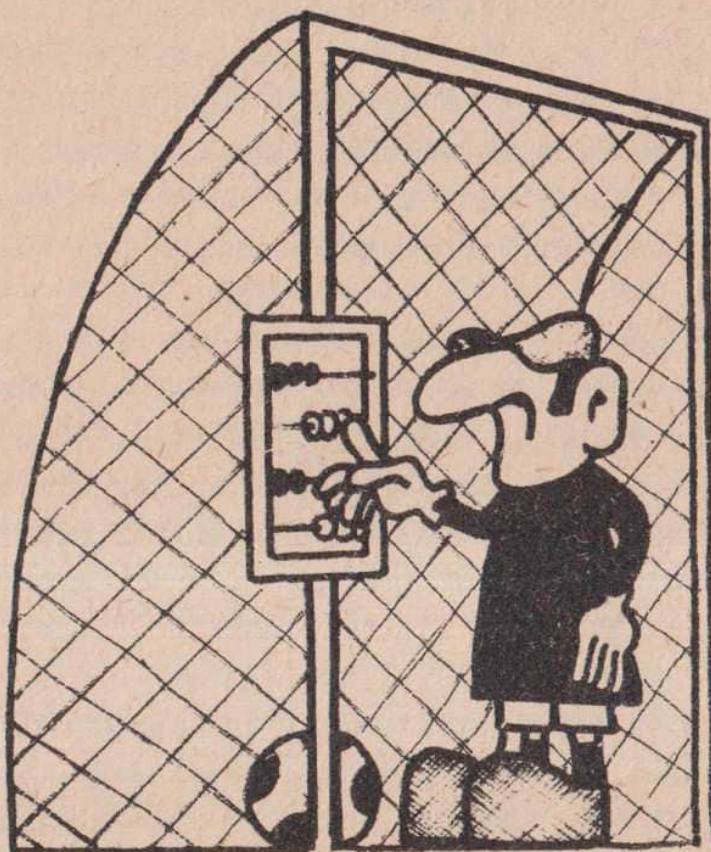




1

81

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom  
Jugendobjekt Studienvor-  
bereitung-Studienwerbung  
der Sektion Mathematik  
an der Friedrich-Schiller-  
Universität Jena

15. Jahrgang  
Index 33873  
Sonderpreis für DDR:  
0,20 M



## P. S. Alexandrow

### Die Entwicklung zum Wissenschaftler

Am 7. Mai 1896 wurde dem Oberarzt Alexandrow des Landeskrankenhauses des Beredsker Kreises im Gouvernement Moskau (heute Noginsk) der Sohn Pavel geboren. Die Familie übersiedelte bald darauf nach Smolensk, wohin das Familienoberhaupt, ein guter Chirurg und für seine Zeit ein sehr fortschrittlicher Mensch, als Oberarzt des Gouvernementkrankenhauses berufen wurde. Bereits in früher Kindheit beherrschte der Junge die französische und etwas später die deutsche Sprache gut und befaßte sich gern mit Musik.

Bereits im Gymnasium interessierte sich Pavel Sergejewitsch für mathematische Probleme. Im Unterschied zu den gewöhnlichen mathematischen "Schülertalenten" faszinierten ihn jedoch nicht schwierig zu lösende Gleichungen oder Konstruktionen, und er glänzte auch nicht durch schnelles Rechnen. Er machte alles langsam, aber gründlich. Sein Interesse für die grundlegenden Probleme der Mathematik fiel seinem Lehrer Alexander Romanowitsch Ejges auf. Er begann den Jüngling langsam in die Welt der Mathematik einzuführen und lenkte unmerklich dessen Studien. A.R. Ejges, ein Schüler des bekannten N.E. Shukowski, war ein sehr gebildeter Mensch von hoher Kultur. Pavel Sergejewitsch gewann allmählich eine hohe Verehrung für seinen Lehrer und natürlich auch für das von ihm unterrichtete Fach, der Mathematik. Später entschloß er sich, Lehrer zu werden und schrieb sich nach Abschluß des Gymnasiums mit der Goldenen Medaille an der Mathematischen Fakultät der Moskauer Universität ein. Von dieser Zeit an ist das ganze Leben und die gesamte Tätigkeit P.S. Alexandrows untrennbar mit der Moskauer Universität verbunden.

Im Jahr 1915 leistete der Student Alexandrow seinen ersten wissenschaftlichen Beitrag zur Mengentheorie und bewies das wichtige Theorem über die Mächtigkeit der Borelmengen.

1921 wurde Pawel Sergejewitsch Dozent an der Moskauer Universität, dann ordentlicher Professor, 1929 korrespondierendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften und 1953 Mitglied. 30 Jahre war er Präsident der Moskauer Mathematischen Gesellschaft und



ist heute ihr Ehrenpräsident. Interessant ist auch, daß Alexandrow 1935 einer der ersten Organisatoren der Moskauer mathematischen Olympiade für Schüler war.

„Mit meinem Lehrer, N.N. Lusin, traf ich nach Abschluß des 1. Studienjahres das erstemal zusammen“, erinnert sich Pawel Sergejewitsch. „Der Eindruck dieser Begegnung war sehr tief. Seine Vorlesungen, die ohne jeden äußeren Schein und ohne sprachliche Kunstgriffe waren, ergriffen die Hörer durch ihre schöpferische Spannung, zwangen uns gleichsam an der Lösung des mathematischen Problems teilzunehmen, verwandelten die Vorlesung in ein typisches Laboratorium mathematischen Denkens. Nach Vorlesungsschluß wandte ich mich an Lusin um Rat bittend, wie ich mich weiter mit der Mathematik befassen sollte. Ich war vor allem überrascht über die Aufmerksamkeit und Achtung gegenüber dem Gesprächspartner, obwohl er damals ein bekannter Wissenschaftler und ich ein 18-jähriger Student war. Lusin stellte mir einige Fragen, um gleich darauf in einer mir verständlichen Form die Grundrichtungen meiner weiteren Studien zu umreißen. Sehr vorsichtig, ohne jeden Druck überzeugte er mich, eine dieser Richtungen zu wählen. Heute, viele Jahre später, kann ich sagen, daß diese Richtung gut gewählt war. Damals wurde ich N.N. Lusins Schüler. Ich lernte bei ihm nicht nur Mathematik, sondern bekam auch eine Vorstellung darüber, was ein richtiger Wissenschaftler ist, und was ein Universitätsprofessor sein kann und sein soll. Damals begriff ich auch, daß die Wissenschaft und das Heranführen junger Menschen an sie zwei Seiten der gleichen Tätigkeit, der Tätigkeit eines Wissenschaftlers, sind.“

Nach Abschluß der Universität befaßte sich Pawel Sergejewitsch auf den Rat Lusins hin mit dem damals modernen Problem des Kontinuums, das beinahe das erste mathematische "Problem des Jahrhunderts" war.

Ohne das "Problem des Jahrhunderts" gelöst zu haben, kehrte Pawel Sergejewitsch 1918 nach Smolensk zurück und widmete sich einige Zeit kultureller Aufklärungsarbeit in Tschernigow. Aber 1920 ist er wieder in Smolensk. Er unterrichtet Mathematik an der neueröffneten Smolensker Universität und fährt jeden Monat nach Moskau, um die Prüfungen zur Erlangung des Magistertitels



abzulegen. Damals waren es übrigens 15 Prüfungen, und sie umfaßten den Stoff der ganzen damaligen Mathematik.

#### Die beiden Pawels

"Die gleichen Prüfungen legte manchmal sogar am gleichen Tag auch Pawel Samuilovitsch Uryson ab, der vor kurzem die Universität absolviert hatte. Bald hatten sich die beiden Pawels angefreundet. Die gemeinsamen Prüfungen und zahlreiche Gespräche trugen natürlich dazu bei, daß wir uns immer näher kamen," berichtet P.S. Alexandrow. "Jedoch folgender Umstand war der eigentliche Beginn unserer Freundschaft. P.S. Uryson liebte wie auch ich die Musik sehr. Nach Ablegung des fälligen Examens gab mir Uryson am 30. März 1921 eine Karte für einen Abend Beethovenscher Violinsonaten. Ich freute mich sehr, und wir gingen zusammen in das Konzert, das uns beiden sehr gefiel. Nach dem Konzert hatten wir Lust, spazieren zu gehen, wir streiften bis 4 Uhr morgens durch Moskau und unterhielten uns über Mathematik."

"Im Frühjahr 1921 konzentrierte sich P.S. Uryson auf die Topologie," erzählt P.S. Alexandrow weiter. "In der Geschichte der sowjetischen Mathematik nimmt Uryson ja auch die Stellung des Begründers der sowjetischen Topologie ein. Nach den klassischen Arbeiten P.S. Urysons entwickelte sich dieser Zweig der Mathematik in der UdSSR in weitem Rahmen und erfolgreich."

Den sehr heißen Sommer 1922 verlebten die beiden Freunde auf einer Datsche in der Nähe von Bolschew am Ufer der Kljasma. Morgens, gleich nach dem Aufstehen, begaben sie sich zum Ufer des Flusses und nahmen einige Butterbrote, Bleistifte und Papier mit.

"Dies waren Stunden intensivster Arbeit und lebhafter Gespräche über Mathematik," erinnert sich Pawel Sergejewitsch. "Wir verfaßten gemeinsam 'Bemerkungen über kompakte topologische Räume', und das Werk wurde in diesem Sommer fertiggestellt."

Neben unserer Datsche wohnte Prof. W.E. Fomin mit seiner Familie. Er besaß ein Boot. Einmal erschienen zwei junge Burschen bei ihm, die sich als Dozenten vorstellten. Beide waren wir barfuß, auch dementsprechend angezogen und sahen durchaus nicht wie Dozenten aus," lächelt P.S. Alexandrow in Erinnerung an diese längst vergangene Zeit. "Der Professor sagte, daß das Boot gestrichen wer-



den muß und forderte uns auf, in einigen Tagen vorbeizukommen. Bei unserem nächsten Besuch erhielten wir das Boot, aber bei unserer ersten Fahrt damit schmierten wir uns tüchtig mit roter Farbe voll. Es ergab sich, daß während des Streichens des Bootes Prof. Fomin sich bei Prof. Jegorow über uns erkundigte und die Antwort erhielt: 'Sie sind gute Mathematiker, aber ob man ihnen ein Boot anvertrauen kann, weiß ich wirklich nicht.'

Was nun die Arbeiten über die topologischen Räume betrifft, die von den beiden Freunden in diesem Sommer geschrieben wurden, so waren sie so gut, daß sie bald in der ganzen Welt Anerkennung fanden und sogar in den "Mathematischen Annalen" veröffentlicht wurden, die von dem bekannten Felix Klein redigiert wurden.

#### Anerkennung im Weltmaßstab

Den Sommer 1923 und den darauffolgenden Sommer 1924 verlebten beide Freunde in Göttingen. Hier lernten die Freunde die meisten Göttinger Mathematiker kennen, auch D. Hilbert, R. Courant und E. Nöther. In Göttingen kamen in den Sommersemestern die führenden Mathematiker aller Welt zusammen.

In Göttingen führten die beiden Freunde von Semester zu Semester Spezialkurse und wissenschaftliche Seminare durch und wurden Mitglieder der Göttinger Wissenschaftlichen Gesellschaft, einer besonderen wissenschaftlichen Akademie, in die nur hervorragende Wissenschaftler aufgenommen wurden, die sich durch ihre Arbeiten einen Namen gemacht hatten.

An der Leine in Göttingen gab es einen Staudamm, der einen kleinen See und einen nicht hohen, aber sehenswerten Wasserfall bildete. An den Ufern dieses Sees kamen an heißen Sommertagen die Mathematiker zusammen, da die meisten von ihnen gern schwammen. Nach dem Baden wurden am Ufer im Schatten der Bäume oft ernsthafte wissenschaftliche Dispute ausgetragen und wichtige Ideen dargelegt. Pawel Sergejewitsch berichtet: "Einmal war ich Zeuge, als Hilbert am Seeufer über die Grundgedanken seiner Arbeit 'Über die Unendlichkeit' sprach, die er für den Druck vorbereitete." Viele wissenschaftliche Arbeiten junger Mathematiker entstanden, wurden dargelegt und diskutiert während des Badens.



### Der Tod des Freundes

Nach dem Sommersemester 1924 in Göttingen reisten die Freunde nach Paris, nach Göttingen, das 2. Zentrum für die Mathematiker der Welt. Anschließend entschlossen sie sich, einige Wochen am Strand des Atlantischen Ozeans zu verbringen.

In seinen Memoiren "Über meinen Freund" schreibt P.S. Alexandrow: "Vor mir liegen 2 Eisenbahnkarten 3. Klasse von Paris ... Sie tragen das Datum 27. Juli 1924, dem Tag an dem Pawel Samuilowitsch und ich zum Atlantischen Ozean fuhren. Wir verbrachten ungefähr 3 Wochen am Strand. Es gab viel Sonne, manchmal auch Wind, das Wetter war schön, es regnete nicht oder fast nicht. Wir waren den ganzen Tag am Strand. ... Am 14. August beendete Pawel Samuilowitsch seine Arbeit über die 'Mächtigkeit zusammenhängender Mengen', eine seiner bemerkenswertesten Arbeiten. Es kam der 17. August, ein Sonntag. Vor und nach dem Mittagessen arbeiteten wir viel. Pawel Samuilowitsch dachte über seine neue Arbeit nach, deren Inhalt das bekannte, heute in allen Lehrbüchern und Monographien enthaltene 'Urysonsche Lemma' und ein nicht weniger bekanntes Theorem bildete. Er schrieb jedoch nur die erste Seite. Die Sonne kam heraus, und wir gingen baden. Es war ungefähr um 5 Uhr. Und eine Stunde später lebte Pawel Samuilowitsch nicht mehr. Eine plötzliche Welle schlug seinen Kopf gegen einen Felsen." Nach dem tragischen Tod Urysons durchlebte Pawel Sergejewitsch eine Zeit schwerster seelischer Erschütterungen. Fast ein ganzes Jahr mußte er an der Durchsicht und Vorbereitung zur Drucklegung des wissenschaftlichen Nachlasses seines Freundes arbeiten, besonders an den wichtigen Bemerkungen über die Cantorsche Mannigfaltigkeiten.

Besonders bemerkenswert für die Tätigkeit P.S. Alexandrows war das Jahr 1927. Auf dem 1. Allrussischen Kongreß gab Prof. Alexandrow eine Übersicht über die Entwicklung der sowjetischen Topologie. Dies war für ihn die 1. Möglichkeit, seine Ideen und Erfolge einem großen Auditorium zu unterbreiten.

Fortsetzung folgt!

A. Chalamajser  
Moskau



## Preisaufgaben

- N 1 Man bestimme die maximale Anzahl von Springern die man derart auf ein Schachbrett stellen kann, daß keine zwei Springer einander schlagen können. Man gebe eine solche Stellung an und beweise, daß keine größere Zahl möglich ist!

- N 2 Man löse das Gleichungssystem

$$x^{x+y} = y^n$$

$$y^{x+y} = x^{2n} y^n$$

wobei  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $n > 0$  sei in den Variablen  $x$  und  $y$ .

- N 3 Man löse die Gleichung

$$\sqrt{\frac{x^2+8x}{x+1}} + \sqrt{x+7} = \frac{7}{\sqrt{x+1}}$$

- N 4 Seien  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  die Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks. Man zeige, daß dann

$$\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha - \beta) + \sin \beta \sin \gamma \sin(\beta - \gamma) + \sin \gamma \sin \alpha \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \gamma) \sin(\gamma - \alpha) = 0$$

gilt.

- N 5 Es sei bekannt, daß die Verlängerungen zweier paralleler Seiten eines Rechtecks ABCD eine Gerade in den Punkten M und N schneide, und die Verlängerungen der Seiten AD und BC dieselbe Gerade in den Punkten P und Q. Die Länge der Seite AB sei gleich  $p$ . Man konstruiere das Rechteck ABCD.

In welchen Fällen ist die Aufgabe lösbar und wieviele Lösungen gibt es?

- N 6 Пусть  $O$  центр сферы  $K$ ;  $Q$  и  $P$  — точки, лежащие вне  $K$ . Проведём вокруг точки  $P$  как вокруг центра сферу радиуса  $PO$ , а вокруг точки  $Q$  как вокруг центра сферу радиуса  $QO$ . Доказать, что площади тех частей этих сфер, которые скажутся внутри  $K$ , равны.



**Aufgabe M 37**

Man erweitert den Bruch A mit  $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2)$  und erhält:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2))^2 \cdot 2n} = \\ &= \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!^2 \cdot n} = \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)! \cdot n!} = \\ &= \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Der Binomialkoeffizient  $\binom{2n-1}{n-1}$  ist eine ganze Zahl.  
Folglich ist auch  $2^{2n-1} \cdot A$  eine ganze Zahl.

**Aufgabe M 38**

Es gilt  $a^2 + b^2 = 1$  (1)

$c^2 + d^2 = 1$  (2)

$ac + bd = 0$  (3)

Aus (1) folgt, daß a und b nicht gleichzeitig 0 sein können. Sei  $a \neq 0$ .

Dann folgt aus (3):

$c = \frac{bd}{a}$  (4)

Setzt man (4) in (2) ein, erhält man:

$1 = \frac{b^2 d^2}{a^2} + d^2 = \frac{d^2}{a^2} (b^2 + a^2).$

Aus (1) folgt dann:  $a^2 = d^2$  (5)

Unter Verwendung von (4) kann man  $ab + cd$  wie folgt umformen:

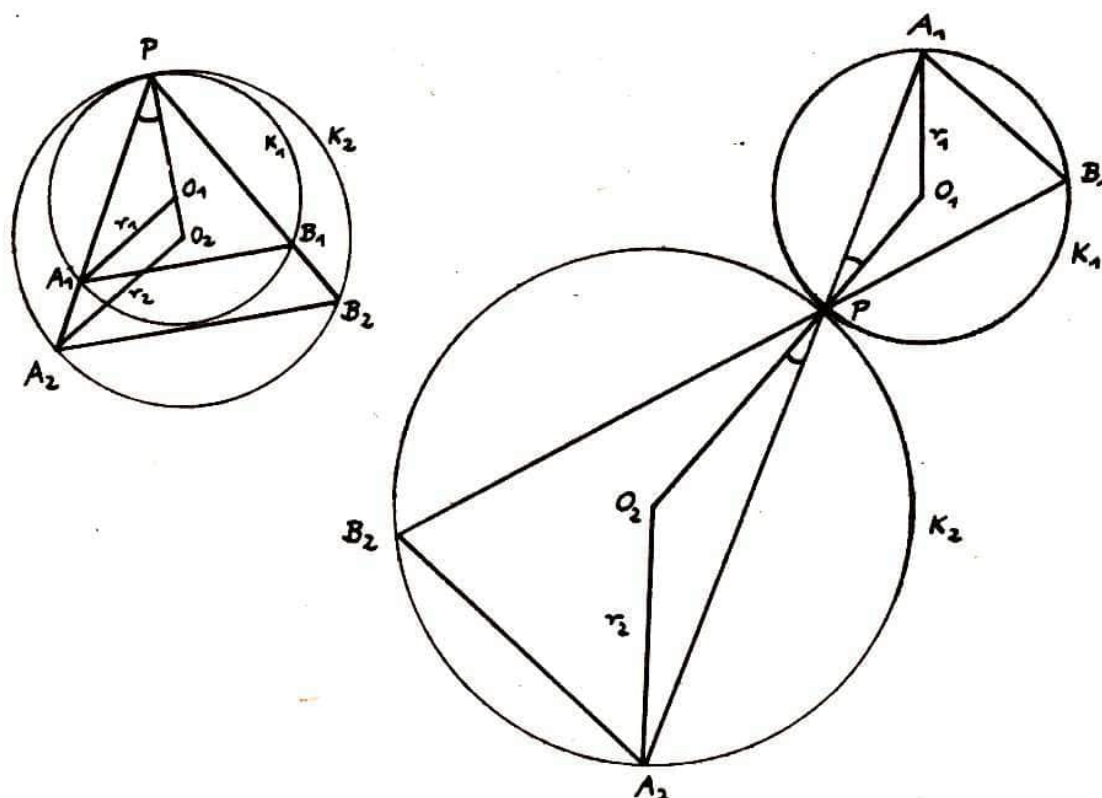
$ab + cd = ab - \frac{bd^2}{a} = \frac{b}{a} (a^2 - d^2)$

Wegen (5) ist  $ab + cd = 0$ .

**Aufgabe M 39**

Sei  $r_1$  der Radius des Kreises  $K_1$  mit dem Mittelpunkt  $O_1$  und  $r_2$  der Radius des Kreises  $K_2$  mit dem Mittelpunkt  $O_2$ .





Die Dreiecke  $PO_1A_1$  und  $PO_2A_2$  sind ähnlich, da sie entweder einen gemeinsamen Winkel haben oder die Winkel  $\angle O_1PA_1$  und  $\angle O_2PA_2$  als Scheitelwinkel gleich sind, und da die Dreiecke außerdem noch gleichschenkelig sind. Analog folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke  $PO_1B_1$  und  $PO_2B_2$ . Folglich ist:

$$PA_1 : PA_2 = r_1 : r_2 \quad \text{und}$$

$$PB_1 : PB_2 = r_1 : r_2$$

und somit

$$PA_1 : PA_2 = PB_1 : PB_2.$$

Da die Dreiecke  $PA_1B_1$  und  $PA_2B_2$  zwei Paare entsprechender Seiten haben und die Winkel am Punkt P gleich sind, sind die Dreiecke ähnlich.

#### Aufgabe M 40

Eine ungerade ganze Zahl kann man in der Form  $2k+1$  darstellen. Dabei ist  $k$  wieder eine ganze Zahl.

Weiter ist  $(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$ .

Das Quadrat einer ungeraden ganzen Zahl läßt also bei



Division durch 8 den Rest 1 (entweder  $k$  oder  $k+1$  ist durch 2 teilbar).

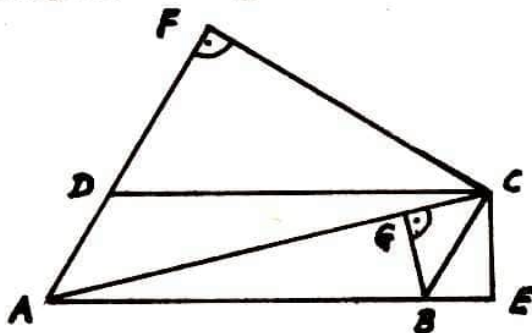
Sind  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  ungerade, so läßt

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2$  bei Division durch 8 den Rest 5.

Da  $b^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2$  ist, können  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  und  $b$  nicht gleichzeitig ungerade Zahlen sein.

### Aufgabe M 42

Sei  $G$  der Fußpunkt des Lotes, das von der Ecke  $B$  auf die Diagonale  $AC$  gefällt wurde.



Die größere Diagonale  $AC$  teilt das Parallelogramm in die zwei stumpfwinkligen Dreiecke  $ADC$  und  $ABC$ . Deshalb liegt der Punkt  $G$  auf der Strecke  $AC$  zwischen  $A$  und  $C$ .

Die rechtwinkligen Dreiecke  $AEC$  und  $AGB$  sind ähnlich, da sie einen gemeinsamen Winkel an der Ecke  $A$  haben. Die rechtwinkligen Dreiecke  $AFC$  und  $CGB$  sind auch ähnlich, da die Winkel an den Ecken  $A$  und  $C$  gleich sind. Es gelten folgende Verhältnisse:

$$AC : AE = AB : AG \quad \text{und}$$

$$AC : AF = BC : GC.$$

Man erhält:

$$AB \cdot AE = AC \cdot AG \quad \text{und}$$

$$BC \cdot AF = AC \cdot GC.$$

Addiert man diese Gleichungen, erhält man:

$$AB \cdot AE + BC \cdot AF = AC (AG + GC) \quad (1)$$

Da  $BC = AD$  und  $AG + GC = AC$

folgt aus (1):

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$



### Hyperkomplexe Zahlen und Drehungen im Raum

Im Aufsatz über anschauliche Einführung komplexer Zahlensysteme haben wir den Begriff einer Quaternion durch den Ausdruck

$$q = a + bi + cj + dk$$

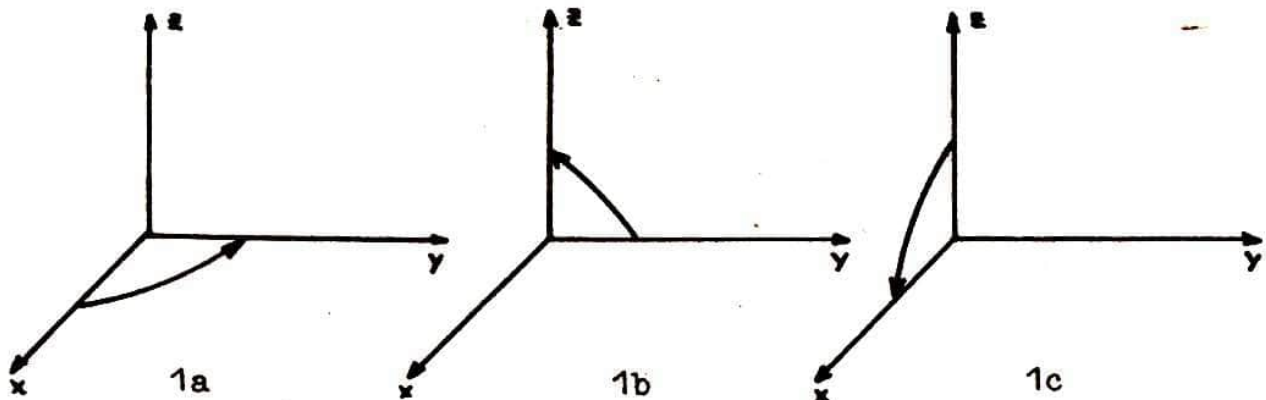
eingeführt, wobei  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  beliebige reelle Zahlen sind und die Symbole  $i$ ,  $j$  und  $k$  folgende Beziehungen erfüllen:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

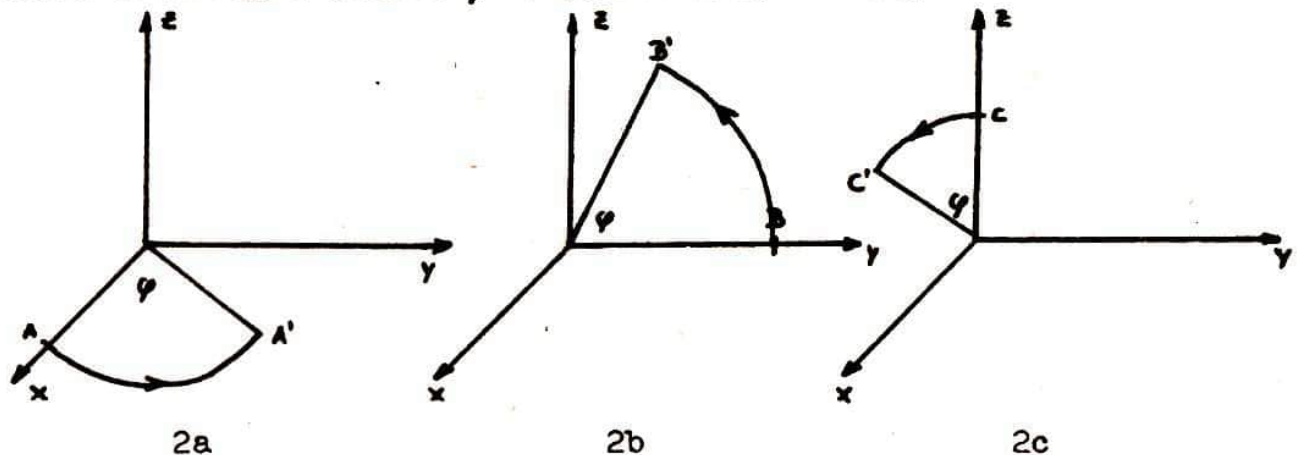
$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

$i$  charakterisiert eine  $90^\circ$ -Drehung im positiven Sinn um die  $z$ -Achse  
 $j$  charakterisiert eine  $90^\circ$ -Drehung im positiven Sinn um die  $x$ -Achse  
 $-k$  charakterisiert eine  $90^\circ$ -Drehung im positiven Sinn um die  $y$ -Achse  
 (Siehe Skizzen 1a - 1c)



Wir wollen nun zeigen, wie man Drehungen um eine beliebige Achse durch den Ursprung des Koordinatensystems  $(x, y, z)$  mit Hilfe der Symbole  $i$ ,  $j$  und  $k$  darstellen kann.

Zunächst betrachten wir Drehungen um die 3 Achsen  $z$ ,  $x$  und  $y$  um einen beliebigen Winkel  $\varphi$ . (Skizzen 2a bis 2c)





Drehen wir die Strecke  $OA = r$  auf der  $x$ -Achse im positiven Sinn um die  $z$ -Achse um den Winkel  $\varphi$ , so geht  $OA$  über in

$$OA' = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Drehen wir die Strecke  $OB$  auf der  $y$ -Achse im positiven Sinn um die  $y$ -Achse um den Winkel  $\varphi$ , so geht  $OB = r$  in

$$OB' = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

über.

Eine Drehung der Strecke  $OC = r$  auf der  $z$ -Achse um die  $y$ -Achse im positiven Sinn um den Winkel  $\varphi$  führt  $OC$  über in

$$OC' = r(\cos \varphi + k \sin \varphi).$$

Um eine Drehung um eine beliebige Achse  $\overrightarrow{OP}$  durch unsere Symbole  $i, j, k$  auszudrücken, gehen wir in 2 Schritten vor.

Die Lage einer beliebigen Achse  $\overrightarrow{OP}$  läßt sich durch die beiden Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  festlegen.  $OP_0$  ist die senkrechte Projektion von  $\overrightarrow{OP}$  auf die  $x, y$ -Ebene (siehe Skizze 3).

- a) Wir drehen zunächst das Koordinatensystem um die  $z$ -Achse im positiven Sinn um den Winkel  $\alpha$ . Dabei geht die  $x$ -Achse in die  $x'$ -Achse und die  $y$ -Achse in die  $y'$ -Achse über. Die  $z$ -Achse bleibt unverändert,  $z = z'$ .

Dem  $x', y', z'$ -System können wir wie

der 3 Symbole  $i', j'$  und  $k'$  zuordnen, die für dieses System die gleiche Bedeutung haben wie  $i, j$  und  $k$  für das  $x, y, z$ -System. Aus

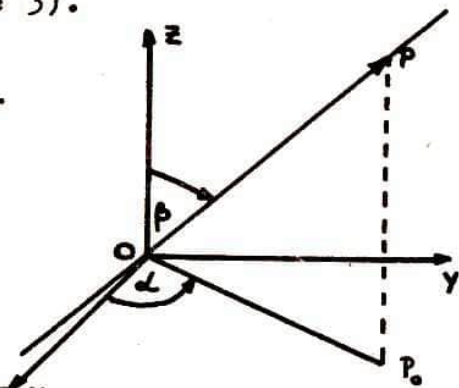
der Konstanz der  $z$ -Achse ergibt sich:  $i' = i$ .

$j'$  finden wir durch folgende Überlegung:

Drehung der  $x$ -Achse in die Lage der  $y'$ -Achse wird durch die Quaternion  $r(\cos(90^\circ + \alpha) + i \sin(90^\circ + \alpha))$  dargestellt.

Drehung der  $y'$ -Achse in die Richtung der  $z$ -Achse wird durch die Quaternion  $j'$  dargestellt. Beide Drehungen hintereinander ausgeführt ergeben die Drehung der  $x$ -Achse in die Richtung der  $z$ -Achse.

$$r(\cos(90^\circ + \alpha) + i \sin(90^\circ + \alpha)) \cdot j' = rk \quad \text{oder} \\ (-\sin \alpha + i \cos \alpha) \cdot j' = k.$$



Skizze 3

Multiplizieren wir links mit

$(-\sin \alpha - i \cos \alpha)$ , so erhalten wir wegen

$$(-\sin \alpha - i \cos \alpha)(-\sin \alpha + i \cos \alpha) = 1$$

$j' = (-\sin \alpha - i \cos \alpha) \cdot k$  oder wegen

$$ik = -j$$

$$j' = j \cos \alpha - k \sin \alpha$$

(siehe Skizze 4)

$k'$  finden wir aus der Beziehung  $k' = i'j'$  bzw.  $k' = ij'$

$$k' = i(j \cos \alpha - k \sin \alpha)$$

$$k' = j \sin \alpha + k \cos \alpha$$

Für das  $x', y', z'$ -System haben wir also folgende Symbole:

$$\begin{aligned} i' &= i \\ j' &= j \cos \alpha - k \sin \alpha \\ k' &= j \sin \alpha + k \cos \alpha \end{aligned}$$

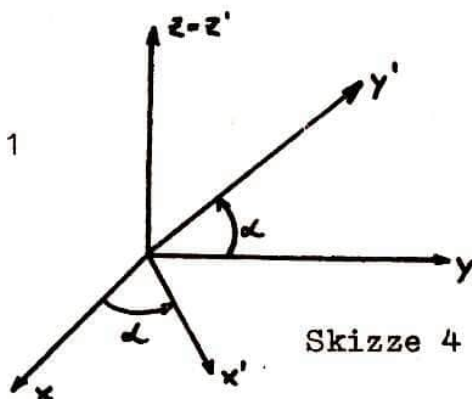
- b) Nun drehen wir das  $(x', y', z')$ -System um die  $y'$ -Achse im positiven Sinn um den Winkel  $\beta$ .  $z = z'$  geht dabei über in die  $z''$ -Achse, die mit der  $OP$ -Achse zusammenfällt. Die  $x'$ - bzw.  $y'$ -Achse geht über in die  $x''$ -Achse bzw.  $y''$ -Achse (siehe Skizze 5).

Dem  $(x'', y'', z'')$ -Symbol entsprechen wieder 3 Symbole  $i'', j'', k''$ , die in diesem System die gleiche Rolle spielen wie  $i, j, k$  im  $(x, y, z)$ -System.

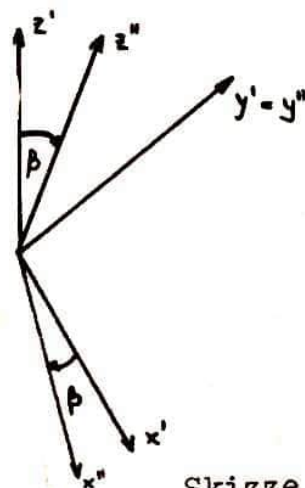
$i''$  finden wir durch folgende Überlegung:

Drehung der  $x''$ -Achse in die Richtung der  $x'$ -Achse wird durch die Quaternion  $r(\cos \beta + k' \sin \beta)$  dargestellt, Drehung der  $x'$ -Achse in die Richtung der  $y'$ -Achse durch

$ri'$  ( $r$  = Betrag der gedrehten Strecke. Beide Drehungen hintereinander ausgeführt ergeben die Drehung  $r \cdot i''$ )



Skizze 4



Skizze 5



$$ri'' = r(\cos \beta + k' \sin \beta) \cdot i'$$

$$i'' = i' \cos \beta + j' \sin \beta$$

$$i'' = i \cos \beta + (j \cos \alpha - k \sin \alpha) \sin \beta$$

$$i'' = i \cos \beta + j \cos \alpha \sin \beta - k \sin \alpha \sin \beta$$

Wegen der Konstanz der  $y'$ -Achse ist  $k'' = k' = j \sin \alpha + k \cos \alpha$   
 Aus  $j'' = k'' i''$  finden wir das dritte Symbol:

$$j'' = (j \sin \alpha + k \cos \alpha)(i \cos \beta + j \cos \alpha \sin \beta - k \sin \alpha \sin \beta)$$

$$j'' = -k \sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta - i \sin^2 \alpha \sin \beta + j \cos \alpha \cos \beta \\ - i \cos^2 \alpha \sin \beta + \cos \alpha \sin \alpha \sin \beta$$

$$j'' = -i \sin \beta + j \cos \alpha \cos \beta - k \sin \alpha \cos \beta$$

Bei der Multiplikation ist immer zu beachten, daß das kommutative Gesetz nicht gilt!

Für das  $(x'', y'', z'')$ -System gelten also folgende Symbole:

$$\begin{cases} i'' = i \cos \beta + j \cos \alpha \sin \beta - k \sin \alpha \sin \beta \\ j'' = -i \sin \beta + j \cos \alpha \cos \beta - k \sin \alpha \cos \beta \\ k'' = j \sin \alpha + k \cos \alpha \end{cases}$$

Der Leser kann sich durch Ausrechnen davon überzeugen, daß für  $i''$ ,  $j''$  und  $k''$  die gleichen Beziehungen bestehen wie für  $i$ ,  $j$ ,  $k$ . Eine Drehung im positiven Sinn um die Achse  $\overline{OP}$  um den Winkel  $\varphi$  kann also durch das Symbol  $i''$  charakterisiert werden.

$$q = r(\cos \varphi + i'' \sin \varphi)$$

$$q = r[\cos \varphi + (i \cos \beta + j \cos \alpha \sin \beta - k \sin \alpha \sin \beta) \sin \varphi]$$

Die Quaternion  $bi + cj + dk$  bezeichnet man auch als eine vektorielle Quaternion. In unserem Fall hat diese vektorielle Quaternion stets den Betrag 1, wie sich leicht ausrechnen läßt.  $r$  bedeutet eine Strecke, die senkrecht zur Drehachse liegt. Als Beispiel wollen wir folgende Aufgabe lösen.

Gegeben sei die Quaternion  $q = 0,5(1+i+j+k)$ .

Man bestimme die Richtung der Drehachse und den Drehwinkel  $\varphi$ .

Lösung: Es ist  $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots \varphi = 60^\circ.$$

Die Drehachse finden wir durch die Beziehung

$$i'' = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$$

Hieraus folgen für  $\alpha$  und  $\beta$  die Gleichungen:

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Die Gleichungen werden erfüllt durch die Winkel

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -45^\circ, & \beta_1 &= 54,7^\circ \quad \text{und} \\ \alpha_2 &= 135^\circ, & \beta_2 &= -54,7^\circ \end{aligned}$$

Beide Lösungen ergeben dieselbe Drehachse.

Interessant ist folgende Feststellung: Führen wir eine  $45^\circ$ -Drehung um die z-Achse aus, entsprechend der Quaternion  $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ , und danach eine  $45^\circ$ -Drehung um die x-Achse mit  $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$ , so ergibt  $q_1 q_2 = \frac{1}{2}(1+i)(1+j) = \frac{1}{2}(1+i+j+k)$ .

Das Ergebnis der beiden Drehungen ist also eine Drehung um die im obigen Beispiel bestimmte Drehachse.

An einem zweiten Beispiel wollen wir diese Feststellung bestätigen.

Wir betrachten eine Drehung um die z-Achse um den Winkel  $90^\circ$  und eine zweite Drehung um die x-Achse um den Winkel von  $45^\circ$ .

$$q_1 = i \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$$

$$q_1 q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j) = \frac{1}{\sqrt{2}}(i+k)$$

$$q = q_1 q_2 = \cos 90^\circ + \left(-\frac{1}{2} i + \frac{1}{2} k\right) \sin 90^\circ$$

Der Drehwinkel beträgt  $\varphi = 90^\circ$ .

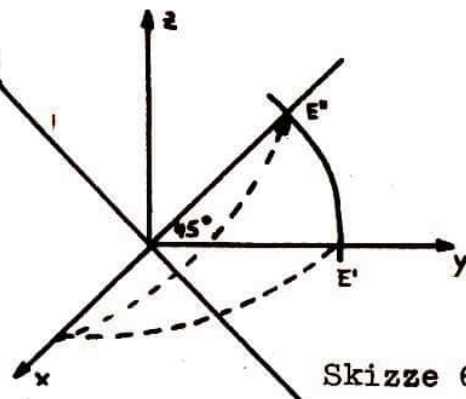
Für die Drehachse ergeben sich die Gleichungen:

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos \alpha \cos \beta = 0 \quad \text{und} \quad -\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hieraus folgt:  $\alpha = 90^\circ$  und  $\beta = -45^\circ$  (siehe Skizze 6)

Mit Hilfe der Quaternionen lassen sich also 2 Drehungen relativ leicht zu einer Drehung zusammenfassen.

In der Fachliteratur werden meist die Symbole i, j und k etwas abgeändert verwendet. i wird als Symbol für eine  $90^\circ$ -Drehung um die x-Achse, j als Symbol für eine  $90^\circ$ -



Skizze 6



ehung um die y-Achse und  $k$  als Symbol für eine  $90^\circ$ -Drehung um die z-Achse verwendet. Für diese Festsetzungen ist das Ergebnis zweier Drehungen mit den Quaternionen  $q_1$  und  $q_2$  nicht  $q_1 q_2$ , sondern  $q_2 q_1$ , wie sich leicht nachweisen läßt.

Zum Schluß wollen wir noch einmal betonen, daß durch die Quaternionen außerordentlich fruchtbare Gebiete der Mathematik entstanden, wie z. B. die Vektoralgebra, die Matrizenrechnung und viele andere Algebren.

Dr. Bruno Hanisch  
Halle

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“

**Leiter:** Heiner Schwulow

**Chefredakteur:** Andreas Kleinwächter

**Stellvertretender Chefredakteur:** Andreas Jeschag

**Redaktion:** H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein

**Anschrift:** WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

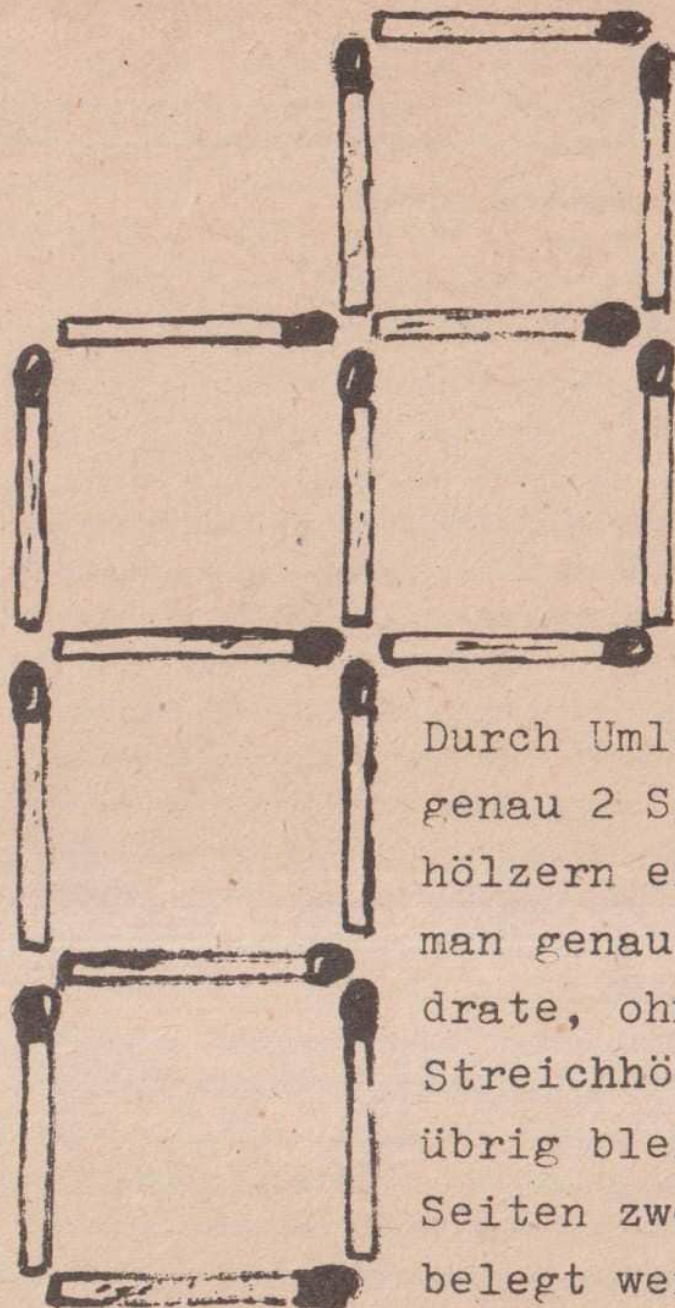
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 17. 12. 80

**Titelbild:** Edgar Pforr

**Einsendeschluß:** 15. 4. 81





Durch Umlegen von  
genau 2 Streich-  
hölzern erzeuge  
man genau 4 Qua-  
drate, ohne daß  
Streichhölzer  
übrig bleiben oder  
Seiten zweifach  
belegt werden !

2

81

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom  
Jugendobjekt Studienvor-  
bereitung-Studienwerbung  
der Sektion Mathematik  
an der Friedrich-Schiller-  
Universität Jena

15. Jahrgang  
Index 33873  
Sonderpreis für DDR:  
0.20 M



**P. S. Alexandrow (Fortsetzung)**Das Geheimnis der ewigen Jugend

Pawel Sergejewitsch studierte sehr eingehend das Schaffen N.I. Lobatschewskis und übernahm nicht nur die geometrischen Ideen des großen Kasaner Mathematikers, sondern begriff, übernahm und entwickelte auch die pädagogischen Wunschvorstellungen des Rektors der Kasaner Universität, die in seiner Rede "Über die wichtigsten Erziehungsfakten" enthalten sind. Im März 1967 hielt P.S. Alexandrow in der Aula der Moskauer Universität eine öffentliche Vorlesung "Über die wichtigsten Erziehungsprobleme". Ein bekanntes Bedürfnis des denkenden Menschen ist, sich mitzuteilen, einem anderen zu erzählen, worüber man nachdenkt und was einem lieb ist, das Bedürfnis, sein Schaffen, mag es nun groß oder klein sein, Menschen, einem Kollektiv, zu übermitteln. Aber was ist ein Kollektiv?

"Ich beginne mit dem Kleinen", erklärt Pawel Sergejewitsch seinen Gedankengang. "Ein Kollektiv ist z. B. die Seminargruppe, zu der ein Student schon im 1. Studienjahr gehört, oder die Seminare in den höheren Studienjahren. Zu den 'allgemeinstudentischen' Interessen kommen die wissenschaftlichen Interessen; bei den guten Studenten treten diese bald in den Vordergrund. Es kommt zu neuen Erlebnissen, den stärksten, die ein Mensch haben kann, den schöpferischen Erlebnissen. Mir ist bis heute das Kollektiv junger Mathematiker an der Moskauer Universität von damals am liebsten, als ich studierte. Es ist die bekannte "Lusitania". Wir alle - und wir waren viele - waren begeistert."

Die geistige Erziehung allein macht noch nicht die Erziehung aus, sagte Lobatschewski. Dieser Gedanke bedeutet für die konkrete pädagogische Arbeit an der Mittel- wie auch an der Hochschule vor allem die Untrennbarkeit des Unterrichtsprozesses vom gesamten Erziehungsprozeß. Die Erziehung des Menschen muß mit der Achtung vor der Erziehung beginnen. Fühlt der Mensch diese Achtung nicht, so kann das schrecklichste geschehen, das einem jungen Menschen überhaupt zustoßen kann, er kann die Achtung vor sich selbst ver-



lieren, das "Gefühl für Ehre und innere Würde", von dem Lobatschewski immer sprach. Wenn der Mensch die Achtung vor sich selbst verliert, dann kommt es zu der Einstellung: Mein Wagen, verliere alle 4 Räder! Das Gefühl für Ehre und Achtung gegenüber sich selbst dagegen verpflichtet, und daraus entwickelt sich die echte Disziplin. Sie entsteht aus einem ernsthaften Verhalten gegenüber den eigenen Verpflichtungen und dem Leben im allgemeinen.

Pawel Sergejewitsch berichtet über die gute Tradition der russischen Universitäten, die entstanden und sich entwickelten auf der Basis der russischen und sowjetischen Kultur. Die Vorlesungen der Professoren dieser Universitäten umfaßten ein zahlreiches Auditorium und gaben vielen jungen Menschen nicht nur die Möglichkeit, vieles zu erkennen, sondern auch dieses besondere Gefühl des Kontaktes mit der Wissenschaft zu erleben, das vom gleichen Charakter ist wie das Gefühl in Konzerten oder im Theater, wenn große Künstler spielen. "Ich glaube, daß das hohe Niveau der gesamten Kultur für den Hochschullehrer nicht weniger verpflichtend ist, als seine eigenen wissenschaftlichen Leistungen. Ich glaube, daß kein Lehrberechtigter, ob er nun Professor, Dozent oder Assistent ist, und unabhängig von dem Wert seiner eigenen wissenschaftlichen Erfolge das Recht hat, sich der Teilnahme an der Erziehung der Studenten zu entziehen. Es gibt jedoch Menschen, die zweifellos begabt sind und einzelne oder sogar beachtenswerte wissenschaftliche Erfolge aufweisen", führt Pawel Sergejewitsch seinen Gedanken aus, "die doch gleichzeitig weit von meinem Begriff eines Wissenschaftlers entfernt sind. Sie betrachten die Wissenschaft nur vom Standpunkt des eigenen Interesses und der eigenen Erfolge. Wenn man Stanislawski mit anderen Worten wiedergibt, kann man sagen, daß diese Menschen nicht die Wissenschaft in sich lieben, sondern die Wissenschaft für sich, mit anderen Worten, sie lieben sich in der Wissenschaft. Dieses egozentrische Verhalten ist bei diesen Menschen auch in ihrer pädagogischen Tätigkeit festzustellen, wodurch die folgende Generation - die Generation der Schüler - verbildet wird. Meiner Meinung nach ist die Ursache dafür ein Mangel an Kultur und der damit verbundene Wunsch, an nichts



anderes zu denken, was außerhalb des engen Kreises des eigenen unmittelbaren Interesses liegt.

Unser pädagogischer Beruf ist ein glückbringender Beruf", erklärte Pawel Sergejewitsch an Ende seines Vortrages. "Im Umgang mit der Jugend liegt das Geheimnis ewiger Jugend. Eine Generation wird durch die andere abgelöst, aber um uns herum gibt es so junge und frohe Gesichter! Und sie sind auch begeistert für ihre Wissenschaft, und sie freuen sich ihrer Jugend, und sie spielen auch Fußball vor allen Eingängen zur Universität, erlaubt ihnen das die Universitätsleitung oder nicht?"

### Die mathematische Atmosphäre

Wie in früheren Jahren kommen zu ihm täglich Schüler. Die einen brauchen einen Rat, eine Empfehlung, eine ausländische Zeitschrift oder ein seltenes Buch, die anderen wollen über ein Ergebnis berichten und ein Gutachten haben; die dritten haben einen Artikel für eine ausländische Zeitschrift geschrieben, bitten um Durchsicht und Verbesserung des Wortlautes, um Berichtigung einer nicht ganz genauen Übersetzung aus dem Russischen. Einer der letzten Aspiranten Alexandrows, jetzt Mitarbeiter der von ihm geleiteten Abteilung für Topologie am Mathematischen Institut namens W.A. Steklow der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Kandidat der physikalisch-mathematischen Wissenschaften Shenja Stschepin berichtet, daß er den mathematischen Teil seines letzten Aufsatzes für "Vorträge an der Französischen Akademie der Wissenschaften" selbst geschrieben habe, aber bei der Formulierung des französischen Textes Pawel Sergejewitsch geholfen hätte. "Pawel Sergejewitsch hat für uns Stundeten der jüngeren Studienjahre der Moskauer Universität ein Seminar über die Grundlagen der Topologie durchgeführt", erwähnt Shenja. "Bereits im 1. Studienjahr wurde ich für meine Arbeit unter Anleitung von Pawel Sergejewitsch mit einer Prämie im Wettbewerb für wissenschaftliche Arbeiten der Studenten ausgezeichnet. Aus den Teilnehmern dieses Seminars wählte Pawel Sergejewitsch gewöhnlich seine Aspiranten aus. Die 1. Arbeiten seiner Schüler sah er immer besonders genau durch, half oft sie umzuarbeiten, schrieb sie sogar manchmal neu. Obwohl sein Anteil an der Arbeit das Überge-



wicht hatte, unterzeichnete er nie als Mitarbeiter."

Sein ganzes Leben ordnete Pawel Sergejewitsch zwei Forderungen unter: 1. der Entwicklung der Wissenschaft, vor allem der Topologie, 2. der Erziehung seiner Schüler, indem er ihnen seine Kenntnisse, Ideen und Erfahrungen übermittelte und sie der allgemeinen Kultur und der Musik nahebrachte.

Pawel Sergejewitsch bleibt selten allein, sogar auf seiner Datsche. Fast immer war bei ihm ein lauter Kreis von Gleichgesinnten zu Besuch. "Es verging kaum ein Sonntag, daß nicht zwischen 9 - 10 Uhr nach Komarowka einige Schüler Pawel Sergejewitsch's und seine Arbeitskollegen kamen", erzählt Prof. W.I. Ponomarew. "Mich zum Beispiel lud Pawel Sergejewitsch 1954 zum erstenmal als Student des 1. Studienjahres ein. In diesem großen Hause voller Licht und Bücher freut man sich immer über Gäste und heißt den Studenten genauso herzlich willkommen wie das Akademiemitglied. Noch als Hörer des 1. Studienjahres lernte ich in der Datsche viele angesehene Wissenschaftler kennen.

Die fröhliche Gesellschaft begab sich gewöhnlich morgens auf einen Spaziergang: im Sommer zu Fuß zum Frjasiner See, im Winter fuhr man Ski. Obwohl Pawel Sergejewitsch nicht mehr jung war, lief er leicht 25 - 30 km Ski. Im März machten sich gewöhnlich alle auf Skiern zum Fluß auf, um im eiskalten Wasser zu baden. Dann rieben wir uns trocken und fuhren wieder Ski. Gegen 4 Uhr fuhren wir zurück zur Datsche zum Mittagessen. Danach setzten wir uns für 1 1/2 - 2 Stunden zusammen, um zahlreiche mathematische Probleme zu diskutieren, Aufgaben, Theoreme und Bedingungen zu formulieren. Es ergab sich eine eigenartige mathematische Atmosphäre, in der die Probleme, Ideen und Lösungen gleichsam in der Luft lagen. Manchmal wurden hier auch die Studien- und Diplomarbeiten sowie die Dissertationen für die Kandidatur und das Doktorat festgelegt. Um 8 Uhr gab es das traditionelle Tee-trinken und natürlich wieder Unterhaltungen über mathematische Themen. Einige fuhren spät abends nach Moskau zurück, andere blieben in dem gastfreundlichen Haus 2 - 3 Tage und lasen in den Büchern und Zeitschriften über Mathematik aus aller Welt. Seit 1954 nehme ich auch den jährlichen 'topologischen Ausflügen' nach dem Tischkoner Stausee teil", fährt Wladimir Iwano-



witsch Ponomarew fort. "Gewöhnlich unternimmt man sie im Mai, und es nehmen 30 - 40 Studenten, Aspiranten und Hochschullehrer teil. Als Pawel Sergejewitsch 1966 70 Jahre alt wurde, beteiligten sich an dem 'Jubiläumsausflug' über 100 Menschen. Man ging von der Station Prawda der Jaroslawler Linie nach Tischkow, insgesamt sind dies 15 km. Unterwegs rasteten wir, zündeten ein Feuer an, spielten Fuß- oder Volleyball und führten natürlich endlose Gespräche über topologische Themen. Darauf badeten wir." Die Vorliebe für den Wassersport, fürs Schwimmen und Rudern, sind das ständige Hobby des Wissenschaftlers. Vor einigen Jahren, zur Feier des 25-jährigen Bestehens des Sportklubs der Moskauer Universität, wurde unter den führenden Sportlern, die mit der Jubiläumsmedaille ausgezeichnet wurden, auch Alexandrow genannt. Während seines langen Lebens sammelte er eine eigenartige "Kollektion" großer und kleiner Flüsse, die er von der Quelle bis zur Mündung mit dem Boot befuhr. Bei diesen wilden Wasserfahrten begleiteten ihn immer Freunde und Schüler; eine dieser Fahrten machte das bekannte Quartett der Akademiemitglieder P.S. Alexandrow, A.N. Kolmogorow, S.M. Nikolski und A.I. Malzew. Es versteht sich, daß bei allen diesen Wasserfahrten mit Pawel Sergejewitsch eine mathematische Atmosphäre herrschte: es wurden endlose Probleme der klassischen und modernen Mathematik diskutiert.

