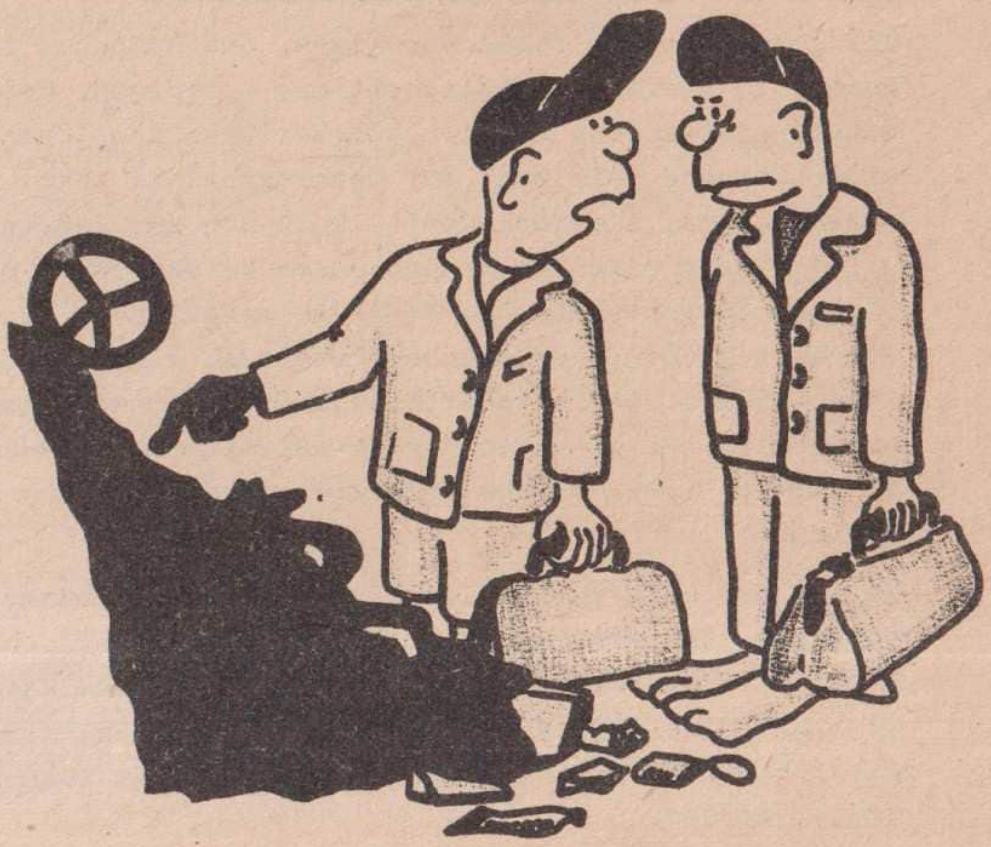


1

82

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

16. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Wie kann man mit algorithmisch unzugänglichen Problemen fertig werden?

1. Der Inhalt des Artikels in Kurzfassung

Wir gehen von der Beobachtung aus, daß Computer ihre Arbeit taktweise, in kleinen Einzelschritten, erledigen. Heutige Computer schaffen etwa eine Million solcher Schritte (Operationen) in einer Sekunde. Die Zahl der Rechenschritte oder, wie wir auch sagen wollen, die Rechenzeit, kann nun zur Beurteilung der Kompliziertheit eines Rechenprozesses herangezogen werden. Es hat sich herausgestellt, daß Probleme existieren, die einerseits von sehr großem ökonomischen Interesse sind, bei denen aber andererseits schon für sehr kleine Eingaben astronomisch große Rechenzeiten der zu ihrer Lösung auszuführenden Rechenprozesse erforderlich sind. Solche Probleme wollen wir hier unzugänglich nennen.

Es ist nun eine verblüffende und praktisch bedeutungsvolle Erkenntnis, daß man in vielen Fällen eine drastische Senkung der Rechenzeit auf ein erträgliches Maß erreichen kann, wenn man sich mit Näherungslösungen an Stelle genauer Lösungen zufrieden gibt. Einige Beispiele dieser Art sollen im folgenden vorgestellt werden.

2. Was sind (diskrete) Optimierungsprobleme?

Um das bisher Gesagte genauer ausführen zu können, brauchen wir zunächst eine klare Vorstellung darüber, was ein Problem sein soll. Wir beschränken uns dabei auf sogenannte (diskrete) Optimierungsprobleme. Ein solches liegt dann vor, wenn folgende Dinge gegeben sind:
(Bei Verständnisschwierigkeiten sollte der Leser gleich die im nächsten Abschnitt angegebenen Beispiele mit einbeziehen.)

1. Eine Menge A sogenannter Eingaben, die wir uns als "Aufgaben" vorstellen wollen, zu denen "Lösungen" gesucht werden.
2. Zu jeder Eingabe x eine endliche Menge L(x) von "Lösungen".
3. Eine Bewertungsfunktion b der Lösungen, die jeder Lösung eine natürliche Zahl zuordnet, die wir als die "Güte" der Lösung

ansehen wollen.

Weiter wollen wir uns vorstellen, daß die Güte einer Lösung umso besser wird, je größer ihr b-Wert ist. (Auch der umgekehrte Fall ist denkbar. Hat man ihn vor Augen, muß man im folgenden "max" durch "min" ersetzen.) Nun kann man jedem $x \in A$ einen optimalen Wert

$$b^*(x) = \max \{b(y) : y \quad L(x)\}$$

zuordnen, das ist also der größte b-Wert, den eine Lösung von x erreichen kann. Ist $b(y) = b^*(x)$ für ein $y \in L(x)$, so nennt man y eine optimale (beste) Lösung für x.

Das Optimierungsproblem besteht dann darin, zu jedem $x \in A$ eine optimale Lösung zu finden. (Wir vermeiden es, von der optimalen Lösung zu sprechen, weil es im allgemeinen mehrere verschiedene Lösungen gibt, die die Optimalitätsbedingung $b(y) = b^*(x)$ erfüllen.) Das Optimierungsproblem zu lösen heißt, einen Algorithmus anzugeben, der eine Funktion f berechnet, die jedem $x \in A$ eine Lösung f(x) derart zuordnet, daß $f(x) \in L(x)$ und $b(f(x)) = b^*(x)$ gilt.

Es geht also bei einem Optimierungsproblem darum, für eine Schar gleichartiger Aufgaben beste Lösungen zu finden, wobei durch eine Bewertungsfunktion festgelegt wird, was "beste" Lösungen sein sollen.

3. Beispiele für Optimierungsprobleme

1. Beispiel: Das Problem von den 2 Lastenträgern

Gegeben sind n Gegenstände mit bekannten Gewichten $x_1,\ldots,x_n$ und zwei Lastenträger, die ein Tragevermögen von m Gewichtseinheiten haben. Es handelt sich nun darum, den beiden Lastenträgern eine möglichst große Zahl der gegebenen Gegenstände aufzubürden.

Wenn wir die Menge dieser Aufgaben als Beispiel für ein Optimierungsproblem begreifen wollen, wie sie im vorigen Abschnitt behandelt worden sind, brauchen wir nur folgende Festlegungen zu treffen:

Eingaben sind (n+1)-tupel der Form $x = (x_1,\ldots,x_n;m)$, wobei $n,m,x_1,\ldots,x_n$ beliebige positive natürliche Zahlen sein dürfen.

(Man beachte, daß insbesondere auch die Zahl n der Gegenstände von Aufgabe zu Aufgabe variieren kann.)

Eine <u>Lösung</u> von $x = (x_1,\ldots,x_n;m)$ hat die Form (I_1,I_2), wobei $I_1 \cup I_2 \subseteq \{1,\ldots,n\}$ und $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ und $\sum_{i \in I_1} x_i \leq m$ und $\sum_{i \in I_2} x_i \leq m$ zu gelten hat. I_1 ist die Menge der Gegenstände, die dem ersten Lastenträger aufgeladen wird, und I_2 ist für den zweiten bestimmt.

Die <u>Bewertungsfunktion</u> b für die Lösungen ist definiert als $b((I_1,I_2))$ = Anzahl der Elemente von $I_1 \cup I_2$, das ist die Gesamtzahl der Gegenstände, die bei dieser Lösung getragen werden sollen.

$b^*(x)$ ist dann die größte Zahl von Gegenständen, die die beiden Lastenträger tragen können, ohne überlastet zu werden.

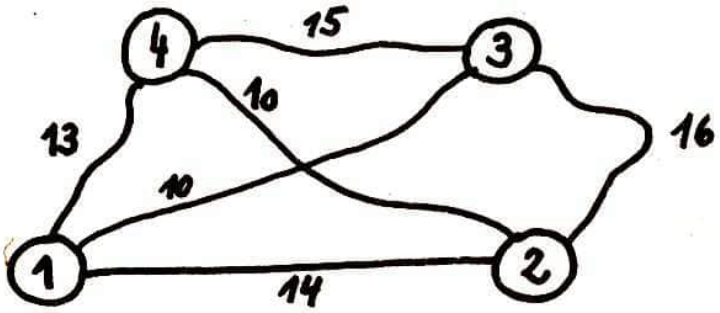
Ist beispielsweise (10,7.1.12,5,8;20) eine Eingabe, so bedeutet das, daß 6 Gegenstände mit den Gewichten 10,7,...,8 zur Auswahl stehen für zwei Lastenträger, von denen jeder 20 Gewichtseinheiten tragen kann. Einige Lösungen (der Leser sollte zur Übung alle Lösungen bestimmen) sind gegeben durch $(\{1,2,3\}, \{4,6\})$ $(\{2,3,5\}, \{1,6\})$ oder $(\{4,5\}, \{3,6\})$. Das Mengenpaar $(\{1,4\}, \{2,5,6\})$ ist keine Lösung, weil hier dem ersten Träger ein zu großes Gesamtgewicht, nämlich $x_1 + x_4 = 10 + 12 = 22$ aufgeladen würde. Man sieht leicht ein, daß die beiden ersten Lösungen optimal sind und den optimalen Wert 5 realisieren.

<u>2. Beispiel:</u> Das Rundreiseproblem (Dies ist ein Optimierungsproblem, bei dem <u>beste</u> Lösungen durch <u>kleinste</u> Werte der Bewertungsfunktion charakterisiert sind.)

Wir betrachten Aufgaben folgender Art. Gegeben sind n Städte, jede ist mit jeder durch eine Straße bekannter Länge verbunden, und ein Hausierer will von der Stadt 1 aus alle Städte auf einer kürzesten Route besuchen und wieder zur Stadt 1 zurückkehren. Dieses sogenannte Rundreiseproblem läßt sich folgendermaßen in unser Schema einordnen.

<u>Eingaben</u> sind hier Netze von n Städten, die wir etwa durch Entfernungstabellen für diese n Städte beschreiben können. Dabei ist n variabel, d. h. verschiedene Eingaben können verschiedene Anzahlen von Städten enthalten.

$L(x)$ ist die Menge der $(n-1)!$ verschiedenen Routen durch das Netz x dieser n Städte. (Eine Route ist durch Festlegen einer Reihenfolge gegeben, in der die n Städte besucht werden sollen. Da die Reise in der Stadt 1 beginnt, muß noch die Reihenfolge der übrigen $n-1$ Städte festgelegt werden. Dafür gibt es bekanntlich $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ Möglichkeiten. Beweis?)
Für jede Rundreise y verstehen wir unter $b(y)$ die <u>Länge</u> des Weges y. Das Optimum $b^*(x) = \min \{b(y) : y \in L(x)\}$ ist die minimale Weglänge einer Rundreise durch x. Für das Städtenetz



sind in der folgenden Tabelle alle Rundreisen zusammengestellt.

Route	Länge der Route
1 2 3 4 1	58
1 2 4 3 1	49
1 3 2 4 1	49
1 3 4 2 1	49
1 4 2 3 1	49
1 4 3 2 1	58

Wie man sieht, liegt das Optimum bei 49, und dieser Wert wird durch vier Routen realisiert. (Daß davon je zwei durch Umkehrung der Durchlaufrichtung auseinander hervorgehen, interessiert uns dabei nicht weiter.)

4. Über die Kompliziertheit von Optimierungsproblemen

Ohne genauer über Computer Bescheid zu wissen, kann jedermann zunächst folgende Aussagen leicht begreifen. Um ein Optimierungsproblem vom Rechner behandeln zu lassen, braucht man ein Verfahren (einen Algorithmus), nach dem der Rechner vorgehen kann, wenn ihm dieses Verfahren durch Programmierung mitgeteilt wird. Der

Rechner ist dann in der Lage, für jede Eingabe x eine optimale Lösung y auszugeben. Die Zahl der Rechenschritte (die Rechenzeit), die der Rechner dazu benötigt, hängt offensichtlich von x ab. Wir nennen diese Zahl daher t(x).

Wie wir schon gesehen haben, ist x nicht immer eine natürliche Zahl. Es ist sinnvoll, die Rechenzeit nicht auf x selbst zu beziehen, sondern auf die Länge einer Niederschrift von x, d. h. auf die Zahl der Symbole (einschließlich eventueller Trennzeichen), die nötig sind, um die Eingabe x aufzuschreiben. Im obigen Beispiel x = (10,7,1,12,5,8;20) braucht man 18 Zeichen, um x aufzuschreiben. Wir wollen dann sagen, daß x die <u>Länge</u> 18 hat.

Als Maßstab für die Kompliziertheit, mit der ein Algorithmus arbeitet, nimmt man nun die Funktion

$$T(N) = \max \{t(x) : x \text{ hat die Länge } N\},$$

d. h. die größtmögliche Rechenzeit, die bei Eingaben der Länge N auftreten kann.

Selbstverständlich versucht man bei jedem Problem, einen Algorithmus mit möglichst kleiner Zeitkompliziertheit T(N) zu finden. Was das Rundreiseproblem und das Problem von den zwei Lastenträgern angeht, so haben alle bisher gefundenen Algorithmen zu ihrer Lösung eine Zeitkompliziertheit von mindestens $T(N) = 2^N$. (Das liegt, grob gesprochen, daran, daß all diese Algorithmen darauf hinauslaufen, alle Lösungen durchzumustern, und in beiden Fällen kann man sich überlegen, daß die Zahl der Lösungen exponentiell in der Länge der Eingabe sein kann.)

Diese exponentielle Zeitkompliziertheit bedeutet eine herbe Enttäuschung für den praktischen Anwender, denn ein Rechner, der etwa eine Million Operationen pro Sekunde ausführen kann, brauchte Rechenzeiten von etwa 13 Tagen, 36 Jahren oder 366 Jahrhunderten (!) für Eingaben der Länge 40, 50 bzw. 60. Da solche Eingabelängen für ökonomische Zwecke durchaus noch sinnvoll und notwendig sind, kann man mit den angegebenen Algorithmen nicht zufrieden sein. Wer kann schon 366 Jahrhunderte auf ein Rechenergebnis warten!

Nun liegt die Frage nahe: Erlauben die genannten Probleme grundsätzlich keine schnelleren Lösungsalgorithmen, oder waren wir

bisher nur noch nicht geschickt genug, schnellere Algorithmen zu finden? Diese Frage ist offen, aber es bestehen triftige theoretische, hier nicht erörterbare Gründe zu der Annahme, daß diese Probleme wirklich so schwierig (unzugänglich) sind.

5. Verzicht auf genaue Lösungen - ein Mittel zur Überwindung der Unzugänglichkeit

Angesichts dieser Tatsache ist man gezwungen, sich nach Möglichkeiten umzusehen, wie man doch noch mit solchen Problemen fertig werden kann. Wir wollen hier nur einen von mehreren Auswegen diskutieren: den Verzicht auf genaue Lösungen. Dieser Ausweg funktioniert nicht immer, aber in manchen Fällen kann man dadurch zu sehr brauchbaren Rechenzeiten gelangen.

Wir behandeln ausführlich nur das Problem der zwei Lastenträger. Wir ändern es insofern ab, als wir uns jetzt für Funktionen f interessieren, die nicht die scharfe Bedingung

$$f(x) \in L(x) \quad \text{und} \quad b(f(x)) = b^*(x)$$

erfüllen, sondern die abgeschwächte

$$(1) \qquad f(x) \in L(x) \quad \text{und} \quad b(f(x)) \geq b^*(x) - 1,$$

d. h. wir suchen Lösungen, die nun höchstens 1 vom Optimum abweichen. Die Abschwächung der ursprünglichen Aufgabenstellung, die wir vornehmen, ist also denkbar gering. Es ist deshalb beinahe unglaublich, daß sie schon dazu ausreicht, daß dieses abgeschwächte Problem mit der Zeitkompliziertheit $T(N) = cN^2\log^2 N$ (wobei wir mit N die Eingabelänge und c eine geeignete positive Konstante bezeichnen) lösbar ist. Und dies bedeutet, daß die Rechenzeit für Eingaben der Länge 60 nicht mehr Jahrhunderte sondern nur noch Bruchteile einer Sekunde (!) beträgt. Jeder Anwender nimmt eine (mögliche) Abweichung vom Optimum um 1 gern in Kauf, wenn dies zu derart beträchtlichen Rechenzeitgewinnen führt, die das Problem von einem unzugänglichen in ein solches verwandeln, das in einer für menschliche Belange vertretbaren Zeit gelöst werden kann.

Wir wollen nun einsehen, daß die Berechnung einer Funktion f, die die Bedingung (1) erfüllt, wirklich in der angegebenen Zeit erfolgen kann. Dazu geben wir folgendes Verfahren zur Berechnung von f an:

Eingabe: $x = (x_1,\dots,x_n;m)$.

1. Ordne $(x_1,\dots,x_r)$ nach wachsender Größe. Die Folge, die durch die Umordnung entsteht, wollen wir mit $(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_n})$ bezeichnen. Es gilt also $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_n}$.
2. Bilde die Summen

$$x_{i_1}$$
$$x_{i_1} + x_{i_2}$$
$$\vdots$$

und finde dabei l und dasjenige k heraus, für das

$$x_{i_1} + \dots + x_{i_l} \leq m \text{ und, falls } l < n,$$
$$x_{i_1} + \dots + x_{i_l} + x_{i_{l+1}} > m$$

und

$$x_{i_1} + \dots + x_{i_k} \leq 2m \text{ und, falls } k < n,$$
$$x_{i_1} + \dots + x_{i_k} + x_{i_{k+1}} > 2m$$

gilt.

3. Bilde $I_1 = \{i_1,\dots,i_l\}$ und

$$I_2 = \begin{cases} \{i_{l+1},\dots,i_k\} & \text{falls } x_{i_{l+1}}+\dots+x_{i_k} \leq m, \\ \{i_{l+2},\dots,i_k\} & \text{sonst} \end{cases}$$

(Dies heißt insbesondere $I_2 = \emptyset$, falls $l = k$.)

Es ist klar, daß die beiden Lastenträger höchstens k Gegenstände tragen können. Dann k+1 oder mehr Gegenstände übersteigen das Tragevermögen beider Träger zusammengenommen, weil dies bereits für die k+1 leichtesten Gegenstände zutrifft. Dies heißt also, daß das Optimum k oder k-1 ist. Der letztere Fall tritt dann ein, wenn es nicht möglich ist, die k Gegenstände auf die Lastenträger so zu verteilen, daß kein Gegenstand übrigbleibt und die Belastungsgrenzen der Träger nicht überschritten werden. Ein Beispiel dafür ist $x = (6,7,9;11)$.

Da für die gefundene Lösung $f(x)$ ebenfalls nur die Werte $b(f(x)) = k$ oder $b(f(x)) = k-1$ in Frage kommen, liegt es auf der Hand, daß $b(f(x)) \geq b^*(x)-1$ gilt, (1) also erfüllt ist.

Ein Beispiel dafür, daß der Algorithmus keine optimale Lösung findet, ist $(3,4,5,8,8;15)$. Er findet die Lösung $(\{1,2,3\}, \{5\})$, während $(\{3,4\},\{1,2,5\})$ optimal ist.

Wir kommen nun zur Abschätzung der Rechenzeit des Algorithmus. Mit N bezeichnen wir die Länge der Eingabe von x. Offensichtlich gilt $n \leq N$. Die Umordnung in der ersten Etappe kann mit n^2 Vergleichen erledigt werden (wie?). (Es sei angemerkt, daß sogar $b \cdot N \log N$ Schritte ausreichen für ein geeignetes $b > 0$.) Eine Addition zweier Zahlen, deren Länge kleiner ist als M, kann in $a\, M \log^2 M$ Schritte bewerkstelligt werden, wobei $a > 0$ eine geeignete Konstante ist. Dieses Resultat ist nicht so einfach zu gewinnen, und es kann hier nur ohne Beweis mitgeteilt werden. Insgesamt sind in der 2. Etappe höchstens n Additionen zu erledigen, wobei jeweils die Länge der Summanden durch N abgeschätzt werden kann, also brauchen wir für die 2. Etappe des Algorithmus höchstens $a \cdot n \cdot N \log^2 N \leq a \cdot N^2 \log^2 N$ Schritte. Zum Aufschreiben von I_1 und I_2 werden nochmals höchstens n Schritte gebraucht und zur Entscheidung der Fallunterscheidung für I_2 reichen $a \cdot n \cdot N \log^2 N \leq a \cdot N^2 \log^2 N$ Additionen. Das sind insgesamt höchstens

$$c_1 n^2 + 2aN^2 \log^2 N + c_2 n \leq cN^2 \log^2 N$$

Schritte mit einem geeigneten $c > 0$. Die Koeffizienten c_1 und c_2 kommen daher, daß zur Realisierung eines der notwendigen Rechenschritte auf einem Rechner eine gewisse feste Anzahl von Rechnerschritten erforderlich sind. Auf eine genauere Begründung dieser letzteren Aussage müssen wir hier verzichten, weil dazu ein tieferes Eindringen in die Theorie der Programmierung notwendig wäre.

6. Kleiner Ausblick auf weitere Resultate

Zunächst ist die folgende Bemerkung von Interesse.
Wenn man im Problem von den zwei Lastenträgern die Bewertungsfunktion - und damit das Problem selbst - folgendermaßen abändert

$$b((I_1, I_2)) = \sum_{i \in I_1 \cup I_2} x_i,$$

so erhält man wieder ein Optimierungsproblem, das jetzt darin besteht, eine möglichst große Last zu transportieren. Auch dieses Problem ist unzugänglich. Wenn man zu diesem Problem die Abschwächung (1) betrachtet, so bleibt es unzugänglich. Führt man dagegen die folgende großzügigere Abschwächung ein

(2) $b(f(x)) \geq (1-\varepsilon)b^*(x)$, $\varepsilon > 0$, konstant, aber beliebig klein

so erhält man wieder Lösungen in vertretbarer Zeit. Die Bedingung (2) bedeutet anschaulich, daß wir mit Lösungen zufrieden sind, deren Wert von der optimalen um einen festen, sehr kleinen Bruchteil des optimalen Wertes abweicht. Diese Bedingung ist wirklich sehr großzügig, weil für größer werdende x natürlich auch $b^*(x)$ und damit auch die Abweichung $\varepsilon\, b^*(x)$ immer größer wird.

Schließlich bemerken wir, daß das Rundreiseproblem selbst bei der Abschwächung (2) noch unzugänglich bleibt. Hier müssen also für praktische Belange gänzlich andere Wege gegangen werden.

Prof. G. Wedsung
Bereich Mathematische
Kybernetik und Rechentechnik

Den Mann nenne ich groß, der viel gedacht und gelesen und erfahren hat und der alles was er gedacht, gelesen und erfahren hat, bei jeder Sache, die er unternimmt, also auch bei jedem Buch, das er schreibt, vereint zum besten Zweck anzuwenden weiß, alles so anschaulich darzustellen, daß jeder sehen muß, was er selbst gesehen hat.

Ich habe einen Mann gekannt, der die seltsame Grille hatte, nach Tische beim Obst aus Äpfeln regelmäßige stereometrische Körper zu schneiden, wobei er immer den Abfall aufaß. Meistens endigte sich die Auflösung des Problems mit einer gänzlichen Aufzehrung des Apfels.

Sich allen Abend ernstlich zu befragen, was man an dem Tage Neues gelernt hat.

Georg Christoph Lichtenberg

Preisaufgaben

0 1 ②

Es seien n Punkte in der Ebene gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Man verbinde jeden Punkt mit jedem durch eine rote oder blaue Linie. Wie groß muß n sein, damit bei beliebiger Färbung mindestens ein rotes oder blaues Dreieck entsteht?

0 2 ②

Man beweise:
Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem Produkt der drei Seiten, dividiert durch den vierfachen Radius des Umkreises.

0 3 ②

Man berechne das Verhältnis von In- und Umkreis-. radius eines gleichschekligen Dreiecks.
(Aufgabenvorschlag von Birgit Thomas)

0 4 ①

Man beweise: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

0 5 ②

Es sei die Menge M durch
$M = \{z : z = x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$ mit x,y ganze Zahlen$\}$ gegeben.
Man beweise, daß gilt: $33 \notin M$.

0 6 ②

Доказать, что существует многогранника, имеющево 7 ребер.

Einsendeschluß: 15. 4. 1982

Betriebspraktikum im 3. Studienjahr

Innerhalb des 3. Studienjahres der Diplommathematikerausbildung absolvieren alle Studenten ein 12wöchiges Betriebspraktikum. Dieses wird zum Beispiel in Jenaer Großbetrieben, wie dem Kombinat VEB Carl Zeiss Jena, VEB Jenapharm; in Akakemieinstituten, im Kombinat Robotron und in der Friedrich-Schiller-Universität durchgeführt.
Wir möchten unseren Lesern mit den folgenden Beiträgen von Studenten des jetzigen 4. Studienjahres einen kleinen Einblick in die Aufgabenstellungen und den Ablauf eines solchen Praktikums geben.

Praktikumseinsatz im Kombinat VEB Carl Zeiss Jena

"Wir führten unser Praktikum im Kombinat VEB Carl Zeiss Jena durch.
Unser Einsatz war betrieblicherseits gut vorbereitet. Das äußerte sich unter anderem darin, daß wir sofort im das Kollektiv integriert wurden und guten Kontakt zu allen Kollegen fanden.
Der Einsatz fand im Rahmen des Jugendobjekts 'Mathematische Modellierung optischer Systeme (MATMOS)' statt. Inhaltlich befaßten wir uns mit den Themen:

- Einfluß der Änderung von Systemparametern auf die Wellenaberration
- Berechnung verallgemeinerter Formeln für den Astigmatismus windschiefer Strahlen
- Erarbeitung eines Optimierungsverfahrens der konjugierten Richtungen

Das Praktikum wurde von allen Studenten erfolgreich absolviert.
Die Verteidigung der Praktikumsarbeiten fand im Rahmen des 'MATMOS'-Seminars statt.
Am Ende des Praktikums wurden 2 Studenten in das Jugendobjekt aufgenommen."

Klaus Ullrich
Olaf Kollosche
Martin Beck

Praktikumseinsatz im Zentralinsitut für Mikrobiologie und experimentelle Therapie der Akademie der Wissenschaften der DDR

"Das Thema meiner Arbeit lautete 'Stereologie für Kugelschnitte'. Das Problem, das ich zu lösen und zu programmieren hatte, bestand darin, die genaue Größe von Kugeln, die in einem undurchsichtigen Medium, z.B. Fettkugeln in einer Fettleber, eingelagert sind, zu bestimmen. Dabei darf das Medium nur einmal geschnitten werden. Gemessen und als zufällige Stichproben betrachtet werden dann die Durchmesser der entstehenden Schnittkreise. Ausgehend von diesen Meßergebnissen habe ich gewisse Rückschlüsse auf die Anzahl und Größe der Kugeln im ganzen Medium gezogen und die Verteilung der Kugelradien bestimmt. Das Ergebnis wurde getestet und zum Ergebnis wurden Genauigkeitsaussagen gemacht.-
Das Problem ist in der Programmiersprache BASIC für den Rechner PDP 11 programmiert."

Kathrin Weise

Praktikumseinsatz im VEB Robotron-Elektronik Meinigen
Sitz Zella-Mehlis

"Die Aufgabe unseres Praktikums bestand darin, für in der Volkswirtschaft auftretende Probleme mathematische Modelle auszuwählen, für diese Modelle einen Lösungsalgorithmus zu entwickeln und auf dem programmierbaren Kleinstrechner K 1003 zu realisieren. Dabei mußte berücksichtigt werden, daß bestmöglichste Genauigkeit, einfachste Bedienung und kürzeste Rechenzeit gewährleistet werden sollten. Die so entstandenen Programme werden als Software zu dem programmierbaren Kleinstrechner PKR 1003 den Käufern des Rechners angeboten. Behandelte Probleme waren z.B.:

- Harmonische Analyse
- Tschebyscheff-Approximation
- Simplex-Verfaren u.a.

Die Unterstützung durch die Sektion und den Betrieb war gut."

Peter Steiner
Harald Lorey

Aufgabe N 23 (nach Stephan Bönewitz, Leipzig)

Es gilt
$$ac = k_1 \cdot n$$
$$bd = k_2 \cdot n$$
$$bc + ad = k_3 \cdot n$$
mit $k_1, k_2, k_3, n \in G$.

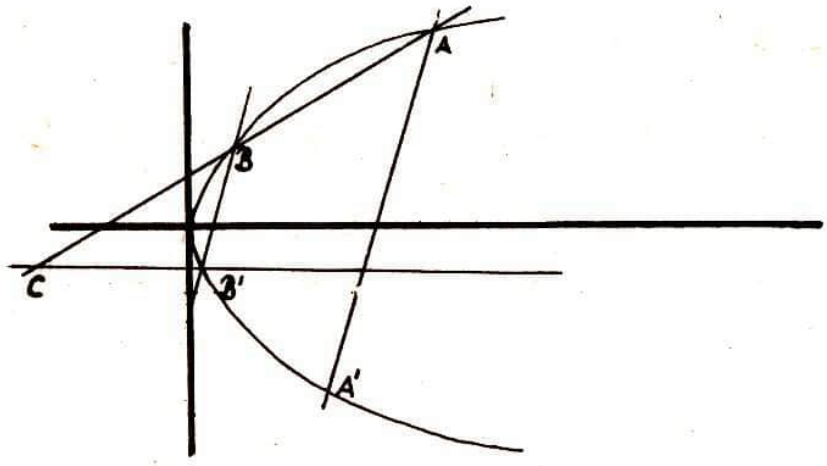
Es gilt dann auch
$$c = \frac{k_1 \cdot n}{a}$$
$$b = \frac{k_2 \cdot n}{d}$$
$$ad = k_3 \cdot n - bc$$
$$ad = k_3 \cdot n - \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot n^2}{ad}$$
$$ad = n(k_3 - \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot n}{ad})$$

Somit ist ad durch n teilbar. Da $bc + ad = k_3 \cdot n$, ist auch bc durch n teilbar.

Aufgabe N 24

Sei O der Mittelpunkt des Kreises um ABC. Für O = P ist die Behauptung offensichtlich richtig.
Sei nun P verschieden von O. Dann konstruieren wir die Mittelsenkrechte auf OP. Die Mittelsenkrechte teilt entweder das Dreieck ABC in 2 Teile oder sie liegt außerhalb des Dreiecks. In beiden Fällen liegen P und eine Ecke des Dreiecks gemeinsam rechts oder links von der Mittelsenkrechten und O auf der anderen Seite. Der Abstand von P zu dieser Ecke ist dann kürzer als der Abstand von O zu dieser Ecke.

Aufgabe N 25 (von Prof. Dr. habil. R. Roth, em.)



Ansatz: Verlängert man AB um sich selbst nach C und zieht durch C die Parallele zur Achse der Parabel, so entsteht auf dem Kegelschnitt eindeutig der Punkt B'. Die Parallele durch A zu BB' schneidet den Kegelschnitt eindeutig in A'. Dann sind AA' und BB' die gesuchten parallelen Geraden.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß AA' : BB' = 3 : 1 gilt. OBdA. kann die Parabelgleichung in der Gestalt $y = x^2$ angenommen werden, da alle Parabeln hierzu affin äquivalent sind. $A = (a|a^2)$ und $B = (b|b^2)$ mit $a \neq b$ haben nach Konstruktion zur Folge: $C = (-a+2b\ |-a^2+2b^2)$. Die Parallele durch C zur Achse der Parabel hat die Gleichung $x = -a + 2b$ und der Schnittpunkt B' mit der Parabel hat die Koordinaten $B' = (-a+2b,(-a+2b)^2)$.
Damit ist die Richtung der Parallele zu BB' durch A gefunden.
Die Komponenten derselben lauten

$$(b,b^2) \text{ und } (-a+2b,(-a+2b^2)).$$

Es ist

$$b^2 - (-a+2b)^2 : (-a+2b-b)$$
$$= (3b-a)(a-b) \quad : (b-a) = (3b-a) : -1.$$

Die zu BB' Parallele durch $A = (a,a^2)$ hat also die Gleichung

$$(x-a)(3b-a) - (y-a^2) = 0.$$

Schneidet man sie mit der Parabel $y = x^2$, so entsteht der Punkt A' aus der Gleichung

$$(x-a)(3b-a) - (x^2-a^2) = 0$$
$$(x-a)(3b-a-(x+a)) \quad = 0$$
$$x = 3b - 2a.$$

Die zugehörige y-Koordinate hat den Wert $y = (3b - 2a)^2$, so daß also $A' = (3b - 2a,(3b - 2a)^2)$ entstanden ist.
Dem Nachweis der Relation AA' : BB' = 3 : 1 dient sodann die folgende Rechnung mit der Symbolik
$(x,y) = xu_1 + yu_2$ $(u_1 = (1,0),\ u_2 = (0,1))$.

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{-A+A'}{-B+B'} = \frac{-(a,a^2)+((3b-2a),(3b-2a)^2)}{-(b,b^2)+((2b-a),(2b-2a)^2)}$$

und mit

$(a,a^2) = au_1 + a^2u_2$

$(b,b^2) = bu_1 + b^2u_2$

erhalten wir

$$\frac{-au_1-a^2u_2+u_1(3b-2a)+u_2(3b-2a)^2}{-bu_1-b^2u_2+u_1(2b-a)+u_2(2b-a)^2}$$

$$= \frac{u_1(-a+3b-2a)+u_2(-a^2+(3b-2a)^2)}{u_1(-b+2b-a)+u_2(-b^2+(2b-a)^2)}$$

$$= \frac{3u_1(b-a)+3u_2(b-a)(3b-a)}{u_1(b-a)+u_2(b-a)(3b-a)} = 3$$

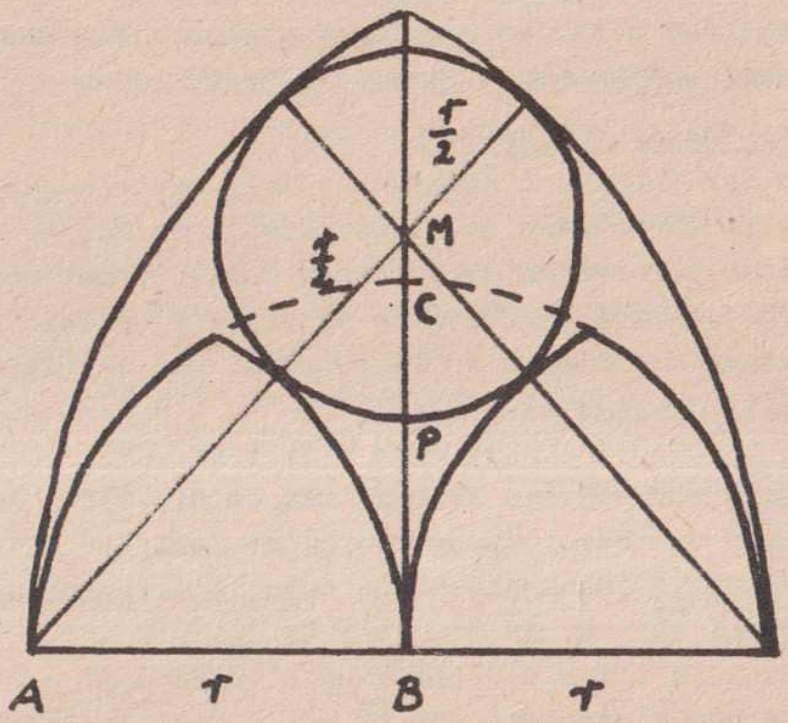
w.z.b.w.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner, H. Zein
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 10. 12. 1981

Goldener Schnitt

$\overline{BC} : \overline{BP} = \overline{BP} : \overline{PC}$



2

82

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

16. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Mathematik im Dienste der Kunst

Es ist allgemein bekannt, daß die Mathematik auf fast allen Gebieten des gesellschaftlichen Lebens eine hervorragende Rolle spielt. Immer mehr werden mathematische Methoden auf verschiedene Probleme angewendet, wie auf Probleme der Spieltheorie, der Wirtschaft, der Kunst usw. Man kann sagen, Gegenstand der Mathematik ist die Wirklichkeit.
Im folgenden wollen wir an einigen Beispielen zeigen, wie mathematische Methoden und Konstruktionen für Probleme der Kunst, Malerei und Tonkunst verwendet werden können.

Der "Goldene Schnitt"

In der Kunst und Ästhetik spielt seit langer Zeit der sogenannte "Goldene Schnitt" eine bedeutende Rolle. Die innere Teilung einer Strecke $\overline{AB}$ durch einen Punkt P, bei der die Länge $\overline{AP}$ der größeren Teilstrecke die mittlere Proportionale zwischen den Längen der kleineren Teilstrecke und der gegebenen Strecke ist, heißt stetige Teilung.

$$\overline{AB} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PB}$$

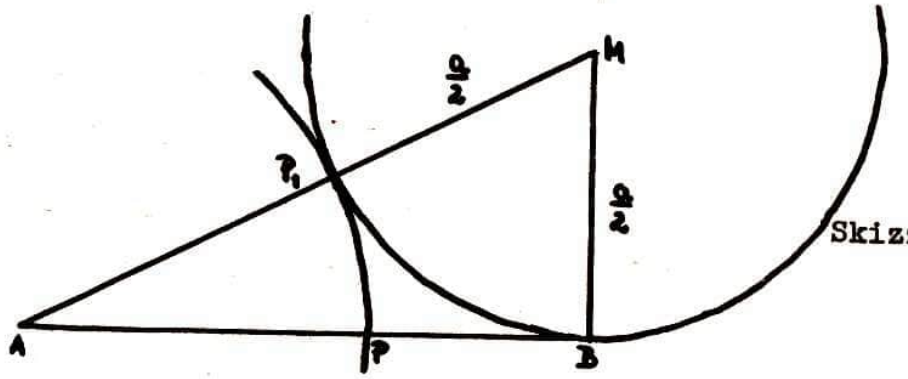
Für diese stetige Teilung kam um die Mitte des vorigen Jahrhunderts die Bezeichnung "Goldener Schnitt" auf. Die Teilstrecke $\overline{AP}$ läßt sich rechnerisch und durch Konstruktion bestimmen.
Es sei $\overline{AB} = a$, $\overline{AP} = x$ $(x > 0)$

$$a : x = x : (a-x) \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$$

Hieraus finden wir für $\overline{AP} = x > 0$ folgenden Wert:

$$\overline{AP} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}618\ a$$

Eine Konstruktion der Strecke AP kann man mit Hilfe unten stehender Skizze leicht finden.



Skizze 1

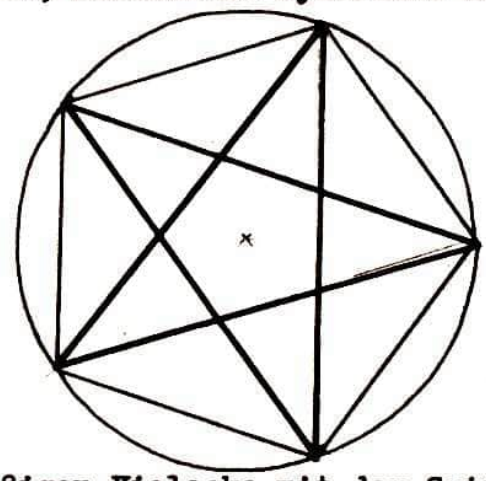
Es ist mit $\overline{AB} = a$; $a^2 + \frac{a^2}{4} = \overline{AM}^2$, also $\overline{AM} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$ und daher $\overline{AP_1} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$ ... $\overline{AP_1} = \overline{AP}$. Wir tragen die Strecke $\overline{AP_1}$ auf der Strecke $\overline{AB}$ ab und erhalten den gesuchten Punkt P.

Man war lange Zeit der Meinung, daß ideale Schönheit von Figuren (einschließlich menschlicher Körper) genau dann vorliege, wenn die Einzelteile zueinander in einem dem goldenen Schnitt entsprechenden Verhältnis stehen.

Mit dem goldenen Schnitt lassen sich bekanntlich regelmäßige Zehn- und Fünfecke konstruieren. Es gilt der Satz:

> Die Seite des regelmäßigen Zehnecks ist der größere Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten Umkreisradius ($s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$).

Bereits die Pythagoräer kannten die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks. Daß sie dieser Konstruktion große Bedeutung beilegten, geht daraus hervor, daß sie dem Sternfünfeck, das aus den Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks besteht, dem sogenannten Pentagramm, mancherlei mystische Bedeutung zuschrieben (Skizze 2).



Skizze 2

Alle regelmäßigen Vielecke mit der Seitenanzahl $5 \cdot 2^n$ $(n=0,1,2,...)$ sind also mit Zirkel konstruierbar.

Der goldene Schnitt spielte in der Baukunst eine bedeutende Rolle. Einige Beispiele seien hier angeführt:

<u>Altes Rathaus in Leipzig.</u> Der Turm teilt die Vorderfront im Verhältnis des goldenen Schnittes.

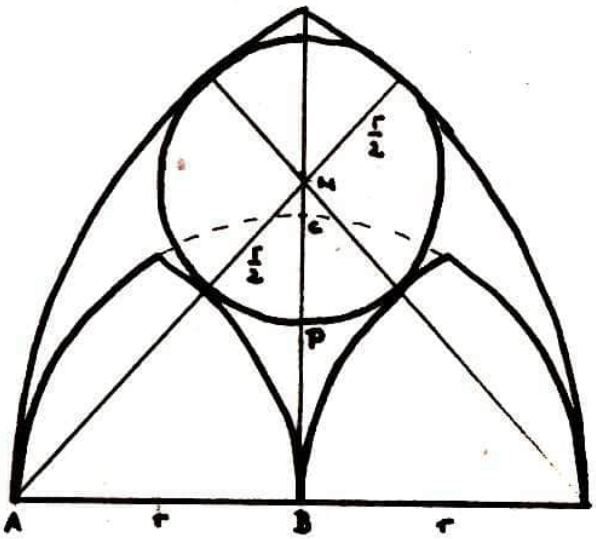
Säulenhalle von Pergamon, römischer Triumphbogen, Anwendungen in der Gebrauchskunst.

Das Maßwerk, das wichtigste Bauornament der Gotik, wurde mit dem Zirkel konstruiert, ist also sozusagen versteinerte Geometrie.

Es offenbart deutlich den auf Geometrie und Gesetzmäßigkeit gerichteten Formsinn der Gotik.

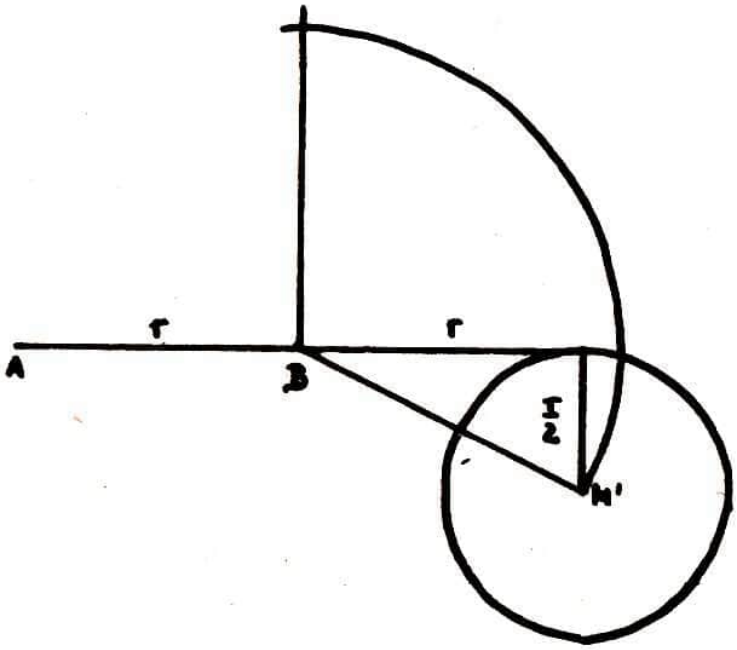
Wir zeigen hier an einem einfachen Maßwerk, dem Gruppenfenster, daß auch hier der goldene Schnitt eine Rolle spielt (siehe Skizzen 3 und 4).

Aus der Skizze 3 erkennt man leicht, daß der Radius des inneren Vollkreises gleich $r_1 = \frac{r}{2}$ beträgt. Wegen $\overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BM}^2$ erhalten wir: $\overline{BM} = \frac{r}{2}\sqrt{5}$ und daher $\overline{BP} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, d. h. P teilt die Strecke $\overline{BC} = r$ im goldenen Schnitt.



Skizze 3

Den Mittelpunkt M kann man durch die in Skizze 4 dargestellte Konstruktion finden.



Skizze 4

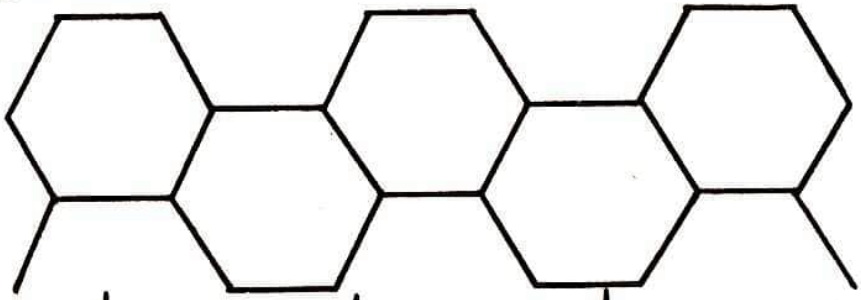
Parkettierungen

Da es unbegrenzt viele Möglichkeiten der Parkettierung einer ebenen Fläche gibt, wollen wir uns hier auf die homogenen Parkettierungen beschränken. Wir verwenden verschiedene reguläre Polygone, um eine ebene Fläche auszufüllen. Dabei sollen in jeder Ecke gleich viele Polygone der gleichen Form zusammenstoßen. Da der Winkel eines regulären n-Ecks gleich $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \cdot 360^\circ$ beträgt, muß man zur Bestimmung von Parkettierungen positive ganze Zahlen n, p, q ... derart finden, daß
$360^\circ \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q} + \dots\right) = 360^\circ$ ergibt, d. h.

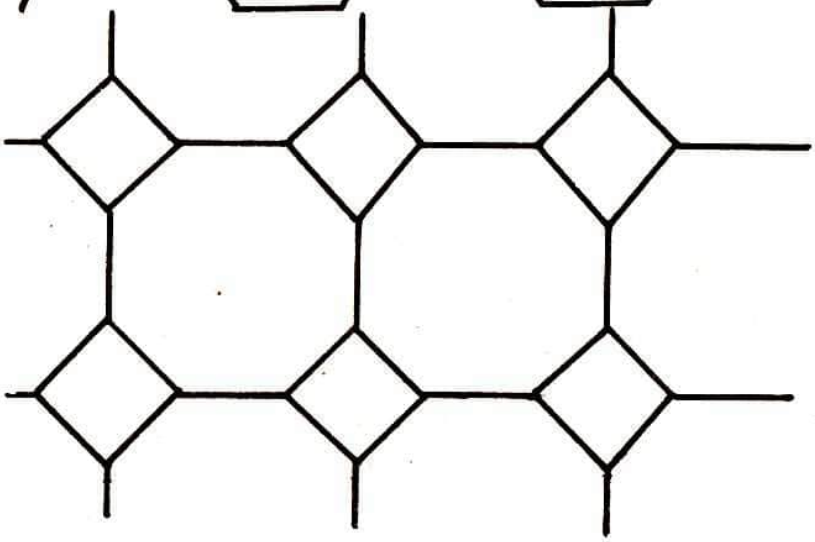
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q} + \dots = 1 \quad \text{ist.}$$

Wir wollen einige Möglichkeiten finden. Nehmen wir an, daß in einer Ecke 3 Flächen zusammenstoßen. Dann müssen wir 3 Zahlen n, p und q finden, für die gilt: $\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1$ bzw. $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$. Diese Bedingung erfüllen die Zahlen 6; 6; 6 $(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2})$ oder die Zahlen 4; 8; 8;

Die zugehörigen Parkettierungen sind in den Skizzen 5 und 6 dargestellt.

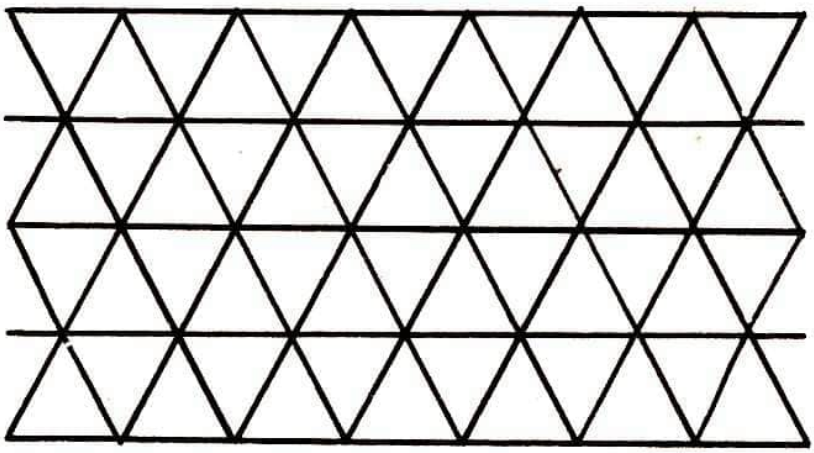


Skizze 5



Skizze 6

Eine dritte Möglichkeit wäre durch die 3 Zahlen 3; 12; 12 gegeben. In einer Ecke würden ein gleichseitiges Dreieck und 2 gleichseitige Zwölfecke zusammenstoßen.
Eine einfache Parkettierung erhalten wir, wenn wir annehmen, daß 6 Flächen in einer Ecke zusammenstoßen. Die Bedingung lautet dann: $\frac{6}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} - \frac{1}{s} - \frac{1}{t} = 1$ bzw.
$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 2$. Sie wird erfüllt für
$n = p = q = r = s = t = 3$ (Skizze 7).



Skizze 7

Durch verschiedene Farben kann natürlich das Mosaik noch wirkungsvoller gestaltet werden. Der Leser mag sich überlegen, wieviele verschiedene homogene Parkettierungen möglich sind, wenn noch verlangt wird, daß sich die einzelnen Flächen nicht überdecken. Die Zahl der möglichen Parkettierungen wird beliebig groß, wenn man die Bedingungen, daß in jeder Ecke die gleiche Anzahl von Polygonen der gleichen Form zusammenstoßen, fallen läßt.
In der Gegenwart gewinnt das Mosaik wieder größere Bedeutung für die dekorative Gestaltung vor allem öffentlicher Gebäude.

