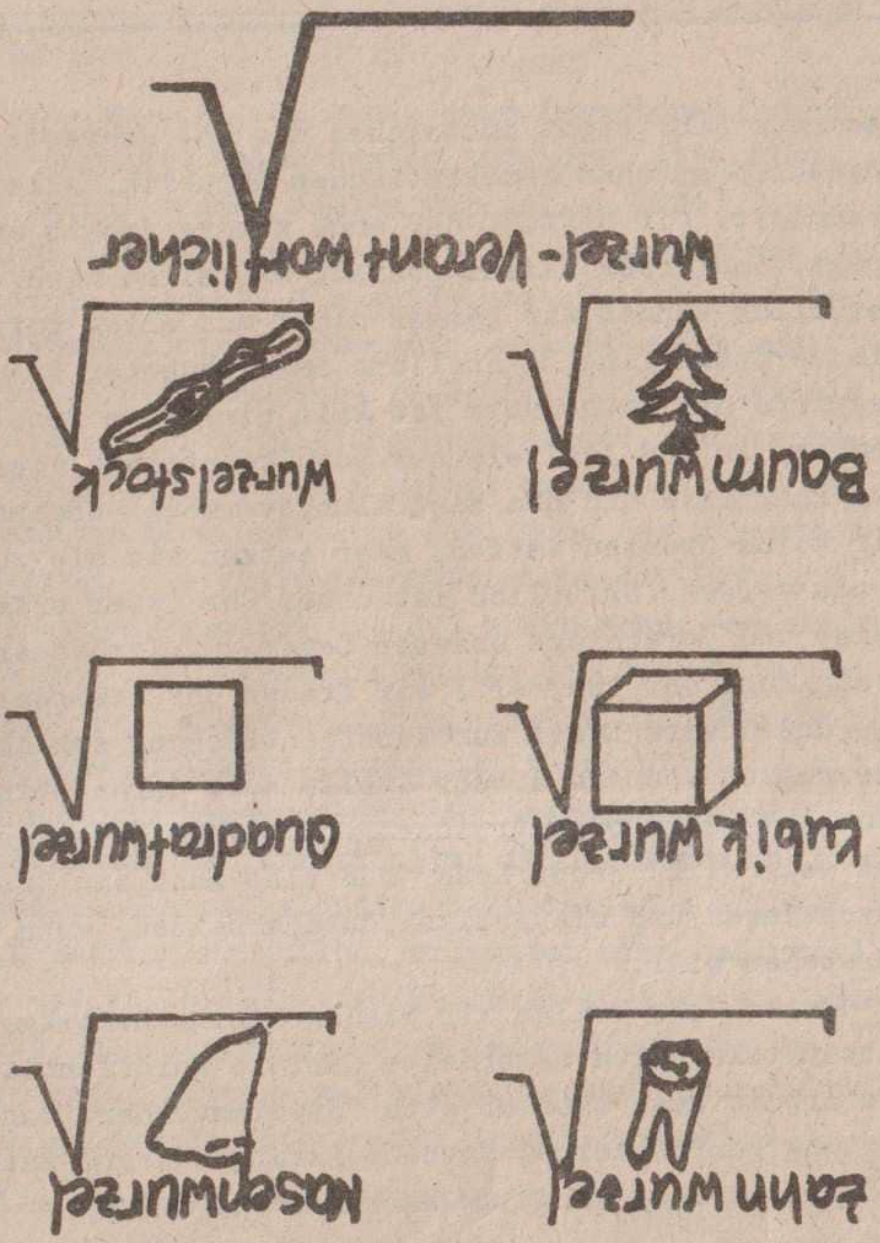
Rund um die Wurzel



1
84

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

18. Jahrgang

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Das neue Jahr steht im Zeichen des 35. Jahrestages der Gründung unserer Deutschen Demokratischen Republik. Allerorts wird resümiert. Wir hoffen, daß auch unsere Arbeit etwas dazu beiträgt, daß diese Bilanz positiv ausfallen wird.
Natürlich können wir längst nicht mit allem zufrieden sein. Die verständliche Darstellung interessanter Fragen und Grundbegriffe der Mathematik ist kein einfaches Problem. Wir sind bemüht, in den Artikeln nur Schulkenntnisse vorauszusetzen. Der Phantasie und dem Einfühlungsvermögen unserer Leser wollen wir keine Grenzen setzen, eher setzen wir sie zu einem bestimmten Grade voraus. Natürlich ist unser Ohr immer offen für die Hinweise und Vorschläge unserer Leser zur Verbesserung der Gestaltung der "Wurzel"! Wir freuen uns besonders über Artikel, die uns unsere Leser zur Veröffentlichung schicken.
Wir wollen aber an dieser Stelle auch daran erinnern, daß die "Wurzel" keine populärwissenschaftliche Zeitschrift sein kann und sein will! Jeder Leser muß also auch ein Quantum Fleiß investieren und die Artikel durcharbeiten, wenn er den Inhalt verstehen will.
In diesem Jahr wollen wir wieder einige Beiträge über im Mathematikstudium behandelte Gebiete veröffentlichen, über die Arbeit des Jugendobjekts "Studienvorbereitung-Studienwerbung" informieren, Mathematikaufgaben und interessante Probleme sollen nicht zu kurz kommen.

Wir wünschen allen unseren Lesern ein erfolgreiches Jahr

1984

viele persönliche Erfolge sowie viel Freude und Gelingen bei der Beschäftigung mit der Mathematik.

Die Redaktion der Wurzel

Thomas Gundermann

Thomas Gundermann
Chefredakteur

Irrationalitätsbeweise

Bekanntlich heißt eine reelle Zahl genau dann irrational, wenn sie nicht der Menge der rationalen Zahlen angehört, sich also nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellen läßt. Die Existenz irrationaler Zahlen wurde bereits in der Antike und zuerst in der Geometrie bemerkt. Man entdeckte nämlich, daß das Verhältnis zweier Strecken nicht notwendig rational sein muß. Solche inkommensurablen Streckenpaare (z.B. Seite und Diagonale eines Quadrates) zeichnen sich folglich dadurch aus, daß es unmöglich ist, eine Vergleichsstrecke s derart anzugeben, daß die betrachteten Strecken beide ganzzahlige Vielfache der Strecke s wären. Diese Entdeckung, die viele Fachhistoriker dem Pythagoräer Hippasos von Metapont (um 450 v.u.Z.) zuerkennen, war für die weitere Entwicklung der Mathematik von großer Tragweite und stellte die Gelehrten des Altertums vor grundsätzliche Probleme. Als Vertreter einer anschaulichen Wissenschaft orientierten sie ihre Anstrengungen auf die Beherrschung der inkommensurablen Strecken, der Beherrschung des Irrationalen in der Geometrie. Die irrationalen Zahlen als selbständige mathematische Objekte, entkleidet aller geometrischer Hüllen, erlangten erst sehr viel später Anerkennung und volles Bürgerrecht. Erst im vorigen Jahrhundert, nachdem die unendlichen Prozesse ihren Siegeszug in der Mathematik angetreten hatten, war die Zeit reif für eine modernen Ansprüchen genügende Theorie der Irrationalzahlen.

Das an dieser Stelle interessierende Problem, über die Irrationalität einer gegebenen reellen Zahl zu entscheiden, ist auch heute noch im allgemeinen mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden, in vielen Fällen sogar ungelöst. Anliegen dieses Artikels kann es deshalb lediglich sein, dem Leser einen Einblick in die reizvolle Methodik der Irrationalitätsbeweise zu vermitteln und einige einfachere Beweisverfahren vorzustellen.

1. Algebraische und transzendente Zahlen

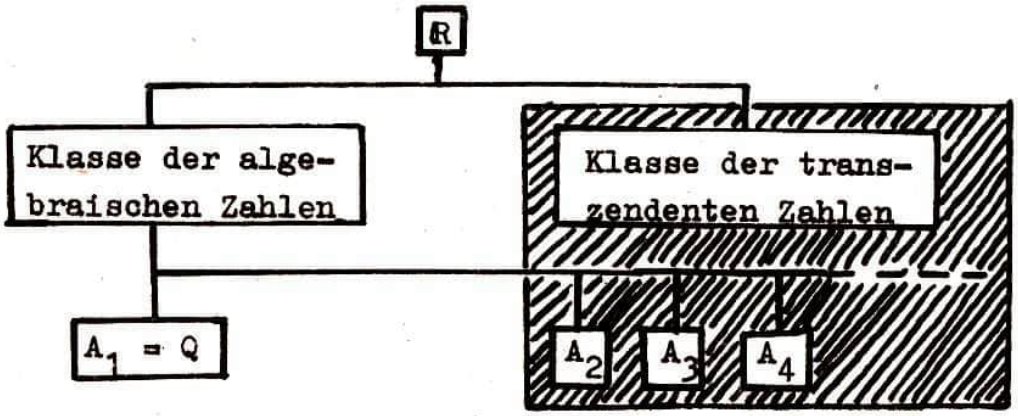
Unter einer algebraischen Gleichung vom Grad n versteht man eine Gleichung der Gestalt

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und $a_0 \neq 0$. Genügt eine reelle Zahl ξ einer algebraischen Gleichung, nennt man ξ selbst gleichfalls algebraisch. Aber nicht jede reelle Zahl ist algebraisch. Es gibt auch solche (z.B. e und π), die nicht Lösung einer algebraischen Gleichung sind. Zahlen dieser Art heißen transzendent. Die Menge R der reellen Zahlen zerfällt demzufolge in die Klasse der algebraischen und die Klasse der transzendenten Zahlen.

Die algebraischen Zahlen gestatten noch eine feinere Unterteilung. Man sagt, ξ ist eine algebraische Zahl n-ten Grades, wenn ξ eine algebraische Gleichung vom Grad n befriedigt, aber nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung geringeren Grades ist. Im weiteren bezeichnet A_n die Menge aller algebraischen Zahlen vom festen Grad n (n=1,2,3,...). Wie sich noch zeigen wird, ist keine dieser Mengen leer. Man erkennt ferner unschwer, daß A_1 mit der Menge Q der rationalen Zahlen identisch ist.

Zusammenfassend ergibt sich die nachstehend skizzierte Klassifizierung der reellen Zahlen:



Der schraffierte Komplex des Schemas kennzeichnet hierbei die Gesamtheit der irrationalen Zahlen.

2. Die Methode der Wechselwegnahme

Die ältesten bekannten Irrationalitätsbeweise stützen sich auf das Prinzip der fortgesetzten Wechselwegnahme. Diese Methode, die eine zentrale Rolle in der griechischen Mathematik spielte, verdient wegen ihrer Nützlichkeit nicht nur aus historischer Sicht Beachtung.

Der Methode der Wechselwegnahme liegt ein denkbar einfacher Algorithmus zugrunde. Gegeben seien zwei positive reelle Zahlen ξ_0 und ξ_1 mit $\xi_0 > \xi_1$, etwa die Länge zweier Strecken. Von der größeren subtrahiert man zunächst sooft die kleinere der beiden Zahlen, solange die erhaltene Differenz den Wert von ξ_1 nicht unterschreitet. Nach n_1 Subtraktionen ergibt sich alsdann eine Differenz $\xi_2 = \xi_0 - n_1\xi_1$ mit der Eigenschaft $0 \leq \xi_2 < \xi_1$. Ist $_2 = 0$, ist das Verfahren bereits beendet. Ist $\xi_2 > 0$, wird der soeben beschriebene Wegnahmeprozeß mit ξ_1 und ξ_2 wiederholt. In dieser Weise fortfahrend erhält man

$$\begin{aligned} \xi_0 &= n_1\xi_1 + \xi_2 \text{ mit } 0 < \xi_2 < \xi_1, \\ \xi_1 &= n_2\xi_2 + \xi_3 \text{ mit } 0 < \xi_3 < \xi_2, \\ \xi_2 &= n_3\xi_3 + \xi_4 \text{ mit } 0 < \xi_4 < \xi_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (1)$$

Ob dieser Algorithmus nach endlich vielen Schritten einmal abbricht oder nicht, hängt einzig und allein von der Qualität des Quotienten $\xi_0 : \xi_1$ ab. Es gilt

<u>Satz 1:</u> Der Algorithmus (1) bricht genau dann nach endlich vielen Schritten ab, wenn $\xi_0 : \xi_1$ rational ist.

Beweis.

Der Beweis wird sich entsprechend der beiden im Satz formulierten Behauptungen, daß die Rationalität von $\xi_0 : \xi_1$ sowohl eine notwendige wie auch hinreichende Bedingung für das Abbrechen des Algorithmus ist, in zwei Teile gliedern.

Angenommen, der Algorithmus sei abbrechend und bestehe aus k Gleichungen, was gleichbedeutend mit

$$\xi_0 > \xi_1 > \ldots > \xi_{k+1} = 0$$

ist. Dividiert man nun diese k Gleichungen in der Reihenfolge durch $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ und setzt zur Abkürzung

$$a_m = \xi_{m-1} : \xi_m \quad (m=1,2,\ldots,k),$$

so ergibt sich aus (1)

$$q_1 = n_1 + \frac{1}{q_2}, \ldots, q_{k-1} = n_{k-1} + \frac{1}{q_k}, \; q_k = n_k. \qquad (2)$$

Die letzte dieser Gleichungen besagt, daß q_k ganzzahlig ist. Folglich ist $1 : q_k$ rational und nach der vorletzten Gleichung

auch q_{k-1}. Analog die anderen Gleichungen (2) rückwärts durchlaufend gewinnt man schließlich aus der Rationalität von q_2 die von q_1. Also kann der Algorithmus nur dann abbrechen, falls der Quotient $q_1 = \xi_0 : \xi_1$ rational ist.

Jetzt wäre noch zu zeigen, daß andererseits die Rationalität von q_1 auch tatsächlich stets den Abbruch des Verfahrens bedingt. Offensichtlich ändert sich an der Endlichkeit oder Unendlichkeit des Verfahrens nichts, wenn man sämtliche Gleichungen (1) mit derselben reellen Zahl $\varrho > 0$ multipliziert, mit anderen Worten, den Prozeß der Wechselwegnahme mit $\varrho\xi_0$ und $\varrho\xi_1$ ausführt. Diese einfache Überlegung gestattet es, unter der Voraussetzung $q_1 \in Q$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit a priori ξ_0 und ξ_1 als positive ganze Zahlen zu betrachten. Dann müssen aber auch die nachfolgend gebildeten Differenzen $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots$ ausnahmslos ganzzahlig sein. In Verbindung mit der Ungleichungskette

$$\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > \ldots \geq 0$$

folgt hieraus unmittelbar, daß der Algorithmus nach endlich vielen Schritten seinen Abschluß findet. Damit ist der Satz 1 vollständig bewiesen.

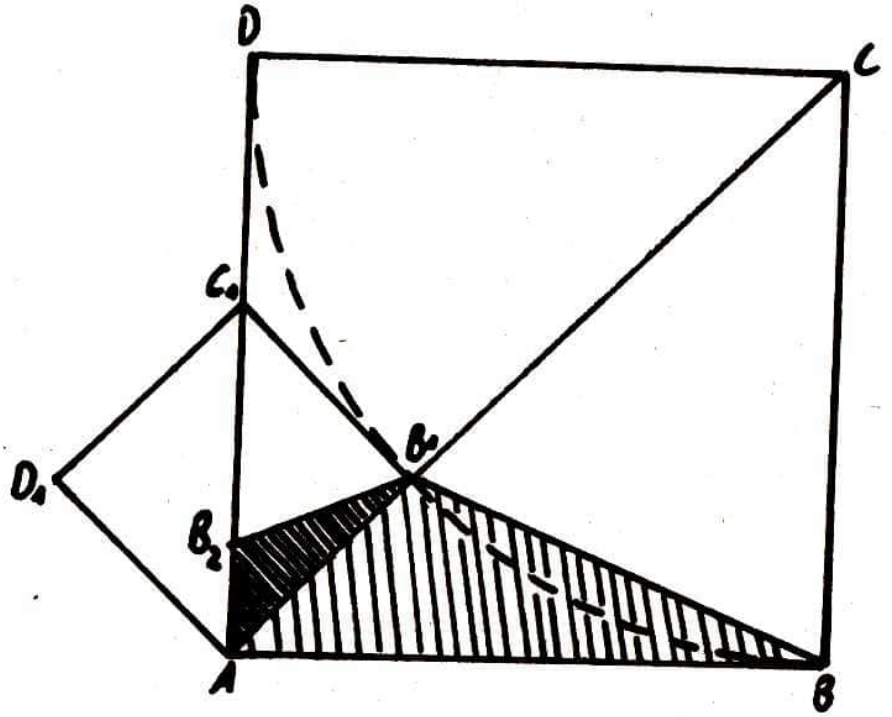
Nach der Bereitstellung dieses fundamentalen Satzes soll nun die Methode der Wechselwegnahme an einem ersten konkreten Irrationalitätsbeweis demonstriert werden.

<u>Satz 2:</u> $\boxed{\sqrt{2} \text{ ist irrational. Genauer gilt } \sqrt{2} \in A_2.}$

Beweis.

Es sei ABCD ein Quadrat der Seitenlänge ξ_1 und ξ_0 die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$, die sich nach Pythagoras zu $\xi_0 = \xi_1\sqrt{2}$ berechnet. Die Seite des Quadrates wird von C aus auf der Diagonalen abgetragen und im Endpunkt B_1 der abgetragenen Strecke das Lot errichtet, welches $\overline{AD}$ im Punkt C_1 schneidet. Trägt man anschließend noch $\overline{AB_1}$ von C_1 auf $\overline{AC_1}$ ab, erhält man den Punkt B_2. Dann ist

$$\xi_0 = \xi_1 + |\overline{AB_1}| \text{ mit } 0 < \xi_2 = |\overline{AB_1}| < \xi_1,$$
$$\xi_1 = 2\xi_2 + |\overline{AB_2}| \text{ mit } 0 < \xi_3 = |\overline{AB_2}| < \xi_2.$$



Hierbei bezeichnet $\overline{AB_1}$ die Länge der Strecke $\overline{AB_1}$ usw. Wie man leicht feststellt, ist das Dreieck AB_1B_2 dem Dreieck ABB_1 ähnlich (der Nachweis sei dem Leser als Übung überlassen), das erstere also nur eine verkleinerte Ausgabe des letzteren. Der oben beschriebene und nach dem Prinzip der Wechselwegnahme vollzogene Konstruktionsprozeß reproduziert somit bis auf einen gewissen Ähnlichkeitsfaktor die Ausgangssituation, ist folglich unbegrenzt theoretisch fortsetzbar. Der praktischen Ausführung der Konstruktionsschritte sind selbstverständlich durch die regelmäßige Verkleinerung zeichentechnische Grenzen gesetzt, was jedoch für den Beweis völlig bedeutungslos ist. Die Tatsache, daß dieser Konstruktionsalgorithmus nicht abbricht, ist nach Satz 1 unverträglich mit dem Rationalsein von $\xi_0 : \xi_1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ ist daher irrational. Da ferner $\sqrt{2}$ Lösung der algebraischen Gleichung

$$x^2 - 2 = 0$$

ist, läßt sich das Ergebnis zu $\sqrt{2} \in A_2$ präzisieren.

Die Methode der Wechselwegnahme kann natürlich auch rein arithmetisch realisiert werden. Setzt man $\xi_0 = \sqrt{2}$ und $\xi_1 = 1$, so findet man zunächst

$$\xi_0 = \xi_1 + \xi_2 \text{ mit } 0 < \xi_2 = \sqrt{2} - 1 < \xi_1,$$
$$\xi_1 = 2\xi_2 + \xi_3 \text{ mit } 0 < \xi_3 = 3 - 2\sqrt{2} < \xi_2.$$

Wegen $\xi_3 = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 = \xi_2^2$ erhält man alsdann mühelos die dritte Gleichung des Algorithmus aus der zweiten durch Multiplikation mit ξ_2. Jede weitere Gleichung unterscheidet sich von der jeweils vorangehenden nur durch den Faktor ξ_2. Das ist jedoch keineswegs überraschend, wenn man sich des Satzes über die Seitenverhältnisse ähnlicher Dreiecke im Zusammenhang mit der vorigen Beweisvariante erinnert. Der logische Schluß auf die Irrationalität von $\sqrt{2}$ erfolgt abermals vermöge des Satzes 1.

Es soll abschließend nicht unerwähnt bleiben, daß der auch als Euklidischer Algorithmus bekannte Prozeß der wiederholten Wechselwegnahme anderweitig sehr nützlich ist. So leistet er bei der Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen vorzügliche Dienste und bildet die Grundlage der in der modernen Mathematik wichtigen Theorie der Kettenbrüche.

Dr. Lothar Schnabel
Bereich Theor. Mathematik
FSU Jena

Fortsetzung folgt!

Preisaufgaben

Q 1 Man bestimme den kleinsten Wert der Funktion

$$f(m) = \frac{\sum\limits_{n/m} n}{\sum\limits_{n/m} n^0}$$

für ganzzahlige m (m > 1) und beweise, daß sie keinen größten Wert hat. Dabei bedeutet $\sum\limits_{n/m} n$ die Summation über alle Zahlen n, durch die m teilbar ist.

Q 2 ②

In der Ebene sind die zwei Punkte A und B fixiert. Man beweise, daß der geometrische Ort aller Punkte M, die der Bedingung $2\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{AB}^2$ genügen, ein Kreis mit dem Durchmesser AC ist. C ist ein auf der Strecke $\overline{AB}$ liegender Punkt, für den $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 2$ gilt.

Q 3 ②

Man beweise: Ist E metrischer Raum mit der Metrik d, so gilt für je zwei Paare von Punkten $x, x'; y, y' \in E$ die sogenannte Vierecksungleichung

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y') .$$

Q 4 ①

Gegeben seien n Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel sind. Es ist bekannt, daß durch den Schnittpunkt von je zwei Geraden noch eine dritte Gerade geht. Man beweise, daß alle Geraden durch einen Punkt gehen!

Q 5 ①

Найти решение системы в области действительных чисел:

$$\sqrt{a - x} - \sqrt{y - x} = \sqrt{y}$$
$$\sqrt{b - x} + \sqrt{y - x} = \sqrt{y}$$

a,b – действительных числа .

Q 6 ②

При каких значениях x и y выражение

$(2\cos t + \frac{1}{2}\cos x \cdot \cos y) \cdot \cos x \cdot \cos y + 1 + \cos x - \cos y + \cos 2t$

положительно при всех значениях ?

Указать, где на координатной плоскости расположены точки (x,y), удовлетворяющие этому условию.

Einsendeschluß 31. März 1984

Lösungen

(P 3) Da keine Formel zur Verfügung steht, die uns den Funktionswert von $\tan\frac{\alpha}{2}$ aus unseren Angaben sofort liefert, gestaltet sich seine Berechnung etwas langwierig.

Zuerst wollen wir die verwendeten Formeln angeben:

$$(1) \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$(2) \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$(3) \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$(4) \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Da der Winkel α zwischen $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ liegt, können keine Vorzeichenumschläge bzw. Divisionen durch Null auftreten.

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{7}{4}$$

(nach 4) $$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{4}$$

(nach 3) $$\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

(nach 4) $$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

(nach 2) $$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+0{,}25\sqrt{7}}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$$

(nach 1) $$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-0{,}25(\sqrt{7}+1)}{1+0{,}25(\sqrt{7}+1)}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}-1}{4+\sqrt{7}+1}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{7})(5-\sqrt{7})}{25-7}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{11-4\sqrt{7}}}{3}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{7}-2}{3}$$

(P 5)

1. Zuerst wird gezeigt, daß $\sqrt[3]{2}$ irrational ist (analog zum Schulstoff).

2. Beweis der Aufgabe indirekt:
Annahme: $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$ mit p,q,r rational, $r > 0$.

Es ergibt sich
$2 - p^3 - 3pq^2r = q\cdot\sqrt{r}\cdot(3p^2 + q^2r)$,

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p^3 - 3pq^2r}{q\cdot(3p^2 + q^2r)} \qquad (+).$$

Zur Rechtfertigung dieser Division ist die Überlegung (*) notwendig:

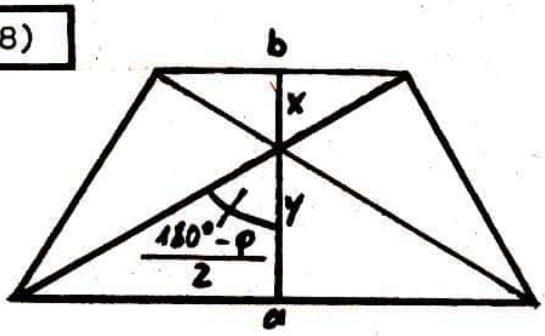
a) $q = 0$: würde $\sqrt[3]{2} = p$ und somit $\sqrt[3]{2}$ rational bedeuten, also hier schon einen Widerspruch ergeben.

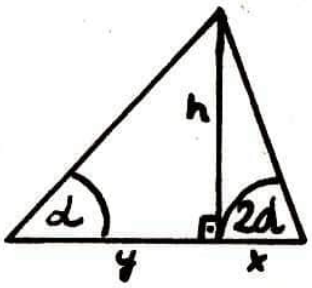
b) $q \neq 0$: Wegen $r > 0$, $q^2 > 0$ und $3p^2 \geq 0$ gilt $q\cdot(3p^2 + q^2r) \neq 0$.

Gehen wir zu (+) zurück:

Auf der rechten Gleichungsseite stehen nur rationale Ausdrücke, also muß auch $\sqrt{r}$ rational sein.
Hieraus folgt $\sqrt[3]{2} = p + q\cdot\sqrt{r}$ mit $p, q, \sqrt{r}$ rational, und somit ist $\sqrt[3]{2}$ rational.
Dies ist ein Widerspruch zu dem unter 1. Bewiesenen.

(P 8)





Nach Definition des Tangens gilt:

(1) $\tan 2\alpha = \frac{h}{x}$ und

(2) $\tan \alpha = \frac{h}{y}$.

Durch Umstellung erhält man:

(3) $h = x \tan 2\alpha$ und

(4) $h = x \frac{2 \tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

Durch Einsetzen von (2) in (4) folgt

(5) $$h = x \frac{2\frac{h}{y}}{1 - \frac{h^2}{y^2}} .$$

Man dividiert (5) durch h und stellt die Gleichung wie folgt um:

$$1 - \frac{h^2}{y^2} = x \frac{2}{y} .$$

Nach einer Multiplikation mit y^2 erhält man

$$y^2 - h^2 = 2\,xy .$$

Nun eliminiert man h:

$$h^2 = y^2 - 2\,xy \quad \text{und}$$

(6) $$h = \sqrt{y^2 - 2\,xy} .$$

Nach der Definition des Tangens und einfachen Umstellungen erhält man:

(7) $\tan \frac{180^\circ - \varphi}{2} = \frac{a}{2y}$, $y = \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ - \varphi}{2}}$ und

(8) $\tan \frac{180^\circ - \varphi}{2} = \frac{b}{2x}$, $x = \frac{b}{2 \tan \frac{180^\circ - \varphi}{2}}$.

(7) und (8) eingesetzt in (6) ergibt:

$$h = \sqrt{\frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ - \varphi}{2}} \cdot \frac{a-2b}{2 \tan \frac{180^\circ - \varphi}{2}}} \quad \text{oder}$$

(9) $$h = \frac{\sqrt{a(a - 2b)}}{2 \tan \frac{180^\circ - \varphi}{2}} .$$

Das Volumen der Pyramide berechnet sich wie folgt:

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h \quad \text{mit } A_{G\ Trap} = \frac{a+b}{2} h_{Trap},$$

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{a+b}{2}\right)(x+y)\ h\ .$$

Wir setzen Gleichungen (7), (8) und (9) ein, bekommen

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{a+b}{2}\right) \left[\frac{a+b}{2 \tan \frac{180^\circ -}{2}}\right] \frac{\sqrt{a(a-2b)}}{2 \tan \frac{180^\circ - \varphi}{2}}$$

und erhalten somit das gesuchte Volumen:

$$V = \frac{(a+b)^2 \sqrt{a(a-2b)}}{24 \tan^2 \frac{180^\circ - \varphi}{2}}$$

(P 9) Zunächst benutzt man, daß das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen nicht größer als ihr arithmetisches Mittel ist,

d. h. $\sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}$.

Setzt man $b = \frac{2}{\varepsilon} x_k^2$ und $c = \frac{\varepsilon}{2} a_k^2$, so erhält man

$\sqrt{x_k^2\ a_k^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} x_k^2 + \frac{\varepsilon}{4} a_k^2$, also

$$|x_k a_k| \leq \frac{1}{\varepsilon} x_k^2 + \frac{\varepsilon}{4} a_k^2 \qquad (1).$$

Die Behauptung wird nun mit vollständiger Induktion bewiesen.

Für n=1 erhält man die Behauptung, indem man in (1) k=1 setzt.

Es gelte nun

$$|a_1 x_1 + \ldots + a_{k-1} x_{k-1}| \leq \frac{1}{\varepsilon} (x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2) + \\ + \frac{\varepsilon}{4} (a_1^2 + \ldots + a_{k-1}^2).$$

Addiert man dazu (1), so ergibt sich

$$|a_1 x_1 + \ldots + a_{k-1} x_{k-1}| + |a_k x_k| \leq \frac{1}{\varepsilon} (x_1^2 + \ldots + x_k^2) + \\ + \frac{\varepsilon}{4} (a_1^2 + \ldots + a_k^2).$$

Nach der Dreiecksungleichung ist aber

$$|a_1x_1 + \ldots + a_kx_k| \leq |a_1x_1 + \ldots + a_{k-1}x_{k-1}| + |a_kx_k| ,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

(P 12) Sei BO - Seitenhalbierende im Dreieck Δ ABC. Wir ergänzen das Dreieck Δ ABC zu einem Parallelogramm ABCD (siehe Zeichnung). Dann folgt aus den Dreiecksungleichungen im Dreieck Δ BCD

$2|\overline{BO}| < |\overline{BC}| + |\overline{CD}|$ und wegen

$|\overline{CD}| = |\overline{AB}|$ gilt

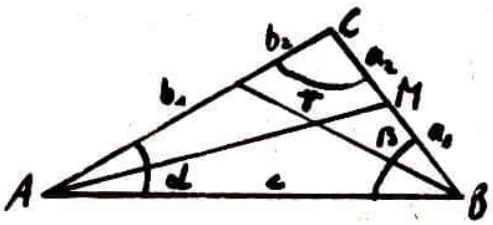
$$|\overline{BO}| < \frac{|\overline{AB}| + |\overline{BC}|}{2} .$$

Aus den Dreiecken Δ AOB und Δ BOC erhalten wir

$$|\overline{BO}| + \frac{|\overline{AC}|}{2} > |\overline{AB}| \quad \text{und} \quad |\overline{BO}| + \frac{|\overline{AC}|}{2} > |\overline{BC}| .$$

Daraus folgt $|\overline{BO}| > \frac{|\overline{AB}| + |\overline{BC}|}{2} - \frac{|\overline{AC}|}{2}$, q.e.d.

(P 13)



$b_1 = \overline{AN}$; $b_2 = \overline{NC}$
$a_1 = \overline{BM}$; $a_2 = \overline{MC}$
$c = \overline{AB}$; $a = \overline{BC}$;
$b = \overline{AC}$

Wir verwenden im weiteren den folgenden <u>Satz:</u>

> Die Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die Gegenseite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten.

Dieser Satz wird von uns auf die Dreiecke ABN, ABM und ABC angewendet.

So erhalten wir:

$\overline{BO} : \overline{ON} = \overline{AB} : \overline{AN} = 1 : (\sqrt{3} - 1)$ (nach Vorauss.)

$\overline{AO} : \overline{OM} = \overline{AB} : \overline{BM} = \sqrt{3} : 1$ (nach Vorauss.)

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BM} : \overline{MC} = \overline{BM} : (\overline{BC} - \overline{BM})$

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AN} : \overline{NC} = \overline{AN} : (\overline{AC} - \overline{AN})$

und mit den Bezeichnungen aus der Skizze sowie zwei kleinen Umformungen in den ersten beiden Gleichungen:

$$b_1 = (\sqrt{3} - 1)c \qquad (1)$$
$$a_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,c \qquad (2)$$
$$\frac{c}{b} = \frac{a_1}{a - a_1} \qquad (3)$$
$$\frac{c}{a} = \frac{b_1}{b - b_1} \qquad (4)$$

Durch Einsetzen von (2) in (3) und von (1) in (4) erhalten wir:

$$b = \sqrt{3}\,(a - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,c) = \sqrt{3}\,a - c \qquad (5)$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{3}-1}\,(b-(\sqrt{3}-1)c) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)b-c \qquad (6)$$

und aus (5) und (6) erhalten wir jetzt:

$$b = \sqrt{3}(\frac{1}{2}\,(\sqrt{3}+1)b - c) - c$$
$$(\sqrt{3}+1)c = \frac{1}{2}\,(\sqrt{3}+1)b\,, \quad b = 2c$$

und hiermit aus (5) $a = \sqrt{3}\,c$.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse und des Kosinussatzes ergibt sich:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \text{ und somit } \alpha = \frac{\pi}{3}$$
$$\cos\beta = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ und somit } \beta = \frac{\pi}{6}$$
$$\cos\gamma = 0 \text{ und somit } \gamma = \frac{\pi}{2}\,.$$

(P 15) $f(x)$ sei eine Funktion mit

$$f(x+1) = (x+1)\,f(x) \quad \text{für alle } x,\ x = -1 \qquad (1)$$
$$f(x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \qquad (2)$$

und $g(x)$ eine für alle x definierte Funktion.

<u>1. Teil</u>

Es gelte $g(x+1) = g(x)$. (3)

Zu zeigen ist dann, daß $y(x) = f(x)\cdot g(x)$ (4)

folgende Gleichung erfüllt:

$$y(x+1) = (x+1)y(x) \qquad (5)$$

für alle x, $x \neq -1$.

Aus der Definition von $y(x)$ folgt:

$$\begin{aligned} y(x+1) &= f(x+1)\, g(x+1) \\ &= (x+1)\, f(x)\, g(x+1) && \text{nach (1)} \\ &= (x+1)\, f(x)\, g(x) && \text{nach (3)} \\ &= (x+1)\, y(x) && \text{nach Definition von } y(x) \end{aligned}$$

2. Teil

Es gelte $y(x+1) = (x+1)\, y(x)$ (6)

für alle x, $x \neq -1$ mit der oben angegebenen Definition von $y(x)$.

Zu zeigen ist, daß $g(x)$ dann die Periode 1 besitzt.

Aus der Definition von $y(x)$ folgt:

$$\begin{aligned} y(x+1) &= f(x+1)\, g(x+1) \\ (x+1)y(x) &= (x+1)\, f(x)\, f(x+1) && \text{nach (6) und (1)} \\ (x+1)f(x)g(x) &= (x+1)f(x)g(x+1) && \text{nach (4).} \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$g(x) = g(x+1)$, da nach (2) $f(x) \neq 0$ und $x+1 \neq 0$ für $x \neq -1$ gilt.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Burkhard Götz
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimmler, R. Heinrich, S. Kratochwil, M. Röppnack, K. Tauscher
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-422-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 6. 12. 1983

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	18 (1984) 1	S. 1–16

2
84

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
18. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Das Paradoxon von Bertrand

1. Eine Aufgabe über geometrische Wahrscheinlichkeiten

In der WURZEL sind schon einige Artikel über geometrische Wahrscheinlichkeiten erschienen, zuletzt in den Heften 5 und 6/82. Dort wurde u. a. eine klassische, vor 200 Jahren gelöste Aufgabe behandelt - das Nadelproblem von Buffon: Gegeben ist ein System von parallelen Geraden, die untereinander den Abstand a haben. Darauf wird zufällig eine Strecke (Nadel) der Länge $l < a$ geworfen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit p dafür, daß die Strecke eine der Geraden schneidet. Das von Buffon bereits 1777 veröffentlichte Ergebnis lautet : $p = \frac{2l}{a\pi}$.

In der Folgezeit wurde eine ganze Reihe von Aufgaben gestellt, die mit geometrischen Wahrscheinlichkeiten zusammenhängen. Wir wollen uns hier einem Problem zuwenden, das 1907 von dem Mathematiker B e r t r a n d behandelt wurde.

> Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius 1. Darauf wird eine zufällige Gerade gelegt (die Gerade soll den Kreis mit Wahrscheinlichkeit 1 schneiden - "sicheres Ereignis"). Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit p dafür, daß die Länge s der ausgeschnittenen Kreissehne größer oder gleich $\sqrt{3}$ (= Seitenlänge des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks) ist.

2. Drei Lösungen - ein Paradoxon (?)

Erste Lösung

Die Lage der zufälligen Geraden ist eindeutig bestimmt durch die beiden Schnittpunkte t_1, t_2 mit der Peripherie des Kreises (Abb. 1). Für jede Lage des Punktes t_1 gilt $s \geq \sqrt{3}$ genau dann, wenn t_2 auf dem "t_1 gegenüberliegenden Drittel" der Peripherie (dick gezeichnetes Kreisbogenstück b) liegt.

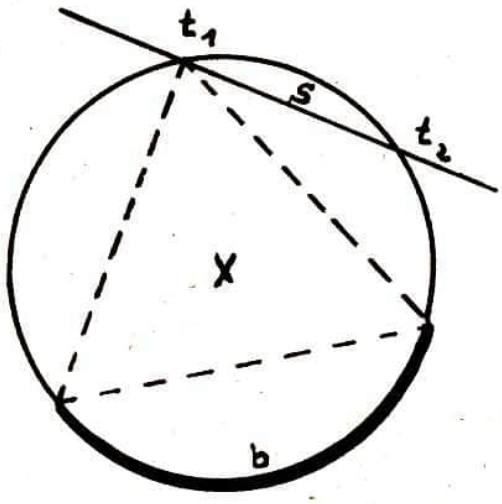


Abb. 1

Wird eine Gerade zufällig auf den Kreis gelegt, so entspricht das also dem zufälligen Werfen zweier Punkte t_1, t_2 auf die Pe-

ripherie des Kreises. Für jedes t_1 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß t_2 auf b fällt, gleich

$$p = \frac{\text{Länge von b}}{\text{Gesamtlänge der Peripherie}} = \frac{1}{3}\,.$$

Zweite Lösung

Wegen der Rotationssymmetrie des Kreises hängt die Länge s nur vom Abstand d der Geraden vom Kreismittelpunkt ab. (Abb. 2) Jeder Leser kann leicht nachrechnen, daß $s \geq \sqrt{3}$ genau dann gilt, wenn $d \leq \frac{1}{2}$. Der Abstand d kann zwischen 0 und 1 variieren. Eine zufällig auf den Kreis gelegte Gerade entspricht einem zufällig auf das Intervall $[0,1]$ geworfenen Punkt d. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $d \leq \frac{1}{2}$ ist also gleich

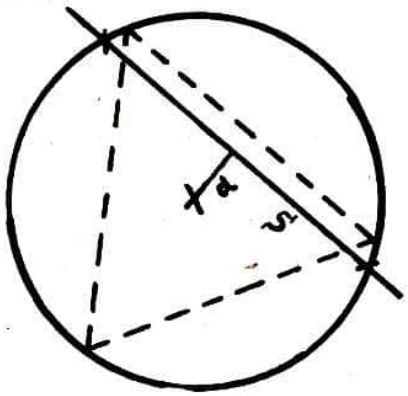
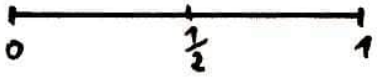


Abb. 2



$$p = \frac{\text{Länge des Intervalls } [0,\frac{1}{2}]}{\text{Länge des Intervalls } [0,1]} = \frac{1}{2}\,.$$

Dritte Lösung

Wir betrachten den Fußpunkt x des Lotes vom Kreismittelpunkt auf die Gerade. Es ist $s \geq \sqrt{3}$ genau dann, wenn x im konzentrischen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$ liegt (Abb. 3). Da eine Gerade bereits durch den Fußpunkt des Lotes eindeutig bestimmt ist, entspricht also einer zufälligen Geraden ein zufällig auf die Kreisfläche geworfener Fußpunkt. Die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Punkt im Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$ liegt, ist gleich

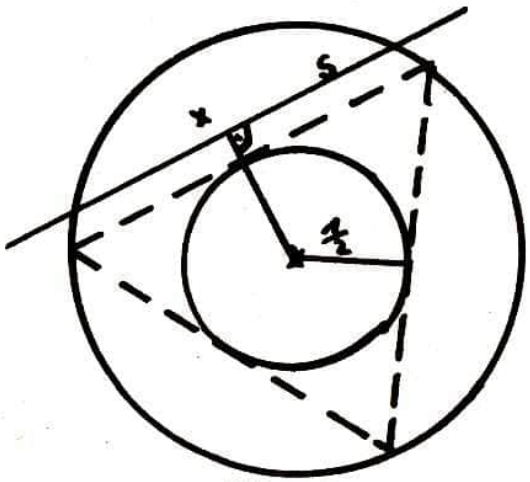


Abb. 3

$$p = \frac{\text{Fläche des kleinen Kreises}}{\text{Fläche des großen Kreises}} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}\,.$$

Wir haben für die gestellte Aufgabe drei verschiedene Lösungen erhalten. Nun werden wir uns mit zwei Fragen auseinandersetzen müssen:

- Wo liegt die Ursache für den (scheinbaren) Widerspruch?
- Welche der drei Lösungen ist richtig?

