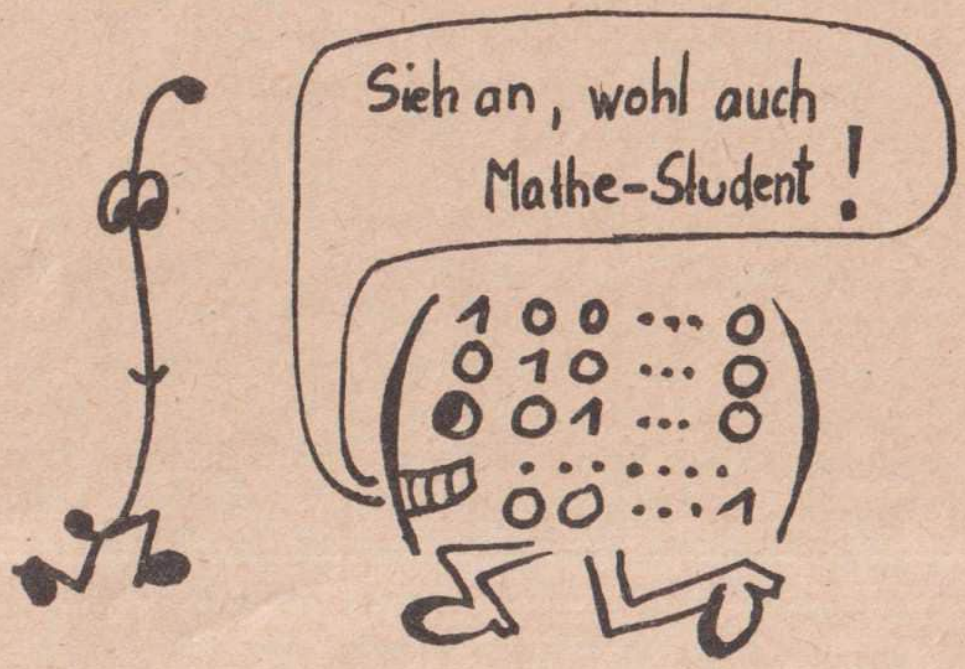


1
80

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Aller Anfang ist schwer oder: meine ersten Studienwochen

Unser Studium "begann" bereits am 22.2.79, zu den Jenaer Informationstagen. Hier konnten wir unser zukünftiges Erzieherkollektiv sowie unsere Kommilitonen kennenlernen. In zwanglosen Unterhaltungen mit Studenten des 1. Studienjahres in der Schmiede - die Wurzel stellte diesen Studentenklub bereits vor - erfuhren wir einiges, was uns erwartet.
Im September ging es nun wirklich los. In der ersten Woche fanden neben der technischen Immatrikulation zunächst eine Vorlesung zur Geschichte der Friedrich- Schiller- Universität sowie Seminare zu aktuell-politischen Fragen statt. Am 13.9. 1979 war die feierliche Immatrikulation. Diese fand in feierlichem Rahmen in der Aula der FSU - mit dem berühmten Gemälde "Auszug der Jenaer Studenten" - statt. Dieser festliche Rahmen und die Festansprache von Staatssekretär Günter Bernhardt machten uns die hohe Verantwortung, die wir bei unserem Studium tragen, bewußt. Der feierlichste Augenblick für mich war, als der Rektor Prof. Dr. Bolck mir nach dem Gelöbnis die Hand schüttelte.
Am Freitag, dem 14.9.79, begannen die Lehrveranstaltungen. Bald zeichnete sich ab, daß doch erhebliche Unterschiede zwischen Erweiterter Oberschule und Universität bestehen. Während zum Beispiel Hausaufgaben an der Schule ausschließlich der Vertiefung bereits erworbenen Wissens dienen, ist es beim Studium unmöglich, das Studienziel zu erreichen, ohne sein Wissen außerhalb der Lehrveranstaltungen durch Selbststudium zu vertiefen. Dabei wird dieses Selbststudium von keinem angeleitet oder gar kontrolliert, sondern es zeigt sich erst bei der selbständigen Lösung von Übungsaufgaben, beim Schreiben von Testaten und letztendlich in den Prüfungen, wie man den Stoff verarbeitet hat. Ein wesentlicher qualitativer und quantitativer Unterschied besteht auch darin, wie der Stoff in Vorlesungen bzw. im Unterricht dargeboten wird.

Während an der Schule die Mathematik fast nur als Hilfsmittel für andere Fächer betrachtet wurde und somit der Mathematikunterricht mehr "Rechnen" war, wird nun an der Universität Mathematik wissenschaftlich betrieben. Das bedeutet, daß in der Schule einzelne, mehr oder weniger aus dem Zusammenhang gerissene Hilfsmittel gelehrt werden, während an der Universität ausgehend vom axiomatischen Aufbau die Mathematik logisch von den Grundlagen aus aufgebaut wird, so daß sich der Schulstoff mehr oder weniger nur als "Spezialfall" dieser oder jener mathematischen Theorie erweist.
Bei dem hohen Abstraktionsgrad, den die Mathematik besitzt, machen sich besonders die Vorteile bemerkbar, die Studenten haben, die sich vor dem Studium bereits außerschulisch mit Mathematik beschäftigt haben. Nicht umsonst sind die "Wurzel" und die Mathematiklager des Bezirksklubs Junger Mathematiker zum Jugendobjekt "Studienvorbereitung" zusammengefaßt. Ich möchte - ohne anderen, die Mathematik studieren wollen, Angst einzujagen - behaupten, daß aktive Mitglieder des BKJM und aktive Wurzelleser bedeutende Vorteile gegenüber anderen im Verständnis des Dargebotenen haben. Auch zeigt es sich, daß solche Studenten, die sich nicht schon außerschulisch mit Mathematik beschäftigt haben, oft falsche Vorstellungen von Ablauf, Schwierigkeiten, Anforderungen und Ziel des Mathematikstudiums haben. Der Stundenplan unserer Seminargruppe sieht zum Beispiel so aus: zwei Vorlesungen Lineare Algebra und Geometrie, zwei Vorlesungen Differential- und Integralrechnung und eine Vorlesung Mathematische Kybernetik und Rechentechnik und genausoviele Übungen, dazu eine Vorlesung und ein Seminar Marxismus-Leninismus, Russisch, Englisch und Sport. Das bedeutet also, daß mehr als zwei Drittel der Wochenstunden reine Mathematik gelehrt wird. Dazu kommt noch, daß in verschiedenen Fächern z. T. unterschiedliche Schreibweisen für ein und dasselbe verwendet werden oder die gleiche Schreibweise unterschiedlich interpretiert wird. Mit solchen Problemen wird sich jeder zukünftige Mathematikstudent selbst beschäftigen müssen.
Zum Schluß möchte ich feststellen, daß das Mathematikstudium

zwar ein recht schwieriges, aber auch ein sehr schönes Studium ist, und ich hoffe, viele von Euch, liebe Wurzelleser, später einmal an unserer Sektion begrüßen zu können.

Andreas Ieschag
Mathematikstudent
- 1. Studienjahr -

Im Zug

Zwei Ökonomen und zwei Mathematiker fahren mit dem Zug von ihrem Wohnort X zu ihrem Arbeitsort Y.
Die Mathematiker beobachten, wie die Ökonomen beim Nahen des Schaffners aufstehen, zu zweit auf die nächste Toilette gehen und zuschließen. Als der Schaffner an die Toilettentür klopft und die Fahrkarte verlangt, schieben sie eine unter der Tür durch. So sparen die Ökonomen das halbe Fahrgeld.
Bei der nächsten Fahrt jedoch klopfen die Mathematiker an die Toilettentür, hinter der sich die Ökonomen verstecken, und lassen sich die Fahrkarte durchschieben. Damit gehen sie zu zweit auf die nächste Toilette. So sparen die Mathematiker das ganze Fahrgeld.

Ist die folgende Rechnung richtig?

$$
\begin{array}{r}
523 \cdot 643 \\
\hline
3762 \\
2514 \\
\quad 1771 \\
\hline
425331
\end{array}
$$

Mathematik und Erkenntnistheorie (II)

Die Rolle der Abstraktion in der Mathematik

Wie bereits im ersten Beitrag angedeutet, sind die Begriffsbildungen und Gegenstände der Mathematik durch Abstraktion aus realen Verhältnissen entwickelt worden. Die Abstraktion ist ein wesentliches Moment des Erkenntnisprozesses, und es ist ein Verdienst der Erkenntnistheorie des Marxismus-Leninismus, das allen Abstraktionsprozessen Gemeinsame, unabhängig von der fachwissenschaftlichen Spezifik, herausgearbeitet zu haben. Dieses besteht darin, daß aus dem durch die Sinnesorgane aufgenommenen Material durch Absehen von gewissen Merkmalen, Eigenschaften und Beziehungen andere, wesentliche, notwendige und allgemeine Beziehungen und Eigenschaften der Gegenstände herausgehoben werden. Als historisch erste, durch Abstraktion entstandene mathematische Begriffsbildungen sind uns der Zahlbegriff und eine Reihe von geometrischen Begriffen bekannt. Daß diese Begriffe und die gesamte Mathematik die objektive Realität als Grundlage haben und keine bloßen Spielereien des menschlichen Denkens sind, kann man kaum besser als mit den Worten von Friedrich Engels selbst ausdrücken: "Keineswegs aber befaßt sich in der reinen Mathematik der Verstand bloß mit seinen eigenen Schöpfungen und Imaginationen. Die Begriffe von Zahl und Figur sind nirgends anders hergenommen, als aus der wirklichen Welt. Die zehn Finger, an denen die Menschen zählen, also die erste arithmetische Operation vollziehen gelernt haben, sind alles andere, nur nicht eine freie Schöpfung des Verstandes. Zum Zählen gehören nicht nur zählbare Gegenstände, sondern auch schon die Fähigkeit, bei Betrachtung dieser Gegenstände von allen übrigen Eigenschaften abzusehen außer ihrer Zahl - und diese Fähigkeit ist das Ergebnis einer langen geschichtlichen, erfahrungsmäßigen Entwicklung. Wie der Begriff Zahl, so ist der Begriff Figur ausschließlich der Außenwelt entlehnt, nicht im Kopf aus dem reinen Denken entsprungen. Es mußte Dinge geben, die Gestalt hatten und deren Gestalten man verglich, ehe man auf den Begriff der Figur kommen konnte. Die reine Mathematik hat zum Gegenstand die Raumformen und Quantitätsverhältnisse der wirklichen Welt, also einen sehr realen Stoff. Daß dieser

Stoff in einer höchst abstrakten Form erscheint, kann seinen Ursprung aus der Außenwelt nur oberflächlich verdecken. Um diese Formen und Verhältnisse in ihrer Reinheit untersuchen zu können, muß man sie aber vollständig von ihrem Inhalt trennen, diesen als gleichgültig beiseite setzen; so erhält man die Punkte ohne Dimensionen, die Linien ohne Dicke und Breite, ... die Konstanten und die Variablen ... Auch die scheinbare Ableitung mathematischer Größen auseinander beweist nicht ihren apriorischen Ursprung, sondern nur ihren rationellen Zusammenhang. Ehe man auf die Vorstellung kam, die Form eines Zylinders aus der Drehung eines Rechtecks um eine seiner Seiten abzuleiten, muß man eine Anzahl wirklicher Rechtecke und Zylinder, wenn auch in noch so unvollkommener Form, untersucht haben." (F. ENGELS: Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft (Anti-Dühring). In: Marx/Engels, Werke Band 20, S. 35/36)

Charakteristisch für die weitere Entwicklung der Mathematik sind Abstraktionen höherer Stufe, Abstraktionen von Abstraktionen usw. Wir sehen das beispielsweise in der Geometrie, wenn nichteuklidische Geometrie oder mehr als dreidimensionale Räume mit und ohne Metrik betrachtet werden, oder in der Algebra (Theorie der algebraischen Strukturen), der mathematischen Kybernetik und anderswo. Die mathematischen Begriffsbildungen entfernen sich dadurch scheinbar immer mehr von der natürlichen und sozialen Wirklichkeit. Aber gerade so ist ein tieferes Erkennen der objektiven Realität möglich. So kommt z. B. den kybernetischen Systemen höherer Abstraktionsstufe praktische Bedeutung zu, da sich aus ihnen durch theoretische Betrachtungen Hinweise gewinnen lassen, etwa wie ein Konstrukteur vorzugehen hat, um einen Automaten aufwandmäßig optimal zu gestalten, wenn gewisse Bedingungen vorliegen. Dieser dialektisch-widersprüchliche Charakter des menschlichen Erkenntnisprozesses besonders in den Wissenschaften wurde von Lenin herausgearbeitet: "Das Denken, das vom Konkreten zum Abstrakten aufsteigt, entfernt sich nicht - wenn es richtig ist ... - von der Wahrheit sondern nähert sich ihr. ... alle wissenschaftlichen (richtigen, ernst zu nehmenden, nicht unsinnigen) Abstraktionen spiegeln die Natur tiefer, richtiger, vollständiger wider." (W.I. LENIN: Konspekt zu Hegels "Wissenschaft der Logik". In: Lenin, Werke Band 38, S. 160.)

Gerade das Absehen von der konkreten inhaltlichen Bedeutung führt dazu, daß die mathematischen Begriffe nicht nur in dem Bereich angewendet werden können, in dem sie ihren Ursprung haben, sondern darüber hinaus in Bereichen, für die die abstrakt-inhaltlichen Beziehungen die gleichen wie im Ursprungsbereich sind. Die Interpretationsmöglichkeiten der mathematischen Begriffe werden dabei um so umfangreicher, je höher die Abstraktionsstufe ist, je mehr vom konkreten Inhalt der Begriffe und der Relationen abgesehen wird.

Von Vertretern der idealistischen Philosophie wird oft behauptet, daß die mathematischen Begriffsbildungen willkürlich seien. Das ist aber in keinem Fall so, sondern sie werden im Hinblick auf die adäquate Abbildung realer Verhältnisse ausgewählt. Das entscheidende Kriterium für die Adäquatheit ist dabei die Tatsache, daß sie sich in den verschiedensten Gebieten der Mathematik und ihrer Anwendungen bewährt haben und ständig weiter bewähren, d. h. also ihre Rechtfertigung in der Praxis.

In dem angeführten Zitat von Friedrich Engels kommt bereits zum Ausdruck, daß die Grundlage der Abstraktionen und damit menschlicher Erkenntnis überhaupt das unmittelbare aktive und gesellschaftliche Handeln der Menschen ist. Er sagt an anderer Stelle: "Gerade die Veränderung der Natur durch den Menschen, nicht die Natur als solche allein, ist die wesentlichste und nächste Grundlage des menschlichen Denkens, und im Verhältnis, wie der Mensch die Natur verändern lernte, in dem Verhältnis wuchs seine Intelligenz." (F. ENGELS: Dialektik der Natur. In: Marx/Engels, Werke Band 20, S. 498)

Im Heft 12/78 der WURZEL beschäftigten wir uns mit dem Begriff des Unendlichen in Mathematik und Philosophie und erörterten bereits dort die Widerspiegelung allgemeiner Gesetzmäßigkeiten der marxistisch-leninistischen Erkenntnistheorie.

Die erkenntnistheoretischen Grundlagen für das Begreifen des Unendlichen liegen in der Auseinandersetzung des Menschen mit der Natur, insbesondere im Produktionsprozeß. Dabei werden bestimmte Handlungen ständig wiederholt. Diese wiederholten Tätigkeiten bilden letztlich die Grundlage für ein Begreifen einer Regel, deren wiederholte Anwendung immer wieder zu etwas Neuem

führt, etwa der Regel der Konstruktion der natürlichen Zahlen durch aufeinanderfolgendes Hinzufügen jeweils einer Eins zur vorhergehenden Zahl, wobei die Ausgangszahl Null ist. Wir erhalten in diesem Fall die unendliche Folge der natürlichen Zahlen und sprechen hier von der Abstraktion der potentiellen Unendlichkeit. Man geht also von praktisch realisierbaren materiellen Konstruktionen aus und gelangt durch Abstraktion zu gedanklichen Konstruktionen. Von den praktischen Grenzen der konstruktiven Möglichkeiten (Material- und Zeitvorrat) wird dabei abgesehen. Solche gedanklichen Konstruktionen sind also beliebig weit durchführbar. Es ist aber nun bei weitem nicht so, daß jedes einzelne Individuum zunächst produzieren muß, um den Begriff der potentiellen Unendlichkeit, also etwa die Regel zur Konstruktion der natürlichen Zahlen begreifen zu können. Der gesellschaftliche Charakter der menschlichen Erkenntnis ermöglicht es, diese Regel einem Kind sehr früh begreiflich zu machen. Doch auch das Kind lernt diese Regel nur in der Tätigkeit, nämlich durch die Tätigkeit des Zählens seiner Finger, seines Spielzeuges usw. Ähnlich ist es mit allen mathematischen Regeln und Sätzen. Ihrem Begreifen gehen notwendigerweise bestimmte wiederholte materielle menschliche Tätigkeiten voraus. Anders ist es jedoch in methodischer Hinsicht. Mathematische Sätze werden nicht empirisch durch Beobachtung der Wirklichkeit überprüft. Hat man einmal eine mathematische Regel begriffen, so lassen sich mit Hilfe dieser Regel mathematische Sätze ohne irgendeinen weiteren Bezug zur erfahrbaren Wirklichkeit beweisen. Ebenso verhält es sich mit dem Begreifen des potentiell Unendlichen. Entwicklungsgeschichtlich sind unsere praktischen Erfahrungen Voraussetzung für dieses Begreifen, und zwar sowohl beim Prozeß der gesamten Entwicklung der menschlichen Erkenntnis und ihres gesellschaftlichen Charakters als auch für das einzelnen Individuum selbst, etwa beim Zählen des Spielzeuges. Haben wir aber das Wesen des potentiell Unendlichen einmal erfaßt, so können und brauchen wir methodisch nicht jedesmal auf die Erfahrung zurückzugreifen.

Dr. G. Lischke, Bereich Kybernetik der Sektion Mathematik/FSU Jena
Dr. B. Goetze, Akademie der Wissenschaften der DDR Berlin

Preisaufgaben

M 1 ②

Seien x und y natürliche Zahlen und

$$u = 2x + 3y \qquad v = 9x + 5y.$$

Man zeige: u ist genau dann durch 17 teilbar, wenn auch v durch 17 teilbar ist.

M 2 ①

Die Längen der Seiten eines Dreiecks bilden eine arithmetische Folge, die Differenz zwischen benachbarten Gliedern sei d. Der Flächeninhalt des Dreiecks sei gleich S. Man gebe die Längen der Seiten des Dreiecks an.

M 3 ①

Man zeige: Erfüllt das Zahlenpaar (x,y) die beiden Gleichungen

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0$$

und

$$x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0,$$

so erfüllt es auch die Gleichung

$$xy - 12x + 15y = 0.$$

M 4 ①

Die natürliche Zahl x ende auf die Ziffern a und b (in dieser Reihenfolge). Man ermittle alle geordneten Paare (a,b), für die x^2 auf dieselben Ziffern a und b (auch in Bezug auf die Reihenfolge) endet.

M 5 ①

n Schüler seien in einer Reihe angetreten. Sie erhalten die Nummern 1,2,...,n. Eine Umordnung bestehe darin, daß jeder Schüler entweder einmal seinen Platz mit einem anderen tauscht oder auf seinem Platz bleibt.
Wie kann man mit zwei hintereinander ausgeführten Umordnungen die Anordnung n,1,2,...,n-1 erreichen?

M 6 ①

Доказать, что площадь треугольника, вписанно в параллелограмм, не может быть больше половины площади этого параллелограмма.

Einsendeschluß: 15.4.1980

Lösungsbedingungen:
Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.
Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Lösungen

Aufgabe L 37

Löst man die quadratische Gleichung nach x auf, so erhält man
$x = -\sin xy \pm \sqrt{\sin^2 xy - 1}$.
Reelle Lösungen ergeben sich nur für $\sin^2 xy = 1$.
Man erhält dann $x = -\sin xy$.
Für $\sin xy = 1$ sind $x = -1$, $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ die Lösungen und für $\sin xy = -1$ sind es $x = 1$, $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Aufgabe L 38

Beweis durch vollständige Induktion

n=1
$(\sqrt{2} - 1)^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1}$
Sei $(\sqrt{2} - 1)^m = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.
Dann ist für m+1:

$$(\sqrt{2} - 1)^{m+1} = (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{2} - 1) =$$
$$= (\sqrt{2}\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) - (\sqrt{k+1} + \sqrt{2}\sqrt{k}) =$$
$$= \sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2} - \sqrt{(\sqrt{k+1} + \sqrt{2}\sqrt{k})^2} =$$
$$= \sqrt{3k + 2 + 2\sqrt{2(k+1)k}} - \sqrt{(3k+1+2\sqrt{2(k+1)k})}.$$

Die Differenz der beiden Radikanten ist 1.
Es bleibt noch zu zeigen, daß $\sqrt{2(k+1)k}$ eine natürliche Zahl ist.
Es gilt nach Induktionsvoraussetzung:

$$(\sqrt{2}-1)^m = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \text{ , also auch}$$
$$(\sqrt{2}-1)^{2m} = 2k + 1 - \sqrt{2(k+1)k}\sqrt{2} .$$

Weiterhin ist $(\sqrt{2} - 1)^{2m} = a - b\sqrt{2}$, wobei a und b natürliche Zahlen sind. Ein Koeffizientenvergleich liefert $\sqrt{2(k+1)k} = b$, also ist $\sqrt{2(k+1)k}$ eine natürliche Zahl.

Aufgabe L 39

Die gegebenen Gleichungen formt man in die folgenden Gleichungen um:

$$\frac{x \lg y}{y \lg x} = \frac{z+x-y}{y+z-x} \qquad (1)$$

$$\frac{y \lg z}{z \lg y} = \frac{x+y-z}{z+x-y} \qquad (2)$$

$$\frac{x \lg z}{z \lg x} = \frac{x+y-z}{y+z-x} \qquad (3)$$

(1) und (3) werden zu

$\frac{\lg y^x}{\lg x^y} = \frac{z+x-y}{y+z-x}$ und $\frac{\lg z^x}{\lg x^z} = \frac{x+y-z}{y+z-x}$ umgeformt.

Addiert man auf beiden Seiten der Gleichungen jeweils 1, so erhält man:

$$\frac{\lg y^x + \lg x^y}{\lg x^y} = \frac{2z}{y+z-x} \quad \text{und} \quad \frac{\lg z^x + \lg x^z}{\lg x^z} = \frac{2y}{y+z-x} .$$

Durch weitere Umformungen erhält man

$$\lg y^x x^y = \frac{2z \lg x^y}{y+z-x} \quad \text{und} \quad \lg z^x x^z = \frac{2y \lg x^z}{y+z-x} .$$

Da $z \lg x^y = \lg x^{yz} = y \lg x^z$ ist, sind die rechten Seiten der beiden Gleichungen gleich und somit ist auch $\lg y^x x^y = \lg z^x x^z$. Aus der Eineindeutigkeit der Logarithmusfunktion folgt: $y^x x^y = z^x x^z$.

Analog zeigt man unter Verwendung der Gleichungen (2) und (3), daß $y^z z^y = x^z z^x$ gilt.

Aufgabe L 40

Offensichtlich ist $x \neq 0$. Dividiert man die gegebene Gleichung durch x, so erhält man

$$x + \frac{1}{x} = -1. \qquad (1)$$

Multipliziert man die gegebene Gleichung mit x, so erhält man

$x^3 + x^2 + x = 0$, woraus

$x^3 = -(x^2+x) = 1$ folgt.

Man erhält deshalb

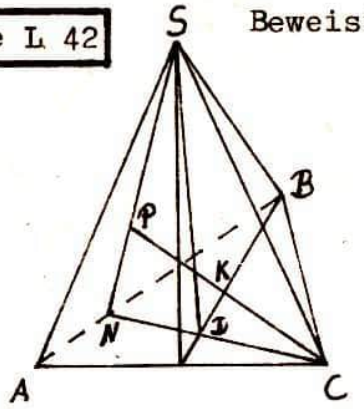
$$x^{14} + \frac{1}{x^{14}} = (x^3)^4 x^2 + \frac{1}{(x^3)^4 x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} =$$

$$= (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 1 - 2 = -1.$$

Aufgabe L 41

Aus den binomischen Formeln erhält man
$a^2 + b^2 \geq 2ab$ und $c^2 + d^2 \geq 2cd$, sowie für beliebige positive x: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
Das bedeutet speziell:
$ab + \frac{1}{ab} \geq 2$; $ac + \frac{1}{ac} \geq 2$; $ad + \frac{1}{ad} \geq 2$.
Wegen abcd = 1 erhält man:
$ab + cd \geq 2$; $ac + bd \geq 2$; $ad + bc \geq 2$.
Es gilt also
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq$
$\geq 3(ab+cd) + (ac+bd) + (ad+bc) \geq 10$.

Aufgabe L 42



Beweisidee: Sei SD ⊥ ABC, CP ⊥ SAB und sei K der **Schnittpunkt** der beiden Senkrechten. Diese liegen in der Ebene CSK, die sowohl senkrecht zur Ebene ASB als auch zur Ebene ABC ist. Deshalb schneiden sich die Ebenen ASB und ABC in einer Kante, die senkrecht zur Ebene SKC steht: AB ⊥ SKC, und es gilt AB ⊥ CS.

Man kann auch die Umkehrung zeigen.
Sind zwei gegenüberliegende Kanten eines Tetradeders senkrecht, dann schneiden sich die Höhen des Tetraeders, die von den Endpunkten ein und derselben Kante ausgehen.

Beweis der Umkehrung:
Sei AB ⊥ SC und sei SN ⊥ AB. Dann ist CSN ⊥ AB und somit auch ASB ⊥ NSC. Die Senkrechte auf die Seitenfläche ASB liegt in der Ebene NSC. Weiterhin ist AB ⊥ NSC und somit auch NSC ⊥ ABC. Deshalb liegt die Senkrechte auf die Seitenfläche ABC ebenfalls in der Ebene NSC.
Da beide Höhen in derselben Ebene liegen, schneiden sie sich.
Insgesamt erhält man:

$h_S \cap h_C \neq \emptyset \leftrightarrow AB \perp SC \leftrightarrow SC \perp AB \leftrightarrow h_A \cap h_B \neq \emptyset$.

Eine ausführliche Darstellung der Eigenschaten der Tetraederhöhen findet der interessierte Leser in der "alpha" Nr. 4/1974, S. 76f.

Wurzel-Preisaufgaben

Auswertung 1979

Im Schuljahr 1978/79, d.h. zu den Preisaufgaben, die in der "Wurzel" bis zur Nr. 7\8/79 veröffentlicht wurden, erzielten folgende Einsender mehr als 40 Punkte

Einsender		Punktzahl
B e r t h o l d, Dietmar	Crimmitschau	70
E r d m a n n, Frank	Zeitz	62
M a a z, Uwe	Arnstadt	60
R e i s s i g, Michael	Halle	56
S c h u r i c h t, Friedemann	Taucha	56
M u m m e l t h e y, Reinhard	Potsdam-Geltow	53
K a s p a r e k, Andreas	Gräfenhainichen	51
M i k o l a j c z a k, Birgit	Naumburg	50
H e l b i g, Marid	Frankfurt/O.	50
G u t s c h e, Rainer	Herzberg	49
B ö r n e w i t z, Stephan	Leipzig	47
B r e m e r, Ingo	Rostock	46
P o h l e n z, Siegmar	Wöllnau	46
H r u s c h k a, Michael	Senftenberg	44
S t o r b e c k, Uwe	Quedlinburg	44
K r a b i s c h, Ulv	Leipzig	43
S c h e n k, Klaus	Hoyerswerda	41

Weitere 46 Einsender erzielten 10 bis 40 Punkte.
Sie alle erhielten Büchergutscheine im Wert von 0,50 M je Punkt.
Insgesamt verschickten wir für 879,50 M Büchergutscheine.
Viel Spaß beim Lesen!
Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden diese für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Meine erste Vorlesung

Man redet oft so leicht daher, daß das Studieren einfach wär',
Wenn man genügend Geistesgabe und einen guten Wechsel habe.
Dann sag' ich stets: "Gefehlt, mein Bester! Studiere erst mal ein Semester
Und lerne, wie es dem ergeht, der vom Studieren nichts versteht."

Gesetzt, es könnte ja passieren, du wirst Student und darfst studieren
Und bist mit bestem Mut und Hoffen am Studienorte eingetroffen.
Trittst du mit Schreibzeug und Papier dann morgens durch die Hörsaaltür,
Mit dem Gefühl, das mancher kennt: Es ist soweit, ich bin Student!
Und dies hier sei für lange Zeit die Stätte deiner Tätigkeit.

Auf dem Platz, der angenehm, machst du's im Hörsaal dir bequem,
Wo einige Kommilitionen bereits auf ihren Sitzen thronen.
Der Hörsaal füllt sich nach und nach. Die Armbanduhr zeigt 1/4 8,
Und endlich mit behenden Schritten, durcheilt ein Herr des Saales Mitten,
Ersteigt mit Würden das Katheder, und voller Freude klopft ein jeder.

Indes zu reden er begonnen, betrachtest du ihn still versonnen,
Freust dich an seiner kühnen Nase, an dem geputzten Brillenglase,
Am Ausdruck seines Angesichts - und nur verstehen tust du nichts.

Die inn're Stimme mahnt zur Pflicht und sagt dir klar:"So geht das nicht!
Du bist Student und willst studieren, beginne dich zu konzentrieren!"
Das wirkt! Du legst die Stirn in Falten und suchst im Geiste festzuhalten,

Was der Professor wohl begründet und überzeugend dir verkündet.

Weit schwieriger ist es indessen, in kurze Sätze das zu pressen
Und aus der Fülle des Gehörten nur Wesentliches auszuwerten.
Bist du so weit, dann merkst du leider, der Herr Professor ist schon weiter.

Der Ernst der Sache ist zwar groß, indes sie scheint nicht hoffnungslos.
Du denkst entschlossen, Kampf muß sein, tauchst deine Feder wütend ein
Und folgst alsdann in gutem Zuge des Herrn Professors Geistesfluge.

Der Herr Professor, wie dich deucht, hat seinen Höhepunkt erreicht
Und naht, du ahnst es mit Erregung, dem Ende seiner Überlegung.
Hoffst auch, es werde dir gelingen, alles noch zu Papier zu bringen.

Indes bald merkst du es betroffen, vergeblich war auch dieses Hoffen.
Ein liebenswürdiger Kollege entschleimt sich jetzt die Atemwege,
Indem er sich ins Sacktuch schnaubt und der Akustik dich beraubt.

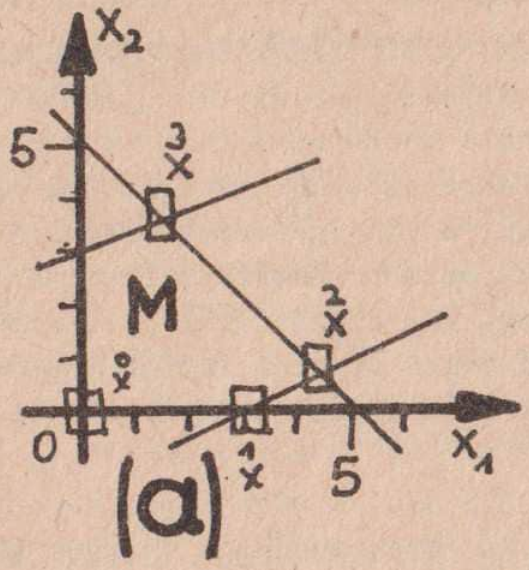
Das war zu viel. Die Hand mit Feder sinkt dir ermattet aufs Katheder.
Du stöhnst in deiner Seele Not und meinst, du wärest ein Idiot.
Dein Nachbar sagt: "Nur Mut, mein Lieber! Dein Backenzahn, das geht vorüber!"
Du funkelst wütend durch die Brille, zutiefst erschrocken schweigt er stille.

Hingegen du für lange Zeit versinkst in Teilnahmslosigkeit.
Dann endlich löst dein Herzenskummer sich auf in einen tiefen Schlummer.
Der Unterkiefer sinkt herunter, die Spucke rieselt froh und munter,
Die Angst des Herzens ist erkaltet, das Denkgerät ist abgeschaltet.

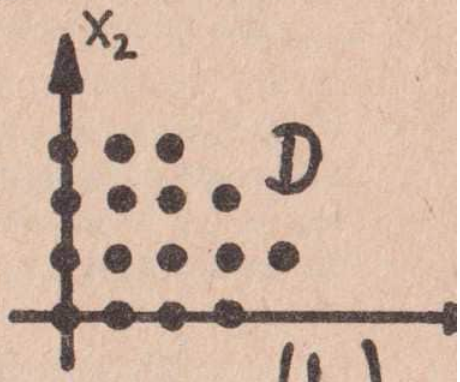
Du ruhest aus von allen Nöten (man nennt das geistig weggetreten).
Als man durch Klopfen Beifall spendet, wirst du geweckt, er hat geendet.
Um dich herum sind schon die Massen bestrebt, den Hörsaal zu verlassen.
Das Ganze ist jetzt sonderbar, doch eines ist dir nun schon klar,
Daß du nicht mehr der Optimist wie von zwei Stunden vorher bist.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Jörg Vogel
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, A. Jeschag, I. Kaiser, A. Kleinwächter, M. Lutz, D. Meinhardt, G. Müller, F. Pegenau, H. Schwulow
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

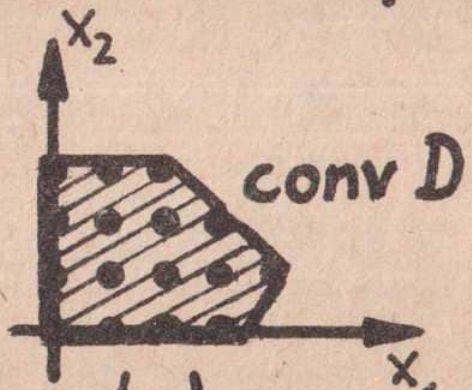
Redaktionsschluß: 7. 12. 1979



(a)



(b)



(c)

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvor bereitung-Studienwerbu der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

2
80

Ganzzählige lineare Optimierungsaufgaben

Die Optimierungsverfahren verwenden eigentlich recht einfache, schon lange bekannte Rechenoperationen. Der Umfang der zu verarbeitenden Zahlenwerte (Daten) ist aber bei realen Aufgaben so groß, daß es früher unsinnig erschien, manuell Lösungen zu errechnen. Die elektronische Datenverarbeitung schaffte eine wesentliche Grundlage für die Verarbeitung großer Datenmassive. Sie bildet auch einen Grund für das rasche Anwachsen der Optimierungstheorie, das andererseits auch zur Lösung vieler Praxisaufgaben notwendig wurde.

In der WURZEL 7/8/79 sind einige typische Aufgaben der diskreten Optimierung, wie das Transportproblem, das Rundreise- oder k-Touren-Problem, das Standortverteilungsproblem und das Problem der optimalen Standardisierung, dargestellt worden.

In diesem Artikel wollen wir uns mit der folgenden Aufgabe befassen:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \max \qquad (1)$$

$$a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad i=1,\ldots,m \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \qquad j=1,\ldots,n \qquad (3)$$

$$x_j \text{ ganzzahlig} \qquad j=1,\ldots,n. \qquad (4)$$

Eine inhaltliche Interpretation dieser Aufgabe kann folgendermaßen lauten: In einem Betrieb werden Produkte j (j=1,...,n) hergestellt. Bei der Herstellung eines Produkts j erzielt der Betrieb einen Gewinn von c_j Einheiten (z. B. Mark). Im Produktionsprozeß werden gewisse Rohstoffe i benötigt und verbraucht. Zur Herstellung eines Produkts j sind a_{ij} Einheiten (z. B. kg, m^3 usw.) des Rohstoffes i notwendig. Der Rohstoff i ist im Umfang b_i vorhanden. Mit x_j bezeichnen wir die Anzahl der Produkte j, die in einem entsprechenden Zeitraum produziert werden. Dieser Produktionsplan $(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$ soll einen maximalen Gewinn (1) realisieren bei Ausnutzung vorgeschriebener Rohstoffvorräte (2). Die Bedingung (3) sagt aus, daß in natürlicher Weise etwas nichtnegatives produziert wird. Die Bedingung (4) schreibt dem Betrieb vor, daß er nur fertige (ganze) Produkte verkaufen kann.

Es ist sicher verständlich, daß bei kleinen Gewinnen c_j und großen Serien (Stückzahlen x_j) die Forderung (4) durch nachträgliche

Rundung einer Lösung von (1) - (3) auch die Aufgabe (1)-(4) zufriedenstellend gelöst werden kann. Anders sieht es aus, wenn bei kleinen Serien (kleine x_j) große Gewinne c_j erzielt werden. Dann kann neben dem Effekt, daß die gerundete Lösung der Bedingung (2) nicht mehr entspricht, auch auftreten, daß es einen Plan $\bar{x}$ gibt, der (2) - (4) erfüllt und einen wesentlich größeren Gewinn erzielt. Daher werden wir uns zuerst der Lösung von (1)-(3) zuwenden. Auf den Lösungsmethoden zu (1)-(3) bauen auch die Verfahren auf, mit denen wir dann die Aufgaben (1)-(4) lösen können. Der Produktionsplan x kann als ein Vektor betrachtet werden, und er ist somit ein Element des n-dimensionalen reellen Vektorraumes R_n.

1. Lineare Optimierung

Wir können davon ausgehen, daß jede lineare Optimierungsaufgabe in die Form (1)-(3) gebracht werden kann, in die sogenannte Normalform.

Definition: Ein Vektor x heißt zulässige Lösung der Aufgabe, wenn er die Bedingungen (2) und (3) erfüllt.

Die Menge aller zulässigen Lösungen nennen wir zulässigen Bereich M.

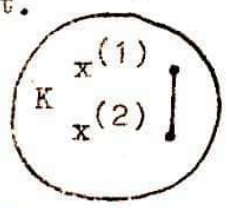
Jede der Bedingungen (2), für festes i, bzw. (3) für festes j, beschreibt einen abgeschlossenen Halbraum

$$\overline{H_i^-} = \left\{ x \in R_n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \right\} \text{ bzw. } \overline{H_j^+} = \left\{ x \in R_n : x_j \geq 0 \right\}.$$

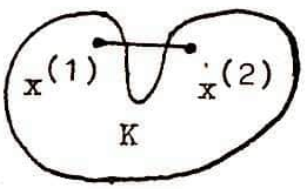
Ein wesentlicher Begriff in der Optimierung ist die konvexe Menge.

Definition: Eine Menge $K \subset R_n$ heißt konvex, wenn mit Elementen $x^{(1)}, x^{(2)}$ aus K auch $x = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda) x^{(2)}$ ein Element von K ist, für beliebiges $\lambda \in [0,1]$.

Mit anderen Worten, eine Menge K heißt konvex, wenn mit zwei beliebigen Punkten der Menge auch die Verbindungsgerade zur Menge gehört.



konvex



nicht konvex

Bemerkung. Jeder abgeschlossene Halbraum ist eine konvexe Menge.

Satz 1. Sind $K_1, \ldots, K_r$ konvexe Mengen, so ist auch $\bigcap_{i=1}^{r} K_i = K$ konvexe Menge.

Beweis. Sei $x^{(1)}, x^{(2)} \in K$. Zu zeigen ist, daß dann auch $x = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda) x^{(2)}$ ein Element von K ist, für beliebiges $\lambda \in [0,1]$.

Sind $x^{(1)}, x^{(2)} \in K$, so gilt $x^{(1)}, x^{(2)} \in K_i$, für alle $i=1,\dots,r$. Die Mengen K_i sind konvex, also gilt für alle i $x = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda) x^{(2)} \in K_i$ für beliebiges $\lambda \in [0,1]$. Somit ist x auch ein Element von K. ■

Folgerung. Der zulässige Bereich M der Aufgabe (1)-(3) ist konvex.

Definition: Den Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume nennen wir konvexes Polyeder (gegebenenfalls noch geschnitten mit einem Unterraum des Vektorraumes R_n).

Satz 2. Eine lineare Funktion $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ nimmt über einer beschränkten konvexen Menge K ihren maximalen (minimalen) Wert in einem Randpunkt an.

Bemerkung. Ist die konvexe Menge K unbeschränkt, so ist es möglich, daß Maximum (Minimum, oder auch beide) unendlich groß (unendlich klein) wird.

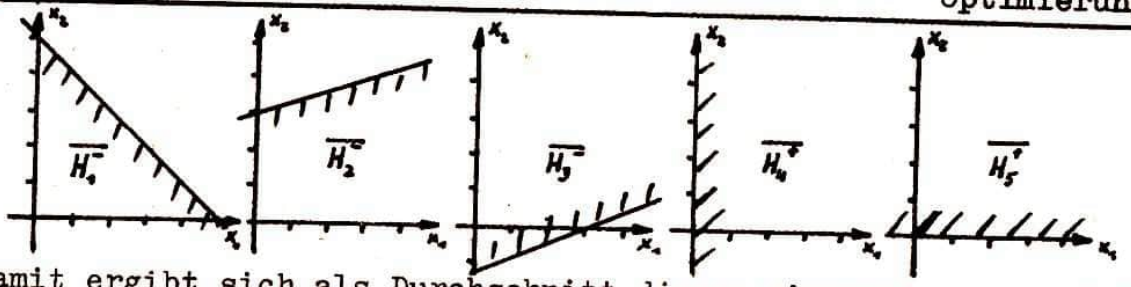
Folgerung zu Satz 2. Über einem beschränkten konvexen Polyeder wird das Maximum (Minimum) in einer Ecke angenommen.
Damit kann die Aufgabe (1)-(3) betrachtet werden als eine Optimierungsaufgabe über der Menge aller Ecken des Polyeders M.
Auf dieser Grundlage wurde 1947 das sogenannte Simplexverfahren von Dantzig eingeführt mit folgendem Ablauf:

1. Konstruiere eine Ecke $\overset{0}{x}$ des zulässigen Bereiches M.
2. Gehe zu einer benachbarten Ecke $\overset{k}{x}$ des zulässigen Bereiches M über, wenn eine Verbesserung des Zielfunktionswertes möglich ist.
3. Ist das nicht mehr möglich, ist die optimale Ecke $\bar{x}$ erreicht.

Bei dieser Vorgehensweise spielen Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme eine Rolle.
Anschaulich können wir dieses Verfahren im R_2 darstellen.
Betrachten wir folgendes Beispiel:

$$
\begin{array}{lll}
 & 2x_1 + x_2 \longrightarrow \max & \\
\overline{H_1^-} & x_1 + x_2 \leq 5 & \\
\overline{H_2^-} & -x_1 + 3x_2 \leq 9 & \\
\overline{H_3^-} & 3x_1 - 7x_2 \leq 9 & \\
\overline{H_4^+} & x_1 \geq 0 & \\
\overline{H_5^+} & x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Das zulässige Lösungspolyeder M ergibt sich als Durchschnitt der abgeschlossenen Halbräume $\overline{H_i^{\pm}}$, $i=1,\dots,5$.



Damit ergibt sich als Durchschnitt dieser abgeschlossenen Halbräume das konvexe Polyeder M (siehe Titelblatt (a)).

Das Vorgehen des Simplexverfahrens ist nun so zu verstehen:

1. Bestimmung einer Ecke von M, sagen wir $\overset{0}{x} = (0,0)$ mit Zielfunktionswert $0 = c \cdot \overset{0}{x}$.
2. Nachbarecke zu $\overset{0}{x} = (0,0)$ ist z. B. $(3,0) = \overset{1}{x}$; $c\overset{1}{x} = 6$. Also gehen wir zu $\overset{1}{x} = (3,0)$ über.
2. Nachbarecke zu $\overset{1}{x} = (3,0)$ ist $(4{,}4;0{,}6) = \overset{2}{x}$, $c\overset{2}{x}$ ist 9,4. Also gehen wir zu $\overset{2}{x} = (4{,}4;0{,}6)$ über.
2. Nachbarecke zu $\overset{2}{x} = (4{,}4;0{,}6)$ ist $\overset{3}{x} = (1{,}5;3{,}5)$ mit $c\overset{3}{x} = 6{,}5$.
3. In $\overset{2}{x}$ wird der maximale Wert der Zielfunktion angenommen.

Im R_2 ist die Lösung auch auf anderem Wege möglich. Für jeden festen Zielfunktionswert liegt die Menge aller Vektoren x mit diesem Wert $c_o = cx$ auf Geraden, die für verschiedene Werte c_o parallel zueinander liegen. Wir vergewissern uns, in welcher Richtung die Zielfunktion steigt oder fällt, verschieben sie solange über den zulässigen Bereich, bis dieser verlassen wird. Auf diese Weise wird das Maximum gefunden bei parallelem Verschieben mit wachsenden Funktionswerten und das Minimum bei fallenden Werten.

Bemerkung 1. Ist das zulässige Lösungspolyeder M unbeschränkt (z. B. für $\overline{H_3^-}$, $\overline{H_4^+}$, $\overline{H_5^+}$), so ist das Maximum unbeschränkt. Der minimale Wert der Zielfunktion wird angenommen und zwar für x=(0,0).

Bemerkung 2. Ist das zulässige Lösungspolyeder M leer (z. B. $\overline{H_1^-}$, $\overline{H_2^-}$, $\overline{H_3^-}$, $\overline{H_4^+}$, $\overline{H_5^+}$ und $\{x \in R_2,\ x_1+x_2 \geq 6\} = \overline{H_6^-}$), so ist die Aufgabe (1)-(3) unlösbar.

Bemerkung 3. Das Simplexverfahren liefert im Laufe der Rechnung Aussagen darüber, ob

a) der zulässige Bereich leer ist,

b) der zulässige Bereich beschränkt ist,

c) die Lösung der Aufgabe (1)-(3) beschränkt ist.

Bei der graphischen Lösung können wir uns davon ebenfalls überzeugen.

2. Ganzzahlige Polyeder

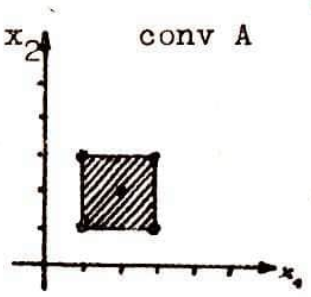
Kehren wir nun zur Aufgabe (1)-(4) zurück. Für diese Aufgabe ist der zulässige Bereich D, eine Teilmenge von M, nicht konvex. (In unserem Beispiel besteht D gerade aus den Gitterpunkten in M.) Somit läßt sich der Satz 2 nicht anwenden.
Damit entsteht die Frage, wie wir in diesem Falle zu einer Lösung gelangen können.

Definition: Sei A eine Menge von Vektoren, dann ist conv A die konvexe Hülle der Menge A

$$\text{conv } A=\left\{x\in R_n : \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x^i, x^i \in A, \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, t=2,..,|A|\right\},$$

wobei $|A|$ die Anzahl der Elemente von A bezeichne.

Die konvexe Hülle einer endlichen Menge A ist ein beschränktes konvexes Polyeder.



Sei z. B.
$A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,1),(1,3)\}$.
Jede Ecke des Polyeders conv A ist ein Element aus A. Betrachten wir unser Beispiel, die Menge D aller zulässigen Lösungen x der Aufgabe (1)-(4) ist endlich, somit ist conv D ein beschränktes Polyeder mit ganzzahligen Ecken (siehe Titelblatt (b) und (c)).
Wenden wir auf dieses konvexe Polyeder conv D das Simplexverfahren an, so ist jede Ecke ganzzahlig, also auch die Lösung der Aufgabe (1)-(3). Somit wird die Aufgabe (1)-(4) gelöst.
Leider gibt es bis heute noch keinen Algorithmus, der zu einer gegebenen Aufgabe (1)-(4) das Polyeder conv D durch lineare Ungleichungssysteme darstellt. Daher entsteht als Frage:
Unter welchen Voraussetzungen stimmen M und conv D überein?
Hierzu konnte eine kleine Klasse von Problemen gefunden werden.

- Eine solche Aufgabe ist die Transportaufgabe (siehe WURZEL 8/79). Für ganzzahlige Produktions- und Bedarfsvektoren a und b besitzt der zulässige Lösungsbereich nur ganzzahlige Ecken.
- Eine ganze Reihe von Optimierungsaufgaben über Netzwerken besitzen ebenfalls diese Eigenschaft.

Im allgemeinen kann man also nicht erwarten, daß der zulässige Lösungsbereich M nur ganzzahlige Ecken besitzt. Wie kann also diese Idee, über der konvexen Hülle conv D die Aufgabe (1)-(3) zu lösen, realisiert werden?

3. Schnittmethoden

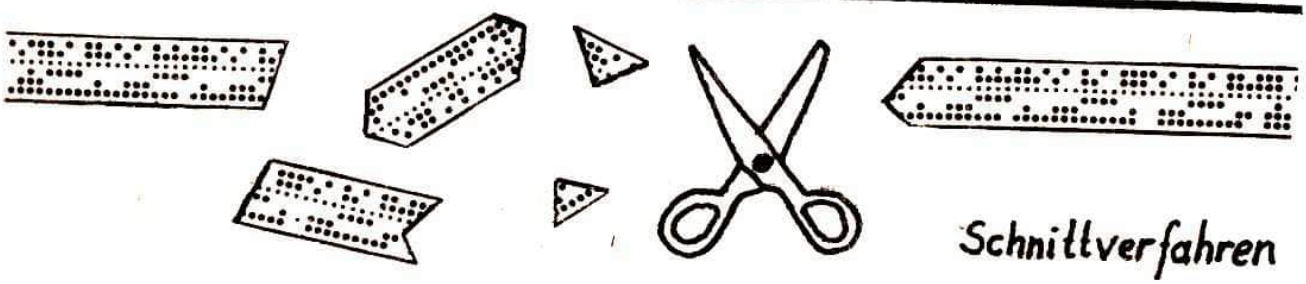
Schon Dantzig äußerte 1947 die Idee, durch Hinzufügen zusätzlicher Nebenbedingungen zur Aufgabe (1)-(3) vom zulässigen Bereich M etwas "abzuschneiden", um nach endlich vielen Schritten aus M zu conv D zu gelangen. Dazu schlug er folgendes vor.

1. Man löse die Aufgabe (1)-(3).
   Ist die Lösung $\bar{x}$ (bezüglich M also) ganzzahlig, so ist damit Aufgabe (1)-(4) gelöst.
2. Ist die Lösung $\bar{x}(M)$ nicht ganzzahlig, so führe man eine zusätzliche Bedingung (einen "Schnitt") so ein, daß
   a) $\bar{x}(M)$ "abgeschnitten" wird (unzulässig wird),
   b) der Schnitt keine Elemente aus D von M abschneidet,
   c) ein Element aus D diese Bedingung als Gleichung erfüllt.
3. Über dem neuen zulässigen Bereich $M:=M'\setminus M_s$ löse man die Aufgabe (1)-(3).

Damit werden zielgerichtet an der Seite von M Schnitte ausgeführt, die den zulässigen Bereich verkleinern und sich an conv D annähern, an der die Lösung der Aufgabe (1)-(4) zu erwarten ist. Es werden so lange Schnitte eingeführt, bis die Lösung der Aufgabe (1)-(4) erreicht wird. Nicht bis conv D erreicht wird.
Es entstehen aber folgende Probleme:

a) Ist der zulässige Bereich D leer, so ist das aus den Ungleichungen (2) und (3) nicht gleich ersichtlich.
b) **Die** Anzahl der Bedingungen steigt in jedem Schritt um eine an. Bei einer "langen" Rechnung wird das Bedingungssystem umfangreich.
c) Auf elektronischen Rechenanlagen erfolgt im Verlaufe des Simplexverfahrens eine Division und somit Rundung der Komponenten. Wann ist dann eine Lösung $\bar{x}(M)$ ganzzahlig?

Diese Probleme a), b), c) sind durch einige Feinheiten in den verschiedenen Schnittmethoden, verschieden durchgeführten Schnitten, umgangen.



4. Branch-and-Bound-Verfahren

Diese 1960 von Land und Doig eingeführte Klasse von Verfahren begründet sich auf folgender Beziehung:

$$\max_{x\in D} cx \leq \max_{x\in M} cx \quad , \quad \text{für } D\subset M\subset R_n.$$

Ist also D eine Teilmenge von M, so ist das Maximum von cx über D immer kleiner oder gleich dem Maximum über M.
Mit anderen Worten, der Zielfunktionswert der Lösung zur Aufgabe (1)-(3) ist eine obere Schranke für den Wert der Lösung der Aufgabe (1)-(4).
Verzweigen wir den zulässigen Bereich M in Teilmengen

$$M_1^k,\ldots,M_{r(k)}^k, \text{ so daß}$$

$$D\subset \bigcup_{i=1}^{r(k)} M_i^k \subset M, \text{ so gilt}$$

$$\max_{x\in D} cx \leq \max_{1\leq i\leq r(k)} \max_{x\in M_i^k} cx \leq \max_{x\in M} cx.$$

Verzweigt man den zulässigen Bereich M so in Teilmengen, daß $\bigcup_{i=1}^{r(k)} M_i^k$ eine echte Teilmenge von M ist, so kommt man schrittweise dem $\max_{x\in M} cx$ näher. Es ist also in jedem Schritt die Schranke $\max_{x\in D} cx = \gamma(M_i^k)$ zu berechnen, eine Aufgabe (1)-(3) über M_i^k. Danach wähle man die Menge $M_{i_o}^k$ mit dem maximalen Schrankenwert $\gamma(M_{i_o}^k)$ aus, in der Hoffnung, daß in dieser Teilmenge $M_{i_o}^k$ von M die Lösung der Aufgabe (1)-(4) liegt.
Das Branch- (Verzweigungs-) und Bound- (Schranken-) Verfahren läuft also folgendermaßen ab.

