1
83

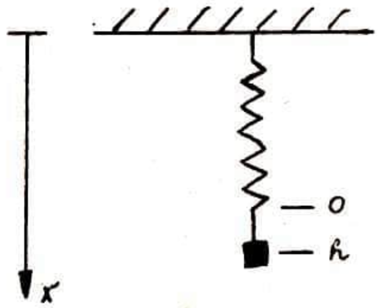
WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
17. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Die harmonische Schwingung und ihre mathematische Beschreibung

(I) Das wohl einfachste Modell zur Untersuchung des Schwingungsvorgangs ist der Federschwinger.
Es sei eine Masse m an einer masselosen Feder mit der Federkonstanten k aufgehängt und befinde sich in Ruhe. Jetzt lenken wir die Punktmasse nach unten (o. B. d. A.) um einen gewissen Weg h aus, und lassen sie los.
Unsere Erfahrung besagt: die Punktmasse bewegt sich periodisch auf und ab, oder besser: sie schwingt.
Jetzt wollen wir diesen Vorgang analysieren und innermathematische Überlegungen anstellen, um die Notwendigkeit dieses Verhaltens zu verifizieren, d. h. die Übereinstimmung von Theorie und Praxis zu bestätigen.
Zu diesem Zweck abstrahieren wir von der Energieumwandlung durch Reibung o. ä..
Die Bewegung erfolgt ausschließlich auf einer geradlinigen Bahn; es genügt die Festlegung <u>einer</u> Koordinaten x. Der Ruhepunkt sei der Nullpunkt der Koordinatenachse. Jetzt kommt das Axiomensystem I. NEWTONs (1643 - 1727) zur Anwendung.



Die drei für die theoretische Mechanik grundlegenden Axiome seien nochmals zusammengestellt.

1. NA Ein kräftefreier Körper behält seinen Zustand der gleichförmigen Bewegung bei.
2. NA Kraft ist das Produkt von Masse und Beschleunigung
$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$
3. NA Jede Kraft ruft eine gleichgroße Gegenkraft hervor "actio = reactio"

<u>Bemerkung 1:</u> Die angeführte Reihenfolge ist zwar üblich, dabei keineswegs bindend oder gar als "Wertung" der Axiome zu verstehen.

<u>Bemerkung 2:</u> Der Ausdruck $\frac{d^2x}{dt^2}$ wird gebräuchlich mit $\ddot{x}$ abgekürzt

(entsprechend $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ usw.).

In unserem Problem wirken zwei Kräfte:

$F_F = -kx$ (Definition der Federkraft)

$F_A = m\ddot{x}$ (2. NA für die an das Massestück angreifende Kraft)

Das 3. NA legt nun fest:

$$F_A = F_F \text{ oder } m\ddot{x} = -kx \text{ oder } \dot{x} = -\frac{k}{m}x \tag{1}$$

Der Vorgang wird durch (1) aber noch nicht vollständig beschrieben. Die Auslenkung und der Bewegungszustand vor dem "freien" Schwingungsvorgang wird auch noch zur Beschreibung gebraucht.

$$x(0) = h \qquad \dot{x}(0) = 0 \tag{2}$$

Der Einfachheit halber normieren wir jetzt wie folgt:

$$\frac{k}{m} = 1, \qquad h=1 \tag{3}$$

Somit vereinfacht sich das System von Gleichungen (1) und (2) zu folgendem:

$$\begin{aligned} x(t) &= -x(t) \\ x(0) &= 0 \\ x(0) &= 1 \end{aligned} \tag{4}$$

(II) Problem: Es ist eine Funktion $x(t)$ gesucht, die das "System" (4) erfüllt.

Bemerkung 1. In der Sprache der (sehr weit ausgearbeiteten) Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen handelt es sich bei dem obigen "System" (4) um eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit ihren Anfangswertbedingungen. Deshalb sprechen wir im weiteren von der Gleichung (4).

Bemerkung 2. Die Untersuchung geschieht aber im weiteren ausschließlich mittels der aus dem Schulunterricht (Klasse 11) bekannten Methoden der elementaren Analysis.

Bemerkung 3. Die im folgenden zitierten Sätze sind in den Lehrbüchern Klasse 11 und 12 ausführlich formuliert

und bewiesen.
Desweiteren findet man dieselben in jedem Werk über elementare Analysis.

Hilfssatz 1: Eine Funktion F, für die gilt:

$\ddot{F}(t) = -F(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

$\dot{F}(0) = 0$

$F(0) = 0$

kann nur die Funktion $F(t) = 0$ sein.

Bemerkung: Hier wie im folgenden ist mit "Funktion" eine reellwertige Funktion reeller Veränderlicher gemeint.

Beweis. Es sei folgende Funktion G definiert:

$$G(t) := F^2(t) + [F'(t)]^2$$

1. Feststellung: G ist einmal stetig differenzierbar, weil F zweimal stetig differenzierbar ist ($\forall t \in \mathbb{R}$)

2. Feststellung: $G(0) = 0$

Es gilt: $G'(t) = 2F(t) \cdot F'(t) + 2F'(t)\, F''(t)$

Da $\ddot{F}(t) = F''(t) = -F(t)$ ist,

folgt $G'(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Somit gilt: $G(t) = \text{const} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

und weil $G(0)=0$: $G(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Offensichtlich gilt: $G(t) \equiv 0$ genau dann, wenn $F(t) \equiv 0$.
Daraus folgt der Hilfssatz.

Bemerkung: Hinter diesem Hilfssatz verbirgt sich ein fundamentaler physikalischer Sachverhalt, er beschreibt einen Spezialfall des 1. NA.

Bemerkung: Der Hilfssatz wird im weiteren seine außerordentliche Effektivität nachweisen.

Satz 1. (Unitätssatz)

Es gibt höchstens eine Funktion X, die die Gleichung (4) erfüllt.

Bemerkung: Die Existenz einer solchen Funktion sei für uns durch unser Anliegen nachgewiesen. Der innermathematische Nachweis erfordert weitere umfangreiche Überlegungen.

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe zwei verschiedene Funktionen X und $\bar{X}$, die (4) erfüllen, das heißt, sie unterscheiden sich um wenigstens einen Punkt.

Es sei nun:

$$F(t) := X(t) - \bar{X}(t).$$

Für F gilt nun:

$$\begin{aligned} F(0) &= X(0) - \bar{X}(0) = 1 - 1 = 0 \\ \dot{F}(0) &= \dot{X}(0) - \dot{\bar{X}}(0) = 0 - 0 = 0 \\ \ddot{F}(t) &= \ddot{X}(t) - \ddot{\bar{X}}(t) \\ &= \bar{X}(t) - X(t) = - F(t) \end{aligned}$$

Somit sind die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllt und durch seine Anwendung folgt:

$$F(t) \equiv 0 \qquad X(t) = \bar{X}(t) \quad \forall t,$$

was im Widerspruch zur Annahme

$$\exists\, t \text{ mit } X(t) \neq \bar{X}(t)$$

steht.

Im weiteren sei eine weitere Funktion definiert, deren Eigenschaft wir ebenfalls untersuchen werden.

$$Y(t) := \dddot{X}(t) = -\dot{X}(t).$$

Dem Leser sei es selbst überlassen, die der Gleichung (4) entsprechende Gleichung für Y aufzustellen. (A1)

– Fortsetzung folgt –

K.-J. Heilemann
Mathematikstudent
5. Studienjahr
FSU Jena

Preisaufgaben

P 1 ① Man zeige, daß die Gleichung $x^2 + y^2 = 4^n$ für natürliche Zahlen n keine Lösungen in positiven ganzen Zahlen x,y besitzt.

P 2 ① Man zeige, daß für keine positiven ganzen Zahlen n und k mit $k > 1$ die Zahl

$$3^{n^k} + 1$$

durch 5 teilbar ist.

P 3 ② Man bestimme den Wert $\tan \frac{\alpha}{2}$, wenn bekannt ist, daß $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ und $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ gilt.

P 4 ① Es ist zu zeigen, daß für positive ganze Zahlen n stets die Ungleichung

$$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} < 2 \qquad \text{gilt!}$$

P 5 ② Man beweise, daß sich die Zahl $\sqrt[3]{2}$ nicht in der Form $p + q\sqrt{r}$ mit rationalen Zahlen p,q,r und $r > 0$ darstellen läßt.

P 6 ② Пусть a, b – катеты прямоугольного треугольника, c – гипотенуза, h – высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу. Доказать, что треугольник со сторонами h, $c + h$, $a + b$ является прямоугольным.

Einsendeschluß: 15. 4. 1983

FDJ-Studentenklubs an unserer Universität

An der Sektion Mathematik und darüberhinaus an unserer Universität gibt es natürlich außer unserem Jugendobjekt "Studienvorbereitung - Studienwerbung", das die WURZEL herausgibt, zahlreiche andere Jugendobjekte. Wir möchten in diesem und im nächsten Heft die zwei FDJ-Studentenklubs "jazz im paradies" und "Schmiede" vorstellen, an denen auch Studenten unserer Sektion beteiligt sind.

Hier zunächst ein Bericht über "jip".

JAZZ im PARADIES

Seit zwei Jahren kann man an den verschiedensten Stellen in Jena regelmäßig Plakate mit dem Aufdruck "jazz im paradies" sehen. Meistens findet sich auf diesen Plakaten auch ein Teufelchen mit Trompete, Saxophon oder Klavier.
Was haben Paradies, Jazz und Teufel miteinander zu tun? Einen ersten Lichtschimmer in die etwas mysteriöse Angelegenheit bringt vielleicht die Tatsache, daß ein Teil der oberen Jenaer Saaleaue von alters her "Paradies" genannt wird. Genau in diesem wohl ehemals wirklich paradiesisch schönen Stück Natur befindet sich der Jugendklub des VEB Jenapharm, in dem einmal monatlich ein Studentenklub der Sektion Mathematik mit Jazzveranstaltungen zu Gast ist. Und eben dieser FDJ-Studentenklub nennt sich "jazz im paradies". Die trotzdem noch offene Frage, was denn nun das jazzende Teufelchen im Paradies zu suchen hat, wollen wir Euch sozusagen als Preisaufgabe überlassen.

Für diejenigen von Euch, die beim Stichwort Jazz nicht gleich weiterblättern, haben wir im folgenden noch einige Informationen zum Studentenklub "jazz im paradies" zusammengestellt:

MITARBEITER

Studenten und Assistenten der Sektion Mathematik und anderer Sektionen der Friedrich-Schiller-Universität Jena

AKTIVITÄTEN

Pro Monat etwa ein Konzert mit zeitgenössischem Jazz der DDR und des Auslandes.
Pro Monat etwa ein Vortrag (mit anschließender Diskussion) über Tendenzen und Persönlichkeiten der internationalen Jazzszene, über historische Zusammenhänge und soziale Hintergründe.

HERVORRAGENDE KONZERTE MIT DDR-JAZZERN

Solokonzerte mit Günter Sommer, Uli Gumpert, Cony Bauer;
Ernst-Ludwig-Petrowsky-Trio;
Jazz & Puppenspieler mit Peter Waschinsky.

AUSLÄNDISCHE GASTMUSIKER

Andrea Centazzo (Italien), Leo Smith (USA), Peter Kowald (BRD), Radu Malfatti (Österreich), Maggie Nicols (GB), Tristan Honsinger (USA), Fred van Hove (Belgien), Rudolf Dasek (CSSR).

EINIGE VORTRAGSTHEMEN

Miles Davis, Dollar Brand, Keith Jarrett, Frank Zappa als Jazzer, John Lee Hooker, Ganelin-Trio aus Vilnius, Demonstration von Jazz-Dance, Jazzdiskotheken.

Vielleicht werden wir bald den einen oder anderen von Euch bei einer Veranstaltung von "jazz im paradies" begrüßen können?

Heiner Schwulow
Forschungsstudent Sektion Mathematik
Stellvertretender Klubchef von „jip"

Berechnung von Funktionen
– 2. Fortsetzung –

B. Die trigonometrischen Funktionen $f(x)=\sin x$ und $g(x)=\cos x$.

Die Variable x sei im Bogenmaß angegeben. Als Entwicklungsstelle betrachten wir wieder $c=0$.

Es gilt:

$$\begin{array}{ll} f^{(0)}(x) = \sin x & f^{(0)}(0) = 0 \\ f^{(1)}(x) = \cos x & f^{(1)}(0) = 1 \\ f^{(2)}(x) = -\sin x & f^{(2)}(0) = 0 \\ f^{(3)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Damit wird beispielsweise

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + R_7^f(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + R_7^g(x).$$

In analoger Weise wie bei der Exponentialfunktion überzeugt man sich, daß bei festem x und wachsendem n das Restglied $R_n(x)$ klein wird.

Es ist $\sin(-x) = -\sin x$, folgerichtig tauchen in der TAYLOR-Formel für sin x nur ungerade x-Potenzen auf (daher auch der Ausdruck "ungerade Funktion").

<u>Programm C:</u>

1. Vorgabe von x
2. Ist $x < 0$?
   Wenn ja, gehe zu 3!
   Wenn nein, gehe zu 4!
3. Addiere 2π zu x, gehe zu 2!
4. Ist $x \leq 2\pi$?
   Wenn ja, gehe zu 6!
   Wenn nein, gehe zu 5!

5. Subtrahiere 2π von x, gehe zu 4!
6. Soll sin x berechnet werden?
   Wenn ja, gehe zu 7!
   Wenn nein, gehe zu 8!
7. Setze S=x, n=1, P=x, gehe zu 9!
8. Setze S=1, n=0, P=1.
9. Multipliziere $-\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}$ zu P
10. Erhöhe n um 2
11. Addiere P zu S
12. Ist $|P| < \varepsilon$?
    Wenn ja, gehe zu 13!
    Wenn nein, gehe zu 9!
13. S ist der Funktionswert. Ende.

Das vorliegende Programm berechnet wahlweise sin x oder cos x. Zuerst wird x in den Winkelbereich $0 \leq x \leq 2\pi$ reduziert. Das ist möglich, da $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ und $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ wegen der Periodizität gilt. Diese Reduktion senkt einesteils den Rechenaufwand - die Summanden nehmen schneller ab - und verhindert andererseits den Effekt, der bereits bei e^{-20} auftrat.

Das vorliegende Programm läßt sich noch wesentlich effektiver gestalten, indem man die Eigenschaften der beiden Funktionen noch weiter ausnutzt. Dies sei als Übung dem Leser überlassen, hier nur eine andere "Anwendung":

Bekanntlich ist $\sin k\pi = 0$. Das legt den Gedanken nahe, daß die Nullstellen von $P_n(x)$ in der Nähe von $k\pi$ liegen, sich also eventuell zur Berechnung von π eignen. Aus Bequemlichkeit betrachtet man besser das Polynom

$$Q_n(x) = \frac{n!}{x} P_n(x).$$

Die folgende Tabelle enthält einige derartige Polynome und den Wert der kleinsten positiven Nullstelle:

n	$Q_n(x)$	x_1
3	$6 - x^2$	2.449490
5	$120 - 20x^2 + x^4$	-
7	$5040 - 840x^2 + 42x^4 - x^6$	3.078642
9	$362880 - 60480x^2 + 3024x^4 - 72x^6 + x^8$	3.148690

Für n=15 erhält man als Nullstelle den Wert 3.141591881, der um $7.7 \cdot 10^{-7}$ kleiner ist als der exakte Wert.

C. Intermezzo

Wir suchten ein Verfahren zur Berechnung elementarer Funktionen. Gefunden haben wir mehr: eine außerordentlich vielseitige und nützliche analytische Methode. Es fällt schwer, sich von diesem Gebiet zu entfernen, ohne wenigstens die größten der herumliegenden Edelsteine aufzusammeln. Um den Exkurs nicht allzusehr auszudehnen, wird dabei auf exakte Definitionen und Beweise verzichtet und lediglich formal gerechnet; genaue Begründungen findet jeder interessierte Leser in den Lehrbüchern der Analysis unter dem Stichwort "Potenzreihen".

Sei x eine beliebige, aber feste reelle Zahl, so ist z. B.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^w}{n!} + R_n(x)$$

und es gilt $R_n(x) \longrightarrow 0$ für unbegrenzt wachsende Werte von n, d. h. die vor $R_n(x)$ stehende Summe nähert mit wachsendem n den Wert e^x immer besser an. Da x beliebig ist, gewinnt man hieraus die Darstellung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

und nennt den rechts stehenden Ausdruck "die Potenzreihe der Funktion e^x". Es handelt sich hierbei um eine Summe mit unendlich vielen Summanden.

Funktionen, die eine Darstellung als Potenzreihe gestatten, heißen analytische Funktionen. Wenn die Funktion und ihre Darstellung obendrein für alle Werte von x existieren und dasselbe bedeuten, so spricht man von "ganzen analytischen Funktionen". Zu ihnen gehören die Funktionen e^x, sin x und cos x.

Für die weiteren Betrachtungen ist es notwendig, neue Objekte einzuführen: komplexe Zahlen.

Der Buchstabe i bezeichne ein Objekt mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ und heißt "imaginäre Einheit". Ein Gebilde der Form $z = a+bi$, a,b reell, nennt man "komplexe Zahl". Mit komplexen Zahlen kann man rechnen:

$z=3+2i, \quad u=-4+3i$

$z+u=3+2i-4+3i=-1+5i$

$z-u=(3+2i)-(-4+3i)=3+2i+4-3i=7-i$

$z\cdot u=(3+2i)(-4+3i)=-12+9i-8i+6i^2=-12+i-6=-18+i$

$$\frac{z}{u} = \frac{3+2i}{-4+3i} = \frac{(3+2i)(-4-3i)}{(-4+3i)(-4-3i)} = \frac{-12-9i-8i-6i^2}{(-4)^2 - (3i)^2} = \frac{-12-17i+6}{16-9i^2}$$

$$= \frac{-6-17i}{16+9} = -\frac{6}{25} - \frac{17}{25}\,i.$$

Es gelten die üblichen Rechengesetze: $z+u = u+z$, $z\cdot u = u\cdot z$, $z(u+v)=zu+zv$ usw. Alle diese Eigenschaften machen es möglich, mit Hilfe der Potenzreihendarstellung die betrachteten elementaren Funktionen von der Menge der reellen Zahlen in die der komplexen Zahlen fortzusetzen. Man definiert also z. B. für eine beliebige komplexe Zahl z

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots .$$

Die reellen Zahlen werden hierbei als spezielle Komplexe aufgefaßt, also z. B. $1 = 1 + 0 \cdot i$. Hieraus folgt, daß die obige Definition eine vernünftige Erweiterung der Exponentialfunktion ist, da sie im Spezialfall eines reellen Wertes z mit der herkömmlichen Funktion übereinstimmt.

Sei nun $z = u\cdot i$ mit einer beliebigen komplexen Zahl u, i bezeichne wiederum die imaginäre Einheit, so gilt

$$e^{ui} = 1 + ui + \frac{(ui)^2}{2} + \frac{(ui)^3}{6} + \frac{(ui)^4}{24} + \frac{(ui)^5}{120} + \frac{(ui)^6}{720} + \dots$$

$$= 1 + ui - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3 i}{6} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^5 i}{120} - \frac{u^6}{720} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} - \frac{u^6}{720} + \dots\right) + i\left(u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} - \dots\right)$$

$$= \cos u + i \sin u,$$

also kurz:

$$e^{ui} = \cos u + i \sin u.$$

Wie es sich herausstellt, existiert ein enger Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen. Dies wird noch deutlicher, wenn man noch die folgende Formel hinzufügt:

$$e^{-ui} = \cos(-u) + i \sin(-u) = \cos u - i \sin u.$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Formeln folgt

$$\cos u = \frac{1}{2}\,(e^{ui} + e^{-ui})$$

$$\sin u = \frac{1}{2}\,(e^{ui} - e^{-ui}).$$

Auf einmal sind erstaunliche Sachen möglich: Die goniometrische Gleichung

$$\sin u = 2$$

ist lösbar! In der Tat, sei $e^{ui} = w$, so muß gelten

$$2 = \frac{1}{2}\,(w - \frac{1}{w}),$$

also $4w = w^2-1$ und damit

$$w^2 - 4w - 1 = 0,$$

also

$$w_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Eine mögliche Lösung wäre damit

$$u_1 i = \ln\,(2+\sqrt{5}),$$

also $u_1 = \frac{1}{i} \cdot \ln(2+\sqrt{5}) = -i\cdot\ln(2+\sqrt{5})$ wegen $-i = \frac{1}{i}$. Zu diesem Wert können wegen der Periodizität der Sinusfunktion noch beliebige Vielfache von 2π addiert werden.

Sei x jetzt wieder eine reelle Zahl. Die eingeführte Gleichung

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

geht auf Leonhard EULER (1707 - 1783) zurück und wird mit seinem Namen bezeichnet.
Setzt man hier $x = \pi$, so folgt

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i \sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1$$

und umgestellt

$$\boxed{1 + e^{i\pi} = 0}$$

Es gibt unzählige Lobeshymnen begeisterter Mathematiker auf diese wunderschöne Gleichung. Sie ist tiefliegend und von lakonischer Kürze, entspricht also in idealer Weise den ästhetischen Vorstellungen der Mathematik. Sie enthält sehr viel und nichts Überflüssiges: Alle fünf fundamentalen mathematischen Konstanten, drei Rechenoperationen (Addition, Multiplikation und Potenz) und das Gleichheitszeichen.

Für denjenigen, der glaubt, sich jetzt über nichts mehr wundern zu brauchen, noch ein kleiner Nachschlag:

Sei $x = \frac{\pi}{2}$, so ist

$$e^{ix} = e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i$$

und damit

$$i^i = (e^{ix})^i = e^{i^2x} = e^{-x} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.2$$

Der schwer zu deutende Ausdruck i^i ist somit reell.

2. Joseph Louis LAGRANGE (1736 - 1813)

Die Funktion $f(x)$ sei für alle Werte x mit $a \leq x \leq b$ definiert. Zu ihrer Annäherung wird ein Polynom

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

gesucht, das die folgende Eigenschaft besitzt:

In $n+1$ paarweise verschiedenen Punkten x_i, $a \leq x_i \leq b$, gelte

$$P_n(x_i) = f(x_i)!$$

Während beim TAYLOR-Polynom gefordert war, daß die ersten n Ableitungen von Funktion und Polynom in einem Punkte übereinstimmen, soll jetzt nur der Funktionswert selbst, d. h. der Wert der nullten Ableitung, festgelegt werden, dafür aber in $n+1$ verschiedenen Stellen. Das so definierte Polynom P_n heißt Interpolationspolynom der Funktion $f(x)$ in den Punkten x_i, $i=0,1,2,\ldots,n$. Zunächst soll nachgewiesen werden, daß es überhaupt existiert.

S a t z : Unter den getroffenen Voraussetzungen existiert ein eindeutig bestimmtes Interpolationspolynom $P_n(x)$.

Beweis. Wir betrachten für $j=0,1,2,\ldots,n$ die Funktionen

$$l_j(x) = \frac{(x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_o)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$$

Da die Punkte x_i paarweise verschieden sind, wird das Produkt im Nenner nicht gleich Null, die Funktion ist also für alle Werte von x definiert und stellt offensichtlich ein Polynom vom Grade n dar.

Sei $i \neq j$, so ist $l_j(x_i)=0$, da eines der Produkte im Zähler Null ist. Andererseits gilt $l_j(x_j)=1$, da Zähler und Nenner dann gleich sind. Man setzt nun

$$P_n(x) = f(x_o)\cdot l_o(x) + f(x_1)\cdot l_1(x)+\ldots+f(x_n)\cdot l_n(x)$$

und hat damit das gesuchte Polynom gefunden. In der Tat, da alle Polynome l_j vom Grade n sind, so hat ihre Summe keinen höheren Grad. Die Interpolationsforderung wird auch erfüllt, denn es ist

$$\begin{aligned} P_n(x_i) &= f(x_o)\cdot l_o(x_i)+f(x_1)l_1(x_i)+\ldots+f(x_i)l_i(x_i)+\ldots+f(x_n)l_n(x_i) \\ &= f(x_o)\cdot 0+f(x_1)\cdot 0+\ldots+f(x_i)\cdot 1+\ldots+f(x_n)\cdot 0 \\ &= f(x_i). \end{aligned}$$

Es verbleibt noch zu zeigen, daß dieses Polynom $P_n(x)$ das einzig mögliche ist. Angenommen, es gibt ein zweites Polynom $Q_n(x)$, dessen Grad die Zahl n nicht übersteigt, und für das ebenfalls die Forderung

$$Q_n(x_i) = f(x_i), \quad i=0,1,2,\ldots,n$$

erfüllt wird. Der Grad des Differenzpolynoms

$$D_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$$

ist nicht höher als n. Es ist

$$D_n(x_i) = P_n(x_i)-Q_n(x_i) \quad f(x_i)-f(x_i) = 0$$

für n+1 Werte $i=0,1,2,\ldots,n$.

Damit hat aber das Polynom $D_n(x)$ n+1 verschiedene Nullstellen! Das ist aber nur möglich, wenn $D_n(x)$ identisch gleich Null ist, da ein Polynom ansonsten höchstens so viele Nullstellen besitzt, wie sein Grad angibt. Demzufolge ist

$$P_n(x) = Q_n(x)+D_n(x) = Q_n(x) + 0 = Q_n(x)$$

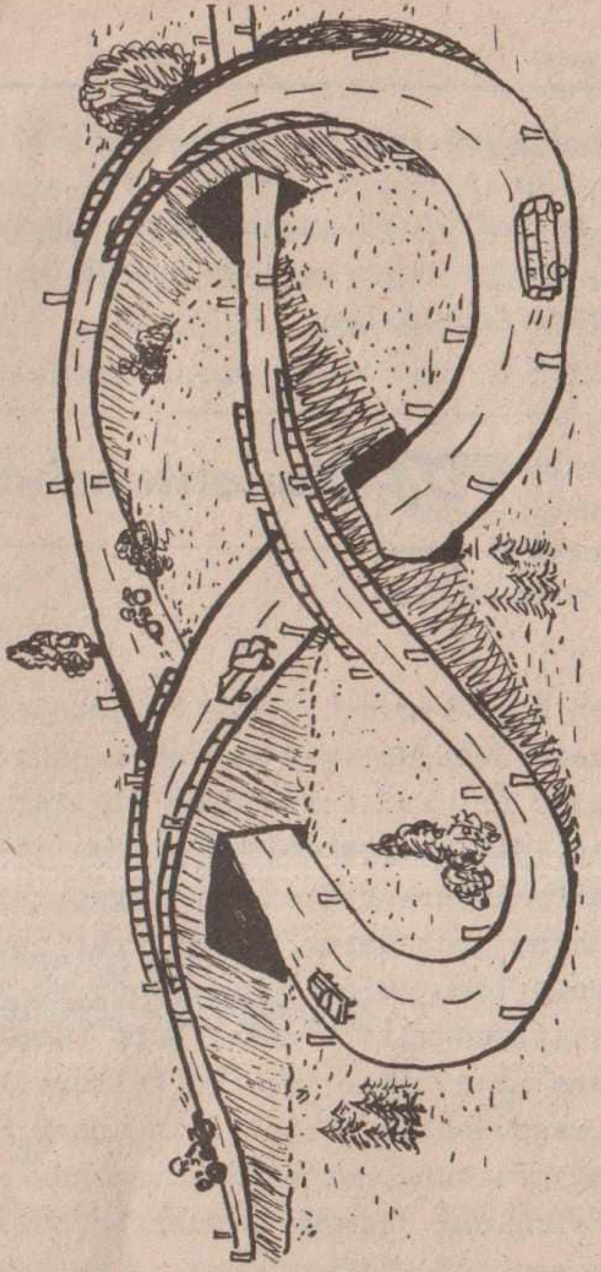
für alle Werte von x und das "zweite" Polynom $Q_n(x)$ fällt somit mit dem "ersten" Polynom $P_n(x)$ zusammen. Damit ist auch die Eindeutigkeit von $P_n(x)$ gezeigt.

Fortsetzung folgt!

Dr. Rosenheinrich
Bereich Numerik/Optimierung
Sektion Mathematik
FSU Jena

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner
Anschrift: **WURZEL,** 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 13. 12. 1982
Titelbild: Wolfgang Schäfer



WURZEL-VERKEHRSDESIGN · TEIL 1

2
83

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

17. Jahrgang
Index 33873
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

FDJ-Studentenclubs an unserer Universität

Wie bereits im Heft 1/83 angekündigt, möchten wir an dieser Stelle einen kurzen Beitrag über den FDJ-Studentenclub "Schmiede" veröffentlichen.

FDJ-Studentenclub „Schmiede"

In der ersten Novemberwoche 1982 beging der FDJ-Studentenclub "Schmiede" sein zehnjähriges Bestehen. Aus diesem Anlaß wurde auf vielfältige Art und Weise über die ehrenamtliche Tätigkeit von Studenten, die hauptsächlich an den Sektionen Mathematik und Wirtschaftswissenschaften studieren, berichtet. Ging es vor 10 Jahren noch darum, einen Treffpunkt für Studenten im neuentstandenen Wohngebiet Lobeda-West zu schaffen, um dessen Existenzberechtigung die Gründer hart kämpfen mußten, so ist der Club heute nicht mehr aus dem kulturellen Leben unserer Universität wegzudenken. Dabei gilt unser Hauptaugenmerk in der Programmgestaltung, einen Beitrag zur allseitigen Persönlichkeitsentwicklung unserer Studenten zu leisten. Dazu zählen wir Foren und Diskussionen zu aktuell- und wirtschaftspolitischen Fragestellungen, Selbstbetätigung auf künstlerischen und anderen Gebieten, Tanz und Geselligkeit, Vorträge zu kulturpolitischen und universitätsgeschichtlichen Themen und vieles mehr. Für die Clubmitglieder selbst bedeutet dies natürlich hohe Anforderungen, neben guten Studienleistungen als Mitorganisator dieser clubeigenen Programme zu arbeiten und darüberhinaus auf die verschiedenste Art die einzelnen

Veranstaltungen vom Einlaßdienst über Getränkeausschank bis hin zum Ordnungsdienst abzusichern. Die zahlreichen Begegnungen mit ehemaligen Clubmitgliedern während unserer Geburtstagsfeier haben jedoch gezeigt, daß sehr viel Spaß und Freude an dieser Art FDJ-Arbeit auch dazu beigetragen hat, daß viele Absolventen heute im Berufsleben ihren Mann stehen.

Ralf Schmidt-Röh
Forschungsstudent
Sektion Mathematik
stellv. Klubleiter der „Schmiede"

Die harmonische Schwingung und ihre mathematische Beschreibung – Fortsetzung

(III) In diesem Abschnitt untersuchen wir nun Eigenschaften von X und Y.

Satz 1. (1) X ist eine gerade Funktion, d. h. es gilt

$$X(-t) = X(t) \quad \forall t$$

(2) Y ist eine ungerade Funktion, d. h. es gilt

$$Y(-t) = -Y(t) \quad \forall t$$

Beweis. (1) $G(t) := X(t) - X(-t)$

$$\dot{G}(t) = \dot{X}(t) + \dot{X}(-t)$$

$$\ddot{G}(t) = \ddot{X}(t) - \ddot{X}(-t)$$

$$= X(-t) - X(t) = -G(t)$$

und $\dot{G}(0) = 0 + 0 = 0$

$$G(0) = 1 - 1 = 0$$

Mit Hilfe des Hilfssatzes 1 folgt:

$G(t) \equiv 0$ und somit

$X(t) = X(-t) \quad \forall t$

(2) $G(t) := Y(t) + Y(-t)$

Unter Verwendung des Resultats von (A1) erfolgt der Beweis analog zu dem der ersten Behauptung. (A2)

Satz 2. Es gilt:

1) $X(t_1+t_2) = X(t_1)X(t_2) - Y(t_1)Y(t_2)$

2) $Y(t_1+t_2) = Y(t_1)X(t_2) + X(t_1)Y(t_2)$

3) $X^2(t) + Y^2(t) = 1$

Beweis. 1)+ 2) Wird geführt, indem man zeigt (das heißt hier: nachrechnet), daß folgende Funktionen die Bedingungen des Hilfssatzes 1 erfüllen:

$$G(t_1) := X(t_1+t_2) - X(t_1)X(t_2) + Y(t_1)Y(t_2)$$

$$H(t_1) := Y(t_1+t_2) - Y(t_1)X(t_2) - X(t_1)Y(t_2) \qquad t_2 \in \mathbb{R} \text{ fest}$$

3) $1 = X(0) = X(t+(-t))$

Mit Teil 1 des Satzes folgt:

$1 = X(t)X(-t) - Y(t)Y(-t)$

mit Satz 1 gilt weiter:

$1 = X^2(t) + Y^2(t)$.

Hilfssatz 2. Es sei f eine reellwertige Funktion,

$D(f) = I = (\lambda, \infty) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

f sei in diesem Halbstrahl differenzierbar.

Dann gilt:

Existiert für unbeschränkt wachsendes x ein Grenzwert a für $f'(x)$, dann besitzt die Funktion $\frac{f(x)}{x}$ eben diesen Grenzwert a für unbeschränkt wachsendes x.

Bemerkung. Für das Verständnis des weiteren Gedankengangs ist das Verständnis des Beweises nicht nötig. Er wird nur der Vollständigkeit halber gegeben.

Beweis. $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = a$, d. h. $\forall \varepsilon > 0$ (lies: für alle echt positives ε)

$\exists\ \lambda_0(\varepsilon) > 0$ (lies: existiert ein von ε abhängiges echt positives λ_0)

so daß gilt:

$$|f'(x) - a| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in [\lambda_0, \infty).$$

Es sei $\emptyset$ wie folgt definiert:

$$\emptyset(x) := f(x) - ax \qquad x \in (\lambda, \infty).$$

Offensichtlich ist $\emptyset$ wieder in (λ, ∞) definiert und differenzierbar.

Daraus folgt:

$$|\emptyset'(x)| = |f'(x) - a| < \varepsilon \qquad \text{für } x \in [\lambda_0, \infty);$$

weiterhin gilt laut Mittelwertsatz:

$$|\emptyset(y) - \emptyset(\lambda_0)| = |\emptyset'(\xi)|\ (y - \lambda_0) \qquad y \in [\lambda_0, \infty)$$

an mindestens einer Stelle ξ $\quad \xi \in (\lambda_0, y)$.

Somit gilt:

$$|\emptyset(y) - \emptyset(\lambda_0)| < \varepsilon\ (y - \lambda_0).$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned} \emptyset(y) - \emptyset(\lambda_0) &= |f(y) - ay - f(\lambda_0) + a\lambda_0| \\ &\geq |f(y) - ay| - |f(\lambda_0) - a\lambda_0|, \end{aligned}$$

was mit dem vorigen zu folgender Aussage führt:

$$\varepsilon\ (y - \lambda_0) > |f(y) - ay| - |f(\lambda_0) - a\lambda_0|$$

oder

$$|f(y) - ay| < \varepsilon\ (y - \lambda_0) + |f(\lambda_0) - a\lambda_0|.$$

Durch Wahl eines genügend großen (insbesondere echt positiven) y kann folgende Rechnung ausgeführt werden:

$$|f(y) - ay| < \varepsilon\ (y - \lambda_0) + |f(\lambda_0) - a\lambda_0| \qquad |: y$$

$$\left|\frac{f(y) - ay}{y}\right| < \varepsilon\ \frac{y - \lambda_0}{y} + \frac{|f(\lambda_0) - a\lambda_0|}{y}$$

In der linken Seite der Ungleichung kann gekürzt werden, die rechte wird durch ein beliebiges nur von y abhängiges ε' majorisiert.

Wir erhalten folgenden Ausdruck:

$$\left|\frac{f(y)}{y} - a\right| < \varepsilon' \qquad \text{für ein genügend großes } y$$
$$y = y(\varepsilon')$$

Somit folgt der Satz.

Das Resultat dieses Hilfssatzes wird zum Beweis des folgenden Satzes benötigt.

Satz 3. Die Funktion X besitzt wenigstens eine Nullstelle.

Beweis. Annahme: $X(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Wir wissen: $X(0) = 1$, somit folgt per Zwischenwertsatz

$x(t) > 0 \quad \forall t.$

Somit gilt: Y ist streng monoton wachsend, denn

$$Y(t) = \frac{d^4}{dt^4} X(t) = \frac{d^2}{dt^2} \frac{d^2}{dt^2} X(t)$$

$$Y(t) = \frac{d^2}{dt}\left[- X(t)\right] = - \frac{d^2}{dt^2} X = X(t).$$

Andererseits wissen wir:

$$\begin{rcases} |Y(t)| \leq 1 \\ |X(t)| \leq 1 \end{rcases} \quad \text{(Satz 2(3))}$$

Damit folgt:

$$\lim_{t \to \infty} Y(t) = a \quad |a| \leq 1$$

und mit Hilfssatz 2:

$$\lim_{t \to \infty} - \frac{X(t)}{t} = a.$$

Offensichtlich ist damit aber $a = 0$ (X ist beschränkt, t wächst über alle Grenzen). Dies steht aber im Widerspruch zur Aussage, daß Y streng monoton wächst.

Daraus folgt der Satz.

Folgerung: In der Menge der Nullstellen gibt es eine kleinste positive, sie sei mit $X_o = \frac{\pi}{2}$ bezeichnet.

Bemerkung: Die wohlbekannte Größe folgt mit Hilfe anderer Überlegungen, für die wir hier aber schon Grundstein gelegt haben.

Satz 4. Es gelten folgende Beziehungen zwischen den Funktionen X und Y:

(1) $Y(t + \frac{\pi}{2}) = X(t)$

(2) $X(t + \frac{\pi}{2}) = -Y(t)$

(3) $Y(t + \pi) = -Y(t)$

(4) $X(t + \pi) = -X(t)$

(5) $X(t + 2\pi) = X(t), \; Y(t+2\pi) = Y(t).$

Beweis. Der Nachweis von (1) bis (4) sei dem Leser zur Übung des Umgangs mit Satz 2 selbst überlassen. (A3)

Zum Beweis von (5).

Durch zweimaliges Anwenden von (3) und (4) erhält man:

$$X(t+2\pi) = X(t) \qquad Y(t+2\pi) = Y(t).$$

Nun ist nachzuweisen, daß 2π <u>die</u> Periode von X und Y ist.
Es sei h die Periode von X. (Die Aussage für Y ergibt sich nach (1) automatisch mit.)

Dabei muß gelten:

2π ist ein ganzzahliges Vielfaches von h.

Es folgt sofort: $h \notin (\pi, 2\pi)$.

Zum anderen gilt: $h \neq \pi$ (nach (4)).

Es bleibt zu zeigen: $h \notin (0, \pi)$.

Da X sowohl positive als auch negative Werte besitzt (2), muß in jeder Periode mindestens ein Vorzeichenwechsel sein. Andererseits ist aber $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ein vorzeichenwechselfreies Intervall, das länger als jede mögliche Periode aus $(0, \pi)$ ist (Satz 3/Folgerung und Satz 1(1)).
Also kann die Periode nicht aus diesem Intervall sein.

IV. In diesem Abschnitt wollen wir die Graphen der beschriebenen Funktionen skizzieren, die erhaltenen Funktionen benennen (sie sind, wie der aufmerksame Leser sicher längst bemerkt hat, bekannt) und den Zusammenhang zu den bekannten Einführungen dieser Funktionen sowie zu unserer Ausgangsproblemstellung interpretierend zurückkommen.

Wir skizzieren wie folgt die Funktion X:

1) $X(0) = 1$, $X(\frac{\pi}{2}) = 0$

2) $X(t) > 0 \qquad \forall t \in [0, \frac{\pi}{2})$

Somit wissen wir $\ddot{X}(t) < 0 \quad \forall t \in [0, \frac{\pi}{2})$, d. h. X ist in diesem Intervall konkav. Damit ist die Form des Graphen in diesem Intervall festgelegt.

3) Wir setzen die Funktion gerade auf der negativen Halbachse fort (Satz 1 (1))

4) Mit Kenntnis von Satz 4 (4) setzen wir jetzt die Funktion in dem Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ fort. Somit haben wir eine volle Periode von X skizziert.

5) Der um $\frac{\pi}{2}$ "nach rechts" verschobene Graph ist nun der von Y.

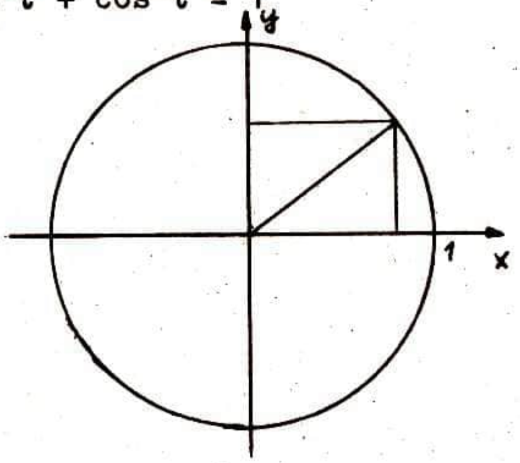
Die Überprüfung der formulierten Eigenschaften für Y sei dem Leser selbst überlassen. Die hier konstruierten Funktionen sind wohlbekannt und liegen tabelliert vor.

Sie heißen sin t (Y)

bzw. cos t (X).

Die aus dem Schulunterricht bekannte Einführung dieser Funktion fiel bei uns nebenbei mit ab. Wir erhielten (Satz 2 (3)):

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$



Wir betrachten den sogenannten Einheitskreis, wählen einen Punkt auf der Peripherie und fällen die Lote auf die Achsen. Die dabei entstandene Strecke auf der Abszisse ist nun als Cosinus und die auf der Ordinaten als Sinus einer neueingeführten Größe "Winkel" deutbar. Laut Satz von Pythagoras gilt nun für das entstandene Dreieck das gewünschte.

Unter Winkel verstehen wir jetzt die Länge des durch Abszisse und gewählten Peripheriepunkt begrenzten Bogenstück des Einheitskreises.

Legen wir diesen Punkt X_o jetzt auf den Schnittpunkt Peripherie - Ordinate, so erhalten wir folgenden Sachverhalt:

$\cos(X_o) = 0$ und dies ist auch die erste Stelle, wo dies eintritt. Somit gilt $X_o = \frac{\pi}{2}$, und damit ist der Umfang des Kreises $4 \cdot X_o = 2\pi$ eben die Periode der Funktionen.

Die zahlenmäßige Bestimmung von π ist ein Problem anderen Charakters. Eine näherungsweise Bestimmung ist mittels des BUFFON'schen Nadelexperiments (vergleiche WURZEL 5/82) möglich.

Zuletzt kommen wir zur physikalischen Deutung des erhaltenen Ergebnisses.

Wir erhalten: $x(t) = \cos t$ löst die Gleichung (4). Das bedeutet, die Cosinusfunktion beschreibt bei passend gewählter Normierung das Ort-Zeit-Verhalten eines ungedämpften Schwingers.
Betrachten wir nun diese Normierungen (Punkt (3)).

1. Die Größe h ist offensichtlich die Anfangselongation. Aus Gründen der Einfachheit ist unser Anfangsverhalten so gewählt gewesen, daß sie mit der Amplitude übereinstimmt, denn aus Satz 2 (3) folgt, daß die Elongation nicht größer als die Anfangselongation wird und aus Satz 4 (5), daß dieselbe unendlich oft erreicht wird.
2. Es wurde festgelegt $\frac{k}{m} = 1$.
   Zur Deutung untersuchen wir die Maßeinheit dieser Größe. Wie der Leser leicht nachprüfen kann, gilt
   $$\left[\frac{k}{m}\right] = s^{-2}. \qquad (A4)$$
   Also ist die Größe $\frac{k}{m}$ als Quadrat einer Frequenz ω deutbar. Zwingend ergibt sich somit die folgende, eine beliebige ungedämpfte Schwingung beschreibende Funktion über der Zeit.
   $$x(t) = h(\cos \omega t + \varphi_0) \qquad (5)$$
   Dabei ist φ_0 die hier nicht betrachtete Verschiebung des Nullpunktes der Zeitachse, die uns von der oben gemachten Vereinfachung unabhängig macht.

Dem Leser sei es nun als letzte Aufgabe selbst überlassen nachzuprüfen, daß die Funktion (5) im Fall $\varphi_0 = 0$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. (A5)

K.-J. Heilemann
Mathematikstudent
5. Studienjahr
FSU Jena

Preisaufgaben

P 7 ① Man bestimme alle komplexen Zahlen z, welche die Gleichungen

$$\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1 \quad \text{und} \quad \left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{8}$$

erfüllen.

P 8 ② Die Grundfläche einer Pyramide sei ein gleichschenkliges Trapez mit den parallelen Seiten a und b, wobei $a > b$, und einem Winkel γ zwischen den ungleichen Diagonalenabschnitten. Weiter verlaufe das Lot der Spitze auf die Grundfläche durch den Schnittpunkt der Diagonalen und verhalten sich die Winkel zwischen der Grundfläche und den Seitenflächen an den parallelen Seiten wie 2 : 1. Wie groß ist das Volumen dieser Pyramide?

P 9 ② Man zeige, daß für alle reellen Zahlen $a_1, \dots, a_n$, $x_1, \dots, x_n$ und für alle positiven reellen Zahlen ε die Ungleichung

$$|a_1x_1 + \dots + a_nx_n| \leq \frac{1}{\varepsilon}(x_1^2 + \dots + x_n^2) + \frac{\varepsilon}{4}(a_1^2 + \dots + a_n^2)$$

gilt.

P 10 ① Man bestimme das Maximum und das Minimum der Funktion

$$y(x) = 2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x + 6 \sin x \cos x!$$

P 11 ② Für welche reellen Zahlen x gilt

$$1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\lg \lg n - 1) \log_x 10,$$

wenn n eine fest vorgegebene positive reelle Zahl mit $n \neq 1$ ist.

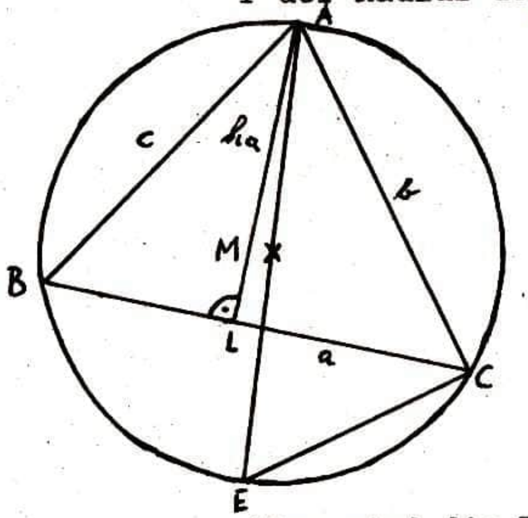
P 12 ② Доказать, что медиана треугольники меньше полусуммы сторон, ее заключающих и больше разности между этой полусуммой и половиной третьей стороны.

Einsendeschluß: 15. 5. 1983

Jahresinhaltsverzeichnis 1982

Aufgabe 0 2

Die drei Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ seien a,b,c. Es ist zu zeigen, daß $F_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}$ ist, wobei r der Radius des umschriebenen Umkreises ist.



Sei L der Fußpunkt der Höhe h_a über der Seite a. Zieht man den Durchmesser des Umkreises durch A und M, erhält man auf dem Umkreis den Punkt E.

Es ist nun

$\sphericalangle ABL = \sphericalangle AEC$ (Peripheriewinkel)

und

$\sphericalangle ALB = \sphericalangle ACE = 90^\circ$.

Also sind die Dreiecke $\triangle$ ALB und $\triangle$ ACE ähnlich und es gilt $c : h_a = 2r : b$ oder

$$h_a = \frac{b \cdot c}{2r}$$

Weiterhin ist der Flächeninhalt $F_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, also insgesamt $F_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}$.

Aufgabe 0 9

Es seien der Flächeninhalt F und der Winkel α bekannt. Die Grundseite bezeichnen wir mit s, die beiden anderen Seiten mit r.

Im gleichschenkligen Dreieck gilt

$$F = \frac{r^2}{2} \sin\alpha$$

also $$r = \sqrt{\frac{2F}{\sin\alpha}}.$$

Weiterhin $$F = \frac{s^2}{4} \operatorname{cotang} \frac{\alpha}{2}$$

also $$s = \sqrt{4F \cdot \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}.$$

Außerdem gilt $\beta = \gamma = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Aufgabe O 14

Gilt $x+y = (x-y)^2$ für natürliche Zahlen x,y, so muß eine ganze Zahl k existieren,

so daß $\quad x + y = k^2 \quad$ und
$$x - y = k.$$
Daraus ergibt sich für x
$$x = \frac{1}{2}\,(k^2+k)$$
und für y
$$y = \frac{1}{2}\,(k^2-k).$$
Andererseits ist für jede ganze Zahl k die Gleichung $\frac{1}{2}(k^2+k) + \frac{1}{2}(k^2-k) = \left(\frac{1}{2}(k^2+k) - \frac{1}{2}(k^2-k)\right)^2$ erfüllt, denn es ist
$$\frac{1}{2}(k^2+k) + \frac{1}{2}(k^2-k) = k^2 \quad \text{und}$$
$$\frac{1}{2}(k^2+k) - \frac{1}{2}(k^2-k) = k.$$
Das bedeutet, die Lösungen der Gleichung sind die geordneten Paare

$\left[\frac{k(k+1)}{2}\,,\ \frac{k(k-1)}{2}\right]$, wobei k die Menge der ganzen Zahlen durchläuft.

Aufgabe O 15

Für nichtnegative reelle Zahlen x,y,z gilt
$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{x\cdot y\cdot z}$.
Das Gleichheitszeichen gilt nur für $x = y = z$.
Also gilt
$$a^2+5 = a^2+4+1 > 3\sqrt[3]{a^2\cdot 4\cdot 1} = 3\sqrt[3]{4a^2} \quad \text{und}$$
$$a +3 = a +2+1 > 3\sqrt[3]{a \cdot 2\cdot 1} = 3\sqrt[3]{2a}$$
für nichtnegative reelle Zahlen a.
Da beide Ungleichungen Relationen zwischen nichtnegativen reellen Zahlen darstellen, können sie miteinander unter Beibehaltung der Relation multipliziert werden, also
$$(a^2+5)(a+3) > 3\sqrt[3]{4a^2}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{2a} \quad \text{d. h.}$$
$$a^3 + 3a^2 + 5a + 15 > 9\sqrt[3]{8a^3} = 18a.$$
Daraus folgt sofort
$$a^3 + 3a^2 + 15 > 13a.$$

Aufgabe O 16

Der Beweis erfolgt mit Mitteln der Vektorrechnung. Man wählt einen Punkt O als Koordinatenursprung. Die Ortsvektoren der Punkte A,B,C,D seien $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$. Dann gilt

$(\bar{a}-\bar{b})(\bar{c}-\bar{d}) = 0$, da nach Vorauss. $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

$(\bar{a}-\bar{c})(\bar{b}-\bar{d}) = 0$, da nach Vorauss. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Nach dem Distributionsgesetz für Skalarprodukte gilt

$$\bar{a}\cdot\bar{c} - \bar{b}\cdot\bar{c} - \bar{a}\cdot\bar{d} + \bar{b}\cdot\bar{d} = 0 \qquad (1)$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} - \bar{b}\cdot\bar{c} - \bar{a}\cdot\bar{d} + \bar{c}\cdot\bar{d} = 0 \qquad (2)$$

Subtrahiert man jetzt (1) von (2), so erhält man

$$\bar{a}\cdot\bar{b} - \bar{a}\cdot\bar{c} + \bar{c}\cdot\bar{d} - \bar{b}\cdot\bar{d} = 0 \quad \text{oder}$$

$$(\bar{a}-\bar{d})(\bar{b}-\bar{c}) = 0.$$

Da man annehmen kann, daß alle vier Punkte A,B,C,D paarweise voneinander verschieden sind, gilt also $\bar{a}-\bar{d} \neq 0$ und $\bar{b}-\bar{c} \neq 0$ und die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ stehen senkrecht aufeinander.

