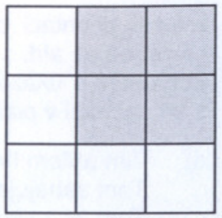
Úloha 3: n-čtvercová plocha s délkou strany n je kompletně složena z jednotkových čtverců (čtverce o délce strany 1).

Na takovéto ploše mají být poznány všechny čtverce, které jsou složeny z určitého počtu jednotkových čtverců.

a) Zobrazení 1 ukazuje takovou 3-čtvercovou plochu s takovýmto označeným čtvercem ze čtyř jednotkových čtverců.



Zobrazení 1

Ukaž, že jde na této ploše poznat 14 čtverců.

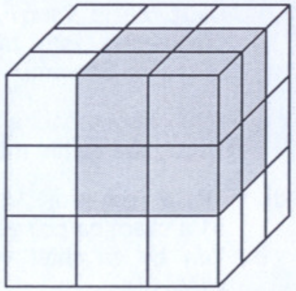
b) Zjisti počet čtverců, které jdou poznat v 5-čtvercové ploše.

Popiš možnost, jak jde vypočítat počet všech čtverců 9-čtvercové plochy a uveď ji.

Uvažujeme nyní tuto problematiku v prostoru. n-krychle s délkou hrany n je kompletně tvořena jednotkovými krychlemi (krychle o délce hrany 1).

V takovéto krychli mají být poznány všechny krychle (i uvnitř ležící), které jsou tvořeny určitým počtem jednotkových krychlí.

c) Zobrazení 2 ukazuje 3-krychli s označenou krychlí složenou z osmi jednotkových krychlí.



Zobrazení. 2

V jiné takové n-krychli můžeme poznat 100 krychlí.

Uveď, jakou délku hrany má tato n-krychle. Zdůvodni!

MATEMATICKÁ SOUTĚŽ ADAM RIES

HORNI FRANKY – SASKO – DURYNSKO – ČESKÁ REPUBLIKA

2009

Matematická soutěž ADAM RIES 2009 - 3. stupeň

Úlohy - část 1

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Úloha 1: Když si někdo půjčí na určitý čas peněžní částku, tak za to musí půjčovateli na oplátku platit úrok. Celkový úrok je o to vyšší, čím vyšší je půjčená peněžní částka a čím déle máme peníze půjčené.

ADAM RIES pokládá ve své druhé početnici pod nadpisem „Od lichváře“ takovouto úlohu, ve které kriticky poukazuje na tyto úrokové praktiky.

V tehdejší době se platilo například s guldeny a feniky. Použijeme následující zkratky: gulden fl; fenik pf. Pro přepočet platí: 1 fl = 252 pf.

a) Někdo si půjčí 20 guldenů na 2 roky a musí každý měsíc půjčovateli platit úrok 8 feniků za každý gulden, který si půjčil.

Spočítej, kolik činí celkový úrok. Uveď úrok v guldenech a fenikách.

b) Jiný si půjčí určitou peněžní částku na 3 roky a musí každý měsíc půjčovateli platit úrok 4 feniky za každý gulden, který si půjčil.
Celkově zaplatí úrok 20 guldenů.

Spočítej, jakou peněžní částku si půjčil.

c) Adam Ries pokládá následující úlohu (originální text na zobrazení vedle), která by v dnes používaném jazyce zněla takto (čísla změněna):

„Směnář půjčuje muži po dobu 1 roku 10 guldenů, a **po půl roce připočte dosavadní úrok k půjčené peněžní částce.** Muž tedy musí splácet na úrok prvního pololetí v druhém pololetí také úrok.

Nyní se ptám, jaký úrok se musí splatit v uvedeném roce za 10 guldenů, když se měsíčně dá za jeden gulden 7 feniků.“

Vyřeš tuto úlohu.

Úloha 2: A znovu jde o strategickou hru, ve které si hráč vhodným postupem nezávisle na vedení hry svého protivníka může vynutit vítězství.

Ve hře „Vpravo a nahoru“ se využívá pravoúhlá mřížka *n x m* z n vodorovných řádků a m svislých sloupců. Dva hráči pohybují střídavě jednou a tou samou mincí od startu začínaje buď libovolný počet polí vpravo, nebo nahoru. Vítěz je ten, kdo dostane první minci do cíle.

K lepší orientaci označujeme řádky malými písmeny, sloupce čísly a pole následně a1 atd.
Zobrazení 1 ukazuje takovou *4 x 4* mřížku, ve které se start nachází v poli a1 a cíl v poli d4.

Zobrazení 1

a) Tim a Tom hrají ve čtvercové mřížce zobrazení 1. Tom zahajuje tahem na b1, Tim následuje na b3. Tom si uvědomuje: „Ze tří možných polí, která nyní mohu hrát, mi právě jedno zajistí vítězství“.

Zdůvodni, že výpověď Toma je pravdivá a zadej vítězné pole, které mu zajistí vítězství.

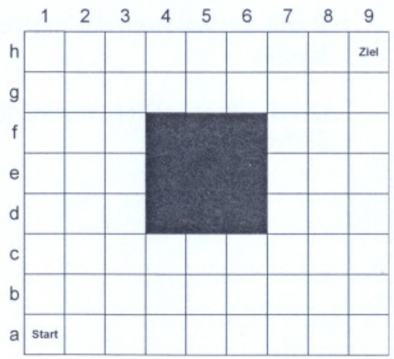
b) Tim a Tom hrají nyní stejnou hru na mřížce 9 x 9 se startem na poli a1 a cílem na poli i9. Tom znovu zahajuje.

Ukaž, že je Timovi možno v každém tahu vynutit vítězství. Zadej do pracovního listu takový herní postup. Označ tahy Tima a Toma odlišnými barvami.

c) Nyní je pozměněna hra úlohy b tak, že se start posouvá na pole a2. Uveď, zda se tím mění možnosti vítězství Tima. Zdůvodni!

d) Tim a Tom hrají „Vpravo a nahoru" na mřížce *5 x 9* se startem na poli a1 a cílem na poli e9.
Tim by si chtěl vynutit vítězství v této hře.

Uveď, kdo musí hru zahájit. Zdůvodni!



Zobrazení 2

e) Oba prohlédli vítěznou strategii. Nyní už hra není zábavná. Poznají ale, že hra se stane zase zajímavou, když se na nějaká pole mřížky nesmí pokládat.

Vytvoří mřížku *8 x 9* zobrazení 2, ve které se nesmí pokládat na označená pole.

Popiš jednu vítěznou strategii, která umožní vynutit vítězství.

Aufgabe 3: Eine n-Quadratfläche mit der Seitenlänge n ist vollständig aus Einheitsquadraten (Quadrate mit einer Seitenlänge von 1) zusammengesetzt.

Es sollen in einer solchen Fläche alle Quadrate erkannt werden, die aus einer bestimmten Anzahl von Einheitsquadraten bestehen.

a) Abb. 1 zeigt eine solche 3-Quadratfläche mit einem solchen markierten Quadrat aus 4 Einheitsquadraten.

Zeige, dass man in dieser Fläche 14 Quadrate erkennen kann.

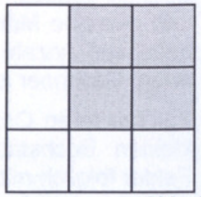


Abb. 1

b) Ermittle die Anzahl der Quadrate, die man in einer 5-Quadratfläche erkennen kann.

Beschreibe eine Möglichkeit, wie man die Anzahl aller Quadrate einer 9-Quadratfläche berechnen kann und gib diese an.

Wir betrachten nun diese Problemstellung im Raum. Ein n-Würfel mit der Kantenlänge von n ist vollständig aus Einheitswürfeln (Würfel mit einer Kantenlänge von 1) zusammengesetzt.

Es sollen in einem solchen Würfel alle (auch innen liegenden) Würfel erkannt werden, die aus einer bestimmten Anzahl von Einheitswürfeln bestehen.

c) Abb. 2 zeigt einen 3-Würfel mit einem markierten Würfel aus 8 Einheitswürfeln.

In einem anderen solchen n-Würfel kann man 100 Würfel erkennen.

Gib an, welche Kantenlänge dieser n-Würfel hat. Begründe!

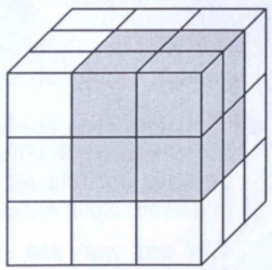


Abb. 2

ADAM-RIES-WETTBEWERB

OBERFRANKEN-SACHSEN-THÜRINGEN-TSCHECHIEN

2009

A D A M - R I E S - W E T T B E W E R B 2 0 0 9 - 3.Stufe

<u>**A U F G A B E N - Teil 1**</u>

<u>Hinweis:</u> Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1: Wenn sich Jemand für eine bestimmte Zeit einen Geldbetrag leiht, so muss er dem Verleiher dafür als Gegenleistung ein Entgelt bezahlen, auch Zinsen genannt. Die Gesamtzinsen sind umso größer, je höher der geliehene Geldbetrag ist und je länger man das Geld leiht.

ADAM RIES stellt in seinem zweiten Rechenbuch unter der Überschrift „Vom Wucher“ eine solche Aufgabe, in der er auch kritisch diese Zinspraktik hinterfragt.

Zur damaligen Zeit bezahlte man z.B. mit Gulden und Pfennigen. Wir verwenden folgende Abkürzungen: Gulden fl; Pfennig pf. Für die Umrechnung gilt: 1 fl = 252 pf.

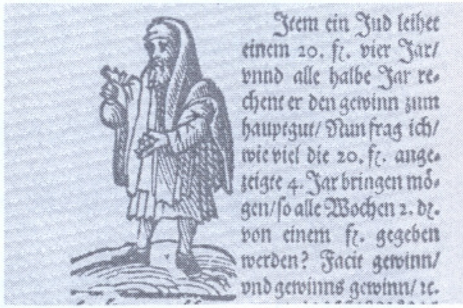
a) Jemand leiht sich 20 Gulden für 2 Jahre und muss jeden Monat dem Verleiher 8 Pfennig Zins für einen geliehenen Gulden zahlen.

Berechne, wie viel Zinsen insgesamt zu zahlen sind. Gib die Zinsen in Gulden und Pfennigen an.

b) Ein Anderer leiht sich einen bestimmten Geldbetrag für 3 Jahre und muss jeden Monat dem Verleiher für einen geliehenen Gulden 4 Pfennig Zinsen zahlen. Insgesamt zahlt er 20 Gulden Zinsen.

Berechne, welchen Geldbetrag er sich geliehen hat.

c) Adam Ries stellt folgende Aufgabe (Originaltext in nebenstehender Abb.), die in unserem heutigen Sprachgebrauch folgendermaßen lauten würde (Zahlen geändert):


Item ein Jud leihet
einem 20. fl. vier Jar/
vnnd alle halbe Jar re-
chent er den gewinn zum
hauptgut/ Nun frag ich/
wie viel die 20. fl. ange-
zeigte 4. Jar bringen mö-
gen/ so alle Wochen 2. dz.
von einem fl. gegeben
werden? Facit gewinn/
vnd gewinns gewinn/ ꝛc.

„Ein Geldwechsler leiht einem Mann ein Jahr lang 10 Gulden, und **nach einem halben Jahr rechnet er den bisherigen Zins zum geliehenen Geldbetrag zu.** Der Mann muss also auf die Zinsen des ersten halben Jahres im kommenden Halbjahr auch Zinsen bezahlen.

Nun frage ich, wie viel für die 10 Gulden in dem angegebenen Jahr Zinsen gezahlt werden müssen, wenn jeden Monat 7 Pfennig für einen Gulden gegeben werden.“

Löse diese Aufgabe.

Aufgabe 2: Und wieder geht es um ein Strategiespiel, in dem durch eine geeignete Vorgehensweise ein Spieler unabhängig von der Spielführung seines Gegners den Sieg erzwingen kann.

Im Spiel „Rechts und Hoch“ wird ein rechteckiges *n x m* - Gitter aus n waagerechten Zeilen und m senkrechten Spalten genutzt. Zwei Spieler bewegen abwechselnd ein und dieselbe Münze vom Start beginnend entweder eine beliebige Anzahl von Feldern nach rechts, oder nach oben. Gewinner ist, wer die Münze ins Ziel bringt.

Zur besseren Orientierung bezeichnen wir die Zeilen mit kleinen Buchstaben, die Spalten mit Zahlen und die Felder folglich mit a1 und so weiter.

Abb. 1 zeigt ein solches *4 x 4* - Gitter, bei dem sich der Start im Feld a1 und das Ziel im Feld d4 befinden.

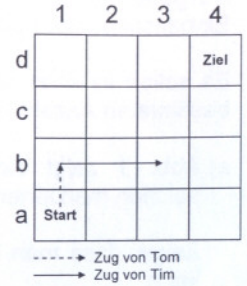


Abb. 1

a) Tim und Tom spielen in dem Quadratgitter der Abb.1. Tom beginnt mit dem Zug nach b1, Tim schließt b3 an. Tom bemerkt nun: „Von den drei möglichen Feldern, die ich jetzt ziehen kann, sichert mir genau eins den Sieg“.

Begründe, dass die Aussage von Tom wahr ist und gib das Gewinnfeld an, das ihm den Sieg sichert.

b) Tim und Tom spielen nun das gleiche Spiel auf einem *9 x 9* - Gitter mit Start im Feld a1 und Ziel im Feld i9. Tom beginnt wieder.

Zeige, dass es Tim in jedem Zug möglich ist, den Sieg erzwingen. Gib einen solchen Spielverlauf auf dem Arbeitsblatt an. Markiere die Züge von Tim und Tom in unterschiedlichen Farben.

c) Nun wird das Spiel der Aufgabe b variiert, indem man den Start auf das Feld a2 verlegt. Gib an, ob sich damit die Gewinnmöglichkeit für Tim ändert. Begründe!

d) Tim und Tom spielen „Rechts und Hoch“ auf einem *5 x 9* -Gitter mit Start im Feld a1 und Ziel im Feld e9. Tim möchte den Sieg in diesem Spiel erzwingen.

Gib an, wer das Spiel beginnen muss. Begründe!

e) Beide haben die Gewinnstrategie durchschaut. Nun macht es keinen Spaß mehr. Sie erkennen aber, dass es wieder interessant wird, wenn man auf einige Felder des Gitters nicht setzen darf.

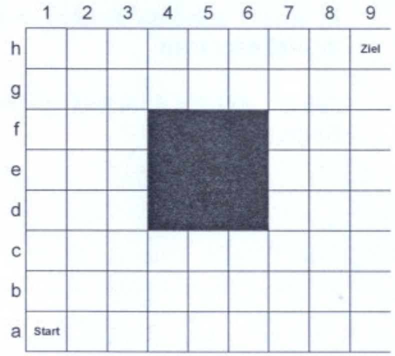


Abb. 2

Sie stellen das *8 x 9* - Gitter der Abb. 2 her, in dem man auf die markierten Felder nicht setzen darf.

Beschreibe eine Gewinnstrategie, die es ermöglicht, den Sieg zu erzwingen.

ADAM-RIES-WETTBEWERB

MATEMATICKÁ SOUTĚŽ ADAM RIES

OBERFRANKEN – HORNI FRANKY

SACHSEN – SASKO

THÜRINGEN – DURYNSKO

TSCHECHIEN – ČESKÁ REPUBLIKA

AUFGABE 1 – ÙLOHA 1

ADAM-RIES-Wettbewerb (3.Stufe, Teil 1)
Aufgabe 1

<u>Hinweis:</u> Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Zur Zeit, als ADAM RIES lebte, gab es in Europa viele kleine Staaten. Beim Transport von Waren über die Grenzen musste man Zoll entrichten. Dies geschah in Form von Münzen, aber auch durch Waren.

Rechenung auff der linihen vnd federn: in zal/maß/vnd gewicht auff allerley handierung/ gemacht vnd zusamen gelesen durch Adam Riesen von Staffelstein Rechenmeyster zu Erffurdt im . 1522 . Jar. Jetzt vffsant Annabergk/ durch in fleissig vbersehen / vnd alle gebrechen eygentlich gerechtfertiget / vnd zum letzten eine hübsche vnderrichtung angehengt.

Georgius Henricus

Im zweiten Rechenbuch von Ries, das 1522 erschienen ist (die nebenstehende Abbildung zeigt die Titelseite der zweiten Auflage aus dem Jahre 1525), stellt er dazu unter anderem eine Aufgabe, die in unserem heutigen Sprachgebrauch folgendermaßen lautet:

„Ein Händler transportiert von Wien nach Regensburg 60 Fuder Wein. Ein Fuder davon gibt er dem Zöllner als Zoll, von dem er aber 630 Groschen zurück erhält.
Nun kommt ein zweiter Händler, bringt 200 Fuder Wein und bezahlt dem Zöllner 1 Fuder und noch 420 Groschen Zoll.“
(Der Anteil des Zolls für ein und denselben Warenwert ist gleich.)

a) Ein dritter Händler bringt 600 Fuder Wein.
Berechne den Zoll (in Wein und Groschen), den dieser Händler bezahlen muss.

b) Angenommen, ein Fuder Wein hat einen Wert von 1000 Groschen.
Weise nach, dass der Anteil des von den ersten beiden Händlern bezahlten Zolls unter diesen Bedingungen nicht gleich ist.

c) Ermittle, wie viele Groschen der tatsächliche Wert für ein Fuder Wein ist.

Matematická soutěž ADAM RIES (3. stupeň, část 1)
Úloha 1

<u>Poznámka:</u> Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

V době, kdy žil Adam Ries, bylo v Evropě mnoho malých států. Při přepravě zboží přes hranice se muselo platit clo. To se dělo formou mincí, ale také zbožím.