1. Bestimme $\gamma(M) = \max_{x\in M} cx = c\overset{o}{x}$.
   Ist $\overset{o}{x}\in D$, so ist die Lösung der Aufgabe (1)-(4) bestimmt, sonst gehe zu 2. über.
2. $\overset{o}{x}$ besitzt eine nicht ganzzahlige Komponente $\overset{o}{x}_{i_o}$.
   Wir verzweigen M_j^k (für k=0, j=0, M_o^o=M), mit $\overset{o}{x}\in M_j^k$ in

$$M_{j,1}^k = \left\{ x\in M_j^k : x_{i_o} \geq \left[x_{i_o}\right] + 1 \right.$$

$$M_{j,2}^k = \left\{ x\in M_j^k : x_{i_o} \leq \left[x_{i_o}\right] \right\},$$

   wobei mit $[\alpha]$ die größte ganze Zahl kleiner α bezeichnet sei.

3. Wir bestimmen $\gamma(M^k_{j,1}) = \max\limits_{x \in M^k_{j,1}} cx = c\overset{o}{x}(M^k_{j,1})$

$\gamma(M^k_{j,2}) = \max\limits_{x \in M^k_{j,2}} cx = c\overset{o}{x}(M^k_{j,2})$

4. Wir ordnen die Mengen $M^k_1, \ldots, M^k_{j-1}, M^k_{j+1}, \ldots, M^k_{r(k)}, M^k_{j,1}, M^k_{j,2}$ neu um in $M^{k+1}_1, \ldots, M^{k+1}_{r(k+1)}$.

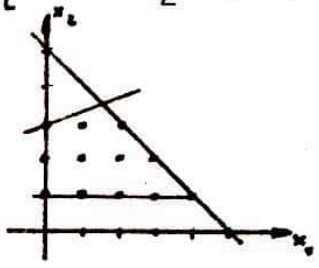
5. Wir bestimmen M^{k+1}_j mit $\gamma(M^{k+1}_i) = \max\limits_i \gamma(M^{k+1}_i)$ und $\overset{o}{x}(M^{k+1}_j)$, setzen k:=k+1.
Ist $\overset{o}{x}(M^{k+1}_k)$ ganzzahlig, so ist die Lösung der Aufgabe (1)-(4) erreicht, ansonsten gehen wir über zu 2.

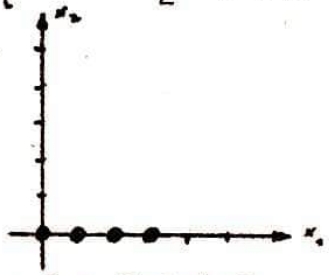
Die Branch-and-Bound-Verfahren der linearen Optimierungsaufgabe (1)-(4) unterscheiden sich in unterschiedlichen Verzweigungsarten. Wir wollen unser Beispiel (siehe Titelblatt(a)) betrachten

$\gamma(M) = c\overset{o}{x} = 9{,}4; \quad \overset{o}{x} = (4{,}4;0{,}6)$

1. $\overset{o}{x}$ ist nicht ganzzahlig; $\overset{o}{x}_2$ ist eine nichtganzzahlige Komponente.

2. $M^1_1 = \{x \in M: x_2 \geq [0{,}6]+1=1\}$, $M^1_2 = \{x \in M: x_2 \leq [0{,}6] = 0\}$.





3. $\gamma(M^1_1) = 9 = 2 \cdot 4+1 \cdot 1 = c\overset{o}{x}(M^1_1)$
$\overset{o}{x}(M^1_1)=(4,1)$

$\gamma(M^1_2) = 8 = 2 \cdot 4+1 \cdot 0 = c\overset{o}{x}(M^1_2)$
$\overset{o}{x}(M^1_2)=(4,0)$.

4. M^1_1, M^1_2 sind die Teilmengen von M mit $M^1_1 \cup M^1_2 \subset M$.

5. $\gamma(M^1_1) > \gamma(M^1_2)$, $\overset{o}{x}(M^1_1)$ ist ganzzahlig.

Somit ist die Lösung der Aufgabe (1)-(4) bestimmt.

Ein Vorteil der Branch-and-Bound-Verfahren ist hier noch zu nennen.
Ist eine erste ganzzahlige Lösung $\bar{x} \in D$ bekannt, so ist mit

$$c\bar{x} \leq \max_{x \in D} cx \leq \max_i \gamma(M^k_i)$$

immer eine Abschätzung möglich, wie weit wir noch von der Lösung der Aufgabe (1)-(4) entfernt sind. Für viele praktische Aufgaben ist das von großem Nutzen, da eine "schnellere", aber etwas "ungenauere" Lösung oft einen höheren Nutzen erbringen kann als zu "späte", aber genaue.

Schwierigkeiten treten bei praktischen Aufgaben folgender Art auf:

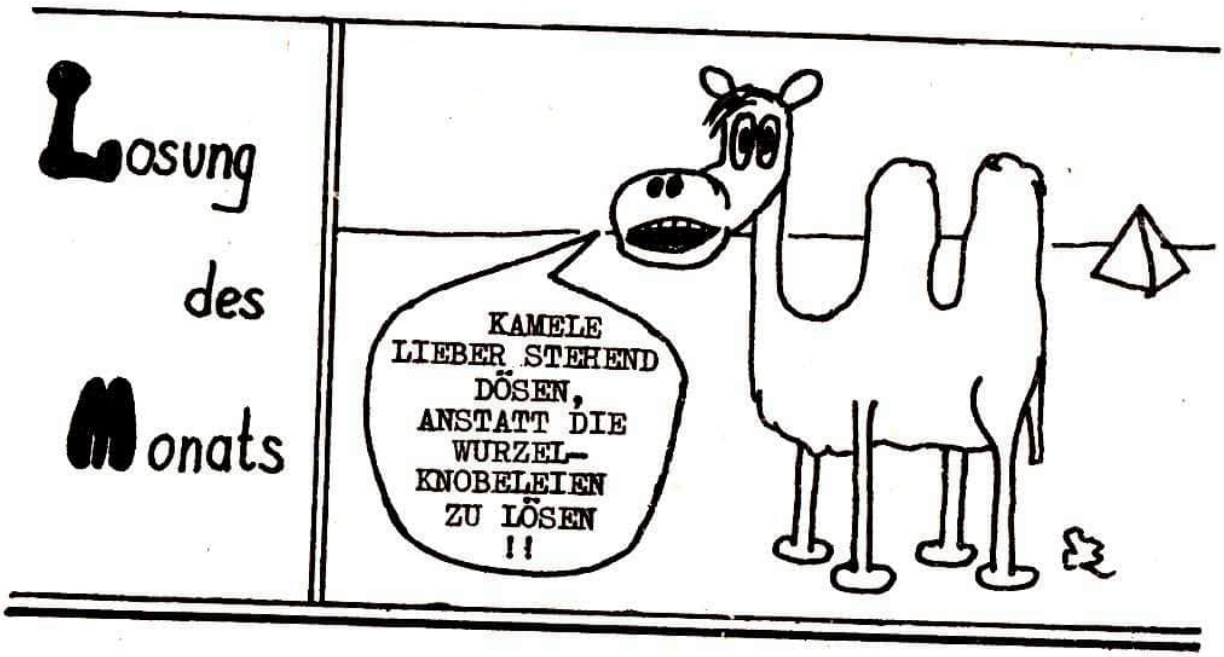
- Der Speicherplatzbedarf kann sehr hoch werden, da die verzweigten Mengen, ihre Schrankenwerte, ihre Lösungen zu speichern sind.
- Eine große Anzahl von Optimierungsaufgaben (1)-(3) sind zu lösen.

Daher sind praktische Probleme in etwa den gleichen Dimensionen wie bei den Schnittverfahren erreicht worden.

Branch-and-Bound-Verfahren können noch **verbessert** werden, indem Tests eingeführt werden, die Mengen M_i^k aus der entsprechenden Liste gestrichen werden, wenn in ihnen die optimale Lösung nicht liegen kann.

Das Prinzip der Branch-and-Bound-Verfahren, die Verzweigung und Schrankenbildung ist auch auf andere diskrete Optimierungsprobleme mit großem Erfolg angewendet worden.

Dr. E. Girlich
Bereich Numerik/Optimierung



Preisaufgaben

M 7 (1)

Man finde alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 + u^2 = 1$$
$$x^3 + y^3 + u^3 = 1$$

M 8 (1)

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_k$ natürliche Zahlen. Man beweise, daß $(a_1^2+1)(a_2^2+1), \ldots, (a_k^2+1)$ immer als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellbar ist.

M 9 (1)

Für welche ganzen Zahlen a,b,c gilt die Ungleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c?$$

M 10 (1)

Man beweise die Ungleichung

$$(1 + \frac{1}{\sin\alpha})(1 + \frac{1}{\cos\alpha}) > 5 ,$$

wenn α ein spitzer Winkel ist!

M 11 (2)

In der Ebene seien die Punkte A, B und C gegeben. Man konstruiere drei Kreise K_1, K_2 und K_3 so, daß sich die Kreise K_1 und K_2 im Punkt A berühren, die Kreise K_3 und K_1 im Punkt B und die Kreise K_1 und K_2 im Punkt C.

M 12 (1)

Круг радиуса r покрывают кругами радиуса $\frac{r}{2}$.
Какое наименьшее число кругов требуется для этого?

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.
Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 15. 5. 1980

Aufgabe L 43

Wir setzen $d_n = a_n - a_{n-1}$. Dann gilt $d_n = d_{n-1} + 1$ und folglich auch $d_n = d_2 + (n-2)$. Damit ist

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_2 - a_1) + a_1 =$$

$$= d_n + d_{n-1} + \ldots + d_2 + a_1 =$$

$$= (n-1)d_2 + (n-2) + (n-3) + \ldots + 1 + a_1 =$$

$$= (n-1)(a_2 - a_1) + a_1 + \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$= (n-1)a_2 - (n-2)a_1 + \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Aufgabe L 44

Wir setzen $\sqrt{x} = u \geq 0$ und $\sqrt{y} = v \geq 0$. (1)

Dann nimmt das System die folgende Form an:

$$u^3 - v^3 = a(u-v)$$

$$u^4 + u^2v^2 + v^4 = b^2. \quad (2)$$

Dieses System zerfällt in zwei Systeme

$$u - v = 0 \qquad u^2+uv+v^2 = a$$

$$u^4+u^2v^2+v^4 = b^2 \quad (2') \text{ und } \quad u^4+u^2v^2+v^4 = b^4 \quad (2'')$$

Löst man System (2'), so ergibt sich $3u^4 = b^2$ und wegen (1):

$$u = v = \frac{\sqrt{b}\ \sqrt[4]{27}}{3} \quad (3)$$

Wir schreiben System (2") um:

$$u^2 + v^2 = a - uv$$

$$(u^2+v^2)^2 = b^2 + u^2v^2.$$

Man erhält

$$uv = \frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$u^2+v^2 = \frac{a^2+b^2}{2a} \quad (4)$$

Man kann leicht zeigen, daß die Systeme (4) und (2") gleichwertig sind.

Aus (4) erhalten wir:

$$(u+v)^2 = \frac{3a^2-b^2}{2a}$$

$$(u-v)^2 = \frac{3b^2-a^2}{2a} \quad (5)$$

Aus (1) folgt, daß die rechte Seite der ersten Gleichung des Systems (4) nichtnegativ ist. Die rechte Seite der zweiten Gleichung des Systems (5) muß ebenfalls nichtnegativ sein.

Wir setzen deshalb $3b^2 \geq a^2 \geq b^2$ (6)

voraus. Andernfalls hat das System (5) und mit ihm auch das System (2") keine Lösung, die die Bedingung (1) erfüllt.

Löst man System (5), so erhält man:

$$u+v = \sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}} \qquad u-v = \pm\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}$$

Daraus folgt dann

$$u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}} \pm \sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right)$$

$$v = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}} \mp \sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right).$$

Man sieht leicht, daß beide Paare (x,y) aus nichtnegativen Zahlen bestehen, denn wegen (6) gilt $a^2 \geq b^2$ und damit $3a^2 - b^2 \geq 3b^2 - a^2$.

Ist Bedingung (6) erfüllt, so hat das System 3 Lösungen:

$$x_1 = b\sqrt{3}/3 \quad ; \quad y_1 = b\sqrt{3}/3$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}} + \sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right)^2; \quad y_2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}} - \sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right)^2$$

$$x_3 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}} - \sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right)^2; \quad y_3 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}} + \sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right)^2$$

Ist (6) nicht erfüllt, so hat das System nur die Lösung (x_1,y_1).

Aufgabe L 45

Für $x = k\pi$ hat die Gleichung keinen Sinn. (0)

Für $x \neq k\pi$ erhält man

$\cos^3 x + \cos^2 x = \sin^3 x + \sin^2 x$

und nach äquivalenter Umformung:

$(\cos x - \sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x + \sin x + \cos x) = 0.$

1. Fall: $\sin x = \cos x$

   Man erhält: $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (1)

2. Fall: $\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x + \sin x + \cos x = 0$ (2)

Setzt man $\sin x + \cos x = t$, so erhält man:

$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$,

woraus $\sin x \cos x = \frac{t^2-1}{2}$ folgt. Damit ergibt sich (2) als

$1 + \frac{t^2-1}{2} + t = 0$, woraus $t = -1$ folgt. (3)

Wir erhalten $\sin x + \cos x = -1$, oder

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x$$
$$= \sin(x + \tfrac{\pi}{4}),$$

woraus $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi$ (4)

und $x_3 = (2m + 1)\pi$ (5)

folgt.

Die x_3 entfallen wegen (0) als Lösungen.

Damit liefern die Formeln (1) und (4) die Lösungen der Gleichung.

Aufgabe L 46

Wir setzen $\frac{1+i}{2} = z$.

Sei P das gesuchte Produkt. Dann ist

$P = (1+z)(1+z^2)(1+z^{2^2})\ldots(1+z^{2^n}) =$

$$= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} z^k = \frac{z^{2^{n+1}}-1}{z-1} .$$

Weiter ist

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{\frac{1+i}{2}-1} = \frac{2}{i-1} = \frac{2(i+1)}{(i-1)(i+1)} = -1-i$$

und

$$z^{2^{n+1}}-1 = \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^{n+1}} - 1 = \left[\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right]^{2^n} - 1 = \left(\frac{i}{2}\right)^{2^n} - 1.$$

Für $n \geq 2$ ist

$$i^{2^n} = (i^4)^{2^{n-2}} = 1, \text{ somit } z^{2^{n+1}}-1 = \frac{1}{2^{2^n}} - 1$$

und $P = (i+1)\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right)$.

Für n=1 ist

$$z^{2^{n+1}} - 1 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{5}{4}$$

und somit $P = (1+i)\frac{5}{4}$.

Aufgabe L 47

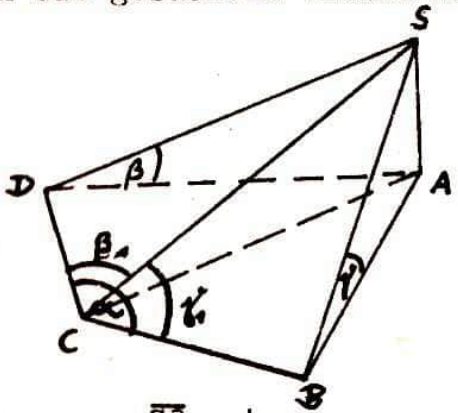
Wir setzen $\lg_2 x = y$ und erhalten $\lg_x 2 = \frac{1}{\lg_2 x} = \frac{1}{y}$.
Die zu untersuchende Ungleichung ist damit

$$y + \frac{1}{y} + 2\cos a \leq 0. \qquad (1)$$

Die Zahl $z = y + \frac{1}{y}$ hat dasselbe Vorzeichen wie y und es gilt $|z| \geq 2$ für alle y.
Für $z > 0$ ist die Ungleichung $z \leq -2\cos a$ nur für $z=2$ $(y=1)$ und $\cos a = -1$ erfüllt, d. h. für $x=2$ und $a=(2k+1)\pi$.
Für $z < 0$, d. h. $y < 0$ ist $z \leq -2$ und die Ungleichung (1) für alle a erfüllt.
Das bedeutet, daß die gegebene Ungleichung für $0 < x < 1$ für alle reellen a erfüllt ist.

Aufgabe L 48

Aus einem Punkt S der Kante des Dreiflachs, die kein Schenkel des Winkels α ist, S sei verschieden von der Spitze C, fällen wir die Lote $\overline{SB}$ und $\overline{SD}$ auf die Schenkel des Winkels α und das Lot $\overline{SA}$ auf die entsprechende Fläche. Wir bezeichnen die gesuchten Winkel mit β_1 und γ_1.



$\sphericalangle SCB = \gamma_1$,
$\sphericalangle SCD = \beta_1$
Sei weiter
$\sphericalangle ACB = \alpha'$ und
$\sphericalangle ACD = \alpha''$.
Wir setzen $\overline{CA} = a$. Aus den rechtwinkligen Dreiecken $\triangle CBA$, $\triangle SBA$ und $\triangle SBC$ folgt dann:

$$\tan\gamma_1 = \frac{\overline{SB}}{\overline{CB}} = \frac{\tan\alpha}{\cos\gamma}.$$

Analog gilt: $\tan\beta_1 = \frac{\tan\alpha''}{\cos\beta}$.
Weiter gilt $\alpha = \alpha' + \alpha''$. (1)
Da sowohl $\overline{SA} = a\sin\alpha'\tan\gamma$ als auch
$\overline{SA} = a\sin\alpha''\tan\beta$ gilt, folgt die Gleichung
$\sin\alpha' = \sin\alpha''\tan\beta\cot\gamma$.
Mit (1) folgt:

$$\sin\alpha' = \sin(\alpha - \alpha')\tan\beta\cot\gamma =$$
$$= \sin\alpha\cos\alpha' - \cos\alpha\sin\alpha'\tan\beta\cot\gamma. \qquad (2)$$

Durch Umstellen von (2) erhält man:

$$\tan \alpha' = \frac{\sin \alpha'}{\cos \alpha'} = \frac{\sin \alpha \tan \beta \cot \gamma}{1+\cos \alpha \tan \beta \cot \gamma} .$$

Durch Vertauschen von β und γ erhält man weiterhin:

$$\tan \alpha'' = \frac{\sin \alpha \tan \gamma \cot \beta}{1+\cos \alpha \tan \gamma \cot \beta} .$$

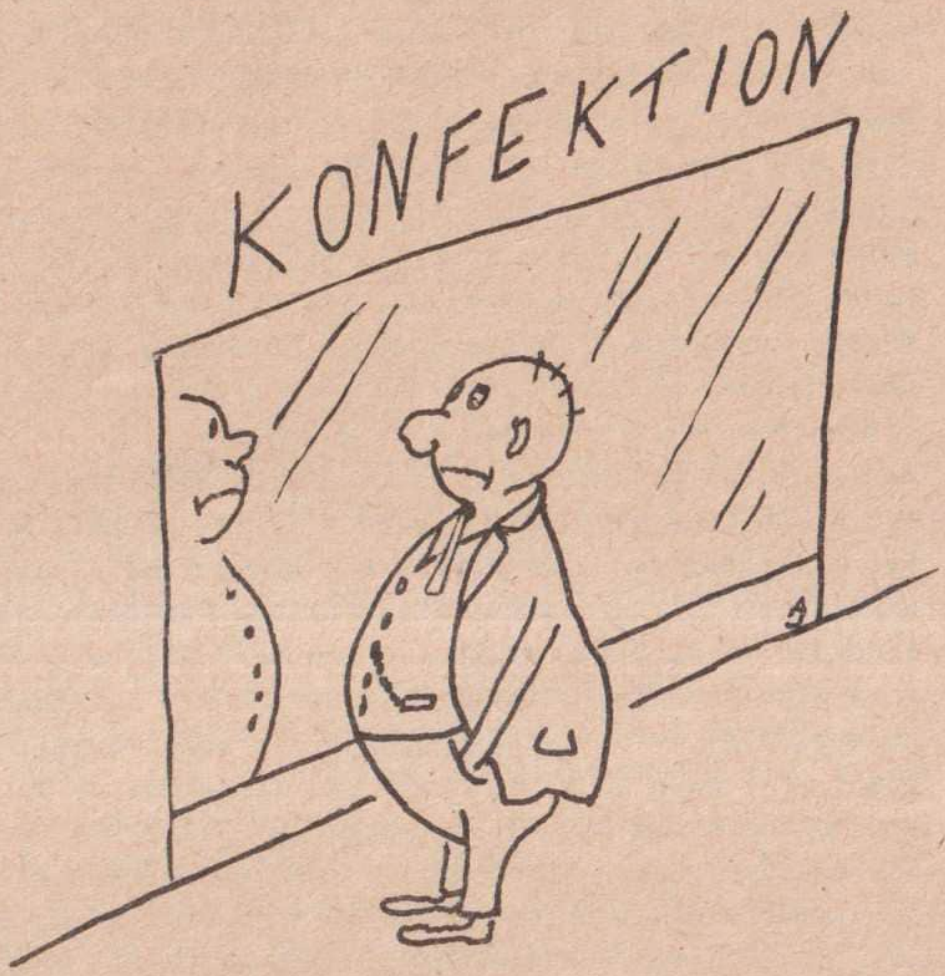
Als Lösung erhalten wir also:

$$\tan \gamma_1 = \frac{\sin \alpha \tan \beta}{\sin \gamma (1+\cos \alpha \tan \beta \cot \gamma)}$$

$$\tan \beta_1 = \frac{\sin \alpha \tan \gamma}{\sin \beta (1+\cos \alpha \tan \gamma \cot \beta)} .$$

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Jörg Vogel
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, A. Jeschag, I. Kaiser, A. Kleinwächter, M. Lutz, D. Meinhardt, G. Müller, F. Pegenau, H. Schwulow
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 9. Januar 1980



„..." (siehe Seite 38)

3
80

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Zufällige Ereignisse und Zufallsgrößen

Bei den in der Natur und Technik auftretenden Erscheinungen unterscheidet man solche Erscheinungen, die bei bestimmten Bedingungen mit Sicherheit auftreten von denen, die unter bestimmten Bedingungen auftreten können, aber nicht auftreten müssen, deren Eintreten also mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist. Solche Ereignisse oder Erscheinungen werden als zufällig bezeichnet. Typische Beispiele für zufällige Ereignisse sind etwa die Ergebnisse beim Würfeln.

Zufälligkeit der Ereignisse bedeutet nun nicht das Fehlen von Gesetzmäßigkeiten. Betrachten wir ein Beispiel. Wir werfen eine Münze mehrmals und merken uns, wie oft die Zahl oben lag. Bei n Würfen bezeichne h_n diese Anzahl. Es stellt sich nun heraus, daß der Quotient $\frac{h_n}{n}$, der natürlich immer zwischen 0 und 1 liegt, mit wachsendem n sich dem Wert $\frac{1}{2}$ nähert.

Der Quotient $\frac{h_n}{n}$ ist die relative Häufigkeit des Auftretens des betrachteten Ereignisses. Solch eine Eigenschaft wie im obigen Beispiel besitzen alle zufälligen Ereignisse A. Ihre relative Häufigkeit bei mehrfacher Wiederholung ein und desselben Versuches nähert sich für große n einem Wert P(A) zwischen 0 und 1. P(A) wird als die Wahrscheinlichkeit von A bezeichnet. Der Zahlenwert P(A) erfaßt also den Grad der Zufälligkeit quantitativ. Liegt P(A) nahe an 1, so tritt bei Wiederholung des Versuches A sehr oft ein und umgekehrt erscheint, falls P(A) nahe an 0 liegt, das Ereignis A bei Wiederholung des Versuches fast nie.

Bei praktischen Problemen spielen nun meist nicht nur ein Ereignis, sondern mehrere Ereignisse eine Rolle. In vielen Fällen bestehen diese Ereignisse darin, daß im Ergebnis des Versuches eine bestimmte Zahl erscheint. In diesen Fällen sagen wir, daß der zufällige Vorgang durch eine Zufallsgröße beschrieben wird. Wir betrachten hier nur ganzzahlige, nichtnegative Zufallsgrößen. Das wahrscheinlichkeitstheoretische Verhalten solch einer Zufallsgröße wird vollständig durch die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß ein bestimmter Wert k angenommen wird, erfaßt. Diese Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir durch p_k, k=0,1,2,... . Die Zahlen p_k liegen dann zwischen 0 und 1 und es gilt

(1) $$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Die letzte Beziehung gilt auf Grund der Additivitätseigenschaft der Wahrscheinlichkeit. Wir wollen uns diese Beziehung durch ein Beispiel verdeutlichen.

Beispiel. Wir betrachten den Versuch, der im Werfen eines Würfels besteht. Dann kann die zugehörige Zufallsgröße nur die Werte 1,2,3,4,5,6 annehmen. Wiederholen wir diesen Versuch n mal und bezeichnen durch $\frac{h_n(i)}{n}$ die relative Häufigkeit des Auftretens der Zahl i, so gilt natürlich

$$\frac{h_n(1)}{n} + \ldots + \frac{h_n(6)}{n} = \frac{1}{n}\,(h_n(1) + \ldots + h_n(6)) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

für alle n. Da die relativen Häufigkeiten gegen die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten streben, erhalten wir

$$p_1 + \ldots + p_6 = 1.$$

Ist nun wie üblich der Würfel vollkommen symmetrisch, so gilt $p_1 = p_2 = \ldots = p_6$ und damit $p_i = \frac{1}{6}$, $i=1,\ldots,6$.

Zur Beschreibung der ganzzahligen nichtnegativen Zufallsgrößen benötigt man so viele Zahlen p_i (Wahrscheinlichkeiten), wie der Umfang der möglichen Werte ist. Im obigen Beispiel sind 6 verschiedene Werte möglich. Unter Umständen benötigt man unendliche viele p_i.

Beispiel. Betrachtet wird folgender Versuchsablauf. Wir gehen von einem Versuch mit zwei möglichen Versuchsausgängen A,B aus. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß A auftritt, sei p, $0 < p < 1$, und entsprechend $(1-p)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß B auftritt. Wir wiederholen diesen Versuch immer wieder. Wir numerieren die Versuche beginnend mit 0. Als Zufallsgröße betrachten wir jetzt die Nummer desjenigen Versuches, bei dem das erste Mal B auftritt. Deutet man das Ereignis A als Erfolg und B als Mißerfolg, so nimmt die betrachtete Zufallsgröße genau dann den Wert k an, wenn nach k Erfolgen der erste Mißerfolg auftritt. Es läßt sich nun zeigen, daß für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_k gilt

$$p_k = (1-p)\,p^k, \quad k=0,1,\ldots \tag{2}$$

Diese Zahlen genügen der Bedingung (1), denn nach der Formel für die geometrische Reihe gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p} \quad \text{und somit} \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Eine Zufallsgröße, für die die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_k die Gestalt (2) haben, heißt geometrisch verteilt.

Wir wollen jetzt Kenngrößen einführen, die zwar eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_0, p_1, \ldots$ nicht vollständig charakterisieren, aber trotzdem einen gewissen Einblick in die Struktur dieser Verteilung liefern.

Definition. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k < \infty$. Dann heißt

$$m \underset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k$$

der Erwartungswert der Zufallsgröße mit der Verteilung $p_0, p_1, \ldots$

Der Erwartungswert ist ein Zahlenwert, um den herum die bei Versuchswiederholung erhaltenen Werte schwanken. Wiederholt man ein und denselben Versuch und bildet man das arithmetische Mittel aus den erhaltenen Versuchsergebnissen, so streben diese Mittelwerte für $n \to \infty$ gegen m. Der Erwartungswert ist also derjenige Zahlenwert, der bei großer Versuchsanzahl im Mittel zu erwarten ist.

Wie stark die Zufallsgröße um den Erwartungswert schwankt, wird durch die Varianz erfaßt.

Definition. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} k^2\, p_k < \infty$. Dann heißt

$$\sigma^2 \underset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (k-m)^2\, p_k$$

die Varianz der Zufallsgröße mit der Verteilung $p_0, p_1, \ldots$

Bemerkung. Falls $\sum_{k=0}^{\infty} k^2\, p_k < \infty$ gilt, so ist natürlich auch $\sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k < \infty$ und damit die Größe m definiert. Außerdem gilt wegen (1)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} (k-m)^2\, p_k &= \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - 2mk + m^2)\, p_k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, p_k - 2m \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k + m^2 \sum_{k=0}^{\infty} p_k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, p_k - 2m^2 + m^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, p_k - m^2 \quad .
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert läßt sich auch als derjenige Zahlenwert charakterisieren, von dem die Zufallsgröße im quadratischen Mittel am wenigsten abweicht.

Satz. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k < \infty$ und $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k-x)^2 p_k$, dann gilt $\varphi(x) \geq \varphi(m) = \sigma^2$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k-x)^2 p_k = \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - 2kx + x^2) p_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - 2x \sum_{k=0}^{\infty} k p_k + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} p_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - 2xm + x^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - m^2 + (m^2 - 2mx + x^2) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k-m)^2 p_k + (m-x)^2 = \varphi(m) + (m-x)^2.\end{aligned}$$

Wir wollen jetzt den Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsgröße berechnen. In diesem Falle gilt nach der Definition des Erwartungswertes

$$\begin{aligned}m &= \sum_{k=0}^{\infty} k (1-p) p^k = (1-p) \sum_{k=0}^{\infty} k p^k \\ &= (1-p)(p+2p^2+3p^3+\ldots) = p(1-p)(1+2p+3p^2+\ldots).\end{aligned}$$

Zur Berechnung der rechts stehenden Reihe gehen wir von der Identität

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad 0 < x < 1$$

aus. Differenzieren wir rechts und links nach x, so folgt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

Damit gilt $m = p(1-p)\frac{1}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p}$.

Diese Formel läßt sich für unser Beispiel anschaulich deuten. Ist p sehr klein, also nahe bei 0, so tritt A sehr selten und B sehr oft auf. Deshalb wird auch die Zeit, die im Mittel bis zum ersten Erscheinen von B vergeht, also der Erwartungswert der betrachteten Zufallsgröße, sehr klein sein. Analog ist m sehr groß, wenn p nahe bei 1 liegt, weil dann sehr oft A und nur selten B erscheint.

Doz. Dr. F. Liese
Bereich WMS

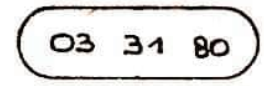
Unser Beitrag zur Rationalisierung: Sparwitze

Wahrscheinlichkeitsrechnung im Alltag:

A: Was soll denn das Loch in der Fliegenklatsche?
B: Eine letzte Chance für die Fliege.

Häschen im Uhrladen:

Häschen: Hat Du dünne Berguhren?
Verkäufer: Nein, nur Digitaluhren.

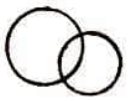


Der Ausdauerlauf

Wurzelmin und Wurzelmax wollen einen Ausdauerlauf über 100 km machen. Nach 99 km sagt Wurzelmin mit letzter Kraft: "Ich schaff es doch nicht! Ich laufe lieber wieder zurück."

Heiratsannonce

Mathematiker sucht dringend Frau mit Taschenrechner. Netzteil erwünscht, nicht Bedingung. Bitte nur ernstgemeinte Zuschriften mit Bild vom Rechner.



Anatomisches Wunder:

Ein Reicher hat zwei Arme. Zwei Arme haben aber vier Beine. Also hat ein Reicher vier Beine.

Noch ein Häschen-Witz

In Erfurt auf dem Domplatz sitzt ein Maler und malt Dom und Severikirche. Kommt Häschen vorbei und sagt: "Na, hat Du wohl auch Film für Fotoapparat vergessen?"

Kein Häschen-Witz

Ein sehr dicker Mann (180 kg) stand sehnsüchtig vor dem Schaufenster eines Herrenkonfektionsgeschäftes. Er seufzte: "Das einzige, was mir von den Sachen hier noch paßt, sind die Taschentücher."

Mathematik und Erkenntnistheorie (III)

Aufgaben und Methoden des Mathematikers; Theorie und Praxis

Die Aufgabe des Mathematikers in der Industrie besteht meist in der Anpassung und Anwendung bekannter mathematischer Methoden auf die anstehenden Probleme. Dabei muß er stets durch geeignete Abstraktionen und Begriffsbildungen und Herauskristallisieren der in der Aufgabenstellung als typisch erscheinenden Struktureigenschaften zu einem mathematischen Modell gelangen. Diese Phase der Arbeit ist sehr stark von empirischen Elementen durchsetzt, und der Mathematiker kann sie oft nur in enger Zusammenarbeit mit den Fachleuten für das anstehende Problem - Technikern, Ingenieuren, Naturwissenschaftlern oder Ökonomen - bewältigen. Die Effektivität des Einsatzes der Mathematik wird wesentlich bestimmt von der Güte dieser Zusammenarbeit und von der Aufgeschlossenheit der Fachleute für die Anwendung der Mathematik.

Liegt das mathematische Modell fest, so bewegt sich die weitere Arbeit und Forschung innerhalb mathematischer Theorien. Aber auch dabei verzichtet der Mathematiker nicht auf die Beziehung zur Praxis und auf empirische Elemente. Bei der Entscheidung, in welche Richtung und in welcher Art innerhalb einer Theorie geforscht werden soll, greift er stets auf Erfahrungen zurück, die er bei der Arbeit mit anderen Theorien und deren Anwendung gemacht hat. Man spricht hier von mathematischer Intuition. Auch darin kommt wieder der gesellschaftliche Charakter der menschlichen Erkenntnis zum Ausdruck. Bei der Forschung innerhalb einer mathematischen Theorie ist es "nicht mehr notwendig das einzelne Individuum, das erfahren haben muß, seine Einzelerfahrung kann bis auf einen gewissen Grad ersetzt werden durch die Resultate der Erfahrungen einer Reihe seiner Vorfahren. Wenn bei uns z.B. die mathematischen Axiome (und die logischen Schlußregeln - G.L.) jedem Kinde von acht Jahren als selbstverständlich, keines Erfahrungsbeweises bedürftig erscheinen, so ist das lediglich Resultat 'gehäufter Vererbung'." (F.ENGELS: Dialektik der Natur. In: Marx/Engels, Werke Band 20, S. 529.)

Die Sätze und Aussagen einer mathematischen Theorie müssen sich in streng logischer Weise aus gewissen Axiomen herleiten lassen.

Die mathematische Logik stellt dabei eine besonders reine, idealisierte Form des rationalen Denkens dar. Die Wahrheit in der Mathematik bedeutet demzufolge nichts anderes als logische Widerspruchsfreiheit relativ in bezug auf die benutzten Axiome und logischen Schlußregeln, also in einem ganz bestimmten Gebiet. Da man jedoch nur solche logischen Schlußregeln benutzt, die sich unzählige Male in der gesellschaftlichen Praxis als berechtigt erwiesen haben und sich ständig weiter in der Praxis bewähren, wird klar, daß die Methoden der Mathematik nicht dem Wahrheitskriterium der marxistisch-leninistischen Erkenntnistheorie widersprechen, sondern dieses geradezu voraussetzen. Das Wahrheitskriterium Praxis dient in der Mathematik nicht mehr zur Überprüfung einzelner Aussagen - das erfolgt mit sozusagen innermathematischen Kriterien -, sondern zur Rechtfertigung ihrer gesamten Methoden. Daß sich gewisse Resultate auch an Spezialfällen innerhalb der Theorie oder an praktischen Beispielen überprüfen lassen oder sogar ermittelbare Anwendung in der Praxis haben, wie z. B. die Aussagenlogik bei der Entwicklung elektrischer Schaltungen und die Algorithmentheorie in der Computertechnik, liefert jeweils eine weitere Bestätigung für die Richtigkeit der verwendeten Schlußregeln, kann jedoch selbst nicht als Beweis der Allgemeingültigkeit dieser Resultate anerkannt werden.

Aus den Aufgaben des Mathematikers in der Praxis ergeben sich oft auch Rückwirkungen auf die Grundlagenforschung. Wird nämlich erkannt, daß die mit vorhandenen Verfahren bearbeitbare Modellvorstellung den untersuchten realen Prozeß nicht hinreichend genau beschreibt, dann ergeben sich Anregungen für die Richtung, in der Grundlagenuntersuchungen in mathematischen Disziplinen weitergeführt werden müssen. Dies kann sogar zum Teil so weit gehen, daß völlig neue, bisher nicht bekannte Theorien aufgebaut werden. Umgekehrt wird auch "die Verstärkung der mathematischen Grundlagenforschung ... zu der dringend erforderlichen verstärkten Umsetzung mathematischer Erkenntnisse in der Volkswirtschaft und anderen Bereichen beitragen", wie Kurt Hager auf der 13. Tagung des Zentralkomitees der SED 1974 ausführte. (K. HAGER: Hohe Verantwortung der Wissenschaftler. Diskussionsbeitrag auf

der 13. Tagung des ZK der SED, Berliner Zeitung, 15. 12. 1974.) Er stellte deshalb die weitere Profilierung der Mathematik als eine wichtige Aufgabe dar.

Ein klassisches Beispiel dafür, wie die mathematische Forschung von der Praxis zur abstrakten Theorie und von dieser zurück zur Praxis gelangt, ist die Differentialrechnung. Sie entstand aus den Newtonschen Untersuchungen von mechanischen Bewegungen in der objektiven Realität. Nachdem sie eine längere eigenständige Entwicklung innerhalb der Mathematik durchmachte, ist sie aus den heutigen Anwendungen der Mathematik nicht mehr wegzudenken. "Die Differentialrechnung macht es der Naturwissenschaft erst möglich, Prozesse, nicht nur Zustände mathematisch darzustellen". (F. ENGELS: Dialektik der Natur. In: Marx/Engels, Werke Band 20, S. 534.)

Die gesamte Analysis hat ihren Ursprung in der Erforschung funktionaler Beziehungen, die man in der Natur beobachtete. Ihre Leistungen bei der Produktion hochwertiger materieller Güter sind heute nicht mehr zu übersehen. Funktionalanalytische Probleme treten z. B. bei der Untersuchung von Schwingungen und anderen Bewegungsvorgängen an Maschinen, Flugkörpern, Fahrzeugen und Antriebsaggregaten auf. Weiter liegen sie vor bei der Erforschung von Elastizitäts- und Plastizitätseigenschaften der verschiedensten Werkstoffe, von Temperaturvorgängen und Wärmespannungen, bei Fragen der Elektrotechnik-Elektronik, der Optik, des Gerätebaus und bei vielen anderen für die Produktion materieller Güter entscheidenden Erscheinungen.

Ein weiteres Beispiel stellt die Mathematische Kybernetik dar, deren Entstehung nicht losgelöst von dem Gesamtgebiet der Kybernetik als Wissenschaft von den allgemeinen Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten komplexer Systeme und Informationsprozesse betrachtet werden kann. Sie begann mit der Entdeckung der Existenz von Gesetzmäßigkeiten, die sowohl im menschlichen und tierischen Organismus als auch in Maschinen und Automaten gleichermaßen gültig sind. Im Rahmen ihrer Entwicklung entstanden solche abstrakten mathematischen Theorien wie z. B. Automatentheorie, Algorithmentheorie u. a. Gerade gewisse Ergebnisse dieser Theorien wirkten sehr befruchtend auf die Entwicklung elektronischer Rechentautomaten, die heute eine hervorragende Rolle in der Auto-

matisierungstechnik, bei der numerischen Steuerung von Werkzeugmaschinen, bei der Erforschung des Weltraums, bei der Datenerfassung und -verarbeitung von Massenerscheinungen u.a.m. spielen. Die Anwendung von Kybernetik, Operationsforschung und elektronischer Datenverarbeitung ist eine notwendige Voraussetzung für die Erfüllung der neuen und höheren Anforderungen an die Leitung gesellschaftlicher und ökonomischer Systeme und Prozesse, die die Gestaltung der entwickelten sozialistischen Gesellschaft und die wissenschaftlich-technische Revolution in unserer Epoche stellen. Darüber hinaus geben die Anwendungen der Elektronenrechner ständig neue Impulse für die Weiterentwicklung der numerischen Mathematik, Automatentheorie, Algorithmentheorie und anderer mathematischer Disziplinen.

Auf eine besondere philosophische Bedeutung des Grundbegriffes der Algorithmentheorie sei in diesem Zusammenhang noch kurz eingegangen. Unter einem Algorithmus versteht man ein eindeutig bestimmtes Verfahren zur Lösung bestimmter Klassen von Aufgaben, wobei jeder einzelne Schritt dieses Verfahrens genau definiert ist. Dabei wird angenommen, daß eine beliebig große, jedoch endliche Anzahl von Schritten stets vollzogen werden kann (hier liegt wieder die Abstraktion der potentiellen Unendlichkeit zugrunde). Auch dieser Begriff ist aus der Praxis abstrahiert worden. Eine jede Maschine, angefangen von den einfachsten mechanischen Vorrichtungen im Mittelalter, verkörpert in ihrer Tätigkeit einen Algorithmus. Umgekehrt ist jede Tätigkeit, die algorithmisch beschrieben werden kann, schematische Arbeit und kann im Prinzip einer Maschine übertragen werden. Die Algorithmentheorie vermag also die philosophisch wichtige Frage nach dem Unterschied zwischen schöpferischer und schematischer Arbeit klären zu helfen. Da sich ein großer Teil der Produktion und der Verwaltung, sowie gewisse Teile der Leitungstätigkeit algorithmieren lassen, besteht die Möglichkeit, die Menschen von derartigen schematischen Tätigkeiten für nichtschematische und schöpferische Arbeiten freizustellen.

Dr. G. Lischke
Bereich Mathematische Kybernetik
und Rechentechnik

Dr. B. Goetze
Akademie der Wissenschaften Berlin

Preisaufgaben

M 13 Man beweise die folgende Gleichung

(1)

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}\,.$$

M 14 Für welche natürlichen Zahlen m ist das Produkt

(1)

$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(m-1)$ durch m teilbar?

M 15 Man löse das Gleichungssystem

(1)

$$x-y=\frac{7}{2}\left(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right)$$

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3$$

M 16 Welche reellen x und y sind Lösung der Gleichung

(1)

$5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0.$

M 17 Gegeben sei ein Trapez ABCD mit der Grundlinie AB. Weiter sei $\sphericalangle DAC < \sphericalangle ABC$.
Man zeige, daß dann $AC > BD$ ist.

(2)

M 18 В выпуклом четырёхугольнике ABCD

$$AB + BD \leq AC + CD.$$

Доказать, что сторона AB в таком четырёхугольнике меньше диагонали AC.

(1)

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.
Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an uns zu senden.
Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

Einsendeschluß: 15. 6. 1980

Abbildungen und Funktionen

In Prüfungen spielt sich häufig ein Gespräch folgender Art ab:

Prüfer: Was verstehen Sie unter einer Abbildung?

Student: Eine Abbildung ist eine Zuordnung.

Prüfer: Was ist eine Zuordnung?

Student: Eine Zuordnung liegt dann vor, wenn jedem Element ein anderes zugeordnet wird.

(Diese Antwort ist ausgesprochen unbefriedigend, weil der Student versucht, den Begriff der Zuordnung durch sich selbst zu erklären.)

Prüfer: Können Sie genau präzisieren, was Sie unter "zuordnen" verstehen wollen? Wenn dieses Wort undefiniert bleibt, muß man sich darauf verlassen, daß alle Menschen sich genau dasselbe darunter vorstellen. Auf einer solchen vagen Grundlage kann man jedoch keine Mathematik betreiben.

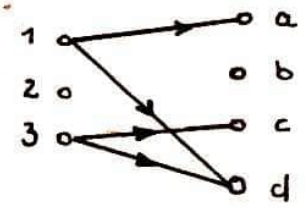
Wir wollen nun annehmen, daß der Student, der anfangs nicht gerade erfreulich reagiert hat, nun doch die Antwort findet, die der Prüfende bereits nach der ersten Frage erwartet hat. Sie könnte etwa so lauten:

D e f i n i t i o n:

1. F heißt Abbildung aus A in B $=_{Df}$
   $F \subseteq A \times B$ (d. h. F ist Relation zwischen A und B)
2. Ist $[a,b] \in F$, so sagen wir, daß F dem Element a das Element b zuordnet, oder auch, daß a durch F auf b abgebildet wird.
3. $F(a) =_{Df} \{y : [a,y] \in F\}$ heißt Bildmenge von a.
4. $F^{-1}(b) =_{Df} \{x : [x,b] \in F\}$ heißt Urbildmenge von b.

Man beachte, daß das Wort "zuordnen" durch Punkt 2 obiger Definition einen ganz präzisen mengentheoretischen Sinn erhalten hat.

Beispiel: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d\}$
$F = \{[1,a]\ ,\ [1,d]\ ,\ [3,c]\ ,\ [3,d]\}$
Eine Veranschaulichung des Graphen $[A \cup B, F]$ liefert folgendes Bild:



$F(1) = \{a,d\}$, $F(2) = \emptyset$,
$F(3) = \{c,d\}$
$F^{-1}(a) = \{1\}$
$F^{-1}(b) = \emptyset$
$F^{-1}(c) = \{3\}$
$F^{-1}(d) = \{1,3\}$

Wir führen nun noch ganz wichtige Sorten von Abbildungen ein:

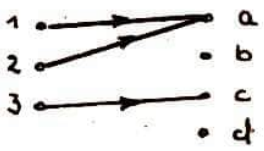
D e f i n i t i o n :

Eine Abbildung F aus A in B heißt eindeutig $=_{Df}$
$\forall x \forall y \forall y' ([x,y] \in F \wedge [x,y'] \in F \longrightarrow y = y')$
Eindeutige Abbildungen heißen auch Funktionen.

In Worten: Eine Abbildung aus A in B heißt Funktion, wenn jedem Element aus A höchstens ein Element zugeordnet wird. Es gilt also der

S a t z : F ist genau dann eine Funktion aus A in B, wenn für jedes $x \in A$ die Bildmenge $F(x)$ höchstens ein Element enthält.

Beispiel: Das $F = \{[1,a]\ ,\ [2,a]\ ,\ [3,c]\}$ ist Funktion aus $A = \{1,2,3\}$ in $B = \{a,b,c,d\}$. Das sieht man auch am Bild, weil von jedem Element von A höchstens ein Pfeil ausgeht:



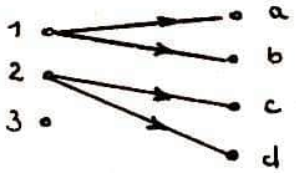
D e f i n i t i o n :

Eine Abbildung F aus A in B heißt <u>eindeutig umkehrbar</u>
$=_{Df}$ $\forall x \forall x' \forall y ([x,y] \in F \wedge [x',y] \in F \longrightarrow x = x')$

In Worten: Eine Abbildung F aus A in B heißt genau dann eindeutig umkehrbar, wenn niemals verschiedene Elemente aus A dem gleichen Element aus B entsprechen. Offenbar gilt:

S a t z : F ist genau dann eine eindeutig umkehrbare Abbildung aus A in B, wenn für jedes $y \in B$ die Urbildmenge $F^{-1}(y)$ höchstens ein Element enthält.

Beispiel: $F = \{[1,a], [1,b], [2,c], [2,d]\}$ ist eindeutig umkehrbare Abbildung aus A in B. Im Bild wird das dadurch deutlich, daß in jedem Knoten aus B höchstens ein Pfeil einläuft:



Diese Abbildung ist jedoch nicht eindeutig.

Definiert man

D e f i n i t i o n :

$F^{-1} =_{Df} \{[x,y] : [y,x] \in F\}$ heißt inverse Abbildung von F oder Umkehrabbildung von F,

so gilt der

S a t z : F ist genau dann eindeutig umkehrbar, wenn F^{-1} eindeutig ist.

Eindeutige Umkehrbarkeit bedeutet also, daß die Umkehrabbildung eindeutig ist.

D e f i n i t i o n :

Eine Abbildung, die eindeutig und zugleich eindeutig umkehrbar ist, heißt <u>eineindeutig</u> oder <u>umkehrbar eindeutig</u>.

Beispiel: $F = \{[1,a], [2,c], [3,b]\}$ ist eineindeutig.

D e f i n i t i o n :

1. F heißt Abbildung <u>von</u> A in B $=_{Df} D_F = A$
   ($D_F =_{Df} \{x : \exists y([x,y] \in F)\}$ (Definitionsbereich von F))
2. F heißt Abbildung aus A <u>auf</u> B $=_{Df} B_F = B$
   ($B_F =_{Df} \{y : \exists x([x,y] \in F)\}$ (Bildbereich von F))

Beispiel: 1. $F = \{[a,1], [b,2], [c,1], [d,2]\}$ ist Abbildung <u>von</u> B in A

2. $G = \{[a,3], [b,2], [c,1], [d,2]\}$ ist Abbildung <u>von</u> B <u>auf</u> A

3. $H = \{[a,3], [c,1], [d,2]\}$ ist Abbildung aus B <u>auf</u> A

Im Falle einer eindeutigen Abbildung F wollen wir an Stelle von $F(x) = \{y\}$ kürzer $F(x) = y$ schreiben.
Man kann solche Funktionen selbstverständlich auch in Form von Wertetabellen aufschreiben.
Beispiel: $F = \{[1,a], [2,c], [3,b], [4,c]\}$ hat die Wertetabelle

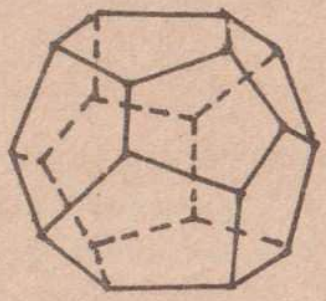
x	1	2	3	4
F(x)	a	c	b	c

Die im Schulunterricht behandelten Funktionen sind sämtlich Beispiele für den hier dargelegten Funktionsbegriff.

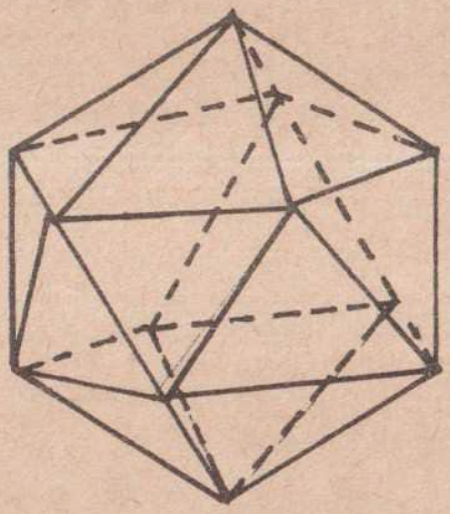
Doz. Dr. G. Wechsung
Bereich Mathematische Kybernetik
und Rechentechnik

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Jörg Vogel
Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, A. Jeschag, I. Kaiser, A. Kleinwächter, M. Lutz, D. Meinhardt, G. Müller, F. Pegenau, H. Schwulow
Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 26. 2. 1980



$$F+E-K=2$$



4

80

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Eulerscher Polyedersatz und reguläre Polyeder

Ein Polyeder (oder auch Vielflächner) ist ein von Ebenen begrenzter Körper. Liegt es ganz auf einer Seite von jeder dieser Ebenen, so handelt es sich um ein konvexes Polyeder. Mit solchen werden wir uns im weiteren ein wenig beschäftigen.

Kennt man die Anzahl F der Seitenflächen des Polyeders, so benennt man es danach, z. B. ein Tetraeder (Vierflach) ist ein Polyeder mit 4 Seitenflächen, ein Pentaeder besitzt 5 Seitenflächen usw. Aber auch die Anzahl E der Ecken und die Kantenzahl K eines Polyeders sind von Bedeutung.

Der Ausdruck F + E - K heißt "Eulersche Charakteristik". Wir werden nun zeigen, daß für jedes konvexe Polyeder

$$F + E - K = 2 \qquad (1)$$

gilt. Das ist der Eulersche Polyedersatz.