Aufgabe O 17

Es ist $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine geometrische Folge, d. h. es gilt $a_1 = a_1$, $a_2 = a_1\cdot q$, $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Für S_1 und S_2 gilt deshalb

$$S_1 = a_1 + a_2\cdot q + \ldots + a_1\cdot q^{n-1} = a_1(1+q+\ldots+q^{n-1}) \qquad (1)$$

$$S_2 = \frac{1}{a_1}\left(1 + \frac{1}{a} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}}\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{a_1}\left(\frac{1 + a + \ldots + q^{n-1}}{q^{n-1}}\right) \qquad (2)$$

Aus $P = a_1\cdot a_2\cdot \ldots \cdot a_n$ folgt

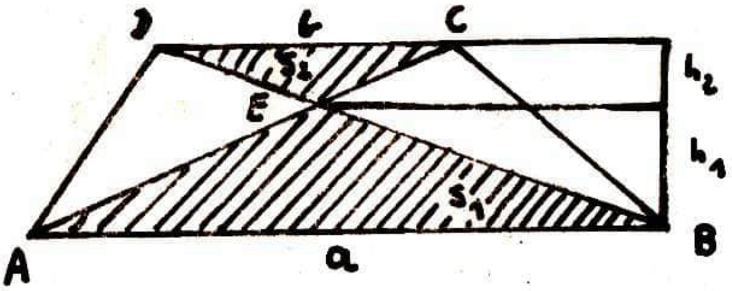
$$P = a_1^n \cdot q^{\frac{n}{2}(n-1)}$$

$$P = \frac{a_1^{\frac{n}{2}} \cdot (1+a+a^2+\ldots+a^{n-1})^{\frac{n}{2}} \cdot a_1^{\frac{n}{2}} \cdot q^{\frac{n}{2}(n-1)}}{(1+q+\ldots+a^{n-1})^{\frac{n}{2}}}$$

$$P = S_1^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{S_2^{\frac{n}{2}}} \quad \text{nach (1) und (2)}$$

$$P = \left(S_1 \cdot \frac{1}{S_2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Aufgabe O 18



Es gilt $S_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1$

$S_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_2$.

Gesucht wird der Flächeninhalt des Trapezes S_T für gegebene S_1, S_2.

Der Flächeninhalt des Trapezes ist

$$\frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_2)$$

$$= \frac{1}{2}\, ah_1 + \frac{1}{2}\, bb_2 + \frac{1}{2}\, ah_2 + \frac{1}{2}\, bh_1 .$$

Da die Dreiecke ABE und ECD ähnlich sind, gilt $\frac{a}{h_1} = \frac{b}{h_2} = k$. Damit wird $ah_2 = bh_1$ und

$$\frac{1}{2}\, ah_2 + \frac{1}{2}\, bh_1 = ah_2 .$$

Weiter ist

$$ah_2 = k \cdot h_1 \cdot h_2 = \sqrt{k^2 h_1^2 h_2^2} = \sqrt{kh_1\ Kh_2\ h_1\ h_2}$$

$$= \sqrt{a\ b\ h_1\ h_2}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{2}\, ah_1\ \frac{1}{2}\, bh_2}$$

Damit gilt $S_T = \frac{1}{2}\, ah_1 + \frac{1}{2}\, bh_2 + ah_2$

$$= S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1\ S_2}$$

$$= (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2 .$$

Aufgabe O 19

Wir multiplizieren die Gleichung mit 2 und bringen die rechte Seite nach links, also

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = 0$$

$$= a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2$$

$$= (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 = 0.$$

Dies gilt aber nur, wenn $a-b = a-c = b-c = 0$ ist.

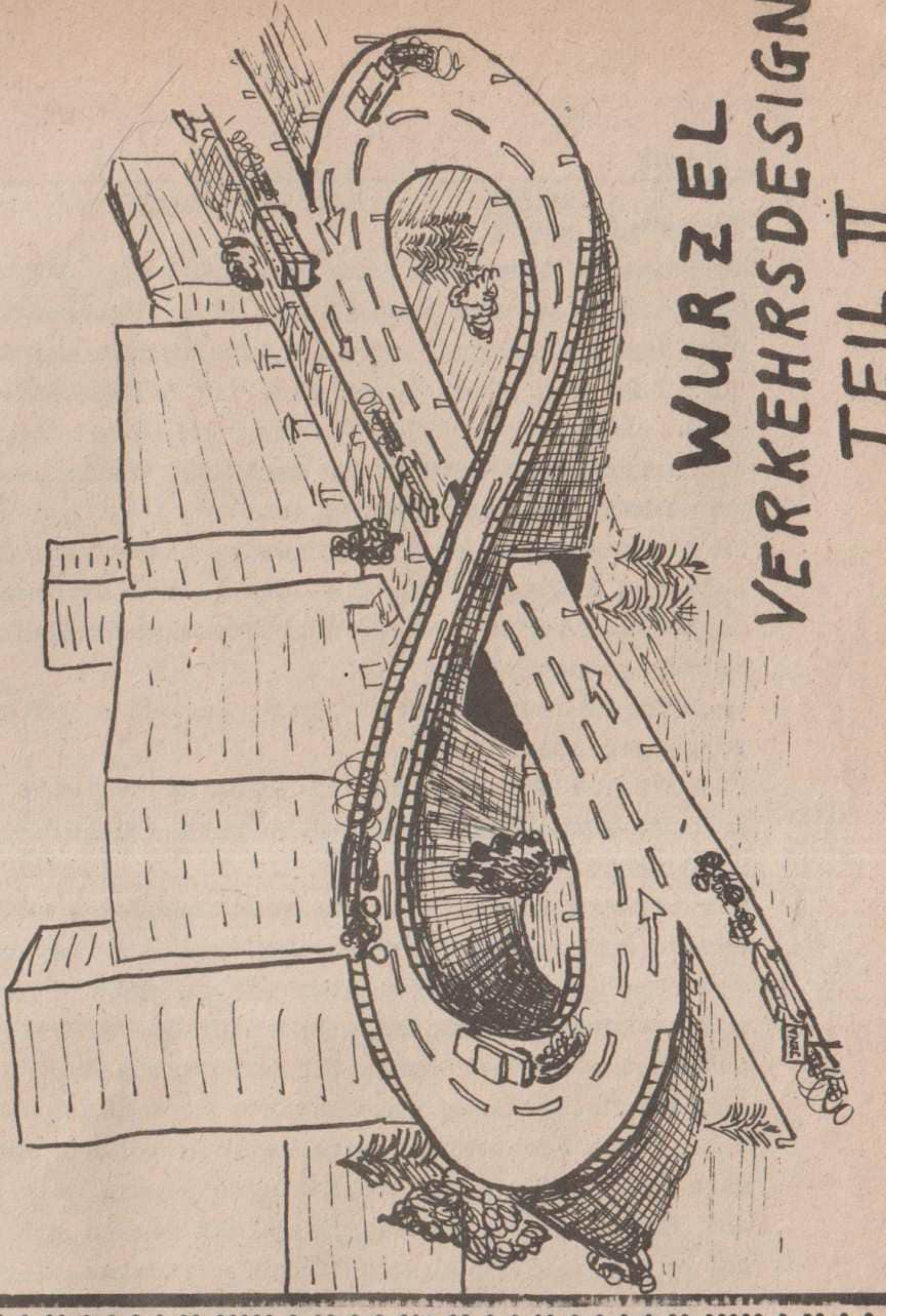
Hieraus folgt $a = b = c$.

Es gibt keine Tugend, die der Wahrhaftigkeit gleichkäme, Höheres als Wahrhaftigkeit kenne ich nicht; dagegen halte ich nichts für schrecklicher als die Lüge.

Wo die Menschen bereit sind, sowohl zu hören als auch auszusprechen, was zunächst zwar unangenehm, letzlich aber doch heilsam ist, dort stellt sich das Glück ein.

Indische Spruchweisheiten

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner
Anschrift: **WURZEL,** 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 7. 1. 1983
Titelbild: Wolfgang Schäfer



3
83

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
17. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Was sind Terme?

1. Es sei folgende Aufgabe gestellt:
Man vermindere das Produkt aus einer beliebigen natürlichen Zahl und ihrem Nachfolger um das Produkt aus derselben natürlichen Zahl und ihrem Vorgänger. Ist diese Differenz durch 2 teilbar?
(Bemerkung: Die natürliche Zahl darf nicht die Null sein, da sonst kein Vorgänger existiert.)
Um diese Aufgabe zu lösen, ist es notwendig, die im Text enthaltenen Aussagen " in die Sprache der Mathematik zu übersetzen". Das könnte in folgender Weise geschehen:

Beliebige natürliche Zahl:	n
Nachfolger dieser Zahl:	$n+1$
Vorgänger dieser Zahl:	$n-1$
Produkt aus dieser Zahl und ihrem Nachfolger:	$n\cdot(n+1)$
Produkt aus dieser Zahl und ihrem Vorgänger:	$n\cdot(n-1)$
Differenz:	$n\cdot(n+1)-n\cdot(n-1)$

Wir richten unsere Aufmerksamkeit zunächst auf die rechts stehenden Summen, Differenzen und Produkte. In ihnen treten n als Variable für die natürlichen Zahlen und die natürliche Zahl 1 auf. Außerdem sind die Zeichen für die Addition, Subtraktion und Multiplikation sowie Klammern vorhanden. Mit Hilfe dieser Summen, Differenzen und Produkte wird der im Aufgabentext geschilderte Sachverhalt mathematisch erfaßt. Ein derartiges Vorgehen ist bei vielen Problemen notwendig, die mit den Mitteln und Methoden der Mathematik gelöst werden sollen. Dabei können natürlich z. B. auch Quotienten auftreten. Wegen der großen Bedeutung dieser Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten usw. hat man ihnen einen besonderen Namen gegeben, und zwar den Namen Term. Um Irrtümer auszuschließen und Verwechslungen zu vermeiden, muß in der Mathematik wie bei jedem anderen Begriff genau festgelegt werden, was man unter einem Term zu verstehen hat und was nicht. Das geschieht durch eine Definition. Da die exakte Definition des Begriffes Term komplizierter ist als z.B. des Begriffes Trapez, ist sie in diesem Rahmen nicht möglich. Statt dessen soll nachfolgend erläutert werden, was man unter einem Term zu verstehen hat. Im Mathematikunterricht geschieht das in Klasse 6 vor der Einführung in die Gleichungslehre.

2. Terme bestehen aus mathematischen Zeichen, wobei in den Klassen 1 bis 8 die folgenden Zeichen auftreten können:

- Zeichen für (natürliche, gebrochene oder rationale) Zahlen, z. B. 5, 31, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{3}$, (-11).
  (Man beachte den Unterschied zwischen Zahl und Zeichen für diese Zahl. Diese Unterscheidung ist streng genommen notwendig, weil z. B. für die Darstellung der natürlichen Zahl fünf das arabische Zahlzeichen 5 oder das römische Zahlzeichen V verwendet werden können.)
- Zeichen (d. h. Bezeichnungen) für Variable, z. B. m, n, a, b, x, y, z.
- Die Zeichen für die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.
- Klammern
  (Die Klammern gehören in der Mathematik zu den sogenannten technischen Zeichen.)

Als Beispiele haben wir eingangs schon die Terme $n+1$, $n-1$, $n\cdot(n+1)$, $n\cdot(n-1)$ und $n\cdot(n+1)-n\cdot(n-1)$ kennengelernt. Ein weiteres Beispiel ist der Term $9\cdot(x+y)-18x:2$. Er ist aus den Zeichen x und y als Zeichen für Variable, den Zeichen 9, 18 und 2 als Zeichen für natürliche Zahlen und den Zeichen für die Grundrechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) gebildet.

<u>Aufgabe 1:</u> Schreibe alle Terme auf, die aus den Zeichen a, b, 10 und den Zeichen für die Subtraktion und Division gebildet werden können, wobei in jedem Term jedes dieser fünf Zeichen genau einmal vorkommen soll. Vorausgesetzt wird $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

Wenn man den Inhalb des Begriffes Term richtig verstehen will, muß man sich fest einprägen, daß in einem Term kein Relationszeichen, d. h. keines der Zeichen " = ", " < ", " ≦ ", " > " und " ≧ " vorhanden sein darf.

Wir haben festgestellt, daß Terme aus gewissen mathematischen Zeichen aufgebaut sind. Es ist jedoch zu beachten, daß nicht jede beliebige Aneinanderreihung von Zeichen ein Term ist.

Will man prüfen und entscheiden, ob ein Term vorliegt, so bewährt sich die folgende Regel:

Eine Aneinanderreihung mathematischer Zeichen ist ein Term, wenn

a) diese Aneinanderreihung sinnvoll ist und

b) kein Relationszeichen auftritt.

Sinnvoll soll in diesem Zusammenhang bedeuten, daß der Wert des Terms eindeutig berechnet werden kann. Sind in dem Term Variable vorhanden, so müssen sie bei dieser Berechnung durch Zahlen des jeweiligen Grundbereiches ersetzt werden. Ersetzt man z. B. in dem Term $9\cdot(x+y)-18x:2$ die Variable x durch die natürliche Zahl 3 und die Variable y durch 1, so ergibt sich bei dieser Berechnung: $9\cdot(x+y)-18x:2 = 9\cdot(3+1)-54:2 = 36-27 = 9$.
Baut man dagegen aus denselben Zeichen z. B. die "Zeichenreihe" $9\cdot-(:)+18:x\cdot y:2$ auf, so ist diese Aneinanderreihung nicht sinnvoll, d. h. es liegt kein Term vor. Der Wert eines Terms muß eindeutig definiert sein. Betrachtet man den Term $\frac{7}{x-2}$ und legt als Grundbereich für die Variable x den Bereich der natürlichen Zahlen fest, so muß man x=2 ausschließen, weil sonst der nicht definierte Quotient $\frac{7}{0}$ entsteht.

3. Nach der exakten Definition werden auch einzelne Zahlen (genauer Zeichen für Zahlen) wie etwa 6, 131, $\frac{4}{5}$, π und einzelne Variable wie etwa n, a, b, x als Terme aufgefaßt. Es sind gewissermaßen die "Elementarterme". Man kann sich vorstellen, daß man aus diesen Bausteinen mit Hilfe der Rechenoperationen und durch Verwendung von Klammern immer kompliziertere Terme aufbauen kann. Wenn es auch stimmt, daß z. B. 5 ein Term ist, so sollte man trotzdem auch weiterhin von der Zahl 5 sprechen und nicht vom Term 5, weil das nicht üblich ist.

<u>Aufgabe 2:</u> Welche der folgenden "Zeichenreihen" sind keine Terme? $31+x\cdot y$, $7a+3b-14\cdot(a+b)$, $144:12$, $9x=27$, $a\cdot b=b\cdot a$, $\frac{33}{4}$, $81:9:3$, $n<n+1$, $n>n-1$, $\frac{1}{2}x$.

In der Mathematik ist es häufig notwendig, Terme umzuformen. Kehren wir zu der eingangs gestellten Aufgabe zurück, so ergibt

diese Umformung: $n\cdot(n+1)-n\cdot(n-1) = n\cdot n+n-n\cdot n+n = 2n$.
Durch diese Umformung ist es möglich, die gestellte Frage sofort zu beantworten: Da $2n$ durch 2 teilbar ist, ist auch die Differenz $n\cdot(n+1)-n\cdot(n-1)$ durch 2 teilbar. Andere Beispiele für derartige Umformungen sind:

$4x+12y = 4\cdot(x+3y)$ (Ausklammern)
$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$ (Binomische Formel, Lehrstoff von Klasse 9).

Die Umformung eines Terms ist nur dann richtig, wenn der Wert des umgeformten Terms mit dem Wert des ursprünglichen Terms übereinstimmt. Sind Variable vorhanden, so muß das für alle Zahlen der Fall sein, die man für diese Variablen (aus dem gegebenen Grundbereich) einsetzt. Man sagt dann, die beiden Terme sind äquivalent bzw. der ursprüngliche Term wurde äquivalent umgeformt. Betrachten wir beispielsweise die beiden Terme $\frac{(x-5)\cdot(x-5)}{(x-5)}$ und $(x-5)$, wobei als Grundbereich für die Variable x wieder der Bereich der natürlichen Zahlen gewählt werden soll, so erhält man durch formale Rechnung (Kürzen mit dem Faktor $(x-5)$): $\frac{(x-5)\cdot(x-5)}{(x-5)} = (x-5)$.
Dennoch sind diese Terme nicht äquivalent, weil für $x=5$ $\frac{(x-5)\cdot(x-5)}{(x-5)}$ nicht erklärt ist (Nenner wird 0!), während $(x-5)$ den Wert 0 annimmt.

Aufgabe 3: Sind die beiden Terme $3a+6b-9c$ und $3\cdot(a+2b-3c)$ äquivalent?
(a, b und c seinen Variable für natürliche Zahlen.)

Mit Hilfe des Begriffes Term kann man leicht die Begriffe Gleichung und Ungleichung in folgender Weise definieren:
Verbindet man 2 Terme durch ein Gleichheitszeichen, so entsteht eine Gleichung.
Verbindet man 2 Terme durch eines der Zeichen $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, so entsteht eine Ungleichung. So erhält man z. B. aus den beiden Termen $3x$ und $x+6$ die Gleichung $3x = x+6$ bzw. die Ungleichungen $3x < x+6$, $3x \leq x+6$, $3x > x+6$ und $3x \geq x+6$. Das bedeutet, daß die linken und die rechten Seiten von Gleichungen bzw. Ungleichungen in jedem Falle Terme sind. Dieser Zusammenhang unterstreicht erneut die große Bedeutung des Begriffes Term.

Es zeigt sich, daß der bisher besprochene Termbegriff erweitert werden muß, wenn man sich mehr mit der Mathematik beschäftigt. Das ist schon in den Klassen 9 und 10 notwendig, wo die Schüler außer den 4 Grundrechenoperationen noch weitere Rechenoperationen kennenlernen. Solche Rechenoperationen sind das Radizieren und das Logarithmieren, die dann ebenfalls beim Aufbau von Termen benutzt werden.

Prof. Dr. G. Schlosser
Sektion Mathematik FSU
Bereich Mathematikmethodik

Preisaufgaben

P 13
2

Im Dreieck Δ ABC sind die zwei Winkelhalbierenden AM und BN gegeben, deren Schnittpunkt K sei. Bekannt ist, daß

$$AK : KM = \sqrt{3} : 1 \text{ und}$$
$$BK : KN = 1 : (\sqrt{3}-1) \text{ gilt.}$$

Man berechne die Winkel der Dreiecke!

P 14
1

Man zeige:

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=3.$$

P 15
2

Es sei $f(x)$ eine Funktion mit

$f(x+1) = (x+1)\,f(x)$ für $x \neq -1$
und $f(x) \neq 0$ für alle x.

Außerdem sei $g(x)$ eine für alle x definierte Funktion.

Man beweise:

Die Funktion $y(x) =_{Df} f(x)\,g(x)$ erfüllt genau dann die Gleichung

$$y(x+1) = (x+1)\,y(x),$$

wenn $g(x)$ eine mit 1 periodische Funktion ist (d. h. es gilt $g(x) = g(x+1)$).

P 16 (1)

Seien $p_1, p_2, \ldots, p_k$ paarweise verschiedene Primzahlen. Wieviel Teiler hat die Zahl q mit $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, einschließlich 1 und q.

P 17 (2)

Auf einem Kreis mit dem Radius r bewegen sich zwei Punkte A und B in gleicher Richtung. A benötigt für eine Umkreisung t Sekunden weniger als B. Die Zeit zwischen zwei Aufeinandertreffen der Punkte sei T. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit dieser Punkte.

P 18 (2)

В прямоугольном треугольнике ABC катет AC в 3 рази больше катета AB. Точками К и Т катет AC разделен на три равные части. Доказать, что

$$\sphericalangle AKB + \sphericalangle ATB + \sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2}$$

Einsendeschluß: 15. 6. 1983

Berechnung von Funktionen

– 3. Fortsetzung –

Die Darstellung

$$P_n(x) = f(x_o) \cdot l_o(x) + f(x_1) \cdot l_1(x) + \ldots + f(x_n) \cdot l_n(x)$$

heißt "Interpolationsformel von LAGRANGE". Mit ihrer Hilfe kann das gesuchte Polynom unmittelbar angegeben werden. Betrachten wir dies an einem Beispiel:

Sei f(x) = sin x und als Interpolationsstellen wählen wir $x_o = 0^\circ$, $x_1 = 30^\circ$ und $x_2 = 90^\circ$, so wird (x in Grad!)

$$l_o(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_o - x_1)(x_o - x_2)} = \frac{(x-30)(x-90)}{(0-30)(0-90)} = \frac{(x-30)(x-90)}{2700}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_o)(x - x_2)}{(x_1 - x_o)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 90)}{(30- 0)(30- 90)} = \frac{x(x-90)}{-1800}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_o)(x - x_1)}{(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - 30)}{(90- 0)(90- 30)} = \frac{x(x-30)}{5400}$$

und man erhält

$$P_2(x) = f(x_o)\cdot l_o(x)+f(x_1)\cdot l_1(x)+f(x_2)\cdot l_2(x)$$

$$= 0\cdot l_o(x)+ \frac{1}{2}\cdot l_1(x)+1\cdot l_2(x)$$

$$= - \frac{x(x-90)}{3600} + \frac{x(x-30)}{5400} = \frac{2x(x-30)-3x(x-90)}{10800}$$

$$= \frac{2x^2-60x-3x^2+270x}{10800} = \frac{210x-x^2}{10800}$$

Die nachfolgende Tabelle bietet die Möglichkeit, einige Funktionswerte mit denen des Polynoms $P_2(x)$ zu vergleichen:

x (Grad)	sin x	$P_2(x)$	$P_2(x)$-sin x
0	0.000	0.000	0.000
10			
20			
30	0.500	0.500	0.000
40			
50			
60			
70			
80			
90	1.000	1.000	0.000

Lange vor LAGRANGE benutzte Isaac NEWTON (1643 - 1727) für praktische Rechnungen die Interpolation. Von ihm stammt ein bequemer Ansatz zur Berechnung von $P_n(x)$:

Man macht den Ansatz

$$P_n(x)=c_o+c_1(x-x_o)+c_2(x-x_o)(x-x_1)+c_3(x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$+\dots+c_n(x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})$$

zur Darstellung von $P_n(x)$. Aus der Interpolationsbedingung $P_n(x_i)=f(x_i)$ werden die Koeffizienten c_i ermittelt. Wegen

$$f(x_o) = P_n(x_o) = C_o + 0 + 0 + \dots + 0$$

ist $C_o = f(x_o)$. Weiter ergibt

$$f(x_1) = P_n(x_1) = f(x_o) + C_1(x_1 - x_o) + 0 + \dots + 0$$

die Darstellung

$$C_1 = \frac{f(x_1)-f(x_o)}{x_1-x_o} .$$

Im nächsten Schritt wird

$$f(x_2)=C_o+C_1(x_2-x_o)+C_2(x_2-x_o)(x_2-x_1)+0+0+\dots+0$$

und hieraus folgt

$$C_2 = \frac{f(x_2)-f(x_o)-\dfrac{f(x_1)-f(x_o)}{x_1-x_o}(x_2-x_o)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{(f(x_2)-f(x_1))+(f(x_1)-f(x_o))-\dfrac{f(x_1)-f(x_o)}{x_1-x_o}\left[(x_2-x_1)+(x_1-x_o)\right]}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{f(x_2)-f(x_1)-\dfrac{f(x_1)-f(x_o)}{x_1-x_o}(x_2-x_1)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\dfrac{f(x_1)-f(x_o)}{x_1-x_o}}{x_2-x_o}$$

Allgemein ergibt sich die folgende Rechenvorschrift:

Es sei $\Delta^o f_i = f(x_i)$, dann definiert man

$$\Delta^k f_i = \frac{\Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i}{x_{i+k}-x_i} .$$

Dieser Ausdruck heißt k-ter Differenzenquotient oder k-te Steigung an der Stelle x_i. Es ist speziell

$$\Delta^1 f_o = \frac{\Delta^o f_1 - \Delta^o f_o}{x_{o+1}-x_o} = \frac{f(x_1)-f(x_o)}{x_1-x_o}$$

und der obige Ausdruck für C_2 steht für $\Delta^2 f_o$. Durch Induktion zeigt man leicht, daß

$$c_i = \Delta^i f_o$$

gilt und erhält die NEWTONsche Form des Interpolationspolynoms:

$$P_n(x) = \Delta^o f_o + \Delta^1 f_o \cdot (x-x_o) + \Delta^2 f_o \cdot (x-x_o)(x-x_1) + \ldots$$
$$\ldots + \Delta^n f_o \cdot (x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Zur Berechnung der Differenzenquotienten nutzt man das folgende, hier am bereits betrachteten Beispiel f(x)=sin x dargestellte Schema:

x	Δ^o	Δ^1	Δ^2
0	0		
		$^1/60$	
30	$^1/2$		$-^1/10800$
		1/120	
90	1		

Gerechnet wird in der folgenden Weise: Als senkrechte zweireihige Tabelle schreibt man die Wertepaare x_i, $f(x_i) = \Delta^o f_i$ nebeneinander. Die nächste Spalte enthält die Werte $\Delta^1 f_i$. Sie ist eine halbe Zeile versetzt und enthält einen Wert weniger. Jeder Wert resultiert als Quotient zweier Differenzen: Die jeweils danebenstehenden x- und Δ^o-Werte werden subtrahiert (unterer Wert minus oberer) und durcheinander dividiert. Für den ersten Wert wird

$$\Delta^1 f_o = \frac{^1/2 - 0}{30 - 0} = {}^1/60 .$$

Jede weitere Spalte wird analog berechnet, aber die zur Division zu bildende Differenz der x-Werte wird aus den äußersten x-Werten gebildet, die in diese Differenz noch eingehen. Im Falle von $\Delta^2 f_o$ ist dies x_o (in $\Delta^1 f_o$ enthalten) und x_2 (aus $\Delta^1 f_1$).

In der neuen Darstellung erhält man

$$P_2(x) = 0 + \frac{1}{60}(x-0) - \frac{1}{10800}(x-0)(x-30)$$

$$= \frac{x}{60} - \frac{x^2-30x}{10800} = \frac{180x-x^2+30x}{10800} = \frac{210x-x^2}{10800}$$

und erkennt hieraus, daß beide Rechenwege dasselbe Resultat liefern. Bei einiger Übung ist die NEWTONsche Vorschrift wesentlich bequemer.

Aus dem Interpolationspolynom von NEWTON sollen noch zwei Schlußfolgerungen gezogen werden:

Wenn die zu interpolierende Funktion $f(x)$ ein Polynom vom Grade $m \leq n$ ist, so fallen auf Grund des Eindeutigkeitssatzes $f(x)$ und $P_n(x)$ zusammen. Diesen Umstand kann man ausnutzen, um Polynome zu tabellieren. Angenommen, es sollen die Werte des kubischen Polynoms

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$$

für $x=0,1,2,3,\ldots,20$ in einer Tabelle erfaßt werden, so macht man die folgende Tabelle:

x	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$2\Delta^2 f$	$3\Delta^3 f$	$4\Delta^4 f$	$5\Delta^5 f$
0	5	-5	2	6	0	0
1	0	-3	8	6	0	
2	-3	5	14	6		
3	2	19	20			
4	21	39				
5	60					

Wie man erkennt, sind die Werte $\Delta^3 f = 6/3 = 2$ konstant und demzufolge die höheren Differenzen alle gleich Null. Man hätte also nur die Funktionswerte $f(x)$ bis $x = 3$ ausrechnen zu brauchen und kann dann alle weiteren Werte durch einfache Addition ermitteln. Man berechnet $f(6)$ z. B. in der folgenden Weise:

$2\Delta^2 f$: $\quad 20 + 6 = 26$

$\Delta^1 f$: $\quad 39 + 26 = 65$

$\Delta^0 f$: $\quad 60 + 65 = 125 = f(6)$

Die nächsten drei Additionen ergeben $f(7)$:

$26+6=32, \quad 65+32=97, \quad 125+97=222=f(7)$ usw.

Die nächste Schlußfolgerung bezieht sich auf den Zusammenhang zwischen TAYLOR-Polynom und Interpolationspolynom. Betrachten wir nur den Fall $n=2$ und gleichabständige Stützstellen x_i, also $x_1=x_0+h$ und $x_2=x_1+h=x_0+2h$.

Es ist

$$\Delta^1 f_0 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{\left[f(x_0)+h\cdot f'(x_0)+\frac{h^2}{2} f''(x_0)+\frac{h^3}{6} f'''(\xi_1)\right]-f(x_0)}{h}$$

$$= f'(x_0) + \frac{h}{2} f''(x_0) + \frac{h^2}{6} f'''(\xi_1),$$

wobei für $f(x_1) = f(x_0+h)$ der entsprechende TAYLOR-Ausdruck gebildet wurde und ξ_1 eine Stelle zwischen x_0 und x_1 bezeichnet. Analog erhält man

$$f(x_2)=f(x_0+2h)=f(x_0)+2hf'(x_0)+2h^2f''(x_0)+\frac{4h^3}{3}f'''(\xi_2)$$

und damit

$$\Delta^1 f_1=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=h^{-1}\left\{\left[f(x_0)+2hf'(x_0)+2h^2f''(x_0)+\frac{4h^3}{3}f'''(\xi_2)\right]\right.$$

$$\left.-\left[f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+\frac{h^3}{6}f'''(\xi_1)\right]\right\}$$

$$=f'(x_0)+\frac{3}{2}hf''(x_0)+h^2\left[\frac{4}{3}f'''(\xi_2)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)\right].$$

Hieraus folgt

$$\Delta^2 f_0=\frac{\Delta^1 f_1-\Delta^1 f_0}{x_2-x_0}.$$

$$=\frac{1}{2h}\left\{\left[f'(x_0)+\frac{3}{2}hf''(x_0)+h^2\left(\frac{4}{3}f'''(\xi_2)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[f'(x_0)+\frac{h}{2}f''(x_0)+\frac{h^2}{6}f'''(\xi_1)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}f''(x_0)+\frac{h}{3}\left[4f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1)\right].$$

Für das Interpolationspolynom erhält man somit

$$P_2(x)=\Delta^0 f_0+\Delta^1 f_0\cdot(x-x_0)+\Delta^2 f_0(x-x_0)(x-x_1)$$

$$=f(x_0)+\left[f'(x_0)+\frac{h}{2}f''(x_0)+\frac{h^2}{6}f'''(\xi_1)\right](x-x_0)$$

$$+\left[\frac{1}{2}f''(x_0)+\frac{h}{3}(4f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1))\right](x-x_0)(x-x_1).$$

Wegen $x-x_1 = x-x_0+h$ erhält man nach Umsortierung

$$P_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2$$

$$+h\cdot(x-x_0)\left[\frac{f''(x_0)}{2}+\frac{h}{6}f'''(\xi_1)+\frac{f''(x_0)}{2}+\frac{h}{3}(x-x_1)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(4f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1))\right]$$

Rückt man nun die Punkte x_1 und x_2 unter Beibehaltung des Verhältnisses $x_1 = {}^1/2(x_0+x_2)$ immer näher an x_0 heran, so wird h und damit der letzte Summand der gewonnenen Darstellung von $P_2(x)$ betragsmäßig immer kleiner. Im Falle $h \longrightarrow 0$ verbleibt nur der erste Teil der Formel - und das ist ein TAYLOR-Ausdruck. Hieraus resultiert zusammenfassend: Das TAYLOR-Polynom ist ein Grenzfall des Interpolationspolynoms in dem Sinne, daß sich die Stützstellen x_i in einem Punkt x_0 "zusammenziehen".

Es ist angebracht, auf die Genauigkeit der Interpolation näher einzugehen, d. h. die Abweichung zwischen dem Polynom und der zu interpolierenden Funktion zu untersuchen. Es wird vorausgesetzt, daß f(x) n+1 Ableitungen im betrachteten Abschnitt besitzt.
Wie beim TAYLOR-Polynom wird mit

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

das n-te Restglied der Interpolation bezeichnet. Weiter definiert man

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

und setzt

$$g(x) = P_n(x) - f(x) + \lambda\cdot\omega(x),$$

wobei g(x) für das betrachtete x verschwinden soll:
$g(x) = 0,\ x \neq x_i$. Wegen $g(x_i) = P_n(x_i) - f(x_i) + \lambda\cdot 0 = 0$ besitzt g(x) damit n+2 Nullstellen. Nach dem Satz von ROLLE hat f'(x) demzufolge n+1 Nullstellen, f"(x) hat somit n Nullstellen usw. Letztendlich existiert eine Stelle ξ derart, daß $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ ist. Andererseits ist

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(\xi) &= P_n^{(n+1)}(\xi) - f^{(n+1)}(\xi) + \lambda\,\omega^{(n+1)}(x) \\ &= 0 - f^{(n+1)}(\xi) + \lambda\,(n+1)! \end{aligned}$$

und damit

$$\lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Aus g(x) = 0 folgt nun

$$0 = P_n(x) - f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x),$$

also

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x).$$

Man erhält eine ähnliche Form wie bei den TAYLOR-Polynomen. Sehen wir uns an, was die Interpolation nun zu leisten vermag.

Hierzu betrachten wir den Fall $f(x) = e^x$, $-1 \leq x \leq 1$, $x_i = \frac{2i}{n} - 1$, $n=10$. Es wird also ein Interpolationspolynom 10. Grades mit den Stützstellen $x_i = -1, -0.8, -0.6, \ldots, 0.8, 1$ konstruiert. Der Fehler beträgt dann betragsmäßig

$$|R_{10}(x)| = \frac{e^{\xi}}{11!} |\omega(x)| \leq \frac{e}{11!} |(x+1)(x+0.8)\ldots(x-0.8)(x-1)| =$$

$$= \frac{e}{11!} |(x^2-1)(x^2-0.64)(x^2-0.36)(x^2-0.16)(x^2-0.04)x|.$$

Wenn $x=x_i$ ist, so ist nach Interpolationsvoraussetzung $e^x=P_{10}(x)$, also $R_{10}(x)=0$. Damit interessiert nur der Fall, daß x keine Stützstelle ist. Aus der Darstellung von $\omega(x)$ erkennt man mühelos, daß $|\omega(x)| = |\omega(-x)|$ ist, wir können uns also auf den Fall $x > 0$ beschränken. Sei $x < 0.8$, so ist

$$\left|\frac{\omega(x)}{\omega(x+0.2)}\right| = \left|\frac{(x+1)(x+0.8)\ldots(x-0.8)(x-1)}{(x+1.2)(x+1)\ldots(x-0.6)(x-0.8)}\right| = \left|\frac{x-1}{x+1.2}\right| = \frac{1-x}{1.2+x}$$

und diese Funktion ist für $0 < x < 0.8$ streng monoton fallend, da der Zähler fällt, der Nenner aber wächst und beide positiv sind. Folglich wird

$$\left|\frac{\omega(x)}{(x+0.2)}\right| = \frac{1-x}{1.2+x} < \frac{1}{1.2},$$

also

$$\omega(x+0.2) > 1.2\ \omega(x).$$

Zusammenfassend resultiert, daß das eine absolute Maximum der Funktion $\omega(x)$ an einer Stelle x^* mit $0.8 < x^* < 1$ angenommen wird. (Das andere liegt an der Stelle $-x^*$ und liefert denselben Wert, ist also uninteressant.) Tatsächlich, wenn diese Maximalstelle von $\omega(x)$ z. B. in $0.4 < x^{**} < 0.6$ läge, so wäre nach der letzten Ungleichung

$$|\omega(x^{**} + 0.2)| > 1.2\ |\omega(x^{**})|,$$

also wäre in x^{**} kein absolutes Maximum vorhanden, was einen Widerspruch darstellt.

Nun läßt sich die Abschätzung von $R_{10}(x)$ fortsetzen:

$$|R_{10}(x)| \leq \frac{e}{11!} |(x^2-1)(x^2-0.64)(x^2-0.36)(x^2-0.16)(x^2-0.04)x|$$

$$< \frac{e}{11!}\ (0.8^2-1)(1-0.64)(1-0.36)(1-0.16)(1-0.04)\cdot 1|$$

$$= \frac{e}{11!} \cdot 0.0668860416 \approx 4.55\cdot 10^{-9}$$

Man erhält also, daß das Interpolationspolynom 10. Grades an keiner Stelle des Abschnittes von x=0 bis x=1 mehr als $4.6\cdot 10^{-9}$

vom exakten Wert der Exponentialfunktion abweicht. Damit ist die achte Stelle hinter dem Komma gewährleistet - eine selten benötigte Genauigkeit. Für das TAYLOR-Polynom 10. Grades erhielten wir, daß dort der maximale Fehler den Wert $6.8 \cdot 10^{-8}$ nicht übersteigt. Diese Schranke ist rund 15 mal größer als bei der Interpolation. Man kommt somit bei einer vorgegebenen Fehlerschranke mit einem Interpolationspolynom wesentlich niedrigeren Grades als bei Verwendung eines TAYLOR-Polynoms aus. Das bietet die Möglichkeit, das Programm kürzer und vor allem schneller zu machen, eine Problematik, auf die bereits bei der Berechnung des Wertes der Exponentialfunktion über die TAYLOR-Formel eingegangen wurde.

Betrachten wir einmal die Abschätzung von $R_n(x)$ genauer. In Unkenntnis der zu wählenden Zwischenstelle ξ muß man abschätzen:

$$\left|R_n(x)\right| \leq \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!} \cdot \max_{a \leq t \leq b} \left|f^{(n+1)}(t)\right|,$$

wobei x und x_i, $i=0,1,2,\ldots,n$ zwischen a und b liegen und das Symbol max erfordert, den größten Wert zu nehmen. Der Unterschied zur Restgliedabschätzung beim TAYLOR-Polynom ist, daß man bei der Interpolation einen zusätzlichen Freiheitsgrad in Form des Polynoms $\omega(x)$ besitzt, das man benutzen kann, um die Abschätzung durch Verkleinerung der rechten Seite zu verschärfen. Exakter formuliert ergibt sich die folgende Fragestellung:

Wie sind die Punkte x_i, $i=0,1,2,\ldots,n$, $a \leq x_i \leq b$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ zu wählen, damit der größte Wert von $|\omega(x)|$ für $a \leq x \leq b$ möglichst klein wird?

Auf dieses Problem wird im nächsten Abschnitt ausführlich eingegangen. Hier sei nur bemerkt, daß eine derartige Verteilung der Stützstellen existiert und sogar eindeutig bestimmt ist. Da diese Verteilung für jede n+1 mal differenzierbare Funktion f(x) eine minimale Abschätzung des Restgliedes ergibt, heißt sie "optimal auf der Klasse der n+1 mal differenzierbaren Funktionen".

Dr. W. Rosenheinrich
Sektion Mathematik FSU
Bereich Numerik Optimierung

Fortsetzung folgt!

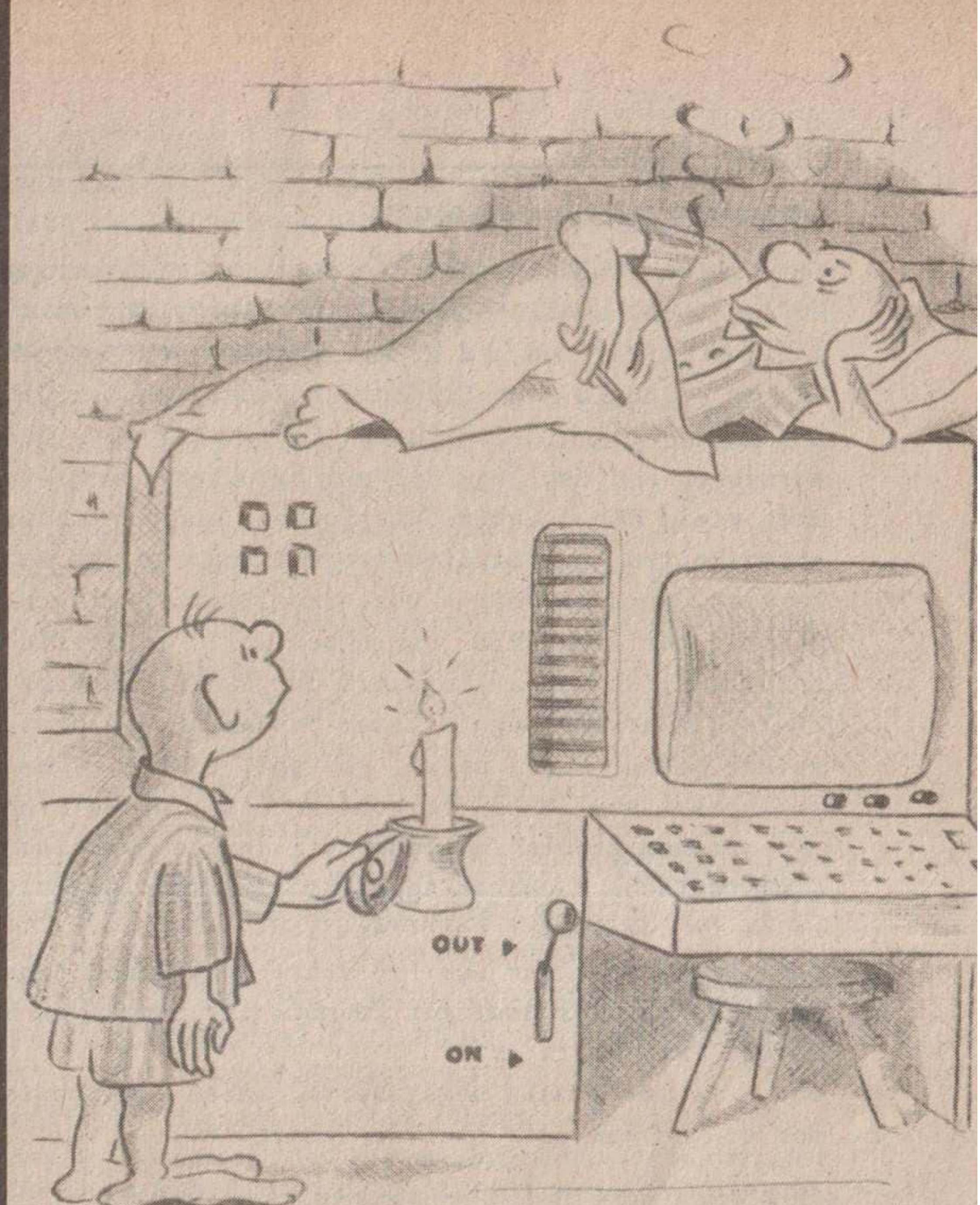
Ich glaube, man wird auf keiner Lehranstalt ein gebildeter Mensch. Aber in jeder guten Lehranstalt kann man Disziplin erwerben und die Fertigkeiten, die einem künftig zugute kommen, wenn man, bereits außerhalb ihrer Mauern, sich selbst zu bilden beginnt.

Michail Bulgakow

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner
Anschrift: **WURZEL,** 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 26. 1. 1983

Titelbild: Wolfgang Schäfer



4

83

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

17. Jahrgang

ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Gedanken zur Mikroelektronik

Vor einigen Wochen wurde die Bitte an mich herangetragen, aus meiner Sicht einige Gedanken zur Mikroelektronik für die WURZEL aufzubereiten. Ich bin dieser Anfrage sehr gern nachgekommen, da ich - damals noch Student in Jena - an der Gründung der WURZEL aktiv mitgearbeitet habe. Es ist mir eine besondere Freude zu sehen, daß das Jugendobjekt "Studienvorbereitung" nun schon über viele Jahre aktiv funktioniert und kontinuierlich einen guten Beitrag zur Studienvorbereitung für das Mathematikstudium leistet. Wenn man heute vor einem Blatt Papier sitzt und einen Beitrag für die WURZEL schreiben soll, schweifen die Gedanken unwillkürlich zur Anfangszeit der WURZEL zurück, wo ein zunächst kleines Häuflein begeisterter Studenten die ersten Exemplare selbst geschrieben, selbst getippt, selbst abgezogen, selbst geklammert und selbst verschickt hat. Ich weiß noch sehr genau, mit welchem großen Interesse wir damals jede Nachricht über elektronische Rechenanlagen aufgegriffen, diskutiert und teilweise in der WURZEL veröffentlicht haben.
Das liegt nun etwas über 15 Jahre zurück und dennoch muten uns im Angesicht der heutigen Technik die damaligen Ergebnisse als leicht antiquiert an.
Das, was uns damals begeisterte, waren elektronische Baugruppen der ersten bzw. der zweiten Generation.

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal die im allgemeinen übliche Klassifizierung der Bauelemente- und Gerätegenerationen:

1. Die erste Generation ist gekennzeichnet durch das Bauelement Elektronenröhre, eine diskrete dreidimensionale Verdrahtung und eine Chassisbauweise der Geräte. Die Packungsdichte beträgt $10^{-4}...10^{-2}$ Bauelemente pro cm^3.

2. Die zweite Generation wird bauelementeseitig durch Halbleiterbauelemente (Transistoren und Dioden) charakterisiert. Die Verdrahtung erfolgt zweidimensional. Die Geräte werden auf der Basis von Leiterkarten aufgebaut.
Die Packungsdichte beträgt $10^{-2}...10^{0}$ Bauelemente pro cm^3.

3. Bei der dritten Generation verschmelzen Bauelemente und Schal-

tungen zu integrierten Halbleiterbauelementen.
Während bei den ersten beiden Generationen Bauelemente und Schaltung voneinander trennbar sind, ist dies bei einer integrierten Halbleiterschaltung nicht mehr möglich.
Die Packungsdichte liegt bei $10 \ldots 10^6$ Bauelementen pro cm^3.

4. Die vierte Generation ist die Generation der hochintegrierten Schaltung. Es werden nicht nur wie bei der 3. Generation Bauelemente und Schaltung integriert, sondern auch ganze Geräte (z. B. Einchiprechner, Einchipradio, o. ä.).
   Die Packungsdichte beträgt $10^5 \ldots 10^8$ Bauelemente pro cm^3.

Neueste Forschungsergebnisse weisen darauf hin, daß noch weitere Generationen zu erwarten sind. Die dabei beschrittene Arbeitsrichtung wird i. a. als funktionsorientierte Mikroelektronik oder Funktionalelektronik bezeichnet und ist dadurch gekennzeichnet, daß durch Ausnutzung neuer physikalischer Möglichkeiten komplexe Schaltungsfunktionen realisiert werden.
Während die 1. und 2. Generation hinsichtlich der Miniaturisierungstechnik in die Miniaturelektronik einzuordnen sind, gehören die 3. und 4. Generation zur Mikroelektronik.
Die Mikroelektronik ist also charakterisiert durch die innige (nicht zerstörungslos trennbare) Verbindung von Bauelementen und Schaltung zu einer funktionellen Einheit.
Die Mikroelektronik hat in den letzten Jahren eine so rasche Entwicklung genommen, daß auch hier eine Reihe von Integrationsstufen definiert wurden. Im einzelnen möchte ich das hier nicht erläutern.
Gesagt sei jedoch nur soviel, daß es heute zum Stand der Technik gehört, $10^4 \ldots 10^5$ Bauelemente auf einem chip, d. h. auf einem dünnen Halbleiterplättchen von $10 \ldots 15\ cm^2$ Fläche, zu integrieren. Schaltkreise mit 10^6 Bauelementen befinden sich bereits in der Erprobung. Als kleiner Vergleich sei angemerkt, daß das etwa die Anzahl der Bauelemente in der Zentraleinheit des Elektronenrechners ESER 1040 ist.

Die Mikroelektronik greift heute direkt oder indirekt in alle Bereiche des gesellschaftlichen Lebens ein. Denken wir z. B. nur daran, welchen umfassenden Generationswechsel die Mikroelektronik in der Rechentechnik und damit in den gesamten Prozeß der

Automatisierung geistiger Routineprozesse gebracht hat. Die Palette der eingesetzten Rechentechnik reicht vom winzigen Taschenrechner bis hin zum Großcomputer. Durch die zur Verfügung stehenden Rechenanlagen mit gewaltigen Speichermöglichkeiten und extrem kurzen Operationszeiten gelangen wissenschaftliche Aufgaben zur Bearbeitung und Lösung, die noch vor gar nicht langer Zeit auf Grund ihrer quantitativen Aufwendungen als unlösbar angesehen wurden.
Es ist sicher nicht übertrieben zu sagen, daß - mindestens im Bereich der Naturwissenschaften - fruchtbringende Forschungsarbeit ohne die Nutzung der modernen Rechentechnik kaum noch möglich ist. Ich stehe deshalb auf dem Standpunkt, daß heute Grundkenntnisse der Mikrorechentechnik zum Bestandteil eines jeden naturwissenschaftlich-technischen Ausbildungsprofils gehören sollten. Unterstrichen wird dieser Standpunkt auch durch einen weiteren Aspekt: Die moderne Industrie basiert in immer größerem Ausmaß auf außerordentlich komplizierten und hochgenauen technologischen Verfahren. Die Steuerung derartiger Prozesse ist ohne die Mikroelektronik nicht mehr zu beherrschen, da auf der einen Seite die anfallenden zu verarbeitenden Prozeßdaten wegen ihres Umfanges, ihrer Vielfältigkeit und der Geschwindigkeit ihres Anfalls außerhalb jeder Verarbeitungsmöglichkeit durch einen Menschen liegen und andererseits die Gefahr des subjektiven Fehlverhaltens viel zu groß ist, als daß Menschen in solche komplizierten Steuerungsprozesse eingeschaltet bleiben dürfen. Die Automatisierung der Produktion resultiert also nicht nur aus ökonomischen Erwägungen, wie z. B. der Einsparung von Arbeitszeit, sie ist ein objektives Erfordernis der wissenschaftlich-technischen Revolution selbst.

Analysiert man in diesem Zusammenhang die gegenwärtige Entwicklung, so zeigt sich, daß z. Z. gewissermaßen eine "Dezentralisierung der Intelligenz" erfolgt. Gemeint ist dabei in der Rechentechnik der Trend nach leistungsfähiger Mikrorechentechnik direkt am Arbeitsplatz und in der Prozeßautomatisierung die Ausrüstung von immer mehr Einzelaggregaten mit direkt integrierter Steuerungselektronik - meistens auf der Basis von modernen Mikrorechnern. Ergänzt wird diese Entwicklung durch den Aus- und Auf-

bau zentraler Großrechentechnik, die über geeignete hierarische Systeme mit der dezentralisierten Rechentechnik gekoppelt sind und übergeordnete Steuerungsfunktionen übernehmen.
In der künftigen Produktion wird man also auf Schritt und Tritt der Rechentechnik begegnen und nicht mehr, wie es z. T. heute noch ist, nur im Rechenzentrum eines Betriebes.

Will man die Anwendungsbreite der Mikroelektronik weiter verdeutlichen, müßte man beispielsweise auf die moderne Medizintechnik, die Konsumgüterelektronik, die Kraftfahrzeugelektronik u. a. m. eingehen. Dazu reichen jedoch diese wenigen Zeilen nicht aus. Es lag auch nicht in meiner Absicht, den Gesamtkomplex der Mikroelektronik zu umreißen. Ich wollte vielmehr kurz sagen, was die Mikroelektronik innerhalb der Elektronik charakterisiert und welche gewaltigen Entwicklungsmöglichkeiten der Produktivkräfte uns die Mikroelektronik bietet.
Die Partei- und Staatsführung unserer Republik hat zur Entwicklung der Mikroelektronik eine Reihe prinzipieller Beschlüsse gefaßt, an deren Verwirklichung die Werktätigen unseres Landes angestrengt arbeiten. Die Aufgaben auf diesem Gebiet werden nicht kleiner. Jede gelöste Aufgabe bringt eine neue hervor. Es ist deshalb erforderlich, daß diejenigen, die diese Aufgaben lösen müssen, rechtzeitig und mit hohem persönlichen Engagement daran gehen, sich das dafür notwendige Wissen anzueignen.
Dabei wünsche ich allen, insbesondere den Lesern der WURZEL, viel Erfolg.