Ve druhé početnici od Adama Rieseho, která vyšla roku 1522 (vedlejší obrázek ukazuje titulní stranu druhého vydání z roku 1525) uvádí k tomu mimo jiné úkol, který by v našem dnes užívaném jazyce zněl následovně:

„Kupec přepravuje z Vídně do Regensburgu 60 sudů. Jeden sud dá jako clo celníkovi a ten mu vrátí 630 grošů.
Nyní přichází druhý kupec, přináší 200 sudů vína a zaplatí celníkovi 1 sud a ještě 420 grošů cla.“

(Podíl cla pro jednu a tutéž hodnotu zboží je stejný.)

a) Třetí kupec přinese 600 sudů vína.
Vypočítej clo (ve víně i groších), které tento kupec musí zaplatit.

b) Předpokládáme, že jeden sud vína má hodnotu 1000 grošů.
Dokaž, že podíl cla zaplaceného od prvních dvou kupců se za těchto podmínek nerovná.

c) Zjisti, jaká je skutečná cena jednoho sudu v groších.

ADAM-RIES-WETTBEWERB
MATEMATICKÁ SOUTĚŽ ADAM RIES

OBERFRANKEN – HORNI FRANKY
SACHSEN – SASKO
THÜRINGEN – DURYNSKO
TSCHECHIEN – ČESKÁ REPUBLIKA

AUFGABE 2 – ÙLOHA 2

ADAM-RIES-Wettbewerb (3.Stufe, Teil 1)
Aufgabe 2

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Eine Strecke, die zwei Punkte eines Kreises verbindet, heißt Sehne. Zu vier Punkten eines Kreises gibt es genau 6 Sehnen (vgl. Abb.1).

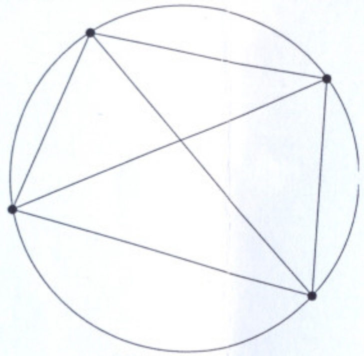


Abb.1/Obr. 1

a) Trage auf den Kreis des Arbeitsblattes zu den gegebenen 4 Punkten einen fünften Punkt ein. Zeichne alle Sehnen zu diesen 5 Punkten.

b) Gib die Anzahl der Sehnen bei 6 Kreispunkten und bei 7 Kreispunkten an (Du kannst zum Probieren das Arbeitsblatt benutzen).

Formuliere einen Zusammenhang, mit dem man die Anzahl der Sehnen aus der Anzahl der Kreispunkte berechnen kann.

Die Sehnen unterteilen die Kreisfläche in Gebiete. Im Folgenden wird immer die größtmögliche Anzahl solcher Gebiete betrachtet. Eine Kreisfläche mit 4 Punkten und folglich 6 Sehnen wird in 8 Gebiete unterteilt (vgl. Abb. 2).

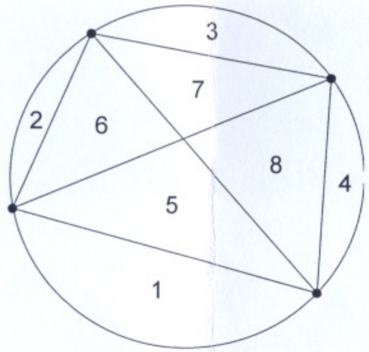


Abb.2/Obr. 2

c) Ermittle die Anzahl der Gebiete bei 5 Kreispunkten. Nutze dazu deine Lösung der Aufgabe a) auf dem Arbeitsblatt.

d) Bei der Untersuchung zur Anzahl der Gebiete, in die Geraden eine **Ebene** teilen, wurde in der 1. und 2. Stufe des ARW folgender Zusammenhang abgeleitet:

Wenn zu 4 Geraden eine fünfte hinzukommt, dann kann diese die vorangehenden 4 Geraden höchstens in 4 Punkten schneiden. Diese 4 Schnittpunkte teilen die neue Gerade in 5 Geradenabschnitte. Folglich entstehen 5 neue Gebiete.

Übertrage diesen Zusammenhang auf die Problemstellung, wie man aus der Anzahl der Gebiete bei einer Teilung der **Kreisfläche** durch Sehnen mit 5 Kreispunkten (Aufgabe c) auf die Anzahl der Gebiete mit 6 Kreispunkten schließen kann.
Ermittle diese Anzahl durch eine entsprechende Rechnung.

Matematická soutěž ADAM RIES (3. stupeň. část 1)
Úloha 2

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Úsečka, která spojuje dva body kružnice, se nazývá tětiva. Ke čtyřem bodům jedné kružnice existuje právě 6 tětiv (porovnej s obr. 1).

a) Zanes do kružnice na pracovním listu k daným 4 bodům ještě jeden pátý bod.
Zakresli všechny tětivy k těmto pěti bodům.

b) Uveď počet tětiv u 6 kružnicových bodů a u 7 kružnicových bodů (k vyzkoušení můžeš využít pracovní list).

Vyjádři souvislost, se kterou můžeme vypočítat počet tětiv na základě počtu kružnicových bodů.

Tětivy rozdělují kruh na pole. V následujícím se bere v úvahu vždy nejvýše možný počet takových polí. Kruh se 4 body a tedy 6 tětivami se rozdělí na 8 polí (porovnej s obr. 2).

c) Zjisti počet polí u 5 kružnicových bodů. Využij k tomu tvoje řešení úkolu a) na pracovním listu.

d) Při šetření počtu polí, ve které přímky dělí **rovinu**, byla v 1. a 2. stupni matematické soutěže "Adam Ries" odvozena následující souvislost:

Jestliže k 4 přímkám přibude pátá, může tato předcházející 4 přímky protnout nanejvýš ve čtyřech bodech. Tyto 4 průsečíky dělí novou přímku na 5 částí. Následně vznikne 5 nových polí.

Převeď tuto souvislost na vymezení problému, jak se může usoudit z počtu úseků při dělení **kruhu** tětivami s 5 kružnicovými body (úkol c) na počet úseků se 6 kružnicovými body.

Zjisti počet odpovídajícím výpočtem.

ADAM-RIES-WETTBEWERB
MATEMATICKÁ SOUTĚŽ ADAM RIES

OBERFRANKEN – HORNI FRANKY
SACHSEN– SASKO
THÜRINGEN – DURYNSKO
TSCHECHIEN– ČESKÁ REPUBLIKA

AUFGABE 3 – ÙLOHA 3

ADAM-RIES-Wettbewerb (3.Stufe, Teil 1)
Aufgabe 3

<u>Hinweis:</u> Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

„Wer von euch hat die Fensterscheibe zerbrochen?“ befragt der aufgeregte Hausmeister die vier von ihm verdächtigten Kinder Anna, Ben, Christian und Dominic.

Diese geben die folgenden Antworten:

Anna:	„Ben war es“.
Ben:	„Dominic hat es getan“.
Christian:	„Ich war es nicht“.
Dominic:	„Ben hat gelogen“.

Der Hausmeister, der viele Erfahrungen in ähnlichen Situationen gesammelt hat, weiß, dass die Kinder bei solchen Befragungen häufig lügen. Außerdem ist ihm bekannt, dass genau einer der vier die Scheibe zerbrochen hat.

a) Begründe, dass nicht alle vier Kinder in ihren Aussagen gelogen haben können.

b) Angenommen, es hat nur genau eines von den vier Kindern die Wahrheit gesagt, die anderen drei gelogen.
Begründe, dass dann nur Christian der Täter gewesen sein kann.

c) Der Hausmeister erkennt, dass genau eines der vier Kinder gelogen hat.

Untersuche, ob es unter diesen Bedingungen möglich ist, den Täter eindeutig zu ermitteln. Gib gegebenenfalls den Namen des Kindes an, der die Fensterscheibe zerbrochen hat.

Matematická soutěž ADAM RIES (3. stupeň, část 1)
Úloha 3

<u>Poznámka:</u> Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

„Kdo z vás rozbil okenní tabuli?“ dotazuje se rozčilený domovník čtyř jemu podezřelých dětí Anny, Bena, Christiana a Dominika.

Tyto dávají následné odpovědi:

Anna:	„Ben to byl“.
Ben:	„Dominik to udělal“.
Christian:	„Já jsem to nebyl“.
Dominik:	„Ben lhal“.

Domovník, který nasbíral mnoho zkušeností z podobných situací, ví, že děti často při takovém výslechu lžou. Kromě toho mu bylo známo, že právě jeden z těch čtyř to okno rozbil.

a) Zdůvodni, že ne všechny děti mohly ve svých výpovědích lhát.

b) Předpokládáme, že právě jen jedno dítě z těchto čtyř dětí řeklo pravdu a ostatní tři lhaly.

Zdůvodni, že potom jen Christian mohl být pachatelem.

c) Domovník pozná, že právě jedno ze čtyř dětí lhalo.

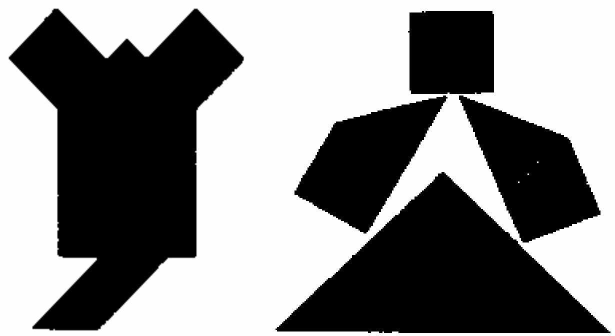
Prošetři, zda na základě těchto podmínek je možné pachatele jednoznačně určit. Uveď eventuálně jméno dítěte, které okno rozbilo. Zjisti počet odpovídajícím výpočtem.

ADAM-RIES-Wettbewerb (3.Stufe, Teil 2)

Matematická soutěž ADAM RIES (3. stupeň, část 2)

1 <u>Puzzeln und Legen</u>

1.1 Lege aus sieben Teilen des Tangram-Spieles (-> Umschlag) folgende Figuren.



1 <u>Skládání puzzlí</u>

1.1 Slož ze sedmi částí hry „Tangram" (→ obálka) následující figury.

1.2 Das Erstellen von magischen Quadraten war im 15. Jahrhundert sehr beliebt.

In seinem zweiten Rechenbuch forderte Adam Ries den Leser auf, die Zahlen 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 und 12 so in ein magisches Quadrat von neun Feldern einzusetzen, dass die Summe der Zahlen aller Zeilen, Spalten und Diagonalen gleich ist.

Ergänze die Zahlen in folgendem magischen Quadrat.
Nutze zum Probieren die Ziffernplättchen (-> Umschlag).

		10
	8	
6		

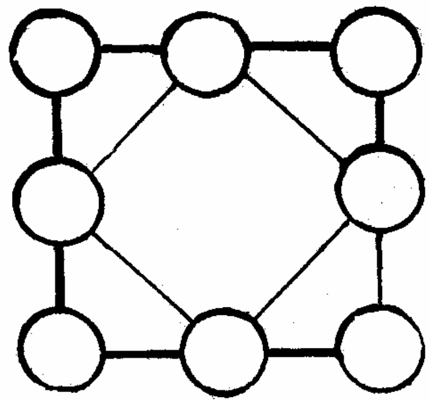
1.2 Zhotovení magických čtverců bylo od 15. století velmi oblíbené.

Ve své druhé početnici vyzývá Adam Ries čtenáře, aby čísla 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 a 12 dosadil do magického čtverce o devíti polích tak, aby byl součet čísel na všech řádcích, sloupcích a úhlopříčkách stejný.

Doplň čísla do následujícího magického čtverce.
Využij k vyzkoušení číselné plíšky (→ obálka).

1.3 Trage die natürlichen Zahlen 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 und 12 so in die Kreisfelder ein, dass die Summe der vier Eckzahlen von beiden Quadraten gleich groß ist.

Nutze zum Probieren die Ziffernplättchen (-> Umschlag).



1.3 Zapiš přirozená čísla 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 a 12 do kruhových políček tak, aby byl součet čtyř rohových čísel obou čtverců stejně velký.

Využij k vyzkoušení číselné plíšky (→ obálka).

ADAM-RIES-Wettbewerb (3.Stufe, Teil 2)

2 Aus alten Rechenbüchern

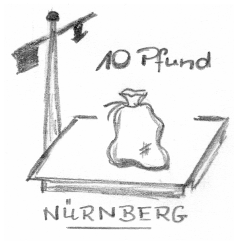
2.1 Eine Griechin ging in den Tempel des Jupiter und bat, er möge ihr Geld verdoppeln. Dieser erhörte ihre Bitte und sie opferte ihm aus Dankbarkeit zwei Drachmen. Nun schritt sie zum Tempel des Apollon und bat um ein gleiches, worauf sie wieder zwei Drachmen opferte. Als sie nun ihr Geld zählte, fand sie, dass sie gerade doppelt so viel wie anfangs hatte. Wie viele Drachmen hatte die Griechin anfangs?

Antwort:

2.2 Aus einem griechischen Rechenbuch: Antonis kann in 10 Stunden den Ton für 300 Ziegelsteine in Formen 3instreichen, Nikosin derselben Zeit für 200, Sotiris in derselben Zeit für 250. Nun arbeiten Antonis, Nikos und Sotiris gemeinsam.
Wie viele Stunden brauchen sie, um den Ton für 300 Ziegel einzustreichen?

Antwort:

2.3 Aus dem 2. Rechenbuch „Rechnung auff der Linihen“ (1522) von Adam Ries: Ein Händler kauft in Nürnberg 200 Pfund Pfeffer. Ein Pfund kostet 9 Schilling. Der Fuhrlohn nach Leipzig kostet (insgesamt) 4 Gulden. 10 Pfund von Nürnberg machen 11 Pfund in Leipzig. In Leipzig verkauft er ein Pfund für 9 Groschen 6 Pfennig.
* Du musst wissen: Zu Riesens Zeit jede Stadt andere Maße hat. Und für die Münzen galt:



1 Gulden = 20 Schilling = 21 Groschen.
1 Groschen = 12 Pfennig.

a) Wieviel kostet Kauf und Transport des Pfeffers? Gib die Kosten in Schilling an. Rechne in Groschen um.

Antwort:

b) Wie viele Leipziger Pfund wiegen die 200 Pfund aus Nürnberg?

Antwort:

c) Wie viele Groschen Gewinn erbringt der Verkauf des gesamten Pfeffers in Leipzig?

Antwort:

Matematická soutěž ADAM RIES (3. stupeň, část 2)

2 Ze starých početnic

2.1 Řekyně šla do Jupiterova chrámu a prosila, zda by nemohl zdvojnásobit její peníze. Jupiter její prosbu vyslyšel a ona mu z vděčnosti obětovala dvě drachmy. Nyní kráčela k chrámu Apollona a prosila o totéž, načež obětovala zase dvě drachmy. Když nyní počítala své peníze, zjistila, že má právě dvakrát tolik než měla na začátku.
Kolik drachem měla Řekyně na začátku?

Odpověď:

2.2 Z jedné řecké početnice: Antonis umí za 10 hodin naplnit hlínou 300 forem na cihly, Nikos ve stejném čase 200, Sotiris ve stejném čase 250. Nyní pracují Antonis, Nikos a Sotiris společně.

Kolik hodin potřebují, aby naplnili 300 forem?

Odpověď:

2.3 Z druhé početnice „Rechenung auff der Linihn“ (1522) od Adam Rieseho: Jeden obchodník koupí v Norimberku 200 liber pepře. Jedna libra stojí 9 šilinků. Přepravné do Lipska stojí (celkově) 4 zlaťáky 10 liber z Norimberku činí 11 liber v Lipsku. V Lipsku prodá jednu libru za 9 grošů a 6 feniků.

*Musíš vědět: Za dob Adama Rieseho mělo každé město jiné míry. A pro mince platilo:

1 zlaťák = 20 šilinků = 21grošů.
1 groš = 12 feniků.

a) Kolik stojí nákup a přeprava pepře? Výdaje uveď v šilincích.
Převeď na groše.

Odpověď:

b) Kolik lipských liber váží 200 liber z Norimberku?

Odpověď:

c)Kolik grošů zisku vynese prodej veškerého pepře v Lipsku?

Odpověď:

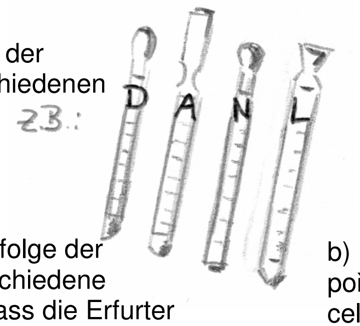
ADAM-RIES-Wettbewerb (3.Stufe, Teil 2)

3 **So viele Möglichkeiten!**

In der Mathematik spielt das Suchen nach „allen Möglichkeiten“ oft eine wichtige Rolle. Die folgende, nicht ganz wahre Geschichte stellt dir die Aufgabe, alle Möglichkeiten von Reihenfolgen und Auswahlen zu suchen.
Im Adam-Ries-Haus geistern die Kinder Adam, Eva, Abraham, Jacob, Isaac, Paul, Anna und Sybilla des großen Rechenmeisters herum.

3.1 Abraham und Anna tollen durch die Rechenschule und spielen mit etlichen Messlatten aus dem 16. Jahrhundert, nämlich mit der Annaberger (**A**), Dresdner (**D**), Leipziger (**L**) und Nürnberger (**N**) Elle. Nun müssen sie aufräumen und die Ellen nebeneinander platzieren (wobei die Reihenfolge immer von links nach rechts zu betrachten ist).

a) Die Annaberger soll an 2. Stelle liegen, die Nürnberger neben der Annaberger und die übrigen beiden beliebig. Schreibe alle verschiedenen Reihenfolgen auf. Nutze die in den Klammern angegebenen Kurzbezeichnungen.