Darstellende Geometrie und Malerei

Die darstellende Geometrie hat die Aufgabe, räumliche Gebilde in einer Ebene so darzustellen, daß sie anschaulich sind und genaue Größenangaben ablesen lassen. Zur Lösung dieser Aufgabe sind verschiedene Verfahren entwickelt worden, in denen entweder die Anschaulichkeit oder die Maßgerechtigkeit mehr zur Geltung kommen. Für die Malerei ist insbesondere die Zentralprojektion von großer Wichtigkeit. Das durch diese Projektion gewonnene Abbild er-

möglicht dem Betrachter ein Erkennen tatsächlicher Zusammenhänge. Am umfassendsten hat erst Leonardo da Vinci die Gesetze der Zentralperspektive untersucht. Auch Albrecht Dürer hat sich intensiv mit perspektivischen Konstruktionen beschäftigt (Hieronymus im Gehäuse, 1514). Die Erkenntnis der Gesetze der Zentralperspektive und ihre Anwendung bedeutete einen Wendepunkt in der Geschichte der Malerei.

Fortsetzung folgt!

Dr. Bruno Hanisch
Halle

Was kann einer, der nicht sein ganzes Leben
den Wissenschaften widmen kann,
doch für sie leisten und wirken?

"... bei wissenschaftlichen Gegenständen kann der Liebhaber oft etwas Erfreuliches und Nützliches leisten. Die Wissenschaften ruhen weit mehr als die Kunst auf der Erfahrung, und zum Erfahren ist gar mancher geschickt. Das Wisseschaftliche wird von vielen Seiten zusammengetragen und kann vieler Hände, vieler Köpfe nicht entbehren. Das Wissen läßt sich überliefern, diese Schätze können vererbt werden; und das von einem Erworbene werden manche sich zueignen. Es ist daher niemand, der nicht seinen Beitrag den Wissenschaften anbieten dürfte. Wie vieles sind wir nicht dem Zufall, dem Handwerk, einer augenblicklichen Aufmerksamkeit schuldig. Alle Naturen, die mit einer glücklichen Sinnlichkeit begabt sind, Frauen, Kinder sind fähig, uns lebhafte und wohlgefaßte Bemerkungen mitzuteilen."

aus "Jenaer Weisheiten Goethes"
von Leopld Hartmann

Preisaufgaben

0 7 ①

Ein Vater will seinem Kind 3 Vornamen geben. Er hat eine Liste mit 300 Vornamen zur Auswahl. Wieviele Möglichkeiten hat er, 3 verschiedene Vornamen zu geben?

0 8 ①

Die Summe dreier Brüche sei gleich $\frac{23}{60}$. Die Zähler der Brüche sind proportional den Zahlen 3, 1 und 2. der Nenner des ersten Bruches verhält sich zum Nenner des zweiten wie 2:1 und der Nenner des zweiten zum Nenner des dritten wie 2:3. Welche drei unkürzbaren Brüche sind das?

0 9 ①

Von einem gleichschenkligen Dreieck sind die Fläche und eine Winkel bekannt. Es sind die drei Seiten und die fehlenden Winkel zu berechnen.

0 10 ①

Es ist zu zeigen, daß für beliebige reelle Zahlen x, y, z die folgende Ungleichung gilt:

$$4x(x+y)(x+z)(x+y+z) + y^2z^2 \geq 0 .$$

0 11 ①

Es ist zu zeigen, daß für $|A| < 1$ und $\sin\alpha = A\sin(\alpha+\beta)$ gilt:

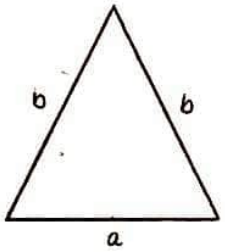
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin\beta}{\cos\beta - A} .$$

0 12 ②

Разность двух целых чисел равна 48. Если первое число разделить на второе, то в частном получится 4, а в остатке – 3. Найти эти числа.

Einsendeschluß: 15. 5. 1982

Aufgabe N 26 nach Kai-Uwe Scherer, Jessen



R - Inkreisradius
r - Umkreisradius

Zur Berechnung des Flächeninhaltes A kennen wir folgende Formeln:

$$A = \frac{ab^2}{4r} \qquad (1)$$

$$A = R \cdot s \qquad (2)$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-b)} \qquad (3)$$

Aus (1) folgt $r = \frac{ab^2}{4A}$ (4)

Aus (2) folgt $R = \frac{A}{s}$ (5)

Aus (4) und (5) erhalten wir:

$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{A}{s}}{\frac{ab^2}{4A}} = \frac{4A^2}{ab^2 \cdot s} \qquad (6)$$

Aus (3) folgt $A^2 = s(s-a)(s-b)^2$ (7)

Da für s gilt $s = \frac{1}{2}\ a+b$

folgt $A^2 = s(b - \frac{a}{2}) \cdot \frac{a^2}{4}$ (8)

Aus (6) und (8) folgt

$$\frac{R}{r} = \frac{4A^2}{ab^2 \cdot s} = \frac{4 \cdot s(b - \frac{a}{2}) \cdot \frac{a^2}{4}}{ab^2 \cdot s}$$

$$\frac{\varphi}{r} = \frac{a}{b} - \frac{a^2}{2b^2} .$$

==========

Aufgabe N 27

Wir numerieren die Würfel entsprechend den Feldern des Schachbrettes. Unten links steht also der Würfel a1. Die sechs Seiten des Würfels bezeichnen wir mit "oben", "unten", "links", "rechts", "vorn" und "hinten" entsprechend ihrer Lage auf dem Schachbrett.
Die Würfel liegen also immer auf der Fläche, die wir mit "unten" bezeichnen.

Die schwarze Seite des Würfels befindet sich also auf einer der sechs Seiten. Wir wollen zuerst die schwarzen Seiten der Würfel der Vertikalen a in eine einheitliche Lage bringen.

Wir bringen zuerst die schwarze Seite des Würfels a1 nach "hinten". Befindet sie sich "rechts" oder "links", bringen wir die schwarze Seite durch Drehen der Vertikalen 1 nach "unten". Befindet sie sich "oben", "unten" oder "vorn", so bringen wir sie durch Drehen der Horizontalen 1 nach "hinten".

Durch weiteres Drehen der Vertikalen 1 ändert sich nun die Lage der schwarzen Seite von a1 nicht mehr. Wir können also so weiter verfahren, mit den Würfeln a2 bis a8.

Hat a8 die gewünschte Lage, so bringen wir alle schwarzen Seiten der Vertikalen a durch drehen der Horizontalen nach "oben" und durch eine Drehung der Vertikalen a nach "links". Jetzt wird die Lage der schwarzen Seiten von a beim Drehen der Horizontalen nicht mehr verändert.

Wir können also das Verfahren mit den Vertikalen b bis h fortsetzen.
Am Schluß werden die Vertikalen noch einmal gedreht und alle schwarzen Seiten sind oben.

Aufgabe N 29.

$$\frac{abc + abd + acd + bcd}{4} = \frac{1}{2}\left(ab\,\frac{c+d}{2} + cd\,\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{c+d}{2} + \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 \frac{a+b}{2}\right)$$

$$= \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)$$

$$\leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) \frac{a+b+c+d}{4}$$

$$= \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3$$

Also ist

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$$

Bleibt zu zeigen $\frac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$

$$\frac{a+b+c+d}{4} - \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}\left(3(a^2+b^2+c^2+d^2) - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left((a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2\right) \geq 0.$$

Aufgabe N 30

In dem Produkt $(2^n)!$ ist jeder zweite Faktor gerade, jeder vierte durch 4 teilbar usw., denn

$$(2^n)! = 2^n(2^n-1)(2^n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

In diesem Produkt sind also 2^{n-1} gerade, 2^{n-2} durch 4 teilbare, 2^{n-3} durch 8 teilbare Faktoren und ein durch 2^n teilbarer Faktor enthalten.

Also ist $\prod_{i=1}^{n} 2^{2^{n-1}}$ ein Teilprodukt von $(2^n)!$.

Die höchste Potenz von 2, die $(2^n)!$ teilt, ist also gleich $\sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} = 2^n-1$.

Aufgabe N 31

Angenommen, wir färben den ersten Streifen rot. Dann gibt es für den nächsten Streifen 2 Möglichkeiten der Farbgebung. Liegt die zweite Farbe fest, gibt es für den dritten Streifen wieder 2 Möglichkeiten usw. bis alle Streifen gefärbt sind.
Es gibt also $3 \cdot 2^{12}$ Möglichkeiten der Farbgebung.

Aufgabe N 32 nach Frank Bendin, Berlin

Sei h die Höhe der Pappel, α, β und γ die gemessenen Winkel. Es ist dann

$$\tan \alpha = \frac{h}{100}, \quad \tan \beta = \frac{h}{200}, \quad \tan \gamma = \frac{h}{300}.$$

Aus $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ folgt deshalb

$$\begin{aligned}
\tan \gamma = \frac{h}{300} &= \tan (90^\circ - (\alpha+\beta)) \\
&= \cot (\alpha+\beta) \\
&= \frac{1}{\tan(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} \\
&= \frac{1 - \frac{h}{100} \cdot \frac{h}{200}}{\frac{h}{100} + \frac{h}{200}} = \frac{100 \cdot 200 - h^2}{300\,h}
\end{aligned}$$

Also ist $2h^2 = 100 \cdot 200$, also $h = 100$.

Aufgabe N 33 nach Stephan Bönewitz, Leipzig

Es ist zu zeigen, daß

$$\frac{3}{a+b+c} < \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \quad \text{für } a,b,c > 0 \text{ gilt.}$$

Wir stellen die Gleichung um und erhalten

$$0 < \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+c} - \frac{1}{a+b+c}$$

$$= \frac{(a+b+c)-(a+b)}{(a+b)(a+b+c)} + \frac{(a+b+c)-(b+c)}{(a+b+c)(b+c)} + \frac{(a+b+c)-(a+c)}{(a+b+c)(a+c)}$$

$$= \frac{c}{(a+b)(a+b+c)} + \frac{a}{(b+c)(a+b+c)} + \frac{b}{(a+c)(a+b+c)} .$$

Weil $a,b,c > 0$ ist, ist auch jeder Summand größer Null.

Aufgabe N 34

$$\frac{3}{a+b+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}$$

$$3(a+b)(a+c) = (a+b+c)(2a+b+c)$$

$$3a^2+3ac+3ab+3bc = (a+b+c)^2 + a(a+b+c)$$

$$a^2+bc = b^2+c^2$$

$$a^2 = b^2+c^2-bc \qquad (1)$$

Aus $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$
und wegen $\alpha = 60^\circ$ erhalten wir
$a^2 = b^2 + c^2 - bc$, woraus sich die zu beweisende Gleichung gewinnen läßt (man rechne von (1) rückwärts).

Aufgabe N 35

$$5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$$

$$\lg 5^{\lg x} = \lg (50 - x^{\lg 5})$$

$$x^{\lg 5} = 50 - x^{\lg 5}$$

$$x^{\lg 5} = 25$$

$$x = 25^{\frac{1}{\lg 5}} = 25^{\log_5 10} = 5^{2\log_5 10} = 5^{\log_5 100}$$

$$\underline{\underline{x = 100}}$$

Aufgabe N 36

$x, y > 0$

Zu zeigen: $(x+y)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \geq 4$

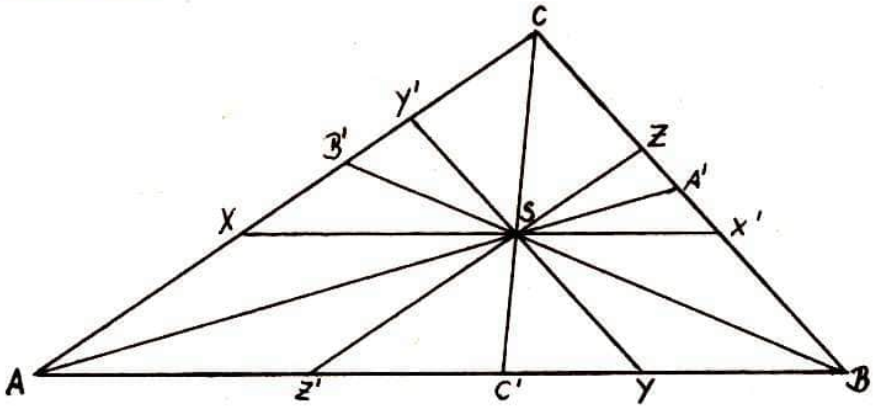
$$\frac{y}{x} + 1 + 1 + \frac{x}{y} \geq 4$$

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$$

$$y^2 + x^2 \geq 2xy$$

$$(x-y)^2 \geq 0$$

Aufgabe N 38



Die in der Skizze eingezeichneten Hilfslinien XX', YY', ZZ' sind Parallelen zu den Dreiecksseiten AB, BC, AC. Dann gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{AS}{AA'} = \frac{AA' - SA'}{AA'} = 1 - \frac{SA'}{AA'} = \frac{YY'}{BC} \qquad (1)$$

Weiter gilt $\frac{SB'}{BB'} = \frac{CZ}{BC}$ (2)

$$\frac{SC'}{CC'} = \frac{BX'}{BC} \qquad (3)$$

Da die Vierecke YBX'S und SZCY' nach Konstruktion Parallelogramme sind, gilt YS = BX' und SY' = CZ. Damit ist auch wegen (2) und (3)

$$\frac{YY'}{BC} = \frac{YS}{BC} + \frac{SY'}{BC} = \frac{BX'}{BC} + \frac{CZ}{BC} = \frac{SC'}{CC'} + \frac{SB'}{BB'}$$

und wegen (1) folgt dann die Behauptung

$$\frac{SA'}{AA'} + \frac{SB'}{BB'} + \frac{SC'}{CC'} = 1.$$

Der Mathematiker-Kongreß der DDR 1981

In der Zeit vom 28. September bis zum 2. Oktober 1981 wurde von der Mathematischen Gesellschaft der DDR ein Internationaler Kongreß an der Karl-Marx-Universität in Leipzig durchgeführt. Viele namhafte Mathematiker aus dem In- und Ausland prägten das Profil dieses Kongresses. Zur Eröffnung des bedeutenden wissenschaftlichen Ereignisses sprach Prof. Dr. H. Schumann, Sektionsdirektor der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität in Leipzig, zum 100. Jahrestag der Gründung des Leipziger Mathematischen Seminars. Dann begannen in verschiedenen Abteilungen die Fachvorträge, in denen die neuesten Forschungsergebnisse aller Teildisziplinen der Mathematik vorgestellt wurden. Insgesamt wurden 3 Plenarvorträge, 40 Übersichtsvorträge, 83 Kurzvorträge und 47 Poster-Beiträge gehalten. die Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität war auf diesem Kongreß durch 10 Wissenschaftler vertreten, die in drei Übersichtsvorträgen, sieben Kurzvorträgen sowie einem Poster-Beitrag jüngste Forschungsergebnisse unserer Sektion demonstrierten.

An dem Kongreß nahmen bekannte Mathematiker aus der UdSSR, der ČSSR, der VR Polen, der VR Ungarn, der VR Bulgarien, der VR Rumänien, den USA, der BRD, der Schweiz, Österreichs, den Niederlanden und Japan teil. Es muß besonders hervorgehoben werden, daß neben der Vorstellung von Ergebnissen der mathematischen Grundlagenforschung auch die Anwendung der Mathematik in der Praxis, insbesondere in den Kombinaten unserer Republik, sowie Probleme der Vermittlung der Mathematik in den Schulen einen beachtlichen Raum einnahm. Es wurde vorgestellt, welch hoher Anspruch an den Mathematiker gestellt wird auf dem Gebiet der Entwicklung neuer komplizierter Gerätesysteme sowie bei der optimalen Steuerung von technologischen und Produktionsprozessen. Mathematiker aus der Volksbildung berichteten über Probleme der Vermittlung des mathematischen Denkens in der Schule sowie über die Entwicklung des Denkvermögens, der Phantasie und des Schöpfertums. Auf dem Gebiet der Mathematik-Methodik wurde über konzeptionelle Probleme

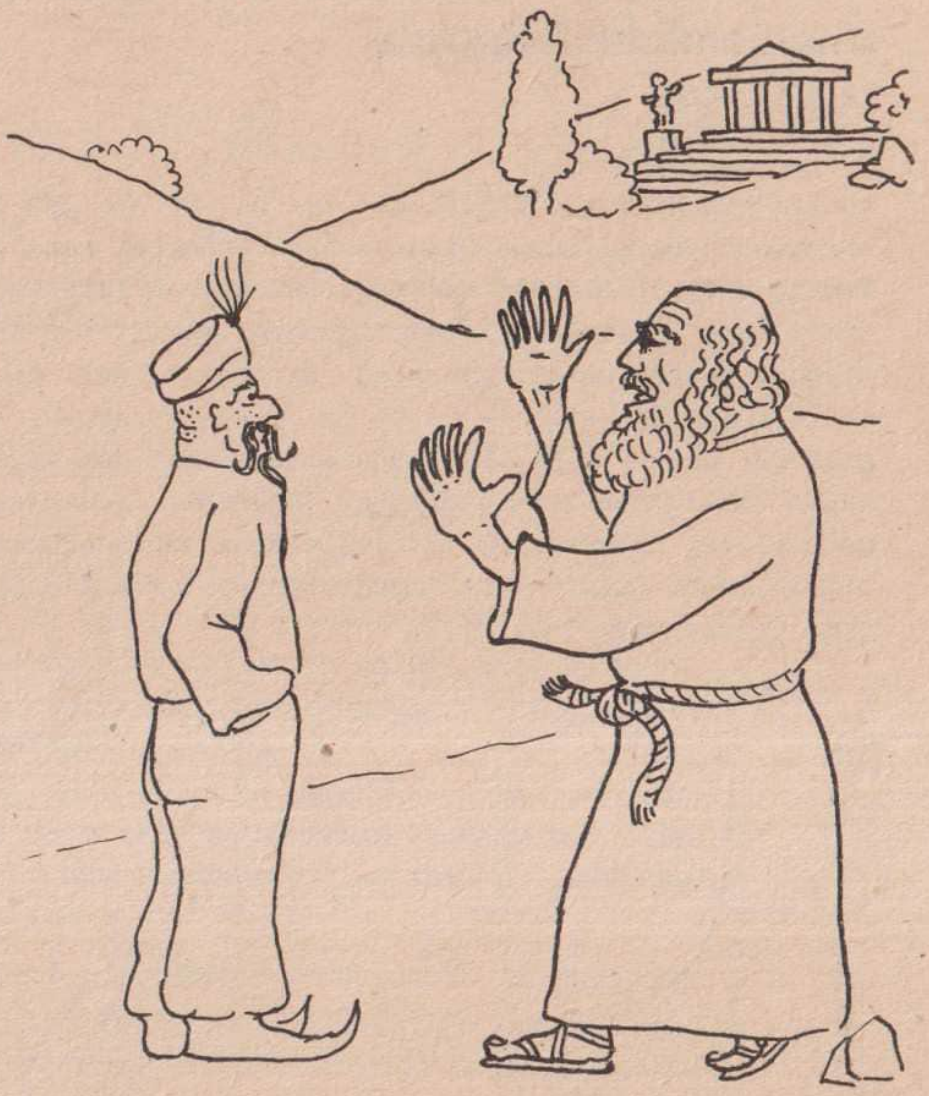
der Vermittlung der Geometrie in den unteren Klassenstufen und über andere Probleme gestritten.
So bot der Mathematikerkongreß in Leipzig nicht nur den Mathematikern, die auf dem Gebiet der Grundlagenforschung arbeiten, eine Gelegenheit zum wissenschaftlichen Meinungsaustausch. Auch zwischen Mathematikern der Universitäten und denen der Industrie sowie zwischen den Mathematiklehrern unserer Oberschulen konnte ein fruchtbarer Meinungsaustausch geführt werden, der viele Anregungen für die künftige Arbeit vermittelte.

Prof. Walk
Bereich Numerik/Optimierung

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner, H. Zein
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 15. 1. 1982

„Ist Ihnen nun klar, warum wir Griechen das Hexagesimalsystem bevorzugen?"



3
82

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

16. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Uneigentliche Integrale

1. Einführung

Mit $\int_a^b f(x)\,dx\,, \quad -\infty < a < b < \infty$

wollen wir hier wie üblich das aus der Schule gut bekannte bestimmte Integral (auch Riemannsches Integral genannt) einer Funktion f(x), die auf dem abgeschlossenen Intervall [a,b] definiert ist, verstehen. Dieser Integralbegriff ist an zwei wesentliche Voraussetzungen gebunden. Einerseits soll die Funktion f(x) auf [a,b] beschränkt sein (d.h. es existiert ein M, so daß $|f(x)| \leq M$ gilt für alle $x \in [a,b]$), andererseits ist der Definitionsbereich von f immer ein endliches Intervall. Man kann nun die Frage stellen, ob man auch Integrale über unbeschränkte Funktionen bilden kann, oder ob das Integrationsintervall unbeschränkt sein kann (siehe Abb. 1a, 1b).

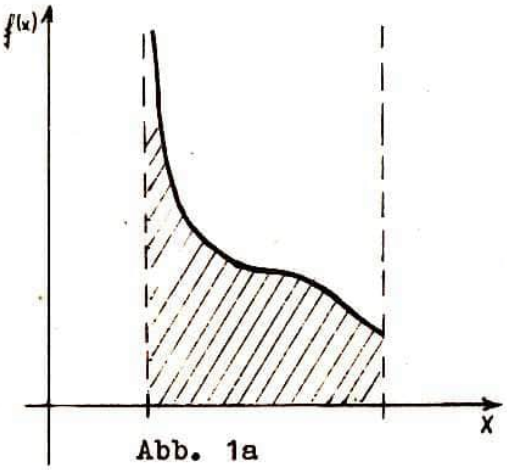


Abb. 1a

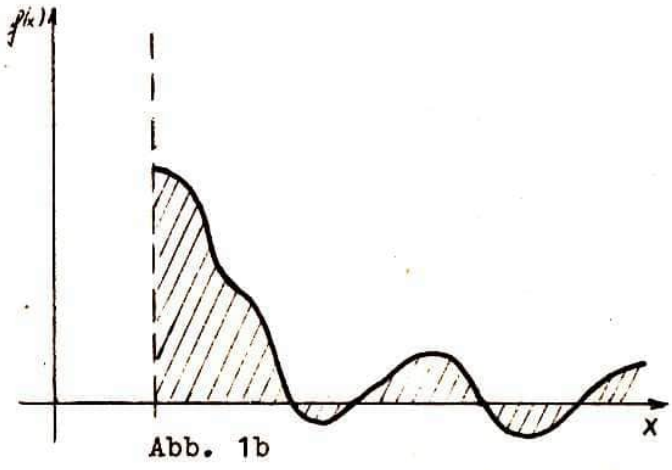


Abb. 1b

Das Ziel der folgenden Betrachtungen besteht darin, einen kurzen Einblick in die Theorie solcher Integrale zu geben, und anhand von Beispielen die Nützlichkeit derartiger Untersuchungen zu demonstrieren.

2. Definitionen und Beispiele

Wir beschränken uns zunächst auf die beiden typischen Fälle.

<u>1. Fall</u> Es sei $-\infty < a < b < \infty$. Für jedes ε, $0 < \varepsilon < b-a$, sei $f(x)$ im Intervall $[a+\varepsilon, b]$ integrierbar (d.h. es existiert $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$). Dann definieren wir

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx ,$$

falls dieser Limes existiert.

<u>2. Fall</u> Es sei $-\infty < a < \infty$. Für jede Zahl R, $R > a$, sei $f(x)$ im Intervall $[a,R]$ integrierbar (d.h. es existiert $\int_a^R f(x)dx$). Dann definieren wir

$$(2) \qquad \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\,dx ,$$

falls dieser Limes existiert.

Die in (1) und (2) definierten Integrale bezeichnet man als uneigentliche Integrale. Im Falle, daß die betreffenden Grenzwerte existieren, sagt man auch in Anlehnung an die Theorie unendlicher Reihen, daß die uneigentlichen Integrale konvergieren. Anderenfalls heißen sie divergent.
Hat man die Deutung des bestimmten Integrals als Flächeninhalt im Sinn, so ergeben sich obige Verallgemeinerungen zwangsläufig, wenn man den Inhalt unbeschränkter Flächenstücke bestimmen will (siehe Abb. 1a und 1b).

Natürlich können die beiden Prozeduren kombiniert und mehrfach angewendet werden. Ist zum Beispiel $f(x)$ eine in jedem Intervall $[a+\varepsilon, R]$, $\varepsilon > 0$, $R > a+\varepsilon$, integrierbare Funktion, so wird

$$(3) \qquad \int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx$$

gesetzt, wobei b eine beliebige reelle Zahl größer als a ist (siehe Abb. 2).

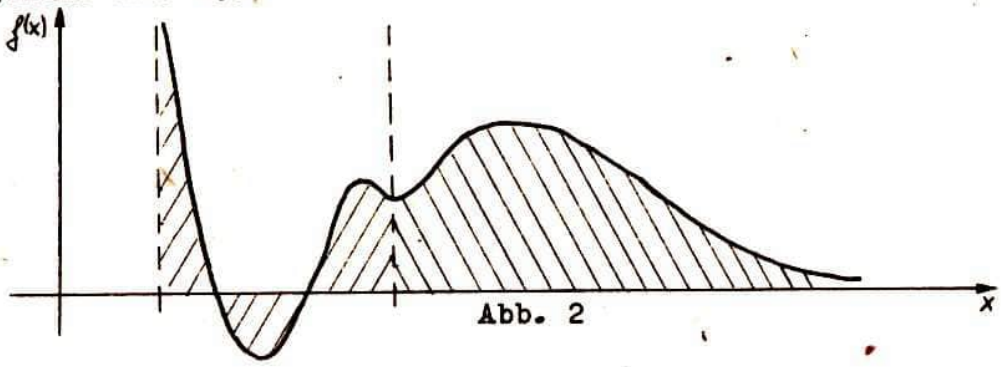


Abb. 2

Man überzeugt sich leicht davon, daß diese Definition von der speziellen Wahl der Zahl b unabhängig ist.
Wir möchten nun noch daran erinnern, daß sowohl die Stetigkeit der Funktion f(x) auf dem endlichen Intervall [a,b] als auch die Monotonie in Verbindung mit der Beschränktheit hinreichende Bedingungen für die Existenz des <u>bestimmten</u> Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ sind.
Auf uneigentliche Integrale können diese Sachverhalte natürlich nicht ausgedehnt werden.

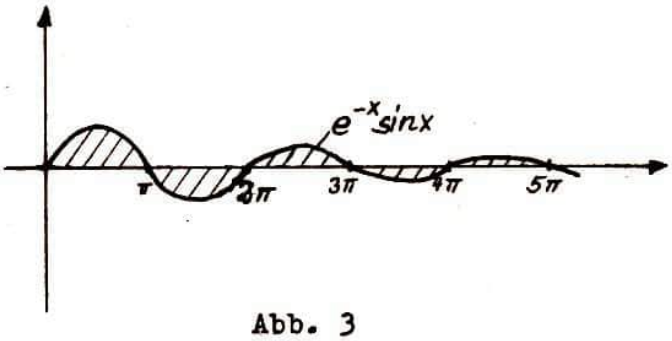


Abb. 3

<u>Beispiele:</u>

a) Es gilt

(4) $$\int_0^\infty e^{-x} \sin x \, dx = \frac{1}{2}$$

Dazu berechnen wir zunächst das unbestimmte Integral von $e^{-x} \sin x$. Zweimalige partielle Integration liefert uns die Gleichung

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -e^{-x}(\cos x + \sin x) - \int e^{-x} \sin x \, dx,$$

woraus sofort

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

folgt. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist dann

$$\int_0^R e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x}(\cos x + \sin x) \Big|_0^R = -\frac{1}{2} e^{-R}(\cos R + \sin R) + \frac{1}{2}$$

Für $R \longrightarrow \infty$ strebt die Funktion e^{-R} gegen 0. Die Funktionen cos R und sin R sind ihrerseits beschränkt ($|\cos R| \leq 1$, $|\sin R| \leq 1$). Also ist

$$\lim_{R \to \infty} e^{-R} \cos R = \lim_{R \to \infty} e^{-R} \sin R = 0,$$

und es gilt

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-x} \sin x \, dx = \frac{1}{2} .$$

b) Es gilt

$$(5) \qquad \int_0^1 x^p \, dx = \begin{cases} \frac{1}{p+1} & , \text{ falls } p > -1 \\ \infty & , \text{ falls } p \leq -1 \end{cases}$$

Für $p \neq -1$ haben wir

$$\int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}$$

und somit

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 x^p \, dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{p+1} - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon^{p+1}}{p+1} .$$

Daraus erhalten wir das gewünschte Resultat wegen

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon^{p+1}}{p+1} = \begin{cases} 0 \, , & \text{falls } p+1 > 0 \\ -\infty \, , & \text{falls } p+1 < 0 \, . \end{cases}$$

Im Falle $p = -1$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = \ln 1 - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ln \varepsilon = \infty.$$

Von Interesse war natürlich nur der Fall $p < 0$, da es sich für $p \geq 0$ offensichtlich um das übliche bestimmte Integral handelt (siehe Abb. 4).

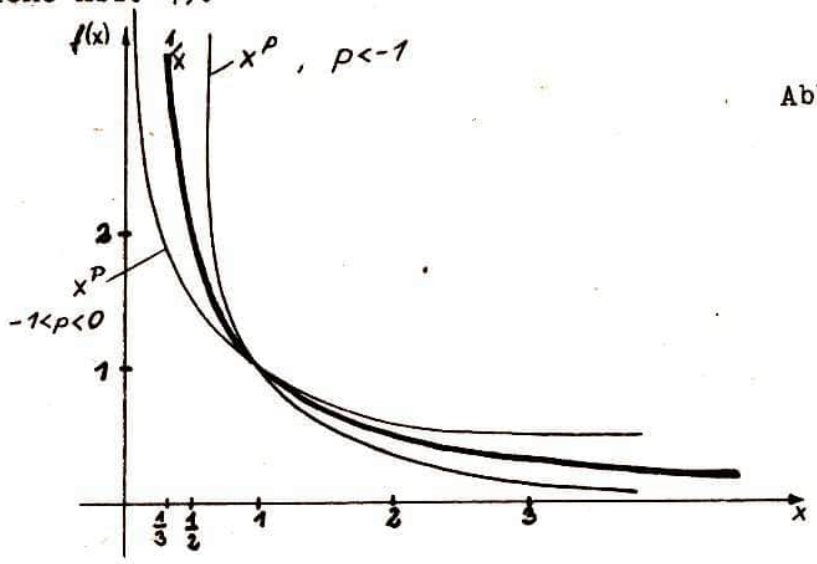


Abb. 4

c) Es gilt

$$(6) \qquad \int_1^\infty x^p \, dx = \begin{cases} \frac{1}{p+1} & , \text{ falls } p < -1 \\ \infty & , \text{ falls } p \geq -1 \end{cases}$$

Der Beweis verläuft analog zu b) (siehe auch Abb. 4).
Aus (5) und (6) ersieht man insbesondere, daß für keine reelle Zahl p das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x^p \, dx$$

konvergiert. Ist zum Beispiel $\alpha > 0$ (die anderen Fälle sind, wie bereits bemerkt, uninteressant), so heißt dies, daß die Fläche zwischen den Koordinatenachsen und der Kurve $y = \frac{1}{x^\alpha}$ einen unendlich großen Flächeninhalt besitzt (siehe auch Abb. 4).

3. Ein Konvergenzkriterium

Oftmals ist nicht die genaue Berechnung eines uneigentlichen Integrals gefragt, sondern es interessiert vielmehr, ob es konvergiert oder divergiert. Für positive Funktionen läßt sich ein relativ einfaches aber wirkungsvolles Konvergenzkriterium angeben.

Satz: Die Funktionen f(x) und g(x) seien auf jedem abgeschlossenen Intervall $[a+\varepsilon, b]$, $0 < \varepsilon < b-a$, $-\infty < a < b < \infty$ integrierbar.

a) Es sei $0 \leq f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in (a,b]$ und es existiere das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)\,dx$. Dann konvergiert auch das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ und es gilt

$$(7) \qquad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

b) Es sei $0 \leq g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in (a,b]$ und es sei $\int_a^b g(x)\,dx = \infty$. Dann gilt auch $\int_a^b f(x)\,dx = \infty$.

c) Entsprechende Aussagen gelten für uneigentliche Integrale vom Typ (2).

Beweis. Wir beschränken uns auf den Beweis von a) und b).
Wegen $f(x) \geq 0$ gilt

$$\int_{a+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx, \text{ falls } \varepsilon' \geq \varepsilon$$

(Vergrößerung des Integrationsintervalles). Für $\varepsilon \downarrow 0$ ist somit

$$F(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

eine monoton wachsende Funktion. Außerdem folgt aus den Voraussetzungen von a) für alle ε, $0 < \varepsilon < b-a$,

$$F(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a+\varepsilon}^{b} g(x)\,dx \leq \int_{a}^{b} g(x)\,dx.$$

Damit ist $F(\varepsilon)$ für $\varepsilon \to 0$ eine monoton wachsende und beschränkte Funktion und besitzt demzufolge einen Grenzwert. Führen wir in der letzten Ungleichung den Grenzprozeß durch, ergibt sich

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(\varepsilon) \leq \int_{a}^{b} g(x)\,dx,$$

womit die Aussage a) bewiesen ist.
Im Falle von b) haben wir

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} g(x)\,dx \leq \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

für alle ε. Für $\varepsilon \downarrow 0$ folgt sofort $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \infty$.
Dieser Satz bietet uns gute Möglichkeiten, über die Konvergenz bzw. Divergenz uneigentlicher Integrale zu entscheiden. Als Vergleichsintegrale bieten sich zum Beispiel (5) und (6) an.

<u>Beispiele:</u>
a) Es gilt

$$(8) \qquad \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} < \infty .$$

Man sieht sofort, daß

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{x\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

für alle $x \geq 1$ gilt. Wählen wir $g(x) = \frac{1}{x^2}$, so folgt (8) aus unserem Satz unter Berücksichtigung von (6). Abschätzung (7) liefert uns noch in Verbindung mit (6)

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{3} .$$

b) Es gilt

$$(9) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{1+x^2}\,dx = \infty .$$

Für $x \geq 1$ gilt die Abschätzung $\frac{x^{3/2}}{1+x^2} \geq \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{x}{x^2+x^2} = \frac{1}{2x}$.

Verwenden wir diese, so folgt aus Teil b) des Satzes und aus (6)

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{1+x^2}\,dx > \int_1^\infty \frac{x^{3/2}}{1+x^2}\,dx \geq \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty ,$$

womit (9) bewiesen ist.

Fortsetzung folgt!

Dr. H. J. Schmeißer
Sektion Mathematik, FSU
Bereich Analysis

Lösung zu Aufgabe N 40

Aufgabe N 40

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) \geq \frac{3}{4}$$

Falls die Behauptung stimmt, folgt

$$2\cos^2\alpha + 2\cos^2\beta + 2\cos^2(\alpha+\beta) \geq \frac{3}{2}$$
$$1 + \cos 2\alpha + 1 + \cos 2\beta + 2\cos^2(\alpha+\beta) \geq \frac{3}{2}$$
$$2 + 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\cos^2(\alpha+\beta) \geq \frac{3}{2}$$
$$\cos^2(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$
$$+ \frac{1}{4}\cos^2(\alpha-\beta) - \frac{1}{4}\cos^2(\alpha-\beta) + 1 - \frac{3}{4} \geq 0$$

und letztendlich

$$\left(\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2(\alpha-\beta) \geq 0,$$

was stets erfüllt ist.

Preisaufgaben

O 13 ① Man bestimme den kleinsten Wert der Funktion
$\varphi(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|$,
wenn a,b,c,d reelle Zahlen mit $a<b<c<d$ sind.

O 14 ① Man löse die Gleichung
$x + y = (x - y)^2$,
wobei x und y nichtnegative ganze Zahlen sind.

O 15 ① Man zeige, daß für nichtnegative Zahlen a stets
$a^3 + 2a^2 + 15 > 13a$ gilt.

O 16 ① Man zeige, daß für vier Punkte A,B,C,D in der Ebene
$AD \perp BC$ gilt, falls $AB \perp CD$ und $AC \perp BD$ gilt.

O 17 ① Es sei $a_1, a_2, \ldots a_n$ eine geometrische Folge.
Aus den Werten $s_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
und $s_2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$
bestimme man den Wert $p = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.

O 18 ② Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции с её основаниями, равны S_I и S_2. Найти площадь трапеции.

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.
Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 15. 6. 1982

Mathematik im Dienste der Kunst

Fortsetzung

Mathematik und Musik

Zum Schluß wollen wir zeigen, daß die Mathematik auch in der Tonkunst ein weites Anwendungsgebiet findet. Es ist bekannt, daß die Akustik die Grundlagen für eines der schönsten Kulturprodukte eines Volkes, für die Musik, liefert. Bekanntlich wird die Höhe eines Tones durch die Zahl der Schwingungen der Tonquelle pro Sekunde gegeben. Der Ton mit der Schwingungszahl $n = 440\ s^{-1}$ wird seit ca. 30 Jahren als Kammerton a_1 (bzw. a') bezeichnet.
Zu einem Tonsystem gelangt man auf folgende Weise.
Mit dem Grundton einer schwingenden Saite schwingen gleichzeitig höher gelegene Töne, die sogenannten harmonischen Obertöne, mit. Ihre Schwingungszahlen stehen zur Schwingungszahl des Grundtons in ganzzahligen Verhältnissen: $n_o : n_1 : n_2 : n_3 \ldots = 1 : 2 : 3 \ldots$
Die Gesamtheit dieser Töne bildet das natürliche, als harmonisch rein bezeichnetes Tonsystem. Diese natürliche Stimmung erklingt z. B. in einem guten a capella Chor.
Das Verhältnis der Schwingungszahlen zweier Töne T_1 und T_2 heißt Intervall der beiden Töne (Entfernungsverhältnis der beiden Töne ihrer Höhe nach). Die in der Musik gebräuchlichen Intervalle sind durch folgende relativen Schwingungszahlen gegeben:

Prim	Secunde	Große Terz	Kleine Terz	Quart	Quint	Sext	Septime	Oktave
1:1	9:8	5:4	6:5	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1

Nehmen wir z. B. den Grundton c_1 mit der Schwingungszahl $n_o = 264\ s^{-1}$, so erhalten wir die Schwingungszahlen für die C-Dur-Tonleiter:

c_1	d_1	e_1	f_1	g_1	a_1	h_1	c_2
$264s^{-1}$	$297s^{-1}$	$330s^{-1}$	$352s^{-1}$	$396s^{-1}$	$440s^{-1}$	$495s^{-1}$	$528s^{-1}$

Zu einem anderen Tonsystem gelangt man durch Oktaven- und Quintensprünge. Die Schwingungszahlen dieses nach Pythagoras benann-

ten Tonsystems lassen sich dann folgendermaßen bestimmen:

$$n = n_o \cdot 2^p \cdot 3^q \quad (p,q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

(z. B. bei Violine oder Cello)

Außer diesen beiden natürlichen Stimmungen hat man eine künstliche Stimmung eingeführt, das sogenannte temperierte Tonsystem, bei welchem Oktaven rein sind und jede Oktave in 12 gleich große Intervalle geteilt ist. Ist n_o die Schwingungszahl (oder Frequenz) des tiefsten Tons, so sind die Frequenzen aller anderen Töne durch

$n = n_o \cdot 2^p \cdot x^q$ gegeben, wobei $x = \sqrt[12]{2}$ bedeutet und p,q die Werte 0,1,2,3,... annehmen können. $x \approx 1{,}05946$.

Daß gleich benannte Töne in diesen 3 Tonsystemen kleine Unterschiede in den Schwingungszahlen aufweisen, läßt sich durch Rechnung zeigen. In einem Falle kann man auch praktisch den Unterschied Schülern vorführen. Auf der Violine werden z. B. 2 Stimmungen verwendet. Gestimmt wird sie nach dem quintenreinen System, gespielt wird nach dem harmonisch reinen System.

Man lasse folgende Intervalle vorspielen:

Reine Sext (leere G-Saite und e_1 auf der D-Saite)

Leere e-Saite (e_2).

Vergleicht man die beiden e-Töne, so ist der Ton e_2 etwas höher als e_1... $n_{g_1} = 440 \cdot (\frac{2}{3})^2 = 185{,}555\ s^{-1}$, $n_{e_1} = n_{g_1} \cdot (\frac{5}{3}) = 325{,}926 s^{-1}$

$n_{e_2} = 440 \cdot (\frac{3}{2}) = 660{,}0\ s^{-1}$, $n_{e_2} : n_{e_1} = 2{,}025 > 2$

Diese geringen Unterschiede in den Schwingungszahlen kann das menschliche Ohr im allgemeinen schwerlich empfinden. Darum ist durchaus der musikalische Genuß bei Musikwerken, wo alle 3 Tonsysteme Verwendung finden, gewährleistet.

Eine Dur-Tonleiter läßt sich auf jedem Ton aufbauen. Dadurch erhält man weitere Töne des Systems. So entstehen die in der Musik mit # bzw. b bezeichneten Töne, wie z. B. fis, cis, dis oder es, ges, des. Als Beispiele wollen wir die Schwingungszahlen für fis und ges berechnen. Für die Berechnungen legen wir folgende Schwingungszahlen zugrunde:

$n_{c_1} = 264\ s^{-1}$, $n_{d_1} = n_{c_1} \cdot \frac{9}{8}$, $n_{e_1} = n_{c_1} \cdot \frac{5}{4}$, $n_{f_1} = n_{c_1} \cdot \frac{4}{3}$

$n_{g_1} = n_{c_1} \cdot \frac{3}{2}$, $n_{a_1} = n_{c_1} \cdot \frac{5}{3}$, $n_{h_1} = n_{c_1} \cdot \frac{15}{8}$, $n_{c_2} = n_{c_1} \cdot 2$.

Die Schwingungszahlen für fis und ges ergeben sich aus den Beziehungen

$n_{fis} : n_{d_1} = n_{e_1} : n_{c_1}$ und $n_{ges} : n_{f_1} = n_{f_1} : n_{e_1}$

$n_{fis} = n_{c_1} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{8} = 1{,}406 \cdot n_{c_1}$

$n_{ges} = \frac{16}{15} \cdot \frac{4}{3} \cdot n_{c_1} = 1{,}422 \cdot n_{c_1}$

Demnach ist n_{ges} etwas höher als n_{fis}, da $n_{ges} : n_{fis} = 1{,}011 > 1$

und $\frac{n_{ges}}{n_{c_1}} \cdot \frac{n_{fis}}{n_{c_1}} = 2.$

Legt man aber der Berechnung dieser beiden Schwingungszahlen das pythagoräische System zugrunde, so kommen wir zu folgenden Ergebnissen:

$c_1 \quad g_1 \quad d_2 \quad a_2 \quad e_3 \quad h_3 \quad fis_4$ 6 Quintensprünge nach oben

$fis \quad fis_2 \quad fis_3$ 3 Oktavensprünge nach unten

$n_{fis} = n_{c_1} \cdot (\frac{3}{2})^6 \cdot 2^{-3} = n_{c_1} \cdot 2^{-9} \cdot 3^6 = n_{c_1} \cdot 1{,}424$

Eine ähnliche Überlegung ergibt für ges folgende Schwingungszahl:

$n_{ges} = n_c \cdot (\frac{3}{2})^{-6} \cdot 2^4 = n_{c_1} \cdot 2^{10} \cdot 3^{-6} = n_{c_1} \cdot 1{,}4047 \ldots \quad n_{ges} < n_{fis}$

$ges \quad des \quad as \quad es \quad b \quad f \quad c_1$ 6 Quintensprünge nach unten

$ges \quad ges \quad ges \quad ges$ 4 Oktavensprünge nach oben

Im temperierten Tonsystem ist $n_{fis} = n_{ges} = n_{c_1} \cdot (\sqrt[12]{2})^6 = n_{c_1} \cdot 1{,}414.$

Es ist wieder $\frac{n_{fis}}{n_{c_1}} \cdot \frac{n_{ges}}{n_{c_1}} = 2.$

Die 3 genannten Tonsysteme sind natürlich nicht die einzigen möglichen. Musikwissenschaftler und Komponisten haben bereits vor längerer Zeit versucht, die durch Halbierung der Halbtöne erhaltenen 24 temperierten Vierteltöne zu verwenden und dadurch eine Ausdruckserweiterung der Musik zu erreichen. Es existieren sogar Kompositionen für Drittelton-, Sechstelton- und Zwölfteltonmusik (nicht zu verwechseln mit der Zwölftonmusik, einer Kompositionstechnik). Trotz vieler Versuche haben sich diese Tonsysteme nicht wirksam in der europäischen Musik durchsetzen können. Maßgebend für den musikalischen Genuß ist die Empfindlich-

keit des menschlichen Ohres. Es ist zweifellos richtig, daß die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres durch Übung und Gewöhnung beeinflußt bzw. erhöht werden kann. So wie es Menschen gibt, die ein gutes Zahlengedächtnis besitzen, so gibt es auch solche, die sich sozusagen Schwingungszahlen von Tönen merken können. Leider besitzt nicht jeder Berufsmusiker diese Fähigkeit.

Im Grunde genommen lassen sich mit Hilfe der Obertonreihe mit den relativen Schwingungszahlen 1 : 2 : 3 : 4 ... beliebig viele Tonsysteme bilden. Z. B. könnte man eine Tonleiter mit 6 Ganztonschritten aufbauen, da $\frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = 2{,}002 > 2$, also eine Oktave ergibt.

Mit dem Vierteltonschritt 35 : 34 ließe sich die Vierteltonmusik darstellen, da $(\frac{35}{34})^{24} = 2{,}005 > 2$ ergibt.

Die Eignung von neuen Tonsystemen für künstlerische Zwecke könnte durch elektronische Instrumente geprüft werden.

Jedenfalls ist erfahrungsgemäß der Zusammenklang mehrerer Töne umso angenehmer, je kleiner die Zahlen sind, die die relativen Schwingungszahlen ausdrücken.

<u>Literaturangaben:</u>

Kleine Enzyklopädie Mathematik, VEB Bibliographisches Institut Leipzig

Lexikon der Kunst, VEB E. A. Seemann Verlag Leipzig

Hugo Steinhaus: Kaleidoskop der Mathematik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Dr. Bruno Hanisch
Halle

Der schöpferische Irrtum

Irrtümer haben ihren Wert;
jedoch nur hie und da.
Nicht jeder, der nach Indien fährt,
endeckt Amerika.

Erich Kästner

Aufgabe N 41 nach Hans-Martin Kölpin, Berlin

Man suche eine natürliche Zahl n so, daß das Gleichungssystem $nx - y = 5$ (I)

$2x + 3ny = 7$ (II)

eine Lösung besitzt, bei der x positiv und y negativ ist.

Aus (I) erhalten wir $y = nx - 5$ (2)

Eingesetzt in (II) $x = \frac{15n + 7}{3n^2 + 2}$ (3)

Aus (2) und (3) erhalten wir

$$n = \frac{7n - 10}{3n^2 + 2}$$

Es soll gelten $x > 0$, $y < 0$, also

$$\frac{15n + 7}{3n^2 + 2} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{7n - 10}{3n^2 + 2} < 0$$

Da $3n^2 + 2 > 0$ für alle n, muß gelten

$15n + 7 > 0$ und $7n - 10 < 0$.

Also für n muß gelten $-\frac{7}{15} < n < \frac{10}{7}$.

In diesem Intervall liegen aber nur 0 und 1 als natürliche Zahlen.

Die Probe ergibt für $n = 0$ und $n = 1$ die gewünschten Lösungen.

Aufgabe N 42

Wir setzen $x = \sqrt[3]{2}$, also $x^3 = 2$.

In I eingesetzt erhalten wir

$$cx^2 + bx + a = 0.$$

Die ersten beiden Summanden multiplizieren wir mit 2, den dritten mit x^3.

$$ax^3 + 2cx^2 + 2bx = 0 \qquad (1)$$

oder $$ax^2 + 2cx + 2b = 0 \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) erhalten wir

$$2cx^2 = -ax^3 - 2bx \quad | \cdot a$$
$$ax^2 = -2cx - 2b \quad | \cdot c$$
$$2acx^2 = -a^2x^3 - 2abx \quad | : 2$$
$$acx^2 = -2c^2x - 2bc$$
$$acx^2 = -a^2 - abx$$
$$acx^2 = -2c^2x - 2bc$$
$$-2c^2x + abx + a^2 - 2bc = 0$$
$$x(ab - 2c^2) + a^2 - 2bc = 0 \qquad (3)$$
$$x = \frac{a^2 - 2bc}{ab - 2c^2}$$

Da x irrational ist, läßt sich x nicht durch rationale Zahlen abc auf diese Weise darstellen.
Die Gleichung (3) hat also nur Lösungen, wenn alle Summanden gleich Null sind, d. h.

$ab - 2c^2 = 0$ oder $a^2 - 2bc = 0$.

Hieraus erhalten wir

$ab = 2c^2$ und
$a^4 = 4b^2c^2$.

Falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$ sind, können wir dividieren und erhalten

$$a^3 = 2b^3$$

d. h. $\frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$. Dies geht aber nicht für rationale a und b. Also müssen a und b gleich Null sein und somit auch c.

Aufgabe N 37

Es gilt

$$\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b}$$

Da $a > 0$ und $b > 0$, folgt

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

Aufgabe N 39

Wir beweisen die Kontraposition der Aussage, d. h. folgende Aussage: Wenn $m = p \cdot q$ $(p,q > 1)$ ist, dann teilt m nicht $(m-1)! + 1$.

Es gilt dann nämlich:

p teilt $(p \cdot q-1)!$, da $p < p \cdot q - 1$.

Das gleiche gilt für q. Somit teilt $p \cdot q$ die Zahl $(p \cdot q-1)!$ und kann daher nicht $(p \cdot q-1)! + 1$ teilen.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner, H. Zein
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 10. 2. 1982
Titelbild: Wolfgang Schäfer

OJM

XXI

4

82

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Uneigentliche Integrale (Fortsetzung)

4. Anwendungen

4.1. Flächenberechnung

Wie schon im 1. Abschnitt angedeutet, eignet sich das uneigentliche Integral zur Berechnung des Flächeninhaltes unbeschränkter Flächenstücke. Als Beispiel wollen wir die Fläche I zwischen dem Intervall $-1,1$ auf der x-Achse und der Funktion $f(x) = \log |x|$ berechnen (siehe Abb.5).
Die Funktion $\log |x|$ ist gerade, also gilt:

$$I = -2 \int_0^1 \log x \, dx$$

$$= +2 \int_{-\infty}^0 e^x \, dx$$

$$= +2 \lim_{R \to \infty} e^x \Big|_{-R}^0 = 2.$$

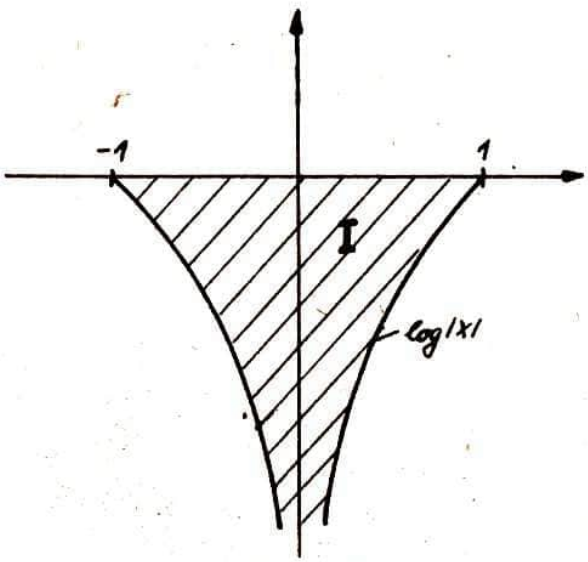


Abb. 5

4.2. Die Gammafunktion

Eine in der Mathematik wichtige und häufig auftretende Funktion ist die sogenannte Gammafunktion. Sie wird definiert durch die uneigentlichen Integrale

$$(10) \qquad \Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} \, dx \, , \quad t > 0.$$

Wir wollen zunächst nachweisen, daß diese Definition sinnvoll ist. Man hat zu zeigen, daß für jedes $t > 0$ das Integral in (10) konvergiert. Dazu benötigen wir einige Abschätzungen.