Beweis des Eulerschen Polyedersatzes:

1. Wir bauen eine Seitenfläche mit allen ihren Ecken und Kanten von einem Polyeder ab. Bezeichnen wir die Anzahl der verbleibenden Flächen, Ecken und Kanten mit f, e und k, so gilt

   $$f = F - 1$$
   $$e = E - n$$
   $$k = K - n.$$

   Dabei ist n die Eckenzahl der abgebauten Seitenfläche.
   Wir erhalten

   $$f + e - k = F + E - K - 1.$$

2. Sukzessive werden nun alle anderen Seitenflächen mit all ihren verbliebenen Ecken und Kanten abmontiert. Dabei wird jeweils eine zur zuletzt abgebauten Seitenfläche benachbarte Fläche abgenommen.
   Waren erst f, e, k Flächen, Ecken, Kanten des ursprünglichen Polyeders auf der Polyederruine übriggeblieben, so sind es nach dem Abbau einer weiteren Seitenfläche: $f'=f-1$, $e'=e-n$, $k'=k-(n+1)$.
   Also gilt: $f + e - k = f' + e' - k' = \text{const.}$

3. Da für $f=1$, $e=k=0$ gilt, ist der konstante Wert von $f + e - k$ gleich Eins.
   Folglich gilt: $F + E - K = 2.$

Ein Polyeder heißt regulär, wenn alle Seitenflächen miteinander kongruente regelmäßige p-Ecke sind und an jeder Ecke genau q Seitenflächen (und damit auch ebensoviele Kanten) zusammenstoßen.

Mittels des Eulerschen Polyedersatzes werden wir nun beweisen, daß es nur 5 reguläre Polyeder geben kann.
Offenbar gilt:

$$F \cdot p = 2K \qquad (2)$$

$$E \cdot q = 2K. \qquad (3)$$

Man stelle (2) bzw. (3) nach F bzw. E um, setze die so erhaltenen Gleichungen in (1) ein und löse nach K auf. F und E ergibt sich dann leicht nach (2) und (3).

$$K = \frac{2pq}{4-(p-2)(q-2)}$$

$$F = \frac{4q}{4-(p-2)(q-2)}$$

$$E = \frac{4p}{4-(p-2)(q-2)}$$

Zwar gilt $p \geq 3$ und $q \geq 3$, jedoch können p und q wegen der Bedingung

$$(p-2)(q-2) < 4 \qquad (4)$$

nicht gleichzeitig größer oder gleich 4 sein.
Da überdies für p=3 aus (4) folgt, daß $q < 6$ zu fordern ist und analog für q=3 $p < 6$ gelten muß, sind nur die folgenden Fälle möglich:

p	q	F	E	K	
3	3	4	4	6	Tetraeder
4	3	6	8	12	Hexaeder
3	4	8	6	12	Oktaeder
5	3	12	20	30	Dodekaeder
3	5	20	12	30	Ikosaeder

Zu jedem dieser 5 möglichen Fälle läßt sich tatsächlich ein reguläres Polyeder konstruieren. Dies sind die bekannten "Platonischen regulären Körper":

das reguläre Tetraeder (Abb. 1),
der Würfel (Abb. 2),
das reguläre Oktaeder (Abb. 3),
das reguläre Pentagondodekaeder (Abb. 4) und
das reguläre Ikosaeder (Abb. 5).

Literatur:

/1/ Franz v. Krbeck: Geometrische Plaudereien,
Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1966, S. 97-99.

/2/ Tiberiu Roman: Reguläre und halbreguläre Polyeder,
Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1968,
S. 6-38.

/3/ WURZEL. 10. Jahrgang (1976), Nr. 3, S. 44-46, S. 33.

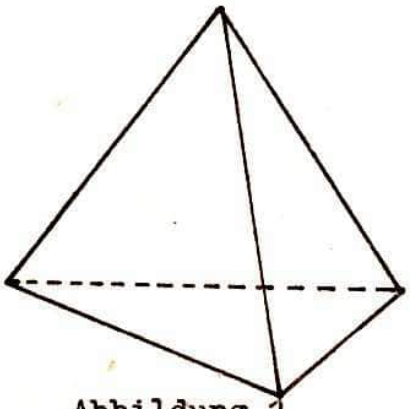


Abbildung 1

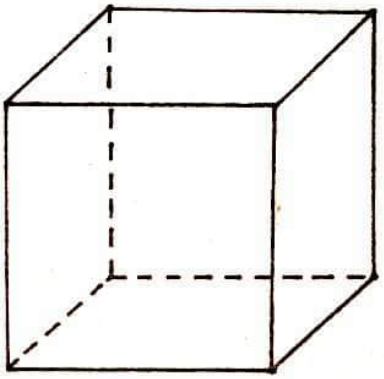


Abbildung 2

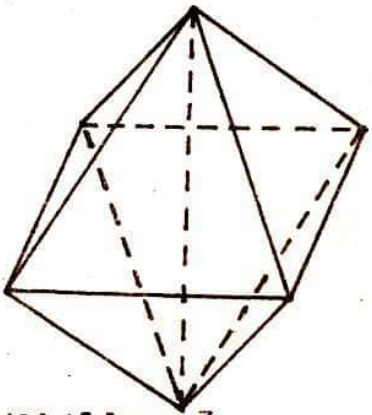


Abbildung 3

Abbildungen 4 und 5 siehe Titelbild

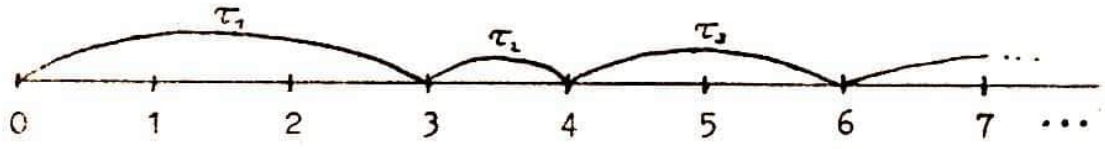
Hans-Joachim Hauschild
Mathematikstudent 5. Stdj.

Eine Einführung in die Erneuerungstheorie

Wir betrachten die Arbeit eines Bauteils in einem technischen Gerät. Solch ein Bauteil fällt nach einer gewissen Zeit infolge Abnutzung oder Ermüdung aus. Der Ausfallzeitpunkt ist nicht genau im voraus bestimmbar, sondern ist für den gleichen Typ von Bauteilen von Fall zu Fall unterschiedlich. Der Ausfallzeitpunkt ist also eine Zufallsgröße (vgl. die Definition der Zufallsgröße im vorigen Heft der WURZEL). Wir wollen hier nur solche Bauteile untersuchen, die nur in bestimmten Zeittakten ausfallen können. Setzen wir voraus, daß B, die Zeiteinheit, so gewählt ist, daß ein Zeittakt die Länge 1 hat, so wird die Lebensdauer durch eine ganzzahlige Zufallsgröße beschrieben. Auf solche Zufallsgrößen wird man auch geführt, wenn man sich bei kontinuierlicher Arbeitsweise eines Bauteils nur dafür interessiert, ob es im Intervall $[k,k+1)$, $k=0,1,\ldots$ ausgefallen ist. Die Nummer desjenigen Intervalls, in dem das Bauteil die Arbeit einstellt, ist dann eine ganzzahlige Zufallsgröße.

In der Praxis wird ein ausgefallenes Bauteil sofort wieder durch ein neues Bauteil ersetzt. Wir setzen diesen Prozeß unbeschränkt fort. Es bezeichne τ_1 die Lebensdauer des ursprünglichen Bauteils, τ_2 diejenige des folgenden usw. Ersetzt man nun ein ausgefallenes Bauteil durch ein Bauteil gleichen Typs, so besitzen die Zufallsgrößen $\tau_1, \tau_2, \ldots$ immer dieselbe Verteilung. Wir setzen weiterhin voraus, daß der Ausfall des entsprechenden Bauteils auf den Gesamtmechanismus keine nachteiligen Auswirkungen hatte, daß also bei Ersatz des ausgefallenen Teils die gleiche Situation vorliegt wie zu Beginn.

Den Prozeß der ständigen Erneuerung eines ausgefallenen Bauteils kann man sich in der zeitlichen Entwicklung so veranschaulichen:



Als Erneuerungstheorie bezeichnet man denjenigen Zweig der Wahrscheinlichkeitstheorie, der den oben beschriebenen Prozeß der ständigen Erneuerung eines Bauteils mathematisch untersucht.

Wir bezeichnen jetzt durch ν_n die Anzahl der Ausfälle bis zur Zeit n einschließlich.

ν_n nimmt genau dann den Wert k an, wenn $\tau_1 + \ldots + \tau_k \leq n$ und $\tau_1 + \ldots + \tau_{k+1} > n$ gilt. ν_n ist für jedes n eine Zufallsgröße. Die Verteilung von ν_n, d. h. die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß $\nu_n = k$ gilt, lassen sich nur in wenigen Fällen in einfacher Weise berechnen. Damit hat man auch für den Erwartungswert von ν_n, den wir durch M_{ν_n} bezeichnen, keine expliziten Ausdrücke. (Der Begriff des Erwartungswertes wurde im Artikel "Zufällige Ereignisse und Zufallsgrößen" im vorigen Heft der WURZEL eingeführt.)) Über das asymptotische Verhalten für $n \to \infty$ von M_{ν_n} lassen sich jedoch Aussagen machen. Solche Aussagen werden als Erneuerungstheoreme bezeichnet. Wir geben hier ohne Beweis nur eine sehr einfache Variante solch eines Erneuerungstheorems wieder.

Satz: Die Zufallsgrößen $\tau_1, \tau_2, \ldots$ mögen alle dieselbe Verteilung $p_0, p_1, \ldots$ besitzen.

Gilt $\sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k < \infty$,

so folgt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M_{\nu_n}}{n} = \frac{1}{m} .$$

Hierbei bezeichnet m den Erwartungswert der Zufallsgrößen $\tau_1, \tau_2, \ldots$, d. h.

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k .$$

Der oben formulierte Satz gestattet es, das folgende in der Praxis auftretende Problem asymptotisch zu behandeln.
Der Ausfall und der Ersatz eines ausgefallenen Bauteils zieht stets gewisse Kosten nach sich. Dies sind Kosten für das neue Teil und aus dem Produktionsstillstand entstandene Kosten. Wird nun eine Erneuerung zu einem für den Produktionsablauf günstigen Zeitpunkt vorgenommen, wenn das Bauteil ein bestimmtes Alter erreicht hat, so sind die Kosten durch Produktionsausfall wesentlich geringer. Wir sprechen in diesem Falle von einer planmäßigen Erneuerung. Allerdings muß man in Kauf nehmen, daß ein noch nicht völlig verschlissenes Bauteil weggeworfen wird. Andererseits kann es trotzdem zu Ausfällen vor diesem festen Zeitpunkt kommen. In diesem Falle ist eine sogenannte Havarieerneuerung nötig.

Es sei p die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Bauteil vor oder zur Zeit t_o ausfällt. Dann gilt

$$p = \sum_{k=0}^{t_o} p_k \quad ,$$

wobei $p_o, p_1, \ldots$ die Verteilung der Lebensdauer ist. $1-p = \sum_{k=t_o+1}^{\infty} p_k$ ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Bauteil nach t_o ausfällt. Die mittleren Kosten bei einem Ausfall sind dann $pc_H + (1-p)\, c_p$, wobei c_H die Kosten bei einer Havarieerneuerung und c_p die Kosten bei einer planmäßigen Erneuerung sind. Bei der oben geschilderten Strategie hat das Bauteil die neue Lebensdauer $\tau' = \mathrm{Min}(\tau, t_o)$.
Der Erwartungswert von τ' ist

$$m' = \sum_{k=0}^{t_o} k\, p_k + t_o \Big(\sum_{e=t_o+1}^{\infty} p_e \Big).$$

Damit sind die mittleren Kosten pro Zeiteinheit $\frac{M_{\nu n}'}{n} (pc_H + (1-p)c_p)$ ($M_{\nu n}'$ ist die mittlere Anzahl der Erneuerungen und demzufolge $\frac{M_{\nu n}'}{n}$ die mittlere Anzahl der Erneuerungen pro Zeiteinheit) nach dem obigen Satz näherungsweise gegeben durch

$$\frac{pc_H + (1-p)c_p}{m'} = \frac{\Big(\sum_{k=0}^{t_o} p_k \Big) c_H + \Big(\sum_{k=t_o+1}^{\infty} p_k \Big) c_p}{\sum_{k=0}^{t_o} k\, p_k + t_o \Big(\sum_{k=t_o+1}^{\infty} p_k \Big)} \quad .$$

Betrachtet man jetzt die rechte Seite als Funktion von t_o, so erhält man durch Minimierung den kostenmäßig günstigsten Zeitpunkt für die planmäßige Erneuerung eines zufällig ausfallenden Bauteils.

Doz. Dr. F. Liese
Bereich WMS

Preisaufgaben

M 19 (2)

In der Ebene liege ein Vektorpaar $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und eine Schar paralleler Geraden. Gesucht ist eine Gerade g(XY) dieser Schar, welche die beiden Vektoren im gleichen Verhältnis schneidet:

$$X \in g(AB),\ Y \in g(BC),\ AX : XB = BY : YC.$$

M 20 (2)

Es seien α, β, γ die Winkel eines Dreiecks. Man beweise

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{\alpha\sin\alpha + \beta\sin\beta + \gamma\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} < \frac{\pi}{2}.$$

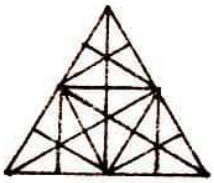
M 21 (1)

Man berechne die Summe

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=0}^{k} (i+j) \right).$$

M 22 (1)

Wieviele Dreiecke enthält die nachstehende Figur?



M 23 (1)

Für alle reellen Zahlen $x > 0$ und natürlichen Zahlen $n \geq 3$ zeige man die Ungleichung

$$(x^n+1)^2 < (x^2+1)^n.$$

M 24 (1)

Пусть m и n – два различных целых положительных числа. Доказать, что

$$2^{2^m}+1 \text{ и } 2^{2^n}+1$$

не имеют ни одного общего делителя, большего 1.

Wir danken allen Einsendern von Knobelaufgaben und hoffen, bald weitere Aufgaben unserer Leser veröffentlichen zu können. Die Aufgaben M 19 bis M 23 stammen von Prof. Dr. Roth (em. Prof. der FSU Jena), D. Kurtz, Carsten Damm (Berlin), Jürgen Hayn (z. Z. Erfurt) und Volker Barop (Torgau).

Lösungen

Aufgabe L 49

Man sieht leicht, daß für $\lambda = 0$ die beiden Gleichungen keine gemeinsamen Lösungen besitzen.

Sei $\lambda \neq 0$ und x_o Lösung beider Gleichungen. Dann ist

$$\lambda x_o^3 - x_o^2 - x_o - (\lambda + 1) = 0 \qquad (1)$$

$$\lambda x_o^2 - x_o - (\lambda + 1) = 0 \qquad (2)$$

Multipliziert man (2) mit x_o und subtrahiert man sie dann von (1), so erhält man

$$x_o = \frac{\lambda + 1}{\lambda} . \qquad (3)$$

Man kann leicht überprüfen, daß der Bruch $\frac{\lambda+1}{\lambda}$ beide Gleichungen erfüllt. Folglich haben die Gleichungen für alle $\lambda \neq 0$ eine gemeinsame Lösung, die durch Formel (3) bestimmt ist.

Aufgabe L 50

Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$x + y = \frac{2}{x-y} . \qquad (1)$$

Ersetzt man nun x+y in der ersten Gleichung durch $\frac{2}{x-y}$, erhält man weiter

$$\log_2 \frac{2}{x-y} - \log_3(x-y) = 1$$

$$1 - \log_2(x-y) - \log_3(x-y) = 1$$

$$\log_2 3 \log_3(x-y) + \log_3(x-y) = 0$$

$$(\log_2 3 + 1) \log_3(x-y) = 0.$$

Da $\log_2 3 + 1 \neq 0$, so folgt $\log_3(x-y) = 0$
und somit $x-y = 1$.

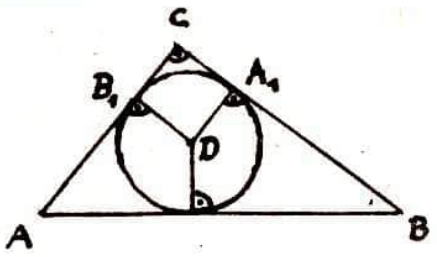
Zusammen mit (1) ernält man das Gleichungssystem

$$x+y = 2 \qquad x-y = 1$$

und als Lösungen $x = \frac{3}{2}$ $y = \frac{1}{2}$.

Eine Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

Aufgabe L 51



Seien A_1, B_1, C_1 die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten des Dreiecks ABC und D der Mittelpunkt des Inkreises. Dann gelten die folgenden Beziehungen

$$CA_1 = CB_1, \quad BA_1 = BC_1, \quad AB_1 = AC_1$$

sowie $DB_1 = CA_1, \quad B_1C = A_1D.$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} AC + BC &= AB_1 + B_1C + CA_1 + A_1B \\ &= AC_1 + A_1D + B_1D + C_1B \\ &= AB + A_1D + B_1D \\ &= 2R + 2r, \end{aligned}$$

wobei r der Radius des Inkreises und R der Radius des Umkreises ist.

Aufgabe L 52

Wir setzen $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = u$.

Haben x und y verschiedene Vorzeichen, so folgt $u \leq 0$; haben x und y das gleiche Vorzeichen, so folgt $u \geq 2$ (aus $(\lambda-1)^2 \geq 0$ folgt $\lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0$ und $\lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2$).

Weiter ist

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = u^2 - 2.$$

Der zu untersuchende Ausdruck nimmt dann die folgende Form an:

$$z = 3u^2 - 8u + 4 = 3(u-2)\left(u - \frac{2}{3}\right).$$

Da entweder $u \leq 0$ oder $u \geq 2$, so folgt $z \geq 0$.

Aufgabe L 53

Die gegebene Gleichung kann man wie folgt umformen:

$$\sin a + \sin(2x+a) - \sin(2x-a) = \sin(x+a) - \sin(x-a)$$

$$\sin a + 2 \sin a \cos 2x = 2 \sin a \cos x.$$

Sei $\sin a \neq 0$ (sonst wird die Gleichung zur Identität).

Dann ist

$$1 + 2\cos 2x - 2\cos x = 0$$

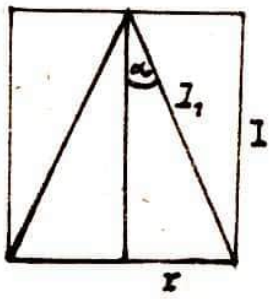
$$4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Da x ein Winkel im dritten Quadranten ist, gilt

$\cos x < 0$ und $\sin x < 0$.
Somit ist $\cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ und $\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$
$= -\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Aufgabe L 54



Sei α der gesuchte Winkel, l die Mantellinie des Zylinders, l_1 die Mantellinie des Kegels, r der Radius der Grundfläche des Kegels und des Zylinders.
Nach Voraussetzung ist

$$\frac{2\pi r(r+l)}{\pi r(r+l_1)} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{r+l}{r+l_1} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1+\frac{l}{r}}{1+\frac{l_1}{r}} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1+\cot\alpha}{1+\frac{1}{\sin\alpha}} = \frac{7}{8}$$

$$\sin\alpha + 8\cos\alpha - 7 = 0$$
$$64\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + 49 - 14\sin\alpha$$
$$65\sin^2\alpha - 14\sin\alpha - 15 = 0$$
$$\sin\alpha = \frac{7 \pm 32}{65}.$$

Da $0 < \alpha < 90^\circ$, so ist $\sin\alpha > 0$.
Also ist $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ und

$$\alpha = \arcsin\frac{3}{5}.$$

Mathematik und Erkenntnistheorie (Schluß)

Mathematik und bürgerliche Philosophie

Wie bereits ausgeführt, beschäftigt sich die Mathematik mit Abstraktionen, die ihren Ursprung in der Realität haben. Sie abstrahiert jedoch so stark, daß die mathematischen Begriffe auf sehr verschiedene Bereiche der objektiven Realität bzw. auf Begriffsbildungen der verschiedensten Wissenschaften zutreffen. Daher kann die Mathematik einerseits zu anderen Wissenschaften Beiträge liefern, andererseits kann sie aber nicht die anderen Wissenschaften ersetzen. In diesem Zusammenhang soll auf einige bürgerliche Darstellungen der Bedeutung der Mathematik eingegangen werden.

Bekanntlich ist ein zentraler Begriff, der durch die Kybernetik und ihre mathematische Behandlung in unser Weltbild hereingetragen wurde, der der Information. Gerade dieser Begriff hat zu vielfältigen philosophischen Spekultationen Anlaß gegeben. Anhänger idealistischer Philosophien behaupten, um die Grundfrage der Philosophie zu umgehen, Information sei weder etwas Materielles noch etwas Ideelles, sondern ein Drittes. Solchen Behauptungen widerspricht aber schon die Tatsache, daß Informationen nur von materiellen Systemen erzeugt, abgegeben, aufgenommen, vermittelt, gespeichert oder verarbeitet werden können. Die Tatsache, daß Information kein physikalisches Objekt ist, d. h. weder Stoff noch Energie, liefert kein Argument für die Konstituierung eines "dritten Seinsbereichs" neben dem materiellen und dem ideellen Bereich. Informationen sind Zeichen von Klassen äquivalenter Signale. Das heißt: Signale - also physikalische Sachverhalte - werden in Äquivalenzklassen eingeteilt (etwa alle Schwingungen mit einer Frequenz in einem bestimmten Bereich, alle Schriftzeichen hinreichender "Ähnlichkeit"). Informationen sind nun solche Äquivalenzklassen oder Symbole dafür. Die Information ist also weder ein Objekt noch die Eigenschaft eines Objekts, sondern Eigenschaft von Eigenschaften (ein sogen. Prädikatenprädikat). Damit steht sie auf der gleichen Abstraktionsstufe wie etwa die natürlichen Zahlen, die ja Abstraktionsklassen äquivalenter (gleichmächtiger) Mengen sind. Für die marxistisch-leninistische Philosophie ist von grundlegender Bedeutung, daß

durch den Informationsbegriff zu den beiden Grundkategorien Stoff und Energie noch eine dritte hinzugekommen ist, nämlich die der Information. Wie die beiden anderen ist aber auch Information eine Erscheinung der Materie und kann nicht losgelöst von materiellen Dingen gesehen werden.

Ein anderes Extremum verfolgte Russel in seiner Lehre vom logischen Atomismus. Er behauptete, daß es weder Materie noch Bewußtsein gibt, sondern nur einzelne "Sinnesdaten", die untereinander verbunden sind und allein das Wirkliche ausmachen würden. Ein moderner Vertreter dieser These ist der bekannte westdeutsche Kybernetiker Steinbuch. Er versucht unter Verwendung der modernen Kybernetik und unter Negierung solcher wichtigen Kategorien wie Ideologie, Klasse, Revolution und Klassenkampf die Kybernetik zu einer Art Universalphilosophie zu erheben, indem er deren Methoden allen anderen Spezialwissenschaften aufzwingen will. Er schreibt: "Die Kybernetik ist ein Weg zu einer neuen Einheit der Wissenschaften. Sieht man von einigen deklamatorischen Redewendungen ab, so ist sie der einzige glaubwürdige Ansatz, das geborstene Gebäude unserer Wissenschaften wieder zusammenzufügen." (K. STEINBUCH: Automat und Mensch, (West-)Berlin/Heidelberg/New York 1965, S. 324.)
Diese Theorie scheint auf den ersten Blick recht glaubwürdig zu sein, da die Kybernetik tatsächlich in einer ganzen Reihe von Wissenschaften, so z. B. der biologischen Grundlagenforschung, der Psychologie, der Ökonomie, der Sprachforschung und der Elektronik, angewandt werden kann und dort zu neuen Erkenntnissen oder zumindest zu einer neuen Systematisierung des bisherigen Wissens verhilft und dabei unschätzbare Dienste leistet. Auch ökonomische Prozesse lassen sich mit Hilfe kybernetischer Modelle analysieren, jedoch tritt hierbei besonders drastisch zutage, daß die Kybernetik nur den informationstheoretischen Aspekt der Materie zu erfassen in der Lage ist. Solche Begriffe wie Ideologie, Ethik oder Moral können durch die Kybernetik nicht - jedenfalls nicht in einer ihnen adäquaten Weise - erfaßt werden. Da Steinbuch dies übersieht, begibt er sich mit seiner Theorie in das Lager der Konvergenztheoretiker.

Die Bestrebungen, mathematische Denkweisen anderen Wissenschaf-

ten aufzuzwingen und dabei deren Sinn und deren spezifischen Charakter zu entstellen, treten uns noch in anderer Form entgegen, nämlich in der Ausdehnung der formal-logischen Denkweise auf andere Wissenschaften. Der Wiener Schule des Neopositivismus, gegründet in den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts, ist in dieser Hinsicht besonders bekannt geworden. Ihre Anhänger betrachteten die Wissenschaften von einem subjektiv-idealistischen Standpunkt aus, indem sie die Beziehungen der Wissenschaften zur objektiven Realität vernachlässigten und unter einer Wissenschaft allein das Hervorbringen und Bearbeiten von irgendwie gearteten sprachlichen Ausdrücken verstanden. Von dieser Warte aus entstand das Bestreben, die gesamte Philosophie und die Einzelwissenschaften axiomatisch aufzubauen. Axiomatisch begründete Theorien besitzen einen im Umfang begrenzten gedanklichen Kern, das Axiomensystem, aus dem alle weiteren Aussagen der Theorie vermittels einiger schematisch anwendbarer Schlußregeln abgeleitet werden können. Notwendigerweise können solche Theorien nicht in der Lage sein, die unendliche Vielfalt der objektiven Realität in umfassender Weise widerzuspiegeln. Der grundlegende philosophische Fehler des Neopositivismus besteht in der Verkennung des Wesens der Erkenntnis als Widerspiegelung (zu jedem Zeitpunkt nur gewisser Aspekte) der objektiven Realität. Daraus ergibt sich auch, daß der Neopositivismus den Erkenntnisprozeß nicht als dialektische Entwicklung auffaßt, in deren Verlauf die Praxis stets der letzte Prüfstein der Theorie bleibt. Ein sehr schwerer Schlag wurde den Axiomatisierungsbestrebungen und darüber hinaus der gesamten neopositivistischen Wissenschaftsauffassung von einem Anhänger der Wiener Schule selbst, dem bedeutenden Mathematiker Gödel, bereits auf rein mathematischem Terrain beigebracht. "Gödel hat 1931 bewiesen, daß eine vollständige Axiomatisierung der reichhaltigen mathematischen Gebiete im Rahmen der Logik unmöglich ist. Er hat gezeigt, daß - wie raffiniert und umfassend auch immer das Axiomensystem sein möge - sich doch stets wenigstens eine Aussage konstruieren läßt, die dann und nur dann wahr ist, wenn sie sich nicht aus den Axiomen beweisen läßt." (G. KLAUS: Moderne Logik, DVW Berlin 1970, S. 287) "Damit ist ein entscheidendes Ergebnis für eine moderne Erkenntnistheorie gewonnen. Es ist festgestellt, daß der Begriff der

Wahrheit nicht durch den der Beweisbarkeit ersetz werden kann. ... Damit ist der 'syntaktische Idealismus' widerlegt." (G. KLAUS: Moderne Logik, DVW Berlin 1970, S. 354.)

Wir haben an drei Beispielen gesehen, wie die moderne bürgerliche Philosophie versucht, sich in einem wissenschaftlichen Gewand zu tarnen, das von den Ergebnissen der Mathematik Gebrauch macht. Nicht selten sind die Vertreter derartiger Erscheinungsformen bürgerlicher Philosophie Wissenschaftler, die auf wissenschaftlichen Teilgebieten Hervorragendes leisten. Eine Entlarvung dieses mathematisch-kybernetisch verbrämten Idealismus ist deshalb oft recht schwierig. Eine Auseinandersetzung mit ihm ist jedoch umso wichtiger, als er einen Angriff gegen die Philosophie der Arbeiterklasse darstellt. Kurt Hager schreibt dazu: "Der dialektische und historische Materialismus stützt sich stets auf die Erkenntnisse der Wissenschaften, auf die Erfahrungen des wissenschaftlich-technischen Fortschritts und verallgemeinert sie ... Aber die Funktion des dialektischen und historischen Materialismus wird ernsthaft gefährdet, wenn die marxistisch-leninistische Philosophie durch die kritische Übernahme von Aussagen und Begriffen aus einzelnen Fachwissenschaften ihres Weltanschauungscharakters beraubt und gewissermaßen 'entideologisiert' wird." (K. HAGER: Die entwickelte sozialistische Gesellschaft, Dietz Verlag Berlin 1971, S. 12.) An anderer Stelle schreibt er: "So wichtig Kybernetik und Systemtheorie sind und bleiben, so können wir natürlich nicht zulassen, daß sie an die Stelle des dialektischen und historischen Materialismus, der politischen Ökonomie des Sozialismus, des wissenschaftlichen Kommunismus oder auch der sozialistischen Leitungswissenschaft treten, daß sie verabsolutiert werden und daß die Sprache der Spezialwissenschaft die politische Sprache der Partei wird. Die Partei würde damit aufhören, eine marxistisch-leninistische Partei zu sein." (K. HAGER: Die entwickelte sozialistische Gesellschaft, Dietz Verlag Berlin 1971, S. 28.)

Für den Mathematiker ist die Auseinandersetzung mit den modernen Formen der bürgerlichen Philosophie sehr wichtig, da diese Auseinandersetzung die Rolle der Mathematik innerhalb unserer Weltanschauung und beim Aufbau und der weiteren Festigung der

entwickelten sozialistischen Gesellschaft klären hilft.

Dr. G. Lischke
Bereich Mathematische Kybernetik
und Rechentechnik

Dr. B. Goetze
Akademie der Wissenschaften
Berlin

Bei der Erarbeitung unserer Artikelserie verwendeten wir unter anderem:

H. JÄCKEL: Mathematik heute. Urania-Verlag 1972.

G. KLAUS und M. BUHR: Philosophisches Wörterbuch. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1970.

J. A. PETROV: Logische Probleme der Realisierbarkeits- und Unendlichkeitsbegriffe. Akademie-Verlag, Berlin 1971.

Artikel von G. KASDORF und H. THRAMS in der Zeitschrift "Mathematik in der Schule", Hefte 11/1966 und 9/1970.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, F. Pegenau
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV) : 10932

Redaktionsschluß: 17. 3. 1980

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

5
80

Stichprobe und Grundgesamtheit

Wissenschaftlichen Untersuchungen liegt oft eine umfangreiche Gesamtheit gleichartiger Objekte zugrunde. Diese wird in der Statistik Grundgesamtheit genannt.

Beispiele: Die Bürger der DDR.
Die Beschäftigten in einem Betrieb.
Eine Produktionsserie eines bestimmten Erzeugnisses.

In den meisten Fällen ist eine Untersuchung aller dieser Objekte auf ein bestimmtes Merkmal hin zu kostspielig oder gar nicht durchführbar.

Beispiel: Erzeugnisse, die durch eine Qualitätskontrolle unbrauchbar werden, wie etwa Streichhölzer, die auf Zündfähigkeit geprüft werden sollen.

Man ist dann gezwungen, auf eine Totalerhebung zu verzichten und die Untersuchung auf eine Teilmenge der Grundgesamtheit zu beschränken. Die Ergebnisse, die bei der Teilerhebung erzielt wurden, benutzt man, um Aussagen über die Grundgesamtheit zu machen. Selbstverständlich sind die so gewonnenen Aussagen nicht hundertprozentig zuverlässig, sondern mit einer gewissen Unsicherheit behaftet.

Beispiel: Aus einer laufenden Produktionsserie werden 100 Erzeugnisse auf ihre Qualität untersucht. 10 Stück erweisen sich als Ausschuß. Man vermutet dann, daß die Ausschußquote bei 10 % liegt.

Wie muß nun die Auswahl der Untersuchungsobjekte vorgenommen werden, damit ein zuverlässiger Schluß von der Teilmenge auf die Grundgesamtheit möglich ist?

Ist eine Auswahl nach Gutdünken geeignet?

Man könnte etwa versuchen, "typische" oder "wesentliche" Elemente auszuwählen, die repräsentativ für die Gesamtheit sein sollen.

Beispiel: Ein Reporter aus dem Ausland sucht sich "typische" DDR-Bürger aus, interviewt diese und erhält - deren Angaben verallgemeinernd - ein gewisses Bild von unserer Bevölkerung.

Jedoch ist bei einer Auswahl nach Gutdünken das Untersuchungsergebnis sehr stark vom subjektiven Ermessen, von bewußten oder unbewußten subjektiven Einschätzungen des Auswählenden abhängig. Es ist leicht möglich, ungewollt ein völlig falsches Bild von

der Grundgesamtheit zu erhalten oder bewußt das Untersuchungsergebnis zu manipulieren.
Ein mathematisch-statistisch gesicherter Schluß von der Teilerhebung auf die Gesamtheit ist nur zulässig bei einer zufallsmäßig vorgenommenen Auswahl.

D e f i n i t i o n : Eine endliche Teilmenge der Grundgesamtheit, die aus einer zufälligen Auswahl der Untersuchungsobjekte hervorgegangen ist, heißt Stichprobe. Die Anzahl der ausgewählten Objekte heißt Umfang der Stichprobe.

Wie ist nun aber eine solche zufällige Auswahl praktisch zu bewerkstelligen?
Wir wollen annehmen, die Elemente der Grundgesamtheit seien von 1 bis N durchnumeriert, und es soll eine Stichprobe vom Umfang $n < N$ gezogen werden.

1. Auswahltechnik: Lotterieprinzip.
Wir versehen N Kugeln mit den Nummern 1 bis N, schütten diese in eine Urne, mischen gut und greifen "blindlings" n Kugeln heraus. Die Nummern der herausgenommenen Kugeln geben die Untersuchungsobjekte an, die in die Stichprobe aufgenommen werden sollen.
Diese Auswahltechnik ist bei endlichem Umfang der Grundgesamtheit prinzipiell immer möglich, jedoch im allgemeinen zu arbeitsaufwendig. Die Auswahl wird einfacher, wenn man den "Zufall schon auf Vorrat" gespeichert hat.

2. Auswahltechnik: Verwendung von Zufallszahlen.
Angenommen N sei k-stellig.
Dann besorge man sich eine Folge k-stelliger Zufallszahlen, streiche alle Zahlen größer oder gleich N und die, die schon in der Folge enthalten sind. Für Null schreibe man N.
Wenn man auf diese Weise n voneinander verschiedene Zufallszahlen zwischen 1 und N gefunden hat, so ist die Stichprobe festgelegt.
Die k-stelligen Zufallszahlen entnimmt man aus einer Tafel mindestens k-stelliger Zufallszahlen, indem man nur die letzten k Ziffern notiert. Dabei kann man in einer beliebigen Zeile und Spalte beginnen und schreitet dann horizontal oder vertikal in der Tafel weiter.

Beispiel für eine Tafel mit Zufallszahlen:
Müller, H.; Neumann, P.; Storm, R.: Tafeln der mathematischen Statistik, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, 1973, Tafel 21A, S. 264 - 266.
Mit dem Aufsuchen der n Zufallszahlen wurde das Mischen der Urne und das "Auf-gut-Glück-Herausgreifen" simuliert. Wenn jedoch zwischen der Numerierung der Objekte von 1 bis N und dem zu untersuchenden Merkmal kein Zusammenhang besteht, d. h., wenn die Objekte schon "gemischt" sind, ist dieser Aufwand unnötig. Dann verwendet man besser die

3. Auswahltechnik: Systematische Auswahl (mit Zufallsstart).
Man bestimme zunächst den Auswahlabstand c mit:

$c \approx N/n$ und c ist ganzzahlig.

Dann lege man mit Hilfe einer Zufallszahl zwischen 1 und c das erste in die Stichprobe aufzunehmende Objekt fest. Als nächstes wird das Objekt ausgewählt, das in der Folge 1,...,N den Abstand c vom zuletzt aufgenommenen hat.
Kurz gesagt, man nimmt jedes c-te Element der Grundgesamtheit in die Stichprobe auf. Diese systematische Auswahl ist dann als gute Zufallsauswahl anzusehen, wenn das Untersuchungsmerkmal bei den Objekten in der Reihenfolge von 1 bis N keinem Rhythmus unterliegt, der mit dem Auswahlabstand zusammenfällt.
Sind die Untersuchungsobjekte Personen, deren Daten erfaßt sind, so verwendet man vielfach die

4. Auswahltechnik: Buchstabenauswahl.

oder die

5. Auswahltechnik: Geburtstagsauswahl.
Bei der Buchstabenauswahl werden die Personen in die Untersuchung einbezogen, deren Namen mit einem bestimmten Buchstaben beginnen, und bei der Geburtstagsauswahl alle diejenigen, die an einem bestimmten Tag im Jahr Geburtstag haben. Diese Auswahltechniken führen dann zu einer guten Zufallsauswahl, wenn zwischen den Anfangsbuchstaben der Namen der Personen und dem Untersuchungsmerkmal bzw. zwischen dem Geburtstag und dem Untersuchungsmerkmal kein Zusammenhang besteht. Diese Voraussetzung dürfte in den meisten Fällen erfüllt sein.

Der Verfasser verwendete folgende Literatur:

1. Lohse, H.; Ludwig, R.: Statistik für Forschung und Beruf, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, 1973.
2. Schwarz, H.: Stichprobenverfahren, Berlin, Verlag Die Wirtschaft, 1975.
3. Stenger, H.: Stichprobentheorie, Würzburg-Wien, Physica-Verlag, 1971.

Hans-Joachim Hauschild
Student
5. Studienjahr

Aufgaben der Bezirksolympiade Klassenstufe 11/12

Aufgabe 1: Es seien n und m natürliche Zahlen mit $n \geq 1$, $m \geq 1$; N sei die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n und M die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis m.
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von N, die gemeinsame Elemente mit M haben.

Aufgabe 2: Es sei ABCD ein konvexes Viereck, auf dessen Kanten AB, BC, CD bzw. DA Punkte E, F, G bzw. H so gelegen sind, daß sie die entsprechende Kante jeweils im Verhältnis der Längen der anliegenden Kanten teilen, d. h. es wird vorausgesetzt:

$$\overline{AE} : \overline{EB} = \overline{DA} : \overline{BC};\ \overline{BF} : \overline{FC} = \overline{AB} : \overline{CD};$$
$$\overline{CG} : \overline{GD} = \overline{BC} : \overline{DA};\ \overline{DH} : \overline{HA} = \overline{CD} : \overline{AB}. \qquad (1)$$

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage wahr ist:
Im Viereck ABCD gilt $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$ (d. h. ABCD ist ein Tangentenviereck) genau dann, wenn im Viereck EFGH für die Größe der Innenwinkel $\overline{\sphericalangle EFG} + \overline{\sphericalangle GHE} = \overline{\sphericalangle FGH} + \overline{\sphericalangle HEF}$ gilt (d. h. wenn EFGH ein Sehnenviereck ist).

Aufgabe 3A: Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Für alle Paare $(x_1;x_2)$ reeller Zahlen gilt $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

(2) Es gilt $f(1) = 1$.

(3) Für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} f(x)$.

Aufgabe 3B: Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n gibt, für die

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 1000 \qquad (1)$$

gilt. Wenn dies der Fall ist, so untersuche man, ob es eine natürliche Zahl p derart gibt, daß jede (im Dezimalsystem) p-stellige Zahl n die Eigenschaft (1) hat.
Trifft auch das zu, so ermittle man eine derartige Zahl p.

Aufgabe 4: Man untersuche, ob unter allen Tetraedern ABCD mit gegebenen Volumen V und mit rechten Winkeln

$$\sphericalangle BDC, \quad \sphericalangle CDA, \quad \sphericalangle ADB$$

eines mit kleinstmöglicher Summe $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{CD}$ existiert.
Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von V) diese kleinstmögliche Summe.

Aufgabe 5: Man beweise: Es gibt keine positiven ganzen Zahlen p und q mit der Eigenschaft

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2}.$$

Aufgabe 6: Gegeben sei eine positive reelle Zahl a. Man ermittle (zu jedem Wert dieser gegebenen Zahl a jeweils) alle reellen Lösungen (x;y) des Gleichungssystems

$$x^5 + y^5 = 1,$$
$$x + y = a.$$

Preisaufgaben

M 25 ①

Man zeige, daß der Bruch $\frac{21n+4}{14n+3}$ für keine natürliche Zahl n zu kürzen ist.

M 26 ①

Für welche reellen Zahlen x besteht die Ungleichung

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+x})^2} < 2x + 9 \ ?$$

M 27 ②

Es sind alle reellen Zahlen x zu bestimmen, welche die Ungleichung $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$ erfüllen.

M 28 ①

Es ist die kleinste natürliche Zahl n zu bestimmen, welche folgende Eigenschaften besitzt:

a) Ihre dekadische Darstellung hat als letzte Ziffer die Ziffer 6.

b) Wenn man diese letzte Ziffer 6 streicht und sie als erste Ziffer vor die anderen unveränderten Ziffern schreibt, so bekommt man das Vierfache der Zahl n.

M 29 ①

Man beweise: Für jedes Tetraeder gibt es einen solchen Eckpunkt, daß sich aus den drei Strecken, deren Längen gleich denen der von ihm ausgehenden Kanten sind, ein Dreieck konstruieren läßt.

M 30 ②

На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC точки A_1, B_1, C_1 расположены так, что $AC_1 = 2C_1B$, $BA_1 = 2A_1C$, $CB_1 = 2B_1A$. Доказать, что площадь треугольника, образованного при пересечении отрезков AA_1, BB_1, CC_1 составляет 1/7 от площади треугольника ABC.

Einsendeschluß : 15. 8. 1980

Aufgabe L 55

Die 4 Primzahlen eines Quadrupels kann man immer in der Form (6n-1; 6n+1; 6n+5; 6n+7) darstellen, wobei n eine natürliche Zahl ist.
Die Summe der 4 Primzahlen ist folglich
$s = 24n + 12 = 12(2n+1)$. Man sieht leicht, daß die letzte Ziffer der Zahl n eine 2 oder eine 7 sein muß, denn sonst ist eine der 4 Zahlen durch 5 teilbar. Folglich ist (2n+1) durch 5 teilbar und somit s durch 60.

Aufgabe L 56

Wir formen die Gleichung wie folgt um:

$$2\text{-}\log_{\sin x} \cos x = \log_{\cos x} \sin x$$

$$2\text{-}\log_{\sin x} \cos x = \frac{1}{\log_{\sin x} \cos x}$$

$$2\log_{\sin x} \cos x - (\log_{\sin x} \cos x)^2 = 1$$

$$(\log_{\sin x} \cos x - 1)^2 = 0$$

$$\log_{\sin x} \cos x = 1$$

$$\sin x = \cos x$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Da der Logarithmus nur für positive Werte definiert ist, also $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ gelten muß, erhalten wir $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ als Lösung.

Aufgabe L 57

Die Lösungen der gegebenen Gleichung sind

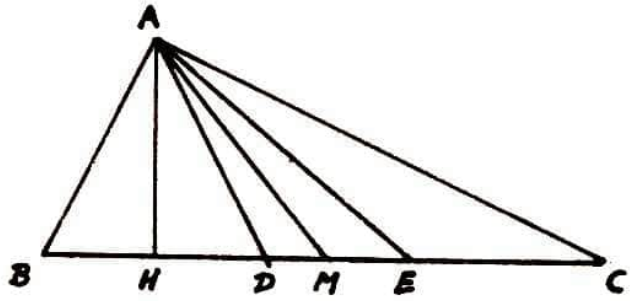
$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{4n^2-3}}{2}.$$

Sie hat ganzzahlige Lösungen, falls $4n^2-3 = k^2$ gilt, wobei k eine natürliche Zahl ist. Also muß auch $4n^2-k^2 = 3$ und somit $(2n-k)(2n+k) = 3$ gelten.
Wir erhalten die beiden Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} 2n-k &= -3 \\ 2n+k &= -1 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} 2n-k &= 1 \\ 2n+k &= 3. \end{aligned}$$

Als Lösungen erhalten wir $n = \pm 1$. Die ganzzahligen Lösungen der gegebenen Gleichung sind somit $x_1 = 0$ und $x_2 = -3$.

Aufgabe L 58



Analyse: $DE = \frac{a}{n}$

$HD = x$

$\sphericalangle DAE = \alpha$

$\sphericalangle HAD = \beta$

Behauptung: $\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$

Beweis:

Es gilt $\tan\beta = \frac{x}{h}$ und $x = h \cdot \tan\beta$, (1)

also $\tan(\alpha+\beta) = \frac{x + \frac{a}{n}}{h}$ und $x = h.\tan(\alpha+\beta) - \frac{a}{n}$ (2)

Aus (1) und (2) folgt

$$h \cdot \tan(\alpha+\beta) - \frac{a}{n} = h \cdot \tan\beta \ .$$

Durch Umformungen erhält man

$$h \cdot \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha \cdot \tan\beta} - \frac{a}{n} = h \cdot \tan\beta$$

$$h \cdot \tan\alpha + h \cdot \tan\beta - \frac{a}{n} + \frac{a}{n}\tan\alpha \cdot \tan\beta =$$

$$= h \cdot \tan\beta - h \cdot \tan\alpha \cdot \tan^2\beta \ .$$

Man erhält

$$\tan\alpha = \frac{a}{nh + a\tan + nh\tan^2} \ .$$

Da $\tan\beta = \frac{x}{h}$, gilt

$$\tan\alpha = \frac{ah}{nh^2 + ax + nx^2} \ . \qquad (3)$$

Nach dem Höhensatz gilt

$h^2 = BH \cdot HC = (\frac{n-1}{2}\ \frac{a}{n} - x)(\frac{n-1}{2}\ \frac{a}{n} + \frac{a}{n} + x)$, d. h.

$$h^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4n^2} - \frac{ax}{n} - x^2 \ . \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) erhält man:

$$\tan\alpha = \frac{ah}{\frac{a^2n}{4} - \frac{a^2}{4n} - ax - nx^2 + ax + nx^2} =$$

$$= \frac{ah}{\frac{a^2n^2 - a^2}{4n}} = \frac{4nh}{a(n^2-1)} .$$

Aufgabe L 59

Unter Verwendung der bekannten Formeln
$2.\cos^2 x = 1+\cos 2x$ und $2.\cos^2 2x = 1+\cos 4x$
erhalten wir durch Substitution und anschließendes Umformen aus der gegebenen Gleichung:

$$\cos 2x + \cos 4x + 2.\cos^2 3x = 0 \qquad (1)$$

Auf die ersten beiden Glieder der Gleichung (1) wenden wir die Formel $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ an und erhalten:

$$2\cos 3x \,.\, \cos x + 2.\cos^2 3x = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\cos 3x(\cos x + \cos 3x) = 0.$$

Analog formen wir den Term $\cos x + \cos 3x$ um und erhalten schließlich

$$\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 3x = 0 \,. \qquad (2)$$

Die Lösungen der Gleichung (2) lauten

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k \,.\, 180^\circ$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + l \,.\, 90^\circ$$

$$x_3 = \frac{\pi}{6} + m \,.\, 60^\circ \qquad \text{mit } k,l,m = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Eine Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösungen.

Liebe Wurzelleser!

Die Betreuung der Mathematiklager des Bezirkes Gera bildet einen wesentlichen Bestandteil der Arbeit unseres Jugendobjekts, das auch die Wurzel herausgibt, und ist Teil unserer Bemühungen um eine gute Studienvorbereitung.
Daher der folgende Artikel aus der Sicht einer Teilnehmerin. Wir möchten ihn als Aufforderung verstanden wissen, daß uns die Leser über ihre Erfahrungen auf dem Gebiet der Studienvorbereitung in ihren Bezirken berichten.

Mathematiklager Winter 1980

Es ist schon seit Jahren zu einer guten Tradition geworden, daß die Mitglieder des Bezirksklubs Junger Mathematiker Gera den ersten Teil ihrer Februarferien im Spezialistenlager verbringen. Das diesjährige Winterlager fand vom 11. - 20. 2. in der Diesterweg-Oberschule in Lobenstein statt. Die langjährigen Teilnehmer hatten die Schule noch als renovierungsbedürftig in Erinnerung. Doch in den letzten drei Jahren wurde hier viel verändert, und so fanden wir zur Freude aller optimale Bedingungen vor.

Die meisten Schüler kamen direkt von der Bezirksolympiade aus Kaulsdorf, wo wir uns schon intensiv mit der Mathematik beschäftigt hatten. In 34 Unterrichtsstunden wollten wir hier unser Wissen vertiefen. Entsprechend dem gestaffelten Lehrprogramm beschäftigten sich

- die 8. Klassen mit Zahlentheorie, Logik, Mengenlehre, elementarer Geometrie,
- die 9. Klassen mit Determinanten, räumlicher Geometrie, Aufgabentraining,
- die 10. Klassen mit Wahrscheinlichkeitsrechnung, Graphentheorie, Aufgabentraining,
- die 11./12. Klassen mit Topologie, linearer Optimierung, Aufgabentraining.

Die Themen waren zum größten Teil recht ansprechend.

Für die Gestaltung des wirklich interessanten Unterrichts zeigten sich Studenten und wissenschaftliche Mitarbeiter der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena verantwortlich. Sie waren immer bemüht, jeden Einzelnen aktiv in das Stundengeschehen einzubeziehen. Aber natürlich kam auch die Freizeit nicht zu kurz, denn wir hatten ja Ferien. Für ein interessantes Programm sorgte das Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit und die FDJ-Leitung des Bezirksklubs. Wir verfolgten begeistert die Übertragung von den Olympischen Winterspielen aus Lake Placid und freuten uns über die großen Erfolge der Sportler der DDR. Aber auch wir selbst waren sportlich aktiv, so kürten wir den Tischtennismeister des Lagers und nutzten einige Male die Turnhalle zum Volleyballspielen.
Durch eine Wanderung und einen Lichtbildervortrag lernten wir

die Umgebung Lobensteins kennen. Eine Exkursion führte uns in die Drachenhöhle nach Syrau. Desweiteren standen Veranstaltungen wie das traditionelle Skatturnier, eine Vortrag über die Geschichte der Zinnfiguren, eine Betriebsbesichtigung und auch einige Diskotheken auf dem Programm.
Den Höhepunkt bildete der Abschlußabend, der ganz im Zeichen des Tages, also des Faschings, stand. Mit Phantasie und Geschick hatte sich jeder ein Kostüm gebastelt. Alle Klassengruppen trugen mit einem lustigen Beitrag zur Bereicherung des Festablaufes bei. Darum war auch der "Elferrat" (bestehend aus 7 Mann, wir dachten im Hexalsystem) bemüht. So fand das Lager einen gelungenen Abschluß. Ein besonderes Lob gebührt dem Küchenkollektiv der Schule, das uns die ganze Zeit hervorragend versorgte.

Für mich persönlich war es das letzte Lager. Ich möchte im September ein Lehrerstudium in der Fachrichtung Mathematik/Geographie aufnehmen. Und ich glaube, gerade in dieser Hinsicht hat mir der Unterricht in den Lagern sehr geholfen. Er trägt doch zum besseren Verständnis des abstrakten Denkens in diesem Fach bei.
Auf jeden Fall waren wie wohl für jeden Teilnehmer auch für mich diese 10 Tage in Lobenstein wieder ein schönes Erlebnis.

Karin Hoffrichter
Schülerin 12. Klasse
Bad Blankenburg

Zentrale Lösungsvorschläge

für die Aufgaben der Bezirksolympiade

Aufgabe 1.

Für $n \leq m$ hat jede nichtleere Teilmenge von N gemeinsame Elemente mit M. Da jede Menge aus n Elementen genau 2^n Teilmengen hat, von denen genau eine die leere Menge ist, gibt es für $n \leq m$ genau 2^n-1 Teilmengen von N, die gemeinsame Elemente mit M haben.
Für $n > m$ ermittelt man zunächst die Anzahl derjenigen Teilmengen von N, die keine gemeinsamen Elemente mit M haben. Die Anzahl dieser Mengen ist gleich der Anzahl der Teilmengen der Menge $\{m+1, m+2, \ldots, n\}$, also gleich 2^{n-m}. Folglich gibt es für $n > m$ genau 2^n-2^{n-m} Teilmengen, die gemeinsame Elemente mit M haben.

Aufgabe 2.

Es seien die Größen der Winkel $\sphericalangle$ BFE, $\sphericalangle$ EFG bzw. $\sphericalangle$ GFC mit α_1, α bzw. α_2 bezeichnet, analog seien die aus Abb. 1 ersichtlichen Bezeichnungen

$\beta_1, \beta, \beta_2, \gamma_1, \gamma, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \delta$ eingeführt. Hiernach gilt stets

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha = \beta_1+\beta_2+\beta = \gamma_1+\gamma_2+\gamma = \delta_1+\delta_2+\delta = 180^\circ. \qquad (2)$$

Aus der Voraussetzung (1) folgt ferner stets

$$\frac{\overline{AE}+\overline{EB}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{DA}+\overline{BC}}{\overline{BC}} \quad \text{und damit} \quad \overline{EB}(\overline{DA}+\overline{BC}) = \overline{AB}.\overline{BC}\ .$$

Analog erhält man aus (1) weitere Gleichungen, insgesamt

$\overline{BE}(\overline{DA}+\overline{BC}) = \overline{AB}.\overline{BC}$, $\overline{BF}(\overline{AB}+\overline{CD}) = \overline{AB}.\overline{BC}$,
$\overline{CG}(\overline{BC}+\overline{DA}) = \overline{BC}.\overline{CD}$, $\overline{CF}(\overline{AB}+\overline{CD}) = \overline{BC}.\overline{CD}$,
$\overline{DG}(\overline{BC}+\overline{DA}) = \overline{CD}.\overline{DA}$, $\overline{DH}(\overline{AB}+\overline{CD}) = \overline{CD}.\overline{DA}$,
$\overline{AE}(\overline{BC}+\overline{DA}) = \overline{DA}.\overline{AB}$, $\overline{AH}(\overline{AB}+\overline{CD}) = \overline{DA}.\overline{AB}$.