Reihenfolgen:

b) Anna findet noch eine Erfurter (**E**) Elle. Diese ist in die Reihenfolge der bisherigen vier Ellen der Aufgabe a) einzuordnen. Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es insgesamt, wenn lediglich gefordert wird, dass die Erfurter nicht zwischen die Annaberger und Nürnberger gelegt wird.

Antwort:

c) Abraham findet die Antwort zur Aufgabe b) sehr leicht und fragt Anna, wie viele verschiedene Reihenfolgen der fünf Ellen es gäbe, wenn die Annaberger, die Nürnberger und die Erfurter in irgendeiner Reihenfolge, aber immer nebeneinander liegen, die Leipziger und Dresdner beliebig dazu gelegt werden.

Antwort:

3.2 Anna (**A**), Eva (**E**), Sybilla (**S**), Jacob (**J**) und Paul (**P**) wollen die Rechenschule **oder** das Museum erkunden. Dabei soll mindestens ein Kind in einer der beiden Räumlichkeiten sein.

Schreibe alle verschiedenen Möglichkeiten auf, welche(s) der fünf Kinder sich im Museum herumtreiben könnte(n) unter der zusätzlichen Bedingung, dass die Jungen zusammenbleiben. Nutze die in den Klammern stehenden Buchstaben.

Möglichkeiten:

Matematická soutěž ADAM RIES (3. stupeň, část 2)

3 **Tolik možností!**

V matematice hraje hledání „všech možností“ často důležitou roli. Následující, ne zcela pravdivý příběh ti klade za úkol vyhledat všechny možnosti pořadí a všechny možnosti výběru.
V domě Adama Rieseho straší děti velkého počtáře Adam, Eva, Abraham, Jakub, Isaac, Pavel, Anna a Sibylla.

3.1 Abraham a Anna dovádějí v počtářské škole a hrají si s některými měřidly z 16. století, totiž s annaberským (**A**), drážďanským (**D**), lipským (**L**) a norimberským (**N**) loktem. Nyní musí uklidit a umístit lokte vedle sebe (přičemž bereme v úvahu vždy pořadí zleva doprava).

a) Annaberský má ležet na druhém místě, norimberský vedle annaberského a zbývající dva libovolně. Napiš všechna různá pořadí. Využij zkratky uvedené v závorkách.

Pořadí:

b) Anna najde ještě erfurtský (**E**) loket.Tento loket musí být zařazen do pořadí dosavadních čtyř loktů úkolu a). Kolik různých pořadí existuje celkem, pokud se pouze vyžaduje, aby erfurtský neležel mezi annaberským a norimberským.

Odpověď:

c) Abrahamovi přijde odpověď na úkol b) velmi snadná a ptá se Anny, kolik různých pořadí pěti loktů by existovalo, kdyby annaberský, norimberský a erfurtský ležely v nějakém pořadí, ale vždy vedle sebe. Lipský a drážďanský mohou být libovolně přiloženy k ostatním.

Odpověď:

3.2 Anna (**A**), Eva (**E**), Sibylla (**S**), Jakub (**J**) a Pavel (**P**) chtějí prozkoumat počtářskou školu **nebo** muzeum. Přičemž má být alespoň jedno dítě v jedné z obou místností.

Napiš všechny různé možnosti, kdo z pěti dětí by se mohl potulovat v muzeu pod dodatečnou podmínkou, že chlapci zůstanou spolu. Využij písmena uvedená v závorkách.

Možnosti:

ADAM-RIES-Wettbewerb
Matematická soutěž ADAM RIES
2011

Oberfranken - Horni Franky
Sachsen– Sasko
Thüringen - Durynsko
Tschechien- Česká republika

Aufgabe 1 - Ùloha 1

ADAM-RIES-Wettbewerb (3.Stufe, Teil 1)
Aufgabe 1

<u>Hinweis:</u> Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Unter der Überschrift „Beschickung des Schmelztiegels“ stellt ADAM RIES im zweiten Rechenbuch einige Aufgaben zu Silbermischungen. Jede Mischung enthält einen Anteil von reinem Silber und einen Restanteil anderer Stoffe, z.B. Kupfer.

Zurzeit, als Adam Ries lebte, gab es zur Angabe der Masse nicht die bei uns jetzt üblichen Einheiten Kilogramm und Gramm, sondern die Kramergewichte **Mark**, **Lot** und **Quent**. Ries benutzte in seinem Rechenbuch folgende Umwandlungen:

1 Mark = 16 Lot, 1 Lot = 4 Quent.

Folgende Abkürzungen wurden von ihm verwendet:

Mark mk, Lot lt, Quent q.

Item ein Müntzmeister wil verschicken die marck ynn Tygel auff 6 lot 3 quenten/hat gekornts/ helt 12 lot ein quenten wieviel mus er kupffer zusetzen 20 marcken vnd 9 lothen/ Mach 6 lot 3 quenten vñ 12. lot ein quenten/zu quenten setz/Darnach also vñ thu wie oben.

27	22	Als dann sprich 27 lot des gekorn-
49	0	ten zu 12 loten ein quenten/müssen
27		haben 22 loth zusatz der do nichts

helt als kupffer /wievicl mus man zusetzen 20 marcken vnd 9 loten. Machs so kommen 16 marck 12 lot vnd zwey sieben vnd zwenzigk teyl

Ein Münzmeister hat 26 mk einer Silbermischung mit einem Anteil an reinem Silber von 20 mk und 5 lt.

a) Berechne, wie hoch der Anteil des reinen Silbers in einem Mark dieser Mischung ist. Gib das Ergebnis in Lot und Quent an.

b) Der Münzmeister verschmilzt diese Mischung mit 2 mk reinem Silber.

Ermittle, wie hoch der Anteil des reinen Silbers in einem Mark der Schmelze nun ist.

c) In einer Aufgabe von Ries (die Abb. zeigt diese Aufgabe im Original mit geänderten Zahlen) möchte der Münzmeister durch Verschmelzen mit Kupfer den Anteil des reinen Silbers je Mark dieser neuen Mischung auf 6 lt und 2 q verringern.

Ermittle, wie viel Kupfer er den 26 mk der ursprünglichen Silbermischung zusetzen muss.

Matematická soutěž ADAM RIES (3. stupeň, část 1)
Úloha 1

<u>Poznámka:</u> Postup řešení (včetně pomocných výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny odpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Pod názvem „Zavážení tavicí nádoby“ předkládá Adam Ries ve své druhé početnici několik úloh o slitinách stříbra.
Každá slitina obsahuje jeden díl ryzího stříbra a zbytek slitiny tvoří jiné látky, např. měď.

V době, kdy žil Adam Ries, neudávala se hmotnost v nyní užívaných jednotkách kilogram a gram, nýbrž v kupeckých jednotkách **mark**, **lot** a **cent**.

Ries použil ve své početnici následující převody:

1 mark = 16 lotů, 1 lot = 4 centy.

Používal následující zkratky:

mark=mk, lot=lt, cent=q.

Razič mincí (mincmistr) má 26 mk stříbrné slitiny, přičemž podíl ryzího stříbra v tomto množství slitiny činí 20 mk a 5 lt.

a) Vypočítej, jaká je hmotnost podílu ryzího stříbra v jednom marku této slitiny.
Uveď výsledek v lotech a quentech.

b) Mincmistr roztaví tuto slitinu ze zadání (26 mk) a přidá k ní další 2 mk ryzího stříbra.
Zjisti, jak vysoký je nyní podíl ryzího stříbra v jednom marku této taveniny.

c) V jedné Riesově úloze (obr. vpravo ukazuje originál této úlohy s pozměněnými čísly) by chtěl mincmistr roztavením s mědí snížit podíl ryzího stříbra pro každý mark této nové slitiny na 6 lt a 2q.

Zjisti kolik mědi musí přidat k původním 26 mk původní stříbrné slitiny.

ADAM-RIES-Wettbewerb
Matematická soutěž ADAM RIES
2011

Oberfranken - Horni Franky
Sachsen– Sasko
Thüringen - Durynsko
Tschechien- Česká republika

Aufgabe 2 - Ùloha 2

ADAM-RIES-Wettbewerb (3.Stufe, Teil 1)
Aufgabe 2

<u>Hinweis:</u> Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Und noch einmal geht es um sonderbare Eigenschaften natürlicher Zahlen.

Ist eine natürliche Zahl n ohne Rest durch eine von n verschiedene natürliche Zahl t teilbar, so nennt man t einen **echten Teiler** von n. So sind z.B. die Zahlen 1, 2 und 5 alle echten Teiler von 10.

a) Ermittle alle echten Teiler von 16.

Gib eine Zahl an, von der nur die Zahlen 1, 2, 4, 5 und 10 echte Teiler sind.

Eine Zahl, bei der die Summe aller echten Teiler gleich dieser Zahl selbst ist, heißt **vollkommene** Zahl.

b) Begründe, dass 28 eine vollkommene Zahl ist.

Untersuche, ob es einstellige Zahlen gibt, die vollkommen sind.

Eine Zahl, bei der die Summe aller echten Teiler kleiner als die Zahl selbst ist, heißt **defiziente** Zahl.

c) Weise nach, dass 8 eine defiziente Zahl ist.

Gib eine zweistellige Zahl an, die keine defiziente Zahl ist. Begründe!

d) Tom, der sich mit solchen Zahlen beschäftigt, stellt folgende Vermutungen auf:

V_1 : Alle Primzahlen sind defiziente Zahlen.

V_2 : Das Vielfache einer defizienten Zahl ist wieder eine defiziente Zahl.

Gib den Wahrheitswert der Aussagen an. Begründe!

Matematická soutěž ADAM RIES (3. stupeň, část 1)
Úloha 2

<u>Poznámka:</u> Postup řešení (včetně pomocných výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny odpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

A ještě jednou půjde o zvláštní vlastnosti přirozených čísel.

Je-li přirozené číslo n dělitelné beze zbytku od n různým přirozeným číslem t (t je různé od n), nazýváme číslo t **kladným dělitelem** n. Tak jsou např. čísla 1, 2 a 5 všechna kladnými děliteli čísla 10.

a) Zjisti všechny kladné dělitele čísla 16

Uveď číslo, pro které jsou jen čísla 1, 2, 4, 5 a 10 kladnými děliteli.

Číslo, které se rovná součtu všech svých kladných dělitelů, se nazývá **dokonalé** číslo.

b) Dokaž, že 28 je dokonalé číslo.

Zjisti, zda existují jednociferná čísla, která jsou dokonalá.

Číslo, u kterého je součet všech kladných dělitelů menší než číslo samotné, se jmenuje **deficientní** číslo.

c) Dokaž, že číslo 8 je deficientní číslo.

Uveď dvojciferné číslo, které není deficientním číslem. Zdůvodni!

d) Tom, který se o taková čísla zajímá, uvádí následující domněnky:

d_1: Všechna prvočísla jsou deficientní čísla.

d_2: Celočíselný násobek deficientního čísla je opět číslo deficientní.

Uveď pravdivost tvrzení. Zdůvodni!

ADAM-RIES-Wettbewerb
Matematická soutěž ADAM RIES
2011

Oberfranken - Horni Franky
Sachsen– Sasko
Thüringen - Durynsko
Tschechien- Česká republika

Aufgabe 3 - Ùloha 3

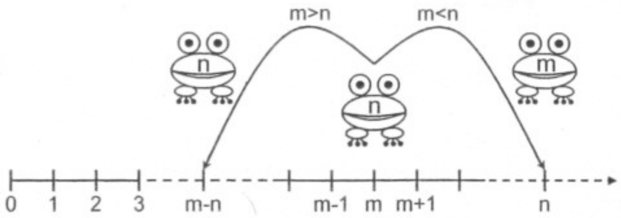
ADAM-RIES-Wettbewerb (3.Stufe, Teil 1)
Aufgabe 3

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Es gibt merkwürdige Tiere!

Wusstest du schon, dass es unter den vielen Arten von Fröschen auch (n,m) – Frösche $(n,m \in N)$ gibt?

Ein (n,m) – Frosch ist ein Frosch, der auf der Zahl m eines Zahlenstrahls sitzt und sich folgendermaßen bewegt:



Ist **m>n**, so macht der Frosch einen Sprung um n Einheiten nach links und landet folglich auf der Zahl $m-n$ und ist folglich ein $(n, m-n)$ – Frosch.

Ist **m<n**, springt der (n,m) – Frosch auf die Zahl n des Zahlenstrahls und wird zu einem (m,n) – Frosch (vgl. Abb.).

Diese Vorgehensweise wiederholt sich so oft, bis schließlich m=n gilt. Dann ist der Frosch glücklich und bleibt auf dieser Endzahl sitzen.

a) Ein $(12,39)$ – Frosch, der zu Beginn folglich auf der Zahl 39 sitzt, legt in den ersten vier Sprüngen folgenden Weg zurück:

Anzahl der Sprünge	0	1	2	3	4				
Bedingung	m>n	m>n	m>n	m<n	m>n				
n	12	12	12	12	3				
m	39	27	15	3	12				

Vervollständige den Weg dieses Frosches, bis er auf einer Endzahl sitzen bleibt.

b) Beschreibe den Weg eines $(37,11)$ – Frosches, bis er auf einer Endzahl sitzen bleibt und gib an, nach dem wievielten Sprung und auf welcher Endzahl er sitzen bleibt.

c) Begründe, dass ein $(3,27)$ – Frosch nur nach links springt. Gib die Endzahl an, auf der er schließlich sitzen bleibt.

d) Gib eine Zahl m an, von der ein $(16,m)$ – Frosch starten muss, damit er auf der Endzahl 4 sitzen bleibt.

Matematická soutěž ADAM RIES (3. stupeň, část 1)
Úloha 3

Poznámka: Postup řešení (včetně pomocných výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny odpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Podivná zvířata existují!

Věděli jste, že jsou mezi četnými druhy žab také (n,m) – žáby $(n,m \in N)$?

Jedna (n,m) – žába je žába, která sedí na čísle m číselné osy a pohybuje se následovně:

Je-li **m>n**, udělá žába skok o n jednotek doleva a přistane následně na čísle $m-n$ a stane se $(n, m-n)$ – žábou.

Je-li **m<n**, skočí (n,m) – žába na číslo n číselné osy a stane se (m,n) – žábou (viz. obr.).

Tento postup se opakuje tolikrát, až nakonec bude platit m = n. Pak je žába šťastná a zůstane na tomto konečném čísle sedět.

a) Jedna $(12,39)$ – žába, která tedy na začátku sedí na čísle 39, urazí v prvních čtyřech skocích následující cestu:

Počet skoků	0	1	2	3	4				
Podmínka	m>n	m>n	m>n	m<n	m>n				
n	12	12	12	12	3				
m	39	27	15	3	12				

Zapiš další skoky této žáby, dokud nezůstane sedět na konečném čísle.

b) Popiš cestu $(37,11)$ – žáby, dokud nezůstane sedět na konečném čísle a uveď po kolika skocích a na kterém konečném čísle zůstane sedět.

c) Zdůvodni, že jedna $(3,27)$ – žába skáče pouze doleva. Uveď konečné číslo, na kterém nakonec zůstane sedět.

d) Uveď číslo m, z kterého musí startovat $(16,m)$ – žába, aby zůstala sedět na konečném čísle 4.

ADAM-RIES-Wettbewerb
Matematická soutěž ADAM RIES
2012

Oberfranken – Horni Franky
Sachsen – Sasko
Thüringen – Durynsko
Tschechien – Česká republika

Aufgabe 1 – Úloha 1

Aufgabe 1

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Neben seinen Rechenbüchern hat Adam Ries auch ein großes Mathematikbuch geschrieben, die **Coß**. Darin stellt er eine Aufgabe zu folgendem Problem:

Einer hat ein Fass mit einem bestimmten Fassungsvermögen. Dieses Fass hat zum Entleeren drei Hähne, einen großen, einen mittleren und einen kleinen.

a) Für diese Teilaufgabe nehmen wir an, dass das Fassungsvermögen 300 Liter beträgt und durch den großen Hahn pro Stunde 90 Liter, durch den mittleren 70 und durch den kleinen 40 fließen.

   (1) Nach welcher Zeit wäre das Fass leer, wenn alle Hähne gleichzeitig geöffnet würden?

   (2) Zum Entleeren des Fasses werden nun die Hähne nacheinander unterschiedlich lange, jeder aber das Vielfache einer Stunde (oder gar nicht) geöffnet. Betrachtet wird immer nur die Zeit, in der auch Wasser fließt.

   Untersuche, ob es möglich ist, die Dauer der Öffnung jedes Hahnes eindeutig zu ermitteln, wenn das Fass in weniger als 5 Stunden leer sein soll.

b) Ries stellt in seiner Aufgabe für ein anderes Fass folgende Frage:

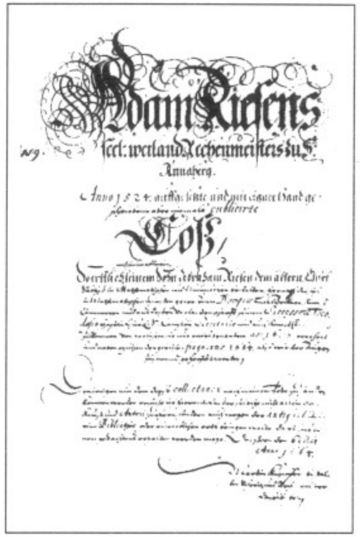
   So ich nur den großen Hahn öffne, so läuft es in einer Stunde aus; so ich nur den mittleren Hahn öffne, so läuft es in drei Stunden aus; so ich nur den kleinen Hahn öffne, so läuft es in sechs Stunden aus.
   Nun ist die Frage, nach welcher Zeit ist es ausgelaufen, wenn man alle drei Hähne zugleich öffnet.