3. Die Ursache des "Widerspruchs"

Derartige "Widersprüche" (Paradoxa) sind in der Geschichte der Mathematik mehrfach entdeckt worden (vielleicht sind manchem Leser Antinomien der naiven Mengenlehre bekannt). Diese sind aber keineswegs als ein Unglück zu betrachten, sondern sie geben im Gegenteil Anlaß zur Weiterentwicklung der Mathematik. Solche Paradoxa deuten darauf hin, daß einer oder mehrere der verwendeten Begriffe nicht eindeutig und widerspruchsfrei definiert sind. Dadurch wird es nämlich möglich - z. B. durch unterschiedliche Auslegungen eines nicht genau definierten Begriffs - "Widersprüche" herbeizuführen.
Der Leser möge zunächst selbständig im bisherigen Text nach einem nicht eindeutig definierten und auf unterschiedliche Weise verwendeten Begriff suchen.

Wir stoßen bei genauer Prüfung auf den Begriff "zufällige Gerade" (das wird zumindest den Lesern aufgefallen sein, die sich an den Artiekl von 5 und 6/82 erinnern). Bei den drei Lösungen in Abschnitt 2 wird die Aufgabe für eine "zufällige Gerade" jeweils auf ein Problem für einen "zufälligen Punkt" zurückgeführt. Dabei wurden drei unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten für Geraden verwendet. (Der Begriff des "zufälligen Punktes" wurde auch nicht definiert. Es wurde jeweils die sog. Gleichverteilung zugrunde gelegt. Dabei ergibt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Punkt in ein Teilintervall (bzw. auf eine Fläche) fällt, als Quotient aus der Länge dieses Teilintervalls (Flächeninhalt dieser Fläche) und der Gesamtlänge des möglichen Intervalls (Inhalt der möglichen Fläche).)

Man könnte also sagen, daß sich die drei verschiedenen Lösungen dadurch ergeben, daß eigentlich drei unterschiedliche Aufgaben behandelt werden. In der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie drückt man das folgendermaßen aus: Auf der Menge aller Geraden, die den Kreis schneiden, wurden drei verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen betrachtet.
Für jede dieser Wahrscheinlichkeitsverteilungen wurde die richtige Lösung gefunden.
Möglicherweise wird es manchem nicht leicht fallen, den letzten Gedanken nachzuvollziehen. Bei der üblichen Art und Weise, die Wahrscheinlichkeitstheorie einzuführen, werden zunächst "endlich viele gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge" (z. B. Münzenwurf, Würfeln mit einem regelmäßigen Würfel) oder die Situation "gleichverteilter Punkt auf Intervall Fläche " also immer Gleichverteilungen betrachtet. Das hat natürlich seine Berechtigung, denn Gleichverteilungen sind leicht zu verstehen und spielen eine wichtige Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Allerdings ist die Gleichverteilung nur eine von i. a. unendlich vielen möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Menge aller möglichen Versuchsausgänge. Beispielsweise kann man sämtliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen P auf der Menge $\{0,1\}$ (also zwei mögliche Versuchsausgänge) etwa auf folgende Weise beschreiben

$$P(0) = p$$
$$P(1) = 1-p,$$

wobei p eine beliebige Zahl zwischen 0 und 1 ist.

Im Abschnitt 2 wurden nun drei von unendlich vielen möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einer Geradenmenge betrachtet (ihr Unterschied wurde allerdings verschleiert).

4. Die invariante Geradenverteilung

Am Bertrandschen Paradoxon (das nun für uns kein Paradoxon mehr ist) können wir erkennen, daß man nicht ohne weiteres von einer "gleichverteilten Geraden" sprechen kann. Es liegt allerdings nahe, in der Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen

auf der Menge der Geraden, die einen Kreis schneiden, nach einer solchen zu suchen, die folgende Invarianzforderung erfüllt:

Wenn zwei Gebiete G_1 und G_2 kongruent sind und ganz im Kreis liegen, so soll die Wahrscheinlichkeit, daß G_1 von der Geraden geschnitten wird, gleich der Wahrscheinlichkeit sein, daß G_2 geschnitten wird.

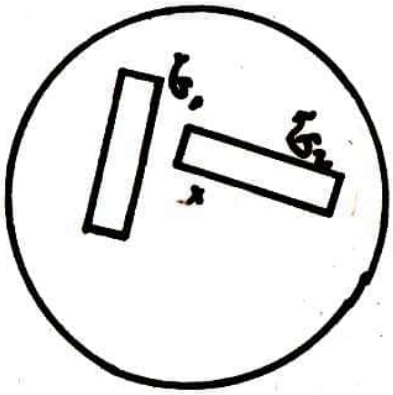


Abb. 4

Man kann beweisen, daß es genau eine solche invariante Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt. Diese wurde bereits in der WURZEL 6/82 ("auf gut Glück geworfene Gerade") beschrieben.

In Abschnitt 2 wurde bei der zweiten Lösung diese Verteilung zugrunde gelegt. Wir können feststellen:

Bezüglich der invarianten Geradenverteilung ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zufällige auf einen Kreis mit dem Radius 1 geworfene Gerade eine Sehne der Länge $s \geq \sqrt{3}$ ausschneidet gleich $\frac{1}{2}$.

Dr. W. Nagel
Bereich Mathematische Kybernetik
und Rechentechnik
(Forschungsgruppe Automatische Bildverteilung)
FSU Jena

Preisaufgaben

Q 7 ②

Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß das Gleichungssystem

$$x + py = n$$

$$x + y = p^z \quad \text{für } n,p \in \mathbb{N} \text{ vorgegeben}$$

ganzzahlige positive Lösungen (x,y,z) besitzt. Man zeige außerdem, daß die Anzahl dieser Lösungen nicht größer als 1 sein kann.

Q 8 ①

Man zeige, daß der Sinus und der Kosinus eines beliebigen Winkels genau dann rational sind, wenn der Tangens des halben Winkels rational oder nicht definiert ist.

Q 9 ①

$a_1,\ldots,a_n$ und k seien natürliche Zahlen mit $\sum_{i=1}^{n} a_i < k$. Man zeige, daß dann $a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots a_n! < k!$

Q 10 ②

Man zeige, daß eine ganze Zahl genau dann als Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen darstellbar ist, wenn das Doppelte dieser Zahl dieselbe Eigenschaft besitzt.

Q 11 ①

Es sei $b_1,\ldots,b_n$ eine beliebige Permutation der positiven reellen Zahlen $a_1,\ldots,a_n$. Man zeige, daß

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

Q 12 ②

Точка O называется центром симметрии точечного множества M, если точка, симметричная относительно O любой точке множества M, также принадлежит множеству M. Доказать, что конечное точечное множество не может иметь двух различных центров симметрии.

Einsendeschluß: 04.5.1984

2. Fortsetzung zum Artikel „Magische Quadrate und Würfel"

Mehrere Forscher, z. B. Kochansky (1686), Sauveur (1710), Hugel (1859) und Scheffler (1882) haben versucht, den Gedanken der magischen Quadrate auf den Raum auszudehnen. Die Probleme scheinen hier aber wesentlich schwieriger zu sein. Man denke sich z. B. einen Würfel durch Ebenen, die parallel zu den Seitenflächen laufen und gleiche Abstände haben, in lauter würfelförmige Teile zerlegt. Diesen kleinen Würfeln ordne man aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so zu, daß in jeder Reihe von links nach rechts, von oben nach unten, von vorn nach hinten und in jeder diagonalen Richtung die Zahlensumme gleich ist (übliche Definition wie bei magischen Quadraten).
In einem Würfel mit $3 \cdot 3 \cdot 3$ Würfelteilen müßte diese Summe in jeder Reihe $s = \frac{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_{27}}{3}$ sein. Nehmen wir z. B. die Zahlen 3, 4, 5, ... 26, 27, 28 und 29, so wäre

$$9\,s = \frac{27}{2}\,(3+29), \text{ also } \quad s = 48.$$

Um so einen Würfel in der Ebene darzustellen, denken wir uns die zu den einzelnen Würfelteilen der oberen Schicht gehörenden Zahlen aufgeschrieben, dann ebenso die Zahlen der mittleren Schicht und dann für die untere Schicht. Wir erhalten 3 Quadrate von je 9 Feldern, die zusammen den magischen Würfel darstellen. Wir geben hierzu ein Beispiel.

hinten

8	19	21
28	3	17
12	26	10

vorn

oberste Schicht (waagerecht)

mittlere Schicht (waagerecht)

hinten

18	23	7
5	16	27
25	9	14

vorn

hinten

22	6	20
15	29	4
11	13	24

vorn

unterste Schicht (waagerecht)

Die senkrecht stehenden Schichten von hinten nach vorn lassen

sich dann leicht finden und ergeben folgende magischen Zahlenschemata:

8	28	12
18	5	25
22	15	11

linke Schicht (senkrecht)

hinten vorn

19	3	26
23	16	9
6	29	13

mittlere Schicht (senkrecht)

hinten vorn

21	17	10
7	27	14
20	4	24

rechte Schicht (senkrecht)

hinten vorn

Die senkrecht stehenden Schichten von links nach rechts ergeben folgende magischen Quadrate:

hintere Schicht (senkrecht)

8	19	21
18	23	7
22	6	20

links rechts

mittlere Schicht (senkrecht)

28	3	17
5	16	27
15	29	4

links rechts

vordere Schicht (senkrecht)

12	26	10
25	9	14
11	13	24

links rechts

Man erkennt, daß in allen waagerechten und senkrechten Reihen der 9 Quadrate die Zahlensummen stets 48 betragen. Die 18 Diagonalen erfüllen aber nicht immer diese Bedingung gleicher Zahlensummen, wie folgende Übersicht zeigt:

8 + 3 + 10 = 21	8 + 5 + 11 = 24	8 + 23 + 20 = 51
12 + 3 + 21 = 36	22 + 5 + 12 = 39	22 + 23 + 21 = 66
18 + 16 + 14 = 48	19 + 16 + 13 = 48	28 + 16 + 4 = 48
25 + 16 + 7 = 48	6 + 16 + 26 = 48	15 + 16 + 17 = 48
22 + 29 + 24 = 75	21 + 27 + 24 = 72	12 + 9 + 24 = 45
11 + 29 + 20 = 60	20 + 27 + 10 = 57	11 + 9 + 10 = 30

12 Diagonalen erfüllen die Bedingung gleicher Zahlensumme 48

nicht. Die Zahlen der 4 Körperdiagonalen lassen sich leicht aus den drei ersten Quadraten ermitteln:
8+16+24=48; 21+16+11=48; 12+16+20=48 und 10+16+22=48
erfüllen also die Bedingungen s = 48.

Wir wollen noch ein Beispiel für einen magischen Würfel vierten Grades anführen. Wir werden sehen, daß auch hier nicht alle Diagonalen der Quadrate die verlangte Beziehung erfüllen.

In einem Würfel mit 4 · 4 · 4 Würfelteilen müßte die Summe in jeder Reihe $s = \frac{n_1+n_2+\ldots+n_{63}+n_{64}}{16}$ sein. Für die Zahlen 1 - 64 wäre dann $s = \frac{1}{16} \cdot \frac{64}{2} \cdot 65 = 130$.

Wir denken uns den Würfel wieder durch Ebenen, die parallel zu den Seitenflächen laufen und gleichen Abstand voneinander haben, in lauter würfelförmige Teile zerlegt. Jedem dieser kleinen Würfel ordnen wir wieder die aufeinanderfolgenden Zahlen 1 - 64 so zu, daß in jeder Reihe von links nach rechts, von oben nach unten, von hinten nach vorn und in diagonalen Richtungen die gleichen Zahlensummen entstehen (übliche Definition).

Um den Würfel in der Ebene darzustellen, denken wir uns die zu den einzelnen Würfelteilen der obersten Schicht gehörenden Zahlen aufgeschrieben, dann ebenso die Zahlen der zweiten waagerechten Schicht, der dritten waagerechten Schicht und schließlich der untersten Schicht. Wir erhalten 4 Quadrate zu je 16 Feldern, die zusammen den Würfel charakterisieren (siehe Zeichnung im Schrägriß).

1	48	32	49
60	21	37	12
56	25	41	8
13	36	20	61

oberste Schicht

63	18	34	15
6	43	27	54
10	39	23	58
51	30	46	3

zweite Schicht von oben

62	19	35	14
57	24	40	9
11	38	22	59
50	31	47	2

dritte Schicht von oben

4	45	29	52
7	42	26	55
53	28	44	5
16	33	17	64

unterste Schicht

Aus diesen Schichten lassen sich alle 12 möglichen magischen Quadrate bilden. 4 sind schon oben angegeben, die anderen 8 sind in den folgenden Skizzen zusammengestellt.

Senkrechte Schichten von hinten nach vorn

hinten

1	60	56	13
63	6	10	51
62	7	11	50
4	57	53	16

vorn

erste Schicht von links

hinten

48	21	25	36
18	43	39	30
19	42	38	31
45	24	28	33

vorn

zweite Schicht von links

hinten

32	37	41	20
34	27	23	46
35	26	22	47
29	40	44	17

vorn

dritte Schicht von links

hinten

49	12	8	61
15	54	58	3
14	55	59	2
52	9	5	64

vorn

vierte Schicht von links

Senkrechte Schichten von links nach rechts

oben

1	48	32	49
63	18	34	15
62	19	35	14
4	45	29	52

unten

hinterste Schicht

oben

60	21	37	12
6	43	27	54
7	42	26	55
57	24	40	9

unten

zweite Schicht von hinten

oben

56	25	41	8
10	39	23	58
11	38	22	59
53	28	44	5

unten

dritte Schicht von hinten

oben

13	36	20	61
51	30	46	3
50	31	47	2
16	33	17	64

unten

vordere Schicht

In allen waagerechten und senkrechten Reihen der Quadrate ist die Zahlensumme 130. Auch die 4 Körperdiagonalen ergeben die Summe 130

$16 + 38 + 27 + 49 = 130$ $\quad$ $52 + 26 + 39 + 13 = 130$

$64 + 22 + 43 + 1 = 130$ $\quad$ $4 + 42 + 23 + 61 = 130$

In allen Diagonalen der 12 Quadrate ist dagegen die Zahlensumme nicht 130.

Betrachten wir auch magische Quadrate, deren Zahlen nicht alle verschieden sind (siehe Def. 1 in WURZEL 10/83, Seite 153), so können wir auch sogenannte elementare magische Würfel untersuchen. Wir beschränken uns hier auf ein Beispiel mit Quadraten der Form

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

Für A, B, C und D können wir beliebige natürliche Zahlen einsetzen.

Wir wollen aus solchen Quadraten einen magischen Würfel bilden. Wir wählen die Zahlen 0, 1, 2, 3.
Aus den vielen Möglichkeiten greifen wir folgende 4 Quadrate für die 4 waagerechten Schichten heraus:

	oberste Schicht	2. Schicht	3. Schicht	unterste Sch.
hinten	0 1 2 3	3 2 1 0	1 0 3 2	2 3 0 1
	2 3 0 1	1 0 3 2	3 2 1 0	0 1 2 3
	3 2 1 0	0 1 2 3	2 3 0 1	1 0 3 2
vorn	1 0 3 2	2 3 0 1	0 1 2 3	3 2 1 0

die 8 senkrechten Schichten lassen sich daraus leicht finden. Wir geben das Ergebnis an:

0 1 2 3	2 3 0 1	3 2 1 0	1 0 3 2
3 2 1 0	1 0 3 2	0 1 2 3	2 3 0 1
1 0 3 2	3 2 1 0	2 3 0 1	0 1 2 3
2 3 0 1	0 1 2 3	1 0 3 2	3 2 1 0

0 2 3 1	1 3 2 0	2 0 1 3	3 1 0 2
3 1 0 2	2 0 1 3	1 3 2 0	0 2 3 1
1 3 2 0	0 2 3 1	3 1 0 2	2 0 1 3
2 0 1 3	3 1 0 2	0 2 3 1	1 3 2 0

In allen Zeilen, Spalten und Diagonalen der 12 Quadrate ist die Summe 6. Die 4 Raumdiagonalen, die sich aus den 4 waagerechten Schichten finden lassen, ergeben folgende Summen:

$s_1 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0;$ $s_2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

$s_3 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$ und $s_4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$

Weitere Möglichkeiten ergeben sich aus dem magischen Quadrat:

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Der Leser kann versuchen, unter den vielen möglichen magischen Quadraten 4 als waagerechte Schichten herauszufinden, die einen magischen Würfel ergeben, der alle Bedingungen erfüllt. Ob es eine Lösung oder mehrere gibt, ist aus der sehr spärlichen Literatur über magische Würfel nicht zu ersehen.

Dr. B. Hanisch, Halle

Lösungen

P 17) Wir bezeichnen die Geschwindigkeiten der Punkte mit v_1 und v_2 und sei $v_1 > v_2$. Die erste Bedingung ergibt die Gleichung

$$\frac{2\pi R}{v_2} - \frac{2\pi R}{v_1} = t .$$

Aus der zweiten Bedingung folgt, daß der Punkt mit der größeren Geschwindigkeit in der Zeit T genau einen Kreisumfang mehr zurücklegt. Das heißt

$$Tv_1 - Tv_2 = 2\pi R \qquad v_2 = v_1 - \frac{2\pi R}{T}$$

Dies in die erste Gleichung eingesetzt ergibt eine quadratische Gleichung für v_1:

$$v_1^2 - \frac{2\pi R}{T} v_1 - \frac{2\pi R}{T} \cdot \frac{2\pi R}{t} = 0.$$

Daraus ergeben sich folgende Geschwindigkeiten:

$$v_1 = \frac{\pi R}{T} \left(\sqrt{1 + \frac{4T}{t}} + 1\right); \qquad v_2 = \frac{\pi R}{T} \left(\sqrt{1 + \frac{4T}{t}} - 1\right).$$

(Die negativen Wurzeln entfallen.)

(P 19) Die gegebene Gleichung wird mit Hilfe des Theorems

$$2 \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

umgeformt. Wir erhalten:

$$2 \sin^2 x + \cos(2x) - \cos(6x) + \cos(6x) - \cos(12x) + - \ldots$$
$$+ \cos(n^2x - nx) - \cos(n^2x + nx) = 2.$$

In dieser Gleichung heben sich alle Glieder von $\cos(6x)$ an bis $\cos(n^2x - nx)$ gegenseitig auf:

$$2 \sin^2 x + \cos(2x) - \cos(n^2x + nx) = 2 \,.$$
$$\cos(2x) - \cos(n^2x + nx) = 2(1-\sin^2 x),$$

und wegen $2 \cos^2 x = \cos(2x) + 1$ und $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ gilt:

$$\text{xos}(2x) - \cos(n^2x + nx) = \cos(2x) + 1$$
$$\cos(n^2x + nx) = -1.$$

Hieraus ergibt sich:

$$x(n^2 + n) = \pi(2k + 1)$$
$$x = \frac{\pi(2k + 1)}{n^2 + n}$$

mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ n=1,2,3,\ldots$

Sämtliche Lösungen sind mit $x = \frac{\pi(2k+1)}{n^2+n}$ erfaßt.

(P 30) $z = x + \frac{1}{4x} = (x + \frac{\frac{1}{4}}{x} - 1) + 1 = \frac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{x} + 1 = \frac{(x - \frac{1}{2})^2}{x} + 1$

Damit wird z für positive x minimal, wenn $x = \frac{1}{2}$, das Minimum von z für positive x ist gleich 1.

(P 31) Sei r der Radius der inneren Kreise, R_o und R_1 die Radien des Kreisringes ($R_o < R_1$). Dann muß

1) $3r = R_o$ und
2) $7\pi r^2 = \pi(R_1^2 - R_o^2)$ gelten.

Durch Quadrieren von 1) und Einsetzen in 2) erhält man $R_1^2 = 16r^2$ also $R_1 = 4r$.

Daraus und aus 1) folgt $R_1 - R_o = r$. q.e.d.

(P 33) n sei die Anzahl der Partien, die der Meister insgesamt spielte. Dann waren nach der ersten Stunde $(\frac{n}{10}+8)$ Partien beendet; im zweiten Teil wurden
$\frac{1}{10}(n - \frac{n}{10} - 8) + 2 + 7$ Partien beendet.
Also gilt
$n = \frac{n}{10} + 8 + \frac{n}{10} - \frac{n}{100} - \frac{8}{10} + 9 \qquad 81n = 1620$, also $n=20$.

(P 35) Wir bezeichnen den Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ mit S und setzen $\frac{AD}{AB} = x$.
Dann folgt aus dem Strahlensatz für die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ADE$ und $\triangle ABE$:

$|\triangle ADE| = x^2 \cdot S$
$|\triangle ABE| = x \cdot S$, also muß $k^2 = xS - x^2S$ gelten.

Daraus erhält man

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k^2}{S}}}{2}.$$

Damit besitzt die Aufgabe Lösungen für $S \geq 4k^2$, und zwar genau eine für $S = 4k^2$ und genau zwei für $S > 4k^2$.

(P 43) Da die Anzahl der Punkte endlich ist, kann man zwei aus ihnen auswählen, deren Abstand maximal ist. Um beide wird ein Kreis mit dem Radius 1 geschlagen. Dann liegt jeder Punkt der Menge in einem der beiden Kreise. Ist der Abstand der ausgewählten Punkte nämlich größer als 1, so bilden diese mit jedem anderen Punkt ein Tripel, in dem nach Voraussetzung ein Paar mit einem Abstand < 1 existiert. Zu diesem Paar muß der dritte Punkt aber gehören. Ist der Abstand der ausgewählten Punkte kleiner als eins, so folgt die Behauptung aus der Maximalität dieses Abstands.

q.e.d.

(P 47) Unter Verwendung der Identität $\lg_y 2 = \frac{\lg_x 2}{\lg_x y}$ schreiben wir die erste Gleichung des Systems

$$2\lg_x 2 + 3\,\frac{\lg_x 2}{\lg_x y} = 0.$$

Wegen $\lg_x 2 \neq 0$ folgt daraus $\lg_x y = -\frac{3}{2}$, also $y = x^{-\frac{3}{2}}$.

Diese Gleichung in die zweite eingesetzt ergibt

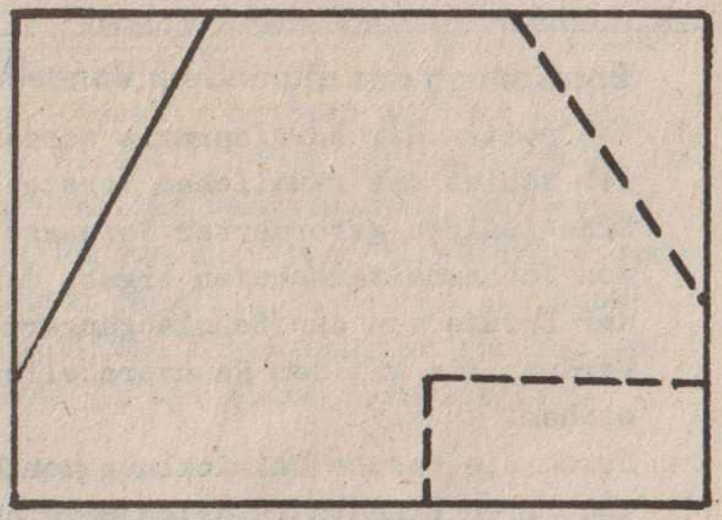
$$x^3 - 4x^{-3} = 0 \quad \text{bzw.} \quad x^6 = 4.$$

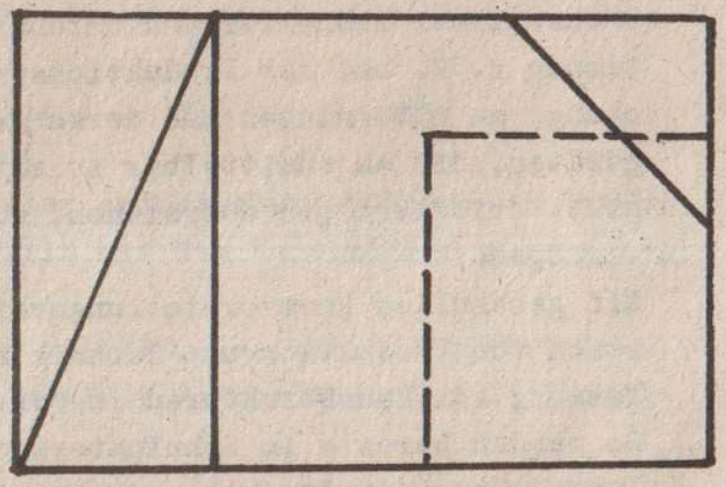
Daraus folgt die Lösung des Systems $x = \sqrt[3]{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Burkhard Götz
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimmler, R. Heinrich, S. Kratochwil, M. Röppnack, K. Tauscher

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-122-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 4. 1. 1984





3
84

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
ISSN 0232-4539
18. Jahrgang
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens

1. Von seiten der Berufspraxis werden zunehmend Fähigkeiten auf dem Gebiet des räumlichen Vorstellungsvermögens erwartet. Eine Analyse geforderter Voraussetzungen für das Erlernen von Facharbeiterberufen ergab, daß zur Zeit für fast 40 % der Berufe von den Schulabgängern Fähigkeiten vorausgesetzt werden, die mit dem Raumvorstellungsvermögen im Zusammenhang stehen.
   Durch die rasche Entwicklung von Wissenschaft und Technik und ihren Einsatz in allen Bereichen des produktiven und gesellschaftlichen Lebens verlagern sich die beruflichen Tätigkeiten immer mehr von der körperlichen auf die geistige Ebene. Immer schneller und umfangreicher gelieferte Informationen z. B. bei der Produktionsprojektierung und -überwachung, an EDV-Anlagen und deren grafischen Ein- und Ausgabegeräten, die es unmittelbar zu erfassen und zu verarbeiten gilt, erfordern ein ausreichend ausgebildetes Vorstellungsvermögen.
   Ein geschultes Raumvorstellungsvermögen ist nicht nur im Bereich von Produktion und Technik nötig, sondern auch zur Erfassung von Raumstrukturen in verschiedenen Wissenschaften. So werden bereits im Schulunterricht beispielsweise Vorstellungen über die Struktur von Kristallen, über den Bau der Atome, über den Aufbau einzelner Molekülmodelle und die Bewegung im Raum im Fach Chemie und Physik, über die Gestalt von Gebirgen und Meerestiefen oder die Lage von Bodenschätzen anhand von Kartenmaterial in der Geographie, über das Sonnensystem in der Astronomie und über pflanzliche und tierische Zellen in der Biologie verlangt.
   Die Fähigkeit, Räumliches sich vorstellen zu können, spielt auch in der Mathematik eine große Rolle und beschränkt sich nicht nur auf die Behandlung geometrischer Körper. Da diese Fähigkeit nicht nur auf vielen Gebieten des täglichen Lebens von Nutzen sondern auch für die eigene Persönlichkeitsentwicklung bedeutsam ist, soll anhand von Aufgaben demonstriert werden, wie die Beschäftigung mit mathematischen Problemstellungen zur Entwicklung von intellektuellen Fähigkeiten,

Denk- und Arbeitsweisen beitragen kann.
Hervorragende Bedeutung hat dabei - bezogen auf die Geometrie - die Befähigung, das Wesentliche an bestimmten Körpern und in geometrischen Sachverhalten wahrzunehmen, geometrische Gebilde und ihre Beziehungen auf Grund von Beschreibungen oder ebenen Darstellungen räumlich zu deuten und auch umgekehrt geometrisch wesentliche Eigenschaften von realen oder gedachten Sachverhalten in der Ebene darzustellen.

2. Es sei folgende Aufgabe gestellt:

   Bestimme die Länge der Raumdiagonalen
   eines Würfels mit der Kantenlänge a!

Um diese Aufgabe zu lösen, bedarf es u. a. Fähigkeiten auch der, sich geometrische Objekte und deren räumliche Beziehungen vorstellen zu können.
Die Aufgabe kann unterschiedlich gelöst werden:

- praktisch:
  Es wird der Abstand zweier entsprechender Ecken von einem Kantenmodell eines Würfels mit der Kantenlänge a gemessen.
- konstruktiv:
  Es wird die wahre Länge der Raumdiagonalen des Würfels mittels senkrechter Parallelprojektion (Ein- oder Zweitafelverfahren) konstruiert.
- analytisch:
  Es wird die Formel zur Berechnung der Raumdiagonalen eines Würfels - eventuell unter Nutzung einer Skizze - hergeleitet.
- sprachlich:
  Es wird ohne ein räumliches Anschauungsmodell oder eine Zeichnung zu benutzen, allein auf Grund erworbener Vorstellungen vom Würfel die Antwort formuliert.

(z.B.: die Länge d der Raumdiagonalen eines Würfels mit der Kantenlänge a ist gleich der Länge der Diagonalen des Rechtecks, das aus einer Würfelkante und einer Diagonalen des Quadrats mit der Seitenlänge a gebildet wird.)

Bei den einzelnen Lösungen bestehen unterschiedliche Anforderungen bezüglich des räumlichen Vorstellungsvermögens.
Erst wenn man in der Lage ist, wie im letzten Fall ohne Hilfs-

mittel (Modell, Zeichnung) eine Aufgabe der räumlichen Geometrie aus der Vorstellung heraus zu lösen und das Ergebnis der Überlegung sprachlich zu formulieren, wird über ein ausreichendes Raumvorstellungsvermögen verfügt, um darauf aufbauend weitere Denkleistungen vollbringen zu können.
Somit gehört zum Raumvorstellungsvermögen zunächst die Fähigkeit, die als Abbild durch Wahrnehmen gewonnenen räumlichen Dimensionen und Objekte sowie deren äußere Gestalt, Lage im Raum, Abstand zueinander u. a. zu reproduzieren. Zum Raumvorstellungsvermögen gehören aber auch gerade solche geistigen Fähigkeiten wie die, die Abbilder räumlicher Objekte so zu zerlegen, zusammenzusetzen, umzustruktuieren, neuzukonstruieren, als würden diese Handlungen an den Gegenständen selbst vollzogen.
Das Resultat einer durch Raumvorstellen gelösten Aufgabe besteht deshalb nicht nur in "Erinnerungsbildern", sondern in neuen Abbildern, die auf Grund gedanklichen Auseinandersetzens mit räumlichen Problemen bzw. Fragen anhand der Erinnerungsbilder entstehen (z. B.: Vorstellen der Lage von Schnittebenen durch vorgegebene Körper und der dabei entstehenden Schnittfiguren).

3. In engem Zusammenhang mit der Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens steht im Schulunterricht z. B. in darstellender Geometrie die Herausbildung des Raumdarstellungsvermögens, d. h. der Fähigkeit, geometrische Gebilde des Raumes durch ebene Zeichnungen darzustellen. Die Zeichnung bildet zunächst das Bindeglied zwischen der realen dreidimensionalen Anschauung und der abstrakten Vorstellung.
So besteht u. a. das Ziel der Behandlung der darstellenden Geometrie in Klasse 7 darin, die Schüler zu befähigen,
- sich vom Gegenstand als solchen zu lösen und abstrakte geometrische Gebilde des Raumes zu erfassen und zeichnerisch darzustellen,
- Zeichnungen zu lesen und das in der Ebene Dargestellte räumlich zu deuten sowie
- die Sprache und die Zeichnung als Ausdrucksmittel ihres geometrischen Denkens zu benutzen.

Zunächst soll ein Beispiel zu solchen Aufgaben angeführt werden, bei deren selbständiger Bewältigung der Schüler die auf sprachlich-begrifflicher Ebene gegebenen räumlichen Beziehungen erfassen und sich der Zeichnung als Ausdrucksmittel seines räumlichen Denkens bedienen muß.

B e i s p i e l 1 :

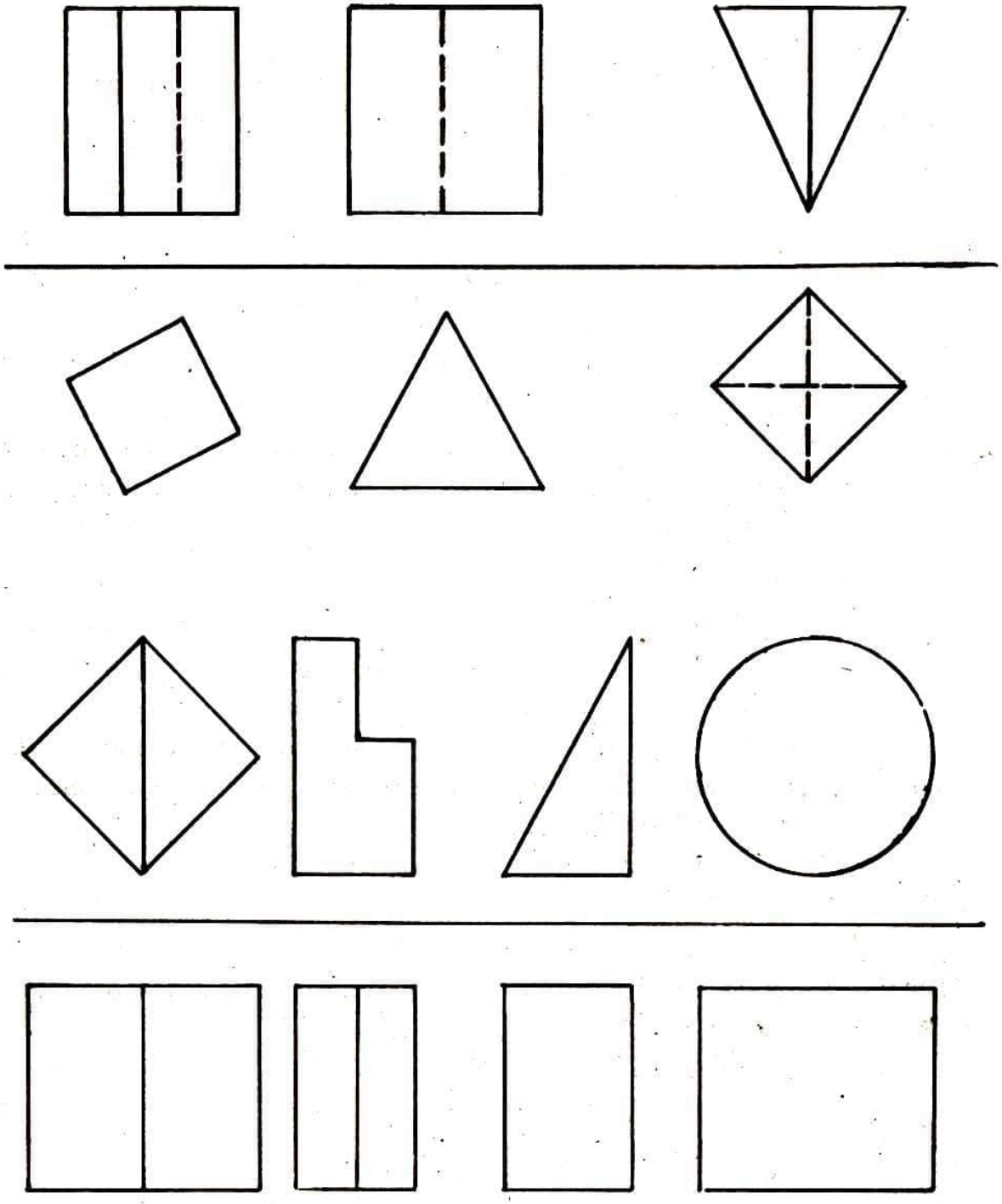
Skizziere die Bilder folgender Körper bei der senkrechten Zweitafelprojektion!

Art des Körpers	Quader	gerade Pyramide mit rechteckiger Grundfläche	regelmäßiges dreiseitiges gerades Prisma
Lage des Körpers zu den Bildebenen	-Die größten Seitenflächen liegen parallel zur Grundrißebene. -Die kleinsten Seitenflächen liegen parallel zur Aufrißebene.	-Die Grundfläche liegt parallel zur Grundrißebene. -Die Spitze der Pyramide liegt in der Grundrißebene. -Die größten Grundkanten liegen parallel zur Aufrißebene.	-Sechs Kanten des Prismas liegen parallel zur Aufrißebene. -Fünf Kanten liegen parallel zur Grundrißebene.

Als weiteres soll ein Beispiel zu solchen Aufgaben gegeben werden, bei deren selbständiger Bewältigung der Schüler zeichnerische Darstellungen in der Ebene lesen und räumlich deuten sowie sich der Sprache als Ausdrucksmittel seines räumlichen Denkens bedienen muß.

B e i s p i e l 2 :

Gegeben sind folgende Grund- und Aufrisse von Körpern:



a) Welcher Körper wird jeweils dargestellt?

b) Erläutere die Lage des Körpers, die er zu den einzelnen Bildebenen einnimmt!

c) Bezeichne in den einzelnen Darstellungen die Eckpunkte!

Die Zeichnung ist aber auch ein Hilfsmittel für das abstrakte räumliche Denken. Sie ermöglicht das Lösen relativ komplizierter räumlicher Probleme durch Skizzen oder durch Konstruktion in der Zeichenebene. Zu diesem Hilfsmittel wird gegriffen, wenn es gilt, das Raumvorstellungsvermögen zu unterstützen. Ist das Vorstellungsvermögen unzureichend entwickelt, wird oft sogar zum räumlich-gegenständlichen Arbeiten zurückgegangen, d. h. zur Herstellung oder Nutzung von Modellen und zur erforderlichen Manipulation an ihnen zur Lösung des geometrischen Problems.
Die Zeichnung kann ferner genau wie die sprachlich-begriffliche Darlegung zur Fixierung des durch Raumvorstellen gewonnenen Ergebnisses dienen, so daß sie als Mittel der Kontrolle beim Raumvorstellen genutzt werden kann.

Da das Ziel aller Bemühungen zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens darin besteht, sich geometrische Sachverhalte ohne Hilfsmittel vorzustellen und Schlußfolgerungen allein aus der Vorstellung heraus zu ziehen, ist es erforderlich, entsprechende Übungen durchzuführen. Die dafür vorgesehenen Aufgaben im folgenden Abschnitt sollten zunächst "im Kopf" gelöst werden. Erst wenn man mit der Aufgabe nicht zurechtkommt, sollte auf eine niedrigere Stufe der Lösungsanforderung zurückgegangen werden, d. h. zum Nutzen von Hilfsmitteln wie zeichnerische Darstellung oder gar räumliche Gestaltung. Für die Selbstkontrolle kann die "im Kopf" gefundene Lösung mittels der genannten Hilfsmittel überprüft werden.

4. Ebenflächig begrenzte Körper nennt man Polyeder. Bereits PLATON wußte, daß es nur fünf regelmäßige Polyeder gibt, bei denen die Begrenzungsflächen regelmäßige, untereinander kongruente n-Ecke sind. Zur Vorstellung der Körper sei angeführt:

regelmäßiger Polyeder	begrenzende Flächen	Anzahl der Flächen
Tetraeder	gleichseitige Dreiecke	4
Oktaeder	gleichseitige Dreiecke	8
Ikosaeder	gleichseitige Dreiecke	20
Hexaeder (Würfel)	Quadrate	6
Dodekaeder	regelmäßige Fünfecke	12

Aufgabe 1: Fülle folgende Tabelle aus!

regelmäßiger Polyeder	Anzahl der Ecken	Anzahl der Seitenflächen einer Ecke	Anzahl der Kanten
Tetraeder			
Oktaeder			
Ikosaeder			
Hexaeder (Würfel)			
Dodekaeder			

Aufgabe 2:

Von einem Tetraeder mit der Kantenlänge a sollen die "Spitzen" derart abgeschnitten werden, daß die Schnittebenen jeweils durch den Mittelpunkt der Kanten des Tetraeders gehen.

a) Was für ein Körper wird jeweils abgeschnitten?

b) Welche Gestalt hat der verbleibende Restkörper?

c) Welche Aussagen können über die Volumenverhältnisse der einzelnen Teilkörper zum vorgegebenen Tetraeder getroffen werden?