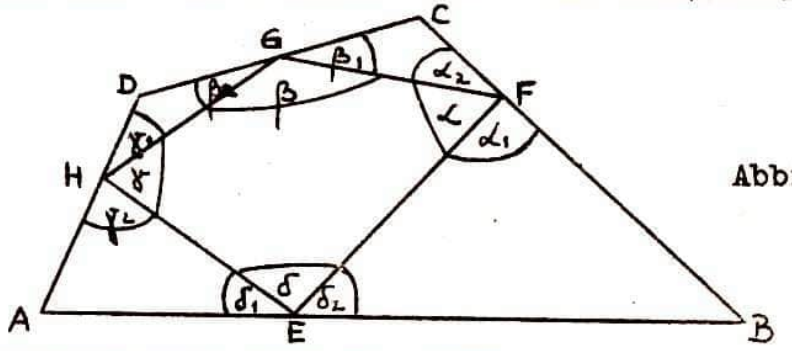


Abbildung 1

Folglich gilt:

$$\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{\overline{BC}+\overline{DA}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AH}}\ . \qquad (3)$$

Der verlangte Beweis kann nun in den folgenden Teilbeweisen I, II erbracht werden:

(I.) Angenommen, ABCD sei ein Tangentenviereck, d. h. es gelte $\overline{AB}+\overline{CD} = \overline{BC}+\overline{DA}$. Zu zeigen ist, daß dann EFGH ein Sehnenviereck ist.

Nach (3) folgt aus der Voraussetzung

$\overline{BE} = \overline{BF}$, $\overline{CG} = \overline{CF}$, $\overline{DG} = \overline{DH}$, $\overline{AE} = \overline{AH}$.

Daher gilt

$\delta_2 = \alpha_1, \alpha_2 = \beta_1, \beta_2 = \gamma_1, \gamma_2 = \delta_1$ und somit

$\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = \beta_1 + \beta_2 + \delta_1 + \delta_2$.

Wegen (2) folgt hieraus die Behauptung, daß

$\alpha + \gamma = \beta + \delta$ gilt, d. h. EFGH ein Sehnenviereck ist.

(II) Angenommen, ABCD sei kein Tangentenviereck, so daß o.B.d.A. $\overline{AB} + \overline{CD} > \overline{BC} + \overline{DA}$ vorausgesetzt werden kann. Zu zeigen ist, daß dann EFGH kein Sehnenviereck ist.
Nach (3) folgt aus der Voraussetzung
$\overline{BE} > \overline{BF}$, $\overline{CG} > \overline{CF}$, $\overline{DG} > \overline{DH}$, $\overline{AE} > \overline{AH}$.
Da im Dreieck die größere Seite dem größeren Winkel gegenüberliegt, folgt daraus $\alpha_1 > \delta_2$, $\alpha_2 > \beta_1$, $\gamma_1 > \beta_2$, $\gamma_2 > \delta_1$ und damit wegen (2)

$$\alpha + \gamma < \beta + \delta .$$

Also ist EFGH in diesem Fall kein Sehnenviereck.

Aufgabe 3A

Angenommen, f sei eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt. Wegen (1) gilt dann $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$, also
$$f(0) = 0. \qquad (4)$$
Für jedes reelle x gilt wegen (1) somit
$f(x)+f(-x) = f(x+(-x)) = f(0) = 0$, also
$$f(-x) = -f(x). \qquad (5)$$
Wegen (1), (5) gilt daher für alle Paare $(x_1;x_2)$ reeller Zahlen $f(x_1-x_2) = f(x_1+(-x_2)) = f(x_1)+f(-x_2)$, also
$$f(x_1-x_2) = f(x_1) - f(x_2). \qquad (6)$$

Für alle x, die von 0 und 1 verschieden sind, gilt nun nach (3)

$$f(x) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 f\left(1+\frac{1-x}{x}\right), \quad \text{also nach (1) und (2)}$$

$$= x^2 + x^2 f\left(\frac{1-x}{x}\right), \quad \text{also nach (3)}$$

$$= x^2 + (1-x)^2 f\left(\frac{x}{1-x}\right) = x^2 + (1-x)^2 f\left(\frac{1}{1-x} - 1\right), \quad \text{also nach (6), (2)}$$

$$= x^2 + (1-x)^2 f\left(\frac{1}{1-x}\right) - (1-x)^2, \quad \text{also nach (3)}$$

$$= x^2 + f(1-x) - (1-x)^2, \quad \text{also nach (6), (2)}$$

$$= x^2 + 1 - f(x) - (1-x)^2 = 2x - f(x)$$

und daher

$$2f(x) = 2x, \qquad (7)$$
$$f(x) = x.$$

Mit (2), (4), (7) ist gezeigt, daß nur die für alle reellen x durch $f(x) = x$ definierte Funktion f den Bedingungen (1), (2), (3) genügen kann.

Diese Funktion genügt auch tatsächlich den Bedingungen (1) , (2) , (3) . Daher ist genau sie die gesuchte .

Aufgabe 3B

Es sei

$$f(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2} .$$

Dann gilt für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ [1]

$$f(2^k) = \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{k+1}+1} + \frac{1}{2^{k+1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+2}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{2k-1}+1} + \frac{1}{2^{2k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^{2k}}\right). \qquad (2)$$

Die erste Klammer auf der rechten Seite von (2) enthält 2^k Summanden, die sämtlich größer oder gleich $\frac{1}{2^{k+1}}$ sind; die zweite Klammer enthält 2^{k+1} Summanden, die sämtlich größer oder gleich $\frac{1}{2^{k+2}}$ sind, usw. usw. Schließlich enthält die letzte Klammer 2^{2k-1} Summanden, die sämtlich größer oder gleich $\frac{1}{2^{2k}}$ sind. Somit gilt

$$f(2^k) > 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} + 2^{k+1} \cdot \frac{1}{2^{k+2}} + \ldots + 2^{2k-1} \cdot \frac{1}{2^{2k}} = k \cdot \frac{1}{2}$$

Für $k = 2000$ ist daher $f(2^k) = f(2^{2000}) > 1000$.

Nun gilt für alle $n \geq 2$

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}$$

$$> \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} = \frac{n^2-n-1}{n(n+1)^2} > 0,$$

---

[1] Hier würde auch genügen: für $k = 2000$.

da $n^2-n-1 = n(n-1)-1 \geq 2.1-1 > 0$ ist.
Daraus folgt $f(n_1) > f(n_2)$, falls n_1, n_2 natürliche Zahlen mit $n_1 > n_2 \geq 2$ sind.
Hiernach ist (z. B.) die Zahl $p = 2000$ eine Zahl der zu ermittelnden Art [2]; denn für jede 2000-stellige natürliche Zahl n gilt
$f(n) \geq f(10^{2000}) > f(2^{2000}) > 1000$.

2) Selbstverständlich gibt es auch kleinere geeignete Zahlen p.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, F. Pegenau
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR:
0,20 M

6
80

Muhammad ibn Musa al-Huwarizmi

Die Flucht des Propheten Mohammed, des Begründers des Islam, im Jahre 622 unserer Zeitrechnung aus seiner Geburtsstadt Mekka, wo er wirkte, nach Medina - Städte im heutigen Saudi-Arabien - ist der Beginn des ungewöhnlichen raschen Aufstiegs der arabischen Welt.

Umgeben von Ägyptern, Syriern, Babyloniern und Persern waren die Bewohner der arabischen Halbinsel nur in ihren Randgebieten von den auf- und niedergehenden Kulturen ihrer Nachbarn beeinflußt worden, während das Innere ihres Landes, das Wüstencharakter zeigt, niemals von diesen Vorgängen berührt worden war.

Hier lebten die Bewohner bis zu dieser Zeit - dem Jahre Eins des heutigen mohammedanischen Kalenders - in primitiven Verhältnissen. Als aber Mohammed im Jahre 632, also 10 Jahre nach seiner Flucht, starb, hatte sein Land bereits starke Machtpositionen aufgebaut. Mohammeds Nachfolger - die Kalifen - setzten das von ihm begonnene Werk fort. Sie verbreiteten seine Glaubenssätze mit Feuer und Schwert. Und nicht ganz 100 Jahre genügten, um nicht nur alle Randstaaten zu unterwerfen, sondern auch längs der Küste bis nach Spanien vorzudringen und auch Spanien zum größten Teil zu erobern. Bereits 641 waren die Mohammedaner unter der grünen Fahne ihres Propheten in Ägypten eingedrungen.

Die Eroberer verwüsteten die Universitätsgebäude in Alexandria und verbrannten zum größten Teil die kostbaren Sammlungen, die hier in über 970jähriger Arbeit gesammelt worden waren.

Bei diesen wie fast bei allen ihren Siegeszügen trafen die Eroberer auf Völker, die eine höhere Kultur hatten als sie selbst. Sie mußten bald erkennen, daß das Beherrschen solcher Länder und die damit verbundene Ausübung der Verwaltungsfunktionen, die Bewältigung der auftretenden Verkehrsprobleme ob zu Lande oder zu Wasser ohne die Benutzung der bereits vorhandenen Erkenntnisse nicht möglich war. Da sie über Kräfte, die das vermochten, nicht verfügten, bedienten sie sich griechischer, indischer, persischer, auch christlicher und jüdischer Gelehrter, wobei sie ihnen gegenüber, was die religiösen Auffassungen betraf, zunächst tolerant waren.

Ihr besonderes Interesse galt zunächst den mathematischen und astronomischen Erkenntnissen, weil sie nicht nur für die Lösung

der ökonomischen Aufgaben notwendig waren, sondern auch zum Erfüllen ihrer religiösen Pflichten, wie sie ihre heilige Schrift, der Koran, vorschreibt. Der Koran enthält z. B. verwickelte Angaben über das Erbrecht, denen ohne mathematische Berechnungen nicht entsprochen werden konnte. Der Koran verlangt auch, daß der gläubige Moslem in seinen täglichen Gebeten sein Antlitz nach Mekka gewandt sich verneigt. Also mußte diese Richtung festgelegt werden. Um dem Rechnung zu tragen, ist in jeder Moschee eine Nische eingebaut, die diese Richtung angibt. Gleichzeitig mit dem Studium der mathematischen und astronomischen Erkenntnisse setzte eine lebhafte Übersetzungstätigkeit der entsprechenden griechischen, lateinischen und indischen Werke in das Arabische ein, das bald in den von den Arabern besetzten Ländern Verständigungsmittel wurde. Nur durch diese Übersetzungen haben wir heute von den Werken von Apollinius, Archimedes, Euklid, Ptolemäus und anderer Wissenschaftler Kenntnis, da die Originale meist verloren gegangen sind oder nur Bruchstücke noch existieren. Von Bedeutung für die Entwicklung der Wissenschaften ist auch, daß in den von Arabern eroberten Ländern bald ein Wohlstand der herrschenden Schicht eintrat und große Paläste, herrliche Moscheen, große Bibliotheken und ausgedehnte Bewässerungsanlagen gebaut wurden.

Im 8. Jahrhundert tauchten auch arabische Übersetzer und Wissenschaftler von Bedeutung auf. Der bekannteste Mathematiker ist Muhammad ibn Musa mit dem Beinamen al-Huwarizmi, dem Namen seiner Geburtsstadt, dem heutigen Chiwa in Usbekistan. Er lebte im ersten Jahrviertel des 9. Jahrhunderts in Bagdad, das sich damals zu einem bedeutenden wissenschaftlichen Zentrum entwickelte. Sein wissenschaftliches Hauptwerk ist in einer lateinischen Übersetzung, die aus dem 13. Jahrhundert stammt, erhalten geblieben und wird in der Universität Cambridge aufbewahrt.

Der Titel der Übersetzung lautet: Algorithmi de numero Indorum (Vom Algorithmus der Zahl der Inder), woraus der in der Mathematik gebräuchliche Ausdruck "Algorithmus" hergeleitet ist.

Durch dieses Werk wurde Westeuropa mit dem indischen System der Zahlenbereiche und dem dezimalen Stellenwertsystem bekannt. Es enthält auch eine eingehende Behandlung der Rechenoperationen. Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ganzer

Zahlen werden an zahlreichen Beispielen erläutert. Auch die Behandlung von Brüchen erfolgt, ohne daß z. B. die für die Addition und Subtraktion notwendige Auffindung des Hauptnenners erfolgt.

In der Bibliothek der Universität Oxford wird eine arabische Handschrift der Algebra von Muhammad ibn Musa aufbewahrt. Sie ist eine Art Leitfaden, der die Lösung von Aufgaben aus dem täglichen Leben und des Erbrechts behandelt. Diese Algebra enthält die Lehre von der Lösung linearer und quadratischer Gleichungen. Da das Werk für breite Kreise gedacht ist, geht es nicht immer streng wissenschaftlich vor, aber sein Einfluß auf die Entwicklung dieses Gebietes ist groß, und es bewahrte ihn bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts. Der Mangel an axiomatischer Fundierung unterscheidet das Werk wesentlich von der Euklidschen Geometrie.

Die lineare Gleichung $ax = b$ wird von Muhammad nach der Regel der zwei Fehler oder, wie sie auch genannt wird, der Methode der Waagschale behandelt. Es werden Versuchswerte e_1 und e_2 angenommen, die gegenüber dem gesuchten Wert die Fehler n_1 und n_2 aufweisen. Dabei sind die Zahlen e_1 und e_2 so zu wählen, daß e_1 einen zu großen, e_2 einen zu kleinen Wert für x liefert.

Es gilt also

$$ae_1 = b + n_1$$
$$ae_2 = b - n_2$$

oder

$$ae_1 \cdot n_2 = bn_2 + n_1 \cdot n_2$$
$$ae_2\, n_1 = bn_1 - n_1\, n_2$$

Aus diesem Ansatz wird durch komplizierte Umformungen das Ergebnis

$$x = \frac{b}{a} = \frac{e_1 \cdot n_2 + e_2 \cdot n_1}{n_2 + n_1}$$

hergeleitet.

Ein Beispiel zeigt die Bedeutung dieses komplizierten Weges. Vorgelegt sei die Gleichung

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 8 .$$

Für $e_1 = 24$

ergibt sich $24 - 8 - 6 = 10$

und damit $n_1 = 10 - 8 = 2$.

Für $e_2 = 12$

erhält man $12 - 4 - 3 = 5$

und damit $n_2 = 8 - 5 = 3.$

Also $x = \frac{3 \cdot 24 + 2}{3 + 2} = \frac{96}{5}$

Ziel der Rechnung ist es, das Rechnen mit Brüchen so weit wie möglich zu vermeiden.

Dem Lösen der quadratischen Gleichungen geht eine eingehende Betrachtung der hier möglichen Formen voraus.

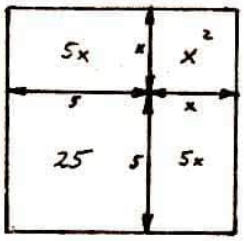
Dabei ergeben sich folgende 4 Fälle:

1) $x^2 + 10x - 39 = 0$

2) $x^2 + 10x + 39 = 0$

3) $x^2 - 10x + 16 = 0$

4) $x^2 - 10x - 11 = 0$,



wobei die Koeffizienten so gewählt werden, daß die Lösungen positive Werte ergeben. Die Lösung der Gleichung 1 erfolgt in folgender Weise:

An das Quadrat x^2 werden zwei Rechtecke von je 5x in der skizzierten Weise angelegt und die erhaltene Figur zu einem Quadrat ergänzt, dessen Flächeninhalt dann $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$ beträgt. Die Seite des so erhaltenen Quadrats ist 8, d. h. $x + 5 = 8$, und so ergibt sich für $x = 3$.

In ähnlicher Weise werden die Gleichungen 3 und 4 gelöst.

Für die Gleichung 2 gibt es keine Lösung, da die Summe von Quadrat und Rechteck und einer bekannten Fläche (39) nicht Null sein kann.

Zeitgenossen von Muhammad und auch spätere arabische Mathematiker haben diesen Lösungsweg vereinfacht, insbesondere weitgehend die Fallunterscheidungen beseitigen können.

Diese Behandlung der quadratischen Gleichung bildet auch die Ausgangsposition bei der Lösung der Gleichung 3. Grades, wie sie sich in dem Werk des italienischen Mathematikers Hieronimo Cardano (1501 - 1676) findet.

Es sind auch Abhandlungen Muhammads zu geometrischen Problemen vorhanden. Sie sind aber von geringerer Bedeutung und liefern kaum Ergebnisse, die über die der Griechen hinausgehen.

Prof. Otto Stamfort
Jena

Preisaufgaben

M 31 ①

Auf wieviel Nullen endet die Zahl 723! ?

M 32 ①

Die Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ genügen den Ungleichungen $a_1 a_2 > 0$, $a_1 c_1 \geq b_1^2$, $a_2 c_2 \geq b_2^2$.
Man zeige, daß unter diesen Voraussetzungen $(a_1+a_2)(c_1+c_2) \geq (b_1+b_2)^2$ gilt.

M 33 ①

Wieviele fünfstellige Zahlen gibt es, die auf die Ziffer 6 enden und welche durch 3 teilbar sind.

M 34 ①

Man zeige: Für beliebige ganze Zahlen a und b hat das System

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 2t &= a \\ 2x - 2y + z - t &= b \end{aligned}$$

ganzzahlige Lösungen.

M 35 ①

Man zeige, daß für $a^2+b^2+c^2 = 1$ die Ungleichungen $-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$ gelten.

M 36 ②

Пусть K,L,M и N– центры квадратов, построенных (вовне) на сторонах ромба. Доказать, что четырёхугольник KLMN – квадрат.

Einsendeschluß : 15. 9. 1980

Berechnung und Eigenschaften von Primzahlzwillingen

In Wurzel 12/79 wurde die Vermutung ausgesprochen, daß für große Werte von x der Quotient $\frac{z(x)}{x}$ sich wie $\frac{1}{\ln x}$ verhält. z(x) bedeutet die Anzahl der Primzahlzwillinge im Bereich der ersten x potentiellen Zwillinge. (Siehe 12/79, S. 179). Diese Vermutung war im untersuchten Bereich der natürlichen Zahlen von 1 bis 400000 sehr naheliegend.

Untersucht man aber größere Bereiche, so ergibt sich, daß diese Vermutung nicht mehr zutrifft. Der Quotient $r(x) = \frac{z(x)}{x}$ scheint mit zunehmendem x schneller gegen Null zu streben als die Funktion $\frac{1}{\ln x}$. In der folgenden Tabelle sind für größere x-Werte die Größen von r(x) und $\frac{1}{\ln x}$ angegeben.

x	r(x)	$\frac{1}{\ln x}$	$r(x) : \frac{1}{\ln x}$
40000	0,095	0,0939	1,016
45000	0,0935	0,0933	1,002
50000	0,0916	0,0924	0,991
55000	0,0902	0,0916	0,985

Verwenden wir die bereits bekannten Anzahlen der Zwillinge für die Bereiche bis 10^5, 10^6 bis 10^9 (siehe Literaturangabe /1/), so erhalten wir folgende Werte für $r(x) : \frac{1}{\ln x}$

x	z(x)	r(x)	$\frac{1}{\ln x}$	$r(x) : \frac{1}{\ln x}$
10^5	8169	0,08169	0,0868583	0,940
10^6	58980	0,05898	0,0723819	0,8148
10^7	440312	0,04403	0,0620416	0,7097
10^8	3424506	0,03424	0,0542864	0,6308
10^9	27412679	0,02741	0,0482546	0,5680

Um mit der Funktion ln x zu einer besseren Abschätzung der Anzahl z(x) zu kommen, untersuchen wir das Verhältnis der Anzahl der Primzahlzwillinge zur Anzahl der Primzahlen im gleichen Bereich. Unter Verwendung des bereits bewiesenen Primzahlsatzes $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} : \frac{1}{\ln n} = 1$ läßt sich dann auch eine Aussage über das Verhalten von z(n) für große n gewinnen. Wir verwenden dazu die bereits errechneten Werte von $\pi(n)$ und z(n) in den Bereichen 10^2, 10^3,... bis 10^{10}.

n	(n)	z(n)	z(n): (n)	(n):n
10^2	25	8	0,32	0,25
10^3	168	35	0,20833	0,168
10^4	1229	205	0,16680	0,1229
10^5	9592	1224	0,12761	0,09592
10^6	78498	8169	0,10407	0,078498
10^7	664579	58980	0,08875	0,066458
10^8	5761455	440312	0,07642	0,057614
10^9	50847543	3424506	0,06735	0,050848
10^{10}	455052511	27412679	0,06024	0,045505

Berechnet man nun das Verhältnis der beiden Quotienten, so erhalten wir die Zahlenfolge:
1,28; 1,24; 1,357; 1,33038; 1,325766; 1,3354298; 1,3264137; 1,3245358; 1,3238105.
Nehmen wir an, daß diese Folge einem bestimmten Wert C zustrebt, wenn n immer größer wird (C dürfte ungefähr 1,32... betragen), so können wir also sagen: $\frac{z(n)}{\pi(n)} : \frac{\pi(n)}{n} \approx C$.
Daraus folgt für z(n) ein Näherungswert: $z(n) \approx C.n.\left[\frac{\pi(n)}{n}\right]^2$.
Nach dem Primzahlsatz können wir für $\frac{\pi(n)}{n} \approx \frac{1}{\ln n}$ setzen.
Wir erhalten dann für z(n):

$$\frac{z(n)}{n} \approx \frac{C}{\ln^2 n} \qquad (C \approx 1{,}32\ldots \text{ und } \ln^2 n = (\ln n)^2$$

Ersetzen wir n durch 10x, wobei also x die Anzahl der potentiellen Primzahlzwillinge im Bereich der natürlichen Zahlen von 1 bis n bedeutet, und beachten wir, daß für sehr große x $\ln 10 \ll \ln x$ ist, geht unsere Abschätzungsformel über in

$$\frac{z(x)}{x} \approx \frac{10\,C}{\ln^2 x} .$$

Wir können daraus schließen, daß die Ungleichung gilt

$$\frac{C}{(\ln x)^2} < \frac{z(x)}{x} \qquad \text{(für sehr große x)} .$$

Die am Schluß des Artikels in 12/79, S. 184, angegebene Ungleichung ist daher durch folgende Ungleichung zu ersetzen:

$$\frac{C}{(\ln x)^2} < \frac{z(x)}{x} < \frac{C_1}{\ln \ln x} .$$

Über die Differenz benachbarter Primzahlen

Die Primzahlverteilung läßt sich mit Hilfe des Begriffs des Primzahl-Paares m-ter Ordnung näher charakterisieren.

Wir definieren: Zwei benachbarte Primzahlen $p_1 < p_2$ nennen wir ein Primzahl-Paar m-ter Ordnung, wenn die Differenz $p_2 - p_1 = 2m$ beträgt. m ist eine natürliche Zahl > 0.

Primzahl-Paare erster Ordnung sind also unsere Primzahlzwillinge. Es ist leicht zu zeigen, daß im Bereich der Primzahlen Primzahl-Paare beliebig hoher Ordnung existieren können. Ist m eine beliebige natürliche Zahl, so liegen zwischen den Zahlen $(2m)! + 1$ und $(2m)! + 2m + 1$ keine Primzahlen. Sind die beiden Zahlen Primzahlen, so ist die Ordnung dieses Paares 2m. Sind sie nicht Primzahlen, dann ist der Abstand der benachbarten Primzahlen noch größer als 2m.

Es ist jetzt noch nicht bekannt, ob alle Primzahl-Paare m-ter Ordnung unendlich oft vorkommen oder nicht. Wenn das der Fall wäre, so wäre damit bewiesen, daß es unendlich viele Zwillings-Paare gibt. Fest steht jedenfalls folgende Behauptung: Je größere Bereiche untersucht werden, desto höhere Ordnungen treten auf. In der folgenden Tabelle geben wir die relativen Häufigkeiten der einzelnen Ordnungen für die Bereiche bis 10^2, 10^3 und 10^4 an. Das Primzahl-Paar (2,3) bleibt unberücksichtigt.

Im Bereich bis 10^2 treten die Ordnungen m=1,2,3 und 4 auf

m =	1	2	3	4
Rel. Häufigkeit	0,3478	0,3043	0,3043	0,0435

Im Bereich bis 10^3 treten die Ordnungen m=1 bis 7 und 9, 10 auf

m =	1	2	3	4	5	6	7	8
R.H.	0,2108	0,2410	0,2651	0,0904	0,0964	0,0422	0,0422	-
m =	9	10						
R.H.	0,0060	0,0060						

Im Bereich bis 10^4 treten bereits Ordnungen von 1 bis 18 auf

m =	1	2	3	4	5	6
R.H.	0,16365	0,16530	0,24013	0,08388	0,10033	0,08964

m =	7	8	9	10	11	12
R.H.	0,04358	0,02632	0,03454	0,01233	0,01069	0,01398
m =	13	14	15	16	17	18
R.H.	0,00329	0,00329	0,00658	0,00082	0,00082	0,00082

Da die Primzahlen bis mindestens 10^{13} bereits bekannt sind, könnte ein leistungsfähiger Computer diese Tabellen fortsetzen und vielleicht eine naheliegende Vermutung finden.
Bei der anscheinend unregelmäßigen Folge der Primzahlen und demnach auch unregelmäßigen Verteilung der Ordnungen m ist es durchaus denkbar, daß mit wachsendem n die relativen Häufigkeiten der verschiedenen Ordnungen der Primzahl-Paare gleichen Werten zustreben. Setzen wir die Richtigkeit dieser kühnen Vermutung voraus, so läßt sich mit Hilfe der Abschätzungsformel $\frac{z(n)}{\tilde{\pi}(n)} \approx \frac{C \cdot \tilde{\pi}(n)}{n} \approx \frac{C}{\ln n}$ angeben, wieviele verschiedene Ordnungen von Primzahl-Paaren bei großem n zu erwarten sind. Für große n ist $\tilde{\pi}(n)$ nahezu gleich der Anzahl der Primzahl-Paare, also $\frac{z(n)}{\tilde{\pi}(n)}$ die relative Häufigkeit der Zwillings-Paare. Treten alle m verschiedenen Ordnungen mit gleicher relativer Häufigkeit auf, so müßte $m \cdot \frac{z(n)}{\tilde{\pi}(n)} \approx m \cdot \frac{C}{\ln n} \approx 1$, also $m \approx \frac{\ln n}{C}$.
Die Richtigkeit oder Ungültigkeit der in diesem Artikel ausgesprochenen Vermutungen zu beweisen, wäre eine dankbare Aufgabe für unsere jungen Mathematiker.
Zum Schluß dieses Artikels wollen wir die in Wurzel 8/9 des Jahrgangs 1978 angegebenen bisher größten bekannten Primzahl-Zwillinge mitteilen:

$$p_1 = 76 \cdot 3^{139} - 1 \qquad p_2 = p_1 + 2$$

Diese 69-stelligen Zahlen zu berechnen, übersteigt die Leistungsfähigkeit eines elektronischen Taschenrechners. Aber jeder Schüler kann sie berechnen, etwas Geduld ist dabei erforderlich.
Zunächst kann man mit dem Taschenrechner eine Vorarbeit leisten.

$$\begin{aligned} p_1 &= 76 \cdot 3^3 \cdot 3^{136} - 1 \\ &= 76 \cdot 27 \cdot (81^4)^8 \cdot 6561 - 1 \\ p_1+1 &= 13463172 \cdot (43046721)^8 \\ p_1 &= 13463172 \cdot \left[\left[(43046721)^2\right]^2\right]^2 - 1 \end{aligned}$$

Von hier ab muß man selbst weiterrechnen. Das Ergebnis ist fol-

gende 69-stellige Zahl:

p_1 = 158733282881841916274491012923328900402919059319203520296442208198251

$P_2 = p_1 + 2$

Literaturangaben:

/1/ Arthur Engel: Wahrscheinlichkeit und Statistik, Klett Verlag, Stuttgart

Dr. B. Hanisch
Halle

Fortsetzung: Lösungen der Bezirksolympiade

Aufgabe 4.

Setzt man $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} = d$, $\overline{BD} = e$, $\overline{CD} = f$, so gilt für jedes Tetraeder der zu untersuchenden Art: AD steht sowohl auf BD als auch auf CD und daher auf der Ebene durch B, C, D senkrecht. Ferner hat das bei D rechtwinklige Dreieck BCD den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\overline{BD} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$. Daher ist $V = \frac{1}{3}\overline{AD} \cdot \frac{1}{2} ef = \frac{1}{6} def$. Weiter gilt $a^2 = e^2+f^2$, $b^2 = f^2+d^2$, $c^2 = d^2+e^2$.

Zu untersuchen ist also die Summe

$s = d+e+f+\sqrt{e^2+f^2} + \sqrt{f^2+d^2} + \sqrt{d^2+e^2}$ unter der Bedingung, daß ein Tetraeder der zu untersuchenden Art mit den genannten d, e, f, dem Volumen V und folglich mit

$d \cdot e \cdot f = 6\,V$

existiert.

Hierzu zeigen wir zunächst die Hilfsaussagen , daß für beliebige p, q, r > 0 die Ungleichungen

$p^2 + q^2 \geq 2pq$, also $\sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{2pq}$ und (1)

$(p+q+r)^3 \geq 27pqr$, also $p+q+r \geq 3\sqrt[3]{pqr}$ (2)

gelten. Ungleichung (1) folgt aus $p^2-2pq+q^2 = (p-q)^2 \geq 0$. Um (2) zu zeigen, kann o.B.d.A. $(0<)\ p \leq q \leq r$, also $q = p+x$, $r = p+x+y$ mit $x,y \geq 0$ angenommen werden. Damit folgt (2) aus

$$(p+q+r)^3 = (3p + 2x + y)^3$$
$$= 27p^3 + 54p^2x + 27p^2y + 36px^2 + 36pxy + 9py^2 + 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$
$$\geq 27p^3 + 54p^2x + 27p^2y + 27px^2 + 27pxy$$
$$= 27p(p+x)(p+x+y) = 27pqr$$

(I.) Unter Verwendung von (1), (2) erhält man nun: Für jedes Tetraeder der zu untersuchenden Art gilt

$$s \geq 3 \cdot \sqrt[3]{def} + \sqrt{2ef} + \sqrt{2fd} + \sqrt{2de}$$
$$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{def} + 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2ef}\sqrt{2fd}\sqrt{2de}}$$
$$= 3(1+\sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{def},$$
$$s \geq 3(1+\sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{6V}. \quad (6)$$

(II.) Weiter beweist man: Unter den Tetraedern der zu untersuchenden Art gibt es auch eines mit

$$d = e = f = \sqrt[3]{6V}. \quad (4)$$

Man wähle nämlich ein gleichseitiges Dreieck ABC mit

$$a = b = c = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{6V}$$

als Seitenlänge, errichte in seinem Schwerpunkt S die Senkrechte t auf der Dreiecksfläche und trage auf t von S aus eine Strecke SD der Länge $\frac{a}{\sqrt{6}}$ ab. Wegen $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ wird dann einerseits, wie als (4) beabsichtigt,

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = \sqrt{\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{6V},$$

andererseits sind die Dreiecke BDC, CDA, ADB gleichschenklig mit der Schenkellänge $\frac{a}{\sqrt{2}}$ und der Basislänge a, also bei D rechtwinklig, und folglich hat auch das Volumen $\frac{1}{6} \cdot d \cdot e \cdot f$ von ABCD den verlangten

Wert V. Für ein solches Tetraeder (der zu untersuchenden Art und mit (4)) wird nun

$$s = 3d + 3d\sqrt{2} = 3(1+\sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{6V} . \qquad (5)$$

Aus I. (3) und II. (5) folgt: Unter allen Tetraedern der zu untersuchenden Art gibt es eines mit kleinstmöglicher Summe s, diese lautet

$$s = 3(1+\sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{6V}.$$

Aufgabe 5.

Angenommen, es gäbe positive ganze Zahlen p, q mit der in der Aufgabe genannten Eigenschaft.

Wegen der Irrationalität von $\frac{1}{\sqrt{3}}$ wäre dann $\frac{1}{\sqrt{3}} \neq \frac{p}{q}$, also

(A) $\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{p}{q}$ oder (B) $\frac{p}{q} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2}$.

Aus (B) folgt $p\sqrt{3} < q \qquad (1)$

und $3q^2\sqrt{3} < 9pq + 1. \qquad (2)$

Aus (1) erhält man $3p^2 < q^2$, wegen der Ganzzahligkeit also $3p^2 + 1 \leq q^2$ und damit

$$81p^2q^2 + 27q^2 \leq 27q^4, \qquad (3)$$

aus (2) folgt $27q^4 < 81p^2q^2 + 18pq + 1, \qquad (4)$

aus (1) $18pq < 6q^2\sqrt{3}. \qquad (5)$

(3), (4), (5) ergeben

$$27q^2 < 6q^2\sqrt{3} + 1, \qquad (6)$$

wegen $1 \leq q^2$ also $27 < 6\sqrt{3} + 1$, womit ein Widerspruch erreicht ist (es folgte $13 < 3\sqrt{3}$, $169 < 27$).

Aus (A) folgt $9pq - 1 < 3q^2\sqrt{3} \qquad (7)$

und $q < p\sqrt{3} \qquad (8)$

Aus (8) erhält man $q^2 < 3p^2$, wegen der Ganzzahligkeit also $q^2 + 1 \leq 3p^2$ und damit

$$27q^4 + 27q^2 \leq 81p^2q^2, \qquad (9)$$

aus (7) folgt

$$81p^2q^2 - 18pq + 1 < 27q^4, \qquad (10)$$

sowie $18pq - 2 < 6q^2\sqrt{3}. \qquad (11)$

(9), (10) und (11) ergeben ebenfalls den Widerspruch (6). Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 6.

Angenommen, zu einem gegebenen Wert $a > 0$ habe das Gleichungssystem

$$x^5 + y^5 = 1, \tag{1}$$

$$x + y = a \tag{2}$$

eine reelle Lösung $(x;y)$. Dann gilt wegen (2)

$$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5 = a^5, \tag{3}$$

also wegen (1)

$$5xy(x^3 + 2xy(x+y) + y^3) = a^5 - 1 \tag{4}$$

und somit wegen (2)

$$xy(x^3 + y^3 + 2axy) = \frac{a^5-1}{5}. \tag{5}$$

Setzt man

$$xy = z, \tag{6}$$

so gilt wegen (2)

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = a^3,$$

$$x^3+ y^3 = a^3 - 3az,$$

also wegen (5)

$$z(a^3 - 3az + 2az) = \frac{a^5-1}{5},$$

$$az^2 - a^3z + \frac{a^5-1}{5} = 0. \tag{7}$$

Diese quadratische Gleichung hat wegen

$\frac{a^4}{4} - \frac{a^5-1}{5a} = \frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a} > 0$ genau die Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}}. \tag{8}$$

Aus (2) und (6) folgt ferner [1] $x^2 + z = ax$,

$$x^2 - ax + z = 0. \tag{9}$$

Um hieraus weitere Schlüsse zu ziehen, diskutiert man, welches Zeichen in

$$\frac{a^2}{4} - z_{1,2} \gtreqless 0$$

gilt. Die betreffende Relation ist jeweils äquivalent mit

$$\frac{a^2}{4} \gtreqless \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}}$$

$$\mp \sqrt{\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}} \gtreqless \frac{a^2}{4}.$$

[1] Hinweis: Leitet man dies durch Einsetzen von $y = \frac{z}{x}$ in (2) her, so muß man den Fall $x = 0$ gesondert betrachten.

Für jedes $a > 0$ gilt $-\sqrt{\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}} < \frac{a^2}{4}$. Für jedes $a > 0$ hat daher $x^2 - ax + z_1 = 0$ keine reelle Lösung.

Ferner ist das Bestehen von

$$\sqrt{\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}} \gtreqless \frac{a^2}{4}$$

jeweils äquivalent mit

$$\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a} \gtreqless \frac{a^4}{16},$$

$$\frac{1}{5a} \gtreqless \frac{a^4}{80},$$

$$16 \gtreqless a^5,$$

$$\sqrt[5]{16} \gtreqless a.$$

Falls daher $a > \sqrt[5]{16}$ ist, hat auch die Gleichung $x^2 - ax + z_2 = 0$ keine reelle Lösung.

Falls aber $(0 <)\ a \leqq \sqrt[5]{16}$ ist, so hat diese Gleichung genau die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - z_2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{a^2}{4} + \sqrt{\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}}} \qquad (10)$$

Hieraus und aus (2) erhält man (mit jeweils zum Index 1 bzw. 2 zugehörigem oberen bzw. unteren Vorzeichen)

$$y_{1,2} = \frac{a}{2} \mp \sqrt{-\frac{a^2}{4} + \sqrt{\frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a}}}. \qquad (11)$$

Damit ist gezeigt: Das Gleichungssystem (1), (2) kann nur im Fall $(0 <)\ a \leqq \sqrt[5]{16}$ reelle Lösungen haben, und zwar nur $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ mit $x_{1,2}$ aus (10) und $y_{1,2}$ aus (11).

Diese Paare sind in der Tat Lösung; denn für sie gilt $x+y = a$, d. h. (2); ferner erfüllen x_1 und x_2 auch (9), also $x(a-x) = z$, d. h. (6), mit dem Wert z_2 aus (8) für z. Dieser erfüllt (7), und da aus (6) und (2) wieder $x^3 + y^3 = a^3 - 3az$ folgt, wird (5) und damit (4) erfüllt. Subtrahiert man dies von (3) (was aus (2) folgt), so ergibt sich auch (1).

Anmerkung: Das Gleichungssystem (1), (2) kann auch durch Einsetzen von $y = a-x$ in Gleichung (1) gelöst werden. Dann erhält man - der Lösungsweg wird im folgenden nur kurz skizziert -

$$5a(x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - a^3x) = 1 - a^5,$$

$$(x^2 - ax)^2 + a^2(x^2 - ax) = \frac{1}{5a} - \frac{a^4}{5} \quad .$$

Diese für $t = x^2 - ax$ quadratische Gleichung hat die Lösungen

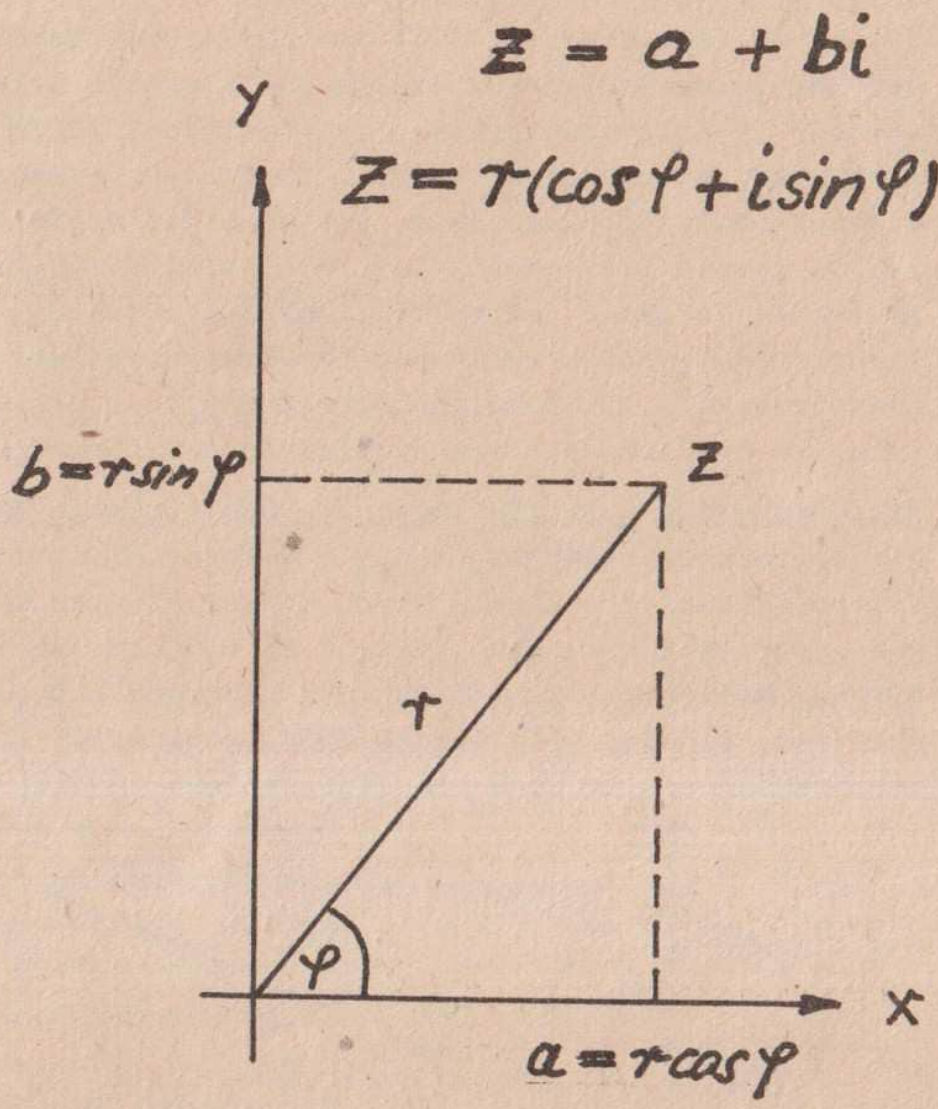
$$t = -\frac{a^2}{2} \pm \sqrt{b} \text{ mit } \quad b = \frac{a^4}{20} + \frac{1}{5a} \, .$$

Aus $x^2 - ax - t = 0$ erhält man $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + t}$.

Die weiteren Untersuchungen sind analog wie oben zu führen.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, F. Pegenau
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 447?–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 19. 5. 80



7\8

80

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

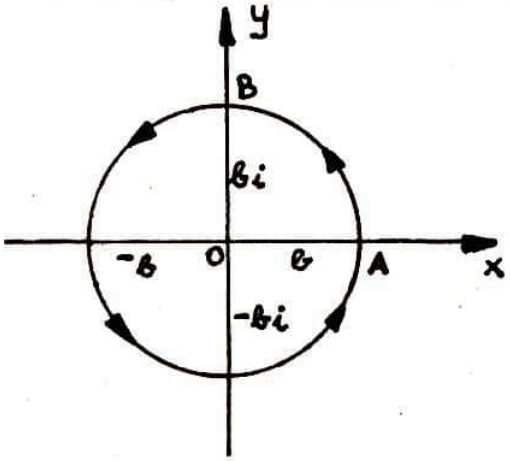
14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR:
0.40 M

Einführung der komplexen Zahlen

In dieser Zeitschrift (11/74 und 12/74) ist bereits die Theorie der komplexen Zahlen auf exakte und elegante Weise eingeführt worden. Im folgenden Artikel soll versucht werden, die komplexen Zahlen auf anschauliche Weise einzuführen. Ausgangspunkt sollen gewisse reale Vorgänge sein, die sich mit Hilfe der komplexen Zahlen darstellen lassen. Dann sind vielleicht Probleme, die diese realen Vorgänge aufwerfen, mit den neuen Begriffen übersichtlicher und leichter zu lösen. Hervorragende Anwendungsgebiete hierfür sind z. B. Schwingungsvorgänge oder Kreiselbewegungen (Theorie des Kreisels von F. Klein und A. Sommerfeld).

Einführung der Begriffe Imaginäre und komplexe Zahl

Wir betrachten zunächst in der x-y-Ebene eine Strecke OA=b ($b \neq 0$) (siehe Skizze 1). Eine Drehung dieser Strecke um 90° im positiven Drehsinn führt diese Strecke in OB über. Den Vorgang der Drehung wollen wir kurz durch den Ausdruck b.i oder bi charakterisieren. bi soll also nichts anderes bedeuten als das Ergebnis der Drehung von OA nach OB. Eine weitere Drehung von OB um 90° führt bi in -b über. Verwendung des gleichen Symbols, angewendet auf bi, ergibt bi.i, wofür wir bi^2 schreiben wollen. Aus $bi^2 = -b$ folgt für das Symbol i die Beziehung: $i^2 = -1$

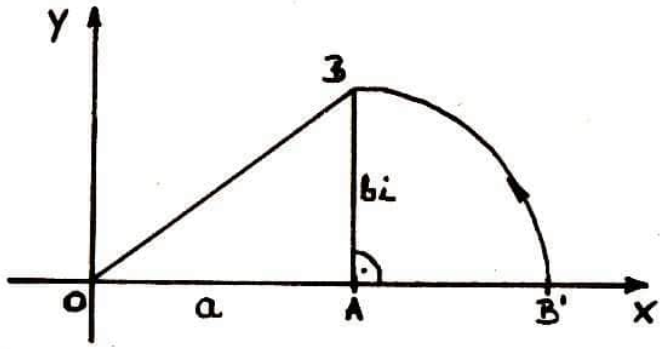


Skizze 1

Man erkennt leicht, daß für das Symbol i folgende Eigenschaften gelten: $i.i = i^2 = -1$;
$i.i.i = i^3 = -i$; $i.i.i.i = i^4 = 1$
Allgemein:
$i^{4n} = 1$ (mit $i^0=1$ festgelegt)
$i^{4n+1}=i$; $i^{4n+2}= -1$; $i^{4n+3}= -i$;
(n eine natürliche Zahl)

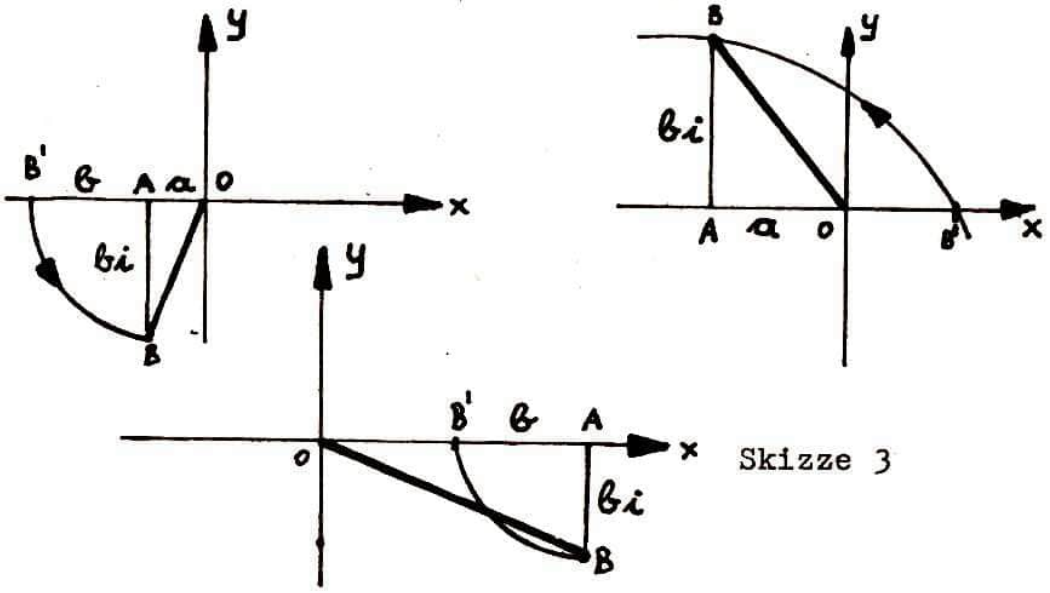
Liegt der Anfangspunkt der Strecke b nicht in 0, sondern in A (siehe Skizze 2), so geht die Strecke AB' = b bei einer 90°-Drehung um A in AB über. Das Ergebnis der Drehung wollen wir wieder durch das Symbol bi charakterisieren. Die Strecke OB stellen wir dann in der Form OB = a + bi dar (OA=a). a und b können beliebi-

ge reelle Zahlen sein.



Skizze 2

Einige Beispiele sind in Skizze 3 dargestellt.



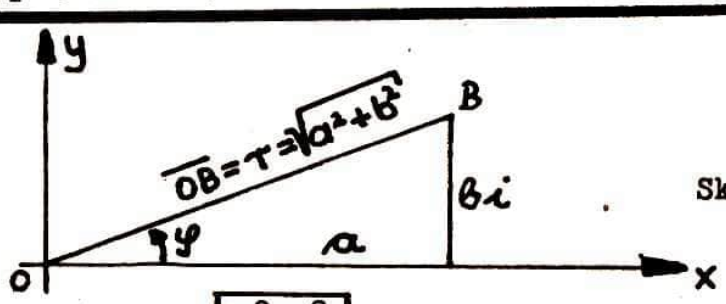
Skizze 3

Nun wollen wir uns von dem anschaulichen Vorgang lösen und folgende Definitionen einführen:

D e f i n i t i o n 1. Ein Ausdruck bi mit beliebigem reellen b ≠ 0 heißt eine rein imaginäre Zahl. i heißt imaginäre Einheit und erfüllt die oben angegebenen Eigenschaften: $i^2=-1$; $i^3=-i$; $i^4=1$ bzw. $i^{4n}=1$ ($n \in N$).

D e f i n i t i o n 2. Ein Ausdruck a+bi heißt komplexe Zahl (a,b beliebige reelle Zahl). Ist b=o, so erhalten wir, für 0.i=0 festgelegt, die reelle Zahl a.

Verwenden wir die anschauliche Einführung des Symbols i, so können wir die komplexe Zahl z=a+bi noch in einer anderen Form schreiben(siehe Skizze 4).



Skizze 4

Setzen wir $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $a = r\cos\varphi$ und $b = r\sin\varphi$, so ist

$$z = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot i$$

Durch 2 weitere Definitionen setzen wir fest, was wir unter Gleichheit bzw. unter der Summe zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 verstehen.

Definition 3. Zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1+b_1i$ und $z_2 = a_2+b_2i$ heißen gleich genau dann, wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ gilt.

Definition 4. Unter der Summe zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1+b_1i$ und $z_2 = a_2+b_2i$ verstehen wir die komplexe Zahl $z_1 + z_2 \underset{\text{Def.}}{=} a_1 + a_2 + (b_1+b_2).i$

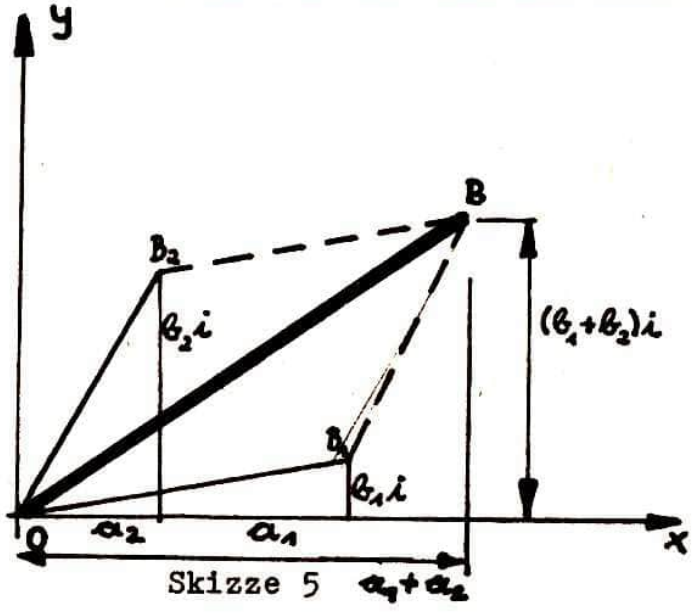
Da für die reellen Zahlen Kommutativ- und Assoziativgesetz gelten, können wir sofort die Gültigkeit dieser Gesetze für die Summe der komplexen Zahlen z_1 und z_2 nachweisen:

$z_1+z_2 = a_2+a_1 + (b_2+b_1).i = z_2 + z_1$ und aus

$(a_1+a_2) + a_3 = a_1+(a_2+a_3)$ bzw. $(b_1+b_2)+b_3 = b_1+(b_2+b_3)$ folgt

mit $z_3 = a_3+b_3i$ $\quad (z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$.

Daß die Definition der Addition sinnvoll bzw. sehr zweckmäßig ist, erkennt man, wenn man wieder auf die anschauliche Einführung des Symbols i zurückgreift. (siehe Skizze 5)



Skizze 5

Man erkennt unschwer, daß die Summe z_1+z_2 durch die Diagonale OB des von OB_1 und OB_2 aufgespannten Parallelogramms dargestellt wird.

Bei der Definition der Multiplikation zweier komple-

xer Zahlen z_1 und z_2 wollen wir schrittweise vorgehen.
Zunächst definieren wir die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit einer reellen Zahl.

Definition 5. Unter dem Produkt einer reellen Zahl c und der komplexen Zahl z $z=a+bi$ verstehen wir die komplexe Zahl $c.z =_{Def} c(a+bi) = ca + cb.i$.