   Löse diese Aufgabe.

Úloha 1:

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Mimo svých početnic napsal Adam Ries také jednu velkou knihu o matematice, nazvanou **Coß.** V ní pokládá jednu úlohu k následujícímu problému:



Jeden má sud s určitým objemem. Tento sud má k vyprázdnění tři kohoutky, jeden velký, jeden střední a jeden malý.

a) Pro tuto dílčí úlohu předpokládejme, že objem sudu je 300 litrů a skrz velký kohoutek proteče za hodinu 90, skrz střední 70 a skrz malý 40 litrů.

   (1) Po jaké době by byl sud prázdný, kdyby se otevřely všechny kohoutky najednou?

   (2) K vyprázdnění sudu jsou nyní otevírány kohoutky postupně různě dlouho, každý ale několikanásobek jedné hodiny (nebo vůbec). Bereme v úvahu pouze čas, ve kterém také teče voda.

   Zjisti, zda je možné, dobu otevření každého kohoutku jednoznačně určit, pokud se sud vyprázdnil za méně než 5 hodin.

b) Ries pokládá ve své úloze pro jiný sud následující otázku:
   Pokud otevřu pouze největší kohoutek, vyteče za jednu hodinu. Pokud otevřu pouze střední kohoutek, vyteče za tři hodiny. Pokud otevřu pouze malý kohoutek, vyteče za šest hodin.
   Nyní je otázkou, za jaký čas sud vyteče, otevřou-li se všechny tři kohoutky najednou.

   Vyřeš tuto úlohu.

ADAM-RIES-Wettbewerb
Matematická soutěž ADAM RIES
2012

Oberfranken – Horni Franky
Sachsen – Sasko
Thüringen – Durynsko
Tschechien – Česká republika

Aufgabe 2 – Úloha 2

Aufgabe 2:

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Einheitswürfel (EW) sind Würfel mit einer Seitenlänge von einer Längeneinheit (LE).

Solche Würfel werden so aneinander gefügt, dass je zwei benachbarte Würfel genau ein Einheitsquadrat als gemeinsame Fläche haben.
Durch Zusammenfügen von mehreren solchen Einheitswürfeln entstehen Polywürfel. Bei 2 EW entsteht ein Würfelzwilling.
Bei 3 EW entsteht ein Würfeldrilling usw.
Abb. 1 zeigt eine Auswahl verschiedener Würfeldrillinge und -vierlinge.

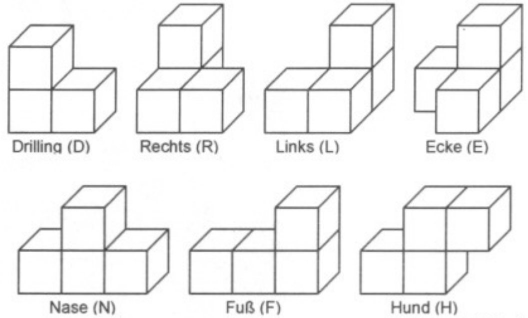


Abb. 1

a) Gib die Anzahl aller verschiedenen Würfelvierlinge an (Zwei Polywürfel heißen voneinander verschieden, wenn sie nicht durch Drehung auseinander hervorgegangen sind).
Begründe!

Abb. 2 zeigt einen Quader aus 4 Würfelvierlingen.
Welcher Würfelvierling ist der schraffierte? Begründe!

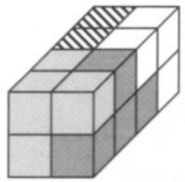


Abb. 2

b) Im Jahr 1936 entwarf der Däne Piet Hein den Somawürfel. Ausgangspunkt seiner Überlegungen waren alle 12 Polywürfel, die sich aus 1, 2, 3 bzw. 4 EW bilden lassen. Aus diesen wählte er die in Abb. 1 dargestellten 7 Polywürfel aus.
Aus diesen 7 Polywürfeln lässt sich ein Würfel aus 27 EW zusammensetzen. Die Schichtbaupläne der Abb. 3 zeigen die Draufsicht der drei Ebenen eines Somawürfels.

N	N	N
F	F	F
F	H	H

untere Ebene

	N	
		L
H	H	L

mittlere Ebene

	L	L

obere Ebene

Abb. 3

Zeichne diese Pläne ab und vervollständige sie, indem du in die freien Felder den jeweiligen Buchstaben des entsprechenden Somateils schreibst.

c) Um Teile des Somawürfels zu verpacken, werden quaderförmige Kartons angefertigt. Der kleinste Karton, um damit ein beliebiges Teil verpacken zu können, hat die Maße $3*2*2$ (Länge $*$ Breite $*$ Höhe). Mit einem Teil wird aber dieser Karton noch nicht vollständig ausgefüllt.

Untersuche, ob in so einen $3*2*2$- Karton drei verschiedene, beliebig ausgewählte Somawürfelteile passen.

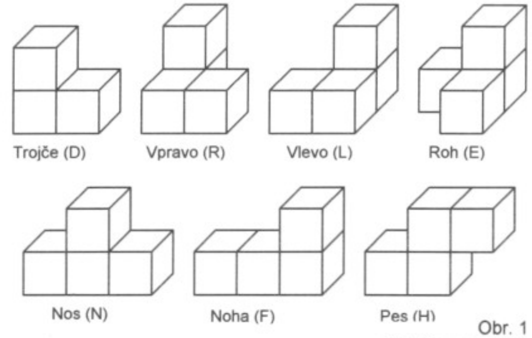
Können vier verschiedene, beliebig ausgewählte Somawürfelteile in einem $x*y*z$- Karton (außer dem in Aufgabe a) dargestellten) verpackt werden? Begründe!

Úloha 2:

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Jednotkové krychle (JK) jsou krychle o délce strany jedné jednotkové délky (JD).

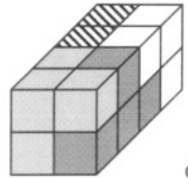
Takové jsou k sobě přikládány tak, že dvě sousední krychle mají jako společnou plochu právě jeden jednotkový čtverec.
Skládáním více takových jednotkových krychlí vznikají mnohokrychle: při 2JK dvojče krychlí, při 3 JK trojče krychlí, atd.
Obr. 1 ukazuje výběr různých krychlových trojčat a čtyřčat.



Obr. 1

a) Uveď počet všech různých čtyřčat krychlí (dvě mnohokrychle jsou různé, pokud nevznikly otočením předchozích mnohokrychlí). Zdůvodni!

Obr. 2 ukazuje kvádr ze 4 čtyřčat krychlí. Které čtyřče krychlí je šrafované? Zdůvodni!.


Obr. 2

b) V roce 1936 navrhl Dán Piet Hein „Soma" kostku. Výchozím bodem jeho myšlenek bylo všech 12 mnohokrychlí, které se dají vytvořit z 1, 2, 3 nebo 4 JK. Z nich vybral 7 mnohokrychlí zobrazených na obr. 1.
Těmito 7 mnohokrychlemi se nechá složit kostka z 27 JK. Stavební plány vrstev ukazují pohledy shora na tři roviny kostky.

N	N	N
F	F	F
F	H	H

spodní rovina

	N	
		L
H	H	L

střední rovina

	L	L

horní rovina

Obkresli tyto plány a doplň je tak, že do prázdných polí zapíšeš příslušné písmeno odpovídajícího dílu „Soma" kostky.

c) K zabalení dílů „Soma" kostky se zhotovují krabice kvádrového tvaru. Nejmenší krabice, do které lze zabalit libovolný díl, má rozměry $3-2-2$ (délka – šířka – výška). Jedním dílem se ale krabice zcela nezaplní.

Zjisti, zda se do takové krabice $3-2-2$ vejdou tři různé, libovolně zvolené díly „Soma" kostky.

Mohou být zabaleny čtyři různé libovolně zvolené díly „Soma" kostky v krabici $x-y-z$ (kromě varianty zobrazené v úloze a))?
Zdůvodni!

ADAM-RIES-Wettbewerb
Matematická soutěž ADAM RIES
2012

Oberfranken – Horni Franky
Sachsen – Sasko
Thüringen – Durynsko
Tschechien – Česká republika

Aufgabe 3 – Úloha 3

Aufgabe 3:

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Kennst du die Geschichte von den Heinzelmännchen zu Köln?

Sie kamen jede Nacht in die Häuser und erledigten dort alle am Tag liegen gebliebenen Arbeiten. Niemand hat sie dabei jemals beobachten können. Doch die neugierige Frau des Schneiders wollte sie sehen und streute eines Nachts Erbsen auf die Treppe.
Und so rutschten die Heinzelmännchen aus, fielen hin, glitten die Stufen hinab, ...

3.1 Bei einer Treppe führen von einem Podest aus 10 Stufen nach unten, auf denen viele Erbsen liegen.
Jede Erbse, die auf eine Stufe rollt, setzt auf der nächsten Stufe eine weitere Erbse in Bewegung. Sie bleibt aber auf der übernächsten Stufe liegen, nachdem sie **auch dort** noch eine Erbse in Bewegung gesetzt hat.
Auf der ersten Stufe beginnt der Vorgang mit einer rollenden Erbse.

a) Gib an, wie viele Erbsen auf der 1., 2., und 3. Stufe ankommen.

b) Ermittle, wie viele Erbsen auf der 10. Stufe ankommen.

3.2 Bei einer anderen Treppe schließen führen von einem Podest aus Stufen nach unten, auf denen viele Erbsen liegen.
Jede Erbse, die auf eine Stufe rollt, setzt auf der nächsten Stufe diesmal zwei weitere Erbsen in Bewegung. Sie bleiben aber auf der übernächsten Stufe liegen, **ohne** jedoch dort noch einmal Erbsen in Bewegung zu setzen.
Auf der ersten Stufe beginnt der Vorgang mit einer rollenden Erbse.

c) Ermittle, wie viele Erbsen bei dieser Treppe auf der dritten Stufe ankommen.

d) Auf der letzten Stufe kommen 192 Erbsen an.
Gib an, wie viele Stufen diese Treppe hat.

Úloha 3:

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Znáš pohádku o skřítcích od Kolína?

Přicházeli každou noc do domů a vyřídili tam všechny práce, které se za den nashromáždily. Nikdo je při tom nikdy nezpozoroval. Ale zvědavá žena krejčího je chtěla vidět a jedné noci nasypala hrách na schody.
A tak skřítkové uklouzli, upadli, sklouzli po schodech dolů,...

3.1 U jednoho schodiště navazuje na odpočívadlo 10 schodů, na kterých leží hodně hrášku.
Každý hrášek, který se skutálí na jeden schod, dá na dalším schodě do pohybu další hrášek. Na přespříštím schodě ale zůstane ležet, poté co i tam uvedl do pohybu ještě jeden hrášek.
Na prvním schodě začíná proces s jedním kutálejícím se hráškem.

a) Uveď, kolik hrášků dorazí na 1., 2., a 3. schod.

b) Zjisti, kolik hrášků dorazí na 10. schod.

3.2 U jiného schodiště navazují opět na odpočívadlo schody, na kterých leží mnoho hrášků.
Každý hrášek, který se skutálí na jeden schod, dá na dalším schodě do pohybu tentokrát dva další hrášky. Ty ale zůstanou ležet na přespříštím schodě, bez toho aby tam ještě jednou daly hrášky do pohybu.
Na prvním schodě začíná proces s jedním kutálejícím se hráškem.

c) Zjisti, kolik hrášků u tohoto schodiště dopadne na třetí schod.

d) Na poslední schod dorazí 192 hrášků.
Uveď, kolik schodů má toto schodiště.

ADAM-RIES-
Wettbewerb
(3. Stufe)

Matematická soutěž
ADAMA RIESE
(3. stupeň)

2013

Oberfranken – Horni Franky
Sachsen – Sasko
Thüringen – Durynsko
Tschechien – Česká republika

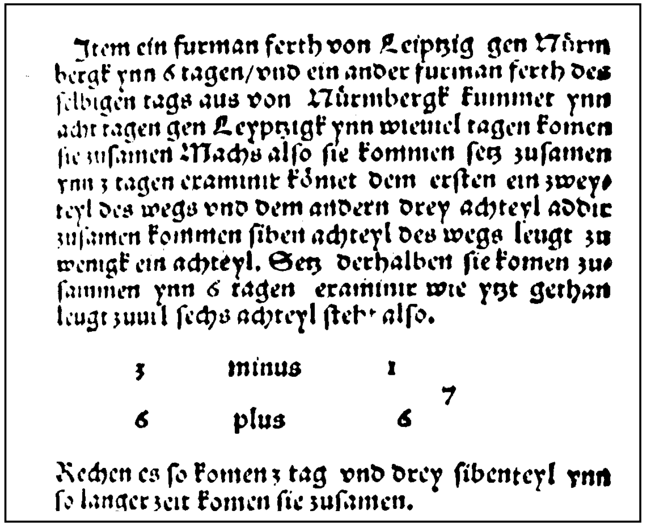
Aufgabe 1 – Úloha 1

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.
Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výroky musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Aufgabe 1. In seinem zweiten Rechenbuch stellt ADAM RIES auch Bewegungsaufgaben. Die nebenstehende Abbildung zeigt eine dieser Aufgaben im Originaltext.

In unserem heutigen Sprachgebrauch würde diese Aufgabe (mit geänderten Zahlen) folgendermaßen lauten:

Ein Fuhrmann A fährt von Leipzig nach Nürnberg in 6 Tagen. Ein Fuhrmann B fährt zum selben Zeitpunkt in Nürnberg ab und kommt nach einigen Tagen in Leipzig an.



Item ein furman ferth von Leipzig gen Nürmbergk ynn 6 tagen/vnd ein ander furman ferth des ſelbigen tags aus von Nürmbergk kummet ynn acht tagen gen Leypzigk ynn wieuiel tagen komen ſie zuſamen Machs alſo ſie kommen ſetz zuſamen ynn 3 tagen examinir kömet dem erſten ein zweyteyl des wegs vnd dem andern drey achteyl addir zuſamen kommen ſiben achteyl des wegs leugt zu wenigk ein achteyl. Setz derhalben ſie komen zuſammen ynn 6 tagen examinir wie yzt gethan leugt zuuil ſechs achteyl ſteht alſo.

3	minus	1	
			7
6	plus	6	

Rechen es ſo komen 3 tag vnd drey ſibenteyl ynn ſo langer zeit komen ſie zuſamen.

Úloha 1. Ve své druhé početnici uvádí ADAM RIES také pohybové úlohy. Vedlejší obrázek ukazuje jednu z úloh v originále.

V dnes užívaném jazyce by tato úloha (s pozměněnými čísly) zněla takto:

Vozka A jede z Lipska do Norimberku 6 dní.
Vozka B vyjíždí ve stejnou dobu z Norimberku a do Lipska dojede po několika dnech.

Die Entfernung zwischen Leipzig und Nürnberg beträgt 312 km.

(Wir setzen voraus, dass die Fuhrleute denselben Weg zwischen Leipzig und Nürnberg benutzen und mit gleichbleibender Geschwindigkeit fahren.)

Löse folgende Aufgaben.

a) In dieser Teilaufgabe wird angenommen, dass Fuhrmann B nach 8 Tagen in Leipzig ankommt.
Wie groß ist die Entfernung zwischen den beiden Fuhrleuten nach 3 Tagen?

b) Wie viele Tage benötigt Fuhrmann B von Nürnberg nach Leipzig, wenn sich beide Fuhrleute nach 2 Tagen treffen?

c) Ries formuliert in seinem Buch folgende Frage:
Fuhrmann B kommt nach 10 Tagen in Leipzig an. Nach welcher Reisezeit haben sich beide Fuhrleute getroffen?

Löse diese Aufgabe.

Vzdálenost mezi Lipskem a Norimberkem činí 312 km.

(Předpokládejme, že vozkové zvolí stejnou cestu mezi Lipskem a Norimberkem a pojedou stálou rychlostí.)

Vyřeš následující úlohy.

a) V této části úlohy se předpokládá, že vozka B dojede do Lipska za 8 dní.
Jak velká je vzdálenost mezi oběma vozky po 3 dnech?

b) Kolik dní potřebuje vozka B z Norimberku do Lipska, pokud se oba vozkové setkají po 2 dnech?

c) Ries pokládá ve své knize následující otázku:
Vozka B dojede do Lipska za 10 dní. Po jaké době cesty se oba vozkové setkajíl?

Vyřeš tuto úlohu.

ADAM-RIES-
Wettbewerb
(3. Stufe)

Matematická soutěž
ADAMA RIESE
(3. stupeň)

2013

Oberfranken – Horni Franky
Sachsen – Sasko
Thüringen – Durynsko
Tschechien – Česká republika

Aufgabe 2 – Úloha 2

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.
Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výroky musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Aufgabe 2. Ein n x n Schachbrett besteht aus n waagerechten Zeilen und n senkrechten Spalten.

Die Dame ist beim Schach die mächtigste Figur. Sie kann von ihrem Standpunkt aus alle Felder in der jeweiligen Zeile, der Spalte und den beiden Diagonalen erreichen.

Zur besseren Orientierung bezeichnen wir wie beim Schach üblich die Zeilen mit Zahlen, die Spalten mit kleinen Buchstaben und die Felder mit a1 … .

Abb.1 zeigt ein 5 x 5 Schachbrett mit einer Dame (★) auf Feld b4 und allen durchgestrichenen Feldern, die sie von Ihrem Standpunkt aus erreichen kann.