A. Chalamajser  
Moskau

---

G E H E I M T I P    zum Lösen der Preisaufgaben

In zweifelhaften Fällen entscheide man sich für das Richtige.

---



**Preisaufgaben**

N 7 Seien  $a, b, c, d$  solche ganzen Zahlen, daß das Gleichungssystem

①

$$ax + by = m$$

$$cx + dy = n$$

für alle ganzzahligen  $m$  und  $n$  ganzzahlige Lösungen hat. Man zeige, daß dann  $ad - bc = \pm 1$  gelten muß.

N 8 Man zeige für alle ganzen Zahlen  $n > 1$  die folgende Ungleichung:

①

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} > 1.$$

N 9 Jeder Ecke eines dreieckigen Prismas sei eine Zahl derart zugeordnet, daß die einer beliebigen Ecke zugeordnete Zahl gleich dem arithmetischen Mittel der Zahlen ist, die den mit dieser Ecke durch eine Kante des Prismas verbundenen Ecken zugeordnet sind.

①

Man zeige, daß alle 6 den Ecken zugeordneten Zahlen gleich sind.

N 10 Sei  $p$  eine Primzahl größer als 2. Man zeige, daß  $\frac{2}{p}$  eindeutig in der Form  $\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  dargestellt werden kann, wenn  $x$  und  $y$  verschiedene positive ganze Zahlen sind.

①

N 11 Im Inneren des Kreises  $K$  seien zwei Punkte  $A$  und  $B$  gegeben. Man zeige, daß ein solcher Kreis existiert, der durch die Punkte  $A$  und  $B$  geht und völlig im Inneren des Kreises  $K$  liegt.

①

N 12 Пусть  $a$  произвольное положительное число. Рассмотрим  $n-1$  последовательных кратных этого числа :  $a, 2a, 3a, \dots, (n-1)a$ . Доказать, что среди них найдется по крайней мере одно такое число, для которого абсолютная величина разности между ним и ближайшим целым числом не будет превышать  $\frac{1}{n}$ .

②

## Wurzel Preisaufgaben

### Auswertung 1980

Im Schuljahr 1979/80, d.h. zu den Preisaufgaben, die in den "Wurzeln" Heft 9/79 bis 7\8/80 veröffentlicht wurden, erzielten folgende 10 Einsender die besten Ergebnisse:

| Name           |          |                | Punktzahl |
|----------------|----------|----------------|-----------|
| E r d m a n n, | Frank    | Zeitz          | 60        |
| M o h n k e,   | Klaus    | Lübbenau       | 57        |
| W e r n e r,   | Gerald   | Meiningen      | 56        |
| S c h e n k,   | Klaus    | Hoyerswerda    | 54        |
| K ö h l e r,   | Uwe      | Taura          | 41        |
| H ü b n e r,   | Matthias | Leipzig        | 41        |
| S c h m i d t, | Jörg     | Neubrandenburg | 40        |
| R o m m e c k, | Steffen  | Dresden        | 40        |
| W e r n e r,   | Grit     | Magdeburg      | 38        |
| R i c h t e r, | Mario    | Gadebusch      | 38        |

Wir gratulieren den hier genannten fleißigsten und erfolgreichsten Einsendern und bedanken uns bei allen Teilnehmern am Preisaufgabenwettbewerb, die uns im Schuljahr 1979/80 Lösungen eingeschickt haben. Wir hoffen weiterhin auf eine rege Beteiligung und wünschen dazu allen Lesern viel Erfolg. Für alle Schüler, die sich an den Preisaufgaben beteiligen möchten, hier noch einmal die ausführlichen

#### Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Ausgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten im Werte von 0,50M je Punkt. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an uns zu senden. Alle Aussagen sind stets zu beweisen, unbewiesen verwendete Sachverhalte sind anzugeben. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen etc.) muß deutlich erkennbar sein.

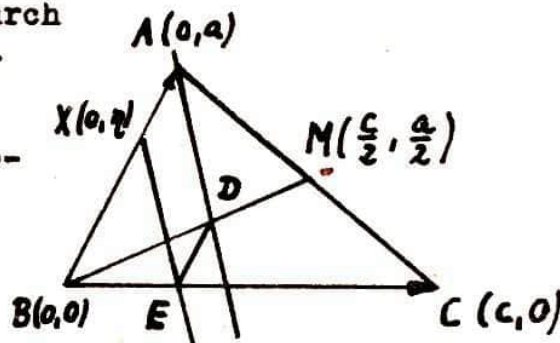


**Aufgabe M 19** (Lösung nach Prof. Dr. Roth, em. Prof. d. FSU Jena)

Für die Lösung der Aufgabe muß man voraussetzen, daß die Vektoren  $\vec{AB}$  und  $\vec{BC}$  unabhängig sind.

Lösung:

Man verbinde B mit dem Mittelpunkt M der Strecke AC. Die durch A verlaufende Gerade der Schar schneidet BM in D. Die Strecke AD wird parallel zu AB verschoben, so daß D in einen Punkt von BC übergeht. Man erhält die gesuchte Gerade g(XY).

Beweis:

Im schiefwinkligen Koordinaten-System mit B als Ursprung,  $g(BC)$  als x-Achse und  $g(BA)$  als y-Achse gilt

$$A = (0, a)$$

$$C = (c, 0)$$

$$M = \left(\frac{c}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

$$D = \left(t \cdot \frac{c}{2}, t \cdot \frac{a}{2}\right), \text{ wobei } t \text{ von}$$

der Parallelenschar abhängt.

Die Verschiebung liefert:

$$E = \left(t \cdot \frac{c}{2}, 0\right)$$

Weiter sei  $X = (0, \eta)$ .

Somit gilt:  $(0, a) = (0, \eta + t \cdot \frac{a}{2})$ , also  $-\eta = t \cdot \frac{a}{2} - a$ .

Wir überprüfen nun die Teilverhältnisse:

$$\vec{AB} : \frac{-a+\eta}{-\eta} = \frac{-a-t \cdot \frac{a}{2} + a}{t \cdot \frac{a}{2} - a} = \frac{-t}{t-2}$$

$$\vec{BC} : \frac{t \cdot \frac{c}{2}}{-t \cdot \frac{c}{2} + c} = \frac{t}{-t+2}$$

Die Lösung ist für alle  $t \neq 2$  möglich.

## Einführung in die Topologie

### 1. Topologische Eigenschaften der Zahlengeraden

Von der 9. Klasse an ist jeder Schüler mit der Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , der Zahlengeraden, hinreichend vertraut. Wir verwenden die Begriffe "Menge der reellen Zahlen" und "Zahlengerade" als äquivalente Begriffe in dem Sinne, daß jeder reellen Zahl eindeutig ein Punkt der Zahlengeraden und umgekehrt jedem Punkt der Zahlengeraden eindeutig eine reelle Zahl zugeordnet werden kann. In der Schule werden vor allem die algebraischen Eigenschaften und die Ordnungseigenschaften der Zahlengeraden betrachtet. Zu den algebraischen Eigenschaften der Zahlengeraden gehören beispielsweise die unbeschränkte Ausführbarkeit der Addition, der Multiplikation und der Subtraktion in  $\mathbb{R}$  und die unbeschränkte Ausführbarkeit der Division in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ordnungseigenschaften sind alle die Eigenschaften, die mit der Tatsache verbunden sind, daß  $\mathbb{R}$  eine geordnete Menge ist. Wie wir wissen, gilt ja z. B. für zwei beliebige reelle Zahlen  $x, y$  entweder  $x < y$  oder  $x > y$  oder  $x = y$ . Es lassen sich also zwei beliebige reelle Zahlen  $x, y$  stets der Größe nach vergleichen. Weiterhin ist der Betrag  $|x|$  einer reellen Zahl  $x \in \mathbb{R}$  wie folgt definiert:

$$|x| : = \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Der Betrag der Differenz zweier reeller Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|x-y|$ , wird als Abstand zwischen  $x$  und  $y$  bezeichnet, was der anschaulichen Deutung auf der Zahlengeraden völlig entspricht.

In den folgenden Ausführungen werden wir die sogenannte Dreiecksungleichung sehr häufig benutzen.

Sind  $x, y$  beliebige reelle Zahlen, so gilt stets:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Unter einer Folge reeller Zahlen verstehen wir eine eindeutige Abbildung von  $\mathbb{N}^*$  (Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  ohne Null) in  $\mathbb{R}$ . Mit anderen Worten: Eine Folge reeller Zahlen ist eine Funktion  $f$  mit dem Definitionsbereich  $D(f) = \mathbb{N}^*$  und einem Wertebereich  $W(f) \subset \mathbb{R}$ . Für  $f(n)$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f(n) \in \mathbb{R}$ ) schreiben wir auch  $a_n$  und symbolisieren eine Folge reeller Zahlen durch



$(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Beispiele für reelle Zahlenfolgen:

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

$$(2^{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*} = (1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}, \dots)$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots\right)$$

Der Begriff der Konvergenz einer Folge reeller Zahlen in  $\mathbb{R}$  wird wie folgt definiert:

Definition 1:

Eine Folge reeller Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  heißt konvergent in  $\mathbb{R}$  genau dann, wenn eine reelle Zahl  $a \in \mathbb{R}$  existiert mit folgender Eigenschaft: Für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ , so daß für alle  $n > n_0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , gilt:  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

Formalisiert:

Eine Folge reeller Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  heißt konvergent in  $\mathbb{R} \longleftrightarrow$

$$\exists a \forall \varepsilon \exists n_0 \forall n (a, \varepsilon \in \mathbb{R} \wedge \varepsilon > 0 \wedge n_0, n \in \mathbb{N}^* \wedge n > n_0 \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Ist für eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  die in Def. 1 formulierte Konvergenzbedingung erfüllt, so sagen wir, die Folge konvergiert gegen den Grenzwert  $a$ , bzw. die Folge besitzt den Grenzwert  $a$ . Die Folge  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  besitzt demnach den Grenzwert 0 (Null), während die Folge  $(2^{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  keinen (eigentlichen) Grenzwert hat.

Auch der Sachverhalt der Konvergenz läßt sich auf der Zahlengeraden veranschaulichen. Es muß ein Punkt  $a$  auf der Zahlengeraden existieren mit folgender Eigenschaft: Wählen wir eine beliebige positive reelle Zahl  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  mag sich noch so wenig von Null unterscheiden), so muß sich eine Zahl  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  finden lassen, so daß alle  $a_n$  mit  $n > n_0$  zwischen  $a - \varepsilon$  und  $a + \varepsilon$  liegen, während sich außerhalb dieses Abschnittes (Intervalls) höchstens die endlich vielen Folgenglieder  $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$  befinden.

Es gilt nun der folgende Satz:

Satz 1:

Der Grenzwert einer konvergenten Folge reeller Zahlen ist in  $\mathbb{R}$  eindeutig bestimmt.

Beweis (indirekt): Nehmen wir an, es seien sowohl  $a$  als auch  $a'$

mit  $a \neq a'$  Grenzwert einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Wegen  $a \neq a'$  gilt:  $|a - a'| > 0$ . Wir wählen  $\varepsilon = \frac{|a - a'|}{2} > 0$ . Nach Definition 1 existiert dann ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \varepsilon = \frac{|a - a'|}{2}$  für alle  $n > n_0$ .

Ebenso existiert dann nach Definition 1 ein  $n'_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_n - a'| < \varepsilon = \frac{|a - a'|}{2} \quad \text{für alle } n > n'_0.$$

Sei  $m_0 := n_0 + n'_0$ , so ist  $m_0 > n_0$  und auch  $m_0 > n'_0$ , und es muß sowohl  $|a_{m_0} - a| < \varepsilon$  als auch  $|a_{m_0} - a'| < \varepsilon$  gelten. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} |a - a'| &= |a - a_{m_0} + a_{m_0} - a'| \leq |a - a_{m_0}| + |a_{m_0} - a'| < 2\varepsilon = \\ &2 \cdot \frac{|a - a'|}{2} = |a - a'|. \end{aligned}$$

Es kann aber  $|a - a'| < |a - a'|$  nicht richtig sein, also muß auch unsere Annahme  $a \neq a'$  falsch sein.

Wir bemerken: Um den Begriff der Konvergenz einer Folge reeller Zahlen definieren zu können, war neben anderem insbesondere der Begriff des Abstandes  $|x - y|$  zweier reeller Zahlen  $x, y$  erforderlich.

All die bisher besprochenen Tatsachen werden auch in der Schule gelehrt oder können aus früheren Beiträgen in unserer Zeitschrift als bekannt vorausgesetzt werden. Womit ein Schüler aber weit weniger vertraut sein wird, das sind die topologischen Eigenschaften der Zahlengeraden. Ohne hier ausführliche Erklärungen anzuschließen, was man unter topologischen Eigenschaften versteht, wollen wir uns der Betrachtung solcher Eigenschaften zuwenden.

#### Definition 2:

Sind  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a < b$ , so heißt

$$]a, b[ := \{x : x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$$

ein offenes Intervall mit den Endpunkten  $a$  und  $b$ .

Die offenen Intervalle sind spezielle Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Der Punkt  $\frac{a+b}{2}$  heißt Mittelpunkt des Intervalls  $]a, b[$ , und  $|b - a|$  ist die Länge des Intervalls.

#### Definition 3:

Sind  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ , so heißt das spezielle offene Intervall der Länge  $2\varepsilon$  mit  $x_0$  als Mittelpunkt eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ , die wir mit  $U_\varepsilon(x_0)$  bezeichnen.

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}.$$



Jetzt sind wir in der Lage, einen ganz wesentlichen Begriff zu definieren, nämlich den Begriff der Umgebung.

#### Definition 4 :

Eine Menge  $U \subseteq \mathbb{R}$  heißt Umgebung eines Punktes  $x \in \mathbb{R}$  genau dann, wenn ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  existiert mit  $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ .

#### Satz 2 :

Jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ ,  $U_\varepsilon(x_0)$ , ist Umgebung  $U$  jedes ihrer Punkte.

Beweis: Sei  $x \in U_\varepsilon(x_0)$  beliebig gewählt, so ist  $|x - x_0| < \varepsilon$  oder

$\varepsilon - |x - x_0| > 0$ . Wir setzen  $\varepsilon' = \varepsilon - |x - x_0|$  und betrachten  $U_{\varepsilon'}(x)$ .

Wählen wir  $y \in U_{\varepsilon'}(x)$  beliebig, so ist stets  $|y - x| < \varepsilon'$ . Jetzt

betrachten wir den Abstand zwischen  $x_0$  und  $y$ , d. h.  $|y - x_0|$ :

$$|y - x_0| = |y - x + x - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| < \varepsilon' + |x - x_0| =$$

$$\varepsilon - |x - x_0| + |x - x_0| = \varepsilon.$$

$|y - x_0| < \varepsilon$  heißt  $y \in U_\varepsilon(x_0)$ . Wenn also  $y \in U_{\varepsilon'}(x)$ , so auch

$y \in U_\varepsilon(x_0)$  und folglich  $U_{\varepsilon'}(x) \subseteq U_\varepsilon(x_0)$ .

Für jedes  $x \in U_\varepsilon(x_0)$  existiert ein  $\varepsilon' > 0$ , so daß

$U_{\varepsilon'}(x) \subseteq U_\varepsilon(x_0)$ . Nach Definition 4 bedeutet das aber, es ist  $U_\varepsilon(x_0)$  Umgebung von  $x$ .

Wegen  $x_0 \in U_\varepsilon(x_0)$  ist nach Satz 2 natürlich  $U_\varepsilon(x_0)$  auch Umgebung von  $x_0$  selbst. Ist  $x_0$  ein beliebiger Punkt der Zahlengeraden, so gibt es für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(x_0)$ . Damit ist gesagt, daß es für jeden Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  beliebig viele  $\varepsilon$ -Umgebungen gibt. Da jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$  auch Umgebung von  $x_0$  ist, kann die Anzahl der Umgebungen von  $x_0$  natürlich nicht geringer sein. Wir bezeichnen die Menge aller Umgebungen eines Punktes  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit  $\mathcal{U}(x_0)$ .

Nunmehr beweisen wir vier Sätze, die grundlegende topologische Eigenschaften der Zahlengeraden beinhalten. Aus diesem Grunde geben wir diesen Sätzen eine besondere Bezeichnung.

#### Satz $U_1$ :

Wenn  $U$  eine Umgebung des Punktes  $x \in \mathbb{R}$  ist, so gilt  $x \in U$ . Formalisiert:

$$\forall x \forall U (x \in \mathbb{R} \wedge U \in \mathcal{U}(x) \rightarrow x \in U).$$

Beweis: Ist  $U \in \mathcal{U}(x)$ , so existiert nach Definition 4 ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , so daß  $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ . Da  $x \in U_\varepsilon(x) \subseteq U$ , folgt  $x \in U$ .

Satz  $U_2$ :

Wenn  $U$  eine Umgebung von  $x \in \mathbb{R}$  ist, und es ist  $U \subseteq U'$ , so ist auch  $U'$  Umgebung von  $x$ .

Formalisiert:

$$\forall x \forall U \forall U' (x \in \mathbb{R} \wedge U \in \mathcal{U}(x) \wedge U \subseteq U' \rightarrow U' \in \mathcal{U}(x)).$$

Beweis: Ist  $U \in \mathcal{U}(x)$ , so existiert nach Definition 4 ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , so daß  $x \in U_\varepsilon(x) \subseteq U$ . Da  $U \subseteq U'$  ist, gilt natürlich auch:  $U_\varepsilon(x) \subseteq U'$ . Folglich ist nach Definition 4 auch  $U'$  Umgebung von  $x$ , d. h.  $U' \in \mathcal{U}(x)$ .

Satz  $U_3$ :

Wenn  $U_1, U_2$  Umgebungen von  $x \in \mathbb{R}$  sind, so ist auch ihr Durchschnitt,  $U_1 \cap U_2$ , Umgebung von  $x$ .

Formalisiert:

$$\forall x \forall U_1 \forall U_2 (x \in \mathbb{R} \wedge U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) \rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)).$$

Beweis: Da  $U_1$  Umgebung von  $x$  ist, existiert nach Definition 4 ein  $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon_1 > 0$ , so daß  $U_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U_1$ .

Da  $U_2$  Umgebung von  $x$  ist, existiert nach Definition 4 ein  $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ , so daß  $U_{\varepsilon_2}(x) \subseteq U_2$ .

Setzen wir  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ , so ist  $U_\varepsilon(x) \subseteq U_1$  und  $U_\varepsilon(x) \subseteq U_2$  und somit  $U_\varepsilon(x) \subseteq U_1 \cap U_2$ . Nach Definition 4 ist also  $U_1 \cap U_2$  Umgebung von  $x$ .

Satz  $U_4$ :

Zu jeder Umgebung  $U$  eines Punktes  $x \in \mathbb{R}$  existiert eine weitere Umgebung  $W$  von  $x$  derart, daß  $U$  Umgebung jedes Punktes  $y \in W$  ist.

Formalisiert:

$$\forall x \forall U \exists W \forall y (x \in \mathbb{R} \wedge U, W \in \mathcal{U}(x) \wedge y \in W \rightarrow U \in \mathcal{U}(y))$$

Beweis: Da  $U$  Umgebung von  $x$  ist, existiert nach Definition 4 ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , so daß  $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ . Nach Satz 2 ist  $U_\varepsilon(x)$  Umgebung jedes Punktes  $y \in U_\varepsilon(x)$  und natürlich auch Umgebung von  $x$ . Wegen  $U_\varepsilon(x) \subseteq U$  ist nach Satz  $U_2$  auch  $U$  Umgebung jedes Punktes  $y \in U_\varepsilon(x)$ .



Setzen wir  $W := U_{\mathcal{E}}(x)$ , so erfüllt  $W$  gerade die im Satz  $U_4$  geforderten Bedingungen.

Fortsetzung folgt!

Karl Herrmann  
Lektor im Bereich  
Theoretische Mathematik

## Jahresinhalt 1980

| Heft |                                                                                                                | Seite |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1    | A. Jeschag: Aller Anfang ist schwer oder: meine ersten Studienwochen                                           | 2     |
|      | G. Lischke, B. Goetze: Mathematik und Erkenntnistheorie (II) Die Rolle der Abstraktion in der Mathematik       | 5     |
| 2    | E. Girlich: Ganzzahlige lineare Optimierungsaufgaben                                                           | 18    |
| 3    | F. Liese: Zufällige Ereignisse und Zufallsgrößen                                                               | 34    |
|      | G. Lischke, B. Goetze: Mathematik und Erkenntnistheorie (III) Aufgaben und Methoden des Mathematikers          | 39    |
|      | G. Wechsung: Abbildungen und Funktionen                                                                        | 44    |
| 4    | H. Hauschild: Eulerscher Polyedersatz und reguläre Polyeder                                                    | 50    |
|      | F. Liese: Eine Einführung in die Erneuerungstheorie                                                            | 53    |
|      | G. Lischke, B. Goetze: Mathematik und Erkenntnistheorie (IV und Schluß) Mathematik und bürgerliche Philosophie | 60    |
| 5    | H. Hauschild: Stichprobe und Grundgesamtheit                                                                   | 66    |
|      | Aufgaben der Bezirksolympiade 1980 (Klassenstufe 11/12)                                                        | 69    |
|      | K. Hoffrichter: Mathematiklager des Bezirkes Gera Winter 1980                                                  | 75    |
|      | Zentrale Lösungsvorschläge für die Aufgaben der Bezirksolympiade                                               | 76    |
| 6    | O. Stamford: Muhammad ibn Musa al-Huwarizmi                                                                    | 82    |
|      | B. Hanisch: Berechnung und Eigenschaften von Primzahlzwillingen                                                | 87    |
|      | Lösungen der Bezirksolympiade (Fortsetzung)                                                                    | 91    |
| 7\8  | B. Hanisch: Einführung der komplexen Zahlen                                                                    | 98    |
|      | C. Mitzenheim: DDR-Olympiade Junger Mathematiker                                                               | 105   |
|      | Aufgaben der DDR-Olympiade 1980 (Klassenstufe 11/12)                                                           | 106   |
|      | Schwedler: Über die Anwendung geometrischer Transformationen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben          | 112   |
|      | Lösungen der Aufgaben der DDR-Olympiade                                                                        | 120   |
| 9    | E. Creutzburg: Wie kann man Information messen?                                                                | 130   |
| 10   | U. Zähle: Ungleichungen für konvexe Funktionen                                                                 | 146   |
|      | E. Creutzburg: Wie kann man Information messen? (Fortsetzung und Schluß)                                       | 149   |

| Heft |                                                                  | Seite |
|------|------------------------------------------------------------------|-------|
| 11   | B. Hanisch: Anschauliche Einführung hyperkomplexer Zahlensysteme | 162   |
|      | A. Kleinwächter: Relationen, Äquivalenzrelationen, Halbordnungen | 167   |
| 12   | A. Kleinwächter: Der Wohlordnungssatz                            | 178   |
|      | B. Hanisch: Hyperkomplexe Zahlen (Fortsetzung)                   | 185   |

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“

**Leiter:** Heiner Schwulow

**Chefredakteur:** Andreas Kleinwächter

**Stellvertretender Chefredakteur:** Andreas Jeschag

**Redaktion:** H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein

**Anschrift:** WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

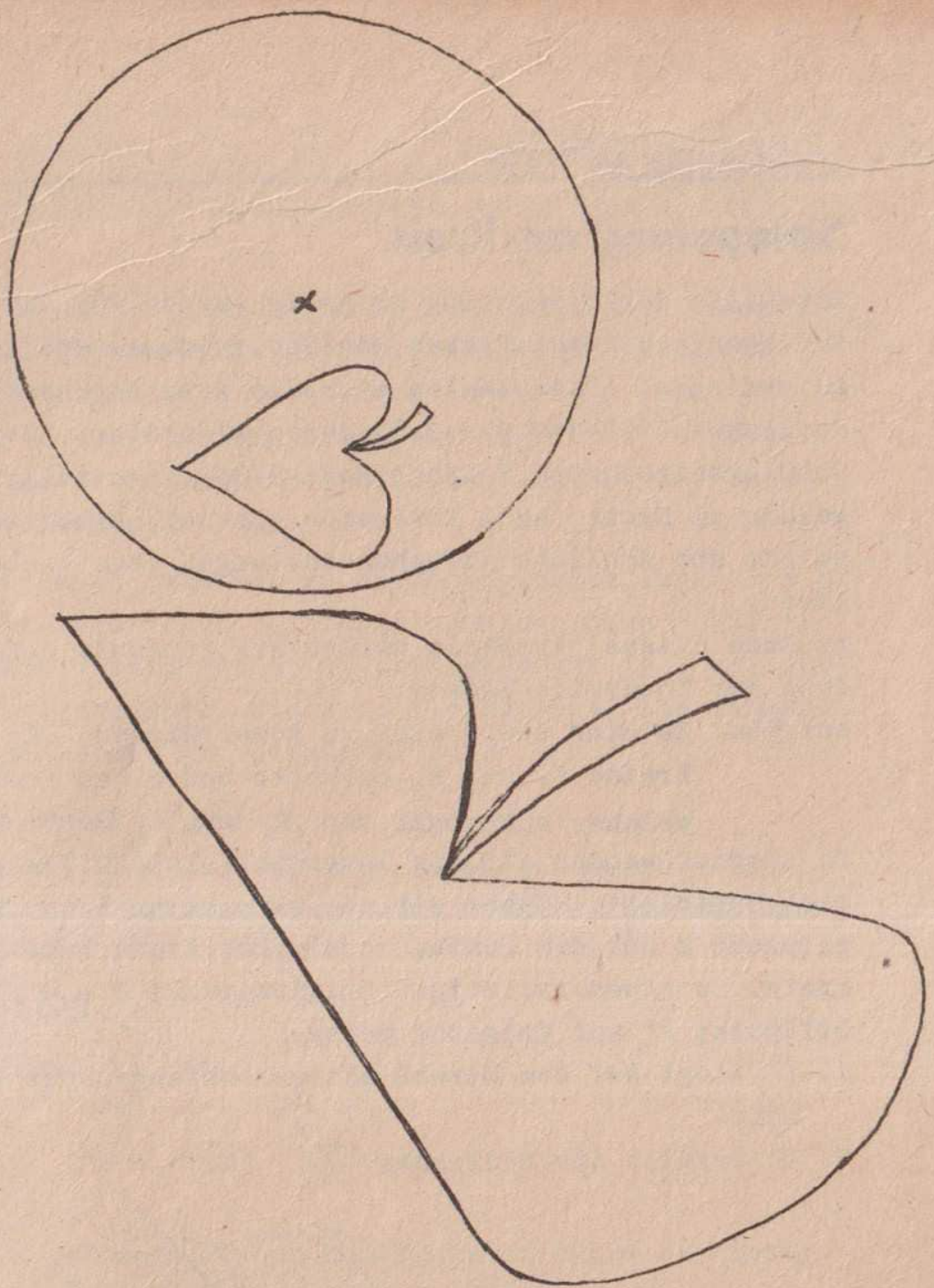
**Konto:** Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

**Redaktionsschluß:** 10. 1. 1981





3

81

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom  
Jugendobjekt Studienvor-  
bereitung-Studienwerbung  
der Sektion Mathematik  
an der Friedrich-Schiller-  
Universität Jena

15. Jahrgang  
Index 33873  
Sonderpreis für DDR:  
0.20 M



## Spiegelung am Kreis

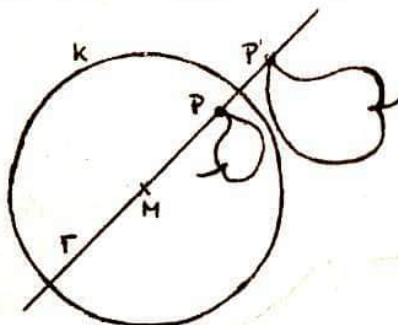
Mit Hilfe der Spiegelung am Kreis ist es für eine ganze Reihe von Konstruktionsaufgaben möglich, einfache und elegante Lösungen zu gewinnen. Dazu zählen auch die zehn Berührungsprobleme des Apollonius (262-190 v.u.Z.), deren elementare Lösungen in der Schülerzeitschrift "alpha" Heft 5/80 dargestellt sind. Die Spiegelung am Kreis, auch Inversion genannt, ermöglicht es uns, solche und ähnliche Aufgabenstellungen ohne viele Irrwege zu lösen.

Am Ende dieses Artikels wollen wir folgende Aufgabe mit Verwendung der Inversion lösen:

Aufgabe: Es sind die Kreise zu konstruieren, die zwei gegebene Kreise  $K_1$  und  $K_2$  berühren und einen festen Punkt  $M$ , welcher außerhalb von  $K_1$  und  $K_2$  liegt, enthalten.

Zu Beginn werden wir die Inversion als Abbildung der Ebene auf sich definieren. Geben wir uns also einen Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r$  vor. Der Kreis  $k$  heißt Inversionskreis. Zu einem beliebigen Originalpunkt  $P \neq M$  findet man den Bildpunkt  $P'$  auf folgende Weise:

1.  $P'$  liegt auf dem Strahl mit dem Anfangspunkt  $M$ , der  $P$  enthält.
2.  $P'$  erfüllt die Bedingung  $|\overline{MP}| \cdot |\overline{MP'}| = r^2$ .



Aus der Definition dieser Abbildung folgt, daß auch der Punkt  $P'$  bei der Inversion in den Punkt  $P$  übergeht. Mit anderen Worten:  $P$  und  $P'$  wurden vertauscht. Die Punkte des Inversionskreises  $k$  werden auf sich abgebildet. Innere Punkte von  $k$  werden auf äußere Punkte abgebildet und umgekehrt. Aus dem zweiten Teil der De-

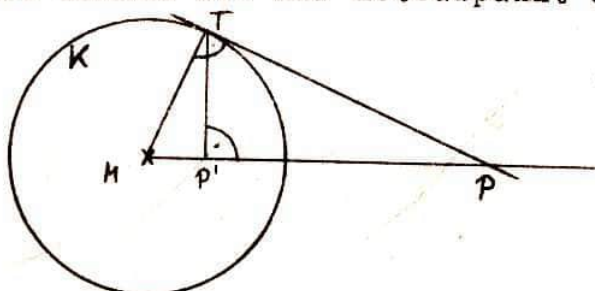


definition folgt, daß  $|\overline{MP}| < r$  nur dann gilt, wenn  $|\overline{MP'}| > r$  erfüllt ist.

Der Punkt  $M$ , der nach Definition keinen Bildpunkt hat, wird in einen unendlich entfernten Punkt abgebildet. Nimmt man nun zu der Punktmenge der Ebene diesen unendlich entfernten Punkt hinzu, so kann jedem Punkt genau ein Bildpunkt zugeordnet werden. Wir vereinbaren, daß der unendlich entfernte Punkt in der Punktmenge jeder Geraden enthalten ist.

Nun wollen wir überlegen, wie man zu einem gegebenen Punkt  $P \neq M$  sein Bild  $P'$  konstruieren kann. Wir unterscheiden dazu 3 Fälle:

- $\alpha$ ) Ist  $P$  ein innerer Punkt von  $k$ , so errichten wir in  $P$  auf der Geraden  $MP$  die Senkrechte, die  $k$  in  $T$  schneidet. Die Tangente an  $k$  in  $T$  schneidet die Gerade  $MP$  in  $P'$ .
- $\rho$ ) Liegt  $P$  auf  $k$ , so ist  $P = P'$ .
- $\gamma$ ) Ist  $P$  ein äußerer Punkt von  $k$ , dann legen wir durch  $P$  eine Tangente an  $k$ . Von dem Berührungspunkt  $T$  fallen wir das Lot auf die Gerade  $MP$ . Der Lotfußpunkt ist  $P'$ .



Den Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion führe der Leser selbst. (z.z.  $P'$  erfüllt die Bedingungen 1. und 2.)

Im folgenden untersuchen wir, wie Geraden und Kreise bei der Inversion abgebildet werden. Aus der Definition der Inversion folgt unmittelbar der

**S a t z 1.** Jede Gerade durch den Mittelpunkt  $M$  des Inversionskreises wird auf sich abgebildet.

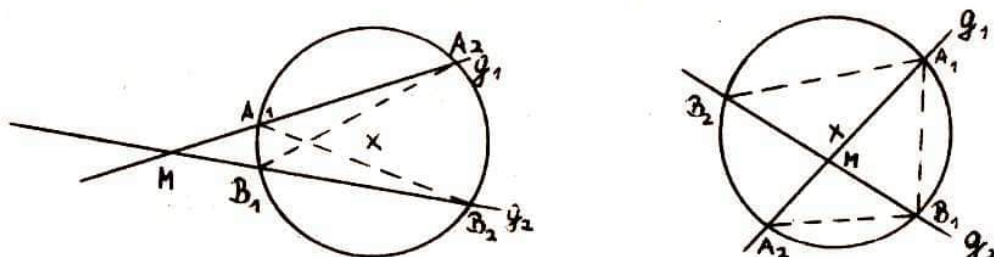
Es ist nützlich zu überlegen, welche Teile der Geraden auf welche Teile abgebildet werden (Strahl, Strecke, Punkt  $M$  und der unendlich entfernte Punkt).

Wie werden aber nun Geraden abgebildet, die  $M$  nicht enthalten?

Um diese Frage zu beantworten, erinnern wir uns an den Sekanten-

Satz und dessen Umkehrung:

Die Geraden  $g_1$  und  $g_2$  schneiden sich im Punkt  $M$ . Weiterhin haben die Geraden mit einem Kreis die Punkte  $A_1$  und  $A_2$  bzw.  $B_1$  und  $B_2$  gemeinsam. Dann gilt  $|\overline{MA_1}| \cdot |\overline{MA_2}| = |\overline{MB_1}| \cdot |\overline{MB_2}|$ .

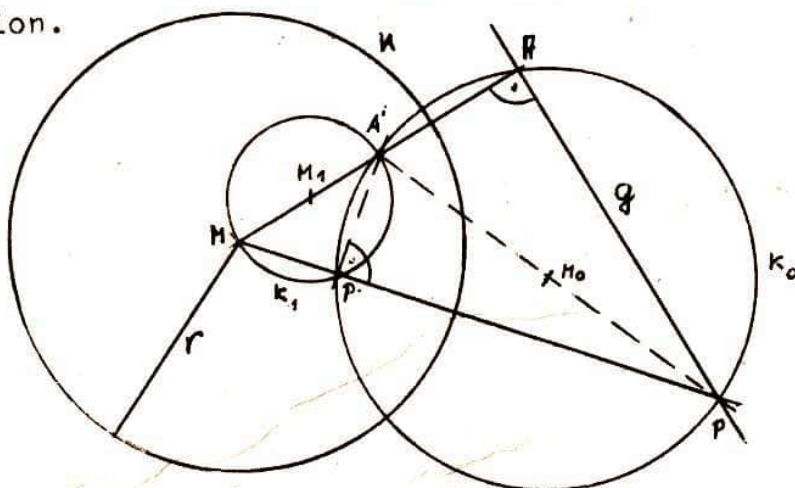


Der Satz folgt unmittelbar aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $\triangle MA_1B_2$  und  $\triangle MA_2B_1$ . Die Umkehrung des Satzes zeigt man durch einen indirekten Beweis.

Nun kann folgender interessante Satz bewiesen werden:

**Satz 2.** Jede Gerade, die den Mittelpunkt  $M$  des Inversionskreises nicht enthält, wird auf einen Kreis durch  $M$  abgebildet.

**Beweis:** Gegeben ist eine Gerade  $g$  mit  $M \notin g$ . Der Fußpunkt des Lotes von  $M$  auf  $g$  sei  $A$ . Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt  $P \neq A$  auf  $g$ .  $A'$  und  $P'$  sind die zugehörigen Bildpunkte bei der betrachteten Inversion.



Da  $|\overline{MA}| \cdot |\overline{MA'}| = |\overline{MP}| \cdot |\overline{MP'}| = r^2$ , folgt wegen der Umkehrung des Sekantensatzes, daß  $A, A', P$  und  $P'$  auf einem Kreis  $k_0$  mit dem Mittelpunkt  $M_0$  liegen. Nach Umkehrung des Satzes von Thales ist  $A'P$  ein Durchmesser von  $k_0$ . Es folgt  $\angle PP'A' = 90^\circ$ . Wir konstruieren den Kreis  $k_1$ , der die Punkte  $M, A'$  und  $P'$  enthält. Der



Mittelpunkt  $M_1$  von  $k_1$  halbiert die Strecke  $\overline{MA'}$ . (Begründe diese Aussage selbst!) Der Kreis  $k_1$  enthält die Bildpunkte  $A'$  und  $P'$ . Weiterhin ist der Kreis  $k_1$  von der Lage von  $P$  auf  $g$  unabhängig. Durchläuft der Punkt  $P$  alle Punkte der Geraden, so durchläuft  $P'$  alle Punkte des Kreises  $k_1$ . (Die Gerade  $g$  enthält nach Vereinbarung den unendlich entfernten Punkt, der auf  $M$  abgebildet wird.) Also wird  $g$  auf  $k_1$  abgebildet und umgekehrt.

Der Leser entwerfe für die Fälle, daß  $g$  Tangente bzw. Sekante ist, die zugehörigen Beweisfiguren.

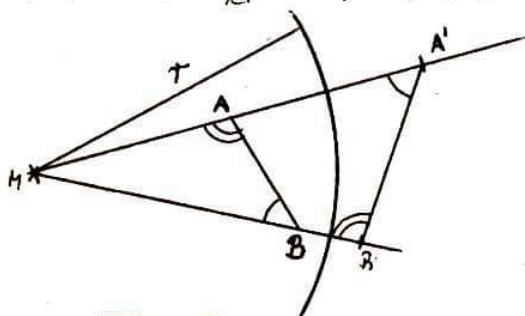
Über die Abbildung von Kreisen in allgemeiner Lage gibt folgender Satz Auskunft:

**Satz 3:** Kreise, die nicht den Mittelpunkt  $M$  des Inversionskreises enthalten, werden bei der Inversion wieder auf Kreise abgebildet.

Zum Beweis benötigen wir das folgende

**Lemma:** Bei einer Inversion mit dem Mittelpunkt  $M$  des Inversionskreises werden die Punkte  $A$  und  $B$  auf die Punkte  $A'$  und  $B'$  abgebildet. Dann sind die Dreiecke  $\triangle MAB$  und  $\triangle MA'B'$  ähnlich, also

$$\angle MAB \cong \angle MB'A' \text{ und} \\ \angle MBA = \angle MA'B'.$$



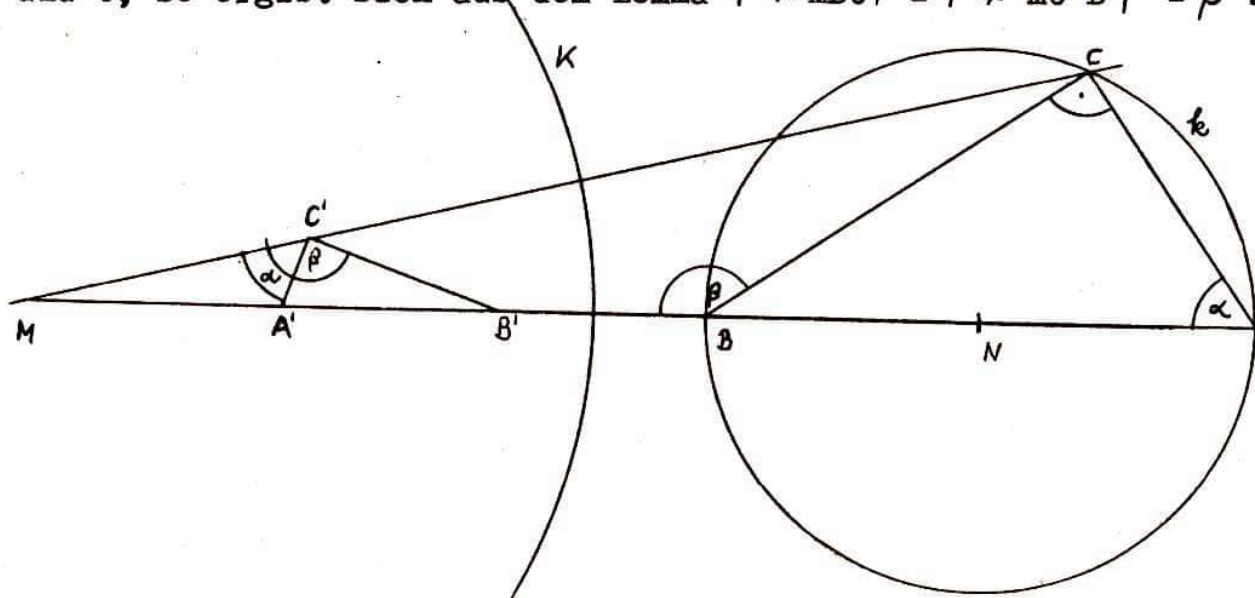
**Beweis.** Aus  $|\overline{MA}| \cdot |\overline{MA'}| = |\overline{MB}| \cdot |\overline{MB'}| = r^2$  folgt  $\frac{|\overline{MA}|}{|\overline{MB}|} = \frac{|\overline{MB'}|}{|\overline{MA'}|}$ .

Weiterhin haben die zu untersuchenden Dreiecke den Winkel gemeinsam, der von den Strahlen durch  $A$  bzw.  $B$  mit dem Anfangspunkt  $M$  gebildet wird. Also sind die Dreiecke  $\triangle MAB$  und  $\triangle MA'B'$  ähnlich.

**Zum Beweis von Satz 3:** Der Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $N$  soll am Kreis  $K$  mit dem Mittelpunkt  $M$  gespiegelt werden. Die Gerade  $MN$  schneidet  $k$  in den Punkten  $A$  und  $B$ .  $A'$  und  $B'$  sind die Bild-

punkte bei der Inversion an  $K$ . Wir betrachten einen von  $A$  und  $B$  verschiedenen Punkt  $C$  auf  $k$ .  $C'$  ist sein Bild. Wendet man das Lemma auf die Punkte  $A$  und  $C$  an, so erhält man

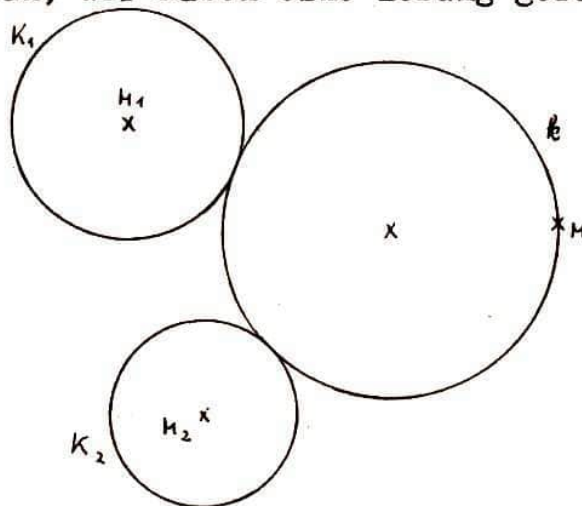
$|\angle MAC| = |\angle MC'A'| = \alpha$ . Betrachtet man nun die Punkte  $B$  und  $C$ , so ergibt sich aus dem Lemma  $|\angle MBC| = |\angle MC'B'| = \beta$ .



Da  $C \in k$  ist, folgt  $|\angle BCA| = 90^\circ$ . Über den Außenwinkelsatz erhalten wir die Beziehung  $\beta - \alpha = 90^\circ$ . Wenden wir dieses Ergebnis auf das Dreieck  $\triangle A'B'C'$ , so bekommen wir  $|\angle A'C'B'| = 90^\circ$ . Nach Umkehrung des Satzes von Thales liegt  $C'$  auf einem Kreis  $k_1$  und  $\overline{A'B'}$  als Durchmesser. Durchläuft nun  $C$  alle Punkte von  $K$ , dann durchläuft  $C'$  alle Punkte von  $k_1$ . Also ist  $k_1$  das Bild des Kreises  $k$ . (Ist  $N'$  der Mittelpunkt von  $k_1$ ?)

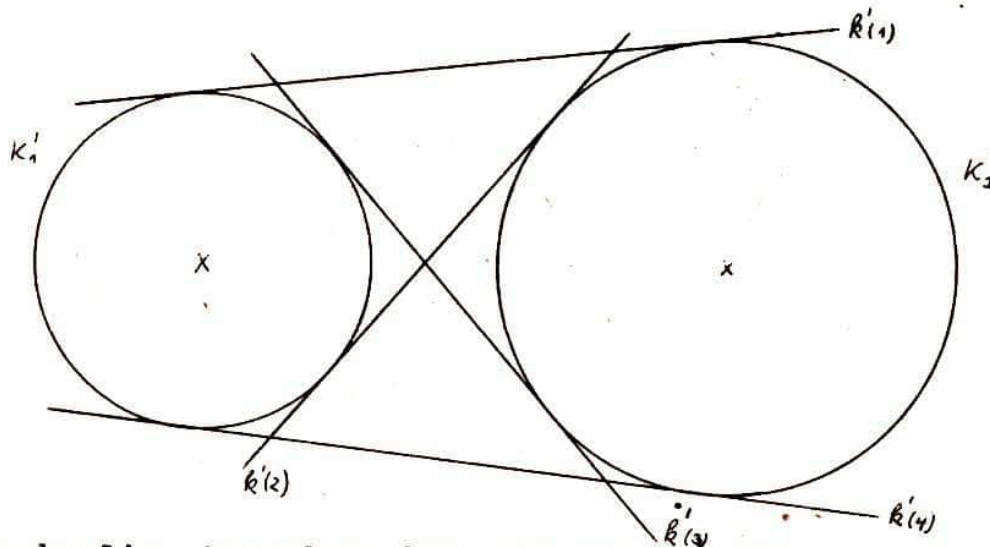
Wenden wir uns nun der anfangs betrachteten Aufgabe zu:

Nehmen wir an, wir haben eine Lösung gefunden.





Bilden wir die Figur mittels einer beliebigen Inversion mit dem Mittelpunkt des Inversionskreises in  $M$  ab, so entstehen aus den Kreisen  $K_1$  und  $K_2$  die Kreise  $K'_1$  und  $K'_2$ . Der gesuchte Kreis  $k$  wird auf eine Gerade abgebildet. Damit haben wir ein neues Berührungsproblem zu lösen, wofür wir aber schon eine Konstruktion kennen: Zu 2 gegebenen Kreisen  $K'_1$  und  $K'_2$  sind die gemeinsamen Tangenten zu konstruieren.



Durch nochmalige Anwendung der Inversion erhält man die gesuchten Kreise aus den gemeinsamen Tangenten von  $K'_1$  und  $K'_2$ . Eine genaue Diskussion zeigt, daß es je nach Lage der Kreise  $K_1$  und  $K_2$  unendlich viele 4, 3, 2, 1 oder keinen berührenden Kreis  $K$  geben kann.

A u f g a b e: Drei Kreise schneiden sich alle in einem Punkt  $O$ . Es ist gefordert, alle Kreise zu konstruieren, die die Kreise  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  berühren.

#### Literatur:

- /1/ Bakelmann: Spiegelung am Kreis, Leipzig 1976
- /2/ Böhm u.a.: Mathematik für Lehrer, Bd. 7, Berlin 1975, S.156-162
- /3/ Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. IV, Berlin 1969, S. 164-167

In /3/ wird mit Hilfe der Inversion der Satz von Mohr-Mascheroni bewiesen, der besagt, daß jede Konstruktionsaufgabe, die mit Zirkel und Lineal lösbar ist, unter alleiniger Verwendung des Zirkels lösbar ist.

Peter-Michael Schmidt  
Forschungsstudent

## Preisaufgaben

N 13 Sei  $S$  ein innerer Punkt des Dreiecks  $ABC$ . Der Flächeninhalt der Dreiecke  $ABS$ ,  $BCS$  und  $CAS$  sei gleich. Man zeige, daß  $S$  der Schwerpunkt des Dreiecks  $ABC$  ist.

N 14 Auf der Seite  $BC$  des Quadrates  $ABCD$  liege die Strecke  $BE$  der Länge  $\frac{a}{3}$  und auf der Verlängerung der Seite  $CD$  liege die Strecke  $CF$  der Länge  $\frac{a}{2}$ . Man zeige, daß der Schnittpunkt der Geraden  $AE$  und  $BF$  auf dem Umkreis des Quadrates  $ABCD$  liegt.  $a$  sei die Seitenlänge des Quadrates.

N 15 Wieviele fünfstellige Zahlen gibt es, die durch 3 teilbar sind und deren Dezimaldarstellung mindestens eine Ziffer 6 enthält?

N 16 Im gleichseitigen konvexen Sechseck  $ABCDEF$  sei die Summe der Innenwinkel in den Ecken  $A, C$  und  $E$  gleich der Summe der Innenwinkel in den Punkten  $B, D$  und  $F$ . Man zeige, daß die Innenwinkel gegenüberliegender Ecken  $A$  und  $B$ ,  $B$  und  $E$ ,  $C$  und  $F$ , gleich sind.

N 17 In einem Kreis sei ein Sechseck  $ABCDEF$  einbeschrieben. Die Länge der Seiten  $AB, CD$  und  $EF$  sei gleich der Länge des Radius des Kreises. Man zeige, daß die Mittelpunkte der drei übrigen Seiten des Sechsecks Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind.

N 18 Доказать, что из медиан всякого треугольника можно построить новый треугольник. Доказать также, что если  $H_1$  - исходный треугольник,  $H_2$  - треугольник, построенный из медиан треугольника  $H_1$ , а  $H_3$  - треугольник, построенный из медиан треугольника  $H_2$ , то треугольники  $H_1$  и  $H_2$  подобны.

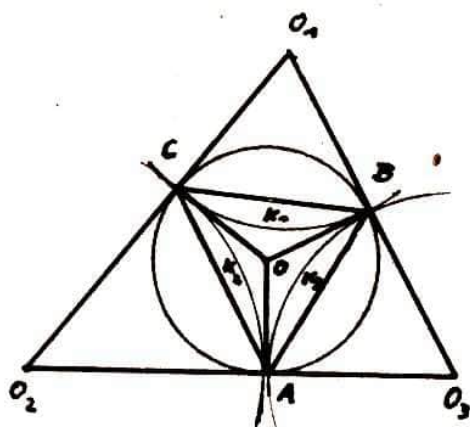
Einsendeschluß: 15.6.1981



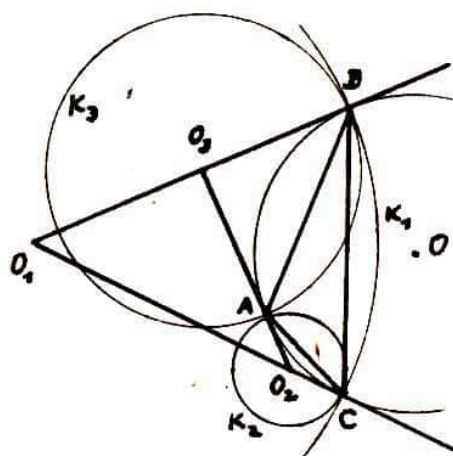
## Lösungen

### Aufgabe M 43

Seien  $O_1, O_2$  und  $O_3$  die Zentren der drei Kreise, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Die Tangenten an die gesuchten Kreise in den Punkten A, B und C schneiden sich in einem Punkt O. Weiterhin sind OA und OB als Abschnitte zweier sich schneidender Tangenten eines Kreises, vom Schnittpunkt bis zum Berührungspunkt, gleich. Analog ist  $OB = OC$  und  $OA = OC$ . Somit ist O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. (Zeichnung 1)



Zeichnung 1



Zeichnung 2

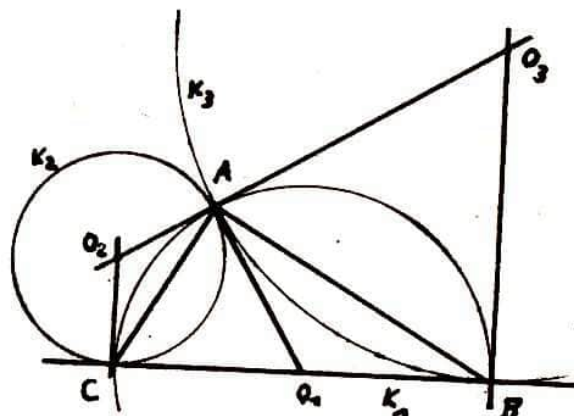
Die Seiten des Dreiecks  $O_1O_2O_3$  (bzw. ihre Verlängerungen) gehen durch die Punkte A, B, C und stehen senkrecht auf den Strecken OA, OB bzw. OC. Das heißt, die Bedingungen der Aufgabe erfüllen nur solche Kreise, deren Mittelpunkte man wie folgt erhält:

Man konstruiert den Umkreis des Dreiecks ABC und dessen Tangenten in den Punkten A, B und C. Die Schnittpunkte dieser Tangenten sind die Mittelpunkte der gesuchten Kreise. Ist das Dreieck ABC spitzwinklig, dann berühren sich  $K_1, K_2$  und  $K_3$  paarweise von außen. (Zeichnung 1)

Ist das Dreieck ABC stumpfwinklig, dann berühren sich zwei Kreise von außen, den dritten berühren diese von innen. (Zeichnung 2)

Ist das Dreieck rechtwinklig, dann hat die Aufgabe keine Lösung. Man kann sagen, daß in diesem Fall ein Kreis zu einer Geraden entartet. Die beiden übrigen Kreise

liegen auf einer Seite der Geraden und berühren einander von außen. (Zeichnung 3)



Zeichnung 3

#### Aufgabe M 44

Sei ABCD das gegebene Trapez.

Weiter sei  $\angle EAB = \angle ABC$

und E liege auf der Verlängerung der Strecke DC. Dann ist

ABCE ein gleichschenkliges

Trapez. Durch den Schnitt-

punkt F der Diagonalen des

Trapezes ABCE verläuft die

auf dem Mittelpunkt der Strecke AB errichtete Senkrechte.

G liegt auf FC. Die Senkrechte auf AB durch F teilt

die Ebene in zwei Halbebenen. G liegt in derselben Halb-

ebene wie B. Somit ist  $BG < AG$ .

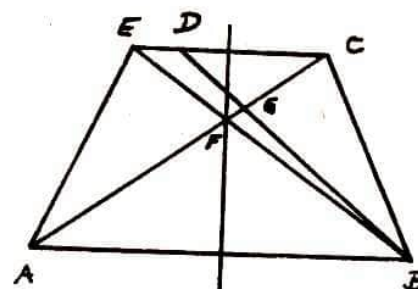
(1)

Dreiecke ABG und CDG sind ähnlich.

Aus (1) folgt  $DG < CG$

(2)

Aus (1) und (2) folgt  $BD < AC$ .



#### Aufgabe M 45

Wir setzen  $\sqrt{\frac{y+1}{x-y}} = t > 0$ .

Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \quad \text{und daraus}$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 2.$$

Wir betrachten jetzt die zwei Gleichungssysteme:



$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{\frac{y+1}{x-y}} = 1 \\ x+xy+y=7 \end{array} \right\} (1) \quad \text{und} \quad \left. \begin{array}{l} \sqrt{\frac{y+1}{x-y}} = 2 \\ x+xy+y=7 \end{array} \right\} (2)$$

Das erste System hat die zwei Lösungen:

$(-5, -3)$  und  $(3, 1)$ .

Das zweite System hat die beiden Lösungen:

$(\sqrt{10}-1, \frac{\sqrt{160}-5}{5})$  und  $(-\sqrt{10}-1, \frac{-\sqrt{160}-5}{5})$

Folglich hat das zu lösende Gleichungssystem die obigen 4 Lösungen.

#### Aufgabe M 46

Wir formen die Gleichung wie folgt um:

$$[x+2 \cos(xy)]^2 + 4 [1-\cos^2(xy)] = 0.$$

Beide Summanden sind nichtnegativ. Folglich ist  $x+2 \cos(xy) = 0$  und  $\cos^2(xy) = 1$ .

Daraus folgt  $\cos(xy) = \pm 1$ .

Im ersten Fall erhalten wir das System

$$\cos(xy) = 1, \quad x+2 \cos(xy) = 0.$$

Wir erhalten  $x = -2$  und  $y = k\pi$ , wobei  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Im zweiten Fall erhalten wir das System

$$\cos(xy) = -1, \quad x+2 \cos(xy) = 0.$$

Wir erhalten  $x=2$  und  $y=\frac{\pi}{2}(2m+1)$ , wobei  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Die Lösungen beider Systeme sind die gesuchten Lösungen der gegebenen Gleichung.