Verwenden wir diese Definition für die oben angegebene trigonometrische Darstellung von z, so können wir schreiben:

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) .$$

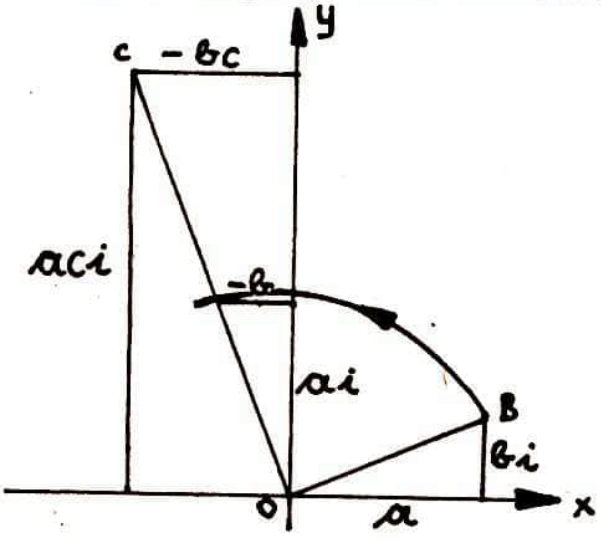
In dieser Darstellung ist es naheliegend, den Betrag einer komplexen Zahl z zu definieren:

Definition 6. Unter dem Betrag einer komplexen Zahl $z=a+bi$ verstehen wir

$$|z| =_{Def} \sqrt{a^2+b^2}, \quad \text{also } |z| = r .$$

Multiplikation einer komplexen Zahl z mit einer reellen Zahl c ergibt eine komplexe Zahl mit dem $|c|$-fachen Betrag von z.

Um eine geeignete Definition für die Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer imaginären Zahl zu finden, gehen wir von dem realen Vorgang einer Drehstreckung aus (siehe Skizze 6).



Skizze 6

Die gegebene Strecke $\overline{OB}$ geht durch eine Drehung um 90° (im positiven Drehsinn) und durch eine Streckung in die Strecke $\overline{OC}$ über. Die Länge von $\overline{OC}$ sei $c.\overline{OB}$. Man erkennt aus der Skizze: Wenn $\overline{OB} = a+bi$ ist, dann ist $\overline{OC} = -bc + aci$.
Wir definieren:

Definition 7. Unter dem Produkt ci.z bzw. z.ci verstehen wir $ci.(a+bi) =_{Def} -bc + aci$; a,b,c sind beliebige reelle Zahlen.

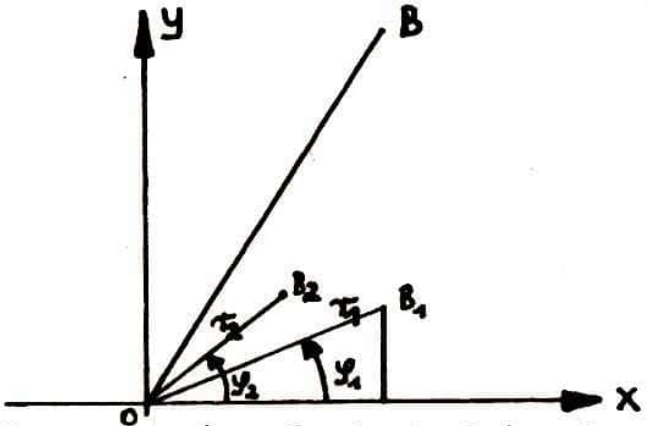
Nun können wir die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z_1=a_1+b_1i$ und $z_2=a_2+b_2i$ in folgender Weise definieren:

Definition 8. Unter dem Produkt $z_1 \cdot z_2$ oder $z_1 z_2$ verstehen wir folgende komplexe Zahl:

$$z_1 z_2 =_{Def} (a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)$$
$$=_{Def} a_2(a_1+b_1 i) + b_2 i(a_1+b_1 i)$$
$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Man erkennt leicht die Gültigkeit des Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetzes für $z_1 z_2$, da diese Gesetze für die reellen Zahlen gelten.

Die Multiplikation läßt sich wieder leicht veranschaulichen, wenn wir die trigonometrische Darstellung benützen (Skizze 7).



$$z_1 z_2 = \overline{OB}$$
$$|z_1 z_2| = r_1 r_2$$
$$\varphi(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$$

Skizze 7

Für $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$ erhalten wir für $z_1 z_2$

$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + r_1 r_2(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1).i$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i.\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Aus der Definition der Multiplikation von komplexen Zahlen kann man die Drehung einer beliebigen Strecke $\overline{OB} = z = a+bi$ um den Winkel φ leicht veranschaulichen: $z = a+bi$ geht durch Drehung um φ° in $z(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ über.

Die angegebenen Definitionen reichen aus, um weitere Begriffe wie z. B. z^n oder $\frac{1}{z}$ einzuführen. Mehrmalige Anwendung der Multiplikation ergibt z. B. für $z.z \ldots z = z^n$ gesetzt

$$\underline{z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}$$

Um $\frac{1}{z}$ zu finden, gehen wir von dem Ansatz aus:

$z.z_1=1$ mit $z=r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ und $z_1=r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$.

Aus $zz_1=rr_1(\cos(\varphi+\varphi_1)+ i \sin(\varphi+\varphi_1)) = 1$ ergibt sich für $rr_1=1$ und $\varphi+\varphi_1=0$, $r_1=\frac{1}{r}$ und $\varphi_1 = -\varphi$. Für z_1 schreiben wir

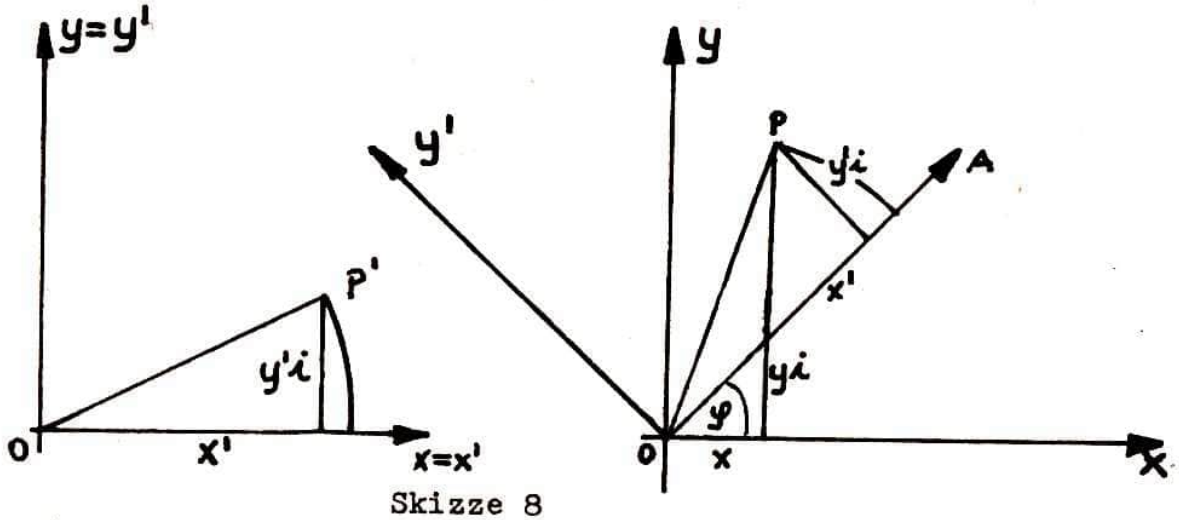
$$\underline{\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i \sin\varphi).}$$

Zum Schluß wollen wir noch 2 praktische Anwendungen der komplexen Zahlen besprechen.

$\overline{OB}$ stelle wieder eine komplexe Zahl a+bi dar. Drehung um 90° im positiven Drehsinn führt die Strecke $\overline{OB}$ in $\overline{OC}=(a+bi).i=-b+ai$ über. Der Anstieg der Strecke $\overline{OB}$ ist $\frac{b}{a}$, der der Strecke $\overline{OC}$ ist $\frac{-a}{b}$.

Es ist $\frac{b}{a} \cdot \frac{-a}{b} = -1$. Damit haben wir die Bedingung gefunden, wann zwei Geraden senkrecht zueinander stehen.

Ein zweites Beispiel ist in Skizze 8 dargestellt. Im Koordinatensystem (x;y) habe der Punkt P die Koordinaten x und y. Wir wollen mit Hilfe der komplexen Zahlen bestimmen, welche Koordinaten P im Koordinatensystem (x';y') hat, das um den Winkel φ gegenüber dem (x;y) System verdreht ist.



Skizze 8

Wir denken uns zunächst die beiden Koordinatensysteme zur Deckung gebracht. Es ist x=x' und y=y'. $\overline{OP}'=x'+iy'$. Drehung um φ° führt $\overline{OP}'$ in $\overline{OP}=(x'+iy')(\cos\varphi+ i\sin\varphi)$ über. Dann gilt:

$x+iy = (x'+iy')(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Daraus folgt:

$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$ bzw. $x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$

$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$ $y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$

Der Zweck solcher Koordinatentransformationen liegt vor allem darin, ein Koordinatensystem zu finden, in dem eine Funktion $y = f(x)$ eine möglichst einfache Form annimmt. Z. B. geht die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ durch Drehung des Koordinatensystems um -45° über in die Gleichung $x'y' = \frac{1}{2}$.

Dr. Bruno Hanisch
Halle

Preisaufgaben

M 37 (1)

Sei $A = \frac{1.3.5. \ldots .(2n-1)}{2.4.6. \ldots . 2n}$, wobei n eine positive ganze Zahl ist. Man zeige, daß ab einem gewissen k die Folge $A, 2A, 4A, 8A, \ldots, 2^k A, \ldots$ nur aus ganzen Zahlen besteht.

M 38 (1)

Man bestimme ab + cd, falls $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ und $ac + bd = 0$ ist.

M 39 (1)

Die Kreise K_1 und K_2 berühren sich im Punkt P. Eine Sekante durch den Punkt P schneidet K_1 in A_1 und K_2 in A_2. Eine andere Sekante durch den Punkt P schneidet K_1 in B_1 und K_2 in B_2. Man zeige, daß die Dreiecke PA_1B_1 und PA_2B_2 ähnlich sind.

M 40 (1)

Seien a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 und b ganze Zahlen und

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2.$$

Man zeige, daß nicht alle Zahlen gleichzeitig ungerade sein können.

M 41 (2)

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Man konstruiere Punkte U, V, W auf den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, so daß der Umfang des Dreiecks UVW minimal wird.

M 42 (2)

Пусть AC более длинная из диагоналей параллелограмма ABCD . Из вершины C на продолжения сторон AB и AD опущены перпендикуляры CE и CF . Доказать, что $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

DDR-Olympiade Junger Mathematiker

Die diesjährige Zentrale Mathematikolympiade fand in der Zeit vom 30. 3. bis 3. 4. statt. Zu diesem Höhepunkt der Olympiadebewegung hatten sich 27 Mädchen und 153 Jungen qualifiziert. Am Sonntag, dem 30. 3., reisten die einzelnen Bezirksdelegationen an der Jugendhochschule "Wilhelm Pieck" an, die unweit des Bogensees liegt und völlig von Wald umgeben ist. Am Abend wurde die XIX. Mathematikolympiade der DDR feierlich eröffnet. Dazu bot die Songgruppe des Erich-Weinert-Ensembles ein Programm über den Alltag der Soldaten.

Alle Teilnehmer knobelten am Montagvormittag an den ersten drei Aufgaben. Am Nachmittag bestanden verschiedene Möglichkeiten zur Entspannung: ein Redakteur der "Jungen Welt" berichtete in einem Vortrag über die Olympischen Winterspiele in Lake Placid, Dietrich Fritzsche vom Akademieinstitut für Isotopenforschung erzählte über seine Erlebnisse während einer einjährigen Antarktis-Expedition, und auch Schach, Fußball, Volleyball, Tischtennis waren sehr beliebt.

Prof. Dr. Laßner von der KMU Leipzig sprach zum Thema "Mathematik und Struktur der Materie".

Am Dienstag fand der zweite Teil der Klausur statt.

Gegenwärtige Tendenzen der Jugendkriminalität verdeutlichte Generalstaatsanwältin Scholz in einem Forum am Nachmittag. Am Abend trat das Junge Theater des Hauses der Jungen Talente Berlin auf. Mit kleinen Spielszenen nahm das Ensemble zu Problemen Jugendlicher Stellung.

Am Mittwoch fand die Olympiade mit der Ehrung der Preisträger im Pionierpalast in der Wuhlheide ihren festlichen Abschluß. Es konnten 4 erste, 17 zweite und 22 dritte Preise vergeben werden. Unter den Preisträgern ist der Anteil der Frühstarter sehr hoch. Da in der Klassenstufe 11/12 die erreichten Höchstpunktzahlen verhältnismäßig niedrig waren, wurde hier kein erster Preis vergeben.

Die diesjährige Mathematikolympiade der DDR war für alle Beteiligten ein wertvolles Erlebnis.

Christel Mitzenheim
Schülerin 12. Klasse
Jena

Aufgaben der DDR-Olympiade (11/12)

1. Man ermittle alle Paare $(f(x),g(x))$ von Polynomen 3. Grades

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$$g(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0,$$

deren Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3 reelle Zahlen sind und für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jeder der Werte, die $f(x)$ und $g(x)$ für $x = 1, 2, 3$ und 4 annehmen, ist eine der Zahlen 0 und 1.

(2) Wenn $f(1) = 0$ oder $f(2) = 1$ ist, so ist $g(3) = 0$ und $g(4) = 1$.

(3) Wenn $f(1) = 1$ oder $f(4) = 1$ ist, so ist $g(1) = 1$ und $g(3) = 1$.

(4) Wenn $f(2) = 0$ oder $f(4) = 0$ ist, so ist $g(2) = 0$ und $g(4) = 0$.

(5) Wenn $f(3) = 1$ oder $f(4) = 1$ ist, so ist $g(1) = 0$.

---

2. Es sei M die Menge aller derjenigen Quadratflächen Q, die in einer gegebenen Ebene ε liegen, einen gegebenen Punkt Z der Ebene ε als Mittelpunkt haben und eine gegebene Streckenlänge a als Seitenlänge haben. Für beliebige Quadratflächen Q, Q' aus dieser Menge M bezeichne $u(Q \cap Q')$ den Umfang derjenigen Polygonfläche, die sich als Durchschnitt der Quadratflächen Q und Q' ergibt. Man untersuche, ob es in M Quadratflächen Q, Q' mit kleinstmöglichem $u(Q \cap Q')$ gibt. Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von a) diesen kleinstmöglichen Wert von $u(Q \cap Q')$.

---

3. Man ermittle alle diejenigen Tripel (x,y,z) reeller Zahlen, für die

$$2x + x^2y = y,$$

$$2y + y^2z = z,$$

$$2z + z^2x = x$$

gilt. Dabei sind x, y und z durch Ausdrücke anzugeben, die aus gegebenen reellen Zahlen durch wiederholte Anwendung von Operationen, +, -, ·, :, von reellwertigen Potenz-, Exponentialfunktionen, trigonometrischen Funktionen oder von deren reellwertigen Umkehrfunktionen gebildet sind.

(4.) Man beweise, daß es keine natürlichen Zahlen n, m, b mit $n \geq 1$, $m \geq 2$ und

$$(2n)^{2n} - 1 = b^m$$

gibt.

(5.) Man beweise:
Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ und jede ganze Zahl $k \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n^k - 1} + \frac{1}{n^k} > k \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right).$$

(6.) Eine Folge (x_k) reeller Zahlen heiße genau dann C-konvergent gegen eine reelle Zahl z, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = z$$

gilt. Eine Funktion f heiße genau dann C-stetig an einer Stelle a ihres Definitionsbereiches, wenn für jede Folge (x_k), die C-konvergent gegen a ist und deren sämtliche Glieder x_k im Definitionsbereich von f liegen, die Folge $(f(x_k))$ stets C-konvergent gegen f(a) ist.
Man zeige:

a) Sind A, B und a beliebige reelle Zahlen, so gilt: Die durch $f(x) = Ax + B$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f ist C-stetig an der Stelle a.

b) Wenn eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f an der Stelle $a = 0$ den Funktionswert $f(0) = 0$ hat und an dieser Stelle C-stetig ist, so gilt für beliebige reelle p, q die Gleichung $f(p+q) = f(p) + f(q)$.

(7.) In einer Dunkelkammer liegen ungeordnet 20 einzelne Handschuhe von gleicher Größe, und zwar

5 weiße Handschuhe für die rechte Hand,
5 weiße Handschuhe für die linke Hand,
5 schwarze Handschuhe für die rechte Hand,
5 schwarze Handschuhe für die linke Hand.

Zwei Handschuhe gelten genau dann als ein "passendes Paar", wenn sie gleiche Farbe haben und der eine von ihnen für die rechte Hand, der andere für die linke Hand ist. Unter einem "Zug" sei die Entnahme eines einzelnen Handschuhs verstanden,

ohne daß dabei eine Auswahl nach Farbe oder Form möglich ist. Ein "Spiel von n Zügen" bestehe darin, daß man nacheinander n Züge ausführt, die dabei entnommenen Handschuhe sammelt und erst nach diesen n Zügen feststellt, ob sich unter den n entnommenen Handschuhen (mindestens) ein passendes Paar befindet. Genau dann, wenn dies zutrifft, gelte das Spiel als "erfolgreich".

a) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, daß ein Spiel von n Zügen mit Sicherheit erfolgreich ist!

b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl k mit der Eigenschaft, daß ein Spiel von k Zügen mit größerer Wahrscheinlichkeit als 0,99 erfolgreich ist!

Lösungen Wurzel-Preisaufgaben

Aufgabe M 1

Es ist $3v - 5u = 17x$.

Ist u durch 17 teilbar, so auch 3v und folglich auch v selbst. Analog folgt die Umkehrung.

Aufgabe M 2

Seien $a = b-d$, b und $c = b+d$ die Seiten des Dreiecks, wobei $0 < d < b$ ist und $r = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2}$.

Dann ist $S^2 = r(r-a)(r-b)(r-c)$

$$= \frac{3b}{2}\left(\frac{b}{2} + d\right)\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2} - d\right)$$

$$= \frac{3b^2}{4}\left(\frac{b^2}{4} - d^2\right)$$

Hieraus folgt

$$b^2 = 2\left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4S^2}{3}}\right)$$

und da b als Länge der Seite eines Dreiecks positiv ist:

$$b = \left[2\left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4S^2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Weiterhin ist $a = b - d$ und $c = b + d$.

Aufgabe M 3

Die erste Gleichung läßt sich auch wie folgt schreiben:

$$(x-y)(x-2y+1) = 0$$

Wir erhalten die beiden Gleichungssysteme

$$x - y = 0$$
$$x^2-2xy+y^2-5x+7y = 0 \qquad (1)$$

und

$$x - 2y + 1 = 0$$
$$x^2-2xy+y^2-5x+7y = 0 \qquad (2)$$

Für (1) erhält man als Lösung $x = y = 0$.
(2) hat die Lösungen $x = 3$, $y = 2$ und $x = 5$, $y = 3$.
Diese Lösungen sind alle Lösungen des gegebenen Gleichungssystems. Da die Lösungen die Gleichung
$xy - 12x + 15y = 0$ erfüllen, ist die Behauptung gezeigt.

Bemerkung. Die Behauptung folgt sofort aus der Gleichung:

$$(x^2-3xy+2y^2+x-y)(x-y-9)+(x^2-2xy+y^2-5x+7y)(-x+2y+3) = 2(xy-12x+15y).$$

Aufgabe M 4

Es sei $x = 100c + 10a + b$, $0 \leq a, b \leq 9$, $c \geq 0$
Dann ist $x^2 = 100\,d + 20ab + b^2$, $d \geq 0$
Die gesuchten a und b erfüllen somit die folgende Teilbarkeitsbedingung:

$$100 \mid 20ab + b^2 - 10a - b$$
$$100 \mid 10a(2b-1) + b^2 - b$$

Folglich muß auch $10 \mid b^2 - b$ gelten.

1. Fall $b = 0$: $100 \mid -10a$; $a = 0$
2. Fall $b = 1$: $100 \mid 10a$; $a = 0$
3. Fall $b = 5$: $100 \mid 90a + 20$; $a = 2$
4. Fall $b = 6$: $100 \mid 110a + 30$; $a = 7$.

Die Ziffern $(a,b) = (0,0); (0,1); (2,5); (7,6)$ erfüllen die Bedingung.

Aufgabe M 5

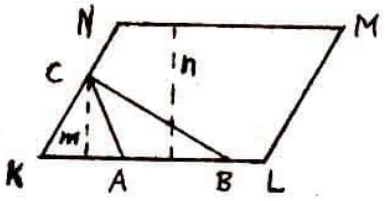
1. Umordnung:

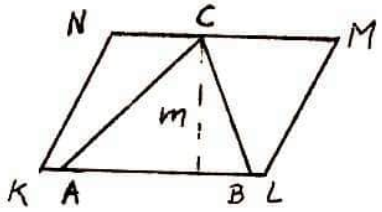
1 tauscht mit n, 2 mit (n-1), 3 mit (n-2), ... Ist n ungerade, so verbleibt der Mittelmann auf seinem Platz.
Anordnung: n,n-1,n-2,...,1.

2. Umordnung:
(n-1)) tauscht mit 1, (n-2) mit 2, (n-3) mit 3, ... Ist n gerade, so bleibt $(\frac{n}{2})$ an seinem Platz.
Anordnung: n,1,2,...,n-1.

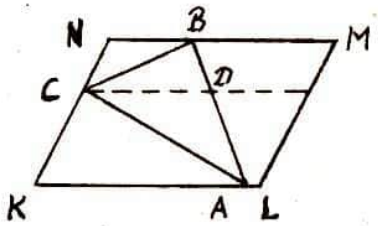
Aufgabe M 6

1. Fall:
Es liegen zwei Ecken des Dreiecks A und B auf ein und derselben Seite KL des Parallelogramms (Zeichnung 1 und 2)). Sei S der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, m seine Höhe, errichtet auf der Seite AB und n die Höhe des Parallelogramms, errichtet auf der Seite KL, so ist $S = \frac{1}{2} m \cdot AB$ und $S' = n \cdot KL$. Wegen $m \leq n$ und $AB \leq KL$ folgt $S \leq \frac{1}{2} S'$





2. Fall:



Die Ecken des Dreiecks liegen auf verschiedenen Seiten des Parallelogramms. Es gibt zwei Ecken, die auf gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms liegen.

Es liege A auf KL, B auf MN und C auf KN. Wir legen durch C eine zu KL parallele Gerade. Sei D der Schnittpunkt dieser Gerade mit AB und E der Schnittpunkt mit ML.
Aus Fall 1 folgt: $A_{CBD} \leq \frac{1}{2} A_{CEMN}$ und

$$A_{ADC} \leq \frac{1}{2} A_{LECK}$$

und somit $$A_{ABC} \leq \frac{1}{2} A_{MNKL} .$$

Die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe M 7

Subtrahiert man Gleichung (2) von Gleichung (1), so erhält man $x^2(1-x) + y^2(1-y) + u^2(1-u) = 0$.

Aus Gleichung (1) folgt, daß x,y und u dem Betrage nach kleiner gleich 1 sind.

Also erhält man $x^2(1-x) = y^2(1-y) = u^2(1-u) = 0$.

Die Lösungen des Gleichungssystems sind somit

$$x_1 = 1,\ y_1 = 0,\ u_1 = 0$$
$$x_2 = 0,\ y_2 = 1,\ u_2 = 0$$
$$x_3 = 0,\ y_3 = 0,\ u_3 = 1.$$

Aufgabe M 8

Beweis durch vollständige Induktion:

Für $k = 1$ ist $a_1^2 + 1$ offensichtlich Summe zweier Quadrate.

Sei $(a_1^2 +1)(a_2^2 +1) \dots (a_k^2 +1) = x^2 + y^2$.

Wir erhalten:

$$(a_1^2 +1)(a_2^2 +1) \dots (a_k^2 +1)(a_{k+1}^2 +1) =$$
$$= (x^2+y^2)(x_{k+1}^2 +1) = a_{k+1}^2 x^2 + a_{k+1}^2 y^2 + x^2 + y^2 =$$
$$= (a_{k+1}^2 x^2 + 2a_{k+1}xy + y^2) + (a_{k+1}^2 y^2 - 2a_{k+1}xy + x^2) =$$
$$= (a_{k+1}x + y)^2 + (a_{k+1}y - x)^2.$$

Somit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe M 9

Da a,b und c ganze Zahlen sind, ist die Ungleichung $a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$ genau dann erfüllt, wenn auch $a^2 + b^2 + c^2 + 4 \leq ab + 3b + 2c$ erfüllt ist. Durch Umformen erhält man:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4 - ab - 3b - 2c \leq 0$$
$$a^2 + b^2 + 3 - ab - 3b + (c-1)^2 \leq 0$$
$$(a - \tfrac{b}{2})^2 + \tfrac{3}{4} b^2 - 3b + 3 + (c-1)^2 \leq 0$$
$$(a - \tfrac{b}{2})^2 + 3(\tfrac{b}{2} - 1)^2 + (c-1)^2 \leq 0$$

Diese Ungleichung ist nur für $0 = a - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} - 1 = c - 1$ erfüllt.

Als Lösung erhält man: $a = 1,\ b = 2,\ c = 1$.

Über die Anwendung geometrischer Transformationen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben

Unter einer geometrischen Transformation der Ebene bzw. des Raumes versteht man eine eineindeutige Abbildung der Punkte der Ebene bzw. des Raumes auf sich. Neben den in der Schule z. T. ausführlich behandelten Bewegungen, Ähnlichkeitstransformationen und affinen Abbildungen gibt es eine Vielzahl weiterer Transformationen, die vorteilhaft bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben und beim Beweis geometrischer Theoreme eingesetzt werden können. Ihrer Anwendung bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben liegen dabei im wesentlichen die beiden folgenden Prinzipien zugrunde:

1. Die gesamte im Verlauf der Analyse einer gegebenen Aufgabe konstruierte Figur wird einer Transformation unterworfen. Durch geeignete Wahl der Transformationen versucht man, eine möglichst große Vereinfachung der Zeichnung zu erreichen und damit die Lösung der Aufgabe wesentlich zu erleichtern.

Natürlich können hierbei nur allgemeinere Transformationen als Bewegungen zur Anwendung kommen, da bei letzteren die Figur als Ganzes unverändert bleibt und lediglich ihre Lage im Raum verändert wird. Damit wird aber keine Vereinfachung der Aufgabe erreicht.

2. Die Transformation wird nicht auf die gesamte, sondern nur auf einen geeigneten Teil der Figur angewandt. Durch Veränderung der Lagebeziehungen der durch die Bedingungen der Aufgabe gegebenen geometrischen Elemente, versucht man deren gegenseitige Abhängigkeiten möglichst einfach sichtbar zu machen und auf diese Weise zu einer Idee für die Lösung der Aufgabe zu gelangen.

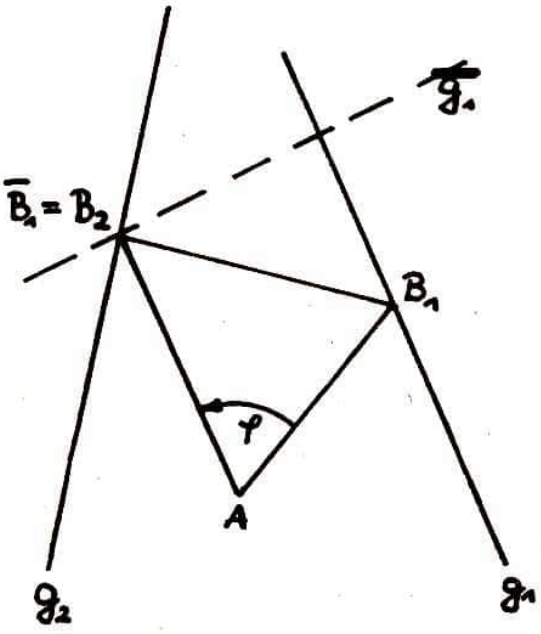
Wir betrachten hier zunächst nur Bewegungen in der Ebene und werden dabei stets die unter 2. charakterisierte Methode anwenden. In Ergänzung und Fortsetzung der Ausführungen in WURZEL 10/78 beschränken wir uns auf Beispiele zur Anwendung von Drehungen und Spiegelungen beim Lösen von Aufgaben und beim Beweisen geometrischer Sätze.

Die Behandlung einer Konstruktionsaufgabe erfolgt im allgemeinen in 4 Schritten: Analyse, Konstruktion, Beweis, Diskussion. Wir

beschränken uns in den folgenden Beispielen auf die Durchführung der Analyse. In dieser wird unter der Voraussetzung, daß es eine allen Bedingungen der gestellten Aufgabe genügende Figur gibt, diese in gewisse Teilfiguren zerlegt, die nacheinander mit Hilfe bekannter Verfahren aus den gegebenen Stücken konstruierbar sind. Das Ergebnis der Analyse ist also der Satz: "Wenn es eine allen Bedingungen der Aufgabe genügende Figur gibt, so ist diese auf folgende Weise konstruierbar." Anschließend erfolgt die Beschreibung der Konstruktion.

1. Die Anwendung von Drehungen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben

Beispiel 1. Gegeben sind zwei Geraden g_1, g_2, ein Winkel φ und ein Punkt A. Man konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck AB_1B_2 ($\overline{AB_1} = \overline{AB_2}$), das bei A den Winkel φ hat und bei dem B_1 auf g_1 und B_2 auf g_2 liegt.



Analyse: Die Aufgabe sei lösbar, d. h. AB_1B_2 sei ein den angegebenen Bedingungen genügendes Dreieck. Wir wenden die Drehung D_φ mit Zentrum A und Drehwinkel φ auf g_1 an und erhalten die Bildgerade $\overline{g_1}$. Wegen $\overline{AB_1}=\overline{AB_2}$ geht B_1 bei D_φ in $\overline{B_1} = B_2$ über. Also ergibt sich im Falle der Lösbarkeit folgender Konstruktionsplan:

1. Man bestimmt das Bild $\overline{g_1}$ von g_1 bzgl. D_φ. B_2 ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden g_2 und $\overline{g_1}$.
2. Man wendet auf B_2 die zu D_φ inverse Drehung an und erhält B_1.

Bei dem vorliegenden Beispiel ist die zur Lösung führende Drehung durch die in der Aufgabenstellung enthaltenen Bedingungen festgelegt. Wir geben zur Übung einige Aufgaben des gleichen Typs an.

a) Zu gegebenen konzentrischen Kreisen k_1, k_2 und einem gegebenen Punkt A konstruiere man ein gleichseitiges Drei-

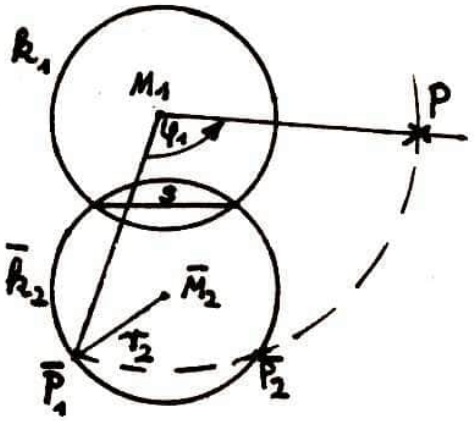
eck AB_1B_2 mit B_1 auf k_1 und B_2 auf k_2.

b) Zu drei gegebenen parallelen Geraden (bzw. konzentrischen Kreisen) konstruiere man ein gleichseitiges Dreieck mit Ecken auf je einer Parallelen (bzw. je einem Kreis).

c) Gegeben sind drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte P, A_1, A_2. Man konstruiere zwei kongruente sich in P berührende Kreise k_1, k_2 mit B_1 auf k_1 und B_2 auf k_2.

Wir wenden uns einer weiteren Aufgabenklasse zu. Auch hier führt eine Drehung zum Ziel, allerdings ist der Drehwinkel nicht mehr durch die Aufgabenstellung festgelegt, sondern hängt von der Lage der gewählten "Musterfigur" ab. Wir erläutern das Prinzip in der folgenden Aufgabe.

Beispiel 2. Gegeben sind ein Kreis k_1 und ein Punkt P. Man konstruiere einen Kreis k_2 mit dem vorgegebenen Radius r_2, der durch P geht und der mit k_1 eine Sehne der vorgegebenen Länge s gemeinsam hat.



Analyse: Die Aufgabe sei lösbar. Wir vernachlässigen zunächst die Bedingung, daß P auf k_2 liegt. Dann erhält man eine ganze Schar von Kreisen, die mit k_1 jeweils eine Sehne der Länge s gemeinsam haben und durch Drehungen um M_1 ineinander überführbar sind. Sei k_2 ein beliebiger Repräsentant dieser Schar. Wir drehen k_2 so um M_1 bis er durch P geht und erhalten damit den gesuchten Kreis k_2.

Nach dem gleichen Schema lassen sich auch die folgenden Aufgaben lösen.

a) Zu einer gegebenen Geraden g und einem gegebenen Kreis k konstruiere man ein Dreieck ABC mit vorgegebenen Seitenlängen, dessen Ecke A auf g und dessen Ecken B und C auf k liegen.

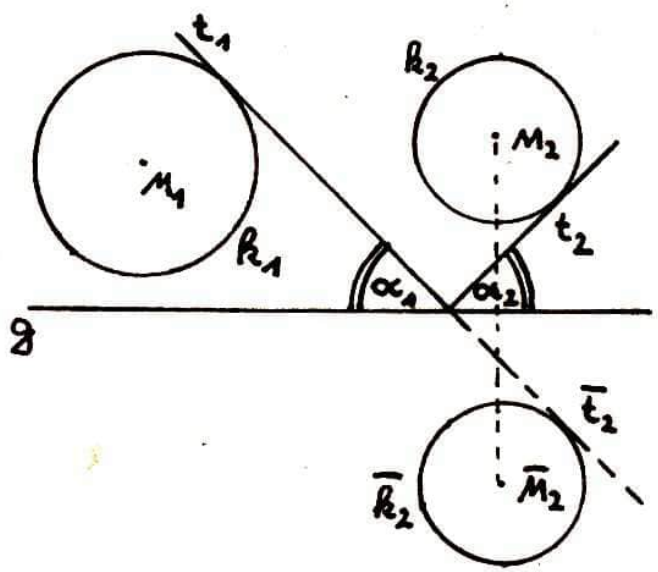
b) Gegeben sind zwei konzentrische Kreise k_1, k_2 sowie eine Gerade g. Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck mit

der vorgegebenen Seitenlänge 1, von dem je eine Ecke auf k_1, k_2 und g liegen.

(2.) Die Anwendung von Geradenspiegelungen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben

Wir beschäftigen uns zunächst mit einer Aufgabenklasse, bei der infolge gewisser Symmetrieeigenschaften der gesuchten Figur, durch Anwendung von Spiegelungen auf Teile der Figur eine wesentliche Vereinfachung der gegenseitigen Lagebeziehungen einzelner Teilstücke erreicht werden kann.

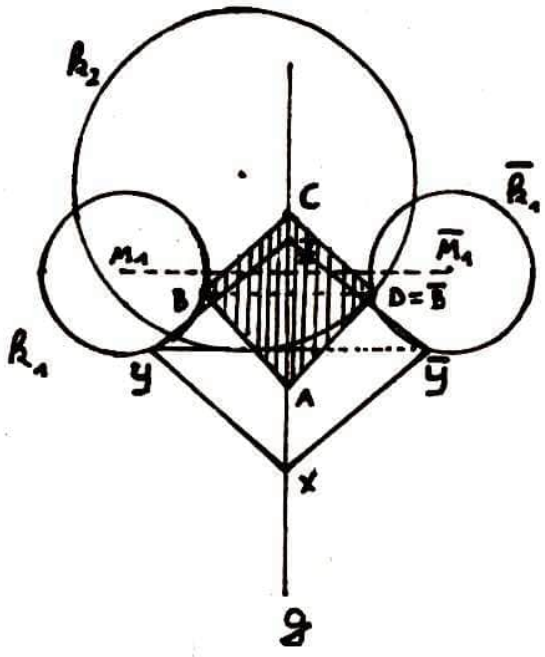
Beispiel 1. Gegeben sind eine Gerade g und zwei Kreise k_1, k_2 auf derselben Seite von g. Man konstruiere einen Punkt P auf g, so daß die von P an k_1 bzw. k_2 gezogenen Tangenten t_1 bzw. t_2 mit g den gleichen Winkel einschließen.



Analyse: Die Aufgabe sei lösbar. Wir spiegeln k_2 und die zugehörige Tangente t_2 an g und erhalten als Bilder $\overline{k_2}$, $\overline{t_2}$. Wegen $\alpha_1 = \alpha_2$ fällt dabei t_2 mit der Geraden t_1 zusammen.
Also ergibt sich der gesuchte Punkt P als Schnittpunkt der gemeinsamen Tangente von k_1 und $\overline{k_2}$ mit der Geraden g. Die Aufgabe kann dementsprechend bis zu 4 verschiedene Lösungen haben.

Beispiel 2. Gegeben sind zwei Kreise k_1, k_2 und eine Gerade g. Man konstruiere Quadrate ABCD, die zwei gegenüberliegende Ecken auf g haben und von denen je eine Ecke auf k_1 und k_2 liegen.

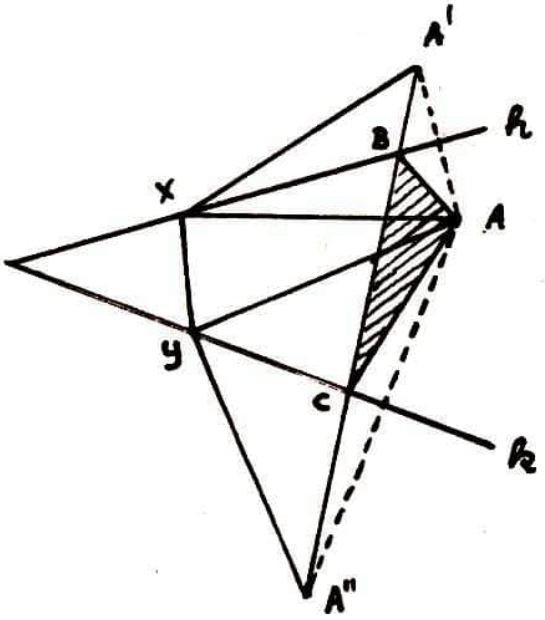
Analyse: Die Aufgabe sei lösbar. Es sollen etwa die Ecken A und C auf g liegen. die beiden restlichen Ecken B,D liegen dann symmetrisch



bzgl. der Geraden g.
Vernachlässigen wir zunächst, daß D auf k_2 liegt, so ergibt sich eine ganze Schar von Quadraten mit zwei gegenüberliegenden Punkten X, Z auf g und einen weiteren Eckpunkt Y auf k_1. Da der jeweilige 4. Eckpunkt $\overline{Y}$ symmetrisch zu Y bzgl. g liegt, ist die Gesamtheit der Punkte $\overline{Y}$ gerade das Bild $\overline{k_1}$ von k_1 bei der Spiegelung an g.
Der gesuchte Quadrateckpunkt D ergibt sich demnach als Schnittpunkt von $\overline{k_1}$ und k_2.

Wir betrachten noch ein Beispiel einer weiteren für zahlreiche Anwendungen wichtigen Aufgabenklasse.

Beispiel 3. Gegeben sind ein spitzer Winkel (h,k) und ein Punkt A im Inneren des Winkels. Man konstruiere ein Dreieck ABC, dessen Ecken B bzw. C auf h bzw. k liegen und dessen Umfang minimal ist.

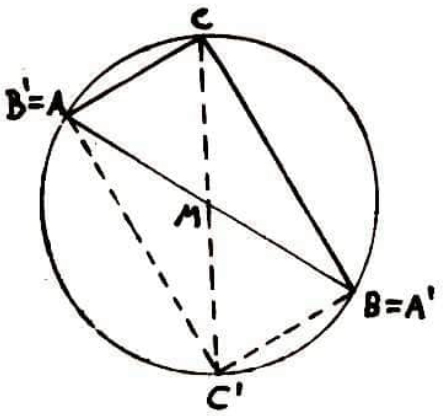


Analyse: Seien X,Y beliebige Punkte auf h,k. Wie spiegeln A an h bzw. k und erhalten die Punkte A' bzw. A". Dann ist der Umfang des Dreiecks AXY gleich der Länge des Streckenzuges A' - X - Y - A". Dessen Länge $\overline{A'X} + \overline{XY} + \overline{YA"}$ wird bei festen A',A" genau dann minimal, wenn X,Y auf der Geraden durch A' und A" liegen.
Die gesuchten Punkte B,C ergeben sich also als Schnittpunkte der Geraden durch A' und A" mit den Schenkeln h,k des gegebenen Winkels.

3. Die Anwendung von Bewegungen beim Beweisen geometrischer Sätze

Die Beweistechnik mit Hilfe von Bewegungen und allgemeineren Transformationen verdient besondere Aufmerksamkeit. Deren konsequente Anwendung führt in zahlreichen Fällen zu eleganten und leicht überschaubaren Beweisen und trägt ganz wesentlich zur Förderung des für den modernen Ma-Unterricht unbedingt notwendigen abbildungstheoretischen Denkens bei.
Wir erläutern den Einsatz von Bewegungen am Beispiel zweier einfacher Sätze aus der ebenen und einer etwas komplizierter zu beweisenden Aussage der räumlichnem Geometrie.

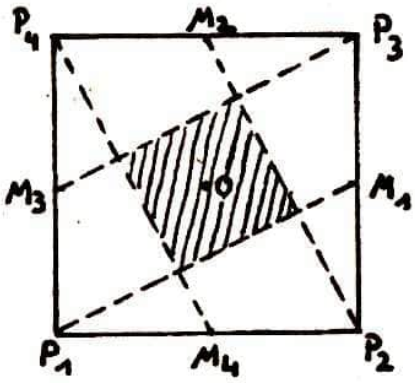
Satz 1. (Umkehrung des Thalessatzes)
Ist in einem Dreieck ABC der Winkel bei der Ecke C ein rechter, so liegt C auf dem Kreis, der AB als Durchmesser besitzt.



Beweis: Sei M Mittelpunkt von AB. Wir drehen das Dreieck ABC um den Punkt M um 180°. Original- und Bilddreieck bilden zusammen ein Rechteck mit den Eckpunkten A=B', C, B=A', C'. Da die Diagonalen im Rechteck gleichlang sind und sich halbieren, erhält man unmittelbar die im Satz ausgesprochene Behauptung.

Satz 2. Sind P_1, P_2, P_3, P_4 Eckpunkte eines gegebenen Quadrates und M_1, M_2, M_3, M_4 die Mittelpunkte der Quadratseiten (siehe Skizze), so bilden die Schnittpunkte der Strecken $\overline{P_iM_i}$ (i=1,2,3,4) wieder ein Quadrat.

Beweis: Wir betrachten eine Drehung um den Mittelpunkt O des gegebenen Quadrates mit dem Drehwinkel 90°. Dabei werden die Punkte $P_1,\ldots,P_4$ und $M_1,\ldots,M_4$ jeweils zyklisch vertauscht. Also werden die Strecke $\overline{P_1M_1}$ auf $\overline{P_2M_2}$, $\overline{P_2M_2}$ auf $\overline{P_3M_3}$



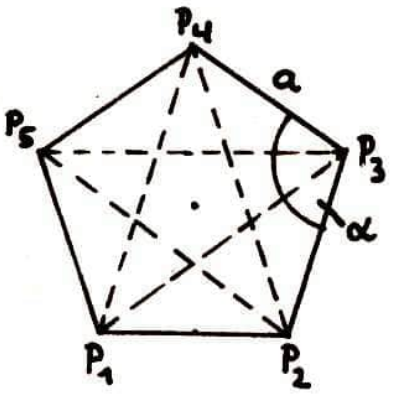
usw. abgebildet. Da bei einer beliebigen Bewegung dem Schnittpunkt zweier Geraden stets der Schnittpunkt der entsprechenden Bildgeraden entspricht, wird bei der betrachteten Drehung auch das innere Viereck auf sich abgebildet, d. h., es ist ein Quadrat.

Mit dem folgenden Satz berühren wir einen wesentlich komplizierteren Sachverhalt der Geometrie des Raumes. Es handelt sich um die Aufgabe, alle natürlichen Zahlen n zu bestimmen, für die ein räumliches n-Eck (nicht alle Ecken liegen in derselben Ebene) existiert, in dem alle Seiten und alle Winkel jeweils kongruent sind. Eine vollständige Lösung dieses Problems steht bis heute noch aus, für zahlreiche Spezialfälle ist dieAntwort aber bekannt. So kann z. B. - wie im folgenden bewiesen wird - kein räumliches 5-Eck mit den angegebenen Eigenschaften existieren.

Zuvor erinnern wir aber noch an einige Eigenschaften der Bewegungen des Raumes. Genau wie die Gruppe der ebenen Bewegungen zerfällt auch die der räumlichen Bewegungen in zwei disjunkte Klassen - die gleichsinnigen (erhalten Orientierungssinn des Raumes) und die ungleichsinnigen Bewegungen. Zu den gleichsinnigen gehören neben der identischen Abbildung die Verschiebungen, Drehungen (um Geraden!) sowie Produkte aus endlich vielen Verschiebungen und Drehungen. Jede ungleichsinnige Bewegung ist eine Dreh- oder Schubspiegelung. Während die gleichsinnigen Bewegungen eine Gruppe bilden, trifft das für die ungleichsinnigen nicht zu - das Produkt zweier ungleichsinniger ist stets eine gleichsinnige Bewegung.

Satz 3. Ein räumliches 5-Eck $P_1P_2P_3P_4P_5$, in dem alle Seiten und Winkel jeweils kongruent sind, ist stets eben.

Beweis: Wir weisen im folgenden die Existenz einer von der Identität verschiedenen räumlichen Drehung nach, bei der das gegebene 5-Eck auf sich abgebildet wird. Da Urbild- und Bildpunkt bzgl. einer Drehung stets in derselben zur Drehachse orthogonalen Ebene liegen, folgt daraus unmittelbar, daß alle 5 gegebenen Eckpunkte in derselben Ebene liegen.



Sei a die Länge der Seiten und α die Größe der Winkel des gegebenen Fünfecks. Der Abstand $\overline{P_iP_j}$ zweier beliebiger Eckpunkte ist entweder gleich a oder $\overline{P_iP_j}$ ist gleich der Länge d der Hypothenuse in einem gleichschenkligen Dreieck $P_iP_jP_k$, wobei alle derartigen Dreiecke kongruent sind. Hieraus kann man ohne Mühe ableiten, daß das gegebene Fünfeck F kongruent ist zu der durch zyklische Permutation der Ecken $P_1,\ldots,P_5$ entstehenden Figur F' mit den Eckpunkten $P_1'=P_2$, $P_2'=P_3$, $P_3'=P_4$, $P_4'=P_5$, $P_5'=P_1$. Aus der Kongruenz der Figuren F und F' folgt nun, daß eine Bewegung $\mathfrak{b}$ existiert, die F auf F' abbildet, d. h. die Ecken $P_1,\ldots,P_5$ zyklisch vertauscht:

$$\mathfrak{b}(P_1) = P_2 \wedge \mathfrak{b}(P_2) = P_3 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}(P_5) = P_1 .$$

Die 5-malige Anwendung von $\mathfrak{b}$ auf F liefert dann wieder die Ausgangsfigur F. Also gilt

$$\mathfrak{b}^5 = i \qquad (i \text{ identische Bew.})$$

Da das Produkt einer ungeraden Anzahl von ungleichsinnigen Bewegungen stets wieder eine ungleichsinnige ist, die identische Bewegung aber zu den gleichsinnigen gehört, muß $\mathfrak{b}$ folglich eine gleichsinnige Bewegung sein.

Die Menge der Eckpunkte von F wird bei $\mathfrak{b}$ auf sich abgebildet, also ist der Schwerpunkt der Figur F ein Fixpunkt bzgl. $\mathfrak{b}$. Da es außer den Drehungen keine von der Identität verschiedenen gleichsinnigen Bewegungen mit Fixpunkten gibt, muß $\mathfrak{b}$ eine Drehung und damit F ein ebenes Fünfeck sein.

Dr. Schwedler
Bereich Theoretische
Mathematik

Lösungen der Aufgaben der DDR-Olympiade

(1) Angenommen, für zwei Polynome $f(x)$, $g(x)$ seien die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt. Dann folgt: Wäre $f(4) = 1$, so führten (3) und (5) auf den Widerspruch $g(1) = 1$, $g(1) = 0$. Also ist nach (1)

$$f(4) = 0.$$

Nach (4) folgt hieraus

$$g(2) = 0,\ g(4) = 0.$$

Aus (2) ergibt sich daher, daß weder $f(1) = 0$ noch $f(2) = 1$ sein kann; somit ist nach (1)

$$f(1) = 1,\ f(2) = 0.$$

Hiernach erhält man aus (3)

$$g(1) = 1,\ g(3) = 1.$$

Somit ergibt (5), daß nicht $f(3) = 1$ gelten kann; nach (1) ist also

$$f(3) = 0.$$

Aus den damit gezeigten Gleichungen

$$f(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1,\quad g(1) = b_3 + b_2 + b_1 + b_0 = 1, \tag{6}$$

$$f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 0,\quad g(2) = 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0 = 0, \tag{7}$$

$$f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 0,\quad g(3) = 27b_3 + 9b_2 + 3b_1 + b_0 = 1, \tag{8}$$

$$f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 0,\quad g(4) = 64b_3 + 16b_2 + 4b_1 + b_0 = 0 \tag{9}$$

folgt, indem man von (7), (8), (9) jeweils (6) subtrahiert und anschließend durch 1, 2 bzw. 3 dividiert,

$$7a_3 + 3a_2 + a_1 = -1,\quad 7b_3 + 3b_2 + b_1 = -1, \tag{10}$$

$$13a_3 + 4a_2 + a_1 = -\frac{1}{2},\quad 13b_3 + 4b_2 + b_1 = 0, \tag{11}$$

$$21a_3 + 5a_2 + a_1 = -\frac{1}{3},\quad 21b_3 + 5b_2 + b_1 = -\frac{1}{3}. \tag{12}$$

Subtrahiert man von (11) und (12) jeweils (10) und dividiert anschließend durch 1 bzw. 2, so folgt

$$6a_3 + a_2 = \frac{1}{2},\quad 6b_3 + b_2 = 1, \tag{13}$$

$$7a_3 + a_2 = \frac{1}{3},\quad 7b_3 + b_2 = \frac{1}{3}. \tag{14}$$

Subtrahiert man (13) von (14), so erhält man

$$a_3 = -\frac{1}{6},\quad b_3 = -\frac{2}{3}.$$

Hieraus und aus (13), (10), (6) folgt der Reihe nach

$a_2 = \frac{1}{2} - 6a_3 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, $b_2 = 1 - 6b_3 = 1 + 4 = 5$,

$a_1 = -1 - 7a_3 - 3a_2 = -1 + \frac{7}{6} - \frac{9}{2} = -\frac{13}{3}$, $b_1 = -1 - 7b_3 - 3b_2 = -1 + \frac{14}{3} - 15 = -\frac{34}{3}$,

$a_0 = 1 - a_3 - a_2 - a_1 = 4$; $b_0 = 1 - b_3 - b_2 - b_1 = 8$.

Daher können nur die Polynome

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{3}x + 4$$

$$g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - \frac{34}{3}x + 8 \qquad (15)$$

die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllen.

In der Tat gilt für diese beiden Polynome

$f(1) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{13}{3} + 4 = 1$, $g(1) = -\frac{2}{3} + 5 - \frac{34}{3} + 8 = 1$,

$f(2) = -\frac{4}{3} + 6 - \frac{26}{3} + 4 = 0$, $g(2) = -\frac{16}{3} + 20 - \frac{68}{3} + 8 = 0$,

$f(3) = -\frac{9}{2} + \frac{27}{2} - 13 + 4 = 0$, $g(3) = -18 + 45 - 34 + 8 = 1$,

$f(4) = -\frac{32}{3} + 24 - \frac{52}{3} + 4 = 0$, $g(4) = -\frac{128}{3} + 80 - \frac{136}{3} + 8 = 0$.

Die Bedingung (1) ist daher erfüllt; denn als Werte von $f(x)$ und $g(x)$ für $x = 1, 2, 3, 4$ treten nur 0 und 1 auf.

(2) ist erfüllt; denn es ist weder $f(1) = 0$ noch $f(2) = 1$.

(3) ist erfüllt; denn es ist $g(1) = 1$ und $g(3) = 1$.

(4) ist erfüllt; denn es ist $g(2) = 0$ und $g(4) = 0$.

(5) ist erfüllt; denn es ist weder $f(3) = 1$ noch $f(4) = 1$.

Daher erfüllt genau das Paar $(f(x), g(x))$ mit $f(x)$, $g(x)$ aus (15) alle Bedingungen der Aufgabenstellung.

---

(2) Für beliebige Q, $Q' \in M$ gilt:

Ist $Q = Q'$, so ist $Q \cap Q'$ die Quadratfläche Q mit dem Umfang $4a$.

