der Primzahlzwillinge in Matrizenform

Bekanntlich versteht man unter dem Produkt zweier Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \quad \text{die Matrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 c_1 + a_2 d_1 \\ b_1 c_1 + b_2 d_1 \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung dieser Schreibweise lassen sich die folgenden Beziehungen

$$\begin{array}{ll} 11 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 29 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7 \\ 13 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & \text{bzw.} \quad 31 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 \end{array}$$

in Matrizenform schreiben:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen diese Beziehungen verallgemeinern.

Es seien p_1, p_2 bzw. q_1, q_2 zwei Primzahlzwillingspaare mit $p_1 < q_1$. Wir gehen von dem Ansatz aus:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Dann ist wegen $p_2 = p_1 + 2$ und $q_2 = q_1 + 2$

$$q_1 = r p_1 + s p_1 + 2s \quad \text{und}$$

$$q_1 + 2 = s p_1 + r p_1 + 2r.$$

Durch Subtraktion der Gleichungen erhalten wir für r und s die Beziehung

$$s = r - 1.$$

Also:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & r-1 \\ r-1 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Will man Primzahlzwillinge mit $q_1 = 6n-1$ durch Primzahlzwillinge mit $p_1 = 6m-1$ ausdrücken, so erhalten wir aus $q_1 = r p_1 + (r-1) p_2$ die folgende Bedingung für r :

$$r = \frac{q_1 + p_2}{p_1 + p_2} = \frac{6(n+m)}{12m} = \frac{n+m}{2m}.$$

Will man z. B. alle Primzahlzwillinge mit $q_1 > 3$ durch 5 und 7 ausdrücken ($m=1$), so erhalten wir für r die Bedingung:

$$r = \frac{q_1 + 7}{12}$$

bzw. für $q_1 = 6n-1$ gesetzt:

$$r = \frac{n+1}{2}$$

(n ist eine nat. Zahl mit der Endziffer 0, 2, 3, 5, 7 oder 8)

Für ungerade n ist r eine ganze Zahl, für gerade n eine gebrochene Zahl. Einige Beispiele hierzu, die sich leicht bestätigen lassen:

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 41 \\ 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 149 \\ 151 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Will man alle Primzahlzwillinge mit $q_1 > 3$ durch das kleinste Paar $(3, 5)$ darstellen, so erhalten wir für r die Bedingung:

$$r = \frac{q_1 + 5}{8}$$

bzw. für $q_1 = 6n - 1$ gesetzt:

$$r = \frac{3n + 2}{4}.$$

Beispiele hierzu:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 59 \\ 61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 107 \\ 109 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Einige bereits bewiesene Sätze über Primzahlen und Primzahlzwillinge

Im folgenden geben wir einige Sätze über Primzahlen an, die bereits vor längerer Zeit mit funktionstheoretischen Hilfsmitteln bzw. mit elementaren Methoden bewiesen wurden.

1.) Es gelten folgende limes-Beziehungen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{z(x)}{x} = 0$$

2.) Primzahlsatz: Es ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} : \frac{1}{\ln x} = 1.$$

3.) Es gilt: $\frac{z(x)}{x} < \frac{c}{\ln(\ln x)}$. c ist eine von x unabhängige Konstante.

4.) Satz von Brun: Die Summe aller reziproken Werte der Primzahlen ist divergent ... $\sum_i \frac{1}{p_i} = \infty$.

Die Summe aller reziproken Werte der Primzahlzwillinge ist entweder endlich oder konvergent.

$$\sum_i \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i + 2} \right) \text{ ist konvergent, } p_i, p_i + 2 \text{ Zwillinge.}$$

Berechnen wir die Summe dieser reziproken Werte der Zwillinge für die Teilbereiche 10 - 100000, 10 - 200000, 10 - 300000 und 10 - 400000, so erhalten wir folgende Ergebnisse :

$$s_1 = 1,6731504; \quad s_2 = 1,6860460; \quad s_3 = 1,6928140; \quad s_4 = 1,6954097.$$

Für s_4 können wir schreiben:

$$\begin{aligned} s_4 &= 1,6731504 + 0,0128956 + 0,0067680 + 0,0025957 \\ &= 1,6731504 \cdot (1 + 0,0077073 + 0,004045 + 0,0015513) \end{aligned}$$

$$s_4 < 1,6731504 \cdot (1 + d + \frac{d}{2} + \frac{d}{4}) \quad \text{mit } d = 0,008.$$