Aufgabe 3:

Ein Würfel wird von einer Ebene geschnitten. Kann die Schnittfigur

a) ein Dreieck c) ein Fünfeck e) ein Siebeneck
b) ein Viereck d) ein Sechseck f) ein Achteck

sein?

Unter welchen Bedingungen für die Lage der Schnittebene entstehen regelmäßige Vielecke mit maximalem Flächeninhalt?

Aufgabe 4:

Ein mit einem Farbanstrich versehener Würfel mit der Kantenlänge a = 3 cm (4 cm, 5 cm, ...) werde jeweils durch ebene

Schnitte in Kubikdezimeterwürfel zerlegt.

a) Wieviel Teilwürfel (Einheitswürfel) entstehen?

b) Gib an, wieviel dieser Einheitswürfel
keine, genau eine, genau zwei, genau drei, mehr als drei angestrichene Seiten haben!

c) Entwickle eine Formel zur Berechnung der einzelnen Anzahlen für die Kantenlänge a = n cm!

Aufgabe 5:

Bei einem aus 27 Einheitswürfeln zusammengesetzten Würfel sollen einzelne Seitenflächen mit einem Farbanstrich versehen werden.

a) Wieviel Seitenflächen in welcher Lage zueinander
(z. B. benachbart, gegenüberliegend, ...)
müssen angestrichen werden, damit kein (genau drei, genau sechs, genau acht, genau zwölf) Einheitswürfel über zwei angestrichene Seiten verfügen?

b) Gibt es mehrere Möglichkeiten bezogen auf Anzahl und Lage der zu streichenden Seitenflächen des zusammengesetzten Würfels, die den genannten Bedingungen genügen?

Aufgabe 6:

Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines regelmäßigen Polyeders sind gleichzeitig die Ecken eines eingebetteten regelmäßigen Polyeders.

a)

regelmäßiger Polyeder	eingebetteter Polyeder
Tetraeder	
Oktaeder	
Ikosaeder	
Hexaeder	
Dodekaeder	

b) Begründe!

Aufgabe 7:

Die einzelnen Seitenflächen eines regelmäßigen Polyeders sollen so eingefärbt werden, daß benachbarte Flächen verschiedene Farben erhalten.

Wieviel Farben sind unter diesen Bedingungen für den Tetraeder, den Oktaeder, den Ikosaeder, den Hexaeder und den Dodekaeder erforderlich?

Aufgabe 8:

Zur Herstellung von Kantenmodellen der einzelnen Polyederarten stehen Drähte gleicher Länge zur Verfügung. Die Drähte sollen dabei in voller Länge genutzt und nur zweimal gebogen werden. Außerdem dürfen die Lötstellen nur an den Ecken des betreffenden Körpers angebracht werden.

a) Wieviel Drähte sind für einen Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Hexaeder bzw. Dodekaeder erforderlich?

b) Wie sind die Drähte zu biegen und zu verlöten? (Gibt es mehrere Möglichkeiten?)

5. Davon ausgehend, daß der Mensch sich in einem "dreidimensionalen Raum" bewegt und sich darin zurechtfinden muß, wird das Raumvorstellungsvermögen des Menschen meistens auf den dreidimensionalen Raum bezogen. Aber der dreidimensionale Raum ist nur ein Sonderfall eines n-dimensionalen Raumes. Deshalb gehört zum Raumvorstellungsvermögen auch, daß man sich im zweidimensionalen Raum, der Ebene, und im eindimensionalen Raum, der Geraden, sicher auskennt.

Man benötigt aber das Raumvorstellungsvermögen nicht nur in der Planimetrie, der darstellenden Geometrie und der Stereometrie, sondern auch bei der Darstellung von Funktionen im Koordinatensystem, in der Vektorrechnung, bei vielen Anwendungsaufgaben in der Differentialrechnung (Extremwertaufgaben) und Integralrechnung (Rotationskörper).

Der Inhalt des Raumbegriffs erfährt durch die Verwendung von Koordinaten eine wesentliche Ergänzung, die in der Erweiterten Oberschule durch die Einführung eines räumlichen Koordinatensystems und die Einführung des Vektorraums mit der Möglichkeit der Verallgemeinerung auf n-dimensionale Räume zu einem gewissen Abschluß gebracht wird.

Auch analytisch-geometrische Betrachtungsweisen in der 12. Klasse und in weiterführenden Bildungseinrichtungen stehen mit Fragen der räumlichen Vorstellung im Zusammenhang.

Dr. R. Dörr
Sektion Mathematik FSU
Bereich Mathematikmethodik

Preisaufgaben

Q 13 ①

Man gebe alle reellen Zahlen x an, die der Gleichung $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$ genügen.

Q 14 ①

Es sei bekannt, daß $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$.
Man bestimme $\tan \frac{x}{2}$!

Q 15 ①

Es sind alle reellen Lösungen x von
$5^{1+x^3} - 5^{1-x^3} = 24$ gesucht.

Q 16 ①

Im Innern eines Winkels von 60° liege ein Punkt, der von den Schenkeln des Winkels einen Abstand von $\sqrt{7}$ LE bzw. $2.\sqrt{7}$ LE hat. Man bestimme den Abstand des Punktes vom Scheitelpunkt des Winkels.

Q 17 ②

Wenn die Länge der Winkelhalbierenden w_γ des Winkels $\sphericalangle ACB$ im Dreieck ABC gleich $|AC| . |BC| / (|AC| + |BC|)$ ist, so ist $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Man beweise diesen Satz

Q 18 ②

Объём прямой призмы, основаниемкоторой служит трапеция, равен произведению среднего арифметического между площадями паралеллных боковых граней на расстояние между ними. Доказать.

Lösungsbedingungen:
Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.
Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse, Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden. Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in der Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

Bemerkung:
Für richtige Lösungen der Aufgaben 2 bis 8 im ersten Beitrag dieses Heftes kann der Einsender jeweils einen Punkt bekommen.

Einsendeschluß: 1. 6. 1984

Eine amerikanische Journalistin fragte einmal Albert Einstein: "Welch ein Unterschied besteht zwischen der Zeit und der Ewigkeit?" "Mein Kind", antwortete Einstein gutmütig, "wenn ich die Zeit hätte, Ihnen diesen Unterschied zu erklären, würde eine Ewigkeit vergehen, bis Sie ihn verstehen würden."

Mathematische Methoden bei der Konvertersteuerung

Vor einigen Jahren wandte sich der VEB Maxhütte Unterwellenborn an die Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena mit dem Problem, statistische Auswertungen von Meßdaten vorzunehmen. Von diesem Zeitpunkt an entwickelte sich eine stabile Zusammenarbeit zwischen beiden Einrichtungen. Zwei Mitarbeiter der Sektion Mathematik beteiligen sich an den Forschungsprojekten der Abteilung Prozeßautomatisierung der Maxhütte. Dazu kommt die Mitarbeit von Studenten während des Industriepraktikums oder bei der Anfertigung ihrer Jahres- bzw. Diplomarbeiten.

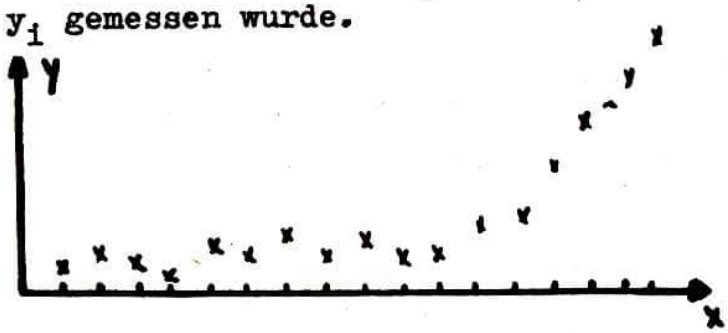
Das Forschungskollektiv der Abteilung Prozeßautomatisierung besteht aus Physikern, Mathematikern, Technologen und Ingenieuren. Sie bearbeiten in letzter Zeit u. a. folgendes Problem.

Das aus dem Hochofen kommende Roheisen wird in Konvertern zu Stahl weiterverarbeitet. Dabei werden unter extrem hohen Temperaturen durch Zugabe von Sauerstoff bestimmte Verunreinigungen des Roheisens oxidiert. Für die Qualität des Stahls ist es nun ausschlaggebend, daß gewisse Verunreinigungen unterhalb vorgegebener Grenzen liegen und daß am Ende des Blasprozesses die Temperatur bestimmte Werte nicht über- bzw. unterschreitet. Gesteuert werden diese Zielparameter u. a. durch gezielte Sauerstoffzufuhr, Kalk- und Kühlmittelzugaben. Diese müssen zu günstigen Zeitpunkten erfolgen, um einen kontinuierlichen Ablauf mit optimalem Energieverbrauch zu sichern. Nun kann man aber die hohen Temperaturen innerhalb des Konverters nicht kontinuierlich messen. Zudem wäre jede Messung mit einem hohen ökonomischen Aufwand verbunden, da für die Meßsonden hochwertiges Material verwendet werden muß. Außerdem hängen die Zielparameter noch von anderen Zuständen des Konverterprozesses, etwa der Durchmischung des Roheisens, der aufgenommenen Sauerstoffmenge usw. ab.

Man fand nun eine indirekte Möglichkeit der Informationsgewinnung über den Konverterprozeß. Sie besteht in der Analyse der Geräusche, genauer gesagt, der Schwingbeschleunigung, die an verschiedenen Stellen des Konvertermantels gemessen wird. In Abhängigkeit von der Zeit lassen sich dabei charakteristische

Kurvenverläufe erkennen. Die Technologen fanden heraus, daß z.B. für die letzte Kühlmittelzugabe der Zeitpunkt optimal ist, an dem die Meßdaten nach nahezu konstantem Verlauf einen deutlichen Anstieg erkennen lassen.

Gegeben ist also eine Folge von Paaren $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_N,y_N)$, bei denen die Komponente x_i den Zeitpunkt bezeichnet, zu dem der Wert y_i gemessen wurde.



Die Grundidee für die Bestimmung des gesuchten Zeitpunktes besteht darin, den Meßdaten, die nahezu konstant verlaufen, eine Gerade möglichst gut anzupassen und ebenso den ansteigenden Meßdaten. Die Abszisse des Schnittpunktes dieser beiden Geraden ist dann der gesuchte Punkt. Dabei stellt man sich vor, daß die Daten eigentlich solchen linearen Funktionen genügen, jedoch durch zufällige Meßfehler ungenau wiedergegeben wurden.

Man sucht also reelle Zahlen a,b und c,d sowie einen Zeitpunkt t_F derart, daß die gegebenen Punkte (x_i,y_i) für $x_i \leq t_F$ von der Geraden $y = ax + b$ bzw. für $x_i > t_F$ von der Geraden $y = cx + d$ möglichst wenig abweichen. Das versteht man hier in dem Sinn, daß die Summen der quadratischen Abweichungen

$$s(a,b,c,d,t_F) = \sum_{i=1}^{t_F} (y_i-ax_i-b)^2 + \sum_{i=t_F+1}^{N} (y_i-cx_i-d)^2$$

minimal werden.

Man betrachtet zunächst den Ausdruck

$$g(a,b,k) = \sum_{i=1}^{k} (y_i-ax_i-b)^2.$$

Setzt man

$$\bar{x}(k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$$

$$\bar{y}(k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_i$$

$$\sigma^2(k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2$$

sowie

$$\hat{a}(k) = \frac{1}{\sigma^2(k)}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x}(k))(y_i-\bar{y}(k))$$

$$\hat{b}(k) = \bar{y}(k) - \hat{a}(k)\bar{x}(k),$$

so erhält man wegen

$$g(a,b,k) = g(\hat{a}(k),\hat{b}(k),k) + \sum_{i=1}^{k}\left[(a-\hat{a}(k))x_i+(b-\hat{b}(k))\right]^2$$

stets

$$g(a,b,k) \geq g(\hat{a}(k),\hat{b}(k),k).$$

Somit nimmt $g(a,b,k)$ für $a = \hat{a}(k)$, $b = \hat{b}(k)$ seinen minimalen Wert an (vergleiche hierzu auch WURZEL 5/79, Einführung in die Methode der kleinsten Quadrate).

Behandelt man beide Summanden von $s(a,b,c,d,t_F)$ auf diese Art, so erhält man

$$\min_{a,b,c,d,t_F} s(a,b,c,d,t_F)$$

$$= \min_{t_F} \min_{a,b,c,d} s(a,b,c,d,t_F)$$

$$= \min_{t_F}\left(\min_{a,b}\sum_{i=1}^{t_F}(y_i-ax_i-b)^2 + \min_{c,d}\sum_{i=t_F+1}^{N}(y_i-cx_i-d)^2\right)$$

$$= \min_{t_F}\left(\sum_{i=1}^{t_F}(y_i-\hat{a}(t_F)x_i-\hat{b}(t_F))^2 + \sum_{i=t_F+1}^{N}(y_i-\hat{c}(t_F)x_i-\hat{d}(t_F))^2\right),$$

wobei $\hat{c}(t_F)$, $\hat{d}(t_F)$ analog zu bestimmen sind.

An dieser Stelle zeigt sich ein schwerwiegender Mangel dieses Verfahrens. Für die Bestimmung der Parameter $\hat{c}(t_F)$, $\hat{d}(t_F)$ braucht man nämlich alle Punkte (x_i,y_i), $i \geq t_F$. Man würde also diese Parameter erst nach Ablauf des "Anstiegsabschnittes" ermitteln können. Dann wäre aber der günstigste Zeitpunkt für die letzte Kühlmittelzugabe bestimmt schon lange überschritten. Daher entschließt man sich für folgende Modifizierung des Verfahrens. Man berechnet zu jedem Zeitpunkt k die approximierende Gerade für die unmittelbar vorhergehenden r Punkte $(x_{k-1},y_{k-1}),\ldots,(x_{k-r},y_{k-r})$, d. h. die Parameter $\hat{a}(k)$ und $\hat{b}(k)$

Der Ausdruck

Konvertersteuerung

$$V^2(k) = \frac{1}{r} \sum_{i=k-r}^{k-1} (y_i - a(k)x_i - b(k))^2$$

ist dann ein Maß für die mittlere quadratische Abweichung der Punkte von dieser Geraden. Mit Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man begründen, daß im Durchschnitt etwa 99 % der Punkte um weniger als 3V von den durch die Gerade ermittelten Punkten abweichen. Somit entscheidet man, daß zum Zeitpunkt x_k der Fußpunkt vorliegt, wenn die Punkte $(x_k, y_k), \ldots, (x_{k+3}, y_{k+3})$ von den aus der Geraden durch $(x_{k-1}, y_{k-1}), \ldots, (x_{k-r}, y_{k-r})$ berechneten Punkte um mehr als 3V nach oben abweichen, d. h. wenn $y_m > \hat{a}(k)x_m + \hat{b}(k) + 3V(k)$, $k \leq m \leq k+3$, gilt.

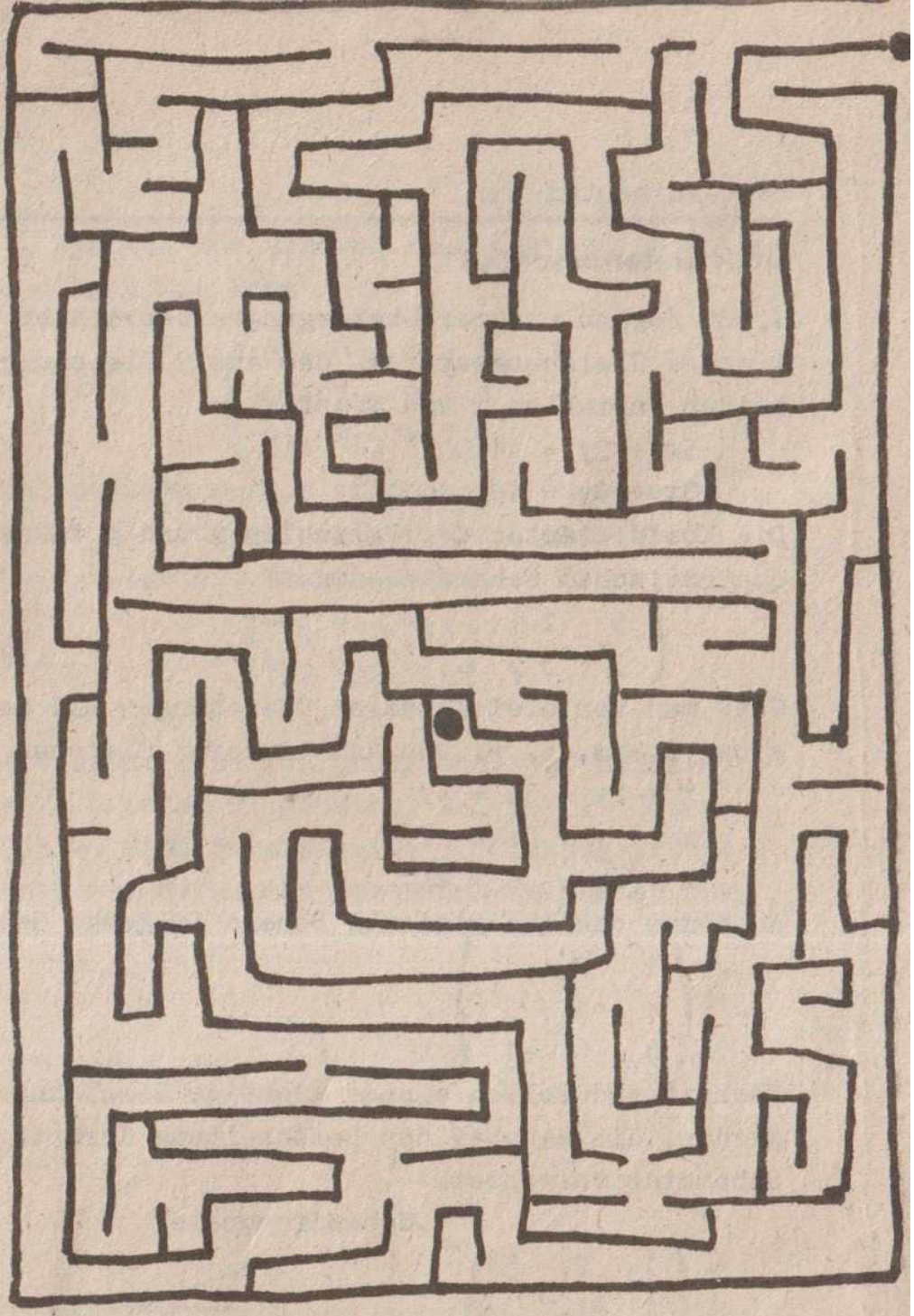
Dr. J. Schütze

FSU Jena, Sektion Mathematik

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung
Leiter: Burkhard Götz
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimmler, R. Heinrich, S. Kratochwil, M. Röppnack, K. Tauscher

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-122-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 4. 2. 1984



4

84

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
ISSN 0232-4539
18. Jahrgang
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Uber Determinanten

1. Zu Beginn unserer Überlegungen betrachten wir das folgende lineare Gleichungssystem, das aus 2 Gleichungen besteht und die beiden Variablen x und y enthält:

$$5x + 2y = 16$$
$$3x + 3y = 15$$

Die Koeffizienten der Variablen x und y fassen wir zu einem quadratischen Schema zusammen:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

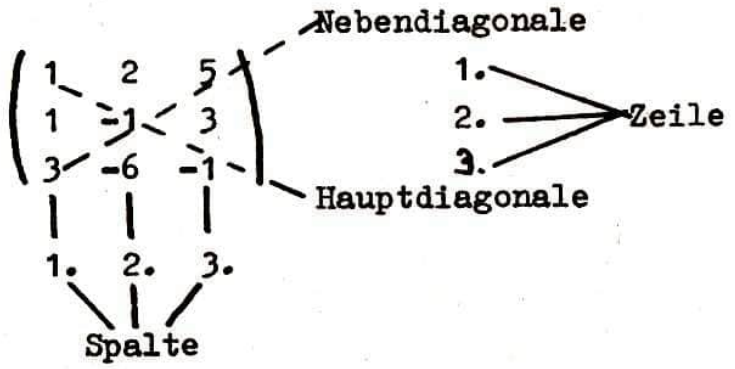
Geht man von drei linearen Gleichungen mit den 3 Variablen x, y und z aus, z. B. von dem linearen Gleichungssystem

$$x + 2y + 5z = -9$$
$$x - y + 3z = 2$$
$$3x - 6y - z = 25;$$

so nimmt das quadratische Schema folgende Gestalt an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Nachstehend sollen einige wichtige Bezeichnungen eingeführt werden, die man bei der Beschreibung derartiger quadratischer Schematas verwendet.



Jede Zahl steht in genau einer Zeile und in genau einer Spalte. Die Zahl -6 z. B. steht in der 3. Zeile und in der 2. Spalte. Künftig wollen wir die einzelnen Zahlen des quadratischen Schemas Elemente nennen und mit a_{ik} bezeichnen. Dabei soll der erste Index i die Zeile angeben, in der das betreffende Element steht. Aus dem zweiten Index k können wir die Spalte ablesen, der das Element angehört. So steht das Element a_{13} z. B. in der

1. Zeile und in der 3. Spalte. Aus unseren konkreten Beispielen ergibt sich somit die allgemeine Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Jedem quadratischen Schema kann man in eindeutiger Weise eine reelle Zahl zuordnen, die als Determinante D bezeichnet wird. Wir kennzeichnen sie wie allgemein üblich durch die Schreibweise

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{bzw.} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Die 1. Determinante hat genau 2 Zeilen und 2 Spalten. Deshalb wird sie Determinante 2. Ordnung D^2 genannt. Bei der 2. Determinante handelt es sich um eine Determinante 3. Ordnung D^3. Den Zahlenwert berechnet man durch die Anwendung folgender Definitionen:

<u>Definition 1:</u>

$$D^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

<u>Beispiel 1:</u>

$$D^2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 9$$

<u>Definition 2:</u>

$$D^3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

<u>Beispiel 2:</u>

$$D^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot (-6) \\ &- 5 \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot (-6) - 2 \cdot 1 \cdot (-1) \\ &= 1 + 18 - 30 + 15 + 18 + 2 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Die Definition 1 läßt sich leicht einprägen: Man berechnet den Wert einer Determinante 2. Ordnung, indem man vom Produkt aus

den beiden Elementen der Hauptdiagonalen das Produkt aus den beiden Elementen der Nebendiagonalen subtrahiert. Aus der Definition 2 geht hervor, daß eine aus 6 Summanden bestehende Summe zu berechnen ist. Dabei ist jeder Summand ein aus drei Faktoren bestehendes Produkt und in jedem Produkt ist aus jeder Zeile und aus jeder Spalte genau 1 Element vorhanden. Die Definition der Determinante 3. Ordnung kann man sich mit Hilfe einer "Eselsbrücke", die nach dem Mathematiker Sarrus als Sarrussche Regel bezeichnet wird, wie folgt leicht einprägen: Man schreibe rechts neben die Determinante nochmals die 1. und die 2. Spalte. Dann bilde man die 3 Produkte aus den gestrichelt miteinander verbundenen Elementen. Diese Produkte werden mit einem positiven Vorzeichen versehen. Anschließend bilde man die 3 Produkte aus den durch Punkte miteinander verbundenen Elementen. Die letztgenannten Produkte erhalten ein negatives Vorzeichen.

$$D^3 = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

<u>Beispiel 3:</u>

$$D^3 = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}\right| \begin{array}{l} = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 \\ = 0 \end{array}$$

Die Determinanten der Beispiele 1 und 2 bezeichnet man als Koeffizientendeterminanten, weil ihre Elemente die Koeffizienten der eingangs angeführten linearen Gleichungssysteme sind. Selbstverständlich werden in der Mathematik auch Determinanten höherer Ordnung untersucht. Der allgemeine Fall wäre die aus n Zeilen und n Spalten bestehende Determinante n-ter Ordnung, wobei n eine beliebige natürliche Zahl sein kann.

Für n = 4 erhielte man

$$D^4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß die Elemente einer Determinante

nicht notwendig reelle Zahlen sein müssen. Darauf deutet schon die Bezeichnung "Element" hin. Insofern bedeutet unsere Annahme eine Einschränkung des Determinantenbegriffes. In der Mathematik spielen z. B. auch Determinanten eine große Rolle, bei denen als Elemente Funktionen auftreten. Man spricht dann von Funktionaldeterminanten.
In diesem Fall trifft die Definition der Determinante als reelle Zahl nicht mehr zu.

2. Der aufmerksame Leser wird sich die Frage vorlegen, wozu man Determinanten überhaupt benötigt. Deshalb wollen wir aus der Vielzahl der Anwendungsgebiete zunächst das Lösen linearer Gleichungssysteme mit mehreren Variablen genauer untersuchen. Bei 2 Variablen und 2 Gleichungen hat ein derartiges System die allgemeine Gestalt

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,$$

wobei die Variablen nicht wie in der Schule üblich mit x und y, sondern mit x_1 und x_2 bezeichnet werden. Multipliziert man die 1. Gleichung mit a_{22}, die 2. Gleichung mit a_{12} und subtrahiert die 2. Gleichung von der 1., so ergibt sich:

$$a_{11}a_{22}x_1 - a_{12}a_{21}x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$
$$x_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$
$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} .$$

Ganz analog erhält man:

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} .$$

Es läßt sich leicht überprüfen, daß der gemeinsame Nenner $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ nichts anderes ist als der Wert der Koeffizientendeterminante

$$D^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

Ersetzt man in dieser Determinante die 1. Spalte durch die Absolutglieder b_1 und b_2 des Gleichungssystems, so ist der Wert

der auf diese Weise entstehenden Determinante

$$D_1^2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

der Zähler des für x_1 errechneten Bruches.
Wenn man dagegen die 2. Spalte durch die Absolutglieder b_1 und b_2 ersetzt, erhält man wegen

$$D_2^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

den Zähler des anderen Bruches. Folglich gilt für die Lösung unseres Systems von 2 linearen Gleichungen mit den beiden Variablen x_1 und x_2:

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1^2}{D^2} \qquad x_2 = \frac{D_2^2}{D^2}}$$

Liegen 3 lineare Gleichungen mit den Variablen x_1, x_2 und x_3 in der allgemeinen Gestalt

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

vor, so findet man durch etwas umständlichere Rechnungen die folgende "elegante" Darstellung der Lösung:

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1^3}{D^3}} \qquad \boxed{x_2 = \frac{D_2^3}{D^3}} \qquad \boxed{x_3 = \frac{D_3^3}{D^3}}$$

Dabei bedeuten D_1^3, D_2^3 und D_3^3, daß in der Koeffizientendeterminante

$$D^3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

jeweils die 1. bzw. 2. bzw. 3. Spalte durch die Absolutglieder des Gleichungssystems zu ersetzen ist. Diese Gesetzmäßigkeit, die nach dem Mathematiker Cramer als Cramersche Regel bekannt ist, gilt für beliebige natürliche Zahlen n, d. h.:
Hat man ein System von n linearen Gleichungen mit n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Gestalt

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n ,$$

so ist $\boxed{x_i = \frac{D_i^n}{D^n}}$ $(1 \leqq i \leqq n,\ i \in N)$.

D^n ist das Symbol für die Koeffizientendeterminante n-ter Ordnung, D_i^n bedeutet, daß in D^n die i-te Spalte durch die Absolutglieder des gegebenen Gleichungssystems ersetzt werden muß.
Der kritische Leser wird sicher längst erkannt haben, daß die Cramersche Regel nur angewendet werden kann, wenn die Koeffizientendeterminante des zu lösenden linearen Gleichungssystems ungleich Null ist. In diesem Fall gibt es genau eine Lösung.
Tritt speziell der Fall ein, daß alle Absolutglieder b_k $(1 \leqq k \leqq n,\ k \in N)$ Null sind, so ist diese eindeutig bestimmte Lösung die sogenannte triviale Lösung, d. h. für alle natürlichen Zahlen i mit $1 \leqq i \leqq n$ gilt:
$x_i = 0$.

<u>Aufgabe 1:</u>
Lösen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel das Gleichungssystem

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7!$$

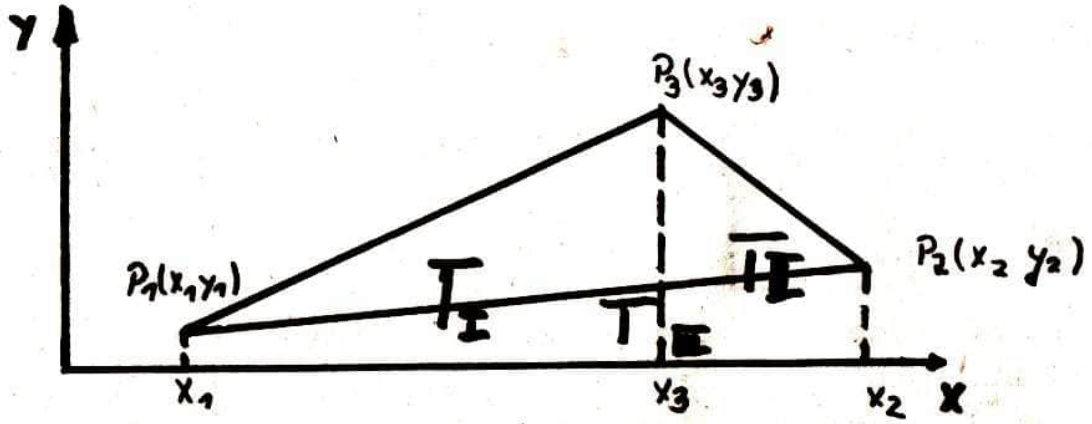
(Lösung: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$)

3. Ein Beispiel für die Anwendung von Determinanten in der Geometrie ist der folgende
<u>S a t z :</u> Sind $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ und $P_3(x_3,y_3)$ die Eckpunkte eines Dreiecks, so gilt für seine Fläche A:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

<u>Beweis.</u> Bezeichnet man mit A_I, A_{II} und A_{III} die Flächen der in der Skizze veranschaulichten 3 Trapeze T_I, T_{II} und T_{III}, so

erhält man durch einfache Rechnung:



$$
\begin{aligned}
2A &= 2(A_I + A_{II} - A_{III}) \\
&= (x_3-x_1)(y_1+y_3) + (x_2-x_3)(y_3+y_2) - (x_2-x_1)(y_1+y_2) \\
&= x_3y_1 + x_3y_3 - x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_3y_2 \\
&\qquad - x_2y_1 - x_2y_2 + x_1y_1 + x_1y_2 \\
&= x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

<u>Aufgabe 2:</u>

Welcher geometrische Sachverhalt liegt vor, wenn diese Determinante 3. Ordnung

a) den Wert Null hat,

b) negativ ist?

Fortsetzung folgt

Prof. Dr. G. Schlosser, FSU Jena

Preisaufgaben

Q 19 Aus den folgenden Gleichungen sind m und n zu eliminieren!

$$
\begin{aligned}
a &= m + n \\
b^3 &= m^3+n^3 \\
c^5 &= m^5+n^5
\end{aligned}
$$

Q 20 Man beweise die Identität

2

$$p^3 = \left(p \cdot \frac{p^3-2q^3}{p^3+q^3}\right)^3 + \left(q \cdot \frac{2p^3-q^3}{p^3+q^3}\right)^3 + q^3.$$

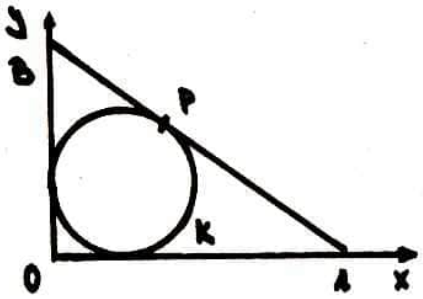
Q 21 Es sind alle reellen Lösungen von

1

$\log_4\log_2 x + \log_2\log_4 x = 2$ gesucht!

Q 22 Gegeben sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem, ein Kreis K, der beide Achsen berührt und eine Gerade g, die K in P berührt und die beiden Achsen in den Punkten A und B schneidet, wobei A und B jeweils auf den positiven Halbachsen liegen (siehe Skizze). Für den Fall, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle$ OAB gleich dem $6/\pi$ -fachen des Flächeninhalts des Kreises K ist, bestimme man die Verhältnisse von $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ zum Radius des Kreises und von $\overline{BP} : \overline{AP}$.

1



Q 23 Man löse die Gleichung

1

$$\sum_{i=1}^{20} (x^2+ix+2i-1) = 4500$$

Q 24 К цифровой записи некоторого задуманного положительного числа приписали справа ещё какое-то положительное однозначное число. Из получившегося таким образом нового числа вычли квадрат задуманного числа. Эта разность оказалась больше задуманного числа во столько раз, сколько составляет дополнение приписанного числа до одиннадцати. Требуется доказать, что так будет получаться тогда и только тогда, когда приписанное число равно задуманному.

2

Einsendeschluß: 7. 7. 1984

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker (Bezirksolympiade – Klassen 11/12)

1) In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Seite AB. Eine Gerade durch M verlaufe so, daß sie AC in einem Punkt D und die Verlängerung von BC über C hinaus in einem Punkt E schneidet und daß dabei die Dreiecke AMD und CED den gleichen Flächeninhalt haben.
Beweisen Sie, daß durch diese Voraussetzungen das Verhältnis $\overline{AD} : \overline{DC}$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie dieses Verhältnis!

2) Die Kantenlängen eines beliebigen Quaders seien a, b, c, und die Länge seiner Raumdiagonale sei d.
Man beweise, daß dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 \geqq abcd \cdot \sqrt{3} \quad . \qquad (1)$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Quader, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

3A) Man untersuche, ob es eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$
a) von positiven rationalen Zahlen a_i,
b) von positiven ganzen Zahlen a_i
mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) gibt:
(1) Nicht alle Glieder der Folge sind einander gleich.
(2) Für alle $n \geqq 2$ gilt

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right);$$

d. h., a_n ist das harmonische Mittel von a_{n-1} und a_{n+1}.
Falls eine solche Folge im Falle a) bzw. im Falle b) existiert, so sind ihre Glieder anzugeben. Falls sie nicht existiert, so ist das zu beweisen.

3B) Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
20 Karten, von denen jede mit genau einer der Zahlen 1,2,3,...,20 beschriftet ist (wobei jede dieser Zahlen vorkommt), liegen aufgedeckt, so daß die Zahlen zu sehen sind, auf dem Tisch. Von diesen Karten hat A in Gedanken

zwei ausgewählt, ohne daß B weiß, um welche Karten es sich handelt.

B versucht nun, diese beiden Karten wie folgt zu ermitteln: Als ersten "Zug" nimmt B zwei beliebig von ihm gewählte Karten, und A sagt ihm, wieviele von diesen beiden Karten richtig sind (0, 1 oder 2 Karten). Dann legt B diese Karten wieder aufgedeckt zurück.

Waren es noch nicht die beiden richtigen Karten, so nimmt B beim zweiten Zug wieder zwei beliebig von ihm gewählte Karten, und A sagt ihm, wieviele davon richtig sind; B legt dann diese Karten wieder zurück. Dieses Verfahren wird so lange mit dem 3., 4., ... Zug fortgesetzt, bis B in einem dieser Züge die beiden richtigen Karten genommen hat. B hat gewonnen, wenn er spätestens mit dem 12. Zug die beiden richtigen Karten nimmt.

Bei einer Durchführung dieses Spiels beginnt B das Spiel mit der folgenden Strategie: Er nimmt

im 1. Zug die Karten 1, 2 und, falls dies noch nicht die beiden richtigen Karten sind,

im 2. Zug die Karten 3, 4 sowie, in entsprechender Weise fortgesetzt,

.....

falls in keinem der bisherigen Züge die beiden richtigen Karten (gleichzeitig in ein und demselben Zug) vorkamen,

im 9. Zug die Karten (17,18).

a) Man gebe zu dieser von B begonnenen Strategie eine Fortsetzungsstrategie für die weiteren Züge an, mit deren Hilfe B den Gewinn erzwingen kann.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß B bei der angegebenen Strategie sogar spätestens mit dem 11. Zug die beiden richtigen Karten nimmt?

4) Man ermittle alle diejenigen Paare (x,y) reeller Zahlen mit

$$0 \leqq x < 2$$

und

$$0 \leqq y < 2 \quad ,$$

die das Gleichungssystem

$$3 \cdot \sin x \cdot \cos y = \cos x \cdot \sin y \qquad (1)$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 \qquad (2)$$

erfüllen.

5) Man ermittle alle Paare (a,b) von Primzahlen a und b, für die $3a^2 + a = b^2 + b$ gilt.

6) Es sei $\sphericalangle P_0SQ$ ein Winkel von beliebig, aber fest vorgegebener Größe $\alpha < 180^\circ$. Ein vom Punkt P_0 ausgehender, ins Innere des Winkels gerichteter Lichtstrahl werde jedesmal, wenn er auf einen Schenkel des Winkels trifft, nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen. Die Punkte, in denen der Lichtstrahl dabei auf die Schenkel des Winkels trifft, seien fortlaufend mit $P_1, P_2, P_3, \ldots$ bezeichnet (soweit solche Punkte existieren). Die Größe des Winkels, den zu Beginn der von P_0 ausgehende Lichtstrahl mit der von P_0 nach S führenden Halbgeraden bildet, sei φ_0 genannt ($0^\circ < \varphi_0 < 180^\circ$). Beim Experimentieren mit derartigen Winkelspiegeln kann man fragen, ob es zu gegebenem φ_0 endlich oder unendlich viele Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ gibt, ob es zu jedem φ_0 unter den Punkten $P_1, P_2, P_3, \ldots$ einen Punkt P_k derart gibt, daß $\overline{SP_k} \leqq \overline{SP_i}$ für alle $i=1,2,3,\ldots$ gilt und durch wieviele Möglichkeiten der Richtungswahl φ_0 es (je nach der Vorgabe von α) erreichbar ist, daß der Lichtstrahl eine auf seinem Weg dem Punkt S nächstgelegene Teilstrecke $P_{m-1}P_m$ mit der Eigenschaft $\overline{SP_{m-1}} = \overline{SP_m}$ durchläuft, so daß also das Wegstrück $P_0 \ldots P_{m-1}$ symmetrisch liegt zum Wegstück $P_m \ldots P_{2m-1}$ bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle P_0SQ$. Diese Frage wird durch folgende Teilaufgaben genauer erfaßt:

I. Man beweise die folgenden Aussagen (A) und (B) bei beliebig, aber fest vorgegebenem α:

(A) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl n so, daß Punkte $P_0, P_1, \ldots, P_n$ existieren, während der von P_n ausgehende Lichtstrahl nicht mehr den anderen Schenkel des Winkels $\sphericalangle P_0SQ$ erreicht.

(B) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl $m \geqq 1$ so, daß $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ existieren und (falls $m \geqq 2$ ist) für $k=1,\ldots,m-1$ die Ungleichung $\overline{SP_k} < \overline{SP_{k-1}}$ er-

füllen, daß dagegen entweder kein Punkt P_m mehr existiert oder $\overline{SP_m} \geq \overline{SP_{m-1}}$ sowie (falls $m < n$ ist) für $k=m+1,\ldots,n$ sogar $\overline{SP_k} > \overline{SP_{k-1}}$ gilt.

II. Man ermittle alle diejenigen am Anfang vorzugebenden Werte α, zu denen es
(C) genau einen,
(D) genau zwei,
(E) genau N
Werte γ_0 mit der Eigenschaft gibt, daß für die in (B) gefundene Zahl m (ein Punkt P_m existiert und) die Gleichung $\overline{SP_m} = \overline{SP_{m-1}}$ gilt. In (E) sei dabei $N > 2$ eine gegebene natürliche Zahl.