Ist $Q \neq Q'$, so kann man, wenn AB eine beliebige Seite der Quadratfläche Q ist, die Ecken von Q und Q' so mit A,B,C,D bzw. A',B',C',D' bezeichnen, daß die Punkte A,A',B,D',C,C', D,B' auf dem gemeinsamen Umkreis von Q und Q' in dieser Reihenfolge angeordnet sind.

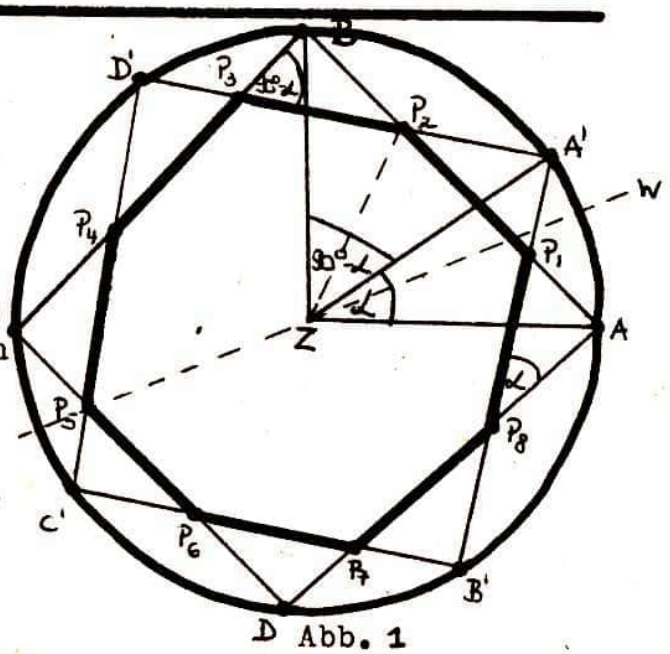


Abb. 1

(Abbildung) Hiernach hat der Winkel $\sphericalangle$ AZA' eine Größe α mit $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden w dieses Winkels geht A in A' über, also Q in Q' und daher (wegen des gewählten Umlaufssinns) B in B', C in C', D in D'. Wegen $\sphericalangle$ AZB $= 90^\circ$ und $0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ$ schneidet w die Strecke AB in einem Punkt P_1, der bei der Spiegelung fest bleibt, also auch auf der Strecke A'B' liegt. Die Strecken AB und A'B' schneiden sich also in demjenigen Punkt P_1 auf AB, für den $\sphericalangle AZP_1 = \frac{\alpha}{2}$ gilt. Ebenso folgt: AB und D'A' schneiden sich in demjenigen Punkt P_2 auf AB, für den

$\sphericalangle BZP_2 = \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, also

$\sphericalangle AZP_2 = 90^\circ - (45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2} + 45^\circ$ gilt. Wegen

$0^\circ < \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} + 45^\circ < 90^\circ$ ist folglich die Strecke P_1P_2 eine Seite der Polygonfläche $Q \cap Q'$. Ebenso findet man die weiteren Schnittpunkte

P_3, P_4 von BC mit D'A' bzw. C'D',
P_5, P_6 von CD mit C'D' bzw. B'C',
P_7, P_8 von DA mit B'C' bzw. A'B'

und damit $Q \cap Q'$ als die Achteckfläche $P_1P_2 \ldots P_8$.

Bei Spiegelung an w geht der Schnittpunkt P_2 von AB und D'A' über in den Schnittpunkt von A'B' und DA, d. h. in P_8. Also ist $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_8}$. Ebenso folgt, daß je zwei benachbarte Seiten von $Q \cap Q'$ dieselbe Länge $s = \overline{P_1P_2}$ haben; somit gilt $u(Q \cap Q') = 8s$. Wegen $\sphericalangle$ A'ZB' $= 90^\circ$ und $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ schneiden sich die Strecken ZA und A'B' in einem Punkt R, und es gilt

$\sphericalangle ARP_8 = \sphericalangle$ A'RZ (Scheitelwinkel) sowie

$\sphericalangle RAP_8 = 45^\circ = \sphericalangle$ RA'Z. Somit gilt

$\sphericalangle P_1P_8A = \sphericalangle RP_8A = \alpha$ (Winkelsumme im Dreieck), wegen

$\sphericalangle P_1AP_8 = 90^\circ$ also $\overline{AP_1} = s \cdot \sin\alpha$. Ebenso erhält man

$\sphericalangle P_2P_3B = 90^\circ - \alpha$, also $\overline{P_2B} = s \cdot \cos\alpha$. Aus

$a = \overline{AP_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2B} = s(\sin\alpha + 1 + \cos\alpha)$ folgt somit

$$s = \frac{a}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}.$$

Nun nimmt $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}(\cos\alpha \cdot \cos 45^\circ + \sin\alpha \cdot \sin 45^\circ) = \sqrt{2}\cos(\alpha - 45^\circ)$ wegen $-45^\circ < \alpha - 45^\circ < 45^\circ$ genau für $\alpha - 45^\circ = 0^\circ$ seinen größten Wert an, und dieser beträgt $\sqrt{2}$. Daher (und weil für die genannten α stets $1 + \sin\alpha + \cos\alpha > 0$

gilt) existiert für alle $Q,Q' \in M$ mit $Q \neq Q'$ ein kleinstmöglicher Wert von $u(Q \cap Q') = 8s$, und dieser beträgt

$$\frac{8a}{1+\sqrt{2}}.$$

Wegen $1+\sqrt{2}>2$, also $\frac{8a}{1+\sqrt{2}}<4$ ist dies zugleich der kleinstmögliche Wert von $u(Q \cap Q')$ für alle $Q,Q' \in M$ auch bei zugelassenem $Q = Q'$.

---

(3) Angenommen, ein Tripel (x,y,z) reeller Zahlen erfülle die genannten Gleichungen. Dann gilt $|x| \neq 1$, $|y| \neq 1$, $|z| \neq 1$; ferner gibt es eine reelle Zahl t mit $x = \tan t$, und es folgt

$$y = \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2\tan t}{1-\tan^2 t} = \tan 2t,$$

$$z = \frac{2y}{1-y^2} = \frac{2\tan 2t}{1-\tan^2 2t} = \tan 4t,$$

$$\tan t = x = \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2\tan 4t}{1-\tan^2 4t} = \tan 8t.$$

Also existiert eine ganze Zahl k mit $t + k\pi = 8t$, woraus $t = \frac{k\pi}{7}$ folgt. Also ist x eine der Zahlen

$$\tan\frac{k\pi}{7} \quad (k \text{ ganzzahlig}).$$

Jede dieser Zahlen ist gleich einer der sieben Zahlen

$$\tan\frac{k\pi}{7} \quad (k = 0,1,\ldots,6).$$

Daher können nur die sieben Tripel

$$\left(\tan\frac{k\pi}{7}, \tan\frac{2k\pi}{7}, \tan\frac{4k\pi}{7}\right) \quad (k=0,1,\ldots,6) \qquad (1)$$

die in der Aufgabe genannten Gleichungen erfüllen.

Jedes dieser Tripel erfüllt diese Gleichungen; denn für jedes dieser Tripel gilt $|x| \neq 1$, $|y| \neq 1$, $|z| \neq 1$ sowie

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2\tan\frac{k\pi}{7}}{1-\tan^2\frac{k\pi}{7}} = \tan\frac{2k\pi}{7} = y \text{ und entsprechend}$$

$$\frac{2y}{1-y^2} = \tan\frac{4k\pi}{7} = z, \quad \frac{2z}{1-z^2} = \tan\frac{8k\pi}{7} = \tan\frac{k\pi}{7} = x.$$

Auch werden x,y,z in (1), wie gefordert, durch Ausdrücke angegeben, die aus den reellen Zahlen π, 7, $(k=)$ $0,1,\ldots,6$ und 1,2 bzw. 4 durch Anwendung der Operationen $.,:$ sowie der Funktion tan gebildet sind.

(4) Angenommen, es gäbe natürliche Zahlen n, m, b mit $n \geq 1$, $m \geq 2$ und $(2n)^{2n} - 1 = b^m$. Dann folgte

$$((2n)^n - 1)((2n)^n + 1) = b^m. \tag{1}$$

Hierin wären $(2n)^n - 1$ und $(2n)^n + 1$ zwei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen und daher zueinander teilerfremd. Jeder Primfaktor in ihren Primzerlegungen müßte folglich wegen (1) in einer Anzahl vorkommen, die ein Vielfaches von m wäre; d. h., es gäbe zwei natürliche Zahlen h und k mit

$$(2n)^n - 1 = h^m, \quad (2n)^n + 1 = k^m. \tag{2}$$

Daraus würde sich $k^m - h^m = 2$, d. h.

$$(k - h)(k^{m-1} + k^{m-2}h + \ldots + h^{m-1}) = 2 \tag{3}$$

ergeben. Wegen (2) und $n \geq 1$ wäre aber $k^m > h^m \geq (2.1)^1 - 1$, also $k > h \geq 1$ und daher sowohl

$$k^{m-1} + k^{m-2}h + \ldots + h^{m-1} > m.h^{m-1} \geq 2 \tag{4}$$

als auch $k - h > 0$, also

$$k - h \geq 1. \tag{5}$$

Da (3), (4), (5) einen Widerspruch bilden, ist hiermit der verlangte Beweis erbracht.

---

(5) Für jede ganze Zahl $i \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^i+1} = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^i} &+ \frac{1}{n^i+1} + \ldots + \frac{1}{2n^i} \\ &+ \frac{1}{2n^i+1} + \ldots + \frac{1}{3n^i} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{(n-1)n^i+1} + \ldots + \frac{1}{n.n^i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}> \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^i} &+ n^i \cdot \frac{1}{2n^i} \\ &+ n^i \cdot \frac{1}{3n^i} \\ &+ \ldots\ldots\ldots \\ &+ n^i \cdot \frac{1}{n.n^i} = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^i} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

I. Wegen der gezeigten Ungleichung für i = 1 gilt

$$\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n^2} > 2.\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right),$$

d. h., die zu beweisende Behauptung ist richtig für k = 2.

II. Angenommen, die zu beweisende Behauptung sei richtig für eine Zahl k = i ≧ 2, d. h., für diese gelte

$$\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n^i} > i \cdot \left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right),$$

dann folgt aus der oben gezeigten Ungleichung

$$\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n^{i+1}} > (i+1).\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right),$$

d. h. die Richtigkeit der Behauptung für k = i+1.

Nach I. und II. ist die Behauptung für alle ganzen Zahlen k ≧ 2 durch vollständige Induktion bewiesen.

---

(6) a) Für jede Folge (x_k), die C-konvergent gegen a ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Ax_k+B)\right)$$

$$= A \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + B = Aa + B = f(a),$$

da nach Voraussetzung $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = a$ gilt.

Damit ist bewiesen, daß für jede solche Folge (x_k) die Folge $(f(x_k))$ stets C-konvergent gegen f(a) ist, w.z.b.w.

b) Es sei r = -(p+q)
und (x_k) die Folge (p,q,r,p,q,r,...). Für sie gilt

$$\sum_{k=1}^{1} x_k = p,\ \sum_{k=1}^{2} x_k = p+q,\ \sum_{k=1}^{3} x_k = o,\ \sum_{k=1}^{4} x_k = p,$$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k = p+q,\ \sum_{k=1}^{6} x_k = 0,\ldots ;$$

im Fall n = 3m+1 (m=0,1,2,...) ist also $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{p}{n}$,

im Fall n = 3m+2 (m=0,1,2,...) ist $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{p+q}{n}$,

im Fall n = 3m (m=1,2,3,...) ist $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$.

Die Folge (x_k) ist daher C-konvergent gegen 0. Nach Voraussetzung ist die Folge $(f(x_k))$ somit C-konvergent gegen $f(0) = 0$, d. h., die Folge $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k))$ ist (im üblichen Sinne) konvergent gegen 0. Das gilt dann auch für ihre Teilfolge $(\frac{1}{3m} \sum_{k=1}^{3m} f(x_k))$, d. h. es ist $\lim_{m\to\infty} (\frac{1}{3m} \sum_{k=1}^{3m} f(x_k)) = 0$.

Wegen $\sum_{k=1}^{3m} f(x_k) = m.(f(p)+f(q)+f(r))$ besagt dies

$\frac{1}{3} (f(p)+f(q)+f(r)) = 0$ und daher

$$f(p) + f(q) = -f(r). \qquad (2)$$

Weiter sei (x'_k) die Folge $(r,-r,r,-r,\ldots)$. Für sie gilt:

Im Fall $n = 2m+1$ $(m=0,1,2,\ldots)$ ist $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x'_k = \frac{r}{n}$,

im Fall $n = 2m$ $(m=1,2,3,\ldots)$ ist $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x'_k = 0$.

Daher ist die Folge C-konvergent gegen 0, und es folgt

$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x'_k)) = 0$, also auch $\lim_{m\to\infty} (\frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{2m} f(x'_k)) = 0$,

Wegen $\sum_{k=1}^{2m} f(x'_k) = m.(f(r) + f(-r))$ also $\frac{1}{2}(f(r) + f(-r)) = 0$,

$$-f(r) = f(-r). \qquad (3)$$

Aus (2), (3), (1) folgt die Behauptung $f(p) + f(q) = f(p+q)$.

(7.) Die weißen Handschuhe für die rechte Hand seien $w_1,\ldots,w_5$, die weißen Handschuhe für die linke Hand seien $W_1,\ldots,W_5$, die schwarzen Handschuhe für die rechte Hand seien $s_1,\ldots,s_5$, die schwarzen Handschuhe für die linke Hand seien $S_1,\ldots,S_5$ genannt.

Die möglichen Spiele seien durch Aufzählen der entnommenen Handschuhe beschrieben. Dabei werde die Reihenfolge der Entnahme nicht in der Beschreibung erfaßt, und die Indizes seien nicht mit angegeben; jede solche Aufzählung von Symbolen w, W, s oder S beschreibt also mehrere mögliche Spiele. Zur Abkürzung seien Wiederholungen gleicher Symbole in Form von "Potenzen" geschrieben.

a) Ein Spiel von 10 Zügen ist nicht mit Sicherheit erfolgreich; denn es kann z. B. auch w^5s^5 lauten. Ein Spiel von

11 Zügen dagegen ist mit Sicherheit erfolgreich. Für jedes solche Spiel trifft nämlich nicht zu, daß sich unter den 11 entnommenen Handschuhen sowohl nur eine der beiden Sorten w, W als auch nur eine der beiden Sorten s, S befindet (denn das wären zusammen höchstens 5 + 5 Handschuhe). Die in a) gesuchte Zahl ist also n = 11.

b) Alle Möglichkeiten, mit 6 Zügen kein passendes Paar zu erhalten, ergeben sich aus folgenden Aufzählungen:

$$w^5s,\ w^5S,\ W^5s,\ W^5S,\ ws^5,\ wS^5,\ Ws^5,\ WS^5, \quad (1)$$

$$w^4s^2,\ w^4S^2,\ W^4s^2,\ W^4S^2,\ w^2s^4,\ w^2S^4,\ W^2s^4,\ W^2S^4, \quad (2)$$

$$w^3s^3,\ w^3S^3,\ W^3s^3,\ W^3S^3. \quad (3)$$

In jeder der 8 Aufzählungen (1) kann man die Reihenfolge der sechs vorkommenden Symbole noch beliebig wählen; da sie in zwei Klassen zu fünf bzw. einem Symbol zerfallen, gibt es für die Wahl der Reihenfolge je $\frac{6!}{5!1!} = 6$ Möglichkeiten. Ferner kann man (in jeder der entstehenden Reihenfolge von Symbolen bei dem ersten der fünf gleichen Symbole als Index genau 5 verschiedene Werte wählen, dann bei dem zweiten genau 4 usw., ebenso bei dem nur einmal vorkommenden Symbol genau 5 Werte. So ergeben sich für (1) insgesamt 8.6.5.4.3.2.1.5 Möglichkeiten.

Entsprechend findet man unter Verwendung von $\frac{6!}{4!2!} = 15$ und $\frac{6!}{3!3!} = 20$ die Anzahlen für (2) und (3) und damit insgesamt

$$8.6.5.4.3.2.1.5 + 8.15.5.4.3.2.5.4 + 4.20.5.4.3.5.4.3$$
$$= 16.6.5.4.3.5.(1 + 10 + 10)$$

erfolglose Spiele von 6 Zügen.

Die Anzahl aller Spiele von 6 Zügen ist 20.19.18.17.16.15. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spiel von 6 Zügen erfolglos ist, gleich $\frac{16.6.5.4.3.5.21}{20.19.18.17.16.15} = \frac{7}{323} > \frac{1}{100}$.

Alle Möglichkeiten, mit 7 Zügen kein passendes Paar zu finden, kann man aus den in (1), (2), (3) aufgezählten Spielen folgendermaßen erhalten: In jedem dieser Spiele kommen genau zwei der vier Symbole w, W, s, S vor. Nur aus diesen beiden Sorten ist noch ein weiterer Handschuh hinzuzufügen. Hierfür gibt es genau 4 Möglichkeiten; denn die beiden in Betracht kommenden Sorten enthalten insgesamt 10 Handschuhe, und von diesen sind schon 6 entnommen. Die Anzahl aller erfolglosen Spiele von 7 Zügen ist

somit das Vierfache der Anzahl aller erfolglosen Spiele von 6 Zügen.

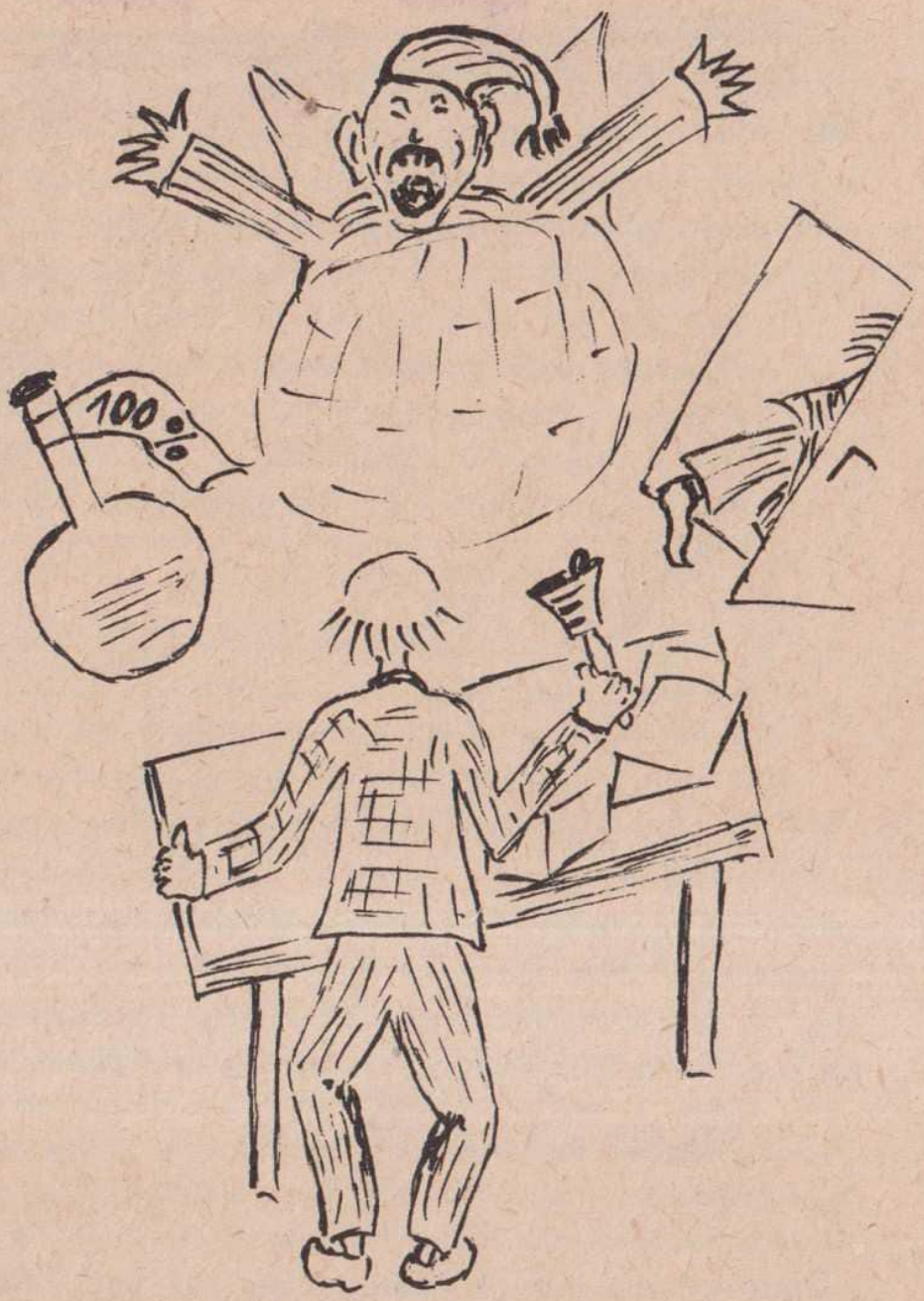
Andererseits ist die Anzahl aller Spiele von 7 Zügen 20.19.18.17.16.15.14, also das Vierzehnfache der Anzahl aller Spiele von 6 Zügen. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spiel von 7 Zügen erfolglos ist, gleich $\frac{7}{323} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{323} < \frac{1}{100}$.

Daraus folgt: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spiel von 7 Zügen erfolgreich ist, ist größer als 0,99; die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spiel von 6 Zügen erfolgreich ist, ist kleiner als 0,99. Ferner wächst die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges monoton (im weiteren Sinne) mit der Anzahl der Züge; denn jedes erfolgreiche Spiel von i Zügen ($i < 20$) hat nur erfolgreiche Fortsetzungsmöglichkeiten zu einem Spiel von i+1 Zügen, jedes erfolglose Spiel von i Zügen dagegen hat auch erfolgreiche Fortsetzungsmöglichkeiten. Somit ist für jedes $i < 6$ erst recht die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spiel von i Zügen erfolgreich ist, kleiner als 0,99.

Daher ist die in b) gesuchte Zahl $k = 7$.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, F. Pegenau
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 447!–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 27. 6. 1980



9
80

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR:
0.40 M

Wie kann man Information messen?

Wir wollen uns einmal die folgende Aufgabe von Fano aus "Transmission of Information" vorlegen, um sie als Ausgangspunkt für die Diskussion eines Informationsmaßes zu benutzen und um sie schließlich auch mit Hilfe dieses Maßes zu lösen:

Gegeben sei eine weibliche Bevölkerung, bestehend aus 35 % Blondinen, 50 % Brünetten und 15 % Rothaarigen. Bei Verabredungen kommen die Blondinen immer pünktlich, die Rothaarigen verspäten sich ständig und die Brünetten werfen jeweils eine Münze, ob sie pünktlich oder zu spät erscheinen sollen.

Uns interessiert:

1. die Ungewißheit über die Pünktlichkeit bei Unkenntnis der Haarfarbe,
2. die Ungewißheit bei Kenntnis der Haarfarbe (für jede Haarfarbe sowie im Mittel) und
3. die gegenseitige Information zwischen Pünktlichkeit und Haarfarbe.

Nun mag der Leser die Frage stellen, was denn eigentlich die Ungewißheit über einen Versuchsausgang mit Information zu tun habe. - Es zeigt sich, daß dies eine grundsätzliche Frage ist, die unser gesamtes weiteres Vorgehen bestimmen wird.

1. Ungewißheit und Information

Information - ihre Erscheinungsformen sind so vielfältig, daß es scheinbar schwerfällt, in diesen Bereich Meßbarkeit hineinzutragen. Der Leser möge dazu nur einmal das Gebiet der menschlichen Kommunikation betrachten, um gar nicht davon zu reden, daß der Informationsbegriff auch in der Vererbungslehre, in den Computerwissenschaften usw. eine Rolle spielt.

Die Frage lautet also: Was ist all diesen Vorgängen gemeinsam? Claude E. Shannon gebührt das Verdienst, den Informationsbegriff einer mathematischen Behandlung zugänglich gemacht und somit die Informationstheorie begründet zu haben, indem er - wie das analog stets bei der Schaffung mathematischer Modelle für reale Dinge und Prozesse geschieht - den Informationsbegriff auf eine wesentliche Seite aller dieser Erscheinungen, die den Anspruch erheben, Information zu sein, reduzierte und dabei (für andere Be-

lange ebenfalls wesentliche) unterscheidende Aspekte unterdrückte. - Er führte also einen Abstraktionsprozeß durch:

- Wodurch entsteht insbesondere die Vielfalt dessen, was Information ist? - Durch den speziellen Inhalt und aus der konkreten Bedeutung der Information für den Empfänger! - Davon abstrahieren wir!
- Was bleibt dann noch, was wollen wir als Gemeinsames betrachten? - Den Zweck, weshalb der Empfänger Information aufnimmt!

Wir sagen nämlich:

> Information interessiert als Mittel, durch dessen Empfang die in der Beurteilung einer Situation liegende Ungewißheit beseitigt werden kann.

Hiermit haben wir in der Tat einen wesentlichen Aspekt von realen Informationen hervorgehoben. - Der Leser wird es aus seiner Erfahrung gewiß bestätigen. (Würde er die WURZEL lesen, wenn er die gesamte Mathematik beherrschte, wenn also hier keine Ungewißheit mehr wäre? - Sicherlich nicht, zumindest würde er sagen: "Informationswert gleich Null!") Ja, auch in der Vererbungslehre ist dies der wesentliche Aspekt der Information: Es geht um die Erhaltung der Art. Das ist aber eine Frage der Anpassung an die Umwelt, d. h. der "richtigen Deutung" der Umwelteinflüsse durch Mutationen in den Erbanlagen (also Beseitigung der Ungewißheit über die Möglichkeiten des Fortbestehens der Art durch Umweltinformationen).

In der mathematischen Theorie beschreiben wir die zu beurteilenden Situationen als Ausgänge von Versuchen und definieren deshalb also vorläufig:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Information,}\\ \text{die die Ausführung}\\ \text{eines Versuches}\\ \text{liefert}\end{array}\right\} := \left\{\begin{array}{l}\text{Ungewißheit,}\\ \text{die vor der Durchführung}\\ \text{eines Versuches}\\ \text{besteht}\end{array}\right.$$

Oder kurz:

Gewonnene Information = Beseitigte Unsicherheit.

Wir weisen nochmals darauf hin, daß diese Definition des Informationsbegriffes durch Reduzierung der realen Information auf einen wesentlichen Aspekt es uns einerseits ermöglichen wird, eine mathematische Theorie zu entwickeln, andererseits aber auch ihren

Inhalt bestimmt (Fragen der konkreten Bedeutung von Information haben z. B. hier keinen Sinn).
Sehr illustrativ für das Wesen unserer Betrachtungen ist das folgende Beispiel:
Ein mittelmäßiger Schüler, der vor einer Prüfung steht, ist in größerer Ungewißheit über deren Ausgang als ein eindeutig guter oder ein eindeutig schlechter Schüler, so daß für ihn die Bekanntgabe des Prüfungsresultates mehr Information bedeutet. - Es interessiert uns nicht die Art der Prüfung, die Bedeutung der Prüfung für den Schüler (eine Abschlußprüfung wird für ihn bestimmt einen anderen Wert haben als eine Leistungskontrolle) usw.

Beispiel 1

a) Ein Flüchtling gelangt an eine Weggabelung; auf einem der Wege erwartet ihn sein Verfolger, während der andere der Weg in die Freiheit ist.
b) Herr Glücksmann verwettet sein Erspartes durch Werfen einer Münze, indem er auf "Zahl" oder "Wappen" setzt.

Obwohl eine dem Flüchtling Gewißheit gebende Information, auf welchem Weg seine Verfolger warten, und eine dem Spieler Gewißheit verschaffende Information über den Ausgang des Münzwerfens für unsere Akteure jeweils von sehr unterschiedlicher Bedeutung sein können, haben wir in der Informationstheorie in beiden Fällen die gleiche Aufgabe vor uns:
Es geht um die Beurteilung der Ungewißheit eines Versuches mit zwei Ausgängen, wobei jeder Ausgang mit der gleichen Wahrscheinlichkeit (Häufigkeit) möglich ist. - Wir billigen also beiden Informationen den gleichen Wert zu.
Den Versuch beschreiben wir wie folgt:

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dabei sind A_1, A_2 Symbole für die jeweiligen Ausgänge, und in beiden Fällen ist $\frac{1}{2}$ die Häufigkeit (genauer: Wahrscheinlichkeit) ihres Auftretens.

Beispiel 2

a) Das Würfeln mit einem normalen Würfel läßt sich also beschreiben durch:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 & A'_3 & A'_4 & A'_5 & A'_6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Dabei können wir A'_i $(1 \leq i \leq 6)$ interpretieren als den Ausgang: "Zahl i gewürfelt". Jeder Ausgang ist gleich wahrscheinlich, besitzt also die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.

b) Statt dessen können wir den Versuch

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} A''_1 & A''_2 & A''_3 & A''_4 & A''_5 & A''_6 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

als Würfeln mit einem "gezinkten" Würfel interpretieren, wobei eine Zahl (etwa die 6) dreimal häufiger vorkommt als jede der anderen Zahlen.

2. Entropie

Nachdem wir die Objekte unserer Theorie bestimmt haben, nämlich Versuche

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1, \ldots, A_n \\ p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}$$

mit n Ausgängen $A_1, \ldots, A_n$ und Wahrscheinlichkeiten für deren Auftreten $p_1, \ldots, p_n$, $0 \leq p_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, wenden wir uns nun der Frage zu, wie wir die Information, die uns die Versuchsausgänge über den Versuch vermitteln, messen können. Dabei tasten wir uns schrittweise an ein geeignetes Maß heran.

Es sei: $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Gemäß unserer vorangegangenen Überlegungen ist Information beseitigte Unsicherheit. Dabei wird man eine Information um so höher bewerten, je seltener der Versuchsausgang ist, über dessen Auftreten sie uns unterrichtet. D. h., man könnte mittels einer beliebigen monoton wachsenden Funktion f definieren

$$I_f(A_i) =_{Df} f(\frac{1}{p_i})$$

und dies als Informationsgehalt des Ausganges A_i betrachten.

b) Betrachten wir die zwei Versuche α_0 und α_1. Dann können wir den Versuch $\mathcal{B}$ beobachten, der darin besteht, daß α_0 und α_1 gleichzeitig ausgeführt werden; der Versuchsausgang von $\mathcal{B}$ ist also dann eine gewürfelte Zahl und das Ergebnis eines Münz-

wurfes. Wir schreiben

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1$$

und haben nun 12 Ausgänge $A_1 \wedge A_1', A_1 \wedge A_2', \ldots, A_1 \wedge A_6'$, $A_2 \wedge A_1', \ldots, A_2 \wedge A_6'$ (also etwa $A_2 \wedge A_6'$: "Wappen geworfen und 6 gewürfelt", wenn in $\mathcal{A}_0$ und $\mathcal{A}_1$ jeweils A_1: "Wappen", A_2: "Zahl" und A_i' ($1 \leq i \leq 6$): "i gewürfelt" bedeuten).
Der Leser sieht bestimmt schnell ein, daß wir $\mathcal{B}$ wie folgt beschreiben können

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A_1 \wedge A_1' & \cdots & A_1 \wedge A_6' & A_2 \wedge A_1' & \cdots & A_2 \wedge A_6' \\ \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

und daß allgemein für die gemeinsame Ausführung $\mathcal{L}$ zweier unabhängiger Versuche

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_m \\ q_1 & \cdots & q_m \end{pmatrix} \quad \text{gilt:}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{A} \times \mathcal{B} = \begin{pmatrix} A_1 \wedge B_1 & \cdots & A_1 \wedge B_m & A_2 \wedge B_1 & \cdots & A_2 \wedge B_m & \cdots & A_n \wedge B_1 & \cdots & A_n \wedge B_m \\ p_1 \cdot q_1 & \cdots & p_1 \cdot q_m & p_2 \cdot q_1 & \cdots & p_2 \cdot q_m & \cdots & p_n \cdot q_1 & \cdots & p_n \cdot q_m \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun den Informationsgehalt des Ereignisses $A_i \wedge B_j$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$).
Dann hätten wir mit a)

$$I_f(A_i \wedge B_j) = f\left(\frac{1}{p_i q_j}\right).$$

Nun kann die Information "$A_i \wedge B_j$" auch vermittelt werden in Form der Verknüpfung von Teilinformation: "A_i" und "B_j". Daher wäre es wünschenswert, wenn der durch f vermittelte Informationsgehalt bzgl. der Zerlegung in Teilinformation additiv wäre. - In einfachster Form wird das durch die Logarithmusfunktion realisiert:

$$I_{\log}(A_i \wedge B_j) = \log\left(\frac{1}{p_i q_j}\right) = \log\left(\frac{1}{p_i}\right) + \log\left(\frac{1}{q_i}\right) = I_{\log}(A_i) + I_{\log}(B_j).$$

Wir vereinbaren daher:

Definition 1. Für einen Versuch $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ heißt

$$I(A_i) =_{Df} \log\left(\frac{1}{p_i}\right) = -\log p_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

Informationsgehalt des Ausganges A_i

Bemerkung. Die Wahl der Basis des Logarithmus ist noch offen. Die Festlegung einer Basis bedeutet die Bestimmung der Informationseinheit.

In der Informationstheorie wählt man aus den verschiedensten Gründen meist 2 als Basis. - Die resultierende Informationseinheit nennen wir bit (binary digit). - Wenn wir im folgenden nichts anderes sagen, dann soll auch bei uns stets der Logarithmus zur Basis 2 gebildet werden.

Wir setzen unsere Beispiele fort:

Beispiel 1. In α_0 gilt für jeden Ausgang
$I(A_1) = I(A_2) = \log 2 = 1$ bit.

Beispiel 2. a) In α_1 gilt für jeden Ausgang
$I(A_i') = \log 6 = 2{,}585$ bit. $(1 \leq i \leq 6)$

b) In α_2 gilt für die Ausgänge A_i'' $(1 \leq i \leq 5)$
$I(A_i'') = \log 8 = 3$ bit,
während für A_6 gilt
$I(A_6'') = \log \frac{8}{3} = \log 8 - \log 3 = 3 - 1{,}5849 = 1{,}4151$ bit.

c) Wie wir sehen, spiegelt sich zunächst in unseren Beispielen eindrucksvoll wider, was wir angestrebt haben: je seltener ein Ereignis ist, umso höher ist sein Informationsgehalt. - Wie können wir aber nun die gesamte Nachrichtenquelle, d. h. den Gesamtversuch, informationstheoretisch charakterisieren? - Es bietet sich an, über den Informationsgehalt der einzelnen Ausgänge zu mitteln. Dabei wollen wir aber vernünftigerweise fordern, daß seltene Ausgänge nur wenig zum Mittel beitragen, weil sie eben selten sind. D. h., wir mitteln entsprechend der Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Ausgänge (Für den Leser, der etwas mit der Wahrscheinlichkeitstheorie vertraut ist: Wir bilden den Erwartungswert des Informationsgehaltes der einzelnen Ausgänge.) und definieren also als geeignetes Informationsmaß H für Versuche (Nachrichtenquellen), indem wir für einen beliebigen Versuch $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ sagen:

Definition 2.

$$H(\alpha) =_{Df} \sum_{i=1}^{n} p_i \, I(A_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log\left(\frac{1}{p_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

heißt Entropie des Versuches α.

Bemerkung. Statt $H(\alpha)$ schreiben wir auch $H(p_1,\ldots,p_n)$, denn der Versuch α ist durch das Tupel $(p_1,\ldots,p_n)$ eindeutig bestimmt.

Wir wollen nun einige Eigenschaften von H angeben, die deutlich machen sollen, daß die Entropie in der Tat ein geeignetes Informationsmaß ist.

Lemma 1. $\lim_{p_i \to 0} p_i \log p_i = 0.$

Beweis. $-\lim_{x \to 0} x \cdot \log x = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{z} \cdot \frac{\log z}{\log 2} = \lim_{z \to \infty} \frac{\frac{1}{z}}{1 \cdot \log 2} = 0.$

Da außerdem gilt log 1 = 0 haben wir also die vernünftige Eigenschaft, daß Ausgänge, deren Auftreten oder Nichtauftreten sicher ist, keinen Beitrag zur Information liefern.

Satz 1. Es gilt $H(\alpha) = 0$ genau dann, wenn es ein k gibt mit $0 \leq k \leq n$, so daß gilt $p_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases}$.

Beweis. Es sei $H(\alpha) = 0$.

D. h. $-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = 0.$

Da für alle i gilt

$$- p_i \log p_i \geq 0,$$

haben wir also insgesamt für alle i

$$p_i \log p_i = 0.$$

Damit kann aber p_i für alle i nur 0 oder 1 sein.

Wegen $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ muß genau ein k, $0 \leq k \leq n$, existieren mit $p_k = 1$, so daß die Notwendigkeit bewiesen ist.

Die Hinlänglichkeit ist trivial.

Wir haben also die vernünftige Eigenschaft, daß die Entropie eines Versuches minimal, d. h. gleich 0 ist, genau dann, wenn es einen sicheren Ausgang des Versuches gibt.

Ebenfalls vernünftig wäre es, maximale Entropie für einen Versuch $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ zu erhalten, wenn der Versuchsausgang am meisten unbestimmt ist, d. h. alle Ausgänge $A_1, \ldots, A_n$ gleich wahrscheinlich sind.

Diese Erwartung bestätigt sich:

Satz 2. $H(p_1, \ldots, p_n)$ ist bei gegebenem n maximal genau dann, wenn gilt $p_i = \frac{1}{n}$ für alle i, $1 \leq i \leq n$.

Wir führen den Beweis über die Diskussion zweier Lemmata.

Lemma 2. Für $x > 0$ gilt $\log x \leq (x-1) \log e$.

Beweis. Es genügt, darauf zu verweisen, daß $y = (x-1) \log e$ die

Gleichung der Tangente an die Kurve $y = \log x$ im Punkt $x=1$ ist.

Lemma 3. Für zwei n-Tupel nichtnegativer reeller Zahlen $(x_1,\ldots,x_n)$ und $(y_1,\ldots,y_n)$ mit $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$ gilt $\sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $x_i = y_i$ für alle $i=1,2,\ldots,n$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, daß für alle i gilt $x_i > 0$.
Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \log \frac{y_i}{x_i} .$$

Mit Lemma 2 erhalten wir daher

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{y_i}{x_i} - 1\right) \log e =$$

$$= \log e \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\right] = 0.$$

Die Gleichheit gilt offensichtlich genau dann, wenn $\frac{y_i}{x_i} = 1$ ist für alle i, denn im Beweis von Lemma 1 sieht man, daß $\log x = (x-1) \log e$ genau für $x = 1$ richtig ist.

Beweis von Satz 2. Wir schreiben Lemma 3 in der Form

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \leq -\sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i$$

und setzen $x_i = p_i$ sowie $y_i = \frac{1}{n}$ $(i=1,2,\ldots,n)$.
Damit erhalten wir

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{n} = -\log \frac{1}{n} = \log n.$$

Wegen $H(p_1,\ldots,p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$ gilt also

$$H(p_1,\ldots,p_n) \leq \log n = H\left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right) ,$$

und Satz 2 ist bewiesen.
Wir erhalten sofort:

Folgerung 1. Für alle Versuche mit n Ausgängen ist die maximal mögliche Entropie $H_{max}^{n} = \log n$.

Insbesondere haben wir also die vernünftige Eigenschaft, daß die maximale Entropie, d. h. maximale Ungewißheit, von Versuchen monoton mit der Anzahl der möglichen Ausgänge wächst.

Betrachten wir unsere obigen Beispiele im Hinblick auf Satz 2 und Folgerung 1:

Beispiel 1. Für α_0 gilt

$$H(\alpha_0)=p_1 I(A_1)+p_2 I(A_2)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1=1 \text{ bit} = H^2_{max}.$$

- Wenn also unser Flüchtling keinen Hinweis erhält, welcher Weg zu bevorzugen ist (etwa von einem Wanderer, der des Weges kommt), benötigt er - um sicher in Freiheit zu bleiben - die in einer solchen Situation (d. h. Entscheidung zwischen 2 Möglichkeiten) maximale Information von 1 bit.

Beispiel 2. Ohne, daß wir genau nachrechnen müssen, wissen wir also mit Folgerung 1 und Satz 2:

$$H(\alpha_1) = \log 6 = 2{,}585 \text{ bit}$$

Stattdessen haben wir

$$H(\alpha_2)=5\cdot\frac{1}{8}\cdot\log 8+\frac{3}{8}\log\frac{8}{3}=\frac{15}{8}+\frac{9}{8}=\frac{3}{8}\log 3$$

$$=3\cdot\frac{3}{8}\cdot 1{,}5849 = 3 - 0{,}5943 = 2{,}4057 \text{ bit}.$$

Die Ungleichung

$$H(\alpha_2) = 2{,}4057 < 2{,}585 = H(\alpha_1) = H^6_{max}$$

illustriert insbesondere Satz 2, während die Ungleichung

$$H^2_{max} = H(\alpha_0) = 1 < 2{,}585 = H(\alpha_1) = H^6_{max}$$

die Aussage von Folgerung 1 verdeutlicht.

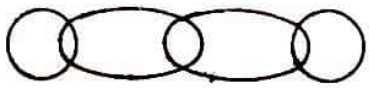
Wir haben bisher gezeigt, daß die Entropie H ein Informationsmaß ist, das bestens einigen unserer intuitiven Vorstellungen über ein solches Maß entspricht. Das ist auf unserem Weg, ausgehend von "praktischen" Problemen zu einer gut motivierten Theorie, schon ein ganz ordentliches Stück. Noch besser wäre es, wenn es sich erweisen sollte, daß H im Rahmen unserer Vorstellungen von Information sogar im gewissen Sinne das einzig mögliche vernünftige Informationsmaß ist. Einen solchen Satz können wir in der Tat formulieren. Dazu müssen wir jedoch noch einen Begriff bereitstellen, den wir auch für die Lösung unserer eingangs gestellten Aufgabe benötigen werden.

Fortsetzung folgt

Dr. E. Creutzburg
Bereich Mathematische
Kybernetik und Rechentechnik

Der berühmte Edinburgher Mathematik-Professor MacLaurin hatte das Unglück, sich beim Gähnen stets die Kinnbacken zu verrenken, so daß er dann seinen Mund nicht mehr schießen konnte. Seine Hörer nutzten das aus. Wenn sie von der Vorlesung ermüdet waren, gähnten sie so demonstrativ, daß der Professor instinktiv mitgähnen mußte. Dann stand er vor ihnen mit offenem Munde und konnte nicht reden, bis er seinem Diener geklingelt hatte, der den Mund wieder zumachte. Aber unterdessen hatten die Hörer das Weite gesucht.

Der Mathematiklehrer fragte einen vorlauten Schüler:
"Wieviel ist zwei plus drei?"
"Fünf."
"Ganz gut ...", sagte der Lehrer.
"Was heißt hier ganz gut ,-es war unübertrefflich!"



Aus CALLETTIANA: Aussprüche von Johann Georg August Galletti

"Schweigt, wir sind ja noch alle dumme Jungen."
Schüler: "Ich nicht, Herr Professor."
Lehrer: "Aber ich!"

"Es giebt viele, die nicht reden, wenn sie verstummen sollten, und andere, die nicht fragen, wenn sie geantwortet haben."

"So ein ungezogener Vater von einem so braven Sohne!"

"Halten Sie Ihre Ohren, wenn Sie Ihrer Zunge nicht freien Lauf lassen wollen."

Preisaufgaben

M 43 ②

In der Ebene seien die Punkte A, B und C gegeben. Man konstruiere drei Kreise K_1, K_2 und K_3 so, daß sich die Kreise K_2 und K_3 im Punkt A berühren, die Kreise K_3 und K_1 im Punkt B und die Kreise K_1 und K_2 im Punkt C.

M 44 ②

Gegeben sei ein Trapez ABCD mit der Grundlinie AB. Weiter sei $\sphericalangle DAB < \sphericalangle ABC$. Man zeige, daß dann $AC > BD$ ist.

M 45 ①

Man löse das Gleichungssystem

$$\sqrt{\frac{y+1}{x-y}} + 2\sqrt{\frac{x-y}{y+1}} = 3$$

$$x+xy+y = 7.$$

M 46 ①

Welche reellen x und y erfüllen die Gleichung

$$x^2 + 4x\cos(xy) + 4 = 0?$$

M 47 ①

Man löse das Gleichungssystem

$$(3x+y)^{x-y} = 9$$

$$\sqrt[x-y]{324} = 18x^2 + 12xy + 2y^2.$$

M 48 ②

Пусть $\frac{1}{2} < \lambda < 1$. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC отложены отрезки $BA_1 = \lambda \cdot BC$, $CB_1 = \lambda \cdot CA$, $AC_1 = \lambda \cdot AB$. Доказать, что периметр треугольника $A_1B_1C_1$ не превосходит периметр треугольника ABC умноженный на λ.

Liebe Wurzelleser!

Leider sind uns bei den Preisaufgaben in den Heften 2/80 und 3/80 2 Fehler unterlaufen. So waren die Aufgaben M 11 und M 17 nicht korrekt gestellt. Diejenigen Leser, die das bemerkten und einen entsprechenden Hinweis an uns schickten, bekommen dafür die volle Punktzahl.
Wir stellen nun diese beiden Aufgaben als M 43 und M 44 erneut. Deshalb bitten wir alle Wurzelleser, die für M 11 und M 17 schon die Punkte erhielten, nicht noch einmal Lösungen zu M 43 und M 44 einzusenden.

Die Redaktion

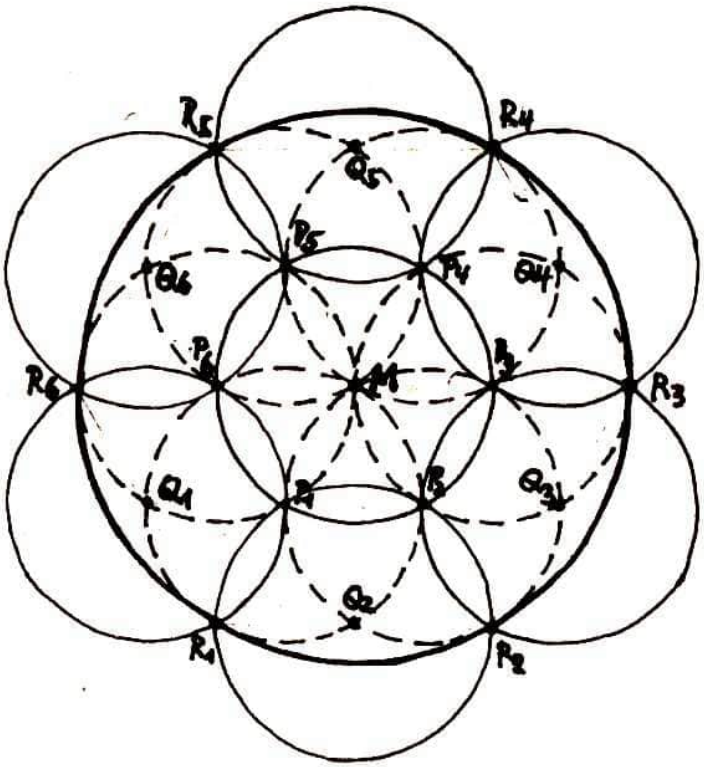
Aufgabe M 10

Es ist $(1+\frac{1}{\sin\alpha})(1+\frac{1}{\cos\alpha}) = 1 + \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} =$

$$= 1 + \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

Da $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ gilt, erhält man $0 < \sin\alpha < 1$, $0 < \cos\alpha < 1$, $0 < \sin 2\alpha \leq 1$. Folglich ist $1 + \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{2}{\sin 2\alpha} > 5$.
Die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe M 12



Um den Punkt M wird auf dem Radius $\frac{r}{2}$ obige Rosettenform konstruiert. Sie besteht aus den Kreisen mn, die Punkte M, P_i und Q_i. Die von den Kreisen um M und Q_i überdeckte Fläche sei A. Dann sind die Punkte R_i die Randpunkte von A, welche minimalen Abstand zu M haben. Dieser beträgt $2 \cdot \frac{2}{r} = r$. Die Fläche A überdeckt also einen Kreis mit dem Radius r. Aus der obigen Zeichnung sieht man weiterhin, daß 6 Kreise vom Radius $\frac{r}{2}$ benötigt werden, um den Rand des Kreises um M mit dem Radius r zu überdecken. Dabei bleibt jedoch das Zentrum dieses Kreises unüberdeckt.
Lösung: Man benötigt mindestens 7 Kreise des Radius $\frac{r}{2}$, um einen Kreis mit dem Radius r zu überdecken.

Aufgabe L 60

Auf einem Sechseck der Kantenlänge 1 kann man 7 Punkte so anordnen, daß der Abstand je zweier Punkte größer oder gleich 1 ist (Eckpunkte und Mittelpunkt des Sechsecks). Auf einem Sechseck der Kantenlänge 11 kann man 397 Punkte so anordnen, daß der Abstand je zweier Punkte größer oder gleich 1 ist. Es ist die kleinste Fläche auf der eine solche Anordnung möglich ist. Der Flächeninhalt dieses Sechsecks beträgt $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 11^2 = 314{,}37$. Der Flächeninhalt des Kreises mit Radius 10 beträgt $100\pi = 314{,}16$. Folglich kann man keine 400 Punkte auf einem Kreis mit Radius 10 so anordnen, daß der Abstand je zweier Punkte größer als 1 ist.

Aufgabe M 13

Es ist

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} .$$

Addiert man die rechten und linken Seiten dieser Gleichungen, so erhält man die geforderte Gleichung.

Aufgabe M 14

Ist m eine Primzahl, so ist das Produkt nicht durch m teilbar. Ist m keine Primzahl und $m = a.b$ mit $a \neq b$, so ist das Produkt durch m teilbar, da a und b dann Faktoren dieses Produktes sind. Ist $m = p^2$ und p Primzahl, so ist das Produkt durch m teilbar falls $2p < p^2$, da dann sowohl p als auch 2p Faktoren des Produktes sind. Aus $2p < p^2$ folgt $p \neq 2$ bzw. $m \neq 4$. Das Produkt $1.2.3. \ldots .(m-1)$ ist genau dann durch m teilbar, wenn m keine Primzahl ist und wenn $m \neq 4$ ist.

Aufgabe M 15

Wir setzen $\sqrt[3]{x} = u \quad \sqrt[3]{y} = v$.

Dann erhalten wir

$$u^3 - v^3 = \frac{7}{2}(u^2v - uv^2) \qquad (1)$$

$$u - v = 3 \qquad (2)$$

Aus (1) erhält man

$$(u-v)\left[(u-v)^2+3uv\right] = \frac{7}{2}\,uv(u-v).$$

Aus (2) folgt dann

$$9 + 3uv = \frac{7}{2}\,uv$$

$$uv = 18.$$

Als Lösungen für u und v erhält man

$$u_1=6, \quad v_1=3 \quad \text{und} \quad u_2=-3, \quad v_2=-6.$$

Die Lösungen des gegebenen Gleichungssystems sind

$$x_1=216, \; y_1=27 \quad \text{und} \quad x_2=-27, \; y_2=-216.$$

Aufgabe M 16

$$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$$

$$(2x+y)^2+(x+2y)^2 + 2y - 2x + 2 = 0$$

$$(2x+y-1)^2 + (x+2y+1)^2 = 0$$

Man erhält also $2x + y - 1 = 0$

und $x + 2y + 1 = 0.$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist x=1, y= -1.
Da alle Umformungen äquivalente waren, ist x=1, y= -1
auch Lösung der gegebenen Gleichung.