Nehmen wir an, daß die sichtbare Gesetzmäßigkeit für die weiteren Glieder gültig bleibt, so könnten wir s abschätzen:

$$s < 1,6731504 \cdot (1+2d) = 1,6731504 \cdot 1,016, \text{ also}$$

$$s < 1,6999 \approx 1,7.$$

Zu Satz 3) kann man noch folgendes ergänzen. Nach unseren Ergebnissen scheint die Abschätzung zu gelten:

$$\frac{z(x)}{x} > \frac{c_1}{\ln x} \quad \text{für alle } x.$$

c_1 ist wieder eine von x unabhängige Konstante.

$$\frac{c_1}{\ln x} < \frac{z(x)}{x} < \frac{c}{\ln(\ln x)}$$

Dr. B. Hanisch

Halle

Sonstiges

Großzügig

Der kleine Willi mag seine Milch durchaus nicht trinken. Da versucht er die Mama mit gutem Zureden: "Als ich so alt war wie Du, habe ich immer meine Milch ausgetrunken."

"Hast Du sie gern getrunken, Mama?"

"O ja, sehr gern!"

"Da, Mama, dann kannst Du meine auch haben!"

Aus dem Jahre 1914

In betreff militär-dienstlicher

Pferde erstattet unterfertigte Gemeinde

Fehlanzeige, da dieselbe aus lauter

Ochsen besteht.

Preisaufgaben

- L 55 Beweisen Sie: Die Summe der 4 Primzahlen eines Quadrupels ist durch 60 teilbar. ($10 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4$)
(Definition Primzahlquadrupel siehe Artikel von Herrn Dr. Hanisch)

- L 56 Man löse die Gleichung

$$2 - \log_{\sin x} \cos x = \log_{\cos x} \sin x$$

- L 57 Für welche ganzzahlige n besitzt die Gleichung $x^2 + 3x + 9 = 9n^2$ ganzzahlige Lösungen. Man gebe diese an.

- L 58 Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse BC in n gleiche Teile geteilt wird (n ungerade). Sei α der Winkel, unter dem die Teilstrecke, die den Mittelpunkt der Hypotenuse enthält, von A aus gesehen wird, h die Höhe und a die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks. Man zeige die Gültigkeit der Beziehung

$$\tan \alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a} !$$

- L 59 Man bestimme sämtliche Lösungen der Gleichung

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

- L 60

Доказать, что в круге радиуса 10 нельзя поместить 400 точек так, чтобы расстояние между любыми двумя было больше 1.

Einsendeschluß: 15. 3. 80

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Lösungen

Aufgabe L 25

Multipliziert man beide Gleichungen des Systems mit $x \cdot y$, so erhält man

$$7(x+y) = 48xy \quad (1)$$

$$7(x^2 - y^2) = 48xy \quad (2)$$

Bei Division von (2) durch (1) ergibt sich

$$\frac{(x^2 - y^2)}{(x+y)} = 1.$$

Wegen $x \neq -y$ erhält man $x - y = 1$ (3)

(3) in (1) eingesetzt ergibt

$$7(2y+1) = 48y(y+1)$$

$$48y^2 + 34y - 7 = 0$$

$$y_1 = \frac{1}{6}; \quad y_2 = -\frac{7}{8}.$$

Die Lösungen des Gleichungssystems sind

$$x_1 = \frac{7}{6}; \quad y_1 = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{8}; \quad y_2 = -\frac{7}{8}.$$

Aufgabe L 26

Wir betrachten folgende Beziehung:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)$$

Da aber für $x > 0, y > 0$, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ gilt, ist der obige Ausdruck nicht kleiner als 9.

Also gilt

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

und da $a+b+c > 0$ ist, auch

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Aufgabe L 27

Durch Multiplikation der Gleichung mit $x \cdot \sqrt{x+2}$ erhält man

$$x^2 + x + 2 = \frac{16}{3} x \sqrt{x+2} \quad (1).$$

Quadriert man (1), so ergibt sich

$$x^4 - \frac{10}{3} x^3 - \frac{17}{3} x^2 + 4x + 4 = 0 \quad (2).$$

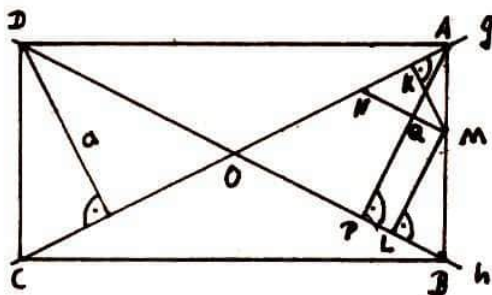
Die rationalen Lösungen von (2) sind 1 und $-\frac{2}{3}$, wobei nur 1 auch Lösung der gestellten Aufgabe ist.