Lösungen

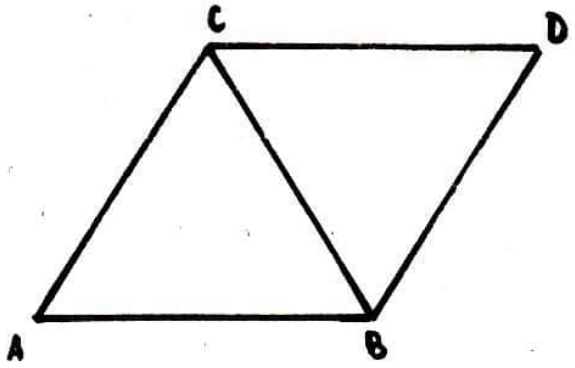


Abb. zu P 38

P 37

$$\begin{aligned} 7+7^2+\ldots+7^{4k} &= 7(1+7+7^2+7^3)+7^5(1+7+7^2+7^3)+\ldots \\ &\quad + 7^{4k-3}(1+7+7^2+7^3) \\ &= (1+7+7^2+7^3)\cdot\sum_{i=1}^{k} 7^{4i-3} \\ &= 400 \cdot z \end{aligned}$$

$400 \mid 7+7^2+\ldots+7^{4k}$ qed.

P 38 Die geforderten Bedingungen erfüllt eine Figur, die durch zwei gleiche Dreiecke Δ ABC und Δ BCD mit der gemeinsamen Seite $\overline{BC}$ gebildet wird (siehe Skizze), wobei $|\overline{AC}| = |\overline{BD}| = 10$ cm, $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = 8$ cm und $|\overline{BC}| = 5$ cm.

P 49 a) $q=0 \longrightarrow s_n=n+1, \quad s_n=n+1.$

$\longrightarrow$ (*) hat die Form

$$\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2}\cdot 2+\ldots+\binom{n+1}{n+1}(n+1) = 2^n(n+1).$$

Es gilt

$$k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1}$$

$$k\binom{n+1}{k} = \frac{k(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = (n+1)\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} =$$

$$= (n+1)\binom{n}{k-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i\binom{n+1}{i} = \sum_{i=1}^{n+1}(n+1)\binom{n}{i-1} = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n(n+1)$$

qed.

b) $q \neq 1 \longrightarrow 1-q = 2(1-\frac{1+q}{2}).$

Ferner

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow (1-q)S_n = 1-q^{n+1}$$

und analog

$$\left[1-\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]S_n = 1-\left(\frac{1+q}{2}\right)^{n+1}$$

Multipliziert man (*) mit $(1-q)$ und trägt diese Identitäten ein, so folgt:

$$\binom{n+1}{1}(1-q)+\binom{n+1}{2}(1-q^2)+\ldots+\binom{n+1}{n+1}(1-q^{n+1}) =$$

$$= 2^{n+1}\left(1-\left(\frac{1+q}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$= 2^{n+1} - (1+q)^{n+1}.$$

Diese linke Seite formen wir weiter um:

$$\binom{n+1}{1}(1-q)+\ldots+\binom{n+1}{n+1}(1-q^{n+1}) =$$

$$= \binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\ldots+\binom{n+1}{n+1} - \binom{n+1}{1}q+\ldots+\binom{n+1}{n+1}q^{n+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i} - \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}q^i$$

$$= \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{0} q^0 - \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} q^i$$

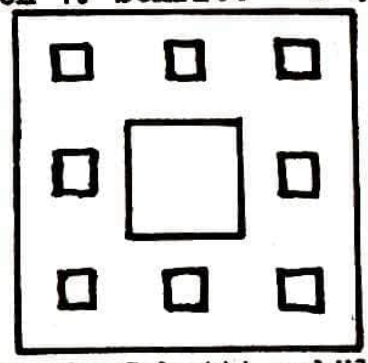
$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} q^i = 2^{n+1} - (1+q)^{n+1}$$

Das ist aber gerade die Behauptung. (Binomische Formel)

P 50 $(n!)^2 = (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)^2$
$= (1 \cdot n)(2(n-1))(3(n-2)) \ldots ((n-1)2)n \cdot 1$

Nun ist aber $(k+1)(n-k) = k(n-k)+(n-k) > k \cdot 1+n-k = n$, woraus folgt, daß $(n!)^2 > n^n$.

P 51 a) Nach 1. Schritt 8 Quadrate



Beim 2. Schritt erhält man in jedem dieser 8 Quadrate aufs neue 8 Quadrate. Das sind 8^2 Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{9}$. usf. nach n Schritten bleiben 8^n Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{3^n}$.

b) Der Flächeninhalt nach n Schritten ist offenbar

$$8^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^n \longrightarrow 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty .$$

P 52 Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden nat. Zahlen n, n+1, n+2, n+3 kann man wie folgt darstellen:

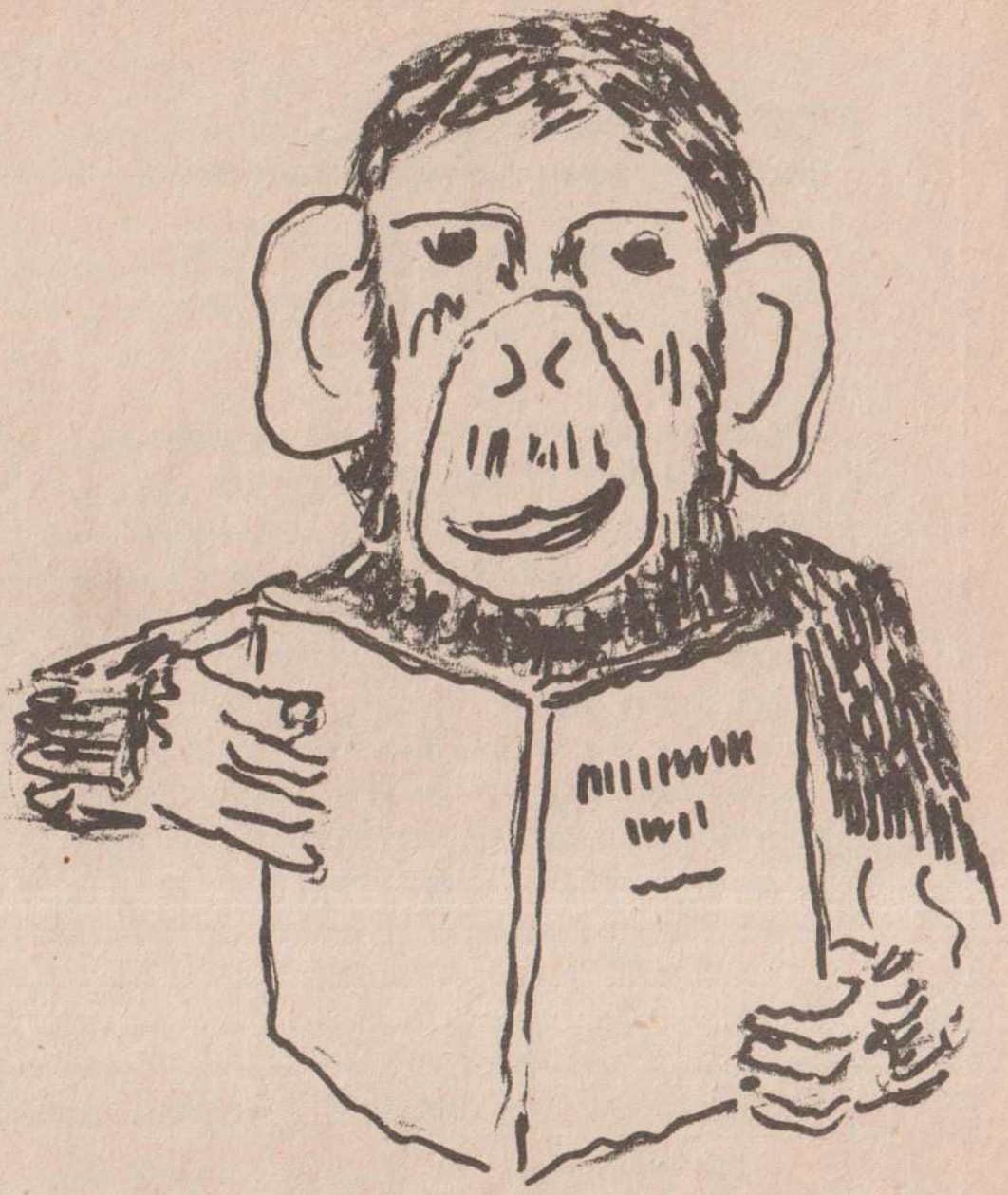
$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)$$
$$= (n^2+3n+1)^2-1.$$

Also liegt das Produkt zwischen den Quadraten der Zahlen n^2+3n und n^2+3n+1 und kann demzufolge selbst kein Quadrat sein.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Burkhard Götz
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimmler, R. Heinrich, S. Kratochwil, M. Röppnack, K. Tauscher

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-422-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 7. 3. 1984



5

84

WURZEL

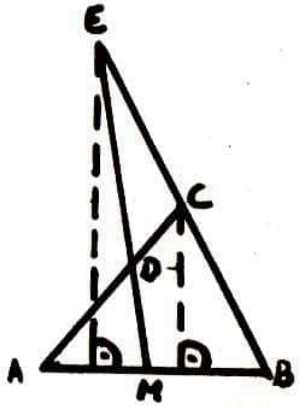
zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
ISSN 0232-4539
18. Jahrgang
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR 3. Stufe

1) Aus der Voraussetzung für die Flächeninhalte der Dreiecke AMD und CED folgt durch Addition des Flächeninhalts des Vierecks MBCD zu diesen Dreiecksflächeninhalten, daß die Dreiecke ABC und MBE gleichen Flächeninhalt haben. Wegen $\overline{AB} = 2\,\overline{MB}$ hat folglich C halb so großen Abstand von AB wie E. Nach dem Strahlensatz (angewandt auf die Geraden durch B und A bzw. durch B und E sowie die zueinander parallelen Lote von E, C auf AB) folgt $\overline{BC} = \frac{1}{2}\,\overline{BE}$. Also sind AC und EM Seitenhalbierende im Dreieck ABE, und für ihren Schnittpunkt D folgt

$$\overline{AD} : \overline{DC} = 2 : 1.$$



2) Da a, b, c und $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ positive Zahlen sind, ist die zu beweisende Ungleichung (1) gezeigt, wenn man

$$(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)^2 \geqq 3a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2) \qquad (2)$$

bewiesen hat. Hierfür genügt es,

$$a^4b^4+b^4c^4+a^4c^4-a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2) \geqq 0 \qquad (3)$$

zu zeigen, und diese Ungleichung gilt, da sie sich aus der wahren Ungleichung

$$(a^2b^2-a^2c^2)^2 + (a^2b^2-b^2c^2)^2 + (a^2c^2-b^2c^2)^2 \geqq 0 \quad (4)$$

ergibt.

Die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (1) ist der Reihe nach äquivalent mit der Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (2), (3), (4), diese mit $a^2b^2 = a^2c^2 = b^2c^2$, was wegen $a,b,c > 0$ genau für $a = b = c$ gilt.

Also gilt das Gleichheitszeichen in (1) genau dann, wenn der Quader ein Würfel ist.

3A) Eine Folge positiver rationaler Zahlen a_i erfüllt genau dann (1) und (2), wenn die Folge der Zahlen $b_i = \frac{1}{a_i}$ eine arithmetische Folge positiver rationaler Zahlen mit einer von 0 verschiedenen Differenz ist. (Hierzu ist entweder als bekannter Satz zu zitieren, daß eine Folge genau dann arithmetische Folge ist, wenn für alle $n = 2$ das n-te Glied b_n das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(b_{n-1}+b_{n+1})$ seiner Nachbarglieder ist. Oder dis ist z. B. so zu beweisen: Die Folge ist genau dann arithmetische Folge, wenn für jedes $n = 2$ die Differenz b_n-b_{n-1} gleich der Differenz $b_{n-1}-b_n$ ist. Diese Gleichheit $b_n-b_{n-1} = b_{n+1}-b_n$ ist äquivalent mit $b_n = \frac{1}{2}(b_{n-1}+b_{n+1})$.)

Aus dieser Feststellung ergibt sich:

a) Da es arithmetische Folgen positiver rationaler Zahlen b_i mit einer von 0 verschiedenen Differenz gibt, z. B. $b_n = n$ $(n=1,2,3,\ldots)$, gibt es auch Folgen positiver rationaler Zahlen a_i mit den Eigenschaften (1) und (2), z. B. $a_n = \frac{1}{n}$.

b) Gäbe es eine arithmetische Folge von Zahlen $b_i = \frac{1}{a_i}$ mit von 0 verschiedener Differenz d, für die alle a_i positive ganze Zahlen wären, so folgte $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)d$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

Im Fall $d > 0$ ergäbe sich: Für alle $n > 1 + \frac{1}{d}(1-\frac{1}{a_1})$ wäre $(n-1)d > 1 - \frac{1}{a_1}$, also $\frac{1}{a_n} > 1$, was für positive ganze Zahlen a_n nicht möglich ist.

Im Fall $d < 0$ ergäbe sich: Für alle $n > 1 - \frac{1}{d \cdot a_1}$ wäre $(n-1)d < -\frac{1}{a_1}$, also $\frac{1}{a_n} < 0$, was ebenfalls für positive (ganze) Zahlen a_n nicht möglich ist.

Also gibt es keine Folge positiver ganzer Zahlen a_i mit den Eigenschaften (1) und (2).

<u>Andere Lösungsmöglichkeiten:</u>

Man kann aus (2) durch vollständige Induktion

$$a_{n+1} = \frac{a_1 a_2}{n(a_1-a_2)+a_2} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

erhalten und damit zu a) durch geeignete Wahl von a_1 und a_2

Beispiele erhalten (z. B. führt $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{2}$ auf $a_n=\frac{1}{n}$) sowie wegen a_1, a_2, $a_{n+1} > 0$ auf

$$a_1 > (1-\frac{1}{n})a_2$$

schließen. Da dies für alle n gilt, folgt $a_1 \geqq a_2$ und dann wegen (1) sogar $a_1 > a_2$. Damit ergibt sich die Folge der a_{n+1} als streng monoton fallend, was mit positiven ganzen Zahlen unmöglich ist.

Ähnlich kann man auch im 1. Lösungsweg Aufgabe b) anschließend an die Formel $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)d$ ohne weitere Rechnung mit den verbalen Feststellungen abschließen, daß $d > 0$ auf eine streng monoton steigende Folge der $\frac{1}{a_n}$, also eine streng monoton fallende Folge der a_n führen müßte und $d < 0$ für genügend großes n auf negative a_n.

3B) a) Es sind genau die beiden folgenden Fälle möglich:

1. Fall: Unter den Paaren[1] (1,2),(3,4),...,(19,20) befindet sich das richtige Paar.

In diesem Fall hat B entweder nach höchstens 9 Zügen das Paar mit den richtigen Karten genommen, oder er kann aus den Antworten "Null" auf die ersten 9 Züge erkennen, daß (19,20) das richtige Paar ist. Er nimmt es mit dem 10. Zug und hat damit den Gewinn erzielt.

2. Fall: Unter den Paaren (1,2), (3,4),...,(19,20) befinden sich genau zwei Paare, in denen jeweils eine Karte richtig ist.

In diesem Fall weiß B (spätestens) nach dem 9. Zug, welche Paare dies sind.[2] Es seien die Paare (a_1,a_2) und (a_3,a_4)

---

1) Als "Paar" wird hier eine Menge (z_1,z_2) aus zwei Elementen verstanden, also nicht ein geordnetes Paar; d. h., es erfolgt keine Festlegung, welches der Elemente z_1,z_2 "erstes" oder "zweites" Element sei, es gilt $(z_1,z_2) = (z_2,z_1)$.

2) Laut Aufgabenstellung führt B die bis zum 9. Zug festgelegte Strategie des Nehmens von (1,2),(3,4),...,(17,18) im Fall 2 auch dann durch, wenn er die genannten beiden Paare schon eher kennt, obwohl diese Strategie dann unnötig viele Züge bedingt. Diese Festlegung geht wesentlich in Aufgabe b) ein.

(etwa mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$). Dabei sind genau die in der folgenden Tabelle angegebenen vier Fälle möglich (die Angabe W unter a_i bedeutet, daß a_i eine der richtigen Karten ist; die Angabe F, daß a_i keine der richtigen Karten ist):

Fall	a_1	a_2	a_3	a_4
2.1.	W	F	W	F
2.2.	W	F	F	W
2.3.	F	W	W	F
2.4.	F	W	F	W

Jetzt nimmt B im 10. Zug die Karten (a_1, a_3).
Im Fall 2.1. hat er damit die richtigen Karten genommen und das Spiel gewonnen.
Im Fall 2.4. erfährt er mit der Antwort "Null" auf den 10. Zug, daß (a_2, a_4) das richtige Paar ist. Er nimmt es mit dem 11. Zug und gewinnt damit.
In den Fällen 2.2. und 2.3., die durch die Antwort "Eins" auf den 10. Zug charakterisiert sind, nimmt B im 11. Zug die Karten (a_1, a_4). Lag der Fall 2.2. vor, so hat B damit gewonnen. Lag aber der Fall 2.3. vor, so erfährt B dies in der Antwort "Null" auf den 11. Zug. Er nimmt im 12. Zug (a_2, a_3) und gewinnt damit.
Durch die angegebene Strategie erzwingt B also den Gewinn.

b) Für jedes Paar (z_1, z_2) aus zwei verschiedenen Zahlen $1, \ldots, 20$ gilt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zahl z_1 eine der beiden richtigen Zahlen ist, beträgt $P_1 = \frac{2}{20}$; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dann z_2 die andere richtige Zahl ist, beträgt $P_2 = \frac{1}{19}$. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß (z_1, z_2) das richtige Paar ist, $P_1 P_2 = \frac{1}{190}$.
Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich unter den Paaren $(1,2), (3,4), \ldots, (19,20)$ das richtige befindet (1. Fall),

$$10 \cdot \frac{1}{190} = \frac{1}{19}.$$

(Dies kann man auch so herleiten: A hatte genau $\binom{20}{2} = 190$

Möglichkeiten, das dann als "richtiges" geltende Paar in Gedanken auszuwählen. Von diesen Möglichkeiten sind für das Eintreten des Falles 1 genau 10 günstig.)
Also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fall 2 eintritt, $1 - \frac{1}{19} = \frac{18}{19}$. Die vier Fälle 2.1. bis 2.4. haben einander gleiche Wahrscheinlichkeit. B hat genau dann [3] nach 11 Zügen den Gewinn noch nicht erreicht, wenn der Fall 2.3. vorliegt; die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt folglich

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{18}{19} = \frac{9}{38}.$$

Also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß B den Gewinn spätestens nach 11 Zügen erreicht hat,

$$1 - \frac{9}{38} = \frac{29}{38} \approx 0{,}763.$$

4) I. Wenn ein Paar (x,y) die verlangten Eigenschaften hat, so folgt aus (1)

$$9 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 y = \cos^2 x \cdot \sin^2 y. \qquad (3)$$

Für die Zahl $a = \sin^2 x$ gilt

$$a \geqq 0 \qquad (4)$$

sowie wegen (2)

$$\sin^2 y = 1 - a = \cos^2 x,$$
$$\cos^2 y = a.$$

Damit erhält man aus (3)

$$9a^2 = (1-a)^2,$$

also $8a^2 + 2a - 1 = 0$,

$$a = -\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{1}{8}},$$

wegen (4) also

$$a = \frac{1}{4}$$

und daher

$$|\sin x| = |\cos y| = \frac{1}{2}, \quad |\cos x| = |\sin y| = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Weiterhin gibt es wegen (1) für die Vorzeichen von sin x,

---

[3] vgl. Anmerkung 2

cos x, sin y, cos y nur die im Folgenden ersichtlichen Möglichkeiten und damit wegen 0 = x 2 , 0 = y 2 nur die anschließend genannten Möglichkeiten für x und y selbst:

sin x	cos x	sin y	cos y	x	y
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$

II. Für alle damit genannten Paare (x,y) bestätigt man, daß sie (1) und (2) erfüllen.
Daher sind genau diese (x,y) die zu ermittelnden Paare.

5) I. Wenn (a,b) ein Paar von Primzahlen ist, für die

$$3a^2 + a = b^2 + b \qquad (1)$$

gilt, so folgt:
Es gilt $a \neq b$ (da $a = b$ in (1) auf $a = 0$ führen würde), also ist die Primzahl a nicht Teiler von b. Da sie aber nach (1) Teiler von $b(b+1)$ ist, muß sie folglich Teiler von $b+1$ sein; d. h., es gibt eine natürliche Zahl n (> 0) mit $b+1 = n \cdot a$.
Einsetzen in (1) ergibt

$$a(3a+1) = (na-1)\cdot na,$$
$$3a+1 = n^2a - n,$$
$$a(n^2-3) = n + 1,$$

also, da $n^2-3 \neq 0$ für alle natürlichen Zahlen n ist,

$$a = \frac{n+1}{n^2-3}.$$

Wäre n=1, so folgte

$$a = -1.$$

Wäre $n \geqq 3$, so folgte

$$\begin{aligned} n^2 - n - 4 &= n(n-1) - 4 \\ &\geqq 3 \cdot 2 - 4 \\ &> 0, \end{aligned}$$

also $n^2 - 3 < n + 1$ und damit

$$a = \frac{n+1}{n^2-3} < 1.$$

Da (2) und (3) für Primzahlen a nicht möglich sind, verbleibt nur die Möglichkeit n = 2 und damit a=3, b=5.

II. Das Paar (3;5) besteht aus Primzahlen und erfüllt

$$3 \cdot 3^2 + 3 = 30 = 5^2 + 5.$$

Also hat genau das Paar (3;5) die verlangten Eigenschaften.

Fortsetzung folgt!

Determinanten (Fortsetzung)

4. Bisher kennen wir nur die Definition der Determinanten 2. und 3. Ordnung. Bei den Determinanten n-ter Ordnung mit $n > 3$ wird in diesem Beitrag bewußt auf die Definition verzichtet, weil dazu weitere mathematische Hilfsmittel erforderlich sind. Vielmehr berechnen wir den Wert derartiger Determinanten mit Hilfe des nach dem Mathematiker Laplace benannten Entwicklungssatzes, der im folgenden ohne Beweis erläutert werden soll. Im Falle n = 4 besagt dieser Satz:

$$D^4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{12}(-1)^{1+2}. \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}. \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{14}(-1)^{1+4}. \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Dafür schreibt man kürzer:

$$D^4 = a_{11}(-1)^{1+1}\, d_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\, d_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}\, d_{13} + a_{14}(-1)^{1+4}\, d_{14}.$$

Die Determinante 3. Ordnung d_{11} entsteht aus D^4 dadurch, daß man die Elemente der 1. Zeile und der 1. Spalte streicht, bei d_{12} sind die Elemente der 1. Zeile und der 2. Spalte gestrichen usw. Alle vier Determinanten 3. Ordnung d_{11}, d_{12}, d_{13} und d_{14} bezeichnet man als Unterdeterminanten von D^4. Bei dieser Darstellung treten die Elemente der 1. Zeile als Faktoren auf. Deshalb spricht man von einer Entwicklung von D^4 nach den Elementen der 1. Zeile. Ganz analog kann man D^4 auch nach den Elementen der 1. Spalte entwickeln. Das führt zu folgender Darstellung:

$$D^4 = a_{11}(-1)^{1+1}\, d_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}\, d_{21} + a_{31}(-1)^{3+1}\, d_{31} + a_{41}(-1)^{4+1}\, d_{41}$$

Die Wahl der 1. Zeile bzw. 1. Spalte ist jedoch nicht notwendig. Man kann eine Determinante nach den Elementen irgendeiner Zeile oder irgendeiner Spalte entwickeln. Außerdem gilt der Laplacesche Entwicklungssatz für Determinanten beliebiger Ordnung n. Das am Beispiel n = 4 erläuterte Vorgehen kann der Leser sicher leicht auf n = 5, 6, 7 usw. übertragen.

Wie man sieht, wird durch den Laplaceschen Entwicklungssatz die Berechnung einer Determinante n-ter Ordnung auf die Berechnung von Determinanten (n-1)-ter Ordnung zurückgeführt, die Berechnung von Determinanten (n-1)-ter Ordnung wiederum auf die Be-

mit dieser Zahl multipliziert.
(Enthalten umgekehrt alle Elemente einer Zeile oder Spalte einen gemeinsamen Faktor, so kann man diesen Faktor in Analogie zum Ausklammern "herausziehen".)

Aufgabe 3:
Beweisen Sie Satz 3 mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes!

Ohne Beweis angeführt seien noch

Satz 4:
Wenn in einer Determinante alle Elemente von zwei Zeilen oder zwei Spalten übereinstimmen, so hat sie den Wert 0.

Satz 5:
Wenn man zu allen Elementen einer Zeile ein und dasselbe Vielfache der entsprechenden Elemente einer anderen Zeile addiert, so ändert die Determinante ihren Wert nicht.

Auch dieser Satz gilt in analoger Weise für Spalten. Er kommt bei der Berechnung von Determinanten am häufigsten zur Anwendung.

Beispiel 4:

$$D^4 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 4 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Man multipliziere die 3. Zeile mit (-2) und addiere sie zur 2. Zeile!

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -4 & -3 \\ 1 & 7 & 4 & 4 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Man multipliziere die 3. Zeile mit 3 und addiere sie zur 4. Zeile!

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -4 & -3 \\ 1 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 26 & 13 & 13 \end{vmatrix}$$

Man multipliziere die 3. Zeile mit (-3) und addiere sie zur 1. Zeile!

$$= \begin{vmatrix} 0 & -16 & -11 & -12 \\ 0 & -13 & -4 & -3 \\ 1 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 26 & 13 & 13 \end{vmatrix}$$

Man entwickle die Determinante nach den Elementen der 1. Spalte!

rechnung von Determinanten (n-2)-ter Ordnung usw. Im Falle n=6 z. B. ergeben sich 6 Determinanten 5. Ordnung, jede davon führt auf 5 Determinanten 4. Ordnung und jede dieser Determinanten 4. Ordnung erfordert die Berechnung von 4 Determinanten 3. Ordnung. Folglich muß man $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ Determinanten 3. Ordnung oder $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ Determinanten 2. Ordnung berechnen, wenn man den Wert einer Determinante 6. Ordnung bestimmen will. Es ist offensichtlich, daß damit ein erheblicher Rechenaufwand verbunden ist. Aus diesem Grunde verändert man eine Determinante zunächst in geeigneter Weise, um ihren Wert möglichst einfach bestimmen zu können. Die Berechtigung für derartige Veränderungen ergibt sich aus den nachfolgenden Sätzen. Die große Bedeutung des Laplaceschen Entwicklungssatzes besteht vor allem darin, daß diese Sätze aus ihm gefolgert werden können.

5. Satz 1:

Wenn man alle Elemente einer Determinante an der Hauptdiagonalen spiegelt, so ändert sich ihr Wert nicht.

Beweis. Die Spiegelung an der Hauptdiagonalen bedeutet ein Vertauschen der Zeilen mit den Spalten, d. h. aus der i-ten Zeile wird die i-te Spalte und umgekehrt. Folglich geht die Entwicklung der Determinante nach den Elementen der i-ten Zeile über in die Entwicklung nach den Elementen der i-ten Spalte. Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz sind beide Wege möglich, um den Wert der Determinante zu bestimmen.

Satz 2:

Wenn in einer Determinante alle Elemente einer Zeile oder Spalte gleich Null sind, so hat sie den Wert 0.

Beweis. Alle Elemente der i-ten Zeile seien gleich Null. Entwickelt man die Determinante nach den Elementen der i-ten Zeile, so enthält jeder Summand der auf diese Weise entstehenden Summe den Faktor 0. Folglich hat die Summe insgesamt den Wert 0.

Satz 3:

Werden alle Elemente einer Zeile oder Spalte mit einer Zahl multipliziert, so wird dadurch auch der Wert der Determinante

$$= \begin{vmatrix} -16 & -11 & -12 \\ -13 & -4 & -4 \\ 26 & 13 & 13 \end{vmatrix}$$

Man ziehe den gemeinsamen Faktor 13 heraus, den alle Elemente der 3. Zeile enthalten!

$$= 13 \cdot \begin{vmatrix} -16 & -11 & -12 \\ -13 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Man multipliziere die 3. Zeile mit 3 und addiere sie zur 2. Zeile!

$$= 13 \cdot \begin{vmatrix} -16 & -11 & -12 \\ -7 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Man multipliziere die 3. Zeile mit 12 und addiere sie zur 1. Zeile!

$$= 13 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Man entwickle die Determinante nach den Elementen der 3. Spalte!

$$= 13 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}$$

Man wende die Definition für Determinanten 2. Ordnung an!

$$= 13 \cdot \left[8 \cdot (-1) - 1 \cdot (-7)\right]$$

$$= -13$$

Aufgabe 4:

Berechnen Sie den Wert von

$$D^4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Preisaufgabe:

Die Preisaufgabe besteht aus 2 voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teilaufgabe:

Gegeben seien die beiden Vektoren

$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ und

$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, wobei $\vec{i}, \vec{j}$ und $\vec{k}$

die Einheitsvektoren eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind.

Welche Bedeutung hat bei diesen Voraussetzungen die Determinante D^3?

$$D^3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Beweisen Sie Ihre Behauptung!

2. Teilaufgabe:

Wir hatten gezeigt:

Sind $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ und $P_3(x_3,y_3)$ die Eckpunkte eines Dreiecks, so gilt für seine Fläche A:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Durch die Gleichungen

$x' = x - a$

$y' = y - b$

wird eine Parallelverschiebung der Ebene in sich definiert. Die Bilder der Punkte $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ und $P_3(x_3,y_3)$ seien $P_1'(x_1',y_1')$, $P_2'(x_2',y_2')$ und $P_3'(x_3',y_3')$.

Beweisen Sie, daß für die Fläche A' des von den Bildpunkten gebildeten Dreiecks gilt:

$A' = A$!

Für diese Preisaufgabe wurde uns von Prof. Schlosser freundlicherweise ein Preis zur Verfügung gestellt.

Prof. Dr. G. Schlosser
Sektion Mathematik
Bereich Mathematik – Methodik

Ein Buch ist ein Spiegel: Wenn ein Affe hineinguckt,
kann freilich kein Apostel heraussehen.
Georg Christoph Lichtenberg

Der größte Feind der Wissenschaft ist nicht der Irrtum, sondern die Trägheit. Alles, was wir brauchen, ist die Erörterung; dann sind wir sicher, daß alles in Ordnung kommt, wenn wir auch noch so viele Versehen machen.
Henry Thomas Buckle

Preisaufgaben

Q 25 Man löse das Gleichungssystem

②

$$\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{17}{4}$$

$$x(x+4) + \sqrt{x^2+xy+4} = 52$$

Q 26 Gegeben ist die quadratische Gleichung

①

$x^2 + px + q = 0$ mit den Wurzeln x_1 und x_2.

Man gebe eine quadratische Gleichung an, die die Wurzeln

$y_1 = x_1^2 + x_2^2$ und

$y_2 \quad x_1^3 + x_2^3$ hat!

Q 27 Man zerlege $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ in ein Produkt!

①

Q 28 Man beweise, daß $n^2 = (k \cdot n)^{\log_k m}$,

①

falls $\log_k x$, $\log_m x$ und $\log_n x$ $(x \neq 1)$ eine arithmetische Progression bilden.

Q 29 Man finde alle Lösungen der Gleichung

②

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}$$

Q 30 Доказать, что если диаметр полукруга разделить на

②

две произвольные части и на каждой из них описать полукруг, внутри данного полукруга , то площадь, заключенная между тремя полуокружностями, будет равна площади круга, диаметр которого равен длине перпендикуляра, восстановленного внутри исходного полукруга из точки деления его диаметра.

Einsendeschluß: 2. 8. 1984

Lösungen

P 39 Wir formen das Gleichungssystem um, wobei wir in der ersten Gleichung zur Basis 2, in der zweiten zur Basis 3 und in der dritten zur Basis 4 übergehen:

$$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y + \frac{1}{2}\log_2 z = \log_2 4$$
$$\log_3 y + \frac{1}{2}\log_3 z + \frac{1}{2}\log_3 x = \log_3 9$$
$$\log_4 z + \frac{1}{2}\log_4 x + \frac{1}{2}\log_4 y = \log_4 16$$

Durch Potenzieren erhält man

$x\sqrt{yz} = 4$ (1)
$y\sqrt{xz} = 9$ (2) und nach Multiplikation der
$z\sqrt{xy} = 16$ (3) Gleichungen

$(xyz)^2 = 24^2$ also $xyz = 24$ (4), da $x > 0$, $y > 0$ und $z > 0$.

(1) mit (4) kombiniert ergibt $x = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$.

Analog erhält man $y = \frac{27}{8}$ und $z = \frac{32}{3}$.

Durch die Probe bestätigt man, daß diese 3 Zahlen tatsächlich Lösung des Gleichungssystems sind.

P 40 Der gesuchte Bruch hat die Gestalt $\frac{p}{p^2-1}$, wobei $p > 0$ nat. Zahl. Aus den Bedingungen der Aufgabe folgen die Ungleichungen $\frac{p+2}{p^2+1} > \frac{1}{3}$ (1) und $0 < \frac{p-3}{p^2-4} < \frac{1}{10}$ (2).

Aus (1) folgt $3(p+2) > p^2+1$, also $p^2-3p-5 < 0$. Durch Lösung dieser quadr. Ungleichung erhält man

$$p_1 = \frac{3-\sqrt{29}}{2} < 0 < p < \frac{3+\sqrt{29}}{2} = p_2 < 5$$

$\rightarrow$ p kann nur die Werte 1,2,3 oder 4 annehmen.

Durch Einsetzen in (2) erhält man, daß nur p=4 beide Ungleichungen erfüllt. Damit ist $\frac{p}{p^2-1} = \frac{4}{15}$ einzige Lösung dieser Aufgabe.

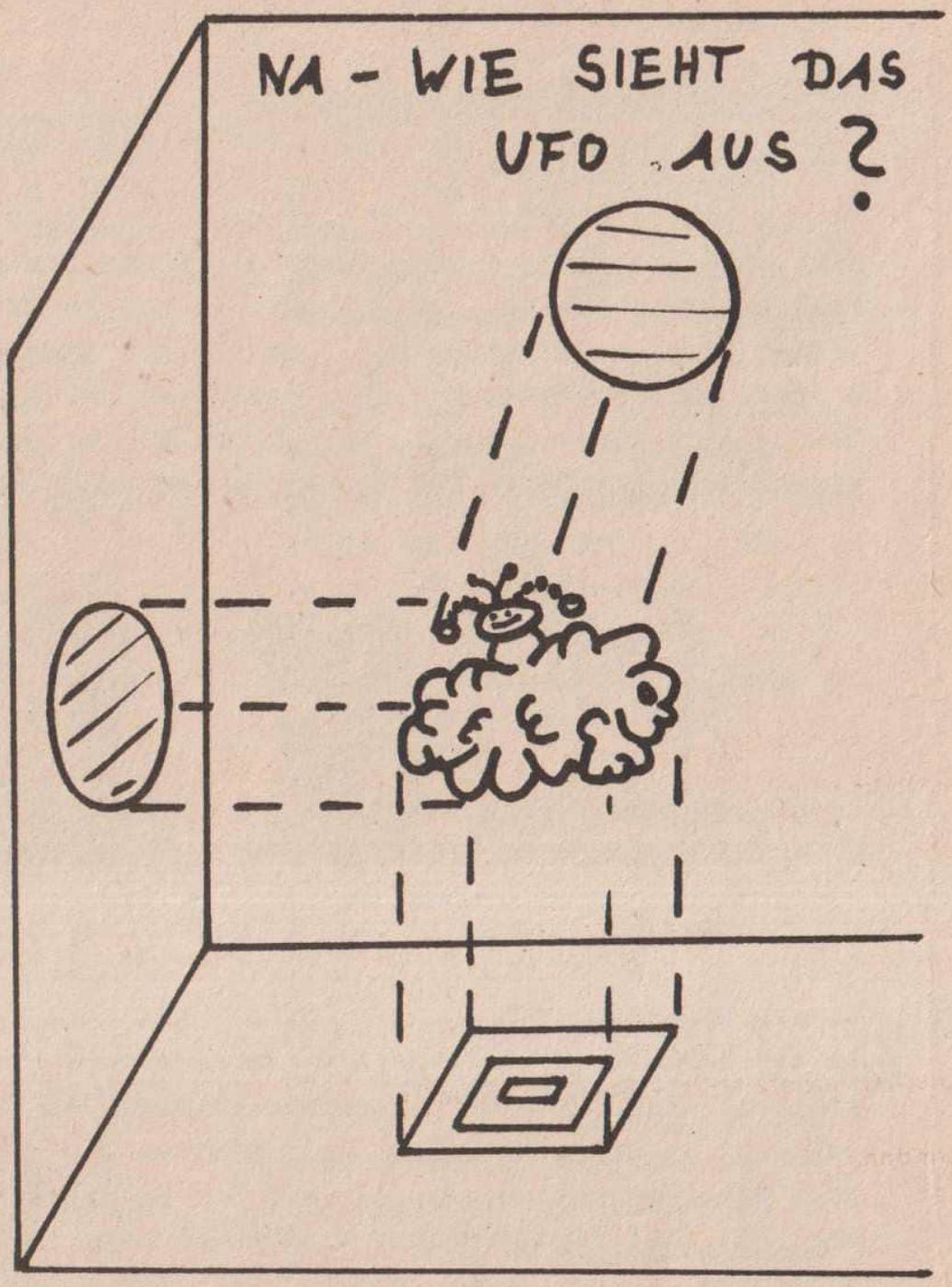
P 42 Betrachten a und a^2 mod 7:

a	0	1	2	3	4	5	6
a^2	0	1	4	2	2	4	1

Aus 2 Summanden läßt sich die Restklasse 0 daher nur auf eine Art darstellen: $0 = 0 + 0$.
Andere Kombinationen von 0, 1, 2 und 4 ergeben stets Restklassen $\neq 0$.
Damit folgt aus $a^2+b^2 = 0(7)$ $\quad a^2 = 0(7) \wedge b^2 = 0(7)$
$a = 0(7) \wedge b = 0(7)$, qed.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Burkhard Götz
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimmler, R. Heinrich, S. Kratochwil, M. Röppnack, K. Tauscher

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-122-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 2. 4. 84



6
84

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
ISSN 0232-4539
18. Jahrgang
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Schnittfiguren bei Körpern

Beim Cavalierischen Prinzip (Francesco Bonaventura Cavalieri, ital. Mathematiker, 1598 - 1647) nutzt man zur Grundfläche parallele Schnittebenen, um Volumina zu vergleichen. Schon zu Zeiten Cavalieris wurden aber auch solche Schnittebenen verwendet, um körperanschaulicher darzustellen. Betrachtet man die Darstellung eines Körpers (Bild 1 und 2), so gelingt es, durch eingezeichnete Ebenen den Körper besser räumlich zu erfassen.

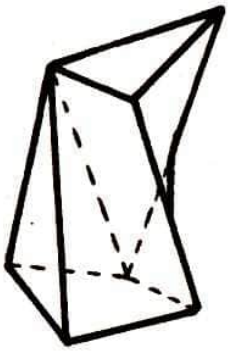


Bild 1

Bild 2

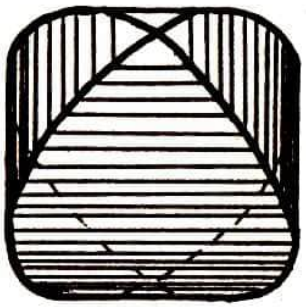


Bild 3

Diesen Umstand nutzt man bei der Schraffur von Seitenflächen in der Kunst aus. Die jeweilige Schnittfigur fällt dabei deutlich auf (vgl. Bild 3). Liegt die schneidende Ebene nicht mehr parallel zu einer Seitenfläche, fällt es uns wesentlich schwerer, eine Vorstellung von der Art der Schnittfigur zu bekommen. Wie im Artikel von Dr. R. Dörr gezeigt wurde, besteht die Möglichkeit, über Grund- und Aufriß (evtl. noch günstige weitere Rißebenen wählen) sich eine Vorstellung von räumlichen Gebilden zu verschaffen. Mit den oben angeführten parallelen Schnittebenen läßt sich dabei ebenfalls gut arbeiten.
Soll die Schnittfigur in Kavalierperspektive dargestellt werden, gibt es meist doch Probleme, wie viele Schüler bei der Kreisolympiade 1983 erfahren mußten. In der Aufgabe 231023 war ein Würfel mit den Punkten A'B'C'D'E'F'G'H' in Kavalierperspektive abgebildet. Auf den Ebenen ε_1(ABFE) lag ein Punkt P, ε_2(BCGF) ein Punkt Q und ε_3(ADHE) ein Punkt R (jeweils im Inneren der Seitenflächen des Würfels). Zu konstruieren war die Schnittfigur des Würfels mit der Ebene ε (PQR).