Aufgabe M 18

Sei E der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks.
Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{array}{r} AB < AE + BE \\ CD < EC + ED \\ \hline AB + CD < AC + BD \end{array} \qquad (1)$$

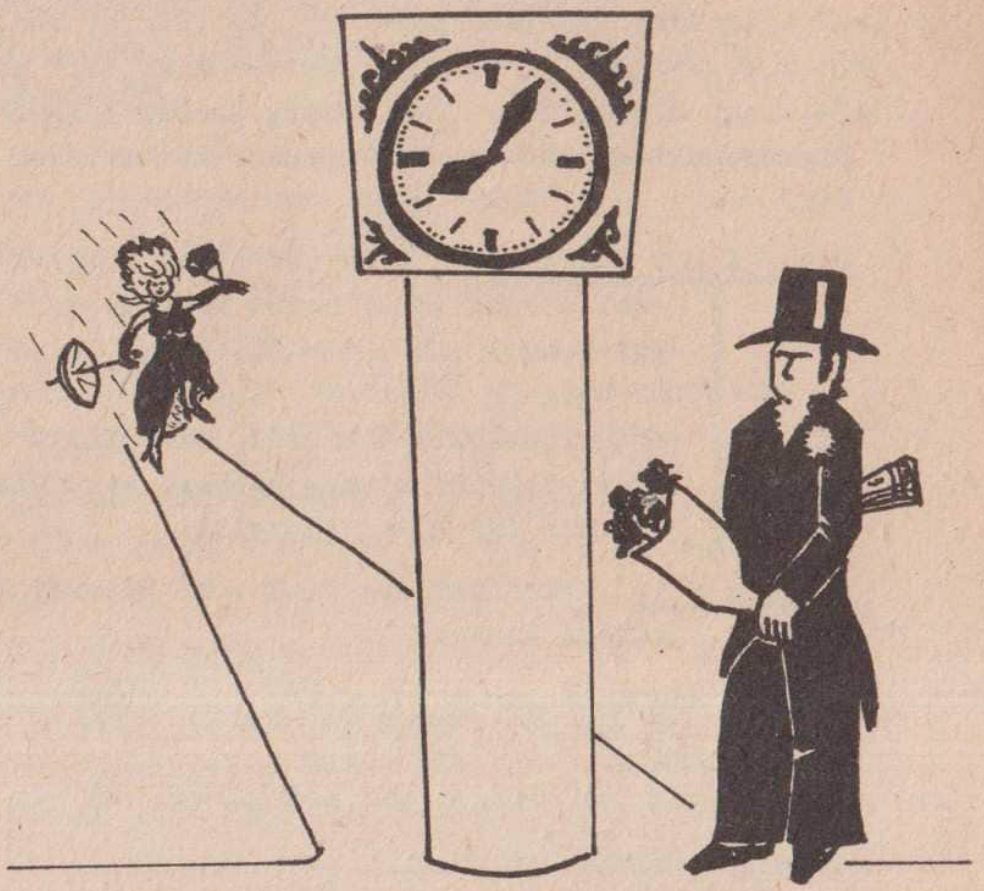
nach Voraussetzung ist:

$$AB + BD \leq AC + CD \qquad (2)$$

Addiert man (1) und (2), so erhält man
$2AB < 2AC$ und somit $AB < AC$.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, F. Pegenau
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 31.7.80



WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR:
0,20 M

10
80

Ungleichungen für konvexe Funktionen

Bei der Untersuchung der Güte von statistischen Schätzungen stieß eine Mathematik/Physik-Lehrer-Studentin unserer Sektion auf folgendes Problem. Seien x_i, $i=1,\ldots,n$, $n\geq 1$, reelle Zahlen mit $x_1+\ldots+x_n=1$. Für welche Werte von x_i wird der Ausdruck $x_1^2+\ldots+x_n^2$ minimal? Bei der Lösung dieser Aufgabe nutzten wir die Eigenschaften konvexer Funktionen, konkret der Funktion $f(x) = x^2$.

Definition: Eine auf einem Intervall I definierte reelle Funktion f heißt konvex, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und alle $\alpha_1, \alpha_2, 0 < \alpha_1, 0 < \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2 = 1$, die Beziehung

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2) \qquad (1)$$

gilt; f heißt streng konvex, wenn die Gleichheit in (1) nur für $x_1=x_2$ eintritt.

Lemma 1. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist auf $I = (-\infty, \infty)$ streng konvex.

Beweis. Wegen $\alpha_1+\alpha_2 = 1$ gilt

$$\begin{aligned}&\alpha_1 x_1^2+\alpha_2 x_2^2-(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)^2 = \\ &=\alpha_1 (1-\alpha_1)x_1^2-2\alpha_1\alpha_2 x_1 x_2+\alpha_2(1-\alpha_2)x_2^2 \\ &=\alpha_1\alpha_2(x_1-x_2)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Mehr noch, im Falle $x_1 \neq x_2$ gilt in der letzten Ungleichung sogar die strenge Größer-Beziehung.

Aufgabe 1. Beweise, daß die Funktionen

a) $f(x) = x$, $x \in (-\infty, \infty)$,

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$

konvex (b) sogar streng konvex) sind!

Bemerkung. Stetige Funktionen sind schon dann konvex, wenn (1) nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ gilt (s. Alpha, 14 (1980), Heft 3, S. 58-59).

Aufgabe 2. Weise die Konvexität nach für die stetigen Funktionen

a) $f(x) = e^x$, $x \in (-\infty, \infty)$,

b) $f(x) = -\ln x$, $x \in (0, \infty)$.

Aufgabe 3. Weise nach, daß im Falle $x_1 < x_2$ die Ungleichung (1) gleichbedeutend damit ist, daß die Grafik der Funktion f auf dem Intervall (x_1, x_2) nirgends oberhalb der Sekante zwischen den Punkten $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ verläuft! Wie äußert sich strenge Konvexität geometrisch?

Aufgabe 4. Überzeuge Dich anhand der grafischen Darstellung von der strengen Konvexität der Funktionen

a) $f(x) = x^{1+\beta}$, $\beta > 0$, $x \in [0, \infty)$,

b) $f(x) = -x^{\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, $x \in [0, \infty)$.

Für konvexe Funktionen gilt nun nicht nur die Ungleichung (1), sondern auch eine "mehrdimensionale" Variante, die wir dann zur Lösung des eingangs formulierten Problems benutzen werden.

Satz 1. Sei f eine konvexe Funktion auf I. Dann gilt für alle natürlichen n, alle $x_i \in I$, $i=1,\dots,n$, und alle α_i, $\alpha_i > 0$, $i=1,\dots,n$, $\alpha_1 + \dots \alpha_n = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i). \qquad (2)$$

Beweis. Für n=1 ist (2) trivial, für n=2 fällt (2) mit (1) zusammen. Den Beweis für beliebiges n führen wir mit vollständiger Induktion. Sei (2) für n=k richtig. Dann gilt für n=k+1

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i + (\alpha_k + \alpha_{k+1})\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} x_k + \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} x_{k+1}\right)\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f(x_i) + (\alpha_k + \alpha_{k+1}) f\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} x_k + \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} x_{k+1}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f(x_i) + (\alpha_k + \alpha_{k+1})\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} f(x_k) + \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} f(x_{k+1})\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i f(x_i).$$

Wenn wir in (2) $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ setzen, erhalten wir die wichtige

Folgerung 1. Sei f eine konvexe Funktion auf I. Dann gilt für alle natürlichen n und alle $x_i \in I$, $i=1,\dots,n$,

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i). \qquad (3)$$

Aufgabe 5. Zeige, daß unter der Voraussetzung der strengen Konvexität an f das Gleichheitszeichen in (2) und (3) genau dann gilt, wenn $x_1 = \ldots = x_n$.

Mit Hilfe von Folgerung 1, Lemma 1 und Aufgabe 5 läßt sich nun das eingangs formulierte Problem leicht lösen. Wegen $x_1 + \ldots + x_n = 1$ erhalten wir nämlich für $f(x) = x^2$ aus der Ungleichung (3)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{1}{n} . \tag{4}$$

Mehr noch, wegen der strengen Konvexität von f nimmt die linke Seite in (4) ihren minimalen Wert $\frac{1}{n}$ nur an der Stelle $(x_1,\ldots,x_n) = (\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n})$ an. (Übrigens kann man dieses Ergebnis auch mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz-Bunjakovskij erzielen.)

Zum Schluß noch einige Aufgaben.

Aufgabe 6. Beweise die Ungleichungen

a) $x_1^{1+\beta} + \ldots + x_n^{1+\beta} \geq n^{-\beta} (x_1 + \ldots + x_n)^{1+\beta}$, $\beta \geq 0$, $x_i \geq 0$,

b) $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$, $x_i \geq 0$ (Hinweis: wähle $f(x) = -\ln x$),

c) $n e^{x_1 + \ldots + x_n} \leq e^{nx_1} + \ldots + e^{nx_n}$ (Hinweis: $f(t) = e^t$, $t_i = nx_i$),

d) $x_1^2 + 2x_2^2 + \ldots + nx_n^2 \geq (1 + \ldots + n)^{-1} (x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n)^2$.

Aufgabe 7. Beweise die "bedingten" Ungleichungen

a) $x_1^3 + \ldots + x_n^3 \geq n^{-\frac{1}{2}}$, falls $x_i \geq 0$, $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ (Hinweis: $f(t) = t^{3/2}$, $t_i = x_i^2$),

b) $|x_1| + \ldots + |x_n| \leq \sqrt{n}$, falls $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$,

c) $x_1 + \ldots + x_n \geq n$, falls $x_i \geq 0$, $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$.

Aufgabe 8. Falls $x_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,n$, und $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, so gilt $(1+x_1) \cdot \ldots \cdot (1+x_n) \geq 2^n$.
(Für diese Aufgabe gibt es übrigens auch eine elegante elementare Lösung.)

Dr. U. Zähle
Bereich WMS

Ein Freundschaftsdienst

Zu einem alten Araber kamen drei junge Leute und sagten ihm: "Unser Vater ist gestorben. Er hat uns siebzehn Kamele hinterlassen und im Testament verfügt, daß der älteste die Hälfte, der zweite ein Drittel und der jüngste ein Neuntel der Kamele bekommen soll. Jetzt können wir uns über die Teilung nicht einigen; übernimm du die Entscheidung!"
Der Araber dachte nach und sagte: "Wie ich sehe, habt ihr, um gut teilen zu können, ein Kamel zu wenig. Ich habe selbst nur ein einziges Kamel, aber es steht euch zur Verfügung. Nehmt es und teilt dann, und bringt mir nur, was übrigbleibt."
Sie bedankten sich für diesen Freundschaftsdienst, nahmen das Kamel mit und teilten die achtzehn Kamele nun so, daß der älteste die Hälfte, das sind neun, der zweite ein Drittel, das sind sechs, und der Jüngste ein Neuntel, das sind zwei Kamele, bekam. Zu ihrem Erstaunen blieb, als sie ihre Kamele zur Seite geführt hatten, ein Kamel übrig. Dieses brachten sie, ihren Dank erneuernd, ihrem alten Freund zurück.

(Bertolt Brecht)

Wie kann man Information messen?

(Fortsetzung von Heft 9/80)

3. Bedingte Entropie und Synentropie

Es geht uns darum, bei Vorliegen zweier Versuche $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 \dots A_n \\ p_1 \dots p_n \end{pmatrix}$ und $\beta = \begin{pmatrix} B_1 \dots B_m \\ q_1 \dots q_m \end{pmatrix}$, die voneinander abhängen, zu messen, wie sich die Kenntnis eines Versuchsausganges von α auf die

Information auswirkt, die uns der Gesamtversuch $\mathcal{L} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ vermittelt, bzw. wie sich die Kenntnis des Ergebnisses von $\mathcal{A}$ auf die Ungewißheit über $\mathcal{B}$ niederschlägt.
Während wir oben für unabhängige Versuche $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ de facto gezeigt haben

$$H(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{B}),$$

wird man im Falle einer Abhängigkeit von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ erwarten, daß nach der "Übertragung" der Information von $\mathcal{A}$ nicht mehr die volle Information über $\mathcal{B}$ notwendig ist, um volle Information über den Gesamtversuch $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ zu erhalten, also etwa:

$$H(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{B}/\mathcal{A}) \leq H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{B}).$$

Nennen wir $H(\mathcal{B}/\mathcal{A})$ bedingte Entropie des Versuches $\mathcal{B}$ bei gegebenem Ausgang von $\mathcal{A}$, so steht die Frage, wie ist diese zu bestimmen, damit die obige Gleichung und Ungleichung gelten.
Während die Unabhängigkeit zweier Versuche $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gerade dadurch charakterisiert ist, daß sich die Wahrscheinlichkeiten der Versuchsausgänge multiplizieren,

also $\mathcal{L} = \mathcal{A} \times \mathcal{B} = \begin{pmatrix} A_1 \wedge B_1 & \cdots & A_1 \wedge B_m & \cdots & A_i \wedge B_j & \cdots & A_n \wedge B_m \\ r_{11} & \cdots & r_{1m} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{nm} \end{pmatrix}$

mit

$$r_{ij} = p_i q_j \qquad \text{(s. o.)},$$

beeinflussen sich bei Abhängigkeit die Wahrscheinlichkeiten p_i und q_j in irgendeiner anderen Weise.
D. h. es gibt neue Wahrscheinlichkeiten $q_{j/i}$, ($\sum_{j=1}^{m} q_{j/i} = 1$, für $i=1,\ldots,n$ und $\sum_{i=1}^{n} q_{i/j} = q_j$, für $j=1,\ldots,m$) dafür, daß bei Eintreten des Ausganges A_i auch der Ausgang B_j vorliegt, also Wahrscheinlichkeiten, die gerade die Abhängigkeit zum Ausdruck bringen (wir sprechen von bedingten Wahrscheinlichkeiten), so daß wir also für den Gesamtversuch $\mathcal{L} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, d. h. alle Ausgänge $A_i \wedge B_j$ fordern

$$r_{ij} = p_i \cdot q_{j/i}.$$

Nach unseren Voraussetzungen haben wir einen neuen Versuch

$$\mathcal{B}/A_i = \begin{pmatrix} B_1/A_i & \cdots & B_m/A_i \\ q_{1/i} & \cdots & q_{m/i} \end{pmatrix},$$

der darin besteht, daß $\mathcal{B}$ realisiert wird, nachdem wir den Ausgang A_i von $\mathcal{A}$ kennen ($1 \leq i \leq n$).
Es gilt für diesen Versuch

$$H(\mathcal{B}/A_i) = -\sum_{j=1}^{m} q_{j/i} \log q_{j/i} \cdot$$

Mitteln wir über alle Ausgänge A_i von $\mathcal{A}$, erhalten wir per definitionem die bedingte Entropie von $\mathcal{B}$ unter der Bedingung, daß vorher ein Ausgang von $\mathcal{A}$ erhalten wurde:

$$H(\mathcal{B}/\mathcal{A}) =_{Df} \sum_{i=1}^{n} p_i H(\mathcal{B}/A_i) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i q_{j/i} \log q_{j/i}$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij} \log q_{j/i} \cdot$$

Durch einfaches Nachrechnen erhält man sofort den folgenden

Satz 3. Für zwei Versuche $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt
$H(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{B}/\mathcal{A})$.

Bemerkung. 1. Für unabhängige Versuche $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt
$H(\mathcal{B}/\mathcal{A}) = H(\mathcal{B})$.

2. Es gilt ganz analog $H(\mathcal{A}\times\mathcal{B}) = H(\mathcal{B}) + H(\mathcal{A}/\mathcal{B})$, so daß alle folgenden Betrachtungen symmetrisch in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind.

Ferner haben wir

Satz 4. Für Versuche $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt
$H(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \leq H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{B})$.
Dabei gilt die Gleichheit genau dann, wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ unabhängig sind.

Folgerung. $H(\mathcal{B}/\mathcal{A}) \leq H(\mathcal{B})$.

Beweis von Satz 4. Es gilt einerseits

$$H(\mathcal{A}\times\mathcal{B}) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij} \log r_{ij}. \qquad (*)$$

Andererseits haben wir

$$H(\mathcal{A})+H(\mathcal{B}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i - \sum_{j=1}^{m} q_i \log q_i =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\Big)\log p_i - \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n} r_{ij}\Big)\log q_j =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}(\log p_i + \log q_j) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij} \log p_i \cdot q_j \qquad (**)$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$r_{ij} = x_k \text{ und } p_i q_j = y_k \quad (k=1,\ldots,n\cdot m),$$

wobei k alle Indexpaare (i,j) numeriert, erhalten wir aus (*) bzw. (* *):

$$H(\alpha x \beta) = -\sum_{k=1}^{n\cdot m} x_k \log x_k \quad \text{und}$$

$$H(\alpha)+H(\beta) = -\sum_{k=1}^{n\cdot m} x_k \log y_k$$

mit $0 \leq x_k \leq 1$, $\sum_{k=1}^{n\cdot m} x_k = 1$

und $0 \leq y_k \leq 1$, $\sum_{k=1}^{n\cdot m} y_k = 1$.

Damit erhalten wir durch Anwendung von Lemma 3 sofort

$$H(\alpha x \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta),$$

und $H(\alpha x \beta) = H(\alpha) + H(\beta)$ gilt genau dann, wenn $x_k = y_k$, für $k=1,\ldots,n\cdot m$, d. h. wenn $r_{ij} = p_i q_j$, für alle i und j, und das bedeutet Unabhängigkeit.

Betrachten wir letzten Endes die Differenz

$$T(\alpha,\beta) =_{Df} H(\alpha) + H(\beta) - H(\alpha x \beta) = H(\alpha) - H(\alpha/\beta) =$$

$$= H(\beta) - H(\beta/\alpha) = T(\beta,\alpha),$$

so läßt sie sich als ein Maß für die gegenseitige Information zwischen α und β betrachten (wir sprechen von der Synentropie). Denn $H(\beta)$ ist die Ungewißheit von β ohne Kenntnis des Ergebnisses von α; $H(\beta/\alpha)$ ist die Ungewißheit von β bei Kenntnis des Ergebnisses von α, also gibt $T(\alpha,\beta)$ die (mittlere) Verminderung der Ungewißheit von β – also den Informationsgewinn über β – an, der durch die Kenntis des Ergebnisses von α entsteht. – Der gleiche Wert ergibt sich bei der entgegengesetzten Versuchsausführung: erst β dann α .

Mit Satz 4 gilt sofort

Satz 5. $T(\alpha,\beta) \geq 0$, wobei die Gleichheit genau bei Unabhängigkeit von α und β gilt.

Die Synentropie entspricht also unseren inhaltlichen Erwartungen über gegenseitige Information.

Wir haben oben unsere Hoffnung (weil Legitimation unseres Ansatzes) ausgesprochen, daß die Entropie H das einzige im gewissen Sinne vernünftige Informationsmaß ist. Und es gilt in der Tat der folgende

Satz 6. Für jede Funktion F, die Versuche in die reellen Zahlen abbildet, dabei nur von den Wahrscheinlichkeiten abhängt und die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $F(p_1,\ldots,p_n)$ ist in allen Variablen im Bereich $0 \leq p_i \leq 1$ $(i=1,\ldots,n)$ stetig.
2. $F(p_1,\ldots,p_n) \leq F(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n})$,
3. $F(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = F(\mathcal{A}) + F(\mathcal{B}/\mathcal{A})$,
4. $F(p_1,\ldots,p_n,0) = F(p_1,\ldots,p_n)$,
5. $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 1$ (Normierung),

gilt: $F(p_1,\ldots,p_n) = H(p_1,\ldots,p_n)$.

Wir wollen auf den Beweis dieses Rechtfertigungssatzes hier verzichten und uns abschließend die eingeführten Begriffe an unserem Einführungsbeispiel verdeutlichen.

Zu 1. Hier ist also die Frage gestellt nach dem Informationsgehalt des Vorganges, der darin besteht, daß wir die weibliche Bevölkerung auf ihre Pünktlichkeit beim Rendezvous hin beobachten, wobei wir keinerlei Vorkenntnisse haben.

Also $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ (und B_1: "pünktlich"; B_2: "zu spät")

und $H(\mathcal{B}) = 0{,}6 \cdot \log \frac{1}{0{,}6} + 0{,}4 \cdot \log \frac{1}{0{,}4} = 0{,}970$ bit.

Zu 2. In diesem Falle wissen wir um die Abhängigkeit der Pünktlichkeit von der Haarfarbe, so daß uns unsere Beobachtungen an der Normaluhr weniger überraschen, also weniger Informationen liefern.

Also $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0{,}35 & 0{,}5 & 0{,}15 \end{pmatrix}$ (mit A_1: "blond", A_2: "braun", A_3: "rot")

und $\mathcal{B}/A_1 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}/A_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathcal{B}/A_3 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

so daß

$H(\mathcal{B}/A_1) = 1 \cdot \log 1 + 0 = 0$ bit

$H(\mathcal{B}/A_2) = 2 \cdot 0{,}5 \cdot \log \frac{1}{0{,}5} = 1$ bit

$H(\mathcal{B}/A_3) = 0 + 1 \cdot \log 1 = 0$ bit

$H(\mathcal{B}/\mathcal{A}) = 0{,}35 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}15 \cdot 0 = 0{,}5$ bit

Kommentar: Wenn wir eine blonde oder rothaarige Frau sehen, wissen wir auf Grund ihrer Haarfarbe schon vollständig über ihre Pünktlichkeit Bescheid und bräuchten an der Normaluhr die Partner gar

nicht erst fragen (Informationswert gleich Null). - Anders bei den braunen. Weil aber unsere Beobachtungsobjekte nicht immer braun sind (sondern nur in 50 % der Fälle), nützt uns die Kenntnis der Haarfarbe im Mittel doch etwas ($H(\mathcal{B}/\mathcal{A}) < H(\mathcal{B})$).

Zu 3. Hier ist nach $T(\mathcal{A},\mathcal{B})$ gefragt.

Es gilt

$$\mathcal{A}\times\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A_1\wedge B_1 & A_1\wedge B_2 & A_2\wedge B_1 & A_2\wedge B_2 & A_3\wedge B_1 & A_3\wedge B_2 \\ 0{,}35 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0{,}15 \end{pmatrix}$$

und

$$T(\mathcal{A},\mathcal{B}) = H(\mathcal{A})+H(\mathcal{B})-H(\mathcal{A}\times\mathcal{B}) = H(\mathcal{B})-H(\mathcal{B}/\mathcal{A}) =$$
$$= 0{,}970 \text{ bit} - 0{,}5 \text{ bit} = 0{,}470 \text{ bit}.$$

Also bringt uns die Kenntnis der Haarfarbe ca. die Hälfte der Information für die Beobachtung der Pünktlichkeit der weiblichen Bevölkerung.

4. Schlußbemerkungen

1) Uns konnte es hier lediglich darum gehen, die Entropie H als geeignetes Informationsmaß zu motivieren und einzuführen. Ihre volle Bedeutung und weitere Vertiefung erfährt sie in einer entwickelten Informationstheorie und deren Aussagen für die Praxis - z. B. für Fragen der Informationsübertragung, -speicherung und -codierung.
2) Dem Leser sollte beispielhaft demonstriert werden, wie man von inhaltlichen Vorstellung zu abstrakten mathematischen Begriffen übergeht.
3) Für den interessierten Leser seien die gut verständlichen Ausführungen in
   a) Shannon/Weaver, Mathematische Grundlagen der Informationstheorie, Oldenbourg- Verlag München-Wien 1976
   b) Schultze, Einführung in die mathematischen Grundlagen der Informationstheorie, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1969

   empfohlen, die auch dem vorliegenden Artikel als Quellen dienten.

Dr. E. Creutzburg
Bereich Mathematische Kybernetik
und Rechentechnik

Preisaufgaben

M 49 ①

Seien α, β und γ die Winkel eines Dreiecks. Man zeige die Ungleichung

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} < \frac{1}{4}.$$

M 50 ②

nach einem Vorschlag unseres Lesers D. Kurtz:

Aus der harmonischen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ streiche man sämtliche Glieder, deren Nenner die Ziffer 9 enthält. Man untersuche, ob die verbleibende Reihe konvergiert und gebe in diesem Falle eine obere Schranke an.

M 51 ②

Man löse das folgende Zahlenrätsel im Oktalsystem! Jeder Buchstabe steht für eine Ziffer, verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{rcl} \text{ABCD} - \text{BE} & = & \text{ABDA} \\ : \quad - & & - \\ \text{CD} \cdot \text{FG} & = & \text{AFCD} \\ \hline \text{FE} + \text{AF} & = & \text{CA} \end{array}$$

(nach einem Vorschlag unseres Lesers Jürgen Hayn)

M 52 ①

Der Winkel γ an der Ecke C eines Dreiecks sei 120°. Die Seiten CB und CA, die diesen Winkel einschließen, seien a und b. Man gebe die Winkelhalbierende des Winkels an (durch die Längen der Seiten a und b).

M 53 ①

In der Ebene liegen n Punkte. Es ist bekannt, daß es unter je 3 Punkten 2 Punkte gibt, deren Abstand kleiner gleich 1 ist. Man zeige, daß man 2 Kreise derart in die Ebene legen kann, daß alle Punkte innerhalb dieser Kreise liegen.

M 54 ①

При решении уравнения вида $ax - 6 = bx - 4$,
где a и b заданные натуральные числа Маттиас установил
I) Решением уравнения является натуральное число x.
2) Под ставляя для проверки найденное решение только в одну часть уравнения, то для x получается тоже самое число.

Определите все пары $|a,b|$ натуральных чисел, для которых положения I) и 2) имеют место.

Einsendeschluß : 15. 1. 1981

Aufgabe M 20 (nach D. Kurtz)

Seien $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ die Winkel eines Dreiecks und a,b,c die Seitenlängen der entsprechenden Seiten.

Sei o.B.d.A. $a \geq b \geq c$. (1)

Dann gilt $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. (2)

Aus (1) und (2) folgen die Ungleichungen

$$(\alpha-\beta)(a-b) \geq 0$$
$$(\beta-\gamma)(b-c) \geq 0$$
$$(\gamma-\alpha)(c-a) \geq 0.$$

Somit erhält man

$$(\alpha-\beta)(a-b)+(\beta-\gamma)(b-c)+(\gamma-\alpha)(c-a) \geq 0.$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhält man

$$(\alpha a+\beta b+\gamma c) \geq (\alpha+\beta+\gamma)(a+b+c),$$

und somit gilt $\dfrac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{a+b+c} \geq \dfrac{\pi}{3}$. (3)

Es gilt die Dreiecksungleichung:

$$b+c-a \geq 0$$
$$c+a-b \geq 0$$
$$a+b-c \geq 0$$

Somit gilt die Ungleichung:

$$\alpha(b+c-a)+\beta(c+a-b)+\gamma(a+b-c) \geq 0$$

Man erhält: $(\alpha+\beta+\gamma)(a+b+c) \geq 2(\alpha a+\beta b+\gamma c)$

und daraus $\dfrac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{a+b+c} \leq \dfrac{\pi}{2}$ (4)

Aus dem Sinussatz erhält man

$$b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,a \quad \text{und} \quad c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\,a.$$

Somit gilt:

$$\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{a+b+c} = \frac{\alpha a+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}a+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}a}{a+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}a+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}a} \qquad (5)$$

$$= \frac{\alpha\sin\alpha+\beta\sin\beta+\gamma\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}.$$

(3), (4) und (5) liefern die gesuchte Ungleichung.

Aufgabe M 21 (nach Carsten Damm)

Man findet für spezielle k:

$$k = 0: \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

$$k = 1: \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad (2)$$

$$k = 2: \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}. \qquad (3)$$

(1), (2) und (3) beweist man mit Hilfe der vollständigen Induktion.

(1), (2) und (3) legen die folgende Vermutung nahe:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=0}^{k} (i+j) \right) = \frac{1}{k+2} \prod_{j=0}^{k+1} (n+j).$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n:

Induktionsanfang:

$$n = 1: \prod_{j=0}^{k} (1+j) = \frac{1}{k+2} \prod_{j=0}^{k+1} (1+j) \qquad (4)$$

Induktionsvoraussetzung:

$$n = m: \sum_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=0}^{k} (1+j) \right) = \frac{1}{k+2} \prod_{j=0}^{k+1} (m+j)$$

Induktionsschritt:

$n = m+1$:

Es ist zu zeigen: $\sum_{i=1}^{m+1} \left(\prod_{j=0}^{k} (i+j) \right) = \frac{1}{k+2} \prod_{j=0}^{k+1} (m+1+j)$.

$$\sum_{i=1}^{m+1} \left(\prod_{j=0}^{k} (i+j) \right) \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{k+2} \prod_{j=0}^{k+1} (m+j) + (m+1)(m+2)\ldots(m+1+k)$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+1+k)}{k+2} + \frac{(k+2)(m+1)(m+2)\ldots(m+1+k)}{k+2}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+1+k)(m+2+k)}{k+2}$$

$$= \frac{1}{k+2} \prod_{j=0}^{k+1} (m+1+j)$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

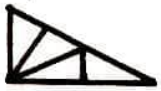
Aufgabe M 22

Die Figur enthält

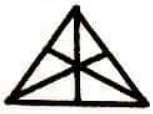
24 Dreiecke des Typs

6 Dreiecke des Typs

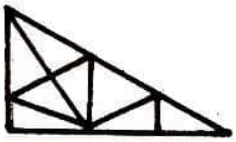
12 Dreiecke des Typs



4 Dreiecke des Typs



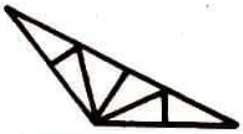
6 Dreiecke des Typs



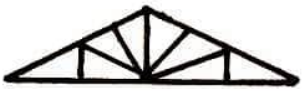
12 Dreiecke des Typs

24 Dreiecke des Typs

6 Dreiecke des Typs



3 Dreiecke des Typs



6 Dreiecke des Typs halbe Figur

1 Dreieck, die Figur selbst

Die Figur enthält insgesamt 104 Dreiecke.

Aufgabe M 23 (nach Volker Barop)

Beweis der Behauptung durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 3$

$$(x^2+1)^3 - (x^3+1)^2 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 - x^6 - 2x^3 - 1$$
$$= 3x^4 + 3x^2 - 2x^3$$
$$= 3x^2(x^2 - \tfrac{2}{3}x + 1)$$
$$= 3x^2\left[(x-\tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{8}{9}\right] > 0$$

Induktionsvoraussetzung: $n = k$

Es gelte $(x^k+1)^2 < (x^2+1)^k$

Induktionsschritt: $n = k+1$

Es ist zu zeigen: $(x^{k+1}+1)^2 < (x^2+1)^{k+1}$

$$(x^2+1)^{k+1} - (x^{k+1}+1)^2 > (x^k+1)^2(x^2+1) - (x^{k+1}+1)^2 =$$

$$= (x^{2k}+2x^k+1)(x^2+1)-(x^{k+1}+1)^2 =$$

$$= x^{2k+2} + 2x^{k+2} + x^2 + x^{2k} + 2x^k+1 - x^{2k+2} - 2x^{k+1} - 1 =$$

$$= 2x^{k+2} - 2x^{k+1} + 2x^k + x^{2k} + x^2 =$$

$$= 2x^k(x^2-x+1) + x^{2k} + x^2 =$$

$$= 2x^k \left[(x-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}\right] + x^{2k} + x^2 > 0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe M 24

Sei $a_k = 2^{2^k}$.

Dann ist $a_{n+1} - 1 = a_n^2 - 1 = (a_n+1)(a_n-1)$, d. h.
$a_n + 1$ ist ein Teiler von $a_{n+1} - 1$.
Weiterhin ist für $m > n$

$$a_m - 1 = (a_{m-1}+1)(a_{m-2}+1)\ldots(a_n+1)(a_n-1)$$

und somit a_n+1 ein Teiler von a_m-1 für $m > n$.
Somit ist $a_m+1 = q(a_n+1)+2$, (1), wobei q eine natürliche Zahl ist.
Da a_m+1 und a_n+1 ungerade sind, folgt aus (1), daß a_m+1 und a_n+1 nur die 1 als gemeinsamen Teiler haben.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

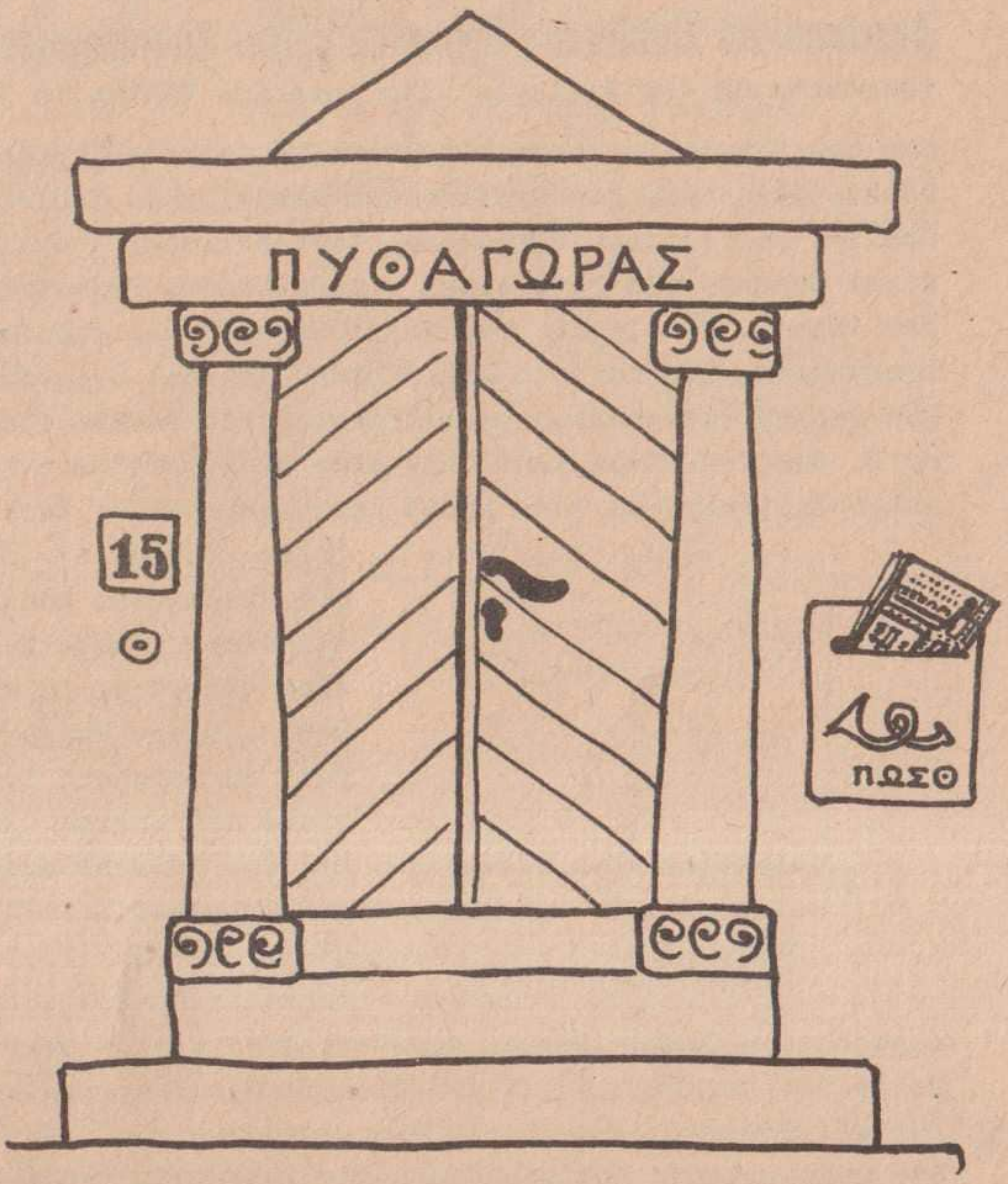
Wenn jemand alle glücklichen Einfälle seines Lebens dicht zusammensammelt, so würde ein gutes Werk daraus werden. Jedermann ist wenigstens des Jahres einmal ein Genie. Die eigentlichen sogenannten Genies haben nur die guten Einfälle dichter. Man sieht also, wieviel darauf ankommt, alles aufzuschreiben.

Georg Christoph Lichtenberg

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, F. Pegenau
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 26. 9. 80

Titelbild: Wolfgang Schäfer



11
80

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

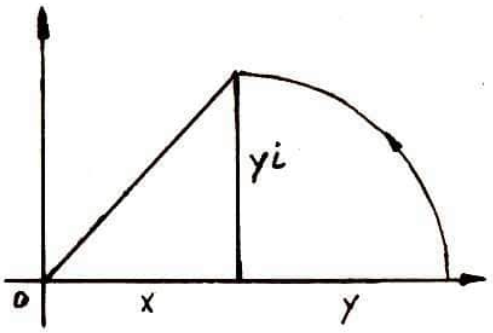
Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR:
0.20 M

Anschauliche Einführung hyperkomplexer Zahlensysteme

(Fortsetzung des Artikels über komplexe Zahlen in Wurzel 7/8-80)

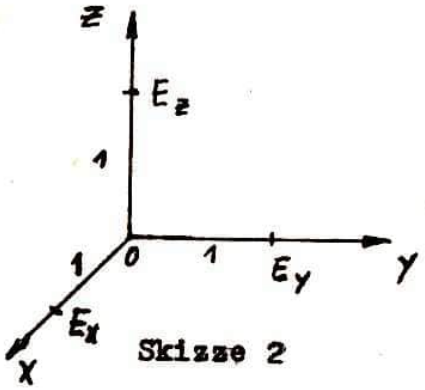
Aus dem Schulunterricht sind bereits mehrere Zahlensysteme bekannt, wie z. B. die Systeme der natürlichen Zahlen, der ganzen Zahlen, der rationalen Zahlen oder der reellen Zahlen. Da sich diese Systeme als Punkte auf einer Geraden geometrisch darstellen lassen, bezeichnet man diese Systeme als eindimensionale Zahlensysteme. Die im oben angeführten Artikel eingeführten komplexen Zahlen lassen sich geometrisch durch Punkte einer Ebene, z. B. der x-y-Ebene abbilden. Hier liegt also ein zweidimensionales Zahlensystem vor. P ist Repräsentant der Zahl x + y i (siehe Skizze 1). Es ist nun die Frage sehr naheliegend, ob mehrdimensionale Zahlensysteme eine Bedeutung in der Mathematik haben. Diese Frage ist auf jeden Fall zu bejahen. Bereits in der Mitte des vorigen Jahrhunderts hat der irische Mathematiker und Physiker Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) mit 4-dimensionalen Zahlensystemen, den sogenannten Quaternionen, gearbeitet, die eine sehr nützliche Rolle bei der Behandlung der Drehstreckungen spielen und daher für die theoretische Physik von Bedeutung sind. Aus der Theorie der Quaternionen hat sich auch die sehr bedeutende Vektoralgebra entwickelt. Gauß soll bereits 1819 die Quaternionen und ihre Anwendung gekannt haben. Zahlensysteme, deren Dimension größer als 2 ist, pflegt man als hyperkomplexe Zahlen zu bezeichnen.



Skizze 1

Einführung eines 4-dimensionalen Zahlensystems

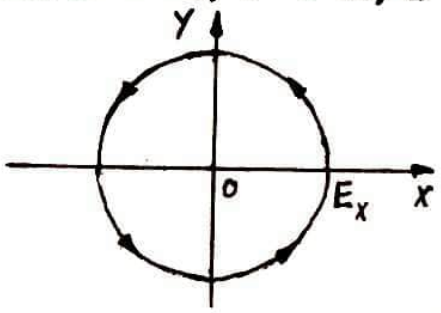
Wir wollen nun versuchen, auf anschauliche Weise ein 4-dimensionales Zahlensystem, die Quaternionen, einzuführen.
Zu diesem Zwecke denken wir uns ein dreidimensionales Koordinatensystem mit den Achsen x, y, z, auf denen die Strecken $\overline{OE}_x$, $\overline{OE}_y$ und $\overline{OE}_z$ aufgetragen sind. Ihre Längen sind unwesentlich. Der Einfachheit halber sollen sie eine Längeneinheit betragen (Skizze 2). Wir führen 3 Symbole i, j und k ein, für die wir



Skizze 2

folgende Verabredungen festlegen:

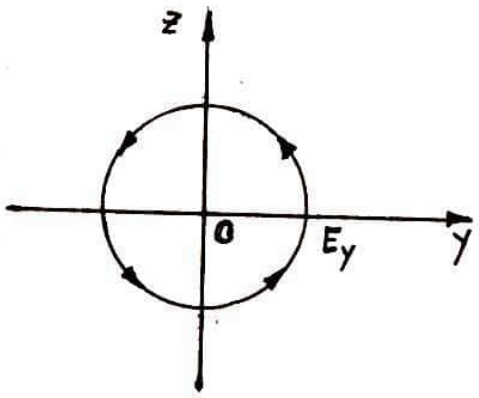
a) Das Symbol i soll für eine 90°-Drehung in der x-y-Ebene im positiven Sinne um 0 charakteristisch sein. $\overline{OE}_x \cdot i = \overline{OE}_x i$ ist also das Ergebnis der Drehung von $\overline{OE}_x$ um 90°. $\overline{OE}_x i = \overline{OE}_y$. In Wurzel 7/8-80, Seite 98, haben wir dieses Symbol bereits eingeführt. Drehungen um 180°, 270° und 360° symbolisieren wir durch $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Es gilt allgemein:



Skizze 3

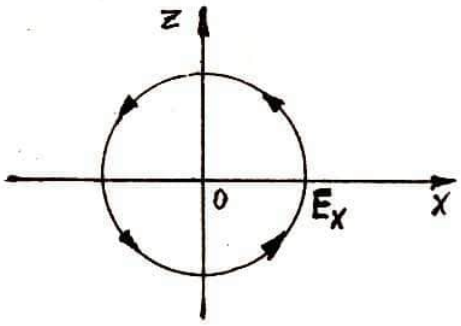
$i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$ (n natürliche Zahl, $i^0 = 1$ festgelegt)

b) Das Symbol j soll für eine 90°-Drehung in der y-z-Ebene um 0 im positiven Sinne charakteristisch sein. $\overline{OE}_y \cdot j = \overline{OE}_y j$ ist also das Ergebnis der Drehung um 90° in der y-z-Ebene. $\overline{OE}_y j = \overline{OE}_z$. Man erkennt sofort, daß für j die gleichen Überlegungen wie für i zu den Beziehungen führen: $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$ bzw. allgemein: $j^{4n} = 1$, $j^{4n+1} = j$, $j^{4n+2} = -1$ und $j^{4n+3} = -j$ ($j^0 = 1$ und n natürliche Zahl).



Skizze 4

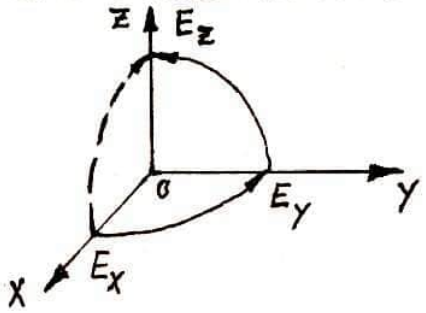
c) Das Symbol k soll eine 90°-Drehung in der x-z-Ebene um 0 im positiven Sinn charakterisieren. $\overline{OE}_x$ geht bei dieser Drehung in $\overline{OE}_z$ über. $\overline{OE}_x \cdot k = \overline{OE}_x k = \overline{OE}_z$.
Für k gelten die gleichen Beziehungen wie für i bzw. j.
$k^2 = -1$, $k^3 = -k$, $k^4 = 1$ bzw. allgemein: $k^{4n} = 1$, $k^{4n+1} = k$,



Skizze 5

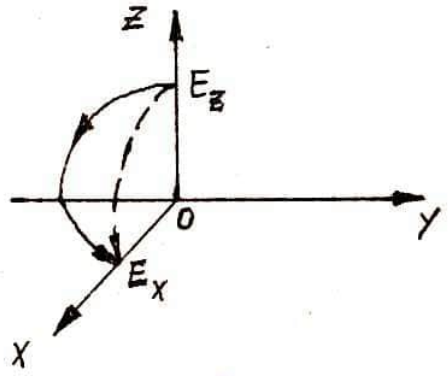
$k^{4n+2} = -k$ und $k^{4n+3} = -k$ (n natürliche Zahl, $k^0=1$).

Die anschauliche Deutung der Symbole i, j und k gestattet auch, zusammengesetzte Drehungen durch diese Symbole auszudrücken. Unter dem Produkt $i \cdot j = ij$ wollen wir das Ergebnis der beiden hintereinander ausgeführten Drehungen in der x-y-Ebene um 90° und in der y-z-Ebene um 90° verstehen. Aus der Skizze 6 erkennt man sofort, daß die Drehung der Strecke $\overline{OE}_x$ in der x-z-Ebene um 90° zum gleichen Ergebnis führt: $\overline{OE}_x k = \overline{OE}_z$. Diese Gleichheit führt zur Festlegung der Beziehung: $ij = k$



Skizze 6

Gehen wir von der Grundstrecke $\overline{OE}_z$ aus und drehen diese erst in der y-z-Ebene um 90°, und dann in der x-y-Ebene um 90°, so erhalten wir die Strecke $\overline{OE}_x$. Symbolisch geschrieben ergibt sich die Beziehung: $\overline{OE}_z ji = \overline{OE}_x$. Da wir zum gleichen Ergebnis kommen, wenn wir $\overline{OE}_z$ in der x-z-Ebene um 90° im negativen Sinn drehen, können wir schreiben: $ji = -k$ (-k bedeutet die Drehung um 90° in der x-z-Ebene im negativen Sinn).

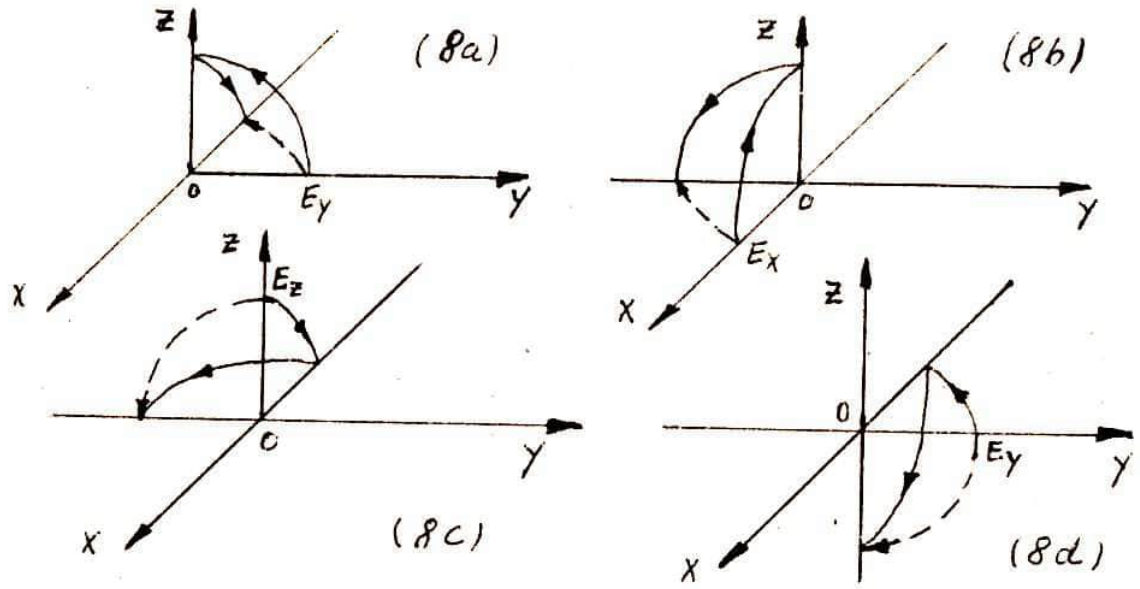


Skizze 7

Durch ähnliche Kombinationen von 2 Drehungen (veranschaulicht in den Skizzen 8a bis 8d) lassen sich folgende Festsetzungen über Produkte unserer Symbole verstehen:

$jk = i$, $kj = -i$ (Skizzen 8a und 8b) bzw.

$ki = j$, $ik = -j$ (Skizzen 8c und 8d).



In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse übersichtlich zusammengestellt. Bei der Einführung der neuen Zahlensysteme darf man nicht überrascht sein, wenn die gewohnten Rechengesetze nicht mehr gültig sind bzw. andere Rechengesetze gelten. Wir erkennen, daß bei unseren Symbolen nicht mehr das kommutative Gesetz der Multiplikation gültig ist.

	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

Nun sind wir in der Lage, mit Hilfe der Symbole i, j und k ein 4-dimensionales Zahlensystem aufzubauen.

Definition 1: Sind a,b,c und d 4 beliebige reelle Zahlen, so heißt der Ausdruck $q = a + bi + cj + dk$ eine Quaternion oder eine 4-dimensionale hyperkomplexe Zahl. Für die Symbole i, j und k gelten folgende Festlegungen: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$ und $ik = -j$.

Durch 2 weitere Definitionen setzen wir fest, was wir unter **Gleichheit bzw.** Summe zweier Quaternionen verstehen.

Definition 2: Zwei Quaternionen $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ und $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ heißen gleich genau dann, wenn $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $d_1 = d_2$ gilt.

Fortsetzung folgt

Dr. Bruno Hanisch
Halle

Preisaufgaben

M 55 ①

Gegeben sei die quadratische Gleichung $a \cdot \cos x^2 + b \cdot \cos x + c = 0$. Man gebe eine quadratische Gleichung an, die der Zahl $\cos 2x$ genügt.
Im Falle $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$ vergleiche man diese Gleichungen.

M 56 ①

Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, von dem die Hypothenuse C gegeben ist und von dem man weiß, daß die zu C gehörende Seitenhalbierende das geometrische Mittel der beiden Katheten ist.

M 57 ①

Man untersuche für alle positiven Zahlen n die Teilbarkeit von 2^n-1 und 2^n+1 durch 7.

M 58 ①

Jeder von 17 Wissenschaftlern steht im Briefwechsel mit allen anderen. Sie behandeln in ihrem Briefwechsel nur 3 Themen und je zwei Wissenschaftler genau ein Thema.
Zu beweisen ist, daß es mindestens drei Wissenschaftler gibt, die untereinander ein und dasselbe Thema behandeln.

M 59 ②

Sei a, b, c, d und m ganze Zahlen, so daß $am^3 + bm^2 + cm + d$ durch 5 teilbar ist, während d nicht durch 5 teilbar ist.
Man zeige, daß man immer eine ganze Zahl n finden kann, für welche $dn^3 + cn^2 + bn + a$ auch durch 5 teilbar ist.

M 60 ②

Даны четыре точки (A, B, C, D), расположенные на одной прямой. Построить квадрат, у которого продолжения двух противоположеных сторон пересекают эту прямую в точках A и B, а продолжения двух других сторон – в точках C и D.

Einsendeschluß: 31. 1. 1981

Relationen, Äquivalenzrelationen, Halbordnungen

Wir wollen im folgenden einige wichtige mengentheoretische Begriffe einführen und mit ihnen arbeiten.
Einen ganz zentralen Platz nimmt dabei die Definition der Relation zwischen Mengen ein. Vorher wollen wir uns noch einmal klarmachen, was wir unter dem Kartesischen Produkt zweier Mengen A und B verstehen:

Definition 1: $A \times B =_{Df} \{[a,b] : a \in A \wedge b \in B\}$

A x B heißt Kartesisches Produkt von A und B.

Beispiel 1: $A = \{1,2,3\}$ $B = \{x,y\}$
$A \times B = \{[1,x], [1,y], [2,x], [2,y], [3,x], [3,y]\}$

Aufgabe 1: $X = \{a,b,c\}$ $Y = \{1,2\}$ $Z = \{x,y\}$
Man bestimme $(X \times Y) \times Z$!

Stehen gewisse Elemente einer Menge A mit gewissen Elementen einer Menge B in einer bestimmten Beziehung, so kann man diese Beziehung insgesamt angeben, indem man alle Paare $[a,b]$ mit $a \in A$ und $b \in B$, für die diese Beziehung gilt, zu einer Menge zusammenfaßt. Wir wollen diese Beziehungen Relationen nennen und im folgenden exakt aufschreiben, was wir darunter verstehen.

Definition 2:

1. S heißt Relation zwischen A und B $=_{Df}$ $S \subseteq A \times B$
2. Ist $A = B$, so heißt $S \subseteq A \times A$ zweistellige Relation auf A.
3. Für $[a,b] \in S$ schreiben wir auch kurz a Sb und sagen "a steht in der Relation S zu b".

Wichtig ist an dieser Stelle zu erkennen, daß damit nicht ein abstruser Begriff eingeführt wird, sondern daß diese Definition eine allgemeine Fassung des umgangssprachlichen Begriffs "Relation" in der Mathematik ist. So wird in der Schule beispielsweise von der "kleiner-gleich-Relation" gesprochen. Diese Relation $\leq$ ist auf der Menge $M = \{1,2,3\}$ eindeutig beschrieben durch: $\leq_{/M} = \{[1,1], [1,2], [1,3], [2,2], [2,3], [3,3]\}$
Also gilt $\leq_{/M} \subseteq M \times M$.

Selbstverständlich gibt es nun nicht bei jeder Menge von geordneten Paaren, die der Definition der Relation genügt, eine in dem oberen Sinne natürliche Deutung. Dieser Sachverhalt ist schon darin begründet, daß die Mengen A und B ganz willkürliche Elemente enthalten können.

Es kann so sein: $A = \{\otimes, \perp\}$,
$B = \{\infty, ♀\}$.
$S = \{[\otimes, \infty], [\perp, \infty]\}$

ist dann Relation zwischen A und B. Es ist natürlich unsinnig, von einer natürlichen Deutung von S zu sprechen, ohne sich über die Bedeutung der Elemente von A und B geeinigt zu haben.

Definition 3:

1. R, $R \subseteq \{[a, b] : a \in A, b \in B\}$
   sei eine Relation zwischen A und B.
   $R^{-1} =_{Df} \{[b,a] : [a,b] \in R\}$
   heißt die zu R inverse Relation.
   (R^{-1} ist Relation zwischen B und A)

2. Es seien R und S zwei Relationen mit
   $R \subseteq \{[a,b] : a \in A, b \in B\}$,
   $S \subseteq \{[b,c] : b \in B, c \in C\}$.
   $R \circ S =_{Df} \{[a,c] : \exists\, b \in B: [a,b] \in R \wedge [b,c] \in S\}$
   heißt das Relationsprodukt von R und S.