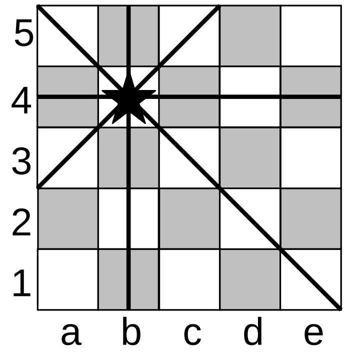


Abb. 1 Obr.1

Die Aufgabe besteht nun darin, auf einem $n \times n$ Schachbrett n Damen so aufzustellen, dass keine der Damen auf einem Feld steht, dass von einer anderen Dame erreicht werden kann.

a) Begründe, dass die Aufgabe für n = 2 nicht lösbar ist.

b) Ermittle die kleinste Zahl n, für die diese Aufgabe lösbar ist und gib für diese Zahl n eine solche Aufstellung an, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

c) Markus, der sich mit diesem Problem beschäftigt, knobelt an einem 5 x 5 Schachbrett. Er hat bereits zwei der fünf Damen auf die Felder a3 und e4 aufgestellt (Abb. 2).

Zeige dass es Markus nicht möglich ist, die Aufgabe für 5 Damen mit einem solchen Beginn zu lösen. Du kannst die Darstellung auf dem Arbeitsblatt nutzen.

Gib eine vollständige Aufstellung für 5 Damen auf einem 5 x 5 Schachbrett an, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Du kannst die Darstellung auf dem Arbeitsblatt nutzen.

d) Ermittle für n = 5 alle verschiedenen Aufstellungen der geforderten Art und zeige, dass es keine weiteren geben kann. Du kannst die Darstellungen auf dem Arbeitsblatt nutzen.

(Zwei Aufstellungen sind verschieden, wenn sie nicht durch Drehung oder Spiegelung auseinander hervorgehen.)

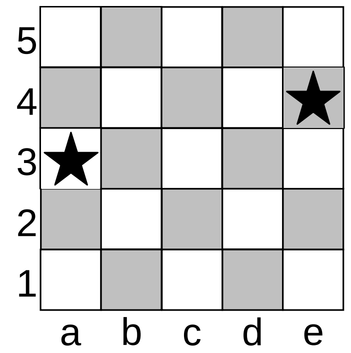


Abb. 2 Obr. 2

Úloha 2. Šachovnice n x n sestává z n vodorovných řádků a n svislých sloupců.

Dáma je při šachu nejmocnější figurkou. Může se ze svého stanoviště dostat na všechna políčka daného řádku, sloupce a obou úhlopříček.

Pro lepší orientaci označíme řádky čísly, sloupce malými písmeny a pole, např. a1, …, jak to bývá při šachu zvykem.

Obr. 1 ukazuje šachovnici 5 x 5 s dámou (★) na poli b4 a se všemi proškrtnutými poli, na které se může ze svého stanoviště dostat.

Úkol nyní spočívá v tom, rozestavit na n x n šachovnici n dam tak, aby žádná z dam nestála na políčku, na které se může dostat jiná dáma.

a) Zdůvodni, že úkol není řešitelný pro n = 2.

b) Zjisti nejmenší číslo n, pro které je tento úkol řešitelný a uveď pro toto číslo n takové rozestavení, které splňuje podmínky úlohy.

c) Markus, který se tímto problémem zabývá, přemýšlí nad šachovnicí 5 x 5. Postavil už dvě z pěti dam na pole a3 a e4 (zobrazeno na obr. 2).

Dokaž, že Markus nemůže vyřešit úlohu pro 5 dam s takovýmto začátkem. Můžeš využít zobrazení na pracovním listu.

Uveď úplné rozestavení pro 5 dam na šachovnici 5 x 5, které by splňovalo podmínky úlohy. Můžeš využít zobrazení na pracovním listu.

d) Zjisti pro n = 5 všechna různá rozestavení požadovaného typu a ukaž, že neexistují žádná další. Můžeš využít zobrazení na pracovním listu.

(Dvě rozestavení jsou různá, pokud nevznikne jedno z druhého otočením nebo zrcadlením.)

ADAM-RIES-
Wettbewerb
(3. Stufe)

Matematická soutěž
ADAMA RIESE
(3. stupeň)

2013

Oberfranken – Horni Franky
Sachsen – Sasko
Thüringen – Durynsko
Tschechien – Česká republika

Aufgabe 3 – Úloha 3

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.
Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výroky musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Aufgabe 3. In unserem Sonnensystem, zwischen den Planeten Mars und Jupiter, gibt es einen Kleinplaneten mit den Namen „Adamries“. Auf diesem, so erzählt man sich, gibt es Automaten, die sprechen können. Auf jede Frage geben sie eine Antwort. Wenn die Automaten einwandfrei funktionieren, geben sie **nur richtige** Antworten, sind sie aber defekt, dann geben sie **nur falsche** Antworten.

In einem Raum mit fünf Automaten wurden auf die Frage „Welche Automaten sind defekt?“ folgende Antworten gegeben:

Automat 1: „Mindestens zwei von den fünf Automaten funktionieren einwandfrei.“
Automat 2: „Mindestens drei von den fünf Automaten funktionieren einwandfrei.“
Automat 3: „Ich funktioniere einwandfrei.“
Automat 4: „Mindestens zwei von den fünf Automaten sind defekt.“
Automat 5: „Mindestens drei von den fünf Automaten sind defekt.“

Durch ein gerissenes Kabel konnte man sofort erkennen, dass der Automat 5 defekt ist, also eine falsche Antwort gegeben hatte.

a) Begründe, dass die Annahme, „alle fünf Automaten sind defekt“ zu einem Widerspruch zu den Antworten der Automaten führt.

b) Zeige, dass es durch die Antworten der Automaten eindeutig möglich ist, die Anzahl der defekten Automaten zu ermitteln. Gib die Anzahl und die Nummern der defekten Automaten an.

c) In einem anderen Raum mit ebenfalls fünf Automaten wurde die gleiche Frage gestellt. Die Automaten 1, 2, 4 und 5 gaben die gleiche Antwort wie die im vorhergehenden Raum. Automat 3 antwortete: „Ich bin defekt.“

Untersuche, ob diese Antworten den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Úloha 3. V naší sluneční soustavě, mezi planetami Mars a Jupiter, se nachází planetka jménem „Adamries“. Říká se, že na této planetce existují automaty, které umí mluvit. Na každou otázku dají odpověď. Pokud automaty fungují bezchybně, dávají **jen správné** odpovědi, jsou-li ale defektní, pak dávají **jen chybné** odpovědi.

V místnosti s pěti automaty zazněly na otázku: „Které automaty jsou defektní?“ následující odpovědi:

automat 1: „Nejméně dva z těchto pěti automatů fungují bezchybně.“
automat 2: „Nejméně tři z těchto pěti automatů fungují bezchybně.“
automat 3: „Já funguji bezchybně.“
automat 4: „Nejméně dva z těchto pěti automatů jsou defektní.“
automat 5: „Nejméně tři z těchto pěti automatů jsou defektní.“

Díky přetrženému kabelu se dalo ihned poznat, že automat 5 je defektní, tedy dal chybnou odpověď.

a) Zdůvodni, že domněnka: „všech pět automatů je defektních“ bude v rozporu s odpověďmi automatů.

b) Ukaž, že je možné z výše uvedených odpovědí automatů jednoznačně určit počet defektních automatů. Uveď počet a čísla defektních automatů.

c) V další místnosti také s pěti automaty byla položena stejná otázka. Automaty 1, 2, 4 a 5 odpověděly stejně jako ty v předcházející místnosti. Automat 3 odpověděl: „Já jsem defektní.“

Prověř, zda tyto odpovědi vyhovují podmínkám úlohy.

21. Vierländerwettbewerb 2014
21. soutěž čtyř zemí 2014

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 1 – Úloha 1

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Zu der Zeit, als Adam Ries lebte, waren die Preise von Backwaren viele Jahre unverändert. Weil aber das Getreide je nach Ernte unterschiedlich teuer sein konnte, musste das Brotgewicht an den Getreidepreis angepasst werden. Um das Berechnen der Preise zu vereinfachen, gab Adam Ries in seiner „Annaberger Brotordnung“ (1533) Hilfestellung durch Tabellen an.

Damals gab man die Massen der Waren unter anderem mit Pfund, Lot und Quent an.
Es galt: 1 Pfund = 32 Lot, 1 Lot = 4 Quent.
Man bezahlte mit Gulden, Groschen und Pfennigen.
Es galt: 1 Gulden = 21 Groschen, 1 Groschen = 12 Pfennige.

	Lot	Quent	Teil vom Pfund	Gulden	Groschen	Pfennige
	32		1	4	12	0
	16		2	2	6	0
→	8		4	1	3	0
	4		8	0	12	0
	2		16	0	6	0
	1		32	0	3	0
		2	64	?	?	?
		1	128	0	0	9

Adam Ries rechnet die Preise vor, wenn 1 Pfund 4 Gulden und 12 Groschen kostet. Er erklärt die Tabelle für die markierte Spalte beispielhaft so: 8 Lot sind der 4. Teil von einem Pfund, deshalb kosten 8 Lot 1 Gulden und 3 Groschen.

a) Untersuche, ob der angegebene Preis von 12 Groschen für 4 Lot korrekt ist.
b) Ersetze in der Tabelle die Fragezeichen und gib an, wieviel Groschen und Pfennige 2 Quent kosten.

Mit Hilfe dieser Tabelle kann man den Preis für jede Masse ohne Multiplikation leicht errechnen. Will man beispielsweise den Preis für 9 Lot ermitteln, so zerlegt man die Zahl 9 in die Summanden 8 + 1 und addiert die Preise der 2 Teilmassen.

c) Gib den Preis für 15 Lot so an, dass die Anzahlen von Groschen und Pfennigen möglichst klein sind.

d) Jemand hat 13 Gulden. Berechne, welche Masse er dafür kaufen kann.

V době, kdy žil Adam Ries, byly ceny pečiva mnoho let neměnné. Protože ale obilí mohlo být různě drahé v závislosti na úrodě, musela být hmotnost chleba přizpůsobována ceně obilí. Aby zjednodušil výpočty cen, uvádí Adam Ries ve svém „Annaberském chlebovém řádě“ (1533) tabulky jako pomůcku k výpočtu.

Tenkrát se hmotnosti zboží udávaly mino jiné jednotkami libra, lot a kvint.
Platilo, že: 1 libra = 32 lotů, 1 lot = 4 kvint.
Platilo se zlaťáky, groši a feniky.
Platilo, že: 1 zlaťák = 21 grošů, 1 groš = 12 feniků.

	lot	kvint	zlomek libry	zlaťáky	groše	feniky
	32		1	4	12	0
	16		2	2	6	0
→	8		4	1	3	0
	4		8	0	12	0
	2		16	0	6	0
	1		32	0	3	0
		2	64	?	?	?
		1	128	0	0	9

Adam Ries propočítává ceny pro případ, kdy 1 libra stojí 4 zlaťáky a 12 grošů. Pro případ označeného řádku vysvětluje tabulku následovně: 8 lotů je čtvrtina z jedné libry, a proto stojí 8 lotů 1 zlaťák a 3 groše.

a) Zjisti, zda uvedená cena 12 grošů za 4 loty je správná.

b) Nahraď v tabulce otazníky a uveď, kolik grošů a feniků stojí 2 kvinty.

S pomocí této tabulky se může snadno vypočítat cena pro každou hmotnost bez užití násobení. Chceme-li například zjistit cenu za 9 lotů, rozložíme číslo 9 na sčítance 8 + 1 a sečteme ceny 2 dílčích hmotností.

c) Uveď cenu za 15 lotů tak, že počet grošů a feniků bude co možná nejmenší.

d) Někdo má 13 zlaťáků. Vypočítej, jakou hmotnost za to může koupit.

21. Vierländerwettbewerb 2014
21. soutěž čtyř zemí 2014

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

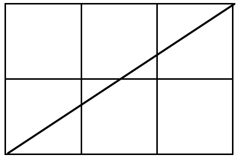
Aufgabe 2 – Úloha 2

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

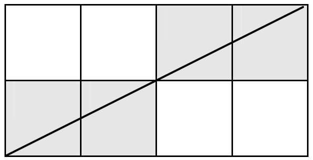
Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

In der nebenstehenden Abbildung sind 3 Quadrate in der Breite und 2 Quadrate in der Höhe angeordnet. Wir nennen eine solche Figur 3 x 2 – Rechteck.

Die eingezeichnete Diagonale (von der linken unteren Ecke zur rechten oberen Ecke) läuft durch das Innere von 4 Quadraten. Wir bezeichnen dies mit A(3;2) = 4, d.h. die Anzahl der Quadrate eines 3 x 2 – Rechtecks, durch deren Innern die Diagonale verläuft, beträgt 4.



Verläuft die Diagonale durch einen gemeinsamen Eckpunkt der Teilflächen, so verläuft die Diagonale durch das Innere der grauen Teilflächen, nicht aber durch das Innere der weißen Flächen. Es gilt also A(4;2) = 4.



a) Ermittle A(3;4) und A(7;6).

b) Es sei m eine Zahl größer als 2. Ermittle eine Berechnungsvorschrift für $A(m\ ;\ m+1)$.

c) Zeige, dass es keine Zahl n gibt, so dass $A(2 \cdot n\ ;\ n) = 13$ gilt.

Na vedlejším obrázku jsou uspořádány 3 čtverce na šířku a 2 čtverce na výšku. Takovýto obrazec nazýváme pravoúhelník 3 x 2.

Zakreslená úhlopříčka (z levého spodního do pravého horního rohu) prochází vnitřkem 4 čtverců. Označujeme toto jako A(3;2) = 4, to znamená, že počet čtverců pravoúhelníku 3 x 2, jejichž vnitřkem prochází úhlopříčka, se rovná 4.

Prochází-li úhlopříčka společným rohovým bodem dílčích ploch, tak úhlopříčka protíná vnitřek šedých dílčích ploch, neprotíná ale vnitřek bílých ploch. Platí tedy A(4;2) = 4.

a) Zjisti A(3;4) a A(7;6).

b) Nechť m je číslo větší než 2. Zjisti předpis pro výpočet $A(m\ ;\ m+1)$.

c) Dokaž, že neexistuje žádné číslo n, pro které by platilo $A(2 \cdot n; n) = 13$.

21. Vierländerwettbewerb 2014
21. soutěž čtyř zemí 2014

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 3 – Úloha 3

<u>Hinweis:</u> Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

<u>Poznámka:</u> Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Bei dieser Aufgabe spielen wir gedanklich mit Münzen. Jede Münze hat zwei Seiten. Die Seite, die den Wert der Münze anzeigt, wird mit Zahl (Z) bezeichnet. Die andere Seite wird mit Wappen (W) bezeichnet.

Als Ausgangsposition eines Spiels liegt eine gewisse Anzahl Münzen in einer Reihe nebeneinander. Ein Spielzug besteht darin, zwei direkt nebeneinander liegende Münzen gleichzeitig umzudrehen, so dass statt W danach Z oben liegt bzw. statt Z danach W. Das Spiel kann nach jedem Zug beendet werden.

Auf dem Tisch liegen 3 Münzen nebeneinander. Es ist W – Z – W sichtbar.

a) Gib eine Folge von Spielzügen an, so dass zum Spielende Z – Z – Z zu sehen ist.

b) Ist es möglich, dass das Spiel mit W – W – W endet? Begründe deine Antwort

Nun liegen auf dem Tisch 4 Münzen nebeneinander.

c) Zwei Münzen zeigen mit Z nach oben, die zwei anderen Münzen zeigen mit W nach oben. Untersuche, ob es unabhängig von der konkreten Lage von Z und W stets möglich ist, das Spiel mit W-W-W-W zu beenden?

d) Nun ist in der Ausgangsstellung nur einmal Z zu sehen und entsprechend dreimal W. Erkläre, warum es nicht möglich ist, einen Spielstand zu erreichen, bei dem viermal W oder viermal Z zu sehen ist.

V této úloze si představme, že si hrajeme s mincemi. Každá mince má dvě strany. Stranu, která označuje číselnou hodnotu mince, značíme písmenem Z. Druhou stranu značíme písmenem W.

Při výchozí pozici hry leží v jedné řadě vedle sebe určitý počet mincí. Jeden herní tah spočívá v tom, že se současně otočí dvě přímo vedle sebe ležící mince tak, že místo W bude poté nahoře Z nebo místo Z bude W. Hra může být po každém tahu ukončena.

Na stole leží vedle sebe 3 mince. Je viditelné W – Z – W.

a) Uveď postup takových herních tahů, aby na konci hry bylo vidět Z – Z – Z.

b) Je možné, aby hra končila výsledkem W – W – W? Zdůvodni svou odpověď.

Nyní leží na stole vedle sebe 4 mince.

c) Dvě mince mají nahoře Z, další dvě mince mají nahoře W. Zjisti, zda je vždy možné, nezávisle na konkrétní poloze Z a W, ukončit hru s výsledkem W-W-W-W?

d) Nyní je ve výchozí pozici jen jednou viditelné Z a tedy třikrát viditelné W. Vysvětli, proč není možné dosáhnout herního stavu, při kterém by bylo vidět čtyřikrát W nebo čtyřikrát Z.