Da die Kavalierperspektive ein Spezialfall von Axonometrie ist, werden auch hier die Bilder von drei - von einem Punkt ausgehenden zueinander senkrechten - Achsen betrachtet (vgl. Bild 4) und dabei mit einem "Verzerrungsverhältnis" 1 : 2 gearbeitet. Es ist nun günstig, Schnittebenen zur Hilfskonstruktion zu nutzen, die parallel zu den Achsen verlaufen. In unserem Fall sind es z. B. die Ebenen $(P'\overline{P}\overline{Q}Q')$, $(Q'\overline{Q}\overline{R}R')$ und $(\overline{R}R'P'\overline{P})$, sie ergeben das im Bild 5 hervorgehobene Prisma, in dem die Dreiecksfläche (PQR) liegt.

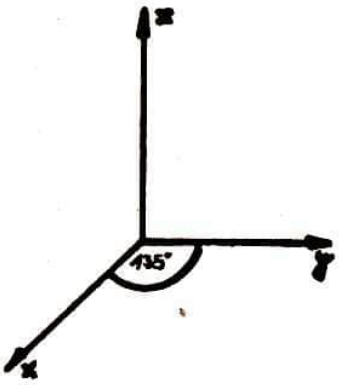


Bild 4

Das Ziel weiterer Untersuchungen besteht nun darin, zwei dieser Ebenen so zu schneiden, daß die dabei genutzte Schnittebene eine bzw. zwei Kanten des Würfels enthält. Wie bei den Schnittebenen $(\overline{P}\overline{R}R'P')$ und $(\overline{Q}\overline{R}R'Q')$ verlaufen die "Spuren" der Ebenen auf den Seitenflächen parallel zu Kanten (z. B. A'E'). Eine der möglichen Ebenen ist die Ebene (A'C'G'E') (Diagonalebene). Ihre Spur in (A'B'C'D') schneidet $\overline{Q}\overline{R}$ in $\overline{H}_1$ und $\overline{P}\overline{R}$ in $\overline{H}_2$. Gleichzeitig

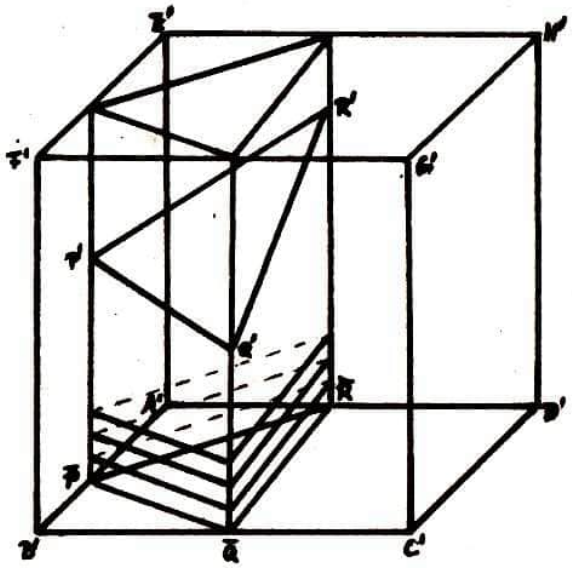


Bild 5

erkennen wir in Bild 6, daß die Diagonalebene Q'R' in H_1' und P'R' in H_2' schneidet (Parallelität von $g_{\overline{H}_1H_1'}$ und $g_{\overline{H}_2H_2'}$ beachten). Mit den Punkten H_1' und H_2', die in der gesuchten Schnittebene und in der Diagonalebene liegen, haben wir sofort zwei Eckpunkte (S_1, S_3) der gesuchten Schnittfigur. Die restlichen Eckpunkte schließen sich über P' bzw. R' an. Interessant sind diese Schnittpunkte vor allem dann, wenn sie außerhalb

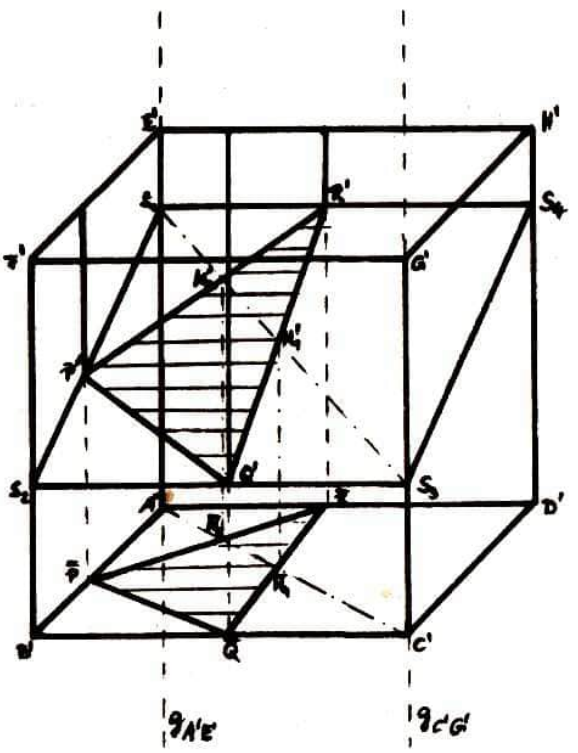


Bild 6

der Strecken A'E' bzw. C'G' die Geraden $g_{A'E'}$ bzw. $g_{C'G'}$ treffen, oder wenn sie mit Eckpunkten zusammenfallen.
Um mit diesem Konstruktionsprinzip vertraut zu werden, muß man sich mehrere Schnittflächen konstruieren und dabei die Punkte P'Q'R' variieren. Wenn man sich mit dem Konstruktionsprinzip vertraut machen will, ist es günstig, auch andere Hilfsebenen, z. B. die zu $g_{A'B'}$ parallelen durch P'R' und P'Q' oder zu $\overline{PQR}$ parallele durch markante Punkte des Dreiecks P'Q'R', zu wählen.
Ebenso interessant für ein weiteres Erfassen der "Schnittproblematik" ist eine Umkehrung der eben angeführten Aufgabenstellung. Dazu als Anregung einige Fragestellungen:
Welche Schnittfiguren sind überhaupt denkbar?
Kann man regelmäßige 3, 4, 5, 6-Ecke als Schnittfigur erhalten?
Wie müßten dann die Punkte P,Q,R gewählt werden?
Um die Richtung solcher Untersuchungen anzudeuten, gehen wir der Frage nach, ob man ein reguläres Tetraeder so durch einen ebenen Schnitt schneiden kann, daß ein Quadrat entsteht. Aus einer Darstellung in Grund- und Aufriß kann man sich eine Ver-

mutung erarbeiten. (Das Eintauchen eines Kantenmodells in Wasser illustriert sehr einprägsam Schnittfiguren). Schnittebenen parallel zu einer Kante, z. B. AC, führen auf Vierecke, weil vier Kanten erfaßt werden können. Wählen wir im Grundriß in der im Bild 7 gewählten Lage parallele Schnittebenen, so entstehen Rechtecke, von denen einige hervorgehoben wurden. Es liegt die Vermutung nahe, daß sich unter den Rechtecken ein Quadrat befindet. Aus dem "Durchschicken" der Ebene kann man die Vermutung finden, daß die Mittelpunkte der Kanten des Tetraeders als Lösung in Frage kommen (man untersucht dazu die Längen der Seiten in der Schnittfigur).

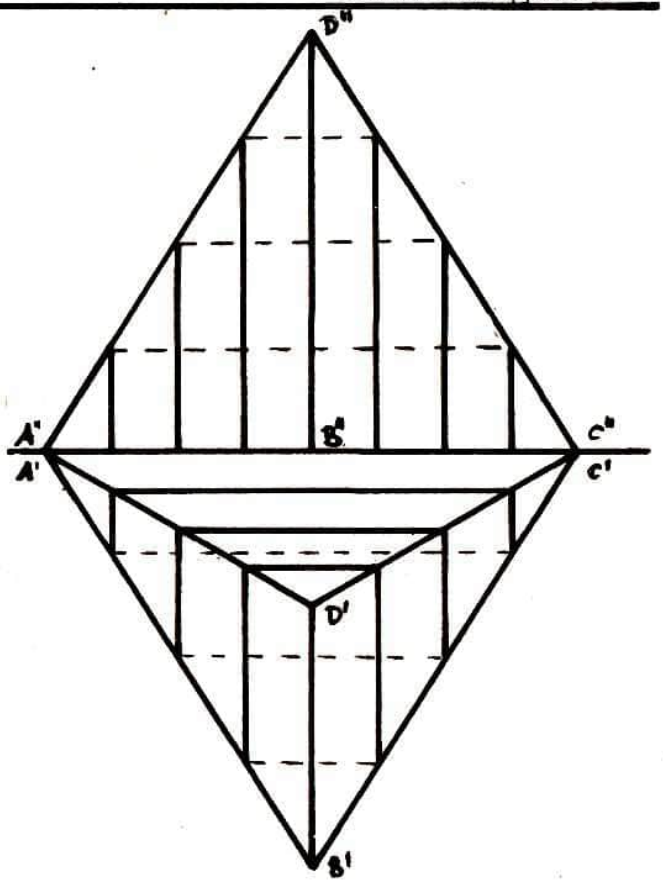


Bild 7

Einen anderen Zugang bekommen wir, wenn wir die Eckpunkte des Tetraeders als Ecken eines räumlichen (nichtebenen) Vierecks ansehen. Besinnt man sich dann auf die Tatsache, daß die Figur, die man aus den Mittelpunkten der Seiten eines räumlichen Vierecks bildet, ein Parallelogramm ist, liegt eine Lösung sehr nahe.

Mit dem Bild 8 wird angedeutet, wie man nun die Konstruktion in Kavalierperspektive ausführen kann, wobei die Hilfsebenen $H_1S_4S_1$ und $H_2S_3S_2$ genutzt wurden. Für den Nachweis, daß die Figur ein Rhombus ist, können wir ganz elementar mit ähnlichen Dreiecken arbeiten. Wir können dann sowohl mit Hilfe von Winkelbeziehungen, aber auch über die Diagonalen S_1S_3, S_2S_4 den Nachweis erbringen, daß ein Quadrat vorliegt.

Für denjenigen, der die platonischen Körper kennt, ist die Lösung der Aufgabe sehr leicht, weil das gesuchte Quadrat im Oktaeder, dessen Eckpunkte durch die Seitenmitten aller Kanten

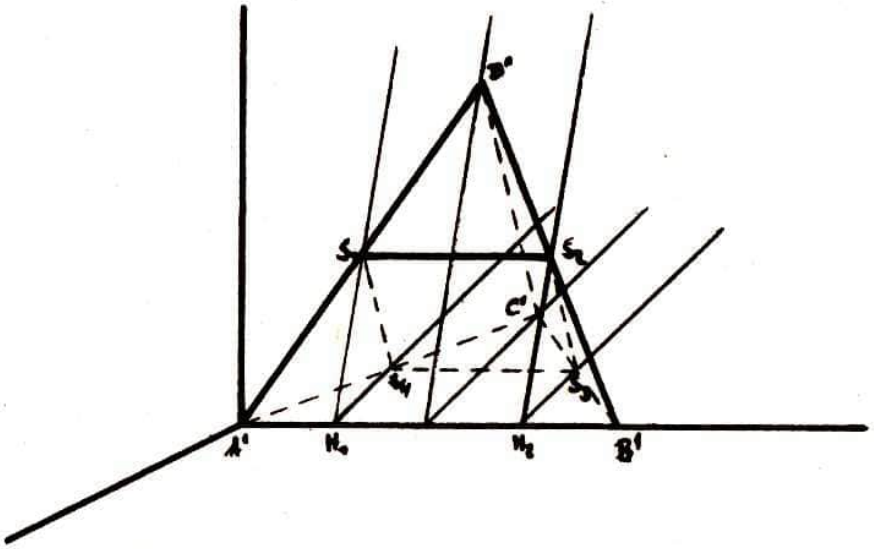


Bild 8

des Tetraeders gebildet werden, liegt. Mit der Lösung ist es uns damit gleichzeitig gelungen, ein in das Tetraeder eingebettetes Oktaeder zu konstruieren.

Einige Probleme zum Nachdenken:
Ein Körper "paßt" genau durch folgende "Löcher", wie sieht der Körper aus? Man veranschauliche eine Darstellung durch Schnitte.

Bild 9

Ein Quader mit den Kanten a,b,c ist so zu schneiden, daß ein minimales/maximales Quadrat entsteht, welche Schnittfiguren gibt es noch, welche Bedingungen gilt es an die Kantenlängen des Quaders zu stellen?
Kann man den Körper im Bild 3 so schneiden, daß eine Ellipse als Schnittfigur entsteht?

Dr. M. Hörschelmann, FSU
Bereich Mathematik – Methodik

Elementare Funktionen und gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Auf der Zahlengeraden R sei eine reelle stetige Funktion $f(x)$ gegeben. Gefragt wird nach einer differenzierbaren Funktion $y(x)$ mit

$$(1) \qquad y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x), \quad x \in R.$$

Die Lösung der Aufgabe ergibt sich durch Integration,

$$(2) \qquad y(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \quad x \in R,$$

wobei x_0 und c beliebige reelle Zahlen sind. Aus (2) folgt insbesondere, daß man den Wert $y(x_0) = c$ beliebig vorgeben kann. Genauer: Sind $x_0 \in R$ und $c \in R$ vorgegeben, so besitzt die Aufgabe (1) mit der Zusatzbedingung $y(x_0) = c$ genau eine Lösung. Diese ist durch (2) explizit angebbar. Die Aufgabe wird komplizierter, wenn neben $y'(x)$ auch noch $y(x)$ oder höhere Ableitungen von $y(x)$ in die Gleichungen eingehen, z. B.

$$y'(x) + 3y^{17}(x) + 19y''(x) = f(x).$$

Solche Gleichungen nennt man gewöhnliche Differentialgleichungen. Sie spielen eine fundamentale Rolle in der Mathematik und in den Naturwissenschaften. Es gibt eine ausgedehnte Theorie für solche Gleichungen, die aber nicht Gegenstand dieser Arbeit ist. Unser Ziel ist bescheidener. Wir betrachten die beiden speziellen Gleichungen

$$(3) \qquad y'(x) = y(x), \quad x \in R$$

und

$$(4) \qquad y''(x) = -y(x), \quad x \in R.$$

Wie gesagt wurde, besitzt die Differentialgleichung erster Ordnung (1) genau eine Lösung $y(x)$ mit $y(x_0) = c$, wobei x_0 und c vorgegebene reelle Zahlen sind. Diese Eigenschaft gilt auch für die Differentialgleichung erster Ordnung (3). Für die Differentialgleichung zweiter Ordnung (4) kann man nicht nur $y(x_0) = c_1$, sondern auch $y'(x_0) = c_2$ vorgeben. Das sind sehr spezielle Folgerungen aus der oben erwähnten allgemeinen Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir formulieren diese Aussagen

in zwei Sätzen.

S a t z 1. Es seien $x_0 \in R$ und $c \in R$ vorgegeben. Dann besitzt die Differentialgleichung (3) genau eine (stetig differenzierbare) Lösung $y(x)$, die der Anfangsbedingung $y(x_0) = c$ genügt.

S a t z 2. Es seien $x_0 \in R$, $c_1 \in R$ und $c_2 \in R$ vorgegeben. Dann besitzt die Differentialgleichung (4) genau eine (zweimal stetig differenzierbare) Lösung $y(x)$, die den Anfangsbedingungen $y(x_0) = c_1$ und $y'(x_0) = c_2$ genügt.

2. Elementare Funktionen

Elementare Funktionen wie etwa Polynome, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktionen usw. kann man auf viele Weisen einführen und definieren. In dieser Arbeit wollen wir zeigen, daß man die Exponentialfunktion $e(x) = e^x$ und die trigonometrischen Funktionen sinx und cosx als Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen einführen kann. Grundlage sind Satz 1 und Satz 2. Wir wollen zeigen, daß man viele der gut bekannten Eigenschaften von $e(x)$, sin x und cos x in eleganter Weise bei alleiniger Verwendung der Sätze 1 und 2 beweisen kann.

3. Die Funktion e^x

Wir bevorzugen vorerst die Schreibweise $e(x)$ statt e^x.

D e f i n i t i o n 1. Die Funktion $e(x)$ ist die Lösung $y(x) = e(x)$ der Differentialgleichung (3), die der Anfangsbedingung $e(0) = y(0) = 1$ genügt.

Bemerkung 1. Nach Satz 1 gibt es genau eine Lösung von (3) mit $y(0) = 1$. Unsere Definition ist also sinnvoll.

S a t z 3. $e(x)$ ist eine beliebig oft differenzierbare, streng monoton wachsende, konvexe Funktion. Ferner gilt

(5) $e(x) > 0$ für $x \in R$,

(6) $e(x) \to \infty$ für $x \to \infty$, $e(x) \to 0$ für $x \to -\infty$,

(7) $e(x+y) = e(x)\, e(y)$ für $x \in R$ und $y \in R$.

Beweis. 1. Schritt: Aus $e'(x) = e(x)$ folgt iterativ, daß $e(x)$ beliebig oft differenzierbar ist. Um (5) zu beweisen, nehmen wir zuerst an:

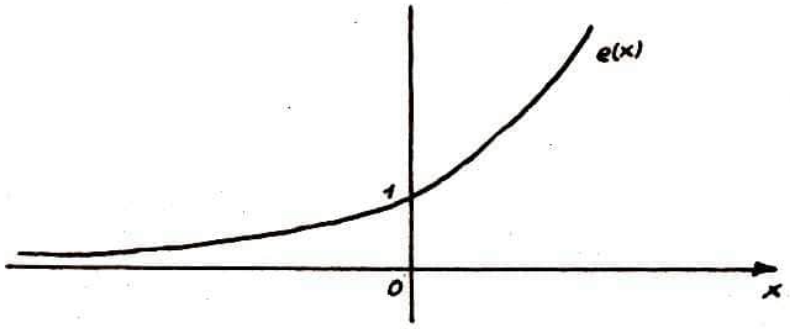
(8) $$\exists\, x_0 \in R \text{ mit } e(x_0) = 0.$$

Aus Satz 1 folgt aber, daß die Differentialgleichung

(9) $$e'(x) = e(x),\ x \in R, \text{ mit } e(x_0) = 0$$

genau eine Lösung besitzt. Diese Lösung kann man aber erraten: $e(x) = 0$. Das ist aber ein Widerspruch zu $e(0) = 1$. Also war unsere Annahme (8) falsch. Mit anderen Worten: Es gibt kein $x_0 \in R$ mit $e(x_0) = 0$. Wir nehmen jetzt an, daß es ein $x_1 \in R$ mit $e(x_1) < 0$ gibt. Andererseits ist $e(0) = 1 > 0$. Da $e(x)$ eine stetige Funktion ist, müßte es dann eine Stelle $x_0 \in R$ mit $e(x_0) = 0$ geben. Das kann aber nicht sein, wie wir oben gesehen haben. Also ist die Annahme $e(x_1) < 0$ falsch. Damit haben wir (5) bewiesen.

2. Schritt: Aus $e'(x) = e(x) > 0$ folgt, daß $e(x)$ streng monoton wachsend ist. Aus $e''(x) = e'(x) > 0$ folgt, daß $e(x)$ konvex ist.



Um (7) zu beweisen, fixieren wir $y \in R$ und betrachten die Funktion

(10) $$h(x) = e(x+y) - e(x)\,e(y),\quad x \in R.$$

Es gilt

$$h'(x) = \frac{dh}{dx}(x) = e'(x+y) - e'(x)e(y) = e(x+y) - e(x)e(y) = h(x).$$

Wir erhalten also für $h(x)$ die Differentialgleichung

(11) $$h'(x) = h(x),\ x \in R, \text{ mit } h(0) = e(y) - e(0)e(y) = 0.$$

Nach Satz 1 besitzt (11) genau eine Lösung. Diese kann man aber erraten: $h(x) = 0$. Nach (10) ist dies aber identisch mit (7).

3. Schritt: Wir beweisen (6). Da $e(x)$ streng monoton wachsend ist, gilt

$$(e(x)-x)' = e'(x) - 1 = e(x) - 1 = e(x)-e(0) > 0 \text{ für } x > 0.$$

Also ist $e(x) - x$ für $x > 0$ streng monoton. Insbesondere gilt

$$e(x) - x > e(0) - 0 = 1, \text{ also } e(x) > 1 + x \quad \text{für } x > 0.$$

Hieraus folgt aber $e(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Das beweist den ersten Teil von (6). Um den zweiten Teil von (6) zu beweisen, benutzen wir (7). Für $x > 0$ ist

$$(12) \qquad e(-x)\, e(x) = e(0) = 1, \quad \text{also} \quad e(-x) = \frac{1}{e(x)}.$$

Für $x \to \infty$ folgt also $e(-x) \to 0$. Damit sind alle Aussagen bewiesen.

Bemerkung 2. Es sei $e = e(1)$. Dann folgt aus (7)

$$e(2) = e(1)\, e(1) = e^2, \quad e(3) = e(2)\, e(1) = e^3 \quad \text{usw.}$$

Ist n eine natürliche Zahl, so ergibt sich iterativ $e(n) = e^n$. Aus (12) erhält man $e(-n) = \frac{1}{e(n)} = e^{-n}$. Für ganze Zahlen $x = m$ gilt somit $e(x) = e(m) = e^m = e^x$. Das rechtfertigt, diese Schreibweise auf beliebige $x \in R$ auszudehnen.

4. Die Funktionen sin x und cos x: Grundeigenschaften

Wir wollen die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ in gleicher Weise einführen wie die Funktion e^x im vorhergehenden Abschnitt.

D e f i n i t i o n 2. (a) Die Funktion $\sin x$ ist die Lösung $y(x) = \sin x$ der Differentialgleichung (4), die den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ genügt.
(b) Die Funktion $\cos x$ ist die Lösung $y(x) = \cos x$ der Differentialgleichung (4), die den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ genügt.

Bemerkung 3. Nach Satz 2 sind $\sin x$ und $\cos x$ eindeutig bestimmt. Unsere Definition ist also sinnvoll.

Satz 4. $\sin x$ und $\cos x$ sind beliebig oft differenzierbare Funktionen. Sie haben folgende Eigenschaften:

(13) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ für $x \in R$,

(14) $\sin x = -\sin(-x)$ (ungerade bei 0),
$\cos x = \cos(-x)$ (gerade bei 0), $x \in R$,

(15) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in R$,

(16) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, $x \in R$,
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $y \in R$.

<u>Beweis.</u> <u>1. Schritt:</u> Aus $(\sin x)'' = -\sin x$ folgt $(\sin x)''' = -(\sin x)'$ usw. Also ist $\sin x$ (und analog $\cos x$) beliebig oft differenzierbar. Wir beweisen (15). Es sei

(17) $$f(x) = (\sin x)' - \cos x, \quad x \in R.$$

Dann ist

(18) $$f''(x) = (\sin x)''' - (\cos x)'' = -(\sin x)' + \cos x = -f(x)$$

und

$$f(0) = 1 - 1 = 0,$$

$$f'(x)\big|_{x=0} = (\sin x)'' - (\cos x)'\big|_{x=0} = -\sin x - (\cos x)'\big|_{x=0} = 0 - 0 = 0.$$

Mit anderen Worten: $y(x) = f(x)$ genügt der Differentialgleichung (4) mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$. Nach Satz 2 gibt es hierzu genau eine Lösung. Diese kann man erraten. Sie ist $f(x) = y(x) = 0$. Nach (17) beweist dies den ersten Teil von (15). Ganz analog beweist man den zweiten Teil von (15).

<u>2. Schritt:</u> Um (13) zu beweisen, setzen wir

(19) $$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 1, \quad x \in R.$$

Unter Verwendung von (15) ergibt sich

$$f'(x) = 2 \sin x (\sin x)' + 2 \cos x (\cos x)'$$
$$= 2 \sin x \cos x - 2 \sin x \cos x = 0.$$

Ferner ist $f(0) = 0 + 1 - 1 = 0$. Aus Satz 1 folgt dann wieder $f(x) = 0$, also (13).

<u>3. Schritt:</u> Um (14) zu beweisen, setzen wir

$$f(x) = \sin x + \sin(-x).$$

Dann folgt wie oben $f''(x) = -f(x)$, $f(0) = 0$ und

$f'(0) = \cos x - \cos(-x)\big|_{x=0} = 1 - 1 = 0.$

Nach Satz 2 ist dann $f(x) = 0$, was mit der ersten Aussage in (14) identisch ist. Analog beweist man die zweite Aussage in (14).

4. Schritt: Um (16) zu beweisen, fixiert man $y \in R$ und betrachtet die Funktion

$$f(x) = \sin(x+y) - \sin x \cos y - \sin y \cos x, \quad x \in R.$$

Dann ergibt sich wie oben (unter Verwendung von (15))

$$f''(x) = -f(x), \quad x \in R,$$

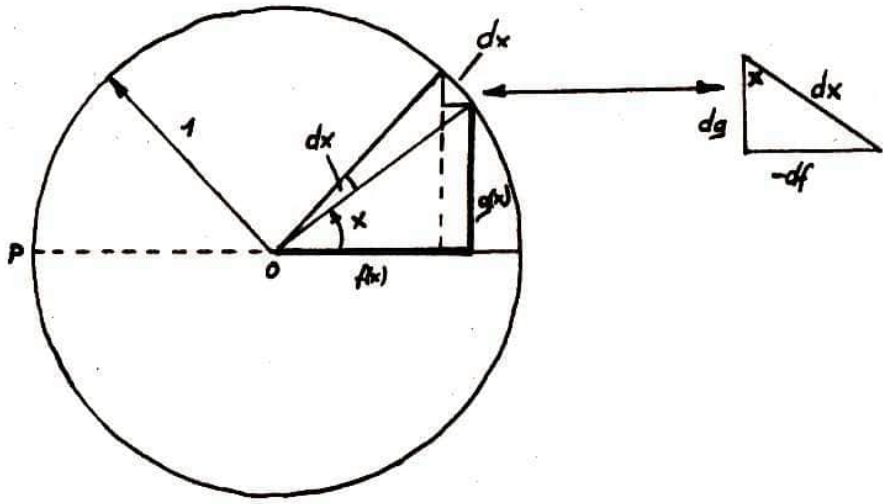
$$f(0) = \sin y - \sin y = 0,$$

$$f'(0) = \cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin y \sin x\big|_{x=0}$$
$$= \cos y - \cos y = 0.$$

Aus Satz 2 folgt dann wieder $f(x) = 0$, was mit der ersten Aussage in (16) übereinstimmt. Die zweite Aussage in (16) erhält man aus der ersten Aussage durch Differenzieren nach x (bei festem y).

5. Die Funktionen sin x und cos x: Geometrische Interpretation

Ergänzend wollen wir zeigen, daß man auch die üblichen geometrischen Interpretationen von $\sin x$ und $\cos x$ im Rahmen des obigen Kalküls erhalten kann. Wir betrachten den Einheitskreis, x sei der eingezeichnete Winkel, gemessen im Bogenmaß, also $0 \leq x < 2\pi$ (vorerst). $x = \pi$ entspricht also dem Punkt P. $f(x)$ und $g(x)$ haben die eingezeichnete Bedeutung. Wir vergrößern x



um die infinitesimale Größe dx. Wir setzen $f(x+dx) = f(x) + df$ und $g(x+dx) = g(x) + dg$. Der Winkel x erscheint in dem kleinen (infinitesimalen) Dreieck wieder. Aus den Ähnlichkeitssätzen folgt dann:

$$\frac{g(x)}{1} = -\frac{df}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{f(x)}{1} = \frac{dg}{dx}.$$

Mit $dx \to 0$ erhält man (im Sinne der üblichen Betrachtungen bei der Einführung von Ableitungen)

$$f'(x) = -g(x), \quad g'(x) = f(x). \tag{20}$$

Differenzieren liefert

$$f''(x) = -f(x) \quad \text{und} \quad g''(x) = -g(x).$$

Ferner folgt aus der Figur $f(0) = 1$ und $g(0) = 0$. Setzt man dies in (20) ein, so erhält man $f'(0) = 0$ und $g'(0) = 1$. Damit haben wir aber den Anschluß an Definition 2 erhalten. Dehnt man die obigen Betrachtungen vom 1. auf die 3 anderen Quadranten aus (unter Berücksichtigung der Vorzeichen von $f(x)$ und $g(x)$), so haben wir folgende Aussage bewiesen:

L e m m a . Es gilt $g(x) = \sin x$ und $f(x) = \cos x$ mit $0 \leq x < 2\pi$.

<u>Bemerkung 4.</u> Aus der Figur folgen nun die bekannten Aussagen:

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\pi = 0, \quad \sin\frac{3}{2}\pi = -1,$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\pi = -1, \quad \cos\frac{3}{2}\pi = 0.$$

<u>Periodizität.</u> Wir wollen beweisen, daß

$$\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \text{und} \quad \cos(x+2\pi) = \cos x, \quad x \in R, \tag{21}$$

gilt. Wir setzen

$$f(x) = \sin(x+2\pi) - \sin x, \quad x \in R.$$

Dann gilt $f''(x) = -f(x)$, $x \in R$. Ferner ist

$$f(-\pi) = \sin\pi - \sin(-\pi)$$

und

$$f'(-\pi) = \cos(x+2\pi) - \cos x\Big|_{x=-\pi} = \cos\pi - \cos(-\pi).$$

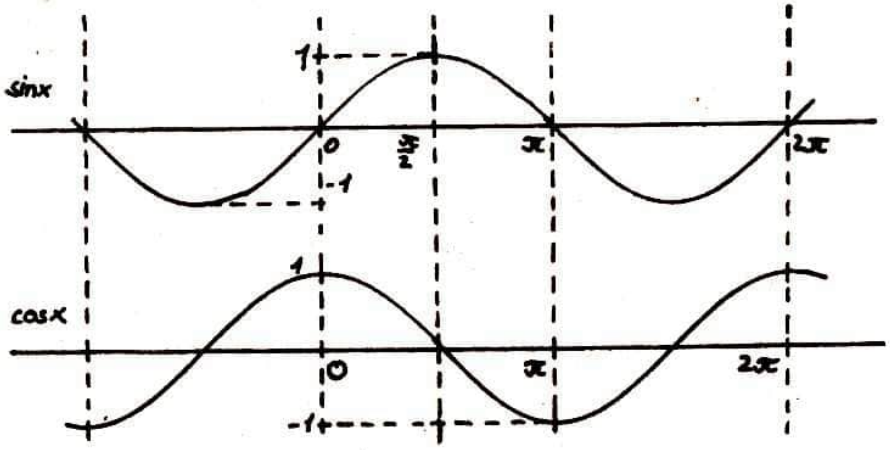
Aus (14) und den obigen Werten für $\sin\pi$ erhalten wir

$$f(-\pi) = 0 - 0 = 0, \quad f'(-\pi) = 0.$$

Dann folgt wieder aus Satz 2, daß $f(x) = 0$ gilt. Das beweist

den ersten Teil von (21). Der zweite Teil folgt durch Differenzieren.

Damit erhalten wir schließlich die wohl bekannten Bilder:



Prof. Dr. H. Triebel, FSU
Sektion Mathematik, Bereich Analysis

Preisaufgaben

Q 31 ①	Man löse das Gleichungssystem $\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2}$ $x + xy + y = 9$
Q 32 ①	Man löse die Ungleichung $\log_{\frac{1}{2}}x + \log_3 x > 1$
Q 33 ①	Es ist bekannt, daß x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der Gleichung $x^3-x^2-1=0$ sind. Man suche die Gleichung, deren Wurzeln $y_1=x_2+x_3$, $y_2=x_3+x_1$ und $y_3=x_1+x_2$ sind.
Q 34 ②	In einem Kegel sei eine Kugel einbeschrieben, deren Oberfläche sich zur Grundfläche des Kegels wie 4:3 verhält. Gesucht ist der Winkel an der Spitze des Kegels.

Q 35 Man löse das Gleichungssystem

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2}}$$

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{1}{3}$$

Q 36 Моторная лодка в 9 час отправилась вверх по течению реки,и в момент её отправления с лодки был брошен в реку мяч.В 9 час I5 минут лодка повернула и поплыла по течению.В котором часу лодка догонит мяч,если известно,что ее собственная скорость оставалась неизменной?

Einsendeschluß: 1. 9. 1984

Lösungen

P 53 Wir zeigen, daß genau die Zahlen als Summe von aufeinanderfolgenden nat. Zahlen dargestellt werden können, die keine Zweierpotenz sind (d. h. die einen umgekehrten Primfaktor besitzen):

1. Sei n keine Zweierpotenz, also $n = (2k+1) \cdot m$.
   Dann ist $n = (,-k)+(m-k+1)+\ldots+(m+k-1)+(m+k)$.
   Falls k m ist, heben sich in dieser Summe die ersten $2(k-m)+1$ Glieder auf und $n = (k-m+1)+\ldots+(k+m)$.
2. Die Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen enthält stets einen ungeraden Teiler:
   Sei $n = a+(a+1)+\ldots+(a+k) = \frac{(2a+k)(k+1)}{2}$.
   Von den Zahlen $2a+k$ und $k+1$ ist aber genau eine gerade und eine ungerade, was die Behauptung beweist.

P 54 Da jede Ecke des n-Ecks mit jeder durch eine Kante verbunden sein soll, hat das n-Eck $\binom{n}{2}$ Kanten. Da jede Kante 2 Seitenflächen angehört und zu jeder Seitenflä-

che mindestens 3 Kanten, hat das n-Eck höchstens $\frac{2}{3}\binom{n}{2}$ Seitenflächen. Nach dem Eulerschen Polyedersatz gilt daher: $n + \frac{2}{3}\binom{n}{2} = \binom{n}{2} + 2$.

$$6n+2n(n-1) = 3n(n-1)+12, \text{ also } n^2-7n+12 = 0$$

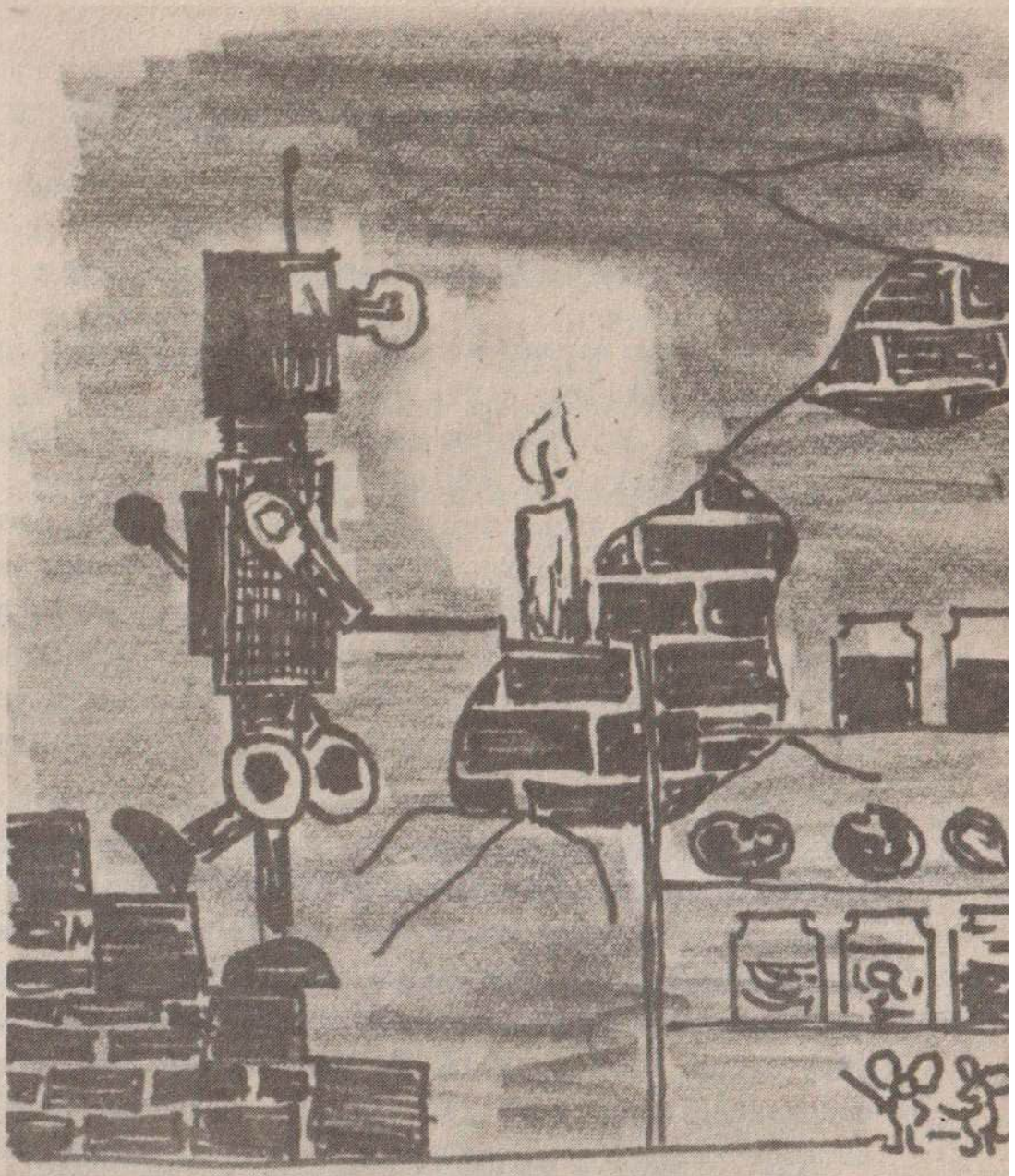
Daraus folgt $(n-3)(n-4) = 0$.

Da es kein Polyeder mit 3 Ecken gibt, ist $n=4$ einzige Lösung der Ungleichung. Also ist das Tetraeder das einzige konvexe n-Eck, in dem jede Ecke mit jeder durch eine Kante verbunden ist.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Burkhard Götz
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimmler, R. Heinrich, S. Kratochwil, M. Röppnack, K. Tauscher

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-422-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 16. 4. 1984
Titelbild: M. Hörschelmann



7/8
84

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
18. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,40 M

Geschichte der Logik (Teil 1)

Vorgeschichte der modernen mathematischen Logik

Das Wort Logik stammt ab von dem griechischen Wort logos, das soviel bedeutet wie Wort, Gedanke, Sinn, Denken, Vernunft. Es wird in zwei Bedeutungen gebraucht: erstens Logik als Verknüpfung von Gedanken in Schlußfolgerungen, als das, was objektiv dem Denkprozeß eigen ist und schlechtweg logisches Denken genannt wird, und zweitens Logik als Wissenschaft von dieser Verknüpfung von Gedanken. Die Geschichte des logischen Denkens selbst verliert sich im Morgengrauen der Menschwerdung. Davon wollen wir hier nicht sprechen. Wir wollen das Wort Logik in seiner zweiten Bedeutung gebrauchen, als Wissenschaft von der Verknüpfung von Gedanken.

Die Geschichte der Wissenschaft der Logik kann in vier große Perioden unterteilt werden: aristotelische Logik (gesamtes Altertum), terministische Logik (gesamtes Mittelalter), traditionelle formale Logik (etwa 16. bis 19. Jahrhundert), moderne mathematische Logik (seit 1879). Wir wollen im weiteren die Entwicklung der Logik in diesen Perioden kurz charakterisieren und werden dabei auch feststellen, wieso man den Beginn der letzten Periode so genau datieren kann. Anschließend soll noch auf eine moderne Entwicklung der Logik aus jüngster Zeit etwas genauer eingegangen werden.