Dr. Meißner
Keramische Werke Hermsdorf
Betrieb für Mikroelektronik

Preisaufgaben

P 19 ① Man beweise für nichtnegative reelle Zahlen a, b, c die Ungleichung

$$6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}.$$

P 20 ② Man zeige, daß für jede natürliche Zahl n der Ausdruck $n^{8888} - n^{7777} + 1$ durch $n^2 - n + 1$ teilbar ist.

P 21 ② Gegeben seien vier Punkte A, B, C, D in der Ebene. Man bestimme einen Punkt O so, daß die Summe der Entfernungen von O zu den vier Punkten minimal wird.

P 22 ① Man vereinfache den Ausdruck

$$a^{\frac{\log_b \log_b a}{\log_b a}}.$$

P 23 ① Für welche reellen Werte a hat das Gleichungssystem

$$\sin x \cdot \cos 2y = (a^2 - 1)^2 + 1$$
$$\cos x \cdot \sin 2y = a + 1$$

Lösungen? Wie lauten diese?

P 24 ① Сколько рациональных членов содержится в разложении

$$(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{100}.$$

Einsendeschluß: 15. 7. 1983

Berechnung von Funktionen (4. Fortsetzung)

3. Pafnuti Iwowitsch TSCHEBYSCHEW (1821 - 1894)

Die Polynome $P_n(x)$, die eine gegebene stetige Funktion $f(x)$ für $a \leq x \leq b$ annähern sollen, werden jetzt durch ein drittes Kriterium festgelegt:

Es sei wiederum $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ die Abweichung von $P_n(x)$ von der exakten Funktion $f(x)$. Uns interessiert nur die absolute Abweichung $|R_n(x)|$.

Definition: Das Polynom

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

heißt Polynom der besten gleichmäßigen Approximation zu der Funktion $f(x)$, wenn für den Wert

$$E_n(f) = \max_{a \leq x \leq b} |R_n(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)|$$

gilt, daß für jedes andere Polynom $Q_n(x)$, dessen Grad die Zahl n nicht übersteigt,

$$E_n(f) \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - Q_n(x)|$$

ist.

Die Größe $\max_{a \leq x \leq b} |R_n(x)|$ ist ein Maß für die Güte der Annäherung von $f(x)$ durch das betrachtete Polynom. Je kleiner dieser Wert ist, umso besser ist die Approximation. Dasjenige Polynom $P_n(x)$, für das diese Größe am kleinsten wird, heißt nun bestapproximierendes Polynom.

Betrachten wir die Wirkung dieser Definition an einigen Beispielen. Sei wie früher $f(x) = e^x$, $a = -1 \leq x \leq b = 1$.

Im Falle $n = 0$ ist $P_n(x) = a_0 = \text{const.}$ Unser Ziel ist es, den betragsgrößten Wert der Funktion

$$R_0(x) = e^x - a_0$$

durch geeignete Wahl von a_0 möglichst klein zu machen. Offensichtlich ist $e^{-1} < a_0 < e$ zu wählen. Für $R_n(x)$ ergibt sich das folgende Bild (Abb. 1):
Wie man erkennt, nimmt $|R_0(x)|$ den größten Wert entweder an der Stelle $x = -1$ oder bei $x = 1$ an. Es ist $R_0(-1) < 0$ und $R_0(1) > 0$. Somit gilt

$$\max_{-1\le x\le 1} |R_o(x)| = \max\{-R_o(-1), R_o(1)\}$$

d. h. es ist der größte Wert in der geschweiften Klammer zu nehmen. Sei nun $-R_o(-1) > R_o(1)$, so wird bei einer geringen Verkleinerung von a_o der Ausdruck $-R_o(-1)$ geringer und damit auch das Maximum. Andererseits, wenn $R_o(1) > -R_o(-1)$ gilt, so kann man $R_o(1)$ durch geeignete Vergrößerung von a_o verkleinern. Insgesamt folgt hieraus, daß $\max_{-1\le x\le 1} |R_o(x)|$ seinen kleinsten Wert dann annimmt, wenn

$$-R_o(-1) = R_o(1)$$

gilt. Damit ergibt sich wegen

$$a_o - e^{-1} = e - a_o$$

sofort $\quad a_o = \frac{1}{2}(e + {}^1/e)$.

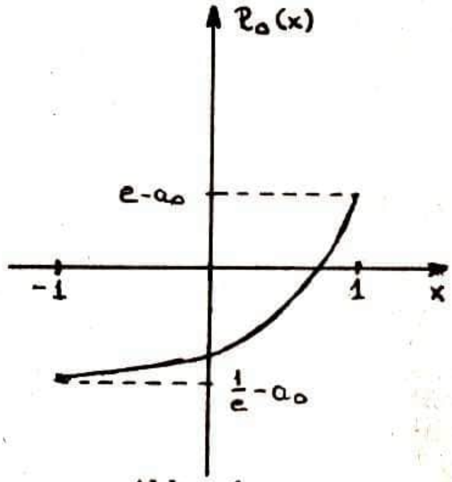


Abb. 1

Diese Konstante ist somit gleich dem bestapproximierenden Polynom nullten Grades. Es ist $E_o(f) = R_o(1) = e - a_o = \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})$. Der Zahlenwert $E_o(f) \approx 1.175$ ist geringer als der maximale Fehler des TAYLOR-Polynoms nullten Grades, denn dieser ist gleich $e - 1 \approx 1.718$.

Betrachten wir jetzt den Fall $n = 1$, d. h. versuchen wir die Kurve der Funktion $f(x) = e^x$ für $-1 \le x \le 1$ durch eine Gerade g möglichst gut anzunähern. Man kann sich leicht überlegen, daß die Gerade zum Erreichen einer optimalen Lage die Kurve zweimal schneiden muß (Abb. 2). Für den Fehler $R_1(x)$ erhält man dann – im anderen Maßstab gezeichnet – die folgende, in Abb. 3 dargestellte Kurve. Der betragsgrößte Wert wird nun entweder an der Stelle $x = -1$, $x = x_o$ oder $x = 1$ angenommen.

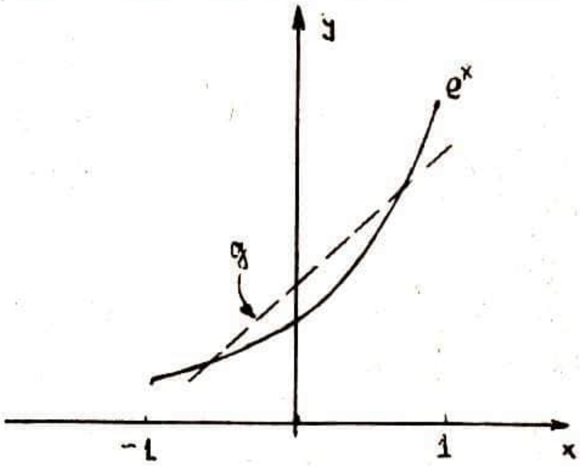


Abb. 2

Angenommen, es ist wie in diesem Falle $R_1(1) > -R_1(x_o) > R_1(-1)$, so bietet es sich an, die Gerade g zunächst am linken Endpunkt ($x = -1$) des betrachteten Intervalles festzuhalten und bei $x = 1$ solange anzuheben, bis $R_1(1) = R_1(-1)$ ist. Auf diese Weise wird der maximale Fehler zumindest anfänglich verringert. Anschließend wird die Gerade so parallelverschoben, daß $R_1(1) = -R_1(x_o)$ wird und damit erreicht man die beste Annäherung. Hierbei muß beachtet werden, daß x_o der Punkt ist, in dem $R_1(x)$ sein Minimum annimmt, und dieser Punkt verändert bei einer Bewegung von g seine Lage.

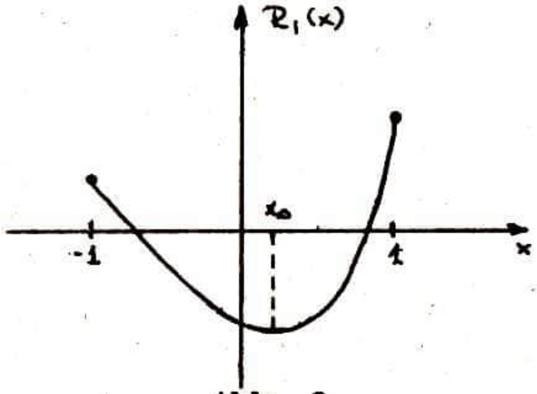


Abb. 3

Bestimmen wir nun das Polynom $P_1(x)$ analytisch. Es sei $P_1(x) = a_o x + a_1$, also das bestapproximierende Polynom, so gilt erstens

$$R_1(-1) = R_1(1),$$

also

$$e^{-1} + a_o - a_1 = e - a_o - a_1$$

und zweitens

$$R_1(1) = -R_1(x_o),$$

also

$$e - a_o - a_1 = -e^{x_o} + a_o x_o + a_1.$$

Zur Bestimmung der drei Unbekannten a_o, a_1 und x_o wird noch eine dritte Gleichung benötigt. Aus der Forderung, daß $R_1(x)$ an der Stelle x_o sein Minimum annehmen möge, folgt $R_1'(x_o) = 0$ und damit wegen

$$R_1'(x) = e^x - a_o$$

sofort

$$e^{x_o} - a_o = 0,$$

also $a_o = e^{x_o}$. Die erste der drei Gleichungen ergibt

$$a_o = \frac{1}{2}(e - e^{-1})$$

und aus der zweiten folgt nun

$$e - a_o - a_1 = -a_o + a_o x_o + a_1,$$

demzufolge wird

$$a_1 = \frac{1}{2}(e-a_o x_o) = \frac{1}{2}(e-a_o \ln a_o)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{e - \frac{1}{2}(e-e^{-1}) \ln\left[\frac{1}{2}(e-e^{-1})\right]\right\} .$$

Zahlenmäßig ist damit $P_1(x) \approx 1.264279x + 1.175201$ und $E_1(f) = e^1 - P_1(1) \approx 0.279$. Für das TAYLOR-Polynom ersten Grades war $\max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |R_1(x)| = |R_1(1)| = e-2 = 0.718$ ein wesentlich größerer Wert.

S a t z . (P.L. TSCHEBYSCHEW)

Das Polynom $P_n(x)$ ist dann und nur dann das bestapproximierende Polynom vom Grade höchstens n zur stetigen Funktion $f(x)$ für $a \leq x \leq b$, wenn

1. n+2 Punkte x_i, $i=1,2,\ldots,n+1,n+2$ mit
   $a \leq x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n+1} < x_{n+2} \leq b$
   derart existieren, daß
2. $R_n(x_i) = -R_n(x_{i+1})$ für $i=1,2,3,\ldots,n,n+1$ gilt und
3. $|R_n(x)| \leq |R_n(x_i)|$ für $a \leq x \leq b$ ist.

Die Punktmenge $\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n+1},x_{n+2}\}$ heißt TSCHEBYSCHEWsche Alternante. In den einzelnen Punkten nimmt $R_n(x)$ betragsmäßig stets den gleichen maximalen Funktionswert an, aber die Vorzeichen wechseln von einem Punkt zum andern, d. h. sie alternieren. In den betrachteten Beispielen war bei $n = 0$ $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ sowie $R_o(-1) = -R_o(1)$. Für $n = 1$ hatte sich $x_1 = -1$, $x_2 = \ln \frac{1}{2}(e-e^{-1})$ und $x_3 = 1$ ergeben und es war

$$R_1(-1) = -R_1(x_2) = -(-R_1(1)) = R_1(1)$$

gewesen.

Der exakte Beweis des obigen Satzes ist sehr umfangreich, es soll darauf verzichtet werden. Die Idee kam bereits bei den betrachteten Beispielen zum Ausdruck. Zur Ergänzung dient noch - ebenfalls ohne Beweis - der folgende

S a t z . (A. HAAR, 1885 - 1933)

Unter den getroffenen Voraussetzungen ist das Polynom der besten gleichmäßigen Approximation $P_n(x)$ eindeutig bestimmt.

Einige Bemerkungen zur Anwendung:

Die Zahlen $E_n(f)$ geben an, wie gut die betrachtete Funktion f auf dem gegebenen Abschnitt $a \leq x \leq b$ überhaupt bestenfalls mit einem Polynom n-ten Grades angenähert werden können. Es gilt für alle $n \geq 0$:

$$0 \leq E_{n+1}(f) \leq E_n(f),$$

d. h. die Werte $E_n(f)$ sind offensichtlich nicht negativ und können mit wachsendem n höchstens konstant bleiben oder kleiner werden. In der Tat, sei $P_{n+1}(x)$ und $P_n(x)$ das bestapproximierende Polynom vom Grad n+1 oder n entsprechend, so ist entweder $P_n = P_{n+1}$ (dann haben aber beide höchstens den Grad n), so daß

$$E_n(f) = E_{n+1}(f)$$

gilt, oder es ist $P_n \neq P_{n+1}$, dann ist wegen dem Satz von HAAR

$$E_n(f) \neq E_{n+1}(f)$$

und da das größere Polynom $P_{n+1}(x)$ nicht schlechter approximiert als das kleinere $P_n(x)$, so muß $E_n(f) > E_{n+1}(f)$ gelten.

Aus dem eingangs erwähnten Satz von WEIERSTRASS folgt, daß die Werte $E_n(f)$ mit wachsendem n gegen Null gehen. In der Regel werden sie wesentlich schneller kleiner als etwa die Restglieder der entsprechenden TAYLOR-Polynome. Gibt man sich eine Genauigkeit vor (z. B. $\varepsilon = 10^{-6}$), die das Näherungspolynom im Verhältnis zur exakten Funktion erreichen soll, so genügt es, dasjenige n zu bestimmen, so daß

$$E_n(f) \leq \varepsilon < E_{n+1}(f)$$

gilt. Das zugehörige bestapproximierende Polynom $P_n(x)$ ist dann das kleinste und vom Standpunkt des Rechenaufwandes her ökonomischste Polynom zur Annäherung von f(x) mit der gewünschten Genauigkeit.

Leider geht es in Wirklichkeit nicht ganz so einfach. Die Zahlen $E_n(f)$ sind nicht ohne weiteres zugänglich und es gibt auch keine einfache Vorschrift zur Bestimmung der Koeffizienten von $P_n(x)$. Die hierfür notwendigen Rechnungen sind ziemlich umfangreich und werden heutzutage von Rechenautomaten ausgeführt. An dieser Stelle haben auch die TAYLOR-Polynome wieder eine Existenzberechtigung, obwohl sie ansonsten nicht sehr gut zu verwenden sind. Die Sache ist die, daß zur Bestimmung von $P_n(x)$ sehr oft der Funktionswert von f(x) für verschiedene Werte von x berechnet werden muß, und das muß anfangs notgedrungen über die TAYLOR-Formel geschehen, denn von den bisher betrachteten Methoden ist dies die einzige, die ein Polynom ergibt, in dessen Koeffizienten nur Funktionswerte eingehen, die direkt zugänglich sind (wie z. B. $e^0=1$).

Kommen wir jetzt zurück zu dem Problem, das am Ende der Interpolation betrachtet wurde. Es ging darum, Punkte x_i, $i=0,1,2,\dots,n$, so zu bestimmen, daß

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega(x)| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)|$$

möglichst klein wird. Wie man sieht, wurde hier aus Gründen der Bequemlichkeit $-1 \leq x \leq 1$ festgelegt; ebenso sei auch $-1 \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 1$.

Nehmen wir einmal an, es sei $n = 2$, so ist

$$\begin{aligned} \omega(x) &= (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= x^3-(x_0+x_1+x_2)x^2+(x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2)x-x_0x_1x_2 \\ &= x^3-(a_0x^2+a_1x+a_2) \end{aligned}$$

mit $a_0=x_0+x_1+x_2$, $a_1=-(x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2)$ und $a_2=x_0x_1x_2$. Aus der letzten Gleichung erkennt man nun, daß die Forderung

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega(x)| = \text{minimal!}$$

äquivalent zu der Forderung ist, daß $P_2(x) = a_0x^2+a_1x+a_2$ das Polynom der besten gleichmäßigen Approximation zu der Funktion $f(x)=x^3$ für $-1 \leq x \leq 1$ ist. Diese Erkenntnis bietet den Zugang zur Lösung.

D e f i n i t i o n . Die Polynome $T_n(x) = \cos(n\cdot \operatorname{arc} \cos x)$ heißen für $-1 \leq x \leq 1$ TSCHEBYSCHEW-Polynome (erster Art).

Mit $y = \operatorname{arc} \cos x$ ist hier die Umkehrung der Cosinusfunktion bezeichnet, d. h. $y = \operatorname{arc} \cos x$ ist gleichbedeutend mit $x = \cos y$, $0 \leq y \leq \pi$.

Es ist sicher nicht offensichtlich, daß es sich bei diesen Funktionen tatsächlich um Polynome handelt. Für $n = 0$ und $n = 1$ läßt sich dies aber leicht überprüfen:

$$T_0(x) = \cos(0\cdot \operatorname{arc\,cos} x) = \cos 0 = 1,$$

$$T_1(x) = \cos(1\cdot \operatorname{arc\,cos} x) = \cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x.$$

Nun ist, setzt man $\operatorname{arc\,cos} x = \alpha$,

$$\cos(n+2)\alpha = \cos(n+1)\alpha \cdot \cos\alpha - \sin(n+1)\alpha \sin\alpha$$

und weiter

$$\begin{aligned}\sin(n+1)\alpha \sin\alpha &= \sin n\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \cos n\alpha \cdot \sin^2\alpha \\ &= \cos\alpha \cdot \sin n\alpha \sin\alpha + \cos n\alpha (1-\cos^2\alpha) \\ &= \cos\alpha (\sin n\alpha \sin\alpha - \cos n\alpha \cos\alpha) + \cos n\alpha \\ &= -\cos\alpha \cos(n+1)\alpha + \cos n\alpha ,\end{aligned}$$

zusammengefaßt also

$$\cos(n+2)\alpha = 2\cos\alpha \cdot \cos(n+1)\alpha - \cos n\alpha$$

und hieraus folgt umgehend die Rekursionsformel

$$T_{n+2}(x) = 2x\, T_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Aus dieser Formel ist unschwer zu erkennen, daß es sich tatsächlich um Polynome handelt, denn $T_0(x)$ und $T_1(x)$ sind Polynome vom entsprechenden Grad und weiterhin wird

$$T_2(x) = 2x\, T_1(x) - T_0(x) = 2x\cdot x - 1 = 2x^2-1,$$

$$T_3(x) = 2x\, T_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3-3x,$$

$$T_4(x) = 2x\, T_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3-3x)-(2x^2-1) = 8x^4-8x^2+1$$

usw.

Jetzt wird es Zeit, diese Polynome anzuwenden:

Satz. (P.L. TSCHEBYSCHEW)

Die Forderung

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |\omega(x)| = \text{minimal!}$$

ist genau dann erfüllt, wenn $\omega(x) = 2^{-n}\, T_{n+1}(x)$ gilt.

Beweis. Aus der Rekursionsformel erkennt man, daß der Faktor vor x^{n+1} in $2^{-n}\, T_{n+1}(x)$ tatsächlich gleich 1 ist. Die Summe der niederen Potenzen muß also das Polynom bester Approximation zu x^{n+1} sein. Nach dem ersten Satz dieses Kapitels ist dies aber gleichbedeutend mit der Existenz einer TSCHEBYSCHEWschen Alternante. Auf Grund der Eigenschaften der Funktion cos x ist nun

$$|T_{n+1}(x)| = \left|\cos[(n+1)\cdot \operatorname{arc\,cos} x]\right| \leq 1$$

und dieser Maximalwert wird in der Tat n+2 mal mit wechselnden

Vorzeichen angenommen. (Das Polynom, das den Ausdruck x^{n+1} annähert, ist vom Grade n, obwohl der Koeffizient vor x^n Null ist.) Tatsächlich, aus $T_{n+1}(x) = 1$ folgt

$$\cos\left[(n+1)\cdot\arccos x\right] = 1,$$

also $(n+1)\cdot\arccos x_k = 2k\pi$, k ganz

und damit

$$\arccos x_k = \frac{2k\pi}{n+1}$$

und letztlich

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n+1}.$$

Analog erhält man aus $T_{n+1}(x) = -1$ die Gleichung

$$x_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{n+1}.$$

Wegen $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ braucht nur der Fall $k,j \geq 0$ betrachtet zu werden. Um die Stellen nicht doppelt zu ermitteln, fordert man außerdem

$$\frac{2k\pi}{n+1} \leq \pi, \quad \text{also } k \leq \frac{n+1}{2}$$

und

$$\frac{(2j+1)\pi}{n+1} \leq \pi, \quad \text{mithin } j \leq \frac{n}{2}.$$

Wenn $n = 2m$ gilt, so ist $k=0,1,2,\ldots,m$ und $j=0,1,2,\ldots,m$. Im Falle $n = 2m+1$ läuft $k=0,1,2,\ldots,m+1$ und $j=0,1,2,\ldots,m$. Im ersten Fall gibt es $2(m+1)$, im zweiten $m+2 + m+1$ Punkte, jedesmal also $n+2$. Ordnet man die Punkt x_k und x_j abwechselnd nach wachsenden Indizes, so bilden sie eine TSCHEBYSCHEWsche Alternante. Damit ist der Satz bewiesen.

Schlußfolgerung:

Es ist $\max\limits_{-1\leq x\leq 1}\left|2^{-n}\,T_{n+1}(x)\right| = 2^{-n}$ der kleinstmögliche Maximalwert des Polynoms $\omega(x)$. Das Polynom $T_{n+1}(x)$ besitzt zwischen -1 und 1 alle n+1 Nullstellen, für sie gilt

$$x_i = \cos\frac{2n+1-2i}{2n+2}\pi, \quad i=0,1,2,\ldots,n.$$

Wählt man bei der Interpolation diese Punkte als Stützstellen, so approximiert das resultierende Polynom die vorgegebene Funktion in der Regel sehr gut. Kehren wir nochmals zu dem Beispiel $f(x) = e^x$, $-1 \leq x \leq 1$, n=10 zurück, so ist bei Interpolation unter Verwendung der Nullstellen von $T_{11}(x)$ eine Genauigkeit von

$$\left|R_{10}(x)\right| = \frac{e^{\xi}}{11!}\left|\omega(x)\right| \leq \frac{e}{11!}\max_{-1\leq x\leq 1}\left|\omega(x)\right|$$

$$\leq \frac{e}{11!}\,2^{-10} = \frac{e}{1024\cdot 11!} \approx 6.65.10^{-11},$$

und diese Abweichung beträgt rund $\frac{1}{70}$ des Fehlers bei der Interpolation mit gleichabständigen Stützstellen und $\frac{1}{102}$ des Fehlers des TAYLOR-Polynoms 10. Grades. Ein wesentlich besseres Resultat läßt sich in diesem Falle auch bei Verwendung der Polynome der besten gleichmäßigen Approximation kaum erzielen.

Abschließend sei noch eine weitere Verwendungsmöglichkeit der TSCHEBYSCHEW-Polynome angegeben, die auf ihrer Minimaleigenschaft beruht. Angenommen, wir zerlegen e^x in einen TAYLOR-Ausdruck bis zur sechsten Potenz, so resultiert

$$P_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}.$$

Es ist

$$\frac{1}{32}T_6(x) = x^6 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{32}$$

und wir bilden

$$Q_5(x) = P_6(x) - \frac{1}{720}\cdot\frac{1}{32}T_6(x)$$

$$= \left(1+\frac{1}{720\cdot 32}\right)+x+\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{16\cdot 720}\right)x^2+\frac{x^3}{6}+\left(\frac{1}{24}+\frac{3}{2\cdot 720}\right)x^4+\frac{x^5}{120}$$

$$= \frac{23041}{23040} + x + \frac{639}{1280}x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{21}{480}x^4 + \frac{x^5}{120}$$

als ein Polynom fünften Grades. Seine Abweichung von e^x übersteigt für $-1 \leq x \leq 1$ nicht den Wert

$$\left|e^x - Q_5(x)\right| = \left|e^x - P_6(x) + \frac{1}{23040}T_6(x)\right| \leq$$

$$\left|e^x - P_6(x)\right| + \frac{1}{23040}\left|T_6(x)\right|$$

$$\leq \left|\frac{e^{\xi}}{7!}\left|x\right|^7\right| + \frac{1}{23040} < \frac{e}{7!} + \frac{1}{23040}$$

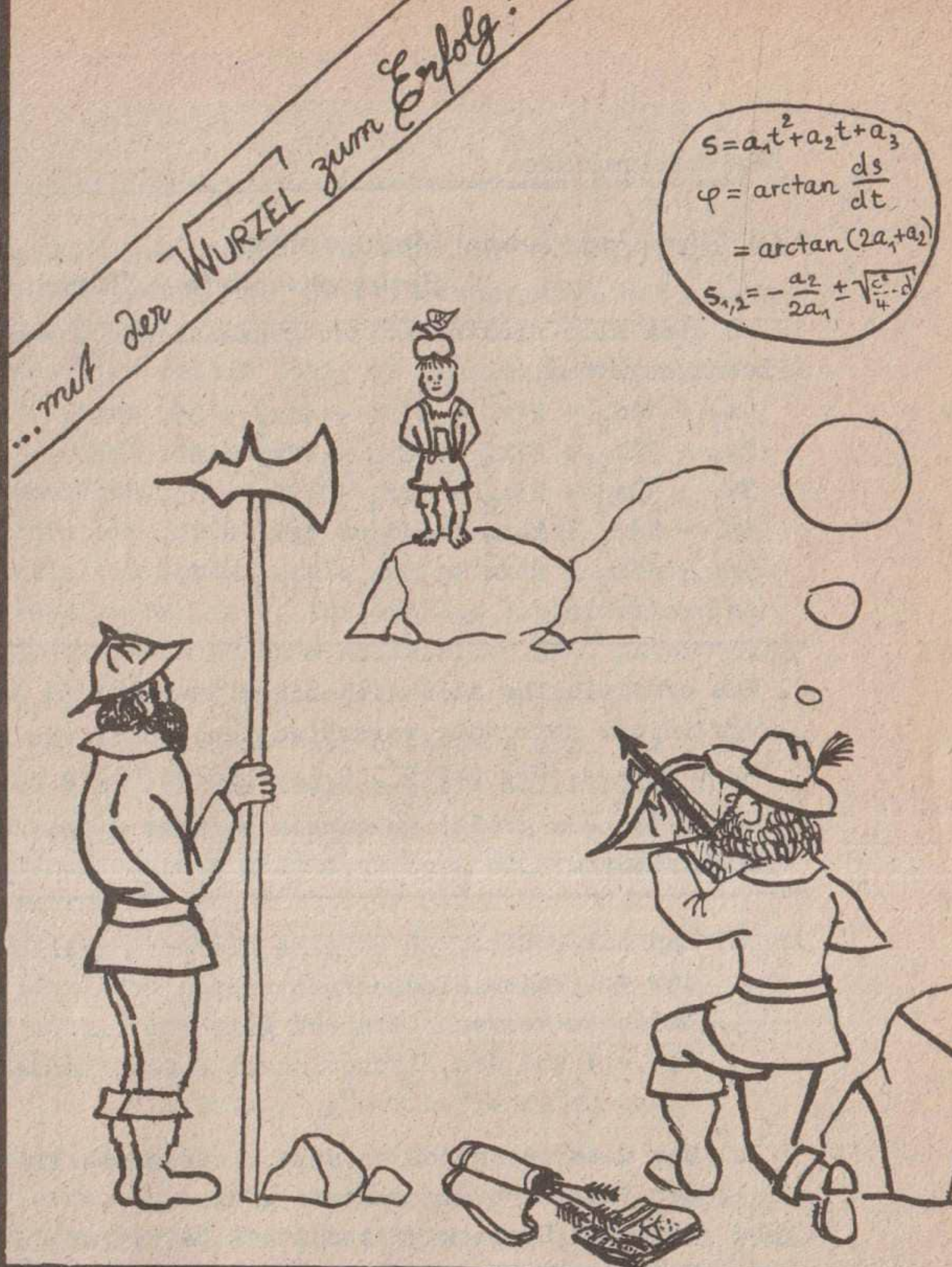
$$< 0.000539 + 0.000041 = 0.000580.$$

Wir haben somit ein Polynom fünften Grades gewonnen, das fast die Genauigkeit des TAYLOR-Polynoms sechsten Grades erreicht und auf jeden Fall besser ist als das fünften Grades, denn dort lag die Fehlerschranke bei 0,0038, also wesentlich höher! Diese Technik erweist sich als sehr nützlich zur Gewinnung effektiverer Formeln.

Dr. W. Rosenheinrich
Sektion Mathematik FSU
Bereich Numerik Optimierung

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: Edgar Pforr
Redaktionsschluß: 15. 3. 1983



5
83

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung
der Sektion Mathematik
an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

17. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR:
0,20 M

XXII. Olympiade Junger Mathematiker

Bezirksolympiade – Klassen 11/12

1. Es sind alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
x_1 + 11x_2 + 21x_3 + 31x_4 + 41x_5 &= 55,\\
2x_1 + 12x_2 + 22x_3 + 32x_4 + 42x_5 &= 60,\\
3x_1 + 13x_2 + 23x_2 + 33x_4 + 43x_5 &= 65,\\
4x_1 + 14x_2 + 24x_3 + 34x_4 + 44x_5 &= 70,\\
5x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 35x_4 + 45x_5 &= 75
\end{aligned}$$

zu ermitteln.

---

2. Man ermittle für alle diejenigen 30-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_{30})$ von (nicht notwendig verschiedenen) positiven ganzen Zahlen a_i $(i=1,\ldots,30)$, die $\sum_{i=1}^{30} a_i = 1983$ erfüllen, den größten Wert, den der größte gemeinsame Teiler d der Zahlen a_i annehmen kann.

3A) a) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl p mit der folgenden Eigenschaft gibt:
In jedem konvexen Viereck gilt für die Seitenlängen a,b,c,d und den Flächeninhalt F des Vierecks
$F \leq p\cdot(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

b) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl q mit der folgenden Eigenschaft gibt:
In jedem Dreieck gilt für die Seitenlängen a,b,c und den Flächeninhalt F des Dreiecks $F \leq q\cdot(a^2+b^2+c^2)$.

Wenn es in a) bzw. b) eine solche kleinste Zahl p bzw. q gibt, so ermittle man jeweils diese Zahl.

3B) Man beweise:

a) Wenn es zu einem Tetraeder ABCD eine Kugel K gibt, die alle sechs Kanten des Tetraeders berührt, dann gilt
$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}$. (1)

b) Wenn (1) für ein Tetraeder ABCD gilt, dann gibt es eine Kugel K, die alle sechs Kanten des Tetraeders berührt.

Definition:

Eine Kugel K berührt genau dann eine Strecke s, wenn K die s enthaltende Gerade berührt und der Berührungspunkt auf s liegt.

4. Ist c eine positive reelle Zahl, so bezeichne f die für alle reellen $x \neq 0$ durch
$$f(x) = \sin \frac{c}{x}$$
definierte Funktion.
Gegeben sei nun eine beliebige natürliche Zahl $m > 1$.
 a) Man ermittle (in Abhängigkeit von m) alle diejenigen positiven reellen Zahlen c, für die die Funktion f im Intervall $10 \leq x \leq 20$ genau m Nullstellen hat, unter denen sich auch die Zahlen 10 und 20 selbst befinden.
 b) Für jede in a) gefundene Zahl c beweise man, daß f im Intervall $20 \leq x < \infty$ nur endlich viele Nullstellen hat. Ferner ermittle man (in Abhängigkeit von m und für jede zu dem betreffenden m gefundene Zahl c) die größte Nullstelle von f.

5. a) Man beweise: Wenn a,b,c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac-b^2 > 0$ sind, dann gilt für alle reellen x,y, die nicht beide 0 sind,
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0.$$
 b) Man beweise: Wenn a,b,c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac-b^2 < 0$ sind, dann gibt es in der x,y-Ebene im Innern jedes Kreises um den Koordinatenursprung (0;0) zwei Punkte P_1 und P_2 mit folgenden Eigenschaften: Für die Koordinaten $(x_1;y_1)$ von P_1 gilt die Ungleichung $ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 > 0$; für die Koordinaten $(x_2;y_2)$ von P_2 gilt die Ungleichung $ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 < 0$.

6. Eine Tür soll mit einer genügend großen Anzahl von Schlössern versehen werden. Zu jedem Schloß soll eine Sorte passender Schlüssel in genügend großer Anzahl vorhanden sein, wobei jeder Schlüssel zu genau einem Schloß passen soll. Elf Personen sollen derartige Schlüssel erhalten, aber nicht jede Person für jedes Schloß. Ein Vorschlag lautet vielmehr,

es solle folgendes erreicht werden:
Immer wenn mindestens sechs der elf Personen anwesend sind, befindet sich unter ihren Schlüsseln für jedes Schloß auch ein passender Schlüssel;
immer wenn weniger als sechs Personen anwesend sind, haben sie für mindestens ein Schloß keinen passenden Schlüssel.
Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Schlössern sowie eine Schlüsselverteilung (an die elf Personen), mit der dieser Vorschlag realisierbar wäre!

Berichtigung

Bei der Reinschrift des Artikels "Die harmonische Schwingung und ihre mathematische Beschreibung" Teil 1 sind uns leider an einer wesentlichen Stelle zwei Fehler unterlaufen:
Im Heft 1/83 Seite 3 muß es richtig heißen:

Das 3. NA legt nun fest:

$$F_a = F_f \text{ oder } m\ddot{x} = -kx \text{ oder } \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \qquad (1)$$

Auf der gleichen Seite ist weiter wie folgt zu korrigieren:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -x(t) \\ \dot{x}(0) &= 0 \\ x(0) &= 1 \end{aligned} \qquad (4)$$

Im Heft 2/83 Seite 22 ist die Argumentation für die Monotonie der Funktion Y wie folgt richtig:

$$\dot{Y}(t) = \frac{d^4}{dt^4}X(t) = \frac{d^2}{dt^2}\frac{d^2}{dt^2}X(t)$$

$$\dot{Y}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left[-X(t)\right] = -\frac{d^2}{dt^2}X(t) = X(t).$$

Wir bitten unsere Leser für diese Fehler um Entschuldigung.

Die Redaktion

Preisaufgaben

P 19 ①

Man gebe alle Lösungen der Gleichung

$\sin^2 x + \sin(2x)\sin(4x) + \ldots + \sin(nx)\sin(n^2 x) = 1$ an!

P 20 ②

Gegeben sei eine komplexe Zahl z, $z \neq \pm 1$.

Man zeige, daß $\frac{z-1}{z+1}$ genau dann imaginär ist, wenn $|z| = 1$ gilt.

P 21 ②

Eine unendliche reelle Zahlenfolge $x_1, x_2, \ldots$ mit $x_1 \neq 0$ erfülle für beliebige $n \geq 3$ die Gleichung

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2)(x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2)$$
$$= (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n)^2.$$

Zu zeigen ist, daß dann die $x_1, x_2, \ldots$ Glieder einer geometrischen Reihe sind.

P 22 ①

Man gebe die Menge der reellen Zahlen an, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$|x - 2x^2 + 4x^3 - 8x^4 + \ldots + (-2)^{n-1} x^n + \ldots| < 1$$

P 23 ①

In einem Dreieck ABC bilden die Winkel α, β, γ eine geometrische Reihe mit Faktor $q = 2$. Es ist zu zeigen $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

P 24 ②

Доказать, что уравнение $3x^2 + 8 = y^2$ не имеет решений в целых числах.

Einsendeschluß: 15. 8. 1983

Zentrale Lösungsvorschläge zu den Olympiadeaufgaben

1.I. Das angegebene Gleichungssystem ist äquivalent zu

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \qquad (+)$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5. \qquad (++)$$

Dies ergibt sich z. B. auf folgendem üblichen Wege: Man subtrahiert das 2-, 3-, 4- bzw. 5fache der ersten gegebenen Gleichung von der zweiten, dritten, vierten bzw. fünften, dividiert durch (-10), (-20), (-30) bzw. (-40) und erhält übereinstimmend (++). Zu (+) gelangt man[1] z. B., indem man die erste gegebene Gleichung von der zweiten subtrahiert. Umgekehrt[2] erhält man aus (+), (++) die gegebenen Gleichungen, indem man zum 10fachen von (+) das 1-, 2-, 3-, 4- bzw. 5fache von (++) addiert.

II. Wenn (+), (++) durch nichtnegative ganze Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 erfüllt werden, so folgt, daß dies nur die Werte der Tabelle

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Nr.
3	1	0	0	1	(1)
3	0	1	1	0	(2)
2	2	0	1	0	(3)
2	1	2	0	0	(4)
1	3	1	0	0	(5)
0	5	0	0	0	(6)

sein können. Zum Beweis kann man etwa die Möglichkeiten für x_5, x_4, x_3 diskutieren (und dann jeweils x_2, x_1 aus (++) bzw. (+) erhalten), z. B. folgendermaßen:

Wäre $x_5 \geq 2$, so wäre $x_2+2x_3+3x_4+4x_5 \geq 0+2\cdot 0+3\cdot 0+4\cdot 2 = 8$ im Widerspruch zu (++). Also ist $x_5 = 1$ oder $x_5 = 0$.

---

1 Die Einführung von (+) ist für das Folgende nicht unbedingt erforderlich.

2 Dieser "Rückschluß" kann auch dadurch ersetzt werden, daß in III. die "Probe" nicht mit (+), (++), sondern mit dem gegebenen Gleichungssystem durchgeführt wird.

Aus $x_5 = 1$ und (++) folgt $x_2+2x_3+3x_4 = 1$. Damit ergäben $x_3 \geq 1$, $x_4 \geq 1$ jeweils einen Widerspruch, also verbleibt nur $x_3 = x_4 = 0$ und hiernach (1).

Aus $x_5 = 0$ und (++) folgt

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \qquad (+++)$$

und dann weiter: Wäre $x_4 \geq 2$, so wäre $x_2+2x_3+3x_4 \geq 6$ im Widerspruch zu (+++). Also ist $x_4 = 1$ oder $x_4 = 0$.

Aus $x_4 = 1$ und (+++) folgt $x_2+2x_3 = 2$. Damit ergäbe $x_3 \geq 2$ einen Widerspruch, also verbleiben nur: Entweder gilt $x_3 = 1$ und hiernach (2), oder es gilt $x_3 = 0$ und hiernach (3).

Aus $x_4 = 0$ und (+++) folgt $x_2+2x_3 = 5$. Damit ergäbe $x_3 \geq 3$ einen Widerspruch, also verbleiben für x_3 nur 2, 1 oder 0 und hiernach (4), (5) bzw. (6).

III. Die Zahlen in (1),...,(6) sind nichtnegativ, ganzzahlig und erfüllen (+), (++).

Mit den in (I), (II), (III) gezeigten Aussagen ist bewiesen, daß genau (1),...,(6) alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen des gegebenen Gleichungssystems sind.

---

2. I. Ist $(a_1, a_2, \ldots, a_{30})$ ein 30-Tupel von positiven ganzen Zahlen a_i mit

$$\sum_{i=1}^{30} a_i = 1983 \qquad (1)$$

und ist d der größte gemeinsame Teiler[1] der a_i, so folgt: Für jedes $i=1,\ldots,30$ existiert wegen $d \mid a_i$ eine positive ganze Zahl k_i mit

$$a_i = d \cdot k_i. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\sum_{i=1}^{30} d \cdot k_i = 1983; \text{ für die Zahl}$$

$$\sum_{i=1}^{30} k_i = k \qquad (3)$$

gilt mithin

$$d \cdot k = 1983. \qquad (4)$$

---

1 Hier genügt anstelle des Begriffes "der größte gemeinsame Teiler" auch der Begriff "ein (positiver) gemeinsamer Teiler".

Wegen $k_i \geq 1$ $(i=1,...,30)$ und (3) ist $k \geq 30$; hiernach und wegen der Primfaktorzerlegung $1983 = 3 \cdot 661$ muß $k \geq 661$ und damit nach (4)

$$d \leq 3$$

sein.

II. Es gibt ein 30-Tupel $(a_1,a_2,...,a_{30})$ von positiven ganzen Zahlen a_i mit (1), deren größter gemeinsamer Teiler $d=3$ beträgt.
Beispielsweise hat das 30-Tupel $(3,3,...,3,1896)$ wegen $29 \cdot 3 + 1896 = 1983$ und $3 \mid 1896$ diese Eigenschaften.
Mit I. und II. ist bewiesen, daß der gesuchte größte Wert $d = 3$ beträgt.

3A) a) I. Ist ABCD ein (konvexes) Viereck, F sein Flächeninhalt und $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d = \overline{DA}$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\delta = \sphericalangle CDA$, so gilt

$$F = \frac{ab}{2} \cdot \sin\beta + \frac{cd}{2} \cdot \sin\delta ,$$

wegen $\sin\beta \leq 1$, $\sin\delta \leq 1$, $0 < ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, $0 < cd \leq \frac{c^2+d^2}{2}$ also

$$F \leq \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

II. Es gibt konvexe Vierecke, bei denen für die Seitenlängen a,b,c,d und den Flächeninhalt F

$$F = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2) \qquad (1)$$

gilt; denn es gibt Vierecke mit $a = b = c = d$ und $\beta = \delta = 90^\circ$, diese sind (Quadrate, also) konvex, und für sie gilt $F = a^2$, also (1).

Mit I. und II ist bewiesen: Es gibt eine kleinste reelle Zahl p mit der genannten Eigenschaft; sie lautet $p = \frac{1}{4}$.

b) I. Ist ABC ein Dreieck, F sein Flächeninhalt und $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, so gilt nach der Dreiecksungleichung $s-a \geq 0$, $s-b \geq 0$, $s-c \geq 0$. Hieraus und aus der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel nichtnegativer reeller Zahlen folgt

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \sqrt{s(\tfrac{1}{3}(s-a + s-b + s-c))^3}$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{3}}\, s^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}}\, (a+b+c)^2$$
$$= \frac{1}{36}\sqrt{3}\, (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)$$
$$\leq \frac{1}{36}\sqrt{3}\, (a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2)$$
$$= \frac{1}{12}\sqrt{3}\, (a^2+b^2+c^2).$$

II. Es gibt Dreiecke, bei denen für die Seitenlängen a,b,c und den Flächeninhalt F

$$F = \frac{1}{12}\sqrt{3}\, (a^2+b^2+c^2) \qquad (2)$$

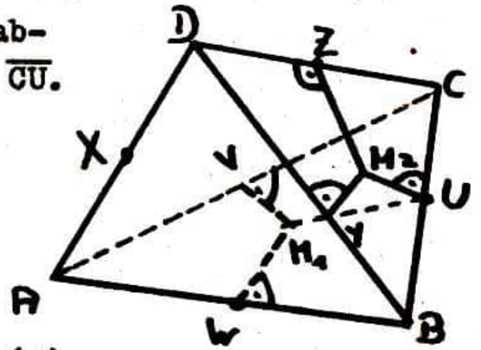
gilt; denn für gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge a (=b=c) gilt $F = \frac{1}{4}\sqrt{3}\, a^2$, also (2).

Mit I. und II. ist bewiesen: Es gibt eine kleinste reelle Zahl q mit der genannten Eigenschaft; sie lautet $q = \frac{1}{12}\sqrt{3}$.

3B) a) Wenn eine Kugel K die Kanten BC, CA, AB, AD. BD, CD eines Tetraeders ABCD in U,V,W,X,Y,Z berührt (Abb.), so folgt: Die Ebene durch A,B,C hat mit K die Punkte U,V,W gemeinsam, sie schneidet K also in einem Kreis. Dieser berührt die Geraden durch B,C bzw. durch C,A in U bzw. V. Nach dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte gilt daher $\overline{CV} = \overline{CU}$. Entsprechend folgt

$$\overline{CZ} = \overline{CV} = \overline{CU},$$
$$\overline{AW} = \overline{AV} = \overline{AX},$$
$$\overline{BW} = \overline{BY} = \overline{BU},$$
$$\overline{DZ} = \overline{DY} = \overline{DX}$$

und damit durch Addition (1).



b) Wenn (1) für ein Tetraeder ABCD gilt, so folgt:

Man bezeichne die Ebenen, in denen die Dreiecke ABC, BCD, CAD, ABD liegen, mit e_1, e_2, e_3, e_4, ferner die Inkreismittelpunkte dieser Dreiecke mit M_1, M_2, M_3, M_4 sowie die Inkreisberührungspunkte (in der aus der Abb. ersichtlichen Verteilung) mit U_1, V_1, W_1 bzw. Z_2, Y_2, U_2 bzw. X_3, Z_3, V_3 bzw. Y_4, X_4, W_4.

Dann ist $\overline{AV_1} = \overline{AW_1}$, $\overline{BW_1} = \overline{BU_1}$, $\overline{CU_1} = \overline{CV_1}$, also

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AC} - \overline{AB}) &= \tfrac{1}{2}(\overline{BU_1} + \overline{CU_1} + \overline{AV_1} + \overline{CV_1} - \overline{AW_1} - \overline{BW_1}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\overline{BU_1} + \overline{CU_1} + \overline{AV_1} + \overline{CU_1} - \overline{AV_1} - \overline{BU_1}) \\ &= \overline{CU_1}.\end{aligned}$$

Entsprechend ist $\overline{CU_2} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{CD} - \overline{BD})$. Unter Anwendung von (1) folgt

$$\overline{CU_2} = \tfrac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AC} - \overline{AB}) = \overline{CU_1}.$$

Damit ist $U_1 = U_2$ gezeigt.

Ebenso folgt $V_1 = V_3$, $W_1 = W_4$, $X_3 = X_4$, $Y_4 = Y_2$, $Z_2 = Z_3$. Für die genannten Punkte können demnach die Bezeichnungen U,V,W, X,Y,Z verwendet werden . Nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius stehen UM_1 und UM_2 senkrecht auf BC, also ist die Ebene u durch U, M_1, M_2 senkrecht auf BC und damit senkrecht auf e_1. Folglich enthält u auch die in M_1 auf e_1 errichtete Senkrechte g_1. Ebenso enthält u die in M_2 auf e_2 errichtete Senkrechte g_2. Da e_1 und e_2 nicht zueinander parallel sind, ist $g_1 \nparallel g_2$. Somit schneiden sich g_1 und g_2 in einem Punkt M. Da nun MM_1U, MM_1V, MM_1W rechtwinklige Dreiecke mit gleicher Kathete MM_1 und gleichlangen Katheten M_1U, M_1V, M_1W sind, folgt $\overline{MU} = \overline{MV} = \overline{MW}$.

Ebenso folgt $\overline{MU} = \overline{MY} = \overline{MZ}$. Damit ist bewiesen: Die Kugel K durch U,V,W,Y geht auch durch Z. Analog folgt, daß K auch durch X geht.

Die Schnittkreise von K mit e_1, e_2, e_3, e_4 sind folglich die Kreise durch U,V,W bzw. durch Z,Y,U bzw. durch X,Z,V bzw. durch Y,X,W, also die Inkreise der Dreiecke ABC, BCD, CAD, ABD.

Daher berührt K alle Kanten des Tetraeders.

Die sog. harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$ hat keinen endlichen Wert, denn wir können uns wie bereits N. Oresme (1323? - 1382) - einer der führenden Mathematiker seiner Zeit, folgende Abschätzungen überlegen:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,

$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, usw. Wir können immer wieder so viele Summanden zusammenfassen, daß deren Gesamtsumme größer als $\frac{1}{2}$ ist, und die Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$ hat offensichtlich keinen endlichen Wert.

Obwohl das Wachstum der harmon. Reihe nur langsam erfolgt, ist es auch durch das Wegstreichen von Gliedern nicht ohne weiteres aufzuhalten.

Nehmen wir an, ein Summandenfresser erhält den Auftrag, die Glieder der harmonischen Reihe wegzufressen. Ein Summandenfresser mit Perfektion 1 soll per Definition jedes 10te Glied stehen lassen, es bleibt $\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right)$, also noch unendlich viel stehen.

Ein Summandenfresser der Perfektion 6 läßt jedes 10^6te Glied stehen - also nur jedes Millionste - es verbleibt

$$\frac{1}{1000000} + \frac{1}{2000000} + \frac{1}{3000000} + \ldots = \frac{1}{1000000}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right),$$

immer noch unendlich viel stehen.

Ein Summandenfresser der Perfektion 1000000 würde auch noch einen unendlichen Rest lassen.

Nun lassen wir auf diese Reihe den Neunerfresser los, ein unscheinbares kleines Untier, das nur alle die Glieder wegfrißt, bei denen im Nenner eine Zahl auftaucht, die eine 9 enthält. Welchen Rest wird er wohl lassen? Die Antwort ist auch für manchen Mathematiker überraschend. Das kleine Untier entpuppt sich als großer unersättlicher dickbäuchiger Drachen und läßt nur einen Rest, der ungefähr bei 23 liegt.

Beweis: S' sei die harmonische Reihe nach Streichen aller der Glieder $\frac{1}{n}$, bei denen n eine 9 enthält.

M sei die Menge aller natürlichen Zahlen, bei denen als Ziffer eine 9 auftaucht.

Wir fassen die Summanden zu Teilstücken S_k, $k=0,1,2,\ldots$, auf folgende Art zusammen:

$$S' = S_o + S_1 + S_2 + \ldots \text{ mit } S_k = \sum_{n \notin M,\, n=10^k}^{10^{k+1}-1} \frac{1}{n}\,, \quad {}^{+)}$$

d. h. $S_o = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{8}$ $(\approx 2{,}7179)$

$S_1 = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{88}$ $(\approx 2{,}0540)$, usw.

Wir schätzen nun diese Teilsummen S_k ab.

<u>Abschätzung</u> nach oben:

$$S_k < \frac{9}{10} \cdot S_{k-1} \qquad (1)$$

Beweis: Wir betrachten einen Summanden $\frac{1}{m}$ der Teilsumme S_{k-1}. Aus ihm kann man gewissermaßen auf folgende Weise Summanden der nächsten Teilsumme S_k erzeugen: $\frac{1}{10m+0}, \frac{1}{10m+1}, \ldots, \frac{1}{10m+8}$, z. B. werden $\frac{1}{30}, \frac{1}{31}, \ldots, \frac{1}{38}$ von $\frac{1}{3}$ erzeugt.
Alle Summanden von S_k werden auf diese Weise genau einmal aus denen von S_{k-1} erzeugt. Wegen

$$\frac{1}{10m+0} + \frac{1}{10m+1} + \ldots + \frac{1}{10m+8} < \frac{1}{10m} + \frac{1}{10m} + \ldots + \frac{1}{10m} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{m}$$

erhalten wir die Ungleichung (1). Wir können also für den Wert S der "angeknabberten" harmonischen Reihe folgende Abschätzung nach oben finden:

$$\begin{aligned} S' &= S_o + S_1 + \ldots + S_{k-1} + S_k + S_{k+1} + \ldots < \\ &< S_o + S_1 + \ldots + S_{k-1} + S_k\left(1 + \tfrac{9}{10} + \left(\tfrac{9}{10}\right)^2 + \ldots\right) = \\ &= S_o + S_1 + \ldots + S_{k-1} + 10 \cdot S_k, \qquad (2) \end{aligned}$$

denn $1 + \frac{9}{10} + (\frac{9}{10})^2 + \ldots$ ist eine geometrische Reihe mit dem Faktor $\frac{9}{10}$ und hat den Wert $\frac{1}{1-\frac{9}{10}} = 10$.