## An unsere Leser!

Aufgrund eines Versehens in der Druckerei wurden die Titelbilder der Wurzeln 12/80 und 1/81 leider vertauscht.

Wir bitten dafür um Entschuldigung.

Die Titelbilder stammen von Edgar Pforr (12/80) und Dorothea Heinrich (1/81).

## Einführung in die Topologie (II)

### 2. Topologische Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$

Alles, was wir für die Zahlengerade definiert, erläutert und bewiesen haben, kann bis auf die Ordnungseigenschaften ohne jede Schwierigkeit auf die Menge aller  $n$ -Tupel reeller Zahlen

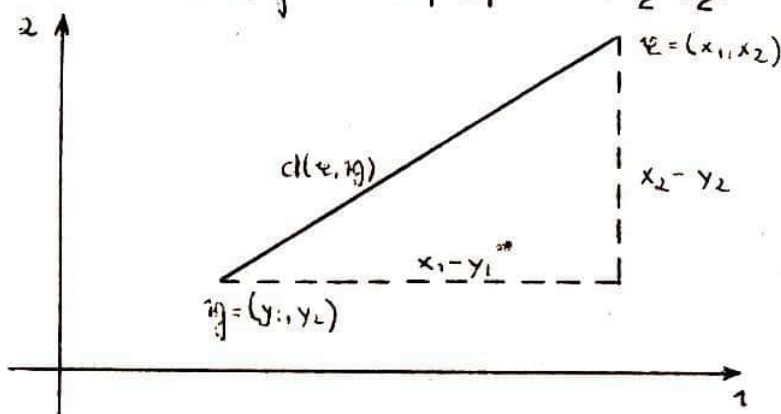
$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , den  $\mathbb{R}^n$ , übertragen werden.

Hatten wir auf der Zahlengeraden  $d(x, y) := |x - y|$  als Abstand der beiden Punkte  $x$  und  $y$  erklärt, so definieren wir den Abstand  $d(\vec{x}, \vec{y})$  zweier Punkte  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  des  $\mathbb{R}^n$  wie folgt:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Für  $n = 1$  ist  $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2} = |x_1 - y_1| = d(x_1, y_1)$ . Also enthält die Abstandsdefinition im  $\mathbb{R}^n$  den auf der Zahlengeraden definierten Abstand als Spezialfall. Für  $n = 2$  ist  $d(\vec{x}, \vec{y})$  der anschaulich gegebene Abstand zweier Punkte der Ebene:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$



Sobald im  $\mathbb{R}^n$  der Abstand  $d(\vec{x}, \vec{y})$  zweier Punkte erklärt ist, kann der Begriff der Konvergenz einer Folge  $(\vec{x}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$  von Punkten  $\vec{x}_\nu$  des  $\mathbb{R}^n$  definiert werden.

**Definition 5:** Eine Folge  $(\vec{x}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$  von Punkten des  $\mathbb{R}^n$  heißt konvergent in  $\mathbb{R}^n$  genau dann, wenn ein Punkt  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  existiert mit folgender Eigenschaft: Für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ , so daß für alle  $\nu > \nu_0$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , gilt:

$$d(\vec{x}_\nu, \vec{a}) = \sqrt{(x_1^{(\nu)} - a_1)^2 + (x_2^{(\nu)} - a_2)^2 + \dots + (x_n^{(\nu)} - a_n)^2} < \varepsilon.$$



Genau wie auf der Zahlengeraden ist auch hier der Grenzwert  $a$  einer konvergenten Folge  $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  eindeutig bestimmt.

Auf der Zahlengeraden hatten wir für  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(x_0)$  eines Punktes  $x_0 \in \mathbb{R}$  durch

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge |x - x_0| < \varepsilon\}$$

definiert. Völlig analog definieren wir die Begriffe " $\varepsilon$ -Umgebung"  $U_\varepsilon(x_0)$  und "Umgebung"  $U$  im  $\mathbb{R}^n$ :

**Definition 6:** Sind  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben, so heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x : x \in \mathbb{R}^n \wedge d(x, x_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2} < \varepsilon$$

eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ .

**Definition 7:** Eine Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt Umgebung des Punktes  $x \in \mathbb{R}^n$  genau dann, wenn ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  existiert mit  $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ .

Auch im  $\mathbb{R}^n$  gilt der Satz 2: Jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ ,  $U_\varepsilon(x_0)$ , ist Umgebung  $U$  jedes ihrer Punkte.

Die vier grundlegenden topologischen Eigenschaften  $U_1$  bis  $U_4$  gelten für den  $\mathbb{R}^n$  ebenso wie für die Zahlengerade. Die Beweise dieser vier Sätze für den  $\mathbb{R}^n$  erhält man aus den Beweisen für die Zahlengerade, indem dort lediglich  $x$  durch  $x$  und  $y$  durch  $y$  ersetzt werden.

### 3. Topologische Eigenschaften metrischer Räume

Wir bemerken, daß sich der Begriff der Konvergenz einer Folge  $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  von Elementen einer Menge  $E$  in jeder Menge  $E$  erklären läßt, in welcher ein Abstand  $d(x, y)$  zwischen je zwei beliebigen Elementen  $x, y \in E$  definiert ist. Mit Hilfe des Abstandes lassen sich auch die Begriffe " $\varepsilon$ -Umgebung" und "Umgebung" definieren und damit wiederum die Sätze  $U_1$  bis  $U_4$  formulieren und beweisen. Offensichtlich kommen die grundlegenden topologischen Eigenschaften  $U_1$  bis  $U_4$  nicht nur der Zahlengeraden und dem  $\mathbb{R}^n$  zu, sondern auch noch allgemeineren Mengen.

Betrachten wir den auf der Zahlengeraden definierten Abstand  $d(x, y) = |x - y|$  zweier Punkte  $x, y \in \mathbb{R}$  etwas näher. Durch  $d(x, y) = |x - y|$  wird je zwei Elementen  $x, y \in \mathbb{R}$  eindeutig eine

neue reelle Zahl zugeordnet. Es ist  $d(x,y) = |x-y|$  eine eindeutige Abbildung (Funktion) von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  ( $D(d) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $W(d) \subseteq \mathbb{R}$ ) mit folgenden Eigenschaften:

- a) Für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  ist  $|x-y| \geq 0$ , und es ist  $|x-y| = 0$  genau dann, wenn  $x=y$  gilt.
- b) Für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $|x-y| = |y-x|$ .
- c) Für jedes  $x, y, z \in \mathbb{R}$  gilt:  $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$

Die Ungleichung unter c) ist eine elementare Folgerung aus der Dreiecksungleichung:

$$|x-y| = |x-z + z-y| \leq |x-z| + |z-y|.$$

Wegen ihrer geometrischen Bedeutung im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  wird diese Ungleichung ebenfalls Dreiecksungleichung genannt.

Auch der im  $\mathbb{R}^n$  definierte Abstand zweier Punkte  $\epsilon, \eta \in \mathbb{R}^n$ ,

$$d(\epsilon, \eta) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

ist eine eindeutige Abbildung von  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$  mit den Eigenschaften a) bis c):

- a) Wie man sofort erkennt, gilt für jedes  $\epsilon, \eta \in \mathbb{R}^n$ :

$$d(\epsilon, \eta) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \geq 0,$$

und es ist  $d(\epsilon, \eta) = 0$  genau dann, wenn  $\epsilon = \eta$ , d. h.  $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n$  ist.

- b) Für jedes  $\epsilon, \eta \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\begin{aligned} d(\epsilon, \eta) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} \\ &= d(\eta, \epsilon). \end{aligned}$$

- c) Für jedes  $\epsilon, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\begin{aligned} d(\epsilon, \eta) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + \dots + (z_n - y_n)^2} \\ &= d(\epsilon, \zeta) + d(\zeta, \eta). \end{aligned}$$

Der Beweis der hier angegebenen Dreiecksungleichung für den im  $\mathbb{R}^n$  definierten Abstand ist nicht ganz einfach und an dieser Stelle unangebracht.



Diese Erkenntnisse legen die folgende Definition nahe:

**Definition 8:** Eine Menge  $E$  heißt ein metrischer Raum genau dann, wenn eine eindeutige Abbildung  $d$  von  $E \times E$  in  $\mathbb{R}$  definiert werden kann, die folgende Eigenschaften besitzt:

- a) Für jedes  $x, y \in E$  ist  $d(x, y) \geq 0$ , und es ist  $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ .
- b) Für jedes  $x, y \in E$  gilt:  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- c) Für jedes  $x, y, z \in E$  gilt:  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Wir nennen die Abbildung  $d$  eine Metrik oder Abstandsfunktion in  $E$  und den Wert  $d(x, y) \in \mathbb{R}$  den Abstand zwischen den Punkten  $x$  und  $y$ . Die Zahlengerade und der  $\mathbb{R}^n$  erweisen sich somit als metrische Räume mit  $d(x, y) = |x - y|$  bzw.

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Ist die Menge  $E$  ein metrischer Raum, so läßt sich die Konvergenz einer Folge  $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$  von Elementen aus  $E$  wie folgt definieren:

**Definition 9:** Eine Folge  $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$  von Elementen aus  $E$  heißt konvergent in  $E$  genau dann, wenn ein  $a \in E$  existiert mit folgender Eigenschaft: Für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ , so daß für alle  $\nu > \nu_0$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , gilt:  $d(x_\nu, a) < \varepsilon$ .

Wir sagen dann, die Folge  $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$  besitzt den Grenzwert  $a$  und schreiben:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = a.$$

In jedem metrischen Raum ist wie auf der Zahlengeraden und im  $\mathbb{R}^n$  der Grenzwert  $a$  einer konvergenten Folge  $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$  eindeutig bestimmt.

Die Begriffe " $\varepsilon$ -Umgebung" und "Umgebung" definieren wir in einem metrischen Raum  $E$  wie auf der Zahlengeraden und wie im  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 10:** Sind  $x_0 \in E$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben, so heißt

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x : x \in E \wedge d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ .

**Definition 11:** Eine Menge  $U \subseteq E$  heißt Umgebung des Punktes  $x \in E$  genau dann, wenn ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  existiert mit  $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ .

Auch in einem beliebigen metrischen Raum  $E$  gilt: Jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0 \in E$ ,  $U_\varepsilon(x_0)$ , ist Umgebung jedes ihrer Punkte.

Jetzt lassen sich die vier grundlegenden topologischen Eigenschaften  $U_1$  bis  $U_4$  für jeden metrischen Raum formulieren und genau so beweisen wie für die Zahlengerade. Somit erweisen sich die Sätze  $U_1$  bis  $U_4$  als Folgerungen aus den in Definition 8 angegebenen Grundeigenschaften des metrischen Raumes.

Fortsetzung folgt!

Karl Herrmann  
Lektor im Bereich  
Theoretische Mathematik

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“

**Leiter:** Heiner Schwulow

**Chefredakteur:** Andreas Kleinwächter

**Stellvertretender Chefredakteur:** Andreas Jeschag

**Redaktion:** H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein

**Anschrift:** WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

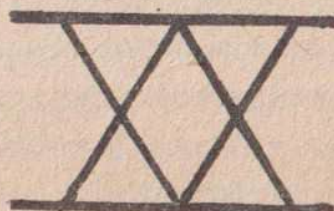
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

**Redaktionsschluß:** 24.2.1981

**Titelbild:** Martina Lutz





4

81

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom  
Jugendobjekt Studienvor-  
bereitung-Studienwerbung  
der Sektion Mathematik  
an der Friedrich-Schiller-  
Universität Jena

15. Jahrgang  
Index 33873  
Sonderpreis für DDR:  
0,20 M



### Jugendobjekt „Programmpaket Statistik“

Die Aufgabenstellung des Jugendobjektes ist eng mit der zunehmenden Anwendung mathematischer Methoden in vielen Bereichen der Wissenschaft, Technik und Volkswirtschaft verbunden. In vielen Problemen ist ein deterministischer Zusammenhang interessant, aber die Aufdeckung der Gesetzmäßigkeiten wird durch zufällige Störungen in Versuchs- und Meßreihen erschwert. Eine Lösung der Aufgabe ist dann nur mit statistischer Analyse möglich. Studenten und junge Wissenschaftler der Sektion Mathematik erstellen deshalb Programme, so daß die Rechentechnik als wichtiges Hilfsmittel angewandt werden kann.

Bei dem Begriff "Statistik" denken wir wohl zuerst an die Erfassung, Zusammenstellung und Wiedergabe von Zahlenmaterial. Diese beschreibende Funktion kann aber durch einen theoretischen Aspekt, der mathematischen Statistik, wissenschaftlich ergänzt werden. Es wird dadurch möglich, die beobachteten Ergebnisse zu verallgemeinern und aussagekräftige Schlußfolgerungen zu gestatten.

Wir betrachten in einem Schraubenkombinat die Aufgabenstellung: "Es ist zu untersuchen, ob sich die Produktion einer Schraubensorte durch zwei Betriebsteile hinsichtlich der Qualitätskennziffer "Zugfestigkeit" unterscheidet!"

Die Notwendigkeit einer statistischen Analyse ergibt sich aus der Zerstörung des Erzeugnisses bei der Kontrollmessung. Wir können also nur eine Auswahl der Produktion untersuchen. In enger Zusammenarbeit mit dem Praxispartner abstrahieren wir die konkrete Erscheinung, d. h., wir suchen ein Modell, das den mathematischen Zusammenhang möglichst gut beschreibt.

Wir teilen die Meßskala in Intervalle (Klassen) ein. Die relative Häufigkeit, daß ein Meßergebnis in eine Klasse fällt, hängt von der Auswahl dieser Klasse ab. Bei zunehmender Zahl von Meßergebnissen gelangen wir auf diese Weise im klassischen Sinne zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung der Meßergebnisse, da die relative Häufigkeit gegen die Wahrscheinlichkeit strebt. Mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden gelingt es, diese Verteilung durch geeignete Kenngrößen (z. B. Mittelwert) zu charakterisieren. Dies wollen wir uns zu Nutzen machen.



In unserem Beispiel ist jedes konkrete Meßergebnis additiv durch systematische und zufällige Fehler gestört. Zufällige Fehler wie Meß- und Produktionsungenauigkeiten sind in dem Kombinat sicherlich gleichwertig. Wir verstehen darunter, daß sich die Abweichungen von Sollwerten auf Grund dieser Ursache nicht in den Betrieben unterscheiden. Das können wir voraussetzen, da gleiche Produktions- und Meßmethoden vorherrschen sollen. Folglich können Unterschiede in der Kennziffer nur durch Größen der ersten Art auftreten (z. B. verwendetes Material, Einstellung der Automaten).

Nehmen wir jetzt an, die Produktionen seien nicht unterscheidbar. Dann können wir anhand der Kenngrößen der Verteilungen je Betrieb untersuchen, ob die Meßergebnisse wirklich der gleichen Verteilung entsprechen. Unsere Behauptung wird statistisch um so "sicherer" sein, je mehr Meßwerte zur Analyse vorliegen. Wegen der Bedeutung der Entscheidungen ist der Einsatz von Rechnern also notwendig, um viele Daten verarbeiten zu können. Ergibt die Auswertung eine Differenz in den Kenngrößen, muß unsere Hypothese als falsch angesehen werden.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es eine Reihe idealer und mathematisch gut handhabbarer Verteilungen. Erfahrungen und auch theoretische Überlegungen zeigen nun, daß viele reale Prozesse durch solche Verteilungen recht gut beschrieben werden können. So ist es möglich, eine Vielfalt von Aufgaben mit gleicher Theorie zu lösen. Damit kann mit einer Sammlung von Methoden eine umfassende Arbeit geleistet werden. Es ist die verantwortungsvolle und interdisziplinäre Aufgabe in erster Linie, ein geeignetes Modell für das konkrete Problem auszuwählen und das Ergebnis der Analyse richtig zu interpretieren.

Die Mitarbeit an dieser interessanten und wichtigen Aufgabe weckt die schöpferische Selbstbetätigung in der wissenschaftlichen Arbeit. Die Anwendung der Statistik bringt auf der einen Seite tieferes Verständnis für Probleme der mathematischen Kybernetik und Rechentechnik durch den unmittelbaren Kontakt zu Rechenanlagen. Andererseits ist die theoretische Arbeit sehr anspruchsvoll. Das wissenschaftliche Studium statistischer Analysen führt oft zu Jahres- und Diplomarbeiten. Nebenbei bereitet natürlich

auch das Kennenlernen verschiedener Probleme in nichtmathematischen Bereichen und der eigene Beitrag zur Lösung sehr viel Freude.

N. Bitterlich  
Mathematikstudent  
4. Studienjahr

## XX. Olympiade Junger Mathematiker

### 3. Stufe (Bezirksolympiade)

### Olympiadeklassen 11/12

- ①. Man ermittle alle reellen Zahlen  $x$ , für die das folgende System von Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt ist:

$$x^4 + x^2 - 2x \geq 0, \quad (1)$$

$$2x^3 + x - 1 < 0, \quad (2)$$

$$x^3 - x > 0. \quad (3)$$

- ②. Es sei  $f$  die durch

$$f(x) = x^4 - (x+1)^4 - (x+2)^4 + (x+3)^4$$

definierte Funktion, wobei der Definitionsbereich von  $f$

- a) die Menge aller ganzen Zahlen,
  - b) die Menge aller reellen Zahlen
- ist.

Man untersuche sowohl für den Fall a) als auch für den Fall b), ob die Funktion  $f$  einen kleinsten Funktionswert annimmt, und ermittle, falls das zutrifft, jeweils diesen kleinsten Funktionswert.

- ③A. Es sind alle natürlichen Zahlen  $n$  zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben:

Für alle reellen Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $0 < a < b$  gilt

$$a + \frac{1}{1+a^n} < b + \frac{1}{1+b^n}.$$



- 3B. Ist  $f$  eine im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  definierte Funktion, so seien für sie die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) betrachtet:

- (1) Für jedes reelle  $x$  mit  $0 \leq x \leq 1$  gilt  $f(x) \geq 0$ .
- (2) Es gilt  $f(1) = 1$ .
- (3) Für jedes reelle  $x_1$  mit  $0 \leq x_1 \leq 1$  und jedes reelle  $x_2$  mit  $0 \leq x_2 \leq 1$  und  $x_1 + x_2 \leq 1$  gilt  
 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$ .

a) Man beweise:

Wenn  $f$  eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt  $f(x) < 2x$  für jedes reelle  $x$  mit  $0 < x \leq 1$ ,

b) Man überprüfe, ob auch die folgende Aussage wahr ist:

Wenn  $f$  eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt  $f(x) \leq 1,99 \cdot x$  für jedes reelle  $x$  mit  $0 < x \leq 1$ .

4. Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen  $k$ , für die die Gleichung

$$\frac{x}{k-4} + \frac{k}{2(k-4)} + \frac{k+4}{x} = 0$$

lösbar ist (d. h. mindestens eine Lösung  $x$  besitzt), wobei alle Lösungen  $x$  ganzzahlig sind.

5. Man beweise, daß für jede natürliche Zahl  $n$  die folgende Aussage gilt:

Wenn die Anzahl der Ecken eines regelmäßigen Vielecks gleich  $3n$  ist, dann gibt es kein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem beide Koordinaten jedes Eckpunktes dieses Vielecks rationale Zahlen sind.

6. Man zeige, daß zu jeder natürlichen Zahl  $n \geq 1$  und jeder natürlichen Zahl  $B > 1$  eine natürliche Zahl  $C \geq 1$  existiert, die im Positionssystem mit der Basis  $B$  nur aus Ziffern "Null" und "Eins" besteht und durch  $n$  teilbar ist.

**Preisaufgaben**

- N 19 Auf der Seite AB eines Dreiecks ABC sei beliebig ein Punkt  $C_1$  ausgewählt. Man verbinde  $C_1$  mit C. Der Schnittpunkt der Verlängerung von CB mit einer zu  $CC_1$  parallelen Geraden durch A sei  $A_1$  und der Schnittpunkt der Verlängerung von AC und einer zu  $CC_1$  parallelen Geraden durch B sei  $B_1$ . Man zeige, daß  $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} = \frac{1}{CC_1}$ .
- N 20 Seien p und q ungerade ganze Zahlen. Man zeige, daß die Gleichung 
$$x^2 + 2px + 2q = 0$$
 keine rationalen Lösungen hat.
- N 21 Man zeige, daß die 3. Potenz der größten dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen nicht gleich der Summe der 3. Potenzen der beiden anderen Zahlen sein kann.
- N 22 Man zeige, daß für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b für  $n > 2$  die Ungleichung  $c^n > a^n + b^n$  gilt.
- N 23 Seien a, b, c und d solche ganzen Zahlen, daß jede der Zahlen ac, bc+ad, bd durch eine ganze Zahl n teilbar ist. Man zeige, daß in diesem Fall auch die Zahlen bc und ad durch n teilbar sind.
- N 24 Доказать, что расстояние от точки P, произвольно выбранной внутри параллелограмма ABCD, до ближайшей вершины параллелограмма никогда не превосходит радиус R описанной окружности треугольника ABC.



## Lösungen

### Aufgabe M 49

Es ist  $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\beta+\gamma}{2} < 90^\circ - \frac{\beta}{2} < 90^\circ$ .

Es gilt der Satz:

Je größer ein spitzer Winkel ist, desto größer ist sein Sinus. Folglich ist

$$\sin \frac{\alpha}{2} < \sin(90^\circ - \frac{\beta}{2}) = \cos \frac{\beta}{2}$$

und somit

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} < \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \sin \beta \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

Sei  $\gamma$  der kleinste Winkel. Dann ist

$$\sin \frac{\gamma}{2} \leq \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{4}.$$

### Aufgabe M 50

Es gibt  $9^m$  natürliche Zahlen zwischen 0 und  $10^m - 1$ , die in der Dezimaldarstellung nur mit den Ziffern 0, 1, 2, ..., 8 geschrieben werden. Die Anzahl derjenigen Glieder der fraglichen Teilreihe, die zwischen  $\frac{1}{10^{m-1}-1}$  und  $\frac{1}{10^m-1}$  liegen, beträgt also  $9^m - 9^{m-1}$ . Der größte Wert des Intervalls ist  $\frac{1}{10^{m-1}}$ .

Somit gilt für die Teilreihe folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} s &\leq \frac{9-1}{1} + \frac{9^2-9}{10} + \frac{9^3-9^2}{10^2} + \dots + \frac{9^n-9^{n-1}}{10^{n-1}} + \dots = \\ &= 8(1 + \frac{9}{10} + \frac{9^2}{10^2} + \dots + \frac{9^n}{10^n} + \dots) = \\ &= 8 \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 80. \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert. Eine obere Schranke ist 80.

**Aufgabe M 51**

Durch einfache Überlegungen findet man nacheinander:

$$D = 0$$

$$C = 4$$

$$B = 3$$

$$F = 2$$

$$A = 1$$

$$E = 7$$

$$G = 5$$

Die eindeutig bestimmte Lösung lautet:

$$1340 - 37 = 1301$$

$$: \quad - \quad -$$

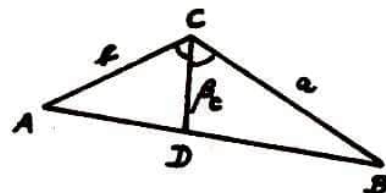
$$\underline{40 \cdot 25 = 1240}$$

$$27 + 12 = 41$$

(Bemerkung: Die Aufgabe war im Oktalsystem zu lösen.)

**Aufgabe M 52**

Sei  $\beta_c$  die Länge der Winkelhalbierenden  $CD$  des Winkels  $\gamma$ , der an der Ecke  $C$  des Dreiecks  $ABC$  liege. Der Flächeninhalt von  $ABC$  ist gleich der Summe der Flächeninhalte von  $ACD$  und  $DCB$ .



Folglich ist

$$ab \sin \gamma = a \beta_c \sin \frac{\gamma}{2} + b \beta_c \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Also ist

$$2ab \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \beta_c (a+b) \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Wegen  $\gamma \neq 0$  gilt:

$$\frac{\beta_c}{2 \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{ab}{a+b}.$$

Für  $\gamma = 120^\circ$  ist  $2 \cos \frac{\gamma}{2} = 2 \cos 60^\circ = 1$  und somit

$$\beta_c = \frac{ab}{a+b}.$$



**Aufgabe M 53**

Da es sich um eine endliche Anzahl von Punkten handelt, kann man 2 Punkte auswählen, die zueinander den größten Abstand haben. Um diese Punkte legt man Kreise mit dem Radius 1. Ein beliebiger dritter Punkt fällt in einen dieser beiden Kreise.

Haben die beiden ausgewählten Punkte einen Abstand größer 1, so hat der dritte Punkt zu einem der beiden einen Abstand kleiner 1.

Haben die beiden ausgewählten Punkte einen Abstand kleiner 1, so gilt das erst recht, da dieser der maximale Abstand ist.

**Aufgabe M 54**

Es ist  $(a-b)x = 2$ . Also ist  $a \neq b$  und somit  $x = \frac{2}{a-b}$ . Da  $x$  eine natürliche Zahl ist, ebenso auch  $a$  und  $b$ , so ist  $x$  Teiler von 2.

1. Fall:  $x = 1$

Nach Aussage 2) gilt  $ax-6 = bx-4 = x$ , also ist  $a = 7$  und  $b = 5$ .

2. Fall:  $x = 2$

Es folgt  $a=4$  und  $b=3$ .

Die Paare  $(4,3)$  und  $(7,5)$  erfüllen die Bedingungen 1) und 2) der Aufgabe.

**Aufgabe M 47**

Wir schreiben das System in der Form

$$(3x+y)^{x-y} = 9$$

$$\frac{x-y}{\sqrt{324}} = 2(3x+y)^2$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$324 = 2^{x-y}(3x+y)^{2(x-y)}.$$

Mit Hilfe der ersten Gleichung erhält man

$$324 = 2^{x-y} \cdot 81$$

Daraus folgt  $x-y = 2$  (1)

Setzt man (1) in die erste Gleichung ein, so erhält man

zwei Systeme:

$$\left. \begin{array}{l} x-y = 2 \\ 3x+y = 3 \end{array} \right\} 1) \qquad \left. \begin{array}{l} x-y = 2 \\ 3x+y = 3 \end{array} \right\} 2)$$

Die Lösung des ersten ist:  $x_1 = \frac{5}{4}, y_1 = -\frac{3}{4}$

und die des zweiten ist:  $x_2 = -\frac{1}{4}, y_2 = -\frac{9}{4}$ .

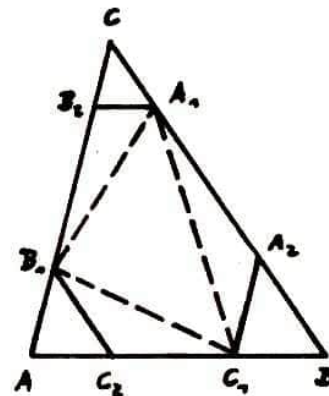
Diese beiden Lösungen sind auch die Lösungen des gegebenen Gleichungssystems.

### Aufgabe M 48

Durch die Punkte  $A_1, B_1, C_1$  werden Geraden parallel zu den Seiten  $AB, BC, CA$  gezogen. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Seiten des Dreiecks werden mit  $B_2, C_2, A_2$  bezeichnet.

Da  $\lambda > \frac{1}{2}$  ist, liegen die Punkte  $B_2, C_2$  und  $A_2$  auf den Strecken  $CB_1, AC_1$  und  $BA_1$ .

Der Umfang des Dreiecks  $A_1B_1C_1$  ist offensichtlich kleiner als der des Sechsecks  $A_1B_2B_1C_2C_1A_2$ . Es genügt zu zeigen, daß der Umfang des Sechsecks das  $\lambda$ -fache des Umfangs des Dreiecks  $ABC$  ist.



Da  $A_1B_2 \parallel AB$ ;  $B_1C_2 \parallel BC$  und  $C_1A_2 \parallel CA$ , so folgt, daß die Dreiecke  $AC_2B_1$ ,  $C_1BA_2$  und

$B_2A_1C$  ähnlich dem Dreieck  $ABC$  sind. Aus den Gleichungen  $A_1C = (1-\lambda)BC$ ;  $B_1A = (1-\lambda)CA$ ,  $C_1B = (1-\lambda)AB$  folgt, daß die Dreiecke  $AC_2B_1$ ,  $C_1BA_2$  und  $B_2A_1C$  kongruent sind.

Somit gelten die Gleichungen:

$$A_1B_2 = AC_2, B_2C = C_1A_2 \text{ und } B_1C_2 = A_2B.$$

Somit ist der Umfang des Sechsecks gleich der Summe der Strecken  $AC_1, BA_1$  und  $CB_1$ , d. h. der Umfang des Dreiecks  $A_1B_1C_1$  ist kleiner als das  $\lambda$ -fache des Umfangs des Dreiecks  $ABC$ .



### Einführung in die Topologie (III)

#### 4. Der Begriff des topologischen Raumes

Es taucht die Frage auf, ob man den Begriff der Konvergenz einer Folge  $(x_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$  von Elementen einer Menge  $E$  auch dann noch definieren kann, wenn es nicht mehr möglich ist, in  $E$  ein Metrik (Abstandsfunktion) zu erklären. Mit anderen Worten: Läßt sich der Konvergenzbegriff einer Folge in noch allgemeineren Mengen, als es die metrischen Räume sind, definieren? Zur Definition der Konvergenz einer Folge  $(x_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$  aus  $E$  war letztlich nur die Menge aller  $\varepsilon$ -Umgebungen  $U_\varepsilon(a)$  - und da jede  $\varepsilon$ -Umgebung auch Umgebung ist - die Menge aller Umgebungen von  $a$ ,  $\mathcal{U}(a)$ , erforderlich. Es müßte eigentlich der Umgebungsbegriff, mit allen erforderlichen Eigenschaften ausgestattet, auch zur Definition der Konvergenz einer Folge genügen. Aber bisher sind natürlich stets die Begriffe " $\varepsilon$ -Umgebung" und "Umgebung" mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Metrik definiert worden. Jetzt drehen wir die Sache einfach um und benutzen den Umgebungsbegriff als Grundbegriff, und die in  $U_1$  bis  $U_4$  formulierten Eigenschaften fordern wir als Grundeigenschaften (Axiome). Ist  $E$  eine beliebige Menge und läßt sich jedem Element  $x \in E$  ein nicht leeres System  $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(E)$  <sup>1)</sup> zuordnen, wofür die Grundeigenschaften  $U_1$  bis  $U_4$  erfüllt sind, so nennen wir  $E$  einen topologischen Raum. Damit werden wahrscheinlich allgemeinere Mengen erfaßt, als es die metrischen Räume sind, da sich ja  $U_1$  bis  $U_4$  als Folgerungen aus den in Definition 8 angegebenen Grundeigenschaften des metrischen Raumes ergeben. Wir wollen eine saubere Definition für den Begriff des topologischen Raumes notieren.

#### Definition 12:

Eine Menge  $E$  heißt topologischer Raum genau dann, wenn:

( $U_0$ ) Jedem  $x \in E$  ist eindeutig ein nicht leeres System  $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(E)$  ( $\mathcal{U}(x)$  ist eine nicht leere Teilmenge der Potenzmenge von  $E$ ) zugeordnet. Es heißt dann  $\mathcal{U}(x)$  das Umgebungssystem von  $x \in E$ .

( $U_1$ ) Für jedes  $U \in \mathcal{U}(x)$  gilt  $x \in U$ .

$\forall x \forall U (x \in E \wedge U \in \mathcal{U}(x) \rightarrow x \in U)$ .

1)  $\mathcal{P}(E)$  sei die Potenzmenge der Menge  $E$ , also die Menge aller Teilmengen von  $E$ .



- (U<sub>2</sub>) Wenn  $U \in \mathcal{U}(x)$  und  $U \subseteq U'$ , so gilt  $U' \in \mathcal{U}(x)$ .  
 $\forall x \forall U \forall U' (x \in E \wedge U \in \mathcal{U}(x) \wedge U \subseteq U' \rightarrow U' \in \mathcal{U}(x))$
- (U<sub>3</sub>) Wenn  $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$ , so gilt auch  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$ .  
 $\forall x \forall U_1 \forall U_2 (x \in E \wedge U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) \rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x))$
- (U<sub>4</sub>) Für jedes  $U \in \mathcal{U}(x)$  existiert ein  $W \in \mathcal{U}(x)$ , so daß für alle  $y \in W$  gilt:  $U \in \mathcal{U}(y)$ .  
 $\forall x \forall U \exists W \forall y (x \in E \wedge U \in \mathcal{U}(x) \wedge y \in W \rightarrow U \in \mathcal{U}(y))$

Sind für eine Menge  $E$  die Forderungen  $U_0$  bis  $U_4$  erfüllt, so sagen wir, daß  $E$  mit einer Topologie  $T$  versehen ist. Eine Topologie  $T$  auf  $E$  ist von den Umgebungssystemen  $\mathcal{U}(x)$  abhängig, d. h. eine Menge  $E$  kann mit verschiedenen Topologien versehen werden.

#### Beispiele für topologische Räume:

1. Wir betrachten die Menge  $E = \{a, b, c\}$ . Sind die den Elementen  $a, b, c$  zugeordneten Systeme durch

$$\mathcal{U}^1(a) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, E\}$$

$$\mathcal{U}^1(b) = \{\{a, b\}, E\}$$

$$\mathcal{U}^1(c) = \{\{a, c\}, E\}$$

gegeben, so werden von diesen Systemen die Forderungen  $U_1$  bis  $U_4$  erfüllt, wie man leicht nachprüfen kann. Damit haben wir  $E$  mit einer Topologie  $T_1$  versehen.

2. Betrachten wir nochmals die Menge  $E = \{a, b, c\}$ . Jetzt seien

$$\mathcal{U}^2(a) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, E\}$$

$$\mathcal{U}^2(b) = \{E\}$$

$$\mathcal{U}^2(c) = \{\{a, c\}, E\}.$$

Es werden von diesen Systemen wiederum die Forderungen  $U_1$  bis  $U_4$  erfüllt. Also haben wir  $E$  erneut mit einer Topologie  $T_2$  versehen. Es ist aber  $T_2$  eine von  $T_1$  verschiedene Topologie.

3. Sei wieder  $E = \{a, b, c\}$ , und es sei  $\mathcal{U}(x)$  für jedes  $x \in E$  die Menge aller das Element  $x$  enthaltenden Teilmengen von  $E$ , also

$$\mathcal{U}(a) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, E\}$$

$$\mathcal{U}(b) = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, E\}$$

$$\mathcal{U}(c) = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

Auch diese Systeme erfüllen die Forderungen  $U_1$  bis  $U_4$ . Wir haben damit  $E$  mit einer Topologie  $T_3$  versehen. Für diese To-



pologie sind die Systeme  $\mathcal{U}(x)$  für jedes  $x \in E$  so umfassend gewählt, wie es nach Forderung  $U_1$  nur irgend möglich ist. Wir nennen diese Topologie die feinste Topologie von  $E$ , oder da zu jedem  $\mathcal{U}(x)$  speziell die Menge  $\{x\}$  gehört, auch die diskrete Topologie von  $E$ . Für diese Topologie ist jede nicht leere Teilmenge von  $E$  Umgebung jedes ihrer Punkte.

4. Nochmals sei  $E = \{a, b, c\}$ , und für jedes  $x \in E$  setzen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(x) &= \{E\}, \text{ also} \\ \mathcal{U}(a) &= \{E\} \\ \mathcal{U}(b) &= \{E\} \\ \mathcal{U}(c) &= \{E\}.\end{aligned}$$

Diese Systeme genügen ebenfalls den Forderungen  $U_1$  bis  $U_4$ . Es ist  $E$  mit einer Topologie  $T_4$  versehen. Im Gegensatz zu Beispiel 3 sind hier die Umgebungssysteme  $\mathcal{U}(x)$  so eng wie möglich gewählt. Es wird  $T_4$  die grobe Topologie von  $E$  genannt.

5. Es ist völlig klar, daß jeder metrische Raum  $E$  ein topologischer Raum ist. So ist für jedes  $x \in E$  das mit Hilfe der Metrik definierte Umgebungssystem  $\mathcal{U}(x) = \emptyset$  und genügt den Forderungen  $U_1$  bis  $U_4$ , wie wir das in den Sätzen  $U_1$  bis  $U_4$  bewiesen haben. Demnach sind die Zahlengerade und der  $\mathbb{R}^n$  topologische Räume. Durch die dort vorhandene Metrik werden die Zahlengerade bzw. der  $\mathbb{R}^n$  mit einer ganz bestimmten Topologie versehen, die wir die übliche Topologie der Zahlengeraden bzw. des  $\mathbb{R}^n$  nennen.
6. Aber natürlich läßt sich z. B. die Zahlengerade  $\mathbb{R}$  nicht nur mit der üblichen Topologie versehen. Wählen wir für jedes  $x \in \mathbb{R}$  als  $\mathcal{U}(x)$  die Menge aller das Element  $x$  enthaltenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , so wird damit  $\mathbb{R}$  mit der diskreten Topologie versehen. Es ist die übliche Topologie auf  $\mathbb{R}$  verschieden von der diskreten Topologie auf  $\mathbb{R}$ .
7. Setzen wir für jedes  $x \in \mathbb{R}$   $\mathcal{U}(x) := \{\mathbb{R}\}$ , so wird  $\mathbb{R}$  mit der groben Topologie versehen. Natürlich ist die übliche Topologie auf  $\mathbb{R}$  von der groben Topologie auf  $\mathbb{R}$  verschieden.

Ist die Menge  $E$  ein topologischer Raum, d. h. jedem  $x \in E$  ist ein Umgebungssystem  $\mathcal{U}(x)$  eindeutig zugeordnet, das den Forde-

runge  $U_1$  bis  $U_4$  genügt, so läßt sich die Konvergenz einer Folge  $(x_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$  von Elementen der Menge  $E$  wie folgt definieren:

**Definition 13:** Eine Folge  $(x_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$  von Elementen aus  $E$  heißt konvergent in  $E$  genau dann, wenn ein  $a \in E$  existiert mit folgender Eigenschaft: Für jedes  $U \in \mathcal{U}(a)$  existiert ein  $v_0 \in \mathbb{N}^*$ , so daß für alle  $v > v_0$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$ , gilt:  $x_v \in U$ .

Wir sagen dann, die Folge  $(x_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$  besitzt den Grenzwert  $a$  und schreiben:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = a.$$

Jetzt können natürlich Erscheinungen eintreten, die uns von der mit der üblichen Topologie versehenen Zahlengeraden her völlig unbekannt sind. Der Grenzwert einer Folge ist nicht mehr eindeutig bestimmt:

1. Betrachten wir einige Folge der mit der Topologie  $T_1$  versehenen Menge  $E = \{a, b, c\}$ .

a)  $(x_v)_{v \in \mathbb{N}^*} = (a) = (a, a, a, \dots)$

Es ist  $\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = a$  und  $\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = b$  und  $\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = c$ .

b)  $(x_v)_{v \in \mathbb{N}^*} = (b) = (b, b, b, \dots)$

$\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = b$

c)  $(x_v)_{v \in \mathbb{N}^*} = (c) = (c, c, c, \dots)$

$\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = c$

d)  $(x_v)_{v \in \mathbb{N}^*} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$

$\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = b$

e)  $(x_v)_{v \in \mathbb{N}^*} = (b, c, b, c, b, c, \dots)$

Diese Folge ist nicht konvergent, d. h. sie besitzt in  $E$  mit der Topologie  $T_1$  keinen Grenzwert.

2. Ist  $\mathbb{R}$  mit der üblichen, durch die Metrik definierten Topologie versehen, so gelten die uns vertrauten Tatsachen für die Konvergenz einer Folge:

a)  $(\frac{1}{v})_{v \in \mathbb{N}^*}$ ,  $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} = 0$

b)  $(\frac{v-1}{v})_{v \in \mathbb{N}^*}$ ,  $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v-1}{v} = 1$

c)  $((1 + \frac{1}{v})^v)_{v \in \mathbb{N}^*}$ ,  $\lim_{v \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{v})^v = e$ .



Der Grenzwert jeder konvergenten Folge ist hier eindeutig bestimmt.

3. Ist  $\mathbb{R}$  mit der diskreten Topologie versehen, so konvergieren lediglich die bis auf endlich viele Glieder konstanten Folgen  $(x_v)_{v \in \mathbb{N}^*} = (\dots, x, x, x, \dots)$  mit  $\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = x$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ . Alle anderen Folgen wie  $(\frac{1}{v})_{v \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(\frac{v-1}{v})_{v \in \mathbb{N}^*}$  und  $((1 + \frac{1}{v})^v)_{v \in \mathbb{N}^*}$  sind jetzt nicht konvergent. Auch hier ist der Grenzwert jeder konvergenten Folge eindeutig bestimmt.
4. Ist  $\mathbb{R}$  mit der groben Topologie versehen, so besitzt jede Folge reeller Zahlen jede reelle Zahl als Grenzwert. So gilt z. B. für die Folge  $(v)_{v \in \mathbb{N}^*} = (1, 2, 3, \dots)$   $\lim_{v \rightarrow \infty} v = 1$  und  $\lim_{v \rightarrow \infty} v = 0$  und  $\lim_{v \rightarrow \infty} v = 713$  und  $\lim_{v \rightarrow \infty} v = \sqrt{2}$  usw.

Wie wir bemerken, ist in einem beliebigen topologischen Raum  $E$  der Grenzwert einer konvergenten Folge von Elementen aus  $E$  nicht eindeutig bestimmt. Die topologischen Räume sind von sehr allgemeiner Struktur, für sie ist eine Konvergenztheorie von Elementfolgen nach dem Muster metrischer Räume nicht möglich. Die Forderungen in den Axiomen  $U_0$  bis  $U_4$  reichen noch nicht aus, die Eindeutigkeit des Grenzwertes einer konvergenten Folge zu sichern. Erst durch Hinzunahme des sogenannten Hausdorffschen Trennungsaxioms  $U_5$  ist der Grenzwert jeder konvergenten Folge eindeutig bestimmt.

$U_5$ : Sind  $x, y$  zwei verschiedene Elemente von  $E$ , so existiert ein  $U \in \mathcal{U}(x)$  und ein  $V \in \mathcal{U}(y)$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .

Formalisiert:

$$\forall x \forall y [x, y \in E \wedge x \neq y \rightarrow \exists U \exists V (U \in \mathcal{U}(x) \wedge V \in \mathcal{U}(y) \wedge U \cap V = \emptyset)]$$

**Definition 14:** Ein topologischer Raum  $E$  heißt ein Hausdorffscher Raum genau dann, wenn für  $E$  das Hausdorffsche Trennungsaxiom  $U_5$  zutrifft.

**Satz 3:** In einem Hausdorffschen Raum  $H$  ist der Grenzwert jeder konvergenten Elementfolge  $(x_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$  eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Es seien  $a_1, a_2 \in H$  und  $a_1 \neq a_2$ , und es gelte  $\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = a_1$  und  $\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = a_2$ . Dann existiert für jedes  $U \in \mathcal{U}(a_1)$  ein  $v_{01}$ , so daß für alle  $v > v_{01}$  gilt:  $x_v \in U$ . Für jedes  $V \in \mathcal{U}(a_2)$  existiert ein  $v_{02}$ , so daß für alle  $v > v_{02}$  gilt:  $x_v \in V$ .

Ist  $\nu_0 = \max \{\nu_{01}, \nu_{02}\}$ , so gilt für alle  $\nu > \nu_0$ :  $x_\nu \in U$  und  $x_\nu \in V$ , d. h.  $x_\nu \in U \cap V$ . Das ist aber ein Widerspruch zum Hausdorffschen Trennungsaxiom, wonach es mindestens ein  $U \in \mathcal{U}(a_1)$  und mindestens ein  $V \in \mathcal{U}(a_2)$  geben muß mit  $U \cap V = \emptyset$ .

Es ist leicht zu zeigen, daß jeder metrische Raum auch ein Hausdorffscher Raum ist. Demnach sind die Zahlengerade  $\mathbb{R}$  und der  $\mathbb{R}^n$  Hausdorffsche Räume.

#### A u f g a b e n :

1. Gegeben sei die Menge  $E = \{a, b, c, d\}$ . Ordnen Sie jedem  $x \in E$  ein System  $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(E)$  so zu, daß  $E$  ein topologischer Raum wird. Versuchen Sie  $E$  mit zwei weiteren, von der ersten Topologie verschiedenen Topologien!
2. Beweisen Sie folgenden Satz:  
Ist die Menge  $E$  ein metrischer Raum, so ist die Menge  $E$  ein Hausdorffscher Raum.

Karl Herrmann  
Lektor im Bereich  
Theoretische Mathematik

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“

**Leiter:** Heiner Schwulow

**Chefredakteur:** Andreas Kleinwächter

**Stellvertretender Chefredakteur:** Andreas Jeschag

**Redaktion:** H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz  
H. Rosner, H. Zein

**Anschrift:** WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M,

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

**Artikel-Nr. (EDV):** 10932

**Titelbild:** Martina Lutz

**Redaktionsschluß:** 14.3.1981



$$3x - 5y = 7$$
$$x, y \in G$$



DIOPHANTOS

5

81

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom  
Jugendobjekt Studienvor-  
bereitung-Studienwerbung  
der Sektion Mathematik  
an der Friedrich-Schiller-  
Universität Jena

15. Jahrgang  
Index 33873  
Sonderpreis für DDR:  
0.20 M



## Diophantische Gleichungen

Ein sehr interessantes Gebiet der Zahlentheorie sind die diophantischen Gleichungen. Erstmals wurden derartige Gleichungen von dem griechischen Mathematiker Diophantos (250 u. Z.) behandelt, und trotz jahrhundertelanger Forschungsarbeit sind heute noch mehrere Probleme dieser Theorie ungeklärt.

Gegenstand dieses Artikels soll nur ein spezieller Typ von diophantischen Gleichungen sein: Wir wollen nur lineare Gleichungen betrachten.

**D e f i n i t i o n 1 :**  $G$  ist lineare diophantische Gleichung genau dann, wenn  $G$  die Form  $ax + by = c$  hat, wobei  $a, b, c$  gegebene ganze Zahlendarstellen und  $x, y$  Variable für ganze Zahlen sind.

(Im folgenden wollen wir unter diophantischen Gleichungen immer nur lineare diophantische Gleichungen verstehen.)

**D e f i n i t i o n 2 :**  $L$  ist Lösung der diophantischen Gleichung  $ax + by = c$  genau dann, wenn  $L$  ein Paar  $[x_0, y_0]$  von ganzen Zahlen ist, für das  $ax_0 + by_0 = c$  gilt.

Allgemein ist bekannt, daß man die Gleichung  $ax + by = c$  als Geradengleichung interpretieren kann, falls  $x$  und  $y$  aus dem Bereich der reellen Zahlen gewählt werden dürfen. Die Forderung " $x, y$  ganzzahlig" kann man nun so verstehen, daß wir auf der vorliegenden Geraden nach Punkten mit ganzzahligen Koordinaten, sogenannten Gitterpunkten, suchen werden. Das Ziel besteht nun darin, sämtliche Lösungen  $L$  der diophantischen Gleichung  $ax + by = c$  anzugeben.

Rein anschaulich kann man sich überlegen, daß es Geraden geben kann, die nicht durch Gitterpunkte hindurchführen. Mit anderen Worten bedeutet das: Nicht jede diophantische Gleichung muß lösbar sein. Bevor man also an das Lösen von diophantischen Gleichungen herangehen wird, muß man die Lösbarkeitsfrage klären. Eine Antwort darauf gibt Satz 1:



Satz 1: Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der diophantischen Gleichung  $ax + by = c$  ist, daß der größte gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  auch ein Teiler von  $c$  ist.

Bemerkungen:

- (1) Die natürliche Zahl  $d$  heißt Teiler der ganzen Zahl  $c$ , in Zeichen  $d|c$ , wenn es eine ganze Zahl  $e$  gibt, so daß  $c = d \cdot e$  gilt. Gibt es keine solche Zahl, dann schreibt man  $d \nmid c$ .
- (2) Unter  $(a,b)$  verstehen wir den größten gemeinsamen Teiler von  $a$  und  $b$ . Ist  $(a,b) = 1$ , so nennen wir  $a$  und  $b$  teilerfremd.

Beweis von Satz 1:

Es sei  $ax + by = c$  lösbar und  $(a,b) = d$ . Unter Berücksichtigung der Zerlegungen  $a = \alpha \cdot d$  und  $b = \beta \cdot d$  mit ganzzahligen  $\alpha$  und  $\beta$  ergibt sich durch Einsetzen:  $d(\alpha x + \beta y) = c$ , und daraus folgt  $d|c$ .

Die Frage der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung haben wir damit auf das Vergleichen der ganzen Zahlen  $a, b, c$  zurückgeführt. Besitzen  $a, b, c$  den größten gemeinsamen Teiler  $d$ , dann wollen wir ihn stets aus der diophantischen Gleichung herausgekürzt denken, so daß wir nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit für lösbare Gleichungen stets  $(a,b) = 1$  voraussetzen können.

Aufgabe: Man versuche, wenigstens je 2 Lösungen  $x, y$  für die diophantischen Gleichungen

$$(1) \quad 6x + 3y = 1$$

$$(2) \quad 3x - 5y = 7$$

anzugeben, indem man die zugehörigen Geraden zeichne und Gitterpunkte bestimme!

Ergebnis:

- (1) Da  $(6,3) = 3$  und  $3 \nmid 1$  folgt unmittelbar Unlösbarkeit!
- (2) Aus der angefertigten Zeichnung kann man erkennen, daß z. B. die Paare  $[-1, -2]$ ,  $[4, 1]$  und  $[9, 4]$  zur Lösungsmenge gehören, wie man durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung bestätigen kann. Auffallend ist, daß sich die  $x$ - bzw.  $y$ -Werte um Vielfache von 5 bzw. 3 unterscheiden. Diese Eigenschaft legt die Vermutung nahe, daß, falls eine diophantische Gleichung lösbar ist, beliebig viele Lösungen existieren.

Hiermit haben wir ein erstes, wenn auch umständliches Verfahren zur Lösung diophantischer Gleichungen kennengelernt. Es gibt jedoch wesentlich elegantere Methoden. Zwei Verfahren werden wir im folgenden behandeln.

### Erste Methode: Das Eulersche Reduktionsverfahren

Wir erarbeiten uns den Lösungsalgorithmus an Hand des Beispiels der diophantischen Gleichung  $3x - 5y = 7$ .

1. Schritt: Man stelle die Gleichung  $3x - 5y = 7$  nach einer Variablen um (aus rechentechnischen Gründen nach derjenigen, deren Koeffizient den kleineren Betrag hat).

$$x = \frac{7 + 5y}{3}$$

2. Schritt: Man führe die Division so weit wie möglich aus.

$$x = 2 + y + \frac{1 + 2y}{3}$$

3. Schritt: Da beide Variable  $x, y$  ganzzahlig sind, folgt, daß der verbleibende Bruch ebenfalls ganzzahlig sein muß. Man führe dafür eine neue Variable  $z$  ein.

$$z = \frac{1 + 2y}{3}$$

Hieraus folgt:

$$3z - 2y = 1.$$

Das Ergebnis dieser 3 Schritte besteht darin, daß wir die diophantische Gleichung  $3x - 5y = 7$  auf die diophantische Gleichung  $3z - 2y = 1$  zurückgeführt haben. Auf diese neu gewonnene diophantische Gleichung wenden wir das Verfahren abermals an und wiederholen es so lange, bis sich eine Gleichung ergibt, in der eine Variable den Koeffizienten 1 hat. (Dieser Fall wird stets erreicht, da bei diesem Verfahren die Koeffizienten ihrem Betrage nach kleiner werden.)

1. Schritt:  $y = \frac{3z - 1}{2}$

2. Schritt:  $y = z + \frac{z - 1}{2}$

3. Schritt:  $u = \frac{z - 1}{2}$ ,  $2u - z = -1$

1. Schritt:  $z = 2u + 1$

Damit ist der Algorithmus beendet.

Um die Lösungen  $x, y$  zu erhalten, müssen wir nun lediglich



$z = 2u + 1$  in  $y = \frac{3z - 1}{2}$  einsetzen. Wir erhalten  $y = 1 + 3u$ .  
Einsetzen in  $x = \frac{7 + 5y}{3}$  liefert  $x = 4 + 5u$ .

### Ergebnis:

Die Lösungen der diophantischen Gleichung  $3x - 5y = 7$  lauten:

$$x = 1 + 3u$$

$$y = 4 + 5u$$

mit beliebigem ganzzahligem  $u$ .

Damit haben wir überdies gezeigt, daß - wie oben vermutet - die Gleichung unendlich viele Lösungen hat.

### Zweite Methode: "Verfahren mittels linearer Kongruenzen"

Wir lernen hier die wichtigsten Eigenschaften linearer Kongruenzen kennen. Mit Hilfe dieser Theorie lassen sich diophantische Gleichungen, wie wir sehen werden, sehr schnell lösen.

D e f i n i t i o n 3 : Zwei ganze Zahlen  $a, b$  heißen

kongruent modulo  $m$ , in Zeichen  $a \equiv b \pmod{m}$ , wenn  $m \mid a - b$  gilt.

Man sagt:  $a, b$  sind inkongruent modulo  $m$ , in Zeichen  $a \not\equiv b \pmod{m}$ , wenn  $m \nmid a - b$  ist.

Die natürliche Zahl  $m$  nennt man den Modul der Kongruenz.

### Beispiele:

$$15 \equiv 5 \pmod{5}$$

$$537 \equiv 117 \pmod{10}$$

$$3 \equiv 4 \pmod{2}$$

S a t z 2 : Die Kongruenz  $a \equiv b \pmod{m}$  gilt dann und nur dann, wenn  $a$  und  $b$  bei der Division durch  $m$  denselben Rest lassen.

Beweis: Wir haben zweierlei zu beweisen:

(1) Falls  $a \equiv b \pmod{m}$  gilt, dann folgt, daß  $a$  und  $b$  bei Division durch  $m$  denselben Rest lassen.

(2) Umkehrung zu (1)

Zu (1):

$a \equiv b \pmod{m}$  ist äquivalent mit  $m \mid a - b$  bzw.  $a = b + km$  mit ganzzahligem  $k$ . Für  $b$  nehmen wir o. B. d. A. die Zerlegung  $b = qm + r$  mit  $0 \leq r < m$  und ganzzahligem  $q$  an. Folglich ergibt sich für  $a$  die Zerlegung  $a = (k+q)m + r$ .

Zu (2):

$a = qm + r$  und  $b = pm + r$  mit  $0 \leq r < m$  und  $q, p$  ganzzahlig. Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$a - b = (q-p)m, \text{ d. h. } m \mid a-b \text{ und somit } a \equiv b(m).$$

Der Vorteil der Schreibweise  $a \equiv b(m)$  für die Teilbarkeitsbeziehung  $m \mid a-b$  liegt vor allem darin, daß mit Kongruenzen bezüglich Addition, Subtraktion und Multiplikation so gerechnet werden kann wie mit Gleichungen.

**Satz 3:** Gegeben sind die Kongruenzen

$$a_1 \equiv b_1(m)$$

$$a_2 \equiv b_2(m).$$

Dann gelten die Kongruenzen

$$a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2(m)$$

$$a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2(m)$$

$$a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2(m)$$

**Aufgabe:** Man versuche, die Beweise selbständig zu führen, indem man Definition 2 anwende!

Anders verhält es sich hingegen mit der Division. Wir wissen bereits, daß aus der Gleichung  $ax = ay$  stets  $x = y$  folgt, falls  $a \neq 0$  vorausgesetzt wird. Bei Kongruenzen ist dies jedoch nicht immer richtig. Zum Beispiel ist  $2 \cdot 5 \equiv 2 \cdot 10(10)$ , aber  $5 \not\equiv 10(10)$  bei Division durch 2.