22. Vierländerwettbewerb 2015
22. soutěž čtyř zemí 2015

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 1 – Úloha 1

<u>Hinweis:</u> Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

<u>Poznámka:</u> Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

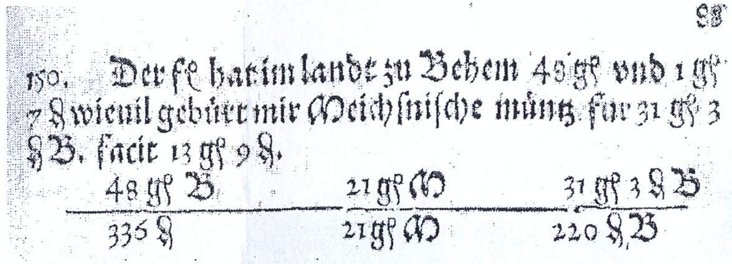
Verschiedene Gulden: Zur Zeit, als Adam Ries lebte, galt in Sachsen folgende Umrechnung

1 sächsischer Gulden (Gu) = 21 sächsische Groschen (Gr),
1 sächsischer Groschen (Gr) = 12 sächsische Pfennige (Pf).

a) Ein sächsischer Kaufmann hat insgesamt 60 Groschen und 60 Pfennige eingenommen. Gib den Geldbetrag in sächsischen Gulden, Groschen und Pfennigen an, so dass die Anzahl der Münzen so klein wie möglich ist.

b) Zeige, dass es möglich ist, den Betrag von 1 sächsischen Gulden in genau 120 Münzen darzustellen.

In seinem 3. Rechenbuch von 1550, „Practica" genannt, erklärt Adam Ries auf Seite 88, dass in Böhmen eine andere Umrechnung gilt (siehe nebenstehende Abbildung):


88
150. Der fl hat im landt zu Behem 48 gr vnd 1 gr 7 ₰ wieuil gebürt mir Meichßnische müntz für 31 gr 3 ₰ B. facit 13 gr 9 ₰.
48 gr B / 336 ₰ — 21 gr M / 21 gr M — 31 gr 3 ₰ B / 220 ₰ B

1 böhmischer Gulden = 48 böhmische Groschen,
1 böhmischer Groschen = 7 böhmische Pfennige.

c) Ein böhmischer Kaufmann hat insgesamt 60 Groschen und 60 Pfennige eingenommen. Gib den Geldbetrag in böhmischen Gulden, Groschen und Pfennigen an, so dass die Anzahl der Münzen so klein wie möglich ist.

d) Zeige, dass es möglich ist, den Betrag von 1 böhmischen Gulden in genau 120 Münzen darzustellen.

Beim Umtausch erhielt man zur damaligen Zeit für 9 sächsische Pfennige 8 böhmische Pfennige. Ein sächsischer Groschen war also mehr wert als ein böhmischer Groschen, denn

1 sächsischer Gr = 12 sächsische Pf > 9 sächsische Pf =
= 8 böhmische Pf > 7 böhmische Pf = 1 böhmischer Gr.

e) Untersuche, welcher Gulden mehr wert ist, der sächsische oder der böhmische.

f) Ein sächsischer Kaufmann und ein böhmischer Kaufmann haben die gleiche Anzahl Münzen, der eine sächsische Groschen und Pfennige, der andere böhmische Groschen und Pfennige. Beide Kaufleute haben den gleichen Geldbetrag. Wie viel Geld könnte es sein?

Rozdílné zlaťáky: V době, kdy žil Adam Ries, se v Sasku používal následující přepočet

1 saský zlatý (zl) = 21 saských grošů (gr),
1 saský groš (gr) = 12 saských feniků (fe).

a) Jeden saský kupec vydělal celkem 60 grošů a 60 feniků. Převeď tuto částku na saské zlaťáky, groše a feniky tak, aby počet mincí byl co nejnižší.

b) Dokaž, že je možné obnos 1 saského zlaťáku rozdělit na přesně 120 mincí.

Ve své 3. početnici z roku 1550 zvané „Practica" vysvětluje Adam Ries na straně 88, že se v Čechách používá přepočet jiný (viz obrázek vedle):

1 český zlatý = 48 českých grošů,
1 český groš = 7 českých feniků.

c) Český kupec vydělal celkem 60 grošů a 60 feniků. Převeď částku na české zlaťáky, groše a feniky tak, aby počet mincí byl co nejnižší.

d) Dokaž, že je možné rozdělit částku 1 český zlaťák na přesně 120 mincí.

Při výměně peněz tehdy člověk dostal za 9 saských feniků 8 feniků českých. Jeden saský groš měl tedy větší hodnotu než jeden český groš, protože

1 saský gr = 12 saských fe > 9 saských fe =
= 8 českých fe > 7 českých fe = 1 český gr.

e) Zjisti, který zlaťák má větší hodnotu, saský nebo český?

f) Saský kupec a český kupec mají stejný počet mincí. Jeden má saské groše a feniky, druhý české groše a feniky. Oba kupci mají stejnou sumu peněz. Kolik peněz by to mohlo být?

22. Vierländerwettbewerb 2015
22. soutěž čtyř zemí 2015

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 2 – Úloha 2

__Hinweis:__ Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

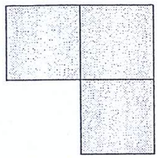
__Poznámka:__ Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Mit Quadraten Muster legen: Um Muster zu legen, verwenden wir gleichgroße Quadrate. Wir vereinbaren folgende Bezeichnungen:

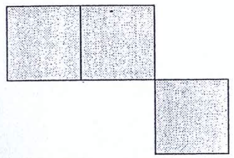
(1) Zwei Quadrate heißen *benachbart*, wenn sie eine vollständige Quadratseite gemeinsam haben.

(2) Ein Muster aus mehreren Quadraten heißt *zusammenhängend*, wenn jedes Quadrat dieses Musters mindestens mit einem anderen Quadrat des Musters benachbart ist.

In der nebenstehenden Abbildung zeigt Beispiel 1 ein Muster aus 3 zusammen-hängenden Quadraten. Das Muster in Beispiel 2 ist dagegen nicht zusammen-hängend.

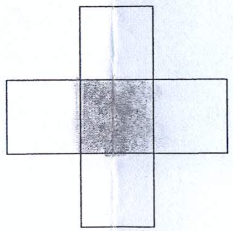


Beispiel 1
Příklad 1



Beispiel 2
Příklad 2

Wir wollen nun an Muster aus zusammenhängenden Quadraten alle möglichen Quadrate einzeichnen, die zu mindestens einem Quadrat des Musters benachbart sind. Wir nennen sie *Randquadrate*. In nebenstehender Abbildung besteht das Muster aus einem Quadrat. Für dieses Muster kann man 4 Randquadrate einzeichnen.



a) Zeichne ein Muster, das aus 2 zusammenhängenden Quadraten besteht und füge alle möglichen Randquadrate hinzu. Wie viele Randquadrate gibt es für 2 zusammenhängende Quadraten?

b) Wie viele Randquadrate sind höchstens möglich, wenn das Muster aus 4 zusammenhängenden Quadraten besteht? Zeichne ein solches Muster und erkläre, warum keine größere Anzahl von Randquadraten möglich ist.

c) Gib an, wie viele Randquadrate mindestens erforderlich sind, wenn das Muster aus 4 zusammenhängenden Quadraten besteht. Begründe deine Antwort!

Skládání obrazců ze čtverců: Ke složení obrazce použijeme stejně velké čtverce. Dohodneme se na následujícím pojmenování:

(1) Dva čtverce se nazývají sousedící, když mají společnou jednu celou stranu čtverce.

(2) Obrazec z několika čtverců označujeme jako *souvislý*, když každý čtverec v tomto obrazci sousedí alespoň s jedním jiným čtvercem.

Na obrázku vedle je v příkladu 1 vidět obrazec ze 3 souvislých čtverců. Oproti tomu obrazec v příkladu 2 není souvislý.

Nyní chceme do obrazce ze souvislých čtverců zakreslit všechny možné čtverce, které sousedí alespoň s jedním čtvercem z obrazce. Budeme jim říkat okrajové čtverce. Obrazec na vedlejším obrázku se skládá z jednoho čtverce. K tomuto čtverci lze zakreslit 4 okrajové čtverce.

a) Nakresli obrazec, který se skládá ze 2 souvislých čtverců a doplň všechny možné okrajové čtverce. Kolik okrajových čtverců existuje pro 2 souvislé čtverce?

b) Jaký největší počet okrajových čtverců je možný, když se obrazec skládá ze 4 souvislých čtverců? Nakresli takový obrazec a vysvětli, proč není možné vytvořit větší počet okrajových čtverců.

c) Uveď, jaký nejnižší počet okrajových čtverců se obrazec skládá ze 4 souvislých čtverců. Odůvodni svou odpověď.

22. Vierländerwettbewerb 2015
22. soutěž čtyř zemí 2015

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 3 – Úloha 3

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Rätselhafte Gleichungen: Christina und Kristýna lösen gern Kryptogramme. Solche mathematischen Rätsel sindhttp://de.wikipedia.org/wiki/Gleichung Gleichungen mit unbekannten Zahlen, deren Ziffern durch Buchstaben ersetzt wurden. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern. Die erste Ziffer einer Zahl darf nicht Null sein.

Christina hat selbst ein Kryptogramm erstellt. Ihr gefällt dieses Rätsel, weil **DREI** das deutsche Wort für die Zahl 3 und **SECHS** das deutsche Wort für die Zahl 6 ist.

a) Weise nach, dass es für Christinas Kryptogramm keine Lösung geben kann.

Kristýna lacht, weil die Zahl 3 in der tschechischen Sprache **TŘI** und die Zahl 6 **ŠEST** heißen. Für ihr Kryptogramm gibt es jedoch Lösungen (dabei werden die kleinen Zeichen an den Buchstaben weggelassen):

b) Gib alle Lösungen für Kristýnas Kryptogramm an.

Christina und Kristýna beschäftigen sich nun mit einem Kryptogramm, das an das Ehepaar Ries erinnert:

Sie finden mit der Zuordnung A = 3, D = 7, E = 5, I = 9, M = 1, N = 2, R = 6 und S = 4 eine Lösung des Kryptogramms, wie nebenstehende Rechnung zeigt.

c) Gib für dieses Kryptogramm eine Lösung mit A = 2 an.

Für dieses Kryptogramm gibt es viele verschiedene Lösungen.

d) Gib eine Lösung dieses Kryptogramms an, bei der die vierstellige Zahl RIES so klein wie möglich ist. Begründe, dass es keine kleinere Möglichkeit für die Zahl RIES geben kann.

$$\begin{array}{cccccc} & & D & R & E & I \\ + & & D & R & E & I \\ \hline = & S & E & C & H & S \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & T & R & I \\ + & & T & R & I \\ \hline = & S & E & S & T \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & A & D & A & M \\ + & A & N & N & A \\ \hline = & R & I & E & S \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 3 & 7 & 3 & 1 \\ + & 3 & 2 & 2 & 3 \\ \hline = & 6 & 9 & 5 & 4 \end{array}$$

Tajemné rovnice: Christina a Kristýna rády řeší kryptogramy. Tyto matematické hádanky jsou rovnice s neznámými číslyhttp://de.wikipedia.org/wiki/Gleichung, jejichž číslice byly nahrazeny písmeny. Stejné písmeno znamená stejné číslo, rozdílná písmena znamenají, že i čísla budou různá. První číslicí čísla nesmí být nula.

Christina sama sestavila jeden kryptogram. Tahle hádanka se jí líbí, protože **DREI** je německé slovo pro číslo 3 a **SECHS** je německé slovo pro číslo 6.

a) Dokaž, že Christinin kryptogram nemůže mít žádné řešení.

Kristýna se usmívá, protože číslo 3 se v češtině jmenuje **TŘI** a číslo 6 **ŠEST**. Její kryptogram ovšem vyřešit jde (když vynecháme háčky a čárky nad písmeny):

b) Uveď všechna možná řešení pro Kristýnin kryptogram.

Christina a Kristýna se teď zabývají kryptogramem, který nám připomíná manžele Riesovi:

Jak vidíme na vedlejším výpočtu, našly pro kryptogram jedno řešení, když přiřadily čísla k písmenům takto: A = 3, D = 7, E = 5, I = 9, M = 1, N = 2, R = 6 a S = 4.

c) Uveď řešení tohoto kryptogramu, když A = 2.

Tento kryptogram má mnoho různých řešení.

d) Uveď jedno řešení, při kterém bude čtyřmístné číslo RIES co nejmenší. Odůvodni, proč nemůže být pro číslo RIES řešením jiné menší číslo.

Aufgabe 1

In seinem 2. Rechenbuch (1522) stellt Adam Ries Aufgaben über Gesellschaften: Mehrere Personen zahlen Geldbeträge in eine Gesellschaft ein. Wenn die Gesellschaft einen Gewinn erwirtschaftet, wird dieser Gewinn an die Personen im Verhältnis der eingezahlten Beträge ausgezahlt.

Die Aufgabe in der Abbildung lautet in unserem heutigen Sprachgebrauch (Zahlen geändert): „Drei Kaufleute bilden eine Gesellschaft. Der erste Kaufmann zahlt 6 Gulden 18 Groschen ein, der zweite Kaufmann 2 Gulden 6 Groschen, und der dritte Kaufmann 9 Gulden 3 Groschen. Die Gesellschaft erzielt einen Gewinn von 12 Gulden. Wie viel Geld erhält jeder Kaufmann vom Gewinn?“

Zur damaligen Zeit wurde unter anderem mit Gulden, Groschen und Pfennigen bezahlt. Es galten die Umrechnungen:
1 Gulden = 21 Groschen und 1 Groschen = 12 Pfennige.

(a) Wie viel Geld haben die drei Kaufleute insgesamt eingezahlt? Gib den Betrag mit möglichst wenigen Münzen an.

(b) Weise nach, dass der dritte Kaufmann so viel Geld eingezahlt hat wie die beiden anderen Kaufleute zusammen.

Weil der dritte Kaufmann die Hälfte des Gesamtbetrages in die Gesellschaft einzahlte, erhielt er auch die Hälfte des Gewinns.

(c) Wie viel Geld vom Gewinn erhalten der erste und der zweite Kaufmann? Gib den Betrag mit möglichst wenigen Münzen an. Begründe deine Antwort.

Úloha 1

Adam Ries zadává ve své 2. početnici (1522) úlohy o obchodních společnostech: Několik osob vloží do společnosti určitou částku. Když společnost vytvoří zisk, pak je jim tento zisk vyplacen v poměru vložených podílů.

Úloha na obrázku zní v dnešní mluvě následovně (čísla jsou změněna): „Tři obchodníci založí společnost. První obchodník vloží do společnosti 6 guldenů 18 grošů, druhý obchodník 2 guldeny 6 grošů a třetí obchodník 9 guldenů 3 groše. Společnost vytvoří zisk 12 guldenů. Kolik peněz dostane ze zisku každý obchodník?“

Tenkrát se platilo mimo jiné guldeny, groši a feniky. Jejich hodnota se přepočítávala takto:
1 gulden = 21 grošů a 1 groš = 12 feniků.

(a) Kolik peněz vložili tři obchodníci do společnosti celkem? Výsledek vyjádři co nejmenším počtem mincí.

(b) Dokaž, že třetí kupec zaplatil tolik peněz jako první a druhý kupec dohromady.

Jelikož třetí kupec vložil do společnosti polovinu celkové částky, dostal také polovinu zisku.

(c) Kolik peněz dostali ze zisku první a druhý obchodník? Výsledek vyjádři co nejmenším počtem mincí. Svoji odpověď zdůvodni.

23. Vierländerwettbewerb 2016
23. soutěž čtyř zemí 2016

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 1 – Úloha 1

<u>Hinweis:</u> Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

<u>Poznámka:</u> Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Aufgabe 2 – Adam Ries auf Wanderschaft

Adam Ries besuchte 1509 seinen Bruder Conrad in Zwickau (Sachsen). Dort ging Conrad zur Schule ging, um sich auf ein Studium vorzubereiten. Wie viele jungen Leute seiner Zeit ging er dafür auf Wanderschaft, legte also die Strecke von 175 km vom Heimatort Staffelstein bis Zwickau zu Fuß zurück.

(a) Wir nehmen an, dass Adam Ries in jeder Stunde 4 km zurücklegte und jeden Tag seiner Wanderschaft eine gleichlange Zeit wanderte.

Wie lange musste er jeden Tag unterwegs sein, wenn er Zwickau am Ende des siebenten Tags seiner Wanderschaft erreichen wollte? Gib die Zeit in Stunden und Minuten an.

(b) Für den Rückweg schlug Conrad seinem Bruder vor, jeden Tag genau 8 Stunden unterwegs zu sein. Dabei sollte Adam Ries wieder in jeder Stunde seiner Wanderung stets eine gleiche Entfernung zurücklegen.

Welche Strecke musste Adam Ries in jeder Stunde zurücklegen, um am Ende des fünften Wandertags zu Hause anzukommen?

(c) Adam Ries hatte aber eine andere Idee: Er wollte schneller laufen und in jeder Stunde 5 km zurücklegen. Allerdings wollte er jeden Tag seiner Wanderschaft genau zwei Stunden länger als am Vortag unterwegs sein.

Wie lange musste Adam Ries unter Einhaltung dieser Vorgaben am ersten Tag seines Rückweges unterwegs sein, wenn er auch am letzten Wandertag genau zwei Stunden länger unterwegs war als am Tag vorher?

Weise nach, dass die Aufgabe eindeutig lösbar ist, wenn die Dauer des ersten Tagesabschnitts eine ganze Anzahl von Stunden beträgt.

Úloha 2 – Adam Ries na cestách

V roce 1509 navštívil Adam Ries svého bratra Conrada v městě Cvikov (Sasko). Tam chodil Conrad do školy, aby se připravil na studium na univerzitě. Tenkrát se vydávalo do světa mnoho mladých lidí a Adam Ries nebyl výjimkou. Vyrazil ze svého rodného města Staffelstein, a když došel do Cvikova, urazil 175 km.

(a) Předpokládejme, že Adam Ries urazil každou hodinu 4 km a že šel každý den stejně dlouhou dobu.

Jak dlouho musel každý den jít, pokud chtěl dorazit do Cvikova koncem sedmého dne své cesty? Výsledný čas uveď v hodinách a minutách.