(Wir betrachten eine Summe $s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}$. Dann gilt $q \cdot s_n = s_n + q^n - 1$, also

$s_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Ist $q < 1$ strebt q^n gegen Null, wenn n "unendlich groß" wird.)

+) n M bedeutet, daß n nicht zur Menge M gehört.

Abschätzung nach unten:

$$S_k > \left(\frac{9}{10} - \frac{36}{10^{k+1}}\right) \cdot S_{k-1} \qquad (3)$$

Beweis: $\frac{1}{l}$ sei ein Summand der Teilsumme S_k, $k \geq 1$. l ist dann eine mindestens zweistellige Zahl, und wir können l darstellen als $l = 10m + i$ mit $m \geq 1$ und $i = 0,1,\ldots$ oder 8. Wir setzen nun $p = 10m$ und überlegen uns für die dann ebenfalls zu S_k gehörenden Summanden $\frac{1}{p+0}, \frac{1}{p+1}, \ldots, \frac{1}{p+8}$ folgende Abschätzung:

$$\frac{1}{p+0} + \frac{1}{p+1} + \ldots + \frac{1}{p+8} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{1+\frac{0}{p}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{8}{p}}\right) >$$

$$> \frac{1}{p}\left(\left[1-\frac{0}{p}\right] + \ldots + \left[1-\frac{8}{p}\right]\right) = \frac{1}{p}\left(9-\frac{36}{p}\right), \qquad (4)$$

denn wegen $p^2 > p^2 - i^2$ $(=(p+i)\cdot(p-i))$ ist

$$\frac{p}{p+i} = \frac{1}{1+\frac{i}{p}} > \frac{p-i}{p} = 1 - \frac{i}{p} \quad (i \neq 0).$$

Aufgrund der Definition der Summen S_k gilt $p \geq 10^k$, d. h. $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{10^k}$. Wir finden somit für die linke Seite von (4) die Abschätzung:

$$\frac{1}{p+0} + \frac{1}{p+1} + \ldots + \frac{1}{p+8} > \frac{1}{p}\left(9-\frac{36}{10^k}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{9}{10} - \frac{36}{10^{k+1}}\right).$$

Da $\frac{1}{m}$ ein Summand von S_{k-1} ist und $\frac{1}{p+0}, \ldots, \frac{1}{p+8}$ die von ihm in der Summe S_k erzeugten Summanden, erhalten wir die Ungleichung (3).

Aus (3) können wir nun schlußfolgern: Für $j=1,2,3,\ldots$ gilt

$$S_{k+j} > \left(\frac{9}{10} - \frac{36}{10^{k+j+1}}\right) \cdot \left(\frac{9}{10} - \frac{36}{10^{k+j}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{9}{10} - \frac{36}{10^{k+2}}\right) \cdot S_k >$$

$$> \left(\frac{9}{10} - \frac{36}{10^{k+2}}\right)^j \cdot S_k.$$ (Wir schätzen alle Faktoren durch den kleinsten nach unten ab.)

Wir setzen nun $q = \frac{9}{10} - \frac{36}{10^{k+2}}$. Damit erhalten wir für den Wert S' der vom Neunerfresser übriggelassenen Reihe folgende Abschätzung nach unten (da $q < 1$ ist):

$$S' > S_o + S_1 + \ldots + S_{k-1} + S_k\,(1+q+q^2+\ldots)$$
$$= S_o + S_1 + \ldots + S_{k-1} + \frac{1}{1-q} \cdot S_k$$
$$= S_o + S_1 + \ldots + 10 \cdot \frac{1}{1+\frac{36}{10^{k+1}}} \cdot S_k. \qquad (5)$$

Wir verwenden nun die beiden Ungleichungen (2) und (5), um für den Wert S Bereiche zu erhalten, in denen er liegen muß. Kennen wir nur S_o, können wir für S' folgende Angabe machen:

$$S_o < S' < 10 \cdot S_o, \quad \text{also } 2{,}7 < S' < 27{,}2.$$

Nehmen wir noch S_1 hinzu, erhalten wir die genauere Abschätzung

$$S_o + \frac{10}{1+0{,}36} \cdot S_1 < S' < S_o + 10 \cdot S_1, \quad \text{d. h. } 17{,}8 < S' < 23{,}3.$$

Rechnen wir noch S_2 aus, so erhalten wir für S' das Intervall

$$22{,}31 < S' < 22{,}96.$$

Wir wollen uns abschließend noch überlegen, wie schnell mit jeder weiteren Teilsumme S_k die Intervalle, in denen S' liegen muß, zusammenschrumpfen.

Der Einfachheit halber führen wir folgende Abschätzung durch

$$\frac{10}{1+\frac{36}{10^{k+1}}} \qquad 10\left(1 - \frac{36}{10^{k+1}}\right) \quad {}^{+)}$$

und verwenden die rechte Seite in (5) als Faktor.

Haben wir jetzt die Teilsummen bis zur Summe S_k ausgerechnet, so können wir für die Länge L_k des Intervalls, in dem S' liegen muß, folgende Angabe machen:

$$L_k = \left[10 - 10\left(1 - \frac{36}{10^{k+1}}\right)\right] \cdot S_k = \frac{36}{10^k} \cdot S_k < \frac{36}{10^k} \cdot \frac{9}{10} S_{k-1} =$$
$$= \frac{9}{100}\left(\frac{36}{10^{k-1}} \cdot S_{k-1}\right) = \frac{9}{100} \cdot L_{k-1} < \frac{1}{10} L_{k-1}, \quad \text{also } L_k < \frac{1}{10^k} L_o.$$

Die Intervalle schrumpfen also auf einen Punkt, nämlich den Wert S' zusammen.

Am wenigsten wundert sich über die Wirkung des Neunerfressers jemand, der dabei an Wahrscheinlichkeitsrechnung denkt.

Bei einem Summanden-fresser der Perfektheit n ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Glied der harmonischen Reihe stehen bleibt, $\frac{1}{10^n}$ (für große n sehr klein, aber <u>fest</u>).

+) vgl. 1 $\quad 1-b^2 = (1+b)(1-b)$

Die Wahrscheinlichkeit jedoch, daß in einer willkürlich gewählten n-stelligen Zahl keine Ziffer eine 9 ist, beträgt $\frac{8}{9} \cdot (\frac{9}{10})^{n-1}$. Für $n \to \infty$ gehen diese Wahrsch. derartig stark gegen 0, daß ganz entscheidend viel weniger Glieder übrig bleiben als nach der Fütterung des Summandenfressers.

Dr. Monika Deweß u. a.
KMU Leipzig

Lösungen

Aufgabe 0 23

Für die Summe einer arithmetischen Reihe gilt

$$s = \frac{a+a_n}{2} \cdot n = \frac{2a+d(n-1)}{2} n. \qquad (1)$$

Für Vorgänger und Nachfolger in einer arithmetischen Reihe gilt $a_{i+1} = a_i+d$. Die Summe der ersten vier Elemente ist also

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3+a_4 &= a_1+(a_1+d) + (a_1+2d) + (a_1+3d) \\ &= 4a_1 + 6d = 124 \end{aligned}$$

$$\text{oder} \qquad 2a + 3d = 62. \qquad (2)$$

Für die letzten 4 Elemente erhalten wir entsprechend

$$\begin{aligned} &4a_1 + 4d(n-1) - 6d \\ &= 4a_1 + 4dn - 10d = 156 \end{aligned}$$

$$\text{oder} \qquad 2a_1 + 2dn - 5d = 78. \qquad (3)$$

Aus (1) erhalten wir durch Kenntnis der Summe dieser Reihe

$$(2a+d(n-1))\cdot n = 420. \qquad (4)$$

Durch (2), (3) und (4) sind die Parameter a_1, d und n eindeutig bestimmt.

Sie haben die Werte

$$a_1 = 25$$
$$d = 4$$
$$n = 6.$$

Die Reihe lautet also 25, 29, 33, 37, 41, 45.

Aufgabe 0 22

$5^x - 5^{3-x} = 20.$

Wir multiplizieren mit 5^x und formen um

$5^{2x} - 5^x \cdot 20 - 125 = 0.$

Wir setzen $5^x = y$ und erhalten

$y^2 - 20y - 125 = 0.$

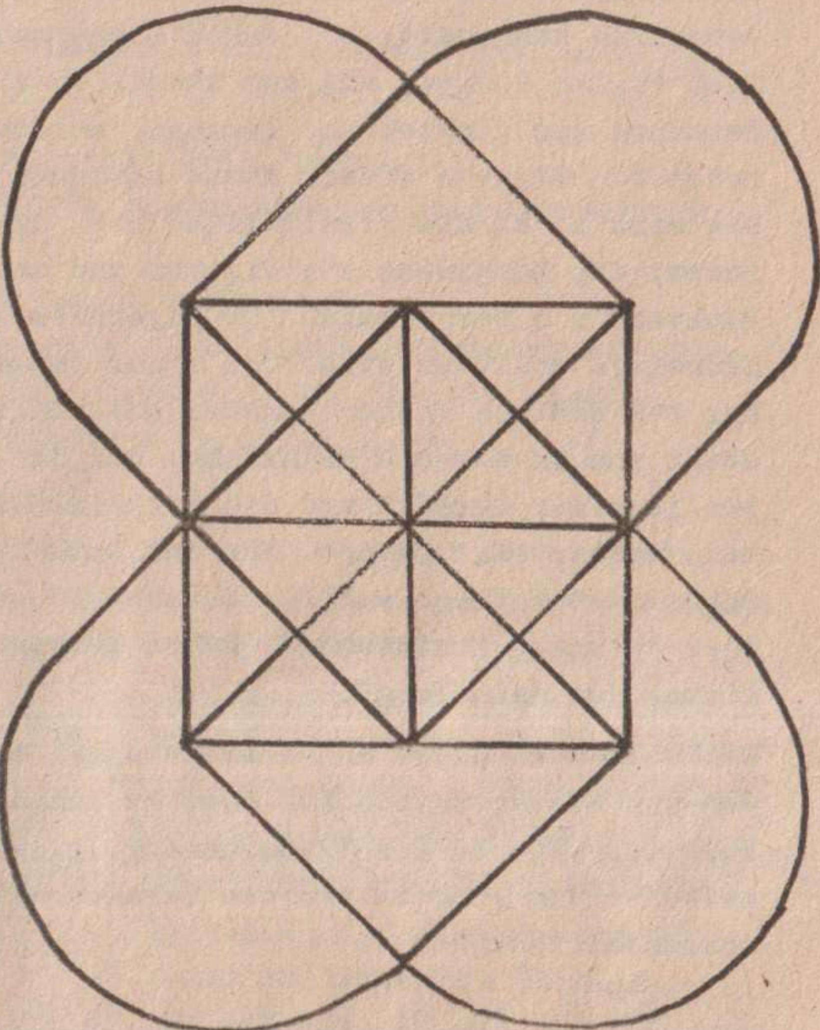
Wir erhalten $y_1 = 25$ und $y_2 = -5$, wobei wir natürlich y_2 nicht weiter betrachten brauchen.

Also ist $5^x = 25$ und somit $x = 3$.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner
Anschrift: **WURZEL,** 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 30. 3. 1983
Titelbild: Wolfgang Schäfer

ISSN 0232–4539	Wurzel	Jena	17 (1983) 5	S. 65–80



6
83

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

17. Jahrgang
ISSN 0232–4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Uber eine endliche Geometrie

Im Planimetrieunterricht der Schule wird ausschließlich eine Geometrie behandelt, bei der die betrachtete Ebene aus unendlich vielen Punkten und aus unendlich vielen Geraden besteht. Zwischen den Punkten und Geraden, zwischen den Geraden oder zwischen den Figuren dieser Ebene bestehen gewisse Relationen. Das sind z. B. die Parallelität bzw. das Senkrechtsein von Geraden, die Kongruenz von Figuren und das Enthaltensein von Punkten in einer Geraden. Im Gegensatz zu der oben angedeuteten Geometrie soll nun etwas von einer Geometrie einer Ebene, die nur aus endlich vielen Punkten und endlich vielen Geraden besteht und in der als Relationen nur das Enthaltensein von Punkten in einer Geraden und die Parallelität von Geraden vorkommen, dargestellt werden. Für das Enthaltensein sagen wir auch "der Punkt P liegt auf der Geraden g" oder "g geht durch P" oder "P und g inzidieren" (haben gemeinsame Lage) und symbolisieren das mit "$P \in g$".

Wir wollen zunächst an einem Beispiel einiges erläutern. Die von uns betrachtete Ebene besteht aus den 9 Punkten $P_1, P_2, \dots, P_9$ und den 12 Geraden $g_1, g_2, \dots, g_{12}$. Die Inzidenz zwischen den Punkten und den Geraden wird durch folgende Inzidenztafel festgelegt.

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
P_1	x			x				x				x
P_2	x				x				x	x		
P_3	x					x	x				x	
P_4		x		x			x			x		
P_5		x			x			x			x	
P_6		x				x			x			x
P_7			x	x					x		x	
P_8			x		x		x					x
P_9			x			x		x		x		

Wenn ein Punkt und eine Gerade inzidieren, steht im Kreuzungsfeld der dem Punkt zugeordneten Zeile und der der Geraden zugeordneten Spalte ein Kreuz, anderenfalls bleibt das Feld leer.

Man kann etwa ablesen, daß die Punkte P_1, P_4 und P_7 auf der Geraden g_4 liegen und daß g_4 außer diesen drei Punkten keinen weiteren enthält.

Aus der Inzidenztafel für unsere 9-Punkte-Ebene läßt sich sofort folgendes ablesen:

- Auf jeder Geraden liegen genau drei Punkte.
- Je zwei verschiedene Punkte lassen sich durch genau eine Gerade verbinden.
- Durch jeden Punkt gehen genau 4 Geraden.
- Es gibt genau 4 Scharen paralleler Geraden. Jede dieser Scharen besteht aus genau drei Geraden. (Die Parallelgeradenscharen sind die Geradenmengen $\{g_1, g_2, g_3\}$, $\{g_4, g_5, g_6\}$, $\{g_7, g_8, g_9\}$, $\{g_{10}, g_{11}, g_{12}\}$).

Vielfach benutzt man an Stelle der Inzidenztafel den nachstehenden Graphen zur Darstellung der Inzidenzverhältnisse zwischen den Punkten und den Geraden der 9-Punkte-Ebene.

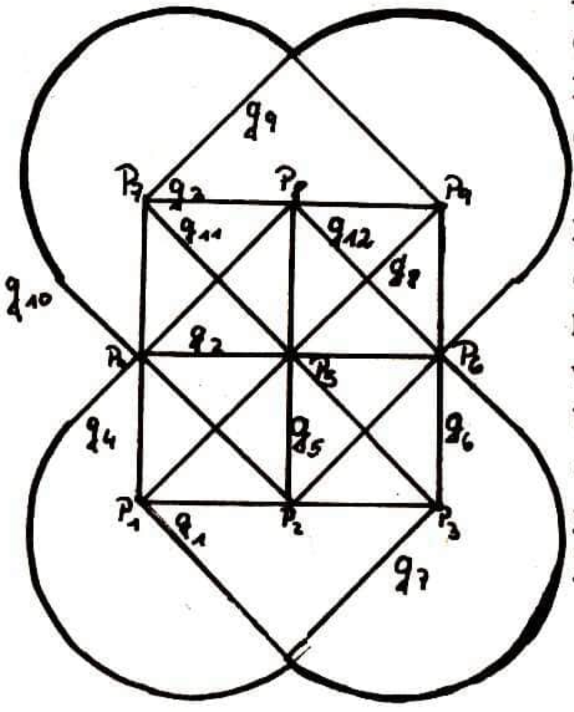


Abb. 1

Die in den Gitterpunkten des quadratischen 3-3-Gitters angelagerten kleinen Kreise stellen die 9 Punkte der Ebene dar. Die die Punkte einer Geraden verkörpernden kleinen Kreise sind durch Kurvenstücke verbunden. Man beachte jedoch, daß das jeweilige Kurvenstück nicht die betrachtete Gerade ist! Jede Gerade enthält genau drei Punkte, und allein diese drei Punkte bilden die jeweilige Gerade.

Es soll nun in der 9-Punkte-Ebene eine Aussage betrachtet werden, für die es in der Elementargeometrie kein Analogon gibt. Dazu bezeichnen wir drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkte als ein Dreieck. Weiterhin bestimmt jedes Paar voneinander verschiedener Punkte genau eine Gerade, auf der neben den beiden Bestimmungspunkten genau ein weiterer Punkt liegt. Diesen dritten Punkt nennen wir den Mittelpunkt des betreffenden Punktepaares. Damit können wir jedem Dreieck drei Geraden zuordnen, von denen jede durch genau einen Dreieckspunkt und den Mittelpunkt der beiden anderen Dreieckspunkte geht. Diese Geraden nennen wir in Anlehnung an die Elementargeometrie Seitenhalbierende des Dreiecks. Betrachten wir einmal das Dreieck $P_1P_3P_7$, so sind dessen Seitenhalbierende die Geraden g_7, g_8 und g_9. Im Gegensatz zur Elementargeometrie schneiden sich die Seitenhalbierenden dieses Dreiecks nicht in genau einem Punkt. Sie sind sogar parallel. Da die Ebene endlich viele Punkte enthält, besitzt sie auch endlich viele Dreiecke. Man könnte nun jedes dieser Dreiecke betrachten und käme auf das ungewöhnliche Resultat, daß in jedem Dreieck der 9-Punkte-Ebene die Seitenhalbierenden parallel sind. Diese Vorgehensweise ist jedoch mühsam und schwerfällig zugleich, so daß man auf andere Methoden, die hier nicht dargestellt werden sollen, zurückgreift, um das Ergebnis auf zweckmäßigere Weise zu erhalten.

Nach diesem Einblick in die 9-Punkte-Ebene wollen wir uns der Problematik von einem etwas allgemeineren Standpunkt aus zuwenden. Gegeben ist die Menge $\mathbb{P}$, deren Elemente wir Punkte nennen und mit $A, B, C, \ldots, P_1, P_2, P_3 \ldots$ bezeichnen. Desweiteren betrachten wir gewisse Teilmengen der Menge $\mathbb{P}$. Diese nennen wir Geraden und bezeichnen sie mit $a, b, c, \ldots, g_1, g_2, g_3 \ldots$. Mit dieser Festlegung ist nicht gesagt, was ein Punkt ist, und es ist offen, ob auf einer Geraden endlich oder unendlich viele Punkte liegen. Zwischen den Punkten und den Geraden besteht die Enthaltenseinsrelation, die durch die Axiome A1, A2, A3 und A4 charakterisiert ist. Durch die Axiome A1 bis A4 werden bezüglich der Lage der Punkte zu den Geraden Eigenschaften festgelegt, die im folgenden als grundsätzlich vorausgesetzt werden. Bevor wir aber A1 bis A4 formulieren, wird mit der Enthaltenseinsrelation der Begriff "Parallelität von Geraden" definiert.

D e f i n i t i o n 1: Zwei Geraden g und h heißen parallel genau dann, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben.

Wir legen nun folgendes fest:

A1: Je zwei verschiedene Punkte bestimmen genau eine Gerade.

A2: Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

A3: Zu jeder Geraden gibt es durch jeden nicht auf ihr liegenden Punkt genau eine Parallele.

A4: Auf jeder Geraden liegen genau n Punkte ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

Mit der Definition 2 führen wir für die Punkte und Geraden, die den Axiomen A1 bis A4 genügen, eine Bezeichnung ein.

D e f i n i t i o n 2: Die Menge der Punkte, die durch die Eigenschaften A1 bis A4 beschrieben wird, heißt endliche affine Inzidenzebene $\mathbf{A}(2,n)$ der Ordnung n.

Wir wollen die auftretenden Begriffe etwas erläutern. Inzidenzebene bedeutet, daß nur das Enthaltensein von Punkten in Geraden der Ebene eine Rolle spielt. Die Parallelität von Geraden ist ja mit der Enthaltenseinsrelation definiert worden. Das Wort "affin" (affinitas ... lateinisch Verwandschaft) geht auf Leonhard EULER (1707 - 1783) zurück, der es 1748 erstmalig in seiner "Analysis des Unendlichen" zur Bezeichnung spezieller Transformationen, die parallele Geraden auf parallele Geraden abbilden, verwendete. "Endlich" und "von der Ordnung n" wird die Ebene deshalb bezeichnet, weil in ihr nur endlich viele Punkte (und damit auch endlich viele Geraden) existieren und auf jeder ihrer Geraden wegen A4 genau n Punkte liegen.
Von den Axiomen A1 bis A3 ausgehend lassen sich die Sätze 1 bis 4 beweisen. Diese auch aus der Elementargeometrie bekannten Aussagen sind für den Aufbau unserer Geometrie nötig. Beim ersten Lesen sollten aber die Beweise dieser Sätze übergangen werden.

S a t z 1: Zwei verschiedene Geraden a und b haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

Beweis. Wir nehmen an, daß sich die Geraden a und b in den zwei verschiedenen Punkten P_1 und P_2 schneiden. Nach A1 gibt es aber zu P_1 und P_2 genau eine Verbindungsgerade. Also sind a und b identisch. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Sie besagt, daß die Geraden a und b verschieden sind, also entweder parallel sind oder sich in genau einem Punkt schneiden. Unsere Annahme ist somit falsch. a und b haben also höchstens einen gemeinsamen Punkt.

Aus Satz 1 folgt sofort

S a t z 2: Zwei nichtparallele Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

Darüber hinaus gilt

S a t z 3: Zu jedem Punkt existiert wenigstens eine Gerade, die nicht durch ihn geht.

Beweis. A, B und C sind drei wegen A2 existierende, nicht auf einer Geraden liegende Punkte. Ein beliebiger Punkt P liegt entweder auf keiner, auf genau einer oder auf genau zwei der Verbindungsgeraden der Punkte A, B, C. In jedem Fall geht wenigstens eine der Geraden g(AB), g(BC), g(CA) nicht durch P.

Weiterhin existieren nach A2 drei Punkte A,B,C, die nicht auf einer Geraden liegen. Wegen A3 gibt es zu g(AB) durch C genau eine Parallele c und zu g(BC) durch A genau eine Parallele a. Da a und c nicht parallel sind, schneiden sich nach Satz 2 beide Geraden in genau einem Punkt D. D ist von den Punkten A,B,C verschieden, und die Punkte A,C,D liegen nicht auf einer Geraden. Daß die Punkte A,B,C bzw. B,C,D nicht auf einer Geraden liegen, folgt sofort aus der Parallelität der Geraden g(AB) und c bzw. g(BC) und a.

Man erhält somit

S a t z 4: Es gibt 4 Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

Wir definieren nunmehr einige Figuren.

D e f i n i t i o n 3: Drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte heißen ein Dreieck.
Vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, heißen Viereck.
Ein Viereck ABCD heißt genau dann ein Parallelogramm ABCD, wenn sowohl die Geraden g(AB) und g(CD) als auch die Geraden g(BC) und g(AD) parallel sind.

Die Existenz von wenigstens einem Dreieck ist wegen A2 und die von wenigstens einem Parallelogramm (und damit auch die von wenigstens einem Viereck) in der A (2,n) ist nach dem Konstruktionsverfahren in der Herleitung von Satz 4 gesichert.

Wir wenden uns jetzt Anzahlaussagen über Punkte, Geraden, Dreiecke, Vierecke und Parallelogramme in der endlichen affinen Inzidenzebene A (2,n) der Ordnung n zu. Zur Herleitung dieser Aussagen werden wir uns vorrangig auf das Axiom A4 stützen, aber auch vom Satz 3 Gebrauch machen.

S a t z 5: Durch jeden Punkt von A (2,n) gehen genau n+1 Geraden.

Beweis. O.B.d.A. wählen wir einen Punkt P von A (2,n). Nach Satz 3 existiert in A (2,n) eine Gerade g, die nicht durch P geht. Jeder der n Punkte von g läßt sich mit P durch genau eine Gerade verbinden. Diese n Geraden sind paarweise voneinander verschieden. Weiterhin existiert durch P genau eine Parallele zu g. Es gibt somit durch den beliebigen Punkt P genau n+1 Geraden.

Mit Hilfe des Satzes 5 können wir die Anzahl der Punkte von A(2,n) angeben. Wir wählen wieder einen beliebigen Punkt P von A(2,n). Jeder andere Punkt der Ebene läßt sich wegen A1 mit P durch genau eine Gerade verbinden. Es gibt also keinen Punkt von A (2,n), der nicht auf einer der Büschelgeraden des Geradenbüschels (P) liegt. Nach Satz 2 gehören dem Geradenbüschel (P) genau n+1 Geraden an, und auf jeder dieser Büschelgeraden liegen neben dem Punkt P noch genau n-1 Punkte.
Man erhält damit

S a t z 6: Die A (2,n) besitzt genau n^2 Punkte.

Hiermit wird auch die Anordnung der die Punkte der 9-Punkte-Ebene darstellenden Kreise unseres einführenden Beispiels in einem 3-3-Gitter gerechtfertigt.

Jede der nach Satz 6 durch einen Punkt P gehenden Geraden gehört genau einem Parallelgeradenbüschel an. Es erhebt sich die Frage, aus wieviel Geraden jedes dieser Parallelgeradenbüschel besteht. P sei ein beliebiger Punkt von A (2,n). Wegen Satz 3 existiert zu P wenigstens eine Gerade g, die nicht durch P geht. Wir verbinden nunmehr einen der n Punkte von g mit P durch ge-

nau eine Gerade a. Wegen A3 gibt es durch jeden der restlichen n-1 Punkte von g genau eine Parallele zu a.
Somit ergibt sich

<u>S a t z 7:</u> Jedes Parallelgeradenbüschel von A (2,n) besteht aus genau n Geraden.

Als nächstes interessieren wir uns für die Anzahl der Geraden der Ebene A (2,n). Da jedes Parallelgeradenbüschel aus genau n Geraden besteht, in der Ebene genau n+1 Parallelgeradenbüschel vorkommen und jede Gerade der Ebene genau einem Parallelgeradenbüschel angehört, folgt

<u>S a t z 8:</u> Es gibt in A (2,n) genau n^2+n Geraden.

Schließlich betrachten wir noch Anzahl von Figuren. Dabei machen wir von kombinatorischen Hilfsmitteln Gebrauch.

<u>S a t z 9:</u> In der Ebene A (2,n) existieren genau $n^2(n-1)\binom{n+1}{3}$ Dreiecke.

<u>Beweis</u>. Die Ebene (2,n) enthält $\binom{n^2}{3}$ Punktetripel. Zu jeder der n^2+n Geraden gehören $\binom{n}{3}$ Punktetripel, die keine Dreiecke sind und somit ausgelassen werden müssen.
Die Anzahl der Dreiecke ergibt sich zu

$$\binom{n^2}{3} - n(n+1)\binom{n}{3} = n^2(n-1)\binom{n+1}{3}.$$

In analoger Weise bestimmt man die Anzahl der Vierecke von A (2,n).
Es gibt in A (2,n)$\binom{n^2}{4}$ Punktequadrupel. Um auf die Anzahl der Vierecke zu kommen, sind die Punktequadrupel auszuschließen, bei denen wenigstens drei Punkte auf einer Geraden liegen. Auf jeder der n^2+n Geraden von A (2,n) gibt es $\binom{n}{4}$ Punktequadrupel. Weiterhin existieren auf jeder Geraden $\binom{n}{3}$ Punktetripel, von denen jedes mit jedem der nicht auf dieser Geraden liegenden n^2-n Punkte von A (2,n) ebenfalls ein auszuschließendes Punktequadrupel bildet. Es existieren in A (2,n) somit

$$\binom{n^2}{4} - n(n+1)\left[\binom{n}{4} + n(n-1)\binom{n}{3}\right] \text{ Vierecke.}$$

<u>S a t z 10:</u> Die Ebene (2,n) enthält genau $\frac{n^2}{4}(n^3-4n^2+6n-3)\binom{n+1}{3}$ Vierecke.

Letztlich soll noch die Anzahl der Parallelogramme von $A(2,n)$ bestimmt werden. Wir nehmen das Ergebnis vorweg.

Satz 11: In $A(2,n)$ gibt es genau $\frac{3}{4}n^2(n-1)\binom{n+1}{3}$ Parallelogramme.
[redacted]

Beweis. Nach Satz 9 enthält die Ebene $A(2,n)$ genau $n^2(n-1)\binom{n+1}{3}$ Dreiecke. Jedes Dreieck ABC kann durch dreimalige Anwendung des im Beweis von Satz 4 benutzten Konstruktionsverfahrens für Parallelogramme zu genau den drei Parallelogrammen $ABCD_1$, $BCAD_2$ und $CABD_3$ ergänzt werden. (Die Reihenfolge der Parallelogrammpunkte ist zu beachten.)
Andererseits ist jedes Parallelogramm von 4 Dreiecken ausgehend bildbar. Die Anzahl der Parallelogramme ergibt sich also zu $\frac{3}{4}n^2(n-1)\binom{n+1}{3}$.

Wir wollen noch etwas zur kleinsten affinen Inzidenzebene bemerken. Sie hat die Ordnung 2. Sie besteht aus 4 Punkten und aus 6 Geraden, wobei jede Gerade genau 2 Punkte enthält. Wir erwähnen sie extra, um eine weitere Besonderheit (man denke z. B. an die parallelen Seitenhalbierenden in den Dreiecken der Ebene $A(2,3)$) gewisser endlicher affiner Inzidenzebenen gegenüber der aus dem Schulunterricht bekannten Ebene zu demonstrieren.

Inzidenztafel für die $A(2,2)$:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
P_1	x			x		x
P_2		x		x	x	
P_3			x		x	x
P_4	x	x	x			

Graph für die $A(2,2)$:

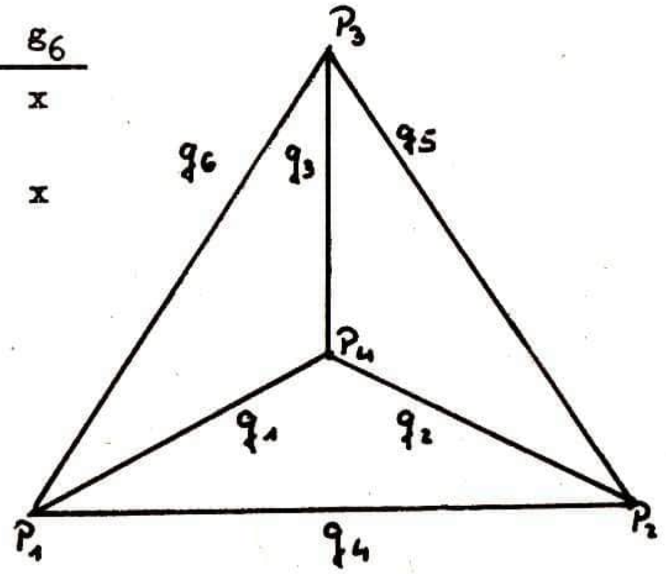


Abb. 2

Aus der Inzidenztafel oder dem Graph entnimmt man ohne Mühe, daß im Parallelogramm $P_1P_2P_3P_4$ die Geraden $g(P_1P_3)$ und $g(P_2P_4)$, also die Diagonalen, parallel sind. Gleiches trifft auch für die Diagonalen der beiden anderen Parallelogramme $P_1P_2P_4P_3$ und $P_1P_4P_2P_3$ zu.

Abschließend machen wir noch eine Bemerkung über die Existenz endlicher affiner Inzidenzebenen der Ordnung n. Mit dem bisher Dargestellten könnte der Eindruck entstehen, daß jede natürliche Zahl n 2 Ordnung einer endlichen affinen Inzidenzebene ist. Dem ist aber nicht so. Es sollen diesbezüglich einige Resultate genannt werden. Die Beweise für diese Aussagen sind z. T. sehr tiefliegend und können hier nicht dargestellt werden.

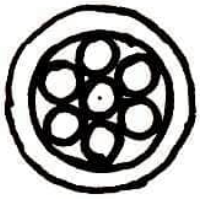
Falls n eine Primzahl oder eine Primzahlpotenz ist, existiert eine endlich affine Inzidenzebene der Ordnung n. Weiterhin weiß man, daß es, wenn n keine Primzahl oder Primzahlpotenz ist, jedoch n-1 oder n-2 durch 4 teilbar ist und nicht als Summe zweier Quadrate darstellbar ist, keine endlich affine Inzidenzebene der Ordnung n gibt. Dieses Resultat fanden die amerikanischen Mathematiker R.H. Bruck und J.H. Ryser im Jahr 1949. Es existieren also beispielsweise keine endlichen affinen Inzidenzebenen mit der Ordnung 6 oder der Ordnung 14. Schließlich gibt es natürliche Zahlen, die 10 ist die kleinste von ihnen, für die man bis heute nicht weiß, ob eine endliche affine Inzidenzebene mit dieser Ordnung existiert, oder ob sie nicht existiert. Wir haben hier ein Beispiel für einen aktuellen Forschungsgegenstand.

Reinhard Möller
Pädagogische Hochschule Dresden

Preisaufgaben

P 31 (2)

In einen ebenen Ring, welcher aus 2 konzentrischen Kreisen besteht, sind 7 identische, sich berührende Kreisscheiben eingelegt.



Die Fläche des Ringes ist gleich der Summe der Flächen aller 7 Scheiben. Es ist zu beweisen, daß die Breite des Ringes gleich dem Radius einer Scheibe ist.

P 32 (1)

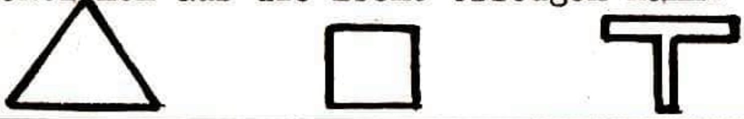
Man finde diejenige dreistellige Zahl, welche um 198 kleiner ist als diejenige Zahl, welche entsteht, wenn man die erste mit der dritten Ziffer der ersten Zahl vertauscht. Außerdem soll die Quersumme der gesuchten Zahl gleich 12 und die Summe der Quadrate der Ziffern gleich 74 sein.

P 33 (1)

Ein Schachmeister spielt simultan an mehreren Brettern. Am Ende der ersten Stunde hat er 10% aller gespielten Partien gewonnen und 8% Partien remis gespielt. In den nächsten beiden Stunden gewinnt der Meister 10% der übrigen Spiele, verlor 2 Spiele und die übrigen 7 Partien spielte er remis. An wieviel Brettern spielte der Meister?

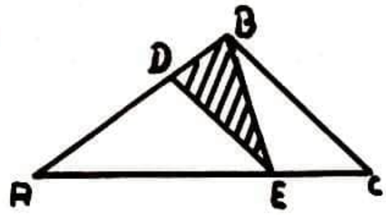
P 34 (1)

Gesucht ist ein Körper, mit welchem man folgende drei Projektionen auf die Ebene erzeugen kann:



P 35 (2)

Ein gegebenes Dreiech ABC soll so von einer zu BC parallelen Geraden durch D und E geschnitten werden, daß der Flächeninhalt des Dreiecks BDE gleich einer beliebig vorgegebenen Größe k^2 ist. Bei welchem Verhältnis von A (Flächeninhalt des ABC) und k^2 ist diese Aufgabe lösbar und wieviele Lösungen hat sie?



P 30 ②

Найти наименьшее значение выражения $x + \frac{1}{4x}$ при положительных значениях x.

Lösungen

Aufgabe O 20

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4$$
$$= (x+y+1)^2 + 2(y+1)^2 + 1 \geq 1$$

Weil die Quadrate reeller Zahlen nichtnegativ sind, ist die Ungleichung immer erfüllt.

Aufgabe O 21

Wegen $\log_{y^2} x = \frac{\log_x x}{\log_x y^2} = \frac{1}{2 \log_x y}$

und $\log_{\frac{1}{x}} y = \frac{\log_x y}{\log_x \frac{1}{x}} = \log_x y$

erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$3(\log_x y + \frac{1}{\log_x y}) = 10.$$

Wir setzen $\log_x y = t$ und erhalten daraus

$$3t^2 - 10t + 3 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln $t_1 = 3$ und $t_2 = \frac{1}{3}$.
Im ersten Fall ist $\lg_x y = 3$ und somit $y = x^3$ und somit $x^4 = 81$. Weil $x > 0$ und $y > 0$, erhalten wir als Lösung $x_1 = 3$, $y_1 = 27$.
Im zweiten Fall ist $\log_x y = \frac{1}{3}$ und wir erhalten

$x_2 = 27$ und $y_2 = 3$.

Zentrale Lösungsvorschläge Bezirksolympiade
Klassenstufe 11/12 (Fortsetzung)

4. a) Für jedes positive reelle c gilt: Eine positive Zahl x ist genau dann Nullstelle von f, wenn eine ganze Zahl k mit

$$\frac{c}{x} = k\pi \qquad (1)$$

existiert. Nun ist (1) äquivalent mit

$$x = \frac{c}{k\pi} \, . \qquad (2)$$

Daher führt eine ganze Zahl k genau dann auf eine Nullstelle x mit $10 \leq x \leq 20$, wenn sie

$10 \leq \frac{c}{k\pi} \leq 20$ erfüllt. Dies ist äquivalent mit

$$\frac{c}{20\pi} \leq k \leq \frac{c}{10\pi} \, .$$

Insbesondere führt eine ganze Zahl k_1 bzw. k_2 genau dann vermöge (2) auf 10 bzw. 20 als Nullstelle, wenn

$$k_1 = \frac{c}{10\pi} \text{ bzw. } k_2 = \frac{c}{20\pi}$$

gilt. Sind für ein positives reelles c diese beiden Zahlen ganz, so befinden sich im Intervall $10 \leq x \leq 20$ genau dann m Nullstellen, wenn es genau m ganze Zahlen k mit

$$\frac{c}{20\pi} \leq k \leq \frac{c}{10\pi} \qquad (3)$$

gibt. Das trifft genau dann zu, wenn erstens

$$\frac{c}{20\pi} \text{ eine ganze Zahl} \qquad (4)$$

ist und zweitens

$$\frac{c}{10\pi} = \frac{c}{20\pi} + m-1 \qquad (5)$$

gilt.

Angenommen, für ein positives reelles c seien (4) und (5) erfüllt. Dann folgt $2c = c + 20(m-1)\pi$, also

$$c = 20(m-1)\pi \, .$$

Umgekehrt ist für dieses c in der Tat $\frac{c}{20\pi} = m-1$ eine ganze Zahl, also (4) erfüllt; und es gilt (5).

Daher hat genau die Zahl $c = 20(m-1)\pi$ die in a) verlangte Eigenschaft.

b) Für sie gilt weiter: Eine ganze Zahl k führt genau dann vermöge (2) auf eine Nullstelle $x \geq 20$, wenn sie $\frac{c}{k\pi} \geq 20$ erfüllt. Das ist äquivalent mit

$$0 < k \leq \frac{c}{20\pi} = m-1. \qquad (6)$$

Da es nur endlich viele solche ganzen Zahlen gibt, hat f im Intervall $20 \leq x < \infty$ nur endlich viele Nullstellen, wie behauptet.

Für die jeweils zu zwei ganzen Zahlen $k, k' > 0$ gehörenden Nullstellen $x = \frac{c}{k\pi}$, $x' = \frac{c}{k'\pi}$ gilt genau dann $x < x'$, wenn $k > k'$ gilt. Also gehört die größte Nullstelle von f zum kleinsten Wert von k mit (6), d. h. zum Wert $k = 1$. Somit ist die in b) gesuchte größte Nullstelle

$$x = \frac{c}{\pi} = 20(m-1).$$

---

5. a) Wegen $a \neq 0$ ist

$$ax^2+2bxy+cy^2 = \frac{1}{a}(a^2x^2+2abxy+b^2y^2-b^2y^2+acy^2)$$
$$= \frac{1}{a}((ax + by)^2 + y^2(ac - b^2)).$$

Ist $y \neq 0$, so ist $y^2 > 0$. Hieraus und aus $a > 0$, $(ax+by)^2 \geq 0$,

$ac-b^2 > 0$ folgt $ax^2+2bxy+cy^2 > 0$.

Ist $y = 0$ und daher nach Voraussetzung $x \neq 0$, so ergibt sich wegen $a > 0$ ebenfalls $ax^2+2bxy+cy^2 = ax^2 > 0$.

b) Ist r der Radius eines beliebigen Kreises k um (0;0), so kann man z. B. $y_1 = 0$ und eine Zahl x_1 mit $0 < x_1 < r$ wählen. Der Punkt P_1 mit diesen Koordinaten $(x_1;y_1)$ erfüllt dann $x_1^2+y_1^2 = x_1^2 < r^2$, er liegt also im Innern des Kreises k, und er erfüllt $ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 = ax_1^2 > 0$.

Ferner kann man z. B. eine Zahl t mit $0 < t < \frac{r}{\sqrt{a^2+b^2}}$ wählen und dann $x_2 = bt$, $y_1 = -at$ setzen. Der Punkt P_2 mit diesen Koordinaten $(x_2;y_2)$ erfüllt $x_2^2 + y_2^2 = (a^2+b^2)t^2 < r^2$, er liegt also im Innern des Kreises k, und er erfüllt

$$ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 = \frac{1}{a}((ax_2+by_2)^2 + y_2^2(ac-b^2))$$
$$= \frac{1}{a}((abt-bat)^2 + a^2t^2(ac-b^2))$$
$$= at^2(ac-b^2),$$

wegen $a > 0$, $t > 0$, $ac-b^2 < 0$ also $ax_2^2 + 2bx_2y_2 + ay_2^2 < 0$.

Andere Lösungsvarianten, z. T. mehr anschaulicher Art, sind möglich. Beispielsweise kann man zu b) feststellen, daß für alle von (0;0) verschiedenen Punkte der Geraden $y = 0$ bzw. der Geraden $ax+by = 0$ der Wert $\frac{1}{a}((ax+by)^2 + y^2(ac-b^2))$ positiv bzw. negativ wird und daß das Innere jedes Kreises um (0;0) mit diesen durch den Mittelpunkt gehenden Sekanten gemeinsame von (0;0) verschiedene Punkte hat.

6\. I. Wenn der Vorschlag realisiert ist, so gilt:
Zu jeder Menge M aus fünf Personen gibt es (mindestens) ein Schloß, zu dem keine der fünf Personen einen Schlüssel hat. Ein derartiges Schloß werde jeweils M zugeordnet. Gäbe es bei einer solchen Zuordnung zwei verschiedene Mengen M,M' (aus je fünf der elf Personen) mit gleichem zugeordneten Schloß, so hätte keine der Personen in $M \cup M'$ einen Schlüssel hierzu. Wegen $M \neq M'$ bestünde aber $M \cup M'$ aus mindestens sechs Personen, womit ein Widerspruch erreicht ist. Verschiedenen Mengen M,M' sind somit stets verschiedene Schlösser zugeordnet, also gibt es mindestens so viele Schlösser wie Mengen aus je fünf der elf Personen. Die Anzahl solcher Mengen ist $\binom{11}{5}$. Daher kann der Vorschlag nur dann realisiert sein, wenn die Anzahl der Schlösser mindestens $\binom{11}{5}$ beträgt.

II. Mit genau $\binom{11}{5}$ Schlössern ist der Vorschlag realisierbar, z. B. durch folgende Schlüsselverteilung:
Wegen $\binom{11}{5} = \binom{11}{6}$ kann man auch eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen allen Schlössern und allen Mengen Q aus je sechs der elf Personen wählen. Dann verteile man zu jedem Schloß passende Schlüssel genau an die Personen derjenigen Menge Q, die diesem Schloß zugeordnet wurde. In der Tat ist damit das Vorhaben realisiert.
Sei nämlich einerseits P eine beliebige Menge aus sechs der elf Personen und sei S ein beliebiges der $\binom{11}{5}$ Schlösser. Um zu zeigen, daß mindestens eine der Personen aus P einen zu S passenden Schlüssel hat, betrachte man diejenige Menge Q, die dem Schloß S zugeordnet war. Da sowohl P als auch Q je sechs Personen enthalten, ist $P \cap Q$ nicht leer; also gibt es in der Menge P mindestens eine Person, die auch zu Q gehört und daher einen zu S passenden Schlüssel hat.

Sei andererseits M eine beliebige Menge aus fünf der elf Personen. Um zu zeigen, daß für mindestens ein Schloß keine Person aus M einen passenden Schlüssel hat, betrachte man dasjenige Schloß S, das der Menge Q der sechs nicht zu M gehörenden Personen zugeordnet war. Die zu S passenden Schlüssel wurden genau an die Personen der Menge Q verteilt, also hat dabei keine Person aus M einen dieser Schlüssel erhalten.

Mit I. und II. ist bewiesen, daß die gesuchte kleinste Anzahl von Schlössern

$$\binom{11}{5} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462$$

beträgt. Zugleich ist in II. eine Schlüsselverteilung beschrieben, mit der der genannte Vorschlag realisierbar wäre.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner
Anschrift: **WURZEL,** 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471–22–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß. 20. 4. 1983

7/8

83

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

17. Jahrgang

ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,40 M

Berechnung von Funktionen (5. Fortsetzung)

4. JOSEPH FOURIER (1768 - 1830)

Inhalt dieses letzten Abschnitts zur Berechnung von Funktionen ist die sogenannte "Approximation im Quadratmittel". Zu ihrer Begründung empfiehlt sich zunächst ein Ausflug in die Geometrie.

Angenommen, uns sind eine Ebene E und ein Punkt P im Raum gegeben und gesucht ist derjenige Punkt P_E in E, der dem Punkt P am nächsten kommt.

Aus der Anschauung heraus ist sofort klar, daß P_E der Fußpunkt des Lotes aus P auf E sein muß. Für die Zwecke der Rechnung wird dies jedoch genauer beschrieben werden müssen.

Wir führen zunächst ein Koordinatensystem im Raum ein, indem wir drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Geraden als x-, y- und z-Achse einführen. Jeder räumliche Punkt P ist dann durch das Tripel seiner Koordinaten (x_p, y_p, z_p) eindeutig bestimmt. Eine andere Möglichkeit seiner Definition besteht in der Angabe einer gerichteten Strecke v aus dem Nullpunkt des Koordinatensystems (dem Schnittpunkt der drei Achsen) in diesem Punkt. Eine solche Strecke nennt man einen - räumlichen - Vektor. Da sowohl das Zahlentripel (x,y,z) als auch der Vektor v dasselbe Objekt beschreiben, kann man davon ausgehen, daß sie sich auch gegenseitig definieren. Um diesen Sachverhalt darzustellen, schreibt man

$$v = (x,y,z).$$

Für Vektoren definieren wir zwei Rechenoperationen:

Definition 1:

1. Es sei $v = (x,y,z)$ ein Vektor und λ eine reelle Zahl. Dann wird das Produkt $\lambda \cdot v$ definiert als ein Vektor mit den Komponenten
$$\lambda \cdot v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$
2. Es seien $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ zwei Vektoren. Ihre Summe $v_1 + v_2$ ist definiert als ein

Vektor mit den Komponenten

$$v_1+v_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2).$$

Ein Beispiel: Sei $v = (2,3,-1)$ und $w = (0,7,1)$, so ist

$$\begin{aligned} 3v-2w &= (3v) + (-2w) \\ &= (3\cdot 2, 3\cdot 3, 3\cdot(-1)) + ((-2)\cdot 0, (-2)\cdot 7, (-2)\cdot 1) \\ &= (6,9,-3) + (0,-14,-2) = (6,-5,-5). \end{aligned}$$

Die Schreibweise $v\cdot\lambda$ ist nicht üblich. Geometrisch können diese Operationen wie folgt gedeutet werden:

Wenn $\lambda > 0$ ist, so zeigt der Vektor $\lambda\cdot v$ in dieselbe Richtung wie der Vektor v, seine Länge beträgt jedoch das λ -fache dessen. Bei $\lambda = 0$ ist $\lambda v = (0,0,0)$ der Nullvektor mit der Länge Null. Gilt $\lambda < 0$, so zeigen v und $\lambda\cdot v$ in genau entgegengesetzte Richtungen und die Länge von $\lambda\cdot v$ ist das λ -fache der von v.

Die Summe v+w zweier Vektoren erhält man, wenn man den Vektor w unter Beibehaltung seiner Richtung so am Vektor v entlang schiebt, daß sein ursprünglich zusammen mit dem Fußpunkt von v im Nullpunkt befindlicher Fußpunkt in das Ende von v gelangt. Die Strecke Nullpunkt - Ende von w ist dann der Summenvektor (Abb. 1). Aus der Zeichnung erkennt man, daß

$$v + w = w + v$$

ist.

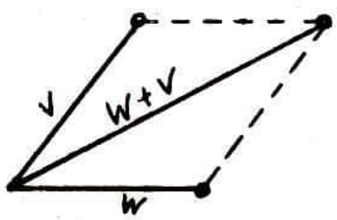


Abb. 1

Den Abstand zwischen Fuß- und Endpunkt eines Vektors v heißt "Länge des Vektors", man schreibt: $\|v\|$. Die Länge wird durch eine positive Zahl ausgedrückt, nur wenn Fuß- und Endpunkt zusammenfallen, ist $\|v\| = 0$. Die Länge kann leicht durch die Komponenten des Vektors ausgedrückt werden (Abb. 2):

Sei $v = (x_o, y_o, z_o)$, so zerlegen wir

$$v = w + u,$$

$w = (x_o, y_o, 0)$, $u = (0,0,z_o)$.
Da w und u einen rechten Winkel bilden, gilt nach dem Satz von PYTHAGORAS

$$\|v\|^2 = \|w\|^2 + \|u\|^2.$$

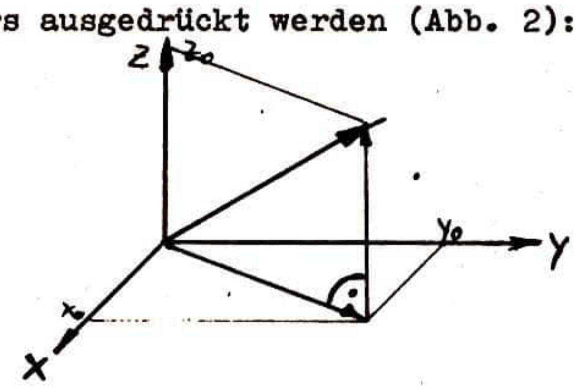


Abb. 2

Nun ist $|u|$ offensichtlich gleich dem Betrag der Zahl z_o. Andererseits ist w die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Längen $|x_o|$ und $|y_o|$ besitzen. Somit gilt

$$\|w\|^2 = x_o^2 + y_o^2 , \quad \|u\|^2 = z_o^2$$

und zusammengefaßt

$$\|v\|^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2,$$

also ist

$$\|v\| = \sqrt{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2}$$

die Formel zur Berechnung der Länge eines beliebigen Vektors. Mit Hilfe dieser Darstellung findet man z. B. leicht, daß die Länge d der Raumdiagonale eines Würfels mit der Kantenlänge a gerade

$$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}\, a$$

beträgt.

S a t z 1 : Es gilt für alle Vektoren v und w und für jede Zahl λ :

a) $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0$ dann und nur dann, wenn $v = (0,0,0)$ ist;

b) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$,

c) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Beweis. Aussage a) ist offensichtlich.
Sei $v = (x,y,z)$, so gilt

$$\|\lambda v\| = \sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2+(\lambda z)^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2+y^2+z^2)}$$
$$= \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |\lambda| \cdot \|v\|$$

und damit ist Aussage b) bewiesen.
Nach Abb. 1 bilden die Vektoren v,w und v+w ein Dreieck. In einem Dreieck ist aber eine beliebige Seite nie länger als die anderen beiden Seiten zusammen. Genau diesen Umstand bringt die deshalb auch "Dreiecksungleichung" genannte Formel c) zum Ausdruck.