Eine hinreichende Bedingung dafür, wann in einer diophantischen Gleichung dividiert werden darf, liefert Satz 4:

**Satz 4:** Die Kongruenz  $ax \equiv ay(m)$  kann durch  $a$  dividiert werden, falls  $(a, m) = 1$  gilt.

**Beweis:**  $ax \equiv ay(m)$  bedeutet nach Definition 2  $m \mid a(x-y)$ .

Da  $m \nmid a$  ist, folgt  $m \mid x-y$ . D. h.  $x \equiv y(m)$ .

An einem Beispiel wollen wir jetzt das "Verfahren mittels linearer Kongruenzen" anwenden lernen.

**Beispiel:** Die diophantische Gleichung  $3x - 5y = 7$  (siehe Eulersches Reduktionsverfahren) soll mit dieser Methode gelöst werden.

**1. Schritt:** Wir verwandeln die diophantische Gleichung

$3x - 5y = 7$  in eine lineare Kongruenz. Als Modul wählen wir da-



bei einem der Koeffizienten der Variablen, z. B. 5:

$3x - 5y = 7 \pmod{5}$ . Da  $-5y = 0 \pmod{5}$  und  $5 = 0 \pmod{5}$  sind, folgt durch Subtraktion  $3x = 2 \pmod{5}$ .

2. Schritt: Wir versuchen, durch geschickte Rechnung auf der linken Seite der Kongruenz den Koeffizienten 1 zu erzeugen. (Man kann beweisen, daß dies stets erreichbar ist, und zwar auf Grund der oben getroffenen Voraussetzung  $(a,b) = 1$ .)

$$\begin{array}{rcl} 3x & \equiv & 2 \pmod{5} \\ 6x & \equiv & 4 \pmod{5} \end{array} \quad | \cdot 2$$

Da  $5x = 0 \pmod{5}$  gilt, folgt unmittelbar  $x \equiv 4 \pmod{5}$ .

3. Schritt: Wir schreiben die so ermittelte Kongruenz als Gleichung auf. Mit diesem Ausdruck für  $x$  wird in die Ausgangsgleichung eingegangen und  $y$  bestimmt.

$$x = 4 + 5u; \quad 3(4+5u) - 5y = 7; \quad y = 1 + 3u$$

Ergebnis:  $x = 4 + 5u$   
 $y = 1 + 3u$  mit beliebigem ganzzahligem  $u$ .

Der Leser möge sich nun selbst weitere Gleichungen vorgeben und sie nach den angegebenen Methoden lösen.

Dr. Hartmut Menzer  
 Bereich Theoretische Mathematik

Wer eine Wissenschaft noch nicht so innehat, daß er jeden Verstoß dagegen fühlt wie einen grammatikalischen Fehler in seiner Muttersprache, der hat noch viel zu lernen.

Ist es nicht sonderbar, daß man das Publikum, das uns lobt, immer für einen kompetenten Richter hält, aber sobald es uns tadelt, es für unfähig erklärt, über Werke des Geistes zu urteilen?

Georg Christoph Lichtenberg

Preisaufgaben

N 25 Auf einer Parabel liegt das Punktepaa A,B. Gesucht wird das Paar paralleler Geraden  $AA' \parallel BB'$ , welches die Parabel in dem Punktepaa  $A',B'$  so schneidet, daß gilt:  
 $AA' : BB' = 3 : 1$ .  
 (gestellt von Prof. Dr. habil. Roman Roth, emer.)

N 26 Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis a und den Schenkeln b.  
 Man berechne das Verhältnis von In- und Umkreisradius.  
 (gestellt von Birgit Thomas, Zittau, Schülerin)  
 Lösung ohne Verwendung von Winkelfunktionen!

N 27 Auf allen Feldern eines Schachbrettes liegen Würfel. Die Flächen der Würfel und die Felder des Schachbrettes sind kongruent. Genau eine Seite eines jeden Würfels sei schwarz angestrichen. Es wird gefordert, die Würfel aus beliebiger Ausgangslage so zu drehen, daß alle schwarzen Flächen nach oben zeigen. Dabei soll nicht jeder Würfel einzeln gedreht werden, sondern immer alle Würfel, die auf einer Linie bzw. einer Reihe liegen, gemeinsam.

N 28 Man zeige, daß die drei Produkte  $(1-a)b$ ,  $(1-b)c$ ,  $(1-c)a$ , gebildet aus den positiven Zahlen  $a < 1$ ,  $b < 1$ ,  $c < 1$ , nicht gleichzeitig größer als  $\frac{1}{4}$  sein können.

N 29 Man zeige, daß für beliebige positive Zahlen a,b,c,d die Ungleichung gilt:  

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \leq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$$

N 30 Какова наибольшая степень числа 2, которую делится  $2^{n!}$  ?





# Lösungen der Bezirkssolympiade Klassen 11/12

① Für alle reellen

$$x \geq 1$$

gilt  $2x^3 > 0$  und  $x-1 \geq 0$ , also ist (2) nicht erfüllt.

Wegen  $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$  ist (3) für alle reellen

$$x \leq -1$$

nicht erfüllt; denn für sie ist  $x < 0$ ,  $x-1 < 0$  und  $x+1 \leq 0$ .

Ferner ist (3) für alle reellen  $x$  mit

$$0 \leq x < 1$$

nicht erfüllt; denn für sie ist  $x \geq 0$ ,  $x+1 > 0$  und  $x-1 < 0$ .

Für alle reellen  $x$  mit

$$-1 < x < 0$$

dagegen gilt:

Wegen  $x < 0$ ,  $x-1 < 0$  und  $x+1 > 0$  ist (3) erfüllt, wegen  $x^4 > 0$ ,  $x^2 > 0$ ,  $-2x > 0$  ist (1) erfüllt, wegen  $2x^3 < 0$ ,  $x-1 < 0$

ist (2) erfüllt. Daher erfüllen genau alle Zahlen  $x$  mit

$-1 < x < 0$  jede Ungleichung des Systems (1), (2), (3).

② Es gilt  $f(x) = x^4 - (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) - (x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16) + x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$

$$= 24x^2 + 72x + 64 = 24\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 10.$$

Daraus folgt: Für alle reellen  $x$  gilt  $f(x) \geq 10$ , und es gilt  $f(-\frac{3}{2}) = 10$ . Also nimmt die Funktion  $f$  im Fall b) einen kleinsten Funktionswert an, und dieser beträgt 10.

Ferner folgt:

Für alle (ganzzahligen)<sup>1</sup>  $x$  mit  $x \geq -1$  gilt  $x + \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}$ , also

$$f(x) \geq 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10 = 16,$$

für alle (ganzzahligen)<sup>1</sup>  $x$  mit  $x \leq -2$  gilt  $x + \frac{3}{2} \leq -\frac{1}{2}$ , also

$$-(x + \frac{3}{2}) \geq \frac{1}{2}, \text{ also } f(x) = 24 \cdot \left(-(x + \frac{3}{2})\right)^2 + 10 \geq 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10 = 16;$$

also gilt  $f(x) \geq 16$  für alle ganzzahligen  $x$ , und es gilt  $f(-1) = 16$  (sowie  $f(-2) = 16$ )<sup>1</sup>.

Also nimmt die Funktion  $f$  im Fall a) einen kleinsten Wert an, und dieser beträgt 16.

<sup>1</sup>) Diese Angaben sind an den genannten Stellen des Lösungstextes nicht erforderlich.



- 3A) Für reelle Zahlen  $a, b$  mit  $0 < a < b$  ist die in der Aufgabe genannte Ungleichung äquivalent mit
- $$a(1+a^n)(1+b^n)+1+b^n < b(1+a^n)(1+b^n)+1+a^n$$
- und dies mit

$$\frac{b^n - a^n}{b - a} < 1 + a^n + b^n + a^n b^n. \quad (1)$$

Diese Ungleichung lautet im Fall  $n = 0$

$$0 < 4,$$

im Fall  $n = 1$

$$1 < 1 + a + b + ab,$$

In diesen Fällen ist sie also für alle  $0 < a < b$  erfüllt.

Im Fall  $n = 2$  lautet (1)

$$a + b < 1 + a^2 + b^2 + a^2 b^2.$$

Auch dies ist für alle  $a, b$  mit  $0 < a < b$  erfüllt, denn für sie gilt

$$1 + a^2 + b^2 + a^2 b^2 - a - b = (a - \frac{1}{2})^2 + (b - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} + a^2 b^2 > 0.$$

Im Fall  $n = 3$  lautet (1)

$$a^2 + ab + b^2 < 1 + a^3 + b^3 + a^3 b^3.$$

Um auch dies für alle  $a, b$  mit  $0 < a < b$  zu beweisen, kann man folgendermaßen vorgehen: Für alle reellen  $x > 0$  gilt

$$\begin{aligned} (x - \frac{2}{3})^3 + (x - \frac{2}{3})^2 &= x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27} + x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} \\ &= x^3 - x^2 + \frac{4}{27}, \end{aligned}$$

$$\text{also } x^3 - x^2 = (x - \frac{2}{3})^2 (x - \frac{2}{3} + 1) - \frac{4}{27} \geq -\frac{4}{27}$$

sowie

$$\begin{aligned} (x - \frac{1}{\sqrt{3}})^3 + \sqrt{3}(x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 &= x^3 - \sqrt{3}x^2 + x - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \sqrt{3}x^2 - 2x + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= x^3 - x + \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{also } x^3 - x = (x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 (x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \geq -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Damit ergibt sich für alle  $a, b$  mit  $0 < a < b$

$$1 + a^3 - a^2 + b^3 - b^2 + a^3 b^3 - ab \geq 1 - 2 \cdot \frac{4}{27} - \frac{2}{3\sqrt{3}} > 1 - \frac{8}{27} - \frac{2}{3} > 0,$$

wie behauptet.

Im Fall  $n \geq 4$  lautet (1)

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1} < 1 + a^n + b^n + a^n b^n.$$

Man kann nun zeigen, daß schon zu (je einem  $n \geq 4$  und z.B.)

$b=1$  ein reelles  $a$  mit  $0 < a < 1$  existiert, für das (1), d.h.

$$1 + a + \dots + a^{n-1} < 2(1+a^n),$$

nicht gilt. Beispielsweise für  $a=0,9$  ist

$$a^2 > 0,8, \quad a^3 > 0,7, \quad a^4 < 0,7,$$

also

$$\begin{aligned} 1 + a + \dots + a^{n-1} &\geq 1 + a + a^2 + a^3 \\ &> 1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 = 2(1+0,7) \\ &> 2(1+a^4) \\ &\geq 2(1+a^n). \end{aligned}$$

Somit sind genau

$$n=0,1,2,3$$

die gesuchten Zahlen.

Andere Möglichkeiten für benötigte Abschätzungen sind z.B.:

$$\text{Für alle reellen } x \text{ ist } x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4};$$

$$\text{für alle } x \text{ mit } 0 < x < 1 \text{ ist } x^3 - x^2 = x(x^2 - x) \geq -\frac{1}{4}x > -\frac{1}{4},$$

$$\text{für alle } x \geq 1 \text{ ist sogar } x^3 - x^2 = x^2(x-1) \geq 0. \text{ Also gilt:}$$

$$\text{für alle reellen } x > 0 \text{ ist } x^3 - x^2 > -\frac{1}{4},$$

$$x^3 - x = (x^3 - x^2) + (x^2 - x) > -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ferner kann man aus } a + \frac{1}{1+a^n} < b + \frac{1}{1+b^n} \text{ für alle } a < b = 1$$

auch z. B. folgendermaßen herleiten, daß  $n < 4$  sein muß:

$$\text{Aus } a + \frac{1}{1+a^n} < \frac{3}{2} \text{ folgt, etwa für } a = \frac{2}{3};$$

$$\frac{1}{1+a^n} < \frac{5}{6}, \quad a^n > \frac{1}{5}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n < 5 < \left(\frac{3}{2}\right)^4.$$

- (3B) a) Wenn  $f$  den Bedingungen (1), (2) (3) genügt, so folgt durch wiederholte Anwendung von (3) zunächst:

(4) Für jede natürliche Zahl  $k \geq 1$  gilt:

$$\text{Ist } 0 \leq kx \leq 1, \text{ so ist } f(kx) \geq k \cdot f(x).$$

Weiter ergibt sich:

(5)  $f$  ist monoton steigend.

Aus  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$  folgt nämlich wegen  $0 \leq x_2 - x_1 \leq 1$  nach (3) und (1) stets  $f(x_2) = f(x_1 + x_2 - x_1) \geq f(x_1) + f(x_2 - x_1) = f(x_1)$ .

Nun erhält man:

Für jedes  $x$  mit  $\frac{1}{2} < x \leq 1$



folgt wegen (5) und (2) die Behauptung aus  
 $f(x) \leq f(1) = 1 < 2x$ ; für jedes  $x$  mit

$$\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \quad (7)$$

folgt  $0 < 2x \leq 1$ , also nach (4), (5) und (2) die Behauptung  
 aus  $2f(x) \leq f(2x) \leq f(1) = 1 < 4x$ ;

.....  
 für jedes  $n=2,3,\dots$  und jedes  $x$  mit

$$\frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n} \quad (8)$$

folgt  $0 < 2^n x \leq 1$ , also nach (4), (5) und (2) die Behauptung  
 aus  $2^n f(x) \leq f(2^n x) \leq f(1) = 1 < 2^{n+1} x$ .

Da jedes  $x$  mit  $0 < x \leq 1$  entweder die Ungleichung (6) oder  
 (7) oder für ein  $n=2,3,\dots$  die Ungleichung (8) erfüllt, ist  
 hiermit die Behauptung  $f(x) < 2x$  für alle  $x$  mit  $0 < x \leq 1$   
 bewiesen.

b) Nicht jede Funktion  $f$ , die den Bedingungen (1), (2), (3)  
 genügt, erfüllt  $f(x) \leq 1,99x$  für alle  $x$  mit  $0 < x \leq 1$ .  
 Zum Beweis ist die Angabe eines Beispiels ausreichend,  
 etwa des folgenden:  $f$  sei die Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{falls } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Für sie gelten (1) und (2), und sie erfüllt auch (3);  
 denn sind  $x_1, x_2$  reelle Zahlen mit  $0 \leq x_1 \leq 1$ ,  
 $0 \leq x_2 \leq 1$  und  $x_1 + x_2 \leq 1$ , so ist entweder  $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$   
 und dann  $x_1 \leq \frac{1}{2}, x_2 \leq \frac{1}{2}$ , also

$$f(x_1 + x_2) = 0 = f(x_1) + f(x_2)$$

oder  $\frac{1}{2} < x_1 + x_2 \leq 1$  und somit höchstens eine der Zahlen  
 $x_1, x_2$  größer als  $\frac{1}{2}$ , also

$$f(x_1 + x_2) = 1 \geq f(x_1) + f(x_2).$$

Andererseits erfüllt z. B.  $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{400}$  nicht die Unglei-  
 chung  $f(x) \leq 1,99 \cdot x$ , sondern  $1,99 \cdot x < f(x)$ ; denn für die-  
 ses  $x$  gilt

$$1,99 \cdot x = (2 - \frac{1}{100}) (\frac{1}{2} + \frac{1}{400}) < 1 = f(x).$$

4. Angenommen, für eine ganze Zahl  $k$  besitze die Gleichung

$$\frac{x}{k-4} + \frac{k}{2(k-4)} + \frac{k+4}{x} = 0 \quad (1)$$

eine Lösung  $x$ . Dann folgt durch Multiplikation mit  $x(k-4)$ , daß  $x$  auch eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + \frac{k}{2}x + k^2 - 16 = 0 \quad (2)$$

ist. Für deren Diskriminante  $\frac{k^2}{16} - k^2 + 16 = \frac{1}{16}(256 - 15k^2)$  muß somit

$$\frac{1}{16}(256 - 15k^2) \geq 0 \quad (3)$$

gelten, und  $x$  ist eine der Zahlen

$$x_{1,2} = \frac{1}{4}(-k \pm \sqrt{256 - 15k^2}). \quad (4)$$

Aus (3) folgt  $15k^2 \leq 256$ ; also kann eine ganze Zahl  $k$  nur dann die verlangte Eigenschaft haben, wenn sie

$$|k| \leq 4 \quad (5)$$

erfüllt.

Gilt (5) für eine ganze Zahl  $k$ , so folgt (3), und  $k$  hat genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn mindestens eine der zu  $k$  gemäß (4) gehörenden Zahlen  $x_{1,2}$  auch die Gleichung (1) erfüllt, und wenn alle diejenigen  $x_{1,2}$ , die auch (1) erfüllen, ganz sind.

(Dabei kann man die Feststellung, ob (1) erfüllt wird, entweder durch Einsetzen von  $k$  und  $x$  in (1) oder aber folgendermaßen treffen: Die wegen (3) existierenden Zahlen (4) erfüllen jedenfalls (2). Hieraus folgt (1), sobald man (2) durch  $x(k-4)$  dividieren kann, d. h. sobald  $k \neq 4$  und  $x \neq 0$  ist.) Hiernach ergibt sich:

$k=0$  hat die verlangte Eigenschaft; denn  $x_{1,2} = \pm 4$  erfüllen (1) und sind ganz.

$k=1$  und  $k=-1$  haben die verlangte Eigenschaft nicht; denn für diese  $k$  gilt  $\sqrt{256 - 15k^2} = \sqrt{241}$ , und daher sind die Zahlen  $x_{1,2}$  in (4) irrational.

$k=2$  und  $k=-2$  haben die verlangte Eigenschaft; denn die Zahlen in (4) lauten

$$x_{1,2} = \frac{1}{4}(-2 \pm \sqrt{196}), \text{ d. h. } x_1=3, x_2=-4$$

bzw.

$$x_{1,2} = \frac{1}{4}(2 \pm \sqrt{196}), \text{ d. h. } x_1=4, x_2=-3,$$



sie sind also ganz und erfüllen (jeweils für  $k=2$  bzw.  $k=-2$ ) auch (1).

$k=3$  und  $k=-3$  haben die verlangte Eigenschaft nicht; denn jeweils eine der Zahlen in (4) lautet

$$x_2 = \frac{1}{4} (-3 - \sqrt{121}) = -\frac{7}{2}$$

bzw.

$$x_1 = \frac{1}{4} (3 + \sqrt{121}) = \frac{7}{2},$$

ist also nicht ganz, erfüllt jedoch (1).

$k=4$  hat die verlangte Eigenschaft nicht; denn für  $k=4$  ist die linke Seite der Gleichung (1) nicht definiert (und kann schon aus diesem Grunde keine Lösung  $x$  haben).

$k=-4$  hat die verlangte Eigenschaft; denn die Zahlen in (4) lauten  $x_1=2$ ,  $x_2=0$ . Von ihnen erfüllt genau  $x_1$  die Gleichung (1), und  $x_1$  ist ganz.

Daher sind die gesuchten  $k$  genau die Zahlen

$$0, 2, -2, -4.$$

5. Angenommen, es gäbe für eine natürliche Zahl  $n$  ein regelmäßiges  $3n$ -Eck  $V=A_1 A_2 \dots A_{3n}$  und zu ihm ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem beide Koordinaten jedes Eckpunktes von  $V$  rationale Zahlen sind. Dann folgte:

$A_n A_{2n} A_{3n}$  ist ein gleichseitiges Dreieck. Höchstens eine seiner Seiten kann zur  $y$ -Achse des Koordinatensystems parallel sein, o.B.d.A. haben also  $s=A_n A_{2n}$  und  $s'=A_n A_{3n}$  Anstiegswinkel der Größen  $\alpha$  bzw.  $\alpha'$ , die von  $90^\circ$  verschieden sind. Ihre Differenz beträgt  $60^\circ$ , o.B.d.A. in der Reihenfolge

$$\alpha' - \alpha = 60^\circ.$$

$A_{kn}$  habe die Koordinaten  $(x_k, y_k)$  ( $k=1, 2, 3$ ). Dann gilt

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \tan \alpha' = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

Setzt man dies in

$$\sqrt{3} = \tan 60^\circ = \tan(\alpha' - \alpha) = \frac{\tan \alpha' - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha' \cdot \tan \alpha}$$

ein, so erhält man den Widerspruch, daß  $\sqrt{3}$  gleich einer rationalen Zahl ist.

Daher ist die eingangs gemachte Annahme falsch, w.z.b.w.

6. Zu beliebig gegebenen natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  und  $B > 1$  bilde man die  $n+1$  Zahlen

$$\begin{aligned} [1]_B &= 1, \\ [11]_B &= B+1, \\ [111]_B &= B^2+B+1, \\ &\dots\dots\dots \\ [11\dots 1]_B &= B^n+B^{n-1}+\dots+1. \end{aligned}$$

Bei Division dieser Zahlen durch  $n$  muß mindestens einer der  $n$  Reste  $0, 1, \dots, n-1$  mehrfach auftreten, d. h., es muß unter den Zahlen zwei geben, die bei Division durch  $n$  denselben Rest lassen. Subtrahiert man die kleinere dieser beiden Zahlen von der größeren, so erhält man eine Zahl  $C$  mit den behaupteten Eigenschaften.

Hinweis: Der Aufgabentext könnte die Deutung als möglich erscheinen lassen, daß für  $C$  sowohl das Vorkommen von mindestens einer Ziffer "Eins" als auch das Vorkommen von mindestens einer Ziffer "Null" gefordert wird. Der obige Lösungsweg führt auf ein solches  $C$ . Es kann aber auch vorkommen, daß bereits eine der Zahlen  $[11\dots 1]_B$  durch  $n$  teilbar ist. Die Wertung einer solchen Zahl als  $C$  im Sinne der Aufgabenstellung sollte auch akzeptiert werden.

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“

**Leiter:** Heiner Schwulow

**Chefredakteur:** Andreas Kleinwächter

**Stellvertretender Chefredakteur:** Andreas Jeschag

**Redaktion:** H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein

**Anschrift:** WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M,

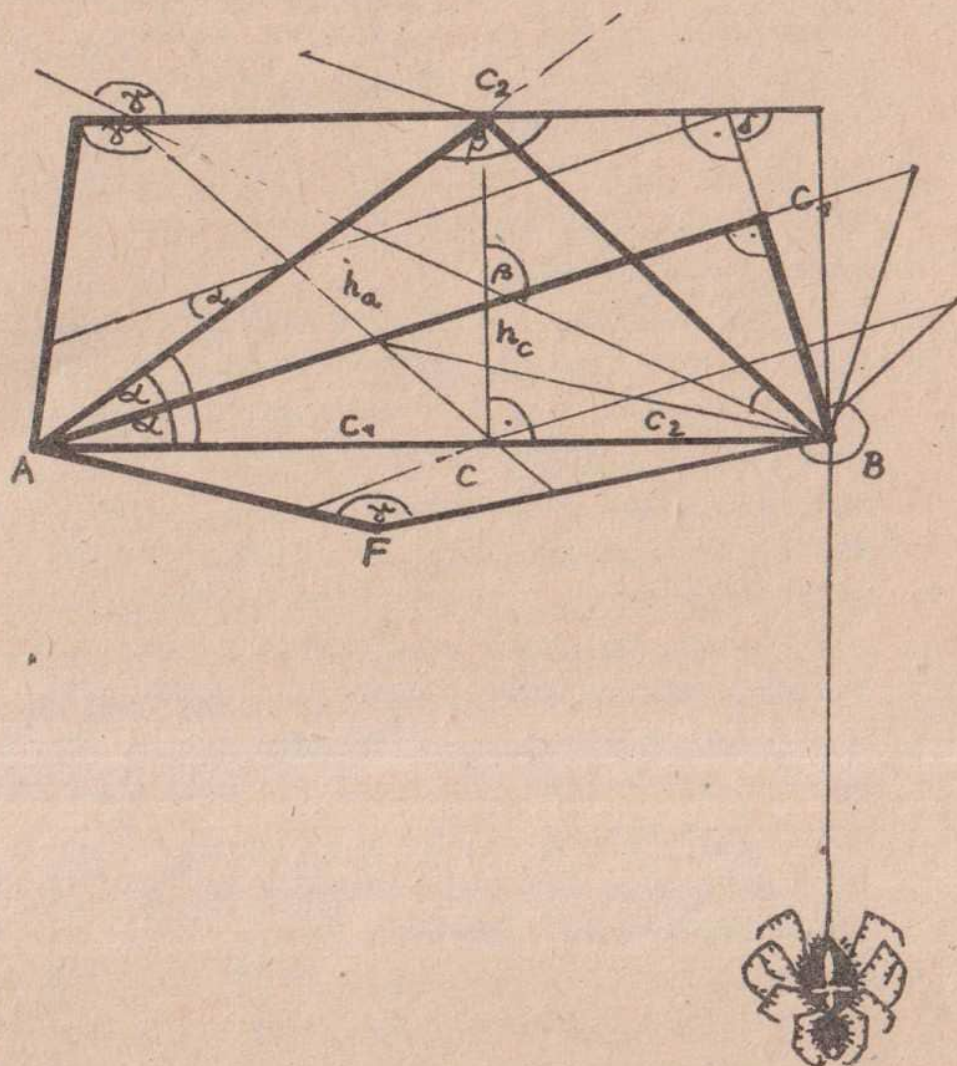
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

**Redaktionsschluß:** 20. 4. 1981





6

81

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom  
Jugendobjekt Studienvor-  
bereitung-Studienwerbung  
der Sektion Mathematik  
an der Friedrich-Schiller-  
Universität Jena

15. Jahrgang  
Index 33873  
Sonderpreis für DDR:  
0.20 M



### Die Bedeutung von Vermutungen in der Mathematik

Der Mathematiker gewinnt wie jeder Naturwissenschaftler neue Erkenntnisse in der Weise, daß er Annahmen (Hypothesen) aufstellt, sie an Beispielen und Erfahrungen prüft und nach Zusammenhängen und Analogien sucht.

Das genügt jedoch nicht, um eine Behauptung oder einen Satz zu einem festen Bestandteil der Mathematik zu machen und in ihr Gebäude einzureihen.

Die Vermutung oder Erfahrung muß durch logisches Schließen bewiesen werden, indem sie auf bereits bewiesene Sätze oder auf die Grundlagen, die der Ausgangspunkt für den Aufbau der Mathematik sind, zurückgeführt werden.

Bei fast allen Behauptungen ist der Beweis erbracht worden, wobei in Einzelfällen zwischen Behauptung und Beweis Zwischenräume von Jahren oder auch vielen Jahrzehnten liegen. In den wenigen Fällen, in denen kein vollständiger Beweis vorliegt, braucht die aufgewandte Arbeit deshalb nicht wertlos zu sein. Sie kann Anregungen zu neuen Überlegungen geben, sie kann sogar von Nutzen sein in Fällen, in denen die ursprüngliche Behauptung sich als falsch erwies.

Zwei Beispiele aus dem reichen Schaffen des französischen Mathematikers Pierre de Fermat (1601 - 1665), der zu den größten Mathematikern des 18. Jahrhunderts und auch zu den Wegbereitern der modernen Mathematik zählt, gehören zu diesen Einzelfällen. Bei Studium der pythagoreischen Zahlen im Handbuch des griechischen Mathematikers Diophant, der wahrscheinlich um 300 nach der Zeitwende in Alexandria lebte, wurde Fermat zu einer Erweiterung der aufgeworfenen Fragestellung angeregt.

Bekanntlich sind pythagoreische Zahlentripel solche Zahlen  $x, y, z$ , die der Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$  genügen und ganzzahlig sind, wie z. B. 3, 4, 5 oder 5, 12, 13. Denn es ist  $3^2 + 4^2 = 5^2$  oder  $5^2 + 12^2 = 13^2$ .

Fermat stellte sich nun die Frage, gibt es auch solche Zahlentripel für Gleichungen  $x^3 + y^3 = z^3$  oder  $x^4 + y^4 = z^4$  bzw.  $x^n + y^n = z^n$ , wenn  $n$  eine ganze positive Zahl ist. Durch zahlreiche Versuche und Untersuchungen kam er zu der Überzeugung, daß für ein beliebiges ganzzahliges  $n > 2$  die Gleichung



$x^n + y^n = z^n$  keine ganzzahligen Lösungen habe und schrieb das kühn an den Rand des von ihm gelesenen Diophant. "Er habe - so fügte er hinzu - einen wunderbaren Beweis für diese Behauptung, doch sei der Rand des Buches leider zu eng, um ihn zu fassen." Es war eine Eigenart Fermats, alle seine zahlentheoretischen Erkenntnisse an den Rand des genannten Werkes zu schreiben, um, wie man behauptet, Papier zu sparen. Man darf allerdings nicht übersehen, daß Fermat niemals seine Erkenntnisse zusammengefaßt und veröffentlicht hat. Er hat sie lediglich seinen bedeutenden Zeitgenossen wie Marin Mersenne, Blaise Pascal, René Descartes brieflich mitgeteilt, so daß er seine Randbemerkungen nur als zusätzliche Notizen bewertete. Der Hauptteil seiner Erkenntnisse wurde erst fünf Jahre nach seinem Tode der Öffentlichkeit durch seinen Sohn zugänglich gemacht, wobei allerdings der wunderbare Beweis fehlte. Das veranlaßte später Wissenschaftler, selbst einen Beweis zu suchen. Als das nicht gelang, wurde das Interesse an dieser Frage stärker. Schließlich konnte der bekannte Berliner Mathematiker Ernst Kummer (1810 - 1893) für alle Zahlen unter 100 die Richtigkeit der Fermatschen Vermutung beweisen.

Diese Frage wurde besonders aktuell, als 1906 die Göttinger Akademie der Wissenschaften einen Preis von 100.000 Mark ausschreiben konnte für das Auffinden eines vollständigen Beweises. Als das durch die Presse bekannt wurde, setzte eine Flut von Zuschriften ein. Es soll an großen mathematischen Instituten mehrerer deutscher Hochschulen jeweils einen Assistenten gegeben haben, der die Lösungen, die ausnahmslos von Nichtfachmännern stammten, beantwortete. Heute ist der Beweis für große Zahlenbereiche erbracht (für alle  $n < 2521$ ), allerdings steht der vollständige Beweis immer noch aus. Man vertritt allgemein die Ansicht, daß die Behauptung Fermats zutrifft, ob aber sein Beweis lückenlos war, darüber gibt es keine einheitliche Meinung. Ein vielleicht noch stärkeres Echo als dieser Satz hat die Behauptung Fermats hervorgerufen, daß der Ausdruck  $2^{2^n} + 1$  für beliebige nicht negative ganze Zahlen  $n$  stets Primzahlen liefere.

Fermat setzte  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$  und errechnete die



folgenden Zahlen:

| n             | 0             | 1             | 2              | 3               | 4                    |     |
|---------------|---------------|---------------|----------------|-----------------|----------------------|-----|
| $2^{2^n} + 1$ | $2^1 + 1 = 3$ | $2^2 + 1 = 5$ | $2^4 + 1 = 17$ | $2^8 + 1 = 257$ | $2^{16} + 1 = 65537$ | ... |

|                              |
|------------------------------|
| 5                            |
| $2^{32} + 1 = 4.294.967.297$ |

Die Zahlen 3, 5, 17, 257, 65537 prüfte er und fand, daß sie Primzahlen seien.

Die Zahl 4.294.967.297 prüfte er nur oberflächlich, da ihm die vollständige Untersuchung zu zeitaufwendig war. Er war aber fest davon überzeugt, daß auch sie und alle aus diesem Ausdruck errechneten Zahlen Primzahlen seien und sprach deshalb die angegebene Behauptung aus. Erst mehr als 100 Jahre später erbrachte der Schweizer Leonhard Euler (1707 - 1783), der einer der produktivsten Mathematiker aller Zeiten ist, den Beweis, daß Fermats Behauptung falsch ist, daß  $2^{32} + 1$  keine Primzahl ist.

Um dieses Ziel zu erreichen, hat Euler viele und sehr umfangreiche Überlegungen angestellt.

Dabei gelang es ihm, zwischen der Zahl 641 und der Zahl 2 folgende verknüpfende Eigenschaften zu finden:

$$641 = 5 \cdot 2^7 + 1$$

$$641 = 5^4 + 2^4.$$

Daraus folgt I.  $5 \cdot 2^7 \equiv -1 \pmod{641}$

und II.  $5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}.$

Durch doppeltes Quadrieren der Gleichung I erhält man

$$5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$$

oder  $+ 2^{32} \equiv -1 \pmod{641},$

damit hatte er den Beweis erbracht.

Das Auffinden der Zahl 641 und für weitere Untersuchungen notwendige Teiler ermöglicht der von Fermat gefundene und nach ihm benannte kleine Fermatsche Satz.

Er lautet: Wenn p eine Primzahl ist und a eine ganze Zahl, die sich nicht ohne Rest durch p teilen läßt, so ist  $a^{p-1} - 1$  durch p teilbar.



Für  $a = 2$  erhält man also

$$2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

oder

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Dieser Ausdruck hat eine Ähnlichkeit mit der Fermatschen Zahl  $2^{32} + 1$ , von der versuchsweise angenommen wird, daß sie keine Primzahl sei.

Also gilt  $2^{32} \equiv -1 \pmod{\text{einer Primzahl}}.$

Um die Gleichheit beider Ausdrücke zu erreichen, wird sie quadriert und man findet

$$2^{64} \equiv 1 \pmod{\text{einer Primzahl}}$$

oder

$$2^{p-1} \equiv 2^{64} \pmod{\text{einer Primzahl}},$$

daraus folgt

$$p - 1 = 64 \cdot m$$

$$p = 64m + 1,$$

wobei  $m$  ganzzahlig sei.

Für  $m = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$  ergibt sich folgende Tabelle:

| m                      | 1  | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|------------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Primzahl               |    |     | 193 | 257 |     |     | 449 |     | 577 | 641 |
| zusammen-<br>ges. Zahl | 65 | 129 |     |     | 321 | 385 |     | 513 |     |     |

Dividiert man nun 4.249.496.297 durch die Primzahlen 193, 257, 449, 577, 641, so findet man, daß diese Zahl teilbar ist. Es ist  $(2^{32} + 1 = 6500417 \cdot 641).$

Durch die Anwendung der Fermatschen Satzes spart man viel Arbeit, da es bis 641 116 Primzahlen gibt, die man bei der Division hätte heranziehen müssen.

Mit der modernen Rechentechnik ist nachgewiesen, daß dies nicht die einzige Primzahl ist, die durch den Fermatschen Ansatz geliefert wird.

So ist z. B. die mehr als 600stellige Zahl  $2^{2048} + 1$  keine Primzahl.

Aber die Primzahlen 3, 5, 17, 257, 65537 haben trotzdem in der Folgezeit eine Rolle gespielt und zwar in der Geometrie. Schon im Altertum war bekannt, daß reguläre Vielecke mit den Eckenzahlen  $2^n$ , 3, 5 und  $2^n \cdot 3$ ,  $2^n \cdot 5$ ,  $2^n \cdot 3 \cdot 5$  bei beliebigen

ganzzahligen  $n$  mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Ihre Konstruktion entsprach der Forderung der Griechen, daß zu der Geometrie nur Zirkel und Lineal als Hilfsmittel verwandt werden sollten. Es gelang mehr als 2000 Jahre nicht, andere Vielecke zu konstruieren, bis Ende des 18. Jahrhunderts Carl Friedrich Gauss sich mit diesem Problemkreis beschäftigte. Gauss gelang bereits als 19jährigem Studenten im Jahre 1796 die Konstruktion des regulären 17-Ecks.

Dieser Erfolg bestimmte ihn, sich nun voll und ganz dem Mathematikstudium zu widmen.

Später fand er dann, daß auch das 257-Eck und 65537-Eck ebenso konstruiert werden können.

Er bewies dann, daß nur Vielecke mit Eckenzahlen, die Fermatsche Primzahlen sind und nur sie - außer dem im Altertum bekannten - mit den klassischen Mitteln konstruiert werden können.

Übrigens ist auch das 65537-Eck konstruiert worden und das Manuskript wird in einem umfangreichen Handkoffer in der Universität Göttingen aufbewahrt.

Die behandelten Fragen stehen in unserem Jahrhundert weniger im Vordergrund des Interesses, da in der Mathematik nicht nur neue, äußerst wichtige Erkenntnisse gewonnen wurden, sondern auch ihre Erkenntnisse in zahlreichen Gebieten unseres Lebens außerordentliche Bedeutung gewonnen haben.

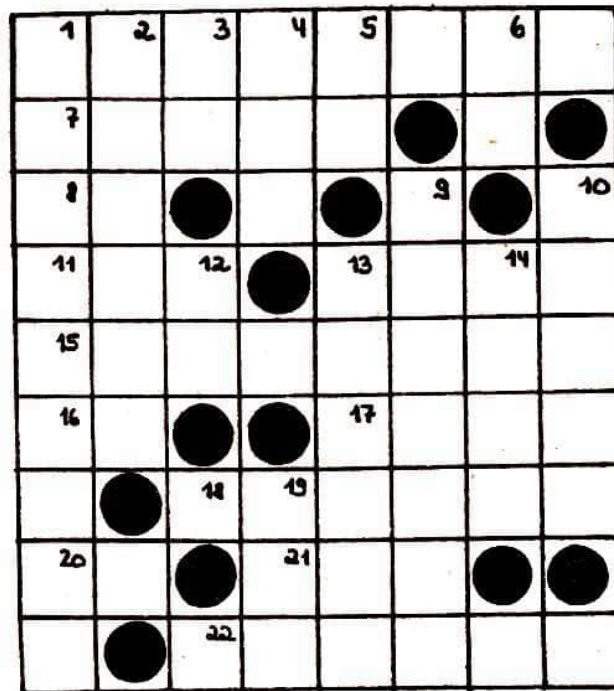
Der Mathematik sind damit neue und für die Entwicklung unserer Gesellschaft grundlegende Aufgaben gestellt, wobei auch Fermats Name z. B. in der Wahrscheinlichkeitsrechnung genannt wird.

Es ist nicht uninteressant zu wissen, daß Fermat kein Berufsmathematiker war, sondern als Jurist und Parlamentsrat in Toulouse (Südfrankreich) arbeitete und die Mathematik in seiner Freizeit betrieb.

In seiner Berufstätigkeit erntete er allerdings weniger Lob. Seine Kollegen kritisierten seine Berichte, da die in ihnen angeführten Tatsachen nicht hinreichend begründet seien.

Prof. Otto Stamfort  
Jena



Waagerecht:

1. Wesentlicher Teil eines Vielecks
7. Spuckende Tiere
8. Spezieller Logarithmus eines Kellners
11. 1/3 einer Iteration
13. Wortart im Verband
15. Polytechnik im Garten Eden
16. Schneller Rechner (Abk.)
17. Koseform für Kaderleiter
18. Bei uns seltene Frucht zur Weinherstellung
20. Hypermodern
21. Großer, ordentlicher, intelligenter Mensch
22. Zustand vor einer Prüfung

Senkrecht:

1. Ein fast runder Körper
2. Erfinder der Cantor- Nummer
3. Kleines Maß
4. Farbfernsehsystem eines Spaltes
5. United States
6. Kaputtgeschlagener Operator
9. Serum zur Beruhigung des 3. Falles
10. Sächsischer Monat
12. Ausgeschriebener Konsonant
13. Viktors Lieblingsbegriff bei einer Rechnung
14. Nichtmathematische Ansprache
19. Alter eines Engländers

## Unendlich ist nicht gleich unendlich!

Der Zahlbegriff, jedem eine "Selbstverständlichkeit", setzt ein relativ hohes Abstraktionsvermögen voraus. Wie lernt man zählen? "Sieben Kühe, sieben Häuser, ...", bis man feststellt, daß alle betrachteten Objektmenge eines gemeinsam haben: die Anzahl. Die Zahl sieben ist dabei nur eine Bezeichnungsweise, ein Hilfsmittel, um sehr unterschiedliche Objektmenge zu vergleichen. Dieser Vergleich zweier Mengen ist natürlich auch direkt möglich: Man ordnet jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zu. Wenn eine solche Zuordnung möglich ist, bei der kein Element einer Menge ungepaart bleibt, so sagt man, daß beide Mengen gleich viele Elemente enthalten. Der Mathematiker nennt solche Mengen gleichmächtig. Nach diesen Vorbemerkungen nun die exakte

### Definition:

Zwei Mengen  $M$  und  $N$  heißen gleichmächtig =<sub>Df</sub>  
Es existiert eine eindeutige Abbildung  
von  $M$  auf  $N$ . (Man schreibt dann  $M \sim N$ .)

### Beispiele:

1.  $A = \{a, b, c\}$      $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ .  
(Geben Sie eine eindeutige Abbildung von  $A$  auf  $B$  an!)
2. Die Mengen  $C = \{a, b, c, d\}$  und  $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  sind nicht-gleichmächtig. (Es wird Ihnen nicht gelingen, eine eindeutige Abbildung von  $B$  auf  $C$  oder von  $C$  auf  $B$  zu finden.)

Sehr oft gebraucht man die Begriffe "endliche Menge" und "unendliche Menge" (z.B.: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.). Anschaulich ist jedem klar, was damit gemeint ist, aber das kann einen Mathematiker natürlich nicht befriedigen. Mit Hilfe des Begriffs der Gleichmächtigkeit kann man sehr gut die Endlichkeit bzw. Unendlichkeit von Mengen charakterisieren. Sie können selbst nachprüfen, daß die Definition gerade das ausdrückt, was Sie unter diesen Begriffen verstehen.



Definition:

Eine Menge heißt endlich  $=_{Df}$   
 Es gibt keine echte Teilmenge  $N$  von  $M$  (d.h.  $N \subseteq M$   
 und  $N \neq M$ ) mit der Eigenschaft  $N \sim M$ .

Folgerung: Eine Menge  $M$  ist unendlich (nicht endlich), wenn  
 es eine echte Teilmenge  $N$  von  $M$  gibt, so daß  $N \sim M$ .

Beispiel:

Wir behaupten, daß die Menge aller natürlichen Zahlen  
 ( $N_z$ ) unendlich ist.

Nachweis:

Die Menge aller geraden natürlichen Zahlen ( $GN_z$ ) ist offensichtlich eine echte Teilmenge von  $N_z$ .

Wir definieren folgende Zuordnung  $f$ :

|   |   |   |   |   |     |        |
|---|---|---|---|---|-----|--------|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | $N_z$  |
| ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ... |        |
| 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | ... | $GN_z$ |

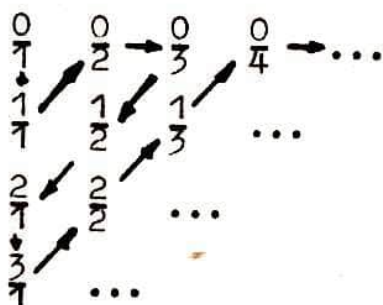
Offenbar ist  $f(n) = 2n$  ( $n \in N_z$ ) eine eineindeutige Abbildung, die jeder natürlichen Zahl eine gerade Zahl zuordnet. Jede gerade Zahl  $k$  kommt auch als Bild einer natürlichen Zahl vor (nämlich von  $k/2$ ).  $f$  ist also eine eineindeutige Abbildung von  $N_z$  auf  $GN_z$ .

Also ist  $N_z$  eine unendliche Menge.

Man kann zeigen, daß die Menge der rationalen Zahlen  $P$  - die ja auf den ersten Blick "viel größer" erscheint - der Menge  $N_z$  gleichmächtig ist: Jede rationale Zahl läßt sich bekanntlich in der Form

$$\frac{p}{q} \text{ bzw. } -\frac{p}{q} \quad (p, q \in N_z, \quad q \neq 0)$$

darstellen. Im folgenden Schema erfassen wir sämtliche positiven Brüche:



Wir zählen nun die rationalen Zahlen in folgender Weise (der Pfeilrichtung folgend) ab, wobei natürlich jede Zahl nur einmal aufgeführt wird (Brüche kürzen!).

|              |              |              |               |                |              |              |              |              |     |
|--------------|--------------|--------------|---------------|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----|
| 1            | 2            | 3            | 4             | 5              | 6            | 7            | 8            | 9            | ... |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$  | $\downarrow$   | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ |     |
| 0            | 1            | -1           | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 2            | -2           | 3            | -3           | ... |

Offenbar wird so jeder natürlichen Zahl genau eine rationale Zahl zugeordnet, und jede rationale Zahl wird genau einmal erfaßt. Wir haben also eine eindeutige Abbildung von  $N_z$  auf  $P$  konstruiert. Es gilt also  $N_z \sim P$ .

Mengen, die zu  $N_z$  gleichmächtig sind, heißen abzählbare Mengen. Uns interessiert nun die Frage, ob alle unendlichen Mengen abzählbar sind. Wir betrachten das reelle Intervall  $[0,1]$ . Nehmen wir an, daß die Menge der reellen Zahlen dieses Intervalls abzählbar ist. Wir können dann alle Elemente dieser Menge in ihrer Dezimalbruchdarstellung in einer Reihe aufschreiben:

$$0, \alpha_1^1 \alpha_2^1 \alpha_3^1 \dots$$

$$0, \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots$$

$$0, \alpha_1^3 \alpha_2^3 \alpha_3^3 \dots$$

$$\vdots$$

$$(\alpha_i^j \in \{0,1,\dots,9\})$$

$$\text{Die Zahl } d = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \text{ mit } \beta_i =_{\text{Df}} \begin{cases} 2 & \text{falls } \alpha_i^i \neq 2 \\ 3 & \text{falls } \alpha_i^i = 2 \end{cases}$$

ist eine reelle Zahl, aber von allen aufgeführten verschieden. Folglich war unsere Annahme falsch, daß wir alle reellen Zahlen aus  $[0,1]$  in einer abzählbaren Reihe aufschreiben können. Solche unendlichen Mengen, die nicht abzählbar sind, heißen überabzählbar.

Wir können also auch die unendlichen Mengen noch nach ihrer Mächtigkeit klassifizieren - unendlich ist nicht immer gleich unendlich!

**Bemerkung:** Wenn man bei einer Funktion davon spricht, daß ihr Wert an einer Stelle "gegen unendlich geht", so bedeutet dies, daß ihr Wert über alle Grenzen wächst. Hierbei ist die Frage, ob die Funktion "gegen abzählbar oder überabzählbar unendlich" strebt, natürlich nicht sinnvoll.



## Preisaufgaben

- N 31 Eine Fahne bestehe aus 13 horizontalen Streifen, die rot, gelb und blau gefärbt sein können. Wieviel verschiedene Farbgebungen gibt es, bei denen keine benachbarten Streifen die gleiche Farbe haben?

- N 32 Auf einer ebenen Wiese steht eine Pappel. Aus 100, 200 und 300 Meter Entfernung wird gemessen, unter welchem Winkel die Spitze der Pappel vom Boden aus zu sehen ist. Die Summe dieser Winkel beträgt  $90^\circ$ . Wie hoch ist die Pappel?

- N 33 Man beweise die Ungleichung

$$\frac{3}{a+b+c} < \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

für  $a, b, c > 0$ .

- N 34 Seien  $a, b, c$  die Seiten eines Dreiecks, in dem der der Seite  $a$  gegenüberliegende Winkel gleich  $60^\circ$  ist. Man beweise die Gleichung

$$\frac{3}{a+b+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}.$$

- N 35 Für welche  $x$  gilt

$$5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}.$$

- N 36 Показать, что для любых двух положительных чисел произведение их суммы на сумму обратных величин не меньше четырех.

## Lösungen

### Aufgabe M 55

Wir schreiben die in der Aufgabe gegebene Gleichung in der Form von

$$a \cdot \cos^2 x + c = -b \cdot \cos x \quad (1)$$

Dann erfüllen die vier Zahlen  $a, b, c$  und  $\cos x$  offenbar auch die Gleichung

$$a^2 4\cos^4 x + (4ac - 2b^2) 2\cos^2 x + 4c^2 = 0 \quad (2)$$

Es gilt

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \quad (3)$$

Setzt man (3) in (2) ein, so erhält man

$$a^2 [\cos(2x) + 1]^2 + (4ac - 2b^2) [\cos(2x) + 1] + 4c^2 = 0$$

Die Umordnung nach Potenzen von  $(2x)$  ergibt:

$$a^2 \cos^2(2x) + (2a^2 + 4ac - 2b^2) \cos(2x) + (a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2) = 0$$

Das ist eine quadratische Gleichung in  $\cos 2x$ .

Für  $a=4$ ,  $b=2$ ,  $c=-1$  erhält man

$$a^2=16, \quad 2a^2+4ac-2b^2=8, \quad a^2+4ac-2b^2+4c^2=-4.$$

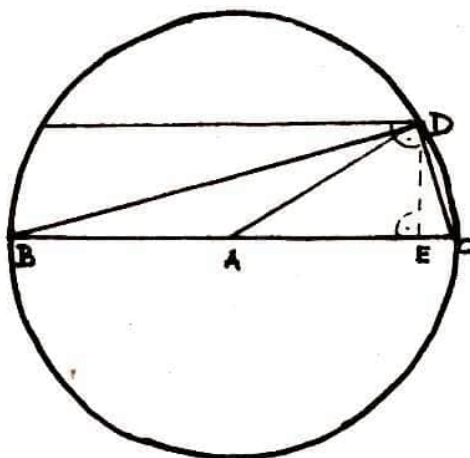
Wir erhalten somit für  $\cos(2x)$  die Gleichung:

$$4\cos^2(2x) + 2\cos(2x) - 1 = 0$$

Die Gleichung für  $\cos(2x)$  hat also die gleichen Koeffizienten wie die Gleichung für  $\cos x$ .

### Aufgabe M 56

#### Konstruktionsbeschreibung



Um den Punkt A wird ein Kreis mit dem Radius  $r = \frac{c}{2}$  geschlagen. (Abb.)

Dann wird ein beliebiger Durchmesser eingezeichnet, der den Kreis in den Punkten B und C schneidet. Man zeichnet nun die Parallele zu  $\overline{BC}$  im Abstand von  $\frac{c}{4}$ . Sie schneidet den Kreis in



D. Werden die Punkte B und C mit D verbunden, so ist das Dreieck BCD das gesuchte Dreieck.

$$\text{Beweis: } BD \cdot DC = 2DE \cdot AC = \frac{c^2}{4}$$

$$\text{wegen } \triangle BCD = 2\triangle ADC; AC = \frac{c}{2}; DE = \frac{c}{4}.$$

$$\text{Weiterhin ist } AD = \frac{c}{2}, \text{ also } AD^2 = \frac{c^2}{4} = BD \cdot DC.$$

#### Aufgabe M 57

a) Sei  $m$  eine natürliche Zahl.

Behauptung:  $2^{3m}-1$  ist durch 7 teilbar.

Beweis: vollst. Ind.:

$$m=0: 2^{3m}-1 = 0 \equiv 0(7)$$

$$m=k: \text{ Sei } 2^{3k}-1 \equiv 0(7)$$

$$\text{Es ist } 2^{3(k+1)} = 2^{3k+3} = 2^{3k} \cdot 8 \equiv (1 \cdot 8)(7) \equiv 1(7)$$

$$\text{und somit } 2^{3(k+1)}-1 \equiv 0(7).$$

$$\text{Ferner ist: } 2^{3m+1} = 2^{3m} \cdot 2 \equiv 2(7)$$

$$2^{3m+2} = 2^{3m+1} \cdot 2 \equiv 4(7).$$

Folglich ist für alle  $n=3m$  und nur für diese die Zahl  $2^n-1$  durch 7 teilbar.

b) Für alle natürlichen Zahlen läßt  $2^n$  bei Division durch 7 den Rest 1, 2 oder 4, niemals aber den Rest  $-1 \equiv 6(7)$ .

Also ist  $2^{n+1}$  niemals durch 7 teilbar.

#### Aufgabe M 58

Man beginne mit einem Wissenschaftler und nenne ihn X. Er schreibt an 16 andere, folglich an mindestens 6 über dasselbe Thema, das sei o. B. d. A. Thema 1.

Würden von diesen sechs Wissenschaftlern auch nur zwei untereinander über Thema 1 schreiben, so wäre die Behauptung schon bewiesen.

Nehmen wir also an, alle behandeln Thema 2 oder 3. Einen der 6 Wissenschaftler nenne man Y. Dieser schreibt sich mit 5 oder 6 Wissenschaftlern und zwar an mindestens 3 davon zum selben Thema (o.B.d.A. Thema 2).

Es bleiben also diese 3 Wissenschaftler A,B,C übrig.  
 Sie müßten sich alle zum Thema 3 schreiben (sonst gibt es eine Gruppe Y,A,B oder Y,A,C oder Y,B,C zum Thema 2).  
 Damit ist die Behauptung bewiesen. Es gibt mithin stets mindestens ein solches Tripel.

### Aufgabe M 59

Sei  $m$  nicht durch 5 teilbar.

Falls  $m$  durch 5 teilbar ist, so ist es auch  $d$ , was im Widerspruch zur Aufgabe steht.

Folglich kann man  $m$  durch  $5k+r$  darstellen, wobei  $k$  eine ganze Zahl ist und  $r$  eine der Zahlen 1,2,3,4. In Abhängigkeit davon, ob  $r=1$ ,  $r=2$ ,  $r=3$  oder  $r=4$  ist, wählen wir  $n=1$ ,  $n=3$ ,  $n=2$  oder  $n=4$ . Dann läßt das Produkt  $m \cdot n$  bei Division durch 5 immer den Rest 1.

Es sei  $A=am^3+bm^2+cm+d$  und

$$B=a+bn+cn^2+dn^3.$$

Wir bilden den Ausdruck  $An^3-B$ .

Es ist

$$An^3-B=a(m^3n^3-1)+bn(m^2n^2-1)+cn^2(mn-1)=$$

$$=(mn-1) [a(m^2n^2+mn+1)+bn(mn+1)+cn^2].$$

Da  $mn-1$  immer durch 5 teilbar ist (bei obiger Wahl von  $n$ ), ist auch  $An^3-B$  durch 5 teilbar.

Da nach Voraussetzung  $A$  durch 5 teilbar ist, ist  $An^3-B$  genau dann durch 5 teilbar, wenn auch  $B$  durch 5 teilbar ist, w.z.b.w.

Mit wieviel tausend kleinen Mitteln muß sich der Mensch abgeben, ehe er mit etwas Großem sich beschäftigen kann.

Jean Paul



---

## Das Naturgeheimnis

Von dem großen Physikerpaar Robert Bunsen und Gustav Kirchhoff, die nach Bunsens Erfindung des Bunsenbrenners die Spektralanalyse begründeten, jene Methode, die uns das stoffliche Wesen der Körper und damit auch der fernsten Sterne erkennen läßt, erzählen sich die Studenten in Heidelberg folgende amüsante Geschichte: Die beiden Herren wandelten einst, in gelehrte Gespräche vertieft, durch den sonnigen Garten ihres Hauses in Heidelberg. Dort stand auf dem Rasen eine der großen, innen versilberten spiegelnden Zierkugeln, wie sie früher Mode waren. Im Vorüberschreiten strich Bunsen spielerisch mit der Hand über diese Kugel und fand sie auf der der Sonne abgewandten Seite merkwürdigerweise ganz warm, während die andere Seite, die der Sonne zugekehrt war, sich kühl anfühlte. Bunsen machte Kirchhoff auf diesen Widerspruch aufmerksam; der fühlte ebenfalls die beiden Kugelhälften an und war nicht minder erstaunt. Lange debattierten die beiden Forscher über die Ursache; sie setzten sich auf eine Rasenbank in der Nähe und erwogen alle physikalischen Gesetze, die hier in Frage kämen, um das Rätsel zu lösen, daß eine Glaskugel auf der der Sonne zugekehrten Seite kühl, auf der der Sonne abgewandten Seite dagegen warm sei - ja, Bunsen glaubte mit Hilfe einer scharfsinnigen Theorie sogar beweisen zu können, daß es eigentlich so sein müsse. Da kam der Gärtner vorüber und löste mit einem Schlage das Problem in sehr einfacher Weise: Er drehte nämlich die Kugel herum, so daß nun die Schattenhälfte zur Sonnenhälfte wurde. "Das tue ich immer, wenn ich vorübergehe, sonst wird die eine Hälfte schneller blind als die andere", sagte er, und die beiden gelehrten Herren gingen etwas verblüfft und um eine Erfahrung reicher in ihr Laboratorium.