L e m m a : Für alle $n = 0,1,2,\ldots$ und alle $x > 0$ gilt

$$(11) \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < e^x .$$

Beweis: Der Beweis wird durch Induktion geführt. Es ist klar, daß $e^x > 1$ ist für alle $x > 0$. Dies zeigt die Richtigkeit von (11) für $n = 0$. Es werde nun

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} < e^x , \qquad x > 0$$

vorausgesetzt. Wir bilden die Funktion

$$f(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} .$$

Natürlich ist $f(x)$ beliebig oft differenzierbar für alle reellen x, insbesondere gilt

$$f'(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} > 0.$$

Letzteres ergibt sich aus der Induktionsvoraussetzung. Somit ist die Funktion $f(x)$ streng monoton wachsend auf dem Intervall $(0,\infty)$. Das heißt aber auch, daß

$$f(x) > f(0) = 0$$

für alle $x > 0$ gilt. Setzen wir in diese Ungleichung die explizite Gestalt von $f(x)$ ein, entsteht die gewünschte Ungleichung (11).

Bemerkungen:

a) (11) erhält man sofort, falls man die Darstellung

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

als bekannt voraussetzt.

b) Für unsere Zwecke benötigen wir lediglich die schwächere Ungleichung

$$(12) \quad e^x > \frac{x^n}{n!} , \quad x > 0, \quad n=0,1,2,\ldots$$

die unmittelbar aus (11) folgt.

Nun können wir zum Nachweis der Konvergenz von (10) übergehen. Für $t \geq 1$ ist lediglich das Verhalten der Funktion $e^{-x} x^{t-1}$ für große x von Interesse, da dann

$$\lim_{x \downarrow 0} e^{-x} x^{t-1} = \begin{cases} 1 & t = 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

gilt, und demzufolge wegen der Stetigkeit jedes bestimmte Integral

$$\int_0^R e^{-x} x^{t-1} \, dx , \quad R > 0 ,$$

existiert. Aus (12) erhält man

$$e^{-x} < n! \, x^{-n} , \quad n=0,1,2,\ldots, x \quad 0.$$

Dies führt zu der Abschätzung

$$e^{-x} x^{t-1} < n! \, x^{t-1-n} , \; x > 0, \quad n=0,1,2,\ldots .$$

Wir wählen nun n so, daß $t-1-n < -1$ gilt (d. h. $n > t$). Dann folgt aus unserem Satz (Teil c) und aus (6)

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} \, dx < n! \int_0^\infty x^{t-1-n} \, dx < \infty .$$

Damit ist (10) für alle $t \geq 1$ konvergent.
Es sei nun $0 < t < 1$. Man zerlegt

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} \, dx = \int_0^1 e^{-x} x^{t-1} \, dx + \int_1^\infty e^{-x} x^{t-1} \, dx .$$

Verwenden wir (5), so ergibt sich wiederum mit Hilfe des Satzes

$$\int_0^1 e^{-x} x^{t-1} \, dx \leq \int_0^1 x^{t-1} \, dx < \infty , \text{ da } t-1 > -1.$$

Andererseits ist falls $t-1 < 0$

$$\int_1^\infty e^{-x} x^{t-1} \, dx \leq \int_1^\infty e^{-x} \, dx = \lim_{R \to \infty} -e^{-x} \Big|_1^R = e^{-1} < \infty .$$

Wir stellen also fest, daß (10) für alle $t > 0$ konvergiert.

Die Gammafunktion besitzt viele schöne Eigenschaften. Wir wollen hier lediglich zeigen, daß gilt:

(13) $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$,

(14) $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n=1,2,\ldots$.

Beweis: Durch partielle Integration gelangt man zu der Formel

$$\int e^{-x} x^t \, dx = -e^{-x} x^t + t \int e^{-x} x^{t-1} \, dx \, , \quad t > 0, \; x > 0.$$

Unter Verwendung dieser Beziehung ergibt sich

$$\Gamma(t+1) = \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-x} x^t \, dx = \lim_{R \to \infty} e^{-R} R^t + t\,\Gamma(t).$$

Nach (12) ist

$$0 < e^{-R} R^t \leq n!\, R^{t-n} \, , \qquad n=0,1,2,\ldots \, .$$

Wählen wir $n > t$, so folgt hieraus

$$\lim_{R \to \infty} e^{-R} R^t = 0, \qquad \text{für alle } t > 0.$$

Dies vervollständigt den Beweis von (13). Als Spezialfall erhält man durch Iteration

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n-1) = \ldots = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\;\Gamma(1) = n!\,\Gamma(1).$$

Daraus folgt (14), da

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \, dx = \lim_{R \to \infty} -e^{-x} \Big|_0^R = 1.$$

Auf Grund der Eigenschaft (14) kann die Gammafunktion somit als Erweiterung des Fakultätsbegriffes auf positive reelle Zahlen angesehen werden. Man schreibt auch manchmal $t! = \Gamma(t+1)$ für $t > 0$.

Die Formel $\Gamma(t) = \frac{1}{t}\Gamma(t+1)$, $t > 0$, zeigt, daß $\lim_{t \downarrow 0} \Gamma(t) = \infty$ ist. Wir wollen noch, ohne hier auf Beweise eingehen zu können, hier erwähnen, daß $\Gamma(t)$ beliebig oft differenzierbar und konvex ist. Man erhält folgende graphische Darstellung (siehe Abb. 6).

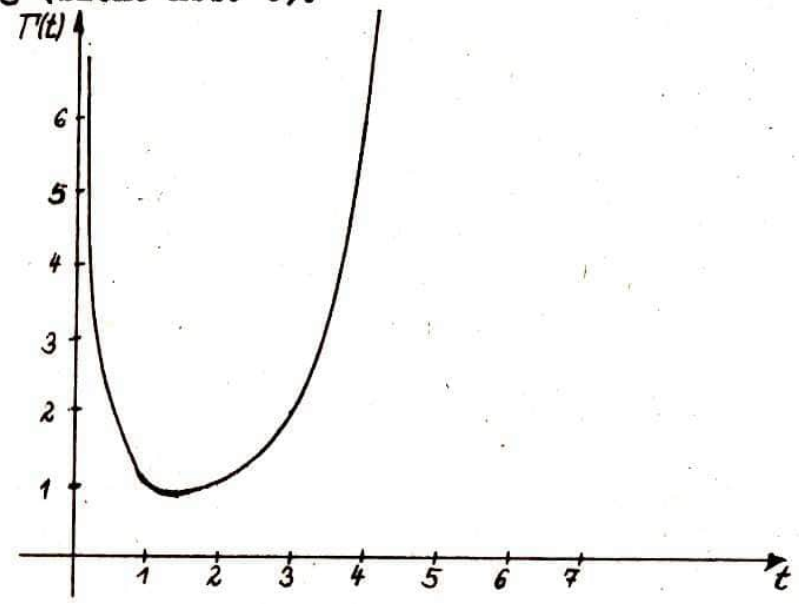


Abb. 6

4.3. Das Integralkriterium für die Konvergenz unendlicher Reihen

Die Theorie der uneigentlichen Integrale ermöglicht es uns, neben dem Quotienten- und dem Wurzelkriterium, ein weiteres wichtiges Konvergenzkriterium aufzustellen.

Wir betrachten eine unendliche Reihe der Gestalt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, bestehend aus nichtnegativen Gliedern a_n, $n=1,2,\ldots$. Bildet man die Treppenfunktion

$$h(x) = a_n \,, \quad x \in [n-1,n), \quad n=1,2,\ldots \,,$$

so gilt offensichtlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_0^{\infty} h(x)\, dx \quad \text{(siehe Abb. 7).}$$

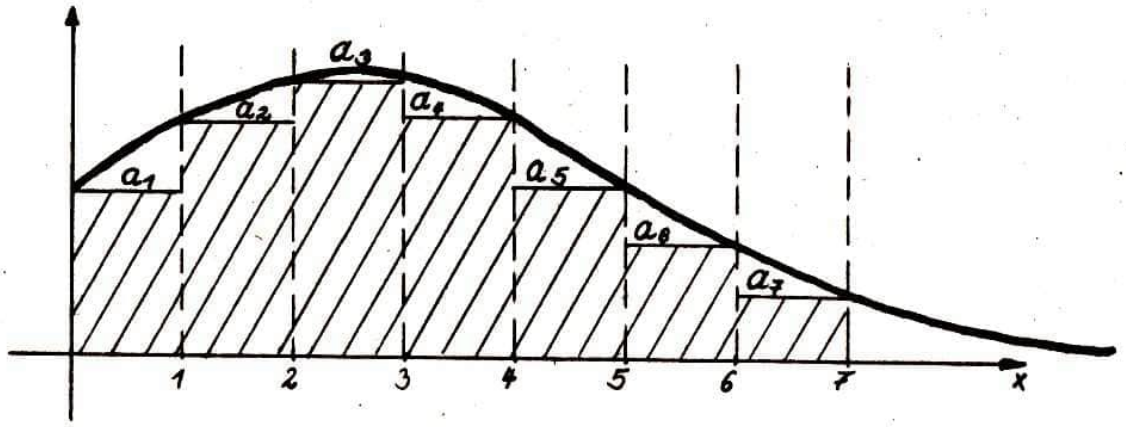


Abb. 7

Unser Satz von Abschnitt 3 liefert nun sofort das folgende Konvergenzkriterium (siehe Abb. 7).

(K) Existiert eine Funktion $g(x)$ mit $0 \le h(x) \le g(x)$ für $x \ge a$, $0 < a < \infty$, und gilt

$$\int_a^{\infty} g(x)\, dx < \infty \,,$$

so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

(D) Existiert eine Funktion $g(x)$ mit $0 \le g(x) \le h(x)$ für $x \ge a$, $0 < a < \infty$, und gilt

$$\int g(x)\, dx = \infty \,,$$

so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Beispiele:

a) Es gilt für $\alpha > 1$

(15) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty .$$

Bilden wir die Treppenfunktion $h(x)$ für $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$, so gilt

$$h(x) \leq \frac{1}{x^{\alpha}}, \text{ für alle } x > 0.$$

Nach unserem Kriterium (K) und (6) ist dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \int_1^{\infty} h(x)\, dx \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} < \infty .$$

b) Es gilt für $\alpha \leq 1$

(16) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \infty .$$

Für $\alpha \leq 0$ ist (16) klar. Für $0 < \alpha < 1$ ist

$$h(x) \geq \frac{1}{(x+1)^{\alpha}}, \quad x > 0.$$

Also folgt mit (D) und (6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \geq \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^{\alpha}} = \infty .$$

c) Es gilt

(17) $$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) < \infty .$$

Wir haben die Identität

$$\log(n+1) = \sum_{k=1}^{n} (\log(k+1) - \log k) = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

Somit können wir umformen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \log \frac{k}{k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} I_k .$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k .$$

Abbildung 8 gibt eine graphische Veranschaulichung dieser Be-

ziehung.

$$I_k = \frac{1}{k} - \log\frac{k+1}{k}$$

$$= \frac{1}{k} - \int_{k-1}^{k} g(x)\,dx,$$

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

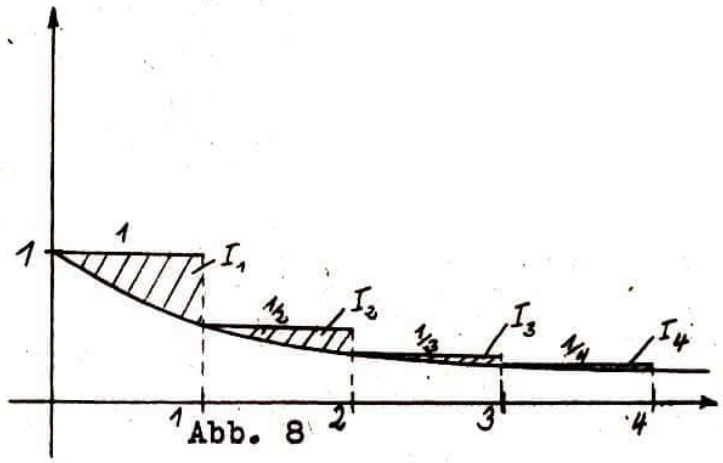


Abb. 8

Wir wollen nun eine Abschätzung für I_k angeben.
Dazu benutzen wir die Ungleichung

(18) $\log(1+x) \leq x$, falls $x > -1$.

Zum Beweis von (18) wird wieder die Methode des Lemmas aus 4.2 verwendet. Man betrachtet die Funktion

$$f(x) = x - \log(1+x), \quad x > -1.$$

Dann ist $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ und somit gilt

$$f'(x) > 0, \text{ falls } x > 0,$$
$$f'(x) < 0, \text{ falls } -1 < x < 0,$$
$$f'(0) = 0.$$

$f(x)$ ist also auf $(0,\infty)$ monoton wachsend, so daß

$$x - \log(1+x) = f(x) > f(0) = 0, \quad x > 0$$

gilt. Andererseits ist $f(x)$ auf $(-1,0)$ monoton fallend, d. h. es gilt

$$x - \log(1+x) = f(x) > f(0) = 0, \text{ falls } -1 < x < 0.$$

Damit ist (18) gezeigt.
Setzen wir $x = -\frac{1}{k+1}$ bzw. $x = \frac{1}{k}$, so folgt aus (18)

$$\log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) < -\frac{1}{k+1} \quad \text{und}$$

$$\log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = -\log\left(1+\frac{1}{k}\right) > \frac{1}{k}.$$

Kombiniert man beide Ungleichungen, ergibt sich

$$0 < I_k < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2}.$$

Nach (15) ist dann

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1)\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \ .$$

Außerdem sieht man, daß

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1)\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right),$$

da

$$\lim_{n \to \infty} (\log(n+1) - \log n) = \lim_{n \to \infty} \log(1+\frac{1}{n}) = 0$$

ist, womit (17) gezeigt ist.

Der Grenzwert $c = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)$ wird als Euler-Mascheronische Konstante bezeichnet. Numerisch kann er angenähert mit

$$c = 0{,}57721566\ldots$$

angegeben werden.

5. Aufgaben

5.1 Man berechne die Fläche zwischen der Geraden $x = 1$ und den Kurven $y = \frac{1}{x}$ und $y = \frac{1}{x+1}$.

5.2 Für ein Polynom $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_0$ berechne man $\int_0^{\infty} e^{-x} P(x)dx$.

5.3 Konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$?

5.4 Für welche Werte α konvergiert das uneigentliche Integral $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log^{\alpha} x}$?

(Hinweis: Substitution $y = \log x$).

Dr. H.-J. Schmeißer
Sektion Mathematik,
FSU Jena, Bereich Analysis

PREISAUFGABEN

0 19 ①

Es ist zu zeigen, daß für reelle a, b und c aus der Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab$$

folgt, daß $a = b = c$ ist.

0 20 ①

Es ist zu zeigen, daß für reelle x und y die Ungleichung

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4 \geq 1$$

erfüllt ist.

0 21 ②

Für welche x und y gilt

$$3(2 \log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y) = 10$$

$$x \cdot y = 81?$$

0 22 ①

Für welches x gilt

$$5^x - 5^{3-x} = 20?$$

0 23 ①

Die Summe der ersten 4 Elemente einer arithmetischen Reihe ist 124, die Summe der letzten 4 Elemente ist 156. Die Summe aller Elemente ist 210. Man gebe diese Reihe an.

0 24 ②

Построить четырёхугольник по двум противоположным сторонам и трём углам.

Liebe Wurzelleser!

Auf unsere Mitteilung in Heft 11/81 über die Nachbestellung von Wurzelheften früherer Jahrgänge sind bei uns schon einige solcher Bestellungen eingegangen. Wir bitten um noch etwas Geduld für die Auslieferung. Die gewünschten Hefte werden dieses Schuljahr noch verschickt!

Wir möchten an dieser Stelle außerdem nochmals darauf aufmerksam machen, daß ein Wurzelabonnement grundsätzlich nur mit der Post vereinbart werden kann und <u>nicht</u> über die Redaktion möglich ist!

Die Redaktion

XXI. Olympiade Junger Mathematiker
Bezirksolympiade – Klassen 11/12

1. Es sei $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3.
Man beweise: Wenn $P(x)$ eine Nullstelle der Form $x_0 = b + \sqrt{c}$ mit rationalen Zahlen b, c besitzt, für die $\sqrt{c}$ irrational ist, so ist auch $x_1 = b - \sqrt{c}$ eine Nullstelle von $P(x)$.

---

2. a) Beweisen Sie, daß kein Polyeder existiert, das genau sieben Kanten besitzt!

   b) Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n mit $n > 7$ ein Polyeder existiert, das genau n Kanten besitzt!

   Hinweis: Ein Polyeder ist ein ebenflächig begrenzter Körper. Im Sinne der Aufgabenstellung wird positives Volumen vorausgesetzt; weitere Anforderungen wie Konvexität werden nicht gestellt.

---

3. Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a,b,c) reeller Zahlen, für die folgendes gilt:
Die für alle reellen $x \neq -c$
durch $f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$ definierte Funktion f
genügt den folgenden Bedingungen:
(1) Es gibt reelle Zahlen x, für die $f(x)$, $f(f(x))$ und $f(f(f(x)))$ definiert ist.
(2) Für jede solche Zahl x mit $x \neq -1$ gilt
$$f(f(f(x))) = \frac{x - 1}{x + 1}.$$

---

4. Man ermittle alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen q, die die folgende Eigenschaft haben:
Es gibt eine von 0 verschiedene Zahl a_1 und eine natürliche Zahl $k \geqq 3$ so, daß in der durch
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (n=1,2,3,\ldots)$$
definierten Zahlenfolge (a_n) das Glied a_k gleich dem arithmetischen Mittel der beiden vorangehenden Glieder a_{k-1} und a_{k-2} ist.

5. 37 Karten, von denen jede auf der einen Seite rot und auf der anderen Seite blau gefärbt ist, seien so auf einen Tisch gelegt, daß genau 9 von ihnen oben ihre blaue Seite zeigen. Es sollen nun in "Arbeitsgängen" Karten umgedreht werden, und zwar in jedem einzelnen "Arbeitsgang" genau 20 beliebige der 37 Karten.
Untersuchen Sie, ob man mit endlich vielen "Arbeitsgängen" erreichen kann, daß alle 37 Karten
a) oben ihre rote Seite,
b) oben ihre blaue Seite
zeigen! Falls das möglich ist, ermitteln Sie jeweils die kleinste Anzahl der dafür hinreichenden "Arbeitsgänge"!

6A. Unter einem "Stapel" von Gegenständen (wie z. B. Konservenbüchsen) sei eine Anordnung wie in Abb. A verstanden, bei der jeweils für $k=1,\ldots,m$ in der k-ten Reihe genau k Gegenstände stehen. Dabei ist m eine natürliche Zahl, die als "Höhe" des Stapels bezeichnet werde.
(Die Frage der praktischen Herstellbarkeit von Stapeln mit großer Höhe sei in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt.)

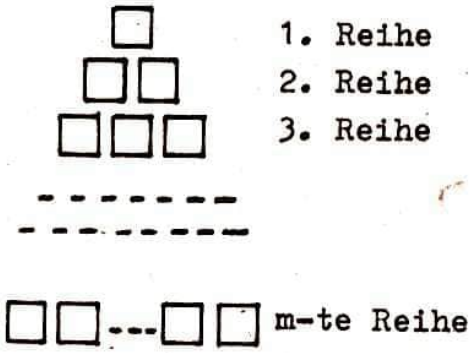


Abb. A

Untersuchen Sie, ob eine Zahl z mit $1000 \leqq z \leqq 10000$ so existiert, daß es einen Stapel aus z Gegenständen gibt, der sich in zwei Stapel von untereinander gleicher Höhe umordnen läßt!

6B. Man beweise für jede ganze Zahl n mit $n \geqq 3$: Ist A_n die Anzahl aller verschiedenen Darstellungen von n als Summe dreier positiver ganzzahliger Summanden, so gilt

$$\left|A_n - \frac{n^2}{12}\right| < \frac{1}{2}.$$

Dabei werden zwei Darstellungen genau dann als verschieden bezeichnet, wenn sich nicht die eine durch Änderung der Reihenfolge der Summanden aus der anderen erhalten läßt.

Lösungen

Aufgabe N 45

Wir erweitern den Bruch mit

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$$

und bestimmen a, b, c durch ein Gleichungssystem:

$$\frac{59}{1 + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}}{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}}$$

$$= \frac{59(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}}{(a-4b+6c) + \sqrt[3]{2}(3a+b-4c) + \sqrt[3]{4}(-2a+3b+c)}$$

Damit der Nenner rational wird, muß gelten

$3a + b - 4c = 0$ und

$-2a + 3b + c = 0$ und

$a - 4b + 6c = p$ (p beliebig, rational).

Dieses Gleichungssystem hat folgende Lösungen:

$$a = \frac{13}{59} \cdot p$$

$$b = \frac{5}{59} \cdot p$$

$$c = \frac{11}{59} \cdot p$$

Setzen wir $p = 59$, so erhalten wir

$$a = 13, \quad b = 5, \quad c = 11.$$

Der Erweiterungsfaktor lautet also

$$13 + 5\sqrt[3]{2} + 11\sqrt[3]{4}.$$

Wir erhalten also

$$\frac{59}{1 + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}} = 13 + 5\sqrt[3]{2} + 11\sqrt[3]{4}.$$

Aufgabe N 46

Hat eine natürliche Zahl $n > 1$ die kanonische Darstellung

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}$$

p_i - Primzahlen

α_i - natürliche Zahlen > 0

wobei o. B. d. A. $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_t$ angenommen werden kann, so ist jede Zahl

$m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\beta_t}$ mit ganzen β_i und $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ ein Teiler von n. Dabei entspricht jedem geordneten t-Tupel $\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \beta_t$, dessen β_i die obigen Bedingungen erfüllen, genau ein Teiler m von n und umgekehrt. Die Anzahl aller Teiler einer natürlichen Zahl n ist demnach gleich der Anzahl der geordneten t-Tupel $\beta_1, \ldots, \beta_t$. Da es für jedes i $(i=1,2,\ldots,t)$ gerade α_i+1 Werte für die β_i gibt, erhält man für die Anzahl der Teiler einer Zahl n mit der kanonischen Darstellung

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_t+1) = \prod_{i=1}^{t} (\alpha_i+1).$$

In dieser Aufgabe wird eine Zahl gesucht, für die

$\prod_{i=1}^{t} (\alpha_i+1) = 20$ gilt.

Für jede Zerlegung von 20 in ein Produkt natürlicher Zahlen größer als 1 ergibt sich

1. $20 = 20 \Rightarrow \alpha_1 = 19$
2. $20 = 2 \cdot 10 \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 9$
3. $20 = 4 \cdot 5 \Rightarrow \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 4$
4. $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 4$

Damit sind alle natürlichen Zahlen, die genau 20 Teiler besitzen, die Zahlen p_1^{19}, $p_1p_2^9$, $p_1^3p_2^4$ und $p_1p_2p_3^4$. Die kleinsten dieser vier Formen sind

2^{19}, $3 \cdot 2^9$, $3^3 \cdot 2^4$ und $5 \cdot 3 \cdot 2^4$.

unter diesen ist $5 \cdot 3 \cdot 2^4 = 240$ die kleinste.

Aufgabe N 47

Wir potenzieren die Ausgangsgleichung und erhalten

$$a + x + 3(\sqrt[3]{a+x})^2 \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} + 3\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}\,(\sqrt[3]{a-\sqrt{x}})^2 + a - \sqrt{x} = b$$

oder umgeformt

$$2a + 3\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}\,\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}\,(\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}}) = b.$$

Nach Voraussetzung gilt dann

$$2a + 3\sqrt[3]{a^2-x}\,\sqrt[3]{b} = b$$

$$\sqrt[3]{a^2-x} = \frac{b-2a}{3\sqrt[3]{b}}$$

$$a^2-x = \frac{(b-2a)^3}{27b}$$

$$x = a^2 - \frac{(b-2a)^3}{27b}$$

Damit die Ausgangsgleichung eine Lösung besitzt, muß $a^2 - \frac{(b-2a)^3}{27b} \geq 0$ sein, da $\sqrt{x}$ nur für $x \geq 0$ sinnvoll ist.

Jahresinhalt 1981

Heft		Seite
1	A. Chalamajser: P.S.Alexandrow	2
	B. Hanisch: Hyperkomplexe Zahlen und Drehungen im Raum	11
2	A. Chalamajser: P.S.Alexandrow (II und Schluß)	18
	K. Herrmann: Einführung in die Topologie	26
3	P.M. Schmidt: Spiegelung am Kreis	34
	K. Herrmann: Einführung in die Topologie (II)	44
4	N. Bitterlich: Jugendobjekt "Programmpaket Statistik"	50
	Aufgaben der Bezirksolympiade 1981 (Klassenstufe 11/12)	52
	K. Herrmann: Einführung in die Topologie (III)	59
5	H. Menzer: Diophantische Gleichungen	66
	Lösungen der Bezirksolympiade (Klassenstufe 11/12)	74
6	O. Stamfort: Die Bedeutung der Vermutung in der Mathematik	82
	Unendlich ist nicht gleich Unendlich	88
7/8	W. Linde: Einführung in die lineare Algebra	98
	Aufgaben der DDR-Olympiade (Klassenstufe 11/12)	105
	F. Maschner: Diophantische Gleichungen	107
	Lösungen der DDR-Olympiade (Klassenstufe 11/12)	110
9	F. Maschner: Diophantische Gleichungen (II)	130
	Aufgaben und Lösungen der DDR-Olympiade (Klassenstufe 10)	135
10	W. Linde: Einführung in die lineare Algebra (II)	146

Heft		Seite
11	R. Thiele: Eine mathematische Grundlegung der Musik (Eulers Tentamen novae theoria musicae)	162
12	H. Kretschmer: Walsh-Funktionen	178
	Jugendobjekt "Vorkursvorbereitung"	190

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß 4. 3. 1982

5
82

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Geometrische Wahrscheinlichkeiten I

1. Einführung

In Natur und Gesellschaft gibt es Erscheinungen, die unter einem bestimmten Bedingungskomplex auftreten können, aber nicht auftreten müssen. Man spricht von zufälligen Ereignissen. Sind die zugehörigen Bedingungen beliebig oft wiederholbar, also bei Massenerscheinungen, so kann man den Ereignissen Zahlenwerte zwischen 0 und 1 zuordnen, welche das Verhältnis zwischen Notwendigem und Nichtnotwendigem widerspiegeln - die mathematischen Wahrscheinlichkeiten. Diese Zahlenwerte hängen nicht von der Willkür des Menschen ab: Bei immer größer werdender Anzahl der "Versuche" nähert sich die relative Häufigkeit des Auftretens des Ereignisses (Anzahl der Erfolge geteilt durch Anzahl der Versuche) immer mehr der zugehörigen mathematischen Wahrscheinlichkeit (Gesetz der großen Zahl).
Die moderne Wahrscheinlichkeitsrechnung (etwa ab 1930) ist eine mathematische Theorie zur Berechnung mathematischer Wahrscheinlichkeiten, zur abstrakten Untersuchung konkreter zufälliger Erscheinungen mit dem Ziel der Ausnutzung statistischer Gesetzmäßigkeiten für die praktische Tätigkeit des Menschen.

Als den Vater der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet man heute den sowjetischen Mathematiker A.N. Kolmogorov. In dieser Theorie wird der Begriff der Wahrscheinlichkeit über Axiome eingeführt. Es gab jedoch auch schon früher, im Prinzip seit der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts, Bemühungen, eine Wahrscheinlichkeitsrechnung zu begründen. Diese scheiterten an dem unzureichenden Entwicklungsstand einiger Gebiete der Analysis. Schon damals, etwa seit dem 18. Jahrhundert, kannte man den Begriff der g e o m e t r i s c h e n Wahrscheinlichkeiten. Diese tauchen dann auf, wenn die zufälligen Erscheinungen an gewisse homogene räumliche Strukturen gebunden sind. Man kann sie und die zugehörigen Aufgabenstellungen als einen der Vorläufer und gleichzeitig als Zweig der heutigen Stochastischen Geometrie ansehen, einem relativ jungen Teilgebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das mit vielen Anwendungen in Naturwissenschaften, Technik und Medizin verbunden ist. (Es gibt aber, zu-

mindest in den sozialistischen Ländern, bisher nur sehr wenige Mathematiker, die sich diesem Gebiet zugewandt haben.)

Das allgemeine Prinzip bei den geometrischen Wahrscheinlichkeiten kann man an einem Beispiel erläutern: Wir betrachten ein beschränktes Gebiet G in der Ebene, in das "auf gut Glück" ein Punkt geworfen wird . Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilgebiet G' von G getroffen wird? Dazu müssen wir zunächst erläutern, was wir unter dem Werfen "auf gut Glück" verstehen. Der Punkt soll in jede beliebige Lage in G fallen können, und alle Lagen sind gleichberechtigt in folgendem Sinne: Für Teilgebiete mit gleichem Flächeninhalt F sollen die Treffer gleichmöglich, d. h. gleichwahrscheinlich sein. Es ist deshalb sinnvoll, die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$p(G') = \frac{F(G')}{F(G)}$$

zu setzen.
p(G') mit variablem G' nennen wir auch eine Gleichverteilung auf dem Gebiet G.

(Eine praktische Bestätigung für diese Formel kann man aufgrund des oben erwähnten Gesetzes der großen Zahl etwa durch folgenden Versuch gewinnen: Wir werfen aus genügend großer Entfernung einen Tischtennisball (Punkt) auf ein größeres Tuch oder ein Blatt Papier (G), auf dem ein Teilgebiet (G') ausgezeichnet ist. Bei sehr großer Anzahl der Würfe ist dann das Verhältnis aus der Anzahl der Treffer von G' (T'_G) und der Anzahl der Treffer von G (T_G) annähernd gleich dem Verhältnis der zugehörigen Flächeninhalte. Umgekehrt kann man auf diese Weise auch einen unbekannten Flächeninhalt statistisch bestimmen: Für genügend große Versuchsanzahl gilt

$$F(G') \approx F(G) \frac{T_{G'}}{T_G} .$$

Dieser Grundgedanke wird, etwas verallgemeinert, bei modernen Bildcomputern zur Flächenmessung benutzt.)

Ähnlich wie in der Ebene kann man Gleichverteilungen im Raum oder etwa auf der Kugel einführen. Es sei darauf hingewiesen, daß in unserem Fall p(B) für alle Untermengen B von G definiert

werden kann, für die der Flächeninhaltsbegriff F existiert. Im weiteren genügt es aber, aus dem Schulstoff bekannte Mengen (Gebiete) zu betrachten. Unmittelbar aus der Definition der Gleichverteilung folgen einige wichtige Eigenschaften:

1. $p(\emptyset) = 0$
2. $p(G) = 1$
3. Falls zwei Mengen B_1 und B_2 aus der betrachteten Klasse durchschnittsfremd sind ($B_1 \cap B_2 = \emptyset$), so gilt für ihre Vereinigung $B_1 \cup B_2$
$$p(B_1 \cup B_2) = p(B_1) + p(B_2).$$

Wenn wir nun wieder den einzelnen Mengen B die Ereignisse "Treffen der Menge B beim Wurf 'auf gut Glück'" zuordnen, so gelten die analogen Beziehungen:

1. Das unmögliche Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 0.
2. Dem sicheren Ereignis wird die Wahrscheinlichkeit 1 zugeordnet.
3. Für zwei sich ausschließende Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 ist die Wahrscheinlichkeit, daß eines von beiden eintritt, gleich p_1+p_2.

(Diese Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten beim Wurf "auf gut Glück" sind ganz allgemein erfüllt, wenn man zufällige Ereignisse betrachtet, die sich auf einen festen, wiederholbaren Bedingungskomplex beziehen. In der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung werden sie durch Axiome erfaßt.)

Beispiele und Anwendungen von geometrischen Wahrscheinlichkeiten werden wir in den folgenden Teilen kennenlernen.

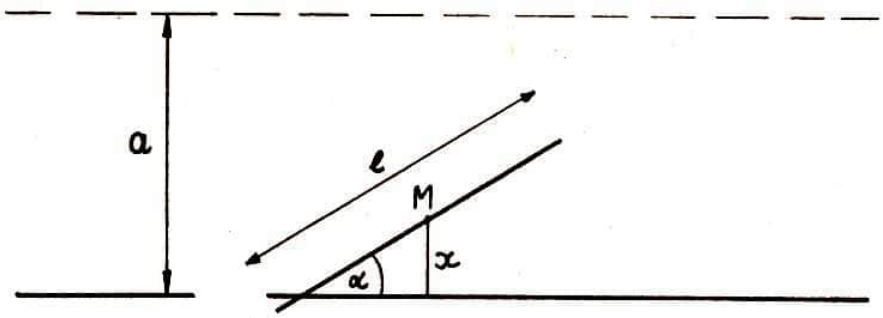
2. Das Buffonsche Nadelproblem

Die folgende Aufgabenstellung ist wohl eine der ältesten und bekanntesten zum Thema "Geometrische Wahrscheinlichkeiten". Sie wurde zuerst (1777) von dem französischen Mathematiker Buffon gelöst und nach ihm benannt.

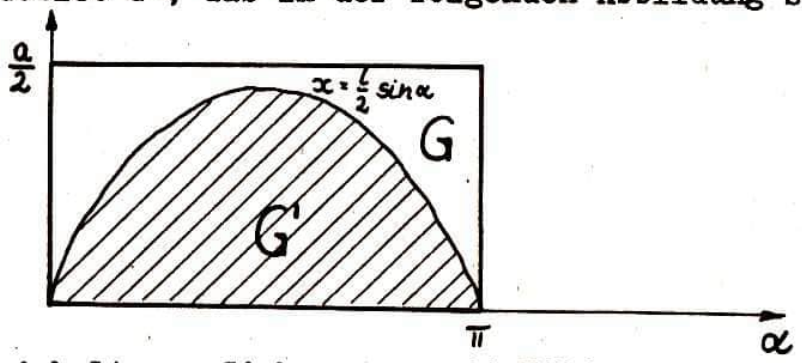
Auf eine Ebene mit einem ausgezeichneten System von parallelen Geraden gleichen Abstandes a wird "auf gut Glück" eine Strecke (Nadel) der Länge l ($l < a$) geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Strecke eine der Geraden schneidet?

Die Lage der Strecke läßt sich hierbei vollständig durch die Lage ihres Mittelpunktes M und den Winkel α zwischen der Strecke und den Geraden bestimmen. Die Strecke "auf gut Glück" werfen heißt dann, daß alle Lagen von M, sagen wir in einem hinreichend großen Gebiet der Ebene, und alle Winkel α zwischen 0 und π gleichmöglich im Sinne von Abschnitt 1 sind. Ein Schnitt mit einer der Geraden findet genau dann statt, wenn der Abstand x von M zur nächstgelegenen Geraden und der Winkel α folgender Bedingung genügen (siehe Abbildung)

$$x \leq \frac{l}{2} \sin\alpha \quad .$$



Auf Grund der Voraussetzung werden alle Wertepaare von (x, α) aus dem Rechteck $G = [0, \frac{a}{2}] \times [0, \pi)$ als gleichmöglich angesehen. Die der obenstehenden Ungleichung genügenden Wertepaare liegen im Gebiet G', das in der folgenden Abbildung schraffiert ist:



Den Flächeninhalt von G' kann man mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen (Klasse 11):

$$F(G') = \int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin\alpha \quad d\alpha \quad = l.$$

Deshalb ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$P = \frac{F(G')}{F(G)} = \frac{2l}{a\pi} \; .$$

Diese Formel gibt uns gleichzeitig die Möglichkeit, die Zahl π experimentell näherungsweise zu bestimmen. Auf Grund des Gesetzes der großen Zahl kann man bei sehr großer Anzahl der Würfe die Wahrscheinlichkeit P wieder durch die relative Häufigkeit der "Treffer" approximieren.

In einer älteren WURZEL-Ausgabe (12/76) wurde das Buffonsche Nadelproblem schon einmal vorgestellt. Die Redaktion erhielt später eine Leserzuschrift, die in der WURZEL 6/77 veröffentlicht wurde. Darin teilte der Lehrer W. Michael von der EOS "Thomas Mann" Oschatz u. a. mit, daß er seit mehreren Jahren das Nadelexperiment mit Schülern der 11. Klasse durchgeführt hatte und immer bessere Näherungen für π erhielt. Das damalige Ergebnis war:

Anzahl der Versuche (für a = 21):	53742
Anzahl der Treffer:	17111
Quotient:	3,1408.

Dies ist für Schüler eine sehr anschauliche Bestätigung für das Wirken statistischer Gesetzmäßigkeiten, und das Beispiel geht über das oft zitierte "Würfeln" mit endlich vielen möglichen Ausgängen hinaus.

Natürlich gibt es in der Mathematik wesentlich bessere Methoden zur Bestimmung der Zahl π . Die eigentliche Bedeutung des Buffonschen Nadelproblems liegt darin, daß es sozusagen Wegbereiter für tiefliegendere mathematische Erkenntnisse war, die auf ähnlichen Prinzipien aufbauen. Ein Beispiel dafür, welches auch zu praktischen Anwendungen führt, werden wir im nächsten Teil behandeln.

Fortsetzung folgt!

Dr. M. Zähle
FSU Jena, Sektion Mathematik
Bereich Wahrscheinlichkeitsrechnung
und mathematische Statistik

Preisaufgaben

0 25 (2) Beweisen Sie: Wenn n eine beliebige natürliche Zahl ist, so beginnt der gebrochene Teil der Dezimaldarstellung von $(5+\sqrt{26})^n$ mit n gleichen Ziffern.

0 26 (1) Es ist zu zeigen, daß zwei unendliche Mengen A und B natürlicher Zahlen existieren, welche folgende Eigenschaft haben: Jede natürliche Zahl läßt sich auf eindeutige Weise als Summe zweier Elemente a+b darstellen, wobei a ein Element aus A und b ein Element aus B ist.

0 27 (2) Es ist zu zeigen, daß für die Seiten a,b,c eines beliebigen Dreiecks die folgende Ungleichung gilt
$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3+b^3+c^3$.

0 28 (1) Für welche Werte m hat das Gleichungssystem

$$2x + (m-1)\,y = 3$$
$$(m+1)x + 4\,y = -3$$

unendlich viele Lösungen und für welche Werte m keine Lösung?

0 29 (2) Wenn von vier ganzen Zahlen x,y,z und 5 keine durch eine der anderen teilbar ist, so ist $x^5-y^5-z^5$ nicht durch 25 teilbar.

0 30 (2) При каком значении q сумма кубов корней уравнения

$$x^2 - x - q = 0$$

будет равна I9?

Einsendeschluß: 15. 9. 1982

Zentrale Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der XXI. Bezirksolympiade Junger Mathematiker

1. Nach Voraussetzung gilt: $P(x_0) = 0$, d. h.

$a_3(b+\sqrt{c})^3 + a_2(b+\sqrt{c})^2 + a_1(b+\sqrt{c}) + a_0 = 0$, also

$a_3b^3+3a_3bc+a_2b^2+a_2c+a_1b+a_0+\sqrt{c}\cdot(3a_3b^2+a_3c+2a_2b+a_1) = 0.$

Für die Zahlen

$A_1 = a_3b^3 + 3a_3bc + a_2b^2 + a_2c + a_1b + a_0,$ (1)

$A_2 = 3a_3b^2 + a_3c + 2a_2b + a_1$ (2)

gilt also

$A_1 + A_2\sqrt{c} = 0.$ (3)

Wäre nun $A_2 \neq 0$, so folgte $c = -\frac{A_1}{A_2}$ und daraus der Widerspruch, daß $\sqrt{c}$ rational wäre; denn nach Voraussetzung und (1), (2) sind A_1 und A_2 rational. Also ist[1]

$A_2 = 0.$ (4)

Aus (3) und (4) folgt[1]

$A_1 = 0.$ (5)

Weiterhin errechnet man (unter Verwendung von (1) und (2)), daß

$P(x_1) = P(b-\sqrt{c}) = a_3(b-\sqrt{c})^3+a_2(b-\sqrt{c})^2+a_1(b-\sqrt{c})+a_0=A_1-A_2\sqrt{c}$ (6)

gilt. Aus (4), (5), (6) folgt $P(x_1) = 0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

---

2. a) Angenommen, es gäbe ein Polyeder P mit genau sieben Kanten. Aus dieser Annahme folgt,

(1) falls P eine Seitenfläche F mit mindestens vier Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 hat: Zu F gehören mindestens vier Kanten, da jedes n-Eck auch n Kanten besitzt. Von jeder der Ecken A_i geht noch mindestens eine Kante k_i aus, die nicht in der Ebene durch F verläuft. Je zwei dieser Kanten

---

1 Der Schluß von (3) mit irrationalem c und rationalen A_1, A_2 auf $A_1=A_2=0$ kann auch als bekannter Sachverhalt zitiert werden.

k_i, k_j $(i \neq j)$ sind voneinander verschieden (denn da k_i jeweils A_i enthält, würde eine Kante, die $k_i = k_j$ wäre, A_i und A_j enthalten, also in der Ebene durch F verlaufen). Damit ergibt sich der Widerspruch, daß P mindestens acht Kanten besitzen müßte.

(2) falls P nur Dreiecke als Seitenflächen besitzt: Die Anzahl dieser Dreiecke sei m. Zählt man für jedes dieser m Dreiecke seine drei Kanten auf, so hat man mit dieser Aufzählung von 3m Kanten jede Kante des Polyeders genau zweimal erfaßt; denn an jede Kante des Polyeders grenzen genau zwei Seitenflächen an. Also besitzt P genau $\frac{3m}{2}$ Kanten. Damit ergibt sich der Widerspruch, daß die Anzahl m die Gleichung $\frac{3m}{2} = 7$, d. h. $3m = 14$ erfüllen müßte.

b) Es sei nun n eine beliebige natürliche Zahl mit $n > 7$.

(1) Ist n gerade, so gibt es eine natürliche Zahl $m \geq 4$ mit $n = 2m$. Dann hat z.B. jede m-seitige Pyramide genau n Kanten, nämlich, wenn $G = A_1A_2 \ldots A_m$ ihre Grundfläche und S ihre Spitze ist, die m Seitenkanten von G und die m hiervon und untereinander verschiedenen Kanten $A_1S, \ldots, A_mS$. (Abb. a für $m = 4$)

(2) Ist n ungerade, so gibt es eine natürliche Zahl $m \geq 3$ mit $n = 2m+3$. Dann hat z. B. jedes folgendermaßen zu erhaltende Polyeder P genau n Kanten: Man wähle eine m-seitige Pyramide Q mit der Grundfläche $A_1A_2 \ldots A_m$ und der Spitze S. Außerhalb Q wähle man einen Punkt R, der auf keiner Verbindungsgeraden zweier Eckpunkte von Q liegt und so nahe an der Seitenfläche $F = A_1A_2S$ gelegen ist, daß das Tetraeder $T = A_1A_2SR$ mit Q nur F gemeinsam hat. Dann wird aus Q und T ein Polyeder zusammengesetzt, das genau die 2m Kanten von Q sowie die hiervon und untereinander verschiedenen Strecken A_1R, A_2R, SR als Seitenkanten besitzt. (Abb. b für $m = 3$)

<u>Hinweis:</u> Zu a) kann man den Eulerschen Polyedersatz heranziehen. Er wird den Schülern zumeist nur in der Gestalt bekannt sein, daß $E + F = K + 2$ für die Ecken-, Flächen-

und Kantenzahl eines Polyeders gilt, von dem vorausgesetzt wird, daß es topologisch zur Kugelfläche äquivalent ist (d. h. ein Polyeder vom Geschlecht 0) ist. Für diese Polyeder erhält man in der Tat aus der Annahme $K = 7$ die Gleichung $E+F = 9$, die wegen $E = 4$, $F = 4$ nur durch $E=4$, $F=5$ oder $E=5$, $F=4$ erfüllbar wäre, was beides nicht möglich ist, da sowohl $E=4$ als auch $F=4$ nur für Tetraeder gelten können.

Werden zu a) keine weiteren Ausführungen gemacht[1], so ist ein solcher Gedankengang als eine zwar wesentliche, aber nicht vollständige Teillösung von a) zu werten.

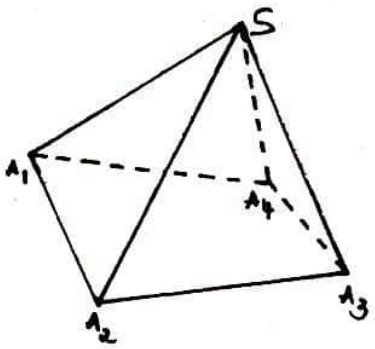


Abb. a

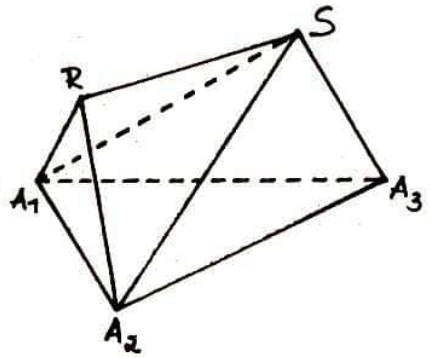


Abb. b

3. I. Angenommen, ein Tripel (a,b,c) besitzt die verlangten Eigenschaften. Dann folgt: Die durch $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ definierte Funktion f ist nicht konstant; denn im Falle $f(x) = d \neq -c$ für alle $x \neq -c$ wäre auch $f(f(f(x))) = d$ für alle $x \neq -c$, also (2) nicht erfüllt, da $\frac{x-1}{x+1} = d$ für höchstens ein x gelten kann; im Falle $f(x) = -c$ für alle $x \neq -c$ aber gäbe es kein x, für das $f(x)$ und $f(f(x))$ definiert sind, im Widerspruch zu (1).

Für jedes d hat folglich die Gleichung $ax + b = xd + cd$ nicht alle $x \neq -c$ als Lösung. Somit hat sie als lineare Gleichung höchstens eine Lösung. Daher gibt es höchstens

1 Zum Beispiel läßt sich $K=7$ folgendermaßen als unvereinbar mit einem Geschlecht > 0, d. h. mit positiver Anzahl von "Henkeln", nachweisen: Jeder "Henkel" müßte ein Vieleck $A_1A_2\ldots A_m$ mit $m \geqq 3$ Ecken, also $m \geqq 3$ Kanten, als "Innenring" besitzen, und zur Bildung der Fläche des "Henkels" müßten von jedem A_i mindestens zwei Kanten h_i und k_i ausgehen; alle genannten $3m \geqq 9$ Kanten wären untereinander verschieden.

jeweils ein x mit $f(x) = -c$ bzw. mit $f(f(x)) = -c$. Hiernach und wegen (2) gibt es unendlich viele Zahlen $x \neq -1$, für die $f(x)$ sowie

$$f(f(x)) = \frac{(a^2+b)x+(a+c)b}{(a+c)x+(b+c^2)}$$

und

$$f(f(f(x))) = \frac{(a^3+2ab+bc)x+(a^2+ac+b+c^2)b}{(a^2+ac+b+c^2)x+(ab+2bc+c^3)} \qquad (3)$$

existieren und für die

$$((a^3+2ab+bc)x+(a^2+ac+b+c^2)b)(x+1)=$$
$$= ((a^2+ac+b+c^2)x+(ab+2bc+c^3))(x-1)$$

gilt. Aus dieser Gleichheit zweier Polynome für unendlich viele x folgen die Koeffizientengleichheiten

$$a^3+2ab+bc = a^2+ac+b+c^2, \qquad (4)$$

$$a^3+2ab+bc+(a^2+ac+b+c^2)b=-(a^2+ac+b+c^2)+ab+2bc+c^3, \qquad (5)$$

$$(a^2+ac+b+c^2)b = -(ab+2bc+c^3). \qquad (6)$$

Aus (4), (5), (6) folgt die Addition, daß beide Seiten von (5) gleich 0 sind; hieraus und aus (4) erhält man $a^3+2ab+bc = ab+2bc+c^3$, also $a(a^2+b) = c(b+c^2)$ und durch Addidtion von $ac(a+c)$

$$a(a^2+ac+b+c^2) = c(a^2+ac+b+c^2). \qquad (7)$$

Wäre $a^2+ac+b+c^2 = 0$, so folgte aus (6), daß (3) für kein x definiert wäre. Also ist

$$a^2+ac+b+c^2 \neq 0, \qquad (8)$$

und aus (7) ergibt sich

$$a = c.$$

Hiernach und nach (4), (2) ist $(a^2+ac+b+c^2)b=-(a^2+ac+b+c^2)$, wegen (8) also $b = -1$.

Damit geht (4) über in

$$a^3 - 3a^2 - 3a + 1 = 0.$$

Da eine Lösung hiervon $a = -1$ lautet (bzw. nach der bekannten Abspaltung des Faktors $a+1$ von a^3+1 und von $3a^2+3a$) folgt $(a+1)(a^2-4a+1) = 0$ und daraus

$$a = -1 \text{ oder } a = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Also können nur die Funktionen f mit

$$f(x) = \frac{-x-1}{x-1} \text{ für alle } x \neq 1$$

bzw. mit $f(x) = \frac{(2\pm\sqrt{3})x-1}{x+(2\pm\sqrt{3})}$ für alle $x \neq -(2\pm\sqrt{3})$

(jeweils stets mit dem oberen oder stets mit dem unteren Vorzeichen) die die Bedingungen (1), (2) erfüllen, d. h. es können nur die Tripel $(-1,-1,-1)$; $(2+\sqrt{3},-1,2+\sqrt{3})$; $(2-\sqrt{3},-1,2-\sqrt{3})$ die verlangten Eigenschaften haben.

II. Für das Tripel $(-1,-1,-1)$ existieren

$f(f(x)) = f(\frac{-x-1}{x-1}) = -\frac{1}{x}$ für alle x mit $x \neq 1$, $x \neq 0$

und

$f(f(f(x))) = f(-\frac{1}{x}) = \frac{x-1}{x+1}$ für alle $x \neq 1$, $x \neq 0$, $x \neq -1$.

Für die beiden anderen Tripel existieren

$$f(f(x)) = f(\frac{(2\pm\sqrt{3})x-1}{x+(2\pm\sqrt{3})} = \frac{(3\pm2\sqrt{3})x-(2\pm\sqrt{3})}{(2\pm\sqrt{3})x+(3\pm2\sqrt{3})}$$

für alle x mit $x \neq -(2\pm\sqrt{3})$, $x \neq \mp\sqrt{3}$ und

$$f(f(f(x))) = f(\frac{(3\pm2\sqrt{3})x-(2\pm\sqrt{3})}{(2\pm\sqrt{3})x+(3\pm2\sqrt{3})} = \frac{(5\pm3\sqrt{3})(x-1)}{(5\pm3\sqrt{3})(x+1)}$$

für alle x mit $x \neq -(2\pm\sqrt{3})$, $x \neq \mp\sqrt{3}$, $x \neq -1$.