(b) Na cestu zpátky navrhl Conrad svému bratrovi, aby šel každý den přesně 8 hodin. Adam Ries měl při tom každou hodinu na cestě zdolat vždy stejnou vzdálenost.

Jakou vzdálenost musel Adam Ries urazit každou hodinu, aby se vrátil domů na konci pátého dne své cesty?

(c) Adam Ries ale dostal jiný nápad: Chtěl jít rychleji a každou hodinu urazit 5 km. Zároveň chtěl být každý další den na cestě přesně o dvě hodiny déle než předcházejícího dne.

Jak dlouho musel jít Adam Ries první den, jestliže má splnit výše uvedené zadání a i poslední den své cesty urazit o dvě hodiny více než předcházející den?

Dokaž, že tato úloha má jediné řešení, pokud šel Adam Ries první den celý počet hodin.

23. Vierländerwettbewerb 2016
23. soutěž čtyř zemí 2016

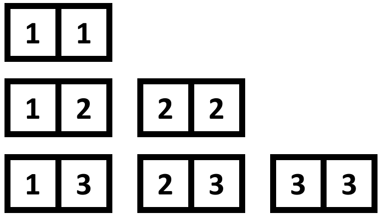
Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 2 – Úloha 2

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

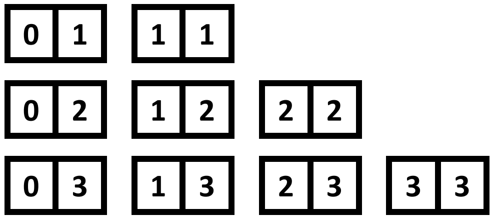
Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Aufgabe 3 – Domino: Die drei Töchter der Familie Ries – Eva, Anna und Sibylla – spielen mit Domino-Steinen. Sie haben sich zunächst nur diese sechs Domino-Steine herausgenommen: Sie wollen diese Domino-Steine auf drei Haufen aufteilen, wobei jeder Haufen mindestens einen Domino-Stein enthält.



(a) Eva behauptet, dass sie die sechs Domino-Steine so in drei Haufen aufteilen kann, dass die Summen der Augenzahlen jedes Haufens übereinstimmen.
Weise nach, dass es nur genau eine Möglichkeit gibt, die sechs Domino-Steine wie behauptet aufzuteilen.

Anna schlägt vor, noch drei Domino-Steine mit jeweils einer 0 hinzuzunehmen.

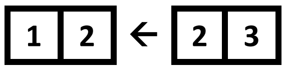


(b) Anna behauptet, dass diese neun Domino-Steine so auf drei Haufen aufgeteilt werden können, dass die Haufen unterschiedliche Anzahlen von Domino-Steinen enthalten, aber die Summen der Augenzahlen jedes Haufens übereinstimmen.
Gib ein Beispiel einer Aufteilung an, das die Bedingungen von Anna erfüllt.

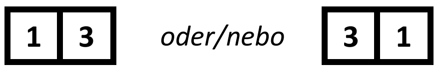
Es ist nun nicht schwer, die neun Steine so auf drei Haufen aufzuteilen, dass jeder Haufen drei Domino-Steine enthält und die Summen der Augenzahlen jedes Haufens übereinstimmen.
Sibylla möchte nun wissen, ob für diese neun Domino-Steine eine Aufteilung in drei Haufen mit jeweils drei Domino-Steinen möglich ist, bei denen in jedem Haufen die drei Domino-Steine regelgerecht in einer Reihe aneinandergelegt werden können.

(c) Weise nach, dass die von Sibylla vorgegebenen Bedingungen nicht erfüllt werden können!

Du erinnerst dich?	*Pamatuješ si pravidla?*
(1) An einen Domino-Stein kann ein weiterer Domino-Stein angelegt werden, wenn die aneinanderstoßenden Felder die gleiche Augenzahl zeigen, z.B.	*(1) Dominový kámen můžeš připojit za jiný kámen, pokud mají sousední pole stejnou hodnotu, např.:*



2) Jeden Domino-Stein gibt es nur genau einmal, aber er darf beim Anlegen gedreht werden:	*(2) Každý kámen lze použít právě jednou, ale může se přiložit dvěma způsoby:*



Úloha 3 – Domino: Tři dcery z rodiny Riesových – Eva, Anna a Sibylla – si hrají s dominovými kameny. Nejprve si vybraly jen těchto šest kamenů: Chtějí kameny rozdělit na tři hromádky, přičemž každá hromádka bude obsahovat alespoň jeden dominový kámen.

(a) Eva tvrdí, že dokáže šest kamenů rozdělit na tři hromádky tak, aby byl součet jednotlivých čísel na každé hromádce shodný.
Dokaž, že existuje právě jedna možnost, jak rozdělit šest kamenů podle tohoto tvrzení.

Anna navrhuje přidat ještě tři dominové kameny s jednou 0 na každém z nich.

(b) Anna tvrdí, že těchto devět kamenů lze rozdělit na tři hromádky tak, aby hromádky obsahovaly rozdílný počet kamenů, ale součet jednotlivých čísel na každé hromádce bude shodný.
Uveď jeden příklad takového rozdělení, které bude Anniny podmínky splňovat.

Není tedy těžké rozdělit devět kamenů na tři hromádky tak, aby každá hromádka obsahovala tři kameny a součet čísel na kamenech byl ve všech hromádkách stejný.
Sibylla by teď chtěla vědět, jestli je možné těchto devět kamenů rozdělit na tři hromádky vždy o třech kamenech tak, aby v každé hromádce bylo možné položit kameny za sebou v řadě podle pravidel.

(c) Dokaž, že Sibyllou zadané podmínky nelze splnit.

23. Vierländerwettbewerb 2016
23. soutěž čtyř zemí 2016

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 3 – Úloha 3

<u>Hinweis:</u> Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

<u>Poznámka:</u> Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Aufgabe 1

In seinem zweiten Rechenbuch (1522) stellte Adam Ries Aufgaben zum Kauf von Tieren, „Viehkauf“ genannt (siehe nebenstehende Abbildung).

Du erinnerst dich – damals bezahlte man unter anderem mit Gulden und Groschen, 1 Gulden entsprach 21 Groschen.

Adam Riſen. 71

Vihekauff.

Item/einer hat 100. fl. dafür wil er 100. haupt Vihes kauffen / nemlich / Ochſen/ Schwein/ Kälber/ vnd Geiſſen/ koſt ein Ochs 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb

(a) An einem Verkaufstag kostete ein Ochse 26 Groschen, ein Schwein 19 Groschen und eine Ziege 7 Groschen. Ein Bauer kaufte 2 Ochsen, 5 Schweine und 9 Ziegen. Wie viel musste der Bauer bezahlen? Gib den Betrag mit möglichst wenig Münzen an.

An einem anderen Tag kostete ein Ochse 1 Gulden, ein Schwein 17 Groschen und eine Ziege 9 Groschen. Ein Bauer hatte 7 Gulden und wollte dieses Geld vollständig beim Tierekauf ausgeben.

(b) Gib eine Möglichkeit an, wie viele Tiere er an diesem Tag gekauft haben könnte, wenn er Tiere von genau zwei der Tierarten kaufte.

(c) Wie viele Tiere von jeder Tierart könnte der Bauer an diesem Tag kaufen, wenn er genau 7 Gulden ausgeben möchte und von jeder Tierart mindestens ein Tier kauft? Zeige in einer Probe, dass der Bauer genau 7 Gulden bezahlen muss. Begründe, dass es genau eine Möglichkeit gibt.

Úloha 1

V druhé početnici (1522) Adama Riese jsou úlohy o nákupu hospodářských zvířat (viz přiložený obrázek).

Jak víš, platilo se tenkrát mimo jiné guldeny a groši, 1 gulden odpovídal 21 grošům.

(a) Jednoho dne stál vůl 26 grošů, vepř 19 grošů a koza 7 grošů. Sedlák si koupil 2 voly, 5 vepřů a 9 koz. Kolik musel sedlák zaplatit? Uveď částku tak, aby byl počet mincí co nejmenší.

Jiného dne stál vůl 1 gulden, vepř 17 grošů a koza 9 grošů. Sedlák měl 7 guldenů a na nákup zvířat je chtěl použít všechny.

(b) Uveď jednu možnost, kolik a jakých zvířat si v tento den mohl koupit za předpokladu, že si chtěl koupit zvířata právě dvou živočišných druhů.

(c) Kolik zvířat každého živočišného druhu si mohl sedlák v tento den koupit, jestliže chtěl utratit právě 7 guldenů a chtěl si pořídit alespoň jedno zvíře od každého druhu? Proveď zkoušku a ukaž, že sedlák musí zaplatit právě 7 guldenů. Odůvodni, že úloha má právě jedno možné řešení.

24. Vierländerwettbewerb 2017
24. soutěž čtyř zemí 2017

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

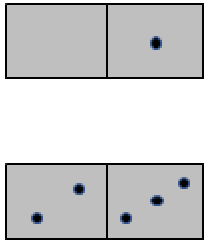
Aufgabe 1 – Úloha 1

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Aufgabe 2

Ein Domino-Spiel besteht aus 28 Spielsteinen, jeder Spielstein besteht aus 2 Feldern, auf denen Kombinationen der Ziffern 0 bis 6 stehen. Jede mögliche Kombination von 0-0, 0-1, ..., 6-6 kommt dabei genau einmal vor. In der Abbildung sind die Steine 0-1 und 2-3 zu sehen.
Anna und Birgit haben für die folgenden Teilaufgaben alle Spielsteine entfernt, auf denen die Ziffer 0 vorkommt.



(a) Wie viele Domino-Steine gibt es, auf denen die Ziffer 0 nicht vorkommt?

Anna hat sich einen Domino-Stein ausgesucht und gibt dazu folgende Aussagen:

(1) „Die Summe der Ziffern auf beiden Feldern ist ein Vielfaches von 5.“
(2) „Beide Ziffern sind verschieden.“
(3) „Die Differenz zwischen der größeren und der kleineren Ziffer ist gerade.“

(Hinweis: Die Zahl 0 ist eine gerade Zahl.)

(b) Weise nach, dass man eindeutig bestimmen kann, welchen Domino-Stein Anna ausgesucht hat, wenn die Aussagen (1) bis (3) alle wahr sind. Zeige, dass dieser Stein alle drei Aussagen erfüllt.

(c) Weise nach, dass es keinen Domino-Stein gibt, für den zutrifft, dass die Aussagen (1) bis (3) alle falsch sind.

(d) Birgit nimmt zwei Domino-Steine in die Hand und erklärt:
(1) „Bei einem Domino-Stein ist die eine Ziffer doppelt so groß wie die andere Ziffer.“
(2) „Bei dem anderen Domino-Stein ist die Differenz zwischen der größeren Ziffer und der kleineren Ziffer größer als 3.“
(3) „Die Ziffernsummen beider Domino-Steine sind gleich.“
Ermittle, welche Steine Birgit ausgesucht haben kann und zeige, dass diese Auswahl alle Aussagen erfüllt.

Úloha 2

Hra domino obsahuje 28 hracích kamenů a na každém kameni jsou 2 políčka, na nichž je uvedená kombinace číslic od 0 do 6. Každá možná kombinace 0-0, 0-1, ..., 6-6 je ve hře zastoupena právě jednou. Na obrázku jsou kameny 0-1 a 2-3.

Anna a Birgit daly pro následující dílčí úlohy stranou všechny hrací kameny, na nichž se vyskytuje číslice 0.

(a) Kolik je dominových kamenů, na nichž není uvedená číslice 0?

Anna si vybrala jeden kámen domina a prohlásila o něm:

(1) „Součet číslic na obou polích je násobkem 5.“

(2) „Číslice na políčkách jsou různé.“
(3) „Rozdíl mezi větší a menší číslicí je sudý.“

(Poznámka: 0 je sudé číslo.)

(b) Dokaž, že lze jednoznačně určit, jaký dominový kámen si Anna vybrala, jsou-li všechny výroky (1) až (3) pravdivé. Ukaž, že tento kámen všechny tři výroky splňuje.

(c) Dokaž, že neexistuje kámen, pro který platí, že všechny výroky (1) až (3) jsou nepravdivé.

(d) Birgit si vezme do ruky dva dominové kameny a prohlásí:
(1) „Na jednom kameni je jedna číslice dvakrát vyšší než ta druhá.“
(2) „Na druhém kameni je rozdíl mezi vyšší a nižší číslicí větší než 3.“
(3) „Součet číslic je na obou kamenech stejný.“
Zjisti, které kameny si Birgit mohla vybrat, a ukaž, že pro tento výběr platí všechny výroky.

24. Vierländerwettbewerb 2017
24. soutěž čtyř zemí 2017

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 2 – Úloha 2

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

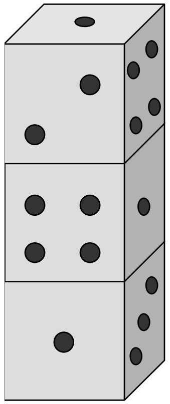
Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Aufgabe 3

Wir spielen wieder gedanklich mit Spielwürfeln. Auf jedem Spielwürfel stehen die Augenzahlen 1 bis 6. Die Summe der Augenzahlen von gegenüberliegenden Würfelseiten beträgt stets 7.

Wir bauen Würfeltürme, indem wir Würfel übereinandersetzen, und summieren alle Augenzahlen, die insgesamt zu sehen sind, wenn wir von allen Seiten und von oben auf den Turm schauen.

(a) Gib die Summe aller Augenzahlen an, die beim Turm der nebenstehenden Abbildung insgesamt zu sehen sind.



(b) Erkläre, wie man einen Turm bauen muss, damit die Summe aller sichtbaren Augenzahl genau 73 beträgt.

(c) Begründe, warum man keinen Würfelturm bauen kann, der als Summe aller sichtbaren Augenzahlen 51 hat.

(d) Untersuche, ob die Zahl 212 die Summe aller sichtbaren Augenzahlen von drei einzeln stehenden Würfeltürmen sein kann. Begründe dein Ergebnis.

Úloha 3

Představme si opět hrací kostky. Na každé hrací kostce jsou čísla (neboli oka) od 1 do 6. Součet ok na protilehlých stěnách činí vždy 7.

Nyní kostky položíme na sebe a postavíme věž, a pak sečteme všechna oka, která jsou na věži vidět, když si ji celou prohlédneme ze všech stran a seshora.

(a) Uveď součet všech ok, která jsou vidět na věži znázorněné na obrázku.

(b) Vysvětli, jak je nutné věž postavit, aby součet všech viditelných ok činil právě 73.

(c) Odůvodni, proč nelze postavit věž, u které by součet všech viditelných ok byl 51.

(d) Zjisti, zda číslo 212 může být součtem všech viditelných ok na třech samostatně stojících věžích. Výsledek odůvodni.

24. Vierländerwettbewerb 2017
24. soutěž čtyř zemí 2017

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 3 – Úloha 3

<u>Hinweis:</u> Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

<u>Poznámka:</u> Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

25. Vierländerwettbewerb 2018
25. soutěž čtyř zemí 2018

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 1 – Úloha 1

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Aufgabe 1. Adam Ries gab im Jahre 1533 in seinem Buch „Annaberger Brotordnung“ Tabellen an, in denen die Vielfachen vom Grundpreis von 1 Pfund einer Ware ausgerechnet wurden. (Mit Pfund gab man damals die Masse einer Ware an.) Solche Tabellen gab es für viele Fälle: wenn 1 Pfund einer Ware 1 Pfennig oder 2 Pfennige ... oder 5 Gulden kostete. Mit solchen Tabellen konnte der Gesamtpreis von mehreren Pfund einer Ware leicht ermittelt werden.
Kostete beispielsweise 1 Pfund einer Ware 7 Pfennige, so lautete seine Tabelle:

Úloha 1. Adam Ries vydal roku 1533 knihu „Annaberský chlebový řád“, ve kterém představil tabulky s vypočítanou základní cenou za 1 libru zboží (tenkrát se v librách uváděla hmotnost). Tyto tabulky byly určeny pro celou řadu případů: když 1 libra určitého zboží stála 1 fenik nebo 2 feniky... nebo 5 guldenů. Díky těmto tabulkám se dala jednoduše určit celková cena zboží o několika librách.

Když například 1 libra zboží stála 7 feniků, pak příslušná tabulka vypadala takto:

Masse der Ware in Pfund		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	hmotnost zboží v librách	
Preis der Ware in	Gulden	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	cena zboží v:	guldenech
	Groschen	0	1	1	2	2	3	4	4	5	5	11	17	2		groších
	Pfennige	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	8	6	4		fenicích

Beachte: 1 Gulden entsprach 21 Groschen, 1 Groschen entsprach 12 Pfennigen.

a) Wie schrieb Adam Ries immer? „Mache die Probe!“ Prüfe den in der Tabelle angegebenen Preis für 7 Pfund der Ware und zeige, dass das 7-fache von 7 Pfennigen tatsächlich 4 Groschen und 1 Pfennig sind.
b) Erkläre, wie du mithilfe dieser Tabelle den Preis von 75 Pfund dieser Ware (von der 1 Pfund 7 Pfennige kostete) berechnen kannst, ohne Multiplizieren zu müssen. Gib das 75-fache von 7 Pfennigen in Gulden, Groschen und Pfennigen mit einer möglichst kleinen Anzahl von Münzen an.
c) Ergänze die nachfolgende Tabelle wie Adam Ries, wenn 1 Pfund Ware 11 Pfennige kostete. Übertrage die Tabelle auf dein Lösungsblatt und schreibe deine Nebenrechnungen auf. Gib den Preis mit möglichst wenigen Münzen an.