- Bruno H. Bürgel -

---

---

## Das Nordlicht

Der Physiker Dove stellte bei einer Prüfung die Frage nach der Entstehung des Nordlichtes. Er wollte damit den Prüfling auf die elektromagnetischen Vorgänge im allgemeinen hinlenken und dann das Examen in dieser Richtung fortsetzen. Der Kandidat stutzte, überlegte eine Weile, wurde immer verlegener und stieß schließlich in Ängsten schwitzend hervor: "Ich habe es gestern noch gewußt, aber ich habe es wieder vergessen!" - "Das ist wirklich ein gar nicht wiedergutzumachendes Unglück und ein großer Verlust für die Wissenschaft", war die Antwort. "Nun sind Sie der einzige Mensch auf der Erde gewesen, der das gewußt hat, und mußten es wieder vergessen!"

- Wilhelm Spohr -

---

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“

**Leiter:** Heiner Schwulow

**Chefredakteur:** Andreas Kleinwächter

**Stellvertretender Chefredakteur:** Andreas Jeschag

**Redaktion:** H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein

**Anschrift:** WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

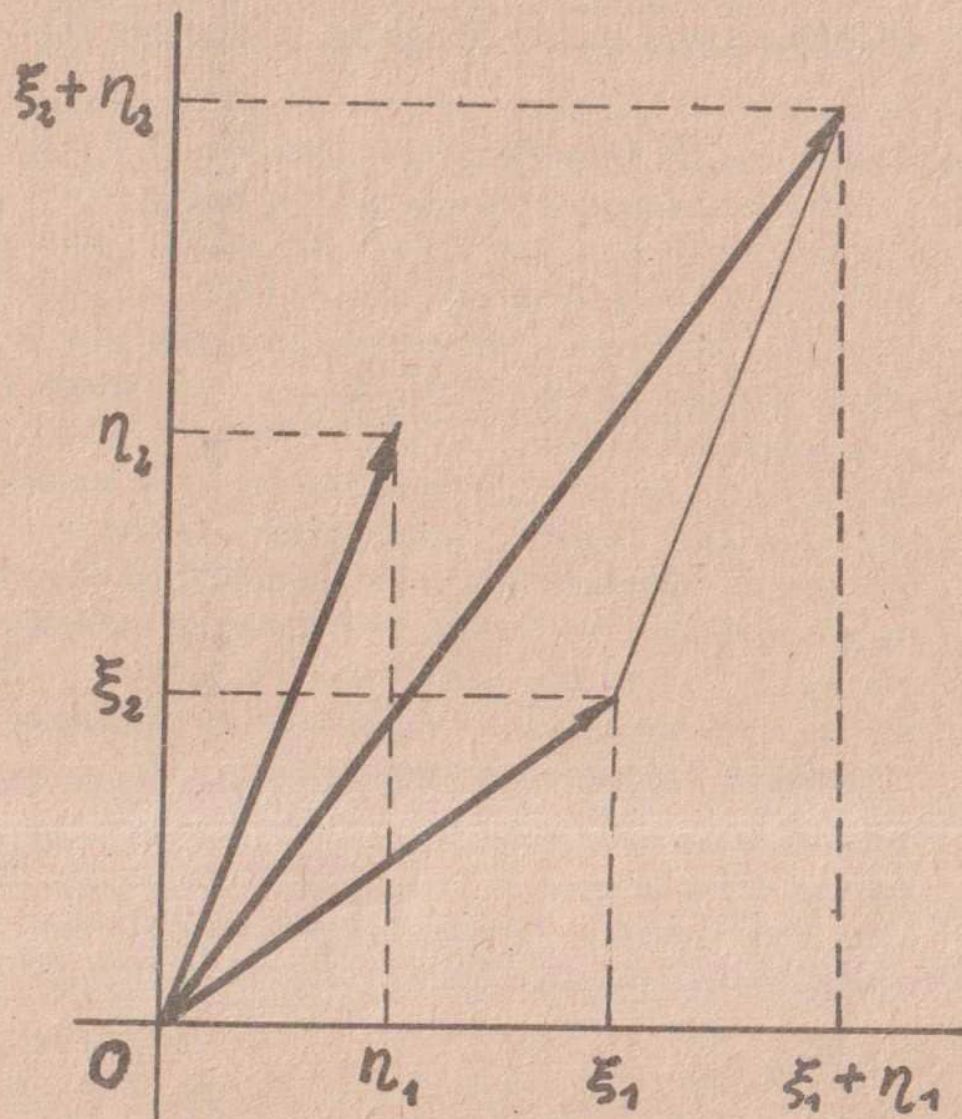
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

**Redaktionsschluß:** 15.5.81

**Titelbild:** Wolfgang Schäfer





7\8

81

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom  
Jugendobjekt Studienvor-  
bereitung-Studienwerbung  
der Sektion Mathematik  
an der Friedrich-Schiller-  
Universität Jena

15. Jahrgang  
Index 33873  
Sonderpreis für DDR:  
0.40 M



## Einführung in die lineare Algebra (I)

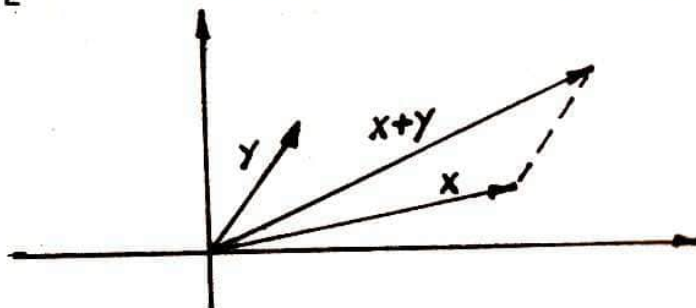
Im ersten Studienjahr der Mathematiker gibt es neben einer Vorlesung zur "Differential- und Integralrechnung" einen Kurs zur "Linearen Algebra und analytischen Geometrie". In diesen beiden Vorlesungen werden die Grundlagen für die weitere Ausbildung in den höheren Studienjahren gelegt. Einige Grundkenntnisse der "Linearen Algebra" sind sicherlich schon aus der Schule bekannt, wie z. B. das Rechnen mit Vektoren, das Lösen linearer Gleichungssysteme u. a.

Wir wollen versuchen, einige wesentliche Aussagen und Begriffe der "Linearen Algebra" zu erläutern, wobei wir weniger Gewicht auf die strenge mathematische Ausführung legen, sondern mehr an Beispielen die Theorie zu erläutern versuchen. In einem zweiten Teil, der in dem nächsten Heft erscheinen wird, steht dann die strenge mathematische Ausführung mit genauen Definitionen, Sätzen und Beweisen im Vordergrund.

Noch eine Vorbemerkung. In diesem und auch im folgenden Artikel werden wir nur reelle Zahlen betrachten. Für die Anwendung ist aber eine Theorie mit komplexen Zahlen ebenso wichtig. Wer also möchte, kann alle Aussagen auf komplexe Zahlen übertragen.

### 1. Vektoren

Unter einem Vektor stellt man sich einen Strich mit einem Pfeil vor, der an einem Punkt der Ebene beginnt und in einem anderen endet. Wir wollen uns hier nur mit solchen Vektoren beschäftigen, die im Nullpunkt anfangen. Dann läßt sich jeder solche Vektor  $x$  eindeutig durch die Koordinaten  $(\xi_1, \xi_2)$  seines Endpunktes beschreiben, d. h.  $x = (\xi_1, \xi_2)$ . Die Addition zweier Vektoren erfolgt nun nach folgender Regel: Für  $x = (\xi_1, \xi_2)$  und  $y = (\eta_1, \eta_2)$  setzt man  $x + y := (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2)$ .

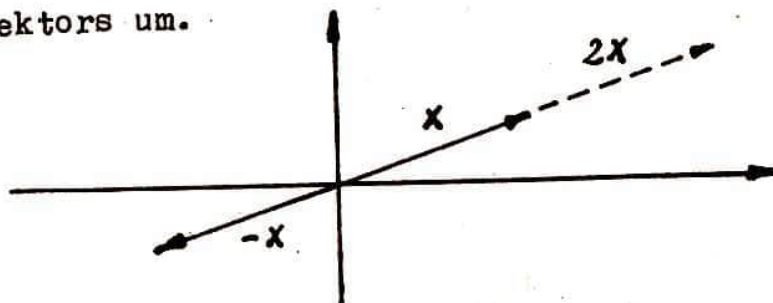




Weiterhin lassen sich Vektoren mit reellen Zahlen multiplizieren und zwar für  $x = (\xi_1, \xi_2)$  und eine reelle Zahl  $\alpha$  durch

$$\alpha \cdot x := (\alpha \xi_1, \alpha \xi_2).$$

Geometrisch entspricht das einer Streckung ( $\alpha \geq 1$ ) bzw. einer Stauchung ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) des Vektors. Für negative  $\alpha$  kehrt sich die Richtung des Vektors um.



Eine besondere Rolle spielt der sogenannte Nullvektor  $0 = (0,0)$ , der dadurch charakterisiert wird, daß

$$0 + x = x$$

für alle Vektoren  $x$  gilt.

Bei der Addition und Multiplikation mit einer reellen Zahl gelten nun eine Reihe von Rechengesetzen, wie z. B.

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

oder

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

In dem strengen axiomatischen Zugang sucht man nun die wesentlichen Rechengesetze heraus, die man an den Anfang als Axiome stellt. Dies führt in unserem Beispiel zum Begriff des Vektorraumes, den wir später erläutern werden. Ausgehend von diesen Axiomen wird dann die Theorie entwickelt. Man nennt diese Vorgehensweise den axiomatischen Aufbau einer Theorie. Dies hat den Vorteil, daß sich alle Ergebnisse mathematisch streng aus den Axiomen ableiten lassen. Andererseits erschwert ein solcher Zugang i. a. das inhaltliche Verständnis und entspricht meist nicht der historischen Entwicklung der Theorie. Seit etwa 40 Jahren hat sich aber die axiomatische Methode in der Mathematik durchgesetzt.

Für die Anwendung ist es nun notwendig, den Begriff des Vektors zu verallgemeinern.

Sei  $n$  eine natürliche Zahl. Dann bilden wir  $n$ -Tupel

$x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , wobei jedes  $\xi_i$  eine reelle Zahl ist. Zwei solche  $n$ -Tupel  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  und  $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  werden



nun gleich genannt ( $x=y$ ), wenn  $\eta_1 = \xi_1, \dots, \eta_n = \xi_n$  gilt. Mit  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen wir die Gesamtheit aller möglichen  $n$ -Tupel von reellen Zahlen. Die Addition und Multiplikation mit einer reellen Zahl werden nun genauso wie oben definiert, nämlich

$$x+y := (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n)$$

und

$$\alpha \cdot x := (\alpha \xi_1, \dots, \alpha \xi_n).$$

Ebenso ist  $0 = (0, \dots, 0)$  der Nullvektor.

Die Notwendigkeit, Vektoren für  $n > 3$  zu untersuchen, folgt aus der Tatsache, daß sich viele Dinge eben nicht nur mit 2 oder 3 reellen Zahlen beschreiben lassen. Z. B., wenn sich ein Teilchen im Raum bewegt, so interessieren neben dem Ort die Geschwindigkeit in jede der drei Richtungen der Koordinaten, die Beschleunigung o. ä. m. Oder betrachten wir eine chemische Reaktion. Zu jedem festen Zeitpunkt sind viele Parameter, wie z. B. Druck, Temperatur, Konzentration der Stoffe u. ä. m., von Interesse, die sich durch ein  $n$ -Tupel beschreiben lassen, wobei  $n$  i. a. größer als 3 ist.

## 2. Lineare Unabhängigkeit

Der Begriff der linearen Unabhängigkeit spielt eine zentrale Rolle in der Theorie. Er ist allerdings etwas schwerer verständlich.

Nehmen wir  $m$  Vektoren  $x_1, \dots, x_m$  aus  $\mathbb{R}^n$ .

Dann spannen diese Vektoren eine Ebene  $\text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$  in  $\mathbb{R}^n$  durch den Nullpunkt  $0 = (0, \dots, 0)$  aus  $\mathbb{R}^n$  auf, und zwar ist  $x \in \text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$ , falls es reelle Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  mit

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m$$

gibt. Beispielsweise spannen die Vektoren  $(1, 0, 0)$  und  $(0, 1, 0)$  im  $\mathbb{R}^3$  genau die Ebene von Vektoren auf, die in der dritten Koordinate eine Null haben. Im Spezialfall  $m=1$  gilt  $\text{span}\{x_1\} = \{\alpha x_1, \alpha \text{ reell}\}$ , d. h. man erhält die durch  $x_1$  und  $0$  erzeugte Gerade. Nehmen wir nun noch ein  $x \in \mathbb{R}^n$  hinzu. Dann sind zwei Fälle möglich:

- (1)  $x$  gehört zur von  $x_1, \dots, x_m$  aufgespannten Ebene
- (2)  $x$  gehört nicht zu dieser Ebene.



Als Beispiel nehmen wir  $x = (1, 1, 1)$ , der nicht zu der von  $(1, 0, 0)$  und  $(0, 1, 0)$  aufgespannten Ebene gehört.

Im 2. Fall sagt man nun, daß  $x$  von  $x_1, \dots, x_m$  linear unabhängig ist. Er heißt von  $x_1, \dots, x_m$  linear abhängig, falls der 1. Fall eintritt.

Anders ausgedrückt, der 2. Fall tritt genau dann ein, wenn  $\text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$  echt in  $\text{span}\{x_1, \dots, x_m, x\}$  enthalten ist, durch die Hinzunahme von  $x$  die aufgespannte Ebene größer wird.

Wir kommen nun zur entscheidenden Definition:

Eine Menge  $\{x_1, \dots, x_m\}$  von Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$  heißt linear unabhängig, falls jedes  $x_j$  linear unabhängig von  $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m$  ist, d. h. für jedes  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , gehört  $x_j$  nicht zur Ebene, die von den restlichen Elementen aufgespannt wird. Läßt man in diesem Fall nur einen beliebigen Vektor weg, so wird die aufgespannte Ebene echt kleiner, es werden also alle  $m$  Vektoren zum Aufspannen der Ebene benötigt, keiner ist überflüssig.

Sind  $x_1, \dots, x_m$  nicht linear unabhängig, so nennt man sie linear abhängig, d. h. es gibt mindestens ein  $x_j$ , das zu der von den restlichen Elementen erzeugten Ebene gehört, dieses  $x_j$  ist also überflüssig. In Formeln kann man es wie folgt ausdrücken:

$x_1, \dots, x_m$  sind genau dann linear unabhängig, wenn aus  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0$  (Nullvektor) stets  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$  folgt. Versucht dies zu beweisen.

Wie erkennt man nun, ob eine Menge  $\{x_1, \dots, x_m\}$  von Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$  linear unabhängig ist oder nicht? Zur Beantwortung dieser Frage ist es nützlich, einen weiteren Begriff einzuführen:

Nehmen wir an, man kann  $k$  Vektoren aus  $\{x_1, \dots, x_m\}$  finden, die linear unabhängig sind. Die größtmögliche Zahl  $k$  mit dieser Eigenschaft nennt man nun den Rang der Elemente  $x_1, \dots, x_m$ . Der Rang ist also diejenige Zahl mit  $0 \leq k \leq m$ , für die es  $k$  linear unabhängige Elemente gibt, aber jeweils  $k+1$  Vektoren sind linear abhängig (falls  $k < m$ ). Insbesondere sind also

$x_1, \dots, x_m$  genau dann linear unabhängig, wenn der Rang  $m$  ist.

Die obige Frage kann man nun viel allgemeiner stellen:

Wie berechnet man den Rang von  $m$  Vektoren  $x_1, \dots, x_m$ ?

Ohne Beweis möchten wir folgendes feststellen:



- (1) Beim Vertauschen der Vektoren ändert sich der Rang nicht.  
 (2) Bei der Addition des Vielfachen eines Vektors zu einem anderen Vektor bleibt der Rang erhalten. Z. B. haben  $\{x_1, x_2\}$  und  $\{x_1 + \alpha x_2, x_2\}$  den gleichen Rang.

Das Ziel besteht also darin, mit Hilfe von diesen beiden Operationen solche Vektoren zu erzeugen, für die man sehr einfach den Rang berechnen kann. Nehmen wir also an, daß der Vektor  $x_1$  an der Stelle  $r_1$  ein von Null verschiedenes Element besitzt,  $x_2$  an der Stelle  $r_2$  mit  $r_2 > r_1$ ,  $x_3$  an der Stelle  $r_3$  mit  $r_3 > r_2$  usw. Dann sind  $x_1, \dots, x_m$  linear unabhängig, denn natürlich liegt kein Vektor in der Ebene, die die restlichen aufspannen. Beispielsweise sind die Vektoren

$$x_1 = (0, 1, 1)$$

$$x_2 = (0, 0, 1)$$

linear unabhängig ( $r_1=2$ ,  $r_2=3$ ).

Tauchen bei den Operationen Nullvektoren auf, so waren diese Elemente linear abhängig und können weggelassen werden. Wieder ein Beispiel:

$$x_1 = (1, 1, 1)$$

$$x_2 = (1, -1, 1)$$

$$x_3 = (3, -1, 3)$$

|                  |                   |                   |
|------------------|-------------------|-------------------|
| (1) $x_2 - x_1:$ | (2) $x_3 - 3x_1:$ | (3) $x_3 - 2x_2:$ |
| $(1, 1, 1)$      | $(1, 1, 1)$       | $(1, 1, 1)$       |
| $(0, -2, 0)$     | $(0, -2, 0)$      | $(0, -2, 0)$      |
| $(3, -1, 3)$     | $(0, -4, 0)$      | $(0, 0, 0)$       |

Somit ist der Rang der Vektoren 2; sie sind also linear abhängig.

Überlegt Euch weitere Beispiele!

Eine interessante Folgerung ergibt sich aus diesem Verfahren:

Sind  $x_1, \dots, x_m$  aus  $R^n$  linear unabhängig, so gilt  $m \leq n$ .

Oder anders ausgedrückt:

$m$  Vektoren in  $R^n$  mit  $m > n$  sind stets linear abhängig.

### 3. Die Basis

Besonders interessant ist der Fall, daß man  $n$  linear unabhängige Vektoren  $x_1, \dots, x_n$  im  $R^n$  hat. Wie wir gesehen haben, ist



das ja die maximale Anzahl linear unabhängiger Elemente. Nimmt man nun ein beliebiges  $x$  aus  $R^n$ , so muß  $x$  stets linear abhängig sein von  $x_1, \dots, x_n$ , d. h.  $x$  gehört zur von  $x_1, \dots, x_n$  aufgespannten Ebene. Da dies aber für alle  $x$  aus  $R^n$  gilt, haben wir gezeigt:

$$\text{span}\{x_1, \dots, x_n\} = R^n,$$

d. h., zu jedem  $x \in R^n$  gibt es reelle Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  mit

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$$

Wir zeigen nun:  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sind eindeutig bestimmt, d. h. die Darstellung ist eindeutig.

Beweis: Nehmen wir an, daß neben der obigen Darstellung auch noch

$$x = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$$

gilt, wobei die  $\beta_j$  nicht alle gleich den  $\alpha_j$  sind, sei z. B.  $\beta_i \neq \alpha_i$ . Durch Umstellen folgt dann

$$(\beta_i - \alpha_i)x_i = (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{i-1} - \beta_{i-1})x_{i-1} + (\alpha_{i+1} - \beta_{i+1})x_{i+1} + \dots + (\alpha_n - \beta_n)x_n,$$

woraus wegen  $\beta_i - \alpha_i \neq 0$  die Aussage

$$x_i = \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_{i-1} x_{i-1} + \gamma_{i+1} x_{i+1} + \dots + \gamma_n x_n$$

mit

$$\gamma_j = \frac{\alpha_j - \beta_j}{\beta_i - \alpha_i}, \quad j \neq i$$

gilt.

Also gehört  $x_i$  zur von den restlichen Elementen aufgespannten Ebene, was im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von  $x_1, \dots, x_n$  steht. Damit ist die Aussage bewiesen.

Ein linear unabhängiges System  $x_1, \dots, x_n$  aus  $R^n$  nennt man nun eine Basis.

Jedes Element aus  $R^n$  läßt sich dann in eindeutiger Weise als Summe  $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$  darstellen.

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$  heißen die Koordinaten von  $x$  bezüglich  $x_1, \dots, x_n$ .

Beispiel 1: Sei  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$ ,  
 $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ .

Dann sind  $e_1, \dots, e_n$  linear unabhängig und bilden eine Basis.

$x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  läßt sich dann als

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$$

schreiben. D. h. für  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  sind  $\xi_1, \dots, \xi_n$  die Koordinaten von  $x$  bezüglich  $e_1, \dots, e_n$ .

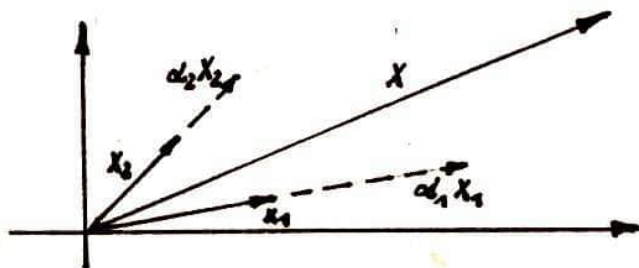
Beispiel 2:  $x_1 = (1, 2)$  und  $x_2 = (2, 1)$  sind linear unabhängig. Jedes  $x = (\xi_1, \xi_2)$  kann man als

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 && \text{schreiben,} \\ \xi_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 && \text{und} \\ \xi_2 &= 2\alpha_1 + \alpha_2. \end{aligned}$$

Man sieht schon am 2. Beispiel, daß zur Berechnung von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muß, das, wie wir uns überlegt haben, für beliebige  $\xi_1$  und  $\xi_2$  stets eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

Geometrisch kann man das Problem wie folgt erklären:

Sei  $x_1, x_2$  eine Basis in  $\mathbb{R}^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  vorgegeben. Durch Streckung bzw. Stauchung von  $x_1$  und  $x_2$  erreiche man, daß die Summe  $x$  ergibt:



Das geht natürlich nur, wenn die beiden Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  nicht auf einer Geraden liegen, d. h. wenn sie eine Basis bilden. Im Fall  $x_1 = e_1$ ,  $x_2 = e_2$  ist dies besonders einfach.

Abschließend wollen wir noch bemerken, daß wir im Grunde jetzt die Stelle erreicht haben, wo die eigentliche "Lineare Algebra" beginnt.

Insbesondere die Theorien der sogenannten linearen Abbildungen, der Matrizen und Determinanten, der linearen Gleichungssysteme spielen eine zentrale Rolle. Wir werden auf diese Fragen später eingehen.

**Doz. Dr. W. Linde**  
**Bereich Analysis**



## XX. Olympiade junger Mathematiker der DDR

## 4. Stufe (DDR-Olympiade) Olympiadeklassen 11/12

## Aufgaben

1. In einem beliebigen Dreieck ABC seien D, E, F die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden des Dreiecks mit den Dreiecksseiten.

Man beweise: Sind I der Flächeninhalt des Dreiecks ABC und  $I_1$  der Flächeninhalt des Dreiecks DEF, so gilt  $I_1 \leq \frac{I}{4}$ .

2. In einem Fischgeschäft stehen für die Aufbewahrung lebender Karpfen drei Wasserbehälter zur Verfügung. Zum Verkaufsbeginn sind in jedem dieser drei Behälter genau 20 Karpfen. Am Verkaufsende sind noch insgesamt 3 Karpfen vorhanden. Die verkauften Karpfen wurden einzeln nacheinander entnommen. Ein Tausch eines Karpfens von einem Behälter in einen anderen fand nicht statt; neue Karpfen waren während des Verkaufs nicht hinzugekommen.

Berechnen Sie auf 3 Dezimalen nach dem Komma gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist!

Hinweis: Die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit  $p$  ist folgendermaßen definiert: Es sei  $A$  die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Entnahme von 57 Karpfen aus den drei Behältern. Ferner sei  $G$  die Anzahl aller derjenigen unter diesen Möglichkeiten, bei denen am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist. Dabei gelten zwei mögliche Reihenfolgen der Entnahme genau dann als gleich, wenn sie für jedes  $i=1,2,\dots,57$  in der Angabe übereinstimmen, aus welchem Behälter die  $i$ -te Entnahme eines Karpfens erfolgte. Mit diesen Bezeichnungen ist  $p = \frac{G}{A}$ .

3. Gegeben sei eine reelle Zahl  $a \neq 0$  mit  $|a| \neq 1$ .

Man ermittle alle reellen Lösungen  $x$  der Gleichung

$$\frac{(x^4 + 1)(x^4 + 6x^2 + 1)}{x^2(x^2 - 1)^2} = \frac{(a^4 + 1)(a^4 + 6a^2 + 1)}{a^2(a^2 - 1)^2}.$$

4. Es sei  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \text{ und} \\ a_{n+1} &= 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

gilt.

Man ermittle alle diejenigen Glieder dieser Folge, die ganzzahlig sind.

5. Für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  sei

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}. \quad (1)$$

Man ermittle einen geschlossenen Ausdruck für  $f(n)$  (d. h. einen Ausdruck, der  $f(n)$  in Abhängigkeit von  $n$  so darstellt, daß zu seiner Bildung nicht wie in (1) eine von  $n$  abhängende Anzahl von Rechenoperationen verlangt wird).

Hinweis: Ist  $x$  eine beliebige reelle Zahl, so bezeichnet  $\lfloor x \rfloor$  diejenige ganze Zahl, für die  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$  gilt.

6. Eine Strecke AB von 10 m Länge soll auf folgende Weise durch "wiederholtes Halbieren" in 10 näherungsweise gleichlange Strecken zerlegt werden:

(1) Zunächst wählt man beliebige Punkte  $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_9^{(0)}$  auf der Strecke AB und definiert  $P_0^{(0)} = A$  und  $P_{10}^{(0)} = B$ .

(2) Liegen nun für eine natürliche Zahl  $n$  bereits als " $n$ -te Näherung" Punkte  $P_0^{(n)}, P_1^{(n)}, \dots, P_{10}^{(n)}$  vor, so definiert man  $P_0^{(n+1)} = A$ ,  $P_{10}^{(n+1)} = B$  sowie für  $j=1, 2, \dots, 9$  jeweils  $P_j^{(n+1)}$  als Mittelpunkt der Strecke  $P_{j-1}^{(n)} P_{j+1}^{(n)}$ .

Es seien  $Q_1, Q_2, \dots, Q_9$  die Punkte auf AB, die AB in 10 genau gleichlange Teilstrecken zerlegen, für die also

$$\overline{AQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = \dots = \overline{Q_8Q_9} = \overline{Q_9B} = 1 \text{ m}$$

gilt.

Beweisen Sie, daß eine natürliche Zahl  $N$  so existiert, daß für jede Wahl der Punkte  $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_9^{(0)}$  auf AB gilt: Bei der " $n$ -ten Näherung" weicht jeder der Punkte  $P_j^{(N)}$



( $j=1,2,\dots,9$ ) um weniger als 1 mm von der Lage des Punktes  $Q_j$  ab, d. h., es gilt

$$\overline{P_j^{(N)} Q_j} < 1 \text{ mm.}$$

7. Ist  $T = ABCD$  ein Tetraeder, so bezeichne  $s$  die Summe aller Kantenlängen von  $T$ . Dabei sei in dieser Aufgabe jede (in Zentimeter zu messende) Kantenlänge nur durch ihre Maßzahl angegeben. Man untersuche, ob es unter allen Tetraedern  $T$  mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) eines gibt, für das  $s$  einen größten Wert annimmt. Trifft das zu, so ermittle man diesen größten Wert von  $s$ . Die geforderten Eigenschaften sind:

(1)  $\overline{BDC} = \overline{CDA} = \overline{ADB} = 90^\circ$ .

(2) Sämtliche Kantenlängen von  $T$  sind nicht kleiner als  $\frac{1}{6}$ .

(3) Das Volumen von  $T$  ist gleich  $\frac{1}{6}$ .

## Diophantische Gleichungen

In diesem Artikel wollen wir diophantische Gleichungen zweiten (und dritten) Grades mit drei Unbekannten betrachten.

1. Die diophantische Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$  mit  $x, y, z \in \mathbb{Z}$

Das Lösen dieser Gleichung bedeutet geometrisch, alle pythagoreischen Dreiecke zu finden, deren Seitenlängen  $x$ ,  $y$  und  $z$  sind. Die Lösungen  $(x, y, z)$  dieser Gleichung heißen pythagoreische Tripel. Für jede ganze Zahl  $K$  ist auch  $(Kx, Ky, Kz)$  ein pythagoreisches Tripel.

Beim Aufsuchen aller Lösungen der Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$  können wir uns auf den Fall  $(x, y) = 1$  beschränken.

Beweis dieser Aussage:

Der größte gemeinsame Teiler von  $x$  und  $y$  sei  $d$  ( $(x, y) = d$ ).  $x$  und  $y$  können wir dann in der Form  $x = x_1 \cdot d$  und  $y = y_1 \cdot d$  darstellen. Setzen wir diese Beziehung in die Ausgangsgleichung

ein, so erhalten wir

$$x_1^2 d^2 + y_1^2 d^2 = z^2$$

bzw.

$$d^2(x_1^2 + y_1^2) = z^2 \quad (1)$$

Folglich ist  $d^2$  Teiler von  $z^2$  und  $d$  Teiler von  $z$ . Somit gilt  $z = z_1 \cdot d$ . Durch Einsetzen in die Gleichung (1) erhalten wir

$$d^2(x_1^2 + y_1^2) = z_1^2 d^2$$

bzw.

$$x_1^2 + y_1^2 = z_1^2.$$

Damit haben wir die Richtigkeit der Aussage gezeigt.

Wir beschränken uns auf den Fall  $(x, y) = 1$ . Folglich können beide Zahlen  $x$  und  $y$  nicht gleichzeitig gerade sein. Eine der beiden Zahlen muß ungerade sein.

Wir nehmen o.B.d.A. an,  $x$  sei ungerade.

Durch Umstellen der Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$  erhalten wir

$$x^2 = z^2 - y^2.$$

Unter Ausnutzung der binomischen Formel läßt sich die Gleichung auch in der Form  $x^2 = (z+y)(z-y)$  schreiben.

Den größten gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen  $(z+y)$  und  $(z-y)$  bezeichnen wir mit  $d_1$ .  $((z+y), (z-y)) = d_1$

Wenn wir die beiden Zahlen  $(x+y)$  und  $(z-y)$  durch  $d_1$  dividieren, erhalten wir die Zahlen  $a$  und  $b$ .

$$\frac{z+y}{d_1} = a \quad \text{und} \quad \frac{z-y}{d_1} = b.$$

Umgestellt: (2)  $z+y = a \cdot d_1$       (3)  $z-y = b \cdot d_1$

Da  $((z+y), (z-y)) = d_1$ , muß  $(a, b) = 1$  sein. Indem wir (2) und (3) in die Gleichung  $x^2 = (z+y)(z-y)$  einsetzen, erhalten wir

$$x^2 = a \cdot b \cdot d_1^2.$$

Da  $(a, b) = 1$ , ist die erhaltene Gleichung nur dann möglich, wenn  $a$  und  $b$  Quadratzahlen sind. Das Produkt zweier teilerfremder Zahlen ist bekanntlich nur dann eine Quadratzahl, wenn jeder Faktor eine Quadratzahl ist. Folglich muß  $a = u^2$  und  $b = v^2$  sein, wobei  $u$  und  $v$  aus dem Bereich der ganzen Zahlen stammen. Durch Einsetzen ergibt sich die Form  $x^2 = u^2 \cdot v^2 \cdot d_1^2$

$$\text{bzw.} \quad x = u \cdot v \cdot d_1$$

Die Lösungen für  $y$  und  $z$ :



Die Lösungen für  $y$  und  $z$  können wir aus den beiden Gleichungen (2) und (3) ermitteln. Die Addition der Gleichungen (2) und (3) ergibt  $2z = a \cdot d_1 + b \cdot d_1 = (u^2 + v^2) d_1$ .

Die Lösung für  $z$  lautet dann

$$z = \frac{u^2 + v^2}{2} d_1.$$

Durch Subtraktion der Gleichung (3) von der Gleichung (2) ergibt sich

$$2y = (a - b) d_1 = (u^2 - v^2) d_1.$$

Wir erhalten

$$y = \frac{u^2 - v^2}{2} d_1.$$

### Bedingungen für die Zahlen $u$ , $v$ und $d_1$

1. Da wir o. B. d. A.  $x$  als ungerade angenommen haben und  $x = u \cdot v \cdot d_1$  ist, müssen  $u$ ,  $v$  und  $d_1$  ungerade sein.
2. Da  $x = u \cdot v \cdot d_1$ ,  $y = \frac{u^2 - v^2}{2} d_1$  und  $(x, y) = 1$ , muß  $d_1 = 1$  sein.
3. Da  $a = u^2$ ,  $b = v^2$  und  $(a, b) = 1$ , muß  $(u, v) = 1$  sein.

### Angabe der Lösung

Somit ergibt sich für den Fall  $(x, y) = 1$  folgende Lösung:

$x = u \cdot v$ ,  $y = \frac{u^2 - v^2}{2}$  und  $z = \frac{u^2 + v^2}{2}$ , wobei  $u$  und  $v$  ungerade, teilerfremde ganze Zahlen sind.

Alle übrigen ganzzahligen positiven Lösungen dieser Gleichung erhalten wir durch Multiplikation der einzelnen Lösungen für  $x$ ,  $y$  und  $z$  mit einem beliebigen gemeinsamen Faktor  $d$ , wobei  $d$  Element der ganzen Zahlen sei.

### Beispiele:

1.  $v = 1, u = 3, \quad 3^2 + 4^2 = 5^2$
2.  $v = 1, u = 5, \quad 5^2 + 12^2 = 13^2$
3.  $v = 3, u = 5, \quad 15^2 + 8^2 = 17^2.$

Frank Maschner  
Student Ma/Phy-Lehrer  
2. Studienjahr FSU

Preisaufgaben

N 37 Es seien  $a > 0$  und  $b > 0$ . Man zeige, daß dann gilt

①

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

N 38 Man beweise, daß in jedem Dreieck ABC gilt

②

$$\frac{SA'}{AA'} + \frac{SB'}{BB'} + \frac{SC'}{CC'} = 1$$

wenn S ein Punkt im Innern des Dreiecks ist und A', B', C' die Schnittpunkte der Strecken BC, AC, AB mit den Geraden durch S und A, B, C sind.

N 39

Man zeige, daß  $(m-1)!+1$  nur dann durch  $m$  teilbar ist, wenn  $m$  Primzahl oder gleich 1 ist.

①

N 40

Man beweise: Sind  $\alpha, \beta, \gamma$  die Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks, so gilt

①

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}.$$

N 41

Man suche eine natürliche Zahl  $n$  so, daß das Gleichungssystem

①

$$nx - y = 5$$

$$2x + 3ny = 7$$

eine Lösung besitzt, bei der  $x$  positiv und  $y$  negativ ist.

N 42

Показать, что если в равенстве

②

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$$

коэффициенты  $a, b$  и  $c$  рациональны, то  $a = b = c = 0$ .

Einsendeschluß: 15. 12. 81



## XX. Olympiade junger Mathematiker der DDR 4. Stufe

## Olympiadeklassen 11/12 Lösungen

1. Bezeichnet man die Flächeninhalte der Dreiecke AFE, BDF, CED entsprechend mit  $I_2, I_3, I_4$ , so gilt

$$I_1 = I - I_2 - I_3 - I_4. \quad (1)$$

Bezeichnet man die Längen der Dreiecksseiten BC, CA, AB entsprechend mit  $a, b, c$ , so teilt <sup>1)</sup> E die Seite AC im Verhältnis  $c:a$ , also ist  $\overline{AE} = \frac{bc}{a+c}$ . Entsprechend gilt  $\overline{AF} = \frac{bc}{a+b}$ .

Da die Dreiecke ABE und ABC bei Auffassung von AE bzw. AC als Grundlinie dieselbe Höhe haben, verhalten sich ihre Flächeninhalte wie  $\overline{AE} : \overline{AC} = \frac{c}{a+c}$ , daher hat das Dreieck ABE den Flächeninhalt  $\frac{cI}{a+c}$ .

Da die Dreiecke AFE und ABE bei Auffassung von AF bzw. AB als Grundlinie dieselbe Höhe haben, verhalten sich ihre Flächeninhalte wie  $\overline{AF} : \overline{AB} = \frac{b}{a+b}$ , daher gilt

$$I_2 = \frac{bcI}{(a+b)(a+c)}. \quad (2)$$

Entsprechend gilt

$$I_3 = \frac{acI}{(a+b)(b+c)}, \quad I_4 = \frac{abI}{(a+c)(b+c)}. \quad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt

$$\begin{aligned} I_1 &= I \left( 1 - \frac{bc(b+c)}{(b+c)(a+c)(a+b)} + \frac{ac(a+c)}{(b+c)(a+c)(a+b)} + \frac{ab(a+b)}{(b+c)(a+c)(a+b)} \right) \\ &= \frac{2abcI}{(b+c)(a+c)(a+b)}. \end{aligned}$$

Nun gilt aufgrund der Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

$$\frac{(b+c)(a+c)(a+b)}{8} \geq \sqrt[3]{bc} \sqrt[3]{ac} \sqrt[3]{ab} = abc.$$

$$\text{Daher gilt } I_1 = \frac{2abcI}{(b+c)(a+c)(a+b)} \leq \frac{I}{4}, \quad \text{w.z.b.w.}$$

- 1) Dies ist entweder als bekannter Satz zu zitieren oder z.B. so zu beweisen: Verlängert man AB über B hinaus um  $a$  bis G, so wird wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks BCG

$$\text{und nach dem Außenwinkelsatz } \angle BCB = \angle BGC = \frac{\beta}{2}$$

( $\beta = \angle ABC$ ), also  $CG \parallel EB$ , und daher nach dem Strahlensatz

$$\overline{AE} : \overline{EC} = \overline{AB} : \overline{BG} = c : a.$$

2. Die verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Entnahme lassen sich eindeutig kennzeichnen durch die verschiedenen 57gliedrigen Folgen  $F = (a_1, a_2, \dots, a_{57})$ , in denen jeweils  $a_i$  die Nummer des Behälters angibt, aus dem die  $i$ -te Entnahme erfolgt. In jeder dieser Folgen kommt jede der drei Behälternummern höchstens 20 mal vor. Daher lassen sich alle zu berücksichtigenden Folgen so in Klassen einteilen, wie die nachstehende Tabelle angibt.

| Anzahl des Vorkommens der Behälternummer |    |    |
|------------------------------------------|----|----|
| 1                                        | 2  | 3  |
| 20                                       | 20 | 17 |
| 20                                       | 19 | 18 |
| 20                                       | 18 | 19 |
| 20                                       | 17 | 20 |
| 19                                       | 20 | 18 |
| 19                                       | 19 | 19 |
| 19                                       | 18 | 20 |
| 18                                       | 20 | 19 |
| 18                                       | 19 | 20 |
| 17                                       | 20 | 20 |

Um die Anzahl  $a(u, v, w)$  der Folgen in derjenigen Klasse, für die die in der Tabelle genannten drei Anzahl  $u, v, w$  lauten, zu ermitteln, ersetze man zunächst die  $u$  Folgenglieder 1 durch  $u$  verschiedene Elemente, etwa mit  $1_1, \dots, 1_u$  bezeichnet, ebenso die  $v$  Folgenglieder 2 durch  $v$  Elemente  $2_1, \dots, 2_v$  und die  $w$  Folgenglieder 3 durch  $w$  Elemente  $3_1, \dots, 3_w$ . Aus den so gebildeten 57 Elementen lassen sich genau  $57!$  verschiedene Folgen zusammenstellen. Löscht man darin die Indizes bei allen Elementen  $1_1, \dots, 1_u$ , so entsteht aus je  $u!$  Folgen ein und dieselbe Folge. Entsprechendes gilt für das Löschen der Indizes bei  $2_1, \dots, 2_v$  und bei  $3_1, \dots, 3_w$ . Daher ist <sup>1)</sup>

$$a(u, v, w) = \frac{57!}{u!v!w!}.$$

Nach der Tabelle gibt es genau drei Klassen, in denen  $u, v, w$  in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen 17, 20, 20 sind, ferner genau sechs Klassen, in denen  $u, v, w$  in irgendeiner Reihenfolge

1) Diese Formel kann auch als bekannt zitiert werden.



ge die Zahlen 18, 19, 20 sind, und genau eine Klasse mit  $u = v = w = 19$ . Daher ist

$$A = \frac{3 \cdot 57!}{17!20!20!} + \frac{6 \cdot 57!}{18!19!20!} + \frac{57!}{19!19!19!}.$$

Genau diejenigen Folgen, die der Klasse mit  $u = v = w = 19$  angehören, entsprechen den Möglichkeiten, bei denen am Verkaufsende in jedem Behälter genau ein Karpfen ist. Daher gilt

$$G = \frac{57!}{19!19!19!}.$$

Hiernach ergibt sich

$$A = \frac{57!}{17!19!19!} \left( \frac{3}{20 \cdot 20} + \frac{6}{18 \cdot 20} + \frac{1}{18 \cdot 19} \right) = \frac{57!}{17!19!19!} \cdot \frac{513+1140+200}{9 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 20}$$

$$G = \frac{57!}{17!19!19!} \cdot \frac{1}{18 \cdot 19} = \frac{57!}{17!19!19!} \cdot \frac{200}{9 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 20}$$

$$p = \frac{G}{A} = \frac{200}{1853} = 0,108.$$

3. Eine reelle Zahl  $x$  ist genau dann Lösung, wenn für sie  $x \neq 0$  und  $x \neq 1$  gelten und das Polynom

$$P(x) = a^2(a^2-1)^2(x^4+1)(x^4+6x^2+1) - (a^4+1)(a^4+6a^2+1)x^2(x^2-1)^2$$

die Gleichung  $P(x) = 0$  erfüllt. Dieses Polynom lautet

$$P(x) = (a^6 - 2a^4 + a^2)x^8 - (a^8 + 14a^4 + 1)x^6 + 2(a^8 + 7a^6 + 7a^2 + 1)x^4 - (a^8 + 14a^4 + 1)x^2 + a^6 - 2a^4 + a^2.$$

An der ursprünglichen Form der Gleichung ist ersichtlich, daß  $x = a$  und  $x = -a$  Lösungen sind. Also ist das Polynom  $P(x)$

durch  $(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$  teilbar. Die Division ergibt

$$Q(x) = P(x) : (x^2 - a^2) = (a^6 - 2a^4 + a^2)x^6 - (2a^6 + 13a^4 + 1)x^4 + (a^6 + 13a^2 + 2)x^2 + (-a^4 + 2a^2 - 1).$$

An der ursprünglichen Form der Gleichung ist ebenfalls ersichtlich: Setzt man  $x = \frac{1}{a}$  oder  $x = -\frac{1}{a}$  auf der linken Seite ein und erweitert den entstehenden Bruch mit  $a^8$ , so erhält man

einen Ausdruck, der gleich der rechten Seite ist. Daher sind auch  $x = \frac{1}{a}$  und  $x = -\frac{1}{a}$  Lösungen; folglich ist  $Q(x)$  durch

$a^2(x - \frac{1}{a})(x + \frac{1}{a}) = a^2x^2 - 1$  teilbar. Die Division ergibt

$$R(x) = Q(x) : (a^2x^2 - 1) = (a^4 - 2a^2 + 1)x^4 - 2(a^4 + 6a^2 + 1)x^2 + a^4 - 2a^2 + 1.$$

Wegen  $|a| \neq 1$  ist  $a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 - 1)^2 \neq 0$ . Also ist die Gleichung  $R(x) = 0$  äquivalent mit

$$x^4 - 2 \frac{a^4 + 6a^2 + 1}{a^4 - 2a^2 + 1} x^2 + 1 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in  $x^2$  mit der Diskriminante

$$\left( \frac{a^4 + 6a^2 + 1}{a^4 - 2a^2 + 1} \right)^2 - 1 = \frac{16a^2(a^2 + 1)^2}{(a^2 - 1)^4}.$$

Daher hat  $R(x) = 0$  genau diejenigen  $x$  als Lösung, für die eine der Gleichungen

$$x^2 = \frac{a^4 + 6a^2 + 1}{(a^2 - 1)^2} \pm \frac{4a(a^2 + 1)}{(a^2 - 1)^2},$$

d. h., eine der Gleichungen

$$x^2 = \frac{(a + 1)^4}{(a^2 - 1)^2}, \quad x^2 = \frac{(a - 1)^4}{(a^2 - 1)^2}$$

gilt. Da die rechten Seiten dieser Gleichungen positiv sind, sind dies genau die Zahlen

$$x = \frac{a+1}{a-1}, \quad x = -\frac{a+1}{a-1}, \quad x = \frac{a-1}{a+1}, \quad x = -\frac{a-1}{a+1}.$$

Wegen  $a \neq 1$  und  $a \neq -1$  gilt für jede dieser vier Zahlen  $x \neq 0$ . Ferner ist  $a+1 \neq a-1$  und wegen  $a \neq 0$  auch  $a+1 \neq -a+1$ , also gilt für jede dieser vier Zahlen  $x \neq 1$  und  $x \neq -1$ .

Damit ist bewiesen, daß die gegebene Gleichung genau die Zahlen

$$x = a, -a, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}, \frac{a+1}{a-1}, -\frac{a+1}{a-1}, \frac{a-1}{a+1}, -\frac{a-1}{a+1}$$

als Lösung besitzt.

Hinweis: Nicht nur  $\pm a$  und  $\pm \frac{1}{a}$  lassen sich auf die beschriebene Weise unmittelbar als Lösung erkennen, sondern z. B. vermittels der Umformung

$$\frac{(x^4 + 1)(x^4 + 6x^2 + 1)}{x^2(x^2 - 1)^2} = \frac{1}{2} \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \left( \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^2 + \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^2 \right)$$

auch  $x = \pm \frac{a+1}{a-1}$  und  $x = \pm \frac{a-1}{a+1}$ . Nun könnte man versuchen, die Nichtexistenz anderer Lösungen ohne weitere Rechnung damit zu begründen, daß  $P(x)$  als Polynom 8. Grades nicht mehr als 8 Nullstellen haben kann. In dieser Gestalt wäre der Beweis



lückenhaft, da die angegebenen Lösungen nicht alle verschiedenen zu sein brauchen.

4. Für alle  $n \geq 1$  gilt nach Definition

$$(a_{n+1} - 2a_n)^2 = 3a_n^2 + 1, \text{ also}$$

$$a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + a_n^2 = 1.$$

Für alle  $n \geq 2$  gilt also

$$a_n^2 - 4a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2 = 1$$

und daher

$$a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 - 4a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) = 0,$$

$$(a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} + a_{n-1} - 4a_n) = 0. \quad (1)$$

Für alle  $n \geq 2$  gilt ferner  $a_{n+1} > 2a_n > a_n$ , ebenso  $a_n > a_{n-1}$ , also

$$a_{n+1} - a_{n-1} \neq 0.$$

Daher folgt aus (1)

$$a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}. \quad (2)$$

Da  $a_1 = 1$  und  $a_2 = 3$  ganzzahlig sind, folgt aus (2) der Reihe nach, daß auch  $a_3, a_4, a_5, \dots$  ganzzahlig sind.

Also sind alle Glieder der gegebenen Folge ganzzahlig.

Andere Herleitung von (2):

Aus  $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}$  folgt

$$\begin{aligned} 3a_{n+1}^2 &= 21a_n^2 + 12a_n \sqrt{3a_n^2 + 1} + 4 = 9a_n^2 + 12a_n \sqrt{3a_n^2 + 1} + \\ &\quad + 4(3a_n^2 + 1) \\ &= (3a_n + 2\sqrt{3a_n^2 + 1})^2. \end{aligned}$$

Ferner folgt, daß alle  $a_n$  positiv sind. Daher ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2a_{n+1} + \sqrt{3a_{n+1}^2 + 1} = 2a_{n+1} + 3a_n + 2\sqrt{3a_n^2 + 1} \\ &= 2a_{n+1} + 2(2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}) - a_n = 4a_{n+1} - a_n. \end{aligned}$$

5. Die in (1) für  $k=1$  bis  $k=n^2$  zu bildenden Summanden lassen sich zu  $n$  Teilsummen  $s_m$  ( $m=0, \dots, n-1$ ) zusammenfassen, indem jeweils  $s_m$  die Summanden aus (1) mit denjenigen  $k$  enthält, für die  $m^2 + 1 \leq k \leq (m+1)^2$  gilt. In diesen ist  $m^2 \leq k-1 < (m+1)^2$ , also  $m \leq \sqrt{k-1} < m+1$ , d. h.  $m = \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor$ . Also wird

$$s_m = \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} \frac{n - \lfloor \sqrt{k-1} \rfloor}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = (n-m) \cdot \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}.$$

Darin ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} &= \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \\ &= \sqrt{m^2+1} - m + \sqrt{m^2+2} - \sqrt{m^2+1} + \dots + (m+1) - \sqrt{(m+1)^2-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich  $s_m = n - m$  ( $m=0, \dots, n-1$ ) und daher

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n-1} s_m = n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Damit ist ein Ausdruck der verlangten Art ermittelt.

6. Es seien  $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_9^{(0)}$  beliebig auf  $AB$  gewählt. Für jedes  $k$  mit  $k=0, 1, \dots, 10$  und jedes natürliche  $n$  mit  $n \geq 0$  werden reelle Zahlen  $e_k^{(n)}$  definiert:

$$e_k^{(n)} = \overline{AP_k^{(n)}} - \overline{AQ_k}, \quad (1)$$

wobei  $Q_0 = A$  und  $Q_{10} = B$

gesetzt werden und alle Längenangaben in der Maßeinheit Meter angegeben sind.

Dann gilt

$$e_0^{(n)} = \overline{AA} - \overline{AA} = 0,$$

$$e_{10}^{(n)} = \overline{AB} - \overline{AB} = 0,$$

und wegen

$$0 \leq \overline{AP_k^{(n)}} \leq \overline{AB} = 10$$

$$|e_k^{(n)}| \leq 10. \quad (2)$$

Ferner folgt aus der Definition der  $P_k^{(n+1)}$



$$\begin{aligned}
 e_k^{(n+1)} &= \overline{AP_k^{(n+1)}} - \overline{AQ_k} \\
 &= \frac{1}{2}(\overline{AP_{k-1}^{(n+1)}} + \overline{AP_{k+1}^{(n)}}) - \frac{1}{2}(\overline{AQ_{k-1}} + \overline{AQ_{k+1}}) \\
 &= \frac{1}{2}(e_{k-1}^{(n+1)} + e_{k+1}^{(n)}).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Wir beweisen zunächst folgende Hilfsaussage: Sind für eine natürliche Zahl  $n$  und für  $m$  eine positive reelle Zahl  $z$  alle

$$|e_k^{(n)}| \leq z \quad (k=0,1,\dots,10), \tag{4}$$

so gelten für  $k=0,1,\dots,10$  die Ungleichungen

$$|e_k^{(n+1)}| \leq z(1 - \frac{1}{2^k}). \tag{5}$$

Beweis: Für  $k=0$  und  $k=10$  ist wegen  $e_0^{(n+1)} = e_{10}^{(n+1)} = 0$  die Ungleichung (5) erfüllt. Wenn (5) für  $k = j-1$  gilt, wobei  $j$  eine der Zahlen  $1,2,\dots,9$  ist, so folgt nach (3) und (4) auch

$$\begin{aligned}
 |e_j^{(n+1)}| &\leq \frac{1}{2}(|e_{j-1}^{(n+1)}| + |e_{j+1}^{(n)}|) \\
 &\leq \frac{1}{2}(z(1 - \frac{1}{2^{j-1}}) + z) = z(1 - \frac{1}{2^j}).
 \end{aligned}$$

Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Aus (5) folgt wegen  $k \leq 10$  erst recht

$$|e_k^{(n+1)}| \leq z(1 - \frac{1}{2^{10}}) = z \frac{1023}{1024}, \quad (k=0,1,\dots,10).$$

Beginnend mit  $n=0$  (siehe (2)) ergibt sich daraus durch vollständige Induktion über  $n$

$$e_k^{(n)} = 10(\frac{1023}{1024})^n \quad (k=0,1,\dots,10; n=0). \tag{6}$$

Aus (6) gelangt man zu dem geforderten Nachweis:

Es gibt eine natürliche Zahl  $N$  mit  $N > \frac{4}{\lg 1024 - \lg 1023}$ ,  
für die  $N(\lg 1023 - \lg 1024) < -4$ , also

$$(\frac{1023}{1024})^N < \frac{1}{10\,000} \quad \text{und damit wegen (1) und (6)}$$

$$P_k^{(N)} Q_k = |\overline{AP_k^{(N)}} - \overline{AQ_k}| = |e_k^{(N)}| \leq 10(\frac{1023}{1024})^N < \frac{1}{1000} \quad (k=0,1,\dots,10)$$

gilt, wie gezeigt werden sollte.

7. Es sei  $T$  ein Tetraeder mit den Eigenschaften (1), (2), (3); darin sei  $\overline{AD} = a$ ,  $\overline{BD} = b$ ,  $\overline{CD} = c$ . Dann hat  $T$  nach (1) als Pyramide mit der Grundfläche des Dreiecks  $ABD$  vom Flächeninhalt  $\frac{1}{2}ab$  und der zugehörigen Höhe der Länge  $c$  das Volumen  $\frac{1}{6}abc$ ; nach (3) gilt daher  $abc = 1$ . Aus (2) sowie durch geeignete Wahl der Bezeichnungen erhält man  $\frac{1}{6} \leq a \leq b \leq c$ . Hieraus folgt  $1 = abc \leq c^3$ ; ferner  $1 \leq 6a \leq 6b$ , also  $c \leq 6a \cdot 6b \cdot c = 36$  und  $abc = 1 \leq 6a$ . Daher gelten die Ungleichungen

$$1 \leq c \leq 36 \quad (4)$$

und

$$a \leq b \leq \frac{6}{c}. \quad (5)$$

Die zu untersuchende Summe ist nach (1) und dem Satz des Pythagoras

$$s = a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Für sie gilt nach (5)

$$\begin{aligned} s &\leq \frac{6}{c} + \frac{6}{c} + c + \sqrt{\left(\frac{6}{c}\right)^2 + \left(\frac{6}{c}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{6}{c}\right)^2 + c^2} + \sqrt{\left(\frac{6}{c}\right)^2 + c^2} \\ &= c + \frac{6(2 + \sqrt{2})}{c} + 2\sqrt{c^2 + \frac{36}{c^2}}. \end{aligned}$$

Es seien  $f$  und  $g$  die im Intervall  $1 \leq c \leq 36$  durch

$$f(c) = c + \frac{6(2 + \sqrt{2})}{c}, \quad g(c) = c^2 + \frac{36}{c^2}$$

definierten Funktionen. Für ihre Ableitungen gilt

$$f'(c) = 1 - \frac{6(2 + \sqrt{2})}{c^2}, \quad g'(c) = 2c - \frac{72}{c^3}.$$

Daher ist  $f'(c) > 0$  bzw.  $g'(c) > 0$  für alle diejenigen  $c$ , für die  $c^2 > 6(2 + \sqrt{2})$  bzw.  $c^2 > 6$  gilt.

Im Intervall  $10 \leq c \leq 36$  ist dies z. B. der Fall; daher sind  $f$  und  $g$  in diesem Intervall steigend, und es folgt <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} f(c) &\leq f(36) = 36 + \frac{2 + \sqrt{2}}{6}, \quad g(c) \leq g(36) = 36^2 + \frac{1}{36}, \\ f(c) + 2\sqrt{g(c)} &= 36 + \frac{2 + \sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{36^2 + \frac{1}{36}}. \end{aligned} \quad (6)$$

1) Herleitungsmöglichkeit ohne Differentialrechnung:

Für  $0 < u \leq x \leq v$  gilt  $u^2 \leq vx$  und  $v - x \geq 0$ , also  $u^2(v-x) \leq vx(v-x)$ , also  $vx^2 + u^2v \leq v^2x + u^2x$ , wegen  $vx > 0$  also  $x + \frac{u^2}{v} \leq v + \frac{u^2}{v}$ . Dies wende man einmal mit  $x=c$ ,  $u = \sqrt{6(2 + \sqrt{2})}$ ,  $v=36$ , einmal mit  $x=c^2$ ,  $u=6$ ,  $v=36^2$  an.