Obwohl die 1. Periode als aristotelische Logik bezeichnet wird, beginnt doch die Geschichte der Logik nicht erst mit Aristoteles, der von 384 bis 322 v. u. Z. lebte. Schon bei Zenon, der 100 Jahre früher lebte, finden wir eine Reihe logischer Probleme erörtert, beispielsweise die Paradoxie von Achilles und der Schildkröte. Darin wird behauptet, daß der schnellfüßige Achilles das langsamste Tier, die Schildkröte, niemals einholen kann, falls diese zu Beginn des Laufes nur irgendeinen Vorsprung hat. Denn hat Achilles den ursprünglichen Ort der Schildkröte erreicht, ist diese inzwischen zu einem neuen Ort weitergekrochen, hat er jenen erreicht, ist die Schildkröte abermals

weitergekrochen usw. Die Kunst der logischen Diskussion verdanken wir Sokrates (469 - 399 v. u. Z.), und seinem Schüler Platon (428 - 348 v. u. Z.) erste Ansätze zur Lehre von der Deduktion und Beweisführung. Zu erwähnen wären noch andere antike Philosophen, beispielsweise Demokrit und die Pythagoräer. Daß man trotzdem Aristoteles, den großen Schüler Platons, als den Begründer der Wissenschaft der Logik bezeichnet, liegt daran, daß er die ersten umfassenden Schriften über Logik hinterlassen hat. Seine darin erreichten Ergebnisse machen bis heute einen bedutenden Teil der Logik aus. Seine Erörterungen über den Gang des Erkennens sind von materialistischen Gedanken durchdrungen, die Wahrheit definiert er im Sinne des Materialismus als Übereinstimmung unserer Kenntnisse mit der Wirklichkeit. Erstmals verwendet Aristoteles Aussageformen der Art "A kommt jedem B zu" und Beziehungen zwischen solchen Aussageformen anstelle konkreter Aussagen und dessen Beziehungen. Wir verdanken ihm die erste systematische Untersuchung möglicher Schlußformen, eine relativ exakte Beweistheorie und eine allgemeine Theorie der Wissenschaften, ferner Schriften über allgemeine Grundzüge des Lebens, zur Staatstheorie u. a. Von Marx und Engels wird Aristoteles als Geistesriese, als einer der größten Denker des Altertums bezeichnet.

Im Mittelalter wurden kaum Fortschritte in der formalen Logik erzielt. Die Philosophie und jede Wissenschaft wurden zu dieser Zeit in den Dienst der kirchlichen Dogmen gestellt, die herrschende Klasse paßte die idealistischen Systeme der Antike den Bedürfnissen der christlichen Glaubenslehre an. Durch die Scholastik, die Hauptrichtung der mittelalterlichen Philosophie, wurden die Erfahrungswerte und der objektive Charakter der logischen Gesetze negiert und damit die aristotelische Lehre entstellt. "Das Pfaffentum tötete in Aristoteles das Lebende und verewigte das Tote", sagte Lenin zu dieser Entwicklung. Zu den wenigen Fortschritten in der formalen Logik zählen die Beschreibung einiger Operationen der Aussagenlogik durch Petrus Hispanus (1205 - 1277) und die Darstellung logischer Operationen mit Hilfe eines Systems konzentrischer Kreise durch Raimundus Lullus (1235 - 1315).

Erst der Einfluß der Reformation ermöglichte, daß sich die Logik von der katholischen Theologie endgültig unabhängig machte. Mit dem Entstehen des Bürgertums begann ein stürmisches Wachstum von Wissenschaft und Technik. Die Entwicklung kapitalistischer Produktionsweisen machte eine tiefergehende Erforschung der Natur, der konkreten materiellen Dinge und Erscheinungen erforderlich sowie eine bessere Kenntnis der Denkprozesse. Francis Bacon (1561 - 1626), der Begründer des Materialimus der Neuzeit und der experimentellen Wissenschaften, unterzog die mittelalterliche scholastische Logik einer umfassenden Kritik. Seine Logik entartete allerdings im weiteren zu einer einseitigen empirischen Logik. Wertvolle Beiträge zur Entwicklung der formalen Logik in dieser Zeit, in der die 3. Periode beginnt, lieferte René Descartes (1596 - 1650). Ihm gebührt der Verdienst der eingehenden Untersuchung der deduktiv-mathematischen Methode bei der Erforschung von Fragen der Naturwissenschaften und der Erarbeitung des mathematischen Prinzips der vollständigen Induktion, das er als ein logisches Prinzip betrachtete. Einen bedeutenden Beitrag zur Entwicklung der Logik in dieser Periode leistete Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Ihn müssen wir auch als den Wegbereiter der Idee einer mathematischen Logik nennen, obwohl gerade seine diesbezüglichen Arbeiten ohne historische Wirkung blieben und erst Anfang unseres Jahrhunderts wiederentdeckt wurden. Leibniz begann als erster mit dem Versuch, logische Tatbestände mit Hilfe mathematischer Methoden und mathematischer Begriffsbildungen zu erfassen und stellte ein Programm auf, nach dem ein Zeichensystem zur Darstellung von "Charakteren" entwickelt werden sollte, dazu ein Kalkül, der eine rein rechnerische Behandlung aller in den Zeichen ausgedrückten Aussagen gestattet, und ein Verfahren, durch das für beliebige in den Zeichen ausgedrückte Aussagen entschieden werden kann, ob sie wahr oder falsch sind. Erst in unserem Jahrhundert konnte bewiesen werden, daß dieses "Leibniz-Programm" nicht realisierbar ist, da es ein solches universelles Entscheidungsverfahren nicht geben kann.
Die ersten intensiven Versuche zur Schaffung einer einheitlichen Symbolik für die logischen Operationen beginnen in der Mitte des 19. Jahrhunderts. Im Jahre 1847 veröffentlichte der

Engländer George Boole (1815 - 1869) seine Schrift "The Mathematical Analysis of Logic" und 1854 sein Werk "An Investigation of the Laws of Thought", in denen er die Grundlage der Algebra der Logik legte. Die Hauptbestandteile dieser Algebra sind die Theorie der Wahrheitsfunktionen und die Herstellung kanonischer Normalformen, beruhend auf den Grundbegriffen Multiplikation, Addition und Subtraktion, die hier als logische Operationen zu deuten sind. Booles Algebra der Logik wurde von W. S. Jevons (1835 - 1882) und Ernst Schröder (1841 - 1902) vervollkommnet und von P. S. Porezki (1846 - 1907) weiterentwickelt. Die erste Darstellung der klassischen zweiwertigen Aussagen- und Prädikatenlogik in Form einer formalisierten Sprache mit einer Axiomatisierung der aussagenlogisch allgemeingültigen Ausdrücke findet sich 1879 in einem Buch des Jenaer Mathematik-Professors Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 - 1925). Über ihn und seinen Einfluß auf die weitere Entwicklung der mathematischen Logik berichten wir im nächsten Beitrag.

Dr. G. Lieschke, FSU
Sektion Mathematik

Preisaufgaben

Q 37 (1) Beweisen Sie, daß für eine beliebige natürliche Zahl n die folgende Ungleichung gilt:
$\lg n \geq k \lg 2$, wobei $\lg n$ der dekadische Logarithmus der Zahl n und k die Anzahl der Primfaktoren von n ist.

Q 38 (1) Beweisen Sie, daß für die Längen der Seiten a, b, c eines beliebigen Dreiecks
$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3$
gilt.

Q 39 ①

Zeigen Sie die Gleichung

$$\cos\frac{2}{7} + \cos\frac{4}{7} + \cos\frac{6}{7} = -\frac{1}{2}$$

Q 40 ②

Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die

$$\sin^5 x - \cos^5 x = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}$$

Q 41 ①

Man bestimme alle nat. Zahlen n - 1, für die es natürliche Zahlen $a_1,\ldots,a_n$ gibt, die die Gleichung

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2} = 1$$ erfüllen.

Q 42 ②

Два совершенно одинаковых катера,имеющих одинаковую скорость в стоячей воде,проходят по двум различным рекам одинаковое расстояние (по течению) и возвращаются обратно (против течения).В какой реке на эту поездку потребуется больше времени в реке с быстрым течением или в реке с медленным течением? Ответ обосновать.

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse, Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden. Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in der Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

Einsendeschluß: 1. 11. 1984

Identitäten von Binomialkoeffizienten

Im folgenden wollen wir einige wichtige Identitäten für Binomialkoeffizienten beweisen.
Es gibt dafür 2 gebräuchliche Methoden:

1. arithmetisch
   (dieser Weg wurde vor allem in den Vorlesungen gewählt)
2. mengentheoretisch - durch Anzahlinterpretation

Die 2. Methode hat den Vorteil der größeren Anschaulichkeit. Demzufolge erhalten die Formeln für den Leser einen tieferen Sinn.
Für den Beweis dieser Behauptung sollen folgende Sätze dienen. Zum Schluß werden wir dann mit Hilfe des Inhaltes dieser Sätze das Wesen des Pascalschen Dreiecks charakterisieren.

Zur Wiederholung:

Um Identitäten für Binomialkoeffizienten zu untersuchen, müssen wir erst einmal wissen, was Binomialkoeffizienten eigentlich sind.

Man kann für alle Potenzen von (a+b) binomische Formeln herleiten.
Ein Spezialfall ist $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Gleiches kann man aber auch für höhere Potenzen erreichen, wie z. B.:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$\vdots$$

Dabei ist zu beobachten, daß der Exponent der Variablen a von Glied zu Glied abfällt, wogegen der Exponent der Variablen b in gleicher Weise wächst. Die Summe beider Exponenten ist für $(a+b)^n$ bei jedem Glied gleich n.

Die vor den einzelnen Gliedern stehenden Faktoren sind die "Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$".
Man liest hierbei n über k.

Definition zur Berechnung von $\binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \qquad \text{für } k \leq n.$$

Zum Wesen des Binomialkoeffizienten:

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ beschreibt die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen (siehe Kombination ohne Wiederholung).

S a t z 1: Es seien n und k nicht negative ganze Zahlen mit $k \leq n$. Dann gilt stets $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Beweis: K sei eine k-elementige Teilmenge der Menge N mit n Elementen. Nun ordnen wir der Teilmenge K ihr Komplement N-K zu, welches n-k Elemente enthält.

D. h. die Funktion

$$f : K^* \longrightarrow (N-K)^*$$

(wobei K^* die Gesamtheit der k-elementigen und $(N-K)^*$ die Gesamtheit der (n-k)-elementigen Teilmengen von N ist) ist eine eineindeutige Abbildung von K^* auf $(N-K)^*$.

Das bedeutet aber, daß K^* und $(N-K)^*$ die gleiche Anzahl von Elementen haben.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

S a t z 2: Es seien k und r nicht negative ganze Zahlen mit $r \leq k$. Dann gilt stets

$$\binom{k}{r} + \binom{k}{r+1} = \binom{k+1}{r+1}.$$

Beweis: Wir betrachten eine (k+1)-elementige Menge X. In ihr fixieren wir ein Element x.

Es sei $T^*_{r+1}(X)$ die Menge aller (r+1)-elementigen Teilmengen von X. Nun legen wir folgende Zuordnungsvorschrift auf $T^*_{r+1}(X)$ fest:

Es sei $T_{r+1} = T^*_{r+1}(X)$. Dann gilt

$$T_{r+1} \longrightarrow T_{r+1} - \{x\}.$$

Dabei müssen zwei Fälle unterschieden werden.

1. Fall: T_{r+1} enthält das Element x. Dann gilt

$$T_{r+1} \longrightarrow T_{r+1} - \{x\} \sim T_r$$

(wobei T_r eine r-elementige Teilmenge von X ist).

2. Fall: T_{r+1} enthält das Element x nicht. Dann gilt

$$T_{r+1} \longrightarrow T_{r+1} - \{x\} \sim T_{r+1}$$

(wobei T_{r+1} eine (r+1)-elementige Teilmenge von X ist).

Daraus folgt:

$$T^*_{r+1}(X) \longrightarrow T^*_r(X-\{x\}) \cup T^*_{r+1}(X-\{x\}).$$

Da $T^*_r(X-\{x\})$ und $T^*_{r+1}(X-\{x\})$ disjunkt sind, gilt

$$\mathrm{card}(T^*_{r+1}(X)) = \mathrm{card}(T^*_r(X-\{x\}) + \mathrm{card}(T^*_{r+1}(X-\{x\})),$$

daraus folgt

$$\binom{k+1}{r+1} = \binom{k}{r} + \binom{k}{r+1}.$$

S a t z 3: Es sei k eine nicht negative ganze Zahl. Dann gilt stets

$$2^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r}.$$

Beweis: Wir wissen, daß die Anzahl der Elemente der Potenzmenge einer k-elementigen Menge gleich 2^k ist.
Es sei $T^*_r(X)$ die Menge aller r-elementigen Teilmengen von einer k-elementigen Menge X.

$$\bigcup_{r=0}^{k} T^*_r(X) = P(X)$$

(wobei P(X) die Potenzmenge von X ist).

Die Anzahl der r-elementigen Teilmengen einer Menge X mit k Elementen ist $\binom{k}{r}$.

Lassen wir r von 0 bis k laufen, so erhalten wir die Zahl der Elemente der Potenzmenge von X.

$$2^k = P^*(X) = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{r} + \ldots + \binom{k}{k}$$

(wobei $P^*(X)$ die Anzahl der Elemente der Potenzmenge von X ist).
Daraus folgt

$$2^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r}.$$

S a t z 4: Es sei k eine natürliche Zahl. Dann gilt stets

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} = 0,$$

d. h., von jeder endlichen nichtleeren Menge X ist die Anzahl der Teilmengen von X mit gerader Elementezahl gleich der Anzahl

der Teilmengen von X mit ungerader Elementezahl. Es gilt:

$$\sum_{p=0} \binom{k}{2p} = \sum_{q=0} \binom{k}{2q+1} = 2^{k-1}.$$

Beweis: Wir führen den Beweis in 2 Schritten.

I. Die Menge X hat eine ungerade Elementezahl k.

T sei ein Element der Potenzmenge von X.

Wir legen folgende Zuordnung fest:

$$T \in P(X) \rightarrow X-T .$$

Sie stellt eine eineindeutige Abbildung von der Menge aller Teilmengen von X mit gerader Elementezahl auf die Menge aller Teilmengen von X mit ungerader Elementezahl dar.

Folglich gilt:

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{k-1} = \binom{k}{1} + \binom{k}{3} + \ldots + \binom{k}{k}.$$

II. Die Menge X hat eine gerade Elementezahl k.

Wir wählen ein Element x von X aus.

Es sei $T \in P(X-x)$ und

$$T \cup \{x\} \longrightarrow X-T.$$

Sie stellt eine eineindeutige Abbildung von der Menge aller Teilmengen von X mit gerader Elementezahl auf die Menge aller Teilmengen von X mit ungerader Elementezahl dar.

Also gilt:

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{k} = \binom{k}{1} + \binom{k}{3} + \ldots + \binom{k}{k-1}.$$

Aus I. und II. folgt

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} = 0.$$

S a t z 5: Es seien m und r nicht negative ganze Zahlen.

Dann gilt stets

$$\sum_{\rho=0}^{r} \binom{m+\rho}{m} = \binom{m+r+1}{m+1},$$

$$\sum_{\rho=0}^{r} \binom{m+\rho}{\rho} = \binom{m+r+1}{r}.$$

Beweis: Wir betrachten eine Menge X mit genau m+r+1 Elementen.

$$X = \{x : x \in \mathbb{N} , x \leq m+r+1\}$$

X wird folgendermaßen zerlegt:

$$X = \{1\} \cup \{x : x \in \mathbb{N} \ , \ 2 \leq x \leq r+1\} \cup \{x : x \in \mathbb{N} \ , \ r+2 \leq x \leq m+r+1\} .$$

Nun betrachten wir die Menge aller (m+1)-elementigen Teilmengen von X, also $T^{*}_{m+1}(X)$.

Diese Menge können wir als Vereinigung folgender Mengen darstellen:

$$T^{*}_{m+1}(X) = \bigcup_{i=1}^{r+1} A_i .$$

Definition:

$$A_1 = \{T_{m+1} : T_{m+1} \in P(X) \wedge 1 \in T_{m+1}\}$$
$$A_2 = \{T_{m+1} : T_{m+1} \in P(X) \wedge 1 \notin T_{m+1}, \ 2 \in T_{m+1}\}$$
$$\vdots$$
$$A_{r+1} = \{T_{m+1} : T_{m+1} \in P(X) \wedge 1 \notin T_{m+1}, \ldots, r \notin T_{m+1}, (r+1) \in T_{m+1}\} .$$

Hierbei ist $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, (d. h. die Mengen sind disjunkt).

Nun gilt:

$$A_i^{*} = \binom{m+r+1-i}{m}$$

(wobei A_i die Anzahl aller m-elementigen Teilmengen der Menge mit m+r+1-i Elementen ist).

Zur Erläuterung:

Auf Grund der Definition der einzelnen Mengen A_i gilt folgendes: Die Elemente der A_i sind (m+1)-elementige Teilmengen von X. Bei der Bildung dieser Teilmengen ist zu beachten, daß die Elemente von A_i (die Teilmengen von X) jeweils das i als Element enthalten. Alle $x < i$ dürfen aber laut Definition nicht enthalten sein. Es stehen also noch m+r+1-i Elemente zur Auswahl, um die restlichen m Elemente der (m+1)-elementigen Teilmengen von X zu ergänzen.

Dies gilt, da die Zuordnung

$$T \in A_i \longrightarrow T - \{i\}$$

eine eineindeutige Abbildung von A_i auf die Menge aller m-elementigen Teilmengen von $X - \{1, \ldots, i\}$ ist.

Daraus folgt:

$$T^{*}_{m+1}(X) = \sum_{i=1}^{r+1} A_i^{*}$$

und daraus folgt wiederum:

$$\binom{m+r+1}{m+1} = \sum_{i=1}^{r+1} \binom{m+r+1-i}{m} ,$$

wobei das letztere aufgeschrieben werden kann als

$$\binom{m+r+1}{m+1} = \sum_{\rho=0}^{r} \binom{m+\rho}{m} .$$

Nach Satz 1 kann man dafür auch schreiben:

$$\binom{m+r+1}{r} = \sum_{\rho=0}^{r} \binom{m+\rho}{\rho}.$$

Zum Pascalschen Dreieck

Das Pascalsche Dreieck hat die Form:

$(a+b)^0$																		
$(a+b)^1$																		
$(a+b)^2$																		
$(a+b)^3$																		
$(a+b)^4$																		
$(a+b)^5$																		
$(a+b)^6$																		
⋮																		

Es dient zur Bestimmung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.

Z. B.: entsprechen die Koeffizienten von $(a+b)^n$ der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks.

Satz 1 unserer Betrachtung sagt aus, daß jede Zeile symmetrisch aufgebaut ist.

Satz 2 stellt eine Rekursionsformel zum Berechnen der Binomialkoeffizienten dar.

Beispiel: Die Zahlen jeder Zeile entstehen, wenn man die beiden benachbarten darüberstehenden Zahlen addiert.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
⋮

d. h. allgemein:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Satz 3 besagt, daß die Summe der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks gleich 2^n ist.

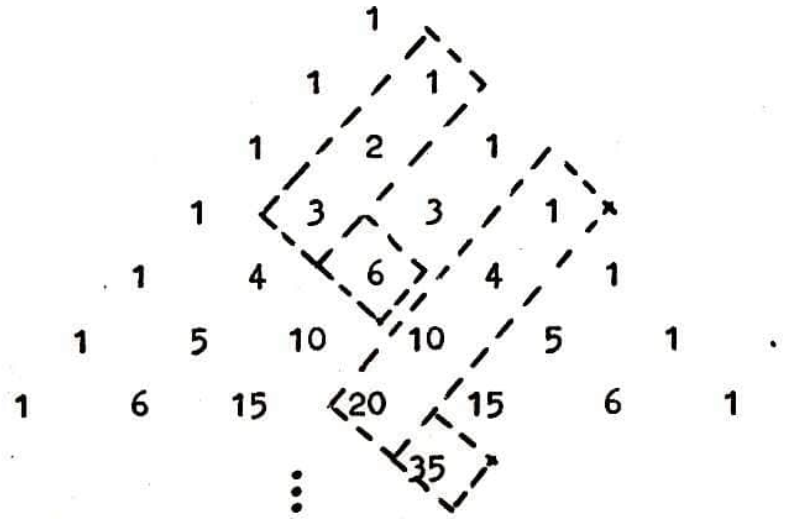
Satz 4: Bei alternierenden Vorzeichen der Koeffizienten der n-ten Zeile ist ihre Summe gleich 0.

Beispiel: n=5

$$1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$$
$$3 - 3 = 0$$
$$0 = 0$$

Satz 5 sagt aus, daß die Summe der ersten m Zahlen der k-ten Spalte gleich der rechts unter der m-ten Zahl stehenden Zahl der nächsten Spalte entspricht.

Beispiel:



Diese Feststellungen belegen, daß die Aussagen der Sätze 1 bis 5 den Aufbau des Pascalschen Dreiecks beschreiben.

Literatur: Kleine Enzyklopädie - Mathematik
Flachsmeier: "Kombinatorik"

Solweig und Holger Matthes, FSU Jena
Mathematik/Physik-Lehrerstudenten
2. Studienjahr

Mathematische Automatenmodelle

In vielen mathematischen und praktischen Untersuchungen ist die Frage zu beantworten, ob gewisse betrachtete Objekte W eine bestimmte Eigenschaft E haben. Dabei sei uns das Objekt W als Wort w über einem endlichen Alphabet Σ gegeben.

Beispiel: 1. natürliche Zahlen im Dezimalsystem:

$$\Sigma = \{0,1,\ldots,9\}$$

2. Begriffe in deutscher Sprache, hier ist

$$\Sigma = \{a,b,\ldots,z\}.$$

Unter einem Wort über einem endlichen Alphabet $\Sigma = \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ wollen wir hier immer eine endliche Folge von Elementen des Alphabets verstehen (wobei wir die die Folgenglieder trennenden Kommas weglassen): $a_{k_1}a_{k_2}a_{k_3}\ldots a_{k_l}$ ($a_{k_i} \in \Sigma$). Die Menge aller Wörter über Σ heißt Wortmenge Σ^* über Σ.

Zu ihr zählen wir auch das <u>leere Wort</u>, das aus null Buchstaben besteht, wir bezeichnen es mit e.

Ist zu untersuchen, ob eine natürliche Zahl x durch 5 teilbar ist und ist nur X im Dezimalsystem dargestellt gegeben, so brauchen wir nur zu untersuchen, ob X auf die Ziffern 0 oder 5 endet.

Im allgemeinen sind den Objekten W in eindeutiger Weise Wörter w über einem endlichen Alphabet Σ zugeordnet und der Eigenschaft E ist eine Worteigenschaft E' zuordenbar, daß gilt

W hat Eigenschaft E $\leftrightarrow$ w hat Eigenschaft E'.

Im obigen Beispiel:

X ist durch 5 teilbar $\leftrightarrow$ x endet auf 0 oder 5.

Die Frage: "Hat w die Eigenschaft E'?" wird man nach Analyse der Ziffernfolge von w beantworten können. Wie tiefgreifend diese Analyse sein muß, ist von Fall zu Fall unterschiedlich.

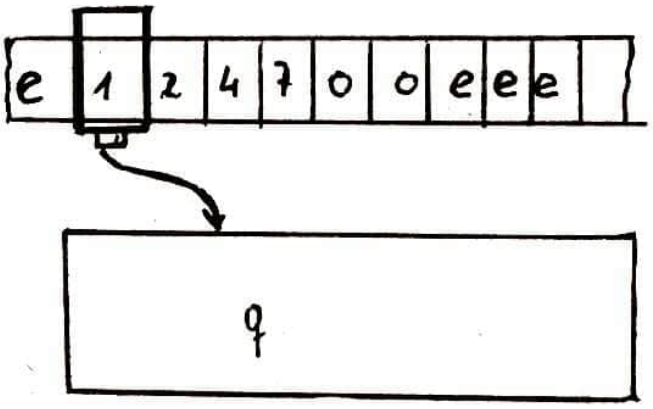
Wir wollen uns nun folgender Frage zuwenden: Können wir die vorzunehmende Analyse der Ziffernfolge durch einen Algorithmus beschreiben, können wir ein Modell eines Automaten schaffen, der diese Aufgabe bewältigt? Wie müßte dieser Automat ausse-

hen? Gibt es für den Automatentyp grundsätzlich unlösbare Aufgaben?

Es hat sich herausgestellt, daß es tatsächlich Automatentypen unterschiedlichen Leistungsvermögens gibt. Deshalb wollen wir auch mit dem einfachsten Modell, mit einem sogenannten endlichen Automaten beginnen.

Er besteht aus 3 Teilen. Auf dem Eingabeband, das aus einzelnen, hintereinander liegenden Speicherplätzen besteht, sei das zu untersuchende Wort von links nach rechts aufgeschrieben, wobei auf jedem Platz genau ein Buchstabe stehe. Die dem Wort folgenden Plätze seien leer. Das Gedächtnis des Automaten ist durch seinen inneren Zustand q charakterisiert. Die Menge der möglichen inneren Zustände ist endlich. Sie sei mit $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ bezeichnet. Außerdem besitze der Automat einen Lesekopf.

Wie soll solch ein Automat funktionieren? Er arbeite taktweise. In einem Takt liest der Lesekopf den im Eingabeband über ihm stehenden Buchstaben a, gibt diesen ans Gedächtnis weiter und bewegt sich zum rechts daneben liegenden Speicherplatz des Eingabebandes. Das Gedächtnis geht in einen durch seinen inneren Zustand q_i und den gelesenen Buchstaben a eindeutig bestimmten neuen inneren Zustand q_j über.



Dieser Vorgang läßt sich mittels einer eindeutigen Abbildung von $Q \times \Sigma$ in Q beschreiben. Jedem Paar (momentaner innerer Zustand, gelesener Buchstabe) wird genau ein neuer innerer Zustand zugeordnet.

Wir wollen annehmen, daß es einen ausgezeichneten Anfangszustand s gebe, in dem sich das Gedächtnis immer zu Beginn einer Rechnung befinde. Außerdem gebe es eine Teilmenge F von Q, den Endzuständen, deren Bedeutung noch erläutert wird. Fassen wir das Gesagte zusammen in der folgenden

DEFINITION: Ein geordnetes 5-Tupel $M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ heißt endlicher Automat, wenn

(1) Q ist endliche Menge der Zustände $\{q_1,\dots,q_n\}$.

(2) Σ ist endliche Menge der erlaubten Eingabesymbole $\{a_1,\dots,a_m\}$.

(3) δ ist eindeutige Abbildung von $Q \times \Sigma$ in Σ_1.

(4) $s \in Q$, Anfangszustand.

(5) $F \in Q$, Menge der Endzustände.

Unter einer <u>Rechnerkonfiguration</u> verstehen wir das geordnete Paar des inneren Zustandes q und des über dem Lesekopf beginnende, nach rechts gelesene Wort w : (q,w). Die Rechnerkonfiguration enthält alle Information, die den weiteren Rechnungsverlauf bestimmen: den bereits erreichten inneren Zustand und den noch nicht gelesenen Teil des zu untersuchenden Wortes.
Ist dann z. B. a der erste Buchstabe von w ($w = a\,w'$), q_i der derzeitige innere Zustand und $\delta(q_i,a) = q_j$, so geht die Rechnerkonfiguration (q_i,w) in einem Takt in (q_j,w') über. Wir schreiben $(q_i,w) \vdash (q_j,w')$ (lies: die Konfiguration (q_i,w) wird in einem Takt in die Konfiguration (q_j,w') überführt).
Die Arbeit des Automaten läßt sich als Kette aufeinanderfolgender Konfigurationen veranschaulichen

$$(q_{i_1},w_1) \vdash (q_{i_2},w_2) \vdash (q_{i_3},w_3) \vdash \dots \vdash (q_{i_k},w_k).$$

Gelangt man in endlich vielen Takten von (q_i,w) zu (q_j,w'), so schreiben wir $(q_i,w) \overset{*}{\vdash} (q_j,w')$ (lies: Die Konfiguration (q_i,w) wird in endlich vielen Takten in die Konfiguration (q_j,w') überführt).
Wir sagen nun, das Wort w wird vom Automaten M akzeptiert, wenn $(s,w) \overset{*}{\vdash} (f,e)$, wobei $f \in F$ sein soll. Natürlich kann es auch Wörter w geben, die nicht akzeptiert werden, d. h. $(s,w') \overset{*}{\vdash} (q,e)$ und $q \notin F$.
Die Menge der von einem endlichen Automaten akzeptierten Wörter wird auch reguläre Menge genannt. Machen wir uns an zwei Beispielen klar, wie eine reguläre Menge aussehen kann.

BEISPIEL: 1. $\Sigma = \{0,1,2,\ldots,9\}$

$Q = \{s,p,q,f\}$

: δ:

$Q \backslash \Sigma$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s	f	q	p	f	q	p	f	q	p	f
p	p	f	q	p	f	q	p	f	q	p
q	q	p	f	q	p	f	q	p	f	q
f	f	q	ü	f	q	p	f	q	p	f

Ablesebeispiel: $\delta(q,5) = f$

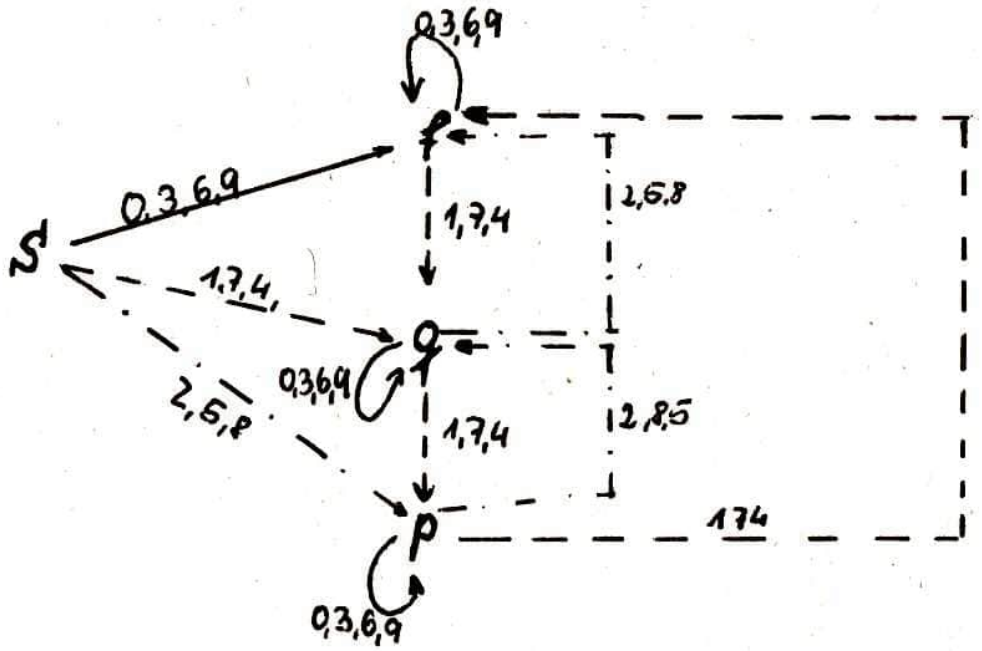
$F = \{f\}$, Anfangszustand s

Dieser Automat akzeptiert die Menge der durch 3 teilbaren im Dezimalsystem dargestellten natürlichen Zahlen. Wir wollen dies an den Zahlen 234 und 4291 demonstrieren:

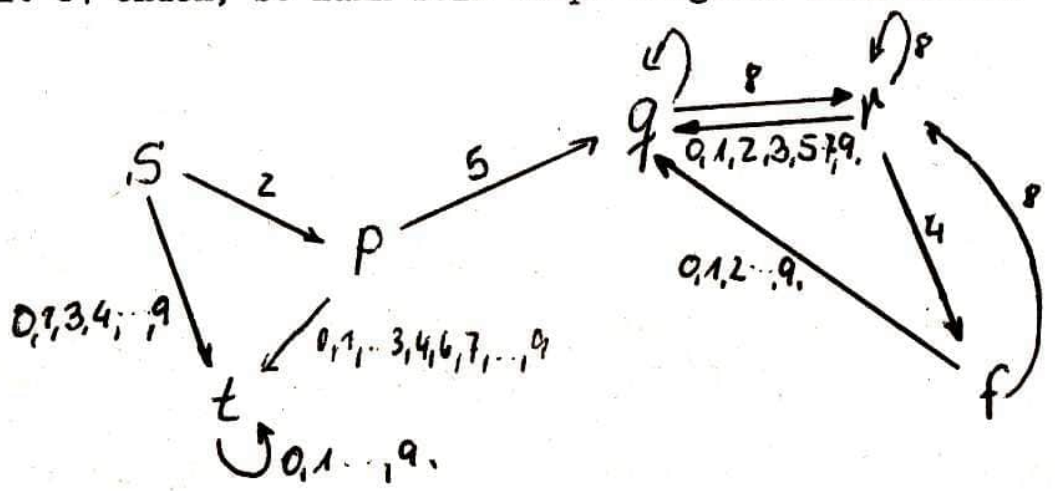
$(s,234) \vdash (p,34)$, da $\delta(s,2) = p$,
$(p,34) \vdash (p,4)$, da $\delta(p,3) = p$,
$(p,4) \vdash (f,0)$, da $\delta(p,4) = f$.
$(s,234) \vdash^{*} (f,0)$. 234 wird akzeptiert und $3 \mid 234$

$(s,4291) \vdash (q,291)$, da $\delta(s,4) = q$,
$(q,291) \vdash (f,91)$, da $\delta(q,2) = f$,
$(f,91) \vdash (f,1)$, da $\delta(f,9) = f$,
$(f,1) \vdash (q,e)$, da $\delta(f,1) = q$.
$(s,4291) \vdash^{*} (q,e)$, 4291 wird nicht akzeptiert und $3 \nmid 4291$.

Natürlich ist diese Darstellung recht unübersichtlich. Anschaulicher ist folgende graphische Darstellung: Wir ordnen einem endlichen Automaten einen gerichteten, bewerteten Graphen zu. Die Knoten werden den Zuständen $q \in Q$ eineindeutig zugeordnet. Die Knoten q,q' seien mit einem von q nach q' gerichteten, mit $a \in \Sigma$ bewerteten Bogen verbunden genau dann, wenn $(q,a) \rightarrow q' \in \delta$.
Konkret:



Man verdeutliche sich die Arbeitsweise bei den obigen Beispielen 234 und 4291 am 2. Diagramm. Wenn ein endlicher Automat alle Zahlen akzeptieren soll, die mit den Ziffern 25 beginnen und mit 84 enden, so kann sein Graph folgende Form haben:

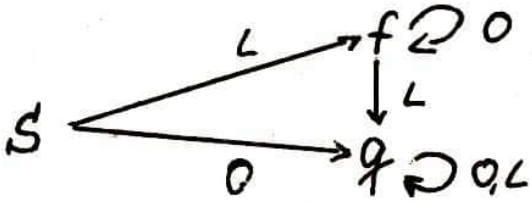


Der Leser mache sich die Funktionsweise an den Zahlen 23, 25184, 2508484, 2578384, 25884 klar!

AUFGABEN: 1. Konstruiere einen endlichen Automaten, der alle im Dezimalsystem dargestellten Potenzen von 10 akzeptiert.

2. Konstruiere einen endlichen Automaten, der alle durch 25 teilbaren im Dezimalsystem dargestellten Zahlen akzeptiert.

Untersucht man die Menge der Potenzen von 2, so stellt sich heraus, daß man wohl einen endlichen Automaten konstruieren kann, falls man die Darstellung in Dualsystem wählt:



Für das Dezimalsystem ist diese Aufgabe so nachweislich nicht lösbar. Wir sollten uns im klaren sein, daß mathematisches Objekt und Darstellung desselben nicht einfach gleichzusetzen sind, daß die Form der Darstellung einen nicht unwesentlichen Einfluß auf die Lösung eines Problems haben kann! Was wir hier betrachten, sind Eigenschaften von Wortmengen, die von Automaten akzeptiert werden. Diese können mehr oder weniger komplizierte Eigenschaften der als solche Wörter dargestellten mathematischen Objekte widerspiegeln, was im jeweiligen Fall immer bedacht sein will.

Stellen wir uns einem neuen Problem.

Gegeben sei $\Sigma = \{a,b,+,\cdot,(,)\}$. Wir wollen einen Automaten finden, der nur Wörter aus Σ^* akzeptiert, die Terme sind: a,b sind Terme. Mit A,B sind auch (A+B) und (A·B) Terme, z. B.: a, (a+b), ((a·b)+b),(a+(a+(a·a)). Ein endlicher Automat genügt nicht. Zwar ließe sich feststellen, ob Variable und Operationszeichen richtig eingesetzt sind, aber eine Kontrolle der Klammerung ist nicht möglich.

Indirekter Beweis: Ein solcher Automat M muß wenigstens gewährleisten, daß in einem akzeptierten Wort gleich viele linke und rechte Klammern auftreten. Für M mögen n innere Zustände möglich sein.

Die Zustände, in denen sich M nach Lesen von (a+,(a+(a+,... (a+(a+(a+,..., (a+(a+... (a+((n+1)-mal (a+) seien $q_{k_1}, q_{k_2}, \ldots, q_{k_{n+1}}$.

Dann gibt es wenigstens zwei Wörter, etwa das l-te und j-te ($l < j$), die auf den gleichen Zustand führen $q_{k_l} = q_{k_j}$ (Dirich-

letscher Schubfachschluß).

Wir schreiben $w_l = (a+(a+\ldots(a+\,[l \text{ mal } (a+]$

$w_j = (a+(a+\ldots\ (a+\,[j \text{ mal } (a+]$

$w = (a+(a+\ldots\ +a)+a) = w_l\,\bar{w}_l$ (Term mit l linken und l rechten Klammern).

$w = w_l\bar{w}_l$ wird von M akzeptiert, da $w_l\bar{w}_l$ Term ist:

$$(s,w) \overset{*}{\vdash} (f,e) \qquad f \in F$$

Wegen $(s,w_l) \overset{*}{\vdash} (q_{k_l},e)$ ist

$$(s,w_l\bar{w}_l) \overset{*}{\vdash} (q_{k_l},\bar{w}_l) \overset{*}{\vdash} (f,e).$$

Wegen $(s,w_j) \overset{*}{\vdash} (q_{k_j},e)$ und $q_{k_j} = q_{k_l}$ ist

$$(s,w_j\bar{w}_l) \overset{*}{\vdash} (q_{k_l},\bar{w}_l) \overset{*}{\vdash} (f,e).$$

Damit wird $w_j\bar{w}_l$ akzeptiert. $w_j\bar{w}_l$ ist aber kein Term, da die Anzahl der linken Klammern nicht mit der Anzahl der rechten Klammern übereinstimmt, damit der Widerspruch, Ende des Beweises.

Wir sind auf die Grenzen des Leistungsvermögens der endlichen Automaten gestoßen.

Wir wollen ihn etwas erweitern und ein Hilfsgedächtnis in der Form eines einseitig (nach unten) begrenzten Bandes, auf das mittels eines Lese/Schreibkopfes Wörter von unten nach oben geschrieben werden können. Gelesen kann nur von oben nach unten werden. Man stelle sich dabei vor, daß die Buchstaben beim Lesen gelöscht werden. Dem Rechner ist also im gewissen Sinne nur der oberste Buchstabe des Bandes zugänglich. Beim Schreiben auf dieses Band werden die früher geschriebenen Buchstaben in einen unzugänglichen Bereich, in den "Keller", hinuntergedrückt (push down). Um sie hervorzuholen, müssen die darüberliegenden erst gelöscht werden.

Aus dieser Vorstellung läßt sich die Bezeichnung "Kellerautomat" oder "Pushdownautomat" verstehen. Das Hilfsband nennen wir Pushdownliste oder einfach Keller.

In einem Takt werden ein Buchstabe a des Eingabebandes wie beim

endlichen Automaten, der obere Buchstabe Z des Kellers gelesen. Durch inneren Zustand und diese beiden Buchstaben wird bestimmt, in welchen neuen Zustand der Rechner übergeht und welches Wort in den Keller gespeichert wird.