Nezapomeň: 1 gulden odpovídal 21 grošům, 1 groš odpovídal 12 fenikům.

a) Co vždycky říkal Adam Ries? „Udělej zkoušku!“ Ověř cenu za 7 liber zboží uvedenou v tabulce a ukaž, že 7násobek 7 feniků jsou skutečně 4 groše a 1 fenik.
b) Vysvětli, jak se dá pomocí této tabulky vypočítat cena za 75 liber tohoto zboží (které stojí 7 feniků za 1 libru), aniž bys musel násobit. Uveď 75násobek 7 feniků v guldenech, groších a fenicích s použitím co nejmenšího počtu mincí.
c) Doplň následující tabulku po vzoru Adama Riese, pokud stála 1 libra daného zboží 11 feniků. Přepiš tabulku na svůj list s řešením a napiš své vedlejší výpočty. Cenu vyjádři pomocí co nejnižšího počtu mincí.

Masse der Ware in Pfund		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	hmotnost zboží v librách	
Preis der Ware in	Gulden	0	0	0	0	0	0	0	0						cena zboží v:	guldenech
	Groschen	0	1	2	3	4	5	6	7							groších
	Pfennige	11	10	9	8	7	6	5	4							fenicích

d) Ein Kaufmann wollte möglichst viele Ellen Tuch kaufen, und zwar rotes Tuch, die Elle für 7 Pfennige, und blaues Tuch, die Elle für 11 Pfennige. Wie viele Ellen Tuch konnte er maximal erwerben, wenn er von jeder Sorte ein ganzzahliges Vielfaches von Ellen kaufte (aber von jeder Sorte jeweils weniger als 10 Ellen), und wenn der Gesamtpreis genau eine ganze Anzahl Groschen betrug.

d) Jeden kupec si chtěl koupit co nejvíce loktů sukna, a sice červeného sukna, které stálo 7 feniků za loket, a modrého sukna, které stálo 11 feniků za loket. Kolik loktů sukna si mohl maximálně pořídit, pokud si od každého druhu koupil celý násobek loktů (a zároveň od každého druhu vždy méně než 10 loktů) a pokud celková cena v groších byla celé číslo?

25. Vierländerwettbewerb 2018
25. soutěž čtyř zemí 2018

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 2 – Úloha 2

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Aufgabe 2. In wenigen Tagen wird das erste Spiel der Fußballweltmeisterschaft 2018 angepfiffen. Die 32 qualifizierten Mannschaften spielen in der Gruppenphase in Gruppen mit je 4 Mannschaften. Vielleicht endet eine solche Gruppe mit folgender Tabelle:

In der Vierer-Gruppe wurden genau 6 Spiele ausgetragen, jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft genau einmal. Es ist bekannt, dass das Spiel C gegen D unentschieden mit 2 : 2 Toren endete. Dieses Ergebnis ist in der folgenden Tabelle bereits eingetragen.

Úloha 2. Za několik dní se rozehraje první utkání mistrovství světa ve fotbale 2018. 32 týmů, které se kvalifikovaly, budou hrát ve skupinách po 4. Jedna skupina možná dopadne následovně:

V této čtyřčlenné skupině se odehrálo právě 6 zápasů, každý tým hrál se všemi ostatními právě jednou. Víme, že zápas C proti D skončil remízou 2:2. Tento výsledek je už uveden v následující tabulce skóre.

Abschlusstabelle/ Závěrečná tabulka			
Mannschaft tým	gewonnen vítězství	unentschieden remízy	verloren porážky
A	3	0	0
B	1	1	1
C	0	2	1
D	0	1	2

Anzeigetafel/ Tabulka skóre							
Spiele	A gegen B A proti B	A gegen C A proti C	A gegen D A proti D	B gegen C B proti C	B gegen D B proti D	C gegen D C proti D	utkání
Torestand						2 : 2	skóre

a) Angenommen, alle 4 Mannschaften erzielten insgesamt 8 Tore. Zeige, dass die Ergebnisse aller Spiele bereits eindeutig bestimmt sind, wenn die oben stehende Abschlusstabelle gilt. Übertrage die Spielstand-Tabelle auf dein Lösungsblatt und ergänze die Tabelle, indem du für jedes Spiel einträgst, wie viele Tore jede Mannschaft geschossen hat.

b) Angenommen, alle 4 Mannschaften haben insgesamt 12 Tore geschossen, wobei die Mannschaft D die meisten Tore schoss. Finde eine Möglichkeit der Spielausgänge, sodass die Abschlusstabelle ebenfalls gilt. Übertrage dazu erneut die Tabelle auf dein Lösungsblatt und ergänze die Tabelle, indem du für jedes Spiel einträgst, wie viele Tore jede Mannschaft geschossen hat.

Über den Endstand einer anderen Gruppe mit vier Mannschaften war folgendes Gespräch zu hören:

(1) Finn: "Mannschaft E schoss mehr Tore als Mannschaft F"
(2) Klara: „Mannschaft G schoss mehr Tore als Mannschaft H"
(3) Marvin: „Mannschaft F schoss mehr Tore als Mannschaft H"
(4) Lena: „Mannschaft H schoss mehr Tore als Mannschaft E"
(5) Paul: „Mannschaft F schoss mehr Tore als Mannschaft G"

Es ist bekannt, dass es keine zwei Mannschaften gab, die die gleiche Anzahl von Toren erzielte.

c) Begründe, warum die fünf Aussagen nicht alle gleichzeitig wahr sein können.

d) Ermittle eine mögliche Reihenfolge der Mannschaften nach der Anzahl der erzielten Tore, wenn genau eine der Aussagen (1) bis (5) falsch ist und die anderen vier Aussagen alle wahr sind.

a) Předpokládejme, že všechny 4 týmy vstřelily celkem 8 branek. Ukaž, že jsou tím už jednoznačně určeny výsledky všech utkání, pokud platí výše uvedená závěrečná tabulka. Přepiš si tabulku skóre na svůj list s řešením a doplň ji tak, aby byl u každého utkání zanesen počet branek, které každé mužstvo vstřelilo.

b) Předpokládejme, že všechny 4 týmy dohromady vstřelily celkem 12 branek, přičemž tým D jich vstřelil nejvíce. Uveď, s jakým výsledkem mohly skončit dané zápasy, pokud rovněž platí výše uvedená závěrečná tabulka. Na svůj list s řešením si k tomu opět přepiš tabulku skóre a doplň ji tak, aby byl u každého utkání zanesen počet branek, které každé mužstvo vstřelilo.

O konečném výsledku v jiné skupině se čtyřmi týmy se dala odposlechnout následující diskuze:

(1) Finn: „Tým E vstřelil více branek než tým F."
(2) Klára: „Tým G vstřelil více branek než tým H."
(3) Marvin: „Tým F vstřelil více branek než tým H."
(4) Lenka: „Tým H vstřelil více branek než tým E."
(5) Pavel: „Tým F vstřelil více branek než tým G."

Víme, že žádné dva týmy nedaly stejný počet gólů.

c) Odůvodni, proč těchto pět výpovědí nemůže být pravdivých zároveň.

d) Zjisti možné pořadí týmů podle počtu vstřelených gólů, pokud je právě jedna z těchto pěti výpovědí (1) až (5) nepravdivá a ostatní čtyři výpovědi pravdivé.

25. Vierländerwettbewerb 2018
25. soutěž čtyř zemí 2018

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik
Horni Franky – Sasko – Durynsko – Česká republika

Aufgabe 3 – Úloha 3

Hinweis: Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen) muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

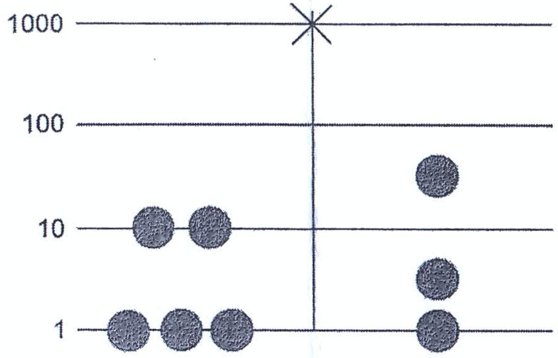
Poznámka: Postup řešení (včetně vedlejších výpočtů) musí být jasně patrný. Všechny výpovědi musí být jasně formulovány a odůvodněny.

Aufgabe 3. Du erinnerst Dich? Auf dem Rechenbrett, wie es Adam Ries in seiner Rechenschule verwendete, sind Linien für die Einer-, Zehner-, Hunderter- und Tausender-Stellen gezeichnet. Die Zwischenräume zeigen die Werte Fünf, Fünfzig und Fünfhundert an.

Werden Rechenpfennige auf die Linien oder in die Zwischenräume gelegt, nehmen sie die entsprechenden Werte an.

In der Abbildung sind im linken Feld die Zahl 23 (mit fünf Rechen-pfennigen) und im rechten Feld die Zahl 56 (mit drei Rechenpfennigen gelegt.

Beim Auflegen der Rechenpfennige sind folgende Regeln zu beachten:



- Auf jeder Linie dürfen nicht mehr als 4 Rechenpfennige liegen.
- In jedem Zwischenraum darf nicht mehr als 1 Rechenpfennig liegen.

Wir wollen uns auf dem Rechenbrett mit Additionsaufgaben beschäftigen, in denen zwei oder drei Summanden addiert werden und jeder Summand eine Zahl zwischen 1 und 49 sein darf.

Wir zählen in den folgenden Aufgaben die erforderlichen Rechenpfennige für jeden Summanden und für die richtig ausgerechnete Summe. Für die Additionsaufgabe 10 + 20 = 30 schreiben wir für die Anzahl der erforderlichen Rechenpfennige kurz 1R + 2R = 3R. Das muss aber keine richtige gerechnete Gleichung ergeben, wie beispielsweise für 2 + 3 = 5, denn dafür schreiben wir 2R + 3R = 1R.

a) Finde eine Additionsaufgabe mit 1R + 2R = 3R, wenn die Summe genau 25 betragen soll.
b) Es gibt genau eine Additionsaufgabe mit 1R + 1R = 1R. Finde diese.
c) Zeige, dass es keine Additionsaufgabe gibt, für die 3R + 3R = 3R gilt.
d) Gib eine Additionsaufgabe mit 3R + 3R + 3R = 9R an.

Úloha 3. Vzpomínáš si? Na počitadle, které Adam Ries používal ve své početní škole, jsou vyznačené linie pro jednotky, desítky, stovky a tisíce. Mezery mezi liniemi značí hodnoty pět, padesát a pět set.

Pokud se na tyto linie nebo do mezer mezi nimi položí početní feniky, pak nabývají odpovídajících hodnot.

Na obrázku je v levém poli vyznačeno číslo 23 (pěti početními feniky) a v pravém poli číslo 56 (třemi početními feniky).

Během pokládání početních feniků musíme dodržovat následující pravidla:

- Na každé linii nesmějí ležet více než 4 početní feniky.
- V každé mezeře mezi liniemi nesmí ležet více než 1 početní fenik.

Na počitadle budeme řešit příklady sčítání se dvěma nebo třemi sčítanci, z nichž každý může nabývat hodnoty mezi 1 a 49.

V následujících příkladech budeme počítat potřebné početní feniky pro každý sčítanec a pro správně vypočítaný součet. U příkladu 10 + 20 = 30 zapíšeme počet potřebných feniků stručně jako 1F + 2F = 3F. Z toho nám ale nemusí vyjít správně vypočítaná rovnice jako třeba 2 + 3 = 5, protože v tomto případě bychom napsali 2F + 3F = 1F.

a) Najdi příklad se zápisem 1F + 2F = 3F, pokud má být součet právě 25.

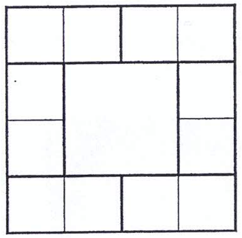
b) Existuje právě jeden příklad se zápisem 1F + 1F = 1F. Najdi jej.
c) Ukaž, že neexistuje příklad, pro který by platil zápis 3F + 3F = 3F.
d) Najdi jeden příklad se zápisem 3F + 3F + 3F = 9F.

Aufgabe 3:

Die drei Töchter von Adam Ries (Anna, Eva und Sybilla) spielen mit Domino-Steinen. Ein vollständiges Domino-Spiel besteht aus 28 Steinen, die jede mögliche paarweise Auswahl von 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Punkten tragen. Anstatt die Punkte zu zeichnen schreiben wir kurz die Anzahl der Punkte („Augenzahl") auf, z.B. 1-2.

Heute spielen die drei Schwestern mit allen Steinen, auf denen nur die Augenzahlen 0, 1 oder 2 abgebildet sind, also mit den Steinen 0-0, 0-1, 0-2, 1-1, 1-2 und 2-2.

Anna legt diese Steine in einem quadratischen Ring mit der Seitenlänge 4 auf:



Eva stellt fest: „Bei dir passen die Steine teilweise gar nicht aneinander, es treffen sich manchmal ungleiche Augenzahlen an gemeinsamen Kanten!"
Anna entgegnet: „Das stimmt. Aber ist dir auch aufgefallen, dass die Summe der Augenzahlen an jeder Seite des Vierecks gleich groß ist?" Anna nennt diese Summe „Seitensumme".

a) Zeichne eine Möglichkeit, wie Anna die Steine gelegt haben könnte, und gib an, wie groß in diesem Fall die Seitensumme ist.

b) Sybilla möchte es auch versuchen, und legt die 6 Steine in der Form eines rechteckigen Ringes auf, bei dem eine Seite die Länge 3 hat.
Zeichne einen solchen Ring, und trage die Augenzahlen so ein, dass erneut alle Seitensummen jeweils gleich groß sind.

c) Erkläre, wie die Seitensumme mit der Summe aller Augenzahlen auf den 6 Steinen zusammenhängt.

d) Die Mädchen stellen fest, dass sowohl bei Anna als auch bei Sybilla die Seitensumme gleich groß ist. Sie fragen sich, ob es einen rechteckigen Ring mit einer anderen Seitensumme gibt. Begründe, wenn dies nicht der Fall ist.

26. Vierländerwettbewerb 2019

Oberfranken – Sachsen – Thüringen – Tschechische Republik

ADAM-RIES-WETTBEWERB 2018/19

– 3. STUFE –

Aufgaben Teil 1

Hinweis: Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Alle Aussagen müssen klar formuliert und begründet werden.

Aufgabe 1:

Zur Zeit, als Adam Ries lebte, verdienten geschickte Händler ihr Geld damit, Waren billig einzukaufen und anderswo teuer wieder zu verkaufen.

Ein Händler kauft regelmäßig Pfeffer in Nürnberg ein, 1 Pfund für je 6 Schilling und 8 Heller. Häufig reist er dann nach Leipzig; dort kann er Pfeffer für 8 Schilling je Pfund verkaufen.

Damals bezahlte man unter anderem mit Gulden (fl), Schilling (ß) und Heller (he), wobei folgende Umrechnung galt: 1 fl = 20 ß, 1 ß = 12 he.
Das Pfund war ein gebräuchliches Gewichtsmaß.

a) Ermittle, wie viel Pfund Pfeffer der Händler in Nürnberg für 1 Gulden erwerben kann.
Berechne, wie viel er einnimmt, wenn er diese Menge anschließend in Leipzig verkauft. Gib das Ergebnis mit möglichst wenig Münzen an.

b) Einmal kauft der Händler in Nürnberg 90 Pfund Pfeffer.
Auf der Reise nach Leipzig wird er überfallen! Die Diebe rauben ihm die Hälfte seiner Waren.
Die andere Hälfte kann der Händler retten und in Leipzig verkaufen.
Ermittle, wie viel Verlust er dadurch gemacht hat, das heißt, um wie viel geringer seine Einnahmen im Vergleich zu seinen Ausgaben sind.

Damit ihm das nicht wieder passiert, heuert der Händler zwei Wachmänner an, die ihn auf der Reise beschützen. Sie vereinbaren, dass der Händler ihnen zusammen den vierten Teil seines Handelsgewinns als Lohn auszahlt. (Der Handelsgewinn ist die Differenz zwischen den Einnahmen und den Ausgaben.)

c) Der Händler kauft beim nächstens Mal Pfeffer für insgesamt 20 Gulden in Nürnberg.
In Leipzig verkauft er die gesamte Ware.
Berechne den Lohn, den jeder der beiden Wachmänner ausgezahlt bekommt.

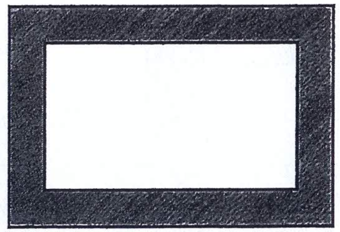
Aufgabe 2:

Birgit möchte Taschentücher nähen. Dazu hat sie ein quadratisches Stück Stoff mit einer Seitenlänge von 1 m gekauft.

a) Für ein Taschentuch benötigt sie ein 20 cm x 20 cm großes Stück des Stoffs.
Ermittle, wie viele Taschentücher sie erhalten kann.

b) Birgit möchte doch lieber rechteckige Taschentücher nähen und benötigt ein 20 cm x 30 cm großes Stück des Stoffs für ein Taschentuch.
Berechne, wie viele Tücher sie in diesem Fall maximal erhalten kann, und begründe, dass es nicht mehr sein können.
Zeichne eine solche Möglichkeit, wie das gehen kann.

Birgits Freundin Lenka findet weiße Taschentücher langweilig. Sie näht weiße Taschentücher mit farbigem Rand, etwa so:



c) Lenka hat rechteckige Taschentücher genäht. Eine der beiden Seiten hat eine Seitenlänge von 24 cm. Der farbige Rand ist überall 4 cm breit.
Nachdem sie ein Taschentuch genäht hat, stellt Lenka fest, dass sie genauso viel farbigen Stoff verbraucht hat wie weißen Stoff.
Berechne aus diesen Angaben, wie lang die andere Seite von Lenkas Taschentüchern ist.