D e f i n i t i o n 2 : Es seien v und w zwei Vektoren. Die relle Zahl S,

$$S = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \alpha ,$$

wobei α der Winkel zwischen dem Vektor v und dem Vektor w ist, wird Skalarprodukt der Vektoren v und w genannt. Man schreibt $S = (v,w)$.

Satz 2: Es seien v,w und u drei Vektoren und λ eine reelle Zahl, dann gilt

a) $\|v\| = \sqrt{(v,v)}$,

b) $(v,w) = 0$ dann und nur dann, wenn v und w senkrecht aufeinander stehen,

c) $(v,w) = (w,v)$,

d) aus $v = (x_0,y_0,z_0)$ und $w = (x_1,y_1,z_1)$ folgt
$$(v,w) = x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1,$$

e) $(\lambda v,w) = \lambda(v,w) = (v,\lambda w)$ und

f) $(v+w,u) = (v,u) + (w,u)$.

Beweis. a) Ein Vektor bildet mit sich selbst den Winkel $\alpha = 0$, also ist
$$(v,v) = \|v\| \cdot \|v\| \cdot \cos 0 = \|v\|^2.$$

b) Wenn einer der beiden Vektoren v oder w ein Nullvektor ist, so kann man ihm eine beliebige Richtung zuordnen, also auch eine zu seinem Partner orthogonale.

Sei nun $\|v\| \cdot \|w\| > 0$, also nach Satz 1 seien beide Vektoren ungleich dem Nullvektor. Wenn sie orthogonal zueinander sind, so ist entweder $\alpha = 90^\circ$ oder $\alpha = 270^\circ$ je nach der Richtung, in der der Winkel genommen wird. In jedem Falle ist dann aber $\cos\alpha = 0$, also auch $(v,w) = 0$. Andererseits folgt aus $\cos\alpha = 0$, daß $\alpha = 90^\circ$ oder $\alpha = 270^\circ$ gelten muß.

c) Es seien α und β die Winkel zwischen v und w und w und v entsprechend. Beide sind in der von den Vektoren v und w aufgespannten Ebene im selben Umlaufsinn zu nehmen. Demzufolge ist $\alpha + \beta = 360^\circ$ (Abb. 3). Somit gilt
$$\cos\alpha = \cos(360^\circ - \beta) = \cos(-\beta) = \cos\beta,$$
also folgt
$$\begin{aligned}(v,w) &= \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\alpha\\ &= \|w\| \cdot \|v\| \cdot \cos\beta\\ &= (w,v).\end{aligned}$$

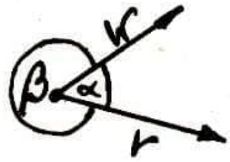


Abb. 3

d) Der Beweis dieser Behauptung erfordert ziemlich umfangreiche geometrische Vorarbeiten. Aus Platzgründen sei er durch einen Appell an das Vertrauen des Lesers ersetzt.

e)
$$\begin{aligned}(\lambda v,w) &= (\lambda x_o)x_1 + (\lambda y_o)y_1 + (\lambda z_o)z_1 \\ &= \lambda(x_o x_1 + y_o y_1 + z_o z_1) \\ &= \lambda(v,w).\end{aligned}$$

Nach c) und der so gewonnenen Formel beweist man dann mit

$$\lambda(v,w) = \lambda\,(w,v) = (\lambda\,w,v) = (v,\lambda\,w)$$

auch den zweiten Teil der Formel.

f) Mit $u = (x_2,y_2,z_2)$ erhält man

$$\begin{aligned}(v+w,u) &= (x_o+x_1)x_2 + (y_o+y_1)y_2 + (z_o+z_1)z_2 \\ &= x_o x_2 + y_o y_2 + z_o z_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \\ &= (v,u) + (w,u).\end{aligned}$$

Mit dem vorbereiteten Apparat können wir uns jetzt an die Lösung der gestellten Aufgabe heranmachen. Den Punkt P, der in der Ebene E angenähert werden soll, stellen wir durch den Vektor v dar. Zur Angabe der Ebene benötigt man zwei Vektoren, die nicht auf einer Geraden liegen, es seien dies w und u. Die Forderung, daß w und u tatsächlich eine Ebene bilden, beinhaltet, daß keiner der beiden gleich dem Nullvektor ist. Ein Punkt P der mit beliebigen reellen Koeffizienten α und β durch den Vektor

$$r_{\alpha\beta} = \alpha\,w + \beta\,u$$

dargestellt wird, liegt in der so definierten Ebene. In der Tat, durch die Vektoren w und u werden zwei Geraden definiert, die sich im Nullpunkt (d. h. im Ursprung des Koordinatensystems) schneiden. Die beiden Vektoren $\alpha\,w$ und $\beta\,u$ liegen in diesen Geraden (Abb. 4, dort ist $-1<\alpha<0$ und $\beta = 2$). Der Vektor $r_{\alpha\beta}$ ist die Diagonale des Parallelogramms OABC, und da dies eine ebene Figur ist, so liegen damit die Vektoren $r_{\alpha\beta}$, $\alpha\,w$ und $\beta\,u$ in einer Ebene, also auch $r_{\alpha\beta}$, w und u.

Umgedreht, sei B ein Punkt in dieser Ebene, so existiert eine zu der durch den Vektor u definierten Gerade parallele

Gerade in E, die durch B geht (5. Axiom des EUKLID!). Sie Schneidet die von w gebildete Gerade im Punkt A. Letztlich erhält man so das Parallelogramm OABC und man kann die Koeffizienten α und β aus der Kenntnis der Seiten OA und OB und der Vektoren w und u bestimmen, so daß sich der Punkt $B = P_{\alpha\beta}$ stets durch einen Vektor $r_{\alpha\beta}$ in der angegebenen Form darstellen läßt.

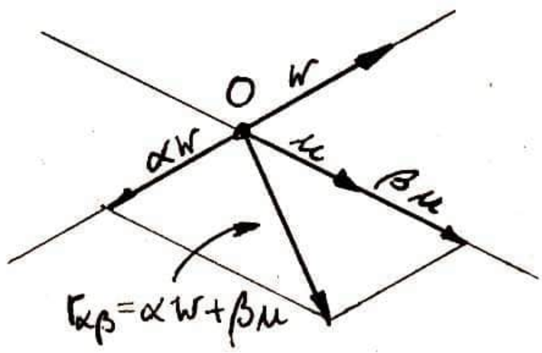


Abb. 4

Zusammenfassend resultiert, daß die Ebene E durch die Menge aller Vektoren $r_{\alpha\beta}$ mit $-\infty < \alpha, \beta < \infty$ repräsentiert wird.

Zum Auffinden des Punktes P_E, der von allen Punkten im E dem Punkt P am nächsten kommt, gehen wir in folgender Weise vor:

Zunächst ersetzen wir die Vektoren w und u, die E definieren, durch zwei in E liegende Vektoren w' und u' mit folgenden Eigenschaften:

$$\|w'\| = \|u'\| = 1, \quad w' \text{ und } u' \text{ zueinander orthogonal}$$

Zu diesem Zweck setzen wir

$$u' = \alpha u$$

und bestimmen den Faktor $\alpha > 0$ aus der Forderung

$$1 = \|u'\| = \|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\| = \alpha \|u\|$$

zu $\alpha = \|u\|^{-1}$, d. h.

$$u' = \frac{1}{\|u\|} u.$$

Weiter sei

$$w' = \beta u + \gamma w$$

und da u' und w' orthogonal sein sollen, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (u',w') = (w',u') = (\beta u + \gamma w, u') \\ &= (\beta u, u') + (\gamma w, u') = \beta (u,u') + \gamma (w,u') \\ &= \frac{\beta}{\|u\|} (u,u) + \frac{\gamma}{\|u\|} (w,u) \\ &= \beta \cdot \|u\| + \gamma \cdot \|u\|^{-1} (w,u). \end{aligned}$$

Somit erhält man die Gleichung

$$\beta = -\gamma \cdot \|u\|^{-2} (w,u)$$

und andererseits ergibt die Bedingung $\|w'\| = 1$, daß

$$\begin{aligned}
1 = \|w'\|^2 &= (w',w') = (\beta u+\gamma w, \beta u+\gamma w) \\
&= (\beta u, \beta u+\gamma w) + (\gamma w, \beta u+\gamma w) \\
&= \beta(\beta u+\gamma w, u) + \gamma(\beta u+\gamma w, w) \\
&= \beta^2(u,u) + \beta\gamma(w,u) + \gamma\beta(u,w) + \gamma^2(w,w) \\
&= \beta^2(u,u) + 2\beta\gamma(w,u) + \gamma^2(w,w) \\
&= \gamma^2 \|u\|^{-4}(w,u)^2 \cdot (u,u) - 2\gamma^2 \|u\|^{-2}(w,u)^2 + \gamma^2(w,w) \\
&= \gamma^2 \left[\|u\|^{-3}(w,u)^2 - 2\|u\|^{-2}(w,u)^2 + \|w\|^2\right]
\end{aligned}$$

wird. Hieraus bestimmt man sofort

$$\gamma = \left(\|u\|^{-3}(w,u)^2 - 2\|u\|^{-2}(w,u)^2 + \|w\|^2\right)^{-1/2}$$

und daraus errechnet sich der Koeffizient β ebenfalls. Damit ist auch der Vektor w' bestimmt.

Zu dem Vektorenpaar u',w' in E betrachten wir noch einen dritten Vektor s' mit $\|s'\| = 1$, der dadurch definiert ist, daß er senkrecht auf E steht. Er läßt sich ähnlich wie w' leicht berechnen, wir werden seine explizite Darstellung jedoch nicht benötigen und verzichten hier darauf.

Den Vektor v stellen wir nun in der folgenden Weise dar:

$$v = \lambda w' + \mu u' + \nu s'.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten λ, μ und ν bilden wir drei Skalarprodukte und berücksichtigen dabei, daß die drei Vektoren w', u' und s' jeweils paarweise zueinander orthogonal sind:

$$\begin{aligned}
(v,w') &= (\lambda w' + \mu u' + \nu s', w') \\
&= \lambda(w',w') + \mu(u',w') + \nu(s',w') \\
&= \lambda \|w'\|^2 + \mu\, 0 + \nu\, 0 = \lambda .
\end{aligned}$$

Analog erhält man $\mu = (v,u')$ und $\nu = (v,s')$ und damit die bemerkenswerte Darstellung

$$v = (v,w')w' + (v,u')u' + (v,s')s'.$$

Der erste Teil der Summe ist der Vektor

$$v_E = (v,w')w' + (v,u')u',$$

der offensichtlich in E liegt. Der Rest

$$(v,s')s' = v - v_E$$

steht senkrecht auf E und entspricht dem Lot von P auf E (Abb.5). Also ist v_E derjenige Vektor, dessen Endpunkt P_E am nächsten (in E) am Punkt P liegt.

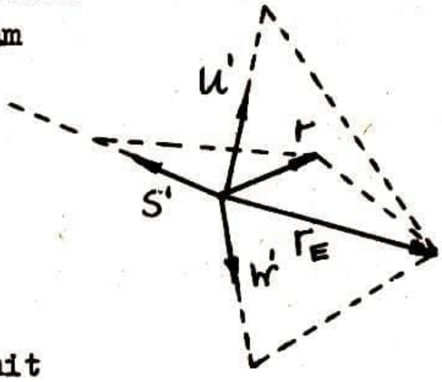


Abb. 5

Zur Illustration betrachten wir ein Beispiel:

Es sei $v=(7,1,5)$, $w=(1,1,0)$ und $u=(1,2,2)$. Nun gilt

$\|u\| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$ und somit

$$u' = (1/3,2/3,2/3).$$

Der Ansatz $w' = (\beta u + \gamma w)$ ergibt wegen $(w',u) = 0$

$$0 = \beta(u,u) + \gamma(u,w) = \beta(1\cdot1+2\cdot2+2\cdot2) + \gamma(1\cdot1+2\cdot1+2\cdot0)$$
$$= 9\beta + 3\gamma,$$

also ist $-3\beta = \gamma$

Hieraus folgt

$$w' = \beta u - 3\beta w = \beta(u-3w) = \beta\left[(1,2,2)-3(1,1,0)\right]$$
$$= \beta\left[(1,2,2)-(3,3,0)\right] = \beta(-2,-1,2)$$

und die Bedingung $\|w'\| = 1$ liefert

$$1 = |\beta| \cdot \|(-2,-1,2)\| = |\beta| \cdot \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2} = 3|\beta|$$

sei $\beta > 0$ und somit $\beta = 1/3$. Damit gilt

$$w' = (-2/3,-1/3,2/3).$$

Der Vektor v_E, der in E dem Vektor v am nächsten kommt, ist nun

$$v_E = (v,w')w' + (v,u')u'$$
$$= \left[7\cdot(-\tfrac{2}{3})+1\cdot(-\tfrac{1}{3})+5\cdot\tfrac{2}{3}\right](-\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3})$$
$$+ \left[7\cdot\tfrac{1}{3}+1\cdot\tfrac{2}{3}+5\cdot\tfrac{2}{3}\right](\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3})$$
$$= \frac{1}{9}\left[(-14-1+10)(-2,-1,2) + (7+2+10)(1,2,2)\right]$$
$$= \frac{1}{9}\left[-5(-2,-1,2)+19(1,2,2)\right] = \frac{1}{9}\left[(10,5,-10)+(19,38,38)\right]$$
$$= \frac{1}{9}(29,43,28) \quad (3.2222,4.7778,3.1111).$$

Der verbleibende Abstand von v_E bis v beträgt

$$\|v-v_E\| = \sqrt{(7-\tfrac{29}{9})^2 + (1-\tfrac{43}{9})^2 + (5-\tfrac{28}{9})^2}$$
$$= \tfrac{1}{9}\sqrt{(63-29)^2+(9-43)^2+(45-28)^2} = \tfrac{1}{9}\sqrt{1156+1156+289}$$
$$= \tfrac{1}{9}\cdot\sqrt{2601} \approx \tfrac{51}{9} \approx 5.67.$$

Nun soll das entwickelte geometrische Verfahren auf die Annäherung von Funktionen durch Polynome übertragen werden. Dieser Gedanke erscheint sicher befremdlich, da beides doch wenig miteinander zu tun haben dürfte. Aber die Stärke der Mathematik besteht vor allem darin, daß in ihr abstrahiert wird, und tatsächlich gibt es eine übergreifende Theorie derart, daß die Annäherung von Funktionen durch Polynome und die Konstruktion von nächsten Punkten in Ebenen nur Spezialfälle dieser Theorie darstellen. Also, versuchen wir die bisher entwickelte Methode zu verallgemeinern:

Anstelle der Menge aller dreidimensionaler Punkte betrachten wir eine Menge M. Über die Art ihrer Elemente machen wir keine Aussage, die die Allgemeinheit der zu entwickelnden Theorie einschränken könnte. Wir verlangen lediglich, daß mit ihnen dieselben Rechenoperationen ausgeführt werden können wie mit Vektoren.

<u>D e f i n i t i o n 3 :</u> Die Menge M heißt lineare Menge, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

a) Es ist eine Addition genannte Operation definiert, die für alle Elemente x und y aus M ein drittes Element von M bestimmt, für das wir x+y schreiben werden. Für diese Operation sollen die Rechenregeln der Addition gelten.

b) Es ist eine Operation definiert, die jeder reellen Zahl λ und jedem Element x aus M ein Element λx in M zuordnet, dabei gilt

$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \qquad 1\cdot x = x,$$
$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \qquad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x.$$

Speziell enthält jede lineare Menge ein Nullelement Θ. Man erhält es, indem man ein beliebiges Element mit der Zahl Null multipliziert. Es ist dies ein bezüglich der Addition neutrales Element, denn für alle x aus M gilt

$$x + \Theta = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1+0)x = 1 \cdot x = x.$$

Definition 4: Die Menge L heißt lineare Untermenge von M, wenn

a) L eine Untermenge (oder Teilmenge) von M ist und

b) L für sich auch eine lineare Menge darstellt.

Klären wir, was die beiden soeben definierten Begriffe mit den gestellten Aufgaben zu tun haben. Die lineare Menge M war im ersten Fall gleich der Menge aller dreidimensionaler Punkte oder - was dasselbe ist - gleich der Menge der räumlichen Vektoren. Die Ebene E stellte hierin eine lineare Untermenge dar. Eine lineare Untermenge enthält als lineare Menge natürlich stets das Nullelement. Dies hatten wir in diesem Falle durch die Forderung realisiert, daß die beiden die Ebene definierenden Geraden sich im Nullpunkt schneiden, so daß auch dieser zu E gehört. Die beiden Rechenregeln, die in Definition 3 für die Elemente einer linearen Menge formuliert wurden, sind in natürlicher Weise für Vektoren definiert worden.

Wenn es nun darum geht, eine gegebene Funktion durch Polynome anzunähern, so ist es naheliegende, als Menge M die Menge aller für $a \leq t \leq b$ stetigen Funktionen zu wählen. Hierbei haben wir die unabhängige Veränderliche mit t bezeichnet, um die Funktion selbst x,y usw. nennen zu können. Es bleibt zu prüfen, ob die so erhaltene Menge tatsächlich linear ist. Die Multiplikation einer solchen Funktion mit einer reellen Zahl λ ergibt erneut eine stetige Funktion. So ist für $x = \sin t$ und $\lambda = 4$

$$\lambda x = 4 \sin t.$$

Sei nun z. B. noch $y = 3t^2$ eine stetige Funktion, so ist auch die Summe

$$x + y = \sin t + 3t^2$$

eine solche. M ist damit wirklich eine lineare Menge. Als Null element Θ dient die Funktion $\Theta(t) \equiv 0$.

Es bezeichne n eine natürliche Zahl. Als lineare Untermenge betrachten wir die Menge L aller Polynome, deren Grad die Zahl n nicht übersteigt, d. h. wenn $r \in L$ gilt, so ist

$$r = r(t) = a_o t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n,$$

hierbei sind $a_o, a_1, \ldots, a_n$ die das betreffende Polynom charakterisierenden Koeffizienten. Der Fall

$$a_o^2 + a_1^2 + \ldots + a_m^2 = 0, \quad m \leq n$$

ist ausdrücklich zugelassen, insbesondere ist für $r = \Theta$

$$a_o = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Die Aufgabe lautet nun: Für ein gegebenes Element x aus M ist ein Polynom r aus L derart gesucht, daß es x möglichst nahe kommt.

Die letzte Formulierung erheischt die exakte Definition des verwandten Ausdrucks "möglichst nahe". Dieser Begriff drückt aus, daß der Abstand des gesuchten Polynoms zu x kleiner ist als der aller anderen Polynome. Der Abstand zweier Vektoren v und w (bzw. der durch sie definierten Punkte) ergab sich einfach als Länge ihrer Differenz v-w. Tatsächlich, sei $u = v-w$, dann ist $v = w+u$ und aus Abb. 6 geht sofort hervor, daß $\|u\| = \|v-w\|$ der gesuchte Abstand ist. Übrigens ist die Reihenfolge von v und w in diesem Ausdruck ohne Bedeutung, denn

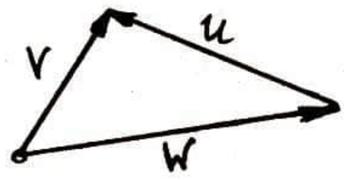


Abb. 6

$$\|w-v\| = \|(-1)(v-w)\| = |-1| \cdot \|v-w\| = 1 \cdot \|v-w\| = \|v-w\|.$$

Somit ist es notwendig, den Begriff der Länge eines Vektors zu verallgemeinern. Dies macht keine Mühe, wenn man zur Definition der Länge die Formel a) aus Satz 2 verwendet:

$$\|v\| = \sqrt{(v,v)}.$$

Freilich erfordert dies, das Skalarprodukt in einer Weise zu definieren, die es von der konkreten Form der Elemente von M (zumindest formal) unabhängig macht.

D e f i n i t i o n 5 : Es sei M eine lineare Menge und S(x,y) eine Funktion, die jedem Paar von Elementen x und y aus M eine reelle Zahl zuordnet. Die Funktion S(x,y) heißt Skalarprodukt auf M, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) $S(x,y) = S(y,x)$

b) $S(x+y,z) = S(x,z) + S(y,z)$

c) $S(\lambda x,y) = \lambda \cdot S(x,y)$ und

d) $S(x,x) \geq 0$ und $S(x,x) = 0$ dann und nur dann, wenn $x = \Theta$ gilt.

Wir schreiben auch weiterhin $S(x,y) = (x,y)$.

Wie man erkennt, entstand diese Definition dadurch, daß geeignete Aussagen der Sätze 1 und 2, die für ganz spezielle Objekte (nämlich Vektoren) formuliert worden sind, als definierende Bedingungen im Rahmen einer allgemeineren Theorie verwandt werden. Dies ist eine typische Vorgehensweise in der Mathematik: Bewiesene zentrale Sätze einer speziellen Theorie (ihre Decke sozusagen) dienen als Axiome oder Definitionen (d. h. als Fußboden) einer allgemeineren, höheren Theorie. Auf diesem Wege schreitet die Abstraktion wie von einem Stockwerk zum anderen aufwärts.

Angenommen, wir haben nun in unserer linearen Menge M ein Skalarprodukt eingeführt, dann läuft alles weitere analog zu dem betrachteten geometrischen Beispiel ab.

Zunächst ist festzulegen, in welcher Weise die lineare Untermenge L festgelegt werden soll.

D e f i n i t i o n 6 : Die Menge L heißt lineare Hülle der Elemente $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ aus M, wenn L aus allen derartigen Elementen x aus M besteht, die sich in der Form

$$x = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n$$

mit beliebigen reellen Faktoren $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ darstellen lassen.

Wie wir gesehen haben, ergab sich die Ebene E als lineare Hülle der beiden Vektoren w und u. Die Menge aller Polynome, deren Grad die Zahl n nicht übersteigt, kann aufgefaßt werden als lineare Hülle der Funktionen

$$p_1 = p_1(t) = 1, \quad p_2 = p_2(t) = t, \quad p_3 = p_3(t) = t^2, \ldots, p_{n+1} = p_{n+1}(t) = t^n.$$

Zur Vereinfachung der weiteren Darstellung fordern wir, daß die Darstellung eines jeden Elementes x aus L durch die Elemente $p_1, p_2, \ldots, p_n$ eindeutig erfolgt. Wenn dies nicht der Fall ist, so kann man wenigstens eines der Elemente p_i aus dieser Gruppe ausschließen, ohne daß sich die lineare Hülle verkleinert. In der

Tat, wenn für ein x aus L die zwei verschiedenen Darstellungen

$$x = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_n p_n$$

und

$$x = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \dots + \beta_n p_n$$

gelten (verschieden in dem Sinne, daß

$$(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)^2 > 0$$

ist), so erhält man durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten

$$\Theta = (\alpha_1 - \beta_1)p_1 + (\alpha_2 - \beta_2)p_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)p_n.$$

Wenigstens eine der Differenzen $\alpha_i - \beta_i$ ist nach Voraussetzung ungleich Null, angenommen, es ist dies für i=1 der Fall, so wird

$$p_1 = \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1} p_2 + \frac{\beta_3 - \alpha_3}{\alpha_1 - \beta_1} + \dots + \frac{\beta_n - \alpha_n}{\alpha_1 - \beta_1} p_n,$$

d. h. p_1 ist durch $p_2, p_3, \dots, p_n$ darstellbar und leistet demzufolge keinen Beitrag zur linearen Hülle. Demzufolge kann man sich auf $p_2, p_3, \dots, p_n$ beschränken und evtl. auch hieraus noch weitere Elemente ausschließen. Um diesen Sachverhalt geometrisch zu interpretieren: Man kann die Ebene im Raum angeben, indem man vier in ihr liegende Vektoren festlegt. Wie wir aber gesehen haben, reichen zwei hierfür völlig aus, die zwei anderen sind also überflüssig und können ausgeschlossen werden, ohne daß die Ebene einen Punkt verliert. Wir nehmen also künftig an, daß die Elemente $p_1, p_2, \dots, p_n$ ein derartiges minimales System zur Bestimmung der linearen Untermenge L bilden. Die Funktionen $p_i = p_i(t) = t^{i-1}$ erfüllen diese Forderung. Der Beweis dieses Umstandes ähnelt dem Beweis der Eindeutigkeit des LAGRANGE-Interpolationspolynoms.

Ist die Untermenge L in der angegebenen Weise definiert, so besteht der nächste Schritt darin, das System $p_1, p_2, \dots, p_n$ durch ein neues System $q_1, q_2, \dots, q_n$ zu ersetzen. Für das neue System soll gelten

$$(q_i, q_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Ein solches System nennt man orthonormal, da die einzelnen Elemente zueinander orthogonal sind (in dem Sinne, daß $(q_i, q_j = 0$ für $j \neq i$ gilt) und andererseits $\|q_i\| = 1$ gilt, d. h. die Elemente sind auf die Einheitslänge normiert. Das Verfahren zur Gewinnung des Systems $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ heißt SCHMIDTscher Orthogonalisierungsprozeß. Es verläuft nach den Formeln

$$p_i' = p_i + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_{i-1} p_{i-1},$$

$$(p_i', q_j) = 0 \quad \text{für } j < i$$

und

$$q_i = \| p_i' \|^{-1} p_i', \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Faktisch wurde dieser Prozeß bereits zur Gewinnung der Vektoren w' und v' angewandt.

Nachdem das System q_1, q_2, q_n ermittelt wurde, ergibt sich das Element r aus L, das dem gegebenen Element x in M am nächsten kommt, durch die Formel

$$r = (x, q_1) q_1 + (x, q_2) q_2 + \ldots + (x, q_n) q_n.$$

Der verbleibende Abstand von r bis x (der dem Fehler oder dem Restglied entspricht) ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned}
\| r - x \| &= \sqrt{(r-x, r-x)} \\
&= ((x,q_1)q_1 + \ldots + (x,q_n)q_n - x, (x,q_1)q_1 + \ldots + (x,q_n)q_n - x)^{1/2} \\
&= \Big[(x,q_1)(q_1, (x,q_1)q_1 + \ldots + (x,q_n)q_n - x) + \ldots \\
&\quad + (x,q_n)(q_n, (x,q_1)q_1 + \ldots + (x,q_n)q_n - x) - \\
&\quad - (x, (x,q_1)q_1 + \ldots + (x,q_n)q_n - x) \Big]^{1/2} \\
&= \Big\{ (x,q_1) \big[(x,q_1)(q_1,q_1) + \ldots + (x,q_n)(q_1,q_n) - (q_1,x) \big] + \ldots + \\
&\quad + (x,q_n) \big[(x,q_1)(q_n,q_1) + \ldots + (x,q_n)(q_n,x) - (q_n,x) \big] - \\
&\quad - (x,q_1)(x,q_1) - (x,q_2)(x,q_2) - \ldots - (x,q_n)(x,q_n) + (x,x) \Big\}^{1/2} \\
&= \Big[(x,x) - (x,q_1)^2 - (x,q_2)^2 - \ldots - (x,q_n)^2 \Big]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Damit ist die für die betrachtete Aufgabe notwendige Theorie bereitgestellt. Es verbleibt, in der linearen Menge M ein passendes Skalarprodukt einzuführen. Hierfür wählen wir

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt.$$

Wenn x und y stetige Funktionen für $a \leq t \leq b$ sind, so ist auch ihr Produkt eine stetige Funktion und damit existiert dieses Integral. Die Bedingungen, die an ein Skalarprodukt gestellt werden, sind tatsächlich erfüllt:

a) Es gilt

$$(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt = \int_a^b y(t)x(t)dt = (y,x).$$

b) Nach bekannten Eigenschaften des bestimmten Integrals ist

$$\begin{aligned}(x+y,z) &= \int_a^b \left[x(t)+y(t)\right] z(t)dt\\ &= \int_a^b \left[x(t)z(t)+y(t)z(t)\right] dt\\ &= \int_a^b x(t)z(t)dt + \int_a^b y(t)z(t)dt\\ &= (x,z) + (y,z).\end{aligned}$$

c) Ebenso sind

$$\begin{aligned}(\lambda x,y) &= \int_a^b \left[\lambda x(t)\right] y(t)dt = \int_a^b \lambda x(t)\, y(t)dt\\ &= \lambda \int_a^b x(t)\, y(t)dt = \lambda (x,y).\end{aligned}$$

d) Wenn $f(t)$ und $g(t)$ zwei für $a \leq t \leq b$ stetige Funktionen sind und wenn für alle derartigen Werte t die Ungleichung $f(t) \leq g(t)$ gilt, so kann man leicht aus der Definition des bestimmten Integrals herleiten, daß dann

$$\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt$$

ist. Sei nun $f(t) = 0$ und $g(t) = x^2(t)$, so folgt aus $g(t) = x^2(t) \geq 0 = f(t)$ die Ungleichung

$$(x,x) = \int_a^b x(t)\, x(t)\, dt = \int_a^b g(t)\, dt - \int_a^b f(t)\, dt = 0.$$

Zum Beweis der letzten Aussage ist nur zu zeigen, daß aus $(x,x) = 0$ folgt, daß $x(t) = 0$ für alle t ist, denn die Umkehrung ist offensichtlich. Also, nehmen wir an, daß $(x,x) = 0$ ist. Wenn ein Wert t^* mit $a \leq t^* \leq b$ existiert, für den $x^2(t^*) = A > 0$ ist, so folgt aus der Stetigkeit der Funktion $f(t) = x^2(t)$, daß eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart existiert, daß für alle t, die den beiden Bedingungen $a \leq t \leq b$ und $t^* - \varepsilon \leq t \leq t^* + \varepsilon$ genügen, die Ungleichung

$$x^2(t) \geq \frac{A}{2}$$

erfüllt wird (Abb. 7).
Hierbei kann ε so gewählt werden, daß wenigstens einer der Wer-

te $t^* - \varepsilon$ oder $t^* + \varepsilon$ zwischen a und b liegt. Angenommen, es sei dies $t^* + \varepsilon$, so definieren wir

$$g(t) = \begin{cases} \frac{A}{2}, & t^* \leq t \leq t^* + \varepsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und erhalten die universale Ungleichung $f(t) \geq g(t)$ für $a \leq t \leq b$. Hieraus folgt mit

$$0 = (x,x) = \int_a^b x^2(t)dt =$$

$$= \int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt = \frac{A}{2} \cdot \varepsilon > 0$$

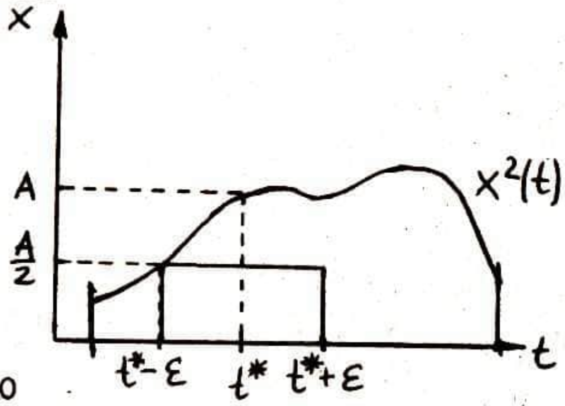


Abb. 7

ein Widerspruch, also ist die ~~Annahme der~~ Existenz einer Stelle t^* mit $x^2(t^*) > 0$, also $x(t^*) \neq 0$ falsch. Somit folgt aus $(x,x) = 0$, daß $x(t)$ identisch gleich Null ist.

Also ist die definierte Operation tatsächlich eine Verallgemeinerung des inzwischen altbekannten Skalarprodukts.

Nun können wir umgehend darangehen, aus dem System von Elementen $p_i = p_i(t) = t^{i-1}$ ein orthormales Polynomsystem zu konstruieren. Hierbei setzen wir zur Vereinfachung erneut $a = -1$ und $b = 1$.

Es sei zunächst $q_1 = p_1 = \alpha p_1(t) = \alpha 1 = \alpha$, dann soll gelten

$$(q_1,q_1) = \int_{-1}^{1} \alpha^2 dt = \alpha^2 \int_{-1}^{1} dt = \alpha^2 t\Big|_{-1}^{1} = \alpha^2(1-(-1)) = 2\alpha^2 = 1,$$

hieraus folgt sofort $\alpha = 1/\sqrt{2}$ und demzufolge

$$q_1 = q_1(t) = 1/\sqrt{2}.$$

Die nächste Funktion $q_2 = q_2(t)$ wird in der Form

$$q_2(t) = \alpha p_1(t) + \beta p_2(t) = \alpha 1 + \beta t = \alpha + \beta t$$

angesetzt. Aus $0 = (q_1,q_2) = (p_1,q_2)$ folgt

$$(p_1,q_2) = \int_{-1}^{1} 1(\alpha + \beta t)dt = \alpha \int_{-1}^{1} dt + \beta \int_{-1}^{1} t\, dt$$

$$= \alpha t\Big|_{-1}^{1} + \beta \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 2\alpha + 0\beta = 2\alpha = 0,$$

also $\alpha = 0$. Mit dieser Erkenntnis ergibt andererseits

$$1 = (q_2,q_2) = \int_{-1}^{1} \beta^2 t^2 dt = \beta^2 \int_{-1}^{1} t^2 dt = \beta^2 \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\beta^2.$$

die Darstellung $\beta = \sqrt{\frac{3}{2}}$, d. h.

$$q_2 = q_2(t) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, t.$$

Weiterhin sei

$$q_3 = q_3(t) = \alpha\, p_1(t) + \beta\, p_2(t) + \gamma\, p_3(t) = \alpha + \beta\, t + \gamma t^2.$$

Dann folgt

$$(q_3, p_1) = \int_{-1}^{1} 1(\alpha + \beta t + \gamma t^2)dt = 2\alpha + 0\beta + \tfrac{2}{3}\gamma = 0,$$

d. h. es muß $3\alpha + \gamma = 0$ gelten. Weiterhin ergibt

$$0 = (q_3, q_2) = (q_3, p_2) = \int_{-1}^{1} (\alpha + \beta t + \gamma t^2)t\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3)dt = \alpha \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + \beta \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + \gamma \frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 0\alpha + \tfrac{2}{3}\beta + 0\gamma\ ,$$

daß $\beta = 0$ sein muß. Es verbleibt, die Bedingung $(q_3, q_3) = 1$ zu erfüllen:

$$1 = (q_3, q_3) = \int_{-1}^{1} (3\alpha t^2 - \alpha)^2 dt = \alpha^2 \int_{-1}^{1} (9t^4 - 6t^2 + 1)dt$$

$$= \alpha^2 \left[\tfrac{9}{5}\, t^5\Big|_{-1}^{1} - \tfrac{6}{3}\, t^3\Big|_{-1}^{1} + t\Big|_{-1}^{1} \right]$$

$$= \alpha^2 \left(\tfrac{18}{5} - 4 + 2\right) = \tfrac{8}{5}\alpha^2,$$

demzufolge erhält man $\alpha = \sqrt{\frac{5}{8}}$ und somit

$$q_3(t) = \sqrt{\tfrac{5}{8}}\, (3t^2 - 1).$$

Dieser Prozeß läßt sich leicht fortsetzen, wir werden jedoch bald ein bequemeres Verfahren kennenlernen. Sehen wir uns zunächst einmal an, wie dasjenige quadratische Polynom aussieht, das der Funktion $x(t) = e^t$ im erwähnten Sinne am nächsten kommt. Es gilt

$$r(t) = (x, q_1)q_1 + (x, q_2)q_2 + (x, q_3)q_3.$$

Berechnen wir zunächst die drei Skalarprodukte. Nach der Regel der partiellen Integration ist

$$\int_a^b u'(t)\, v(t)dt = u(t)\cdot v(t)\Big|_a^b - \int_a^b u(t)\cdot v'(t)\, dt.$$

Diese Formel wird hierbei ausgenutzt

$$(x,q_1) = \int_{-1}^{1} e^t \frac{1}{\sqrt{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} e^t dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^t \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{e-e^{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{e^2-1}{e\sqrt{2}}$$

$$(x,q_2) = \int_{-1}^{1} e^t \sqrt{\frac{3}{2}}\, t\, dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} e^t \cdot t\, dt$$

Sei $u'(t) = e^t$, $v(t) = t$, dann ist $u(t) = e^t$ und $v'(t) = 1$ und somit

$$\int_{-1}^{1} e^t\, t\, dt = e^t\, t \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^t\, 1 dt = e + e^{-1} - e^t \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{e},$$

also ist $(x,q_2) = \frac{\sqrt{6}}{e}$.

$$(x,q_3) = \int_{-1}^{1} e^t \cdot \sqrt{\frac{5}{8}}\, (3t^2-1) dt = 3\sqrt{\frac{5}{8}} \int_{-1}^{1} t^2 e^t dt - \sqrt{\frac{5}{8}} \int_{-1}^{1} e^t dt.$$

Wir setzen $u'(t) = e^t$ und $v(t) = t^2$, damit wird

$$\int_{-1}^{1} t^2 e^t dt = t^2 e^t \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^t\, 2t\, dt = e - e^{-1} - 2 \int_{-1}^{1} t e^t dt$$

$$= e - \frac{1}{e} - 2\, \frac{2}{e} = \frac{e^2-5}{e},$$

also ergibt sich

$$(x,q_3) = 3\sqrt{\frac{5}{8}}\; \frac{e^2-5}{e} - \sqrt{\frac{5}{8}}\; \frac{e^2-1}{e}.$$

Für das Polynom $r(t)$ erhalten wir dann

$$r(t) = \frac{e^2-1}{\sqrt{2}\, e}\, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{e} \sqrt{\frac{3}{2}}\, t + \sqrt{\frac{5}{8}}\, \frac{2e^2-14}{e} \sqrt{\frac{5}{8}}\, (3t^2-1)$$

$$= \frac{e^2-1}{2e} + \frac{3}{e}\, t + \frac{5e^2-35}{4e}\, (3t^2-1).$$

In der zahlenmäßigen Darstellung ergibt dies

$$r(t) = 1.175201 + 1.103636t + 0.178907(3t^2-1)$$
$$= 0.996294 + 1.103636t + 0.536722t^2.$$

Dieses Polynom ähnelt dem TAYLOR-Polynom $P_2(t) = 1+t+0,5t^2$. Die maximale Abweichung $e^t-r(t)$ erhält man aus der Forderung

$$\frac{d}{dt}\; e^t-r(t) \;\; = e^t-r(t) \qquad e^t - 1.103636 - 1.073443t = 0.$$

Die Nullstellen sind $t_1 = -0.409693$ und $t_2 = 0.485147$ und die zugehörigen Abweichungen ergeben sich zu 0.00206 und 0.0336, außerdem ist $e-r(1) \approx 0.0816$ und $e^{-1}-r(-1) \approx -0.0615$. Demzufolge ist für $-1 \leq t \leq 1$ $|e^t-r(t)| \leq 0.0816$. Diese Fehlerschranke beträgt nur 37 % der des TAYLOR-Polynoms.

Anhang 1:

Betrachten wir die eingeführten Polynome $q_i = q_i(t)$ einmal genauer; es erweist sich als lohnend. Hierbei können wir es uns leisten, das Argument wieder in gewohnter Weise mit x zu bezeichnen. Es hat sich historisch eingebürgert, sie zumeist mit $P_n(x)$ zu bezeichnen, die Zahl n gibt dabei den Grad des Polynoms an. Diese Funktionen tragen die Bezeichnung LEGENDRE-Polynome (sprich: Leschandr). Ihre wichtigste Eigenschaft ist die Orthogonalität:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_m(x)\, dx = 0$$

bei $n \neq m$.

<u>S a t z 3:</u> Es sei $Q(x)$ ein Polynom vom Grade $m < n$, dann ist

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot Q(x)\, dx = 0.$$

Beweis. Es existiert eine Zahl α_m derart, daß $Q(x) - \alpha_m P_m(x)$ ein Polynom vom Grade höchstens m-1 ist. Diese Zahl erhält man als Quotient der Koeffizienten vor x^m in Q und P_m. Analog gibt es eine Zahl α_{m-1}, so daß $Q(x) - \alpha_m P_m(x) - \alpha_{m-1}P_{m-1}(\alpha)$ ein Polynom vom Grade höchstens m-2 ist. Letztendlich resultiert

$$Q(x) - \alpha_m P_m(x) - \alpha_{m-1}P_{m-1}(x) - \ldots - \alpha_1 P_1(x) - \alpha_o P_o(x) = 0,$$

also

$$Q(x) = \alpha_m P_m(x) + \alpha_{m-1}P_{m-1}(x) + \ldots + \alpha_1 P_1(x) + \alpha_o P_o(x).$$

Damit wird

$$\begin{aligned}(Q,P_n) &= (\alpha_m O_m + \alpha_{m-1}P_{m-1} + \ldots + \alpha_o P_o, P_n)\\ &= \alpha_m (P_m,P_n) + \alpha_{m-1}(P_{m-1},P_n) + \ldots + \alpha_o (P_o,P_n)\\ &= \alpha_m \cdot 0 + \alpha_{m-1} \cdot 0 + \ldots + \alpha_o \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

da $m < n$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Die analoge geometrische Aussage hat die folgende Form: Ein Vektor, der senkrecht auf zwei anderen Vektoren steht, ist auch orthogonal zu jedem Vektor, der in der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene liegt.

S a t z 4: (RODRIGUEZ) Es existieren reelle Zahlen K_n, $n \geq 0$, derart, daß

$$P_n(x) = K_n \left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$$

Bemerkung: (n) bezeichnet wieder die n-te Ableitung.

Beweis. Man überzeugt sich leicht, daß der vorige Satz im folgenden Sinne umkehrbar ist:

Wenn für alle Polynome Q(x), deren Grad die Zahl n-1 nicht übersteigt, die Gleichung

$$(Q,R) = 0$$

gilt und R ein Polynom vom Grade n ist, so gibt es eine Zahl λ so daß $\lambda P_n = R$ ist. Deshalb genügt es zu zeigen, daß das Polynom vom Grade n

$$R(x) = \left[(x^2-1)^n\right]^{(n)} = \left[r(x)\right]^{(n)}$$

zu allen Polynomen vom Grad kleiner als n orthogonal ist. Es sei also Q (x) ein beliebiges derartiges Polynom.

Nach der Formel für die partielle Integration ist dann

$$(Q,R) = \int_{-1}^{1} r^{(n)}(x)\cdot Q(x)dx = r^{(n-1)}(x)\cdot Q(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} r^{(n-1)}(x)Q'(x)dx.$$

Aus $r(x) = (x^2-1)^n$ folgt $r'(x) = 2x(x^2-1)^{n-1}$. Bei jeder weiteren Differentiation entsteht eine Summe, wobei ein Summand den Faktor x^2-1 mit einer um 1 niedrigeren Potenz enthält. Dann erhält aber die n-1-te Ableitung von r(x) in jedem Summanden wenigstens einmal den Faktor x^2-1 und somit ist $r^{(n-1)}(-1) = r^{(n-1)}(1) = 0$. Also erhalten wir

$$r^{(n-1)}(x)\cdot Q(x)\Big|_{-1}^{1} = 0$$

und demzufolge

$$(Q,R) = -\int_{-1}^{1} r^{(n-1)}(x)\cdot Q'(x)dx$$

$$= -r^{(n-2)}(x)\cdot Q'(x)\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} r^{(n-2)}(x)\cdot Q''(x)dx.$$

Nun kann man aus $r^{(n-2)}(x)$ sogar $(x^2-1)^2$ ausklammern, so daß $r^{(n-2)}(-1) = r^{(n-2)}(1) = 0$ ebenfalls gilt. Dies trifft auch für $r^{(n-2)}, r^{(n-3)}, \ldots, r^{(1)} = r'$ und $r^{(0)} = r$ zu, letztendlich folgt also

$$(Q,R) = (-1)^n \cdot \int_{-1}^{1} r(x)\cdot Q^{(n)}(x)dx.$$

Nun ist Q(x) ein Polynom n-1-ten Grades, damit ist aber seine n-te Ableitung identisch gleich Null, d. h.

$$(Q,R) = (-1)^n \cdot \int_{-1}^{1} r(x)\cdot 0\cdot dx = (-1)^n \cdot \Big|_{-1}^{1} 0dx = 0,$$

was auch zu zeigen war.

Die Zahl K_n läßt sich durch eine geeignete Betrachtung leicht ermitteln, darauf sei hier jedoch verzichtet. Wichtig ist, daß man jetzt $P_n(x)$ relativ einfach ermitteln kann. Speziell ist

$$P_1(x) = K_1 \left[(x^2-1)^1\right]' = K_1\ 2x = 2K_1x, \text{ d. h. } K_1 = \sqrt{\tfrac{3}{8}}$$

$$P_2(x) = K_2 \left[(x^2-1)^2\right]'' = K_2\ \ x^4-2x^2+1\ '' = K_2(12x^2-4x)$$

$$= 4K_2(3x^2-1), \text{ d. h. } K_2 = \sqrt{\tfrac{5}{128}},$$

$$P_3(x) = K_3 \left[(x^2-1)^3\right]^{(3)} = K_3(x^6-3x^4+3x^2-1)^{(3)}$$

$$= K_3(6x^5-12x^3+6x)'' = K_3(30x^4-36x^2+6)'$$

$$= K_3(120x^3-72x) = 24K_3(5x^3-3x) \quad \text{usw.}$$

Wir bemerken eine beachtenswerte Gesetzmäßigkeit: Für n=2m ist $P_n(x)$ eine gerade, für n=2m+1 ($m \geqq 0$) hingegen eine negative Funktion. Dieser Umstand läßt sich leicht beweisen:

Es ist $r(x) = (x^2-1)^n = ((-x)^2-1)^n = r(-x)$ eine gerade Funktion, d. h. es gilt

$$0 = r(x) - r(-x).$$

Differenziert man die letzte Gleichung, so folgt nach der Kettenregel

$$0 = r'(x)-r'(-x)\ [-x]' = r'(x)-r'(x)\cdot(-1) = r'(x)+r'(-x).$$

Dies besagt aber, daß r'(x) als Ableitung einer geraden Funktion eine ungerade Funktion ist. Durch nochmalige Differentation überzeugt man sich, daß r"(x) wieder gerade ist usw., dies ergibt die erwähnte Eigenschaft:

$$P_n(x) = (-1)^n\ P_n(-x).$$

Quadriert man diese Gleichung, so folgt

$$P_n^2(x) = P_n^2(-x),$$

ein Umstand, der noch benötigt wird.

Satz 5: Es existieren reelle Zahlen a_n und b_n derart, daß für $n \geq 2$

$$P_n(x) = a_n\, xP_{n-1} + b_n\, P_{n-2}$$

gilt

Beweis. Wie im vorigen Beweis gewinnen wir die Darstellung

$$Q(x) = xP_{n-1}(x) = \alpha_n P_n(x) + \alpha_{n-1} P_{n-1}(x) + \ldots + \alpha_1 P_1(x) + \alpha_o P_o(x).$$

Nun ist für $k - n$

$$\begin{aligned}(Q,P_k) &= (\alpha_n P_n + \alpha_{n-1} P_{n-1} + \ldots + \alpha_o P_o, P_k) \\ &= \alpha_n (P_n, P_k) + \alpha_{n-1}(P_{n-1}, P_k) + \ldots + \alpha_o (P_o, P_k) \\ &= \alpha_k (P_k, P_k) = \alpha_k .\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}(Q,P_k) &= \int_{-1}^{1} xP_{n-1}(x)\, P_k(x)dx = \int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)\; x\; P_k(x)dx \\ &= (P_{n-1}, xP_k).\end{aligned}$$

Wenn nun $k < n-2$ ist, so ist nach Satz 3 $(P_{n-1}, xP_k) = 0$, also ist auch α_k für $k < n-2$ gleich Null. Dann verbleibt

$$xP_{n-1}(x) = {}_nP_n(x) + {}_{n-1}P_{n-1}(x) + {}_{n-2}P_{n-2}(x).$$

Speziell ist wegen der Orthogonalität

$$\begin{aligned}(xP_{n-1}, P_{n-1}) &= \alpha_n (P_n, P_{n-1}) + \alpha_{n-1}(P_{n-1}, P_{n-1}) + \alpha_2 (P_{n-2}, P_{n-1}) \\ &= \alpha_{n-1},\end{aligned}$$

andererseits aber

$$\begin{aligned}(xP_{n-1}, P_{n-1}) &= \int_{-1}^{1} xP^2_{n-1}(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} xP^2_{n-1}(x)dx + \int_{0}^{1} xP^2_{n-1}(x)dx.\end{aligned}$$

Betrachten wir das erste der beiden Integrale und ersetzen wir in ihm x durch -t, dann ist dx = -dt und somit wegen der vor dem Satz gezeigten Gleichung

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} xP^2_n(x)dx &= \int_{1}^{0} (-t)\; P^2_n(-t)(-dt) \\ &= \int_{1}^{0} t\; P^2_n(t)dt = -\int_{0}^{1} tP^2_n(t)dt = -\int_{0}^{1} xP^2_n(x)dx.\end{aligned}$$

(Da der Wert eines bestimmten Integrals nicht davon abhängt, mit welchem Buchstaben man die Integrationsvariable bezeichnet, wurde am Schluß wieder t durch x substituiert.) Somit folgt

$$(xP_{n-1}, P_{n-1}) = -\int_0^1 xP_n^2(x)dx + \int_0^1 xP_n^2(x)dx = 0,$$

also ist $\alpha_{n-1} = 0$ und damit

$$xP_{n-1}(x) = \alpha_n P_n(x) + \alpha_{n-2} P_{n-2}(x).$$

Es muß $\alpha_n \neq 0$ sein, da sonst links ein Polynom stände, dessen Grad um zwei höher wäre als der des rechts stehenden.

Somit gilt

$$P_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} xP_{n-1}(x) - \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} P_{n-2}(x)$$

$$= a_n\, xP_{n-1}(x) + b_n P_{n-2}(x).$$

Damit ist der Satz bewiesen. Ohne auf die Einzelheiten einzugehen sei nur mitgeteilt, daß

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt{4n^2-1} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1-n}{n}\sqrt{\frac{2n+1}{2n-3}}$$

ist. Nach dieser Formel können die Polynome $P_n(x)$ rekursiv sehr schnell bestimmt werden.

Abschließend sei noch eine bemerkenswerte Eigenschaft der LEGENDRE-Polynome gezeigt:

S a t z 6: Alle Nullstellen der Polynome $P_n(x)$, $n - 1$, sind reell, einfach und liegen zwischen -1 und $+1$.

Beweis. Angenommen, $P_n(x)$ ändert in den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $-1 \leq x_i \leq 1$, $i=1,2,\ldots,k$, sein Vorzeichen (dies sind dann auch Nullstellen). Es ist klar, daß $k \leq n$ sein muß, andererseits haben wir aber auch den Fall $k=0$ noch nicht ausgeschlossen.

Mit einem Faktor $A \neq 0$ bilden wir das Polynom

$$Q(x) = A(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)$$

vom Grade $k - n$. Man erkennt leicht, daß auch $Q(x)$ genau in den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ das Vorzeichen wechselt. Wenn wir A so wählen, daß an irgendeiner Stelle x^*, $-1 \leq x^* \leq 1$, die Ungleichung

$$Q(x\ ) \cdot P_n(x\ ) > 0$$

erfüllt ist, so gilt demzufolge für alle x zwischen -1 und $+1$ die Ungleichung

$$Q(x) \cdot P_n(x) \geq 0,$$

da Q(x) und P(x) nur gleichzeitig negativ oder positiv sein können. Andererseits ist dieses Produkt nicht identisch gleich Null und somit gilt, wie wir an anderer Stelle gesehen haben, daß

$$(Q, P_n) = \int_{-1}^{1} Q(x)\, P_n(x)\, dx \quad 0$$

sein muß.