Daher und wegen $5\pm3\sqrt{3} \neq 0$ erfüllen diese Funktionen die Bedingungen (1), (2).

Folglich haben genau die Tripel $(-1,-1,-1)$; $(2+\sqrt{3},-1,2+\sqrt{3})$ und $(2-\sqrt{3},-1,2-\sqrt{3})$ die verlangten Eigenschaften.

---

4. I. Wenn eine Zahl q die geforderte Eigenschaft hat, so folgt: Es gibt eine Zahl $a_1 \neq 0$ und eine natürliche Zahl $k \geqq 3$ mit

$$a_1 \cdot q^{k-1} = \frac{1}{2}(a_1 \cdot q^{k-2} + a_1 \cdot q^{k-3}).$$

Wegen $a_1 \neq 0$ und $q \neq 0$ folgt hieraus

$$q^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} = 0,$$

also $q = 1$ oder $q = -\frac{1}{2}$.

II. Die Zahlen $q = 1$ und $q = -\frac{1}{2}$ haben die geforderte Eigenschaft. Es gilt sogar[1]: Für jedes a_1 und für jede natür-

---

1 Diese Verallgemeinerung wird vom Schüler nicht verlangt; es genügt in II auch bereits, zu $q = 1$ und zu $q = -\frac{1}{2}$ die Aussage über das arithmetische Mittel jeweils in einem Beispiel von a_1 und k zu bestätigen.

liche Zahl $k \geqq 3$ ist in der Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ das arithmetische Mittel von a_{k-1} und a_{k-2} gleich der Zahl

$$\frac{1}{2}(a_1 \cdot q^{k-2} + a_1 \cdot q^{k-3}) = \frac{1}{2} a_1 \cdot q^{k-3} \cdot (q+1) = \begin{cases} a_1 & \text{für } q = 1 \\ \frac{1}{4} a_1 \cdot q^{k-3} & \text{für } q = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= a_1 \cdot q^{k-1} = a_k.$$

5. a) Werden bei einem Arbeitsgang genau x oben blaue Karten umgedreht und damit zu oben roten Karten, so werden bei demselben Arbeitsgang genau (20-x) oben rote Karten umgedreht und damit zu oben blauen Karten. Die Anzahl b der oben blauen Karten geht somit in $b - x + (20-x) = b + 20 - 2x$ über; also gilt: Bei jedem Arbeitsgang ändert sich die Anzahl der oben blauen Karten um eine gerade Zahl. Die gegebene Ausgangsstellung enthielt genau 9 oben blaue Karten; die in a) angestrebte Endstellung soll keine oben blaue Karte enthalten. Dies ist folglich mit endlich vielen Arbeitsgängen nicht zu erreichen.

b) Bei jedem Arbeitsgang kann sich die Anzahl der oben blauen Karten höchstens um 20 vergrößern. Die gegebene Ausgangsstellung enthielt genau 9 oben blaue Karten; die in b) angestrebte Endstellung soll 37 oben blaue Karten enthalten. Dies ist folglich in einem Arbeitsgang nicht zu erreichen. In zwei Arbeitsgängen dagegen ist es folgendermaßen zu erreichen: Man drehe im ersten Arbeitsgang 6 oben blaue und 14 oben rote Karten um. Aus der Ausgangsstellung mit genau 28 oben roten Karten entsteht dabei eine Stellung mit genau $28 + 6 - 14 = 20$ oben roten Karten. Diese Karten drehe man im zweiten Arbeitsgang um.
Die kleinste Anzahl von Arbeitsgängen, die zum Erhalten der angestrebten Endstellung hinreichend ist, beträgt somit 2.

Lösungen

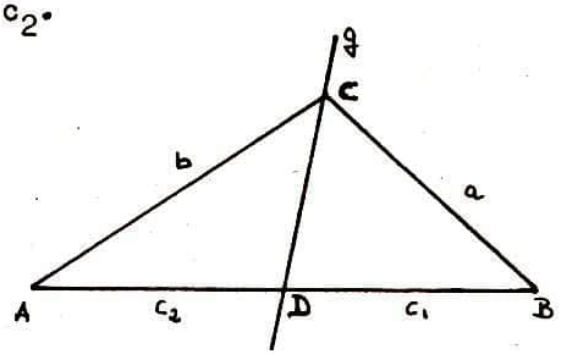
Aufgabe N 43

Für jedes ungleichseitige Dreieck gilt

$$a + b > c \qquad (1)$$

$$a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a \qquad (2)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, die Schnittgerade g verlaufe durch C und D und D teile c in c_1 und c_2.



Da CD ≡ CD, gilt nach dem 1. Kongruenzsatz

$$c_1 = c_2 \text{ und } a = b \qquad (3)$$

oder $c_1 = b$ und $c_2 = a$,

also $\quad c_1 + c_2 = c = a + b \qquad (4)$

(3) steht im Widerspruch zu (2) und (4) steht im Widerspruch zu (1). Hieraus folgt, man kann kein ungleichseitiges Dreieck durch einen Schnitt in zwei kongruente Dreiecke zerlegen.

Aufgabe N 44

Es waren Lösungen für das Gleichungssystem

$$5x - 2xy + y + 3 = 0 \qquad (1)$$

$$2x - xy - y + 9 = 0 \qquad (2)$$

zu finden.

Multiplizieren wir (2) mit 2 und subtrahieren wir dieses Produkt von (1), so erhalten wir

$$x + 3y - 15 = 0$$

und $\quad x = -3y + 15 \qquad (3)$

Setzen wir (3) in (1) ein, erhalten wir eine quadratische Gleichung in y

$$y^2 - \frac{22}{3}y + 13 = 0.$$

Als Lösungen erhalten wir $y_1 = \frac{13}{3}$ und $y_2 = 3$.
Diese Lösungen in (1) eingesetzt ergeben $x_1=2$ und $x_2=6$.
Die Probe bestätigt, daß die Paare $\left[2,\frac{13}{3}\right]$ und $[6,3]$ die Lösungen für das Gleichungssystem sind.

Aufgabe N 49

Gesucht ist das Verhältnis

$$t = \frac{\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF}}{\overline{BD} + \overline{CE} + \overline{AF}}.$$

Es sei $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$. Nun gilt

$$F_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = F_{\Delta ABP} + F_{\Delta PBC} + F_{\Delta PCA}$$

$$= \frac{a\cdot\overline{PD}}{2} + \frac{a\cdot\overline{PE}}{2} + \frac{a\cdot\overline{PF}}{2}$$

und $\quad \overline{PE} + \overline{PD} + \overline{PF} = \frac{a}{2}\sqrt{3} \qquad (1).$

Unter Verwendung des Satzes von Pythagoras ergibt sich

$$\overline{AF}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{PF}^2 + (a-\overline{CE})^2$$
$$\overline{BD}^2 + \overline{PE}^2 = \overline{PD}^2 + (a-\overline{AF})^2$$
$$\overline{CE}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{PE}^2 + (a-\overline{BD})^2.$$

Nach Addition und Vereinfachung erhält man

$$\overline{BD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2$$
$$= \overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2 + 3a^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{AF}^2$$
$$- 2a\overline{CE} - 2a\overline{BD} - 2a\overline{AF}$$

und somit

$$\overline{BD} + \overline{CE} + \overline{AF} = \frac{3}{2}a \qquad (2).$$

Mit (1) und (2) folgt für $t = \frac{a\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 3a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
womit die Aufgabe gelöst ist.

Aufgabe N 50

Wenn die Zahl abc durch 37 teilbar ist, dann gilt:

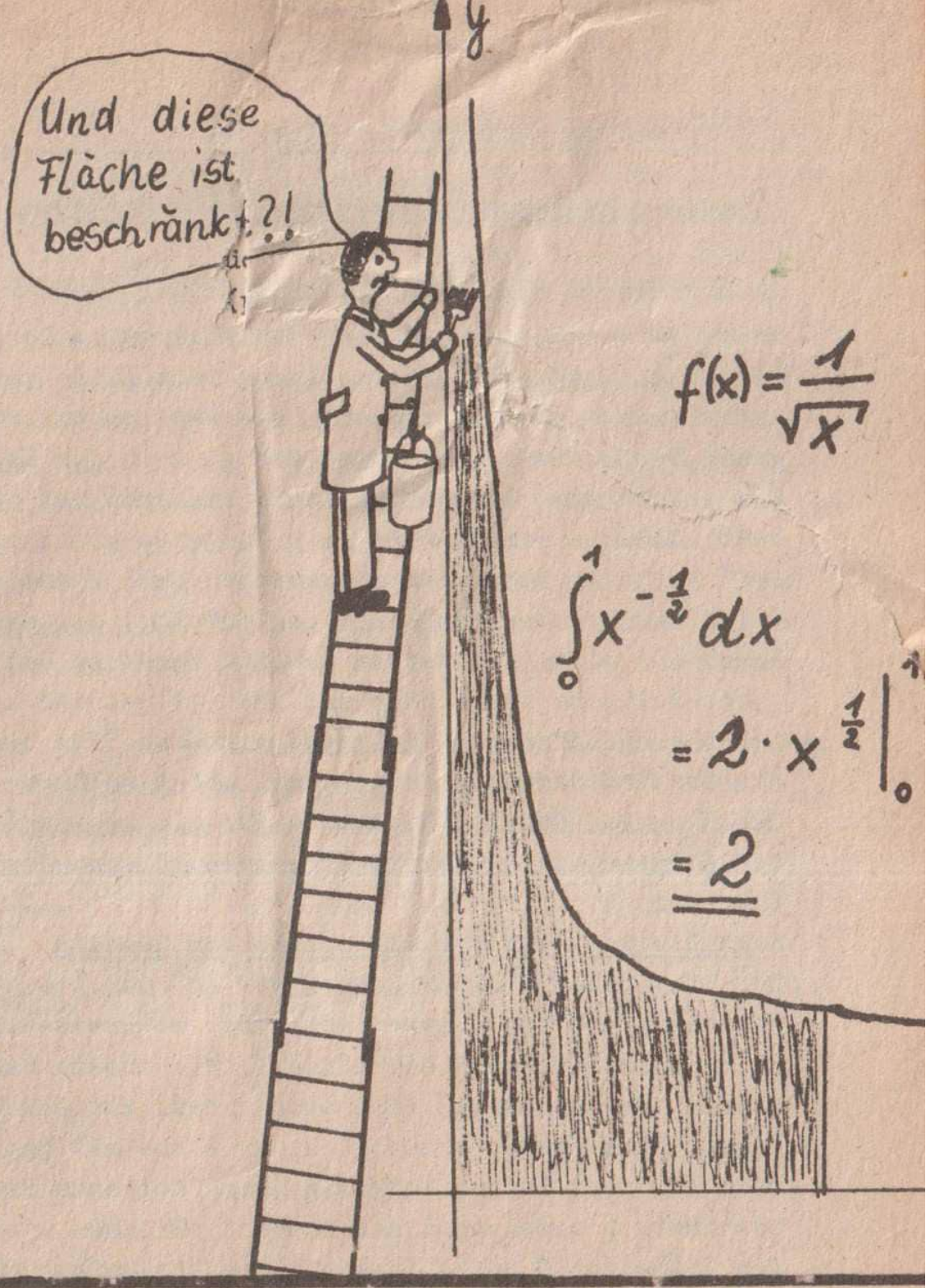
$$100a + 10b + c \equiv 0 \pmod{37}$$
$$10\,(100a + 10b + c) \equiv 0 \pmod{37}$$
$$1000a + 100b + 10c \equiv 0 \pmod{37}$$
$$27a\cdot 37 \equiv 0 \pmod{37}$$
$$999a \equiv 0 \pmod{37}$$
$$100b + 10c + a \equiv 0 \pmod{37}.$$

Also ist auch die Zahl bca durch 37 teilbar. Es wurde gezeigt, aus abc $\equiv$ 0 (mod 37) folgt cab $\equiv$ 0 (mod 37). Mit der gleichen Methode folgt bca $\equiv$ 0 (mod 37), indem a=c, b=a, c=b gesetzt werden.

Wer erfahren und klug ist, nimmt auch von einem Kind eine gute Anregung auf: erhellt nicht auch, wenn die Sonne nicht da ist, eine kleine Lampe das Haus?

Indische Spruchweisheit

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 26. 3. 1982
Titelbild: Dorothea Heinrich



6
82

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

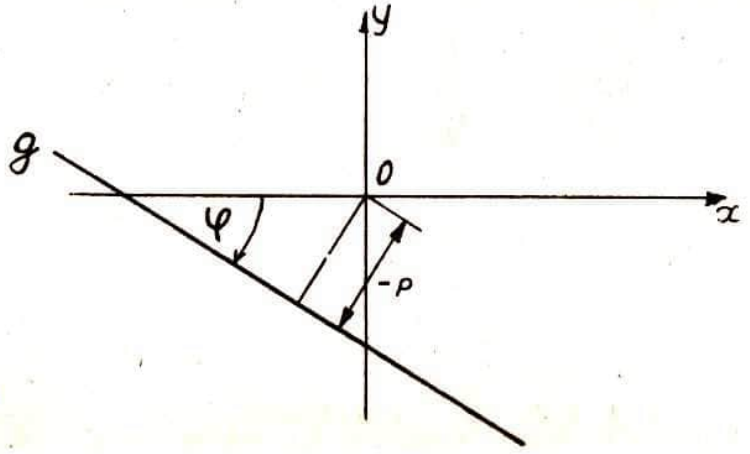
Geometrische Wahrscheinlichkeiten II

3. Bestimmung des Umfanges von konvexen Figuren

Man kann den Umfang von konvexen Figuren in der Ebene und auch die Länge von allgemeineren Kurven mit Hilfe von Schnitten mit zufälligen Geraden bestimmen. Dazu stellen wir uns folgende Aufgabe. Durch ein beschränktes Gebiet D in der Ebene wird "auf gut Glück" eine Gerade g gelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Gerade eine in G liegende konvexe Figur K schneidet? Für eine Lösung im allgemeinen Fall benötigen wir den Begriff des Grenzwertes einer Zahlenfolge, der erst in Klasse 11 behandelt wird. Wir werden nämlich zunächst den Spezialfall konvexer Polygone betrachten und dann allgemeine konvexe Figuren durch einbeschriebene Polygone annähern. Für diejenigen, denen der Begriff des Grenzwertes noch nicht geläufig ist, genügt der Hinweis, daß die Resultate für die konvexen Polygone auf den Allgemeinfall übertragen werden können. Zunächst untersuchen wir

Schnitte von Strecken mit zufälligen Geraden

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß D ein Kreis mit dem Mittelpunkt O ist (diese Bedingung ist unwesentlich). K sei jetzt eine Strecke S der Länge l. Wir müssen nun wieder präzisieren, was es heißt, eine Gerade "auf gut Glück" durch D zu legen. Eine feste Gerade g in der Ebene mit dem Koordinatensystem (O, x, y) ist vollständig durch folgende Parameter (p, φ) bestimmt: p bezeichnet den Abstand zwischen O und dem Fußpunkt des Lotes von O auf g, der mit dem Vorzeichen Plus oder Minus behaftet ist, je nachdem ob der Fußpunkt in der oberen bzw. unteren Halbebene liegt, d. h. $p \in (-\infty, +\infty)$. φ ist der durch die Bedingung $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ eindeutig festgelegte Winkel zwischen der Geraden g und der x-Achse (siehe Abbildung).

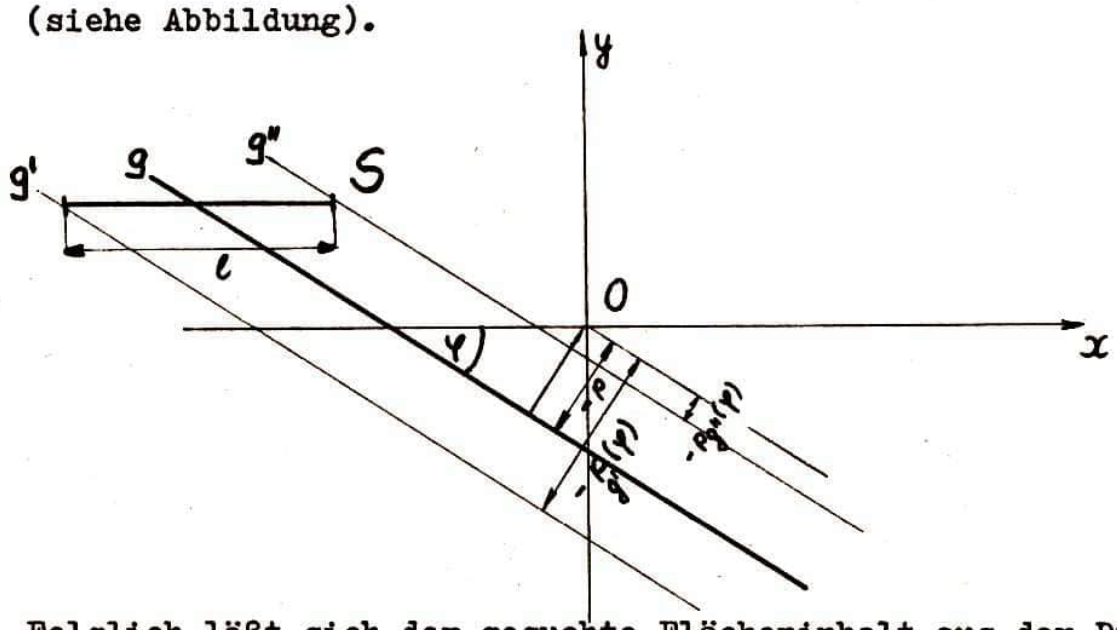


Eine Gerade mit den zugehörigen Parametern (p, φ) schneidet den Kreis D mit dem Radius r genau dann, wenn $-r \leq p \leq r$. Es soll nun eine Gerade "auf gut Glück" durch D gelegt werden. Dies bedeutet, daß alle Parameter (p, φ) mit $-r \leq p \leq r$ und $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ gleichmöglich sind. Wir arbeiten also mit einer Gleichverteilung auf dem Rechteck $G = [-r,r] \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ im R^2 und müssen deshalb den Flächeninhalt des Gebietes G' der Parameter berechnen, für die die zugehörigen Geraden die gegebene Strecke S schneiden. Dieser Flächeninhalt ist offensichtlich invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems in der Ausgangsebene um den Punkt O (beim Werfen "auf gut Glück" gibt es keine ausgezeichneten Richtungen). Wir können deshalb o. B. d. A. annehmen, daß die Strecke K parallel zur x-Achse liegt.

Für festes $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ seien g' und g" die zu φ gehörenden Geraden durch den linken bzw. rechten Endpunkt der Strecke S. Eine beliebige Gerade g mit dem Winkel φ schneidet S genau dann, wenn der zugehörige p-Wert zwischen denen von g' und g" liegt, d. h. wenn

$$p_{g'}(\varphi) \leq p \leq p_{g''}(\varphi)$$

(siehe Abbildung).



Folglich läßt sich der gesuchte Flächeninhalt aus der Differenz der unter den Kurven $p = |p_{g''}(\varphi)|$ und $p = |p_{g'}(\varphi)|$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, liegenden Flächen berechnen. Mit Hilfe der Integralrechnung (Klasse 11) erhält man dann

$$F(G') = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p_{g''}(\varphi)d\varphi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p_{g'}(\varphi)d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (p_{g''}(\varphi) - p_{g'}(\varphi))d\varphi \ .$$

Nun ist aber für beliebiges φ

$$p_{g''}(\varphi) - p_{g'}(\varphi) = l\,|\sin\varphi| \quad , \text{ so daß}$$

$$F(G') = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} l\,|\sin\varphi|\ d\varphi = 2l \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\ d\varphi = 2l.$$

Dies führt zu folgendem Ergebnis für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P = \frac{F(G')}{F(G)} = \frac{2l}{2r\pi} \ ,$$

für den Fall, daß K eine Strecke der Länge l ist.

Anmerkung: Man vergleiche das Ergebnis mit dem für das Nadelwurfproblem. (Im Prinzip lassen sich beide Fälle ineinander überführen.)

Als nächstes betrachten wir

<u>Schnitte von konvexen Polygonen mit zufälligen Geraden</u>

Sei nun K ein beliebiges konvexes Polygon in der Ebene, das vollständig im Kreis D liegt. Dann besteht der Rand von K aus endlich vielen Strecken $S_1,\ldots,S_n$. l_i bezeichne die Länge der Strecke S_i und u(K) den Umfang von K, so daß $u(K) = \sum_{i=1}^{n} l_i$.

Aus dem vorhergehenden Abschnitt wissen wir, was es heißt, eine Gerade "auf gut Glück" durch D zu legen. Um die Wahrscheinlichkeit, daß diese Gerade K schneidet, zu bestimmen, führen wir ein Hilfssymbol für gewisse Parametermengen von Geraden ein. Es bezeichne $[K]$ die Menge der Geradenparameter (p, φ), für die die zugehörigen Geraden K schneiden. (Im vorhergehenden Abschnitt war $[S] = G'$) Um das Problem zu lösen, müssen wir jetzt die Fläche von $G' = [K]$ bestimmen. Dazu benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

<u>Aufgabe 1:</u> Man zeige, daß

$$2F([K]) = \sum_{i=1}^{n} F([S_i])!$$

(Hinweis: Zur Vereinfachung benutze man etwa das Prinzip der vollständigen Induktion bezüglich der Anzahl der Ecken des Polygons.)

Mit Hilfe des vorhergehenden Abschnitts erhalten wir

$F([S_i]) = 2l_i$, $i=1,\dots,n$,

und deshalb

$$F([K]) = \sum_{i=1}^{n} l_i = u(K).$$

Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit für den Fall konvexer Polygone gleich

$$P = \frac{F(G')}{F(G)} = \frac{F(K)}{2r\pi} = \frac{u(K)}{2\pi r}.$$

Dieses Ergebnis schreiben wir in folgender Form auf:

$$P = \frac{u(K)}{u(D)},$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß die zufällige Gerade K schneidet, ist gleich dem Verhältnis der Umfänge von K und D. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß diese Formel für beliebige konvexe in D liegende Figuren gilt. (Dabei kann man eine Strecke der Länge l als entartetes Polygon mit dem Umfang 2l ansehen.)

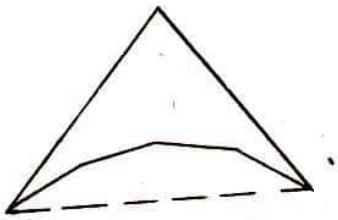
<u>Schnitte von konvexen Figuren mit zufälligen Geraden</u>

K sei jetzt allgemein eine in D liegende konvexe Figur (mit je zwei Punkten liegt auch ihre Verbindungsstrecke in K). Mit $\mathcal{K}$ bezeichnen wir die Menge aller K einbeschriebenen Polygone (letztere sind konvex). Mit ihrer Hilfe wollen wir einen Umfangsbegriff für K prägen. Dazu stellen wir folgende

<u>Aufgabe 2:</u> Man zeige, daß die Menge der Zahlen $u(\mathcal{P})$ (Umfang von $\mathcal{P}$) für alle Polygone $\mathcal{P}$ aus $\mathcal{K}$ nach oben beschränkt ist!

(Hinweis: Man beweise etwa, daß für jedes $\mathcal{P}$ $u(\mathcal{P})$ kleiner oder gleich dem Umfang z. B. eines beliebigen K umbeschriebenen Dreiecks ist. Elementare Überlegungen zeigen, daß es dafür ausreicht, folgendes Problem zu lösen. Man ersetze in einem beliebigen Dreieck eine Seite durch irgendeinen nach innen gewölbten

konvexen Polygonzug (siehe Abbildung).



Dann ist die Summe der Längen der beiden übrigen Dreiecksseiten stets größer oder gleich der Länge des Polygonzuges. Für den Fall, daß der Polygonzug gleich der dritten Dreiecksseite ist, setzen wir dies als bekannt voraus.)

Nun greifen wir uns irgendeine Folge von Polygonen $\mathcal{P}_n \in \mathcal{K}$, $n=1,2,\ldots$, heraus derart, daß $\mathcal{P}_{n+1}$ aus $\mathcal{P}_n$ durch Hinzunahme neuer Ecken entsteht und die maximale Kantenlänge der Polygone für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Dann ist die Folge der Umfänge $u(\mathcal{P}_n)$, $n=1,2,\ldots$, eine monoton wachsende nach oben beschränkte Zahlenfolge. Es existiert deshalb der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} u(\mathcal{P}_n).$$

Mit Hilfe der Definition des Grenzwertes und elementargeometrischer Überlegungen kann man zeigen, daß dieser Grenzwert nicht von der Wahl der Folge der einbeschriebenen Polygone abhängt. Wir nennen ihn deshalb den Umfang von K, kurz u(K).

Wie wir gleich sehen werden, läßt sich die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällige Gerade K schneidet, wieder mit Hilfe von u(K) berechnen.

Die Menge $[K]$ von Geradenparametern (p, φ) kann man darstellen als die abzählbare Vereinigung der Mengen $[\mathcal{P}_n]$. (Jede Gerade durch K schneidet für ein hinreichend großes n auch das einbeschriebene Polygon $\mathcal{P}_n$. Die Rückrichtung gilt offensichtlich.) Für jedes n ist die Menge $[\mathcal{P}_n]$ in $[\mathcal{P}_{n+1}]$ enthalten. Ähnlich wie beim Umfang können wir jetzt den aus der Schule bekannten Flächeninhaltsbegriff, den wir für die Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeit benötigen, auf die Parametermenge $[K]$ ausdehnen. Die Folge der Flächeninhalte $F([\mathcal{P}_n])$ ist eine monoton wachsende nach oben z. B. durch $F([D])$ beschränkte Zahlenfolge. Es existiert deshalb der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} F([\mathcal{P}_n]).$$

Dieser hängt ebenfalls nicht von der Wahl der Folge $\mathcal{P}_n$ ab. Wir nennen ihn den Flächeninhalt von $[K]$, kurz $F([K])$ und setzen voraus, daß wir bei der Definition der Wahrscheinlichkeiten einen solchen Flächeninhaltsbegriff verwenden.

Auf Grund der obenstehenden Ergebnisse ist für alle n $F([\mathcal{P}_n]) = u(\mathcal{P}_n)$. so daß

$$F([K]) = \lim_{n \to \infty} F([\mathcal{P}_n]) = \lim_{n \to \infty} u(\mathcal{P}_n) = u(K).$$

Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit im Allgemeinfall gleich

$$P = \frac{F([K])}{F([D])} = \frac{u(K)}{u(D)} .$$

Die letzten Überlegungen zeigen außerdem, daß wir anstelle von Kreisen für D allgemeine beschränkte konvexe Figuren verwenden können.

Anwendungen

Wegen des Gesetzes der großen Zahl kann man die Wahrscheinlichkeit P für genügend große Versuchsanzahl durch die zugehörigen relativen Häufigkeiten approximieren. Mit Hilfe der obenstehenden Formel läßt sich u(K) deshalb auf statistischem Wege bestimmen. Dieses Prinzip wird in der modernen Bildauswertung angewendet. Anstelle einer Gerade benutzt man dort ganze Geradengitter. Man kann die Aufgabenstellung auf Längenmessungen von allgemeineren Kurven ausdehen. Die Resultate sind dann ähnlich, und die statistische Auswertung läuft auf das Zählen der Schnittpunkte der Kurven mit Geradengittern hinaus.
Auf ähnliche Art und Weise kann man etwa auch das Problem der Oberflächenbestimmung von geometrischen Körpern im Raum auf das Untersuchen von Schnittgebilden mit zufälligen Ebenen zurückführen. Diese Tatsache spielt z. B. in der Mikroskopie eine wichtige Rolle.

Die moderne Stochastische Geometrie stellt viele Formeln bereit, die für solche praktischen Anwendungen genutzt werden können.

Als mathematische Theorie bedient sie sich heute allgemeiner Methoden und Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Maßtheorie, der Integralgeometrie sowie kombinatorischer Prinzipien.

Dr. M. Zähle
Bereich WMS der Sektion Mathematik
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Wurzelspaß

In einer Universitätsstadt wurde einst "Die natürliche Tochter" aufgeführt. Nach dem zweiten Akt wendet sich ein Student an einen neben ihm sitzenden älteren Herrn mit der Frage: "Um Vergebung, ist das Stück nicht von Vulpius?" Vulpius war bekanntlich der Verfasser von "Rinaldo Rinaldini" und ähnlichen Schreckensbüchern. Der Nachbar erwiderte: "Nein, das Stück ist von Goethe."
Nach dem dritten Akt meint der Student: "Wissen Sie gewiß, daß das Stück nicht von Vulpius ist?" "Nein", sagt der Nachbar, "das Stück ist von Goethe." Nach dem vierten Akt meint der Student: "Ich glaube immer noch, das Stück ist von Vulpius." "Von Goethe", ist die Zurechtweisung des Nachbarn. Am Schlusse endlich behauptet der Student: "Sie mögen sagen, was sie wollen, das Stück ist von Vulpius." Da erhebt sich endlich der stattliche Nachbar und sagt mit einem flammenden Auge: "Das Stück ist von Goethe, und ich bin Goethe." - "Sehr erfreut", sagt der Musensohn, "mein Name ist Müller."

Heinrich Anschütz

Preisaufgaben

0 31 (1) Es ist die Summe der Koeffizienten des Polynoms zu finden, welches durch ausmultiplizieren des folgenden Ausdrucks entsteht:

$$(1-3x+3x^2)^{743} \cdot (1+3x-3x^2)^{744}.$$

0 32 (2) Es ist zu zeigen, daß in dem Produkt

$$(1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{99}+x^{100})\cdot(1+x+x^2+\ldots+x^{99}+x^{100})$$

nach dem Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der Elemente mit gleichem Exponenten nur noch gerade Exponenten für x übrigbleiben.

0 33 (2) Es ist folgende Gleichung zu beweisen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} \binom{n}{i} = \frac{n}{n+1}.$$

0 34 (2) Es ist zu zeigen, daß $11^{10} - 1$ durch 100 teilbar ist.

0 35 (2) Es seien 100 ganze Zahlen gegeben, von denen keine gleich Null ist. Wieviele positive und wieviele negative Summanden kommen dann in der Summe

$$(a_1+\ldots+a_{100})^2=a_1^2+\ldots+a_{100}^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_{99}\cdot a_{100}$$

vor? (Die Anzahl der positiven Zahlen a_i ist nicht bekannt.)

0 36 (2) Найти все решения системы уравнений

$$\sin(x+y)=0$$
$$\sin(x-y)=0$$

удовлетворяющие условиям

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Einsendeschluß: 15. 10. 1982

Zentrale Lösungsvorschläge für die Aufgaben der Bezirksolympiade Klassenstufe 11/12 Fortsetzung

6A. Eine Zahl z mit der genannten Eigenschaft existiert, wenn zwei natürliche Zahlen m und n mit

$$1000 \leqq \frac{m(m+1)}{2} = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \leqq 10000, \text{ d. h. mit}$$

$$2000 \leqq m^2 + m = 2(n^2+n) \leqq 20000 \qquad (1)$$

existieren. Daß es solche Zahlen gibt, kann man folgendermaßen nachweisen:

Zu der Gleichung

$$m^2 + m = 2(n^2+n) \qquad (2)$$

gewinnt man, ausgehend von $(m;n) = (0;0)$, weitere Lösungen, z. B. folgendermaßen: Es sei $(m;n)$ eine Lösung. Dann ist auch $(m+p;n+q)$ eine Lösung, falls p und q die Gleichung

$$m^2 + 2mp + p^2 + m + p = 2(n^2+2nq+q^2+n+q)$$

erfüllen. Wegen der vorausgesetzten Gültigkeit von (2) trifft dies zu, wenn

$$p(2m+p+1) = 2q(2n+q+1)$$

gilt. Das kann sogar erreicht werden, indem man

$$p = 2n + q + 1 \text{ und } 2q = 2m + p + 1$$

erreicht; denn dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$p = 2m + 4n + 3, \quad q = 2m + 2n + 2.$$

Damit ist bewiesen[1]: Zu jeder Lösung $(m;n)$ der Gleichung (2) ist auch $(3m + 4n + 3;\ 2m + 3n + 2)$ eine Lösung von (2). Auf diese Weise gewinnt man aus $(0;0)$ der Reihe nach die Lösungen $(3;2)$, $(20;14)$, $(119;84)$. Für die letztgenannte Lösung gilt $119^2 + 119 = 2(84^2 + 84) = 14280$, also ist insgesamt (1) erfüllbar, w.z.b.w. (Man erhält $z = 7140$)

6B. Die genannten Darstellungen sind umkehrbar eindeutig den Paaren $(x;y)$ aus jeweils dem kleinsten der drei Summanden und dem kleinsten der zwei übrigen Summanden zugeordnet,

d. h. denjenigen Paaren $(x;y)$ ganzzahliger x, y, zu denen jeweils z mit $x+y+z=n$ und $1 \leqq x \leqq y \leqq z$ existiert.
Diese Paare haben folgende Eigenschaften: Es gilt
$3x \leqq x+y+z = n$, also

$$1 \leqq x \leqq \frac{n}{3} \qquad (1)$$

und $2y \leqq y+z = n-x$, also

$$x \leqq y \leqq \frac{n-x}{2} \quad . \qquad (2)$$

Umgekehrt gibt es zu jeder ganzen Zahl x mit (1), woraus nämlich $x \leqq \frac{n-x}{2}$ folgt, auch ganze Zahlen y mit (2), und zu jedem Paar $(x;y)$ ganzer Zahlen mit (1), (2) existiert ein z mit $x+y+z = n$ und $1 \leqq x \leqq y \leqq z$, da man für $z = n-x-y$ bestätigt, daß wegen (2) auch $y \leqq n-x-y$ gilt.
Also ist A_n die Anzahl aller Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen mit (1), (2). Hiernach liegt es nahe, die Fälle $n = 6m + k$ mit $k=0,1,\ldots,5$ zu unterscheiden.
Ist $n = 6m$ mit ganzem $m \geqq 1$, so kann nach (1) als x jede ganze Zahl von 1 bis $2m$ gewählt werden. Das sind alle geraden Zahlen $x = 2p$, wobei p von 1 bis m läuft, und alle ungeraden Zahlen $x = 2q-1$, wobei q von 1 bis m läuft. Zu $x = 2p$ kann jeweils als y nach (2) jede ganze Zahl von $2p$ bis $3m-p$ gewählt werden; zu $x = 2q-1$ kann jeweils als y jede ganze Zahl von $2q-1$ bis $3m-q$ gewählt werden. Nach dem Satz, daß die Anzahl aller ganzen Zahlen von a bis b (a,b beliebig mit $a \leqq b$ gegeben) gleich $b-a+1$ ist, folgt: Die Anzahl aller Paare $(x;y)$ mit jeweils einem $x = 2p$ beträgt $3m-3p+1$, die Anzahl aller Paare $(x;y)$ mit jeweils einem $x = 2q-1$ beträgt $3m-3q+2$. Berücksichtigt man die angegebenen Werte, die p bzw. q dabei zu durchlaufen hat, so erhält man

$$A_{6m} = \sum_{p=1}^{m}(3m-3p+1) + \sum_{q=1}^{m}(3m-3q+2).$$

Wegen

$$\sum_{p=1}^{m}(3m-3p+1) = \sum_{p=1}^{m}(3m+1) - 3\cdot\sum_{p=1}^{m}p = m\cdot(3m+1)-3\cdot\frac{m(m+1)}{2} = \frac{3m^2-m}{2}$$

ergibt sich

$$A_{6m} = 2 \cdot \frac{3m^2-m}{2} + m = 3m^2. \qquad (3)$$

Im Fall $n = 6m+1$ ($m \geqq 1$) ergibt sich: x ist wählbar von 1 bis $2m$, also $x = 2p$ ($p=1,\ldots,m$) und $x = 2q-1$ ($q=1,\ldots,m$).

Zu $x = 2p$ ist jeweils y wählbar von $2p$ bis $3m-p$; zu $x=2q-1$ jeweils von $2q-1$ bis $3m-q+1$. Das führt auf

$$A_{6m+1} = \sum_{p=1}^{m}(3m-3p+1)+\sum_{q=1}^{m}(3m-3q+3) = 3m^2+m. \qquad (4)$$

Entsprechend folgt:

$n=6m+2$ ($m \geqq 1$): Zu $x=2p$ ($p=1,\ldots,m$) und $x=2q-1$ ($q=1,\ldots,m$) jeweils y bis $3m-p+1$ bzw. $3m-q+1$, also

$$A_{6m+2} = \sum_{p=1}^{m}(3m-3p+2)+\sum_{q=1}^{m}(3m-3q+3) = 3m^2+2m. \qquad (5)$$

$n=6m+3$ ($m \geqq 0$): Zu[1] $x=2p$ ($p=1,\ldots,m$) und $x=2q-1$ ($q=1,\ldots,m+1$) jeweils y bis $3m-p+1$ bzw. bis $3m-q+2$, also

$$A_{6m+3} = \sum_{p=1}^{m}(3m-3p+2)+\sum_{q=1}^{m+1}(3m-3q+4) = 3m^2+3m+(3m-3(m+1)+4)$$
$$= 3m^2+3m+1. \qquad (6)$$

$n=6m+4$ ($m \geqq 0$): Zu[1] $x=2p$ ($p=1,\ldots,m$) und $x=2q-1$ ($q=1,\ldots,m+1$) jeweils y bis $3m-p+2$ bzw. bis $3m-q+2$, also

$$A_{6m+4} = \sum_{p=1}^{m}(3m-3p+3)+\sum_{q=1}^{m+1}(3m-3q+4) = 3m^2+4m+1. \qquad (7)$$

$n=6m+5$ ($m \geqq 0$): Zu[1] $x=2p$ ($p=1,\ldots,m$) und $x=2q\cdot 1$ ($q=1,\ldots,m+1$) jeweils y bis $3m-p+2$ bzw. bis $3m-q+3$, also

$$A_{6m+5} = \sum_{p=1}^{m}(3m-3p+3)+\sum_{q=1}^{m+1}(3m-3q+5) = 3m^2+5m+2. \qquad (8)$$

Andererseits ergibt sich in den Fällen $n=6m+k$ jeweils

$$\frac{n^2}{12} = 3m^2 + mk + \frac{k^2}{12} \quad (k=0,1,\ldots,5). \qquad (9)$$

Aus (3) bis (9) erhält man für $k=0,1,\ldots,5$ der Reihe nach als $\left|A_n - \frac{n^2}{12}\right|$ die Werte $0, \frac{1}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}$. Diese sind sämtlich kleiner als $\frac{1}{2}$, w.z.b.w.

---

1 Ist $m=0$, so bedeutet die "Aufzählung" $x=2p$ ($p=1,\ldots,m$): Es gibt kein $x=2p$. Entsprechend ist eine Summe $\sum_{p=1}^{0}(3\cdot 0-2p+c)$ gleich 0 zu setzen. Die oben genutzte Formel

$$\sum_{p=1}^{m}(3m-3p+c) = m\cdot(3m+c) - 3\cdot\frac{m(m+1)}{2}$$

bleibt daher auch für $m=0$ anwendbar.

Lösungen

Aufgabe N 51

Zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers wird der Euklidische Algorithmus verwendet. Dazu formt man um

$$11111111 = \sum_{k=1}^{8} 10^{8-k} \text{ und } \underbrace{1\ 1 \ldots 1}_{100 \text{ Einsen}} = \sum_{k=1}^{100} 10^{100-k}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} 10^{100-k} &= \sum_{k=97}^{100} 10^{100-k} + \sum_{k=1}^{96} 10^{100-k} \\ &= 1111 + 10^4 \sum_{k=1}^{96} 10^{96-k} \\ &= 1111 + 10^4 \sum_{n=0}^{11} \sum_{k=1}^{8} 10^{8n+(8-k)} \\ &= 1111 + 10^4 \sum_{n=0}^{11} 10^{8n} \cdot \sum_{k=1}^{8} 10^{8-k}.\end{aligned}$$

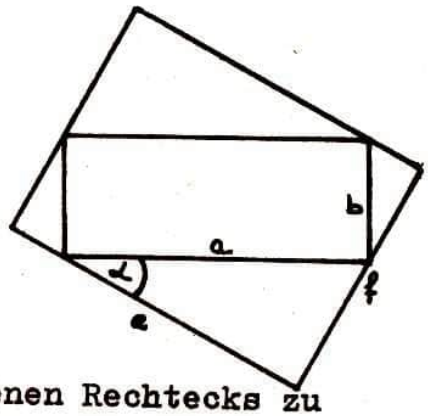
Damit ergibt sich

$$\left(\sum_{k=1}^{100} 10^{100-k}\right) : \left(\sum_{k=1}^{8} 10^{8-k}\right) = 10^4 \sum_{n=0}^{11} 10^{8n} \quad \text{Rest } 1111$$

$$\left(\sum_{k=1}^{8} 10^{8-k}\right) : 1111 = 10001 \quad \text{Rest } 0.$$

Man erhält also als ggT die Zahl 1111.

Aufgabe N 53



Es gelten für die neuen Rechteckseiten die Gleichungen

$e = a \cos\alpha + b \sin\alpha$

$f = a \sin\alpha + b \cos\alpha$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt des umschriebenen Rechtecks zu

$$\begin{aligned} e \cdot f &= (a \cos\alpha + b \sin\alpha)(a \sin\alpha + b \cos\alpha) \\ &= a^2 \sin\alpha \cos\alpha + b^2 \sin\alpha \cos\alpha \\ &\quad + ab(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \\ &= \tfrac{1}{2}(a^2+b^2) \sin 2\alpha + ab, \end{aligned}$$

da $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$.

Nach Voraussetzung sollte gelten

$$\tfrac{1}{2}(a^2+b^2) \sin 2\alpha + ab = m^2,$$

also

$$\sin 2\alpha = \frac{2(m^2-ab)}{a^2+b^2}.$$

Da gilt $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, folgt $0 \leq \frac{2(m^2-ab)}{a+b^2}$

$$0 \leq m^2 - ab$$

$$\sqrt{ab} \leq m$$

und $\frac{2(m^2-ab)}{a^2+b^2} \leq 1$

$$\begin{aligned} 2m^2-2ab &\leq a^2 + b^2 \\ 2m^2 &\leq (a+b)^2 \\ m &\leq \frac{a+b}{2}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Diese Aufgabe ist lösbar für alle m mit

$$\sqrt{ab} \leq m \leq \frac{a+b}{2}\sqrt{2}.$$

Aufgabe N 55

Es ist $\cos^6 x = (1-\sin^2 x)^3$

$$= 1-3 \sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x.$$

Damit wird $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$

$$\begin{aligned} &= -3\sin^2 x\,(1-\sin^2 x) + 1 \\ &= -3(\sin x \cdot \cos x)^2 + 1. \end{aligned}$$

Wegen $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ gilt

$$f(x) = -\frac{3}{4} \sin^2 2x + 1.$$

Für alle reellen Zahlen x ist nun $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$, wobei $\sin^2 0 = 0$ und $\sin^2 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1$.
Daraus ergibt sich

$$1 = -\frac{3}{4} \cdot 0 + 1 \geq f(x) \geq -\frac{3}{4} \cdot 1 + 1 = \frac{1}{4}.$$

Der maximale und der minimale Wert von

$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ ergibt sich also zu $f(0) = 1$ und $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$.

Aufgabe N 56

Die gesuchte Zahl sei n. Da n^6 9-stellig ist, muß gelten: $10^8 \leq n^6 < 10^9$.

Daraus folgt: $10^2 \leq (\frac{n}{10})^6 < 10^3$

$$10 \leq (\frac{n}{10})^3$$

$$(\frac{n}{10})^2 < 10.$$

Folglich muß gelten: $20 < n < 40$. (1)

Die Quersumme von n^6 ist 45.

Somit gilt $9 | n^6$ und $3 | n^6$. Daraus folgt: $3 | n$. (2)

Aus (1) und (2) folgt: $n \in \{21;24;27;30;33;36;39\}$.

Da n^6 die Ziffern 1;5;6 nicht enthält, gilt

$n^6 \not\equiv \begin{cases} 1 \\ 5 \\ 6 \end{cases} \pmod{10}$. Außerdem kann $n \equiv 0 \pmod{10}$ nicht gelten. Dann würde nämlich n^6 sechs Nullen enthalten. Da $n^6 \not\equiv \{0;1;5;6\} \pmod{10}$ ist, kann nur gelten $n \not\equiv \{0;1;4;5;9\} \pmod{10}$.

Somit bleibt $n \in \{27;33\}$.

Nun wird noch der Fall n = 33 ausgeschlossen:

$$33^2 \equiv 89 \pmod{100}$$
$$89^2 \equiv 21 \pmod{100}$$
$$\underline{89^3 \equiv 69 \pmod{100}}$$
$$33^6 \equiv 69 \pmod{100}$$

Somit würde n^6 die Ziffer 6 enthalten.

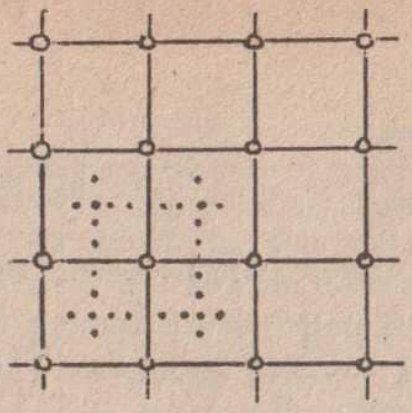
Die gesuchte Zahl kann nur 27 lauten. Man prüft leicht, daß $27^6 = 387420489$ ist.

Sie stritten sich beim Wein herum,
was das nun wieder wäre;
das mit dem Darwin wär' gar zu dumm
und wider die menschliche Ehre.

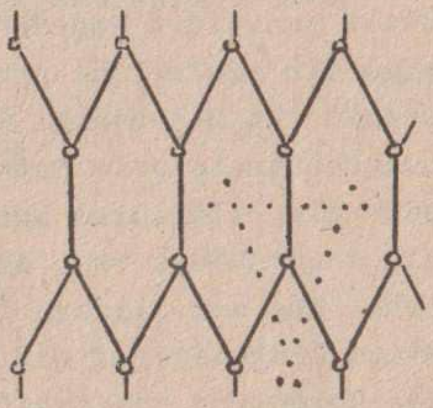
Sie tranken manchen Humpen aus,
sie stolperten aus den Türen,
sie grunzten vernehmlich und kamen zu Haus
gekrochen auf allen Vieren.

Wilhelm Busch

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 20. 4. 1982
Titelbild: Dorothea Heinrich

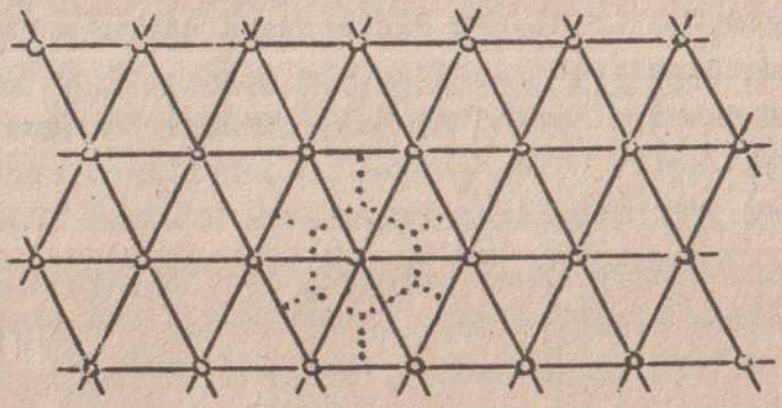


orthogonal



triagonal

hexagonal



7/8
82

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR:
0,20 M

Polygonzüge im Raster

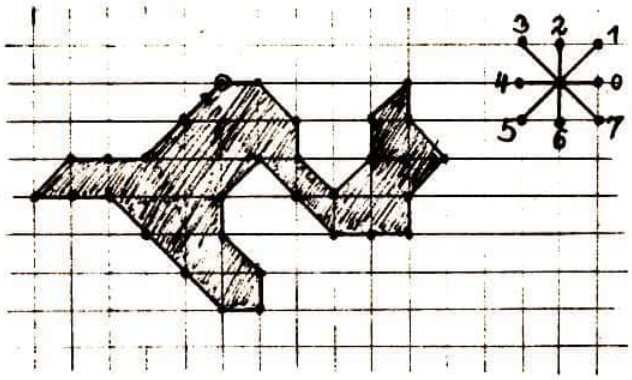
Auf dem Titelblatt dieses Heftes sehen Sie die drei möglichen Varianten von gleichmäßigen Rasterungen der Ebene, das orthogonale, das triagonale und das hexagonale Raster, wobei die Punkte eines Rasters jeweils als Schwerpunkte regulärer konvexer Flächen eines Typs (Quadrat, Dreieck, Sechseck; auf dem Titelblatt punktiert angedeutet) zu betrachten sind. Diese Raster sind für zahlreiche Arbeitsgebiete in der Technik und Wissenschaft von Bedeutung, wie zum Beispiel als prinzipielle Anordnungsschemata beim Entwurf von mikroelektronischen Bausteinen oder als Bildraster bei der Erstellung von Zeichnungen mittels eines Computers bzw. als Bildraster bei der automatischen Verarbeitung von Bildern in einem Computersystem, welches mit einem Eingabegerät zur Übernahme von Bildern in den Speicher des Computers ausgestattet ist.

Wir wollen uns in diesem Artikel der Frage zuwenden, wie Polygonzüge in diesen Rasterungen darzustellen und entsprechend mathematisch zu behandeln sind. Solche Polygonzüge können im konkreten Anwendungsfall gewisse Umrisse (Konturen) von Objekten sein, deren Abbild im jeweiligen Raster zu untersuchen bzw. zu transformieren ist.

Die Punkte eines orthogonalen, triagonalen oder hexagonalen Rasters besitzen jeweils 8, 3 oder 6 unmittelbare Nachbarpunkte im jeweiligen Raster, wobei im orthogonalen Raster neben den beiden horizontalen und den beiden vertikalen Nachbarpunkten auch die vier diagonal benachbarten Rasterpunkte zu dieser unmittelbaren Nachbarschaft eines Punktes hinzugezählt werden. Wir legen fest, daß mit Ausnahme der diagonalen Nachbarn im orthogonalen Raster jeder Punkt der unmittelbaren Nachbarschaft vom Ausgangspunkt genau eine Längeneinheit entfernt ist; die diagonalen Nachbarn besitzen zum Ausgangspunkt einen Abstand von $\sqrt{2}$ Längeneinheiten.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung von Polygonzügen, die aus Strecken bestehen, durch welche jeweils zwei unmittelbare Nachbarpunkte eines der drei Raster verbunden werden. In den Abbildungen 1, 2, 3 und 4 sind Beispiele solcher Polygonzüge zu

finden. Für diese Polygonzüge $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$, wobei $n \geq 0$, ist also für $i=0,1,\ldots,n-1$ der Punkt p_i ein unmittelbarer Nachbar von p_{i+1}. Ferner wollen wir für die zu betrachtenden Polygonzüge voraussetzen, daß die Punkte p_i, mit $i=0,1,\ldots,n-1$, in der Punktfolge $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ genau einmal auftreten und $p_0=p_n$ gelten kann, aber nicht $p_i=p_n$ mit $i \neq 0,n$. Mit dieser Forderung haben wir Kreuzungen der Polygonzüge u. ä. ausgeschlossen.