DEFINITION: Ein 7-tupel $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, Z_0, F)$ heißt Kellerautomat/Pushdownautomat:

(1) Q ist endliche Menge der inneren Zustände $q_1, \ldots, q_n$

(2) Σ Ist endliche Menge der zulässigen Eingabesymbole

(3) M ist endliche Menge (Alphabet der Pushdownliste)

(4) δ ist eindeutige Abbildung von $Q \times (\Sigma \cup \{\bullet\}) \times \Gamma$ in $Q \times \Gamma^*$

(5) $s \in Q$ Startzustand

(6) $Z_0 \in M$ Startsymbol der Pushdownliste

(7) $F \subseteq Q$ Menge der Endzustände.

Ähnlich zum endlichen Automaten ist eine <u>Konfiguration</u> hier ein Tripel (q, w, z), wobei $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$, $z \in \Gamma^*$.
Gilt $\delta(q, a, Z) = (q', z')$ und $w = aw'$, $z = \bar{z} \cdot Z$, so können wir einen Takt wieder durch die Ausgangs- und Endkonfiguration darstellen:

$$(q, w, z) \vdash (q', w', \bar{z}z').$$

Ein Wort w soll vom Automaten akzeptiert werden genau dann, wenn die Konfiguration (s, w, Z_0) in endlich vielen Schritten in eine Konfiguration der Form (f, e, e) mit $f \in F$ überführbar ist:

$$(s, w, Z_0) \vdash^* (f, e, e).$$

Wir wollen nun einen Pushdownautomaten konstruieren, der zur Lösung der oben gestellten Aufgabe nützt. Wir schränken die Anforderungen etwas ein:
Ein Automat, der kontrolliert, ob Klammern in richtiger Zahl und Art gesetzt sind, d. h. daß zu jeder linken Klammer eine rechte existiert und daß linke immer links von den zu ihnen gehörigen rechten stehen, ist der folgende:

BEISPIEL: $Q = \{s,p,q\}$

$\Sigma = \{(,)\}$

$\Gamma = \{Z_0, Z\}$

$\delta = \{(s,(,Z_0) \longrightarrow (a,Z_0Z);\ (s,),Z_0) \longrightarrow (p,Z_0)$

$(p,(,Z_0) \longrightarrow (p,Z_0);\ (p,),Z_0) \longrightarrow (p,Z_0);$

$(p,e,Z_0) \longrightarrow (p,e);$

$(q,(,Z) \longrightarrow (q,ZZ);\ (q,),Z) \longrightarrow (q,e);$

$(q,),Z_0) \longrightarrow (p,Z_0);$

$(q,e,Z_0) \longrightarrow (q,e);\ (q,e,Z) \longrightarrow (p,e);$

$(p,e,Z) \longrightarrow (p,e)\}$

s Startzustand

$F = \{q\}$.

Leider läßt sich die Wirkungsweise nicht mehr so übersichtlich an einem Graphen wie beim endlichen Automaten demonstrieren. Der Leser möge die Mühe nicht scheuen, sich trotzdem die Wirkungsweise anhand einiger Beispiele zu verdeutlichen.
Er funktioniert nach folgendem Prinzip: Solange keine Anordnungsforderung vernachlässigt ist (solange nicht mehr rechte als linke Klammern gelesen werden), arbeitet er im Zustand q und speichert im Keller die Anzahl der "überschüssigen" linken Klammern, zu denen noch keine rechte gelesen wurde. Ist das Wort zu Ende, so müssen auch alle überschüssigen linken Klammern aufgebracht sein. Sonst geht der Rechner in den Zustand p über, von dem er nicht mehr nach q gelangen kann.
Obwohl ein Kellerautomat etwas mehr Komfort als endliche Automaten hat und so kompliziertere Fragen entscheiden kann, sind auch ihm Grenzen gesetzt, die schon an elementaren Beispielen aufzeigbar werden.
Stellen wir folgende Aufgabe: Gegeben sei uns eine endliche Folge von natürlichen Zahlen. Es ist zu entscheiden, ob wenigstens zwei Elemente der Folge gleich sind.
Angenommen, wir hätten einen Kellerautomaten, der diese Aufgabe löste, so müßte er die Zahlen beim Lesen vom Eingabeband

irgendwie eineindeutig in den Keller abbilden, denn es kann ja der Fall auftreten, daß die letzte Zahl mit allen früheren verglichen werden muß.
Nun läßt sich die letzte Zahl mit einer weit unten im Keller gespeicherten Zahl nur dann vergleichen, wenn die darüber liegende Information gelöscht wird, das Gedächtnis des Rechners mit seinen endlich vielen Zuständen kann nur einen beschränkten Teil an Information aufnehmen, so daß bei einer hinreichend großen Anzahl von gespeicherten Zahlen hier ein irreversibler Informationsverlust auftritt. Das darf aber nicht passieren.

Das mag genügen. Natürlich läßt sich alles exakt beweisen, ähnlich wie beim Gegenbeispiel für endliche Automaten.
Man kann nun den Automaten ein weiteres Mal erweitern, indem man Automaten mit 2,3,... Kellern definiert.
Mit dem 2-Kellerautomaten ist ein gewisser Abschluß erreicht. Alle Probleme, die mit einem Automaten mit mehr als zwei Kellern lösbar sind, sind auch mit einem 2-Kellerautomaten lösbar. Eine zum 2-Kellerautomaten äquivalente Definition gab 1936 A. Turing. Seine Turingmaschine ist Grundstein einer modernen Theorie. Werden Wörter einer Eigenschaft E von einer Turingmaschine akzeptiert, so nennt man die Menge dieser Wörter Turing-entscheidbar. Es hat sich gezeigt, daß alle im intuitiven Sinne entscheidbaren Probleme bei entsprechender mathematischer Formulierung auch Turing-entscheidbar sind. Dieser Erfahrungssatz, der natürlich nicht mathematisch beweisbar ist, wie wollte man den intuitiven Begriff "Entscheidbar" adäquat formalisieren, ist Bestandteil der These von Church und zeigt, daß wir mit dem Begriff der Turingmaschine ein sehr gutes Mittel zur mathematischen Beschreibung unserer Erkenntnistätigkeit haben.

Thomas Gundermann, FSU Jena
Mathematik/Physik-Lehrerstudent
2. Studienjahr

Die Anfänge des Zählens und Rechnens

Es ist uns heute nicht möglich, genaue Angaben über die Anfänge der Mathematik, des Zählens und Rechnens zu machen. Erhalten gebliebene Bild- und Schriftdokumente aus vergangenen Zeitepochen berichten zuverlässig über den Entwicklungsstand der Wissenschaften jener Zeiten und gestatten Rückschlüsse auf die Zahlenschreibweisen und die genutzten Zahlensysteme. Zu den ältesten ägyptischen Schriften gehört ein Rechenbuch, welches vor ca. 3600 Jahren von einem Schreiber namens Ahmes verfaßt wurde (Abb. 1). Es beginnt mit den vielversprechenden Worten "Vorschrift zu gelangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge ... aller Geheimnisse, welche enthalten sind in den Gegenständen" und beinhaltet u. a. Bruchrechnungen und geometrische Aufgaben.

Mit Sicherheit jedoch reichen die Anfänge der Mathematik Jahrtausende weiter zurück. Vor 12000 bis 15000 Jahren setzte mit dem Beginn der Seßhaftigkeit der Sippen und Stämme der Prozeß der Arbeitsteilung ein ; zwischen den Stämmen kam es zu Handels- und Austauschbeziehungen; die sichere Bestimmung der Termine von Aussaat und Ernte leitete man aus der Beobachtung von Bewegungsvorgängen am Sternenhimmel ab (Abb. 2) - es entstand die Notwendigkeit des Zählens und Rechnens. Diese Anfänge können heute an Stämmen studiert werden, deren Entwicklungsniveau dem unserer steinzeitlichen Vorfahren gleichkommt und die z. B. in Südamerika, Australien, Mikronesien, Polynesien oder auch auf den Fidschi-Inseln gegenwärtig leben. Auf einer der niedrigsten Stufen stehen die Bewohner der Fidschi-Inseln im Stillen Ozean. Sie verbinden Zahlwörter mit konkreten Gegenständen, so daß 10 Kokosnüsse mit "karo", 10 Boote dagegen mit "bole" bezeichnet werden.

Die Herausbildung abstrakter Zahlwörter erfolgte in mehreren Stufen. Floridas Einwohner gebrauchen für 10 Eier das Wort "na-kua", für 10 Körbe das Wort "na-banara". Die Zahl 10 für sich, etwas durch das Wort "na" ausgedrückt, gibt es jedoch noch nicht. Im Sprachgebrauch der Indianer West-Kanadas heißen "tcha" - 3 Dinge, "tchane" - 3 Personen, "tchat" - 3mal,

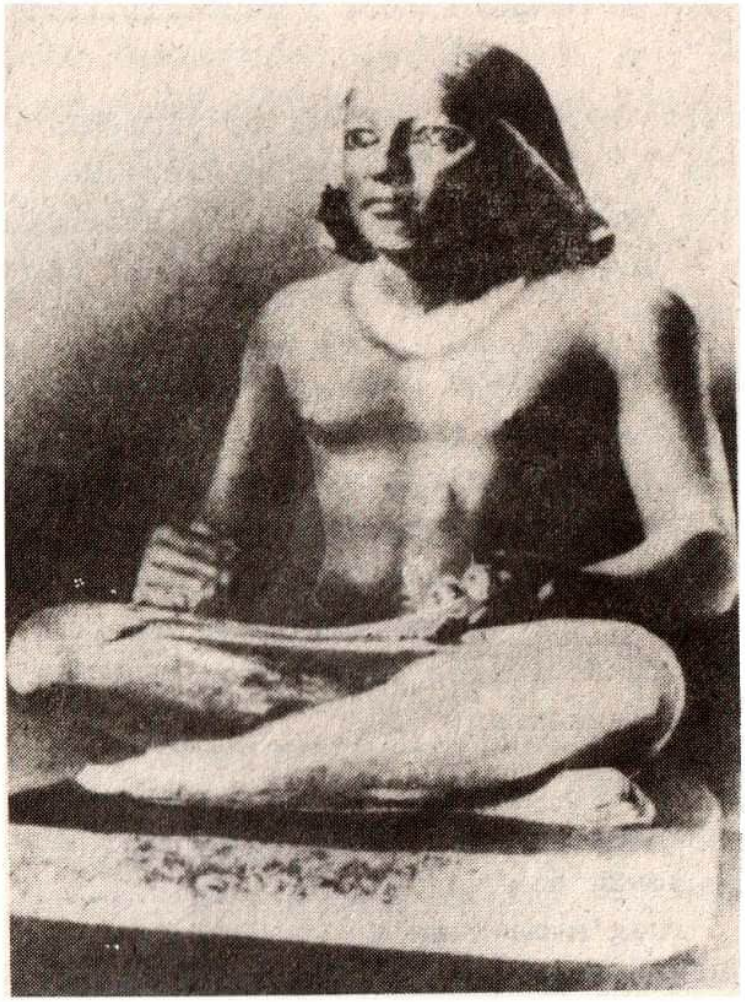
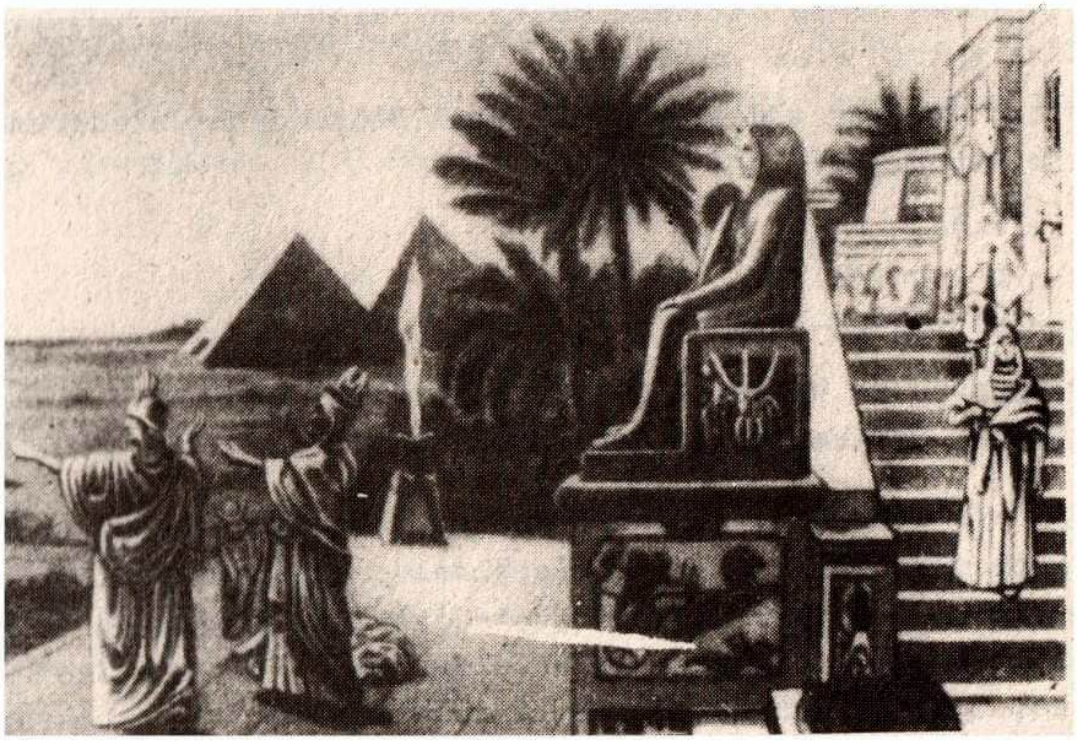


Abb. 1

Statue eines königlichen Schreibers

Abb. 2

Beobachtung des Aufganges des Sirius



"tchatoen"- an 3 Stellen, ein abstraktes Wort für 3 existiert nicht.

Stämme, deren Sprachen bereits abstrakte Zahlwörter einschließen, können in der Regel bis 3, 4 oder 6 zählen, größere Mengen erhalten die Bezeichnung "viel". So zählt der Indianerstamm der Yankos am Amazonas bis 3 und gebraucht für diese Zahl das Wörtchen "Poettarrarorincoaroac"!

Der Aufbau der verwendeten Zahlensysteme basiert auf Grundzahlen, als deren häufigste die 2, 5, 10, aber auch die 20 und die 60 zu nennen sind. Oftmals entwickelten sich selbst bei benachbarten Stämmen Systeme mit unterschiedlichen Grundzahlen. Ein Beispiel dafür sind die Einwohner einer Inselgruppe in der Torresstraße südlich Neuguineas, die im Zweiersystem rechnen, während in der Sprache Wedau in Neuguinea die 5 Grundzahl ist. Beide Systeme sind unschwer zu erkennen:

1 - urapun	tagogi	
2 - okosa	ruag'a	
3 - okosa-urapun	tonug'a	
4 - okosa-okosa	ruag'a-ma-ruag'a	
5 - okosa-okosa-urapun	ura-i-ga	
6 - okosa-okosa-okosa	ura-g'ela-tagogi	= 5 + 1
11 -	ura-g'a-i-ga-au-ae-tagogi	= 5·2 + 1

Einem anderen südostaustralischen Stamm dient wiederum die 2 als Grundzahl:

1 - enea
2 - petcheval
3 - petcheval-enea

Demgegenüber basierte das Zahlensystem der Mayas, einem Volk auf der mexikanischen Halbinsel Yucatán, auf der Zahl 20.

Wie wir schon festgestellt hatten, ist das Rechenbuch des ägyptischen Schreibers Ahmes die älteste erhalten gebliebene mathematische Schrift. Zu den hauptsächlichen Gründen, daß keine älteren Aufzeichnungen existieren (bzw. bisher aufgefunden wurden), gehört der natürliche Verschleiß des Schreibmaterials.

Immerhin wurden die ersten Schriften auf Palmenblättern verfaßt! Die Ägypter stellten ihr Schreibmaterial aus einem Schnittgewächs her, welches in großen Mengen am Nil wuchs. Eine daraus gefertigte Buchrolle (Abb. 3) heißt Papyrus. Die Babylonier hingegen drückten Zahlen und Buchstaben in feuchte Tontäfelchen und brannten diese anschließend (Abb. 4). Mehrere Tausend solcher Täfelchen sind erhalten geblieben, und sie geben heute einen guten Überblick über den damaligen Entwicklungsstand der Mathematik. - Die Römer wiederum nutzten eine andere Möglichkeit: Sie erfanden das Pergament, hergestellt aus bearbeiteter Tierhaut. Papier verwendeten zum ersten Male Chinesen. Die ältesten Überlieferungen auf Papier stammen aus dem 2. Jahrhundert v. u. Z.

Eine große Anzahl von Dokumenten wurde jedoch auch vernichtet: In der im 3. Jahrhundert v. u. Z. in Alexandria (heute El-Iskandariya) eröffneten Bibliothek, der größten der damaligen Zeit, sammelten sich nahezu 700 000 Buchrollen an. Doch im Jahre 47 v. u. Z. zerstörten römische Krieger die wissenschaftlichen Einrichtungen und die Bibliothek von Alexandria.

Aus den überlieferten Aufzeichnungen sind die Zahlenschreibweisen der Ägypter, Babylonier und Griechen bekannt geworden. Die Zahlen der Ägypter ähnelten ihrer Schrift, einer Bilderschrift (Abb. 5). Jedes einzelne Bildzeichen, auch Hieroglyphe genannt, stellt ein bestimmtes Wort dar. Für ihr dezimales Zahlensystem verwendeten die Ägypter sieben Hieroglyphen:

1 - |
10 - ∩
100 - ⊂
1 000 -
10 000 - 7
100 000 -
1 000 000 -

wobei jeder eine besondere Bedeutung zukam. So könnte die

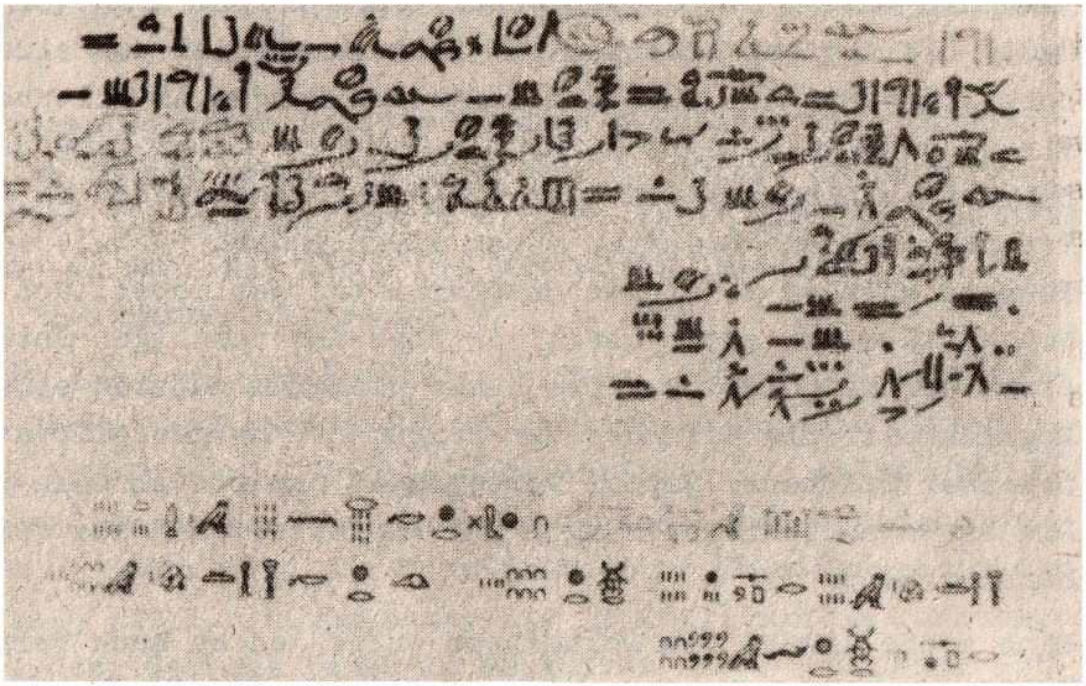
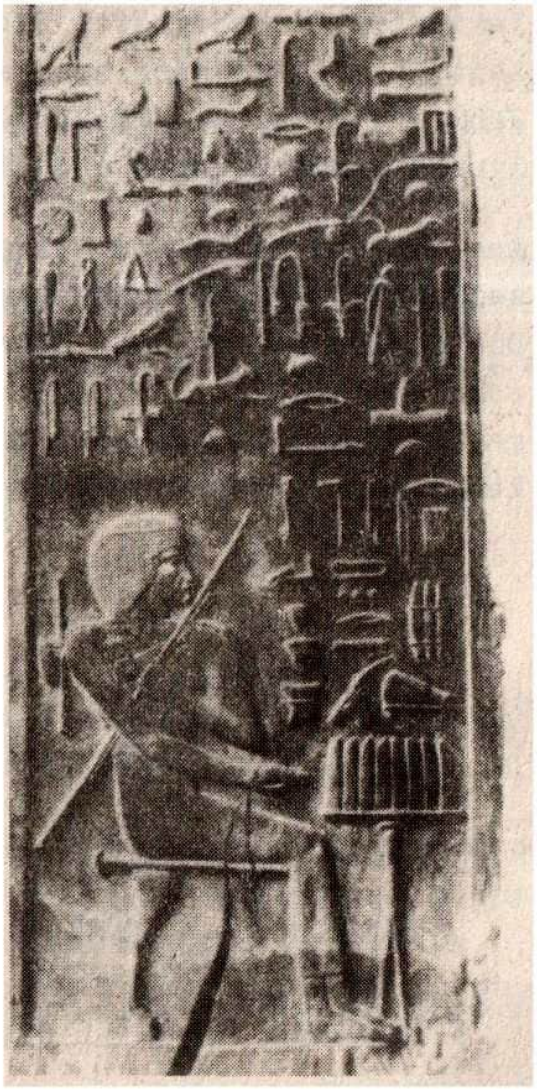


Abb. 3 Papyrus Rhind

Abb. 5

Oberteil der Holztafel des ägyptischen Würdenträgers Hesire



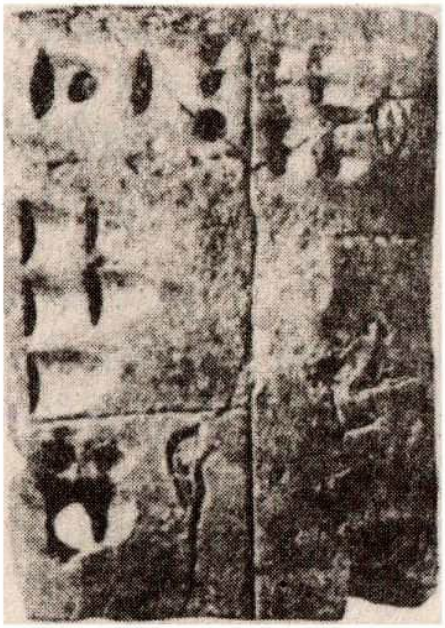


Abb. 4 Tontäfelchen

Hieroglyphe eine Meßleine darstellen, die in 100 Teile geteilt war; die 1000 wird durch eine Lotosblume veranschaulicht; der Frosch findet für die 100 000 wohl deshalb Verwendung, weil dieser einst eine regelrechte Plage gewesen sein soll; schließlich konnte die größte Zahl der Ägypter nur durch ein angemessenes Zeichen, nämlich den ägyptischen Gott des Luftraumes, dargestellt werden.

Beliebige Zahlen wurden einfach durch Aneinanderreihen der entsprechenden Hieroglyphen geschrieben:

213 104 =

3 248 327 =

Die Babylonier nutzten hingegen vor ca. 4000 Jahren ein Zahlensystem mit nur zwei Symbolen und der 60 als Grundzahl. Für alle Potenzen $(60)^0$, $(60)^1$, $(60)^2$, ... , $(60)^n$ wurde ein senkrechter Keil

geschrieben; die Zahl 10 erhielt einen Winkelhaken

.

Die Zahlen von 1 bis 59 lassen sich durch Aneinanderreihen von Winkelhaken und Keilen darstellen, wobei i. a. nie mehr als drei Zeichen, die eine Zahl ausdrücken sollten, nebeneinander geschrieben wurden:

3 =

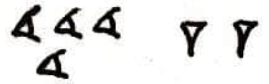
5 =

57 =

Die 60 wird nun wieder durch einen Keil dargestellt, wobei sich beim Lesen von Keilschriftzahlen folglich Schwierigkeiten ergeben können, denn

kann sowohl die 3 als auch die 60 + 2 = 62, die 2·60 + 1 = 121 oder die 3·60 = 180 bezeichnen.

Die 600 als Produkt 10·60 wird nicht durch zehn Keile, sondern durch den bereits bekannten Winkelhaken ausgedrückt. Demnach könnte



4· 10 + 2 = 42
4·600 + 2 = 2 402
4·600 + 60 + 1 = 2 461
4·600 + 2·60 = 2 520

bedeuten.

Es muß aber bemerkt werden, daß die Babylonier keine rein mathematischen Texte schrieben, sondern der entsprechenden Aufgabe stets eindeutig die dazugehörigen Zahlen entnommen werden konnten (Abb. 6).

Versuchen wir uns zum Abschluß an der Übersetzung der Zahl 19 899 in die babylonische Keilschrift. Die höchste Potenz von 60 ist offensichtlich 60^2, denn 60^3 = 216 000 ist bereits größer als 19899. 60^2 selbst ist 4mal enthalten. Die verbleibende Differenz von 5 499 ist nun bezüglich Vielfacher von 600 und 60 zu zerlegen. Wir finden eindeutig

$19\,899 = 4 \cdot 60^2 + 9 \cdot 600 + 1 \cdot 60 + 3 \cdot 10 + 9 \cdot 1$, also

Betrachten wir abschließend noch kurz die alte griechische Zahlenschreibweise: Jeder Buchstabe des griechischen Alphabetes stellte eine Zahl - Einer, Zehner, Hunderter - dar, wobei für 6, 90 und 900 drei zusätzliche Zeichen (vau, koppa, sampi) eingefügt wurden:

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Um für die Tausender keine weiteren Symbole einführen zu müssen, setzten die Griechen vor den entsprechenden Buchstaben der Einer ein Komma, zum Beispiel

4 000 = , δ

8 000 = , η .

Zur Darstellung der Zehntausender fanden verschiedene Schreibweisen Anwendung. Eine Möglichkeit bestand in der Kennzeichnung mittels zweier Punkte über dem Buchstaben, der die Anzahl der Zehntausender ausdrückte, also

10 000 = α̈

70 000 = ϟ̈

Zum anderen schrieben die Griechen ein großes M und über dieses die Anzahl der Zehntausender:

10 000 = $\overset{\alpha}{M}$

70 000 = $\overset{\varrho}{M}$

450 000 = $\overset{\mu\varepsilon}{M}$

Um nun schließlich den Unterschied zwischen Buchstaben und Zahlen kenntlich zu machen, wurde über eine abgeschlossene Zahlengruppe ein Strich gezogen:

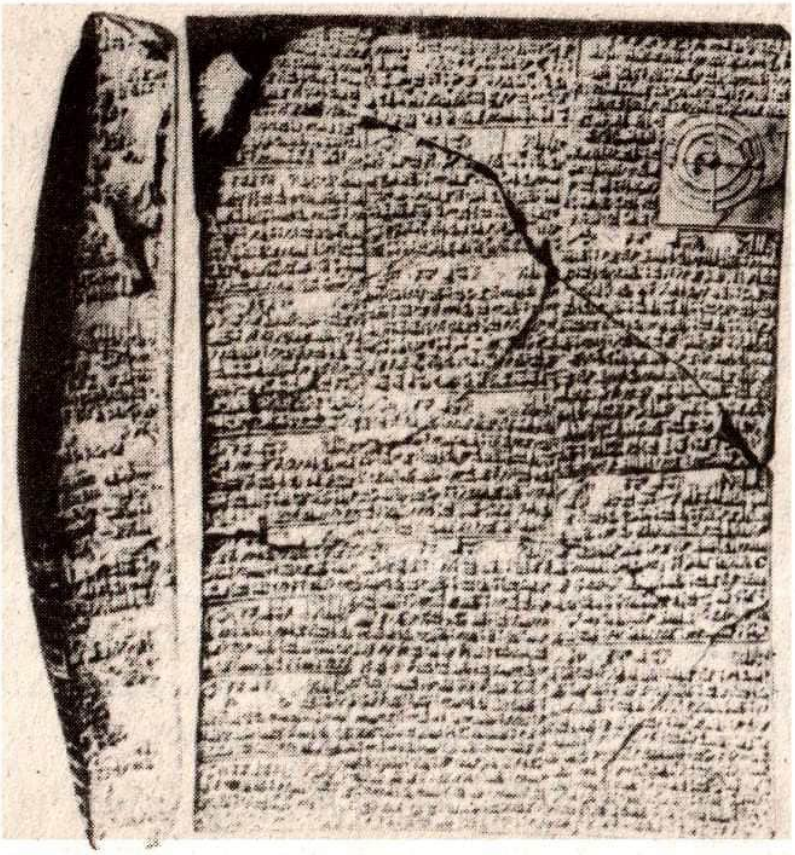
49 = $\overline{\mu\vartheta}$

3 718 = $\overline{,\gamma\psi\iota\eta}$

122 560 = $\overline{\ddot{\iota}\ddot{\beta},\beta\psi\xi}$ = $\overset{\iota\beta}{M}\,\overline{\beta\psi\xi}$

Natürlich gab es noch sehr viele andere Formen von Zahlzeichen, jedes Volk entwickelte seine eigene Sprache und Schrift. Die Chinesen, Inder und Römer, aber auch die Mayas, schrieben die Zahlen mit Hilfe von Punkten und Strichen. Bis in das 15. Jahrhundert war das römische System in Europa gebräuchlich. Eine spätere Arbeit wird darüber und die die Entstehung unserer heutigen Zahlenschreibweise berichten.

Ausschnitt aus dem Keilschrifttext 'Berechnung der Breite einer Grabensohle'



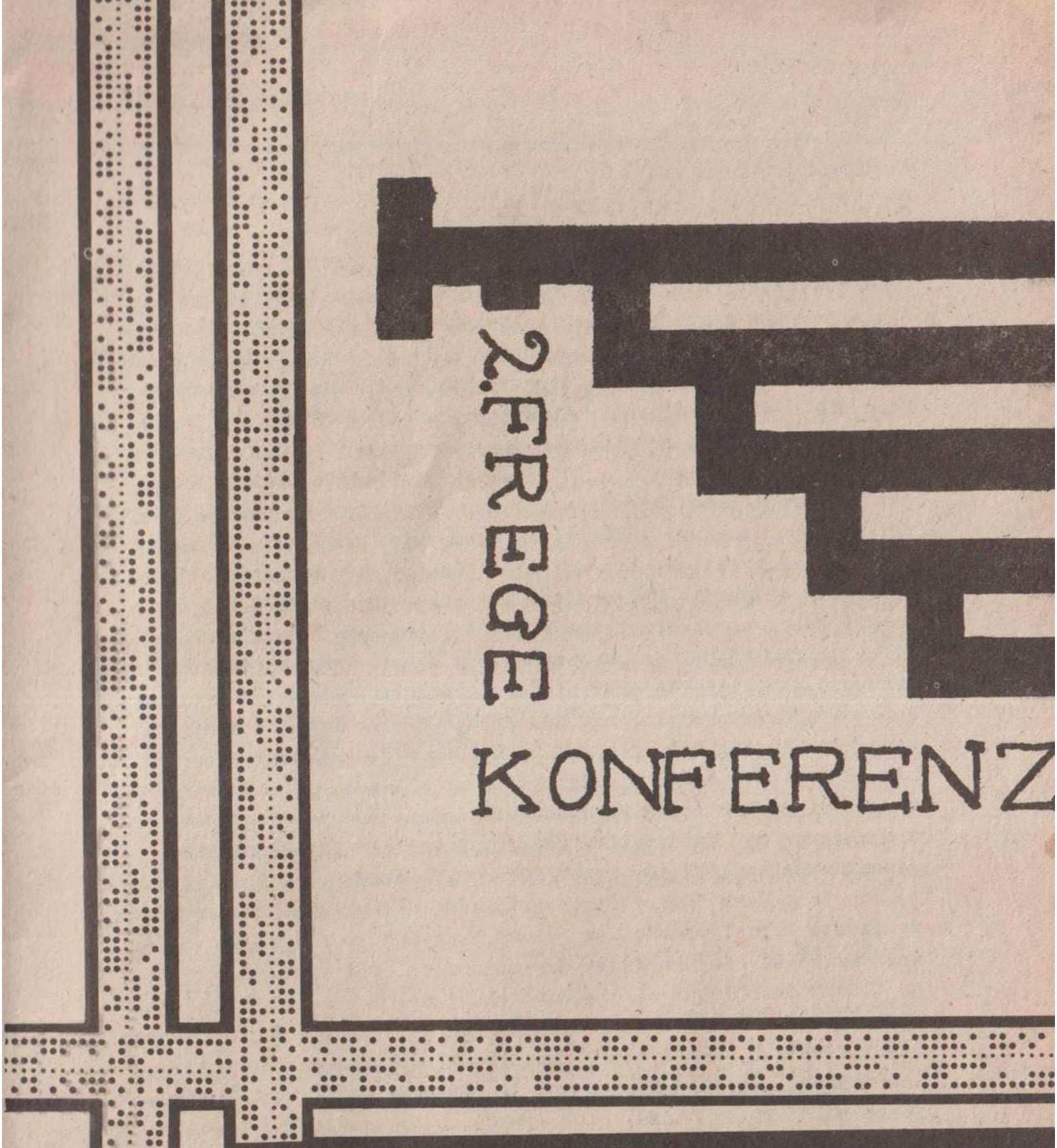
Dipl.-Phys. Roland Fiedler
Sektion Physik der FSU Jena

Abb. 6

(Auf ein Quellenverzeichnis müssen wir aus Platzgründen verzichten. Es kann bei der Redaktion angefordert werden.)

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Burkhard Götz
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimmler, R. Heinrich, S. Kratochwil, K. Tauscher

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0 40 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932 Redaktionsschluß 30. 6. 1984



9
84

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
18. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Zur Geschichte der Logik

2. Teil: Friedrich Ludwig Gottlob Frege

Am 8. November 1848 wurde Friedrich Ludwig Gottlob Frege im Haus Böttcherstraße 2 in Wismar geboren. Seine Eltern, Carl Alexander und Auguste Frege, leiteten eine private Mädchenschule, die sie im Jahre 1834 gegründet hatten. Gottlob Frege wurde zunächst von seiner Mutter unterrichtet und besuchte anschließend die Große Stadtschule in Wismar, wo er 1869 die Reifeprüfung ablegte. Noch im gleichen Jahr begann er, an der Alma mater Jenensis Mathematik zu studieren. Er belegte alle Vorlesungen von Ernst Abbe über Probleme der Physik und Mechanik, ferner Vorlesungen über Analytische Geometrie, Analysis, Telegraphie, Chemie, Philosophie u. a. Mit Beginn des Sommersemesters 1871 ging er an die Universität Göttingen, wo er 1873 mit der Arbeit "Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene" promovierte. 1874 kehrte er nach Jena zurück und habilitierte sich hier im gleichen Jahr unter dem Dekanat von Ernst Haeckel mit der Arbeit "Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Größenbegriffs gründen". Von 1874 bis 1879 wirkte Frege als Privatdozent in Jena. In dieser Zeit konzentrierte er seine Forschungstätigkeit auf die logische Grundlegung der Mathematik. Sein Ziel war die Herleitung der gesamten Mathematik aus einer dementsprechenden Logik. 1879 erschien sein Werk "Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens", worin er in vollendeter Weise die Grundzüge der modernen Logik entwickelte. Diese Arbeit enthält u. a. die Entdeckung der logischen Funktion (Aussagenoperation) und die Einführung der Theorie der logischen Quantifikation, die erste Formulierung der Aussagenlogik als mathematisch-logisches System und die Entwicklung eines Prädikatenkalküls erster Stufe, eine Anwendung der mathematisch-logischen Methode auf die Formalisierung einer konkreten mathematischen Disziplin, die logische Analyse des mathematischen Beweises durch vollständige Induktion und eine klare Unterscheidung von Axiomen und Schlußregeln. Von vielen Logikern wird diese Arbeit heute als der Beginn der mathematischen Logik und Grundla-

genforschung moderner Prägung angesehen, als die "Geburtsurkunde der modernen mathematischen Logik". Mit ihr beginnt also die 4. Periode der Geschichte der Logik, die heute noch andauert.

Verfolgen wir zunächst Freges weiteren Lebensweg. 1879 wurde er als außerordentlicher Professor für Mathematik berufen. Den Versuch der Rückführung der Mathematik auf die Logik baute er in seinen nachfolgenden wichtigsten Werken "Grundlagen der Arithmetik" (1884) und "Grundgesetze der Arithmetik" (zwei Bände, 1893 und 1903) aus. Durch diese trug er in ganz einzigartiger Weise zur Begrifflichen Klärung der Grundlagen der Mathematik bei. 1896 wurde Frege zum ordentlichen Honorarprofessor für Mathematik berufen. Als der zweite Band seiner "Grundgesetze" im Druck war, wurde ihm durch Russell in einem Brief vom 16. Juni 1902 die nach diesem benannte Antinomie der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, mitgeteilt. Frege veröffentlichte diese Antinomie im Nachwort seines zweiten Bandes und erklärte zugleich eine der Grundlagen des von ihm errichteten Gebäudes als erschüttert. Er versuchte nunmehr eine Neubestimmung des Zahlbegriffes sowohl durch eine semantische Vertiefung der Prädikatenlogik als auch einen Rückgriff auf die konstruktive Vorgehensweise in der Geometrie. Die Erarbeitung dieses Zuganges, die schon in die Richtung der späteren konstruktiven Mathematik führte, war mit einer umfassenden Kritik der formalistischen Begründung der Mathematik durch Hilbert verbunden.

Gottlob Frege blieb zeitlebens seiner Heimatstadt Wismar und ihrer weiteren Umgebung eng verbunden. Während seines Jenaer Wirkens gab er als sein "Vaterland" stets Mecklenburg-Schwerin an. Sehr oft wanderte er in den Sommerferien zu Fuß von Jena nach Wismar und zurück. Im Oktober 1918 trat er in den Ruhestand und zog nach Bad Kleinen am Schweriner See. Hier starb er am 26. Juli 1925 an den Folgen eines Magenleidens. In aller Stille wurde er in seiner Geburtsstadt Wismar beigesetzt, wo ein schlichtes Eisenkreuz an ihn erinnert.

Freges wissenschaftliche Leistungen wurden leider zu seinen Lebzeiten kaum gebührend gewürdigt. Ein wesentlicher Grund dafür

war die eigenartige zweidimensionale Symbolik in dem von ihm entwickelten Logikkalkül. Der Hauptgrund war aber sicher, daß die Ideen Freges seiner Zeit zu weit voraus waren, daß die von ihm aufgeworfenen Probleme die Mathematiker und Logiker seiner Zeit noch nicht tangierten, daß sie von ihnen noch gar nicht voll verstanden werden konnten. Erst in unserer Zeit ist eine weltweite Würdigung der wirklichen Leistungen Freges zu verzeichnen, und er wird weltweit als einer der bedeutendsten Logiker aller Zeiten gefeiert. In seinen Arbeiten ist bereits ein großer Teil dessen erstmalig präzise ausgesprochen oder vorgeführt, was heute Allgemeingut bei der Begründung der mathematischen Logik ist. Auf den verschiedensten Gebieten der Informatik und Computerwissenschaft erfolgen gegenwärtig intensive Bemühungen um die Schaffung von formalisierten Sprachen und Kalkülen mit nichtlinearen Ausdrucksmitteln. Auch dazu sind in den Arbeiten Freges wichtige Bezüge zu finden.

Frege eröffnete seine Darstellung der Logik mit philosophischen Überlegungen und all sein Bemühen war stets auch philosophisch-erkenntnistheoretisches Bemühen. Er setzte sich mit Spielarten des Subjektivismus auseinander und erarbeitete Beiträge zu Sinn und Bedeutung von Wörtern und Sätzen, wobei er u. a. zu sprachphilosophischen Untersuchungen des Verhältnisses von formalisierter zu nichtformalisierter Sprache gelangte. Sowohl die von ihm gewonnenen Ergebnisse als auch sein methodisches Vorgehen bei der Analyse logischer Probleme zur Wahrung der Einheit inhaltlicher und formaler Aspekte der Widerspiegelung der objektiven Realität sind von aktuellem philosophischem Interesse.