Auch im Intervall  $1 \leq c \leq 10$  gilt (6), wie für diese  $c$  aus

$$c + \frac{6(2+\sqrt{2})}{c} + 2\sqrt{c^2 + \frac{36}{c^2}} \leq 10 + 6(2+\sqrt{2}) + 2\sqrt{100+36}$$

$$\leq 10 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 12$$

$$\leq 3 \cdot 36 \leq 36 + \frac{2+\sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{36^2 + \frac{1}{36}}$$

ersichtlich ist.

Damit ist bewiesen, daß für alle Tetraeder mit (1), (2), (3)

$$s \leq 36 + \frac{2+\sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{36^2 + \frac{1}{36}} \quad (7)$$

gilt.

Setzt man aber speziell  $a = b = \frac{1}{6}$  und  $c = 36$ , so sind (da die übrigen Kantenlängen von  $T$  nach dem Satz des Pythagoras erst recht größer als  $a$  sind) (2) und (3) erfüllt, und man erhält in (7) das Gleichheitszeichen.

Damit ist gezeigt: Es gibt unter allen Tetraedern  $T$  mit den Eigenschaften (1), (2), (3) eines, für das  $s$  einen größten Wert annimmt, und dieser ist die auf der rechten Seite von (7) angegebene Zahl.

## Preisträger der DDR-Olympiade

### Olympiadeklasse 10

Einen ersten Preis erhielten:

Punkte

|                     |                               |    |
|---------------------|-------------------------------|----|
| Volkmar Liebscher   | EOS Goethe-Schule Ilmenau     | 40 |
| Matthias Hübner (9) | Humboldt EOS, Leipzig         | 38 |
| Jens Pönisch (9)    | Karl-Marx-OS, Karl-Marx-Stadt | 38 |

Einen zweiten Preis erhielten:

|                  |                                                             |    |
|------------------|-------------------------------------------------------------|----|
| Klaus Mohnke     | POS "Erich Weinert" Lübbenau<br>Bezirk Cottbus              | 37 |
| Torsten Fimmel   | EOS "Heinrich Hertz", Berlin                                | 37 |
| Bernd Schmutzler | EOS "Artur Becker", Wilkau-Haßlau<br>Bezirk Karl-Marx-Stadt | 37 |
| Jörg Stahnke (9) | EOS "Willi Sänger", Pasewalk<br>Bezirk Neubrandenburg       | 36 |

|                        |                                                          |    |
|------------------------|----------------------------------------------------------|----|
| Oliver Geupel (9)      | EOS "Romain Rolland",<br>Dresden                         | 36 |
| Birgit Thomas          | EOS Zittau<br>Bezirk Dresden                             | 36 |
| Karl-Heinz Fandrey (9) | Puschkin-Schule (EOS), Prenzlau<br>Bezirk Neubrandenburg | 35 |

Olympiadeklasse 11/12

Einen ersten Preis erhielten:

|                  |                                                             |    |
|------------------|-------------------------------------------------------------|----|
| Detlef Horbach   | Spezialklasse der Technischen<br>Hochschule Karl-Marx-Stadt | 40 |
| Jens Galley (11) | EOS "Heinrich Hertz", Berlin                                | 38 |

Einen zweiten Preis erhielten:

|                     |                                                                                |    |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| Peter Zienicke (11) | Spezialschule für Mathematik/Physik<br>der Humboldt-Universität Berlin         | 35 |
| Jürgen Grafenstein  | Spezialschule für Elektronische<br>Industrie "Martin Andersen Nexö"<br>Dresden | 35 |
| Michael Giesecke    | Spezialschule für Elektronische<br>Industrie "Martin Andersen Nexö"<br>Dresden | 35 |
| Jörg Pietschmann    | EOS "Johann Joachim Winkelmann",<br>Stendal, Bezirk Magdeburg                  | 34 |
| Steffen Zahn (11)   | Spezialschule für Mathematik/Physik<br>der Humboldt-Universität Berlin         | 33 |
| Bodo Heise (11)     | Spezialklasse der Technischen<br>Hochschule Karl-Marx-Stadt                    | 33 |
| John Matzke (11)    | EOS "Gotthold Ephraim Lessing"<br>Erfurt                                       | 32 |
| Ralf Hortig (11)    | I. EOS Cottbus                                                                 | 32 |

Aus Platzgründen ist es uns leider nicht möglich auch alle Teilnehmer, die dritte Preise oder Anerkennungsurkunden errangen, namentlich aufzuführen.

Die Redaktion der Wurzel gratuliert allen Freisträgern recht herzlich.



## Lösungen

## Aufgabe N 2

$$x^{x+y} = y^y \quad (I)$$

$$y^{x+y} = x^{2n} y^n \quad (II)$$

Man multipliziere beide Gleichungen miteinander und erhält

$$(x \cdot y)^{x+y} = x^{2n} y^{2n} = (xy)^{2n}.$$

Da  $x > 0$  und  $y > 0$ , können wir logarithmieren

$$x + y = 2n \quad (1).$$

Eingesetzt in (I) ergibt dies

$$x^{2n} = y^n$$

$$\text{und somit } y = x^2 \quad (2).$$

Setzen wir nun (2) in (1) ein, so erhalten wir

$$x^2 + x - 2n = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$x = \frac{\sqrt{8n+1} - 1}{2}$$

$$y = \frac{1}{4} (\sqrt{8n+1} - 1)^2.$$

## Aufgabe N 3

Wir multiplizieren die Ausgangsgleichung mit  $\sqrt{x+1}$  und erhalten

$$\sqrt{x^2+8x} + \sqrt{x^2+8x+7} = 7.$$

$$(x^2+8x) \text{ ersetzen wir durch } t, \text{ d. h. } t=x^2+8x \quad (1)$$

$$\sqrt{t} + \sqrt{t+7} = 7.$$

Als Lösung findet man nur  $t=9$ .

$$\text{Aus (1) erhalten wir jetzt } x^2+8x-9 = 0.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$x_1 = -9$ ,  $x_2 = 1$ . Als Lösung bleibt nur  $x = 1$ , da man sonst in der Ausgangsgleichung aus einem negativen Wert die Wurzel ziehen müßte.

## Aufgabe N 4

$$\text{Es sei } \alpha = 90^\circ = \beta + \gamma.$$

Dann gilt

$$\sin \alpha = 1$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \gamma$$

$$\sin(\gamma - \alpha) = -\sin(\alpha - \gamma) = -\sin \beta.$$

Folglich gelten auch folgende Beziehungen:

$$\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha - \beta) = \sin \beta \sin \gamma$$

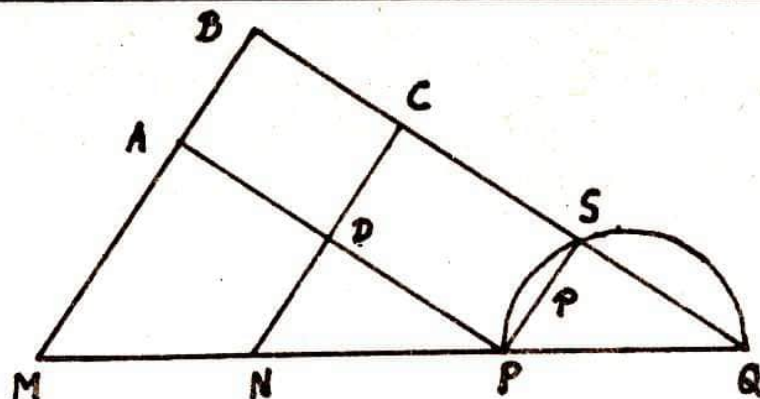
$$\sin \beta \sin \gamma \sin(\beta - \gamma) = \sin \beta \sin \gamma \sin(\beta - \gamma).$$

$$\sin \gamma \sin \alpha \sin(\gamma - \alpha) = -\sin \gamma \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \gamma) \sin(\gamma - \alpha) = -\sin \gamma \sin(\beta - \gamma) \sin \beta.$$

Da die Summe der linken Seiten der Gleichungen unsere gesuchte Summe ergibt und die Summe der rechten Seiten gleich Null ist, ist auch die gesuchte Summe gleich Null.

### Aufgabe N 5

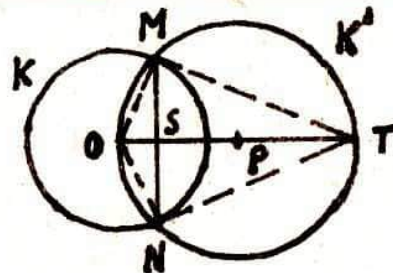


Auf der Strecke PQ konstruieren wir das rechtwinklige Dreieck PSQ mit der Hypotenuse PQ und der Kathete  $PS=p$ . Durch die Punkte M und N legen wir Geraden parallel zu PS. Dann fällen wir das Lot aus P und Q auf diese Geraden. Die Schnittpunkte ergeben das gesuchte Rechteck.

Diese Aufgabe ist genau dann lösbar, wenn man das rechtwinklige Dreieck konstruieren kann, das heißt, wenn  $p < PQ$  ist. Eine zweite Lösung erhält man natürlich, wenn man die ganze Konstruktion auf der anderen Seite der Geraden g macht.

### Aufgabe N 6

Es ist zu zeigen, daß der Teil der Oberfläche, der Kugel  $K'$ , der innerhalb der Kugel K liegt, unab-





hängig vom Radius der Kugel  $K'$  ist, wenn der Radius  $r'$  von  $K'$  größer ist als der Radius  $r$  von  $K$ .

Dieser Teil berechnet sich aber gerade wie die Oberfläche eines Kugelsegmentes (siehe Zahlentafel), also

$$F = \pi \cdot OT \cdot OS.$$

Wegen des Kathetensatzes gilt aber

$$OT \cdot OS = OM^2 = r^2.$$

Also ist  $F = \pi \cdot r^2$  nur abhängig vom Radius der kleineren Kugel.

### Aufgabe N 7

Es sei  $D = ad - bc$ .

Da nicht alle Zahlen  $a, b, c, d$  gleich Null sein können, nehmen wir an, daß wenigstens  $a \neq 0$  ist.

Falls  $D = 0$  ist, setzen wir

$$\lambda = \frac{c}{a}$$

und erhalten  $d = \lambda b$  und  $c = \lambda a$ .

Also  $ax + by = m$

$$\lambda ax + \lambda by = n \text{ und somit wäre } n = \lambda m.$$

Der Fall  $D = 0$  ist also nicht für alle natürlichen Zahlen erfüllt und entfällt, also  $D \neq 0$ .

Für feste  $m$  und  $n$  erhält das Gleichungssystem die Lösungen

$$x = \frac{md - nb}{D}$$

$$y = \frac{na - mc}{D},$$

wobei  $x$  und  $y$  ganze Zahlen sein müssen. Wählen wir als Spezialfälle  $m=1, n=0$  und  $m=0, n=1$ .

Wir erhalten

$$x_1 = \frac{d}{D} \quad y_1 = -\frac{c}{D}$$

$$x_2 = -\frac{b}{D} \quad y_2 = \frac{a}{D}.$$

Es muß also

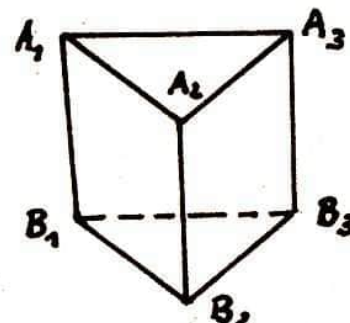
$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = \frac{ad - bc}{D^2} = \frac{1}{D}$$

eine ganze Zahl sein. Das ist aber nur der Fall, wenn  $D = \pm 1$  ist.

Bemerkung: Es war nicht nach der Existenz solcher Zahlen  $a, b, c$  und  $d$  gefragt.

**Aufgabe N 9**

Seien  $A_1, A_2, A_3$  die Eckpunkte auf einer Stirnseite des Prismas,  $B_1, B_2, B_3$  die gegenüberliegenden Eckpunkte und  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  die ihnen zugeordneten Zahlen.



Dann müssen nach Aufgabenstellung folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} 3a_1 &= a_2 + a_3 + b_1 & 3b_1 &= b_2 + b_3 + a_1 & \text{(I)} \\ 3a_2 &= a_3 + a_1 + b_2 & 3b_2 &= b_3 + b_1 + a_2 & \text{(II)} \\ 3a_3 &= a_1 + a_2 + b_3 & 3b_3 &= b_1 + b_2 + a_3 & \text{(III)} \end{aligned}$$

Addieren wir zu (I) auf beiden Seiten  $a_1 - b_1$  (bzw.  $b_1 - a_1$ ), so erhalten wir

$$4a_1 - b_1 = a_1 + a_2 + a_3 \quad (1)$$

$$4b_1 - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 \quad (2).$$

Durch Addieren von I, II und III erhalten wir

$$3(a_1 + a_2 + a_3) = 2(a_1 + a_2 + a_3) + b_1 + b_2 + b_3.$$

Daraus folgt

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 \quad (3).$$

Aus (3) und (1), (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} 4a_1 - b_1 &= 4b_1 - a_2 \\ b_1 &= a_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Analog erhält man  $b_2 = a_2, b_3 = a_3$ .

Durch Einsetzen von (4) in I erhalten wir

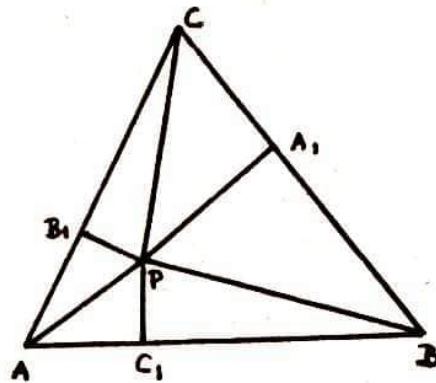
$$3a_1 = a_2 + a_3 + a_1 = 3a_2 = 3a_3.$$

Daraus ergibt sich die Gleichheit aller 6 Zahlen.



### Aufgabe M 61

Es ist das spitzwinklige Dreieck ABC gegeben. Im Innern des Dreiecks legen wir einen Punkt P fest. Die kürzesten Abstände von P zu den 3 Seiten des Dreiecks sind durch das Lot bestimmt, also die Streck-



ken  $PA_1$ ,  $PB_1$ ,  $PC_1$ . Die längsten Abstände von P zu den Seiten des Dreiecks sind offensichtlich die Strecken  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$ . Durch diese neuen Strecken wird das Dreieck ABC in 6 rechtwinklige Dreiecke zerlegt, die den Punkt P gemeinsam als Eckpunkt haben. Einer der Winkel am Punkt P muß kleiner gleich  $60^\circ$  sein, da alle Winkel zusammen gleich  $360^\circ$  sind. Den kürzesten Abstand von P zu einer Dreiecksseite nennen wir  $d$ , den größten D. Nehmen wir jetzt an  $\angle APC_1 \leq 60^\circ$ .

Dann gilt  $d \leq \overline{PC_1} \leq \frac{1}{2} \overline{AP} \leq \frac{1}{2} D$ ,

also  $d \leq \frac{1}{2} D$ .

Die Gleichheit gilt, wenn ABC ein gleichseitiges Dreieck ist und P im Mittelpunkt des Dreiecks liegt, d. h. die Winkel um P alle gleich  $60^\circ$  sind.

### Aufgabe M 62

Von 6 Personen kennt eine Person entweder mindestens 3 andere oder kennt mindestens 3 andere nicht.

1. Fall: Nehmen wir an, die Person A kennt 3 andere Personen. Falls von diesen 3 sich 2 untereinander kennen, so kennen sich mit A also schon drei untereinander. Falls sich die 3 untereinander nicht kennen, ist die Bedingung sowieso erfüllt.

2. Fall: A kennt mindestens 3 andere Personen nicht. Wenn sich von den 3 Personen zwei untereinander nicht

kennen, so kennen sich mit A 3 untereinander nicht.  
Wenn sich die 3 Personen kennen, ist die Bedingung auch erfüllt.

**Aufgabe M 65**

Offensichtlich kann keine Höhe größer sein, als die Seite, von deren Scheitel sie gefällt wurde, d. h.

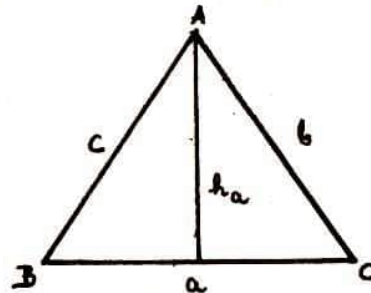
$$h_a \leq b \text{ und } h_a \leq c.$$

Falls zwei Seiten kleiner sind

als die auf ihnen errichteten Höhen, also z. B.  $a < h_a$

und  $b < h_b$ , würde die Ungleichung  $a < h_a \leq b < h_b \leq a$

folgen. Diese Ungleichung ist aber offensichtlich falsch.



**Aufgabe M 63**

Es seien die Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  gegeben. Wir bilden folgende Summen:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$\vdots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Lassen  $S_1$  bis  $S_n$  bei Teilung durch  $n$  jeweils verschiedene Reste, so muß eine der Summen durch  $n$  teilbar sein (Es gibt nur die  $n$  Reste  $1, 2, \dots, n-1$  und  $0$ ). Falls zwei Summen den gleichen Rest lassen, so hat eine der Summen mindestens einen Summanden (oder mehrere) mehr. Da sie aber den gleichen Rest haben und die Summanden größer Null sind, läßt sich die Summe der zusätzlichen Summanden durch  $n$  teilen.

**Aufgabe M 64**

Es gilt

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha.$$

Also ist



$$\begin{aligned}
 & \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha = \\
 & = \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha - \frac{\sin^3 \alpha}{3} \\
 & = \frac{\sin \alpha}{3} (3 + 3 \cos \alpha + 3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\
 & = \frac{\sin \alpha}{3} (2 + 3 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha) \\
 & = \frac{\sin \alpha}{3} [(1 + \cos \alpha)^2 + (1 + \cos \alpha) + 3 \cos^2 \alpha] > 0,
 \end{aligned}$$

denn  $\sin \alpha > 0$  für  $0 < \alpha < 180^\circ$ . Die anderen Summanden sind offensichtlich ebenfalls größer Null.

### Aufgabe M 66

Sei  $D$  der Punkt, der symmetrisch zu  $P$  bezüglich  $g(R, Q)$  liegt. Wegen dieser Eigenschaft und wegen

$$\triangle(A, B, C) \sim \triangle(B, P, R) \sim \triangle(P, Q, C) \quad (1)$$

gilt

$$RB = RP = RD \quad (2)$$

und

$$QC = QP = QD. \quad (3)$$

Folglich ist  $Q$  der Mittelpunkt

des Kreises, auf dem  $C, P$  und  $D$  liegen und  $R$  ist der Mittelpunkt des Kreises, auf dem  $B, P$  und  $D$  liegen.

Aus der bekannten Peripheriewinkel-Zentriewinkelbeziehung folgt

$$\angle CDP = \frac{1}{2} \angle CQP \quad (4)$$

und

$$\angle PDB = \frac{1}{2} \angle PRB. \quad (5)$$

Wegen (1) gilt

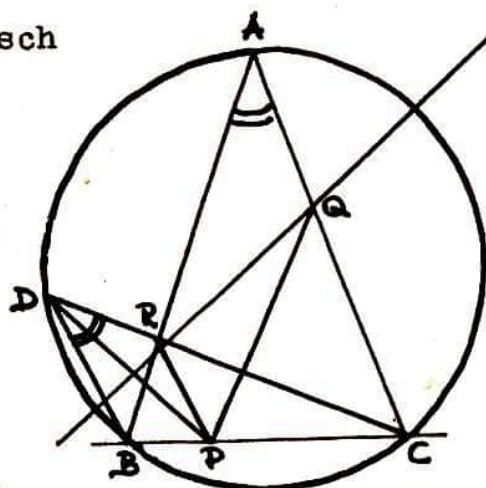
$$\angle CQP = \angle PRB = \angle BAC. \quad (6)$$

Offenbar ist

$$\angle CDP + \angle PDB = \angle CDB. \quad (7)$$

Aus (4), (5), (6) und (7) folgt

$$\angle CDB = \angle CAB. \quad (8)$$



Nach dem Peripheriewinkelsatz liegen deshalb A und D auf einem Kreis, in dem BC Sehne ist. Und da dieser Kreis schon durch A, B und C eindeutig bestimmt ist, gilt die Behauptung.

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“

**Leiter:** Heiner Schwulow

**Chefredakteur:** Andreas Kleinwächter

**Stellvertretender Chefredakteur:** Andreas Jeschag

**Redaktion:** H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein

**Anschrift:** WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

**Redaktionsschluß:** 10.7.81



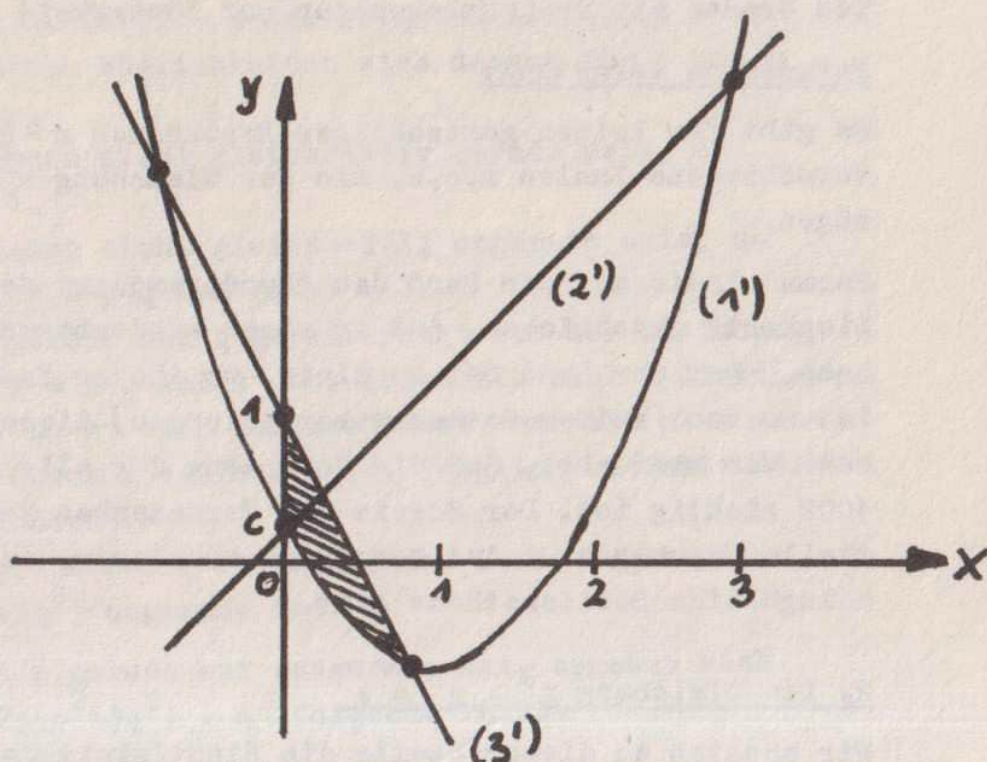


Abb. zu Lösung 6 Seite 143.

9

81

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom  
Jugendobjekt Studienvor-  
bereitung-Studienwerbung  
der Sektion Mathematik  
an der Friedrich-Schiller-  
Universität Jena

15. Jahrgang  
Index 33873  
Sonderpreis für DDR:  
0,20 M



## Diophantische Gleichungen

In diesem Artikel möchten wir die diophantische Gleichung dritten Grades mit drei Unbekannten auf Lösbarkeit untersuchen.

### Fermatsche Vermutung:

Es gibt für keinen ganzzahligen Exponenten  $n > 2$  ganze von Null verschiedene Zahlen  $x, y, z$ , die der Gleichung  $x^n + y^n = z^n$  genügen.

Fermat hatte auf den Rand des "Handexemplars der Arithmetik des Diophant" geschrieben, daß er einen wunderbaren Beweis gefunden habe, aber der Rand sei zu klein, um ihn zu fassen. Bis heute ist es noch keinem Mathematiker gelungen, diesen Satz zu beweisen. Man weiß aber, daß die Vermutung für alle Exponenten  $n$  bis 4002 richtig ist. Der Beweis der Fermatschen Vermutung für spezielle Exponenten  $n$  ist besonders schwierig, da es keine allgemeingültige Beweismethode gibt.

### 2. Die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$

Wir möchten an dieser Stelle die Richtigkeit der Fermatschen Vermutung für  $n=3$  beweisen.

**S a t z :** Es gibt keine ganze von Null verschiedene Zahlen  $x, y, z$ , die der Gleichung  $x^3 + y^3 = z^3$  genügen.

**Beweis.** Aus der Gleichung  $x^3 + y^3 = z^3$  können wir erkennen, daß zwei der Unbekannten  $x, y, z$  ungerade sein müssen. Da die Unbekannten aus dem Bereich der ganzen Zahlen stammen und da die Addition in diesem Bereich kommutativ ist, können wir o. B. d. A. annehmen, daß  $z$  gerade und  $x, y$  ungerade seien.

Da die Addition bzw. Subtraktion zweier ungerader Zahlen stets eine gerade Zahl ist, gilt  $x+y = 2p$  und  $x-y = 2q$ .

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach  $x$  und  $y$  führt zu den Lösungen  $x = p+q$  und  $y = p-q$ . Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung erhalten wir  $(p+q)^3 + (p-q)^3 = z^3$ .

$$\begin{aligned} p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3 &= z^3 \\ 2p^3 + 6pq^2 &= z^3 \\ 2p(p^2 + 3q^2) &= z^3. \end{aligned}$$



Im weiteren Beweisverlauf können wir uns auf den Fall  $(x,y)=1$  beschränken (vgl. Heft 7/8, Diophantische Gleichungen, 1. Abschnitt).

Wir nehmen o. B. d. A.  $(x,y) = 1$  an. Folglich ist  $(p,q) = 1$ . Untersuchen wir, welche Möglichkeiten sich daraus für  $p$  und  $q$  ergeben.

1. Beide können nicht gleichzeitig gerade sein, da  $(p,q) = 1$ .
2. Beide können nicht gleichzeitig ungerade sein, da  $x = p+q$ ,  $y = p-q$  und  $(x-y) = 1$ .
3. Für  $p$  ungerade und  $q$  gerade folgt aus der Gleichung  $2p(p^2+3q^2) = z^3$ , daß  $z^3$  nur durch die Zahl 2 dividierbar ist. Da  $z^3$  eine Kubikzahl ist, muß sie aber mindestens durch 8 teilbar sein. Folglich entfällt diese Möglichkeit.
4.  $p$  sei gerade und  $q$  sei ungerade. Somit ergibt sich, daß  $(p^2+3q^2)$  ungerade ist.

Da  $(p,q) = 1$  und da  $p$  gerade und  $q$  ungerade ist, ergeben sich aus der Gleichung  $2p(p^2+3q^2) = z^3$  folgende Fälle:

- I)  $(2p, p^2+3q^2) = 1$
- II)  $(2p, p^2+3q^2) = 3$ .

I. Fall:  $(2p, p^2+3q^2) = 1$ , das heißt  $3 \nmid p$  und  $(p,q) = 1$ .

$2p$  und  $p^2+3q^2$  müssen beide "perfekte" Kubikzahlen sein.

1. Die Kubikzahl  $p^2+3q^2$

Wir setzen  $p^2 + 3q^2 = r^3$ .

Lösungsansatz zur Ermittlung von  $p$ ,  $q$  und  $r$

Wir wählen  $r = m^2 + 3n^2$ , wobei  $m$  und  $n$  ganze Zahlen sind und setzen

$$\begin{aligned} p + q\sqrt{-3} &= (m + n\sqrt{-3})^3 \\ &= m^3 + 3m^2n\sqrt{-3} + 3mn^2\sqrt{-3}^2 + n^3\sqrt{-3}^3 \\ &= m^3 - 9mn^2 + (3m^2n - 3n^3)\sqrt{-3}. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} p &= m^3 - 9mn^2 \\ \text{und} \quad q &= 3m^2n - 3n^3. \end{aligned}$$

Zur Probe können wir  $p$  und  $q$  in die Gleichung  $p^2 + 3q^2 = r^3$  einsetzen und erhalten  $r = m^2 + 3n^2$ . Somit ist die Richtigkeit des Ansatzes bestätigt. Wir müssen noch feststellen, welche Eigenschaften  $m$  und  $n$  erfüllen müssen, um zu gewährleisten, daß  $p$ ,  $q$  und  $r$  Lösungen der Gleichung sind. Wir haben vorausgesetzt, daß  $(p, q) = 1$  und  $(2p, p^2 + 3q^2) = 1$ . Folglich können wir nur solche  $m$  und  $n$  wählen, für die gilt:  $(m, n) = 1$  und  $3 \nmid m$ .

Mit Hilfe dieser Methode erhalten wir passende Lösungen für  $p$ ,  $q$  und  $r$ , die der Gleichung  $p^2 + 3q^2 = r^3$  genügen.

## 2. Die Kubikzahl $2p$

Ersetzen wir  $p$ , so erhalten wir die Form

$$2p = 2(m^3 - 9mn^2) = 2m(m+3n)(m-3n).$$

Da  $q = 3m^2n - 3n^3 = 3n(m+n)(m-n)$  und da  $q$  ungerade ist, müssen  $n$  ungerade und  $m$  gerade sein. Außerdem hatten wir bereits festgestellt, daß  $(m, n) = 1$  und  $3 \nmid m$ . Folglich haben höchstens zwei der Ausdrücke  $2m$ ,  $m+3n$  und  $m-3n$  einen gemeinsamen Faktor, und jeder der drei Ausdrücke muß für sich genommen eine Kubikzahl sein, um zu gewährleisten, daß  $2p$  eine Kubikzahl ist.

Wir erhalten: (1)  $m + 3n = a^3$   
 (2)  $m - 3n = b^3$   
 (3)  $2m = c^3$ .

$$a^3 + b^3 = m + 3n + m - 3n = 2m = c^3.$$

Aus dieser Beziehung können wir  $m$  ermitteln.

$$m = \frac{a^3 + b^3}{2}$$

Ersetzen wir  $m$  in Gleichung (2) durch  $\frac{a^3 + b^3}{2}$ , so erhalten wir  $n = \frac{a^3 - b^3}{6}$ .

Um den Satz zu beweisen, müssen wir für die von uns konstruierte Lösung  $x$ ,  $y$  und  $z$  einen Widerspruch zeigen. Aus diesem Grunde betrachten wir die Gleichung

$$z^3 = 2p(p^2 + 3q^2).$$

Ersetzen wir  $2p$  durch  $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3$  und  $p^2 + 3q^2$  durch  $r^3$  mit  $r = m^2 + 3n^2$ , so ergibt sich



$$z^3 = a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 (m^2 + 3n^2)^3.$$

$$z = a \cdot b \cdot c (m^2 + 3n^2)$$

$$z = a \cdot b \cdot c \left[ \left( \frac{a^3 + b^3}{2} \right)^2 + 3 \left( \frac{a^3 - b^3}{6} \right)^2 \right]$$

$$z = a \cdot b \cdot c \left[ \frac{1}{4}(a^6 + 2a^3b^3 + b^6) + \frac{1}{12}(a^6 - 2a^3b^3 + b^6) \right]$$

$$z = a \cdot b \cdot c \frac{3a^6 + 6a^3b^3 + 3b^6 + a^6 - 2a^3b^3 + b^6}{12}$$

$$z = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot c (a^6 + a^3b^3 + b^6)$$

=====

Aus der Gleichung  $a^3 + b^3 = c^3$  wird deutlich, daß  $a$  und  $b$  nicht gleichzeitig 1 sein können, folglich gilt stets  $z \neq c$ .  
Somit haben wir gezeigt, daß der I. Fall keine ganze von Null verschiedene Zahlen  $x$ ,  $y$  und  $z$  liefert, die der Gleichung  $x^3 + y^3 = z^3$  genügen.

II. Fall:  $(2p, p^2 + 3q^2) = 3$  und  $(p, q) = 1$

In diesem Fall ist  $p$  durch 3 teilbar. Wir setzen  $p = 3p'$  und erhalten  $z^3 = 6p'(9p'^2 + 3q^2) = 18p'(3p'^2 + q^2)$ .

Die Beweisführung verläuft analog der im I. Fall.

Der Leser möge den Beweis für den Fall II selbst führen.

Der Beweis des Satzes bestätigt, daß die Fermatsche Vermutung für  $n=3$  richtig ist.

Frank Maschner  
Student Ma/Phy - Lehrer  
3. Studienjahr FSU

# Preisaufgaben

- N 43 Kann man ein ungleichseitiges Dreieck durch einen Schnitt in zwei kongruente Dreiecke zerlegen?

①

- N 44 Man löse folgendes Gleichungssystem

①

$$5x - 2xy + y + 3 = 0$$

$$2x - xy - y + 9 = 0$$

- N 45 Der Nenner des folgenden Bruches ist rational zu machen:

①

$$A = \frac{59}{1 + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}$$

- N 46 Man bestimme die kleinste natürliche Zahl, die genau 20 Teiler besitzt.

①

- N 47 Man löse die Gleichung

②

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$$

- N 48 Доказать, что в круге радиуса 10 нельзя поместить 400 точек так, чтобы расстояние между любыми двумя было больше 1.

②

## Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten im Werte von 0,50 M je Punkt. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an uns zu senden. Alle Aussagen sind stets zu beweisen, unbewiesen verwendete Sachverhalte sind anzugeben. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen etc.) muß deutlich erkennbar sein.



**XX. Olympiade junger Mathematiker der DDR 4. Stufe****Olympiadeklasse 10****Aufgaben**

1. Beweisen Sie die folgende Aussage: Zu jeder natürlichen Zahl  $n = 2$  gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen

$a_1, a_2, \dots, a_n$  und  $b$ , für die

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b^2$$

gilt.

2. Gegeben sei eine Länge  $r_1$ . Konstruieren Sie ein Trapez ABCD mit  $CD < AD = AB = BC$ , in dem ein Kreis  $k_1$  mit dem Radius  $r_1$  und ein zweiter Kreis  $k_2$  so liegen, daß sie einander von außen berühren und daß  $k_1$  die Seiten AD, AB und BC berührt,  $k_2$  die Seiten BC, CD und AD berührt! Begründen und beschreiben Sie die Konstruktion! Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften gibt!

- 3A. Ermitteln Sie alle Paare  $(x, y)$  reeller Zahlen mit  $y > 0$  und  $y \neq 1$ , für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist!

$$x \cdot \log_y (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = 2 \cdot \log_y (5 - \sqrt{24}), \quad (1)$$

$$y - x = 2 \quad (2)$$

- 3B. Beweisen Sie, daß für keine natürliche Zahl  $n$  die Zahl  $625 + 4 \cdot (9^{2n})$  eine Primzahl sein kann!

4. Ein ebenflächig begrenzter Körper mit genau 6 Ecken A, B, C, D, F, H soll den in Abb. dargestellten Grundriß haben. (A'B'C'D' ist dabei ein Quadrat von gegebener Seitenlänge a.) Die Punkte A, B, C, D sollen in der Grundrißebene liegen, die Punkte F und H im Abstand a über B bzw. D. Jede Kante des Körpers soll in der Abb. sichtbar dargestellt sein (entweder als Strecke oder, wenn sie senkrecht zur Grundrißebene verläuft,

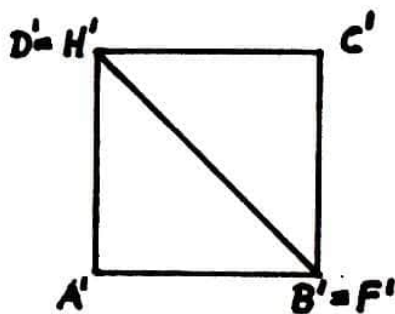


Abb.

als Punkt), auch wenn sie etwa von oben betrachtet durch andere Flächen verdeckt wird.

Stellen Sie zwei Körper, die diese Forderungen erfüllen und voneinander verschiedene Volumina haben, in schräger Parallelprojektion ( $\alpha = 60^\circ$ ,  $q = \frac{1}{2}$ ) dar! Ermitteln Sie für jeden der beiden dargestellten Körper sein Volumen!

5. Tausend reelle Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$  seien durch die Festsetzung bestimmt, daß

$$x_1 = 5$$

und für alle  $n = 1, 2, \dots, 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n}$$

gelten soll.

Beweisen Sie, daß (nach diesen Festsetzungen) für jedes  $n = 1, 2, \dots, 1000$  die Ungleichung

$$4 \leq x_n \leq 5$$

gilt.

6. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen  $c$ , für die das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen  $x, y$  bestehende) Lösung hat!

$$y > x^2 - 2x + c, \quad (1)$$

$$y > x + c, \quad (2)$$

$$y < -2x + 1. \quad (3)$$

"Man muß an die Einfalt, an das Einfache, an das urständig Produktive glauben, wenn man den rechten Weg gewinnen will. Das ist aber nicht jedem gegeben; wir werden in einem künstlichen Zustande geboren und es ist durchaus leichter, diesen immer mehr zu bekünsteln als zu dem Einfachen zurückzukehren."

Johann Wolfgang von Goethe



**XX. Olympiade junger Mathematiker der DDR 4. Stufe****Olympiadeklasse 10****Lösungen****1. 1. Lösungsweg:**

(I) Für  $n = 2$  und  $n = 3$  ist z. B. aus  
 $3^2 + 4^2 = 5^2$ ,  $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

die behauptete Existenz von  $a_1, \dots, a_n, b$  mit der geforderten Eigenschaft ersichtlich.

(II) Ist  $n \geq 4$  eine Quadratzahl  $n = m^2$  mit  $m \geq 2$ , so ist z.B. eine Summe aus  $n$  Summanden  $5^2$  gleich

$$5^2 + \dots + 5^2 = (5m)^2$$

und zeigt die behauptete Existenz der  $a_1, \dots, a_n, b$ .

(III) Ersetzt man hierin  $k$  der Summanden  $5^2$  durch  $3^2 + 4^2$

(wobei  $k$  eine der Zahlen  $1, \dots, n$  ist), so erhält man jeweils für  $n = m^2 + k$  die behauptete Existenz der  $a_1, \dots, a_n, b$ .

Die größte hiermit (zu je einem  $m \geq 2$ ) erreichbare Anzahl von Summanden ist  $2m^2 \geq m^2 + 2m = (m+1)^2 - 1$ . Damit ist also auch für jedes  $n$  zwischen  $m^2$  und der nächsten Quadratzahl  $(m+1)^2$  die Behauptung bewiesen.

Aus (I), (II), (III) folgt die Behauptung für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 2$ .

**2. Lösungsweg:**

(I) Die Aussage für  $n = 2$  ergibt sich wie oben.

(II) Wenn die Aussage für eine natürliche Zahl  $n = k \geq 2$  gilt, so folgt: Es gibt natürliche Zahlen  $c_1, c_2, \dots, c_k, d$  mit

$$c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_k^2 = d.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} (3c_1)^2 + (4c_1)^2 + (5c_2)^2 + \dots + (5c_k)^2 \\ = 5^2(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_k^2) = (5d)^2, \end{aligned}$$

also haben dann die natürlichen Zahlen

$a_1 = 3c_1, a_2 = 4c_1, a_i = 5c_{i-1} \ (i=3, \dots, k+1)$  und  $b = 5d$  die Eigenschaft  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{k+1}^2 = b^2$ .

Somit trifft die zu beweisende Aussage auch für  $n = k+1$  zu.

Mit (I) und (II) ist die Aussage für alle natürlichen  $n \geq 2$  bewiesen.





Diese Gleichung wird nur von  $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$  erfüllt, von denen wegen  $x > 0$  nur

$$x = \sqrt{2} - 1, \text{ also } r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1)$$

verbleibt. Also kann ein Trapez ABCD nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man konstruiere einen Kreis  $k_1$  mit dem Radius  $r_1$ .

Sein Mittelpunkt sei  $M_1$ , zwei aufeinander senkrechte Radien seien  $M_1Q$  und  $M_1T$ .

(2) Der Kreis um  $T$  mit  $r_1$  schneidet  $TQ$  in  $X$ .

(3) Man verlängere  $M_1Q$  über  $Q$  hinaus um  $r_2 = \overline{QX}$ ; der erhaltene Punkt sei  $M_2$ . Man konstruiere den Kreis um  $M_2$  mit  $r_2$ .

(4) Man konstruiere die gemeinsamen äußeren Tangenten  $t$  und  $t'$  von  $k_1, k_2$ .

(5) Die Gerade  $m$  durch  $M_1, M_2$  schneidet  $k_1$  und  $k_2$  außer in  $Q$  in  $P$  bzw.  $R$ ; man konstruiere die Senkrechten  $p, r$  durch  $P, R$  auf  $m$ . Durch  $t, t', p$  und  $r$  wird das gesuchte Trapez ABCD gebildet.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Trapez den Bedingungen der Aufgabe genügt: Nach Konstruktion ist ABCD ein gleichschenkliges Trapez mit  $\overline{AD} = \overline{BC}$ , und  $k_1, k_2$  haben die vorgeschriebenen Berührungen mit den Seiten. Wegen  $r_2 < r_1$  gilt auch  $\overline{CD} < \overline{AB}$ , und man kann wie in I. herleiten, daß

$x = r_2 : r_1$  die Gleichung  $\overline{BC} = \frac{a}{2}(1 + 2x + x^2)$  gilt. Da nach Konstruktion  $r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1)$  ist, erfüllt  $x$  die Gleichung  $1 + 2x + x^2 = 2$ , und es folgt  $\overline{BC} = a = \overline{AB}$ .

IV. Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, die Konstruktionsschritte (2) bis (5) sind danach eindeutig ausführbar. Also gibt es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften.

Andere Lösungsmöglichkeiten:

1. Nach Herleitung von  $x = \sqrt{2} - 1$  kann man  $x^2 = 3 - 2\sqrt{2}$  verwenden, um  $\overline{AB} - \overline{DC} = a(1 - x^2) = 2a(\sqrt{2} - 1)$  herzuleiten. Hiernach ist  $\angle ABC$  die Größe eines Basiswinkels in einem gleichschenkligen Dreieck, in dem sich Schenkellänge zu Basislänge wie  $1 : 2(\sqrt{2} - 1)$  verhalten. Daraus ergibt sich eine Konstruktion dieser Winkelgröße.  $M_1$  liegt dann auf der Winkel-

halbierenden und auf einer Parallelen zu einem Schenkel im Abstand  $r_1$ . Danach ist die Figur leicht zu vervollständigen.

2. Die Ermittlung (I.) von  $r_2 : r_1$  ist z. B. auch folgendermaßen möglich: Das Lot von U auf PR sei UW, das Lot von  $M_2$  auf  $M_1U$  sei  $M_2Y$ . Wegen  $\overline{BU} = \frac{a}{2}$  ist U Mittelpunkt von BC, also  $\overline{PW} = \frac{1}{2}(\overline{PQ} + \overline{QR}) = r_1 + r_2$ , also  $\overline{M_1W} = r_2$ . Ferner ist  $\overline{M_1M_2} = r_1 + r_2$  und YUVM ein Rechteck, also  $\overline{M_1Y} = r_1 - r_2$ . Aus  $\triangle M_1UW \sim \triangle M_1M_2Y$  folgt daher

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}, \quad r_2^2 + 2r_1r_2 - r_1^2 = 0, \quad \text{also } r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1).$$

3. Wegen  $\angle PM_1U + \angle UM_1Q = 180^\circ$  und  $\triangle BM_1P \cong \triangle BM_1U$ ,  $\triangle GM_1U \cong \triangle GM_1Q$  gilt  $\angle BM_1U = 90^\circ - \angle GM_1U = \angle M_1GU$ . Hieraus und aus entsprechenden Aussagen im Trapez HGCD erhält man

$$\begin{aligned} \triangle BM_1P \cong \triangle BM_1U &\sim \triangle M_1GU \cong \triangle M_1GQ \sim \triangle GM_2Q \cong \\ &\cong \triangle GM_2V \sim \triangle M_2CV \cong \triangle M_2CR. \end{aligned}$$

Hiermit kann man z. B. der Reihe nach  $\overline{GU} = \overline{GQ} = \overline{GV}$  und  $\overline{CV}$  durch  $r_1$  und  $s = \overline{BP} = \overline{BU}$  ausdrücken und erhält aus  $\overline{BC} = 2s$  eine Gleichung zwischen  $r_1$  und  $s$ , die auf  $s = r_1\sqrt{1 + \sqrt{2}}$  führt.

Zu allen derartigen Möglichkeiten von (I.) ist jeweils (III.) als Umkehrung durchzuführen.

3A. Angenommen, ein Paar  $(x; y)$  reeller Zahlen mit  $y > 0$  und  $y \neq 1$  erfülle (1) und (2).

Wegen  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - \sqrt{24}$  folgt dann

$$x^2 \cdot \log_y (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 4 \cdot \log_y (\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Wegen  $\sqrt{3} - \sqrt{2} \neq 1$  ist  $\log_y (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \neq 0$ , also folgt  $x^2 = 4$ .

Aus (2) und  $y > 0$  folgt ferner  $x = y - 2 > -2$ . Daher muß  $x = 2$  sein, nach (2) ergibt sich  $y = 2 + x = 4$ .

Also kann nur das Paar  $(x; y) = (2; 4)$  die Gleichungen (1), (2) erfüllen.

Wegen  $2 \cdot \log_4 (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 2 \cdot \log_4 (5 - \sqrt{24})$  und  $4 - 2 = 2$  erfüllt es diese Gleichungen tatsächlich.

Daher ist genau das Paar  $(2; 4)$  das gesuchte.



Hinweis:

Aus (1) kann man  $\log_y (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{x^2} = \log_y (5 - \sqrt{24})^2$ ,

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{x^2} = (5 - \sqrt{24})^2, x^2 = \log(\sqrt{3} - \sqrt{2}) (5 - \sqrt{24})^2$$

$$\left( = \frac{2 \cdot \lg(5 - \sqrt{24})}{\lg(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \right)$$

herleiten.

Dies lediglich mit dem näherungsweise Ausrechnen  $x^2 \approx 4$  fortzusetzen, genügt nicht, da ja, falls der genaue Wert  $x^2 < 4$  wäre, auch die negative Lösung  $x$  auf ein  $y = 2 + x > 0$  führen würde.

3B. Für jede natürliche Zahl  $n$  gilt

$$\begin{aligned} 625 + 4 \cdot (9^{2n}) &= 5^4 + 4 \cdot 3^{4n} \\ &= (5^2 + 2 \cdot 3^{2n})^2 - 4 \cdot 5^2 \cdot 3^{2n} \\ &= (5^2 + 2 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 5 \cdot 3^n)(5^2 + 2 \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 5 \cdot 3^n) \\ &= ((5 + 3^n)^2 + 3^{2n})((5 - 3^n)^2 + 3^{2n}) \end{aligned}$$

sowie  $(5 + 3^n)^2 + 3^{2n} \geq (5 + 3^0)^2 + 3^0 \geq 1$  und

$5 \neq 3^n$ , also  $(5 - 3^n)^2 \geq 0$ ,  $(5 - 3^n)^2 + 3^{2n} \geq 0 + 3^0 = 1$ .

Also ist  $625 + 4 \cdot (9^{2n})$  in zwei ganzzahlige Faktoren  $\geq 1$  zerlegbar und daher keine Primzahl.

4.

Abb. 1

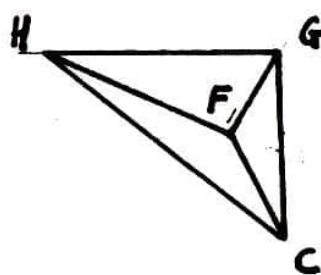
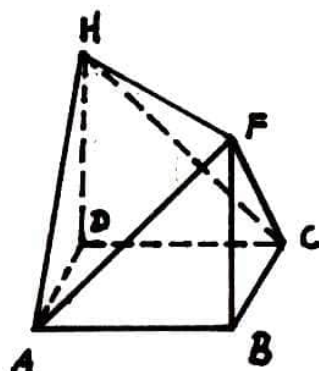
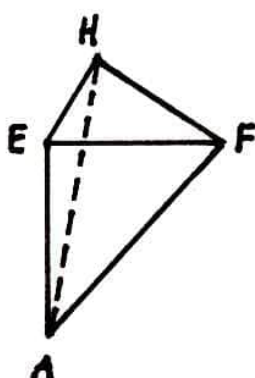


Abb. 1 zeigt einen Körper  $K_1$ , der die Forderungen der Aufgabe erfüllt. Man kann ihn dadurch entstanden denken, daß von einem Würfel ABCDEFGH die Pyramiden AFHE und CFHG abgeschnitten wurden.

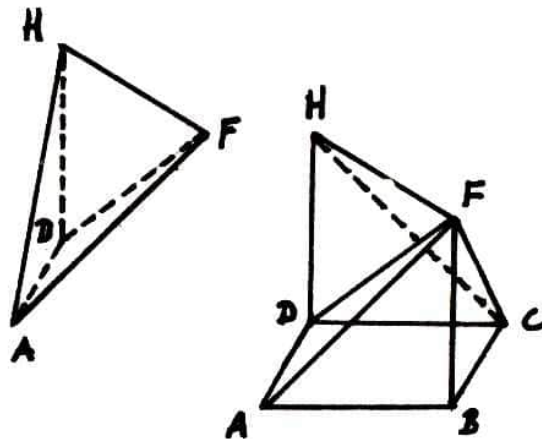


Abb. 2

Abb. 2 zeigt einen Körper  $K_2$ , der ebenfalls die Forderungen der Aufgabe

erfüllt. Man kann ihn dadurch entstanden denken, daß aus  $K_1$  die Pyramide AFHD herausgeschnitten wurde.

Für jede der genannten Pyramiden kann ein gleichschenklighrechtwinkliges Dreieck mit der Kathetenlänge  $a$  als Grundfläche aufgefaßt werden; die zugehörige Höhe hat dann die Länge  $a$ . Daher hat jede dieser drei Pyramiden das Volumen

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{1}{6} a^3$ . Somit hat  $K_1$  das Volumen

$a^3 - 2 \cdot \frac{1}{6} a^3 = \frac{2}{3} a^3$  und  $K_2$  das Volumen  $a^3 - 3 \cdot \frac{1}{6} a^3 = \frac{1}{2} a^3$ .

Hinweis: Außer diesen beiden sind noch weitere Lösungen möglich.

5. Nach der ersten Festsetzung ist  $x_1 = 4$ . Hat man für eine der Zahlen  $n=1,2,\dots,999$  schon nachgewiesen, daß  $x_n \geq 4$  ist, so erhält man  $(x_n - 4)^2 \geq 0$ , also  $x_n^2 + 16 = 8x_n$ . Wegen  $2x_n (\geq 8) > 0$  folgt hieraus  $\frac{x_n^2 + 16}{2x_n} \geq 4$ , d. h. nach der zweiten Festsetzung  $x_{n+1} \geq 4$ . Auf diese Weise gewinnt man der Reihe nach die Ungleichungen  $x_2 \geq 4$ ;  $x_3 \geq 4$ ; ...;  $x_{1000} \geq 4$ .

Ferner gilt  $x_1 \leq 5$ , und hat man für eine der Zahlen  $n=1,2,\dots,999$  schon  $4 \leq x_n \leq 5$ , so folgt  $-1 \leq x_n - 5 \leq 0$  und daraus  $(x_n - 5)^2 \leq 1$ ,  $(x_n - 5)^2 - 9 \leq -8 \leq 0$ , also

$$x_n^2 + 16 \leq 10x_n,$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n} \leq 5.$$



Auf diese Weise gewinnt man auch  $x_2 = 5$ ;  $x_3 = 5$ ; ...;  $x_{1000} = 5$ .

6. 1. Lösungsweg: Angenommen, für ein reelles  $c$  habe (1), (2), (3) eine Lösung  $(x; y)$ . Aus (1) und (2) folgt dann  $x \neq 0$ , da sich für  $x = 0$  der Widerspruch  $y > c$ ,  $y < c$  ergäbe. Aus (1) und (3) folgt ferner  $x^2 - 2x + c < y < -2x + 1$ , also  $c < 1 - x^2$ , wegen  $x \neq 0$  also  $c < 1$ . Daher kann das System (1), (2), (3) nur für  $c < 1$  eine Lösung haben.

Es hat für jedes  $c < 1$  eine Lösung, z. B. eine mit  $y = c$ . Für diesen Wert ist das System nämlich äquivalent zu

$$x^2 - 2x < 0, \quad (4)$$

$$x > 0, \quad (5)$$

$$-2x + 1 > c; \quad (6)$$

(4) und (5) sind äquivalent mit

$$0 < x < 2 \quad (7)$$

und (6) ist äquivalent mit

$$x < \frac{1-c}{2}. \quad (8)$$

Wegen  $c < 1$  gilt  $\frac{1-c}{2} > 0$ ; also sind (7), (8) durch reelle  $x$  erfüllbar.

Die gesuchten Zahlen sind folglich alle Zahlen  $c < 1$ .

2. Lösungsweg: Stellt man die Funktionen

$$y = x^2 - 2x + c, \quad (1')$$

$$y = x + c, \quad (2')$$

$$y = -2x + 1 \quad (3')$$

graphisch dar, so besteht die Lösungsmenge des Ungleichungssystems (1), (2), (3) aus den Koordinatenpaaren  $(x; y)$  aller derjenigen Punkte, die sowohl oberhalb der Parabel (1') als auch unterhalb der Geraden (2') und unterhalb der Geraden (3') liegen. Nun haben (1') und (2') stets die Schnittpunkte  $(0; c)$  und  $(3; 3+c)$ .

Ist  $c < 1$  (Abb.), so liegt der Schnittpunkt  $(0; c)$  unterhalb der Geraden (3'), und daher enthält auch das oberhalb (1') und unterhalb (2') gelegene Flächenstück Punkte unterhalb (3'); d. h., im Falle  $c < 1$  ist die Lösungsmenge von (1), (2), (3) nicht leer.

Ist  $c = 1$ , so folgt aus (1') und (3'), daß  $x^2 = 0$ , also  $x = 0$ ,  $y = 1$  sein muß. Ist  $c > 1$ , so folgt aus (1') und (3') der Wi-

derspruch  $x^2 = 1 - c < 0$ . Also haben (1') und (3') im Fall  $c \geq 1$  höchstens den Punkt  $(0;c)$  gemeinsam (Abb.). Da die Parabel (1') von unten konvex ist, also ganz oberhalb jeder nicht zur y-Achse parallelen Geraden verläuft, mit der sie höchstens einen Punkt gemeinsam hat, gibt es somit keinen Punkt, der sowohl oberhalb (1') als auch unterhalb (3') läge. Daher ist im Falle  $c \geq 1$  die Lösungsmenge von (1), (2), (3) leer.

Die gesuchten Zahlen sind folglich alle Zahlen  $c < 1$ .

Abb. siehe Tittelbild !