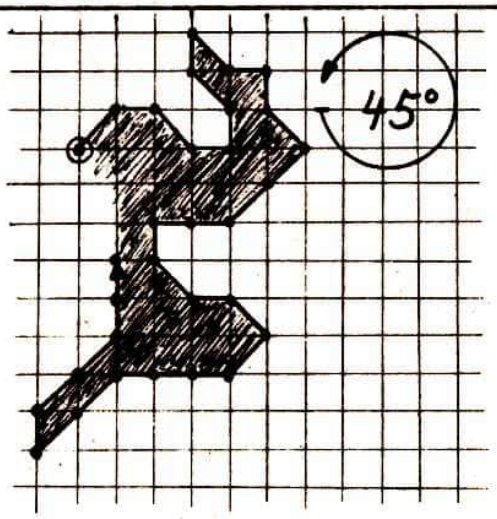


0 7 6 7 1 2 1 6 7 5 6 4 4 3 3
5 6 7 6 4 3 3 3 4 4 1 0 0 1 1

Abb. 1: Geschlossener Polygonzug mit Codefolge im orthogonalen Raster

In der Abb. 1 wird rechts oben ein Vorschlag zur Codierung von Polygonzügen im orthogonalen Raster symbolisiert. Von einem Punkt des Rasters aus kann die Verbindung zu einem seiner unmittelbaren Nachbarn durch eine der Zahlen 0,1,2,3,4,5,6 oder 7 dargestellt (codiert) werden. Beginnen wir nun zum Beispiel bei dem in Abbildung 1 markierten Startpunkt des Polygonzuges, so ist dieser Polygonzug durch die Codefolge 0767... (siehe Abb. 1) eindeutung charakterisiert, wobei eine exakte Positionierung des Polygonzuges im Raster zusätzlich die Angabe der Koordinaten des Startpunktes erfordern würde.

Offenbar entspricht eine Drehung (im Gegenuhrzeigersinn) um $n \cdot 45^\circ$ eines Polygonzuges des orthogonalen Rasters genau der Addition von n modulo 8 zu allen Codezahlen dieses Polygonzuges, wobei $n \geq 0$. Dabei sind für ungerade $n \geq 1$ als Resultat dieser Drehung "Verzerrungen" oder Lücken in vormals geschlossenen Polygonzügen möglich, siehe Abb. 2. Drehungen um beliebige Winkel



1 0 7 0 2 3 2 7 0 6 7 5 5 4 4
6 7 0 7 5 4 4 4 5 5 2 1 1 2 2

Abb. 2: Drehung des geschlossenen Polygonzuges aus Abb. 1 um 45°

sind für Rasterpunktmengen bzw. -folgen problematisch und sollen hier nicht betrachtet werden.

Falls in der Codefolge $c_1, c_2, \ldots, c_n$, mit $n \geq 1$ und $c_i \in \{0,1,\ldots,7\}$ für $i=1,2,\ldots,n$, eines Polygonzuges $p_o, p_1, \ldots, p_n$ jede Codezahl c_i durch m Codezahlen c_i ersetzt wird, wobei m fest vorgegeben sei, so entsteht eine Codefolge eines Polygonzuges, der aus $m \cdot n$ Strecken besteht und als m-fache Vergrößerung des ursprünglichen Polygonzuges zu betrachten ist.

Die Länge eines Polygonzuges ist anhand seiner Codefolge leicht zu berechnen. Alle geradzahligen Elemente dieser Folge entsprechen einer Strecke der Länge 1, alle ungeradzahligen einer Strecke der Länge $\sqrt{2}$.

Falls ein Polygonzug in umgekehrter Richtung zu durchlaufen ist, d. h. anstelle von $p_o, p_1, \ldots, p_n$ ist der Polygonzug in der Reihenfolge $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_o$ zu betrachten, so ist die Codefolge für diesen inversen Polygonzug aus der Codefolge $c_1, c_2, \ldots, c_n$ für den ursprünglichen Polygonzug $p_o, p_1, \ldots, p_n$ wie folgt zu berechnen: Zunächst wird zu allen c_i mit $c_i \leq 3$ die Zahl 4 addiert, bei allen c_i mit $c_i \geq 4$ wird die Zahl 4 subtrahiert. Die entstehende Codefolge wird dann in ihrer Reihenfolge umgekehrt.

Zum Beispiel ist der kleinste kreisförmige geschlossene Polygonzug durch die Codefolge 07654321 eindeutig festgelegt; die inverse Codefolge wäre 56701234.

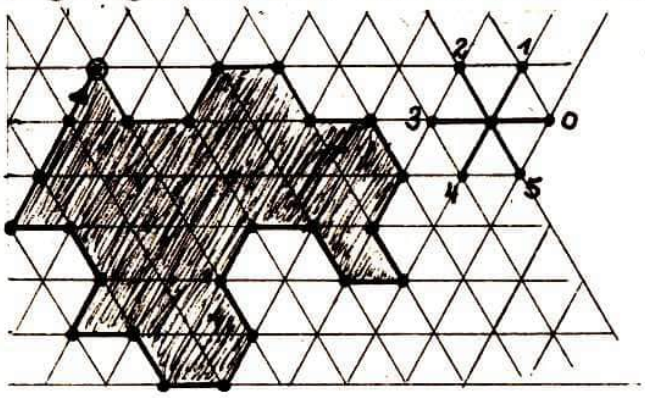
Die Fläche innerhalb eines geschlossenen Polygonzuges $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ des orthogonalen Rasters ist gemäß PICK (1899) gleich $\frac{1}{2}n + m - 1$, wobei m die Anzahl der Rasterpunkte im Inneren des Polygonzuges ist. Zum Beispiel haben wir für den in Abb. 1 dargestellten Polygonzug $n = 30$ und $m = 10$ und mithin die Fläche 24. Es ist interessant, daß die Fläche innerhalb eines geschlossenen Polygonzuges $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ auch anhand seiner Codefolge $c_1, c_2, \ldots, c_n$ zu berechnen ist. Hierbei wird der Wert der Fläche A in Abhängigkeit von c_i und einem gewissen Hilfswert B schrittweise erzeugt, wobei $i=1,2,\ldots,n$. Zu Beginn der Berechnung besitzen A und B den Wert 0. Falls $c_i = 0$, so wird B zu A addiert, B bleibt unverändert; falls $c_i = 1$, so wird B und $\frac{1}{2}$ zu A addiert, zu B wird 1 addiert; ..., für $i=1,2,\ldots,n$. Diese Veränderungen der Werte von A und B im Verlaufe des "Einlesens" der Codefolge $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ergeben sich aus den zugeordneten Richtungen für die Codezahlen 0,1,...,7 und sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

Codezahl	Veränderung von A	Veränderung von B
0	$+ B$	$+ 0$
1	$+ B + \frac{1}{2}$	$+ 1$
2	$+ 0$	$+ 1$
3	$- B - \frac{1}{2}$	$+ 1$
4	$- B$	$+ 0$
5	$- B + \frac{1}{2}$	$- 1$
6	$+ 0$	$- 1$
7	$+ B - \frac{1}{2}$	$- 1$

Zum Beispiel beginnen wir für den in Abb. 1 dargestellten geschlossenen Polygonzug zunächst mit $A = B = 0$. Gemäß $c_1 = 0$ bleibt $A = B = 0$. Im nächsten Schritt erhalten wir wegen $c_2 = 7$ die neuen Werte $A = -\frac{1}{2}$ und $B = -1$. Mit $c_3 = 6$ folgt dann $A = -\frac{1}{2}$ und $B = -2$, mit $c_4 = 7$ folgt $A = -3$ und $B = -3$, mit $c_5 = 1$ folgt $A = -\frac{11}{2}$ und $B = -2$ usw., bis schließlich

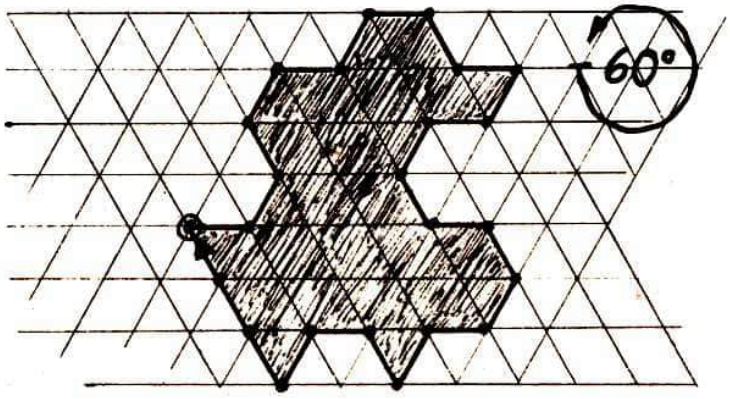
nach der Betrachtung von $c_{30} = 1$ die Werte A = 24 und B = 0 folgen.

In der Abbildung 3 wird rechts oben ein Vorschlag zur Codierung von Polygonzügen im hexagonalen Raster symbolisiert. Von einem Punkt des Rasters aus kann eine Strecke in die Richtung 0,1,2,3,4 oder 5 gezogen werden. In der Abb. 3 wird für einen geschlosse-



5 0 1 0 5 0 5 4 5 3 2 3
4 5 4 3 2 3 1 2 3 1 1 1

Abb. 3: Geschlossener Polygonzug mit Codefolge im hexagonalen Raster



0 1 2 1 0 1 0 5 0 4 3 4
5 0 5 4 3 4 2 3 4 2 2 2

Abb. 4: Drehung des geschlossenen Polygonzuges aus Abb. 3 um 60°

nen Polygonzug des hexagonalen Rasters die entsprechende Codefolge angegeben, wobei wir wiederum bei dem markierten Punkt des Polygonzuges beginnen (in Uhrzeigersinn).

In diesem Fall entspricht eine Drehung (im Gegenuhrzeigersinn) um $n \cdot 60^\circ$ eines Polygonzuges des hexagonalen Rasters genau der Addition von n modulo 6 zu allen Codezahlen dieses Polygonzuges, wobei $n \geq 0$. Die beim orthogonalen Raster für Drehungen um 45°, 135°, 225° oder 315° auftretenden störenden Effekte (im Sinne der Abb. 2) sind im hexagonalen Raster nicht der Fall, vgl. Abb. 4. Hier treten für beliebige $n \geq 0$ keine Verzerrungen oder Lücken vormals geschlossener Polygonzüge ein.

Das hexagonale und das triagonale Raster besitzen für die praktische Anwendung jedoch einige Nachteile, so daß diese Raster im konkreten Anwendungsfall kaum anzutreffen sind. Für den Leser könnte es allerdings eine interessante Aufgabe sein, Fragen der Art, wie sie für das orthogonale Raster in diesem Artikel etwas ausführlicher angesprochen wurden, als Übung auch für das hexagonale und triagonale Raster zu betrachten.

Dr. Reinhard Klette
Bereich Mathematische Kybernetik und Rechentechnik

Aufgaben zum Artikel „Polygonzüge im Raster"

1. Nach welcher Gesetzmäßigkeit ist die Zahlenfolge
   1, 3, 7, 12, 18, 24, 33, 43, 54, 67, 81, 96, 112, 129, 148,...
   aufgebaut? Wie ist die Zahlenfolge
   2, 5, 10, 62, 53, 64, 95, 47, 19, 2, ...
   fortzusetzen?

2. Im Artikel "Polygonzüge im Raster" werden das orthogonale, das hexagonale und das triagonale Raster betrachtet. Für einen Rasterpunkt p sei $D_r(p)$ die Menge aller Rasterpunkte, deren Abstand zu p höchstens gleich r ist. Geben Sie die Anzahl von Punkten in $D_r^o(p)$, $D_r^h(p)$, $D_r^t(p)$ an, wobei o,h,t für orthogonal, hexagonal und triagonal stehen und r eine beliebige natürliche Zahl ist!

Preisaufgaben

0 37 (2) Welchen Rest läßt das Polynom $(x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243})$ bei der Division durch $(x-1)$?

0 38 (2) Man bestimme den Summanden in der Entwicklung von $(1 + x + \frac{6}{x})^{10}$, der x nicht enthält.

0 39 (1) In einer Pyramide mit dreieckiger Grundfläche ist der Umfang aller vier Seiten jeweils gleich. Berechnen Sie die Gesamtoberfläche der Pyramide, wenn der Umfang ihrer Seitenflächen jeweils gleich 5 ist.

0 40 (1) Finden Sie eine zweistellige Zahl, die gleich der Summe der dritten Potenzen ihrer Ziffer ist!

0 41 (1) Es ist zu zeigen: Wenn $\tan\varphi = \frac{1}{\cos\alpha \cos\beta} + \tan\alpha \tan\beta$ so ist $\cos 2\varphi \leq 0$.

0 42 (2) Упростить выражение $a^{\frac{\lg \lg a}{\lg a}}$, предпологим, что все логарифмы взяты по одному и тому же основанию в.

Einsendeschluß 15. 11. 1982

XXI. DDR-Olympiade Klassen 11/12

Aufgaben

Aufgabe 1. Man untersuche, ob sich aus 1982 Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{1982}$, die der Bedingung $|a_k| = 1$ $(k=1,2,\ldots,1982)$ genügen, aber sonst beliebig vorgegeben sind, stets Zahlen so auswählen lassen, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k ausgewählt.

(2) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k nicht ausgewählt.

(3) Die Summe aller ausgewählten Zahlen ist gleich der Summe aller nicht ausgewählten Zahlen.

Aufgabe 2. Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
In dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 1, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 1 \end{aligned} \qquad (1)$$

belegt zunächst A einen der Koeffizienten a_i, b_i, c_i $(i=1,2,3)$ mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl.

Dann belegt B einen der verbleibenden Koeffizienten mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl, dann wieder A, dann B usw., bis endlich A den letzten (neunten) Koeffizienten mit einer natürlichen Zahl belegt.

A hat gewonnen, wenn nach diesen Belegungen das Gleichungssystem (1) genau eine reelle Lösung (x,y,z) besitzt.

B hat gewonnen, wenn nach den Belegungen das Gleichungssystem (1) keine oder unendlich viele reelle Lösungen besitzt.

Man untersuche, ob B durch geeignete Belegungen in jedem Falle den Gewinn erzwingen kann.

Aufgabe 3. Man beweise, daß sich aus fünf geraden "Stäben" kein räumlicher Streckenzug ABCDEA bilden läßt, der die

folgenden Eigenschaften (1) und (2) besitzt:

(1) Keine vier der fünf Punkte A,B,C,D,E liegen in einer gemeinsamen Ebene.

(2) Aus einer geeigneten Blickrichtung betrachtet, gilt (s. Abb.): Keine zwei der fünf Punkte A,B,C,D,E werden genau hintereinander (also scheinbar miteinander zusammenfallend) gesehen; ein innerer Punkt der Strecke CD verdeckt einen inneren Punkt von AE, ein innerer Punkt von BC verdeckt einen inneren Punkt von DE, ein innerer Punkt von AE verdeckt einen inneren Punkt von BC.

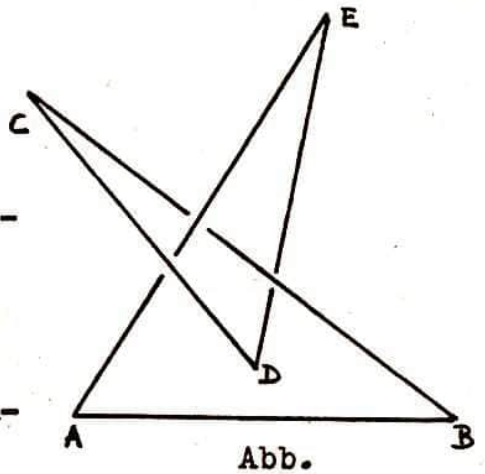


Abb.

<u>Hinweis:</u> Unter einem inneren Punkt P einer Strecke XY versteht man einen von X und Y verschiedenen, d. h. zwischen diesen Punkten liegenden Punkt P der Strecke XY.

Aufgabe 4. Es sei $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_0,a_1,\ldots,a_n$, wobei $n \geqq 1$ und $a_n \neq 0$ gelte. Man setze

$$r = \frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_{n-1}|}{|a_n|}$$

und beweise:

a) Ist $r \geqq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-r \leqq x \leqq r$.

b) Ist $r \leqq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$.

Aufgabe 5. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle BCA = 90^\circ$. Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte P des Raumes, für die

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 \leqq \overline{PC}^2$$

gilt.

Aufgabe 6A. a) Man beweise: Wenn

$$a = \overline{BC},\ b = \overline{AC},\ c = \overline{AB},\ d = \overline{AD},\ e = \overline{BD},\ f = \overline{CD} \quad (1)$$

die Kantenlängen eines Tetraeders ABCD sind, dann gilt für den Oberflächeninhalt A_0 dieses Tetraeders die Ungleichung

$$A_0 < \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2). \quad (2)$$

b) Man untersuche, ob sich die Aussage über (2) noch zu folgender Aussage verschärfen läßt: Es gibt eine kleinste reelle Zahl λ mit $\lambda < \frac{1}{3}$, so daß für den Oberflächeninhalt A_0 jedes Tetraeders ABCD, wenn man dessen Kantenlängen wie in (1) bezeichnet, die Ungleichung

$$A_0 \leqq \lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \quad (3)$$

gilt.

Wenn das der Fall ist, so ermittle man diese Zahl λ.

Aufgabe 6B. Man ermittle alle diejenigen Funktionen f und g, die für alle nicht negativen reellen Zahlen x definiert sind, reelle Funktionswerte haben und folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Für alle $x \geqq 0$ gilt $f(x) \geqq 1$ und $g(x) \geqq 0$.

(2) Für alle $x \geqq 0$ gilt $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1$.

(3) Für alle $x \geqq 0$ und alle $y \geqq 0$ gilt

$$f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)\cdot f(y) + g(x)\cdot g(y).$$

(4) Für alle $x \geqq 0$ und alle $y \geqq 0$ gilt

$$g(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)\cdot g(y) + g(x)\cdot f(y).$$

Mathematische Spiele

Es ist allen bekannt, daß Spiele nicht nur unterhaltenden Charakter haben, sondern auch in den meisten Fällen erzieherischen und bildenden Wert besitzen. Viele große Mathematiker, wie Euler, Leibniz, Hamilton, Cayly u. a. haben sich insbesondere mit solchen Spielen beschäftigt, die eine mathematische Lösung gestatteten bzw. vermuten ließen.
Gegenwärtig findet man in vielen Familien den Würfel des ungarischen Physikers Rubik. Er hat sich sozusagen die Welt erobert. Besondere Freude machen Spielzeuge, die man selbst konstruieren und herstellen kann. Im folgenden wollen wir einige mathematische Spiele erläutern, die sich mit relativ einfachen Mitteln selbst herstellen lassen. Auch wenn man die mathematischen Lösungen kennt, verlieren sie nicht an Reiz.

1. Die geheimnisvollen Roste oder der Gedankenleser

Dieses mathematische Spiel beruht auf der Möglichkeit, alle natürlichen Zahlen durch eine Summe von verschiedenen Potenzen von 2 darstellen zu können. Wie man zu dieser Darstellung kommen kann, wollen wir an einem einfachen Beispiel erläutern. Es sei also die Zahl 1982 gegeben. Von dieser Zahl ziehen wir die höchste 2er Potenz ab, in diesem Falle $2^{10} = 1024$. Dann hat man

$$1982 - 2^{10} = 958$$

Von 958 läßt sich $2^9 = 512$ abziehen. Man erhält

$$958 - 2^9 = 446$$

Von 446 läßt sich höchstens $2^8 = 256$ abziehen:

$$446 - 2^8 = 190$$

Die weiteren Schritte sind folgende

$$190 - 2^7 = 62$$
$$62 - 2^5 = 30$$
$$30 - 2^4 = 14$$
$$14 - 2^3 = 6$$
$$6 - 2^2 = 2$$
$$2 - 2^1 = 0$$

1982 läßt sich also durch folgende Summe darstellen:

$$1982 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1.$$

Das dyadische Symbol für 1982 lautet demnach:

LLLLOLLLLLO.

Man erkennt, daß die dyadischen Symbole bei größeren Zahlen einen nicht sehr erfreulichen Umfang einnehmen. In der modernen Mathematik spielt aber das dyadische System eine hervorragende Rolle. Bereits Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), Gründer der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1700) zeigte großes Interesse für die Dyadik.

Für unser mathematisches Spiel wollen wir die dyadischen Symbole der Zahlen 0 bis 31 zusammenstellen.

0 = 0	1 = L	2 = L 0	3 = L L				
4 = L 0 0	5 = L 0 L	6 = L L 0	7 = L L L				
8 = L 0 0 0	9 = L 0 0 L	10 = L 0 L 0	11 = L 0 L L				
12 = L L 0 0	13 = L L 0 L	14 = L L L 0	15 = L L L L				
16 = L 0 0 0 0	17 = L 0 0 0 L	18 = L 0 0 L 0	19 = L 0 0 L L				
20 = L 0 L 0 0	21 = L 0 L 0 L	22 = L 0 L L 0	23 = L 0 L L L				
24 = L L 0 0 0	25 = L L 0 0 L	26 = L L 0 L 0	27 = L L 0 L L				
28 = L L L 0 0	29 = L L L 0 L	30 = L L L L 0	31 = L L L L L				

Tab. 1

Aus der Tabelle ist zu ersehen, daß in der Zahlenfolge 0,1,2,...,31 die ungeraden Zahlen 1,3,5,...,31 in der dyadischen Darstellung die Potenz 2^0 enthalten.

Will man alle Zahlen sichtbar bzw. unsichtbar machen, die in der dyadischen Darstellung die Potenz 2^0 enthalten, so kann man dies mit Hilfe geeigneter Schablonen, sogenannter Roste erreichen.

Je nach Art der Darstellung der Zahlen 0 bis 31 (siehe Abb. 1 und Abb. 2)

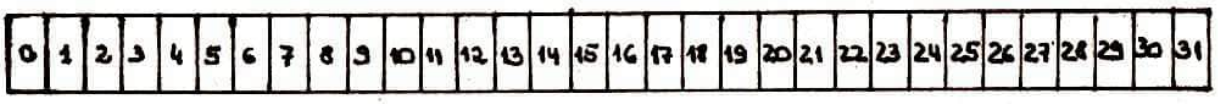


Abb. 1

0	28	1	29	2	30	3	31
27	7	26	6	25	5	24	4
8	20	9	21	10	22	11	23
19	15	18	14	17	13	16	12

Abb. 2

kann man z. B. folgende Roste verwenden:
Für die Zahlendarstellung in Abb. 1 eignet sich der Rost in Abb. 1a, für die Zahlendarstellung in Abb. 2 ein Rost der Abb. 2a.

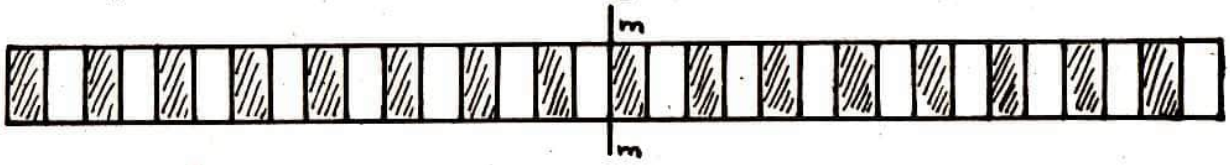


Abb. 1a

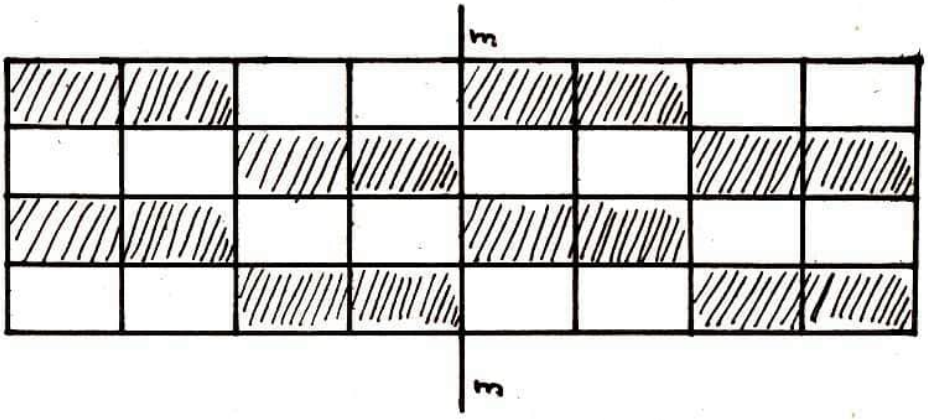


Abb. 2a

Beide Roste haben eine interessante Eigenschaft. Wenn man sie um die Mittelachse m - m umklappt, so daß sich linke Seite und rechte Seite vertauschen, und sie auf die Zahlentabelle legt, so werden jetzt die Zahlen sichtbar, die vorher verdeckt waren und umgekehrt die Zahlen verdeckt, die vorher sichtbar waren. (Die nicht schraffierten Teile werden aus der Schablone herausgeschnitten.)
Nun interessieren uns die Zahlen von 0 bis 31, die bei der dyadischen Darstellung die Potenz 2^1 enthalten. Aus der obigen Tabelle 1 ist zu ersehen, daß die Zahlen 2;3;6;7;10;11;...30;31 die Potenz 2^1 enthalten. Zwischen diesen Zahlen liegen die Zah-

lenpaare, die nicht 2^1 enthalten.
Will man wieder alle Zahlen sichtbar bzw. unsichtbar machen, die in der dyadischen Darstellung die Potenz 2^1 enthalten, so kann man dies z. B. durch die Roste in Abb. 1b bzw. 2b erreichen.
Auch hier erkennt man die Eigenschaft der Roste, daß bei Umklappen um die Mittelachse die Zahlen sichtbar werden, die vorher verdeckt waren und die Zahlen verdeckt werden, die vorher sichtbar waren.

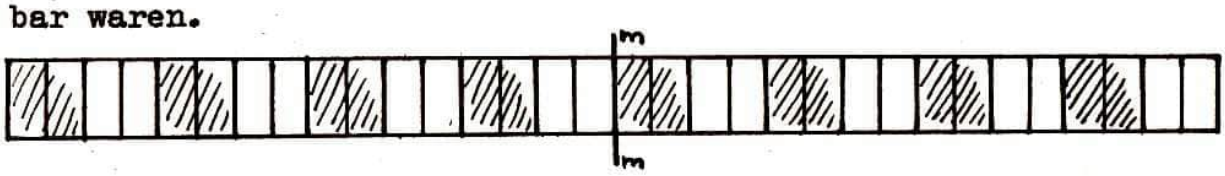


Abb. 1b

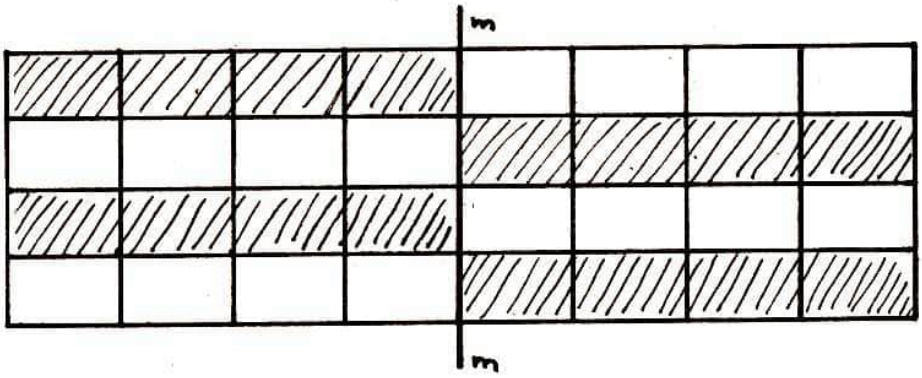


Abb. 2b

In ähnlicher Weise können wir alle Zahlen von 0 bis 31 betrachten, die in der daydischen Schreibweise die Potenz 2^2, 2^3 bzw. 2^4 enthalten. Die Tabelle 1 gibt uns darüber Auskunft. Die entsprechenden Roste stellen wir im folgenden zusammen (Abb. 1c, Abb. 1d, 1e bzw. 2c, 2d und 2e).

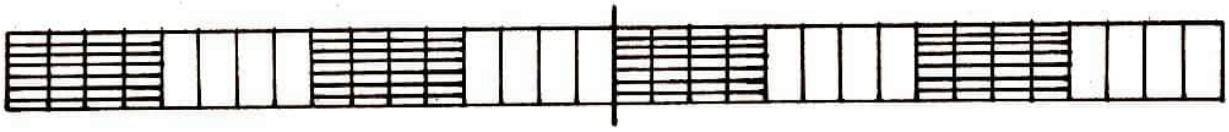


Abb. 1c

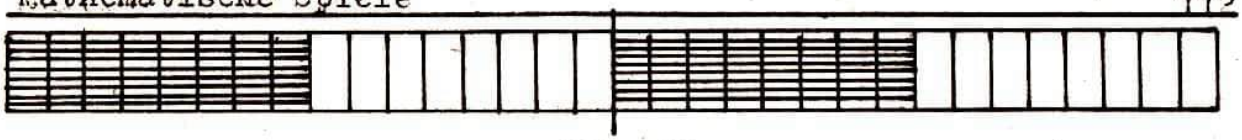


Abb. 1d

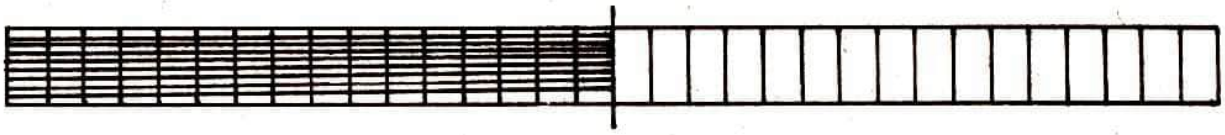


Abb. 1e

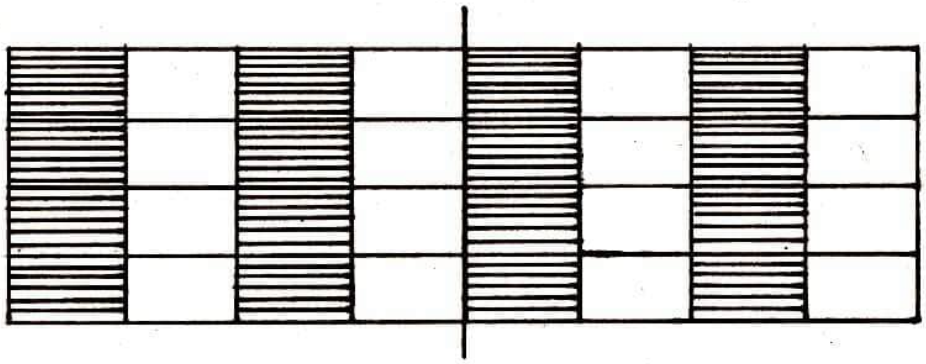


Abb. 2c

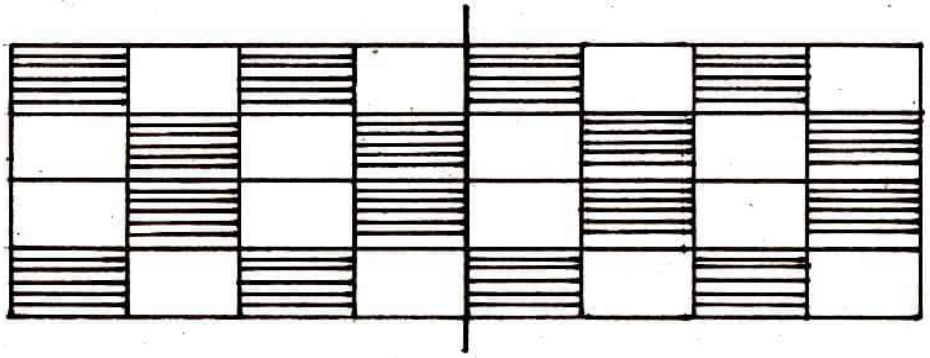


Abb. 2d

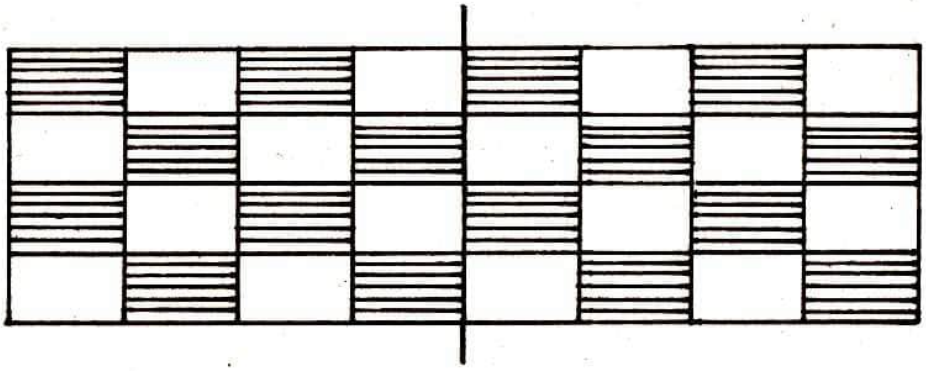


Abb. 2e

Für alle gefundenen Roste gilt die Eigenschaft, daß beim Umklappen um die Mittelachse die vorher verdeckten Zahlen sichtbar werden und die vorher sichtbaren Zahlen verdeckt werden. Die Zahlenverteilung in Abb. 2 ist so gewählt worden, daß diese Eigenschaft für alle Roste gültig bleibt. Der Leser kann sich davon leicht überzeugen.
Die angegebenen Rostsysteme haben noch eine zweite Eigenschaft. Legen wir alle Roste übereinander und auf die Zahlentabelle, so bleibt nur ein einziges Fenster offen. Diese Eigenschaft gilt auch, wenn einige Roste durch Umklappen um die Mittelachse in die sogenannte komplementäre Form überführt werden. Wir wollen diese Eigenschaft an einem Beispiel erläutern. Wir wollen erreichen, daß beim Übereinanderlegen der Roste die Zahl 21 sichtbar bleibt. Es ist $21 = 2^4 + 2^2 + 2^0$.
Legen wir den ersten Rost auf die Zahlentabelle, so bleiben alle Zahlen sichtbar, die die Potenz 2^0 enthalten, also auch 21. Nun legen wir den Rost beiseite (ohne Umklappung). Beim Auflegen des zweiten Rostes bleibt 21 verdeckt, da 21 die Potenz 2^1 nicht enthält. Wir legen den 2. Rost nach Umklappung auf den ersten Rost. Beim Auflegen des 3. Rostes ist 21 wieder sichtbar. Wir nehmen den Rost und legen ihn ohne Umklappung auf die beiden ersten. Beim Auflegen des 4. Rostes bleibt 21 unsichtbar. Wir klappen ihn beim Abheben um und legen ihn auf die ersten 3 Roste. Beim Auflegen des letzten Rostes bleibt 21 sichtbar. Wir legen ihn ohne Umklappung auf die 4 Roste. Nun sieht man, daß nur 21 sichtbar bleibt. Wir haben die Roste so aufeinandergelegt, daß 2^0, 2^2 und 2^4 sichtbar sind. Da es nur eine Zahl gibt, die aus 2^0, 2^2 und 2^4 zusammengesetzt ist, erscheint eben nur eine Zahl.
Diese Eigenschaft gestattet uns, das Rostsystem als Gedankenleser zu benützen. Man legt z. B. dem Spielkameraden die Zahlentabelle vor und fordert ihn auf, sich eine Zahl zu merken. Dann legt man die 5 Roste der Reihe nach darauf und fragt, ob die gedachte Zahl jeweils zu sehen ist. Wenn ja, legt man den Rost beiseite, ohne ihn umzuklappen. Wenn nein, so klappt man ihn um und schiebt ihn beiseite. Zum Schluß legt man alle Roste aufeinander. Zum Staunen des Spielpartners erscheint seine gedachte Zahl.
Einen bildenden Wert erhält das Spiel, wenn man die Zahlen durch

Bilder anderer Objekte oder durch Namen ersetzt. Z. B. kann man Bilder oder Namen berühmter Mathematiker oder Physiker zusammenstellen und eventuell kurze Lebensbeschreibungen hinzufügen. Für Schüler, die sich ein solches Spiel herstellen wollen, will ich 32 große Mathematiker im folgenden mitteilen:

1. Abel (1802 - 1829)
2. Archimedes (287 - 212 v.u.Z.)
3. Bolzano (1781 - 1848)
4. Bernoulli Jakob (1655 - 1705)
5. Cantor (1845 - 1918)
6. Coriolis (1792 - 1843)
7. Dedekind (1831 - 1916)
8. Descartes (1596 - 1650)
9. Euklid (um 300 v.u.Z.)
10. Euler (1707 - 1783)
11. Gauß (1777 - 1855)
12. Galois (1811 - 1832)
13. Graßmann (1809 - 1877)
14. Hilbert (1862 - 1943)
15. Klein (1849 - 1925)
16. Kowalewskaja (1850 - 1891)
17. Kronecker (1823 - 1891)
18. Lambert (1728 - 1777)
19. Lagrange (1736 - 1813)
20. Laplace (1749 - 1827)
21. Legendre (1752 - 1833)
22. Leibniz (1646 - 1716)
23. Lindemann (1852 - 1939)
24. Lie (1842 - 1899)
25. Riemann (1826 - 1866)
26. Steiner (1796 - 1863)
27. Tschebyschef (1821 - 1894)
28. Weierstraß (1815 - 1897)
29. Schmidt, Erhard (1876-1959)
30. Emmy Noether (1882 - 1935)
31. Poincard (1854 - 1912)
32. Dirichlet (1805 - 1859)

Die hier angegebenen Roste sind nicht die einzig möglichen. Auch läßt sich der Zahlenbereich erweitern. Wenn man statt der Zahlen 0 bis 31 die Zahlen 0 bis 63 benutzt, könnten Zahlentafel und Roste quadratische Gestalt annehmen.

Fortsetzung folgt

Dr. B. Hanisch
Halle

XXI. DDR-Olympiade Klassen 11/12

Lösungen

1) Eine Auswahl, die (1), (2), (3) erfüllt, ist stets möglich. Sie läßt sich z. B. folgendermaßen erhalten: Man betrachte für jedes $i=1,\ldots,991$ die beiden Zahlen a_{2i-1} und a_{2i}. Sind sie einander gleich, so wähle man genau eine von ihnen aus. Sind sie voneinander verschieden (d. h. eine gleich 1 und die andere gleich -1), so wähle man entweder beide aus oder beide nicht; und zwar kann man zwischen diesen Möglichkeiten so entscheiden, daß (1) und (2) erfüllt werden. Denn wenn der Fall $a_{2i-1} \neq a_{2i}$ höchstens einmal vorkommt, so werden (1) und (2) bereits wegen der Auswahlvorschrift in den übrigen Fällen mit $a_{2i-1} = a_{2i}$ erfüllt. Wenn aber der Fall $a_{2i-1} \neq a_{2i}$ mehr als einmal vorkommt, dann kann man mindestens einmal die beiden betreffenden Zahlen auswählen und mindestens einmal nicht.
Aus den Auswahlvorschriften folgt ferner unmittelbar, daß auch (3) erfüllt wird.

---

2) Man beweist zunächst folgende Hilfsaussage:
Wenn die Zahl
$D = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$
gleich 0 ist, so hat das Gleichungssystem (1) keine oder unendlich viele Lösungen.

<u>Beweis der Hilfsaussage:</u> Aus $D = 0$ folgt: Es liegt genau einer der folgenden Fälle I bis V vor:

I. Es ist $a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = a_3 = b_3 = c_3 = 0$.
In diesem Fall hat das Gleichungssystem (1) keine Lösung.

II. Nicht alle Zahlen $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ sind gleich 0, aber es gilt $a_1 = a_2 = a_3$, $b_1 = b_2 = b_3$, $c_1 = c_2 = c_3$. (2)
In diesem Fall hat das Gleichungssystem (1) unendlich viele Lösungen. Ist nämlich o.B.d.A. $a_1 \neq 0$, so ist jedes Tripel (x,y,z) mit beliebigen reellen y,z und jeweils zugehörigem $x = \frac{1}{a_1}(1-b_1y-c_1z)$ eine Lösung von (1).

III. Nicht alle Gleichungen (2) gelten, aber es ist

$$\begin{aligned} &a_1b_2 - a_2b_1 = a_2b_3 - a_3b_2 = a_3b_1 - a_1b_3 = \\ &= b_1c_2 - b_2c_1 = b_2c_3 - b_3c_2 = b_3c_1 - b_1c_3 = \\ &= c_1a_2 - c_2a_1 = c_2a_3 - c_3a_2 = c_3a_1 - c_1a_3 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

In diesem Fall hat (1) keine Lösung. Ist nämlich o.B.d.A. $a_1 \neq a_2$, so folgt aus der Annahme, es gäbe eine Lösung (x,y,z) von (1): Multipliziert man in (1) die erste Gleichung mit $(-a_2)$, die zweite mit a_1 und addiert die erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich der Widerspruch
$(a_1b_2 - a_2b_1)y + (a_1c_2 - a_2c_1)z = a_1 - a_2$.

IV. Nicht alle Gleichungen (3) gelten, aber es sind (außer D) auch die drei Zahlen

$$D_1 = b_1c_2 - b_2c_1 + b_2c_3 - b_3c_2 + b_3c_1 - b_1c_3,$$
$$D_2 = c_1a_2 - c_2a_1 + c_2a_3 - c_3a_2 + c_3a_1 - c_1a_3,$$
$$D_3 = a_1b_2 - a_2b_1 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_3b_1 - a_1b_3$$

gleich 0.

In diesem Fall hat das Gleichungssystem (1) unendlich viele Lösungen. Ist nämlich o.B.d.A. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, so ist jedes Tripel (x,y,z) mit beliebigem reellem z und jeweils zugehörigen

$$x = \frac{b_2-b_1+(b_1c_2-b_2c_1)z}{a_1b_2-a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1-a_2+(a_2c_1-a_1c_2)z}{a_1b_2-a_2b_1}$$

eine Lösung von (1); denn durch Einsetzen dieser Werte in die erste und zweite Gleichung von (1) bestätigt man unmittelbar, daß diese Gleichungen erfüllt sind; für die dritte Gleichung erhält man

$$a_3x + b_3y + c_3z = \frac{a_1b_2 - a_2b_1 - D_3 + D\cdot z}{a_1b_2 - a_2b_1} = 1.$$

V. Nicht alle drei Zahlen D_1, D_2, D_3 sind gleich 0 (aber es gilt $D=0$). In diesem Fall hat das Gleichungssystem (1) keine Lösung. Ist nämlich o.B.d.A. $D_1 \neq 0$, so folgt aus der Annahme, es gäbe eine Lösung (x,y,z) von (1): Multipliziert man in (1) die erste Gleichung mit $b_2c_3 - b_3c_2$, die zweite mit $b_3c_1 - b_1c_3$ und die dritte mit $b_1c_2 - b_2c_1$ und addiert die erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich der Widerspruch $D\cdot x = D_1$. Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Nun kann B die folgende Strategie einhalten:

1. O.B.d.A. sei angenommen, daß A zuerst den Koeffizienten a_1 belegt hat (auf diese Möglichkeit lassen sich alle anderen durch Vertauschen von Gleichungen oder Vertauschen von Unbekannten zurückführen). Dann belegt B den Koeffizienten

c_2 mit 0 und erreicht damit

$$D = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1,$$

worin nur der Koeffizient a_1 bereits festgelegt ist.

2. Belegt nun A den Koeffizienten c_3, so belegt B den Koeffizienten b_2 mit 0 und erreicht

$$D = a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3.$$

Belegt dagegen A einen anderen Koeffizienten, so belegt B den Koeffizienten c_3 mit 0 und erreicht

$$D = a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1.$$

In beiden Fällen ist in der erhaltenen Darstellung von D höchstens ein Koeffizient festgelegt (im ersten Fall ist dies genau der Koeffizient c_3).

3. Belegt jetzt A einen weiteren Koeffizienten, so kommen höchstens in einem der beiden Produkte (aus der erreichten Darstellung von D) zwei bereits festgelegte Koeffizienten vor. B kann dann in einem Produkt mit maximaler Anzahl bereits festgelegter Koeffizienten einen weiteren Koeffizienten mit 0 belegen und damit

$$D = a_2b_3c_1 \text{ oder } D = -a_3b_2c_1$$

erreichen, worin jeweils höchstens ein Koeffizient festgelegt ist.

4. Nach der nächsten Belegung eines Koeffizienten durch A kann B folglich in der zuletzt erhaltenen Darstellung von D noch einen freien Koeffizienten mit 0 belegen und damit D=0 erreichen.

Wegen der Hilfsaussage folgt dann, daß B gewinnen wird, unabhängig davon, welche weiteren Belegungen bis zum Ende des Spieles noch vorgenommen werden. Damit ist bewiesen: B kann in jedem Falle den Gewinn erzwingen.

---

3) Angenommen, es gäbe einen Streckenzug ABCDEA mit den Eigenschaften (1) und (2).

Aus der genannten Blickrichtung betrachtet, würde dann D mit einem Punkt D' der Ebene e durch A,C,E zusammenfallend er-

scheinen, also CD mit der Strecke CD'. Dabei würde CD die Strecke CD' verdecken, da ein innerer Punkt von CD einen Punkt der Ebene e verdecken würde (nämlich einen inneren Punkt der Strecke AE). Folglich würde DE die Strecke D'E verdecken. Da nun aber die Strecke BC ihrerseits einen inneren Punkt von DE verdecken würde, so ergäbe sich:

(3) BC verdeckt eine Strecke in der Ebene e.

Andererseits wäre nach Annahme ein innerer Punkt von BC durch die Strecke AE verdeckt, also folgte erst recht:

(4) BC wird von der Ebene e verdeckt.

Da (3) und (4) einander widersprechen, war die Annahme, es gäbe einen Streckenzug ABCDEA mit den Eigenschaften (1) und (2), falsch, w.z.b.w.

---

4) Zum Beweis von (a) und (b) genügt es, die folgende Aussage (c) zu beweisen:

(c) Wenn f(x) eine Nullstelle x_0 mit $|x_0| > 1$ besitzt, so gilt $|x_0| \leqq r$. Aus (c) ergibt sich nämlich (a) folgendermaßen: Jede Nullstelle x_0 mit $|x_0| \leqq 1$ liegt wegen der Voraussetzung $r \geqq 1$ im Intervall $-r \leqq x \leqq r$; jede Nullstelle x_0 mit $|x_0| > 1$ aber wegen (c).

Ferner ergibt sich (b) folgendermaßen: Gäbe es eine Nullstelle x_0, die nicht im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ läge, so führte (c) auf $r \geqq |x_0| > 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung $r \leqq 1$.

Beweis zu (c):

Wenn f(x) eine Nullstelle x_0 mit $|x_0| > 1$ besitzt, so gilt nach der Dreiecksungleichung ($|s+t| = |s| + |t|$ für beliebige reelle s und t)

$$|a_n| \cdot |x_0|^n = \left|-a_0 - a_1 x_0 - \dots - a_{n-1} x_0^{n-1}\right| \leqq$$

$$\leqq |a_0| + |a_1| \cdot |x_0| + \dots + |a_{n-1}| \cdot |x_0|^{n-1}$$

$$= (|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|)\,|x_0|^{n-1},$$

wegen $|a_n| \neq 0$, $|x_0| \neq 0$ also

$$x_0 \leqq \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|}{|a_n|},$$

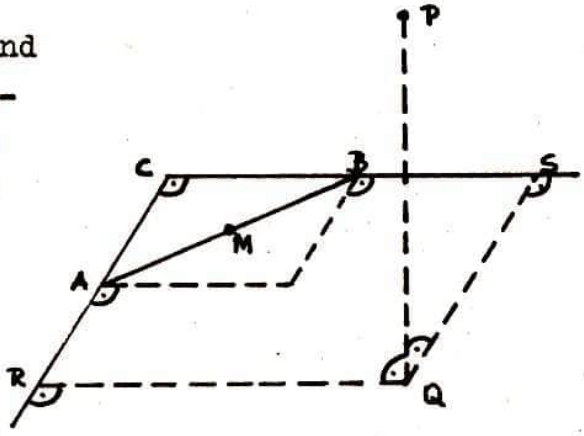
w.z.b.w.

5) Die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, sei e. Es sei P ein beliebiger Punkt des Raumes. Das Lot von P auf e sei PQ, das Lot von Q auf die Gerade durch C,A sei QR, das Lot von Q auf die Grade durch C,B sei QS. Dann ist CRQS ein (möglicherweise zur Strecke oder zum Punkt entartetes) Rechteck. Ferner sei $\overline{CA} = b$, $\overline{CB} = a$, $\overline{CR} = \overline{SQ} = x$, $\overline{CS} = \overline{RQ} = y$, $\overline{QP} = z$. Nach dem Satz von Pythagoras ist $\overline{AQ}^2 = (b \pm x)^2 + y^2$ und, da wegen $PQ \perp e$ auch $PQ \perp AQ$ gilt, $\overline{AQ}^2 + \overline{QP}^2 = (b \pm x)^2 + y^2 + z^2$. Entsprechend folgt $\overline{PB}^2 = x^2 + (a \pm y)^2 + z^2$, $\overline{PC}^2 = x^2 + y^2 + z^2$; jeweils mit einem der beiden Vorzeichen.[1)]

Daher hat ein Punkt P genau dann die Eigenschaft $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 \leqq \overline{PC}^2$, wenn für ihn $(b \pm x)^2 + y^2 + x^2 + (a \pm y)^2 + z^2 \leqq x^2 + y^2 + z^2$ gilt. Dies ist äquivalent mit

$$(b \pm x)^2 + (a \pm y)^2 + z^2 \leqq 0. \qquad (1)$$

Wegen $(b+x)^2 > 0$, $(a+y)^2 > 0$, $(b-x)^2 \geqq 0$, $(a-y)^2 \geqq 0$, $z^2 \geqq 0$ trifft (1) genau dann zu, wenn bei den Doppelvorzeichen überall das Minuszeichen gilt und $b-x = a-y = z = 0$ ist. Dies gilt genau für denjenigen Punkt P, für den ACBP ein Rechteck ist. Somit ist die gesuchte Menge diejenige, die genau diesen Punkt enthält.



<u>Andere Lösungsdarstellungen</u> sind z. B. mit Hilfe der Vektorrechnung möglich. Wählt man etwa M als Mittelpunkt der Strecke AB und setzt $\overrightarrow{MA} = \mathfrak{a}$, $\overrightarrow{MB} = \mathfrak{b}$, $\overrightarrow{MC} = \mathfrak{c}$, $\overrightarrow{MP} = \mathfrak{p}$, so wird $\mathfrak{a} = -\mathfrak{b}$, sowie nach der Umkehrung des Satzes von Thales $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| = |\mathfrak{c}|$, und die Bedingung $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 \leqq \overline{PC}^2$ ist der Reihe nach äquivalent mit

$(\mathfrak{a} - \mathfrak{p})^2 + (\mathfrak{b} - \mathfrak{p})^2 \leqq (\mathfrak{c} - \mathfrak{p})^2$, $\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{p}^2 \leqq -2\mathfrak{c}\mathfrak{p}$,

$(\mathfrak{c} + \mathfrak{p})^2 \leqq 0$, $\mathfrak{p} = -\mathfrak{c}$.

1) Bis hierher kann der Lösungsverlauf auch einfach als aus der räumlichen analytischen Geometrie bekannt zitiert werden, mit vorzeichenfähigen x,y,z und dem Minuszeichen statt des Doppelvorzeichens.