Aufgabe L 28

$$\begin{aligned}
 (f(x))^2 &= (\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1})^2 = \\
 &= x+2\sqrt{x-1} + x-2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x+2)\sqrt{x-1}(x-2)\sqrt{x-1}} \\
 &= 2x + 2\sqrt{x^2-4x+4} \\
 &= 2x + 2|x-2| = 2x - 2(x-2), \text{ da } 1 \leq x \leq 2 \\
 &= 4.
 \end{aligned}$$

Also ist $f(x) = 2$ für $1 \leq x \leq 2$.

Aufgabe L 29



Die Seiten des Rechtecks ABCD, dessen Ecken auf den gegebenen Geraden g und h liegen und von der jeweils anderen Geraden den Abstand a haben, bilden das gesuchte Objekt.

Beweis: Sei M ein Punkt, für den $\overline{MK} \perp g$, $\overline{ML} \perp h$ und $\overline{MK} + \overline{ML} = a$ gilt. Wir legen eine Gerade AB so durch M, daß $\overline{OA} = \overline{OB}$ ist. Weiter sei $\overline{MN} \parallel \overline{OB}$. Sei $\overline{AP} \perp \overline{OB}$ und Q der Schnittpunkt von $\overline{AP}$ und $\overline{MN}$.

Aus der Konstruktion folgt $\overline{AN} = \overline{MN}$ und somit $\overline{MK} = \overline{AQ}$.

Man erhält

$$\overline{AP} = \overline{AQ} + \overline{QP} = \overline{MK} + \overline{ML} = a$$

Folglich ist A eine Ecke des obigen Vierecks. Analog zeigt man, daß B eine Ecke desselben ist.

Liege M auf einer Seite des Vierecks, so zeigt man in umgekehrter Reihenfolge, daß $\overline{MK} + \overline{ML} = \overline{AP} = a$ gilt.

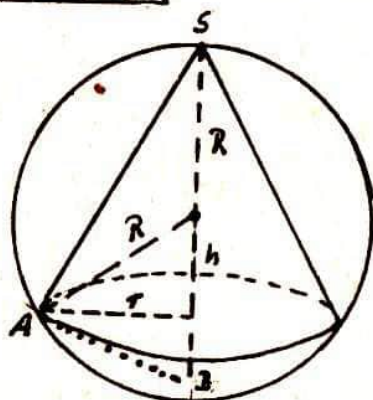
Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wurzelhumor

Im Westen nichts neues

Der Lehrer oespricht den Superlativ und fragt die Schüler, ob sie ihm ein Wort nennen können, das sich gut steigern läßt. "Miete" lautet die Antwort eines Hausbesitzersohnes.

Aufgabe L 30



Sei h die Höhe des Kegels, r der Radius seiner Grundfläche und R der Radius der Kugel. Das Verhältnis von Kegelvolumen zum Kugelvolumen ist gleich

$$x = \frac{r^2 h}{4R^3} = \frac{q}{4} \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Die Anwendung des Höhensatzes auf das Dreieck SBA liefert $r^2 = h(2R-h)$.

Somit ist $\frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{R^2} h(2R-h) = \frac{h}{R} \left(2 - \frac{h}{R}\right) = q(2-q)$.

Das gesuchte Verhältnis ist demnach

$$x = \frac{q^2}{4} (2-q).$$

Die Aufgabe ist offensichtlich nur für $0 < q < 2$ lösbar.

Aufgabe L 31

Sei $x = \log_3 4$ und $y = \log_4 5$. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$3^x = 4, \quad 4^y = 5 \quad (1)$$

$$\frac{3^x}{4^y} = \frac{4}{5}$$

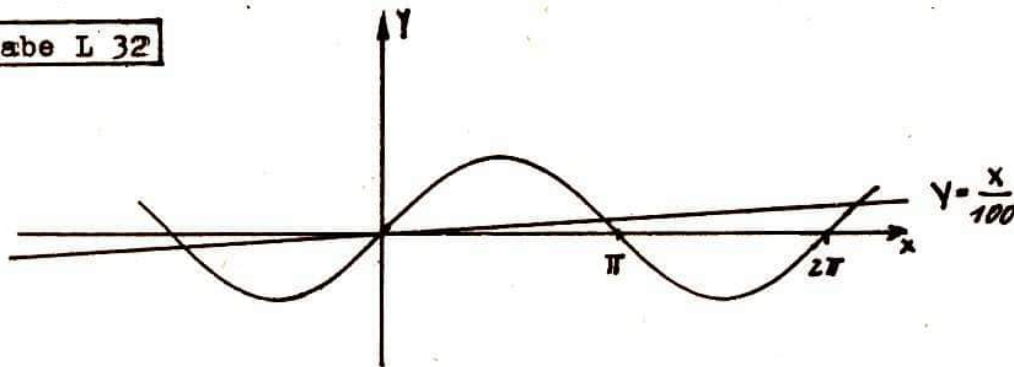
$$\frac{3^{x-1}}{4^{y-1}} = \frac{16}{15} > 1$$