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“

**Leiter:** Heiner Schwulow

**Chefredakteur:** Andreas Kleinwächter

**Stellvertretender Chefredakteur:** Andreas Jeschag

**Redaktion:** H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein

**Anschrift:** WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

**Redaktionsschluß: 10.9.81**



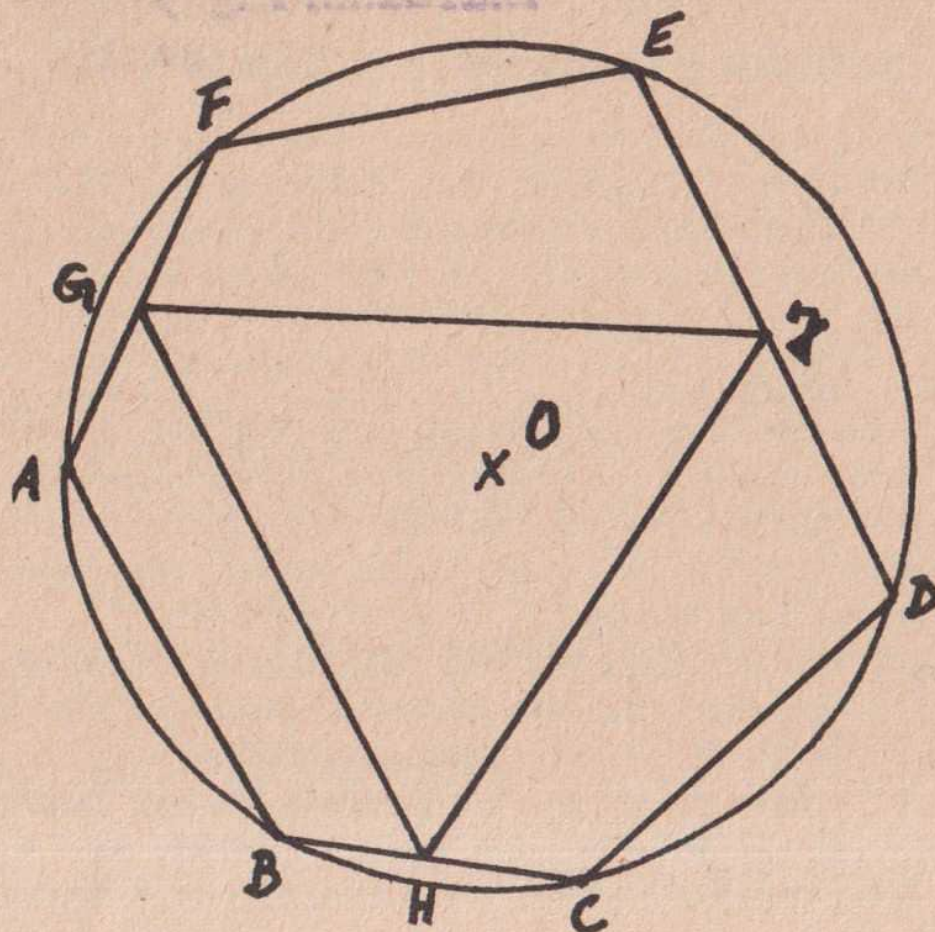


Abb. zu Lösung N 17.

10

81

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom  
Jugendobjekt Studienvor-  
bereitung-Studienwerbung  
der Sektion Mathematik  
an der Friedrich-Schiller-  
Universität Jena

15. Jahrgang  
Index 33873  
Sonderpreis für DDR:  
0,20 M



## Einführung in die lineare Algebra (II)

Wir haben in einem vorangegangenen Artikel (siehe Wurzel 7/8/81) einige wesentliche Begriffe und Sätze der "Linearen Algebra" anschaulich erläutert. Nunmehr soll versucht werden, die dort eingeführten Definitionen und Theoreme in exakter mathematischer Sprache zu beschreiben.

### 1. Vektorräume

Betrachtet man die Vektoren (oder Punkte) im  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ , so sieht man, daß die wesentlichen algebraischen Operationen die Addition von Vektoren und die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl sind. Im folgenden bezeichnen wir mit  $\mathbb{R}$  stets die reellen Zahlen.

Sei  $V$  eine Menge, auf der zwei Zuordnungen definiert sind:

- (1) Jedem Paar  $x, y$  von Elementen aus  $V$  ( $x, y \in V$ ) wird ein Element  $x+y \in V$ , die Summe, zugeordnet.
- (2) Jedem  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $x \in V$  ordnet man ein Element  $\alpha x$  (oder  $\alpha \cdot x$ ) aus  $V$  zu, das skalare Produkt.

Diese beiden Zuordnungen sollen folgende Eigenschaften besitzen:

- (1) Für  $x, y, z \in V$  gelte  $(x+y)+z = x+(y+z)$  (Assoziativgesetz)  
Man schreibt dann  $x+y+z$  an Stelle von  $(x+y)+z$ .
- (2) Es gibt ein Element  $\theta \in V$  mit  
 $\theta + x = x$  für alle  $x \in V$ .  
 $\theta$  nennt man Nullelement (oder neutrales Element).
- (3) Zu jedem  $x \in V$  existiert ein  $y \in V$  mit  $x+y = \theta$ .  
Man nennt  $y$  inverses Element zu  $x$ .
- (4)  $x + y = y + x$  für alle  $x, y \in V$ .

Eine Menge mit einer Zuordnung "+", die die angegebenen Eigenschaften besitzt, nennt man kommutative Gruppe.

Man kann leicht zeigen, daß  $\theta$  eindeutig bestimmt ist, und daß zu jedem  $x \in V$  genau ein Element  $y \in V$  mit  $x + y = \theta$  existiert. Man schreibt dann  $y = -x$ , falls  $x+y = \theta$ .

- (5) Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $x \in V$  gilt  
 $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$ .
  - (6)  $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \in V$
- (5) und (6) nennt man Distributivgesetze.



$$(7) \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \text{für} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x \in V$$

und

$$(8) \quad 1 \cdot x = x \quad \text{für} \quad x \in V.$$

Vielleicht ist es nicht klar, daß man  $1 \cdot x = x$  fordern muß. Definiert man aber z. B.  $\alpha \cdot x = \theta$  für alle  $x \in V$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so sind alle anderen Eigenschaften erfüllt, aber (8) natürlich i. a. nicht. Eine Menge  $V$  mit zwei wie oben angegebenen Zuordnungen, die (1) - (8) erfüllen, nennt man Vektorraum (über den reellen Zahlen). Man kann sich leicht überlegen, daß alle Eigenschaften auch für komplexe Zahlen sinnvoll bleiben.

Wir wollen nun einige leichte Folgerungen aus den Eigenschaften herleiten.

1. Für  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  und  $x_1, \dots, x_n \in V$  ist  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$  unabhängig von der Reihenfolge der Summation. Man schreibt

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{für} \quad \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$$

2.  $0 \cdot x = \theta$  für  $x \in V$ .

Dies folgt aus  $0 \cdot x = (0+0)x = 0x + 0x$ , indem man in dieser Gleichung auf beiden Seiten  $-0x$  addiert.

3.  $\alpha \cdot \theta = \theta$ ,

Beweis:  $\alpha \cdot \theta = \alpha(\theta + \theta) = \alpha\theta + \alpha\theta$ . Wieder führt eine Addition mit  $-\alpha\theta$  zu  $\alpha\theta = \theta$ .

4.  $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -\alpha x$ , insbesondere gilt  $(-1)x = -x$ .

Ehe wir dies beweisen, wollen wir die Formel erläutern:

$(-\alpha)x$  bedeutet, daß  $-\alpha$  (reelle Zahl) mit  $x$  verknüpft wird.  $\alpha(-x)$  ist das Element, welches  $\alpha$  und  $-x$  (inverses Element zu  $x$ ) zugeordnet wird, und schließlich ist  $-\alpha x$  das inverse Element zu  $\alpha x$  (in  $V$ ).

Beweis:  $(-\alpha)x + \alpha x = (-\alpha + \alpha)x = 0 \cdot x = \theta$ , also ist  $(-\alpha)x$  invers zu  $\alpha x$ , d. h.  $(-\alpha)x = -\alpha x$ .

Ebenso folgt aus  $\alpha(-x) + \alpha x = \alpha(-x+x) = \alpha\theta = \theta$  die Identität  $\alpha(-x) = -\alpha x$ .

Schreibweise: Für  $x + (-y)$  schreibt man  $x-y$ , d. h.  $x-y$  ist genau das Element, welches mit  $y$  verknüpft  $x$  ergibt.

Beispiele:(A)  $n$  natürliche Zahl

$$\mathbb{R}^n = \{x; x = (\xi_1, \dots, \xi_n), \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}\}$$

$x + y$  wird als  $(\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n)$  für  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  und  $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  definiert

$\alpha \cdot x$  sei  $(\alpha \xi_1, \dots, \alpha \xi_n)$ .

Man überprüft nun unmittelbar, daß diese beiden Zuordnungen den Axiomen (1) - (8) genügen. Insbesondere ist  $\theta = (0, \dots, 0)$ , der sogenannte Nullvektor, das Nullelement.

(B) Sei  $M$  eine beliebige nichtleere Menge und

$$V_M = \{f; f \text{ Abbildung von } M \text{ in } \mathbb{R}\}.$$

Dann definiert man die Funktionen  $f + g$  und  $\alpha f$  für

$f, g \in V_M$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  durch die Vorschriften:

$$f + g : m \longrightarrow f(m) + g(m) \quad (\text{Addition in } \mathbb{R})$$

$$f : m \longrightarrow \alpha \cdot f(m) \quad (\text{Multiplikation in } \mathbb{R}),$$

$m \in M$ .

Auch hier ist der Nachweis der Eigenschaften unmittelbar zu führen. Die Nullfunktion  $\theta$  ist durch  $\theta(m) = 0$  für alle  $m \in M$  definiert.

$$(C) P_n = \left\{ \text{Polynome } p; p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n, \right. \\ \left. \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(p+q)(t) \text{ ist } p(t)+q(t)=(\alpha_0+\beta_0)+(\alpha_1+\beta_1)t+\dots+(\alpha_n+\beta_n)t^n$$

$$\text{und } (\alpha p)(t) = \alpha \cdot p(t) = (\alpha \alpha_0) + (\alpha \cdot \alpha_1)t + \dots + (\alpha \alpha_n)t^n$$

$$\theta(t) = 0, t \in \mathbb{R}, \text{ d. h. } \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Abschließend noch ein etwas schwerer zu verstehendes Beispiel, das aber in der Mathematik (besonders in der Funktionalanalysis) häufig verwendet wird.

(D) Wir betrachten alle Folgen  $\xi_1, \xi_2, \dots$  reeller Zahlen mit

$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ . Mit  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$  bezeichnen wir solch eine Folge. Man definiert dann

$$c_0 = \{x; x = (\xi_1, \xi_2, \dots), \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0\}.$$

Das Besondere ist, daß die Elemente Folgen sind.  $x + y$  wird als  $(\xi_1 + \eta_1, \dots)$ ,  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$  und  $\alpha x = (\alpha \xi_1, \alpha \xi_2, \dots)$  definiert.

Beim Nachweis der Eigenschaften muß man sich zuerst überlegen,



daß dies Zuordnungen nach  $c_0$  sind, d. h. aus  $x, y \in c_0$  folgt  $x+y \in c_0$  und  $\alpha x \in c_0$ . Das gilt aber, da die Summe zweier Nullfolgen wieder eine Nullfolge ist, ebenso für  $\alpha x$ .

**Bemerkung:** Würde man z. B. diejenigen Folgen untersuchen, die gegen 1 konvergieren, so würde die Summe nicht mehr zum Raum gehören, da ja diese Summe gegen 2 konvergiert. Damit ist diese Menge kein Vektorraum.

## 2. Unterräume

Sei nun  $U$  eine Teilmenge des Vektorraumes  $V$  ( $U \subseteq V$ ). Verknüpft man zwei Elemente  $x, y \in U$ , so wird i. a.  $x+y$  nicht mehr zu  $U$  gehören, sondern nur zu  $V$ . Beispielsweise sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  durch  $U = \{x \in \mathbb{R}^n, \xi_1 = 1\}$  definiert. Dann gilt für  $x, y \in U$ , daß  $x+y = (2, \dots)$ , d. h.  $x+y \notin U$ .

Hat aber  $U$  die Eigenschaft, daß aus  $x, y \in U$  stets  $x+y \in U$  und  $\alpha x \in U$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$  folgt, so nennt man  $U$  einen Unterraum von  $V$ .

**Satz 1:** Sei  $U$  ein Unterraum von  $V$ . Dann wird  $U$  zu einem Vektorraum, wenn  $x+y$  und  $\alpha x$  wie in  $V$  definiert werden.

**Beweis:** Wir müssen zeigen, daß "+" und "." alle Axiome (als Zuordnungen in  $U$ ) erfüllen. Zeigen wir z. B. die Existenz von  $\theta$  und  $-x$ . Wegen  $-x = (-1)x$  gehört  $-x$  (als Element von  $V$ ) sogar zu  $U$ . Damit liegt aber auch  $x-x = \theta$  in  $U$ , d. h.  $\theta \in U$  ist auch das Nullelement von  $U$ .

Mit anderen Worten,  $-x$  und  $\theta$  (als Elemente von  $V$ ) müssen bereits in  $U$  liegen. Alle anderen Eigenschaften sind unmittelbar nachzuweisen.

**Beispiele:** (1) Sei  $U = \mathbb{R}^n$  durch  $U = \{x \in \mathbb{R}^n; \xi_1 = \xi_n = 0\}$  definiert. Dann ist  $U$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ .

(2) Ist  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  eine feste Folge reeller Zahlen, so ist  $U = \{x \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i = 0\}$  ein Unterraum.

(3) In einem Vektorraum  $V$  sei ein  $x_0$  ausgewählt.  $U = \{x; x = \alpha x_0 \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}\}$  ist dann ein Unterraum. ( $U$  ist die von  $x$  erzeugte Gerade)

(4)  $U = \{0\}$  ist ein Unterraum.

**Aufgaben:** (1) Sind  $U = \{x \in \mathbb{R}^n; \xi_1 - \xi_n = 0\}$  und  $U = \{x \in \mathbb{R}^n; \xi_1 + \dots + \xi_n = -1\}$  Unterräume von  $\mathbb{R}^n$ ?

(2) Zeigen Sie an einem Beispiel, daß für zwei Unterräume  $U_1, U_2$  in  $V$  die Vereinigung  $U_1 \cup U_2 = \{x \in V, x \in U_1 \text{ oder } x \in U_2\}$  i. a. kein Unterraum ist. Kann man solche Beispiele auch unter der zusätzlichen Annahme  $U_1 \subseteq U_2$  konstruieren?

### 3. Lineare Hülle

Ein ganz wesentlicher Begriff ist der der linearen Hülle.

Ist  $M$  eine beliebige nichtleere Teilmenge von  $V$  (Vektorraum), so fragt man nach dem kleinsten Unterraum, der  $M$  enthält, oder äquivalent dazu, nach dem von  $M$  aufgespannten Unterraum.

Seien  $x_1, \dots, x_n \in V$ .  $x \in V$  heißt Linearkombination von  $x_1, \dots, x_n$ , wenn  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  existieren, so daß

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

gilt.

**Beispiel:** Betrachten wir  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ , so ist  $x$  Linearkombination von  $e_1, \dots, e_m$ ,  $m \leq n$ , genau dann, wenn man  $\xi_{m+1} = \dots = \xi_n = 0$  hat. Im Fall  $m = n$  kann also jedes Element aus  $\mathbb{R}^n$  als Linearkombination von  $e_1, \dots, e_n$  dargestellt werden.

**Aufgaben:** 1. Man stelle  $x = (3, 0, -1)$  als Linearkombination von  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  und  $(1, 1, 1)$  dar.

2. Ist  $x = (1, 2, 1)$  Linearkombination von  $(1, 1, 0)$  und  $(0, 1, -1)$ ?

3. Zeigen Sie, daß die Menge aller Linearkombinationen  $x$  aus  $x_1, \dots, x_n \in V$  einen Unterraum von  $V$  bildet.

Betrachtet man die Linearkombinationen von  $x_0 \in V$ , so sind dies genau diejenigen  $x \in V$ , die sich als  $\alpha x_0$  schreiben lassen,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Bezeichnung:**  $\text{span}(x_1, \dots, x_n) = \{x \in V, x \text{ Linearkombination von } x_1, \dots, x_n\}$  nennt man die lineare Hülle von  $x_1, \dots, x_n$ .

**Satz 2:**  $\text{span}(x_1, \dots, x_n)$  ist ein Unterraum von  $V$ .

Ist  $U$  ein Unterraum von  $V$  mit  $x_1, \dots, x_n \in U$ , so gilt  $\text{span}(x_1, \dots, x_n) \subseteq U$ , d. h.  $\text{span}(x_1, \dots, x_n)$  ist der kleinste Unterraum, der  $x_1, \dots, x_n$  enthält.



**Beweis:** Der erste Teil ist Aufgabe 3. Sind  $x_1, \dots, x_n \in U$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , so folgt nach den Eigenschaften eines Unterraumes auch  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in U$ . Damit haben wir gezeigt, daß jedes Element  $x$  aus  $\text{span}(x_1, \dots, x_n)$  auch zu  $U$  gehört, d. h.  $\text{span}(x_1, \dots, x_n) \subseteq U$ .

Sei nun  $M \subseteq V$  eine beliebige Teilmenge, nicht notwendig endlich. Als  $\text{span}(M)$  bezeichnet man die Menge aller möglichen Linearkombinationen von Elementen aus  $M$ , d. h.  $x \in \text{span}(M)$ , genau dann, wenn  $x_1, \dots, x_n \in M$  ( $n$  bel. natürliche Zahl) und  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  mit  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  existieren.  $\text{span}(M)$  heißt die lineare Hülle von  $M$ .

**Beispiel:** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3, |x_j| \leq 1, 1 \leq j \leq 3\} \quad (\text{Würfel})$$

Dann gilt  $\text{span}(M) = \mathbb{R}^3$ , denn

$$x = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1).$$

Gilt für  $M \subseteq V$  die Beziehung

$$\text{span}(M) = V,$$

so nennt man  $M$  erzeugend.

Insbesondere sind  $x_1, \dots, x_n \in V$  genau dann erzeugend, wenn zu jedem  $x \in V$  reelle Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  mit  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  existieren.

Gibt es in  $V$  erzeugende Elemente  $x_1, \dots, x_n$ , so nennt man  $V$  endlichdimensional. Im anderen Fall, d. h. für alle  $x_1, \dots, x_n \in V$ ,  $n=1,2,\dots$ , gibt es stets ein  $x \in V$  mit  $x \notin \text{span}(x_1, \dots, x_n)$ , heißt  $V$  unendlichdimensional.

Wir wollen uns im weiteren mit endlichdimensionalen Räumen beschäftigen, obwohl in der modernen Mathematik gerade die unendlichdimensionalen Räume von großem Interesse sind. Bei deren Betrachtung treten aber eine Reihe komplizierter Probleme auf, so daß wir leider hier nicht weiter darauf eingehen können.

**Beispiele:**  $\mathbb{R}^n$  und  $P_n$  sind endlichdimensional wegen

$\mathbb{R}^n = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$  bzw.  $P_n = \text{span}(p_0, \dots, p_n)$  mit  $p_j(t) = t^j$ ,  $0 \leq j \leq n$ . Dagegen ist  $\mathbb{R}^M$  für unendliche Mengen  $M$  unendlichdimensional.

4. Lineare Unabhängigkeit und Basen

Seien  $x_1, \dots, x_n \in V$  und  $U = \text{span}(x_1, \dots, x_n)$  der erzeugte Unterraum. Betrachtet man nun z. B.  $\text{span}(x_1, \dots, x_{n-1})$ , so wird i. a. dieser Unterraum kleiner als  $U$  sein, denn wenn

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{gilt,}$$

so muß i. a. nicht die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i x_i$$

mit  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{R}$  möglich sein.

Man sagt nun, daß  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängig sind, wenn für jedes  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , stets

$$\text{span}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \neq \text{span}(x_1, \dots, x_n)$$

ist. Anders ausgedrückt, jedes  $x_k$  ist notwendig für die Konstruktion der linearen Hülle, kein Element kann weggelassen werden, ohne die Hülle zu verkleinern.

Typisches Beispiel sind  $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^n$ ,  $m \leq n$ .

Sind  $x_1, \dots, x_n$  nicht linear unabhängig, so nennt man sie linear abhängig. In diesem Fall existiert ein  $x_k$  mit

$\text{span}(x_1, \dots, x_n) = \text{span}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ . Insbesondere sind  $x_1, \dots, x_n$  linear abhängig, falls eins der  $x_k$  das Nullelement ist.

**Satz 3:** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $x_1, \dots, x_n \in V$  sind linear unabhängig.
- (2) Aus  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$  folgt  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$
- (3) Zu jedem  $x \in \text{span}(x_1, \dots, x_n)$  sind die reellen Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  mit  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Wir zeigen zuerst, daß aus (1) stets (3) folgt:

Gilt  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  und  $x = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$ , so ist  $\alpha_i = \beta_i$  zu zeigen.

Dann folgt

$$0 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) x_i.$$

Ist nun für ein  $i_0$ ,  $\alpha_{i_0} \neq \beta_{i_0}$ , d. h.  $\alpha_{i_0} - \beta_{i_0} \neq 0$ , so erhält man



$$x_{i_0} = \frac{-1}{\alpha_{i_0} - \beta_{i_0}} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n (\alpha_i - \beta_i) x_i,$$

d. h.  $x_{i_0} \in \text{span}(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_n)$ .

Nun überlegt man sich aber einfach, daß hieraus

$$\text{span}(x_1, \dots, x_n) = \text{span}(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_n)$$

folgt.

Das steht aber im Widerspruch zu (1) und damit war unsere Annahme  $\alpha_{i_0} \neq \beta_{i_0}$  falsch, d. h. es gilt (3).

Aus (3) folgt (2): Wegen  $\theta = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$  folgt für  $\theta = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  aus (3) sofort  $\alpha_i = \beta_i$ , d. h.  $\alpha_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

(2) impliziert (1): Nehmen wir an, (1) wäre falsch. Dann gibt es ein  $i_0$  mit  $\text{span}(x_1, \dots, x_n) = \text{span}(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_n)$ .

Insbesondere findet man  $\alpha_1, \dots, \alpha_{i_0-1}, \alpha_{i_0+1}, \dots, \alpha_n$  mit

$$x_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \alpha_i x_i, \text{ woraus}$$

$$\theta = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{mit } \alpha_{i_0} = -1 \text{ folgt. Das steht}$$

aber im Widerspruch zu (2), denn aus (2) würde  $\alpha_{i_0} = 0$  folgen.

**Bemerkung:** In der Literatur ist es üblich, Eigenschaft (2) aus Satz 3 als Definition für die lineare Unabhängigkeit zu nehmen. Wir verwendeten die äquivalente Eigenschaft über die lineare Hülle, die uns anschaulicher erscheint.

**Beispiel:** 1.  $(1,1)$ ,  $(1,-1)$  sind linear unabhängig, da aus

$$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) = (0,0),$$

d. h.  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$  und  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ , sofort

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \text{ folgt.}$$

2.  $(1,1)$  und  $(-2,-2)$  sind linear abhängig, wegen

$$(1,1) + \frac{1}{2}(-2,-2) = \theta.$$

Die Menge  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$  heißt Basis von  $V$ , falls  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängig und erzeugend sind. Es läßt sich nach (3) aus Satz 3 somit jedes  $x \in V$  eindeutig als  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  darstellen.

Die Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  nennt man die Koordinaten von  $x$  bzgl. der Basis  $(x_1, \dots, x_n)$ . Ändert man die Basis, so ändern sich natürlich auch die Koordinaten.

Beispiel: 1.  $(e_1, \dots, e_n)$  ist eine Basis in  $\mathbb{R}^n$ . Für  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  sind in diesem Fall genau  $\xi_1, \dots, \xi_n$  die Koordinaten von  $x$ .

2.  $(1, 1), (1, -1)$  ist eine Basis in  $\mathbb{R}^2$ .

Jedes  $x = (\xi_1, \xi_2)$  läßt sich also eindeutig als

$$\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, -1)$$

darstellen, d. h.  $\alpha_1 + \alpha_2 = \xi_1$  und  $\alpha_1 - \alpha_2 = \xi_2$ .

Eine leichte Rechnung ergibt nun

$$\alpha_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \text{ und } \alpha_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}.$$

Den folgenden Satz wollen wir ohne Beweis angeben. Er liefert aber die Möglichkeit, die Dimension eines Vektorraumes zu definieren.

**Satz 4:** Sei  $(x_1, \dots, x_n) \in V$  eine Basis und  $y_1, \dots, y_m \in V$  linear unabhängig. Dann gilt

$$m \leq n.$$

Folgerung: Sind  $(x_1, \dots, x_n)$  und  $(y_1, \dots, y_m)$  Basen in  $V$ , so gilt  $m = n$ .

Beweis: Nach Satz 4 folgt  $m \leq n$ . Wendet man nun Satz 4 für die Basis  $(y_1, \dots, y_m)$  an, so ergibt sich  $n \leq m$ , d. h.  $m = n$ .

Diese eindeutig bestimmte Zahl der Elemente jeder Basis nennt man die Dimension von  $V$  ( $\dim(V)$ ).

D. h.  $\dim(V) = n$ , genau dann, wenn eine (jede) Basis in  $V$   $n$  Elemente enthält.

Beispiele: 1.  $\dim \mathbb{R}^n = n$

2.  $\dim P_n = n+1$

3. Sei  $U = \{x \in \mathbb{R}^n; \xi_1 = 0\}$ .

Dann gilt  $\dim U = n-1$  wegen  $U = \text{span}(e_2, \dots, e_n)$ .

Aufgaben: (1) Man zeige, daß für einen Unterraum von  $V$  stets  $\dim(U) \leq \dim(V)$  gilt (man verwende Satz 4)!

(2) Beweisen Sie folgende Aussage: Sind  $U_1, U_2 \subseteq V$  Unterräume mit  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ , d. h. aus  $x \in U_1$  und  $x \in U_2$  folgt  $x = 0$ , so gilt  $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$ , wobei



$$U_1 + U_2 = \{ x \in V; x = x_1 + x_2, x_1 \in U_1, x_2 \in U_2 \}.$$

(3) Man bestimme die Koordinaten von  $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  bzgl. der Basis  $(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)$ !

(4) Wie sehen die Koordinaten von  $x+y$  bzw.  $\alpha x$  bzgl.  $(x_1, \dots, x_n)$  aus, wenn  $x$  die Koordinaten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  und  $y$  die Koordinaten  $\beta_1, \dots, \beta_n$  hat?

### 5. Abschließende Bemerkungen

Wir haben einige wesentliche Grundbegriffe der "Linearen Algebra" eingeführt, wie den Vektorraum, die lineare Hülle, die lineare Unabhängigkeit und den Begriff der Basis. Dies sind die Fundamente der "Linearen Algebra", auf denen die weitere Theorie aufbaut. Sollte Interesse an weiteren Aussagen bestehen, so setzen wir gern diese Einführung fort.

Doz. Dr. W. Linde  
Bereich Analysis

Es ist eine große Stärkung beim Studieren, wenigstens für mich, alles, was man liest, so deutlich zu fassen, daß man eigene Anwendungen davon oder gar Zusätze dazu machen kann. Man wird am Ende dann geneigt zu glauben, man habe alles selbst erfinden können, und so was macht Mut. So wie nichts mehr abschreckt als Gefühl von Superiorität im Buch.

Georg Christoph Lichtenberg

# Preisaufgaben

- N 49 Innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks  $\triangle ABC$  befinde sich ein Punkt P, von dem aus die Senkrechten  $\overline{PD}$ ,  $\overline{PE}$  bzw.  $\overline{PF}$  auf  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  bzw.  $\overline{AB}$  gezogen seien. Wie groß ist

$$\frac{\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF}}{\overline{BD} + \overline{CE} + \overline{AF}} ?$$

- N 50 Man beweise: Ist die Zahl  $abc$  ( $a, b, c$  sind die Ziffern dieser Zahl im Dezimalsystem) durch 37 teilbar, so sind auch die Zahlen  $bca$  und  $cab$  durch 37 teilbar.

- N 51 Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 11111111 (8 Einsen) und 11 ... 1  
100 Einsen

- N 52 Wieviel Zusammenstellungen der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  gibt es, bei denen nicht eine Zahl  $k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) an der  $k$ -ten Stelle steht?

- N 53 Um ein gegebenes Rechteck mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  sei ein Rechteck mit dem Flächeninhalt  $m^2$  zu umschreiben. Für welche Werte von  $m$  ist die Aufgabe lösbar?

- N 54 В трапеции меньшее основание равно 2, прилежащие углы - по  $135^\circ$ . Угол между диагоналями, обращенный к основанию, равен  $150^\circ$ . Найти площадь трапеции.

## Lösungsbedingungen:

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - an uns zu senden. Dabei das Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" bitte nicht vergessen! Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien etc.) muß deutlich erkennbar sein.



**Aufgabe N 10**

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad | \cdot 2xyp$$

$$4xy = 2yp + 2xp$$

$$4xy - 2yp - 2xp + p^2 = p^2 \quad | + p^2$$

$$(2x-p)(2y-p) = p^2$$

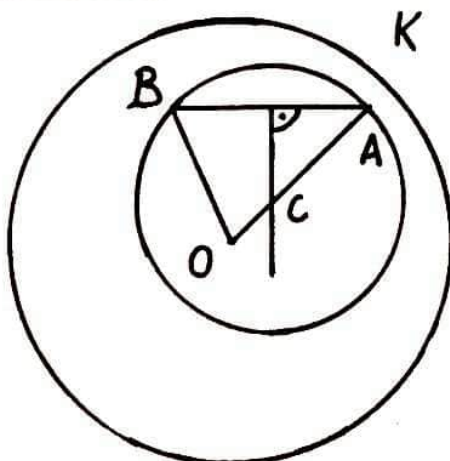
Wenn  $x$  und  $y$  verschiedene ganze Zahlen sind, kann das Produkt  $(2x-p)(2y-p)$  nur dann gleich dem Quadrat der Primzahl  $p$  sein, wenn ein Faktor gleich 1 ist und der andere gleich  $p^2$  ist.

Sei also  $2x-p = 1$

$$2y-p = p^2.$$

Dann ist  $x = \frac{p+1}{2}$

$$y = \frac{p+p^2}{2}.$$

**Aufgabe N 11**

$O$  = Mittelpunkt von  $K$

Wenn man um einen beliebigen Punkt der Strecke  $OA$  einen Kreis durch  $A$  legt, so ist dieser Kreis offensichtlich stets innerhalb von  $K$ .

Fällen wir also das Lot aus dem Mittelpunkt der Strecke  $AB$ . Es schneidet entweder  $OB$  oder  $OA$  im Punkt  $C$ . Diesen Punkt  $C$  wählen wir uns als Mittelpunkt des Kreises durch  $A$ , welcher denn notwendigerweise auch durch  $B$  geht, da  $AC = BC$  ist.

**Aufgabe N 13**

Wir legen durch den Punkt S eine Gerade e, parallel zu AB. Weil nach Voraussetzung  $F_{ABS} = \frac{1}{3} F_{ABC}$  gilt ( $F_{ABS}$  ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABS), ist die Höhe, die aus S auf die Seite AB gefällt wird, gleich  $\frac{1}{3} h_c$  (wegen  $F_{ABC} = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ ). Deshalb wird jede Strecke, die durch C und einen Punkt der Strecke AB geht, durch die Gerade e im Verhältnis 2 : 1 geteilt. Folglich geht die Gerade e durch den Schwerpunkt des Dreiecks (die Seitenhalbierenden schneiden sich im Schwerpunkt des Dreiecks im Verhältnis 2 : 1). Nun legen wir eine Gerade f durch S und parallel zu AC. Mit f stellen wir die gleichen Überlegungen wie mit e an. Also haben beide Geraden einen Punkt gemeinsam und dies ist der Schwerpunkt S.

**Aufgabe N 14**

Bezeichnen wir mit M den Schnittpunkt der Strecken AE und BF und mit G den Schnittpunkt der Geraden durch AE mit der Verlängerung von DC. H ist der Schnittpunkt der Geraden durch C und M mit der Verlängerung von AB.

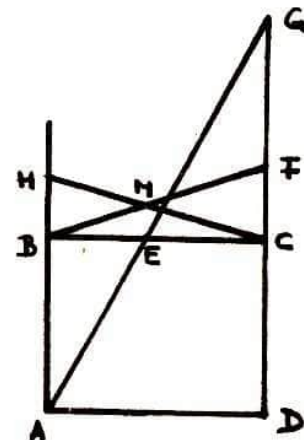
Die Dreiecke ABE und GDA sind ähnlich (2 Winkel stimmen überein), deshalb ist

$GD : AD = 3$  und GD somit gleich  $3a$ .

Wegen dem Parallelensatz gilt

$$BH : BA = FC : FG = \frac{a}{2} : \frac{3a}{2} = 1 : 3.$$

Daraus folgt, daß  $BH = \frac{AB}{3} = \frac{a}{3}$  ist. Somit ist  $\angle ABE = \angle CBH$  und AE und CH stehen also senkrecht aufeinander. Somit bildet das Viereck AMCD ein Sehnenviereck und M liegt somit auf dem Umkreis von ABCD.





**Aufgabe N 15**

Es gibt 90000 fünfstellige Zahlen. Da jede dritte von ihnen durch 3 teilbar ist, gibt es 30000 fünfstellige Zahlen, die durch 3 teilbar sind. Wir untersuchen nun, wieviele von ihnen keine Ziffer 6 enthalten. Bezeichnen wir die Ziffern der Reihe nach von links nach rechts mit  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ . Für  $a_1$  kommen außer 0 und 6 die restlichen 8 Ziffern in Frage. Für  $a_2, a_3$  und  $a_4$  kommen außer der 6 die 9 anderen Ziffern in Frage. Damit die Zahl durch 3 teilbar wird, muß nun  $a_5$  entsprechend gewählt werden. Wenn  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  bei Division durch 3 den Rest 0 läßt, so kommen für  $a_5$  die Ziffern 0, 3 und 9 in Frage, bei Rest 1 die Ziffern 2, 5 und 8 und bei Rest 2 die Ziffern 1, 4 und 7. Für  $a_5$  gibt es also immer 3 Möglichkeiten. Es gibt also  $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 = 17496$  fünfstellige Zahlen, die durch 3 teilbar sind und keine 6 enthalten. Also gibt es  $12504$  fünfstellige Zahlen, die durch 3 teilbar sind und mindestens eine 6 enthalten.

**Aufgabe N 17**

Sei O der Mittelpunkt des Kreises, r sein Radius und G, H und J die Mittelpunkte der Seiten FA, BC und DE. Außerdem sei  $\alpha = \angle GOF = \angle GOA$ ,  $\beta = \angle HOB = \angle HOC$  und  $\gamma = \angle JOD = \angle JOE$ . Es ist nun  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ , weil die Winkel AOB, DOC und EOF Innenwinkel gleichseitiger Dreiecke sind. (siehe Mittelbild)

Nehmen wir nun die Seite GH des Dreiecks GHJ heraus und versuchen wir ihre Länge zu bestimmen.

Nach dem Kosinussatz gilt

$$GH^2 = GO^2 + HO^2 - 2GO \cdot HO \cdot \cos(\alpha + 60^\circ + \beta).$$

Es ist aber auch

$$GO = r \cdot \cos \alpha$$

$$HO = r \cdot \cos \beta$$

$$\text{und wegen } \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \text{ auch } \alpha + 60^\circ + \beta = 150^\circ - \gamma.$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} GH^2 &= r^2 [\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(150^\circ - \gamma)] \\ &= r^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - \\ &\quad - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos 150^\circ - \cos^2 \gamma - \\ &\quad - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) \end{aligned}$$

Wir formen jetzt noch den zweiten Teil der Summe um

$$\begin{aligned}\cos^2 \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma &= 1 - \sin \gamma (\sin \gamma - \cos \alpha \cos \beta) \\ &= 1 - \sin \gamma [\cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cos \beta] \\ &= 1 + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.\end{aligned}$$

Wir erhalten jetzt eine Darstellung für GH, in welcher man die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  gegeneinander vertauschen kann

$$\begin{aligned}GH^2 &= r^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \\ &\quad - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos 150^\circ \\ &\quad - 1 - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma).\end{aligned}$$

Wir können jetzt die Seiten HJ und JG genauso bestimmen und erhalten jeweils das gleiche Resultat.

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“

**Leiter:** Heiner Schwulow

**Chefredakteur:** Andreas Kleinwächter

**Stellvertretender Chefredakteur:** Andreas Jeschag

**Redaktion:** H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein

**Anschrift:** WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

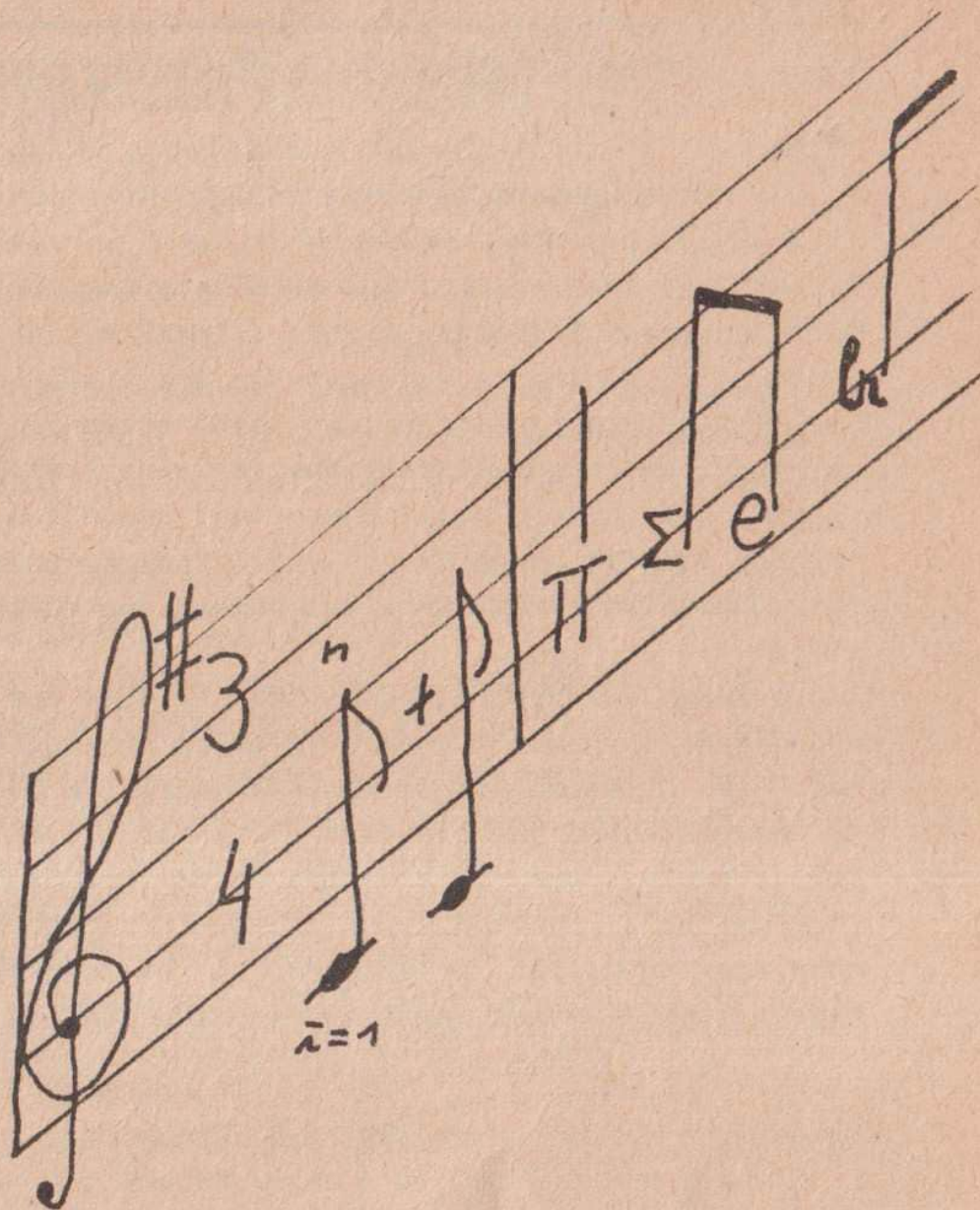
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M,

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

**Redaktionsschluß:** 28.9.81





# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom  
Jugendobjekt Studienvor-  
bereitung-Studienwerbung  
der Sektion Mathematik  
an der Friedrich-Schiller-  
Universität Jena

15. Jahrgang  
Index 33873  
Sonderpreis für DDR:  
0,20 M

11

81



# Eine mathematische Grundlegung der Musik

Eulers Tentamen novae theoria musicae

Es ist eine landläufig bekannte Behauptung, daß Musik und Mathematik in enger Beziehung ständen. Zweifeln wird von naturwissenschaftlicher Seite demonstrativ der Violine spielende Albert Einstein entgegengehalten. Ein umgekehrtes Beispiel, also ein mathematisch interessierter Musiker, ist freilich schwerer zu finden. Gibt es nun Gemeinsamkeiten? Begreifen wir die Mathematik als die Wissenschaft von den Ordnungsstrukturen, so ist sie möglicherweise fähig, zur Grundlegung der Musik etwas zu leisten.

Die Anfänge der Musik sind unbekannt, aber die Ursprünge der abendländischen Musik stehen in engem Zusammenhang mit der Mathematik der Griechen. Theon von Alexandra (um 370) berichtet, daß Pythagoras (etwa 580 bis etwa 500 v. u. Z.) am Monochord die Abstände zweier Töne (Intervalle) durch Verhältnisse ganzer Zahlen bestimmt habe, nämlich durch die Verhältnisse der Längen der schwingenden Saiten. Entsprechendes ist auch mit den dazu umgekehrt proportionalen Schwingungszahlen möglich (vgl. Abb. 1).

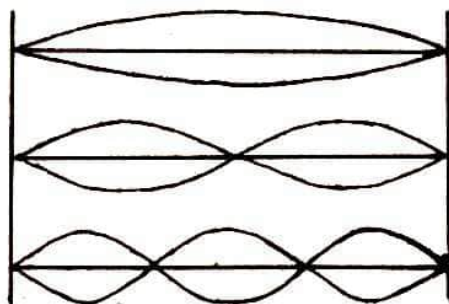


Abb. 1

Schwingungen einer eingespannten Saite

Wir wollen die Weiterentwicklung dieser Ideen durch den Mathematiker Leonhard Euler (1707 - 1783) in den Mittelpunkt unserer Betrachtungen stellen, wie sie sich vor allem in seinem Buch "Tentamen novae theoria musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae" (Versuch einer neuen Musik aus den sichersten Grundlagen der Harmonie abgeleitet) von 1739 und in seinen "Briefen an eine deutsche Prinzessin" von 1768 darstel-



len. Über den Tentamen schrieb Euler an seinen Lehrer Johann (I) Bernoulli (1667 - 1748), daß es sein "Endzweck" sei, die "Musik als Theil der Mathematik auszuführen" und alles aus richtigen Gründen ordentlich herzuleiten. Bernoullis Sohn Daniel (1700 - 1782), ein Freund Eulers, ließ im Geiste des Experimentalphysikers seinen Flügel nach Eulers Manier stimmen.

Beim Erklängen von Tönen zeigt sich ein akustisches Phänomen (eine analoge optische Erscheinung gibt es nicht): die Eigenart eines bestimmten Tones wird in anderen Tönen wiedererkannt. Diese Töne unterscheiden sich dann um eine, zwei, drei, ... Oktaven. Euler bemerkt dazu:

"Zwei Töne, die gerade eine Oktave verschieden sind, harmonisieren so schön und gleichen einander so sehr, daß die Musiker sie mit einerlei Buchstaben bezeichnen."

Wird beispielsweise der Ausgangston mit  $c$  bezeichnet, so werden die in Oktavabständen folgenden Töne mit  $c^1$ ,  $c^2$ ,  $c^3$  usw. notiert. Euler hebt gleichzeitig einen weiteren Aspekt des Oktavenphänomens hervor: den Wohlklang (Konsonanz). Ganz im Sinn der pythagoräischen Schule äußert er in seinem berühmten Buch "Briefe an eine deutsche Prinzessin", das übrigens eines der erfolgreichsten populärwissenschaftlichen Werke aller Zeiten ist:

"Je einfacher ein (Schwingungs-) Verhältniß (zweier Töne) ist, oder durch je kleinere Zahlen es ausgedrückt wird, desto leichter wird es von unserem Verstand gefaßt, und erweckt in uns ein gewisses Gefühl von Vergnügen."

Das einfachste Schwingungsverhältniß ist zweifellos der Einklang (z. B.  $c : c$ ), also das Verhältniß  $1 : 1$ ; ihm folgt der Fall, "wo der hohe Ton gerade noch einmal so viele Schwingungen als der tiefe hat" (Euler), also das Verhältniß  $1 : 2$  (z. B.  $c : c^1$ , welches gerade den erwähnten Oktavabstand charakterisiert). Der Ton  $c^2$ , der zu  $c^1$  Oktavabstand hat bzw. mit diesem im Schwingungsverhältniß  $2 : 1$  ( $c^2 : c^1$ ) steht, hat zum Ausgangston  $c$  einen doppelten Oktavabstand bzw. das Schwingungsverhältniß  $4 : 1$ . Die Oktaverweiterungen  $c^1$ ,  $c^2$ ,  $c^3$ , ... von  $c$  führen also auf Verhältnisse  $1 : 2 : 4 : 8 : 16$  ... Euler bemerkt hierzu a. a. O.:

"Allein ein Instrument, welches nur Oktaven, z. B.  $C, c, c^1, c^2, c^3$ , und sonst keine anderen Töne hätte, könnte wegen seiner gar zu großen Einfachheit unmöglich eine angenehme Musik hervorbringen."

Diese Erkenntnis "zwingt" uns, in das theoretische System der Schwingungsverhältnisse noch die Zahl 3 zu nehmen.

Wenn beispielsweise der Ton C (aus der großen Oktave) eine Schwingung macht, so wird der Ton gesucht, der in der gleichen Zeit 3 Schwingungen ausführt. Offenbar ist er höher als c mit nur 2 Schwingungen, aber tiefer als  $c^1$  mit bereits 4 Schwingungen. Der gesuchte Ton wird mit g bezeichnet, das Intervall von c nach g wird Quinte genannt (vgl. Abb. 2). Durch ein wichtiges praktisches Beispiel verdeutlicht Euler das Hinschwinden der Konsonanz von Intervallen, nämlich durch die wachsende Schwierigkeit beim Stimmen solcher Intervalle. Nach der Oktave (1 : 2) läßt sich die Quinte (2 : 3) am einfachsten stimmen. Die vier Saiten der Geige sind in Quintschritten gestimmt: g,  $d^1$ ,  $a^1$ ,  $e^2$ . Das Schwingungsverhältnis 3 : 4 der Töne g und  $c^1$  oder  $g^1$  und  $c^2$  charakterisiert die sogenannte Quarte.

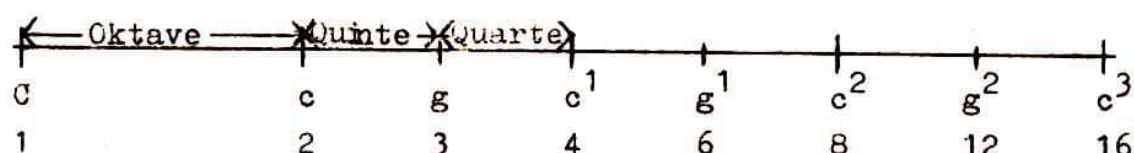


Abb. 2

Schwingungsverhältnisse für Quinten und Quarten

Die Zahl 3 vermag aber noch weitere Intervalle zu liefern, wenn wir ihre Potenzen betrachten. Fangen wir mit  $3^2 = 9$  an. Der durch das Schwingungsverhältnis 1 : 9 bezüglich des Grundtones C bestimmte Ton  $d^2$  liegt zwischen  $c^2$  und  $g^2$ , und zwar ist er die Quinte zu  $g^1$  (wegen des Quintenverhältnisses 2 : 3 = 6 : 9), vgl. Abb. 3.

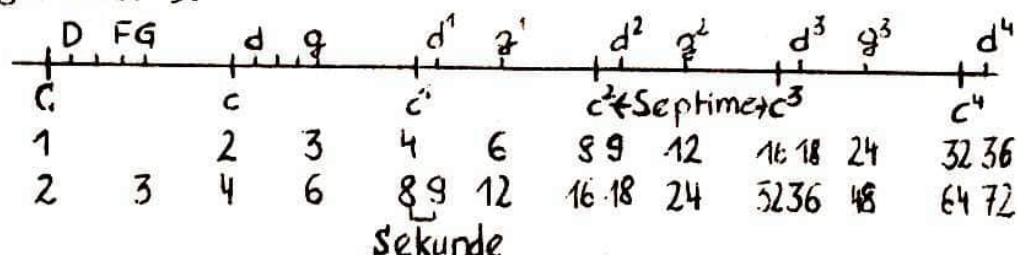


Abb. 3

Schwingungsverhältnisse bei Einbeziehung der Potenzen von 3, zunächst für  $3^2$



Als neue Intervalle erscheinen die Sekunde und die Septime mit den Verhältnissen  $8 : 9$  bzw.  $9 : 16$ , welche schon zu den Dissonanzen gezählt werden. Euler untersuchte noch den Fall  $3^3 = 27$ , was auf die Töne A, a,  $a^1$ , ... führt; als neue Intervalle treten die kleine Terz ( $27 : 32$ ) und die große Sexte ( $16 : 27$ ) auf, vgl. Abb. 4.

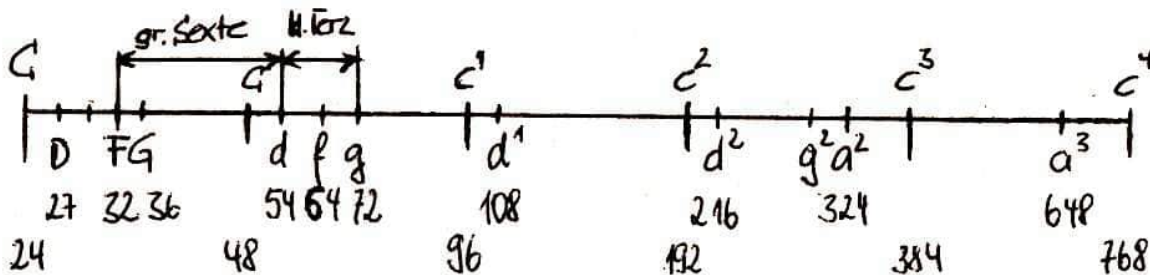


Abb. 4

Schwingungsverhältnisse bei Einbeziehung der Potenzen von 3, hier  $3^3 = 27$

Bis zu  $3^4 = 81$  ginge die Musik nicht, hebt Euler hervor, und fährt fort "die übrigen musikalischen Töne, die noch fehlen, werden durch die Zahl 5 eingeführt", da die Potenzen von 2 und 3 noch keine abwechslungsreiche Musik hervorbringen. Mit 5 und  $5^2 = 25$  wird die Oktave in 12 Töne geteilt, mit denen eine "angenehme Musik" (Euler) möglich sei. Die Tafel (Abb. 5) weist alle Töne der ersten Oktave auf, deren Schwingungsverhältnisse durch die einfachen Zahlen 2, 3 und 5 sowie deren Potenzen beschrieben werden und findet sich in den genannten "Briefen". Die anderen Oktaven, die eingestrichene, die zweigestrichene usw. folgen hieraus durch Multiplikation mit einer passenden Zweierpotenz.

Die Differenz der Töne ist nicht gleich, sondern wie es die "wahre Harmonie" erfordert:

'Aber da die Ungleichheit nicht beträchtlich ist, so nimmt man gemeiniglich alle Unterschiede für gleich an, und nennt den Übergang von einem jeden Ton zu dem nächstfolgenden ein Semitonium (Halbton) ... Verschiedene Musiker machen sie auch wirklich alle gleich, wiewohl dies den Grundsätzen der Harmonie zuwider ist, denn auf diese Art wird keine Quinte, keine Terzie richtig."

| Ton | Schwingungszahl               | Differenz der Schwingungszahlen |
|-----|-------------------------------|---------------------------------|
| C   | $384 = 2^7 \cdot 3$           | -                               |
| Cs  | $400 = 2^4 \cdot 5^2$         | 16 (= 400 - 384)                |
| D   | $432 = 2^4 \cdot 3^3$         | 32                              |
| Ds  | $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ | 18                              |
| E   | $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$   | 30                              |
| F   | $512 = 2^9$                   | 32                              |
| Fs  | $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ | 28                              |
| G   | $576 = 2^6 \cdot 3^2$         | 36                              |
| Gs  | $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ | 24                              |
| A   | $640 = 2^7 \cdot 5$           | 40                              |
| B   | $675 = 3^3 \cdot 5^2$         | 35                              |
| H   | $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ | 45                              |
| c   | $768 = 2^8 \cdot 3$           | 48                              |

Abb. 5

Verhältnisse der Töne, die durch die einfachen Zahlen 2, 3 und 5 sowie der Potenzen beschrieben werden (bezogen auf den Grundton C mit 384 Schwingungen)

Ein Tongeschlecht ist für Euler die Zusammenfassung aller Tonverhältnisse, die sich aus dem Ausdruck  $2^n \cdot 3^p \cdot 5^q$  (n natürliche Zahl, p und q feste Primzahlen) bilden lassen, z. B. mit  $p = 3$  und  $q = 1$  aus  $2^n \cdot 3^3 \cdot 5^1$ :

$$3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^0 \cdot 5^1, 3^1 \cdot 5^1, 3^2 \cdot 5^1, 3^3 \cdot 5^1.$$

Transponiert man dieses Tonmaterial in die durch das Schwingungsverhältnis 128 : 256 bestimmte Oktave, so liegt die d-Dur Tonleiter mit zusätzlicher kleiner Septime vor, die Euler genus diatonicum nennt. Die Ausdrücke  $2^n \cdot 3^2 \cdot 5^2$  oder  $2^n \cdot 3^1 \cdot 5^3$  führen auf das genus chromaticum oder enharmonicum. Die Primzahlen 2, 3 und 5 führen uns auf Verhältnisse, die eine reine Harmonik von Dur- und Molldreiklängen ermöglichen, was etwa dem Palestrina-Stil (Palestrina: 1525 bis 1594) entspricht.

Bereits G. W. Leibniz (1646 - 1716) stellte 1712 fest, daß man in der Musik nur bis 5 zähle, hätte man nur mehr Empfindung, so wäre auch die 7 erfaßbar. Euler schreibt hierüber:

"Wenn man noch die Zahl 7 einführen wollte, so würde die Anzahl der Töne einer Oktave größer und die ganze Musik auf einen höheren Grad der Vollkommenheit gebracht werden."



was aber Euler den Musikern selbst überlassen will. In den 40er Jahren dieses Jahrhunderts unternahm der holländische Physiker A. D. Fokker (1887 - 1962) diese Versuche und baute eine Orgel, die 7 im Tongeschlecht berücksichtigte. Zu Ehren Eulers wurden zu dessen 250. Geburtstag auf ihr entsprechende Kompositionen gespielt. Die Oktave wies 31 Töne auf.

Fast alle Tonerzeuger liefern mit dem sogenannten Grundton auch eine Reihe von Tönen, die Obertöne, deren Schwingungszahlen ganze Vielfache des gegebenen Grundtones sind, also zu diesem im Verhältnis  $1 : 2 : 3 : 4 \dots$  (bzw. einer Auswahl hieraus) stehen, vgl. auch Abb. 1 als Beginn einer Obertonreihe.

J. P. Rameaus (1683 - 1764) theoretisches System aus dem Jahre 1737 geht vom Obertonphänomen aus, bevorzugte aber den dritten und fünften Oberton (Quinte und Terz zum Grundton, also Dreiklänge), der siebente Oberton wurde von Rameau zwar deutlich gehört, im theoretischen System jedoch "unterschlagen". Eulers System ist, wie bereits gesagt, gegen diese und andere Erweiterungen (z. B. durch Einführen der 11 und 13) offen und entspricht einer dem anatomischen Bau des menschlichen Ohres angemessenen Stimmung, nämlich der reinen Stimmung. Auf die Konsonanz solcher Tongeschlechter kommen wir gleich zu sprechen. Die temperierte Stimmung (A. Werckmeister: 1645 - 1706, Musicalische Temperatur, 1691; J. S. Bach: 1685 - 1750, Kunst der Fuge) bietet nur noch die Oktave rein und teilt die Oktave in 12 gleiche Halbtonschritte. Eine Melodie bleibt damit in allen temperierten Tongeschlechtern ungeändert, da alle Halbtöne gleich sind.

Als musikalischer Außenseiter konnte sich Euler zwar einfacher über die Tradition hinwegsetzen, er fand mit seinen Überlegungen aber bei den stilgebundenen Musikern mehr Ablehnung als Zustimmung, so daß er bis in unsere Zeit die Musikentwicklung eher behinderte als befruchtete. Eulers moderne wissenschaftliche Haltung zeigt sich aber in dem Bemühen, vage Begriffe wie "Wohlklang" zu präzisieren und objektivieren, indem er sie quantifizierte, also meßbar machte. Durchaus in Übereinstimmung mit der pythagoräischen Maxime "Alles ist Zahl". Das geschieht durch Zuordnung eines gradus suavitatis zu jedem Intervall.