6A) a) Für den Flächeninhalt F_1 des Dreiecks ABC gilt

$$2F_1 = ab \sin\gamma = bc \sin\alpha = ac \sin\beta ,$$

wobei α, β, γ die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC sind und daher mindestens zwei der Werte $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ kleiner als 1 sind. Hiernach und wegen $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geqq 0$, $b^2 - 2bc + c^2 \geqq 0$, $c^2 - 2ac + a^2 \geqq 0$ gilt

$$2(a^2+b^2+c^2) = (a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2) \geqq 2ab+2bc+2ac$$
$$> 2ab \sin\gamma + 2bc \sin\alpha + 2ac \sin\beta = 12F_1,$$

also

$$F_1 < \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2).$$

Entsprechend gilt für die Flächeninhalte F_2, F_3, F_4 der Dreiecke BCD, CAD, ABD:

$$F_2 < \frac{1}{6}(a^2+e^2+f^2),\quad F_3 < \frac{1}{6}(b^2+d^2+f^2),\quad F_4 < \frac{1}{6}(c^2+d^2+e^2).$$

Daraus folgt

$$A_0 = F_1+F_2+F_3+F_4 < \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2 + a^2+e^2+f^2 + b^2+d^2+f^2 + c^2+d^2+e^2),$$

womit die Ungleichung (2) bewiesen ist.

b) Nach dem Kosinussatz $c^2 = a^2+b^2 - 2ab\cos\gamma$ gilt $a^2+b^2+c^2 = 2(a^2+b^2) - 2ab\cos\gamma \geqq 4ab - 2ab\cos\gamma$, also wegen $\sin\gamma > 0$

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 2ab \sin\gamma \cdot \frac{2-\cos\gamma}{\sin\gamma} = 4F_1 \frac{2-\cos\gamma}{\sin\gamma}. \qquad (4)$$

Ferner gilt

$$\frac{2-\cos\gamma}{\sin\gamma} \geqq \sqrt{3}. \qquad (5)$$

Beweismöglichkeiten für (5):

1. Es gilt $\frac{1}{2}\cos\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\gamma = \cos 60^\circ \cdot \cos\gamma + \sin 60^\circ \cdot \sin\gamma = \cos(60^\circ - \gamma) \leqq 1$, also $\cos\gamma + \sqrt{3}\sin\gamma \leqq 2$, $2-\cos\gamma \geqq \sqrt{3}\sin\gamma$, woraus (5) wegen $\sin\gamma > 0$ folgt.

2. Für die im Intervall $0 < \gamma < \pi$ durch $f(\gamma) = \frac{2-\cos\gamma}{\sin\gamma}$ definierte Funktion f gilt:

$$f'(\gamma) = \frac{\sin\gamma \cdot \sin\gamma - (2-\cos\gamma)\cdot\cos\gamma}{\sin^2\gamma} = \frac{1-2\cos\gamma}{\sin^2\gamma}$$

und daher $f'(\gamma) \leqq 0$ für $0 < \gamma \leqq \frac{\pi}{3}$, $f'(\gamma) \geqq 0$ für $\frac{\pi}{3} \leqq \gamma < \pi$.

Somit ist f im Intervall $0 < \gamma \leqq \frac{\pi}{3}$ fallend, im Intervall $\frac{\pi}{3} \leqq \gamma < \pi$ steigend. Für alle γ im Intervall $0 < \gamma < \pi$ gilt daher $f(\gamma) \geqq f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$.

Aus (4) und (5) folgt

$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4F_1\sqrt{3}$, also $F_1 \leqq \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)$.

Analog erhält man

$F_2 \leqq \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+e^2+f^2)$, $F_3 \leqq \frac{1}{4\sqrt{3}}(b^2+d^2+f^2)$,

$F_4 \leqq \frac{1}{4\sqrt{3}}(c^2+d^2+e^2)$.

Daher gilt für jedes Tetraeder $A_0 \leqq \frac{1}{2\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$.

Insbesondere gilt für ein reguläres Tetraeder, also eines mit $a=b=c=d=e=f$,

$$A_0 = 4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2).$$

Also gibt es eine kleinste reelle Zahl λ so, daß für jedes Tetraeder die Ungleichung (3) gilt, nämlich $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Wegen $4\cdot 3 > 9$, also $2\sqrt{3} > 3$ gilt für diese Zahl auch $\lambda < \frac{1}{3}$.

<u>Hinweise:</u>

1. Man kann auch erst Aufgabe b) lösen und dann darauf verweisen, daß damit erst recht bereits Aufgabe a) gelöst ist.
2. Der Nachweis von $F_1 \leqq \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)$ kann auch mit der Heronischen Formel geführt werden:
   Nach der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel gilt (mit $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$):

$$F_1 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leqq \sqrt{s\cdot\left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3} =$$

$$= \frac{s^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}} = \frac{3(a^2+b^2+c^2)-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{12\sqrt{3}}.$$

6B) I. Angenommen, f und g seien Funktionen, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Dann werden durch

$u(x) = f(x) + g(x)$, $v(x) = f(x) - g(x)$ für alle $x \geqq 0$ (5)

Funktionen u und v definiert, die nach (1), (2)

$u(x) \geqq 1,\ u(x)\cdot v(x) = 1$ für alle $x \geqq 0$ (6)

und nach (3), (4)

$u(\sqrt{s^2+t^2}) = (f(s)+g(s))\cdot(f(t)+g(t)) = u(s)\cdot u(t)$ für alle $s,t \geqq 0$, also $u(\sqrt{x+y}) = u(\sqrt{x})\cdot u(\sqrt{y})$ für alle $x,y \geqq 0$ erfüllen. Somit wird durch

$F(x) = \ln(u(\sqrt{x}))$ für alle $x \geqq 0$ (7)

eine Funktion F definiert, die

$F(x) \geqq 0$ für alle $x \geqq 0$ (8)

und

$F(x+y) = F(x) + F(y)$ für alle $x,y \geqq 0$ (9)

erfüllt.

Daraus folgt[1]: Es gibt eine reelle Zahl k mit $k \geqq 0$ so, daß

$F(x) = kx$ für alle $x \geqq 0$ (10)

gilt. Nach (7), (6), (5) ist folglich für alle $x \geqq 0$

$u(x) = e^{kx^2},\ v(x) = e^{-kx^2}$,

$f(x) = \frac{1}{2}(e^{kx^2} + e^{-kx^2}),\ g(x) = \frac{1}{2}(e^{kx^2} - e^{-kx^2})$. (11)

---

[1] Dies kann als bekannter Sachverhalt (Lösung der Funktionalgleichung (9) für nach unten beschränkte Funktionen) zitiert oder folgendermaßen bewiesen werden:
Aus (9) folgt $F(0) = F(0+0) = F(0) + F(0)$, also $F(0) = 0$.
Ferner folgt durch vollständige Induktion $F(mx) = mF(x)$ für alle $x \geqq 0$ und alle natürlichen Zahlen m. Für jede rationale Zahl $r = \frac{m}{n} \geqq 0$ ($n > 0$, m natürliche Zahlen) ist daher $F(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n}\cdot nF(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n}\cdot F(m) = \frac{m}{n}\cdot F(1)$, mit $k = F(1)$ und wegen (8) daher $k \geqq 0$) also $F(r) = kr$. Daraus ergibt sich (10) folgendermaßen auch für beliebiges reeles $x \geqq 0$:
Wäre $F(x) > kx$, so gäbe es ein rationales $r > x$ mit $F(x) > kr$ (nämlich im Fall $k=0$ ein beliebiges rationales $r > x$, im Fall $k > 0$ ein rationales r mit $\frac{F(x)}{k} > r > x$). Daraus folgte wegen (8), also $F(r-x) \geqq 0$, der Widerspruch
$F(r) = F(x+r-x) = F(x) + F(r-x) \geqq F(x) > kr$.
Wäre $F(x) < kx$, so wäre $k > 0$, und es gäbe ein rationales r mit $\frac{F(x)}{k} < r < x$, also folgte wegen $F(x-r) \geqq 0$ der Widerspruch $F(r) \leqq F(r) + F(x-r) = F(r+x-r) = F(x) < kr$.

Daher können nur diejenigen Funktionen f und g, die jeweils mit einem reellen $k \geqq 0$ durch (11) für alle $x \geqq 0$ definiert sind, die verlangten Eigenschaften haben.

II. Sie haben diese Eigenschaften.

Beweis zu (1): Für alle $x \geqq 0$ gilt: Wegen $kx^2 \geqq 0$ ist $e^{kx^2} \geqq 1 \geqq e^{-kx^2} > 0$. Daraus folgt einerseits $g(x) = \frac{1}{2}(e^{kx^2} - e^{-kx^2}) \geqq 0$; andererseits folgt, daß man aus $(e^{kx^2} - 1)^2 \geqq 0$, also $e^{2kx^2} + 1 \geqq 2e^{kx^2}$, auf $f(x) = \frac{1}{2}(e^{kx^2} - e^{-kx^2}) \geqq 1$ schließen kann.

Beweis zu (2):
Für alle $x \geqq 0$ ist $(f(x))^2-(g(x))^2 = \frac{1}{4}(e^{2kx^2} + 2+e^{-2kx^2} - e^{2kx^2} + 2-e^{-2kx^2}) = 1.$

Beweis zu (3): Für alle $x,y \geqq 0$ ist

$$\begin{aligned} f(x)f(y)+g(x)g(y) &= \tfrac{1}{4}(e^{k(x^2+y^2)}+e^{k(-x^2+y^2)}+e^{k(x^2-y^2)}+ \\ &\quad + e^{k(-x^2-y^2)}+e^{k(x^2+y^2)}-e^{k(-x^2+y^2)} - \\ &\quad - e^{k(x^2-y^2)}+e^{k(-x^2-y^2)}) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{k(x^2+y^2)}+e^{k(-x^2-y^2)}) = f(\sqrt{x^2+y^2}). \end{aligned}$$

Beweis zu (4): Für alle $x,y \geqq 0$ ist

$$\begin{aligned} f(x)g(y)+g(x)f(y) &= \tfrac{1}{4}(e^{k(x^2+y^2)}+e^{k(-x^2+y^2)}-e^{k(x^2-y^2)}- \\ &\quad - e^{k(x^2-y^2)}-e^{k(-x^2-y^2)}+e^{k(x^2+y^2)}- \\ &\quad - e^{k(-x^2+y^2)}+e^{k(x^2-y^2)}-e^{k(-x^2-y^2)} \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{k(x^2+y^2)}-e^{k(-x^2-y^2)}) = g(\sqrt{x^2+y^2}). \end{aligned}$$

Somit entsprechen genau die bei (11) genannten Funktionen f und g den Bedingungen der Aufgabe.

Kurzweil durch Mathe

ist der Titel eines Buches, das 1981 in seiner zweiten Auflage im Urania- Verlag erschien. Auf 200 Seiten stellt Johannes Lehmann (unseren Lesern sicher von der Zeitschrift ALPHA bekannt) internationale Knobeleien, Aufgaben von berühmten Mathematikern, mathematische Spiele und vieles andere mehr vor.

Sollte es in diesem Sommer wider Erwarten doch einmal regnen, ein Blick in dieses Buch wird sich lohnen.

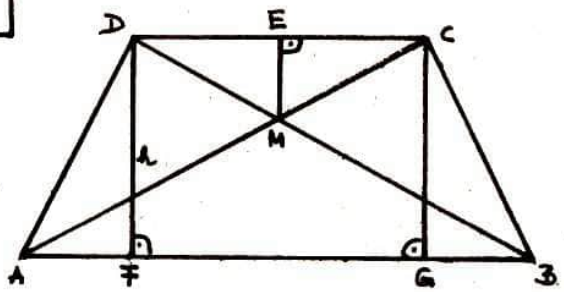
Dem Buch entnommen ist auch folgende Anektode

> C.F.Gauß hat schon als Schüler seine Lehrer mit Klugheit und Witz überrascht. Einmal sagte sein Rechenlehrer: "Gauß, ich stelle zwei Fragen. Beantwortest Du die erste richtig, sei Dir die zweite erlassen. Also: Wieviel Nadeln hat eine Weihnachtstanne?" - Gauß sagte, ohne zu zögern: "67534". - "Wie bist Du so rasch auf diese Zahl gekommen ?" - Gauß lächelte: "Herr Lehrer, das ist bereits die zweite Frage."

Allen unseren Lesern wünschen wir frohe und erholsame Sommerferien !

Lösungen

Aufgabe N 54



Um die Aufgabe zu lösen, fällen wir das Lot von $\overline{DC}$ auf den Schnittpunkt M der beiden Diagonalen. Weil gilt $\sphericalangle$ ADC = $\sphericalangle$ DCB handelt es sich um ein gleichschenkliges Trapez. Der Winkel $\sphericalangle$ EMC halbiert also den Winkel $\sphericalangle$ DMC = 150°.

Also $\sphericalangle$ EMC = 75°

$\sphericalangle$ MCE = 15°

$\sphericalangle$ DAC = 30°.

Die Höhe h = $\overline{FD}$ ist gleich der Strecke $\overline{AF}$, weil

$\sphericalangle$ FDC = 90°

$\sphericalangle$ FDA = 45°

$\sphericalangle$ DAF = 45°

Δ AFD ist ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck. Für den Flächeninhalt A des Trapezes ergibt sich also

$$A = h^2 + 2h.$$

Die Strecke $AD = 2\,\dfrac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = \sin 15^\circ$

und $AD = \sqrt{2}\,h.$

Weiter gilt $\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 30^\circ)}$

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3})}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$$

$$A = \tfrac{1}{8}(2 - \sqrt{3}) + \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

$$A = \tfrac{1}{8}(2 - \sqrt{3}) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$$

$$A = \tfrac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}$$

$$\underline{A = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \tfrac{1}{4}}$$

Aufgabe N 55

Es ist $\cos^6 x = (1 - \sin^2 x)^3$

$$= 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x$$

Damit wird $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$

$$= -3\sin^2 x(1 - \sin^2 x) + 1$$

$$= -3(\sin x \cdot \cos x)^2 + 1$$

Wegen $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin^2 x$ gilt

$$f(x) = -\frac{3}{4}\sin^2 2x + 1.$$

Für alle reellen Zahlen x ist nun $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$, wobei $\sin^2 0 = 0$ und $\sin^2 2\cdot\frac{\pi}{4} = 1$.

Daraus ergibt sich

$$1 = -\frac{3}{4}\cdot 0 + 1 \geq f(x) \geq -\frac{3}{4}\cdot 1 + 1 = \frac{1}{4}.$$

Der maximale und der minimale Wert von $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ ergibt sich also zu $f(0) = 1$ und $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$.

Aufgabe N 56

Die gesuchte Zahl sei n. Da n^6 9-stellig ist, muß gelten

$$10^8 \leq n^6 < 10^9.$$

Daraus folgt:

$$10^2 \leq (\frac{n}{10})^6 < 10^3$$

also

$$10 \leq (\frac{n}{10})^3$$

$$(\frac{n}{10})^2 < 10.$$

Folglich muß gelten: $20 < n < 40$. (1)

Die Quersumme von n^6 ist 45. Somit gilt: $9/n^6$, $3/n^3$ und folglich $3/n$. (2)

Aus (1) und (2) folgt:

$$n \in \{21; 24; 27; 30; 33; 36; 39\}.$$

Da n^6 die Ziffern 1, 5 und 6 nicht enthält, gilt $n^6 \not\equiv \begin{cases} 1 \\ 5 \\ 6 \end{cases} \pmod{10}$. Außerdem kann $n \equiv 0 \pmod{10}$ nicht gelten, denn dann würde n^6 sechs Nullen enthalten.

Wenn $n \equiv 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9, \pmod{10}$

so ist $n^6 = 0 \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 6 \quad 5 \quad 6 \quad 9 \quad 4 \quad 1$

Es bleibt also nur $n \equiv 7 \pmod{10}$ oder $n \equiv 3 \pmod{10}$ und

somit $n \in \{27, 33\}$.

Nun wird noch der Fall $n = 33$ ausgeschlossen:

$$33^2 \equiv 89 \pmod{100}$$
$$89^2 \equiv 21 \pmod{100}$$
$$\underline{89^3 \equiv 69 \pmod{100}}$$
$$33^6 = 69 \pmod{100}$$

Somit würde n^6 die Ziffer 6 enthalten.

Ergebnis: Die gesuchte Zahl kann nur 27 lauten. Man prüft leicht, daß $27^6 = 387420489$ den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe N 57

Das gegebene Gleichungssystem wird zuerst durch die Substitution $a = xy$, $b = x+y$ umgeformt. Es ergibt sich

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)$$
$$= x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1$$
$$= x^2y^2 + (x+y)^2 - 2xy + 1$$

also $a^2 - 2a + b^2 = 9$ (1)

und $b(a - 1) = 3$ (2)

Aus (2) folgt $a = \frac{3}{b} + 1$.

Dies in (1) eingesetzt, liefert

$$(\frac{3}{b} + 1)^2 + b^2 - 2(\frac{3}{b} + 1) = 9$$
$$\frac{9}{b^2} + \frac{6}{b} + 1 + b^2 - \frac{6}{b} - 2 = 9$$
$$b^2 - 10 + \frac{9}{b^2} = 0$$
$$b^4 - 10b^2 + 9 = 0$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$b_{1,2} = \pm\sqrt{5 + 25 - 9}$$
$$b_{3,4} = \pm\sqrt{5 - 25 - 9}.$$

Damit ergeben sich vier Lösungen, nämlich

$a_1 = 2$, $b_1 = 3$

$a_2 = 0$, $b_2 = -3$

$a_3 = 4$, $b_3 = 1$

$a_4 = -2$, $b_4 = -1$.

Jetzt muß noch das Gleichungssystem in x und y

$xy = a$

$x+y = b$ gelöst werden.

Hier gilt $y = b - x$

und damit $x(b-x) = a$

$$x^2 - bx + a = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a},$$

woraus sich für $y_{1,2}$ ergibt

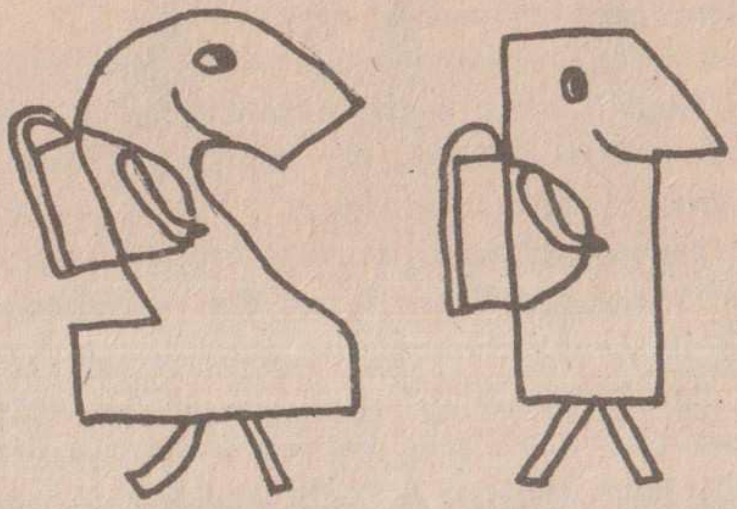
$$y_{1,2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}.$$

Setzt man jetzt nacheinander die gefundenen Werte für a und b in diese Gleichungen ein, erhält man die sechs Lösungen des Ausgangsgleichungssystems (1), (2):

$x_1 = 2 \quad y_1 = 1$
$x_2 = 1 \quad y_2 = 2$
$x_3 = 0 \quad y_3 = -3$
$x_4 = -3 \quad y_4 = 0$
$x_5 = 1 \quad y_5 = -2$
$x_6 = -2 \quad y_6 = 1$

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß:
Titelbild: Dorothea Heinrich

SCHULJAHR 1982/83



9

82

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

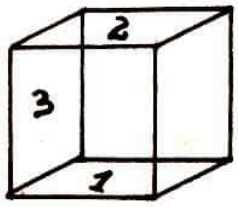
Mathematische Spiele – 1. Fortsetzung –

2. Die bunten Würfel des Majors Mac Mahon

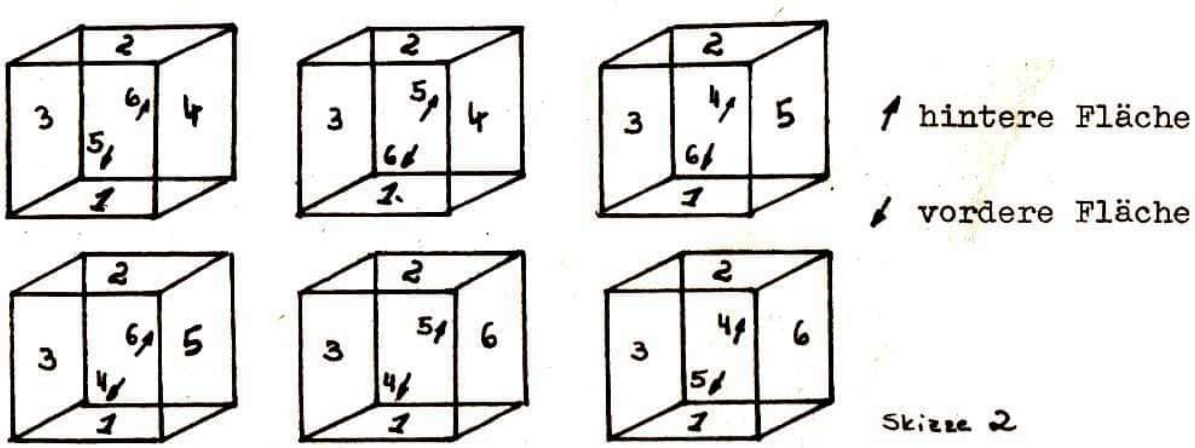
Zu diesem Spiel gehören 30 gleich große Würfel, deren Seitenflächen verschieden gefärbt sind, z. B. weiß, rot, gelb, grün, blau und schwarz. Je zwei Würfel weichen aber, wie man sie auch drehen und kippen mag, in der Farbenverteilung voneinander ab. Zunächst wollen wir uns überlegen, warum gerade 30 Würfel zu diesem Spiel notwendig sind.

Die 6 verschiedenen Farben bezeichnen wir mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Alle Würfel haben eine Seitenfläche der Farbe 1, die wir als Grundfläche nehmen wollen. Für die gegenüberliegende Deckfläche bleiben dann 5 Möglichkeiten 2, 3, 4, 5 und 6.

Wir fragen zunächst, wieviel Würfel sind möglich, bei denen die Grundfläche die Farbe 1 und die Deckfläche die Farbe 2 haben. Die 4 Seitenflächen müssen dann die Farben 3, 4, 5 und 6 besitzen. Nun können wir die Würfel um die senkrechte Mittelachse so drehen, daß die linke Seitenfläche die Farbe 3 trägt (siehe Skizze 1). Dann gibt es 6 Möglichkeiten für die Färbung der restlichen 3 Flächen (Skizze 2).

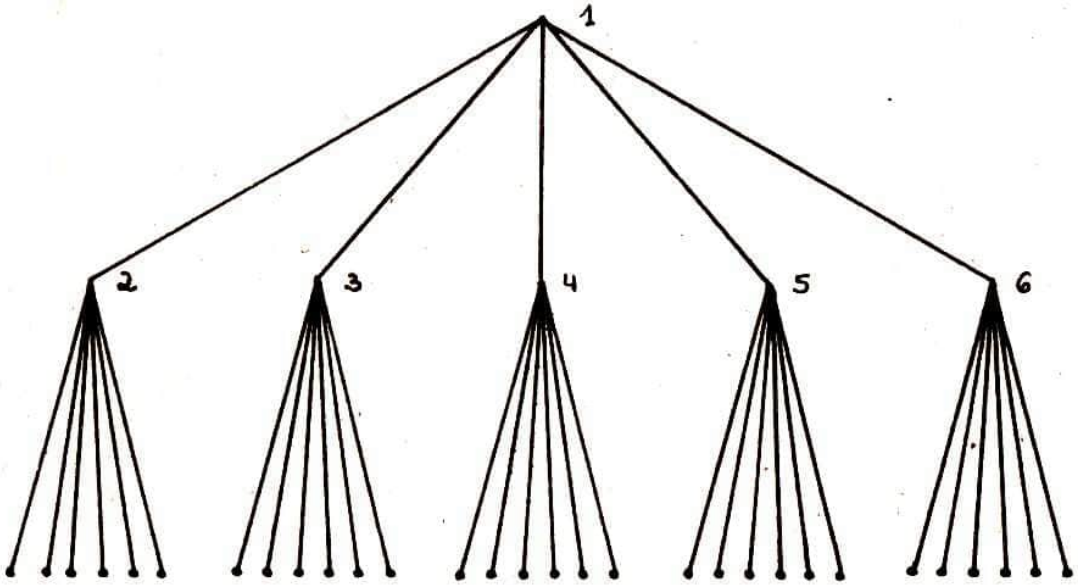


Skizze 1



Skizze 2

Ähnliche Überlegungen für Deckflächen mit der Farbe 3, 4, 5 oder 6 lassen also erkennen, daß es im ganzen 30 Würfel mit verschiedenen Farbverteilungen gibt (siehe Skizze 3).



Skizze 3

1 gibt die Farbe der Grundfläche aller Würfel, 2 - 6 sind die möglichen Farben der Deckflächen. Zu jeder der 5 Farben der Deckflächen gibt es 6 Würfel.

Bevor wir auf das eigentliche Spiel eingehen, wollen wir kurz erläutern, wie man sich diese Würfel selbst herstellen bzw. bemalen kann. Zunächst verschaffe man sich 30 gleich große Würfel aus Holz. Stehen solche nicht zur Verfügung, so kann man sich diese aus Karton selbst herstellen. Die Bemalung mit den 6 Farben 1, 2, 3, 4, 5 und 6 kann man dann folgendermaßen durchführen: Die Würfel werden in fünf Reihen zu je sechs auf den Tisch gestellt. Alle Würfel der ersten Reihe werden oben mit der Farbe 2 bemalt, alle Würfel der zweiten Reihe oben mit der Farbe 3, alle Würfel der dritten Reihe mit der Farbe 4, alle Würfel der vierten Reihe mit der Farbe 5 und alle Würfel der fünften Reihe mit der Farbe 6. Die Farbe 1 wird erst zum Schluß verwendet.

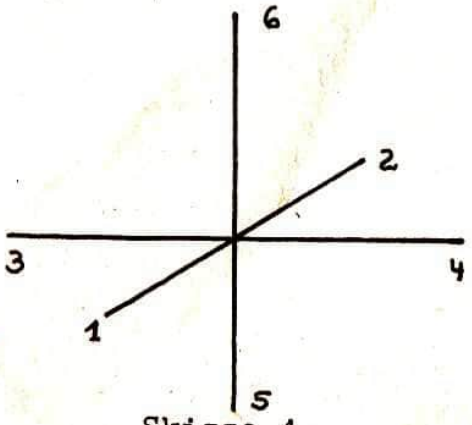
Nun kann man in jeder Würfelreihe die Seitenflächen bemalen. Bei allen Würfeln der ersten Reihe bemalen wir die Vorderfläche mit der Farbe 3. Bei den ersten beiden Würfeln färben wir die Hinterfläche mit 4, bei den nächsten beiden geben wir der Hinterfläche die Farbe 5 und bei den letzten beiden Würfeln färben wir die Hinterfläche mit 6. Für die linke und rechte Würfelwand bleiben

bei den ersten beiden Würfeln die Farben 5 und 6 bzw. 6 und 5 übrig, bei den beiden nächsten die Farben 4 und 6 bzw. 6 und 4, bei den letzten beiden die Farben 4 und 5 bzw. 5 und 4.
Bei den anderen Würfelreihen kann man analog verfahren. Wir überlassen dem Leser die Überlegung.
Ist alles gut getrocknet, so werden sämtliche Würfel unten auf der Grundfläche mit der Farbe 1 bemalt. Statt der Farben könnte man auch farbige Papiere verwenden, die auf die Würfelreihen sorgfältig aufgeklebt werden.
Damit ist das Spielzeug fertiggestellt.

Mac Mahon hat nun für diese 30 Würfel folgendes Problem gestellt. Man greife von diesen 30 Würfeln einen als Vorlage heraus. Aus den restlichen 29 Würfeln suche man 8 Würfel heraus und baue daraus einen großen Würfel, der die gleiche Farbenverteilung hat wie der Vorlagewürfel, also unten, oben, vorn, hinten, links und rechts ebenso gefärbt ist wie der Vorlagewürfel. Gleichzeitig wird verlangt, daß beim Zusammensetzen der 8 Würfel sich nur gleichgefärbte Flächen berühren sollen.

Im folgenden wollen wir zeigen, daß das Problem mindestens eine Lösung besitzt, die auch einen Weg zur Lösung zeigt. Selbstverständlich steht jedem frei, sich nicht nach der Theorie zu halten, sondern einen anderen Weg im Spiel zu suchen.

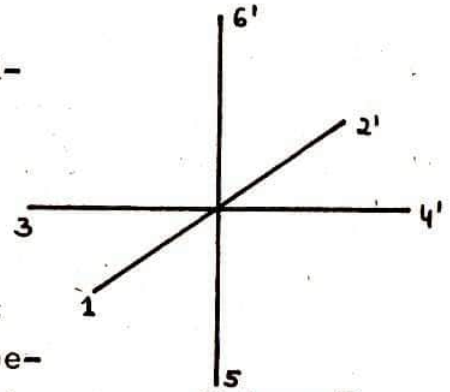
Zur einfacheren Darstellung wollen wir statt der Würfel nur die drei Mittellinien, die die Mittelpunkte gegenüberliegender Seitenflächen verbinden, zeichnen. An den Endpunkten dieser Linien geben wir die Farben an, die auf den zugehörigen Würfelflächen liegen. Skizze 4 soll also die Darstellung des Vorlagewürfels sein, vorn die Farbe 1, hinten die Farbe 2, links die Farbe 3, rechts die Farbe 4, unten mit 5 und oben mit 6 gefärbt.
Von dem gesuchten großen Würfel, dessen Seitenflächen so gefärbt sind, wie es der Vorlagewürfel verlangt, betrachten wir zunächst den Eckstein,



Skizze 4

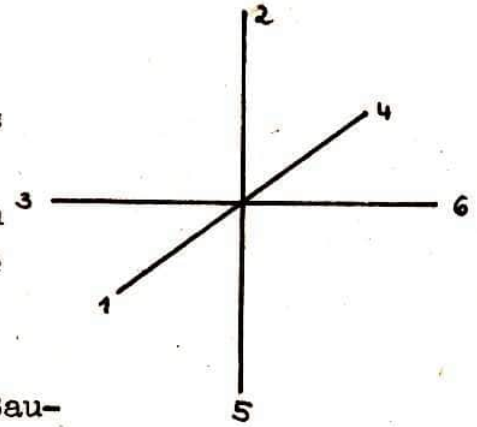
der vorn, unten, links liegt. Er muß links mit 3, vorn mit 1 und unten mit 5 gefärbt sein (siehe Skizze 5). Die Farben der übrigen Flächen bezeichnen wir mit 2' (hinten), 4' (rechts) und 6' (oben).

2', 4', 6' stellt eine Permutation von den restlichen Farben 2, 4, 6 dar, also eine der folgenden Anordnungen: (2, 4, 6); (2, 6, 4);
(4, 2, 6); (4, 6, 2);
(6, 2, 4); (6, 4, 2).



Skizze 5

Die ersten beiden Permutationen kommen nicht in Frage, da 2' nicht 2 sein kann. Der hinter dem hier betrachteten Eckstein liegende Würfel muß auf seiner Rückseite mit 2 gefärbt sein, kann also auf seiner Vorderseite nicht die Farbe 2 haben. 4' kann auch nicht 4 sein. Der rechte Nachbar unseres Ecksteins muß nämlich auf seiner rechten Seitenfläche nach der Vorschrift des Spiels die Farbe 4 haben. Ebenso läßt sich zeigen, daß 6' nicht 6 sein kann, da ja der über unseren betrachteten Eckstein liegende Würfel die Deckfläche 6 haben muß. Von den 6 Permutationen bleiben also nur 2 übrig, nämlich (4, 6, 2) und (6, 2, 4). Beide Möglichkeiten führen zur Lösung unseres Problems. Wir betrachten hier die erste mögliche Permutation. Der Leser kann sich selbst überzeugen, daß auch die zweite Permutation zum Ziele führt. Unser linker, unterer, vorderer Eckstein soll also der Würfel in Skizze 6 sein, vorn mit 1, hinten mit 4 gefärbt, links mit 3, rechts mit 6, unten mit 5, oben mit 2.



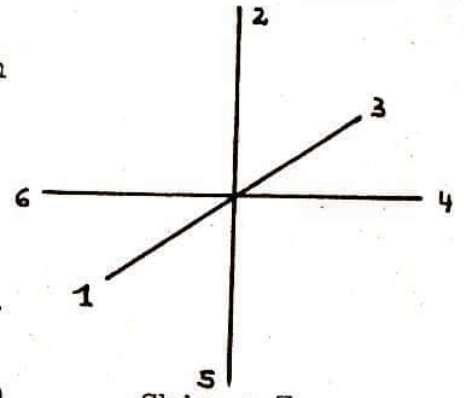
Skizze 6

Für den vorderen, unteren, rechten Eckstein finden wir durch ähnliche Überlegungen folgende Farbenverteilung:

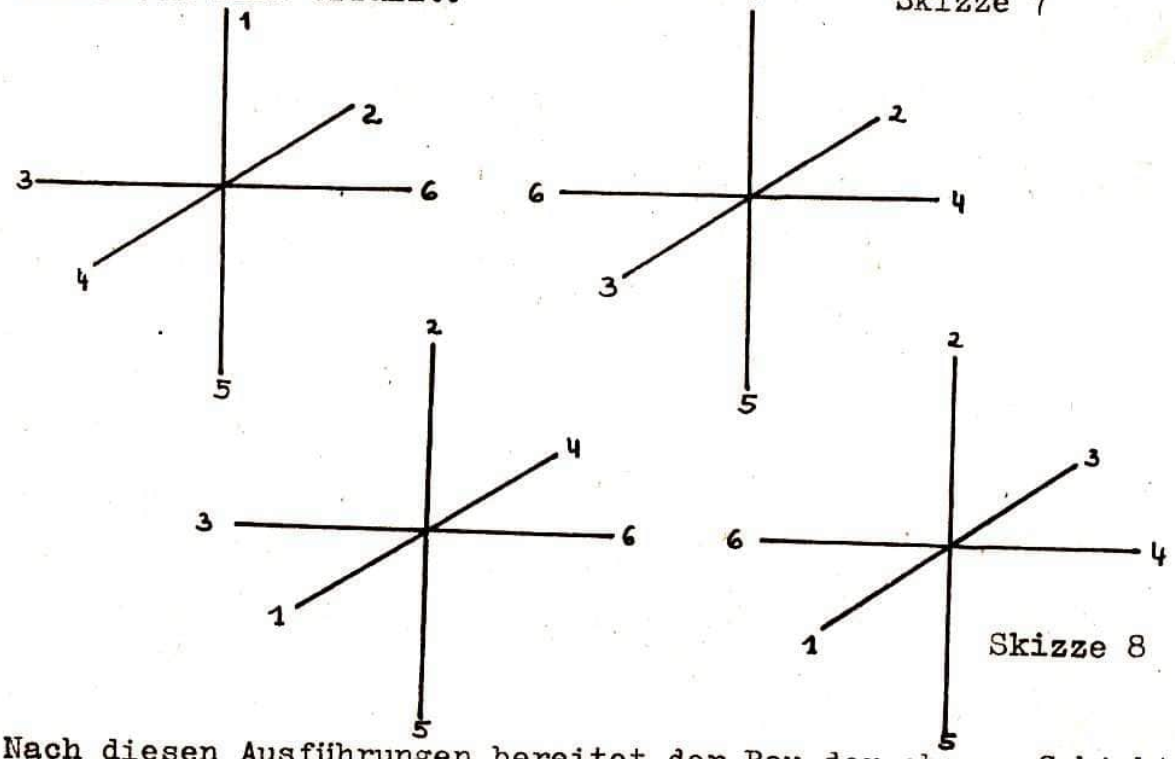
Linke Fläche mit 6 gefärbt (nach Bauvorschrift), rechte Fläche mit 4, untere Fläche mit 5, vordere Fläche mit 1. Für die hintere und obere Fläche bleiben die Farben 2

und 3. 2 kann nicht die Farbe der hinteren Fläche sein, da der hintere, untere, rechte Eckstein auf seiner hinteren Fläche die Farbe 2 tragen muß. Skizze 7 gibt uns die Farbenverteilung des rechten, unteren, vorderen Ecksteins.

In ähnlicher Weise finden wir die noch fehlenden Würfel der unteren Schicht des großen Würfels. In der folgenden Skizze zeichnen wir die 4 Würfel der unteren Schicht. Der Leser kann sich leicht von der Richtigkeit der Farbenverteilung überzeugen. Alle Spielvorschriften sind erfüllt.



Skizze 7

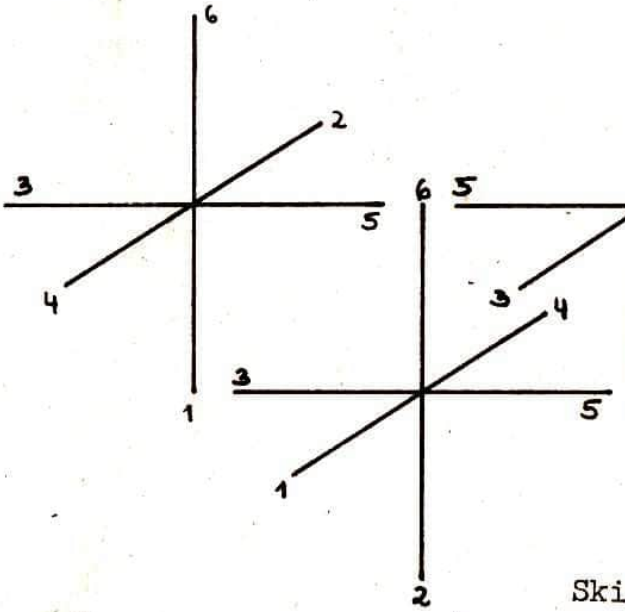


Skizze 8

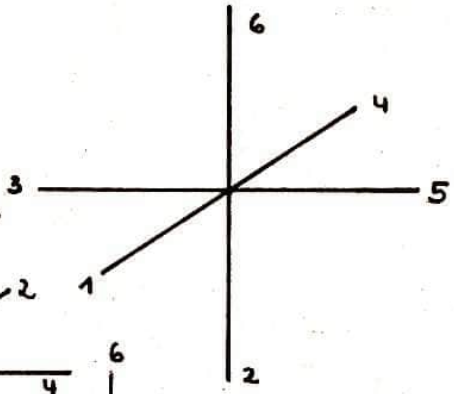
Nach diesen Ausführungen bereitet der Bau der oberen Schicht des achtteiligen Würfels keine Schwierigkeit. Wir bestimmen wieder zunächst die Farbenverteilung des linken, vorderen, oberen Ecksteins. Aus Skizze 8 entnehmen wir, daß dieser obere Eckstein oben mit 6, unten mit 2, vorn mit 1, links mit 3 gefärbt sein muß. Für seine rechte und hintere Fläche bleiben die Farben 4 und 5. Für die rechte Fläche kommt nur die Farbe 5 in Frage, da der rechte Nachbarwürfel unseres Ecksteins auf seiner rechten Außenfläche die Farbe 4 haben muß (siehe Skizze 9).

Die Bestimmung der Farbenverteilung für die restlichen 3 Würfel ~~der oberen Schicht überlassen~~ wir dem Leser. Wir geben in Skiz-

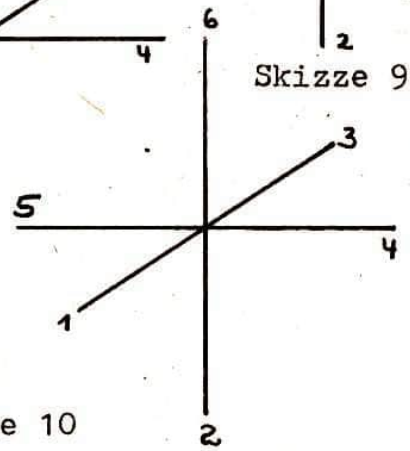
ze 10 die Farbenverteilung der 4 Würfel der oberen Schicht an. Die Spielbedingungen sind wieder erfüllt.



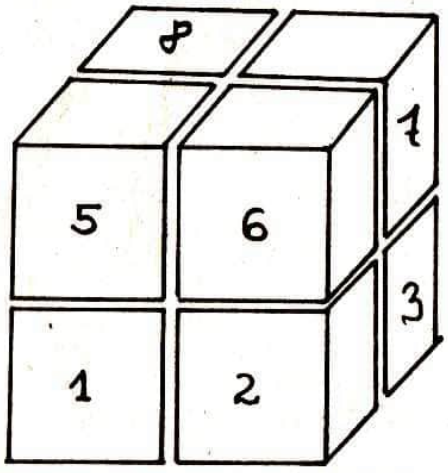
Skizze 10



Skizze 9



Einen eleganteren Weg zur Lösung des Problems finden wir, wenn wir uns einer Matrix bedienen. Zu dem Zwecke bezeichnen wir die vordere Fläche mit V, die hintere mit H, die linke mit L, die rechte mit R, die untere mit U und die obere mit O. Ferner bilden die ersten 4 Würfel die untere Schicht, die Würfel 5 bis 8 die obere Schicht (siehe Skizze 11).



Skizze 11

Würfel 4 ist unten, links hinten

Dann können wir unter Berücksichtigung der Bauvorschriften folgendes Schema aufstellen:

	V	H	L	R	U	O
Vorlage	1	2	3	4	5	6
Würfel 1	1	x_1	3	x_2	5	x_3
Würfel 2	1	x_4	x_2	4	5	x_5
Würfel 3	x_4	2	x_6	4	5	x_7
Würfel 4	x_1	2	3	x_6	5	x_8
Würfel 5	1	x_9	3	x_{10}	x_3	6
Würfel 6	1	x_{11}	x_{10}	4	x_5	6
Würfel 7	x_{11}	2	x_{12}	4	x_7	6
Würfel 8	x_9	2	3	x_{12}	x_8	6

Für die x_k gelten folgende Bedingungen:

$x_1 \neq x_2 \neq x_3$ Permutation von 2, 4, 6 (1)
$x_4 \neq x_2 \neq x_5$ Permutation von 2, 3, 6 (2)
$x_4 \neq x_6 \neq x_7$ Permutation von 1, 3, 6 (3)
$x_1 \neq x_6 \neq x_8$ Permutation von 1, 4, 6 (4)
$x_9 \neq x_{10} \neq x_3$ Permutation von 2, 4, 5 (5)
$x_{11} \neq x_{10} \neq x_5$ Permutation von 2, 3, 5 (6)
$x_{11} \neq x_{12} \neq x_7$ Permutation von 1, 3, 5 (7)
$x_9 \neq x_{12} \neq x_8$ Permutation von 1, 4, 5 (8)

Die 8 Zeilen der Matrix geben die Farbenverteilungen für alle Würfel. Aus den Bedingungen (1) und (4) ergibt sich für x_1 der Wert 4 oder 6. Die übrigen Werte lassen sich dann unschwer aus den Bedingungen bestimmen. Wir geben im folgenden die beiden Matrizen an, die die beiden möglichen Lösungen charakterisieren. Zeilen und Spalten haben die oben angegebene Bedeugung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Der Leser kann sich überzeugen, daß alle Spielvorschriften erfüllt sind.

Mit den 30 bunten Würfeln des Mac Mahon lassen sich bestimmt noch andere Spiele durchführen. Ein solches hat z. B. der bekannte Mathematiker Gerhard Kowalewski entwickelt. Aus 8 von den

30 Würfeln soll ein großer Würfel gebaut werden, bei dem wieder gleichgefärbte Flächen sich berühren und die Außenflächen nur 4 Farben zeigen, z. B. vorn und hinten Farbe 1, links und rechts Farbe 2, oben Farbe 3 und unten Farbe 4. Der Leser kann mit den hier gezeigten Wegen auch dieses Problem lösen. Interessant ist dabei, daß man 2 solche Würfel aus den 30 Bausteinen bilden kann. Dieses Spiel ermöglicht die Teilnahme zweier Spieler. Wer zuerst den Würfel aufgebaut hat, ist Sieger.
Dem Leser sei es überlassen, weitere Spiele mit diesen 30 bunten Würfeln zu entdecken.

Dr. B. Hanisch
Halle

Lösung

Aufgabe N 52

Es geht hier um das Problem der fixpunktfreien Permutationen. Wir bezeichnen die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen von n Elementen mit a_n. Eine fixpunktfreie Permutation von n Elementen erhält man, indem man an eine fixpunktfreie Permutation von (n-1) Elementen ein weiteres Element anfügt und dieses nacheinander mit den (n-1) Elementen vertauscht. Es ergeben sich (n-1) a_{n-1} fixpunktfreie Permutationen. Dazu kann man aus den (n-1) a_{n-2} Permutationen von (n-1) Elementen, bei denen genau ein Element e auf sich selbst abgebildet wird, fixpunktfreie Permutationen von n Elementen erzeugen, indem man das n-te Element mit dem Element e vertauscht. Damit sind alle Möglichkeiten erfaßt. Es ist also

$$a_n = (n-1)\, a_{n-1} + (n-1)\, a_{n-2}$$

oder

$$a_n = (n-1)(a_{n-1}+a_{n-2}).$$

Die Anfangsglieder $a_1=0$ und $a_2=1$ sind leicht bestimmbar, so daß sich durch Rekursion jedes beliebige a_n berechnen läßt.

Preisaufgaben

0 43 (2)

Es sei die Menge M durch

$$M = \{z : z = x^5+3x^4y-5x^3y^2-15x^2y^3+4xy^4+12y^5, \text{ wobei } x,y \text{ ganze Zahlen sind}\}$$

gegeben. Man beweise, daß gilt $334 \in M$.

0 44 (2)

Man verwandle ein konvexes n-Eck in ein flächengleiches konvexes (n-1)-Eck.

0 45 (1)

Im Innern eines gleichseitigen Dreiecks sei ein Punkt P beliebig ausgewählt. Von P werden die Lote PD, PE und PF auf die Seiten BC, CA und AB gefällt. Berechnen Sie

$$\frac{PD + PE + PF}{BD + CE + AF}.$$

0 46 (1)

Es sei $\operatorname{tg} \alpha = n \operatorname{tg} \beta \qquad (n > 0)$.
Es ist zu zeigen, daß dann gilt

$$\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta) \leq \frac{(n-1)^2}{4n}.$$

0 47 (1)

Für welche x mit $|x| < 1$ gilt

$$\frac{1}{x} + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{7}{2}\ ?$$

0 48 (2)

Доказать, что сумма цифр квадрата любого числа не может быть равна 1982.

Einsendeschluß: 15. 1. 1983

Lösungen

Aufgabe N 58

Nach Voraussetzung ist

$$a_n = a_1 + (n-1)(a_2-a_1) \quad \text{mit } a_2-a_1 > 0$$

und $b_n = a_1(\frac{a_2}{a_1})^{n-1}$ mit $\frac{a_2}{a_1} > 1$.

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n:
Induktionsanfang: n=3
Zu zeigen ist $a_3 < b_3$, d. h.

$$a_1 + 2(a_2-a_1) < a_1(\frac{a_2}{a_1})^2 ,$$

dann muß gelten

$$2a_2 - a_1 < \frac{a_2^2}{a_1}$$

$$2a_1a_2 - a_1^2 < a_2^2$$

$$0 < a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 = (a_1-a_2)^2.$$

Da $a_1 \neq a_2$ und Quadrate immer positiv sind, ist diese Bedingung erfüllt.
Daraus folgt $a_3 < b_3$.

Induktionsschritt:
Zu Zeigen: Wenn $a_n < b_n$, dann ist auch $a_{n+1} < b_{n+1}$.
<u>Beweis:</u> Es ist $a_{n+1} = a_n + (a_2-a_1)$
und

$$b_{n+1} = b_n \cdot (\frac{a_2}{a_1})$$

Wegen $a_n < b_n$ gilt: $a_{n+1} < b_n + (a_2-a_1)$

Es genügt zu zeigen $b_n + (a_2-a_1) < b_n (\frac{a_2}{a_1})$.
Falls dies erfüllt ist, muß auch gelten

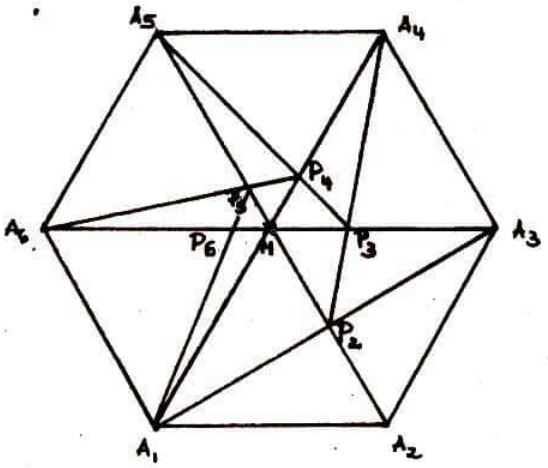
$$a_1b_n + a_1(a_2-a_1) < a_2b_n$$

bzw.: $0 < b_n(a_2-a_1) - a_1(a_2-a_1)$

$$0 < (b_n-a_1)(a_2-a_1).$$

Wegen der strengen Monotonie der Folgen ist jeder der beiden Faktoren positiv, also auch das Produkt.
Daraus folgt, falls $a_n < b_n$, so ist auch $a_{n+1} < b_{n+1}$.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt damit die Richtigkeit der Behauptung.

Aufgabe N 59



Es seien $A_1, \ldots, A_6$ die Eckpunkte des regelmäßigen Sechsecks, M Schnittpunkt der Diagonalen
$\overline{A_1A_4}$, $\overline{A_2A_5}$, $\overline{A_3A_6}$ und $R = \overline{MA_1}$.
Wir beschreiben zuerst die Konstruktion und zeigen dann ihre Richtigkeit.
Man verbinde A_1 mit A_3 und erhält auf $\overline{MA_2}$ den Schnittpunkt P_2. Die Strecke $\overline{MP_2}$ hat die Länge $\frac{R}{2}$. Verbindet man nun P_2 mit A_4, so erhält man auf $\overline{MA_3}$ den Punkt P_3, mit der Eigenschaft $\overline{MP_3} = \frac{R}{3}$.
Die Konstruktion verläuft analog weiter. Der jeweilige Punkt P_i wird mit dem Eckpunkt A_{i+2} (falls $i+2 > 6$, so ist unter A_{i+2} der Eckpunkt A_{i+2-6n}, $n \in \mathbb{N}$ zu verstehen) verbunden. Auf dem Radius $\overline{MA_{i+1}}$, der von dieser Strecke geschnitten wird, erhält man den Schnittpunkt P_{i+1} und es gilt

$$\overline{MP_{i+1}} = \frac{R}{i+1} .$$

Beweis der Richtigkeit der Konstruktion:
Dieser Beweis wird durch vollständige Induktion geführt.

Induktionsanfang: Es gilt $\overline{MP_2} = \frac{R}{2}$.

Der Beweis ist einfach, da P_2 nach Konstruktion Schnittpunkt der Diagonalen im Parallelogramm $A_1A_2A_3M$ ist.

Induktionsschritt:

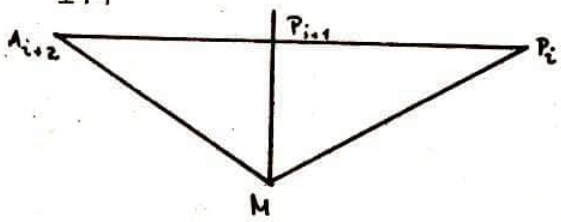
Es sei $\overline{MP_i} = \frac{R}{i}$.