Aufgabe 2 : Man beweise

$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$!

Wir wollen nun einige spezielle Eigenschaften von Relationen definieren:

Definition 4 : Es sei R eine zweistellige Relation auf A.

1. R heißt reflexiv $=_{Df} \forall x(x \in A \longrightarrow [x,x] \in R)$
2. R heißt symmetrisch $=_{Df}$
   $\forall x \forall y([x,y] \in R \longrightarrow [y,x] \in R)$
3. R heißt antisymmetrisch $=_{Df}$
   $\forall x \forall y([x,y] \in R \wedge [y,x] \in R \longrightarrow x = y)$
4. R heißt transitiv $=_{Df}$
   $\forall x \forall y \forall z([x,y] \in R \wedge [y,z] \in R \longrightarrow [x,z] \in R)$.

Beispiele: 2. Betrachten wir wieder die $\leq$ -Relation auf der Menge $M = \{1,2,3\}$

$\leq$ ist reflexiv $(1 \leq 1,\ 2 \leq 2,\ 3 \leq 3)$

$\leq$ ist nicht symmetrisch $(1 \leq 2 \wedge \neg 2 \leq 1)$

$\leq$ ist antisymmetrisch $(x \leq y \wedge y \leq x \longrightarrow x = y)$

$\leq$ ist transitiv $(x \leq y \wedge y \leq z \longrightarrow x \leq z)$

3. Wir wollen nun die $<$ -Relation auf M untersuchen.

$< = \{[1,2],\ [1,3],\ [2,3]\}$

$<$ ist nicht reflexiv $(1 \in M \wedge \neg 1 < 1$

$<$ ist nicht symmetrisch $(1 < 2 \wedge \neg 2 < 1$

$<$ ist antisymmetrisch $(x < y \wedge y < x \longrightarrow x = y)$

$<$ ist transitiv $(x < y \wedge y < z \longrightarrow x < z)$

Wir sehen, die Eigenschaft der Reflexivität geht gegenüber $\leq$ verloren, nicht aber die Eigenschaft der Antisymmetrie!

Aufgabe 3 : Man gebe eine Relation auf der Menge A an, die weder reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch noch transitiv ist!

a) $A = \{a,b\}$

b) $A = \{a,b,c\}$

Definition 5: Es sei $R \subseteq M \times M$

R heißt Äquivalenzrelation $=_{Df}$

R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Beispiele: 4. Wir zeigen, daß die Gleichheitsrelation $=$ auf den natürlichen Zahlen N eine Äquivalenzrelation darstellt.

$= \subseteq N \times N$

$\forall x\ (x \in N \longrightarrow x = x)$

$\forall x \forall y\ (x = y \longrightarrow y = x)$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z)$

5. Es sei G die Menge der Geraden der Ebene und $\parallel$ die Relation der Parallelität.

$\parallel \subseteq G \times G$

$\forall g\ (g \in G \longrightarrow g \parallel g)$

$\forall g \forall h\ (g \parallel h \longrightarrow h \parallel g)$

$\forall g \forall h \forall l\ (g \parallel h \wedge h \parallel l \longrightarrow g \parallel l)$

Bevor wir nun einen weiteren wichtigen Typ von Relationen kennenlernen wollen, werden wir für den interessierten Leser noch einige Aufgaben formulieren:

Aufgaben: 4. Es sei R eine beliebige Relation auf M.
Man beweise: a) R ist symmetrisch $\longleftrightarrow R = R^{-1}$
b) R ist transitiv $\longleftrightarrow R \circ R \subseteq R$

5. Man zeige, daß die inverse Relation R^{-1} zu einer Äquivalenzrelation R ebenfalls eine Äquivalenzrelation ist.

6. Es seien R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen über einer Menge M. Man zeige, $R_1 \circ R_2$ ist Äquivalenzrelation $\longleftrightarrow R_1 \circ R_2 \overset{!}{=} R_2 \circ R_1$.

Wenn wir uns noch mal an Beispiel 2 erinnern, stellen wir sofort fest, daß $\leq$ keine Äquivalenzrelation ist, da die Eigenschaft der Symmetrie fehlt. Dafür ist $\leq$ eine antisymmetrische Relation. Im folgenden wollen wir das Symbol $\leq$ etwas allgemeiner verwenden, und zwar für all jene Relationen, die wie $\leq$ im üblichen Sinne auf N, die Eigenschaften der Reflexivität, Transitivität und Antisymmetrie besitzen.

Definition 6: $(M, \leq)$ heißt halbgeordnete Menge (kurz: Halbordnung)
- M ist eine Menge
- $\leq$ ist eine zweistellige Relation auf M
- $\leq$ ist reflexiv
- $\leq$ ist transitiv
- $\leq$ ist antisymmetrisch.

Nachdem wir noch ein Beispiel für eine halbgeordnete Menge betrachten, wollen wir Begriffe für spezielle Elemente in Halbordnungen einführen.

Beispiel 6. $M = \{a,b,c,d\}$
$\leq = \{ [a,a], [b,b], [c,c], [d,d], [a,b], [a,c], [b,c] \}$
$(M, \leq)$ erfüllt die Forderungen von Definition 6 und ist somit eine Halbordnung.

Definition 7: Es sei $(M,\leq)$ eine Halbordnung und $X \subseteq M$

1. S heißt obere Schranke von X $=_{Df}$
   $\forall x(x \in X \longrightarrow x \leq S)$
2. m heißt Maximum von X $=_{Df}$
   $m \in X \wedge \forall x(x \in X \longrightarrow x \leq m)$
3. m heißt maximales Element von X $=_{Df}$
   $m \in X \wedge \neg \exists x(x \in X \wedge x \geq m)$

Auf dem ersten Blick könnte es so erscheinen, daß wir mit Maximum und maximalen Element ein und dasselbe definiert hätten. Jedoch erweist sich das, wenn wir z. B. Beispiel 6 betrachten, als oberflächliche Beobachtung. Wir wählen $X = \{a,b,d\}$. Es sind b und d maximale Elemente von X, jedoch keine Maxima, denn es gilt weder $b \leq d$ noch $d \leq b$.
In der Teilmenge $Y = \{a,b,c\}$ ist c Maximum und zugleich maximales Element.
Nach Definition 7 ist sofort klar, daß jedes Maximum einer Teilmenge X auch maximales Element von X ist. Wir haben schon gesehen, daß Maxima von Teilmengen nicht zu existieren brauchen. Es gibt aber auch unendliche Teilmengen unendlicher halbgeordneter Mengen, die keine maximalen Elemente besitzen. Es sei $(N,\leq)$ die Halbordnung der natürlichen Zahlen und G die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Nun ist $G \subseteq N$, aber zu jedem $m \in G$ gibt es ein $g \in G$, so daß $g \geq m$ gilt.

Aufgaben: 7. Wenn ein Maximum einer Teilmenge X existiert, so ist dieses eindeutig bestimmt.

8. Endliche Teilmengen von Halbordnungen haben stets maximale Elemente.

Definition 8: Es sei $(M,\leq)$ eine Halbordnung und $X \subseteq M$.
Ist $m \in M$, so heißt m Supremum von X ($m = \sup X$) $=_{Df}$
1. m ist obere Schranke von X
2. Ist m' obere Schranke von X, so gilt $m \leq m'$.

Analog zu den in Definition 7 und Definition 8 eingeführten Begriffen lassen sich die Begriffe untere Schranke, Minimum, minimales Element und Infimum definieren.
Suprema und Infima von Teilmengen von Halbordnungen brauchen nicht zu existieren. Die Teilmenge G der geraden Zahlen von $(N,\leq)$ be-

sitzt weder Maximum, noch maximale Elemente, noch ein Supremum. Hingegen ist die O zugleich Minimum, minimales Element und Infimum von G.

Zum Abschluß des Artikels wollen wir noch 3 Aufgaben stellen:

Aufgaben: 9. Es sei R eine Halbordnung über M.
Ist dann auch R^{-1} eine Halbordnung über M?

10. Gibt es Relationen, die sowohl Äquivalenzrelation als auch Halbordnung sind?

11. Es sei X eine halbgeordnete Menge und sie besitze zwei verschiedene minimale Elemente.
Man zeige, daß X dann kein Minimum enthalten kann.

Andreas Kleinwächter
2. Studienjahr Mathematik

Die falsche Schätzung

Reiche und vornehme Leute haben manchmal das Glück, wenigstens von ihren Bedienten die Wahrheit zu hören, die ihnen nicht leicht ein anderer sagt.

Einer,der sich viel auf seine Person und auf seinen Wert und nicht wenig auf seinen Kleiderstaat einbildete, als er sich eben zu einer Hochzeit angezogen hatte und sich mit seinen fetten, roten Backen im Spiegel beschaute, drehte er sich vom Spiegel um und fragte seinen Kammerdiener,der ihn von der Seite her wohlgefällig beschaute: "Nun, Thadde", fragte er ihn, "wieviel mag ich wohl wert sein,wie ich dastehe?" Der Thadde machte ein Gesicht, als wenn er ein halbes Königreich zu schätzen hätte, und drehte lange die rechte Hand mit ausgestreckten Fingern so her und so hin."Doch auch 550 Gulden", sagte er endlich, "weil doch heutzutag alles teurer ist als sonst." Da sagte der Herr: "Du dummer Kerl, glaubst du nicht, daß mein Gewand, das ich anhabe, allein seine 500 Gulden wert ist?" Da trat der Kammerdiener ein paar Schritte gegen die Stubentür zurück und sagte: "Verzeiht mir meinen Irrtum, ich habe etwas höher angeschlagen, sonst hätte ich nicht so viel herausgebracht."

- Johann Peter Hebel -

Aufgabe M 25

Es ist $\frac{21n+4}{14n+3} = 1 + \frac{7n+1}{14n+3}$

Wenn der Ausgangsbruch kürzbar sein soll, dann muß der echte Bruch auch zu kürzen sein, d. h. $\frac{14n+3}{7n+1}$ muß sich ebenfalls kürzen lassen.
Es ist aber $\frac{14n+3}{7n+1} = 2 + \frac{1}{7n+1}$, und da $\frac{1}{7n+1}$ nicht kürzbar ist, sind auch die übrigen Brüche nicht kürzbar.

Aufgabe M 26

1. Damit $1+2x$ erklärt ist, muß $x - \geq \frac{1}{2}$ gelten.
2. Es muß $x \neq 0$ gelten, da sonst
   $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}$ nicht erklärt ist.
3. Für $x \geq -\frac{1}{2}$, $x \neq 0$ werden die folgenden äquivalenten Umformungen durchgeführt:

$$\frac{4x^2(1+\sqrt{1+2x})^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2\,(1+\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9$$

$$\frac{4x^2(1+\sqrt{1+2x})^2}{[1-(1+2x)]^2} < 2x + 9$$

$$(1+\sqrt{1+2x})^2 < 2x + 9$$

$$2\sqrt{1+2x} < 7$$

$$x < \frac{45}{8}$$

Lösung: Die Ungleichung besteht für alle x, die der Beziehung $-\frac{1}{2} - x\ \frac{45}{8}$ genügen, mit Ausnahme von $x = 0$.

Aufgabe M 27

Beide Seiten der Ungleichung $\sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1}$ sind positiv. Durch Quadrieren erhält man $3-x > \frac{1}{4} + \sqrt{x+1} + x + 1$ und daraus $\frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1}$.
Nochmaliges Quadrieren liefert

$$\frac{49}{16} - 7x + 4x^2 > x + 1$$

$$64x^2 - 128x + 33 > 0 \qquad (1)$$

Die Gleichung $64x^2 - 128x + 33 = 0$ besitzt die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{31}}{8}.$$

Aus (1) erhält man

$$(8x-8+\sqrt{31})(8x-8-\sqrt{31}) > 0 \qquad (2)$$

(2) ist erfüllt, wenn der zweite Faktor positiv oder der erste Faktor negativ ist.

Wir erhalten zwei mögliche Lösungsmengen

$$x < 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31} \qquad (3)$$

und

$$x > 1 + \frac{1}{8}\sqrt{31} \qquad (4)$$

Da $\sqrt{x+1}$ nur für $x \geq -1$ definiert ist, erhalten wir für (3):

$$-1 \leq x < 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31} \qquad (3')$$

Die Probe ergibt, daß die Beziehung (4) keine Lösung der Aufgabe enthält, während alle x, die die Beziehung (3') erfüllen, auch der gegebenen Ungleichung genügen.

Aufgabe M 28

Da die gesuchte Zahl n auf der Ziffer 6 endet, muß die Zahl k=4n auf der Ziffer 4 enden, denn 6·4 = 24. Ferner endet n dann mit der zweistelligen Zahl 46. Nun ist 46·4 = 184, also endet k mit der zweistelligen Zahl 84 und die Zahl n mit der dreistelligen Zahl 846. Dieses Verfahren setzen wir fort:

k = 4n	n
4	6
84	46
384	846
5 384	3 846
15 384	53 846
615 384	153 846

Nun ist zu beweisen, daß die Zahl 153846 alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Zunächst gilt $153846 \cdot 4 = 615384$.

Weiter ist ersichtlich, daß die Zahl 153846 die kleinste Zahl ist, die allen Bedingungen genügt.

Aufgabe M 29

Wir betrachten das Tetraeder ABCD.

Mit a,b,c,d,e,f bezeichnen wir die Längen der Kanten

BC, AC, AB, AD, BD, CD. O.B.d.A. sei keine dieser Kanten länger als AD = d. Dann gilt

$$d + e > f, \quad d + b > c$$
$$d + f > e, \quad d + c > b \qquad (1)$$

Für die Dreiecke ABD und ADC gelten die Dreiecksungleichungen

$$c + e > d \quad \text{und} \quad b + f > d,$$

so daß $b + c + e + f > 2d$.

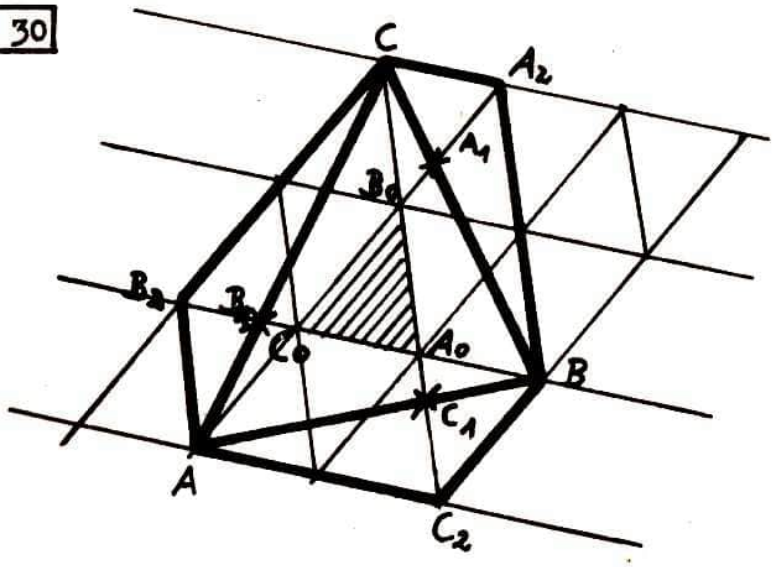
Es muß also mindestens eine der Ungleichungen

$$b + c > d, \quad e + f > d$$

erfüllt sein.

Wegen (1) läßt sich folglich aus den Strecken, deren Längen gleich denen der von A bzw. D ausgehenden Kanten sind, ein Dreieck konstruieren.

Aufgabe M 30



Die in der Aufgabenstellung beschriebene Figur ergänzt man durch Parallelen zu CC_1 durch A,B und den Mittelpunkt von AC_1;
zu BB_1 durch A,C und den Mittelpunkt von CB_1;
zu AA_1 durch B,C und den Mittelpunkt von BA_1.
Man erhält das Sechseck $AC_2BA_2CB_2$.
Es ist $\Delta BCA_0 \cong \Delta CBA_2$
$\Delta ABC_0 \cong \Delta BAC_2$
$\Delta CAB_0 \cong \Delta ACB_2$.

Folglich ist $F_{AC_2BA_2CB_2} = 2F_{ABC} - F_{A_oB_oC_o}$

Weiterhin sieht man leicht, daß

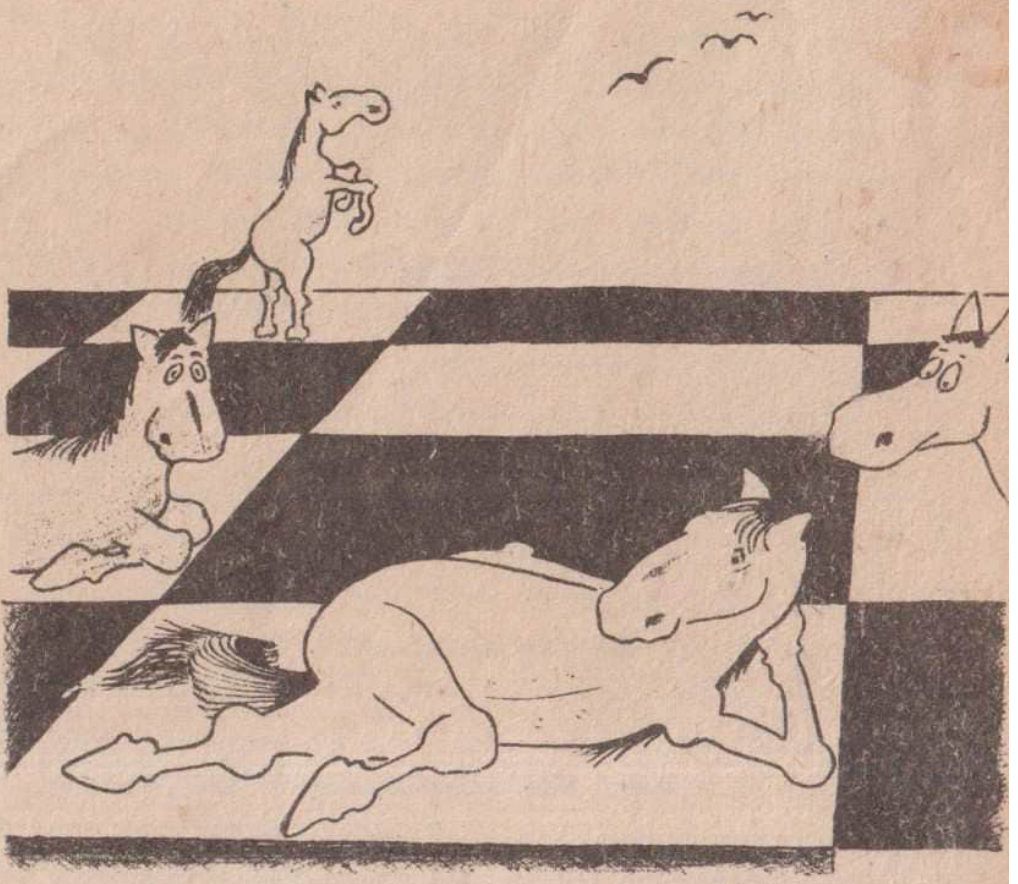
$$F_{AC_2BA_2CB_2} = 13\, F_{A_oB_oC_o}$$

Also ist $F_{ABC} = 7F_{A_oB_oC_o}$.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, F. Pegenau
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 24. 10. 1980

Titelbild: Wolfgang Schäfer



12

80

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR:
0.20 M

Der Wohlordnungssatz

Die Begründung der Mengenlehre durch Georg Cantor hatte entscheidenden Einfluß auf die Entwicklung der gesamten Mathematik. Nach Cantor ist eine Menge „eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen". Auf dieser Grundlage werden auch in der Schule die grundlegenden Begriffe der Mengenlehre eingeführt. Die darauf basierende sogenannte naive Mengenlehre ist, wenn man gewisse Einschränkungen trifft, eine sehr leistungsfähige Theorie, allerdings ergeben sich aus dieser Mengendefinition bei bestimmten Mengenbildungen logische Widersprüche, die man Antinomien nennt. Sehr bekannt ist die Russelsche Antinomie, über die auch schon in Wurzel 3/73 berichtet wurde. Um diese Widersprüche zu beseitigen, wurden axiomatische Systeme zum Aufbau der **Mengenlehre** entwickelt.

Wir wollen nun in diesem Artikel nicht ein solches Axiomensystem einführen, verwenden aber das in vielen mathematischen Beweisen eine wichtige Rolle spielende Auswahlaxiom.

Bevor wir nun das Auswahlaxiom angeben und dann den Beweis des Wohlordnungssatzes schrittweise aufbauen, verweisen wir darauf, daß die im Artikel "Relationen, Äquivalenzrelationen, Halbordnungen" eingeführten Begriffe wichtig sind für das Verständnis des Folgenden. Außerdem sollen noch einige notwendige Definitionen an dieser Stelle angeführt werden.

D e f i n i t i o n : Es sei X eine Menge.

$\mathfrak{P}(X) = \{Y: Y \subseteq X\}$ heißt Potenzmenge von X.

D e f i n i t i o n : Es seien A und B zwei Mengen.

$A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$ heißt Differenz von A und B.

D e f i n i t i o n 1. $(M,\leq)$ sei Halbordnung

1.1. $(M,\leq)$ erfüllt die Minimumbedingung $=_{Def.}$
$\forall X\ (X \subseteq M \wedge X \neq \emptyset \longrightarrow$ min X existiert)

1.2. $(M,\leq)$ erfüllt die schwache Minimumbedingung $=_{Def.}$
$\forall X\ (X \subseteq M \wedge X \neq \emptyset \wedge X$ endlich $\longrightarrow$ min X existiert)

1.3. $(M,\leq)$ erfüllt die Minimalbedingung $=_{Def.}$
$\forall X\ (X \subseteq M \wedge X \neq \emptyset \longrightarrow$ in X existiert ein minimales Element.)

Definition 2. Eine Halbordnung $(M,\preccurlyeq)$ heißt Wohlordnung $=_{Def.}$
$(M,\preccurlyeq)$ erfüllt die Minimumbedingung.
Man sagt, M ist bzgl. "$\preccurlyeq$" wohlgeordnet.

Definition 3. Eine Halbordnung $(M,\preccurlyeq)$ heißt lineare Ordnung $=_{Def.}$
$(M,\preccurlyeq)$ erfüllt die schwache Minimumbedingung.
Man sagt, M ist bzgl. "$\preccurlyeq$" linear geordnet.

Beispiele:

a) Die Natürlichen Zahlen bilden in ihrer natürlichen Anordnung bzgl. "$\leq$" eine Wohlordnung.
$0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq \ldots$

b) Die Ganzen Zahlen G bilden in ihrer natürlichen Anordnung bzgl. "$\leq$" keine Wohlordnung.
$\ldots -3 \leq -2 \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq \ldots$
Man kann aber leicht eine Wohlordnung angeben, indem man eine Relation "$\preccurlyeq'$" wie folgt angibt:
$0 \preccurlyeq' 1 \preccurlyeq' 2 \preccurlyeq' 3 \preccurlyeq' \ldots \preccurlyeq' -1 \preccurlyeq' -2 \preccurlyeq' -3 \preccurlyeq' \ldots$
$(G,\preccurlyeq')$ ist offenbar Wohlordnung, während in $(G,\leq)$ z.B. die Menge $F = \{g: g = 2k \wedge k \in G\}$ kein Minimum besitzt.

c) Ebenso bilden die reellen Zahlen R in ihrer natürlichen Anordnung auf der Zahlengeraden keine Wohlordnung. Das offene Intervall (0,1) besitzt z.B. kein Minimum. Bei diesem Beispiel kann man aber keine Wohlordnung angeben, was nicht heißt, daß keine Wohlordnung auf R möglich ist.

Auswahlaxiom: Ist eine beliebige Menge M gegeben, dann existiert eine Funktion φ, die jeder nichtleeren Teilmenge A von M ein bestimmtes Element $\varphi(A)$ dieser Untermenge zuordnet.

$\varphi : \mathfrak{P}(M) \longrightarrow M$
$\forall A \quad (A \subseteq M \wedge A \neq \emptyset \longrightarrow \varphi(A) \in A)$
heißt Auswahlfunktion.

S A T Z von Z E R M E L O (Wohlordnungssatz):

Jede Menge kann wohlgeordnet werden.

Beweis des Wohlordnungssatzes

D e f i n i t i o n 4. $(M,\leqq)$ sei eine Wohlordnung.

$Ab_a^M = \{x \in M : x < a\}$
heißt der von $a \in M$ definierte Abschnitt der Wohlordnung $(M,\leqq)$.

Lemma 1. $Y \subset M$ ist Abschnitt $\Longleftrightarrow$
$\forall x \forall y\ (x \in M \wedge y \in Y \wedge x \leqq y \longrightarrow x \in Y)$

Beweis.

a) Es sei $Y \subset M$ ein Abschnitt von M.
Nach Definition 4 existiert ein $a \in M$ mit
$Y = Ab_a^M = \{x \in M : x < a\}$.
Also gilt für jedes $y \in Y : y < a$.
Sei nun $x \in M$ beliebig mit $x \leqq y$. Aus der Transitivität von "$\leqq$" folgt $x < a$ und somit $x \in Ab_a^M = Y$.

b) Wir betrachten eine beliebige Menge $Y \subset M$, die der Bedingung $\forall x \forall y\ (x \in M \wedge y \in Y \wedge x \leqq y \longrightarrow x \in Y)$ genügt. Das Minimum $\min (M \setminus Y)$ existiert, da $(M \setminus Y)$ nichtleere Teilmenge der wohlgeordneten Menge M ist.
Dieses Minimum wollen wir α nennen und behaupten, daß folgende Gleichheit gilt: $Ab_\alpha^M = Y$. Dazu zeigen wir (1) $Ab_\alpha^M \subseteq Y$ und (2) $Y \subseteq Ab_\alpha^M$.

(1) $Ab_\alpha^M = \{x \in M : x < \alpha\}$. Aus $x \in Ab_\alpha^M$ folgt $x < \alpha$. Wäre x kein Element von Y, so müßte x in $(M \setminus Y)$ liegen. Mithin würde $x \geqq \alpha$ gelten, was ein Widerspruch zu $x < \alpha$ ist. Also gilt $x \in Y$ und somit $Ab_\alpha^M \subseteq Y$.

(2) Wir nehmen uns ein beliebiges $y \in Y$ und zeigen $y \in Ab_{\alpha}^{M}$. Die Annahme $y \geq \alpha$ impliziert $\alpha \in Y$ und führt somit sofort zum Widerspruch, da $\alpha = \min(M \setminus Y)$. Also gilt $y < \alpha$ und damit $y \in Ab_{\alpha}^{M}$, d. h. $Y \subseteq Ab_{\alpha}^{M}$.

Definition 5. Es seien eine nichtleere Menge M und eine zugehörige Auswahlfunktion φ gegeben.
$A \subseteq M$, $A \neq \emptyset$ heißt ausgezeichnete Menge von M $=_{Def.}$
1) A ist bzgl. einer bestimmten Relation "$\leq$" wohlgeordnet.
2) Für diese Wohlordnung gilt:
$\forall a \, (a \in A \longrightarrow \varphi(M \setminus Ab_{a}^{A}) = a)$

Lemma 2. a) Es gibt ausgezeichnete Mengen einer nichtleeren Menge M.
b) $\varphi(M)$ ist das Minimum jeder ausgezeichneten Menge $A \subseteq M$.

Beweis.
a) Die Menge $\{\varphi(M)\}$ ist ausgezeichnete Menge jeder nichtleeren Menge M, denn
- $\{\varphi(M)\} \neq \emptyset$, $\{\varphi(M)\} \subseteq M$
- $\varphi(M) \leq \varphi(M)$ ist Wohlordnung auf $\{\varphi(M)\}$
- $\varphi(M \setminus Ab_{\varphi(M)}^{\{\varphi(M)\}}) = \varphi(M \setminus \emptyset) = \varphi(M)$.

b) Wenn $A \subseteq M$ eine ausgezeichnete Menge von M ist, dann existiert min A, weil A Wohlordnung ist. Nach Definition 5 gilt:
$\varphi(M \setminus Ab_{\min A}^{A}) = \min A$.
Wegen $Ab_{\min A}^{A} = \emptyset$ folgt $\min A = \varphi(M \setminus \emptyset) = \varphi(M)$.

Lemma 3. Wenn A und B zwei ausgzeichnete Mengen der nichtleeren Menge M sind, so ist stets eine dieser beiden Mengen ein Abschnitt der anderen.

Beweis. Mögen A und B zwei ausgezeichnete Mengen von M sein. Wir definieren:

$C =_{Def.} \{X : X \text{ ist Abschnitt von A und } X \text{ ist Abschnitt von B}\}$
$D =_{Def.} \bigcup C = \{x : \exists X(X \in C \wedge x \in X)\}$.
Wir beweisen nun, daß D Abschnitt von A und Abschnitt von B ist.
Nach Lemma 1 genügt es zu zeigen:
$\forall y \forall x\ (y \in D \wedge x \in A \wedge x \leq y \rightarrow x \in D)$.
Ist $y \in D$, so existiert eine Menge $Y \in C$ mit $y \in Y$. Weil Y Abschnitt von A ist, gilt nach Lemma 1
$\forall x(x \in A \wedge x \leq y \rightarrow x \in Y)$. Aus der Definition von D ergibt sich sofort: $\forall x(x \in A \wedge x \leq y \rightarrow x \in D)$.
Völlig analog können wir zeigen, daß D Abschnitt von B ist.
Die Menge D ist nach Definition der größte gemeinsame Abschnitt von A und B.
Im Folgenden nehmen wir an, daß sowohl $D \neq A$ als auch $D \neq B$ ist.
In A und in B wird D durch $\varphi(M \setminus D)$ definiert. Es gilt also
$\varphi(M \setminus D) \in A$, $\varphi(M \setminus D) \in B$, $\varphi(M \setminus D) \in (M \setminus D)$ und somit natürlich auch $\varphi(M \setminus D) \notin D$.
Nach Lemma 1 und dem bereits Bewiesenen folgt sofort, daß
$D \cup \{\varphi(M \setminus D)\}$ gemeinsamer Abschnitt von A und B ist.
Weil nun $D \cup \{\varphi(M \setminus D)\} \supset D$ ist, ist ein Widerspruch dazu konstruiert, daß D der größte gemeinsame Abschnitt von A und B ist.
Folglich muß wenigstens eine der beiden Identitäten $A = D$ oder $B = D$ gelten.
Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Wir kommen nun zu unserem eigentlichen Beweis:
Ist $M = \emptyset$, so ist M bzgl. jeder Halbordnungsrelation wohlgeordnet. Im anderen Fall geben wir uns eine beliebige, aber im weiteren Verlauf festgehaltene Auswahlfunktion φ vor und definieren die Mengen $\mathfrak{a}_M$ und L.
$\mathfrak{a}_M = \{A : A \text{ ist ausgezeichnete Menge der Menge } M\}$
$L = \bigcup \mathfrak{a}_M = \{a : \exists A\ (A \in \mathfrak{a} \wedge a \in A)\}$

Lemma 4. L ist ausgezeichnete Menge von M bzgl. "$\leq$".

Beweis. Sind a und $b \in L$, dann existieren Mengen $A \in \mathfrak{a}_M$ und $B \in \mathfrak{a}_M$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Nach dem bisher Bewiesenen können wir o.B.d.A. annehmen $a \in A$ und $b \in A$.
Das berechtigt uns zu folgender Definition:
$a \leq b \text{ in } L =_{Def.} a \leq b \text{ in } A$.
Wir verweisen darauf, daß diese Definition wegen Lemma 3 unab-

hängig vom jeweiligen $A \in \mathfrak{A}_M$ ist, das a und b enthält.
Wir haben nun in L eine lineare Ordnung konstruiert und wissen.
$(L,\leqq)$ erfüllt die schwache Minimumbedingung.

Lemma 5. Es sei $(P,\leqq)$ Halbordnung und
jede streng absteigende Kette (linear geordnete Menge)
in M breche nach endlich vielen Gliedern ab.
Dann erfüllt $(P,\leqq)$ die Minimalbedingung.

Bemerkung: Die Voraussetzung von Lemma 5 besagt:
Für jede absteigende Kette von Elementen $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \ldots \geqq a_n \geqq \ldots$
aus P gibt es einen Index K, von dem ab die Glieder konstant
bleiben, d. h. von dem ab $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots$ gilt.

Beweis. $(P,\leqq)$ erfülle die Voraussetzung von Lemma 5.
$N \subseteq P$, $N \neq \emptyset$.
Unter Berücksichtigung des Auswahlaxioms lassen sich in N Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots$ wie folgt auswählen:

$a_1 \in N$
1. Fall: a_1 ist minimales Element in N.
Damit ist die Behauptung gezeigt.
2. Fall: a_1 ist nicht minimales Element in N.

$a_2 \in N$ mit $a_2 < a_1$
1. Fall: a_2 ist minimales Element in N.
Damit ist die Behauptung gezeigt.
2. Fall: a_2 ist nicht minimales Element in N.

$a_3 \in N$ mit $a_3 < a_2 < a_1$
...

Auf diese Weise erhalten wir eine streng absteigende Kette in P,
so daß nach Voraussetzung ein Index k existiert, bei dem die
Kette abbricht.
a_k ist minimales Element in N.

Es sei K eine absteigende Kette in L.
K: $a_1 > a_2 > a_3 \ldots > a_n > \ldots$
Weil $a_1 \in L$, existiert ein $A \in \mathfrak{A}_M$ mit $a_1 \in A$.
Nach Lemma 1 folgt: $\forall a_i \; (a_i \in k \wedge a_i < a_1 \longrightarrow a_i \in A)$
Die Kette K muß also abbrechen. Aus Lemma 5 ergibt sich,
daß $(L,\leqq)$ die Minimalbedingung erfüllt.
Wir wissen also, daß $(L,\leqq)$ sowohl die Minimalbedingung als auch
die schwache Minimumbedingung erfüllt. Damit ist $(L,\leqq)$ Wohlordnung.

Diesen Fakt wollen wir in Lemma 6 beweisen.

Lemma 6. $(P,\leq)$ genügt der schwachen Minimumbedingung und der Minimalbedingung $\Longleftrightarrow$
$(P,\leq)$ genügt der Minimumbedingung.

Beweis. Möge $(P,\leq)$ der schwachen Minimumbedingung und der Minimalbedingung genügen und X eine beliebige, nichtleere Teilmenge von P sein. Nach Voraussetzung existiert ein minimales Element $x \in X$. Sei nun $y \in X$ beliebig gewählt. In der Menge $\{x,y\}$ existiert nach Voraussetzung ein Minimum.

1. Fall: $y < x$. Das ist ein Widerspruch dazu, daß x minimales Element in X ist. Also muß stets der
2. Fall: $x < y$ eintreffen.

Also gilt $\forall y\ (y \in X \rightarrow x \leq y)$. Mithin ist x Minimum in X.
Damit erfüllt $(P,\leq)$ die Minimumbedingung.
Die andere Implikation des Lemmas folgt unmittelbar aus der Definition 1.

Nun wollen wir unseren Beweis des Satzes von Zermelo zu Ende führen.
Ist $a \in L$, so gilt: $\exists A\ (A \in \mathfrak{A}_M \wedge a \in A \wedge a = \varphi(M \setminus Ab_a^A))$.
In A und L wird ein und derselbe Abschnitt Ab_a^A definiert.
L ist folglich ausgezeichnete Menge bzgl. "$\leq$".
Wir zeigen zum Abschluß $L = M$.
Dazu nehmen wir an $L \neq M$. Somit ist $L \subset M$ und $M \setminus L \neq \emptyset$.
Weil $\varphi(M \setminus L) \in (M \setminus L)$, kann $\varphi(M \setminus L)$ nicht Element von L sein.
$L \cup \{\varphi(M \setminus L)\}$ ist ausgezeichnete Menge, wenn wir $\varphi(M \setminus L)$ so anordnen, daß $\varphi(M \setminus L) > l$ für alle $l \in L$.
Wenn aber $\varphi(M \setminus L)$ in einer ausgezeichneten Menge enthalten ist, so folgt $\varphi(M \setminus L) \in L$. Das ist ein Widerspruch.
Also ist unsere Annahme falsch, und es gilt $L = M$.

Damit haben wir eine Wohlordnung für M angegeben und gezeigt, daß man aus dem Auswahlaxiom den Satz von Zermelo folgern kann.

Literaturangabe:

A.G. Kurosch: Vorlesungen über allgemeine Algebra,
Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt/Main,
1964

Andreas Kleinwächter
Student
2. Studienjahr

Preisaufgaben

M 61 ①

Sei P ein beliebiger innerer Punkt des spitzwinkligen Dreiecks ABC. Man zeige, daß der größte Abstand D des Punktes P vom Rand des Dreiecks wenigstens doppelt so groß ist wie der kleinste Abstand d.
Wann gilt D = 2d?

M 62 ①

Man zeige, daß in einer Gruppe von 6 Personen entweder 3 paarweise einander bekannt sind oder 3 paarweise einander unbekannt sind. (2 Personen A und B sind einander bekannt, wenn A B kennt und wenn B A kennt.)

M 63 ①

Man zeige, daß man aus n natürlichen Zahlen immer Zahlen auswählen kann, deren Summe durch n teilbar ist.

M 64 ①

Man zeige, daß für alle positiven Winkel α mit $0 < \alpha < 180^\circ$ die Ungleichung
$\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha > 0$ gilt.

M 65 ①

Man zeige, daß es in einem beliebigen Dreieck höchstens eine Seite gibt, die kürzer als die auf ihr errichtete Höhe ist.

M 66 ②

Через точку P, лешащую на основании BC равнобедренного треугольника ABC, проведены прямые, параллелные его боковым сторонам. Q и R –точки пересечения этих прямых с боковыми сторонами. Доказать, что точка, симметричная точке P относительно прямой QR , лежит на окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника ABC.

Einsendeschluß: 15. 2. 1981

Hyperkomplexe Zahlensysteme - 1. Fortsetzung

Definition 3: Unter der Summe zweier Quaternionen $q_1=a_1+b_1i+c_1j+d_1k$ und $q_2=a_2+b_2i+c_2j+d_2k$ verstehen wir die Quaternion

$$q = a_1+a_2+(b_1+b_2)i+(c_1+c_2)j+(d_1+d_2)k.$$

Man erkennt, daß $q_1+q_2 = q_2+q_1$ und $(q_1+q_2)+q_3=q_1(q_2+q_3)$, also das kommutative und assoziative Gesetz bei der Addition gültig bleiben.

Komplizierter ist die Einführung der Multiplikation zweier Quaternionen. Durch die beiden folgenden Definitionen wird die Multiplikation festgelegt.

Definition 4: Sind x und y 2 beliebige reelle Zahlen, so wird festgesetzt:

$(xi)(yj) = xy(ij) = xyk$ bzw. $(xj)(yi) = -xyk$

$(xj)(yk) = xy(jk) = xyi$ bzw. $(xk)(yj) = -xyi$

$(xk)(yi) = xy(ki) = xyj$ bzw. $(xi)(yk) = -xyj$

$x(yi)=(yi)x=xyi$, $x(yj)=(yj)x=xyj$ und

$x(yk)=(yk)x=xyk$, $(xi)(yi)=(xj)(yj)=(xk)(yk)=-xy$

Anschaulich gesehen kann man diese Produkte als Drehstreckungen auffassen.

Definition 5: Das Produkt zweier Quaternionen $q_1 = a_1+b_1i+c_1j+d_1k$ und $q_2 = a_2+b_2i+c_2j+d_2k$ wird in folgender Weise festgelegt:

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= a_1a_2+a_1(b_2i)+a_1(c_2j)+a_1(d_2k)+(b_1i)a_2 \\ &+ (b_1i)(b_2i)+(b_1i)(c_2j)+(b_1i)(d_2k) \\ &+ (c_1j)a_2+(c_1j)(b_2i)+(c_1j)(c_2j)+(c_1j)(d_2k) \\ &+ (d_1k)a_2+(d_1k)(b_2i)+(d_1k)(c_2j)+(d_1k)(d_2k). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der in Def. 4 festgelegten Beziehungen läßt sich das Produkt q_1q_2 vereinfachen und in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2) + (a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)i \\ &+ (a_1c_2+c_1a_2+d_1b_2-b_1d_2)j + (a_1d_2+d_1a_2+b_1c_2-c_1b_2)k. \end{aligned}$$

Das kommutative Gesetz ist für die so definierte Multiplikation nicht gültig. Doch läßt sich zeigen, daß das assoziative Gesetz gültig bleibt

$$(q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3).$$

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß alle 27 möglichen Produkte (ij)k, (ij)i usw. das assoziative Gesetz erfüllen.

Einige Beispiele hierzu: $(ji)k = -kk = 1$

$j(ik) = j(-j) = 1$, also $(ji)k = j(ik)$

$j(ji) = -jk = -i$

$(jj)i = -i$, also $(jj)i = j(ji)$

Weitere Bestätigungen seien dem Leser überlassen. Auch verweisen wir auf Literaturangabe /1/, Seite 20.

Um den absoluten Betrag einer Quaternion einzuführen, definieren wir zunächst den Begriff "konjugierte Quaternionen".

Definition 6: Unter der zur Quaternion $q = a+bi+cj+dk$ konjugierten Quaternion $\bar{q}$ verstehen wir die Quaternion $\bar{q} = a-bi-cj-dk$.

$q + \bar{q} = 2a$ und $q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ sind reelle Zahlen.

2 komplexe Zahlen $z = a+bi$ und $\bar{z} = a-bi$ heißen gleichfalls konjugiert zueinander. Es ist $z\bar{z} = a^2+b^2$, also $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$.

In Analogie hierzu definieren wir den absoluten Betrag von q durch

Definition 7: Unter dem absoluten Betrag einer Quaternion $q = a+bi+cj+dk$ verstehen wir die reelle Zahl

$$|q|_{Def} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Die Quaternionen sind ein Zahlensystem, in dem auch die Division erklärt werden kann. Als Quotient zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 haben wir die Lösung der Gleichung $z_2x = z_1$ bezeichnet. Wegen der Ungültigkeit des kommutativen Gesetzes für die Multiplikation werden wir bei den Quaternionen 2 Lösungen als Quotienten erhalten:

$$q_2x_1 = q_1 \quad \text{und} \quad x_2q_2 = q_1.$$

Die Berechnung der beiden x-Werte ist nicht schwierig. Um x_1 zu finden, multiplizieren wir die erste Gleichung links mit $\bar{q}_2$. Dann erhalten wir wegen $\bar{q}_2q_2 = |q_2|^2$ $|q_2|^2x_1 = \bar{q}_2q_1$ oder

für x_1

$$x_1 = \frac{\bar{q}_2q_1}{|q_2|^2}.$$

Multiplikation der zweiten Gleichung rechts mit $\bar{q}_2$ ergibt für x_2

$$x_2 = \frac{q_1\bar{q}_2}{|q_2|^2}.$$

Z. B. erhalten wir für den Quotienten $\frac{1+i}{1+k}$ die beiden Werte:

$$x_1 = \frac{1}{2}(1+i-j-k) \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{2}(1+i+j-k).$$

Bei der Einführung der hyperkomplexen Zahlen $q = a+bi+cj+dk$ besteht kein logischer Zwang, für die Symbole i, j und k die hier angeführten Festsetzungen zu treffen. Man kann über i, j und k beliebige andere Festsetzungen treffen. Unsere Deutung als Drehungen hat den Vorteil, daß diese als Quaternionen bezeichneten hyperkomplexen Zahlen für die Physik der Drehbewegungen im Raum um einen Punkt von großer Bedeutung sind. Ob allerdings andere beliebige Verabredungen über die Symbole i, j und k eine Rolle in der praktischen Anwendung spielen können, müßte im einzelnen untersucht werden.

Wir wollen hier auf zwei abgeänderte Verabredungen über die Symbole i, j und k eingehen.

Wir setzen fest: $i^2=j^2=k^2=0$, $ij=k$, $jk=i$, $ki=j$, $ji=-k$, $kj=-i$, $ik=-j$.

Dann ist für $a_1=a_2=0$ das Produkt zweier hyperkomplexer Zahlen

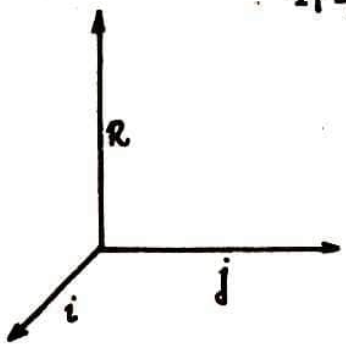
$$q_1q_2=(b_1i+c_1j+d_1k)(b_2i+c_2j+d_2k)=(c_1d_2-d_1c_2)i + (d_1b_2-b_1d_2)j + (b_1c_2-c_1b_2)k.$$

Bei unserer zweiten Verabredung setzen wir fest:

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1 \quad \text{und}$$
$$ij = ji = jk = kj = ik = ki = 0$$

Für das Produkt q_1q_2 erhalten wir für $a_1 = a_2 = 0$

$$q_1q_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2.$$



Skizze 9

Der Leser wird sofort den Zusammenhang mit der Vektorrechnung erkennen. Im ersten Beispiel kann man i, j und k als Einheitsvektoren, die zueinander senkrecht stehen, deuten (siehe Skizze 9), für die das vektorielle Produkt definiert ist. Im zweiten Fall kann man i, j und k wieder als Vektoren auffassen (siehe Skizze 9), für die das skalare Produkt definiert ist.

<u>Allgemeine hyperkomplexe Zahlensysteme</u>

Es besteht kein Hindernis, mehrdimensionale Zahlensysteme einzuführen. Es seien $i_1, i_2, \ldots, i_n$ n Symbole, über die beliebige

Verabredungen getroffen werden können. $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ seien beliebige reelle Zahlen. Dann heißt der Ausdruck $a_0+a_1i_1+a_2i_2 \ldots + a_ni_n$ eine hyperkomplexe Zahl (n+1)-ter Ordnung. Welche Verabredungen über die Symbole $i_1, i_2, \ldots, i_n$ getroffen werden, ist der Phantasie des Mathematikers überlassen. Insofern gibt es in der Mathematik eine unerschöpfliche Fülle von Zahlensystemen. Bei der Festsetzung von Verabredungen über die Symbole werden Erfahrungen wohl eine Rolle spielen, die man im täglichen Leben im Laufe der Zeit gewonnen hat. Vielleicht lassen sich gewisse Probleme der Mathematik und Physik durch entsprechende Zahlensysteme günstiger lösen als mit den gewohnten Methoden. Die Verabredungen über die Symbole müßten dem jeweiligen Problem angepaßt werden, so wie wir es für die Drehbewegungen durchgeführt haben. Die Symbole $i_1, i_2, \ldots, i_n$ werden manchmal auch als imaginäre Einheiten bezeichnet. Wir haben hier bewußt darauf verzichtet. Durch Deutung der Symbole verlieren sie völlig einen imaginären Charakter. Für interessierte Leser weisen wir auf die Literaturangabe /1/ hin.

In der modernen Mathematik gibt es verschiedene Algebren, die sich als hyperkomplexe Zahlensysteme auffassen lassen, z. B. die Vektoralgebra oder die Matrizenrechnung.

Literaturangabe:

/1/ J.L. Kantor u. A.S. Solodownikow: Hyperkomplexe Zahlen
Teubner-Verlag Leipzig

Dr. B. Hanisch
Halle

Lösungen

Aufgabe M 33

Fünfstellige Zahlen, die auf die Ziffer 6 enden, sind genau dann durch 3 teilbar, wenn die vierstellige Zahl, die man durch Streichen der letzten Ziffer erhält, durch 3 teilbar ist. Es gibt 9999 - 999 = 9000 vierstellige Zahlen. Jede dritte Zahl ist durch 3 teilbar. Folglich gibt es 3000 vierstellige Zahlen, die durch 3 teilbar sind und somit 3000 fünfstellige Zahlen, welche auf die Ziffer 6 enden und durch 3 teilbar sind.

Aufgabe M 31

Die Anzahl der Nullen, auf die eine natürliche Zahl endet, ist gleich dem Minimum der Anzahl der Primfaktoren 2 und 5. Die zu untersuchende Zahl ist 723!.
In diesem Fall treten weniger Primfaktoren 5 auf als Primfaktoren 2. Also ist die Anzahl der Nullen, auf die die Zahl 723! endet, gleich der Anzahl der Primfaktoren 5.
Jede durch 5 teilbare Zahl enthält die 5 als Primfaktor.
Jede durch 25 teilbare Zahl enthält die 5 zweimal als Primfaktor.
Jede durch 125 teilbare Zahl enthält die 5 dreimal als Primfaktor.
Die 625 enthält die 5 viermal als Primfaktor.
Zwischen 1 und 723 gibt es 144 durch 5 teilbare, 28 durch 25 teilbare und 5 durch 125 teilbare Zahlen.
Die Zahl 723! endet auf 144 + 28 + 5 + 1 = 178 Nullen.

Aufgabe M 32

Aus den Bedingungen folgt, daß die Zahlen a_1, a_2, c_1, c_2 das gleiche Vorzeichen haben.
Weiter gilt

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2)=a_1c_1+a_2c_2+a_1c_2+a_2c_1 \geq b_1^2+b_2^2+a_1c_2+a_2c_1 \quad (1)$$

Da die beiden letzten Summanden $(a_1c_2; a_2c_1)$ nicht negativ sind, gilt die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel:

$$a_1c_2 + a_2c_1 \geq 2\sqrt{a_1c_2a_2c_1} \ .$$

Nach Voraussetzung ist weiterhin:

$$2\sqrt{a_1c_2a_2c_1} \geq 2|b_1|\,|b_2|$$

Setzen wir diese Ungleichungen in (1) ein, so erhalten wir:

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2) \geq b_1^2+b_2^2 + 2|b_1|\,|b_2| =$$
$$= (|b_1| + |b_2|)^2 \geq (b_1+b_2)^2.$$

Aufgabe M 34

Löst man die Gleichungen nach x und z auf, so erhält man:

$$x = \frac{1}{3}(-a+2b+5y+4t) = b+2y+t-\frac{1}{3}(a+b+y-t)$$

$$z = \frac{1}{3}(2a-b-4y-5t) = a-y-2t-\frac{1}{3}(a+b+y-t)$$

Wählt man y und t so, daß $u = \frac{1}{3}(a+b+y-t)$ eine ganze Zahl ist, dann sind auch x und z ganze Zahlen. (1)

Seien t und u beliebige ganze Zahlen, so erhält man y wie folgt:

$$y = -a - b + t + 3u.$$

Somit ist auch y ganzzahlig und wegen (1) auch x und z. Wählt man t=a und u=0, so ist x=a-b; y=-b; z=b-a; t=a eine ganzzahlige Lösung des Gleichungssystems.

Aufgabe M 35

Es gilt $0 \leq (a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ac)$.

Weiter ist

$$0 \leq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ac)$$

Wegen $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ folgt:

$$0 \leq 1 + 2(ab+bc+ac) \quad \text{und}$$

$$0 \leq 2 - 2(ab+bc+ac)$$

und somit $-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ac \leq 1$.

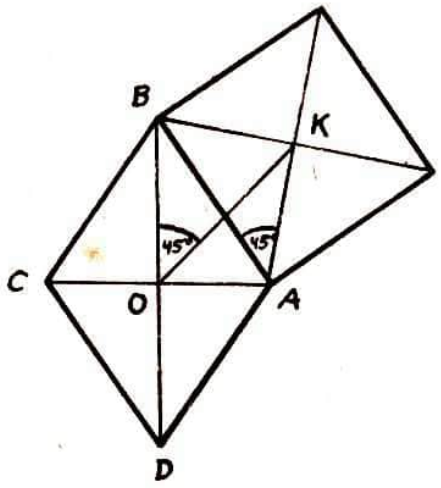
Aufgabe M 36

Das Rhombus bildet zusammen mit den auf seinen Seiten außen errichteten Quadraten eine Figur, die symmetrisch zu den Diagonalen des Rhombus ist, d. h. zu zwei senkrecht aufeinander stehenden Achsen.

Das Viereck KLMN ist auch symmetrisch zu diesen Achsen. Da seine Eckpunkte nicht auf den Symmetrieachsen liegen, ist das Viereck KLMN ein Rechteck und sein Mittelpunkt fällt mit dem Schnittpunkt der Symmetrieachsen (den Diagonalen des Rhombus) zusammen.

Es genügt also zu zeigen, daß die Strecke, die das Symmetriezentrum O des Rechtecks KLMN mit der Ecke K

verbindet, zusammen mit einer beliebigen Diagonale des Rhombus einen Winkel von 45° einschließt (siehe Zeichnung). Das zeigt man wie folgt:



Die Winkel $\sphericalangle BOA$ und $\sphericalangle BKA$ sind rechte Winkel, also liegen B, O, A und K auf einem Kreis. Dann sind die Winkel $\sphericalangle BOK$ und $\sphericalangle BAK$ als Winkel über derselben Sehne gleich und da $\sphericalangle BAK$ nach Konstruktion gleich 45° ist, ist auch $\sphericalangle BOK$ gleich 45°.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, F. Pegenau
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 447!–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 25.11.80

Titelbild: Dorothea Heinrich