$$3^{x-1} > 4^{y-1}$$

Da $x-1 > 0$ und $y-1 > 0$ (folgt aus (1)) und $3 < 4$, gilt

$$x-1 > y-1 \quad \text{bzw.} \quad x > y.$$

Demnach gilt die Beziehung $\log_3 4 > \log_4 5$.

Aufgabe L 32

Sowohl die Sinusfunktion als auch $f(x) = \frac{x}{100}$ genügen der Gleichung $f(x) = -f(-x)$. Die Lösungen der Gleichung $\frac{x}{100} = \sin x$ liegen also symmetrisch zum Punkt $x=0$.

Wir betrachten die Lösungen für $x \geq 0$.

Der größte Sinuswert ist 1. Die Gleichung besitzt also nur Lösungen für $\frac{x}{100} \leq 1$, d. h. $x \leq 100$. Für $0 \leq x \leq 100$ besitzt

der Sinus $\frac{100}{2\pi} = 15,76$ Perioden. In jeder Periode gibt es zwei Lösungen der Gleichung, ebenfalls zwischen 30π und 31π .

Wir erhalten also 32 Lösungen der Gleichung für $x \geq 0$. Ebenfalls 32 Lösungen existieren für $x \leq 0$. Da die Lösung $x=0$ zweimal aufgeführt wurde, ist die gesuchte Anzahl der Lösungen 63.

Aufgabe L 33

Es gelten die folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned} y &= x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+3x)(x^2+3x+2) \\ &= (x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x) = (x^2+3x+1)^2 - 1. \end{aligned}$$

Der kleinste Wert von y ist demnach -1 .

Aufgabe L 34

Wir formen die Gleichung um

$$\begin{aligned} \sqrt{y} &= \sqrt{250} - \sqrt{x} \\ y &= 250 + x - 2\sqrt{250x}. \end{aligned}$$

Sin x und y ganzzahlig, so ist auch $2\sqrt{250x}$ ganzzahlig.

Es gilt also $1000x = p^2$ bzw. $x = 10k^2$, wobei k, p ganzzahlig sind.

Weiterhin ist $\sqrt{y} \geq 0$, also auch $\sqrt{250} - \sqrt{x} \geq 0$, d. h. $x \leq 250$ bzw. $10k^2 \leq 250$ oder $|k| \leq 5$.

Setzt man alle k , die der Gleichung $|k| \leq 5$ genügen, in $x = 10k^2$ und $y = 10(|k|-5)^2$ ein, so erhält man die ganzzahligen Lösungen der gegebenen Gleichung:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 = 0 & x_2 = 10 & x_3 = 40 & x_4 = 90 & x_5 = 160 & x_6 = 0 \\ y_1 = 250 & y_2 = 160 & y_3 = 90 & y_4 = 40 & y_5 = 10 & y_6 = 250. \end{array}$$

Aufgabe L 35

Aus den Additionstheoremen für Winkelfunktionen kann man $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ und $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$ herleiten. Weiterhin gilt $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$. Also gilt die folgende Gleichung:

$2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = \cos^3 18^\circ - 3 \sin^2 18^\circ \cos 18^\circ$. Die Division durch $\cos 18^\circ$ liefert: $2 \sin 18^\circ = \cos^2 18^\circ - 3 \sin^2 18^\circ$. Daraus folgt $2 \sin 18^\circ = 1 - 4 \sin^2 18^\circ$. Da $\sin x \geq -1$ gilt, hat die quadratische Gleichung nur eine Lösung:

$$\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\cos 18^\circ > 0$ erhält man

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}. \text{ Aus } \sin 2x = 2 \sin x \cos x \text{ erhält man}$$

$$\text{damit } \sin 36^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Aufgabe L 36

Der gegebene Körper besteht aus einem quadratischen Prisma, dessen Grundfläche gleich dem gegebenen Quadrat und dessen Höhe gleich $2a$ ist, aus 4 Halbzylindern der Höhe a , deren Grundfläche den Radius a hat und aus 4 Viertelkugeln mit dem Radius a .