Dann ist zu zeigen $MP_{i+1} = \frac{R}{i+1}$

Es ist $\sphericalangle P_iMA_{i+2} = 120^\circ$

$\sphericalangle P_iMP_{i+1} = 60^\circ$

$\sphericalangle P_{i+1}MA_{i+2} = 60^\circ$



Für die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3 der Dreiecke $\Delta\ P_iMA_{i+2}$, $\Delta\ P_iMP_{i+1}$, $\Delta\ P_{i+1}MA_{i+2}$ gilt

$F_1 = F_2 + F_3$

$\overline{MA}_{i+2} \cdot \overline{MP}_i \cdot \sin 120^\circ = \overline{MP}_{i+1} \cdot \overline{MP}_i \cdot \sin 60^\circ + \overline{MA}_{i+2} \cdot \overline{MP}_{i+1} \cdot \sin 60^\circ$

oder, da $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$

$\overline{MA}_{i+2} \cdot \overline{MP}_i = \overline{MP}_{i+1} \cdot \overline{MP}_i + \overline{MA}_{i+2} \cdot \overline{MP}_{i+1}$

$R \cdot \frac{R}{i} = \overline{MP}_{i+1} \cdot \frac{R}{i} + R \cdot \overline{MP}_{i+1}$

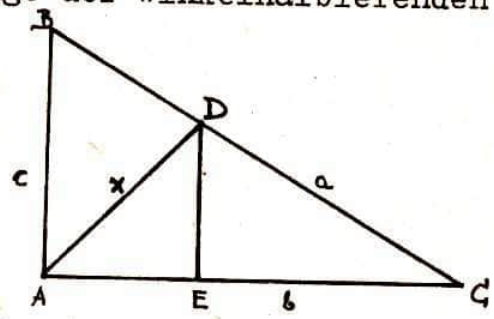
$R \cdot \frac{R}{i} = \overline{MP}_{i+1} \left(\frac{R}{i} + R\right)$

$\frac{R}{i+1} = \overline{MP}_{i+1}$

Damit gilt für alle $i=1,2,\ldots$ $\underline{\overline{MP}_i = \frac{R}{i}}$

Aufgabe N 60

Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks seien gleich b und c. Gesucht ist die Länge der Winkelhalbierenden des rechten Winkels.



Sei AD die Winkelhalbierende res rechten Winkels im Dreieck ABC und stehe DE senkrecht auf AC.

Dann ist der Winkel

$\sphericalangle DAE = \frac{\pi}{4}$ und $AE = DE = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Die gesuchte Länge ist gleich AD.

Es gilt nun $\frac{ED}{AB} = \frac{CE}{CA}$ oder $\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{c} = \frac{b - \frac{x}{\sqrt{2}}}{b}$.

Hieraus erhält man

$$x = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}.$$

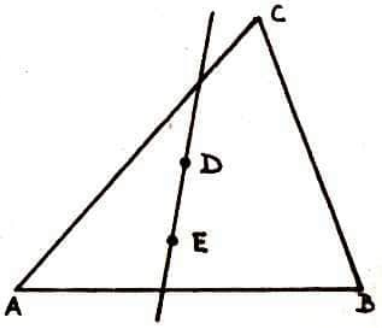
Aufgabe N 61

Verbindet man alle fünf gegebenen Punkte paarweise miteinander, so erhält man ein konvexes Vieleck mit der Eigenschaft, daß die fünf Punkte entweder Eckpunkte dieses Polygons sind oder aber im Inneren desselben liegen. Man unterscheidet nun drei Fälle:

1. Fall: Das konvexe Vieleck ist ein Fünfeck. Dann bilden je vier Punkte ein konvexes Viereck.

2. Fall: Das konvexe Vieleck ist ein Viereck. Dieses Viereck hat die gesuchte Eigenschaft.

3. Fall: Das konvexe Vieleck ist ein Dreieck. Verlängert man hier die Verbindung der beiden inneren Punkte nach beiden Seiten, so schneiden diese zwei der Dreiecksseiten. Mit den Eckpunkten der dritten Dreiecksseite bilden die inneren Punkte ein konvexes Viereck.



Aufgabe N 62

Für jede natürliche Zahl $m > 0$ gilt

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{(m+1)-m}{m(m+1)} = \frac{1}{m(m+1)}.$$

Speziell erhält man für $m = n+k$ und $m = n+k-1$ $(k > 0)$

$$\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} = \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} = \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} \qquad (2)$$

Weiter folgt aus $(n+k+1)(n+k) > (n+k)^2 > (n+k-1)(n+k)$

$$\frac{1}{(n+k+1)(n+k)} < \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} .$$

Wegen (1) und (2) ergibt sich

$$\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} < \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} .$$

Summiert man jetzt diese Ungleichungskette über k von 1 bis p, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}\right) < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} < \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right) .$$

Da $\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1}$ und

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$

gilt somit die gesuchte Ungleichungskette.

Aufgabe N 65

Es gilt die Ungleichung für nichtnegative reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann richtig ist, wenn $x_1 = \ldots = x_n$.

Nach Voraussetzung gilt $x_1+x_2+x_3+x_4 = 12$ und somit

$$1 = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{12}$$

$$= \frac{\frac{x_1}{5} + \frac{x_1}{5} + \frac{x_1}{5} + \frac{x_1}{5} + \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2}{2} + x_3 + \frac{x_4}{4} + \frac{x_4}{4} + \frac{x_4}{4} + \frac{x_4}{4}}{12}$$

$$\geq \sqrt[12]{\frac{x_1^5}{5^5} \cdot \frac{x_2^2}{2^2} \cdot x_3 \cdot \frac{x_4^4}{4^4}} \qquad (1)$$

Dies bedeutet, daß (1) das Maximum 1 besitzt und dieses genau für $\frac{x_1}{5} = \frac{x_2}{2} = x_3 = \frac{x_4}{4}$, also für $x_1=5$, $x_2=2$, $x_3=1$, $x_4=4$ annimmt.
Auf Grund der Monotonie der Wurzelfunktion muß auch das Produkt $x_1^5 \cdot x_2^2 \cdot x_3 \cdot x_4^4$ sein Maximum für $x_1=5$, $x_2=2$, $x_3=1$, $x_4=4$ annehmen.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Titelbild: Martina Lutz

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^{-k}}{k!} e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}} + \int_{e}^{e^{(e^3)}} \frac{1}{x \cdot \ln x}\, dx\right]^2 - \sin\frac{\pi}{2}$$

Jahre

Wurzel

10

82

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Dieses Heft soll dem 15. Geburtstag unserer Zeitschrift gewidmet sein. Mit dem Heft 1/1967 begann die bewegte Geschichte der WURZEL.
Heute ist sie fester Bestandteil des Jugendobjekts "Studienvorbereitung - Studienwerbung", das seit 1970 erfolgreich an unserer Sektion tätig ist.
Für die Gestaltung der WURZEL selbst sind 5 Studenten verantwortlich:

Andreas Kleinwächter ist der Chefredakteur unserer Zeitschrift. Er wurde 1959 in Jena geboren. Von 1973 bis 1977 besuchte er hier die Spezialschule physikalisch-technischer Richtung, wo er das Abitur ablegte. Nach Beendigung seines Ehrendienstes nahm er im September 1979 ein Mathematikstudium an unserer Sektion auf. Seit Dezember 1979 ist er Mitglied des Jugendobjektes, wo er im April 1980 die Funktion des Chefredakteurs der WURZEL übernahm. In seiner Freizeit beschäftigt sich Andreas mit Literatur, Archäologie und Geschichte.

Andreas Jeschag arbeitet seit 1980 als stellv. Chefredakteur der WURZEL. Er wurde 1960 in Jena geboren. Im Jahre 1979 legte er an der Spezialschule physikalisch-technischer Richtung Jena sein Abitur ab. Im September des gleichen Jahres begann er sein Mathematikstudium und die Mitarbeit in unserem Jugendobjekt. Andreas arbeitet außerdem aktiv in der Gesellschaft für Sport und Technik mit.

Zur Redaktion der WURZEL gehören außerdem Dorothea Heinrich, Martina Lutz und Uwe Niemiec.

Dorothea Heinrich wurde 1959 in Wolfen geboren, wuchs jedoch in Berlin auf. Dort besuchte sie die Spezialschule für Mathematik "Heinrich Hertz", wo sie 1978 das Abitur ablegte. Im September des gleichen Jahres begann sie ein Mathematik-Studium in Jena. Seitdem ist sie auch Mitglied des Jugendobjektes und arbeitet in der Redaktion der WURZEL. Ihre Freizeit gehört ihrem zweijährigen Sohn Falko.

Martina Lutz kommt aus Falkenstein im Vogtland, wo sie 1961 geboren wurde. 1979 legte sie das Abitur an der EOS "Geschwister Scholl" in Auerbach ab. Im September 1979 nahm sie ihr Mathematik-Physik-Lehrerstudium an unserer Sektion auf. Im gleichen Jahr wurde sie Mitglied des Jugendobjektes und arbeitet seitdem in der Redaktion mit. Außerdem gestaltet sie seit zwei Jahren das Mathe-Lager des Bezirksklubs Junger Mathematiker mit. In ihrer Freizeit liest sie gern und spielt Gitarre.

Uwe Niemiec wurde 1962 in Zeulenroda geboren. Er besuchte die POS "Olga Benario" in Auma. 1979 wurde er Vorkursstudent an der FSU Jena und begann 1980 ein Mathematik-Physik-Lehrerstudium. Seit 1981 arbeitet er in der WURZEL-Redaktion mit. Seine freie Zeit ist ausgefüllt mit Lesen, Reisen, Tischtennis und Musik.

3 Mitglieder des Jugendobjektes sind verantwortlich für die Auswahl und Korrektur der WURZEL-Preisaufgaben:

Dietrich M e i n h a r d t wurde 1954 in Blankenhain im Kreis Weimar geboren. In Nordhausen besuchte er die Erweiterte Oberschule, wo er 1973 das Abitur ablegte. Nach Beendigung der Armeezeit nahm er 1975 ein Mathematikstudium in Jena auf. Seit 1980 ist er Forschungsstudent an unserer Sektion und arbeitet auf dem Gebiet der Kompliziertheitstheorie.
Dietrich ist verheiratet und Vater von 2 Kindern. Er arbeitet seit 1976 im Jugendobjekt, wo er zunächst Aufgaben korrigierte und später diese zusammenstellte. Seine Hobbys sind Schwimmen und südamerikanische Literatur.

Roland H e i n r i c h wurde 1957 geboren und wohnt in Gera, wo er auch das Abitur ablegte. Nach seiner dreijährigen Armeezeit begann er 1979 ein Mathematikstudium in Jena. Seit dem ersten Studienjahr arbeitet er bei der Aufgabenkorrektur mit. Seine Freizeit verbringt er mit Sport, Lesen und Fotografieren.

Harro R o s n e r wurde 1959 in Berlin geboren. Dort besuchte er die Spezialschule für Mathematik "Heinrich Hertz" und legte 1978 das Abitur ab. Nach seinem Ehrendienst bei der NVA kam er nach Jena, um Mathematik zu studieren. Er kannte die WURZEL bereits von seiner Schule und wurde selbst Mitglied des Jugendobjekts. Seither gehören die Korrektur der WURZEL-Preisaufgaben und die Teilnahme am Mathe-Lager des Bezirksklubs Junger Mathematiker zu seinen Aufgaben.

Klaus-Jürgen H e i l e m a n n ist verantwortlich für den Versand von Belegexemplaren und nachbestellten Heften der WURZEL. Er wurde 1958 geboren und wohnt in Eisenberg. Nach seiner Armeezeit begann er 1978 sein Mathematikstudium und wurde Mitglied des Jugendobjektes. Bis 1980 arbeitete er im NVA-Zirkel, später übernahm er den Versand.

Einen wichtigen Beitrag zum pünktlichen Erscheinen der WURZEL leistet Frau G i r l i c h . Sie ist Sekretärin an unserer Sektion und schreibt uns seit vielen Jahren die WURZEL-Manuskripte mit der Schreibmaschine. Von hieraus möchten wir uns bei ihr für ihre wertvolle Arbeit herzlich bedanken.

Neben der WURZEL gehören zum Jugendobjekt "Studienvorbereitung - Studienwerbung" noch die Bereiche Mathe-Lager und NVA-Zirkel.

Ines H e i l e m a n n und Holger H a r z sind vielen Schülergenerationen des Mathe-Lagers des Bezirksklubs Junger Mathematiker Gera gut bekannt, das zweimal jährlich im Februar und im Juli stattfindet.

Ines Heilemann wurde 1959 in Naumburg geboren. Seit 1969 lebt sie in Jena. 1978 schloß sie hier ihre Berufsausbildung als Feinmechaniker mit Abitur an der BBS Carl Zeiss ab und begann im gleichen Jahr ihr Mathematikstudium an unserer Sektion. Seit dem ersten Studienjahr arbeitet sie in unserem Jugendobjekt und nimmt regelmäßig an den Mathe-Lagern teil.

Holger Harz ist 25 Jahre alt. Er ist verheiratet und Vater von 2 Kindern. 1977 nahm er sein Mathematikstudium in Jena auf, das er 1981 ein Jahr vorzeitig beenden konnte. Im gleichen Jahr begann er ein Forschungsstudium auf dem Gebiet der Kompliziertheit-

theorie. Holger ist seit 1978 Mitglied des Jugendobjekts, wo er zunächst im NVA-Zirkel mitarbeitete. 1979 übernahm er seine jetzige Aufgabe und ist seitdem Leiter des Bereiches Mathe-Lager.

Der NVA-Zirkel unseres Jugendobjektes betreut die vorimmatrikulierten Studenten unserer Sektion während ihrer Armeezeit und schickt ihnen die WURZEL und weiteres Material zur Vorbereitung auf das Studium zu.
Seit 1980 ist das die Aufgabe von Horst Z e i n .

Horst Zein wurde 1962 in Jena geboren, wuchs jedoch in Krossen auf. 1979 kam er als Vorkursstudent an unsere Sektion. Ein Jahr später nahm er sein Mathematik-Physik-Lehrerstudium auf. 1980 wurde er Mitglied unseres Jugendobjektes und arbeitet seither im NVA-Zirkel mit.
In seiner Freizeit spielt Horst Go.

Heiner S c h w u l o w wurde 1954 in Bad Kleinen, Kreis Wismar, gobren. Nach der 10. Klasse erlernte er den Beruf eines Fernmeldmechanikers mit Abitur. Von 1973 bis 1975 leistete er seinen Ehrendienst in der NVA- 1975 begann er sein Studium in Jena, welches er 1980 als Diplomlehrer für Mathematik und Physik erfolgreich beenden konnte. Seit 1980 ist Heiner Forschungsstudent in der Fachrichtung Geometrie. Heiner arbeitet seit 1976 im Jugendobjekt mit. Zunächst korrigierte er Preisaufgaben, später übernahm er die Finanzen und die Organisation der kulturellen Veranstaltungen des Jugendobjektes. Seit 1980 ist Heiner Leiter des Jugendobjekts. Außerdem arbeitet er als stellvertretender Klubchef des FDJ-Studentenklubs "jazz im paradies" mit.

Iris K a i s e r ist eine der wichtigsten Mitarbeiter unseres Jugendobjektes. Seit 1980 ist sie verantwortlich für unsere Finanzen.
Iris kommt aus Tiefenort in der Rhön. Sie wurde 1960 in Vacha geboren. Von 1975 bis 1979 besuchte sie die Spezialschule für Mathematik und Physik in Merkers, wo sie auch das Abitur ablegte. 1979 begann sie ein Mathematik-Physik-Lehrerstudium an unserer Sektion. Seit dem 1. Studienjahr ist sie Mitglied unseres Jugendobjektes. Iris arbeitete zunächst in der Redaktion der WURZEL mit, ehe sie 1980 den Bereich Finanzen/Kultur übernahm. Außerdem ist Iris Mitglied der FDJ-Leitung ihrer Seminargruppe.

14 Studenten und Forschungsstudenten sind zur Zeit Mitglied unseres Jugendobjektes. Doch natürlich sind wir bei unserer Arbeit nicht auf uns alleingestellt. In den letzten Jahren hat sich eine gute Zusammenarbeit mit der Sektionsleitung entwickelt. Dr. Egbert C r e u t z b u r g , er ist wiss. Assistent im Bereich Kybernetik, fungiert seit mehreren Jahren als staatlicher Betreuer der WURZEL, Jörg V o g e l , ebenfalls aus dem Bereich Kybernetik, als staatlicher Betreuer des Mathe-Lagers. Doch auch viele andere Hochschullehrer unserer Sektion unterstützen uns in unserer Arbeit, sei es durch Artikel für die WURZEL oder durch wertvolle Hinweise für die Verbesserung unserer gesamten Arbeit. Ihnen sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

15 JAHRE WURZEL

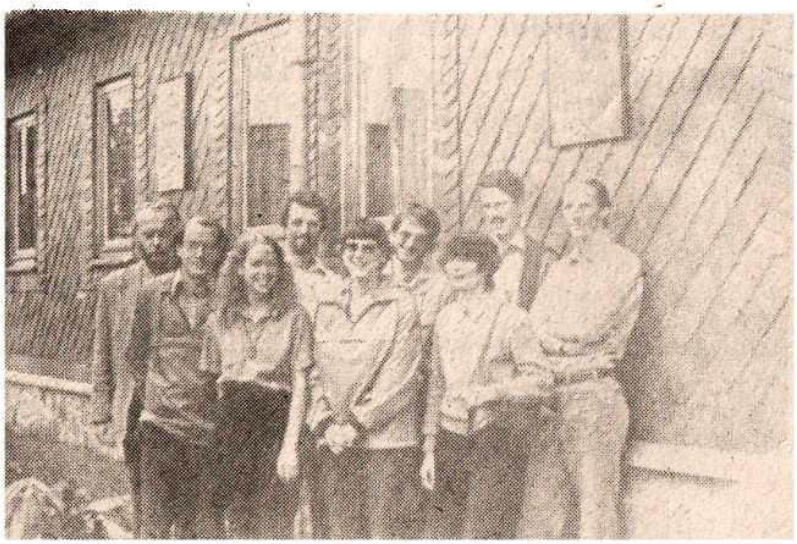
... wenn das kein Grund ist zum Feiern! Doch wir wollten nicht allein feiern, sondern hatten alle die eingeladen, die ein Stück WURZEL-Geschichte mitgeschrieben haben.

So zogen wir am 26. Juni los, um ein gemeinsames Wochenende in Sophienhof im Harz zu verbringen. Mit dem Zug ging's zunächst über Erfurt nach Nordhausen, von hieraus mit der Kleinbahn nach Eisfelder Talmühle. Nach einem steilen Anstieg waren wir endlich da, in Sophienhof.

Die Zeit nach dem Mittagessen nutzten wir zu einem Spaziergang in die reizvolle Umgebung, wo wir, die "jetzigen" und die "ehemaligen" WURZELmitglieder, uns erst einmal näher kennenlernten. Die offizielle Feier fand am Abend statt. Besonders die Chronik des Jugendobjektes und die Jubiläumsnummern zum 5. und zum 10. Geburtstag weckten viele Erinnerungen.

Viele lustige Einlagen wurden zum besten gegeben, vor allem von Harald Fischer, der das ganze Treffen zusammen mit Dietrich Meinhardt wunderbar organisiert hat.

Das Begrüßungsgedicht der "Ehemaligen", verfaßt von Ursula Heuke, fand viel Beifall, so daß wir es in dieser Nummer veröffentlichen wollen.



An die heutigen WURZEL-Studenten

Student möcht' ich noch einmal sein,
die Wurzel gestalten in Euern Reih'n.
Ach, war das eine herrliche Zeit,
sie liegt nur zurück schon allzuweit.
Student sein - das klingt nur wie Musik.
Ich denk' nur an glückliche Tage zurück.
Damals hatt' ich noch so viel Zeit -
ich frag' mich: Warum ist's so hektisch heut?

Schon als Kind muß man sich eilen,
darf nicht hier, noch da verweilen.
Mutti treibt: "Los, zieh Dich an,
gleich fängt meine Arbeit an!"
"Aber Mutti, Teddy schreit!"
"Sag, du hast jetzt keine Zeit!"
"Aber Teddy muß doch mal!"
"Komm jetzt, das ist scheißegal!"

"Mutti, darf man sowas sagen?"
"Kind hör auf mit Deinen Fragen!
Ich muß jetzt zur Arbeit geh'n.
Kannst Du das denn nicht versteh'n?
Frag die Tante im Kindergarten,
oder Du mußt bis heut' abend warten.
Dann hab' ich für Dich bestimmt 'mal Zeit,
ich hab' auch eine Überraschung bereit."

"Mutti, was hast Du mir mitgebracht?"
"Ach, Kind, ich hab'nicht dran gedacht."
"Mutti, machst Du mit mir ein Spiel?"
"Ach, Kind, das wird mir jetzt zuviel.
Willst Du nicht ein bißchen 'runtergeh'n?
Sieh' mal, das Wetter ist so schön."
"Mutti, da wüßte ich etwas:
Rudern macht mir schrecklich viel Spaß!"
"Rudern? Du bist wohl nicht gescheit!

Woher soll ich nehmen die viele Zeit?
Warte, wenn Du älter wirst sein,
dann kannst Du rudern geh'n allein."

Ist das Kleinkind zum Schüler herangereift,
frühmorgens die Mutter genauso keift:
"Steh' auf, beeil' Dich, Du kommst zu spät!"
Ob das nur immer so weiter geht?
Am Feierabend: "Zeig Deine Aufgaben her!
Das schreibst Du sofort noch einmal mehr!"
"Mutti, ich möchte noch 'runtergeh'n."
"Dann kannst Du nicht mehr den Sandmann seh'n."
"Och, immer nur ihr dürft Fernseh'n gucken."
"Kind, wagst Du noch einmal aufzumucken,
dann gehst Du ohne Essen zu Bett.
Und jetzt wasch' Dir die Hände, komm, sei so nett.
Es gibt auch heute Dein Lieblingsessen.
Dafür kannst Du das Fernsehen ruhig mal vergessen.
Jetzt bist Du noch Schulkind, mußt schlafen geh'n,
als Erwachsener kannst Du noch viel Fernseh'n seh'n."

Doch ach, im Berufsleben ist die Zeit auch knapp,
man ist von des Tages Hektik schlapp.
Und will man abends das Fernseh'n genießen,
tun sich die Augen von selber schließen.

Bleibt einzig und allein die Studentenzeit,
in der einem keine Stunde tut leid,
die man mit Müßiggang verbracht,
sofern sie nur hat Spaß gemacht.
Da hatt' ich Zeit zum Wandern und Spielen,
zum Tanzen, zum Lesen, zum Tun von so vielen
ganz herrlich belanglosen, schönen Dingen,
da konnt' ich stricken, mich sonnen und singen,
konnt' blödeln und raufen,
schwatzen und saufen,
es war alles wichtig -
und jetzt ist das nichtig.

Drum seien wir froh, daß wir hergekommen.
Wir haben uns die Zeit für was Schönes genommen.
Bedauern wir die, welche nicht erschienen,
wer weiß, mit was für finsteren Mienen
die jetzt zu Hause buddeln und schaffen,
vielleicht auch in die Röhre gaffen,
nicht mehr fähig, einmal auszubrechen,
man muß auch mal über den Durst hin zechen.

Ich bin sicher, daß wir hier nichts verpassen:
Gegen diese Feier soll alles and're verblassen!
Darauf laßt uns trinken, stoßt mit mir an.
Seien wir für heute wieder Studenten alle Mann!

Prost!!!

Sophienhof, am 26. 6. 82

Ursula Heuke

Der Abend bot viel Raum für einen Erfahrungsaustausch über die WURZEL-Arbeit damals und heute, denn natürlich waren die Gründer der WURZEL daran interessiert, wie die Arbeit heute gestaltet wird und wir konnten wertvolle Hinweise für die Arbeit in der Zukunft erhalten.
Insgesamt 23 Mann verlebten in Sophienhof ein herrliches Wochenende. Unser Dank gilt dafür den beiden Organisatoren Harald Fischer und Dietrich Meinhardt.
Zum Schluß ein herzlicher Gruß an alle, die an unserem Treffen nicht teilnehmen konnten. Zur 20-Jahr-Feier sehen wir uns wieder!

Das Rinderproblem des Archimedes

Eine vollständige Fassung dieses Problems enthält eine von Gotthold Ephraim Lessing 1773 in der Wolfenbütteler Bibliothek aufgefundene Handschrift in griechischer Sprache. Die Autorschaft des Archimedes wird zeils bestritten (Lessing, Nesselmann, Vincent), teils bejaht, letzteres z.B. vom dänischen Archimedesforscher J. L. Heiberg und von dem französischen Mathematiker P. Tannery.

Das Problem selbst lautet in einer Übersetzung von G. Wertheim:

Sage, Freund, mir genau die Zahl von Helios' Rindern.
Sorgsam rechne mit aus, wenn dir Weisheit nicht fremd,
Wieviel deren es waren, die auf der Insel Sizilien
Fluren weideten einst, vierfach in Herden geteilt.
Jede Herde war anders gefärbt; die erste war milchweiß,
Aber die zweite erglänzt' von ganz dunkelem Schwarz.
Braun war die dritte sodann, die vierte scheckig; in jeder
Hatten die Stiere an Zahl weit das Übergewicht.
Und in solchem Verhältnis nun standen diese: die weißen
Glichen den braunen an Zahl und noch dem dritten Teil

Samt der Hälfte der Schwarzen, o Freund, zusammengenommen.
Weiter der schwarzen Meng' war gleich dem vierten Teil
Und dem fünften der Scheck'gen, vermehrt um sämtliche braune.
Endlich der scheckigen Stier' Zahl gleichsetzen du mußt,
Freund, dem sechsten und auch dem siebten Teile der weißen,
Noch gerechnet dazu sämtlicher braunen Meng'.
Anders verhielt sich's jedoch mit den weiblichen Rindern:
Es waren die mit weißlichem Haar gleich dem dritten Teil
Und dem vierten der schwärzlichen Rinder, der Kühe wie Stiere.
Ferner die schwarzen Küh' waren dem vierten Teil

Und dem fünften der Herde der scheckigen gleich, wenn
Gerechnet wurden sowohl die Küh' als auch die Stiere dazu.
Ebenso waren die scheckigen Küh' ein Fünftel und Sechstel
Aller mit braunem Haar, wenn zur Weide es ging.
Endlich die braunen Küh' ein Sechstel waren und Siebtel
Von der gesamten Herd', welcher weißlich das Haar.
Kannst du sagen genau, mein Freund, wie viele der Rinder
Dort nun waren vereint, auch wie viele es gab
Kühe von jeder Farb' und wohlgenährete Stiere,
Dann recht tüchtig führwahr nennet im Rechnen man dich.

Doch noch zählt man dich nicht zu den Weisen, aber wohlan nun,
Komm und sage mir an, wie sich dies weiter verhält:
Wenn die ganze Zahl der weißen Stier' und der schwarzen
Sich vereint', alsdann standen geordnet sie da
Gleich nach Tiefe und Breite; die weiten Fluren Siziliens
Wurden völlig gefüllt durch die Menge der Stier'.
Stellte man aber zusammen die vraunen und scheckigen, alsdann

Wurde ein Dreieck erzeugt, einer stand an der Spitz',
Und es fehlte keiner der braunen und scheckigen Stiere,
Noch darunter man fand einen von anderer Farb'.

Hast du auch dies ausfindig gemacht und im Geiste erfasset,
Gibst das Verhältnis mir an, Freund, das bei jeder Herd'
Findet statt, dann magst du stolz als Sieger einhergehn,
Denn hell strahlet dein Ruhm nun in der Wissenschaft.

Zur Lösung des Problems:

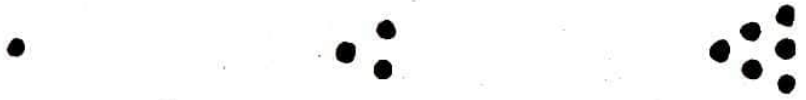
Zunächst einige Vereinbarungen über die Bezeichnungen.
Mit X, Y, Z, T bezeichnen wir die Anzahl der weißen, schwarzen, scheckigen bzw. braunen Stiere. Analog mit x, y, z, t die Anzahl der weißen, schwarzen, scheckigen bzw. braunen Kühe.
M, m, N, n, i, K sind beliebige natürliche Zahlen, die in der Rechnung als Parameter auftreten. Um die Lösung übersichtlich zu gestalten, werden wir an geeigneter Stelle die Zahlen 4657 als α, 957 als β und 4942 als γ bezeichnen.

Aus dem Gedicht erhalten wir die folgenden Gleichungen, die in den natürlichen Zahlen zu lösen sind:

Zeile 10/11	$X = T + \frac{5}{6} Y$	(1)
12/13	$Y = T + \frac{9}{20} Z$	(2)
14–16	$Z = T + \frac{13}{42} X$	(3)
18/19	$x = \frac{7}{12} (Y + y)$	(4)
20–22	$y = \frac{9}{20} (Z + z)$	(5)
23/24	$z = \frac{11}{30} (T + t)$	(6)
25/26	$t = \frac{13}{42} (X + x)$	(7)
33–36	$X + Y = M^2$	(8)
37–40	$Z + T = \frac{1}{2} N \cdot (N + 1)$	(9)

M und N sind hierbei beliebige natürliche Zahlen. Die Gleichung (9) sagt aus, daß $Z + T$ eine Dreieckszahl sein soll.

Eine natürliche Zahl z bezeichnet man als Dreieckszahl, wenn sich mit z Punkten ein Gitter von kongruenten gleichseitigen Dreiecken herstellen läßt, so daß die Ecken der einzelnen Dreiecke diese Punkte sind, Die ersten Dreieckszahlen sind demnach



$1\ (= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2)$ $\quad 3\ (= 1+2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3)$ $\quad 6\ (= 1+2+3 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4)$

$10\ (= 1+2+3+4 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5)$ $\quad 15\ (= 1+2+3+4+5 = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6)$

Wir beschränken uns zuerst auf die Gleichungen (1) bis (7). Aus (1), (2) und (3) folgt:

$$6X - 5Y = 6T; \quad 20Y - 9Z = 20T; \quad 42Z - 13X = 42T$$

bzw. durch Umrechnung

$$X = \frac{742}{297}T; \quad Y = \frac{178}{99}T; \quad Z = \frac{1580}{891}T.$$

Die Zahlen 891 und 1580 sind teilerfremd. Andererseits muß Z eine natürliche Zahl sein. also ist T ein ganzzahliges Vielfaches von 891.

$$T = 891\,i, \quad i \in N.$$

Somit ergibt sich

$$X = 2226\,i; \quad Y = 1602\,i \qquad (10)$$
$$Z = 1580\,i; \quad T = 891\,i$$

Das Ergebnis von (10) in (4) - (7) eingesetzt, ergibt:

$$12x - 7y = 11214\,i \quad ; \quad 20y - 9z = 14220\,i$$
$$30z - 11t = 9801\,i \quad ; \quad 42t - 13x = 28938\,i.$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir nach x, y, z und t auf.

$$4657x = 7206360\,i \quad ; \quad 4657y = 4893246\,i \qquad (11)$$
$$4657z = 3515820\,i \quad ; \quad 4657t = 5439213\,i$$

4657 ist eine Primzahl, die wir, wie bereits vereinbart, im

weiteren mit α abkürzen werden. Da keine der auf der rechten Seite der Gleichungen (11) stehenden Zahlen durch α teilbar ist, muß i ein ganzzahliges Vielfaches von α sein,

$$i = 4657\ K = \alpha \cdot K,$$

und wir erhalten als Lösungen der Gleichungen (1) - (7)

$$\begin{aligned} X &= 10366482\ K \quad ; & Y &= 7460514\ K \\ Z &= 7358060\ K \quad ; & T &= 4149387\ K \\ x &= 7206360\ K \quad ; & y &= 4893246\ K \\ z &= 3515820\ K \quad ; & t &= 5439213\ K\ . \end{aligned} \qquad (12)$$

K ist hierbei eine beliebige natürliche Zahl. Wie man leicht sieht, haben die Gleichungen (1) - (7) also unendlich viele Lösungen. Gesucht ist jetzt eine solche Lösung, die auch die Gleichungen (8) und (9) befriedigt.

Wir ersetzen in (8) und (9) X, Y, Z und T durch die entsprechenden Werte aus (10), wobei wir beachten, daß sich i als $\alpha \cdot K$ darstellt.

$$3828 \cdot \alpha \cdot K = M^2 \quad ; \quad 4942 \cdot \alpha \cdot K = N^2 + N$$

Wir ersetzen $957 = 3 \cdot 11 \cdot 29$ durch β und 4942 durch γ und erhalten:

$$M^2 = 4 \cdot \beta \cdot \alpha \cdot K \quad ; \quad N^2 + N = \gamma \cdot \alpha \cdot K \qquad (13)$$

M muß demnach ein ganzzahliges Vielfaches von 2, 3, 11, 29, 4657 sein:

$$M = 2 \cdot 957 \cdot 4657 \cdot m = 2 \cdot \beta \cdot \alpha \cdot m\ ,$$

so daß wir erhalten:

$$M^2 = 4 \cdot \beta^2 \cdot \alpha^2 \cdot m^2\ .$$

Der Vergleich mit (13) ergibt wieder

$$4 \cdot \beta^2 \cdot \alpha^2 \cdot m^2 = 4 \cdot \beta \cdot \alpha \cdot K$$

$$K = \alpha \cdot \beta \cdot m^2 = 4456749\ m^2\ . \qquad (14)$$

Diesen Wert von K setzen wir in (13) ein.

$$N^2 + N = \gamma \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \beta \cdot m^2\ .$$

Durch Umformung entsteht

$$(2\ N + 1)^2 = 4\ \gamma \cdot \beta \cdot \alpha^2 \cdot m^2 + 1\ .$$

Definieren wir:

$$2\ N + 1 = n, \quad 4\ \gamma \cdot \beta \cdot \alpha^2 = \delta\ ,$$

so erhalten wir endlich eine sogenannte Fermatsche Gleichung:

$$n^2 - \delta m^2 = 1 \quad .$$

Diese Gleichung ist lösbar, aber ihre Lösung führt auf riesenhafte Zahlen, zumal schon δ den Wert 410 286 423 278 424 hat. Auf eine weitere Behandlung der aufgabe müssen wir aus diesem Grunde verzichten.

1880 gelang es dem deutschen Mathematiker Amthor, diese Aufgabe zu lösen. Nach seiner Lösung weist das Ergebnis Zahlen auf, von denen jede im Dezimalsystem geschrieben 206 545 Stellen hat.

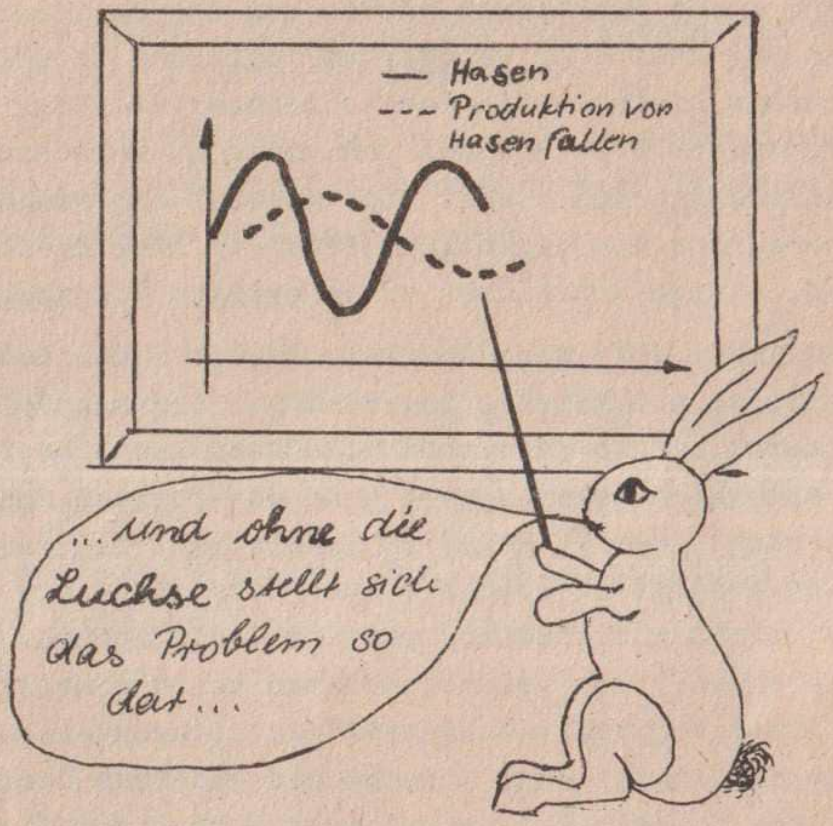
Zum Beispiel sind die ersten vier Ziffern der Gesamtzahl der Stiere und Kühe aller vier Herden 7766 oder die der weißen Stiere 1598. Es folgen jeweils noch 206 541 Ziffern.

Dr. H. G. Leopold
Bereich Analysis

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 10. 10. 1982
Titelbild: Wolfgang Schäfer

Aus anderer Sicht



11
82

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Berechnung von Funktionen

In jahrhundertelanger mathematischer Praxis kristallisierte sich eine Gruppe von Objekten heraus, die man heute mit dem Sammelbegriff "elementare Funktionen" bezeichnet. Hierzu gehören die Polynome, die rationalen Funktionen, die Quadratwurzel sowie die Exponential-, die trigonometrischen und Hyperbelfunktionen nebst ihren Umkehrfunktionen.
Für diese Funktionen wurden zum Zwecke ihrer praktischen Handhabung mehr oder weniger umfangreiche Tabellen geschaffen. Heutzutage bieten viele Taschenrechner die Möglichkeit, gewünschte Funktionswerte schnell und genau zu berechnen. Dem mathematisch Interessierten stellt sich hierbei die Frage, wie diese Berechnung denn nun eigentlich erfolgt. Ziel dieser Artikelserie ist es, einige Grundideen zu derartigen Verfahren vorzustellen.

Im Jahre 1873 wies Charles HERMITE nach, daß die Zahl e, die Basis der natürlichen Logarithmen, transzendent ist. Neun Jahre später zeigte Ferdinand LINDEMANN dasselbe für die Zahl π und vermutlich bereits seit Ende des fünften Jahrhunderts v.u.Z. ist bekannt, daß $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Aus der Transzendenz von e folgt aber, daß - außer für x=0 - die beiden Werte x und e^x nicht gleichzeitig rational sein können. Durch analoge Schlüsse erkennt man leicht, daß man bei den meisten elementaren Funktionen den Funktionswert für ein durch eine endliche Dezimalzahl darstellbaren Wert x nicht als endliche Dezimalzahl notieren kann. Es ist also prinzipiell unmöglich, diese Werte absolut exakt anzugeben. Andererseits ist es für alle praktischen Belange ausreichend, wenn die benötigten Werte - z. B. die Zahl π - nur mit einer gewissen Genauigkeit bekannt sind. Man kann sich also von vornherein darauf beschränken, nicht den Wert $y=e^x$ berechnen zu wollen, sondern nur einen Näherungswert y^*, der aber für den gewünschten Zweck ausreicht.

Es gibt eine weitere Einschränkung: Beim manuellen, mechanischen und elektronischen Zahlenrechnen ist man primär nur in der Lage, die vier Grundrechenarten auszuführen. (Strenggenommen arbeitet man nur mit Addition und Subtraktion sowie Verschiebungen.) Unmittelbar berechenbar sind damit also nur Funktionen, deren

Funktionswert durch eine endliche Anzahl von diesen vier Grundoperationen erhalten werden kann. Anders ausgedrückt: Die Klasse der unmittelbar berechenbaren Funktionen umfaßt die Polynome und die rationalen Funktionen. Wenn man zunächst von der Problematik der Rundungsfehler absieht, mit denen Rechnungen in der Regel behaftet sind, so erkennt man, daß der berechnete Näherungswert y^* zu e^x, also der Funktionswert einer rationalen Funktion - ggfs. auch eines Polynoms, wenn bei der Rechnung auf Divisionen verzichtet wurde - ist. Die Rechenvorschrift zur Bestimmung von y^* entspricht also der Angabe einer solchen Funktion.

In der vorliegenden Arbeit soll nur der Fall der Annäherung von Funktionswerten durch Polynomwerte betrachtet werden. Die Berechtigung für diese Beschränkung gibt der folgende

S a t z : (Karl WEIERSTRASS, 1885)

Für jede noch so kleine Zahl $\varepsilon > 0$ und für jede Funktion $f(x)$, die für $a \leq x \leq b$ stetig ist, existiert eine natürliche Zahl n und ein Polynom

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

derart, daß für alle $x : a \leq x \leq b$, die Ungleichung

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon$$

erfüllt wird.

Angenommen, es ist eine vierstellige Tabelle der Funktion $f(x)=\sin x$ im Bereich $0 \ldots 90^\circ$ zu erstellen. Damit diese Tabelle exakt ist, darf der Fehler keines Wertes vom exakten Wert mehr als eine halbe Einheit der letzten (d. h. vierten) Stelle abweichen. Um die Sicherheit noch etwas zu erhöhen, sei $\varepsilon = 0{,}00001$. Nun garantiert der Satz von WEIERSTRASS die Existenz eines Polynoms, dessen auf vier Stellen gerundeten Werte in den meisten Fällen die richtigen Tabellenwerte ergeben. (Warum nicht in allen Fällen?) Hierbei ist allerdings noch nicht gesagt, wie die Zahl n und das Polynom $P_n(x)$ nun praktisch zu finden sind. Hierfür gibt es mehrere Möglichkeiten, von denen weiterhin einige vorgestellt und näher betrachtet werden sollen.

1. BROOK TAYLOR (1685 - 1731)

Gegeben sei eine für $a \leq x \leq b$ definierte Funktion. Wir nehmen an, daß sie alle Ableitungen bis zur Ordnung m auf diesem Abschnitt besitzen möge, sei $n < m$ eine natürliche Zahl und $a \quad c \quad b$. Für die k-te Ableitung von f(x) schreiben wir $f^{(k)}(x)$, speziell soll $f^{(o)}(x) = f(x)$ darstellen. Gesucht ist ein Polynom $P_n(x)$, das die Funktion f(x) annähern möge. Es soll in der Form

$$P_n(x) = a_o + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n$$

geschrieben werden. Man kann sich leicht überzeugen, daß es sich hierbei tatsächlich um ein Polynom handelt. Damit $P_n(x)$ die Funktion f(x) annähert, ist es naheliegend, von dem Polynom $P_n(x)$ die Erfüllung von gewissen Eigenschaften von f(x) zu verlangen.

Wir fordern:

$$P_n^{(k)}(c) = f^{(k)}(c), \qquad 0 - k - n.$$

Es erweist sich, daß hierdurch das Polynom $P_n(x)$ eindeutig bestimmt wird. Es ist

$$P_n^{(o)}(c) = P_n(c) = a_o = f^{(o)}(c) = f(c),$$

also $a_o = f(c)$. Nach den Differentiationsregeln für Polynome wird

$$P_n(x) = P_n^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + \ldots + na_n(x-c)^{n-1},$$

also analog $P_n^{(1)}(c) = a_1 = f^{(1)}(c)$. Weiter ist

$$P_n^{(2)}(x) = 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3(x-c) + \ldots + n(n-1)a_n(x-c)^{n-2},$$

demzufolge $P_n^{(2)}(c) = 2a_2 = f^{(2)}(c)$. Im nächsten Schritt erhält man

$$P_n^{(3)}(x) = 3\cdot 2\cdot a_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4(x-c) + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x-c)^{n-3},$$

das gibt $P_n^{(3)}(c) = 3\cdot 2\cdot a_3 = f^{(3)}(c)$. Zuletzt verbleibt

$$P_n^{(n)}(c) = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot a_n = f^{(n)}(c).$$

Für die Koeffizienten $a_o, a_1, \ldots, a_n$ des Polynoms ergibt das

$$a_o = f(c), \qquad a_1 = f^{(1)}(c),$$

$$a_2 = \frac{1}{2} f^{(2)}(c), \qquad a_3 = \frac{1}{3\cdot 2} f^{(3)}(c), \ldots$$

$$\ldots a_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2} f^{(n)}(c).$$

Bezeichnet man wie üblich das Produkt

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (k-2)\cdot (k-1)\cdot k = k!$$

mit "k-Fakultät", und definiert $0!=1$, so gilt allgemein

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(c), \qquad 0 \leq k \leq n.$$

Ausgeschrieben erhält man

$$P_n(x) = f(c) + f^{(1)}(c)(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2}(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Es verbleibt die Frage, ob dieses Polynom tatsächlich die Funktion $f(x)$ annähert, und wenn ja, dann wäre es nützlich, gewisse Aussagen über die verbleibende Differenz zu machen. Man nennt diese Abweichung

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

das n-te Restglied. Offensichtlich ist
$R_n(c) = R_n^{(1)}(c) = \ldots = R_n^{(n)}(c) = 0.$

S a t z : (Michel ROLLE, 1691)

Die Funktion $g(x)$ sei für $a \leq x \leq b$ definiert und stetig differenzierbar, sei $g(a) = g(b)$. Dann existiert ein Zwischenwert $z : a < z < b$, derart, daß $f'(z) = 0$ ist.

Zur Erläuterung: Wenn $g(x)$ konstant ist, dann ist $g'(x) = 0$ für alle x. Ist es nicht konstant, so muß es wegen $g(a) = g(b)$ wenigstens ein Minimum oder ein Maximum besitzen, und an dieser Stelle verschwindet die Ableitung.

Sei nun x ein beliebiger fester Wert zwischen a und b und sei

$$g(x) = P_n(x) - f(x) + \lambda (x-c)^{n+1}.$$

Der Faktor λ soll so bestimmt werden, daß für den gewählten Wert x $g(x) = 0$ werde; offensichtlich ist dann

$$\lambda (x-c)^{n+1} = R_n(x).$$

Angenommen, dieser Wert λ sei bekannt, dann ist also $g(x) = 0$ und andererseits auch $g(c) = 0$. Nach Voraussetzung ist $f(x)$ m-mal stetig differenzierbar, $P_n(x)$ und der Ausdruck

$\lambda(x-c)^{n+1}$ sind als Polynome beliebig oft differenzierbar. Nach dem Satz von Rolle folgt nun wegen $g(x) = g(c)$ die Existenz eines Wertes z_1 zwischen c und x mit $g'(z_1) = 0$.

Nun ist

$$g^{(1)}(x) = P_n^{(1)}(x) - f^{(1)}(x) + \lambda\cdot(n+1)(x-c)^n,$$

also wiederum $g^{(1)}(c) = 0 = g^{(1)}(z_1)$. Demzufolge gibt es eine Zwischenstelle z_2 zwischen c und z_1 (und damit zwischen c und x) mit $g^{(2)}(z_2) = 0$. Durch Wiederholung dieser Überlegung überzeugt man sich von der Existenz einer Zahl z_n zwischen c und x mit $g^{(n)}(z_n) = 0$. Andererseits wird

$$g^{(n)}(x) = P_n^{(n)}(x) - f^{(n)}(x) + \lambda\cdot(n+1)!\cdot(x-c)$$

auch an der Stelle c verschwinden. Nach Voraussetzung war $n < m$, man weiß also, daß es eine Zahl z^* zwischen c und x geben muß, für die $g^{(n+1)}(z^*) = 0$ wird. Nun ist aber wegen $P_n^{(n+1)}(x) = 0$

$$g^{(n+1)}(z^*) = 0 - f^{(n+1)}(z^*) + \lambda\cdot(n+1)! = 0$$

und demzufolge

$$\lambda = \frac{f^{(n+1)}(z^*)}{(n+1)!}$$

Hieraus folgt

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z^*)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

mit einem gewissen Wert z zwischen c und x. Faßt man alles zusammen, so erhält man die sogenannte "Formel von TAYLOR":

$$f(x) = f(c) + f^{(1)}(c)\cdot(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z^*)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

In der angegebenen Form geht diese Formel auf Joseph Luis LAGRANGE (1736 - 1813) zurück. Wesentliche Ideen sind aber bereits in TAYLORs 1715 erschienenem Werk "Methodus incrementorum" enthalten.

Man beachte, daß der Wert z^* von x abhängt und in der Regel nicht zugänglich ist. Scheinbar ist man also zunächst nicht weitergekommen. Weiß man allerdings, daß der Betrag der Funktion

$f^{(n+1)}(x)$ für $a < x < b$ durch die Konstante $M > 0$ beschränkt ist, so erhält man für den absoluten Fehler

$$\left|P_n(x)-f(x)\right| = \left|R_n(x)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(z^*)\right|}{(n+1)!}\cdot\left|x-c\right|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!}\cdot\left|x-c\right|^{n+1}$$

eine eventuell brauchbare Abschätzung.

Betrachten wir einige Beispiele:

A. Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$:

Sei $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$. Aus $(e^x)' = e^x$ folgt $f^{(k)}(x) = f(x)$, also speziell $f^{(k)}(c) = f(c) = e^c = e^0 = 1$ und damit

$$e^x = P_n(x) + R_n(x)$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{z^*}}{(n+1)!}\,x^{n+1}.$$

Hierbei liegt z^* zwischen 0 und x und demzufolge auf jeden Fall zwischen -1 und 1. Somit wird

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = e^x \leq e^1 = e,$$

also

$$\left|R_n(x)\right| = \frac{e^{z^*}}{(n+1)!}\cdot|x|^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!}\cdot|x|^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!} = r(n)$$

wegen $|x| \leq 1$.

Sehen wir uns einmal an, was die verschiedenen Polynome $P_n(x)$ leisten. Es ist

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = 1+x,$$
$$P_2(x) = 1+x+\frac{x^2}{2} \quad \text{usw.}$$

Die folgende Tabelle bietet die Möglichkeit, Funktionswerte und Polynomwerte zu vergleichen:

x	e^x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$
-1	0.367879	1.0	0.0	0.500	0.333333	0.375000	0.366667
-0.5	0.606531	1.0	0.5	0.625	0.604167	0.606771	0.606510
0	1.000000	1.0	1.0	1.000	1.000000	1.000000	1.000000
0.5	1.648721	1.0	1.5	1.625	1.645833	1.648437	1.648696
1	2.718282	1.0	2.0	2.500	2.666667	2.708333	2.716667.

Wie man sieht, werden im betrachteten Falle alle Näherungswerte (außer für x=0) mit wachsendem Grad des Polynoms ge-

nauer. Mit größerem Abstand von der Entwicklungsstelle c=0 (für $x = \pm 1$) nimmt die absolute Differenz $|e^x - P_n(x)|$ zu, bleibt aber stets deutlich unter der oberen Schranke r(n), die damit in Wirklichkeit einen zu groben Wert liefert:

n	r(n)	n	r(n)	n	r(n)
0	2.72	4	0.022652	8	0.000007491
1	1.36	5	0.003775	9	0.000000749
2	0.45	6	0.000539	10	0.000000068
3	0.11	7	0.000067	11	0.000000006.

Hieraus erkennt man: Für $-1 \leq x \leq 1$ weicht das Polynom

$$P_{12}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^{10}}{3628800} + \frac{x^{11}}{39916800}$$

vom Wert e^x um weniger als $6 \cdot 10^{-9}$ ab. Für die überwiegende Mehrzahl der praktischen Verwendungen der Funktion e^x ist diese Genauigkeit mehr als ausreichend.