Wir bemerken zunächst, daß ein Intervall, das aus zwei Intervallen mit den Schwingungsverhältnissen  $a/b$  und  $c/d$  (wir schreiben jetzt auch  $a/b$  für  $a : b$  und sprechen auch kurz vom Intervall  $a/b$ ) zusammengesetzt werden kann, das Schwingungsverhältnis

$$(a/b) \cdot (c/d) = (ac/bd)$$

hat. Der Addition von Intervallen entspricht die Multiplikation zugehöriger Schwingungsverhältnisse.

Nun zu der Zuteilung des Konsonanzgrades zu den Intervallen. Euler wählt als Werte des *gradus suavitatis* die natürlichen Zahlen. Das einfachste Intervall, der Einklang  $1 : 1$ , erhält natürlich den Konsonanzgrad 1:

$$G(1/1) = 1;$$

der Oktave  $1 : 2$  wird als nächsteinfachstes Intervall die nächste natürliche Zahl zugeordnet, also

$$G(1/2) = 2.$$

Für Oktaverweiterungen bzw. -verminderungen verfährt Euler nach der Regel: Wird ein Intervall um eine Oktave erweitert oder vermindert, so soll sich der Konsonanzgrad um 1 erhöhen bzw. vermindern, je nachdem ob sich das Zahlenverhältnis verkompliziert oder vereinfacht. Erweitern wir also die Oktave  $1 : 2$  um sich selbst, so hat die doppelte Oktave das Schwingungsverhältnis  $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ , und es ist infolge der Komplizierung des Schwingungsverhältnisses

$$G(1/4) = G(1/2) + 1 = 2 + 1 = 3,$$

entsprechend gilt für

$$G(1/8) = G(1/4) + 1 = 3 + 1 = 4,$$

$$G(1/16) = G(1/8) + 1 = 4 + 1 = 5,$$

usw.

Spielen wir ein wenig mit diesen Relationen, so zeigt sich:

$$G(1/1) = 1,$$

$$G(1/2) = 2,$$

$$G(1/4) = 3 = G(1/2 \cdot 1/2) = 2 + 2 - 1 = G(1/2) + G(1/2) - 1,$$

$$G(1/8) = 4 = G(1/4 \cdot 1/2) = 3 + 2 - 1 = G(1/4) + G(1/8) - 1,$$

$$\begin{aligned} G(1/16) &= 5 = G(1/8 \cdot 1/2) = 4 + 2 - 1 = G(1/8) + G(1/2) - 1 \\ &= G(1/4 \cdot 1/4) = 3 + 3 - 1 = G(1/4) + G(1/4) - 1. \end{aligned}$$

Der Konsonanzgrad eines aus zwei Intervallen zusammengesetzten



Intervalls ergibt sich aus der Summe der Konsonanzgrade der beiden Intervalle vermindert um 1. Neben den Festlegungen  $G(1/1) = 1$  und  $G(1/p) = p$  für alle Primzahlen  $p$  definiert Euler den Konsonanzgrad durch die Beziehung:

$$G(1/ab) = G(1/a) + G(1/b) - 1.$$

Insbesondere folgen

$$G(1/p^n) = np - n - 1,$$

$$G(1/a) = n_1 p_1 + \dots + n_r p_r - (n_1 + \dots + n_r) + 1,$$

wenn  $a$  die Primzahlzerlegung  $a = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$  hat. Als weiteres Beispiel berechnen wir den Konsonanzgrad der großen Terz 4 : 5: Es ist  $4/5 = 1/5 \cdot 4/1$  bzw.  $1/5 = 4/5 \cdot 1/4 = (4/5 \cdot 1/2) \cdot 1/2$ , d. h., das Intervall  $1/5$  ist die doppelte Oktaverweiterung der großen Terz 4 : 5. Mithin ist gemäß unserer Regel

$$\begin{aligned} G(1/5) &= G(4/5 \cdot 1/2) - 1 \\ &= (G(4/5) - 1) - 1 = G(4/5) - 2^{(*)} \end{aligned}$$

(einfachere Schwingungsverhältnisse durch Oktaverweiterungen) bzw.

$$G(4/5) = G(1/5) + 2 = 5 + 2 = 7.$$

Nebenbei ergab sich aus (\*)  $G(2/5) = 6$  (vgl. Abb. 6).

Für die durch die Obertöne mit dem Grundton gebildeten Intervalle ergeben sich folgende Konsonanzgrade:

|             |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |     |
|-------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|-----|
| Oberton $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ... |
| $G(n)$      | 1 | 2 | 3 | 3 | 5 | 4 | 7 | 4 | 5 | 6  | ... |

Die von Rameau als Dissonanz verworfene Naturseptime 4 : 7 erhält bei Euler den Konsonanzgrad 9, den auch die Septime 9 : 6 ( $c - b$ ) hat; der sogenannte Ganzton  $8/9$  besitzt wie die kleine Sexte 5 : 8 (Grenze zwischen Konsonanz und Dissonanz bei Rameau, Euler hat solche qualitativen Unterscheidungen im Konsonanzgrad nicht) den Grad 8. Eulers Gradberechnung entspricht nicht dem traditionellen Konsonanz- bzw. Dissonanzbegriff, jedoch wie Helmholtz (1821 - 1894) ihr bescheinigte, entspricht sie sehr gut der experimentellen Tonpsychologie.

Klassen gleicher Konsonanzgrade sind z. B.:

|          |   |   |     |     |           |             |
|----------|---|---|-----|-----|-----------|-------------|
| $n$      | 1 | 2 | 3,4 | 6,8 | 5,9,12,16 | 10,18,24,32 |
| $G(1/n)$ | 1 | 2 | 3   | 4   | 5         | 6           |

Beziehungen von Eulers Überlegungen in der Musik zur Zahlen-

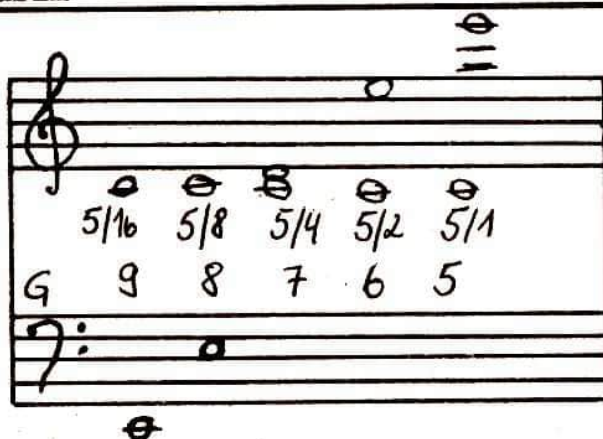


Abb. 6

Oktaverweiterungen der  
großen Terz

theorie sind auffallend, und in der Tat hat Euler sich in den Jahren der Entstehung des Tentamen intensiv mit Zahlentheorie befaßt.

Eulers Lehrer Bernoulli schrieb 1731 aus Basel nach Petersburg einen Brief, der sich im Gegensatz zu seinen anderen Briefen fast ausschließlich mit einem Thema, der musikalischen Theorie Eulers, befaßt, die Bernoulli noch gar nicht vollständig kannte. Obzwar Bernoulli den Entwurf insgesamt lobt, zweifelt er letztendlich doch, ob das große Publikum in der Lage sei, die Schwingungsverhältnisse etc. einzusehen, also die "objektive Lieblichkeit" geistig zu erfassen und nicht nur akustisch zu hören. Bernoulli beschließt den Brief mit der Hoffnung (vermutlich das Motiv seiner langen Ausführungen an den ehemaligen Schüler), daß Euler sich bald seiner Mechanik zuwenden möge. Das tat dieser auch, und seine analytische Fassung der Newtonschen Mechanik wirkte bahnbrechend. Jeder Oberschüler kennt z. B. die Eulersche Form der Lex II aus Newtons Principia (Newton: 1643 - 1727):

Kraft = Masse x Beschleunigung,

$$K(t, x, \dot{x}) = m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

#### Literatur:

Opera omnia Leonhardi Euleri. Basel

Der Tentamen findet sich in der Serie III im Band 1, ein Kommentar dazu in der gleichen Serie im Band 11 von M. Vogel.

H. R. Busch

Leonhard Eulers Beitrag zur Musiktheorie. Regensburg 1970.



L. Euler

Briefe an eine deutsche Prinzessin. In der Originalsprache in den Opera omnia, Serie III Band 11/12. Deutsche Übersetzungen 1769, 1792 und 1853. Die sehr lesenswerte Reclamausgabe enthält die Musiktheorie nicht.

P. H. Fuß (Herausgeber)

Correspondance mathématique et physique. St. Pétersbourg 1843.

U. Michels

Atlas zur Musik. Leipzig 1980.

E. Schröder

Mathematik im Reich der Töne. Leipzig 1982.

Dr. Rüdiger Thiele  
Halle

---

## Liebe Wurzelleser!

Wir möchten an dieser Stelle darauf aufmerksam machen, daß Wurzelexemplare früherer Jahrgänge bei der Redaktion jederzeit nachbestellt werden können. Wir bitten darum, daß bei solchen Bestellungen mindestens 6 gewünschte Hefte angegeben werden, damit der Arbeitsaufwand pro Bestellung für uns nicht so hoch wird. Die gewünschten Wurzeln werden dem Interessenten - soweit noch vorrätig - per Nachnahme zugesandt.

Die Redaktion

---

# Preisaufgaben

N 55 Man bestimme den größten und kleinsten Wert, den die Funktion  $\varphi(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$  im gesamten Definitionsbereich annimmt.

1

N 56 Die 6. Potenz einer natürlichen Zahl besteht aus genau den Ziffern 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9. Wie lautet diese Zahl?

2

N 57 Man löse das Gleichungssystem

$$(x^2+1)(y^2+1) = 10$$

$$(x+y)(xy-1) = 3.$$

1

N 58 Es seien eine arithmetische Folge  $\{a_i\}$  und eine geometrische Folge  $\{b_i\}$  ( $i=1,2,\dots$ ) mit  $a_1 = b_1$  und  $a_2 = b_2$  gegeben. Außerdem seien beide Folgen streng monoton wachsend. Man zeige, daß dann für alle  $n > 2$   $a_n < b_n$  gilt.

1

N 59 Einem Kreis mit dem Radius R sei ein regelmäßiges Sechseck einbeschrieben. Unter ausschließlicher Verwendung eines Lineals konstruiere man  $\frac{R}{n}$  mit  $n=2,3,4,\dots$ .

2

N 60 Катеты прямоугольного треугольника равны  $b$  и  $c$ .  
Найти длину биссектрисы прямого угла.

2

Einsendeschluß: 15.3.1982



# Lösungen

## Aufgabe N 16

Sei  $a$  die Seitenlänge des Sechsecks und seien  $2\alpha_1$ ,  $2\beta_1$  und  $2\gamma_1$  die Winkel an den Ecken A, C und E.

Da die Innenwinkelsumme im Sechseck  $720^\circ$  beträgt und da nach Voraussetzung die Winkelsumme an den Ecken A, C und E gleich der Winkelsumme an den Ecken B, D und F ist, gilt

$$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 = 360^\circ \quad \text{bzw.}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 180^\circ. \quad (1)$$

ABF; BCD und DEF sind gleichschenklige Dreiecke. Deshalb gilt

$$BF = 2a \sin \alpha_1, \quad BD = 2a \sin \beta_1, \quad DF = 2a \sin \gamma_1. \quad (2)$$

Die Winkel des Dreiecks BDF seien  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ .

Nach dem Sinussatz gilt

$$BF : BD : DF = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Unter Verwendung von (2) ergibt sich

$$\sin \alpha_1 : \sin \beta_1 : \sin \gamma_1 = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad (3)$$

Wegen (1) lassen sich die Winkel  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  als Innenwinkel eines Dreiecks auffassen.

Aus (3) und dem Sinussatz folgt, daß dieses Dreieck ähnlich dem Dreieck BDF ist.

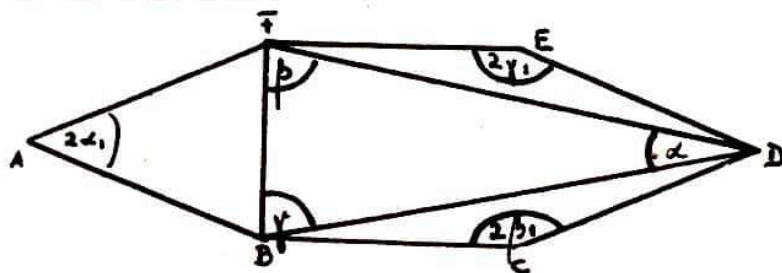
Daraus ergibt sich

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \gamma = \gamma_1. \quad (4)$$

Der Sechseckinnenwinkel an der Ecke D läßt sich als folgende Summe schreiben

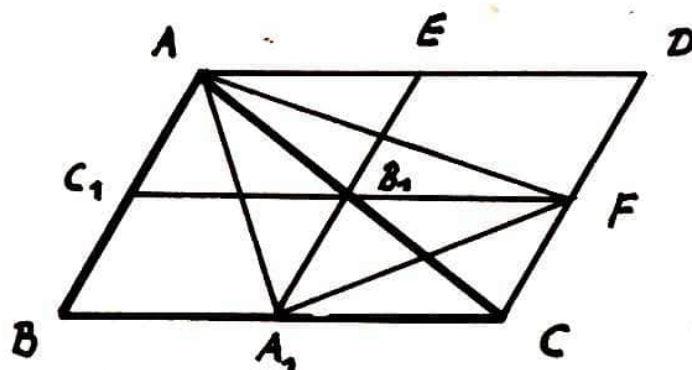
$$\alpha + (90^\circ - \beta_1) + (90^\circ - \gamma_1) = \alpha + \alpha_1 = 2\alpha_1 \quad (4)$$

Analog läßt sich für die Winkel an den Ecken B und F zeigen, daß sie gleich den Winkeln an den gegenüberliegenden Seiten sind.



## Aufgabe N 18

- a) Seien  $A, B$  und  $C$  die Ecken des Dreiecks  $N_1$  und  $A_1, B_1$  und  $C_1$  die Mittelpunkte der Seiten  $BC, CA$  und  $AB$ . Wir ergänzen das Dreieck  $N_1$  zu einem Parallelogramm  $ABCD$ .
- $A_1E$  und  $C_1F$  seien die Strecken, die die Mittelpunkte gegenüberliegender Parallelogrammseiten verbinden. Da auch  $AC_1CF$  und  $A_1BB_1F$  Parallelogramme sind, sind die Seiten des Dreiecks  $AA_1F$  ebenso lang wie die Seitenhalbierenden des Dreiecks  $N_1$ .
- b) Aus der Abbildung ist ersichtlich, daß die Seitenhalbierende des Dreiecks  $AA_1F$  zu den entsprechenden Seiten des Dreiecks  $N_1$  im Verhältnis  $\frac{3}{4} : 1$  stehen. Denn  $A_1B_1FC, AB_1FC, AB_1FE$  und  $AB_1A_1C_1$  sind Parallelogramme, deren Diagonalen sich folglich halbieren. Ferner ist leicht zu sehen, daß  $B_1$  Schwerpunkt des Dreiecks  $AA_1F$  ist. Und da die Seitenhalbierenden des Dreiecks  $AA_1F = N_2$  ebenso lang sind wie die entsprechenden Seiten des Dreiecks  $N_3$ , stehen die Längen entsprechender Seiten der Dreiecke  $N_1$  und  $N_3$  im Verhältnis  $1 : \frac{3}{4}$ .  $N_1$  und  $N_3$  sind folglich ähnlich.



## Aufgabe N 19

Aus der Konstruktion folgt, daß die Dreiecke  $CAC_1$  und  $B_1AB$  einander ähnlich sind. Gleiches gilt für die Dreiecke  $CBC_1$  und  $A_1BA$ .



Da die Dreiecke ähnlich sind, gelten nun folgende Streckenverhältnisse:

$$CC_1 : BB_1 = AC_1 : AB$$

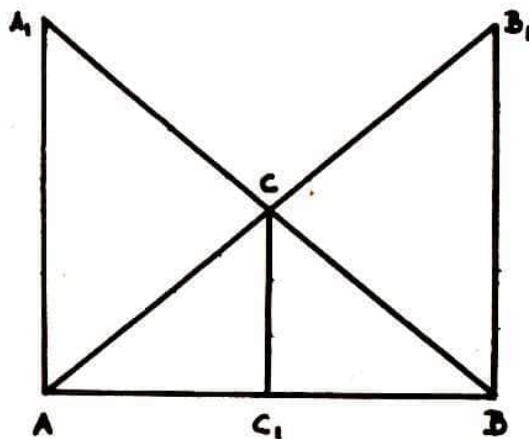
$$CC_1 : AA_1 = C_1B : AB$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{CC_1}{AA_1} + \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{AC_1 + C_1B}{AB} = 1,$$

also ist

$$\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} = \frac{1}{CC_1}.$$



### Aufgabe N 20

Wir wollen zeigen, daß  $x^2 + 2px + 2q = 0$  keine rationalen Lösungen hat, wenn  $p$  und  $q$  ungerade ganze Zahlen sind.

1. Wir zeigen,  $x$  ist nicht ungerade.

Annahme:  $x$  ist ungerade.

Ist  $x$  ungerade, so ist auch  $x^2$  ungerade.

Da  $2px + 2q$  aber stets gerade ganze Zahlen sind, kann  $x^2 + 2px + 2q$  nicht gleich Null sein. Also ist die Annahme falsch.

2. Wir zeigen,  $x$  ist nicht gerade.

Annahme:  $x$  ist gerade.

Wenn  $x$  gerade ist, so ist  $x^2 + 2px$  durch 4 teilbar. Da  $q$  ungerade ist, ist aber  $2q$  nicht durch 4 teilbar. Also ist die Annahme falsch.

3. Wir zeigen,  $x$  ist nicht echt gebrochene Zahl.

Annahme:  $x$  echt gebrochen.

Dann ist  $(x+p)$  echt gebrochen und  $(x+p)^2$  echt gebrochen. Da  $p^2 - 2q$  eine ganze Zahl ist, kann nicht  $x^2 + 2px + 2q$  gleich Null sein. Also ist die Annahme falsch.

Da  $x$  weder gerade, ungerade, noch echt gebrochene Zahl sein kann, hat  $x^2 + 2px + 2q = 0$  keine rationalen Lösungen.

G. W. Leibnitz (1646 - 1716, Philosoph, Politiker und Gelehrter auf fast allen Wissensgebieten, besonders in der Mathematik)

---

Über die von ihm wesentlich mit eingeführte mathematische Symbolik: "Bei den Bezeichnungen ist darauf zu achten, daß sie für das Erfinden bequem sind. Die ist am meisten der Fall, so oft sie das innere Wesen der Sache mit Wenigem ausdrücken und gleichsam abbilden. So wird nämlich aus wunderbare Weise die Denkarbeit vermindert."

---

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“

**Leiter:** Heiner Schwulow

**Chefredakteur:** Andreas Kleinwächter

**Stellvertretender Chefredakteur:** Andreas Jeschag

**Redaktion:** H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein

**Anschrift:** WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

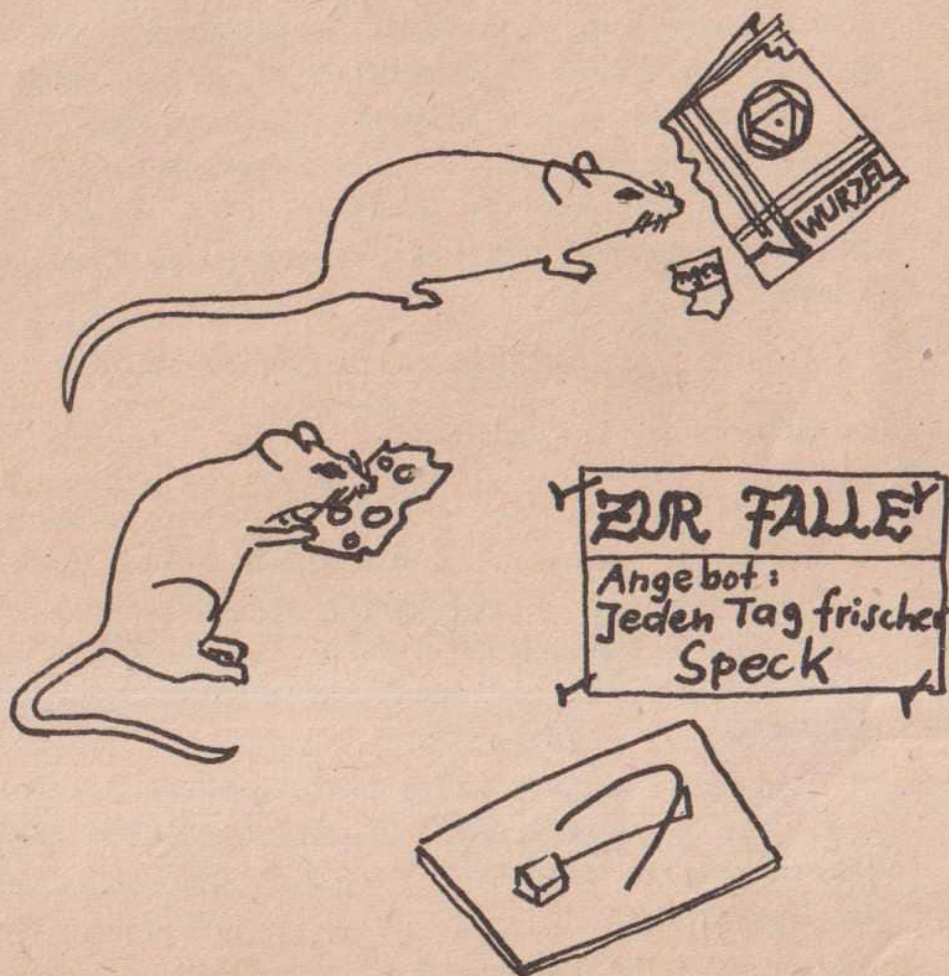
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

**Redaktionsschluß:** 20.10.1981

**Titelbild:** Andreas Jeschag





12

81

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom  
Jugendobjekt Studienvor-  
bereitung-Studienwerbung  
der Sektion Mathematik  
an der Friedrich-Schiller-  
Universität Jena

15. Jahrgang  
Index 33873  
Sonderpreis für DDR:  
0,20 M



**Ein einfaches Funktionensystem, mit dem stetige Funktionen  
näherungsweise dargestellt werden können  
(WALSH-Funktionen)**

Die Beschreibung funktioneller Zusammenhänge,  $y=f(x)$ , durch bekannte Funktionen (Potenzfunktion, trigonometrische Funktion, u. a.) spielt in der Naturwissenschaft und in der Technik eine große Rolle. Hierbei wird die Tatsache ausgenutzt, daß es möglich ist, eine stetige Funktion,  $f(x)$ , beliebig genau durch eine Linearkombination gewisser vorgegebener Funktionen,  $\varphi_n(x)$ , darzustellen:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(x), \quad a_n \text{-reelle Zahlen.}$$

So kann z. B. die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \\ 2 - \frac{2}{\pi} x & \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

durch ein Polynom 2. Grades, also eine Linearkombination der Funktion

$$\varphi_0(x) = x^0,$$

$$\varphi_1(x) = x^1,$$

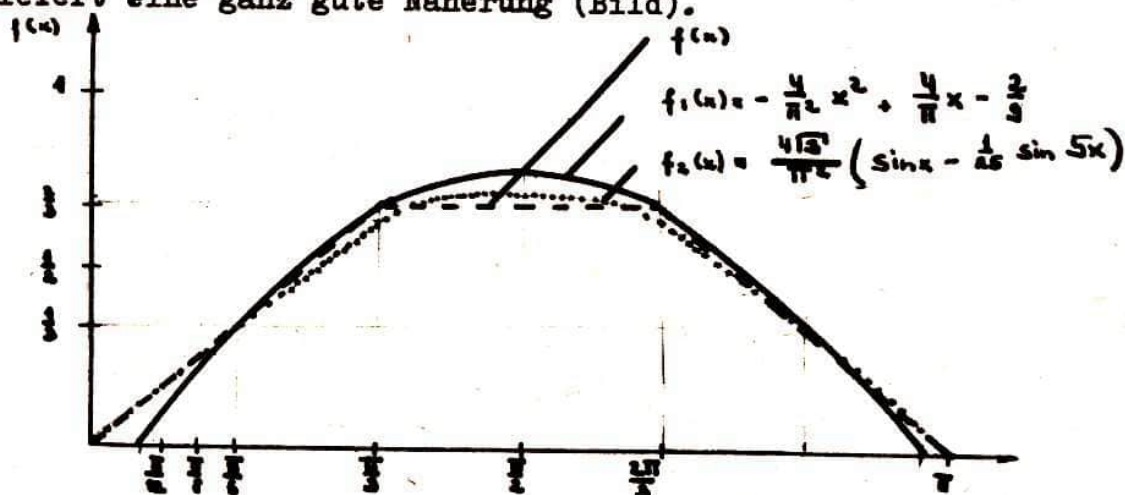
$$\varphi_2(x) = x^2,$$

näherungsweise dargestellt werden. Auch eine Darstellung mit den Funktionen

$$\varphi_0(x) = \sin x$$

$$\varphi_1(x) = \sin 5x$$

liefert eine ganz gute Näherung (Bild).





Es gibt bereits eine reiche Auswahl solcher Funktionensysteme, die dem jeweiligen Verwendungszweck zum Teil recht gut angepaßt sind. Anstelle der exakten Funktion  $f(x)$ , deren analytischer Ausdruck zuweilen äußerst kompliziert ist, rechnet man mit einer Näherungsfunktion

$$\tilde{f}_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(x),$$

deren analytischer Ausdruck nur eine Linearkombination der bekannten (und möglichst einfachen) Funktionen  $\varphi_n(x)$  ist.

Solche Funktionensysteme  $\{\varphi_n(x)\}$ ;  $n=0,1,2,\dots$ ; sind die besten, bei denen man den auftretenden Fehler  $|f(x) - \tilde{f}_N(x)|$  beliebig klein machen kann. Im allgemeinen ist es dann so, daß die Anzahl  $N$  der Funktionen größer wird, je kleiner der Annäherungsfehler sein soll.

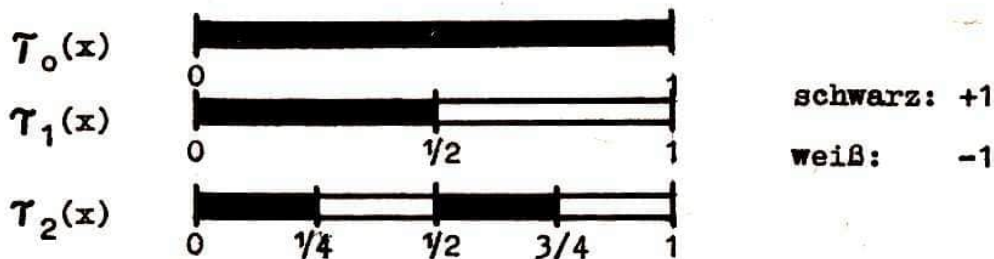
Wir stellen hier ein Funktionensystem vor, das genug Funktionen enthält, um den bei der Näherung auftretenden Fehler beliebig klein machen zu können, und in dem jede Funktion  $\tau_n(x)$  nur die Funktionswerte  $-1$  oder  $+1$  haben soll. Solche Funktionen eignen sich gut für das Rechnen auf Rechenautomaten. Man kann mit Hilfe dieser Funktionen stetige Funktionen näherungsweise darstellen und dann die weitere Auswertung einem Automaten überlassen. Unsere Funktionen  $\tau_n(x)$  sollen auf dem Intervall:  $0 \leq x < 1$  definiert sein;

die beiden einfachsten sind offenbar:

Definition:

$$\tau_0(x) = \begin{cases} +1 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\tau_1(x) = \begin{cases} +1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$



Wir finden weitere Funktionen, indem wir die Intervalle, auf denen eine bereits gefundene Funktion konstant ist, halbieren

und der neuen Funktion auf der ersten Hälfte dieser Intervalle den Funktionswert "+1" geben und auf der zweiten Hälfte den Wert "-1", also zum Beispiel

$$\tau_2(x) = \begin{cases} +1 & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ +1 & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ -1 & \frac{3}{4} \leq x < 1 \end{cases}$$

Wir nummerieren die so gefundenen Funktionen, indem wir jeder eine 2-er-Potenz als Nummer geben: ( $\tau_0(x)$  ist hierbei eine Ausnahme).

$$\tau_{2^k}(x) = \begin{cases} +1; \frac{2l}{2^{k+1}} \leq x < \frac{2l+1}{2^{k+1}} \\ -1; \frac{2l+1}{2^{k+1}} \leq x < \frac{2l+2}{2^{k+1}} \end{cases}; \quad l=0,1,2,\dots,2^k-1.$$

Ist  $n$  eine natürliche Zahl, so können wir  $n$  als eine Summe verschiedener 2-er-Potenzen darstellen:

$$n = \sum_{k=0}^{N(n)} n_k \cdot 2^k; \quad n_k \in \{0,1\}, \quad 2^{N(n)} \leq n < 2^{N(n)+1}.$$

Diese Darstellung benutzen wir zur Definition der Funktion

$\tau_n(x)$ :

Definition:  $\tau_n(x) = \prod_{k=0}^{N(n)} \tau_{n_k} 2^k(x); \quad n_k \in \{0,1\}, \quad 2^{N(n)} \leq n < 2^{N(n)+1}.$

Für  $n_k=1$  steht im Produkt also die oben beschriebene Funktion  $\tau_{2^k}(x)$ , für  $n_k=0$  steht die Funktion  $\tau_0(x) = 1$ .

Im weiteren wollen wir einige Eigenschaften der Funktionen  $\tau_n(x); n=0,1,2,\dots$ ; kennenlernen. Wir berechnen als erstes das Produkt zweier Funktionen unseres Funktionensystems:

$$\tau_n(x) \cdot \tau_m(x).$$

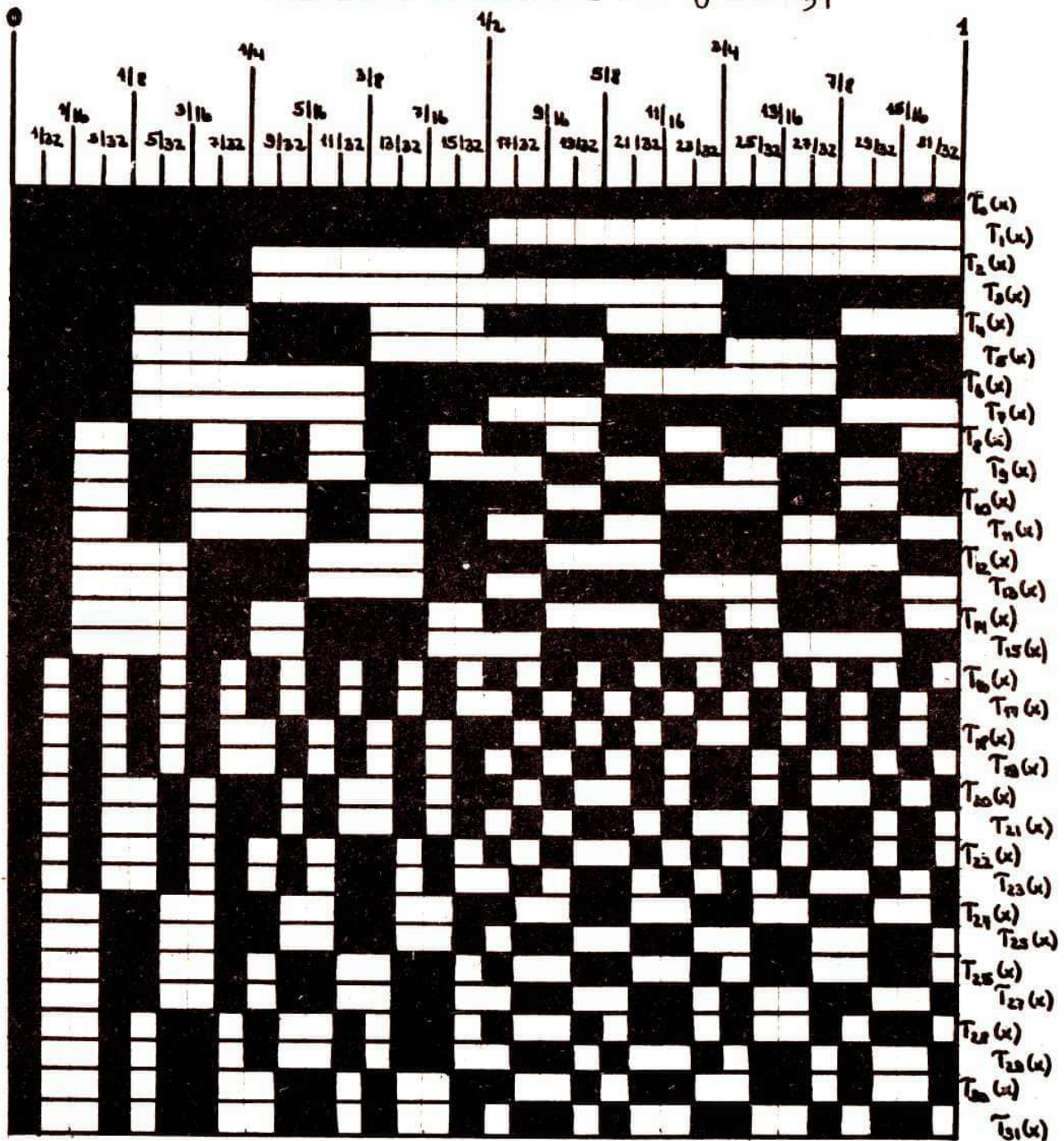
Ohne die Allgemeinheit einzuschränken sei  $n \leq m$  und

$$n = \sum_{k=0}^{N(n)} n_k 2^k; \quad m = \sum_{k=0}^{N(m)} m_k 2^k = \sum_{k=0}^{N(n)} m_k 2^k;$$

$$n_k \in \{0,1\}; \quad m_k \in \{0,1\}; \quad m_k=0, \text{ falls } k > N(m).$$

$N(n)$  bzw.  $N(m)$  ist also immer diejenige 2-er-Potenz, die gerade noch kleiner oder gleich  $n$  bzw.  $m$  ist.



Graphische Darstellung von  $\tau_0$  bis  $\tau_{31}$ 

Schwarzes Intervall " 1 "

Weißes Intervall "-1 "

Die einzelnen Funktionen folgen ohne Zwischenraum aufeinander. Durch Abdecken der vorangegangenen und der nachfolgenden Funktion wird die interessierende deutlich sichtbar gemacht.

Setzen wir für  $\tau_n(x)$  und für  $\tau_m(x)$  ihre Produktdarstellung durch  $\tau_{2^k}(x)$  ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\tau_m(x) \cdot \tau_n(x) &= \prod_{k=0}^{N(m)} \tau_{m_k 2^k}(x) \prod_{k=0}^{N(n)} \tau_{n_k 2^k}(x) \\ &= \prod_{k=0}^{N(n)} (\tau_{m_k 2^k}(x) \cdot \tau_{n_k 2^k}(x)).\end{aligned}$$

Bei der Berechnung der einzelnen Faktoren dieses Produktes treten je nachdem, in welcher Kombination  $n_k$  und  $m_k$  vorliegen, 4 verschiedene Fälle auf, deren Berechnung wir in einer Tabelle festhalten:

1.  $\tau_0(x) \cdot \tau_0(x) = \tau_0(x)$
2.  $\tau_0(x) \cdot \tau_{2^k}(x) = \tau_{2^k}(x)$
3.  $\tau_{2^k}(x) \cdot \tau_0(x) = \tau_{2^k}(x)$
4.  $\tau_{2^k}(x) \cdot \tau_{2^k}(x) = \tau_0(x)$

Das Ergebnis der Multiplikation  $\tau_{m_k 2^k}(x) \cdot \tau_{n_k 2^k}(x)$  ist wie wir sehen  $\tau_{l_k 2^k}(x)$ , wobei sich  $l_k$  aus  $m_k$  und  $n_k$  nach folgender Tabelle berechnet:

| $m_k$ | $n_k \rightarrow l_k$ |
|-------|-----------------------|
| 0     | 0 $\rightarrow$ 0     |
| 0     | 1 $\rightarrow$ 1     |
| 1     | 0 $\rightarrow$ 1     |
| 1     | 1 $\rightarrow$ 0     |

Wir erhalten also:

$$\tau_m(x) \cdot \tau_n(x) = \prod_{k=0}^{N(n)} \tau_{l_k 2^k}(x) = \tau_l(x).$$

Hierbei ist  $l = \sum_{k=0}^{N(n)} l_k 2^k$  und die Koeffizienten  $l_k$  berechnen sich wie oben angegeben. Wir sehen zugleich, daß die Nummer  $l$  der Produktfunktion nicht größer sein kann als  $(2^{N(n)+1}-1)$ , egal wie wir  $m$  in dem Bereich  $0 \leq m \leq n$  wählen. Wir können also jeweils zwei der  $2^N$  Funktionen  $\tau_n$ ;  $n=0, \dots, (2^N-1)$ ; miteinander multiplizieren, ohne die Menge dieser  $2^N$  Funktionen zu verlassen.



Beispiel:

$$\tau_3(x) \cdot \tau_5(x)$$

$$\begin{aligned} N(n)=2; \quad m &= 3 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 & m_0=1 & m_1=1 & m_2=0 \\ n &= 5 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 & n_0=1 & n_1=0 & n_2=1 \\ l &= 6 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 & l_0=0 & l_1=1 & l_2=1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tau_3(x) \cdot \tau_5(x) = \tau_6(x)$$

Etwas mehr rechnerischen Aufwand erfordert der Nachweis, daß gilt:

$$\int_0^1 \tau_n(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{falls } n > 0. \end{cases}$$

Sei  $0 < n = \sum_{k=0}^{N(n)} n_k 2^k$ ;  $n_k \in \{0, 1\}$ ;  $2^{N(n)} \leq n \leq (2^{N(n)+1} - 1)$ .

Dann ist  $\tau_n(x) = \prod_{k=0}^{N(n)} \tau_{n_k 2^k}(x)$ .

Die Funktionen  $\tau_{n_k 2^k}(x)$  sind für  $k < N(n)$  auf den Intervallen  $\left[ \frac{1}{2^{N(n)}}, \frac{1+1}{2^{N(n)}} \right)$ ;  $l=0, 1, 2, \dots, 2^{N(n)}-1$ ; konstante Funktionen.

Dies überlegt man sich unschwer an Hand der Definition der Funktionen  $\tau_k(x)$  bzw.  $\tau_0(x)$ . Weiter liefert diese Definition, daß die Funktion  $\tau_{2^{N(n)}}(x)$  auf diesen Intervallen bis zur Hälfte "+1" und von dort bis zum Ende jedes dieser Intervalle "-1" ist. Wir können also schreiben:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau_n(x) dx &= \int_0^1 \prod_{k=0}^{N(n)} \tau_{n_k 2^k}(x) dx, \quad n > 0 \\ &= \int_0^1 \tau_{2^{N(n)}}(x) \prod_{k=0}^{N(n)-1} \tau_{n_k 2^k}(x) dx \\ &= \sum_{l=0}^{2^{N(n)}-1} \int_{\frac{l}{2^{N(n)}}}^{\frac{l+1}{2^{N(n)}}} \tau_{2^{N(n)}}(x) \prod_{k=0}^{N(n)-1} \tau_{n_k 2^k}(x) dx \\ &= \sum_{l=0}^{2^{N(n)}-1} \left[ \prod_{k=0}^{N(n)-1} \tau_{n_k 2^k} \left( \frac{l}{2^{N(n)}} \right) \int_{\frac{l}{2^{N(n)}}}^{\frac{l+1}{2^{N(n)}}} \tau_{2^{N(n)}}(x) dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{2^{N(n)}-1} \left( \prod_{k=0}^{N(n)-1} \tau_{n_k} 2^k \left( \frac{1}{2^{N(n)}} \right) \right) \left( \int_{\frac{2l}{2^{N(n)+1}}}^{\frac{2l+1}{2^{N(n)+1}}} \tau_{2^{N(n)}}(x) dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{2l+1}{2^{N(n)+1}}}^{\frac{2(l+1)}{2^{N(n)+1}}} \tau_{2^{N(n)}}(x) dx \right) \\
&= \sum_{l=0}^{2^{N(n)}-1} \left( \prod_{k=0}^{N(n)-1} \tau_{n_k} 2^k \left( \frac{1}{2^{N(n)}} \right) \right) \left( \frac{1}{2^{N(n)+1}} \cdot (+1) + \frac{1}{2^{N(n)+1}} \cdot (-1) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ist  $n=0$ , so ist wegen  $\tau_0(x) \equiv 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$\int_0^1 \tau_0(x) dx = \int_0^1 dx = 1 - 0 = 1.$$

Wir haben im Verlauf der letzten Rechnung gesehen, daß die Funktionen  $\tau_n(x)$  auf den Intervallen  $\left[ \frac{2l}{2^{N(n)+1}}, \frac{2l+1}{2^{N(n)+1}} \right)$  und  $\left[ \frac{2l+1}{2^{N(n)+1}}, \frac{2l+2}{2^{N(n)+1}} \right)$ ;  $l=0, 1, \dots, 2^{N(n)}-1$ ; konstant sind. Andererseits besitzt  $\tau_n(x)$  (dies zeigt die vorletzte Zeile unserer obigen Rechnung) an den Stellen  $\frac{2l+1}{2^{N(n)+1}}$ ;  $l=0, 1, 2, \dots, (2^{N(n)}-1)$ ; einen Sprung, so daß die Länge der Intervalle, auf denen  $\tau_n(x)$  konstant ist, nicht länger sein kann als

$$\frac{2l+1}{2^{N(n)+1}} - \frac{2(l-1)+1}{2^{N(n)+1}} = \frac{1}{2^{N(n)}}.$$

Abschließend wollen wir die Funktion  $f(x)=1-x$  auf dem Intervall  $[0, 1)$  näherungsweise durch unsere Funktionen  $\tau_n(x)$  darstellen.

Wir haben also in unserer Linearkombination

$$\tilde{f}_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k \tau_k(x)$$

die Koeffizienten  $a_n$  zu berechnen. Wenn wir uns auf den Standpunkt stellen, für genügend großes  $N$  sind für uns die Funktionen  $f(x)$  und  $\sum_{n=0}^N a_n \tau_n(x)$  gleich, so können wir mit den von uns



nachgewiesenen Eigenschaften der Funktionen  $\tau_n(x)$  eine Formel für die Koeffizienten aufschreiben:

Um ein ganz bestimmtes  $a_{n_0}$  zu berechnen, schreiben wir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \tau_{n_0}(x) dx &= \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^N a_n \tau_n(x) \tau_{n_0}(x) \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^N a_n \int_0^1 \tau_n(x) \tau_{n_0}(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^N a_n \int_0^1 \tau_l(x) dx, \end{aligned}$$

wobei  $l=0$  nur, wenn  $n_0=n$  und ansonsten  $l>0$  gilt. Wir erhalten somit für alle  $n$  die Formel:

$$a_n = \int_0^1 f(x) \tau_n(x) dx.$$

Wir haben in unserem Beispiel die folgenden Integrale zu berechnen:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 (1-x) \tau_n(x) dx \\ &= \int_0^1 \tau_n(x) dx - \int_0^1 x \tau_n(x) dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } n=0 \\ \int_0^1 x \tau_n(x) dx & \text{für } n>0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Integrale der Form  $\int_0^1 x \tau_n(x) dx$  werden berechnet, indem man das Integral in eine Summe von Integralen über die Intervalle, auf denen  $\tau_n(x)$  konstant ist, umformt und dann diese einzelnen Integrale berechnet.

Wir geben das Ergebnis an und zeichnen ein Bild:

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_{2^k} = \frac{1}{2^{k+2}} \quad k=0,1,2,\dots$$

$$a_n = 0 \quad \text{sonst.}$$

$$\tilde{f}_N(x) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^{k+2}} \tau_{2^k}(x) + \frac{1}{2}.$$

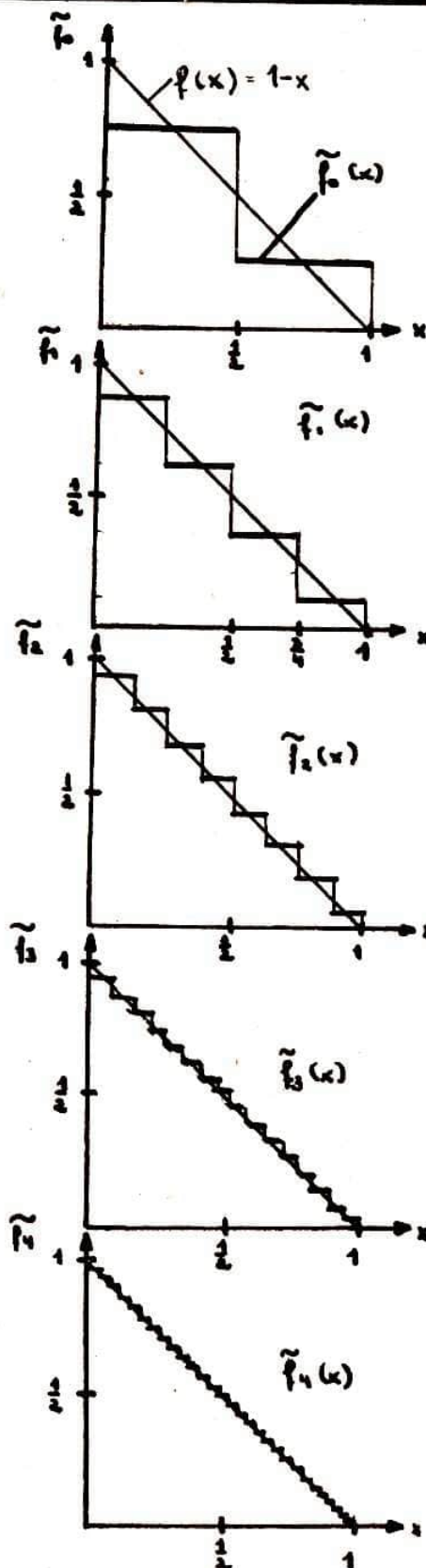
$$\tilde{f}_0(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \tau_1(x)$$

$$\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_0(x) + \frac{1}{8} \tau_2(x)$$

$$\tilde{f}_2(x) = \tilde{f}_1(x) + \frac{1}{16} \tau_4(x)$$

$$\tilde{f}_3(x) = \tilde{f}_2(x) + \frac{1}{32} \tau_8(x)$$

$$\tilde{f}_4(x) = \tilde{f}_3(x) + \frac{1}{64} \tau_{16}(x)$$





## Preisaufgaben

- N 61 In einer Ebene seien fünf Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Man zeige, daß man vier Punkte davon so auswählen kann, daß diese die Eckpunkte eines konvexen Vierecks sind.

- N 62 Es seien  $n$  und  $p$  natürliche Zahlen mit  $n, p \geq 1$ . Man zeige, daß dann gilt

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$

- N 63 Durch einen gegebenen Eckpunkt  $A$  eines konvexen Vierecks  $ABCD$  ist eine Gerade so zu konstruieren, daß sie den Flächeninhalt  $F$  des Vierecks halbiert.

- N 64 Die unendliche Summe  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  ( $n$  natürliche Zahl) wächst über alle Grenzen. Man zeige, daß dagegen die unendliche Summe der Reziproken aller natürlichen Zahlen, die keine Ziffer 9 enthalten, nicht größer als 28 ist.

- N 65 Es sei  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$  und  $x_i > 0$  ( $i=1,2,3,4$ ). Für welche Werte der  $x_i$  nimmt das Produkt  $x_1^5 \cdot x_2^2 \cdot x_3 \cdot x_4^4$  einen maximalen Wert an?

- N 66 Доказать, что если  $a-1$  делится на  $k^m$ , то  $a^k-1$  делится на  $k^{m+1}$  ( $k$  и  $m$  – целые положительные числа,  $a$  – целое число,  $k \neq 1$  и  $a \neq 1$ ).

Einsendeschluß: 15.3.1982

## Lösungen

### Aufgabe N 19 (nach Olaf Raeke, Neubrandenburg)

Wegen der geforderten Parallelität von  $AA_1$ ,  $BB_1$  und  $CC_1$  gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{BC_1}{AB} = \frac{CC_1}{AA_1} \quad \text{und} \quad \frac{AC_1}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1}. \quad (1)$$

Weiterhin gilt  $AC_1 + BC_1 = AB$ ,

$$\text{somit ist } \frac{AC_1}{AB} + \frac{BC_1}{AB} = 1.$$

Mit (1) gilt dann

$$\frac{CC_1}{BB_1} + \frac{CC_1}{AA_1} = 1$$

$$\text{und somit } \frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} = \frac{1}{CC_1}.$$

### Aufgabe N 20

Es ist zu zeigen, daß  $x^2 + 2px + 2q = 0$  (1)  
für ungerade  $p$  und  $q$  keine rationale Lösung  $x$  hat.

1. Es gibt keine ungerade Lösung  $x$ .

Wenn  $x$  ungerade ist, so auch  $x^2$ . Da  $(2px + 2q)$  durch 2 teilbar ist, ist  $x^2 + (2px + 2q)$  nicht gleich Null.

2. Es gibt keine gerade Lösung  $x$ .

Wenn  $x$  gerade ist, so ist  $(x^2 + 2px)$  durch 4 teilbar. Da  $q$  ungerade ist, aber  $2q$  nicht durch 4 teilbar und  $x$  keine Lösung von (1).

3. Es gibt keine echt rationale Lösung  $x$ .

Wir formen (1) um in

$$(x+p)^2 = p^2 - 2q.$$

$(p^2 - 2q)$  ist eine ganze Zahl,  $x+p$  ist eine echt rationale Zahl, wenn  $x$  echt rational und  $p$  ganz. Es bleibt zu zeigen, daß das Quadrat einer echt rationalen Zahl wieder echt rational ist.

4. Das Quadrat einer echt rationalen Zahl ist wieder echt rational.



Sei  $y = \frac{a}{b}$  eine echt rationale Zahl mit  $a, b$  und  
unkürzbar,  $y = \frac{a}{b} = \frac{p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}}{q_1^{l_1} \cdot \dots \cdot q_m^{l_m}}$  sei die Prim-  
faktorzerlegung von  $a$  und  $b$ . Es gilt  $p_i \neq p_j$  für alle  
 $i$  und  $j$ .

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{p_1^{2k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{2k_n}}{q_1^{2l_1} \cdot \dots \cdot q_m^{2l_m}} = y^2$  ist dann ebenfalls un-  
kürzbar und somit auch eine echt rationale Zahl.

### Aufgabe N 21

Seien  $n-1, n, n+1$  drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Annahme: Es gilt  $(n+1)^3 = n^3 + (n-1)^3$ .

Dann gilt auch

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + n^3 - 3n^2 + 3n - 1$$

also  $2 = n^2(n-6)$ .

$n^2(n-6)$  ist nur positiv für  $n > 6$ .

Für  $n > 6$  gilt aber

$$n^2(n-6) > 36 > 2.$$

Somit ist die Annahme falsch.

### Aufgabe N 22 (nach Uwe Stephan, Leipzig)

Sei  $c$  die Länge der Hypotenuse und  $a, b$  die Längen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks.

Dann gilt

(1)  $a^2 + b^2 = c^2$  (Pythagoras)

(2)  $c > a, c > b$ , da  $a > 0, b > 0$ .

Wegen (2) gilt auch  $c^m > a^m$  und  $c^m > b^m$  für  $m > 0$ .

Wir setzen jetzt  $m = n-2$  und erhalten

$$c^n = c^2 \cdot c^m = a^2 c^m + b^2 c^m > a^2 a^{n-2} + b^2 b^{n-2} = a^n + b^n$$

**Jugendobjekt „Vorkursvorbereitung“**

Die Aufgabenstellung und gleichzeitig das Ziel des Jugendobjektes besteht in der Vorbereitung der zukünftigen Vorkursstudenten auf ihre Arbeit im Vorkurs. Viele von uns Lehrerstudenten Mathematik/Physik kennen aus eigener Erfahrung die Probleme und Schwierigkeiten, die beim Übergang von der POS zum "0. Studienjahr", dem Vorkurs Mathematik/Physik auftreten. Deshalb wollen wir mit der Gründung dieses Jugendobjektes den Schülern helfen, sich gut auf das Studium vorzubereiten und ihnen den Übergang zum Vorkurs zu erleichtern. Besonders kommt es auf die Verbesserung der Rechenfertigkeiten im Fach Mathematik und der Denkfähigkeiten im Fach Physik an. Die zukünftigen Vorkursstudenten sollen sich schon rechtzeitig an selbständiges Arbeiten gewöhnen, damit dadurch die meist auftretenden Übergangsschwierigkeiten von der POS zum Vorkurs vermindert werden können. Gleichzeitig sollen auch erste Kontakte zwischen zukünftigen und derzeitigen Studenten geknüpft werden.

Die Mitglieder des Jugendobjektes "Vorkursvorbereitung" sind Studenten des 3. Studienjahres. Jeder dieser Studenten betreut drei oder vier Schüler. Er sendet ihnen Übungsaufgaben in Mathematik zu, die vom wissenschaftlichen Betreuer des Jugendobjektes, Fräulein Barbara Salzmann (Bereich Theoretische Mathematik), zusammengestellt werden. Ebenfalls werden den Schülern Übungsaufgaben in Physik, die von Vertretern des Bereiches Physikmethodik ausgewählt werden, zugeschickt. Mit diesen Aufgaben in Mathematik und Physik, deren Lösung die Schüler notieren und an die entsprechenden Studenten des 3. Studienjahres zurückschicken sollen, wollen wir nicht etwa die Freizeit der Schüler nehmen oder den Spaß an der Mathematik und Physik verderben, ganz im Gegenteil! Wir wollen verhindern, daß den Schülern zu Beginn des Vorkurses die Arbeit über den Kopf wächst und wegen vieler Mißerfolgserlebnisse, die wohl leider nicht ausbleiben, die Schüler die Lust am Studium erst einmal verlieren. Wir wollen erreichen, daß sich die zukünftigen Vorkursstudenten voll auf den neuen Stoff konzentrieren können und ihnen rechnerische Probleme kaum oder nur wenig zu schaffen machen.



Die Mitglieder des Jugendobjektes korrigieren die eingegangenen Lösungen der drei oder vier Schüler und schicken diese mit den neuen Aufgaben an die Schüler zurück. Sie registrieren die Leistungen, um somit ein Grundlagenmaterial für die Vorkurslehrer zu schaffen.

Eine weitere Aufgabe der Mitglieder des Jugendobjektes ist es, auf persönliche Fragen und Probleme zu antworten und Hinweise zum Studienablauf zu geben.

Aus unserer Erfahrung können wir sagen, daß die meisten zukünftigen Vorkursstudenten das Jugendobjekt begrüßen. Viele waren froh, mit Hilfe der Übungsaufgaben eine gute Starthilfe für den Vorkurs zu erhalten.

Wir Studenten des 4. Studienjahres hoffen, daß die jetzigen Studenten des 3. Studienjahres das Jugendobjekt fortführen werden.

4. Studienjahr  
Mathematik-Physik-Lehrer

---

Kathederblüten des Gothaer Schulprofessors  
Johann Georg August Galletti (1750-1828)  
zitiert aus Gallettiana:

"Wer über diesen Gegenstand etwas nachlesen will, der findet es in einem Buche, dessen Tittel ich vergessen habe; es ist aber das 42. Kapitel."

"Es muß gleich 4 Uhr schlagen: denn es hat vor einer guten halben Stunde  $3/4$  geschlagen."

"Der Tag hat 365 Stunden, und die Stunde 24 Minuten."

"Ich statuiere mit Kant nicht mehr als zwei Kategorien unseres Denkvermögens, nämlich Zaum und Reit, - ich wollte sagen Raut und Zeim."

"Ratten und Mäuse bekommt man selten zu sehn, und fast niemals in einer Mausefalle."

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“

**Leiter:** Heiner Schwulow

**Chefredakteur:** Andreas Kleinwächter

**Stellvertretender Chefredakteur:** Andreas Jeschag

**Redaktion:** H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein

**Anschrift:** WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M,

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

**Redaktionsschluß:** 18. 11. 1981

**Titelbild:** Ingrid Gottschalk