Wäre nun k n, so müßte nach Satz 3 $(Q, P_n) = 0$ sein. Da dies nicht stimmt, erkennt man, daß Q(x) also wirklich sein Polynom vom Grade n (mit n voneinander verschiedenen reellen einfachen Nullstellen) ist. Die Nullstellen von Q sind aber gleichzeitig solche von P_n, und da P_n nur n Nullstellen haben kann, sind dies also alle und sie besitzen die erwähnten Eigenschaften.

Eingangs der Serie war der Begriff "elementare Funktionen" bestimmt worden. Es gibt noch eine große Zahl sorgfältig untersuchter Funktionen, die zwar wichtig sind, aber nicht so universell auftreten wie die elementaren und die deshalb"spezielle Funktionen" genannt werden. Zu ihnen gehören auch die Polynome $P_n(x)$, die erstmals 1785 von dem französischen Mathematiker ADRIEN MARIE LEGENDRE (1752 - 1833) eingeführt wurden, als er die gegenseitige Anziehung von Ellipsoiden, d. h. von Körpern, die durch die Ungleichung

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2} + \frac{(y-y_o)^2}{b^2} + \frac{(z-z_o)^2}{c^2} \leq 1$$

definiert werden, untersuchte. Ihre Anwendungsgebiete sind sehr zahlreich. Man braucht sie bei der Untersuchung von Diffusions- und Wärmeprozessen in Kugeln, bei der Annäherung von Funktionen (nicht nur im erwähnten Sinne), zur näherungsweisen Berechnung von bestimmten Integralen, bei der Behandlung von Problemen der Quantenphysik und zu vielen anderen Zwecken.

Dr. W. Rosenheinrich
Sektion Mathematik FSU
Bereich Numerik – Optimierung

Preisaufgaben

P 37 ②

Man beweise, daß $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^{4k}$ durch 400 teilbar ist, wobei k eine beliebige natürliche Zahl größer Null ist.

P 38 ①

Existieren in der Ebene 4 Punkte A, B, C, D, für welche gilt:

$$|AB| = |CD| = 8; \quad |AC| = |BD| = 10; \quad |AB| + |BC| = 13?$$

P 39 ②

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2$$
$$\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2$$
$$\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2$$

P 40 ②

Es ist ein Bruch zu finden, bei welchem 1. der Nenner gleich dem Quadrat des Zählers ist. Weiterhin gilt, wenn man zu Zähler und Nenner 2 addiert, wird der Wert des Bruches größer als $\frac{1}{3}$, wenn man 3 subtrahiert, wird der Wert größer Null aber kleiner als $\frac{1}{10}$.

P 41 ①

Für beliebige λ seien die Wurzeln der Gleichung $ax^2 + bx + c + \lambda = 0$ reell und positiv. Es ist zu zeigen, daß dann $a = 0$ sein muß.

P 42 ②

Доказать , что если сумма квадратов двух целых чисел делиться на 7 , то каждое из этих чисел делиться на 7.

Der kleine Satz von Fermat

Pierre de Fermat (1601 - 1665) beschäftigte sich mit zahlreichen Problemen der analytischen Geometrie, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Zahlentheorie. Er war Jurist und im Parlamentsrat in Toulouse (Südfrankreich) tätig und betrieb Mathematik nur in seiner Freizeit.

Der große Fermatsche Satz, der besagt, daß $x^n + y^n = z^n$ für ganzzahlige n,x,y,z $(n>2)$ keine Lösung hat, ist zwar für sehr viele natürliche Zahlen n, aber nicht allgemein bewiesen.
Jedoch wurde der kleine Fermatsche Satz schon mehrmals bewiesen.
Er lautet:

> Wenn p eine Primzahl ist und a eine ganze Zahl, die nicht durch p teilbar ist, so ist p ein Teiler von $a^{p-1}-1$.

Ehe der eigentliche Beweis angetreten wird, sollen einige Vorbetrachtungen das bessere Verständnis erleichtern. Zuerst werden folgende zwei Lemmata angegeben. Ein Lemma ist ein Hilfssatz, der einen "größeren Satz" vorbereitet.

<u>Lemma 1:</u> Ist p eine Primzahl, dann folgt für alle ganzen Zahlen a,b aus $\frac{p}{ab}$ immer $\frac{p}{a}$ oder $\frac{p}{b}$.

Dabbei bedeutet hier und im Folgenden $\frac{x}{y}$-: x ist ein Teiler von y. Der Beweis von lemma 1 folgt unmittelbar aus der Definition von Primzahlen.
Es gilt weiterhin:

<u>Lemma 2:</u> Ist p eine Primzahl und a eine zu p teilerfremde ganze Zahl, so lassen die Zahlen

$$1a;\ 2a;\ 3a;\ldots;\ (p-1)a$$

bei der Division durch p in ungeordneter Reihenfolge die Reste $1;2;3;\ldots;(p-1)$.

An dieser Stelle soll eine Schreibweise eingeführt werden, die ausdrückt, daß zwei ganze Zahlen u und v bei der Division durch p den gleichen Rest lassen:

$$u \equiv \bmod p$$

(lies: u kongruent v modulo p).
Also gilt genau dann $u \equiv v \bmod p$, wenn $\frac{p}{u-v}$ ist. Diese Zahlenkongruenz kann man wie eine Gleichung umformen, nur die Divi-

sion ist nicht in jedem Falle gestattet.

Nun wird das Lemma 2 durch das Beispiel $p = 11$, $a = 3$ veranschaulicht:

$1a \equiv 3 \mod 11$; $2a \equiv 6 \mod 11$, $3a \equiv 9 \mod 11$, $4a \equiv 1 \mod 11$,
$5a \equiv 4 \mod 11$, $6a \equiv 7 \mod 11$, $7a \equiv 10 \mod 11$, $8a \equiv 2 \mod 11$,
$9a \equiv 5 \mod 11$, $10a \equiv 8 \mod 11$.

Nun wird das Lemma 2 allgemein bewiesen.

<u>Beweis:</u> Es genügt zu zeigen, daß die bei der Division durch p auftretenden Reste paarweise verschieden sind.
Zwei Koeffizienten von a seien l und k $(1 \leq l \leq k \leq p-1)$.
Wir nehmen an, la und ka lassen bei der Division durch p den gleichen Rest, also ist

$$\begin{aligned} ka &\equiv la \mod p, \\ ka-la &\equiv 0 \mod p, \\ a(k-l) &\equiv 0 \mod p. \end{aligned}$$

Nach Lemma 1 ist deshalb $\frac{p}{a}$ oder $\frac{p}{(k-l)}$. In Lemma 2 wurde aber vorausgesetzt, daß p nicht a teilt. Folglich ist $\frac{p}{(k-l)}$. Wegen $1 \leq l \leq k \leq p-1$ muß $k=l$ sein.
Es gilt $ka \equiv la \mod p$ also nur in dem Falle $k=l$!
Damit ist bewiesen, daß alle Reste genau einmal auftreten,

w.z.b.w.

Jetzt kann der eigentliche Beweis des kleinen Fermatschen Satzes angetreten werden!

<u>Beweis:</u> Aus Lemma 2 ergibt sich

$$1a \; 2a \; 3a \; \ldots \; (p-1)a \equiv 1 \; 2 \; 3 \; \ldots \; (p-1) \mod p.$$

(Es wurden (p-1) Zahlenkongruenzen miteinander multipliziert.)
Beide Seiten kann man verkürzt darstellen:

$$\begin{aligned} a^{(p-1)} \cdot (p-1)! &\equiv (p-1)! \mod p \\ a^{(p-1)} \cdot (p-1)! - (p-1)! &\equiv 0 \mod p \\ (p-1)! \cdot (a^{p-1}-1) &\equiv 0 \mod p \end{aligned}$$

Daraus folgt nach Lemma 1

$$\frac{p}{(p-1)!} \quad \text{oder} \quad \frac{p}{(a^{p-1}-1)} .$$

Ebenfalls aus Lemma 1 folgt, daß p nicht $(p-1)!$ teilt. Damit ist p ein Teiler von $(a^{p-1}-1)$, w.z.b.w.

Die Behauptung des kleinen Fermatschen Satzes kann in der Form geschrieben werden:

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p.$$

Nun kann leicht das folgende Korollar (Folgesatz) gezeigt werden:

<u>Korollar:</u> Die Zahlenkongruenz $ax \equiv b \bmod p$ ist für alle ganzen Zahlen a und b und für alle Primzahlen p, die nicht a teilen, lösbar.

Man überprüft leicht, daß $x = a^{(p-2)}b$ eine Lösung der gegebenen Zahlenkongruenz ist. Alle Lösungen lassen bei der Division durch p den gleichen Rest.

Der kleine Fermatsche Satz hat in der Teilbarkeitslehre zahlreiche Anwendungen:

(1) Man zeige: $\frac{101}{43^{100}-1}$ und $\frac{7}{222^{555}+555^{222}}$.

(2) Man beweise, daß 323 ein Teiler von $8^{34}-8^{18}-8^{16}+1$ ist!

(3) Für alle Primzahlen $q > 100$ gilt $\frac{37}{q^{2700}+2700}$.

Friederike Hahnebach
Schülerin der Klasse 10 r der 15. POS Gera
Berufswunsch Mathematiker

Die zwei Wurzeln

Zwei Tannenwurzeln groß und alt
unterhalten sich im Wald.

Was droben in den Wipfeln rauscht,
das wird hier unten ausgetauscht.

Ein altes Eichhorn sitzt dabei
und strickt wohl Strümpfe für die zwei.

Die eine sagt: knig. Die andre sagt: knag.
Das ist genug für einen Tag.

Christian Morgenstern

Aufgaben der DDR-Olympiade Junger Mathematiker (Olympiadeklassen 11/12)

1. a) Untersuchen Sie, ob es reelle Zahlen $a \neq 0$, b und c so gibt, daß die für alle reellen x durch
$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \qquad (1)$$
definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0)=1$, $f(2)=1$ hat und bei $x = 1$ einen lokalen Extremwert besitzt!

   b) Gegeben seien zwei beliebige reelle Zahlen x_1 und x_2 mit $0 < x_1 < x_2$.
Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von x_1 und x_2) alle diejenigen reellen $a \neq 0$, b, c mit der Eigenschaft, daß die durch (1) definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0)=1$, $f(x_2)=1$ hat und bei $x = x_1$ einen lokalen Extremwert besitzt!

2. Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, zu denen es nichtnegative reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 gibt, die die folgenden Gleichungen (1), (2), (3), (4) erfüllen:
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \qquad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = a, \qquad (2)$$
$$x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4 = a^2, \qquad (3)$$
$$x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 = a^3. \qquad (4)$$

3. Man untersuche, ob es nichtnegative
   a) reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4,
   b) ganze Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4

   mit $x_1+x_2+x_3+x_4 = 4$ und $x_2+2x_3+3x_4 = 4$ gibt, so daß die Summe $s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ einen kleinsten Wert annimmt. Ist das der Fall, so ermittle man jeweils zu a) bzw. b) solche Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 sowie den zugehörigen Wert s.

4. Man beweise, daß das Polynom
$$f(x) = \frac{1}{630}x^9 - \frac{1}{21}x^7 + \frac{13}{30}x^5 - \frac{82}{63}x^3 + \frac{32}{35}x$$
für alle ganzzahligen x ganzzahlige Wert annimmt.

5. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Bei einem "ungestörten technischen Prozeß" sei

$$x_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad (1)$$

die Maßzahl einer von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ abhängigen Größe. Bei einem "gestörten technischen Prozeß" betrage die Maßzahl dieser Größe dagegen

$$x_2 = \frac{a_1}{1+\varepsilon_1} + \frac{a_2}{1+\varepsilon_2} + \ldots + \frac{a_n}{1+\varepsilon_n} . \qquad (2)$$

Dabei seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ reelle Zahlen, zu denen es eine natürliche Zahl $m \geqq 1$ derart gibt, daß für alle $\mu = 1, 2, \ldots, n$ die Ungleichung

$$|\varepsilon_\mu| \leqq 10^{-m} \qquad (3)$$

gilt. Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen (1), (2), (3) stets die Ungleichung

$$|x_1 - x_2| \leqq \frac{1}{10^m - 1} (|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|)$$

folgt.

6A) Es sei ABCD ein Tetraeder, bei dem die drei Kanten AD, BD und CD paarweise senkrecht aufeinander stehen. Die Längen dieser Kanten AD, BD bzw. CD seien mit a, b bzw. c bezeichnet. Ferner sei P ein beliebiger Punkt auf dem Rande des Dreiecks ABC, und dann sei jeweils g die Gerade durch D und P.

a) Man beweise, daß dann hiernach für die Summe s der Abstände der Punkte A, B und C von g stets

$$s \leqq \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)} \qquad (1)$$

gilt.

b) Man untersuche (in Abhängigkeit von den gegebenen Kantenlängen a, b, c), ob es einen Punkt P derart gibt, daß in (1) das Gleichheitszeichen gilt.
Wenn das der Fall ist, so ermittle man (in Abhängigkeit von a, b, c) alle diese Punkte P.

6B) Bei der Untersuchung von Häufigkeitsverteilungen in der mathematischen Statistik treten Funktionen auf, die für endlich viele natürliche Zahlen definiert sind und für die gefordert wird, daß sie sogenannte Funktionalgleichungen

(Gleichungen zwischen verschiedenen Funktionswerten) erfüllen. Ein Beispiel hierfür ist das folgende:
Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geq 2$ und eine reelle Zahl p mit $0 < p < 1$. Man ermittle (in Abhängigkeit von n und p) diejenigen Funktionen f mit der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ als Definitionsbereich, die für $k = 1, 2, \ldots, n$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$\sum_{x=1}^{n} x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)\cdot f(x) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)p^k. \quad (1)$$

Hinweis: Für $k = 1$ ist die Gleichung (1) sinngemäß als $\sum_{x=1}^{n} x\cdot f(x) = n\cdot p$ aufzufassen.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner
Anschrift: **WURZEL,** 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-122-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 13. 6. 1983

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

9
83

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

17. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Magische Quadrate und magische Würfel

Seit das erste magische Quadrat, das sich auf einem Kupferstich von Albrecht Dürer befindet, in Europa auftauchte, beschäftigten sich viele Mathematiker mit der Theorie dieser Quadrate, u. a. der Rechenmeister Adam Ries, der Mathematiker Michael Stifel (16. Jahrhundert), die französischen Mathematiker De la Hire, Sauveur (18. Jahrhundert) und der deutsche Mathematiker Scheffler (19. Jahrhundert). Das magische Quadrat auf dem Kupferstich von Dürer sieht folgendermaßen aus:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

In alten Schriften werden nur fertige magische Quadrate und ihre Bildungsregeln mitgeteilt. Die heutigen Mathematiker beschäftigen sich mehr mit der Theorie der Bildung magischer Quadrate. Viele interessante Ergebnisse sind in der letzten Zeit gefunden worden (siehe Literaturangaben). Die Bezeichnung "magisches Quadrat" rührt wohl von frühen Zeiten her, wo man diesen Quadraten wegen ihrer besonderen Eigenschaften auch magische Wirkungen zumutete.

Ursprünglich verstand man unter einem magischen Quadrat ein Quadrat von n.n Feldern, in denen n.n aufeinanderfolgende Zahlen, meist 1 bis n^2, so zugeordnet sind, daß die Summe aller Zahlen in jeder Horizontalen (Zeile), in jeder Vertikalen (Spalte) oder in jeder Diagonalen immer den gleichen Wert besitzt. Die Anzahl der Zeilen bzw. der Spalten nennt man Ordnung des magischen Quadrats.

Wir wollen zunächst an dieser Definition festhalten und erst später auf andere allgemeinere Definitionen für den Begriff "magisches Quadrat" eingehen.

Das älteste und einfachste magische Quadrat besteht in der quadratischen Anordnung der 9 Zahlen 1 bis 9. Ist s die Summe der Zahlen in einer Zeile, so muß $3s = 1+2+...+9$ sein. Daraus folgt:

$$s = 15.$$

Für die Besetzung der Zeilen bzw. Spalten kommen demnach nur folgende Kombinationen in Frage:

1+5+9, 2+5+8, 3+5+7, 4+5+6,
1+6+8, 2+6+7, 2+4+9, 3+4+8.

Da genau 8 Zeilen und Spalten zu besetzen sind, tritt in jeder dieser 8 Reihen eine dieser Kombinationen auf. Da die Zahl 5 in 4 Kombinationen vorkommt, muß sie in der Mitte des Quadrats stehen, da sich dort 4 Reihen (1 Zeile, 1 Spalte, 2 Diagonalen) schneiden.
Die Zahlen 2, 4, 6, 8 treten jeweils in 3 Kombinationen auf. Sie müssen also in den Eckfeldern stehen, wo sich 1 Zeile, 1 Spalte und eine Diagonale treffen. Die Zahlen 1, 3, 7 treten je 2-mal auf. Sie müssen also in den Seitenmitten liegen.
Der Leser kann sich leicht davon überzeugen, daß es genau 8 magische Quadrate dritter Ordnung gibt, die folgendermaßen aussehen:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	1	8
7	6	3
2	9	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Alle Quadrate lassen sich, wie man sich leicht überzeugen kann, aus einem durch Spiegelungen an den vier Symmetrieachsen gewinnen. Läßt man zur Besetzung der Reihen auch beliebig andere 9 aufeinander folgende Zahlen zu, so gibt es natürlich unendlich viele magische Quadrate dritter Ordnung. Addiert man z. B. zu jeder Zahl eines der oben stehenden Quadrate die natürliche Zahl b, so entsteht ein magisches Quadrat dritter Ordnung mit der Zeilensumme $S = s + 3b$. b könnte man in diesem Falle so wählen, daß S gleich der Jahreszahl 1983 wird.
Aus $1983 = 15 + 3b$ folgt für $b = 656$. Dieses sog. Jahreszahlquadrat sieht dann folgendermaßen aus:

658	663	662
665	661	657
660	659	664

Bei allen 8 oben stehenden magischen Quadraten erkennt man, daß die Summe der beiden Zahlen, die in gegenüberliegenden Ecken oder Seitenmitten stehen, stets 10 ist. Dies folgt aus der Beziehung s = 15, denn 10 + 5 = 15.
Sehr bekannt ist folgende Methode, ein magisches Quadrat dritter Ordnung zu finden: Man schreibt die Zahlen nach ihrer natürlichen Reihenfolge in folgender Weise diagonal:

		3		
	2		6	
1		5		9
	4		8	
		7		

Hat man so 5 Felder des Quadrats dritter Ordnung ausgefüllt, so setzt man die an jeder Quadratseite außerhalb befindliche Zahl genau in das an der Gegenseite befindliche leer gebliebene Feld. Nach dieser Methode entsteht das folgende Quadrat dritter Ordnung:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Diese Methode, die sich auf alle magischen Quadrate ungerader Ordnung erweitern läßt, stammt von Bachet de Meziriac (17. Jahrhundert).
Die anderen 7 magischen Quadrate erhält man auf diese Art, wenn man die 9 Zahlen 1 bis 9 in folgender Weise diagonal schreibt:

		3		
	2		6	
1		5		9
	4		8	
		7		

		9		
	8		6	
7		5		3
	4		2	
		1		

		1		
	2		4	
3		5		7
	6		8	
		9		

		7		
	8		4	
9		5		1
	6		2	
		3		

		1		
	4		2	
7		5		3
	8		6	
		9		

		7		
	4		8	
1		5		9
	2		6	
		3		

		9		
	6		8	
3		5		7
	2		4	
		1		

		3		
	6		2	
9		5		1
	8		4	
		7		

Wir können also zusammenfassen:

Nach der ursprünglichen Definition eines magischen Quadrats gibt es

a) 8 verschiedene magische Quadrate dritter Ordnung, wenn man sie mit den Zahlen 1, 2, 3, bis 9 besetzt,

b) unendlich viele magische Quadrate dritter Ordnung, wenn man sie mit beliebigen 9 aufeinanderfolgenden Zahlen belegt.

Diese Ergebnisse können erweitert werden, wenn man von anderen Definitionen des Begriffs "magisches Quadrat" ausgeht.

Das Auffinden von magischen Quadraten ungerader Ordnung bietet durch Anwendung der oben beschriebenen Methode von Bachet de Meziriac keine Schwierigkeiten. Wir wollen als Beispiel ein magisches Quadrat fünfter Ordnung mit Hilfe dieser Methode aufsuchen.

				5				
			4		10			
		3		9		15		
	2		8		14		20	
1		7		13		19		25
	6		12		18		24	
		11		17		23		
			16		22			
				20				

Es ergibt sich folgendes magisches Quadrat 5. Ordnung:

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Hier beträgt $s = 65$. Dieser Wert ergibt sich aus der Beziehung:

$$5s = \frac{25}{2} \cdot 26 = 325$$

Hier ist es nicht so einfach, alle möglichen verschiedenen magischen Quadrate fünfter Ordnung aufzufinden. Von den 70840 Kombinationen von 5 Zahlen aus 1 bis 25 müßten wir die betrachten, deren Summe gleich 65 beträgt, z. B. 11, 12, 13, 14, 15 mit der Summe 65. Jedenfalls erhält man 7 weitere Quadrate 5. Ordnung durch Spiegelung an den Symmetrieachsen. Der Leser kann sich selbst davon überzeugen. Für einen Computer wäre es kein

Problem, alle Kombinationen von 5 Zahlen aus 1 bis 25 zu finden, die die Zahlensumme 65 haben. Aus diesen Kombinationen könnte man vielleicht die Anzahl der möglichen magischen Quadrate 5. Ordnung berechnen. Die Anzahl aller möglichen Quadrate 5. Ordnung ist wohl noch nicht bekannt.

Wie steht es mit magischen Quadraten gerader Ordnung? Wir wollen zunächst das kleinste magische Quadrat gerader Ordnung betrachten. Die magische Konstante beträgt hier $s = 34$, folgt aus

$$4s = \frac{4^2}{2} \cdot (1+4^2).$$

Auf sehr einfache Weise kommt man zu einem magischen Quadrat 4. Ordnung, wenn man zunächst die 16 Zahlen in natürlicher Reihenfolge in das Quadrat einträgt:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Die Zahlen in den Mittelfeldern und den 4 Eckfeldern lassen wir stehen. Die übrigen Zahlen z ersetzen wir durch $17 - z$, also z. B. 2 durch 15, 3 durch 14 usw. Es entsteht dann folgendes Quadrat:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Aus diesem magischen Quadrat können wir wieder 7 magische Quadrate finden, die durch Spiegelung an einer der drei Symmetrieachsen bzw. durch Drehung um den Mittelpunkt um 90°, 180° oder 270° hervorgehen.

Gewöhnlich faßt man diese 8 Quadrate als eine Lösung auf, sozusagen als eine Gruppe von 8 zusammengehörenden Lösungen oder Elementen. Bereits im 18. Jahrhundert war bekannt, daß es in dem Sinne 880 verschiedene Gruppen von je 8 Lösungen gibt, also im ganzen 7040 Lösungen.

Das berühmte magische Quadrat von Albrecht Dürer entsteht aus unserem konstruierten durch Drehung um 180° im negativen Sinn und Vertauschung der beiden mittleren vertikalen Reihen.

Für die Bildung magischer Quadrate gerader Ordnung größer als 4 kann man das "Devedec-Verfahren" anwenden, das mit Vertauschungstabellen arbeitet. Wir beschreiben dieses Verfahren für die Bildung eines magischen Quadrats 6. Ordnung und 8. Ordnung. In die Felder des auszufüllenden Quadrats tragen wir zunächst die 36 Zahlen 1 bis 36 in ihrer natürlichen Reihenfolge ein (siehe untenstehende Skizze). Neben jede Zahl tragen wir ein Zeichen ein, das angibt, mit welcher Zahl diese Zahl zu tauschen ist. Die angegebenen Zeichen o; -; /; + haben folgende Bedeutung:

Zahlen, die einen kleinen Kreis enthalten, bleiben stehen.

Zahlen, die mit - bezeichnet sind, werden durch die Zahl ersetzt, die spiegelbildlich zur t-Achse liegt.

Zahlen, die das Zeichen / haben, werden durch die bezüglich der u-Achse spiegelbildlich liegende Zahl ersetzt.

Zahlen, die mit + bezeichnet sind, werden durch die bezüglich des Mittelpunktes M spiegelbildlich liegende Zahl ersetzt.

Führt man alle Vertauschungen durch, so erhält man ein magisches Quadrat sechster Ordnung.

t-Achse

1 o	2 /	3 /	4 o	5 /	6 o
7 -	8 o	9 /	10 /	11 o	12 +
13 -	14 -	15 +	16 +	17 +	18 +
19 o	20 -	21 +	22 +	23 +	24 o
25 -	26 o	27 +	28 +	29 o	30 +
31 o	32 +	33 /	34 o	35 +	36 o

u-Achse

1	32	33	4	35	6
12	8	27	28	11	25
18	17	22	21	20	13
19	23	16	15	14	24
30	26	10	9	29	7
31	5	3	34	2	36

Die Summe s der Zahlen einer Reihe ergibt sich aus der Gleichung:

$6s = \frac{36}{2} \cdot 37 \ldots s = 111$

Durch Spiegelung an den Symmetrieachsen kann man weitere magische Quadrate 6. Ordnung finden.

Für ein magisches Quadrat 8. Ordnung schreiben wir wieder die Zahlen 1 bis 64 in ihrer natürlichen Reihenfolge und belegen alle Zahlen wieder mit den 4 Zeichen (siehe Schema untenstehend).

1 o	2 /	3 -	4 +	5 +	6 -	7 /	8 o	
9 -	10 o	11 /	12 /	13 o	14 /	15 o	16 +	
17 /	18 -	19 o	20 +	21 +	22 o	23 +	24 o	
25 +	26 -	27 +	28 o	29 o	30 +	31 -	32 +	
33 +	34 o	35 +	36 o	37 o	38 +	39 o	40 +	u-Achse
41 /	42 -	43 o	44 +	45 +	46 o	47 +	48 o	
49 -	50 o	51 +	52 /	53 o	54 +	55 o	56 +	
57 o	58 +	59 o	60 +	61 +	62 o	63 +	64 o	
				t-Achse				

Aus $8s = \frac{64}{2} \cdot 65$ folgt für s

$$s = 260$$

Ausführung der entsprechenden Vertauschungen ergibt unten stehendes magisches Quadrat achter Ordnung, aus dem sich durch Spiegelung an den Symmetrieachsen weitere magische Quadrate ergeben.

1	58	6	61	60	3	63	8
16	10	51	52	13	54	15	49
41	23	19	45	44	22	42	24
40	31	38	28	29	35	26	33
32	34	30	36	37	27	39	25
17	47	43	21	20	46	18	48
56	50	14	12	53	11	55	9
57	7	59	5	4	62	2	64

Fortsetzung folgt!

Dr. B. Hanisch
Halle

Preisaufgaben

P 43 ②	Es seien n Punkte in der Ebene gegeben. Von beliebigen drei Punkten haben jeweils zwei einen Abstand voneinander, welcher kleiner als 1 ist. Beweisen Sie, daß zwei Kreise mit dem Radius 1 existieren, welche alle diese Punkte umfassen.
P 44 ①	Die Zahl 42x4y (x und y sind Ziffern dieser Zahl) sei durch 72 ohne Rest teilbar. Man finde x und y.
P 45 ①	Beweisen Sie: Wenn $a^3 + b^3 + c^3$ durch 7 teilbar ist, so ist auch $a \cdot b \cdot c$ durch 7 teilbar.
P 46 ①	Das Produkt der positiven reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sei gleich 1. Zeigen Sie, daß dann ihre Summe größer oder gleich n ist.
P 47 ②	Lösen Sie folgendes Gleichungssystem $2\log_x 2 + 3\log_y 2 = 0$, $x^3 - 4y^2 = 0$.
P 48 ②	Дан отрезок AB и прямая MN пересекающая его . Построить треугольник ABC так , чтобы прямая MN делила его угол пополам .

Einsendeschluß: 15. 12. 1983

XXII. Olympiade Junger Mathematiker – Lösungen

1. a) Für beliebige reelle $a \neq 0$, b und c gilt
$f(0)=c$, $f(2)=16a+4b+c$, $f'(x)=4ax^3+2bx$, $f'(1)=4a+2b$.
Gäbe es a, b, c so, daß f die geforderten Eigenschaften hätte, so folgte

$$c = 1 \qquad (2)$$
$$16a+4b+c = 1, \qquad (3)$$
$$4a + 2b = 0. \qquad (4)$$

Aus (2) und (3) folgte $16a+4b = 0$, hieraus und aus (4) aber der Widerspruch $a = 0$. Daher gibt es keine a,b,c der genannten Art.

b) Für beliebige reelle $a \neq 0$, b und c gilt
$f(0)=c$, $f(x_2)=ax_2^4+bx_2^2+c$, $f'(x_1)=4ax_1^3+2bx_1$, $f''(x_1)=12ax_1^2+2b$.

I. Angenommen, für a,b,c habe f die geforderten Eigenschaften. Dann folgt

$$c = 1,$$
$$ax_2^4 + bx_2^2 + c = 1,$$
$$4ax_1^3 + 2bx_1 = 0,$$

wegen $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ also

$$ax_2^2 + b = 0,$$
$$2ax_1^2 + b = 0.$$

Wegen $a \neq 0$ folgt hieraus weiter

$$x_2^2 = 2x_1^2,$$

wegen $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ also

$$x_2 = x_1 \cdot \sqrt{2}. \qquad (5)$$

Erfüllen die gegebenen x_1, x_2 diese Bedingung (5) nicht, so gibt es folglich keine a,b,c mit den geforderten Eigenschaften.[1]

[1] Man kann die Lösung zu a) auch hieraus folgern, ohne sie zuvor gesondert abzuleiten.

Gilt aber (5), so können die geforderten Eigenschaften nur vorliegen, wenn

$$a \neq 0, \quad b = -ax_2^2, \quad c = 1 \qquad (6)$$

gelten.

II. Sei (5) erfüllt. Für beliebige $a \neq 0$, $b = -ax_2^2$, $c = 1$ gilt dann

$$f(0) = c = 1.$$
$$f(x_2) = ax_2^4 + bx_2^2 + c = ax_2^4 - ax_2^4 + 1 = 1,$$
$$f'(x_1) = x_1(4ax_1^2 + 2b) = x_1(2ax_2^2 - 2ax_2^2) = 0,$$
$$f''(x_1) = 12ax_1^2 + 2b = 6ax_2^2 - 2ax_2^2 = 4ax_2^2 \neq 0$$

also hat f die Funktionswerte $f(0) = f(x_2) = 1$ sowie bei $x = x_1$ einen lokalen Extremwert.

Mit I. und II. ist bewiesen:
Ist $x_2 \neq x_1 \cdot \sqrt{2}$, so gibt es keine a,b,c der geforderten Art; ist $x_2 = x_1 \cdot \sqrt{2}$, so haben genau alle a,b,c mit (6) die geforderte Eigenschaft.

---

2. I. Wenn es zu einer reellen Zahl a nichtnegative Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 gibt, die (1),(2),(3),(4) erfüllen, so folgt aus (1),(2), aus (2),(3) bzw. aus (3),(4)

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = a-1, \qquad (5)$$
$$2x_2 + 6x_3 + 12x_4 = a(a-1), \qquad (6)$$
$$4x_2 + 18x_3 + 48x_4 = a^2(a-1). \qquad (7)$$

Aus (5),(6) bzw. (6),(7) folgt

$$2x_3 + 6x_4 = (a-1)(a-2), \qquad (8)$$
$$6x_3 + 24x_4 = a(a-1)(a-2). \qquad (9)$$

Aus (8),(9) folgt

$$6x_4 = (a-1)(a-2)(a-3). \qquad (10)$$

Aus (8),(10) ergibt sich

$$2x_3 = (a-1)(a-2) - 6x_4$$
$$= (a-1)(a-2)(1-(a-3)) = (a-1)(a-2)(4-a), \qquad (11)$$

aus (5),(10),(11) ergibt sich

$$x_2 = a - 1 - 2x_3 - 3x_4,$$
$$2x_2 = (a-1)(2-2(a-2)(4-a) - (a-2)(a-3))$$
$$= (a-1)(a^2-7a+12) = (a-1)(a-3)(a-4). \qquad (12)$$

Wegen $x_2, x_3, x_4 \geqq 0$ folgt nun weiter: Nach (5) ist $a-1 \geqq 0$, also entweder $a = 1$ oder $a > 1$.

Im Fall $a > 1$ folgt: Nach (8) ist $a-2 \geqq 0$, also entweder $a=2$ oder $a > 2$.

Im Fall $a > 2$ folgt: Nach (10) ist $a-3 \geqq 0$, also entweder $a=3$ oder $a > 3$.

Im Fall $a > 3$ folgt: Nach (11) und (12) ist $4-a \geqq 0$ und $a-4 \geqq 0$, also $a = 4$.

Daher können nur die Zahlen $a = 1,2,3,4$ die geforderte Eigenschaft haben.

II. Sie haben diese Eigenschaft; denn das Gleichungssystem (1), (2), (3), (4) wird
für $a=1$ durch $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$,
für $a=2$ durch $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=0$,
für $a=3$ durch $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=0$,
für $a=4$ durch $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=1$ erfüllt.
Somit haben genau die Zahlen $a = 1,2,3,4$ die geforderte Eigenschaft.

---

3. a) I. Wenn reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 die Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \qquad (1)$$
$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \qquad (2)$$

erfüllen, so folgt: Für die reellen Zahlen $u = x_2+x_3+x_4$, $t=x_2+2x_3+2x_4$ gilt

$$x_1 = 4 - (x_2+x_3+x_4) = 4 - u, \qquad (3)$$
$$x_2 = 2(x_2+x_3+x_4) - (x_2+2x_3+2x_4) = 2u-t, \qquad (4)$$
$$x_4 = x_2+3x_3+3x_4 - (x_2+2x_3+2x_4) = 4-t, \qquad (5)$$
$$x_3 = u-x_2-x_4 = u-(2u-t)-(4-t) = 2t-u-4. \qquad (6)$$

Daher können nur die Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 der Form (3), (4), (5), (6) (mit reellen u, t) die Gleichungen (1), (2) erfüllen.

II. Für beliebige reelle u,t erfüllen Zahlen dieser Form in der Tat

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = (4-u)+(2u-t)+(2t-u-4)+(4-t) = 4,$$
$$x_2+2x_3+3x_4 = (2u-t)+2(2t-u-4)+3(4-t) = 4.$$

III. Aus I. und II. folgt: Die zu untersuchende Summe s nimmt genau alle diejenigen Werte an, die

$$\begin{aligned} s &= (4-u)^2+(2u-t)^2+(2t-u-4)^2+(4-t)^2 \\ &= 6u^2 - 8ut + 6t^2 - 24\,t + 48 \\ &= 6(u-\tfrac{2}{3}t)^2 + \tfrac{10}{3}(t-\tfrac{18}{5})^2 + \tfrac{24}{5} \end{aligned}$$

für reelle u und t annehmen kann.

IV. Wegen $(u-\frac{2}{3}t)^2 \geqq 0$ und $(t-\frac{18}{5})^2 \geqq 0$ gilt für alle diese Werte

$$s \geqq \frac{24}{5}.$$

V. Für $t = \frac{18}{5}$ und $u = \frac{2}{3}t = \frac{12}{5}$, was nach I. und II. gleichbedeutend mit $x_1 = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5}$, $x_2 = \frac{24}{5} - \frac{18}{5} = \frac{6}{5}$, $x_3 = \frac{36}{5} - \frac{12}{5} - 4 = \frac{4}{5}$, $x_4 = 4 - \frac{18}{5} = \frac{2}{5}$ ist, ergibt sich $s = \frac{24}{5}$.

VI. Aus IV. und V. folgt: Es gibt nichtnegative Zahlen x_1,x_2,x_3,x_4 mit (1),(2), so daß s einen kleinen Wert annimmt.
Solche Zahlen sind $x_1 = \frac{8}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$, $x_3 = \frac{4}{5}$, $x_4 = \frac{2}{5}$; der zugehörige Wert s ist $s = \frac{24}{5}$.

b) I. Wenn nichtnegative ganze Zahlen x_1,x_2,x_3,x_4 die Gleichungen (1),(2) erfüllen, so folgt:
Wäre $x_4 \geqq 2$, so wäre $x_2+2x_3+3x_4 \geqq 6$ im Widerspruch zu (2).
Also ist $x_4 = 1$ oder $x_4 = 0$.
Im Fall $x_4 = 1$ folgt $x_2+2x_3 = 1$. Wäre $x_3 \geqq 1$, so folgte der Widerspruch $x_2+2x_3 \geqq 2$.
Also ist $x_3 = 0$ und nach (2),(1) daher $x_2 = 1$, $x_1 = 2$, $s = 6$.
Im Fall $x_4 = 0$ folgt

$$x_2 + 2x_3 = 4. \qquad (7)$$

Wäre $x_3 \geqq 3$, so folgte der Widerspruch $x_2+2x_3 \geqq 6$. Also ist $x_3 = 2$ und nach (2),(1) daher $x_2 = 0$, $x_1 = 2$, $s = 8$

oder $x_3 = 1$ und nach (2),(1) daher $x_2 = 2$, $x_1 = 1$, $s = 6$
oder $x_3 = 0$ und nach (2),(1) daher $x_2 = 4$, $x_1 = 0$, $s = 16$.
Für alle diese Werte gilt somit $s \geqq 6$.

II. Für $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ (oder auch für $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$) sind (1) und (2) erfüllt, und es gilt $s = 6$.

III. Aus I. und II. folgt: Es gibt nichtnegative ganze Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 mit (1),(2), so daß s einen kleinsten Wert annimmt. Solche Zahlen sind die in II. angegebenen.

---

4. Wegen $630 = 2\cdot5\cdot7\cdot9$ gilt

$$f(x) = \frac{x}{630}(x^8-30x^6+273x^4-820x^2+576) = \frac{x\cdot g(x)}{630}$$

mit $g(x) = x^8 - 30x^6 + 273x^4 - 820x^2 + 576$.
Nun gilt $g(1) = g(-1) = g(2) = g(-2) = g(3) = g(-3) = g(4) = g(-4) = 0$,
also $g(x) = (x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)$.
Für $x \equiv 0$ (mod 2,5,7 oder 9) gilt $x\cdot g(x) \equiv 0$ (mod 2,5,7 bzw. 9), d. h., in diesem Falle ist $x\cdot g(x)$ durch 2,5,7 bzw. 9 teilbar.
Für $x \equiv \pm 1$ (mod 2,5,7 bzw. 9) gilt $x^2-1 \equiv 0$, also $g(x) \equiv 0$ (mod 2,5,7 bzw. 9), d. h., in diesem Falle ist $g(x)$ und damit ebenfalls $x\cdot g(x)$ durch 2,5,7 bzw. 9 teilbar.
Für $x \equiv \pm 2$ oder $x \equiv \pm 3$ oder $x \equiv \pm 4$ (mod 2,5,7 bzw. 9) ist ebenfalls einer der Faktoren von $g(x)$ kongruent zu 0, also gilt wieder $g(x) \equiv 0$ (mod 2,5,7 bzw. 9), d. h., auch in diesen Fällen ist $g(x)$ und damit $x\cdot g(x)$ durch 2,5,7 bzw. 9 teilbar.
Da hiermit alle Restklassen mod 2,5,7 und 9 erfaßt sind, so folgt: Für jede ganze Zahl x ist $x\cdot g(x)$ sowohl durch 2 als auch durch 5 als auch durch 7 als auch durch 9 teilbar, also wegen der paarweisen Teilerfremdheit von 2,5,7 und 9 durch 630 teilbar und somit $f(x)$ ganzzahlig, w.z.b.w.

<u>Ein anderer Lösungsweg:</u> Es seien $g_i(x)$ $(i=1,\dots,5)$ die durch

$$g_1(x) = f(x+1) - f(x),$$
$$g_{i+1}(x) = g_i(x+1) - g_i(x) \quad (i=1,\dots,4)$$

definierten Polynome. Man errechnet

$$g_1(x) = \frac{1}{70}x^8 + \frac{2}{35}x^7 - \frac{1}{5}x^6 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{7}{10}x^4 + \frac{14}{5}x^3 - \frac{18}{35}x^2 - \frac{72}{35}x,$$

$$g_2(x) = \frac{4}{35}x^7 + \frac{4}{5}x^6 + \frac{4}{5}x^5 - 4x^4 - \frac{32}{5}x^3 + \frac{16}{5}x^2 + \frac{192}{35}x,$$

$$g_3(x) = \frac{4}{5}x^6 + \frac{36}{5}x^5 + 20x^4 + 12x^3 - \frac{104}{5}x^2 - \frac{96}{5}x,$$

$$g_4(x) = \frac{24}{5}x^5 + 48x^4 + 168x^3 + 240x^2 + \frac{576}{5}x,$$

$$g_5(x) = 24x^4 + 240x^3 + 840x^2 + 1200x + 576.$$

Für alle ganzzahligen x nimmt $g_5(x)$ folglich ganzzahlige Werte an. Ferner ist $g_4(0) = 0$ ganzzahlig, und wenn für eine ganze Zahl x bereits $g_4(x)$ ganzzahlig ist,
so auch $g_4(x+1) = g_5(x) + g_4(x)$
und $g_4(x-1) = g_4(x) - g_5(x-1)$.
Daher ergibt sich durch vollständige Induktion, daß $g_4(x)$ sowohl für alle $x=0,1,2,...$ als auch für alle $x=0,-1,-2,...$ Ganzzahlig ist. Ebenso beweist man der Reihe nach, daß die Polynome $g_3(x)$, $g_2(x)$, $g_1(x)$, $f(x)$ für alle ganzzahligen x ganzzahlige Werte annehmen.

---

5. Wegen $1 - \frac{1}{1+\varepsilon_\mu} = \frac{\varepsilon_\mu}{1+\varepsilon_\mu}$ $(\mu = 1,2,\ldots,n)$ folgt aus (1) und (2)

$$x_1 - x_2 = a_1 \cdot \frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} + a_2 \cdot \frac{\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2} + \ldots + a_n \cdot \frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}$$

nach der Dreiecksungleichung also

$$|x_1 - x_2| \leqq |a_1| \cdot \left|\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}\right| + |a_2| \cdot \left|\frac{\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}\right| + \ldots + |a_n| \cdot \left|\frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}\right|. \qquad (4)$$

Aus (3) folgt ferner $\varepsilon_\mu \geqq \frac{-1}{10^m}$, also $1 + \varepsilon_\mu \geqq \frac{10^m - 1}{10^m} > 0$ und daher

$$\left|\frac{1}{1+\varepsilon_\mu}\right| = \frac{1}{1+\varepsilon_\mu} \leqq \frac{10^m}{10^m - 1}. \qquad (5)$$

Da die Ungleichungen (3) und (5) nur nichtnegative Zahlen enthalten, ergibt sich durch Multiplikation

$$\left|\frac{\varepsilon_\mu}{1+\varepsilon_\mu}\right| \leqq \frac{1}{10^m - 1}.$$

Hiernach folgt aus (4)

$$|x_2 - x_1| \leqq \frac{1}{10^m - 1} (|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|), \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Mein Freund, hier erhälst Du endlich das längst versprochene und erwartete Buch. Ist es auch klein, so handelt es doch von einem sehr großen Gegenstande, nämlich von meiner und vieler Leute Unwissenheit. Und wäre es erlaubt gewesen, diesen Gegenstand auf dem Amboß des Geistes mit dem Hammer der Wissenschaft breitzuschlagen, glaube mir, das Buch wäre angewachsen zu einer Last, an der ein Kamel zu tragen hätte. Denn gibt es für eine Abhandlung einen größeren und reicheren Stoff als die menschliche Unwissenheit, vor allem meine eigene?

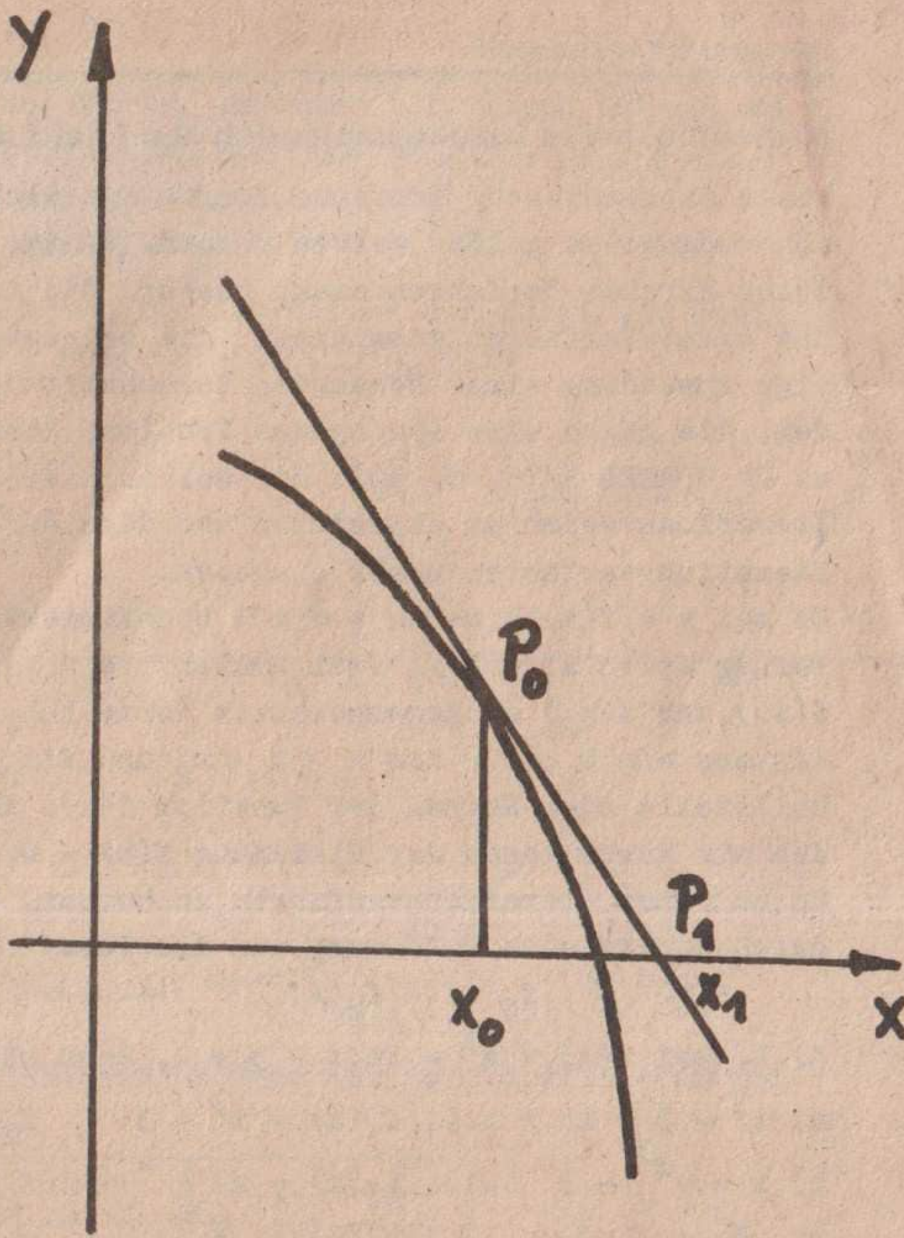
Es gibt eben Leute, die es nicht wagen, eigene Bücher zu schreiben, und die deshalb in ihrer Schreibwut wenigstens Kommentare zu fremden Büchern verfassen, ähnlich denen, die von der Baukunst nichts verstehen, dafür aber wenigstens die Hausmauern übertünchen. Und aus dieser Arbeit erhoffen sie sich einigen Ruhm, den sie aber natürlich nur erreichen können durch die, deren Bücher sie kommentieren, und deshalb loben sie dieselben voll Eifer, ohne Maß und mit viel Übertreibung.

Francesco Petrarca

(Aus: Über die eigene und vieler Leute Unwissenheit
Widmungsbrief an Donato Apennigena)

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner
Anschrift: **WURZEL,** 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-422-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 20. 7. 1983



10
83

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

17. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Näherungsweise Lösungsmethoden von Gleichungen

Viele mathematische Probleme führen auf Gleichungen, die nur näherungsweise gelöst werden können. Wenige Spezialfälle sind durch direkte Verfahren exakt lösbar. Die numerische Mathematik hat daher Verfahren entwickelt, die es gestatten, durch oftmalige Anwendung einer bekannten Vorschrift Zahlenfolgen zu finden, die gegen eine Lösung des Problems konvergieren (siehe z. B. WURZEL 4/75, S. 50). Wir wollen hier dieses sogenannte Iterationsverfahren skizzieren und dann auf einige spezielle Iterationsverfahren näher eingehen.

Es sei $y = f(x)$ eine in $a \leq x \leq b$ definierte stetige Funktion. Ferner seien x_1 und x_2 zwei Zahlen $(a \leq x_1 < x_2 \leq b)$, für die $f(x_1)$ und $f(x_2)$ entgegengesetzte Werte haben. Dann gibt es mindestens ein x_n, für das $x_1 < x_n < x_2$ und $f(x_n) = 0$ ist. x_n heißt Nullstelle oder Wurzel der Funktion $f(x)$. Ihre Bestimmung finden wir durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$.

Um zu einem Iterationsverfahren zu kommen, bringen wir $f(x) = 0$ durch äquivalente Umformung auf die Form

$$f_1(x) = f_2(x).$$

Z. B. sei $f(x) = x^3 - \ln x - 3 = 0$. Dann könnte sein:

a) $x^3 - 3 = \ln x$ .... $f_1(x) = x^3 - 3$ $\quad f_2(x) = \ln x$

b) $x = e^{x^3} - 3$ .... $f_1(x) = x$ $\quad f_2(x) = e^{x^3} - 3$

c) $e^{x^3} = x\, e^3$ .... $f_1(x) = e^{x^3}$ $\quad f_2(x) = x\, e^3$

Wir konstruieren nun eine konvergente Zahlenfolge $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ nach der Vorschrift $f_1(x_{m+1}) = f_2(x_m)$ $\quad (x_1 < x_m < x_2)$ bei gegebenem Anfangswert x_0 zur Berechnung einer Nullstelle x_n. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit ist der Grenzwert einer solchen Folge Nullstelle; denn ist $\lim\limits_{m \to \infty} x_m = g$, dann ist auch $\lim\limits_{m \to \infty} x_{m+1} = g$ und wegen der Stetigkeit von f_1 und f_2 gilt $f_1(g) = f_2(g)$, d. h. $g = x_n$.