Man erkennt leicht, daß für die Abweichung $R_n(x)$ stets die Abschätzung

$$|R_n(x)| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} = r(n;x)$$

gilt. Sei $n > |x|$, so ist

$$r(n+1;x) = \frac{e^{|x|}}{(n+2)!} |x|^{n+2} = \frac{|x|}{n+2} \cdot \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} = \frac{|x|}{n+2} r(n;x)$$

und demzufolge gilt $r(n+1;x) < r(n;x)$ für $n > |x|$. Durch eine nähere Betrachtung überzeugt man sich, daß r(n;x) und damit auch $R_n(x)$ für jedes x durch Wahl eines - von x abhängigen - genügend großen Wertes n beliebig klein gemacht werden kann. Die Beschränkung $|x| \leq 1$ ist somit unwesentlich.

– Fortsetzung folgt –

Dr. Rosenheinrich
FSU Jena
– Bereich Numerik –

Preisaufgaben

0 49 ①

Es seien $d_1, \ldots, d_k$ alle möglichen Teiler der Zahl n. Es ist zu zeigen, daß $(d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k)^2 = n^k$ ist.

0 50 ②

Man zeige, daß $5^{444} - 10^{999}$ durch 11 teilbar ist.

0 51 ②

Zeigen Sie, daß für natürliche m und k gilt

$$1m+2(m-1)+3(m-2)+\ldots+k(m-k+1)+(m-2)\cdot 3+(m-1)\cdot 2+m\cdot 1 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

0 52 ①

Man zeige, daß die Gleichung $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$ in den natürlichen Zahlen nur die Lösung $x=1$ und $y=1$ hat.

0 53 ①

Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$ gilt.

0 54 ②

Найти сумму первых девятнадцати членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если известно, что

$$a_4 + a_6 + a_{12} + a_{16} = 224 .$$

Einsendeschluß : 15. 3. 1983

Das Luchs-Hase-Modell

Die traditionellen Anwendungsgebiete der Mathematik sind seit jeher die Physik und die technischen Wissenschaften. In den letzten Jahrzehnten beobachtet man aber, daß auch andere Wissenschaftsdisziplinen sich immer mehr mathematischer Methoden bedienen.

Einen vorderen Platz bei den modernen Anwendungsgebieten der Mathematik nimmt die Biologie ein, die ja - im Gegensatz zur Physik - die lebende Materie erforscht. Das Ziel der Anwendung der Mathematik in der Biologie ist - ähnlich wie in der Physik - die Aufstellung mathematischer Modelle, die aber jetzt biologische Vorgänge beschreiben und zwar möglichst so, daß eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit experimentell ermittelten Daten besteht. Es erhebt sich nun die Frage, ob dieses Vorhaben überhaupt realisierbar ist, da biologische Prozesse im allgemeinen wesentlich komplexer als physikalische Vorgänge sind. Betrachtet man beispielsweise die Vielzahl der chemischen Reaktionen in einer lebenden Zelle, so erscheint es unwahrscheinlich, ein mathematisches Modell aufzustellen, das alle diese Reaktionen als ein komplexes System erfaßt.

Läßt man sich trotz dieser scheinbar unüberwindlichen Schwierigkeit nicht entmutigen, so kommt einem das von den Biologen anerkannte "Prinzip der Einfachheit" entgegen. Dieses Prinzip besteht in der Auffassung, daß "ungeachtet ihrer Kompliziertheit biologische Systeme so aufgebaut sind, daß ihre Steuerung mit möglichst einfachen Methoden verwirklicht wird", vgl. Romanovsky/Stepanova/Chernavsky: Kinetische Modelle in der Biophysik, Jena 1974. Diese Autoren sehen die Aufgabe, die die Mathematik in der Biologie zu erfüllen hat, wie folgt: "Die Hauptaufgabe ... liegt im Studium der Regulationsprozesse und der Aufdeckung der wichtigsten Konstruktionsprinzipien sich selbst regulierender Systeme".

In der Praxis sieht das oft so aus, daß man versucht, in der Biologie weit verbreitete Phänomene - wie das Phänomen biologischer Schwingungen - durch möglichst einfache mathematische Mo-

delle zu erklären. Ein bekanntes Beispiel einer biologischen Schwingung stellt die periodische Tag-Nacht-Aktivität der Photosynthese bei Pflanzen dar.

Bei der mathematischen Modellierung solcher Phänomene steht vielfach der sogenannte qualitative Aspekt im Vordergrund. Das bedeutet, daß das Modell in der Lage sein soll, die einzelnen Effekte des Phänomens zwar wiederzugeben, aber nicht notwendig numerisch genau. Eine qualitative Denkweise spielt auch schon in der Schule eine Rolle. Nimmt man das Problem der Kurvendiskussion einer gegebenen Funktion, so kommt es ja nicht darauf an, eine mehr oder weniger große Anzahl von Funktionswerten numerisch zu bestimmen, sondern den Graph der Funktion aus gewissen qualitativen Merkmalen (Extrema, Wendepunkte, Konvexität usw.) zu entwerfen.

Im folgenden wollen wir uns mit einem einfachen mathematischen Modell für das Phänomen der Oszillation zweier sich beeinflussender Arten von Lebewesen beschäftigen. Auf solch ein Phänomen ist man im letzten Jahrhundert in Kanada gestoßen. Auf Grund einer statistischen Erhebung von 1845 bis 1935 über die Anzahl der erbeuteten Felle von Hasen und Luchsen hat man festgestellt, daß sich die Anzahl der Hasen bzw. Luchse periodisch mit einer Periode von ca. 10 Jahren und mit gleichbleibender Amplitude ändert (siehe Abb. 1).

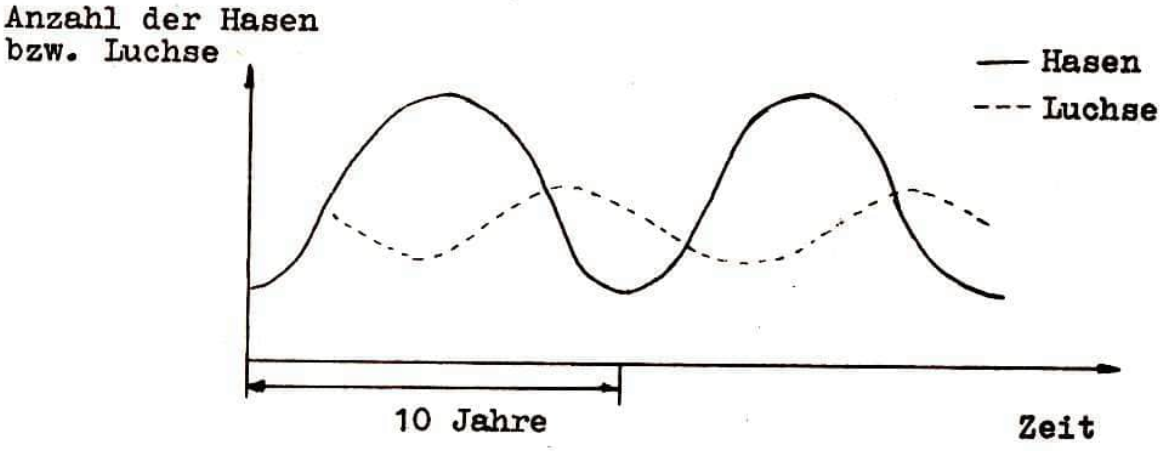


Abb. 1: Schematische Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Anzahl der Hasen und Luchse in Kanada

Betrachtet man Abbildung 1, so fällt auf, daß die beiden Schwin-

gungskurven phasenverschoben sind. Dabei wird das Maximum der Hasenkurve stets kurz vor dem Maximum der Luchskurve erreicht.

In den dreißiger Jahren hat V. Volterra ein einfaches System von Differentialgleichungen vorgeschlagen, das diese Schwingungen erklären könnte. Wir wollen hier dieses Differentialgleichungssystem aufstellen, lösen und schließlich eine kleine Diskussion darüber führen, wie "gut" dieses mathematische Modell die Realität widerspiegelt.

I. Aufstellung des Differentialgleichungssystems

Wir machen die folgenden einfachen Annahmen:

1. Gegeben sei ein abgeschlossenes Gebiet, in dem Luchse (Räuber) und Hasen (Beutetiere) leben. Die Nahrungsvorräte der Hasen seien unbegrenzt, und die Luchse sollen sich nur von Hasen ernähren.

   $x(t)$ ... Anzahl der Hasen zur Zeit t
   $y(t)$ ... Anzahl der Luchse zur Zeit t
   $x(t)$, $y(t)$ seien differenzierbare Funktionen in t

2. Wenn Hasen allein leben würden, könnten sie sich ungestört vermehren. Wir nehmen deshalb an, daß die Zuwachsrate der Hasen ($\frac{dx}{dt}$) proportional der aktuellen Anzahl der Hasen (x) sein soll:

   $$\frac{dx}{dt} = a \cdot x, \quad a = \text{const} > 0.$$

   Wenn die Luchse allein leben würden, müßten sie an Nahrungsmangel aussterben:

   $$\frac{dy}{dt} = -d \cdot y, \quad d = \text{const} > 0.$$

3. Nun betrachten wir den Fall, daß die Hasen und Luchse zusammen leben. Da die Luchse sich von den Hasen ernähren sollen, ist die folgende Annahme einzusehen:

   $\frac{dy}{dt} \sim$ Häufigkeit des Zusammentreffens von Luchsen und Hasen $\sim x \cdot y$

   d. h. man hat

   $$\frac{dy}{dt} = c \cdot xy, \quad c = \text{const} > 0.$$

Analog erhält man

$$\frac{dx}{dt} = - b \cdot xy \,, \qquad b = \text{const} > 0.$$

Faßt man die unter 2. und 3. gemachten Annahmen zusammen, so erhält man das von V. Volterra vorgeschlagene Differentialgleichungssystem:

$$(1) \qquad \boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a \cdot x - b \cdot xy \\ \frac{dy}{dt} &= c \cdot xy - d \cdot y \end{aligned} \qquad a,b,c,d > 0 \qquad \text{V. Volterra, 1931}}$$

Wir müssen nun dieses System lösen, d. h. alle Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ (t reell) bestimmen, die dieses Differentialgleichungssystem erfüllen. Bei unserem Volterra-System ist man aber nicht in der Lage, die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ explizit zu bestimmen. Wir wollen deshalb einen anderen Weg beschreiten.

II. Lösung des Volterra-Systems

Sind die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ (t reell) eine Lösung von (1), so heißt die Menge

$$K := \{ (x(t),\ y(t));\ t \in \mathbb{R} \}$$

Phasenkurve. Die Elemente von K nennt man Phasenpunkte. Wir wollen nun die implizite Gestalt aller Phasenkurven bestimmen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir

$$a = b = c = d = 1.$$

Wir haben also das folgende System zu untersuchen

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - xy \\ \frac{dy}{dt} &= xy - y \,. \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{xy - y}{x - xy} = \frac{y}{1-y} \cdot \frac{x-1}{x}$$

erhält man durch formale Multiplikation mit dx den Ausdruck

$$\frac{1-y}{y}\, dy = \frac{x-1}{x}\, dx$$

und schließlich

$$\int \frac{1-y}{y}\, dy = \int \frac{x-1}{x}\, dx \, .$$

Berechnet man die Integrale dieser Gleichung, so erhält man für $x,y > 0$ die implizite Gestalt der Phasenkurven von (2):

(3) $\quad y - \ln y = \ln x - x + c, \quad c = \text{const}$ (Integrationskonst.)

Jede Zahl $c \geq 2$ bestimmt genau eine Phasenkurve. Für $c=2$ besteht die dazu gehörige Phasenkurve nur aus dem Punkt $(x,y) = (1,1)$. Für $c > 2$ sind die Phasenkurven geschlossene Kurven, die um den Punkt $(x,y) = (1,1)$ verlaufen, vgl. Abb. 2.

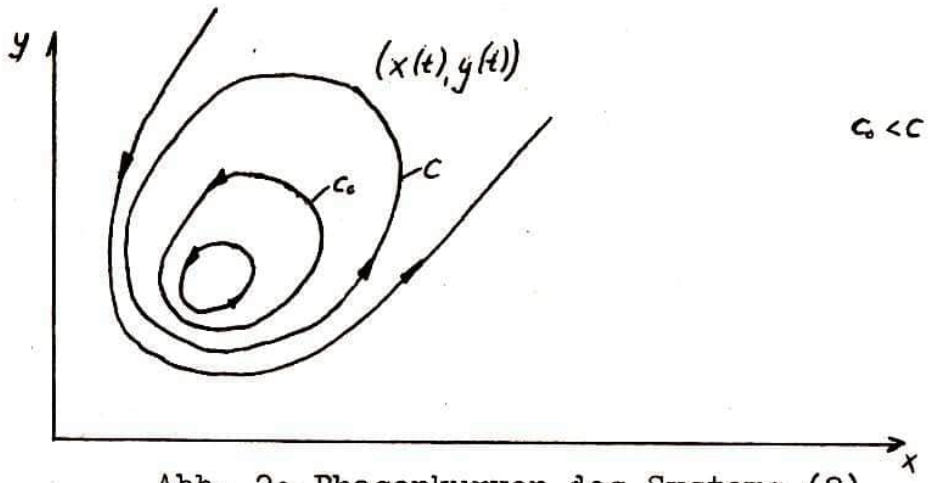


Abb. 2: Phasenkurven des Systems (2)

Die Pfeile geben an, in welchem Durchlaufsinn der Phasenpunkt mit wachsendem t die jeweilige Phasenkurve durchläuft. Da jede Kurve geschlossen ist, kehrt der Phasenpunkt nach endlicher Zeit zum Ausgangspunkt zurück. Folglich müssen die Lösungen $x(t)$ und $y(t)$ periodische Funktionen der Zeit sein.

III. Die Güte des Volterra-Modells

Auf den ersten Blick können wir mit dem erreichten Ergebnis zufrieden sein. Das wesentliche qualitative Merkmal der Koexistenz von Hasen und Luchsen in Kanada - die Existenz der beiden Arten in oszillierender Weise - wird durch die Geschlossenheit der Phasenkurven des Systems (1) bzw. (2) ausgedrückt. Natürlich stimmen numerisch gesehen die Phasenkurven nicht mit den experimentell ermittelten Kurven überein, weil wir viele Einflüsse

- wie das Vorhandensein anderer Raubtiere, unterschiedliche klimatische Bedingungen usw. - nicht in unserem Modell berücksichtigt haben. Außerdem wird es nicht möglich sein, die Konstanten a, b, c, d experimentell zu bestimmen.

Auf den zweiten Blick können wir mit dem Volterra-Modell nicht zufrieden sein. Die betrachteten Oszillationen zwischen Hasen und Luchsen in Kanada zeigten ein stabiles Verhalten über viele Jahrzehnte, d. h. alle äußeren Störungen des Lebensmilieus der Tiere konnten die Periode und die Amplitude nicht wesentlich ändern. Diese Stabilität der Daseinsweise geht aber <u>nicht</u> in das Volterra-System ein. Eine kleine äußere Störung würde bedeuten, daß man anstatt (1) ein System der Gestalt

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a\cdot x - b\cdot xy + \varepsilon\cdot M(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= c\cdot xy - dy + \varepsilon\cdot N(x,y) \end{aligned} \quad , \; 0 < \varepsilon \ll 1$$

betrachten muß. Dabei sind $M(x,y)$ und $N(x,y)$ Funktionen in x und y und ε eine "beliebig kleine" positive Zahl. Wenn man z.B.

$$M(x,y) = -x^2 \quad \text{und} \quad N(x,y) = 0$$

setzt, so sind die Phasenkurven des Systems (3) nicht mehr geschlossen, wie klein man auch ε wählt. Es sind nach innen gewundene Spiralen entstanden, die sich mit wachsendem t asymptotisch einem Punkt nähern, vgl. Abb. 3.

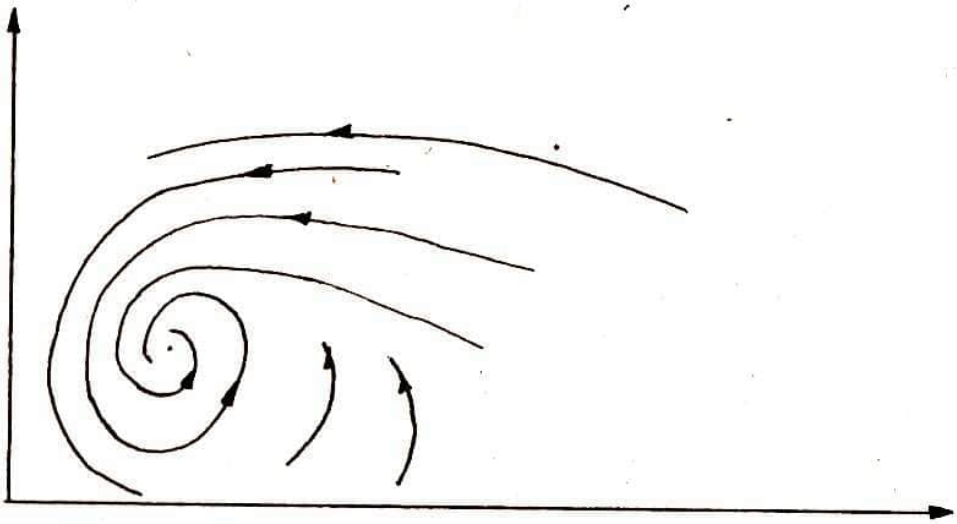


Abb. 3: Phasenkurven des Systems (3) mit $M(x,y) = -x^2$ und $N(x,y) = 0$

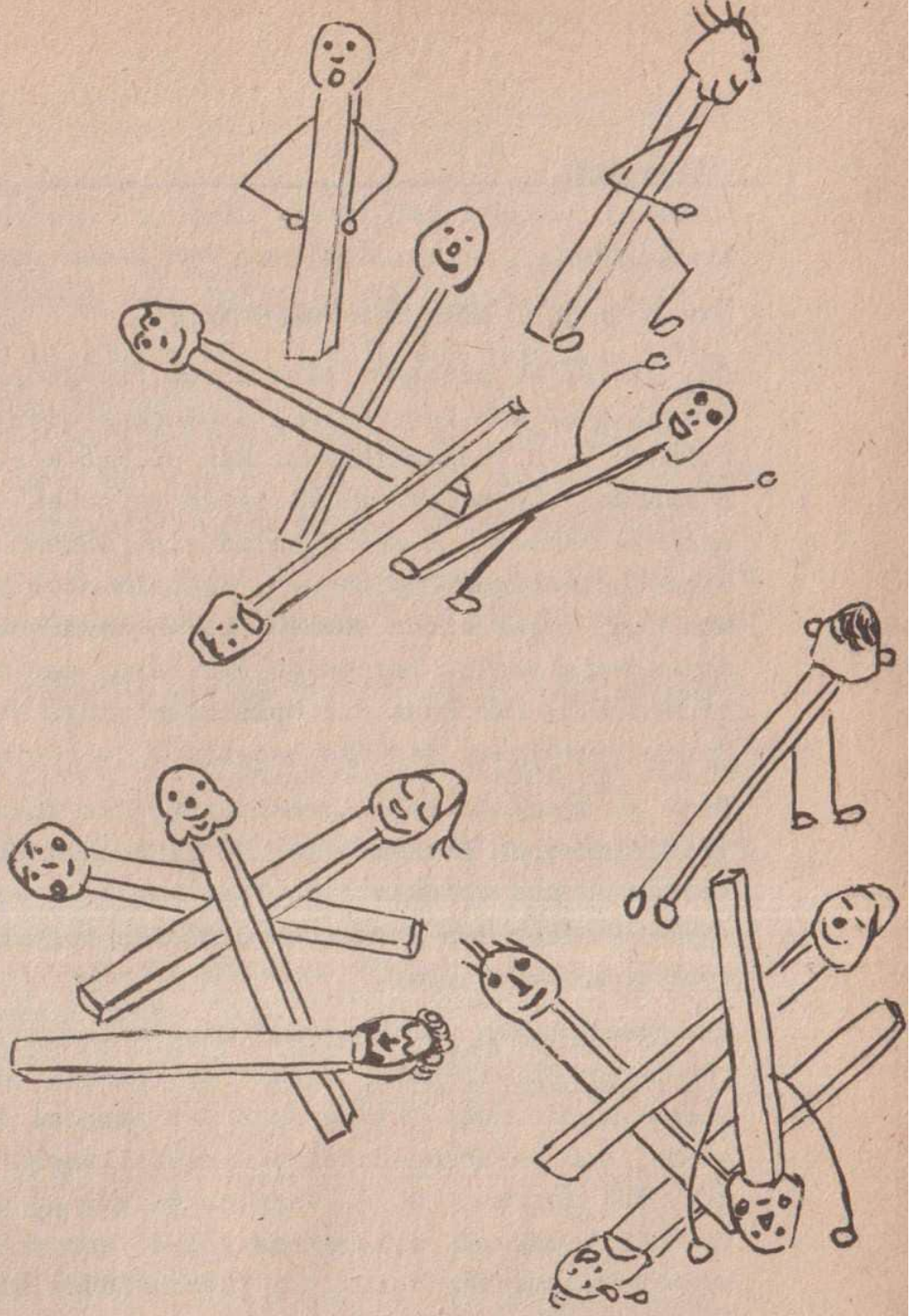
Damit kann sich bei einer noch so kleinen Störung von (1) das qualitative Bild der Phasenkurven ändern. Die Eigenschaft der Periodizität geht verloren.

Trotzdem hat das Volterra-System in der mathematischen Modellierung biologischer Vorgänge seine Berechtigung. Man kann den Status von (1) etwa vergleichen mit dem Status des ungedämpften harmonischen Oszillators in der Mechanik. Ähnlich wie die Differentialgleichung für den ungedämpften harmonischen Oszillator Ausgangspunkt für wichtige Schwingungsgleichungen in der Physik ist, stellt das System (1) die Grundlage für viele Schwingungsgleichungen in der Biologie dar.

Dr. Bauhardt
FSU Jena, Sektion Mathematik
Bereich Analysis

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 16. 10. 1982



12
82

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

14. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Mathematische Spiele – 2. Fortsetzung

Das Nim-Spiel oder Dreihaufenspiel

Das Nim-Spiel zeichnet sich durch die Einfachheit seiner Hilfsmittel aus. Man kann es mit Steinchen oder Holzstäbchen (Zündhölzern z. B.) durchführen. Man bildet aus diesen Spielsteinen 3 Haufen. Die beiden beteiligten Personen - wir nennen sie A und B - nehmen nun abwechselnd eine Anzahl von Spielsteinen von einem beliebigen Haufen weg, niemals aber von mehreren Haufen. Man kann sogar einen ganzen Haufen wegnehmen, wenigstens aber einen Spielstein. Derjenige verliert, der den letzten Spielstein nehmen muß. Man kann die Spielregel auch so festlegen, daß der Spieler gewinnt, der die letzten Spielsteine wegnimmt.

Eine weitgehende Verallgemeinerung des Nimspiels stammt von dem amerikanischen Mathematiker E. H. Moore. Er läßt beliebig viele Haufen zu und erlaubt auch, daß man bei jedem Zug Steine von mehreren aber von höchstens p Haufen wegnehmen kann (p beim Spiel konstant, p=2,3,...).

Wir beschränken uns hier auf den Fall von 3 Haufen mit oben angegebenen Spielregeln. Verlierer ist also der, der den letzten Stein nehmen muß. Interessant ist nun bei diesen Spielen die Tatsache, daß es sogenannte "Gewinnstellungen" gibt, d. h. Stellungen, bei denen z. B. A, wenn er gerade an der Reihe ist, gewinnen kann. Man muß allerdings selbst entscheiden können, wer den ersten Zug machen soll. Die Entscheidung hierüber hängt von der Anfangskonstellation ab.
Wir wollen zunächst an einigen einfachen Beispielen solche Gewinnstellungen für denjenigen untersuchen, der gezogen hat. Für denjenigen, der am Zuge ist, sind es dann Verliererstellungen.

a) In jedem Haufen sei ein Spielstein.
   Man erkennt in diesem Falle sofort, daß der, der anfängt, verliert. Will A gewinnen, so muß B den ersten Zug ziehen.

b) In einem Haufen seien mehr als ein Spielstein, in den übrigen beiden sei je ein Spielstein.
   Hier siegt stets der, der den ersten Zug ausführt. Will wie-

der A gewinnen, so muß er beim ersten Zug von dem Haufen, der mehr als einen Spielstein enthält, alle bis auf einen wegnehmen. B ist dann nach Beispiel a) Verlierer.

c) In einem Haufen sei ein Spielstein, in den beiden anderen seien mehr als ein Spielstein.
Da bei dieser Ausgangskonstellation für den, der das Spiel beginnt, nicht immer der Gewinn sicher ist, wollen wir einige besondere Ausgangsstellungen dieser Art untersuchen.

Der Spieler, der mit dem Spiel beginnt, sei A, der andere B. Die Ausgangsstellung charakterisieren wir durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$. h_k gibt die Anzahl der Steine im k-ten Haufen.

Es sei zunächst $M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Diese Ausgangsstellung ist für A eine Verliererstellung, wenn B aufmerksam spielt und sich nicht irrt. Die Änderung der Matrix M_1 durch die Züge von A und B geben wir im folgenden für einige Möglichkeiten schematisch wieder. In allen möglichen Fällen verliert A bei richtig spielendem Gegner.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[B]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[B]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[A]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{A verliert}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[B]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[B]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[A]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{A verliert}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A]{} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[B]{} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[A]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[B]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[A]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{A verliert}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A]{} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[B]{} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[A]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{A verliert}$$

Weitere Möglichkeiten kann der Leser selbst noch finden und die Verliererstellung nachweisen.
Auf ähnliche Weise kann man zeigen, daß auch die Ausgangsstellungen
$M_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ usw. für den Anfänger A Verliererstellungen sind. Der Kürze halber überlassen wir dem Leser die Bestätigung dieser Behauptungen. Trotzdem bestehen

für A Gewinnchancen, wenn B sich einmal irren sollte.

Dagegen sind die folgenden Ausgangsstellungen

$N_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ $N_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ usw. Gewinnstellungen für A.

Wir zeigen dies für die Ausgangsstellung N_1.

A nimmt vom dritten Haufen 2 Steine weg und erreicht dadurch für B die Ausgangsstellung $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. B muß verlieren. Ebenso kann A die beiden Ausgangsstellungen N_2 und N_3 in die für B ungünstigen Stellungen $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführen.

Der amerikanische Mathematiker Ch. L. Bouton, der für dieses Spiel auch den Namen "Nim" eingeführt hat, zeigte, daß sich die Gewinn- bzw. Verliererstellungen mit Hilfe der Dyadik kennzeichnen lassen. Wir wollen diesen Zusammenhang mit der Dyadik bei den Matrizen M_k bzw. N_k nachweisen (k=1,2,3, usw.).
Wir schreiben die Matrizen im Binärsystem und bedienen uns dabei der Ziffern 0 und 1.

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$ $M_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \\ 101 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 001 \\ 100 \\ 101 \end{pmatrix}$

$M_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 110 \\ 111 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 001 \\ 110 \\ 111 \end{pmatrix}$ $M_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1000 \\ 1001 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0001 \\ 1000 \\ 1001 \end{pmatrix}$ usw.

Addieren wir nun die senkrecht untereinander stehenden Zifferen in jeder Matrix und schreiben ihre Summen im Dezimalsystem nebeneinander auf, so erhalten wir bei M_1 die beiden Summen (2,2), bei M_2 die 3 Summen (2,0,2), bei M_3 die 3 Summen (2,2,2) und bei M_4 die 4 Summen (2,0,0,2). (0 ist ja auch eine gerade Zahl).
Ergebnis: Die erhaltenen Summen sind bei den Ausgangsstellungen M_k stets gerade Zahlen. (Für $k > 4$ kann der Leser selbst überprüfen). Nun schreiben wir die Matrizen N_k in ähnlicher Weise und bilden auch hier die einzelnen Summen wie oben.

$N_1 = \begin{pmatrix} 001 \\ 011 \\ 100 \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} 001 \\ 101 \\ 110 \end{pmatrix}$, $N_3 = \begin{pmatrix} 0001 \\ 0111 \\ 1000 \end{pmatrix}$, $N_4 = \begin{pmatrix} 0001 \\ 1001 \\ 1010 \end{pmatrix}$ usw.

Die Summen lauten in Dezimalschreibweise:
Bei N_1 (1,1,2), bei N_2 (2,1,2), bei N_3 (1,1,1,2) und bei N_4 (2,0,1,2).

Ergebnis: Die erhaltenen Summen sind nicht alle gerade Zahlen, mindestens eine ungerade Zahl kommt immer vor.

Wir können also sagen: Die Ausgangsstellung ist für den Anfänger A eine Gewinnstellung, wenn mindestens eine ungerade Summe vorkommt. Die Ausgangsstellung ist für A eine Verliererstellung, wenn alle gebildeten Summen gerade Zahlen sind.

Für den Fall, daß die Ausgangsstellung die Form $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ hat, (mit $x,y > 1$ und beliebig aus N), liegt demnach die Vermutung nahe, daß in der binären Darstellung der Matrix wieder die einzelnen entsprechenden Summen entscheiden, ob für A eine Gewinnstellung oder Verliererstellung vorliegt. Liegt z. B. die Ausgangsstellung $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix}$ bzw. in binärer Schreibweise $\begin{pmatrix} 00001 \\ 01111 \\ 11110 \end{pmatrix}$ vor, so sind die einzelnen Summen (1,2,2,2,2). M ist also für A eine Gewinnstellung. Er muß mit dem Spiel beginnen, damit sein Gewinn sicher ist. Er nimmt vom größten Haufen $16 = 2^4$ Steine weg. Dann bleibt für B die Ausgangsstellung $\begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0001 \\ 1111 \\ 1110 \end{pmatrix}$. Die Summen sind (2,2,2,2). Wie auch B Steine wegnehmen wird, immer entsteht für A eine günstige Ausgangsstellung. Nimmt z. B. B vom 2. Haufen 7 Steine weg, so entsteht für A die Ausgangsstellung $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0001 \\ 1000 \\ 1110 \end{pmatrix}$ mit den Summen (2,1,1,1).

A nimmt vom größten Haufen 5 Steine weg und überläßt B die Stellung $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0001 \\ 1000 \\ 1001 \end{pmatrix}$ mit den Summen (2,0,0,2). B muß also verlieren.

Zum Schluß betrachten wir den allgemeinen Fall, daß in allen 3 Haufen mehr als ein Spielstein liegen. Der oben erwähnte amerikanische Mathematiker Ch. L. Bouton hat bereits 1901 bewiesen, daß die dyadischen Zusammenhänge in gleicher Weise auch für beliebige Besetzungszahlen der drei Haufen gelten. Wir wollen an einem konkreten Beispiel zeigen, wie theoretisch A seine Gewinnstellungen sichern kann und wie praktisch A spielen wird.

Es liege die Ausgangsstellung $\begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ 32 \end{pmatrix}$ vor. Zunächst muß A feststellen, wer den ersten Zug machen muß, damit sein Gewinn gesichert ist. Aus der binären Darstellung $\begin{pmatrix} 000111 \\ 010010 \\ 100000 \end{pmatrix}$ ergeben sich

folgende Summen: (1,1,0,1,2,1).
Die Ausgangsstellung ist demnach für A eine Gewinnstellung, wenn er das Spiel beginnt. Damit die Summen gerade Zahlen werden, nimmt er vom größten Haufen $32 = 2^5$ Steine weg und gibt in Gedanken $2^4+2^2+2^0$ Steine dazu, d. h. er nimmt im ganzen 11 Steine weg. Dann entsteht für B die Ausgangsstellung $\begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ 21 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 00111 \\ 10010 \\ 10101 \end{pmatrix}$. Die Summen sind jetzt (2,0,2,2,2). B muß also verlieren, wenn A keinen Fehler begeht. Nimmt z. B. B vom 2. Haufen 16 Steine weg, so entsteht die Matrix $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 21 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 00111 \\ 00010 \\ 10101 \end{pmatrix}$
Die einzelnen Summen betragen (1,0,2,2,2), für A wieder eine günstige Stellung. Er nimmt vom größten Haufen $16 = 2^4$ Steine weg und überläßt B die Matrix $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 111 \\ 010 \\ 101 \end{pmatrix}$ mit den Summen (2,2,2). Nimmt nun B vielleicht vom 3. Haufen 4 Steine weg, so entsteht für A die Ausgangsstellung $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 111 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}$ mit den Summen (1,2,2). A nimmt nun vom ersten Haufen 4 Steine weg und erreicht dadurch für B die Ausgangsstellung $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. B verliert nun, wie wir schon früher nachgewiesen haben. Je nach Art der Züge von B kann A früher oder später gewinnen.
Praktisch wird wohl A höchstens die erste Ausgangsstellung untersuchen, ob er oder B beginnen soll. Dann kann er seine Züge so einrichten, daß er schließlich für B eine Ausgangsstellung der Form M_k bzw. für sich eine Ausgangsstellung der Form N_k erreicht. Sind beide Teilnehmer mit der Theorie vertraut, so kann ausgewürfelt werden, wer den ersten Zug macht.

Interessierte Leser können ja versuchen, mit mehr als 3 Haufen ähnliche Gewinnstellungen bzw. Verliererstellungen zu finden.

<u>Literaturangaben:</u>

G. Kowalewski., Alte und neue mathematische Spiele, Teubner-Verlag.
Mathematisches Mosaik, Urania Verlag, Leipzig-Jena-Berlin.

Dr. B. Hanisch
Halle

Preisaufgaben

0 55 (2)

In einem Trapez sei die Summe der Innenwinkel an einer der parallelen Seiten gleich 90°.
Man beweise, daß dann die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der parallelen Seiten gleich der halben Differenz der parallelen Seiten ist.

0 56 (2)

Der Umfang des Dreiecks Δ ABC sei 2p.
Welchen maximalen Wert kann dann die Länge des innerhalb des Dreiecks liegenden Abschnittes der Tangente des Inkreises von Δ ABC, die parallel zur Strecke $\overline{BC}$ verläuft, annehmen?

0 57 (1)

Man bestimme alle dreistelligen Dezimalzahlen (abc), die gleich dem arithmetischen Mittel der Zahlen (bca) und (cab) sind.

0 58 (1)

Man zeige, daß für alle reellen Zahlen x das Polynom

$$P(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$$

positive Werte annimmt.

0 59 (1)

Beweisen Sie, wenn n ganze Zahl ist und $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, so gilt folgende Gleichung

$$\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma$$
$$= (-1)^{n+1} \cdot 4 \sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma .$$

0 60 (2)

Пусть a,b – катеты прямоугольного треугольника, c – гипотенуза, h – высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу.
Доказать, что треугольник со сторонами h, c + h, a + b является прямоугольным.

Einsendeschluß: 15. 3. 1983

Aufgabe 0 5 Es ist

$$\begin{aligned} z &= x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5 \\ &= x^5 - 5x^3y^2 + 4xy^4 + 3x^4y - 15x^2y^3 + 12y^5 \\ &= x(x^2-y^2)(x^2-4y^2) + (x^2-y^2)(x^2-4y^2)\,3y \\ &= (x-2y)(x-y)(x+y)(x+2y)(x+3y) \qquad (1) \end{aligned}$$

Es sei $z = 33$. Da für ganzzahlige x nicht $33 = x^5$ gelten kann, ist $y \neq 0$. Die fünf Faktoren, in die z (siehe (1)) zerlegt wurde, sind alle paarweise voneinander verschieden, denn wäre $x + ky = x + hy$, so wäre $(k-h)y = 0$, also $y = 0$. Eine Darstellung von 33 als Produkt von fünf verschiedenen ganzen Zahlen ist aber unmöglich, denn die Faktoren jeder Produktdarstellung von 33 sind Elemente der Menge $\{\pm 33, \pm 11, \pm 3, \pm 1\}$, wobei aus $\{\pm 33, \pm 11, \pm 3\}$ höchstens zwei Faktoren und aus $\{+1, -1\}$ höchstens zwei Faktoren kommen können, weil ja alle Faktoren paarweise verschieden sein müssen.

Aufgabe 0 6 Es ist zu zeigen, daß kein Polyeder mit 7 Kanten existiert.

Falls eine Kante eines Polyeders eine viereckige Seitenfläche begrenzt, so hat das Polyeder mindestens 8 Kanten. Dieser Fall entfällt also. Das Polyeder ist also von Dreiecken begrenzt. Ist die Zahl der Seitenflächen k, so ist die Zahl der Kanten $\frac{3k}{2}$, also $7 = \frac{3k}{2}$ oder $k = 4 \cdot \frac{2}{3}$, womit k keine ganze Zahl mehr ist.

Aufgabe 0 8 Bezeichnen wir den Nenner des ersten Bruches mit a, des zweiten mit b und des dritten mit c. So gilt

$$\begin{aligned} n_1 : n_2 &= 2 : 1 \\ n_2 : n_3 &= 2 : 3 \\ n_1 : n_2 : n_3 &= 4 : 2 : 3 \end{aligned}$$

oder $n_1 = 4x$, $n_2 = 2x$ und $n_3 = 3x$.

Für die Zähler setzen wir entsprechend

$$z_1 = 3y, \quad z_2 = y \quad \text{und} \quad z_3 = 2y.$$

Also ist

$$\frac{3y}{4x} + \frac{y}{2x} + \frac{2y}{3x} = \frac{23}{60}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{5}$$

Die drei unkürzbaren Brüche sind also $\frac{3}{20}$, $\frac{1}{10}$ und $\frac{2}{15}$.

Aufgabe 0 10 Wir formen den linken Teil der Ungleichung um.

$$\begin{aligned}
&4(x+y)(x+z)x(x+y+z) + y^2z^2 \\
&= 4(x^2+xy+xz+yz)(x^2+xy+xz) + y^2 \\
&= 4(x^2+xy+xz)^2 + 4yz(x^2+xy+xz) + y^2z^2 \\
&= \left[2(x^2+xy+xz) + yz\right]^2
\end{aligned}$$

Wir haben somit das Quadrat einer reellen Zahl, welches immer nichtnegativ ist.

Aufgabe 0 11 Aus den Beziehungen trigonometrischer Funktionen und $\sin\alpha = A\sin(\alpha+\beta)$ erhalten wir $\sin\alpha\,(1-A\cos\beta) = A\cos 2\sin\beta$. Weiterhin

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A\sin\beta}{1-A\cos\beta}$$

und

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{A\sin\beta}{1-A\cos\beta} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{A\sin\beta}{1-A\cos\beta}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$= \frac{\sin\beta}{\cos\beta - A}.$$

Aufgabe 0 12 Nennen wir die zwei Zahlen a und b (o.B.d.A. $a > b$).

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich

$$a - b = 48 \qquad (1)$$

$$a = 4b + 3 \qquad (2)$$

(2) in (1) eingesetzt ergibt $b = 15$ und für a erhalten wir leicht 63.

Aufgabe 0 13 Es gilt für $x < a$

$$\varphi(x) = a+b+c+d-4x > (b-a) + (c-a) + (d-a)$$

für $a \leq x < b$

$$\varphi(x) = -a+b+c+d-2x > (c-a) + (d-b)$$

für $b \leq x < c$

$$\varphi(x) = c - a + d - b$$

für $c \leq x < d$

$$\varphi(x) = 2x-a-b-c+d \geq (c-a) + (d-b)$$

für $d \leq x$

$$(x) = 4x-a-b-c-d \geq (d-a) + (d-b) + (d-c)$$

Wegen $a < b$

gilt $2a < 2b$

und $d-b < (b-a) + (d-a)$

und $(c-a) + (d-b) < (b-a) + (c-a) + (d-a)$

sowie wegen $c < d$

$$2c < 2d$$

$$c-a < (d-c) + (d-a)$$

$$(c-a)+(d-b) < (d-a) + (d-b) + (d-c).$$

Also ist der minimale Wert der Funktion $\varphi(x)$ $d+c-b-a$ und dieser wird für $b \leq x \leq c$ angenommen.

Berechnung von Funktionen

1. Fortsetzung

Ein erster Vorschlag für eine Rechenvorschrift ergibt sich in der folgenden Weise:

Es wird eine gewünschte Genauigkeit ε vorgegeben, d. h. es soll

$$|e^x - P_n(x)| < \varepsilon$$

sein. Für unsere Zwecke sei $\varepsilon = 10^{-6}$.

Von der TAYLOR-Formel werden soviele Summanden genommen, daß n wenigstens $2|x|$ wird und sei N viel größer als n, dann ist

die TAYLOR-Summe bis N eine sehr genaue Näherung zu e^x und es gilt in guter Übereinstimmung

$$|R_n(x)| = |e^x - P_n(x)| \approx |P_N(x) - P_n(x)|$$

$$= \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots + \frac{x^N}{N!} \right|$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{|x|^{N-n-1}}{(n+2)(n+3)\ldots N}\right)$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{n} + \frac{|x|^2}{n^2} + \ldots + \frac{|x|^{N-n-1}}{n^{N-n-1}}\right).$$

Es sei $S_K = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^K$ und $q \neq 1$, so ist

$$S_K - qS_K = 1 - q^{K+1}$$

und damit

$$S_K = \frac{1-q^{K+1}}{1-q} .$$

Auf die letzte Ungleichung angewandt (mit $q = \frac{|x|}{n}$) erhält man für den Ausdruck in der Klammer

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - \left|\frac{x}{n}\right|^{N-n}}{1 - \frac{|x|}{n}}$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|x|}{n}} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n}{n - |x|} \leq 2 \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Bezeichnet man $a_K(x) = \frac{x^K}{K!}$, so genügt es demzufolge, als Näherungswert $P_n(x)$ so viele Summanden $a_K(x)$ zu erfassen, daß

1. $n > 2|x|$ und
2. $|a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt.

In der Tat, unter der Voraussetzung 1. ist

$$|R_n(x)| \leq 2\,|a_{n+1}(x)| \leq 2\,|a_n(x)| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

gewährleistet.

Es ist noch nötig, auf die Berechnung von $a_K(x)$ einzugehen. Berechnet man x^K und K! getrennt und dividiert anschließend, so sind dafür $(K-1)+(K-1)+1 = 2K-1$ Rechenoperationen notwendig. Für das Polynom $P_n(x)$ erhält man somit

$$Q(n) = n \text{ Additionen} + 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$$
$$= n + n^2 = n(n+1)$$

auszuführende Rechenoperationen.
Nutzt man hingegen aber den Zusammenhang

$$a_K(x) = \frac{x}{K}\, a_{K-1}(x)$$

aus $(a_0(x)=1)$, so reduziert sich die Zahl der notwendigen Rechenoperationen auf rund 3n. Das ist ein außerordentlicher Fortschritt, denn für obiges $\varepsilon = 10^{-6}$ und für x=20 müßte man z. B. n=65 verwenden und erhält damit ein Verhältnis von
$n(n+1) : 3n = 4290 : 195 = 22 : 1$.
Im Ergebnis gelangt man zu folgendem Rechnerprogramm:

<u>Programm A:</u>

1. Vorgabe x
2. Setze S=0, P=1 und n=0
3. Addiere P zu S
4. Addiere 1 zu n
5. Multipliziere x/n zu P
6. Gilt $n > 2|x|$?
   Wenn nein, gehe zu 3!
   Wenn ja, gehe zu 7!
7. Gilt $2|P| < \varepsilon$?
   Wenn nein, gehe zu 3!
   Wenn ja, gehe zu 8!
8. S ist der Funktionswert. Ende.

Rein formal ist hierbei alles in Ordnung, aber es verbleiben einige Probleme:

Angenommen, wir wollen e^{-15} berechnen. Herauskommen müßte eigentlich $e^{-15} = 3.059\ldots \cdot 10^{-7}$, wir verlangen jedoch nur, daß unser Wert höchstens um 10^{-6} vom exakten Wert abweichen solle, d. h. die Zahl

$$e^{-15} - 0.9.10^{-6} = -5.941\ldots \cdot 10^{-7}$$

ist in diesem Sinne ein zulässiger Näherungswert zu e^{-15}, obwohl er mit dem exakten Wert nichts mehr gemein hat - nicht einmal das Vorzeichen, das bei e^x nicht negativ werden kann!

Andererseits garantiert aber diese Rechenvorschrift eine enorme Genauigkeit bei der Berechnung von $e^{15} = 3\ 269\ 017{,}373\ldots$,

denn hier kann eine Abweichung erst in der siebenten Stelle hinter dem Komma auftreten, also von vorn gesehen erst in der 14. Stelle! Eine solche Genauigkeit wird kaum benötigt, es wird also viel zuviel ausgerechnet.

Als Ausweg bietet sich an, statt $|e^x - P_n(x)| < 10^{-6}$ zu fordern, daß die ersten sechs Stellen des Wertes e^x richtig sein sollen, also etwa

$$|e^x - P_n(x)| < \varepsilon e^x$$

als Bedingung zu formulieren. Daß man den rechts stehenden Wert e^x nicht kennt, ist hierbei problemlos: man verwendet einfach den schon berechneten Näherungswert. Im Programm A ist der logische Test 7 also zu ersetzen durch

7. Gilt $2|P| < \varepsilon|S|$?

(Warum muß hier der Betrag von S genommen werden? Muß er wirklich genommen werden?)

Perfekte Programme entstehen in der Regel nicht sofort, sondern der Programmierer sagt im Laufe der Arbeit mehrmals: "So, jetzt müßte es eigentlich laufen!" (Wenn es ein unerfahrener Programmierer ist, so sagt er: "So, jetzt läuft's!"). Diese Stelle ist so eine Stelle, wo man das sagen könnte, und tatsächlich, bringt man das Programm auf den Rechner und läßt sich für einige x-Werte die zugehörigen Funktionswerte ausrechnen, um sie anschließend zu kontrollieren, so hat man allen Grund zur Freude... bis man z. B. $x = -20$ setzt. Sonderbar: Solange man nicht allzuweit in den Bereich der negativen x-Werte vordringt - also speziell für alle $x \geq 0$ - sind die Resultate richtig, aber dort werden sie immer ungenauer und zuletzt völlig unsinnig, z. B. größer als 1 oder negativ.

Es sei hier gesagt, daß dieser Effekt stets auftritt, unabhängig vom Typ des benutzten Rechners. Wie kommt er zustande?

Angenommen, bei $x = -20$ muß bis zu einem Wert n summiert werden, es ist also

$$P_n(-20) = 1 - 20 + \frac{20^2}{2} - \frac{20^3}{6} + \ldots + \frac{(-20)^n}{n!}$$

der betreffende Näherungswert. Der betragsgrößte Wert in dieser Summe ist

$$a_{20}(-20) = \frac{(-20)^{20}}{20!} = 43\ 099\ 804{,}12\ldots$$

Tatsächlich, es ist

$$|a_{21}(-20)| = \frac{20}{21}\, a_{20}(-20) < a_{20}(-20)$$

und $|a_{18}(-20)| = \frac{19}{20}\, a_{20}(-20) < a_{20}(-20)$.

Jeder Rechenautomat rechnet nur mit einer gewissen maximalen Stellenzahl, z. B. 10 Stellen, der Rest wird weggerundet. Bei dem obigen Wert werden also nur zwei Stellen nach dem Komma mitgeführt, da vor dem Komma acht Stellen benötigt werden. Die Genauigkeit einer Summe ist i. a. nicht besser als die des ungenauesten Summanden, man kann also $P_n(-20)$ mit dem betrachteten Rechner höchstens auf zwei Stellen nach dem Komma genau bestimmen. Praktisch bedeutet das, daß die zweite Stelle nach dem Komma also schon verfälscht ist. Nun ist

$$e^{-20} = 2{,}06115\ldots \cdot 10^{-9} = 0.000\ 000\ 002\ 06\ldots$$

und zu dieser winzigen Zahl wird ein "Näherungswert" ausgerechnet, bei dem bereits die zweite Stelle hinterm Komma ungenau ist: Es ist klar, hier kommt nichts brauchbares heraus.

Für $x = +20$ ist ein derartiger Effekt nicht zu erwarten: Zwar gelten auch hier bei $P_n(x)$ höchstens zwei Stellen nach dem Komma, aber es ist

$$e^{20} = 485\ 165\ 195{,}4\ldots$$

und in dieser zehnstelligen Darstellung ist der Fehler in der zweiten Stelle hinter dem Komma belanglos.

<u>Programm B:</u>

1. Vorgabe x
2. Setze S=0, P=1, n=0 und T=|x|
3. Addiere P zu S
4. Addiere 1 zu n
5. Multipliziere T/n zu P
6. Gilt $n > 2|x|$?
   Wenn nein, gehe zu 3!
   Wenn ja, gehe zu 7!
7. Gilt $2P < \varepsilon S$?
   Wenn nein, gehe zu 3!
   Wenn ja, gehe zu 8!

8. Gilt $x < 0$?
   Wenn nein, gehe zu 10!
   Wenn ja, gehe zu 9!
9. Verwandle S in 1/S
10. S ist der Funktionswert. Ende.

Dieses Programm ist jetzt "sicher". Für $x < 0$ wird $1/e^{|x|}$ berechnet, und der Nenner läßt sich ja genügend genau bestimmen.

Von Standardprogrammen wird aber nicht nur erwartet, daß sie in jedem Falle ein richtiges Ergebnis liefern, es soll außerdem auch noch schnell gehen und so entstehen sehr ausgeklügelte Rechenverfahren. Zwei Wege zur Erhöhung der Effektivität des letzten Programms seien skizziert:

Angenommen, es sei $e^x = e^{20,1}$ zu berechnen, so zerlegt man x in eine natürliche Zahl m und eine reelle Zahl t zwischen 0 und 1, also $x=m+t$, $m=20$, $t=0,1$.

Nun ist

$$e^x = e^{m+t} = e^m \cdot e^t$$

und aus der früher gewonnenen Abschätzung mit r(n) erkennt man, daß zur Berechnung von e^t mit der Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-6}$ ein festes Polynom mit zehn Gliedern ausreicht. Für dessen Berechnung genügen 25 Operationen und der so gewonnene Wert wird noch m-mal mit der fest vorgegebenen Zahl e multipliziert. Die Zahl der nötigen Rechenschritte reduziert sich also von 195 weiter auf 45! Wenn man weiterhin so rechnet, daß nur die Werte

$$a=e^2,\ b=e^4=a^2,\ c=e^8=b^2,\ d=e^{16}=c^2,\ e^{20}=b\cdot d$$

bestimmt werden, so braucht man sogar nur 25+6=31 Operationen.

Ein anderer Weg besteht darin, daß man eine natürliche Zahl k so wählt, daß $t=2^{-k}x < 1$ wird. Anschließend berechnet man $A=e^t$ und erhält

$$e^x = e^{x\cdot\frac{2^k}{2^k}} = (e^{\frac{x}{2^k}})^{2^k} = (e^t)^{2^k} = A^{2^k}$$

durch k-maliges Quadrieren von A.

Fortsetzung folgt!

Dr. W. Rosenheinrich
Bereich Numerik/Optimierung

Es ist gefährlich, den Mensch zu oft daran zu erinnern, wie sehr er den Tieren gleich ist, ohne ihm seine Größe zu zeigen. Es ist aber auch gefährlich ihm seine Größe zu zeigen, ohne seine Niedrigkeiten sehen zu lassen. Aber noch gefährlicher ist es, ihn über beides in Unwissenheit zu lassen. Heilsam ist es, ihm beides vorzustellen.

Blaise Pascal

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: H. Gottstein, D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, I. Kaiser, M. Lutz, H. Rosner, H. Zein
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 10. 10. 1982

Titelbild: Ingrid Kleinwächter