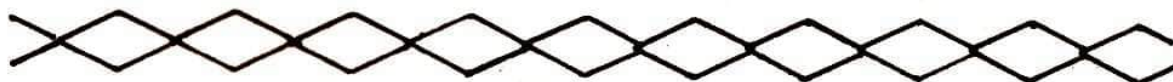
Das gesuchte Volumen des Körpers ist

$$V = 2a^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} \pi a^3 + 4 \cdot \frac{1}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} a^3 (5\pi + 3).$$



Jahresinhaltsverzeichnis 1979

Heft		Seite
1	T. Schulmeiß: Primfaktorenzerlegung auf Computern (II)	2
	W. Moldenhauer: Aufgabenlösen oder Forschung	6
	G. Blume: Studentenaustausch	9
2	G. Weske: Was ist ein Differential? (I)	18
	B. Hanisch: Berechnung und Eigenschaften von Primzahlzwillingen	21
3	H. Triebel: Geometrie und Realität im Wandel der Zeiten	34
	G. Weske: Was ist ein Differential? (II), (III)	41
4	T. Schulmeiß: Primfaktorenzerlegung auf Computern (III)	50
	A. Bochmann: Spezialschule "C. F. Gauß" Frankfurt/Oder	55
5	J. Mecke: Einführung in die Methode der kleinsten Quadrate	66
	G. Schulze, K. Scheibe, R. Mattasch: Diplomlehrer für Mathematik und Physik	70
	D. Heinrich: EOS "Heinrich Hertz" Berlin	78
6	Aufgaben der Bezirksolympiade 1979 (Klassenst. 11/12)	82
	Lösungen zu diesen Olympiadeaufgaben	83
7/8	W. Rosenheinrich: Schlußfolgerungen aus einem Grenzwert	98
	E. Girlich: Mathematische Modelle der diskreten Optimierung	112
	S. Müller-Pfeiffer: Bericht über die DDR-Mathematikolympiade 1979	123
9	R. Klette: Zur Identifizierung von Sauriern und Zahlenfolgen	130
	P. M. Schmidt: Probleme des Lehrerstudiums	137
10	M. Walk: Die Sektion Mathematik der FSU im 30. Jahr unserer Republik	147
	K. Nawrotzki, W. Radecke: Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie in der DDR und an der Sektion Mathematik der FSU Jena	150
	R. Günther: Konsultationsstelle "Mathematik" an der FSU Jena	158
11	H. Grützmann: Mathematik und Praxis	162
	E. Krätzel: Eine Eigenschaft der Zahl 30	169
	G. Lischke, B. Goetze: Mathematik und Erkenntnistheorie (I)	172
12	B. Hanisch: Berechnung und Eigenschaften von Primzahlzwillingen	178



Und nun ein Beitrag aus unserer Werbeabteilung

Der Rat des Teufels

(Sehr frei nach Goethe)

Schüler: Guten Tag, Herr Teufel, ich will meine Seele verkaufen ...

Mephisto: Was, Du auch? Dann stell Dich bitte an! Das Ende der Schlange ist zwei Straßen weiter. Oder Du gibst einen schriftlichen Antrag ab.

Schüler: Ich habe Faust gelesen - und jetzt will ich auch meine Seele verkaufen. Du sollst mir dafür zu Lebzeiten alle Mathematikaufgaben lösen.

Mephisto: Daß ich nicht lache. Ja, damals bei Faust, das waren schwere Zeiten für mich. Da mußte man hinterher sein wie - na eben wie der Teufel hinter der sündigen Seele. Aber jetzt bei dem Massenandrang! Und dazu die gestiegenen Anforderungen! Und nun kommst Du noch mit Mathematik! Dies ist zuviel! Der Teufel ist doch auch nur ein Mensch!

Schüler: Du siehst also keine Möglichkeit, daß ich die Fähigkeit erlange, alle Mathematikaufgaben lösen zu können.

Mephisto: Hm, hm. Doch es gibt eine Möglichkeit.

Schüler: Lieber, lieber Teufel, sag sie mir!

Mephisto: Abonniere die WURZEL!



Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“,

Leiter: Jörg Vogel

Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild

Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, A. Jeschag, I. Kaiser, A. Kleinwächter, M. Lutz, D. Meinhardt, G. Müller, F. Pegenau, H. Schwulow

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Redaktionsschluß: 16. 11. 79

Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932