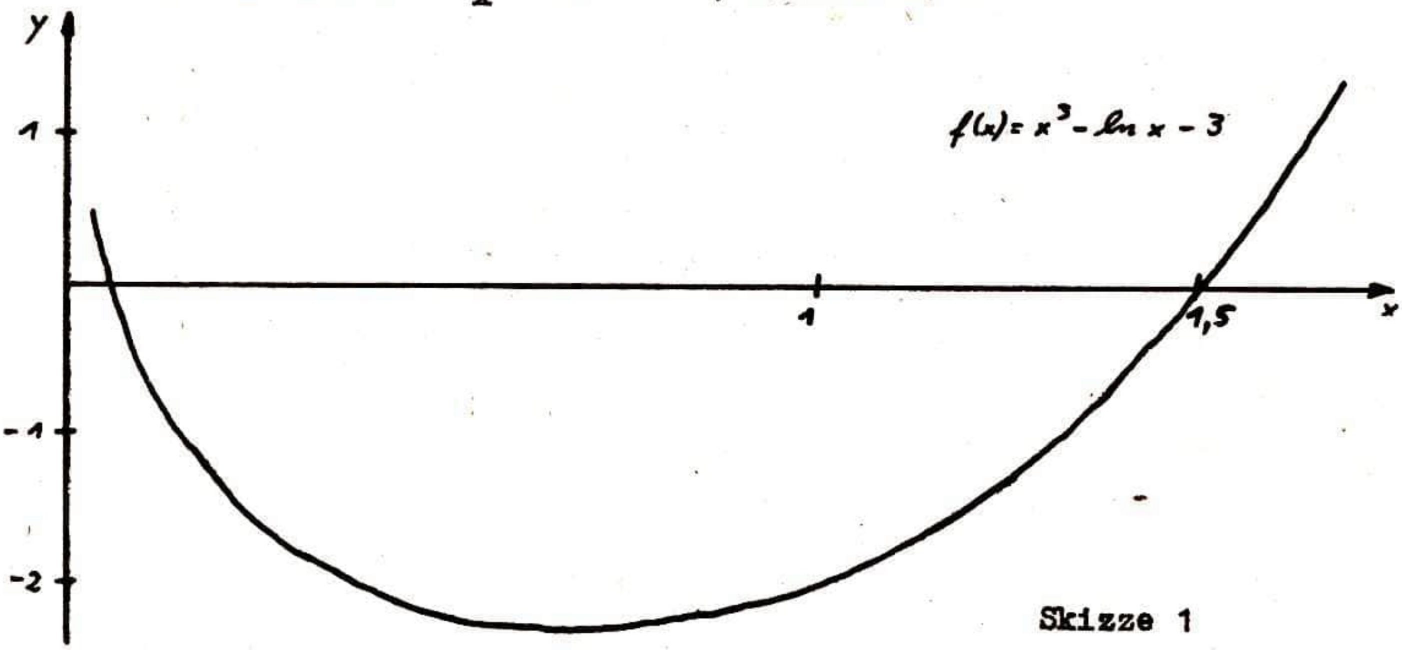
Hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Zahlenfolge ist: $f_1'(x)$ und $f_2'(x)$ sind in einer Umgebung von x_n stetig - x_0 liegt in dieser Umgebung - und es ist $|f_1'(x)| > |f_2'(x)|$.

Zur Erläuterung dieses Verfahrens bestimmen wir eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - \ln x - 3$ (siehe Skizze 1).

Für x_1 wählen wir 1 und für x_2 den Wert 1,7. Durch Skizze ist es naheliegend, $x_0 = 1,5$ zu wählen. Aus $x^3 - 3 - \ln x = 0$ ergibt sich für $f_1 = x^3 - 3$ und $f_2 = \ln x$.

$$f_1' = 3x^2 \quad \text{und} \quad f_2' = \frac{1}{x} .$$

Die hinreichende Bedingung für Konvergenz der Folge ist gesichert, denn aus $3x^2 > \frac{1}{x}$ folgt $x > \sqrt[3]{0,333} \approx 0,7$.



Skizze 1

Die Ergebnisse des Verfahrens können aus der Tabelle 1 entnommen werden.

m	x_m	$\ln x_m$	$x_{m+1} - x_m$
0	1,5	0,4055	0,004
1	1,504	0,4081	0,0008
2	1,5048	0,4087	0,00016
3	1,50496	0,40877	0,00003
4	1,50499	0,40879	

Tabelle 1

x_n ist also $x_n = 1,50499$, wobei die letzte Ziffer aufgerundet ist.

Wie rasch die Zahlenfolge gegen den Grenzwert x_n konvergiert, hängt natürlich von der Wahl der Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ab. Bei rascher Konvergenz gegen den Grenzwert spricht man von Zahlenfolgen hoher Konvergenzordnung.

Spezielle Iterationsverfahren

I. Einfache Iteration

Von einfacher Iteration sprechen wir, wenn eine der Funktionen f_1 oder f_2 gleich x ist. Als Beispiel wollen wir die Kubikwurzeliteration betrachten.

$x_n = \sqrt[3]{a}$ $(a > 0)$ ist die Wurzel der Gleichung $x^3 - a = 0$.
Für f_1 bzw. f_2 gibt es folgende Möglichkeiten:

a) $\frac{a}{x^2} = x$ .... $f_1(x) = \frac{a}{x^2}$ $\quad f_2(x) = x$

b) $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x^2}\right)$ .... $f_1(x) = x$ $\quad f_2(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x^2}\right)$

Im Falle a) lautet die Konvergenzbedingung:

$$\frac{2a}{x^3} > 1, \text{ d. h. } 2a > x^3$$

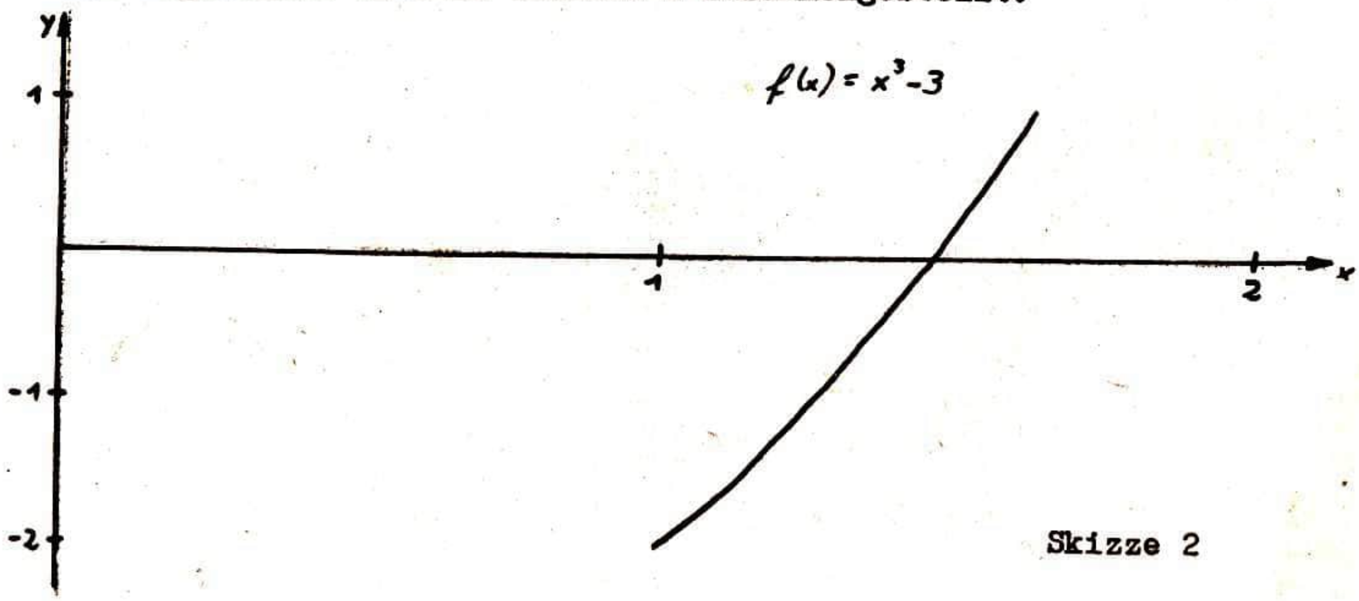
Im Falle b) lautet sie: $\frac{1}{2}\left|\left(1 - \frac{2a}{x^3}\right)\right| < 1$, d. h. $x^3 > \frac{2a}{3}$

zu a) Wir stellen uns die Aufgabe, $\sqrt[3]{3}$ auf 6 Stellen genau zu berechnen. Zunächst entnehmen wir der Skizze 2, daß der Anfangswert $x_0 = 1{,}45$ gewählt werden kann.

Die Konvergenzbedingung ist offensichtlich für $a = 3$ erfüllt.
Die Zahlenfolge ergibt sich aus dem Ansatz: $\frac{a}{x_{m+1}^2} = x_m$

$$x_{m+1} = \sqrt{\frac{a}{x_m}} \quad (a = 3.)$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengestellt.



Skizze 2

m	x_m	$x_{m+1} - x_m$
0	1,45	
1	1,4383898	0,0116102
2	1,4441834	0,0057936
3	1,4412835	0,0028999
4	1,4427328	0,0014493
5	1,4420080	0,0007248
6	1,4423704	0,0003624
7	1,4421891	0,0001813
8	1,4422797	0,0000906
9	1,4422344	0,0000453
10	1,4422571	0,0000227
11	1,4422458	0,0000113
12	1,4422514	0,0000056
13	1,4422487	0,0000027
14	1,4422500	0,0000013
15	1,4422493	0,0000007
16	1,4422497	0,0000004
17	1,4422494	0,0000003
18	1,4422496	0,0000002
19	1,4422496	0,0000000

Tabelle 2

Im Falle b) ist die Konvergenzbedingung auch erfüllt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

m	$x_m = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x^2})$	$x_{m+1} - x_m$
0	1,45	0,0115636
1	1,4384364	0,0057349
2	1,4441713	0,0038788
3	1,4412925	0,0014366
4	1,4427291	0,0007191
5	1,4420100	0,0003594
6	1,4423694	0,0001797
7	1,4421897	0,0000898
8	1,4422795	0,0000449
9	1,4422346	0,0000225
10	1,4422571	0,0000113
11	1,4422458	0,0000057
12	1,4422515	0,0000029
13	1,4422486	0,0000014
14	1,4422500	0,0000006
15	1,4422494	0,0000002
16	1,4422496	0,0000001
17	1,4422495	

Tabelle 3

Ergebnis: $\sqrt[3]{3} = 1,4422495$ **bzw.** $1,4422496$

Die Konvergenzordnung bei a) und b) ist ungefähr gleich.

II. Newtonsche Näherungsmethode

Beim Newtonschen Verfahren definieren wir $f_1(x)$ und $f_2(x)$ durch folgende Funktionen:

$$f_1 = x \qquad f_2 = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,; \qquad f'(x) \neq 0 \text{ vorausgesetzt.}$$

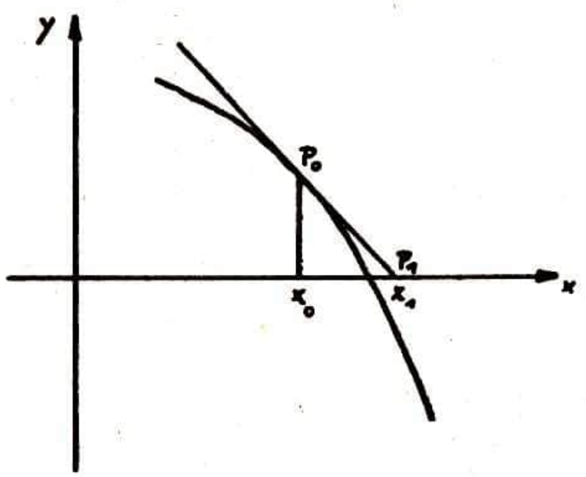
Konvergenz liegt vor, wenn $|f_2'(x)| = \left|\frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2}\right| < 1$ ist.

Die Iterationsfolge lautet dann:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}\,; \qquad f'(x_m) \neq 0;$$

Die folgende geometrische Betrachtung zeigt den Weg, wie Newton zu dieser Näherungsmethode gekommen ist.

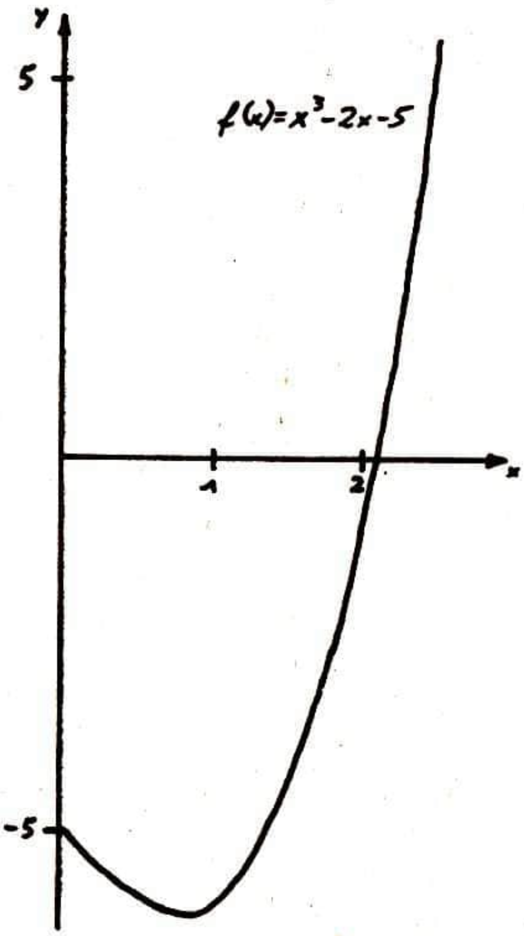
Es sei $f(x) = 0$ die gegebene Gleichung mit einer einfachen Nullstelle x_n und x_0 ein guter Näherungswert dieser Nullstelle (siehe Skizze 3).



Skizze 3

Durch $P_0(x_0;f(x_0))$ legen wir die Tangente, die die x-Achse im Punkte P_1 $(x_1;0)$ schneiden möge. Wenn x_0 der Nullstelle schon ziemlich nahe kommt, wird P_1 ein besserer Näherungswert als x_0 sein. Die Gleichung der Tangente lautet:

$$\frac{y-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$



Skizze 4

Für $P_1(x_1;0)$ erhalten wir: $-f(x_o) = f'(x_o) \cdot (x_1-x_o)$ bzw.

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$$

Fortsetzung dieses Verfahrens führt zur Zahlenfolge:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}$$

Newton erläuterte sein Verfahren selbst an der Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Wir wollen dieses Beispiel auch hier behandeln. Aus der Skizze 4 lesen wir einen ersten Näherungswert $x_o = 2$ ab. Die Zahlenfolge lautet dann:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{(x^3-2x-5)}{3x^2-2}$$

Die Ergebnisse zeigt folgende Tabelle 4:

m	x_m	$x_{m+1} - x_m$
0	2	0,1
1	2,1	0,0054318
2	2,0945682	0,0000167
3	2,0945515	

$x_n \approx 2{,}0945\underline{5}$

Tabelle 4

Die Konvergenzordnung ist ersichtlich höher als bei der Zahlenfolge der vorhergehenden Aufgabe.
Liegt eine Doppelnullstelle vor, d. h. ist $f'(x_n) = 0$ und $f''(x_n) \neq 0$, so ist das Newtonsche Verfahren auch anwendbar, die Konvergenzordnung wird dann aber geringer sein.

Dr. B. Hanisch, Halle

Preisaufgaben

P 49 ② Sei $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ und

$$S_n = 1 + \left(\frac{1+q}{2}\right) + \left(\frac{1+q}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$$

Man beweise, daß

$$\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2}s_1 + \binom{n+1}{3}s_2 + \dots + \binom{n+1}{n+1}s_n = 2^n S_n \text{ gilt.}$$

P 50 ① Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen $n > 2$ gilt: $(n!)^2 > n^n$

P 51 ① Gegeben sei ein Quadrat der Kantenlänge 1. Dieses wird von 4 Geraden in 9 gleichgroße Teilquadrate zerlegt, von denen das mittlere entfernt wird. Mit jedem der restlichen 8 Teilquadrate der Kantenlänge $1/3$ wiederholt man diese Prozedur usw.

a) Wieviele Quadrate der Kantenlänge $1/3^n$ bleiben übrig, wenn man die Operation n mal durchführt?

b) Wie verhält sich der Flächeninhalt des verbleibenden Gebildes für unbegrenzt wachsendes n?

P 52 ① Welche natürlichen Zahlen lassen sich nicht als Summe wenigstens zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen?

P 53 ① Es ist zu beweisen, daß das Produkt von vier aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen nicht das Quadrat einer ganzen Zahl sein kann!

P 54 ② Доказать, что, кроме тетраедра, не существуют ни одного выпуклого многогранника, у которого любая вершина была бы соединена ребрами со всеми остальными.

Einsendeschluß: 15. 1. 1984

Magische Quadrate und magische Würfel

1. Fortsetzung

Verschiedene Definitionen des Begriffs "Magisches Quadrat"

Es steht nichts im Wege, den Begriff magisches Quadrat auch anders als bisher üblich zu definieren. Wir wollen im folgenden einige andere Definitionen und ihre Verwendung einführen.

D e f i n i t i o n 1. Ein magisches Quadrat ist eine quadratische Matrix, deren Elemente beliebige natürliche Zahlen sind und folgende Eigenschaften haben. Die Summe der Zahlen in jeder Zeile, Spalte, Haupt- und Nebendiagonale ist immer gleich.

Nach dieser Definition gibt es auch magische Quadrate 2. Ordnung, z. B. die Matrix $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$. Sind alle Elemente oder wenigstens 2 Elemente gleich, so wollen wir diese magischen Quadrate als elementare Quadrate bezeichnen. Wir können zeigen, daß sich aus elementaren magischen Quadraten magische Quadrate im üblichen Sinne erzeugen lassen.

D e f i n i t i o n 2. Ein magisches Quadrat n-ter Ordnung ist eine quadratische Matrix mit n^2 Elementen, bei denen die n^2 Elemente n^2 aufeinanderfolgende Zahlen sind mit der Eigenschaft, daß die Summen der Zahlen in jeder Zeile, Spalte, Haupt- und Nebendiagonale gleiche Werte haben.

Diese Definition ist im wesentlichen die bisher übliche Definition der magischen Quadrate.

D e f i n i t i o n 3. Ein magisches Quadrat n-ter Ordnung ist eine quadratische Matrix von n^2 Elementen. Die Elemente sind natürliche Zahlen von der Eigenschaft, daß das Produkt der Zahlen jeder Zeile, Spalte, Haupt- und Nebendiagonale gleiche Werte besitzt.

Diese Definitionen ließen sich noch verallgemeinern. Wir wollen uns hier auf diese drei beschränken und einige Zusammenhänge dieser 3 Definitionen nachweisen.

zu Def. 1: Die Bedeutung der elementaren magischen Quadrate liegt darin, daß man aus ihnen magische Quadrate im Sinne der Def. 2 erzeugen kann. Wir wollen dies an drei Beispielen erläutern.

Aus den Zahlen 1, 2 und 3 und den Zahlen 0, 3 und 6 lassen sich 2 elementare magische Quadrate aufstellen mit den magischen Zahlen 6 und 9. Unter magischer Zahl verstehen wir die Summe der Zahlen in einer Zeile oder Spalte. Die Addition beider Matrizen ergibt ein magisches Quadrat dritter Ordnung im üblichen Sinne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Wichtig ist dabei, daß sich aus den Zahlen 1,2,3 und 0,3,6 alle Zahlen von 1 bis 9 bilden lassen.

Will man ein magisches Quadrat mit beliebigen 9 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen haben, so braucht man nur noch das elementare Quadrat $\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$ addieren. Man erhält dann das magische Quadrat

$$\begin{pmatrix} 4+a & 3+a & 8+a \\ 9+a & 5+a & 1+a \\ 2+a & 7+a & 6+a \end{pmatrix}$$

a könnte man z. B. so wählen, daß als magische Zahl eine Jahreszahl, etwa 1983 entsteht. Für a müßte man die Zahl 656 wählen.

Als zweites Beispiel wollen wir ein magisches Quadrat 4. Ordnung aufbauen. Wir verwenden dazu die Zahlen 1,2,3,4 und 0,4,8,12. Wir bilden daraus 2 elementare magische Quadrate:

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ mit der magischen Zahl 10 und das elementare

Quadrat $\begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 8 & 4 & 12 \\ 12 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ mit der magischen Zahl 24

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 8 & 4 & 12 \\ 12 & 8 & 4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & 11 & 7 & 14 \\ 3 & 10 & 6 & 15 \\ 13 & 8 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Spiegelungen oder Drehungen lassen sich auch andere Kombinationen aufstellen.

Auch für ein magisches Quadrat 5. Ordnung läßt sich eine Zusammensetzung aus elementaren magischen Quadraten finden. Wir verwenden dazu die Zahlen 1,2,3,4,5 und 0,5,10,15 und 20. Wir geben hier das Ergebnis einer von vielen Möglichkeiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 15 & 0 \\ 0 & 10 & 20 & 5 & 15 \\ 15 & 0 & 10 & 20 & 5 \\ 5 & 15 & 0 & 10 & 20 \\ 20 & 5 & 15 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 10 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

Will man ein magisches Quadrat n. Ordnung aufbauen, so muß man für die beiden elementaren magischen Quadrate die Zahlen 1,2,... bis n bzw. 0,n,2n,3n,... bis (n-1)n verwenden, aus denen sich alle Zahlen von 1 bis n^2 zusammensetzen lassen.

zu Def. 2: Über magische Quadrate der Def. 2 haben wir eingehend im ersten Aufsatz geschrieben. Die elementaren magischen Quadrate sind auch geeignet, magische Quadrate zu bilden, die nicht aufeinanderfolgende natürliche Zahlen enthalten, sondern z. B. Zahlen einer beliebigen arithmetischen Zahlenfolge. Wir wollen wieder dazu 2 Beispiele konstruieren.

Wir stellen uns zur Aufgabe, ein magisches Quadrat 3. Ordnung zu bilden, deren Zahlen die arithmetische Folge 1,3,5,7,9,11,13, 15,17 darstellen. Die Summe der Zahlen in jeder Zeile, Spalte oder Diagonale sollen wieder gleich groß sein. Die magische Zahl muß in diesem Falle s = 27 sein, wie sich aus dem Ansatz $3s = \frac{9}{2} \cdot 18$ errechnen läßt.

Für die elementaren magischen Quadrate verwenden wir die Zahlen 1, 3, 5 bzw. 0, 6 und 12.

Eine der möglichen Lösungen ist dann folgende:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 12 & 6 \\ 12 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 13 & 11 \\ 17 & 9 & 1 \\ 7 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

Es ist wohl zu vermuten, daß man mit Hilfe der elementaren magischen Quadrate sämtliche anderen magischen Quadrate erzeugen kann.

Wir wollen noch ein zweites Beispiel konstruieren.

Wir suchen ein magisches Quadrat, deren Elemente die arithmetische Folge 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62 bilden. Die Summe in jeder Zeile, Spalte und Diagonale beträgt 128.

Für die elementaren magischen Quadrate verwenden wir die Zahlen 2, 6, 10, 14 bzw. 0, 16, 32 und 48. Aus diesen Zahlen lassen

sich alle Glieder der Zahlenfolge durch Addition bilden.
Eine der möglichen Lösungen ist folgendes magische Quadrat 4. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 6 & 14 \\ 14 & 6 & 10 & 2 \\ 14 & 6 & 10 & 2 \\ 2 & 10 & 6 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 48 & 48 & 0 \\ 32 & 16 & 16 & 32 \\ 16 & 32 & 32 & 16 \\ 48 & 0 & 0 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 58 & 54 & 14 \\ 46 & 22 & 26 & 34 \\ 30 & 38 & 42 & 18 \\ 50 & 10 & 6 & 62 \end{pmatrix}$$

zu Def. 3: Alle magischen Quadrate der Def. 1 und 2 lassen sich in magische Quadrate der Definition 3 überführen, wenn man ihre n^2 Elemente durch $a^1, a^2, a^3 \ldots$ bis a^{n^2} ersetzt. Dann erhält man ein magisches Quadrat, in dem nicht die Summe, sondern das Produkt aller Zahlen jeder Zeile, Spalte oder Diagonale konstant ist. Wählen wir z. B. das magische Quadrat 4. Ordnung von Albrecht Dürer und setzen a = 2, so erhalten wir das magische Quadrat

$$\begin{pmatrix} 66536 & 8 & 4 & 8192 \\ 32 & 1024 & 2048 & 256 \\ 512 & 64 & 128 & 4096 \\ 16 & 32800 & 16400 & 2 \end{pmatrix}$$

Das Produkt in jeder Zeile beträgt 17179869184, oder anders ausgedrückt, in jeder Zeile beträgt das Produkt 2^{34}.
Bei elementaren magischen Quadraten gibt es viele, bei denen sowohl Summe als auch Produkt aller Zahlen einer Zeile oder Spalte je einen konstanten Wert haben. Beispiele hierfür sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 10 & 6 & 14 \\ 14 & 6 & 10 & 2 \\ 14 & 6 & 10 & 2 \\ 2 & 10 & 6 & 14 \end{pmatrix}$$

Zum Schluß eine Aufgabe für den Leser: Man bestimme ein magisches Quadrat dritter Ordnung, dessen Elemente 9 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen, so daß die Summe aller Zahlen in jeder Zeile, Spalte oder Diagonale das Todesjahr von Max Planck (1947) ergeben.

Literatur zu diesem Artikel:
1. Hermann Schubert: Mathematische Mußestunden
2. Mathematisches Mosaik, Urania-Verlag

Dr. B. Hanisch, Halle

Lösungen der DDR-Olympiade Junger Mathematiker
(Olympiaklasse 11/12) – Fortsetzung

6A. a) Bezeichnet man die Größen der Winkel $\sphericalangle ADP$, $\sphericalangle BDP$ bzw. $\sphericalangle CDP$ mit α, β bzw. γ, dann gilt für die Summe s der Abstände der Punkte A, B und C von g die Beziehung

$$s = a \cdot \sin\alpha + b \cdot \sin\beta + c \cdot \sin\gamma \quad . \qquad (2)$$

Angenommen, P liege auf der Seite AC des Dreiecks ABC. Dann folgt:

$\gamma = 90^\circ - \alpha$, $\beta = 90^\circ$ (da BD senkrecht auf der Ebene durch A, D und C steht), und es gilt:

$$s = a \cdot \sin\alpha + b + c \cdot \cos\alpha \; .$$

Aus der CAUCHY-SCHWARZ'schen Ungleichung folgt für die reellen Zahlen $a, b, c, \sin\alpha, 1, \cos\alpha$ die Ungleichung

$$s = a \cdot \sin\alpha + b + c \cdot \cos\alpha \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + 1 + \cos^2\alpha}\,, \qquad (3)$$

woraus wegen $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ die behauptete Ungleichung (1) folgt:

$$s \leq \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Analog wird auf (1) geschlossen, wenn P auf BC oder auf AB liegt.

b) Entsprechend der Eigenschaften der CAUCHY-SCHWARZ'schen Ungleichung gilt für P auf AC das Gleichheitszeichen in (1) genau dann, wenn

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{1}{b} = \frac{\cos\alpha}{c}\,, \qquad (4)$$

gilt,

d. h. genau dann, wenn

$$\sin\alpha = \frac{a}{b} \text{ und } \cos\alpha = \frac{c}{b}\,. \qquad (5)$$

gilt.

Angenommen, P liege so auf AC, daß das Gleichheitszeichen in (1) gilt. Dann folgt aus (5)

$\tan\alpha = \frac{a}{c}$. Bezeichnet man im Dreieck ACD die Größe des Winkels $\sphericalangle ACD$ mit δ; dann gilt $\tan\delta = \frac{a}{c}$ und folglich

$$\tan\delta = \tan\alpha\,. \qquad (6)$$

Wegen $0^\circ \leq \alpha, \delta \leq 90^\circ$ folgt aus (6)

$\alpha = \delta$ und wegen $\overline{\sphericalangle CDA} = 90^\circ$

auch $\overline{\sphericalangle DPC} = 90^\circ$, d. h., P muß

gleich dem Fußpunkt des Lotes von D auf AC sein.

Weiter folgt aus (5):

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2},$$

also

$$b^2 = a^2 + c^2,$$

d. h., die Längen der Tetraederkanten BD und AC müssen gleich sein.

Diese beiden Bedingungen sind dann auch hinreichend; denn sei P Fußpunkt des Lotes von D auf AC, so folgt

$$a^2 \cdot \cos^2\alpha = \overline{DP}^2 = c^2 \cdot \sin^2\alpha$$

$$a^2(1-\sin^2\alpha) = c^2 \cdot \sin^2\alpha$$

und wegen $b^2 = a^2 + c^2$ schließlich

$$\sin^2\alpha = \frac{a^2}{b^2}$$

und wegen $a, b, c \geq 0$

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}.$$

Analog folgt

$$a^2 \cdot \cos^2\alpha = c^2(1-\cos^2\alpha) \text{ und } \cos\alpha = \frac{c}{b}.$$

Damit ergibt sich, daß es höchstens drei Punkte P auf dem Rand des Dreiecks ABC geben kann, für die in (1) das Gleichheitszeichen gelten kann; die Fußpunkte der Lote von D auf die Seiten des Dreiecks ABC. Für einen solchen Fußpunkt gilt das Gleichheitszeichen in (1) genau dann, wenn die Länge der Dreiecksseite, auf der P liegt, gleich der Länge der gegenüberliegenden Tetraederkante ist.

Das heißt:

Falls $b^2 = a^2 + c^2$ ist, hat genau der Fußpunkt P des Lotes von D auf AC,

falls $a^2 = b^2 + c^2$ ist, hat genau der Fußpunkt P des Lotes von D auf BC,

falls $c^2 = a^2 + b^2$ ist, hat genau der Fußpunkt P des Lotes von D auf AB,

falls keine dieser Bedingungen erfüllt ist, hat kein Punkt P des Randes vom Dreieck ABC die Eigenschaft, daß in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

6B) I. Wenn eine Funktion f die Gleichung (1) erfüllt, so wird durch (endliche) vollständige Induktion bewiesen, daß für $i=0,1,\ldots,n-1$

$$f(n-i) = \binom{n}{n-i}\cdot p^{n-i}(1-p)^i \qquad (2)$$
$$= \binom{n}{i}\cdot p^{n-i}(1-p)^i \qquad (2')$$

gilt:

a) Aus (1) für $k=n$ folgt $n\cdot\ldots\cdot 1\cdot f(n) = n\cdot\ldots\cdot 1\cdot p^n$, also $f(n) = p^n$, d. h. (2) für $i=0$.

b) Es sei h eine natürliche Zahl mit $1 \leq h < n$. Als Induktionsannahme werde vorausgesetzt, daß (2), (2') für $i=0,\ldots,h-1$ gilt. Daraus folgt:

Wegen (1) für $k=n-h$ gilt

$$(n-h)\cdot\ldots\cdot 1\cdot f(n-h) + (n-h+1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot f(n-h+1) +\ldots+$$
$$+ (n-1)\cdot\ldots\cdot h\cdot f(n-1)+n\cdot\ldots\cdot(h+1)\cdot f(n)$$
$$= n\cdot\ldots\cdot(h+1)\cdot p^{n-h},$$

nach Induktionsannahme (2') also

$$\cdot(n-h) = \frac{n\cdot\ldots\cdot(h+1)}{1\cdot\ldots\cdot(n-h)}\, p^{n-h} - \frac{n\cdot\ldots\cdot(h+1)}{1\cdot\ldots\cdot(n-h)}\cdot p^n -$$
$$- \frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot h}{1\cdot\ldots\cdot(n-h)}\cdot\frac{n}{1}\, p^{n-1}(1-p) -\ldots-$$
$$- \frac{(n-h+1)\cdot\ldots\cdot 2}{1\cdot\ldots\cdot(n-h)}\cdot\frac{n\cdot\ldots\cdot(n-h+2)}{1\cdot\ldots\cdot(h-1)}\cdot p^{n-h+1}(1-p)^{h-1}$$
$$= \frac{n\cdot\ldots\cdot(h+1)}{1\cdot\ldots\cdot(n-h)}\, p^{n-h}(1-p^h - \frac{h}{1}\, p^{h-1}(1-p) -$$
$$-\ldots- \frac{h\cdot\ldots\cdot 2}{1\cdot\ldots\cdot(h-1)}\, p(1-p)^{h-1})$$
$$= \binom{n}{n-h}p^{n-h}(1-(p+(1-p))^h + (1-p)^h),$$

d. h. (2) für $i=h$.

Daher kann nur die durch

$$f(x) = \binom{n}{x}p^x\,(1-p)^{n-x} \quad \left(= \binom{n}{n-x}p^x\,(1-p)^{n-x}\right)$$

definierte Funktion die Gleichung (1) erfüllen.

II. Sie erfüllt diese Gleichung; denn es gilt für $k=1,2,\ldots,n$

$$k\cdot\ldots\cdot 1\cdot f(k)+(k+1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot f(k+1)+\ldots+(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot f(n-1)+$$
$$+ n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot f(n)$$
$$= k\cdot\ldots\cdot 1\cdot \frac{n\cdot\ldots\cdot(k+1)}{1\cdot\ldots\cdot(n-k)}\, p^k(1-p)^{n-k} +$$
$$+ (k+1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot \frac{n\cdot\ldots\cdot(k+2)}{1\cdot\ldots\cdot(n-k-1)}\, p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} +$$
$$+\ldots+ (n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot \frac{n}{1}\cdot p^{n-1}(1-p)+n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)p^n$$

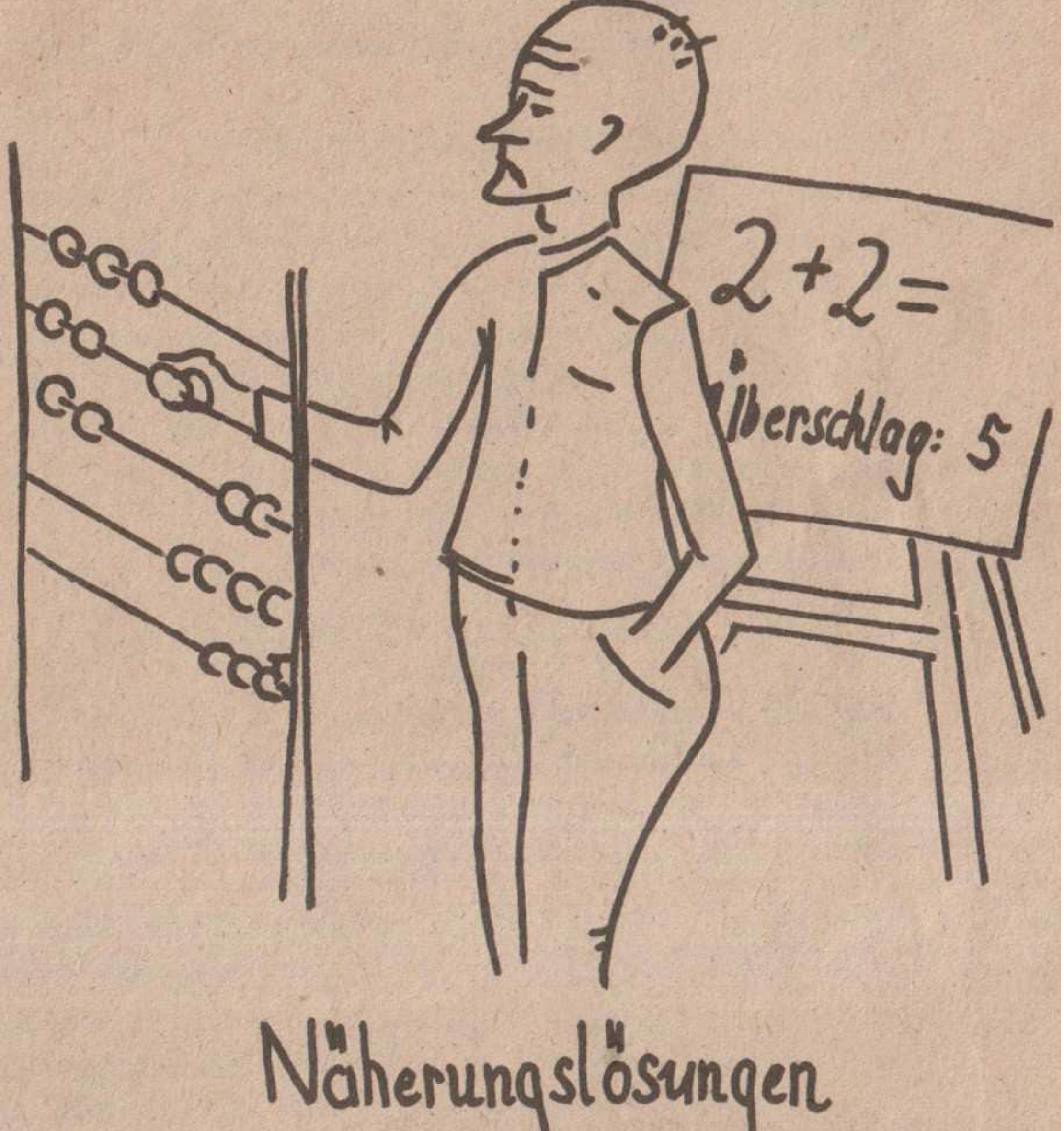
$$= n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)p^k\left((1-p)^{n-k} + \frac{(n-k)\cdot\ldots\cdot 2}{1\cdot\ldots\cdot(n-k-1)}\,p(1-p)^{n-k-1} + \right.$$

$$\left. +\ldots+ \frac{n-k}{1}\,p^{n-k-1}(1-p)+p^{n-k}\right)$$

$$= n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)p^k\ ((1-p)+p)^{n-k} = n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)p^k.$$

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-122-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 23. 9. 1983



11
83

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
17. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Näherungsweise Lösungsmethoden von Gleichungen (Fortsetzung)

III. Sekantenverfahren (Regula falsi)

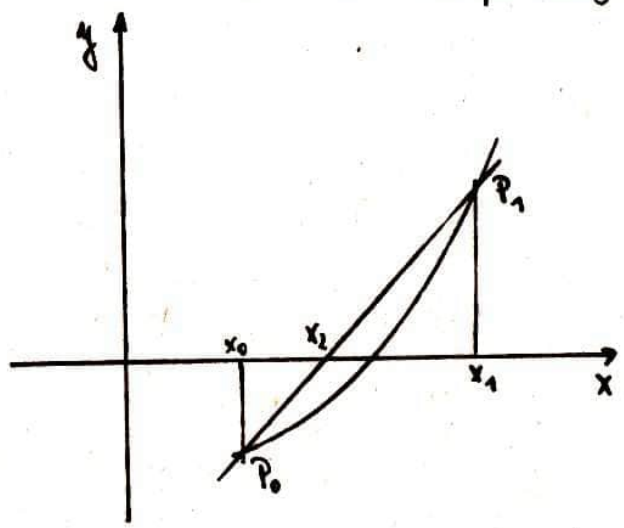
Es sei wieder eine beliebige numerische Gleichung durch $f(x) = 0$ gegeben. Die stetige Funktion $y = f(x)$ habe für zwei nahe beieinander liegende Werte x_o und x_1 zwei Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen. Dann liegt zwischen x_o und x_1 ein Wert x_n, für den $f(x_n) = 0$ ist. Wir denken uns nun die Kurve zwischen den Punkten P_o und P_1 (Skizze 5) durch ihre Sekante $\overline{P_oP_1}$ ersetzt. Dann wird der Schnittpunkt der Sekante mit der x-Achse einen besseren Näherungswert für x_n gegeben.

Die Gleichung der Sekante lautet:

$$\frac{y - f(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o}$$

Für den Schnittpunkt der Sekante mit der x-Achse ist $y = 0$, $x = x_2$. Aus obiger Gleichung ergibt sich für

$$x_2 = x_o - \frac{(x_1 - x_o)}{f(x_1)-f(x_o)} \cdot f(x_o)$$



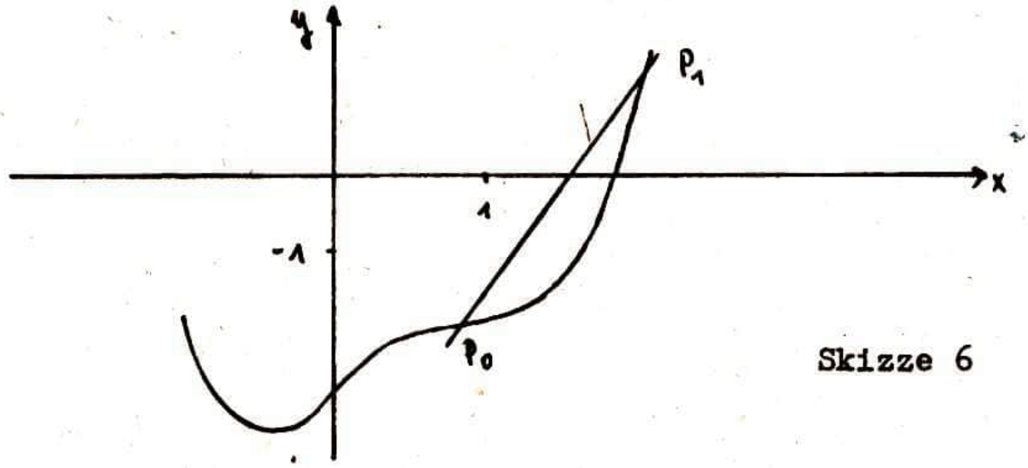
Skizze 5

Ist x_2 noch nicht genügend nahe der Nullstelle x_n, so suchen wir zu x_2 einen benachbarten Wert x_3 $(f(x_2) \cdot f(x_3) < 0)$ und wenden die Methode mit x_2 und x_3 genauso an wie mit x_o und x_1 usw.

Die hier geschilderte schon sehr alte Methode heißt auch "Regula falsi", weil sie aus falschen Werten den richtigen Wert zu finden sucht. Sie wurde zuerst auf Gleichungen ersten Grades angewandt, wo sie gleich beim ersten Schritt den wahren Wert x_n liefert. Auf Gleichungen höheren Grades scheint sie zuerst Cardano (1501 - 1576) angewandt zu haben.

Als Beispiel wählen wir die Gleichung: $x^4 - 2x^3 + 2x - 3 = 0.$

Eine Wurzel liegt zwischen $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$ (Skizze 6).



Skizze 6

Die Ergebnisse können wir aus der folgenden Tabelle 5 ablesen:

m	x_m	x_{m+1}	$x_{m+2} = x_m - \frac{(x_{m+1} - x_m)}{f(x_{m+1}) - f(x_m)} \cdot f(x_m)$
0	1	2	1,67
2	1,67	2	1,849
4	1,849	1,9	1,8847
6	1,8847	1,9	1,8850
8	1,8850	1,886	1,88503
10	1,88503	1,88504	1,885033

Tabelle 5

Ergebnis: Die gesuchte Wurzel beträgt $x_n = 1{,}88503\underline{3}$.
Auf ähnliche Weise kann man die zweite Nullstelle der Funktion $f(x)$ finden, die zwischen $x_0 = -1$ und $x_1 = -2$ liegt.

IV. Das Bernoulli-Verfahren

Da dieses Verfahren etwas komplizierter als die bisherigen beschriebenen Verfahren ist, wollen wir es erst an einem einfachen Beispiel erläutern und dann allgemein beschreiben.
Es sei $P(x)$ ein Polynom dritten Grades mit 3 reellen Nullstellen x_1, x_2 und x_3 ($0 < x_1 < x_2 < x_3$)

$$P(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12.$$

Dann läßt sich $\frac{1}{P(x)}$ in der Umgebung von $x = 0$ in einer unendlichen Reihe entwickeln:

$$\frac{1}{P(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k \quad \text{(Mac Laurinsche Reihe)}$$

Die Koeffizienten c_k sind bestimmt durch:

$$c_k = \left(\frac{1}{P(x)}\right)^{(k)}_{x=0} \cdot \frac{1}{k!}\ ;\ \left(\frac{1}{P(x)}\right)^{(k)}_{x=0} \text{ bedeutet die}$$

k-te Ableitung von P(x) an der Stelle x = 0.

Die Quotienten $\frac{c_i}{c_{i-1}}$ ergeben dann eine Zahlenfolge, die gegen $\frac{1}{x_1}$ konvergiert (i=1,2,3 usw.).

Im folgenden berechnen wir die ersten 3 Koeffizienten. Die weiteren Ergebnisse sind in Tabelle 6 zusammengefaßt.

Für die Berechnung der Koeffizienten c_1, c_2 und c_3 benötigen wir die Werte P, P', P" und P"' an der Stelle x = 0. Es ist:

$P_o = -12$; $P'_o = 19$; $P''_o = -16$ und $P'''_o = 6$

$$c_o = \frac{1}{P_o} = -0{,}083 \qquad c_1 = (-P^{-2} \cdot P')_o = -\frac{19}{144} = -0{,}132$$

$$c_2 = (2P^{-3} \cdot P'^2 - P^{-2} \cdot P'')_o \cdot \frac{1}{2!} = -0{,}153$$

$$c_3 = (-6P^{-4} \cdot P'^3 + 4P^{-3}P'P'' - P'''P^{-2} + 2P^{-3}P'P'')_o \cdot \frac{1}{3!} = -0{,}161$$

i	c_i	$c_i : c_{i-1}$	Ergebnis
0	-0,083	-	
1	-0,132	1,590	
2	-0,153	1,159	
3	-0,161	1,052	
4	-0,165	1,025	
5	-0,16606	1,00643	
6	-0,166458	1,00240	
7	-0,166595	1,00082	$x_1 = 1{,}000$

Tabelle 6

P(1) = 1 - 8 + 19 - 12 = 0

Dividiert man P(x) durch x - 1, erhält man die quadratische Funktion $f(x) = x^2 - 7x + 12$, deren Nullstellen $x_2 = 3$ und $x_3 = 4$ betragen.

Allgemeine Beschreibung des Bernoulli-Verfahrens

Es liege ein Polynom P(x) von n-tem Grade vor. Für seine Nullstellen gelte: $0 < x_1 < x_2 \leq x_3 \ldots \leq x_n$ (x_1 und x_2 seien 2 reelle und einfache Nullstellen).
Wir entwickeln die rationale Funktion $P(x)^{-1}$ in einer Mac Laurinschen Reihe um den Punkt x = 0 und bestimmen die Koeffizienten c_i, die durch folgende Relationen gegeben sind:

$$c_i = \frac{1}{i!} \cdot \left[P(x)^{-1}\right]^{(i)}$$ i-te Ableitung von $P(x)^{-1}$ an der Stelle x = 0.

Dann bilden wir die Zahlenfolgen

$$z_i = \frac{c_i}{c_{i-1}} \text{ und } z_i' = z_i \cdot \frac{z_{i+1} - z_i}{z_i - z_{i-1}}$$

Die Zahlenfolge z_i konvergiert gegen $\frac{1}{x_1}$, die Zahlenfolge z_i' gegen $\frac{1}{x_2}$.
In Tabelle 7 sind diese Zahlenfolgen für unser spezielles Beispiel angegeben.

i	c_i	z_i	z_i'	Ergebnisse
0	-0,083	-	-	Während z_i ersichtlich gegen 1 konvergiert, ist die Konvergenz von z_i' gegen 0,333 erst bei größerer Anzahl von Gliedern sichtbar.
1	-0,132	1,590	-	
2	-0,153	1,159	0,333	
3	-0,161	1,052	0,265	
4	-0,165	1,025	0,705	
5	-0,16606	1,00643	0,2184	
6	-0,166458	1,00240	0,393	
7	-0,166595	1,00082		

Tabelle 7

Ähnliche Iterationsverfahren lassen sich auch für Gleichungssysteme entwickeln, sowohl für lineare als auch für nichtlineare Gleichungssysteme. Anregungen hierzu findet der Leser z. B. im Taschenbuch der Mathematik von Bronstein - Semendjajew (Teubner Verlag 1979).

Dr. B. Hanisch, Halle

Preisaufgaben

P 55 ① Sei n eine natürliche Zahl und d ein natürlicher Teiler von $2n^2$. Man beweise, daß $n^2 + d$ keine Quadratzahl ist.

P 56 ① Man bestimme die Anzahl aller n-stelligen natürlichen Zahlen, in deren dekadischer Darstellung nur die Ziffern 1,2,3 auftreten, wobei jede Ziffer wenigstens einmal vorkommt.

P 57 ① Man beweise, daß für beliebige natürliche Zahlen $n \geq 1$ $A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ durch 8 teilbar ist.

P 58 ① Für alle x aus dem Intervall $[-1,1]$ gelte die Ungleichung $-1 \leq ax^2 + bx + c \leq 1$ mit reellen Koeffizienten a,b,c. Man zeige, daß dann für dieselben x die Ungleichung $-4 \leq 2ax + b \leq 4$ gilt.

P 59 ② Man löse das Gleichungssystem

$$y^2 + \sqrt{3y^2 - 2x + 3} = \frac{2}{3}x + 5$$

$$3x - 2y = 5$$

P 60 ② Пусть d – наибольший общий делитель целых положительных чисел a и b, a d' – наибольший общий делитель целых паложительных чисел a' и b'.
Доказать, что наибольший общий делитель чисел

aa', ab', ba', bb'

равен dd'.

Einsendeschluß 1. 2. 1984

Verwandte und gleichwertige mathematische Sätze

In der Mathematik gibt es viele Sätze (d. h. Aussagen), zwischen denen ein ganz bestimmter inhaltlicher Zusammenhang besteht. Mit derartigen Sätzen sollen sich die nachfolgenden Ausführungen beschäftigen.
Am Anfang möge eine Frage stehen.

Es sei f(x) eine für alle reellen Zahlen x definierte und beliebig oft differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Sätze (Aussagen) über f(x) sind wahr?

(1) Wenn f(x) an der Stelle x_0 ein lokales Extremum besitzt, so ist $f'(x_0) = 0$.
(2) Wenn f(x) an der Stelle x_0 <u>kein</u> lokales Extremum besitzt, so ist $f'(x_0) \neq 0$.
(3) Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt, so besitzt f(x) an der Stelle x_0 ein lokales Extremum.
(4) Wenn $f'(x_0) \neq 0$ gilt, so besitzt f(x) an der Stelle x_0 <u>kein</u> lokales Extremum.

Offensichtlich bestehen zwischen diesen vier Aussagen sehr enge Beziehungen. Bevor wir sie genauer untersuchen, seien zunächst Verwandtschaften anderer Art angeführt.

<u>I. Verwandte mathematische Sätze</u>

Für unsere Zwecke ist es sehr vorteilhaft, zur Formulierung der Sätze (Aussagen) immer die
"Wenn ..., so ..." - Form zu wählen.
Wie man an obigen Beispielen leicht erkennt, enthält der mit "so" beginnende zweite Teil die Behauptung(en). Im ersten Teil des Satzes dagegen werden nach dem Wort "wenn" die Voraussetzungen formuliert, die erfüllt sein müssen. Da man die Voraussetzungen häufig auch Bedingungen nennt, spricht man von der bedingten Form der Aussagen. Für die bedingte Form der Aussagen gibt es in sprachlicher Hinsicht natürlich auch andere Möglichkeiten, wie z. B.:
"Wenn ..., dann ..."
($\boxed{\text{Wenn}}$ eine Zahl durch 10 teilbar ist, $\boxed{\text{dann}}$ ist sie auch

durch 2 teilbar.)
"Ist ..., so ..."
($\boxed{\text{Ist}}$ f(x) eine gerade Funktion, $\boxed{\text{so}}$ ist ihr Graph achsialsymmetrisch zur y-Achse.)
"Sind ..., dann ..."
($\boxed{\text{Sind}}$ die natürlichen Zahlen m und n durch 7 teilbar, $\boxed{\text{dann}}$ ist auch ihre Summe m + n durch 7 teilbar.)
Eine erste Art der Verwandtschaft zwischen mathematischen Sätzen liegt vor, wenn ihre Voraussetzungen übereinstimmen. Aus der Vielzahl der Beispiele seien die folgenden Aussagen über das Parallelogramm ausgewählt, wobei ein Parallelogramm als ein konvexes Viereck mit zwei Paaren zueinander paralleler Gegenseiten aufgefaßt wird:
Wenn ein konvexes Viereck ein Parallelogramm ist, so sind die Gegenseiten jeweils gleich lang.
Wenn ein konvexes Viereck ein Parallelogramm ist, so halbieren die Diagonalen einander.
Wenn ein konvexes Viereck ein Parallelogramm ist, so sind die Gegenwinkel jeweils gleich groß.
Wenn ein konvexes Viereck ein Parallelogramm ist, so ist die Summe der einer Seite anliegenden Winkel 180°.
Bezeichnet man zur Abkürzung die gemeinsame Voraussetzung aller vier Sätze mit p und die verschiedenen Behauptungen mit q_1, q_2, q_3 und q_4, so ergibt sich:
Aus p folgt q_1,
aus p folgt q_2,
aus p folgt q_3 und
aus p folgt q_4.
Diese Darstellung kann noch weiter verkürzt werden, indem man mit Hilfe eines Pfeiles ausdrückt, daß aus der Voraussetzung die jeweilige Behauptung folgt. Dadurch lassen sich die vier Sätze sehr übersichtlich wie folgt aufschreiben:

$$p \longrightarrow q_1,$$
$$p \longrightarrow q_2,$$
$$p \longrightarrow q_3,$$
$$p \longrightarrow q_4.$$

Ein anderer uns interessierender Fall der Verwandtschaft zwischen mathematischen Sätzen besteht darin, daß aus unterschiedlichen Voraussetzungen auf ein und dieselbe Behauptung geschlossen wird. Ein sehr einfaches Beispiel dafür sind die nachstehenden Kongruenzsätze für Dreiecke.

Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so sind sie kongruent.

Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, so sind sie kongruent.

Wenn zwei Dreiecke in den drei Seiten übereinstimmen, so sind sie kongruent.

Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen, so sind sie kongruent.

Kennzeichnet man die vier verschiedenen Voraussetzungen dieser Aussagen durch die Symbole r_1, r_2, r_3 und r_4 und die gemeinsame Behauptung durch das Symbol s, so erhält man unter Verwendung des Pfeiles die Darstellungen

$$r_1 \longrightarrow s,$$
$$r_2 \longrightarrow s,$$
$$r_3 \longrightarrow s \quad \text{und}$$
$$r_4 \longrightarrow s.$$

An dieser Stelle sollen noch einige Bemerkungen über die Bedeutung der eben beschriebenen Verwandtschaft zwischen mathematischen Aussagen folgen.

Ist die Aufgabe gestellt, einen bestimmten Satz zu beweisen, so benötigt man dazu im allgemeinen außer den im Satz selbst angegebenen Voraussetzungen schon bekannte (bewiesene) Sätze. Auch bereits behandelte Definitionen müssen häufig angewendet werden. Man nennt diejenigen Definitionen und Sätze, die zur Beweisführung erforderlich sind, die Beweismittel. So läßt sich z. B. der Peripheriewinkelsatz (Peripheriewinkel über derselben Sehne eines Kreises sind gleich groß) sehr leicht mit Hilfe des Satzes über die Gegenwinkel eines Sehnenvierecks (in jedem Sehnenviereck ist die Summe der Gegenwinkel 180°) beweisen. Dabei ist der letztgenannte Satz das wichtigste Hilfsmittel, um den Beweis des Peripheriewinkelsatzes zu finden. Die Suche nach brauchbaren Beweismitteln ist um so komplizierter, je größer der Umfang des schon erworbenen Wissens ist. Deshalb ist es zweckmäßig, dieses Suchfeld zunächst dadurch einzuschränken, daß man die Anwendbarkeit verwandter Sätze untersucht. Bei dem vorstehend angeführten Beispiel stimmen zwar weder die Voraussetzungen noch die Behauptungen beider Sätze überein, aber eine gewisse Verwandtschaft im weiteren Sinne ist dennoch vorhanden, denn bei beiden Sätzen geht es um Winkelbeziehungen am Kreis, wobei der Begriff "Sehne" eine Rolle spielt. Die Verwandtschaft zwischen mathematischen Sätzen ist auch eine wesentliche Grundlage für das Systematisieren (d. h. Ordnen nach inhaltlichen Gesichtspunkten) des schon erworbenen Wissens.

II. Gleichwertige mathematische Sätze

Wir wollen uns jetzt den eingangs formulierten Aussagen (1) bis (4) zuwenden. Offensichtlich besteht zwischen ihnen ebenfalls ein inhaltlicher Zusammenhang, der nachfolgend genauer untersucht werden soll. Sie haben sicher gleich erkannt, daß die Sätze (1) und (4) wahre Aussagen sind. Dagegen sind (2) und (3) falsch, wie man durch nachfolgendes Gegenbeispiel leicht zeigen kann.

Die Potenzfunktion $f(x) = x^3$ z. B. besitzt an der Stelle $x_0 = 0$ kein lokales Extremum, es ist jedoch $f'(0) = 0$.

Die Untersuchung der Zusammenhänge zwischen den vier Aussagen wird wesentlich erleichtert, wenn wir sie - analog zu den Sätzen über das Parallelogramm und zu den Kongruenzsätzen - mit Hilfe von Zeichen darstellen. Zu diesem Zwecke legen wir fest, daß mit p die Voraussetzung des Satzes (1) bezeichnet werde und mit q die Behauptung. Auch der Pfeil soll wieder verwendet werden. Dann erhält man für die 1. Aussage (Wenn $f(x)$ an der Stelle x_0 ein lokales Extremum besitzt, so ist $f'(x_0) = 0$) die Darstellung $p \longrightarrow q$. Es erweist sich als notwendig, noch ein weiteres Zeichen einzuführen, und zwar das Zeichen $\neg$ ("nicht"). Seine Bedeutung läßt sich am einfachsten durch einige Beispiele erläutern, die in folgender Übersicht zusammengestellt sind.

Wenn p (oder q, oder r, oder s usw.) bedeutet:	so bedeutet ¬p (oder ¬q, oder ¬r, oder ¬s usw.):
f(x) besitzt an der Stelle x_0 ein lokales Extremum.	f(x) besitzt an der Stelle x_0 kein lokales Extremum.
$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) \neq 0$
$f'(x_0) \neq 0$	$f'(x_0) = 0$
Die Zahl n ist nicht durch 10 teilbar.	Die Zahl n ist durch 10 teilbar.
Der Graph einer Funktion ist achsialsymmetrisch zur y-Achse.	Der Graph einer Funktion ist nicht achsialsymmetrisch zur y-Achse.
Die Diagonalen halbieren einander.	Die Diagonalen halbieren nicht einander.
Zwei Dreiecke sind nicht kongruent.	Zwei Dreiecke sind kongruent.

Das Zeichen ¬ bezeichnet man als Zeichen für die Verneinung (Negation) einer Aussage. Es muß darauf geachtet werden, daß die Verneinung richtig gebildet wird, wie folgendes Beispiel zeigt:

Aussage p	Verneinung ¬p
f(x) ist eine gerade Funktion.	f(x) ist eine ungerade Funktion. Falsch, denn f(x) = 2x z. B. ist keine gerade Funktion, aber auch keine ungerade. Richtig muß man formulieren: f(x) ist keine gerade Funktion.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich der Zusammenhang zwischen den Sätzen (1) und (4) relativ leicht darstellen. Das folgende Schema zeigt, in welcher Weise die Aussage (4) aus (1) gebildet werden kann:

(1) Wenn f(x) an der Stelle x_0 ein lokales Extremum besitzt, so ist $f'(x_0) = 0$.

$f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein lokales Extremum. Voraussetzung p	$\longrightarrow$	$f'(x_0) = 0$ Behauptung q
	Verneinung	
$f'(x_0) \neq 0$ $\neg q$	$\longrightarrow$	$f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 kein lokales Extremum. $\neg p$

(4) Wenn $f'(x_0) \neq 0$ gilt, so besitzt $f(x)$ an der Stelle x_0 kein lokales Extremum.

Nach dem gleichen Prinzip soll jetzt aus einer anderen Aussage (1') eine Aussage (4') formuliert werden.
(Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Voraussetzung wieder mit p und die Behauptung mit q.)

(1') Wenn zwei Winkel α und β Scheitelwinkel sind, so sind sie kongruent.

Die Winkel α und β sind Scheitelwinkel. Voraussetzung p	$\longrightarrow$	α und β sind kongruent. Behauptung q
	Verneinung	
Die Winkel α und β sind nicht kongruent. $\neg q$	$\longrightarrow$	α und β sind nicht (keine) Scheitelwinkel. $\neg p$

(4') Wenn zwei Winkel α und β nicht kongruent sind, so sind α und β keine Scheitelwinkel.

Wir stellen fest, daß aus der wahren Aussage (1') eine neue wahre Aussage (4') entstanden ist. Daraus ergibt sich die Vermutung, daß man in der beschriebenen Weise aus einer wahren Aussage in jedem Falle eine neue wahre Aussage gewinnen kann. Um diese Vermutung zu erhärten, soll noch ein einfaches Beispiel betrachtet werden.

(1") Wenn eine Zahl n durch 6 teilbar ist, so ist sie auch durch 3 teilbar.
Darstellung in Zeichen: $p \longrightarrow q$

(4") Wenn eine Zahl n nicht durch 3 teilbar ist, so ist sie auch nicht durch 6 teilbar.
Darstellung in Zeichen: $\neg q \longrightarrow \neg p$

Auch bei diesem Beispiel ist aus der wahren Aussage (1") eine neue wahre Aussage (4") hervorgegangen.
Wir wollen jetzt prüfen, ob zwischen den am Anfang dieses Artikels aufgeschriebenen Aussagen (2) und (3) der gleiche Zusammenhang besteht wie zwischen den bisher besprochenen Paaren von Aussagen.

(2) Wenn $f(x)$ an der Stelle x_0 kein lokales Extremum besitzt, so ist $f'(x_0) \neq 0$.

$f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 kein lokales Extremum. Voraussetzung p	$\longrightarrow$	$f'(x_0) \neq 0$ Behauptung q
	Verneinung	
$f'(x_0) = 0$ $\neg q$	$\longrightarrow$	$f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein lokales Extremum. $\neg p$

(3) Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt, so besitzt $f(x)$ an der Stelle x_0 ein lokales Extremum.

Aus dem Schema ist erkennbar, daß die Aussage (3) aus (2) ebenfalls dadurch entstanden ist, daß die Voraussetzung p und die Behauptung q miteinander vertauscht und gleichzeitig verneint wurden: aus $p \longrightarrow q$ wurde $\neg q \longrightarrow \neg p$ gebildet. Dabei ist im Gegensatz zu den bisherigen Beispielen aus der falschen Aussage (2) eine andere falsche Aussage (3) hervorgegangen. Bevor wir unsere Ergebnisse verallgemeinern, soll noch ein nach der gleichen Methode gebildetes Paar von Aussagen untersucht werden.

(2') Wenn eine Funktion f(x) an der Stelle x_0 stetig ist, so ist sie an der Stelle x_0 auch differenzierbar.
Darstellung in Zeichen: $p \longrightarrow q$

(3') Wenn eine Funktion f(x) an der Stelle x_0 nicht differenzierbar ist, so ist sie an der Stelle x_0 auch nicht stetig.
Darstellung in Zeichen: $\neg q \longrightarrow \neg p$

Wir wollen festhalten, daß es sich in beiden Fällen wieder um falsche Sätze handelt, denn die Funktion $f(x) = |x|$ z. B. ist an der Stelle $x_0 = 0$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar. (Der Definitionsbereich sei die Menge der reellen Zahlen.)
Die bisher untersuchten Paare von Aussagen sind Beispiele für folgende allgemeine Gesetzmäßigkeit, auf deren Beweis leider verzichtet werden muß, weil dazu Kenntnisse aus der mathematischen Logik erforderlich sind:

> Wenn sich eine Aussage A_1 in der Form $p \longrightarrow q$ darstellen läßt, und die Aussage A_2 aus A_1 dadurch gebildet wird, daß man die Voraussetzung p mit der Behauptung q vertauscht und p und q gleichzeitig verneint, so sind die Aussagen A_1 und A_2 inhaltlich gleichwertig.
> In Zeichen: $p \longrightarrow q$ ist inhaltlich gleichwertig $\neg q \longrightarrow \neg p$

Diese Gleichwertigkeit bedeutet:
Die Aussage A_2 ist genau dann wahr, wenn A_1 wahr ist;
die Aussage A_2 ist genau dann falsch, wenn A_1 falsch ist.
Dabei ist es völlig gleichgültig, welche konkrete Bedeutung die Voraussetzung p und die Behauptung q jeweils haben.
In der Formulierung dieser Gesetzmäßigkeit kann das Wort "Aussage" überall durch das Wort "Satz" ersetzt werden. Im Grunde genommen drücken gleichwertige Aussagen in verschiedener Weise den gleichen Sachverhalt aus.
Die Bedeutung der inhaltlichen Gleichwertigkeit liegt besonders in den folgenden zwei Schlußfolgerungen:

- Der Beweis des Satzes A_1 kann durch den Beweis des Satzes A_2 ersetzt werden und umgekehrt (d. h. wenn der Satz A_2 bewiesen wurde, ist damit gleichzeitig auch der Satz A_1 bewiesen, und wenn umgekehrt der Satz A_1 bewiesen wurde, ist damit gleichzeitig auch der Satz A_2 bewiesen).

Aus einem wahren Satz der Form $p \longrightarrow q$ kann man durch Vertauschen und gleichzeitiges Verneinen von p und q mühelos einen neuen wahren Satz gewinnen.

Der von uns besprochene Fall der inhaltlichen Gleichwertigkeit ist nur einer unter vielen anderen. Es sei jedoch abschließend vor dem häufig auftretenden Fehler gewarnt, daß Gleichwertigkeit vorliege, wenn man einfach die Voraussetzung p mit der Behauptung q vertauscht.

Im Gegenteil gilt:

$p \longrightarrow q$ ist nicht inhaltlich gleichwertig $q \longrightarrow p$.

Zur Illustration verwenden wir folgenden wahren Satz:

Wenn eine natürliche Zahl n durch 10 teilbar ist, so ist sie auch durch 5 teilbar.

In Zeichen: $p \longrightarrow q$

Durch Vertauschen der Voraussetzung p mit der Behauptung q entsteht der falsche Satz:

Wenn eine natürliche Zahl n durch 5 teilbar ist, so ist sie auch durch 10 teilbar.

Prof. G. Schlosser
FSU – Sektion Mathematik
Bereich Mathematik-Methodik

Lösungen

$\boxed{\text{Aufgabe O 52}}$ Für nichtnegative reelle Zahlen gilt die Ungleichung $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $a = b = c$.

Dann gilt speziell für $a=x^3$, $b=y^3$ und $c=1$

$x^3 + y^3 + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^3y^31} = 3xy.$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $x^3 = y^3 = 1$, d. h. aber, nur $x = y = 1$ ist Lösung der Gleichung

$x^3 + y^3 + 1 = 3xy.$

Aufgabe 0 53 Es gilt für natürliche Zahlen $x \neq 0$

$$\frac{1}{(2x+1)^2} < \frac{1}{2x(2x+2)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x+2}\right).$$

Damit ergibt sich für

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i+1)^2} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2i} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2i} - \frac{1}{2(n+1)}\right)$$

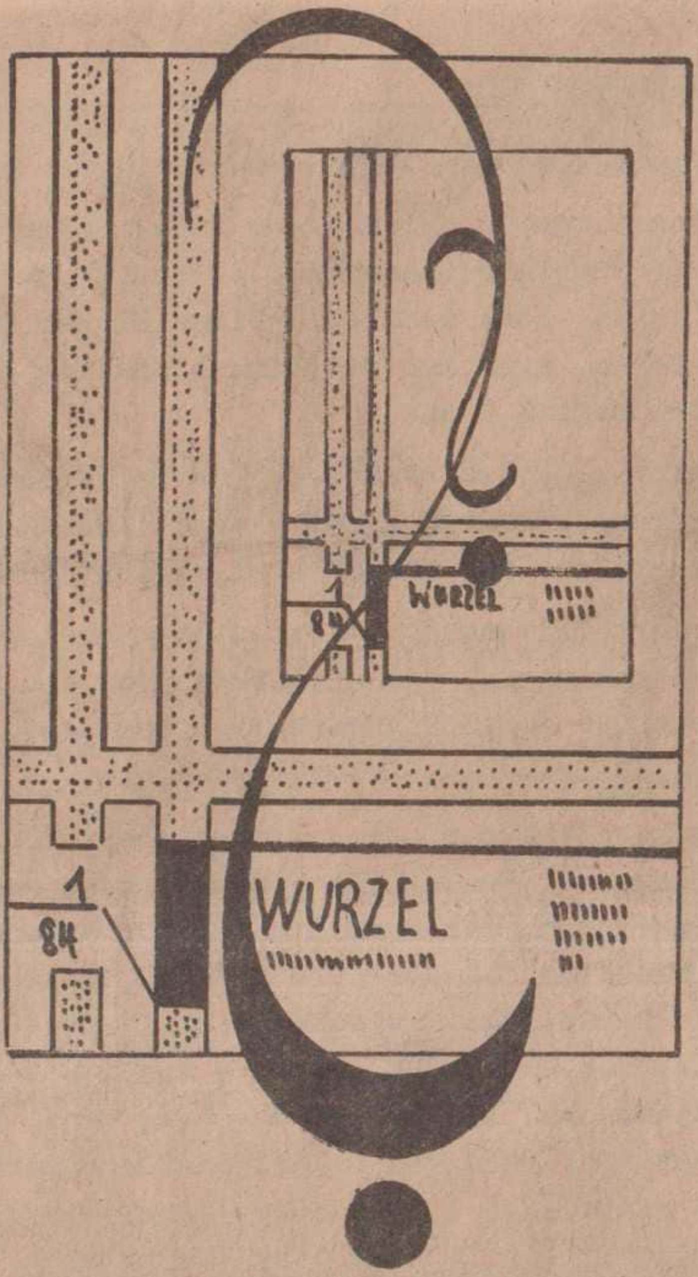
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4(n+1)}$$

$$< \frac{1}{4}.$$

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-122-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß 12. 10. 1983



12
83

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
17. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR:
0,20 M

Wir entdecken eine neue Eigenschaft der Tangensfunktion

Blättert man in irgendeinem Buch, das physikalische oder technische Probleme behandelt, so stößt man mit Sicherheit auf die Worte sin, cos, tan, cot. Diese Bücher kann man also nur dann verstehen, wenn man die Winkelfunktionen und ihre wichtigsten Eigenschaften kennt.

Wegen der großen Bedeutung der Trigonometrie in den praktischen Anwendungen der Mathematik wird dieser mathematische Teilbereich in der 10. Klasse ausführlich behandelt.

Das Wort Trigonometrie bedeutet soviel wie "Dreiecksmessung". Alle Kenntnisse, die wir heute über die trigonometrischen Funktionen und deren Eigenschaften besitzen, sind das Ergebnis einer 5000-jährigen Entwicklungsgeschichte.

Ausgehend von einfachen Dreiecksberechnungen führte diese Entwicklung zur Definition der Funktionen sin, cos für alle reellen Zahlen x, der Funktion tan für alle $x \neq \frac{\pi}{2} + g\pi$, g ganz, der Funktion cot für alle $x \neq g\pi$, g ganz.
Außer Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten bei gleichen Argumenten, wie z. B. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ für alle x, $\tan x \cdot \cot x = 1$ für alle $x \neq g\frac{\pi}{2}$, g ganz, die man im Unterricht kennenlernt, und den "Additionstheoremen" der Winkelfunktionen:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + g\pi, \ y \neq \frac{\pi}{2} + g\pi, \ g \text{ ganz}$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}, \quad x \neq g\pi, \ y \neq g\pi, \ g \text{ ganz},$$

gibt es noch eine Fülle weiterer Beziehungen zwischen den Funktionswerten. Alle Formeln, die man in Zahlentafeln oder Formelsammlungen findet, lassen sich aus den Definitionen der Funktionen oder den Additionstheoremen herleiten.
Man sollte meinen, daß im Laufe dieser langen Entwicklungsgeschichte der Winkelfunktionen alle ihre Eigenschaften gefunden worden sind. Doch das ist nicht der Fall.
Erst vor etwa 30 Jahren fand man, daß die Funktionswerte der Winkelfunktionen für Argumente $r\pi$, r rational, dann und nur

dann rational sind, wenn r die speziellen in der Zahlentafel zu findenden Werte annimmt, wie z. B.

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = \cot\frac{\pi}{4} = 1.$$

Wählt man also irgendeine nicht ganze rationale Zahl $\frac{m}{n}$, die nicht zu den Zahlen $\frac{1}{2} + g$, $\pm\frac{1}{3} + g$, $\pm\frac{1}{6} + g$, g ganz, gehört, so sind die Funktionswerte $\sin\frac{m}{n}\pi$, $\cos\frac{m}{n}\pi$, $\tan\frac{m}{n}\pi$, $\cot\frac{m}{n}\pi$ stets irrationale Zahlen.

Danach sind z. B. $\sin\frac{3}{7}\pi$, $\cos\frac{2}{5}\pi$, $\tan\frac{3}{8}\pi$, $\cot\frac{1}{13}\pi$ irrationale Zahlen.

Zum Beweis dieser Eigenschaften reichen übrigens die in der Schule vermittelten Kenntnisse aus. Diese nun bekannte Eigenschaft wollen wir hier nicht beweisen.

Im Folgenden geht es darum, <u>einem bisher unbekannten Zusammenhang zwischen endlich vielen wohlbestimmten tan-Funktionswerten und den natürlichen Zahlen auf die Spur zu kommen.</u>

Hierzu berechnen wir für n=1,2,3,4,5,6 den Term

$$-\tan\frac{1}{8n}\pi + \tan\frac{3}{8n}\pi - \tan\frac{5}{8n}\pi + \ldots + \tan\frac{4n-1}{8n}\pi \qquad (*)$$

Beginnen wir mit <u>n=1</u>.

Hier handelt es sich um die Summe $-\tan\frac{1}{8}\pi + \tan\frac{3}{8}\pi$.

Wir wissen, daß $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ ist. Mit dieser Kenntnis können wir $\tan\frac{\pi}{8}$ berechnen.

In der Zahlentafel findet man die Beziehung

$$\tan\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1+\cos a}, \quad \frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + g\pi, \quad g \text{ ganz.}$$

Für unseren speziellen Fall ergibt das

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} - 1.$$

Um $\tan\frac{3}{8}\pi$ zu berechnen, kann man mit Hilfe des Additionstheorems für die Tangensfunktion eine Beziehung zwischen tan 3a und tan a herleiten.

So folgt aus $\tan(a+a) = \frac{\tan a + \tan a}{1-\tan a \cdot \tan a}$,

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}.$$

Wieder mit Hilfe des Additionstheorems folgt

$$\tan 3a = \tan(2a+a) = \frac{\tan 2a + \tan a}{1-\tan 2a \tan a} = \frac{\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} + \tan a}{1 - \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}\tan a}$$

$$= \frac{2\tan a + \tan a(1-\tan^2 a)}{1 - \tan^2 a - 2\tan^2 a} = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1-3\tan^2 a}.$$

Für $a = \frac{\pi}{8}$, $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ ergibt das

$$\tan\frac{3}{8}\pi = \frac{3(\sqrt{2}-1) - (\sqrt{2}-1)^3}{1 - 3(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{3\sqrt{2} - 3 - (2\sqrt{2} - 3\cdot 2 + 3\sqrt{2} - 1)}{1 - 3(2-2\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} - 3 - (5\sqrt{2} - 7)}{1 - 3(3-2\sqrt{2})} = \frac{-2\sqrt{2}+4}{-8+6\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+2}{-4+3\sqrt{2}}.$$

Schließlich wird

$$-\tan\frac{\pi}{8} + \tan\frac{3}{8}\pi = -\sqrt{2}+1+\frac{-\sqrt{2}+2}{-4+3\sqrt{2}} = \frac{(-\sqrt{2}+1)(-4+3\sqrt{2}) - \sqrt{2}+2}{-4+3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 3\cdot 2 - 4 + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} + 2}{-4+3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{6\sqrt{2}-8}{3\sqrt{2}-4} = \frac{2(3\sqrt{2}-4)}{3\sqrt{2}-4} = 2.$$

Für n=1 haben wir nach erheblichem Rechenaufwand

$-\tan\frac{1}{8}\pi + \tan\frac{3}{8}\pi = 2$ erhalten.

Wenn wir jetzt an unser Ziel denken, den Term (✱) für n=2,3,4,5,6 zu berechnen, so könnte man verzagen, denn der Rechenaufwand wird sich bei unserem Vorgehen sicher von Fall zu Fall vergrößern. Wir haben hier aber auch einen Weg eingeschlagen, den kein "richtiger Mathematiker" beschreiten wird. Statt den zu berechnenden Term näher zu betrachten, nach möglichen Vereinfachungen zu suchen, haben wir einfach "drauflos" gerechnet. Um mögliche Vereinfachungen sichtbar werden zu lassen, konstruieren wir jetzt einen "Einheitskreis" und schreiben an den Eckpunkten des Bogen $\overset{\frown}{EA}$ der Länge $\frac{\pi}{8}$ die Zahl $\frac{\pi}{8}$, an den Eckpunkt B des Bogens $\widehat{EB}$ der Länge $\frac{\pi}{4}$ die Zahl $\frac{\pi}{4}$ und schließlich an den Eckpunkt des Bogens $\widehat{EC}$ der Länge $\frac{3\pi}{8}$ die Zahl $\frac{3\pi}{8}$.

Jetzt sieht man sofort, daß $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ist (vgl. Abb. 1).

Weil $\tan(\frac{\pi}{2} - a) = \cot a$ ist, folgt $\tan\frac{3}{8}\pi = \cot\frac{\pi}{8}$. Daher wird

$-\tan\frac{\pi}{8} + \tan\frac{3}{8}\pi = -\tan\frac{\pi}{8} + \cot\frac{\pi}{8}$.

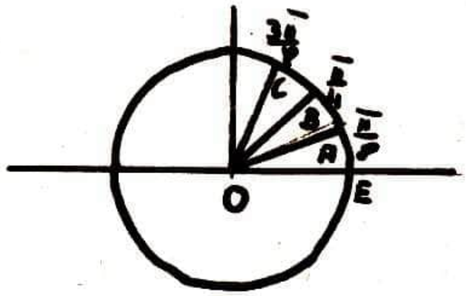


Abb. 1

Jetzt wollen wir versuchen, den Term $\tan a - \cot a$, $a \neq g\frac{\pi}{2}$, g ganz, zu vereinfachen.

Es ist $\tan a - \cot a = \frac{1}{\cot a} - \cot a = \frac{1 - \cot^2 a}{\cot a}$.

In der Zahlentafel findet man die Beziehung

$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}, \quad a \neq g\frac{\pi}{2}, \text{ g ganz, also wird}$$

$$\tan a - \cot a = 2\,\frac{1-\cot^2 a}{2\cot a} = -2\cot 2a, \quad a \neq g\frac{\pi}{2}, \text{ g ganz,}$$

und daher

$$-\tan\frac{\pi}{8} + \cot\frac{\pi}{8} = 2\cot\frac{2}{8}\pi = 2\cot\frac{\pi}{4} = 2.$$

Wenige Überlegungen haben uns also einen langen Rechenweg erspart!

Jetzt berechnen wir den Term (*) für <u>n=2</u>.

Hier wird

$$-\tan\frac{\pi}{16} + \tan\frac{3}{16}\pi - \tan\frac{5}{16}\pi + \tan\frac{7}{16}\pi$$

$$= -\tan\frac{\pi}{16} + \tan\frac{3\pi}{16} - \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{16}\pi) + \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{16}\pi)$$

$$= -\tan\frac{1}{16}\pi + \tan\frac{3}{16}\pi - \cot\frac{3}{16}\pi + \cot\frac{\pi}{16}$$

$$= -(\tan\frac{\pi}{16} - \cot\frac{\pi}{16}) + (\tan\frac{3}{16}\pi - \cot\frac{3\pi}{16})$$

$$= -(-2\cot\frac{\pi}{8}) + (-2\cot\frac{3}{8}\pi)$$

$$= 2(\cot\frac{\pi}{8} - \cot\frac{3}{8}\pi) = 2\left[\cot\frac{\pi}{8} - \cot(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8})\right] = 2(\cot\frac{\pi}{8} - \tan\frac{\pi}{8})$$

$$= 2(2\cot\frac{\pi}{4}) = 4.$$

Zeige jetzt, daß für n=3

$$-\tan\frac{\pi}{24} + \tan\frac{3\pi}{24} - \tan\frac{5\pi}{24} + \tan\frac{7\pi}{24} - \tan\frac{9\pi}{24} + \tan\frac{11}{24}\pi$$

$$= 2(\cot\frac{\pi}{12} + \tan\frac{\pi}{12} - 1) \text{ ist!}$$

Um zum Endergebnis zu kommen, haben wir wieder verschiedene Möglichkeiten:

Wir können von $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ausgehend und die Formel

$\tan\frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$, $a \neq g\pi$, g ganz, benutzen.

Dann erhält man

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

und berechnet den Term aus

$$2\left[\cot\frac{\pi}{12} + \tan\frac{\pi}{12} - 1\right] = 2\left[\frac{1}{2-\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3} - 1\right].$$

Vereinfache den zuletzt erhaltenen Term. Bei zweckmäßiger Umformung erhält man als Ergebnis die Zahl 6.

Man kann aber auch versuchen, cot a + tan a so umzuformen, daß das Ergebnis keine Summe mehr ist.

Zeige unter Benutzung von Beziehungen, die in der Zahlentafel zu finden sind, daß

$$\tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a} \text{ ist, } a \neq g\frac{\pi}{2}, \text{ g ganz.}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung finden wir

$$2\left[\cot\frac{\pi}{12} + \tan\frac{\pi}{12} - 1\right] = 2\left[\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}} - 1\right] = 2\left[\frac{2}{\frac{1}{2}} - 1\right] = 2(4-1) = 6.$$

Berechne jetzt (✱) für n=4, wende alle Dir bekannten möglichen Vereinfachungen an. Wenn Du richtig gerechnet hast, mußt Du als Ergebnis die Zahl 8 erhalten.

Führe jetzt die Berechnungen des Terms (✱) für n=5 durch, bis Du zu dem Zwischenergebnis

$$\begin{aligned}-\tan\tfrac{1}{40}\pi + \tan\tfrac{3}{40}\pi - \tan\tfrac{5}{40}\pi + \tan\tfrac{7}{40}\pi - \tan\tfrac{9}{40}\pi + \tan\tfrac{11}{40}\pi \\ - \tan\tfrac{13}{40}\pi + \tan\tfrac{15}{40}\pi - \tan\tfrac{17}{40}\pi + \tan\tfrac{19}{40}\pi \\ = 2\left[\frac{2}{\sin\frac{\pi}{10}} - \frac{2}{\sin\frac{3}{10}\pi} + 1\right]\end{aligned}$$

kommst. Beachten wir noch, daß

$\sin\frac{\pi}{10} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}) = \cos\frac{4}{10}\pi = \cos\frac{2}{5}\pi$ und

$\sin\frac{3}{10}\pi = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{10}\pi) = \cos\frac{2\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{5}$ ist, so können wir

das erhaltene Teilergebnis schreiben:

$$2\left[\frac{2}{\sin\frac{\pi}{10}} - \frac{2}{\sin\frac{3}{10}\pi} + 1\right] = 2\left[\frac{2}{\cos\frac{2}{5}\pi} - \frac{2}{\cos\frac{\pi}{5}} + 1\right].$$

Bei der Weiterführung der Rechnung stehen wir jetzt vor dem Problem, daß der Funktionswert der cos-Funktion für das Argument $\frac{\pi}{5}$ nicht in der Zahlentafel zu finden ist. Man kann aber diesen Funktionswert berechnen.

Wir wollen das jetzt durchführen.

Wir betrachten dazu ein Bestimmungsdreieck ABM eines regelmäßigen Zehnecks, zeichnen die zur Zehneckseite s_{10} gehörende Höhe ein und halbieren den Basiswinkel $\sphericalangle$ MAB. Bei Benutzung der in der Abb. 2 gewählten Bezeichnungen folgt:

$$\frac{s_{10}}{r} = \frac{r - s_{10}}{s_{10}}, \text{ also } s_{10}^2 = r^2 - rs_{10},\ s_{10}^2 + rs_{10} - r^2 = 0.$$

Bestimmen wir aus dieser quadratischen Gleichung die positive Lösung, so wird

$$s_{10} = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2+4r^2}{4}}$$

$$= -\frac{r}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5r^2} = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

$$= \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

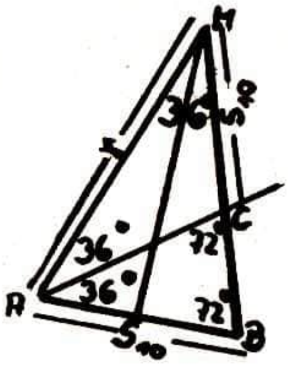


Abb. 2

Hieraus folgt

$$\cos 72^\circ = \cos\frac{2}{5}\pi = \frac{s_{10}}{2r} = \frac{1}{2r}\,\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

Mit Hilfe der in der Zahlentafel zu findenden Formel $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ erhält man $\cos\frac{2}{5}\pi \mathrel{\hat{=}} 2\cos^2\frac{1}{5}\pi - 1$

$$\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1$$

$$\sqrt{5} - 1 = 8\cos^2\frac{\pi}{5} - 4$$

$$\sqrt{5} + 3 = 8\cos^2\frac{\pi}{5}$$

$$\sqrt{\sqrt{5} + 3} = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{5}$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+6}{2\cdot 2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5} + 6}.$$

Setzen wir die erhaltenen Ergebnisse für $\cos\frac{\pi}{5}$ und $\cos\frac{2}{5}\pi$ in unser oben erhaltenes Zwischenergebnis ein, so bekommen wir

$$2\left[\frac{2}{\cos\frac{2}{5}\pi}-\frac{2}{\cos\frac{\pi}{5}}+1\right]=2\left[\frac{2\cdot 4}{\sqrt{5}-1}-\frac{2\cdot 4}{\sqrt{2\sqrt{5}+6}}+1\right]$$

$$=2\left[\frac{8(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}-\frac{8\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}\sqrt{6-2\sqrt{5}}}+1\right]$$

$$=2\left[\frac{8(\sqrt{5}+1)}{5-1}-\frac{8\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{(6+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}+1\right]$$

$$=2\left[\frac{8(\sqrt{5}+1)}{4}-\frac{8\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}}{36-4\cdot 5}+1\right]$$

$$=2\left[\frac{8(\sqrt{5}+1)}{4}-\frac{8\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{4}+1\right]$$

$$=2\left[\frac{8\sqrt{5}+8-8(\sqrt{5}-1)}{4}+1\right]=2\left(\frac{16}{4}+1\right)=2\cdot 5=10$$

Berechne jetzt den Term (✱) für n=6 und n=8 und bestätige, daß man im ersten Fall die Zahl 12, im zweiten Fall die Zahl 16 erhält.

Wenn Du Lust hast, kannst Du den Term noch für natürliche Zahlen n berechnen, die sich in der Form 2^k, $3\cdot 2^k$, $5\cdot 2^k$ darstellen lassen, wobei k eine beliebige ~~natürliche~~ Zahl bezeichnet, z. B. für $n=3\cdot 2^2$, $n=5\cdot 2$, $n=2^3$.
Schreibe jetzt alle Ergebnisse untereinander und versuche, eine Gesetzmäßigkeit festzustellen.
Welcher Satz könnte gelten?
Formuliere diesen Satz.
Wir müssen uns jedoch darüber klar sein, daß wir den

Satz: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt

$$-\tan\frac{1}{8n}\pi+\tan\frac{3}{8n}\pi-\tan\frac{5}{8n}\pi+\ldots+\tan\frac{4n-1}{8n}\pi=2n$$

n i c h t bewiesen haben. Durch unsere Berechnungen haben wir nur gezeigt, daß es natürliche Zahlen gibt, für die er gilt. Für jede Zahl n könnten wir ihn gar nicht durch Rechnung bestätigen, das ist schon aus Zeitgründen unmöglich.
Wollten wir seine Richtigkeit nur für alle natürlichen Zahlen $0 < n \leq 10$ durch analoges Rechnen wie bisher zeigen, so würden wir bei den Zahlen n=7 und n=9 auf unüberwindbare Schwierigkeiten stoßen.

Für n=7 würden wir nach einigen Umformungen (führe sie durch!) auf das Zwischenergebnis

$$2\left[\frac{2}{\sin\frac{1}{14}\pi} - \frac{2}{\sin\frac{3}{14}\pi} + \frac{2}{\sin\frac{5}{14}\pi} - 1\right]$$

kommen.

Die Funktionswerte der Winkelfunktionen für das Argument $\frac{\pi}{7}$ finden wir aber nicht in der Zahlentafel, sie lassen sich auch nicht mehr auf ähnliche Weise bestimmen, wie wir das z. B. für $\cos\frac{\pi}{5}$ durchführten. Ähnlich liegt der Fall für n=9.

Näherungsweise können wir den Term natürlich für jedes gewählte n berechnen. Versuch es z. B. für die Zahlen n=7, n=9 mit einem Dir zur Verfügung stehenden Rechenhilfsmittel (Zahlentafel, Taschenrechner).

Abschließend sei bemerkt, daß die von uns für die Zahlen n=1,2,3,4,5,6 gefundene Beziehung tatsächlich für jede beliebige von Null verschiedene natürliche Zahl gilt.

Zum Beweis benötige ich aber mathematische Hilfsmittel, die nicht mehr zum Schulstoff gehören.

Dr. Gisela Vetter
Mitarbeiterin der Sektion Mathematik
Humboldt Universität Berlin

– WEIHNACHTSAUFGABE – WEIHNACHTSAUFGABE – WEIHNACHTSAUFGABE – W

Wenn zum 4. Advent die letzte Kerze des Adventkranzes angezündet wird, ist es meist so, daß nicht alle 4 Kerzen gleichzeitig abbrennen. Ist der gleichzeitige Brennschluß unter folgenden Bedingungen möglich:

1. Die 4 Kerzen sind zylindrisch, haben gleichen Durchmesser, gleiche Länge, sind aus dem gleichen Material (d. h. sie haben gleiche Brenndauer).
2. Die Brennzeit zu allen 4 Adventen ist gleich.
3. Es dürfen innerhalb der Brennzeit keine Kerzen gelöscht bzw. andere angebrannt werden.

Man gebe eine allgemeine Lösung für n Advente (n Kerzen) an!

Annonce (gilt immer)

Suchen: $\sqrt{\text{Wurzel}}$ - Titelbilder zu folgenden Themen
- Mathematiker Gestern und Heute
- Mathematiker in der Praxis
- verschiedene Teilgebiete der Mathematik
- Studenten und Jena

Bieten: für jedes veröffentlichte Titelbild einen Büchergutschein

Redaktion

Übrigens freuen wir uns auch über Artikel, in denen Ihr Euch bzw. Eure Arbeitsgemeinschaft vorstellen könnt.

Lösungen

Aufgabe 0 54 In einer arithmetischen Reihe gilt für das Element $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

Also ist

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16}$$
$$= 4a_1 + 3d + 7d + 11d + 15d$$
$$= 4a_1 + 36d = 224.$$

Für ganzzahlige positive a_1 und d erhält man d=1 und a_1=22.

Die Summe der ersten 19 Glieder ist dann

$$d\sum_{i=1}^{18} i + 19 \cdot a_1$$
$$= d \cdot 90 + 19 \cdot a_1$$
$$= 90 + 19 \cdot 22 = \underline{\underline{530}}.$$

Preisaufgaben

P 61 (2)

Man beweise, daß für alle ganzen Zahlen x,y,z, die paarweise voneinander verschieden sind, und für alle natürlichen Zahlen n der Ausdruck

$$g=\frac{x^n}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^n}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$

ganzzahlig ist!

P 62 (2)

Sei a_1, a_2, a_3,... eine Folge natürlicher Zahlen, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) $a_1=1$
2) Für alle k gilt $a_k \leqq 1+a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}$

Man zeige, daß dann für jede natürliche Zahl n eine endliche Teilfolge $a_{k_1},\ldots a_{k_{f(n)}}$ existiert mit $n=a_{k_1}+\ldots+a_{k_{f(n)}}$.

P 63 (1)

Seien u und v ganze Zahlen, für die $9|u^2+uv+v^2$ gilt. Man beweise, daß dann 3 sowohl Teiler von u als auch von v ist.

P 64 (1)

Man finde das Maximum des Ausdrucks

$z=|a_1-1|+|a_2-2|+\ldots+|a_n-n|$,wobei $(a_1,\ldots,a_n)$

alle Permutationen der natürlichen Zahlen durchläuft.

P 65 (1)

Sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten die Menge aller geordneten Paare natürlicher Zahlen (u,v), deren kleinstes gemeinsames Vielfaches n ist. Man zeige, daß die Anzahl dieser Paare gleich der Anzahl der positiven Teiler von n^2 ist.

P 66 (2)

На горизонтальной плоскости из трех точек, отстоящих от основания радиоантенны на расстояние 100, 200, 300 м, измерили угол, под которым видна антенна. Измеренные углы в сумме составляют 90^0. Чему равна высота антенны?

Einsendeschluß: 1. März 1984

Einige Gedanken zum Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben

Geometrische Konstruktionsaufgaben sind so alt wie die Beschäftigung der Menschen mit Geometrie überhaupt.
Aufgaben, die noch heute allgemein bekannt sind, reichen bis in die Zeit zurück, da sich im alten Griechenland die Entwicklung der Geometrie zu einer systematischen Wissenschaft vollzog. Wir erinnern dabei an die Quadratur des Kreises, die Verdoppelung des Würfels oder an die Dreiteilung des Winkels.

Im Altertum verwendete man zum Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben hauptsächlich Zirkel und Lineal und die Berühmtheit der genannten Aufgaben hängt damit zusammen, daß sie mit Zirkel und Lineal nicht lösbar sind. Heute ist es im Schulunterricht üblich, neben Zirkel und Lineal ohne Meßskale auch das Lineal mit Meßskale, das Zeichendreieck, die Parallelenschablone und den Winkelmesser zum Konstruieren zuzulassen.
Dadurch wird zwar das durch Zirkel und Lineal abgesteckte Feld von Konstruktionsaufgaben erweitert, aber es ist ja nicht einzusehen, warum man, nachdem man in unteren Klassen z. B. Strecken und Winkel gemessen und Strecken und Winkel von vorgegebener Größe gezeichnet hat oder nachdem man Parallelen und Senkrechte unter Verwendung des Zeichendreiecks oder mit Hilfe der Parallelenschablone konstruiert hat, mit einem Mal wieder auf diese Zeichenhilfsmittel verzichten soll. Eine größere Genauigkeit wird mit Zirkel und Lineal allein sicher nicht erreicht, im Gegenteil!
Das schließt nicht aus, daß gelegentlich auch Aufgaben gestellt sein können, die nur unter Verwendung ganz bestimmter Zeichenhilfsmittel, z. B. Zirkel und Lineal, gelöst werden sollen.

Die Meinungen über den Wert geometrischer Konstruktionsaufgaben sind unterschiedlich. Unbestritten ist aber, daß geometrische Konstruktionsaufgaben ausgezeichnet geeignet, vielleicht sogar unentbehrlich sind, um geometrisches Wissen zu festigen. Das Lösen einer solchen Aufgabe ist aber nicht nur ein Prüfstein für die Anwendbarkeit des Wissens, sondern verlangt zugleich auch Phantasie und Kombinationsfähigkeit.
Es gibt keine allgemeine Methode, nach der jede geometrische Konstruktionsaufgabe auf rein geometrischem Wege gelöst werden

kann. Aber es gibt verschiedene Methoden, die man beim Lösen anwenden kann und deren Kenntnis das Vorgehen beim Lösen erleichtert.
Eine Methode, die häufig Anwendung findet, ist die Methode der Bestimmungslinien (Methode der geometrischen Örter).
Bei vielen Aufgaben geht es darum, einen Punkt zu bestimmen, der bestimmte Bedingungen erfüllt.

Beispiel 1
In einem Dreieck ist ein Punkt zu bestimmen, von dem aus die 3 Seiten gleich groß erscheinen (unter gleichen Winkeln gesehen werden).

Andere Aufgaben, in denen z. B. die Konstruktion einer geometrischen Figur verlangt wird, lassen sich auf die Konstruktion eines Punktes oder einer Folge von Punkten zurückführen.

Beispiel 2
Es ist ein Dreieck aus folgenden Stücken zu konstruieren:
b, h_b (Höhe auf der Seite b), s_b (Seitenhalbierende von b) ($s_b > h_b$).
Die Aufgabe ist gelöst, wenn die drei Eckpunkte des Dreiecks bestimmt sind. Durch die Seite b sind die Punkte A und C bestimmt und damit reduziert sich die Aufgabe auf die Bestimmung des Punktes B.

Beispiel 3
Es ist ein Viereck aus folgenden Stücken zu konstruieren:
a, b, e, f, δ .
Diese Aufgabe läßt sich auf die Bestimmung von zwei Punkten zurückführen. Mit $\overline{AB}$ = a sind A und B bestimmt; gesucht sind C und D.
Wie man leicht erkennt, ist das nicht die einzige Möglichkeit, die Aufgabe auf die Konstruktion von zwei Punkten zurückzuführen. Es ist auch eine Reduzierung der Aufgabe auf die Bestimmung der Punkte A und D bzw. B und D möglich.
Prinzipiell geht man bei der Zurückführung einer Dreiecks- oder Viereckskonstruktion auf die Konstruktion eines Punktes (bzw. einer Folge von Punkten) so vor, daß man unter den gegebenen

Stücken eines auswählt, wodurch (möglichst) zwei der gesuchten Punkte bereits bestimmt sind. (Das ist z. B. bei der Konstruktion eines Dreiecks eine Seite und bei Viereckskonstruktionen eine Seite oder eine Diagonale.) Anschließend sucht man anhand der übrigen gegebenen Stücke und der Eigenschaften der zu konstruierenden Figur für jeden Punkt Bedingungen, die er entsprechend der Aufgabenstellung erfüllen muß.

Dabei geht man folgendermaßen vor:

Man betrachtet eine Bedingung und läßt die übrigen zunächst unberücksichtigt. Nun prüft man, ob sich aus dieser Bedingung eine Bestimmungslinie für den gesuchten Punkt ergibt.

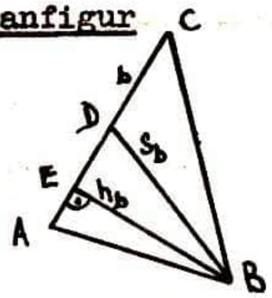
In gleicher Weise verfährt man mit der zweiten Bedingung. Hat man so zwei Bestimmungslinien für den gesuchten Punkt gefunden (es müssen Geraden oder Kreise sein), so bildet man den Durchschnitt dieser beiden Punktmengen, da der gesuchte Punkt sowohl die erste als auch die zweite Bedingung erfüllen muß.

Sind beide Bestimmungslinien Geraden, so erhält man eine Lösung mit Ausnahme des Falles, da beide Geraden parallel verlaufen.

Sind die Bestimmungslinien zwei Kreise oder ein Kreis und eine Gerade, so besitzt die Aufgabe zwei Lösungen, wenn beide einander schneiden, eine Lösung, wenn sie sich berühren und keine Lösung, wenn die beiden Bestimmungslinien keine gemeinsamen Punkte besitzen.

Wir erläutern das Gesagte am Beispiel 2.

Planfigur



Durch $\overline{AC} = b$ sind nicht nur die beiden Punkte A und C bestimmt, auch der Mittelpunkt D der Seite b läßt sich leicht finden.

Der Punkt B muß folgende Bedingungen erfüllen:

1. B hat von $\overline{AC}$ den Abstand h_b,
2. B hat von D den Abstand s_b.

Aus diesen Bedingungen ergeben sich folgende Bestimmungslinien:

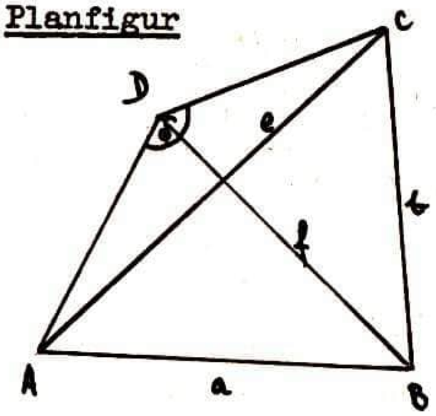
1. Das Parallelenpaar zu $\overline{AC}$ im Abstand h_b,
2. Der Kreis um D mit dem Radius s_b.

Unter der Voraussetzung $s_b > h_b$ schneidet der Kreis das Parallelenpaar in 4 Punkten, d. h. der Durchschnitt beider Punktmengen besteht aus 4 Punkten.

Es fällt nun nicht mehr schwer, in Anlehnung an diese Überlegungen zur Lösung die einzelnen Konstruktionsschritte festzulegen. Meist stellt man die Überlegungen zur Lösung nicht so ausführlich dar und gibt nur die Bestimmungslinien für die gesuchten Punkte etwa in folgender Form an. Wir zeigen das am

<u>Beispiel 3</u>

<u>Planfigur</u>



<u>Lösungsplan</u>

Durch $\overline{AB} = a$ sind die Punkte A und B bestimmt.

Der Punkt C liegt auf

1. dem Kreis um B mit dem Radius b
2. dem Kreis um A mit dem Radius e.

Der Punkt D liegt auf

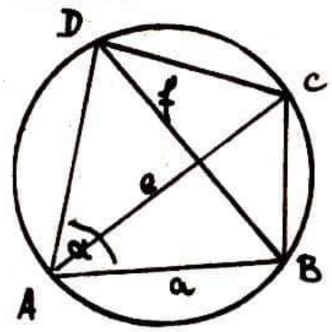
1. dem Kreis um B mit dem Radius f
2. dem Kreis über $\overline{AC}$ als Sehne und δ als Peripheriewinkel.

Gelegentlich geht man auch so vor, daß man statt von einem einzigen gegebenen Stück und den dadurch bestimmten Punkten von einer leicht zu bestimmenden Teilfigur ausgeht und dann die gesuchte Figur punktweise ergänzt. In diesem Falle muß man erkennen, welcher Teil der gesuchten Figur sich aus den gegebenen Stücken auf einfache Weise konstruieren läßt. Meist handelt es sich darum, daß ein <u>Teildreieck</u> nach einem der Kongruenzsätze bestimmt ist. (Letztlich läßt sich aber auch die Konstruktion der Teilfigur auf die Konstruktion einzelner Punkte zurückführen.)

<u>Beispiel 4</u>

Es ist ein Sehnenviereck aus folgenden Stücken zu konstruieren: a, α, e, f. ($f > a$)

Planfigur



Lösungsplan

Das Teildreieck ABD ist aus a, α und f konstruierbar (ssw).
Damit sind die Punkte A, B und D bestimmt.
Der Punkt C liegt auf
1. dem Umkreis des Dreiecks ABD
2. dem Kreis um A mit dem Radius e.

Zum Schluß noch zwei Aufgaben zur Übung.

1. Gegeben sind zwei Kreise k_1 $(M_1 ; r_1)$ und k_2 $(M_2 ; r_2)$ sowie die Winkel α_1 und α_2.
   Gesucht ist ein Punkt, von dem aus k_1 unter dem Winkel α_1 und k_2 unter dem Winkel α_2 gesehen wird.

2. Es ist ein Dreieck aus h_a, s_a und r (Radius des Umkreises) zu konstruieren.

Karl Lemnitzer
Mathematik-Methodik, FSU Jena

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Heiner Schwulow
Chefredakteur: Andreas Kleinwächter
Stellvertretender Chefredakteur: Andreas Jeschag
Redaktion: D. Heinrich, R. Heinrich, J. Heß, M. Lutz, U. Niemiec, H. Rosner
Anschrift: **WURZEL,** 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-422–190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 10. 11. 83