Da Freges Ausbildung und sein wissenschaftliches Wirken aufs engste mit der Universität Jena verbunden waren, hat es die Friedrich-Schiller-Universität Jena übernommen, wirksame Beiträge in dem weltweiten Prozeß der aktiven Verarbeitung und Verfolgung Fregeschen Gedankengutes zu leisten, der in Jena eine seiner stärksten Wurzeln hat. Der 100. Jahrestag des Erscheines der "Begriffsschrift" wurde zum Anlaß genommen, im Mai 1979 in Jena die 1. Frege-Konferenz durchzuführen. Auf dieser Konferenz wurden erstmalig Philosophen, Mathematiker, Logiker

und Computerwissenschaftler unter einer einheitlichen Thematik zusammengeführt. Neben Teilnehmern aus unserer Republik nahmen daran Wissenschaftler und Frege-Forscher aus der Sowjetunion, Polen, Ungarn, CSSR, BRD, Niederlande, Italien, Frankreich, USA, Kanada, Indien, Kolumbien und Westberlin teil. Gegenwärtig sind Wissenschaftler der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität um Prof. Wechsung und Dr. Lischke dabei, die 2. Frege-Konferenz zu organisieren, die anläßlich des 100. Jahrestages des Erscheines der "Grundlagen der Arithmetik" im September 1984 in Schwerin stattfinden wird. Auch diesmal erlaubt die Thematik wieder das interdisziplinäre Gespräch zwischen Mathematikern, Logikern, Philosophen und Methodologen, die wieder aus vielen Staaten der Welt erwartet werden. Im Rahmen der Konferenz erfolgt von Schwerin aus ein Besuch in Wismar und Bad Kleinen. An Freges letzter Ruhestätte wird ein Gedenkvortrag gehalten werden, und in der Nähe seines Geburtshauses wird eine Straße den Namen Friedrich Ludwig Gottlob Freges erhalten. Somit wird dann Frege auch in seiner Heimatstadt die gebührende Ehre zuteil werden.

Das Symbol für die Frege-Konferenz wurde von Paul Wolfgang Puhlmann, Jena, in Anlehnung an Freges Symbolik in der "Begriffsschrift" entwickelt. Dort symbolisiert das Grundzeichen $\vdash\!\!\!\sqcup^{A}_{B}$ die Verknüfung zweier Aussagen A und B zu einer neuen Aussage der Form "wenn B gilt, so muß A mit Notwendigkeit eintreten". Aus derartigen Grundzeichen lassen sich alle Schlüsse der mathematischen Logik darstellen.

Fortsetzung Seite 136

Lösungen

P 55 Wir nehmen an, daß $d/2n^2$ gilt und n^2+d eine Quadratzahl m^2 ist. Dann existiert ein k mit $2n^2 = d\cdot k$ und es gilt

$$m^2k^2 = (n^2+d)k^2 = n^2k^2+k\cdot dk = n^2k^2+n^2\cdot 2k = n^2(k^2+2k).$$

Dies ist aber ein Widerspruch, denn auf der linken Seite dieser Gleichung steht eine Quadratzahl $(m^2\cdot k^2)$, auf der rechten dagegen nicht:

Wäre $n^2(k^2+2k)$ Quadratzahl, so wäre es k^2+2k auch. k^2+2k liegt aber zwischen den unmittelbar aufeinander folgenden Quadratzahlen k^2 und $k^2+2k+1 = (k+1)^2$.

q.e.d.

P 57 Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Die Aussage ist wahr für n=1:

$$8/A_1 = 5+2+1 = 8$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $8/5^k+2\cdot 3^{k-1}+1 = A_k$

Induktionsschritt:
$$\begin{aligned} A_{k+1}-A_k &= 5^{k+1}+2\cdot 3^k+1-5^k-2\cdot 3^{k-1}-1 \\ &= 5^k(5-1)+2\cdot 3^{k-1}(3-1) \\ &= 4(5^k+3^{k-1}). \end{aligned}$$

Da 5^k und 3^{k-1} ungerade sind, gilt $2/5^k+3^{k-1}$, also $8/A_{k+1}-A_k$ und daher wegen der Induktionsvoraussetzung $8/A_{k-1}$.

q.e.d.

P 58 Die Ableitung $f'(x) = 2ax+b$ der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2+bx+c$ ist eine lineare Funktion, folglich kann sie ihr Minimum bzw. Maximum über einem abgeschlossenen Intervall nur an den Rändern dieses Intervalls annehmen. Wir haben also die Ungleichungen

$-4 \leqq f'(1) = 2a+b \leqq 4$ und $-4 \leqq f'(-1) = -2a+b \leqq 4$

zu zeigen.

Aus $-1 \leqq f(x) \leqq 1$ f. alle $x \in [-1,1]$ erhalten wir durch Einsetzen von 0, +1 und -1 für x:

$$|c| \leqq 1$$
$$|a+b+c| \leqq 1$$
und
$$|a-b+c| \leqq 1 .$$

Daraus folgt $|a+b| \leqq 2$ und $|a-b| \leqq 2$.

Damit gilt $|2a| = |a+b+a-b| \leqq |a+b| + |a-b| \leqq 4$, also $|a| \leqq 2$.

Schließlich erhalten wir $|2a+b| \leqq |a| + |a+b| \leqq 4$ und $|-2a+b| = |2a-b| \leqq |a| + |a-b| \leqq 4$.

q.e.d.

Preisaufgaben

Q 43 **1**

Man beweise, daß in jedem pythagoreischen Zahlentripel wenigstens eine durch drei teilbare Zahl enthalten ist. (Pythagoreische Zahlentripel (a,b,c) sind natürliche Zahlen, für die $a^2+b^2=c^2$ gilt.)

Q 44 **2**

Man bestimme alle reellen x, die die Gleichung $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$ erfüllen.

Q 45 **1**

Man löse die Gleichung $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$

Q 46 **1**

Man eliminiere die Winkel α und β aus dem Gleichungssystem

$$x \cos\alpha + y \sin\beta = a$$
$$x \sin\beta - y \cos\alpha = b$$
$$(x^2+y^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\beta) = 2ab$$

Q 47 **1**

Man konstruiere ein Dreieck aus folgenden Stücken: Gegeben sind die Länge der Seite c, die Länge der Höhe h_b und die Summe s der Seiten a und b.

Q 48 **2**

В зрительном зале имеется a стульев, расположенных одинаковым рядами. Если в каждом ряду добавить по в стульев, а число рядов уменьшить на c, то общее число мест в зрительном зале увеличиться на 0,1. Сколько было стульев в каждом ряду ?

Einsendeschluß: 1. 12. 1984

Zur Geschichte der Logik

3. Teil: Weitere Entwicklung nach Frege

Wie wir erfahren haben, trug die von Gottlob Frege verwendete eigenartige zweidimensionale Symbolik eine gewisse Schuld daran, daß seinen Arbeiten lange Zeit die verdiente Würdigung versagt blieb. Eine Symbolik der mathematischen Logik der heute üblichen Form entstand durch die Arbeiten von Giuseppe Peano (1858 - 1932) und seiner Schule. Auch die heute üblichen Symbole der Mengenlehre gehen auf Peano zurück. Die Bedeutung der Arbeiten Freges als Beginn einer neuartigen Entwicklungsform der modernen Logik wurde zuerst von Bertrand Russell (1872 - 1970) erkannt. Dieser leistete nicht nur bedeutsame Beiträge zu ihrer weiteren Ausarbeitung, sondern folgte auch den mit der Entwicklung der Logik verbundenen Absichten Freges, der Begründung der Mathematik durch die Logik. In der Symbolik schloß er sich allerdings weitgehend Peano und seiner Schule an. Russells Versuche wurden durch das in zehnjähriger gemeinsamer Arbeit mit Alfred North Whitehead (1861 - 1947) geschaffene dreibändige Monumentalwerk "Principia Mathematica" gekrönt (erschienen 1910 - 1913). Im Vorwort betonten die Autoren ausdrücklich, daß sie die tragenden Gedanken ihres logischen Systems Frege verdanken. Es zeigte sich, daß eine relativ kleine Anzahl von aussagenlogischen und prädikatenlogischen Axiomen und Schlußregeln ausreichen, um alle wesentlichen Beweise einiger grundlegender mathematischer Disziplinen formal nachzubilden. Um Antinomien (Widersprüche) zu vermeiden, entwickelten Russell und Whitehead die sogen. Typentheorie, deren wesentlichste Grundidee eine Stufung der Mengen und Prädikate (Relation) war, so daß eine Menge bzw. ein Prädikat stets eine höhere Stufe hat als ihre Elemente bzw. die Objekte, auf die es angewendet wird. Die logischen Axiome und Regeln mußten dann für jede Stufe gesondert festgelegt werden. Mit diesem Buch schufen Russell und Whitehead eine noch heute gültige logische Grundlegung der Mathematik. An dieser Stelle sei nebenbei bemerkt, daß Bertrand Russell auch eine der herausragendsten Persönlichkeiten in der Weltfriedensbewegung war.

Eine wesentliche Rolle bei der Herausbildung der heutigen

mathematischen Logik spielten auch die Arbeiten von David Hilbert (1862 - 1943) und seiner Schule zur Beweistheorie. Gemeinsam mit seinem Schüler Wilhelm Ackermann (1896 - 1962) verfaßte er 1928 das Buch "Grundzüge der theoretischen Logik", das zu einem weiteren Meilenstein in der Entwicklung der Logik wurde. Ackermann selbst wurde u. a. noch durch Arbeiten zum Entscheidungsproblem der Prädikatenlogik, zur Widerspruchsfreiheit der elementaren Zahlentheorie und zur axiomatischen Mengenlehre bekannt. Ein weiterer Schüler und enger Mitarbeiter Hilberts auf dem Gebiet der mathematischen Logik und Grundlagenforschung war Paul Bernays (1888 - 1977). Beide gaben gemeinsam das zweibändige Werk "Grundlagen der Mathematik" heraus (1934 und 1939), das eine systematische Zusammenfassung von Grundlagen-Arbeiten darstellte. Bereits 1918 gab Bernays einen ersten Vollständigkeitsbeweis für den klassischen zweiwertigen Aussagenkalkül an, d. h. einen Beweis dafür, daß jeder allgemeingültige aussagenlogische Ausdruck allein mittels gewisser einfacher syntaktischer Umformungsregeln (Schlußregeln) aus gewissen vorgegebenen Axiomen erzeugbar ist. Von ihm stammen auch wesentliche Ideen für eine axiomatische Begründung der Mengenlehre im Prädikatenkalkül der ersten Stufe.

Wesentliche Resultate der mathematischen Logik der Neuzeit sind mit dem Namen des österreichischen Mathematikers und Logikers Kurt Gödel (1906 - 1978) verbunden. Von ihm stammen u. a. der nach ihm benannte Vollständigkeitssatz, der nach ihm benannte Unvollständigkeitssatz sowie der Nachweis der relativen Widerspruchsfreiheit von Auswahlaxiom und Kontinuumhypothese zu den übrigen Axiomen der Mengenlehre. Der 1930 bewiesene Gödelsche Vollständigkeitssatz wird auch als Hauptsatz der mathematischen Logik bezeichnet. Er besagt, daß man (im Prädikatenkalkül der ersten Stufe) ein solches endlich überschaubares System syntaktischer Regeln (Schlußregeln) angeben kann, daß die vermittels dieser Regeln aus einer beliebigen Menge X von Ausdrücken (das sind formalisierte Aussagen) formal ableitbare Ausdrücke genau dieselben sind, die aus X semantisch (d. h. inhaltlich) folgen, d. h. die in jedem Modell von X gültig sind. Aus diesem Satz lassen sich eine Reihe wichtiger Schlußfolgerungen ziehen, bei-

spielsweise daß es ein endliches Axiomensystem für den Prädikatenkalkül der ersten Stufe gibt, oder daß eine beliebige Menge X von Ausdrücken bereits dann ein Modell besitzt, wenn jede endliche Teilmenge von X ein Modell besitzt. Der zuletzt erwähnte Sachverhalt wurde übrigens 1936 unabhängig von den Gödelschen Arbeiten durch den sowjetischen Mathematiker Anatoli Iwanowitsch Malzew (1909 - 1967) bewiesen. Als Modell einer Menge X von Ausdrücken bezeichnet man eine solche algebraische Struktur (z. B. eine Gruppe, Vektorraum, halbgeordnete Menge, topologischen Raum o. a.), in der gleichzeitig alle in X enthaltenen formalisierten Aussagen wahr sind.
Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz, der 1931 bewiesen wurde, besagt sinngemäß, daß jede hinreichend ausdrucksfähige widerspruchsfreie axiomatisierte Theorie unvollständig ist, d. h. es gibt Aussagen in der Sprache dieser Theorie, deren Wahrheit oder Falschheit mit den Mitteln der Theorie nicht beweisbar ist. Derartige Theorien sind beispielsweise die Mengenlehre und die elementare Theorie der natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation.

Gegenüber den früher im Vordergrund stehenden syntaktischen Aspekten der Logik traten mit Beginn der Gödelschen Arbeiten immer stärker semantische Fragen (der allgemeine Modellbegriff und das semantische Folgern) und metalogische Probleme (das sind Probleme, die logische Systeme als Ganzes betreffen, wie z. B. die genannten Sätze von Gödel) in den Mittelpunkt des Interesses. Hier wären vor allem die Arbeiten des Polen Alfred Tarski (1901 - 1983) zu nennen, der exakte mengentheoretische Methoden zur Interpretation formalisierter Sprachen und wesentliche Gedanken zur modernen Algebraisierung der Logik entwikkelte. Bekannt ist der nach ihm benannte Satz, nach dem eine Menge X von Ausdrücken, welche ein unendliches Modell besitzt, ein Modell von jeder beliebigen unendlichen Mächtigkeit besitzt. Der Amerikaner Alonzo Church (geb. 1903) bewies 1936, daß die Menge aller allgemeingültigen Ausdrücke des Prädikatenkalküls der ersten Stufe nicht entscheidender ist, d. h. es gibt kein effektives, algorithmisches Verfahren, durch welches von einem beliebigen Ausdruck festgestellt werden kann, ob er allgemein-

gültig ist oder nicht. Damit war also endgültig gezeigt, daß das im 17. Jahrhundert aufgestellte "Leibniz-Programm" nicht realisierbar ist.
In jüngster Zeit wurde die mathematische Logik durch die Arbeiten zahlreicher Mathematiker und Logiker zu einer weitverzweigten Wissenschaft ausgebaut, und es ist an dieser Stelle nicht mehr möglich, repräsentative Vertreter und ihre Leistungen im einzelnen zu nennen. Auch in unserer Republik wurden in der historisch kurzen Frist von 35 Jahren seit ihrer Gründung wesentliche Beiträge zu diesem Gebiet geleistet. Dabei sei noch vermerkt, daß die gesamte Entwicklung der mathematischen Logik in der DDR auf Karl Schröter (1905 - 1977) zurückgeht, der von 1948 bis zu seinem Tode an der Humboldt-Universität in Berlin wirkte. Fast alle heute in der DDR auf diesem Gebiet tätigen Wissenschaftler sind direkt oder indirekt seine Schüler.

Bis zu den 20er Jahren unseres Jahrhunderts wurde die Logik fast ausschließlich als ein zweiwertiges System betrachtet, in dem es nur die Wahrheitswerte "wahr" und "falsch" gab. Im Jahre 1920 stellte der polnische Philosoph und Logiker Jan Lukasiewicz (1878 - 1956) erstmals eine dreiwertige Logik vor, in der als dritter Wahrheitswert ein Wert eingeführt wurde, der mit "möglich" oder "neutral" bezeichnet werden kann. Gegenwärtig werden vielfältige mehrwertige Logiken ausgearbeitet, in denen die Aussagen Werte aus einer beliebigen endlichen oder unendlichen Menge von Wahrheitswerten annehmen können. Daneben gibt es noch zahlreiche andere "Logiken", die heute untersucht werden, z. B. modale Logik (Logik von "möglich", "notwendig", "unmöglich" usw.), konstruktive Logik (hier gilt nur als wahr, wofür ein Konstruktionsverfahren angegeben werden kann), Zeitlogik, Wahrscheinlichkeitslogik, intuitionistische Logik, algorithmische Logik u. a. Mit der zuletzt genannten wollen wir uns im nächsten Beitrag etwas genauer beschäftigen.

Fortsetzung folgt

Dr. G. Lischke, FSU
Sektion Mathematik

Der Flug zu den Sternen – Wie lange dauert es?

In letzter Zeit wird häufig die Möglichkeit eines Besuches von außerirdischen Raumfahrern und in utopischen Romanen die Reisen von Erdbewohnern zu anderen Sternen diskutiert.
Wir wollen hier einmal untersuchen, welche mathematischen Probleme dabei auftreten. Aufgrund der Dimensionen im Raum und Zeit müssen wir dabei relativistisch rechnen und verwenden die spezielle Relativitätstheorie (SRT) als brauchbare Näherung (s. LB Physik 12. Klasse). Da wir uns vor allem mit der Mathematik beschäftigen wollen, sind diese Formeln hier nur angegeben und ihr Beweis erfolgt durch "Ehrenwort des Verfassers". Insbesondere wollen wir einige Formeln der klassischen Kinematik wie Weg-Zeit, Geschwindigkeits-Zeit und andere Beziehungen verallgemeinern. Da in bewegten Systemen die Zeit langsamer verstreicht, müssen wir diese Beziehungen für Erde und Rakete getrennt berechnen und die dabei auftretenden Größen unterscheiden. Dies soll für die Rakete durch einen Index "v" geschehen. Die Zeit bezeichnen wir mit "t", die Geschwindigkeit mit "v", die Beschleunigung mit "b" und den Weg mit "s". Für t=0 sei s=0 und v=0 und "c" sei die Lichtgeschwindigkeit.
Ausgangspunkt ist die Formel

$$\frac{\Delta t_v}{\Delta t} = (1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad (1)$$

Sie beschreibt für eine Rakete, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit v bzgl. der Erde bewegt, das Verhältnis von Zeitdifferenz in der Rakete und auf der Erde.
Zu dieser Gestalt können wir (1) aber nicht verwenden, da sie in den Beschleunigungsphasen unbrauchbar wird ($v \neq const$).
Bilden wir in (1) den Limes für $\Delta t \to 0$, so erhalten wir auf der rechten Seite für v die Momentengeschwindigkeit und links einen Differentialquotienten, also

$$\frac{dt_v}{dt} = (1 - v^2(t)/c^2)^{1/2} \qquad (2)$$

bzw.

$$t_v = \int_0^t (1 - v^2(t)/c^2)^{1/2} dt \qquad (3)$$

Als erstes wollen wir die Beschleunigung b_v in der Rakete be-

stimmen. Hierzu benötigen wir die Beziehung

$$u = \frac{u_1 + u_2}{1 + \frac{u_1 \cdot u_2}{c^2}} \tag{4}$$

Die Formel beschreibt das relativistische Additionstheorem für gleichgerichtete Geschwindigkeiten. Diese Beziehung muß man z. B. verwenden, wenn man nach der Geschwindigkeit des Lichtes fragt, das ein fahrendes Auto aussendet und ein ruhender Passant sieht.

Nehmen wir nun an, daß ein Raumfahrer eine Geschwindigkeitszunahme Δu in der Zeit Δt_v feststellt. Er kann daraus gemäß $\bar{b}_v = \frac{\Delta u}{\Delta t_v}$ eine mittlere Beschleunigung $\bar{b}_v$ bestimmen. Für einen Erdbewohner dagegen würde sich das Raumschiff am Ende der Meßzeit mit einer Geschwindigkeit $v + \Delta v$ bewegen. Diese beiden Geschwindigkeitsdifferenzen sind nun über die Formel (4) verbunden.

Wir erhalten

$$v + \Delta v = \frac{v + \Delta u}{1 + \frac{v \cdot \Delta u}{c^2}} = (v + \bar{b}_v \Delta t_v)(1 - \frac{v}{c^2} \bar{b}_v \Delta t_v + (\Delta t_v)^2 \cdot f)$$

Bei dieser Rechnung haben wir davon Gebrauch gemacht, daß

$$q = \frac{v \cdot \Delta u}{c^2} = \frac{v \cdot \bar{b}_v \Delta t_v}{c^2} < 1 \text{ und daß } \frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-q)^n \text{ ist.}$$

Die Reihe ist konvergent und somit ist die Funktion f beschränkt. Ausmultiplizieren ergibt

$$\Delta v = \bar{b}_v \Delta t_v \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] + (\Delta t_v)^2 (fv - \bar{b}_v^2 \frac{v}{c^2} + \Delta t_v \cdot f \bar{b}_v).$$

Dividieren wir nun noch durch Δt_v und betrachten den Limes für $\Delta t_v \to 0$, so fällt der 2. Teil der rechten Seite weg und wir erhalten

$$\frac{dv}{dt_v} = b_v \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right].$$

Berücksichtigen wir nun noch (2) und die Kettenregel, so ergibt sich:

$$\frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{dv}{dt_v} \cdot \frac{dt_v}{dt} = b_v \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] (1 - v^2/c^2)^{1/2} = b_v (1 - v^2/c^2)^{3/2}. \tag{5}$$

Zur Vereinfachung unserer weiteren Rechnungen wollen wir annehmen, daß während der Beschleunigungsphasen b_v = const ist. Das ist auch für die Raumfahrer das angenehmste. Die Formel (5) dividieren wir durch $(1-v^2/c^2)^{3/2}$ und integrieren bzgl. t von 0 bis t. Wir erhalten:

$$\int_0^t b_v \, dt = b_v \cdot t = \int_0^t \frac{\dot{v}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \, dt = \frac{v}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \qquad (6)$$

Bei dieser und einigen späteren Integrationen überlassen wir die Verifikation durch Differentiation und das Überprüfen der Anfangswerte dem Leser.

Durch Umstellen von (6) erhalten wir:

$$1 + \left(\frac{b_v \cdot t}{c}\right)^2 = 1 + \frac{(v/c)^2}{(1-v^2/c^2)} = 1/(1-v^2/c^2) \qquad (7)$$

Unter Berücksichtigung von (7) können wir nun (5) bzgl. t von 0 bis t integrieren und es ergibt sich:

$$v = \int_0^t b_v (1-v^2/c^2)^{3/2} \, dt = \int_0^t b_v \left(1+\left(\frac{b_v \cdot t}{c}\right)^2\right)^{-3/2} dt$$
$$= b_v t \cdot \left[1+\left(\frac{b_v t}{c}\right)^2\right]^{-1/2}. \qquad (8)$$

Die Formel (8) kann nach denselben Spielregeln nochmals integriert werden und wir erhalten

$$s = \int_0^t \dot{v} \, dt = \int_0^t b_v t / \left[1+\left(\frac{b_v t}{c}\right)^2\right]^{-1/2} dt = \frac{c^2}{b_v}\left[\left(1+\left(\frac{b_v t}{c}\right)^2\right)^{1/2} - 1\right] \qquad (9)$$

Das klassische Analogon zu (9) wäre $s = \frac{b}{2} t^2$.

Da oft die Flugzeit als Funktion der Beschleunigungsstrecke interessiert, müssen wir (9) nach t umstellen; somit wird

$$t = \frac{c}{b_v}\left[\left(1+\frac{b_v s}{c^2}\right)^2 - 1\right]^{1/2}. \qquad (10)$$

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wie die entsprechenden Formeln für die Raumfahrer aussehen.

Unter der Berücksichtigung unserer Annahme, daß b_v = const, können wir (7) in (3) einsetzen und das entstehende Integral ausrechnen.

$$t_v = \int_0^t (1-v^2/c^2)^{1/2} \, dt = \int_0^t \left[1+\left(\frac{b_v t}{c}\right)^2\right]^{-1/2} dt$$
$$= \frac{c}{b_v} \ln\left[\frac{b_v t}{c} + \left(1+\left(\frac{b_v t}{c}\right)^2\right)^{1/2}\right]. \qquad (11)$$

Auch hier wäre eine Verifikation angebracht. Da wir diese Beziehung nach t auflösen wollen, führen wir eine Hilfsbetrachtung für die Funktion $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ durch, die wir schrittweise nach x umstellen.

Als erstes sehen wir, daß $\sqrt{1+x^2} = e^y - x$ ist. Durch Quadrieren ergibt sich $1 = e^{2y} - 2e^y \cdot x$ und somit $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.

Wenden wir dies auf (10) an, so erhalten wir

$$t = \frac{c}{2b_v}\left(e^{b_v t_v/c} - e^{-b_v t_v/c}\right) \qquad (11)$$

Setzen wir (11) in (8) bzw. (9) ein, so ergibt sich

$$v = c\cdot\left(e^{b_v t_v/c} - e^{-b_v t_v/c}\right)/\left(e^{b_v t_v/c} + e^{-b_v t_v/c}\right) \qquad (12)$$

und

$$s = \frac{c^2}{2b_v}\left[e^{b_v t_v/c} + e^{-b_v t_v/c} - 2\right] \qquad (13)$$

Auch für die letzten beiden Formeln ließe sich eine Auflösung nach t_v angeben.

Betrachten wir zwei Beispiele:

1. Unser Reiseziel sei der Stern α -Centauri, der in einer Entfernung von $4\cdot10^{16}$ m steht. Er ist der unserer Sonne nächstgelegene Fixstern.
   Das Raumschiff soll mit $b_v = 10\ m/s^2$ auf $v_{max} = c/3$ beschleunigt werden, anschließend antriebslos fliegen und vor dem Reiseziel wieder mit $b_v = 10\ m/s^2$ auf $v_{end} = 0$ abgebremst werden. Wie lange dauert die Mission für einen Erdbewohner und für einen Raumfahrer, wenn der Rückflug analog verläuft ohne Berücksichtigung der Aufenthaltsdauer?
   Es ist klar, daß wir alle Größen nur bis zur Hälfte der Hinflugstrecke berechnen können.
   Die Umstellung von Formel (8) nach t liefert:
   $t = \frac{v}{b_v}\left[1-(v/c)^2\right]^{-1/2}$ und somit für unsere Werte $b_v = 10 m/s^2$ und $v = c/3$ $\quad t^{(1)} \approx 1{,}0607\cdot10^7$ sec $\approx$ 123 Tage.
   Formel (11) zeigt, daß dann $t_v^{(1)} \approx 1{,}0397\cdot10^7$ sec $\approx$ 120 Tage.
   Aus der Formel (9) gewinnen wir eine Beschleunigungsstrecke von $s^{(1)}$ von $5{,}459\cdot10^{14}$ m. Es verbleiben etwa $s^{(2)} = 1{,}945\cdot10^{16}$ m Freiflugstrecke. Um diese zurückzulegen, braucht man $t^{(2)} = s^{(2)}/v \approx 1{,}945\cdot10^8$ sec $\approx$ 2252 Tage im Erd-

system, bzw. nach Formel (1)

$t_v^{(2)} \approx 2123$ Tage im Raketensystem.

Die Mission dauert also für einen Erdbewohner etwa 26 Jahre und für einen Raumfahrer etwa 24 Jahre und 7 Monate.

2. Wie ändern sich die Verhältnisse, wenn bis zur Hälfte der Distanz mit 10 m/s^2 beschleunigt wird?
Welche Maximalgeschwindigkeit tritt auf?
Formel (10) liefert uns die Beschleunigungszeit

$$t = 1064 \text{ Tage.}$$

Dem entspricht gemäß Formel (11)

$$t_v = 638 \text{ Tage.}$$

Setzen wir unsere Beschleunigungszeit in (8) ein, so erhalten wir

$$v_{max} \approx 2{,}85 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 0{,}95 \text{ c.}$$

Jetzt beträgt also die Missionsdauer für einen Erdbewohner 11 Jahre und 8 Monate und für die Raumfahrer 7 Jahre.

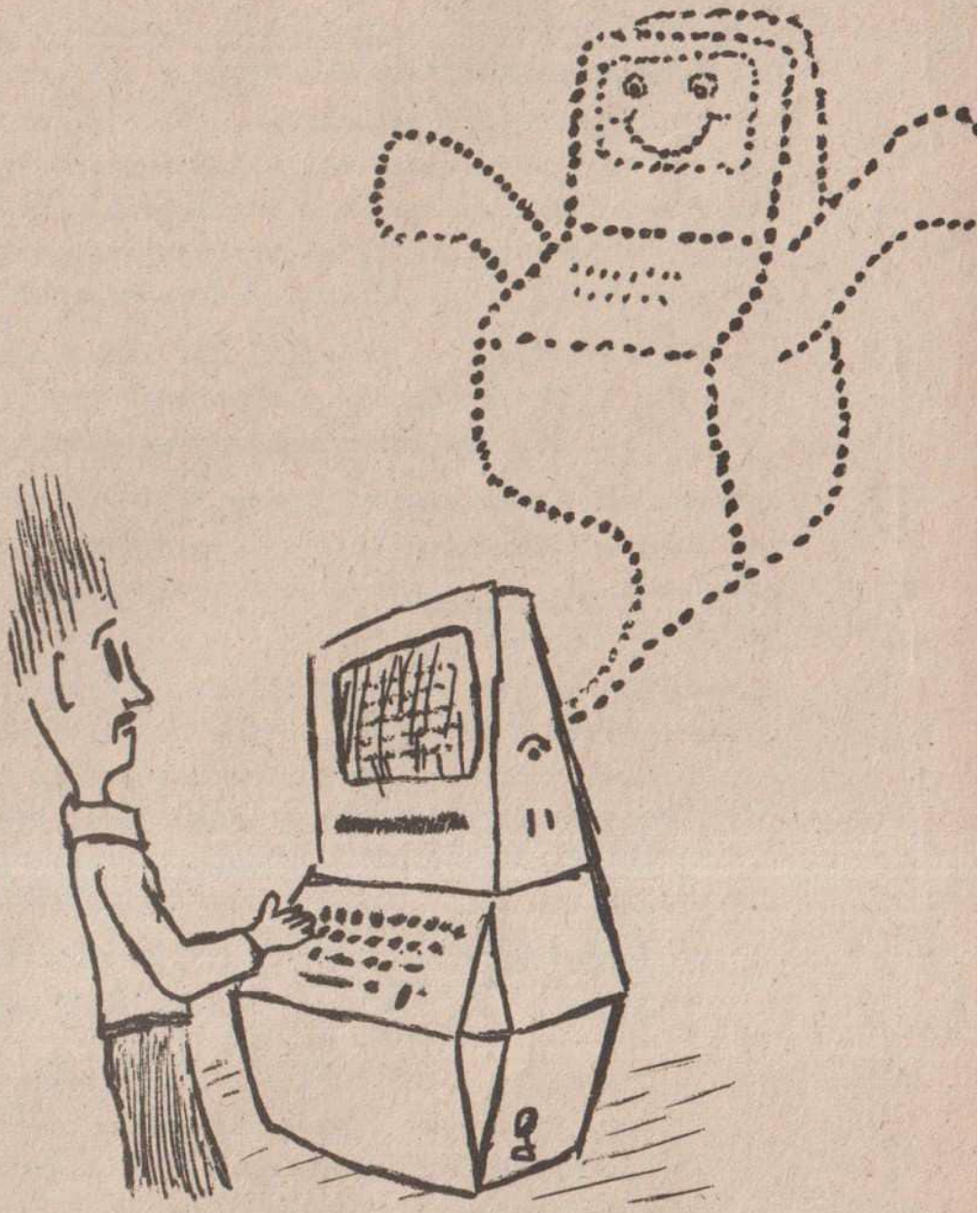
Fortsetzung folgt

Dr. G. Dietzel, FSU
Sektion Mathematik

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Burkhard Götz
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimmler, R. Heinrich, S. Kratochwil, K. Tauscher

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 20. 7. 1984



10
84

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
18. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Der Fundamentalsatz der Algebra

Der Fundamentalsatz der Algebra ist wohl einer der grundlegendsten Sätze in der Mathematik und besitzt erst im Bereich der komplexen Zahlen allgemeine Gültigkeit. Aus diesem Grunde möchten wir an dieser Stelle einen Beweis dieses Satzes anführen, der zwar etwas lang, dafür jedoch elementar ist.

S a t z : Jedes Polynom $f(x)$ mit komplexen Koeffizienten, dessen Grad n mindestens 1 ist, besitzt im Bereich der komplexen Zahlen wenigstens eine Nullstelle.

Anmerkung: Unter einem Polynom $f(x)$ wollen wir einen unbestimmten Ausdruck der Form $f(x) = a_0+a_1x + a_2x^2 +\ldots+ a_nx^n$ verstehen, wobei $a_0,\ldots,a_n$ Koeffizienten genannt werden. n heißt Grad der Funktion, falls $a_n \neq 0$ ist.

Beweis: Bevor wir zum eigentlichen Beweis kommen, benötigen wir unter anderem noch eine wichtige Definition, nämlich folgende:

Eine Funktion h heißt an der Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches stetig genau dann, wenn gilt:
für jedes reelle $\varepsilon > 0$ existiert ein reelles $\delta > 0$, so daß für alle x des Definitionsbereiches von h aus
$|x-x_0| < \delta \quad |h(x)-h(x_0)| < \varepsilon$ folgt.

Formal: $\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in D(f)} |x-x_0| < \delta \rightarrow |h(x)-h(x_0)| < \varepsilon$.

Das heißt, eine Funktion wird stetig genannt in x_0, wenn eine sehr kleine Annäherung der Werte des Definitionsbereiches an x_0 auch eine kleine Annäherung der Funktionswerte $h(x)$ an $h(x_0)$ nach sich zieht. Anschaulich stellt man sich das etwa so vor, daß die Funktion bei der graphischen Darstellung als eine durchgehende Kurve gezeichnet werden kann. Man spricht von einer stetigen Funktion, falls sie im ganzen Definitionsbereich stetig ist.

1. Lemma: Jedes Polynom $f(x)$ mit komplexen Koeffizienten ist eine stetige Funktion der komplexen Veränderlichen x.

Beweis: sei $f(x) = a_nx^n +\ldots+ a_1x + a_0$.
Da ein Polynom für jede komplexe Zahl x definiert ist,

müssen wir zeigen, daß $f(x)$ in jedem beliebigen Punkt x_0 stetig ist. Wir greifen uns nun ein beliebiges x_0 aus dem Definitionsbereich. $f(x_0) = a_n x_0^n + \ldots + a_1 x_0 + a_0$.
Dann ist $f(x)-f(x_0) = a_n(x^n - x_0^n) + \ldots + a_1(x-x_0)$.
Da $x^n - x_0^n = (x-x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})$ ist, können wir schreiben:

$$f(x)-f(x_0) = (x-x_0)\cdot a_n(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}) + \\ + \ldots + a_2(x+x_0) + a_1 \quad .$$

Nun ist nach Dreiecksungleichung und Anwendung des Betrages auf das Produkt:

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |x-x_0| [|a_n| (|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|x_0| + \ldots + |x_0|^{n-1}) + \\ + \ldots + |a_1|] . \qquad (1)$$

Wählen nun x so, daß $|x-x_0| < 1$ (2). Daraus folgt, daß $|x| < |x_0| + 1$.
Da auch $|x_0| < |x_0| + 1$, setzen wir jetzt in (1) $\mu = |x_0| + 1$ für $|x_0|$ und $|x|$ ein. Da $|x_0| < \mu$ und $|x| < \mu$ verschärft sich die Ungleichung:

$$|f(x)-f(x_0)| < |x-x_0| \cdot [|a_n| (\underbrace{\mu^{n-1} + \mu^{n-1} + \mu^{n-1} + \ldots + \mu^{n-1}}_{n\text{-mal}}) + \\ |a_{n-1}| (\underbrace{\mu^{n-2} + \ldots + \mu^{n-2}}_{(n-1)\text{-mal}}) + \ldots + |a_1|]$$

$$= |x-x_0| \cdot (n|a_n|\mu^{n-1} + (n-1)|a_{n-1}|\mu^{n-2} + \ldots + |a_1|) .$$

Da für ein konkretes x_0 μ eine feste Größe ist, setzen wir jetzt für $n|a_n|\mu^{n-1} + \ldots + |a_1| = K$. K ist also auch ein endlicher fester Wert. Haben also nun:

$$|f(x)-f(x_0)| < K \cdot |x-x_0| .$$

Nun sei uns ein reelles $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wie müssen wir nun unser δ wählen, daß aus $|x-x_0| < \delta$ $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ folgt?
Wir setzen unser δ so, daß $\delta < 1$ und $\delta < \frac{\varepsilon}{K}$ gilt. Die Forderung $\delta < \frac{\varepsilon}{K}$ würde eigentlich genügen, aber in (2) haben wir eine Einschränkung an die Werte des Definitionsbereiches vornehmen müssen.

Sei nun $\delta < 1$ und $\delta < \frac{\varepsilon}{K}$.
Es gilt $|f(x) - f(x_0)| < K \cdot |x-x_0| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. q.e.d.
Also ist das beliebig gewählte Polynom stetig an einer beliebigen Stelle x_0 eines Definitionsbereiches, somit im ganzen Definitionsbereich.

2. Lemma: Wenn eine Funktion $h(x)$ stetig ist, dann ist auch die Funktion $h'(x) = |h(x)|$ stetig.

Der Beweis ist trivial, wenn man berücksichtigt, daß
$|h'(x)-h'(x_0)| = ||h(x)|-|h(x_0)|| \leq |h(x)-h(x_0)|$.

3. Lemma: Wenn $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x$, dann gibt es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $\delta > 0$, so daß für alle x, die der Ungleichung $|x| < \delta$ genügen, auch $|f(x)| < \varepsilon$ gilt.

Beweis: $|x| < \delta$ und $|f(x)| < \varepsilon$ sind Spezialfälle der Ungleichungen $|x-x_0| < \delta$ und $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$, nämlich falls $f(x_0) = 0$ für $x_0=0$. Die Funktion f hat die Eigenschaft, daß $f(0)=0$ und ist außerdem ein Polynom ($a_0=0$). Somit folgt die Behauptung trivialerweise.

4. Lemma: Sei $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ ein Polynom vom Grade $n \geq 1$. Dann gilt: Der Wert $|f(x)|$ übersteigt jede reelle Zahl R, falls x betragsmäßig genügend groß gewählt wird.

Beweis: $f(x) = a_n x^n \cdot \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\right)$

Da der Betrag einer Summe stets mindestens so groß wie die Differenz der Beträge der Summanden ist, gilt also

$$|f(x)| \geq |a_n| \cdot |x^n| \cdot \left[1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\right|\right].$$

Man kann nun den Ausdruck
$\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}$ als Polynom der Variablen $\frac{1}{x}$ auffassen, bei dem das Absolutglied Null ist. Somit können wir unter Verwendung des 3. Lemma folgern, daß zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß alle x, für die $\left|\frac{1}{x}\right| < \delta$ gilt, die Ungleichung $\left|\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\right| < \frac{1}{2}$

erfüllen. Die Ungleichung $|\frac{1}{x}| < \delta$ ist äquivalent zu $|x| > \frac{1}{\delta}$. Also gilt für alle x, die $|x| > \frac{1}{\delta}$ erfüllen:
$|f(x)| > |a_n| \cdot |x|^n (1 - \frac{1}{2})$, also $|f(x)| > \frac{1}{2}|a_n| \cdot |x|^n$.
Damit nun $|f(x)| > R$, muß $|x| > \sqrt[n]{\frac{2R}{|a_n|}}$ gewählt werden, denn dann ist $|f(x)| > \frac{1}{2}|a_n| \cdot |x|^n > \frac{1}{2}|a_n| \cdot \sqrt[n]{\frac{2R}{a_n}}^n = R$.

5. Lemma: Wenn ein Polynom f(x) bei x_0 nicht den Wert Null annimmt, so gibt es eine komplexe Zahl z mit folgender Eigenschaft:

$$|f(x_0+z)| < |f(x_0)|.$$

Beweis: Wenn $x = x_0+z$, erhalten wir den Ausdruck
$f(x_0+z) = a_n(x_0+z)^n + \ldots + a_1(x_0+z) + a_0$.
Wir können nun die Ausdrücke $(x_0+z)^K$, $K=2,\ldots,n$ nach dem Binomischen Lehrsatz in eine Summe zerlegen und diese dann mit den entsprechenden Koeffizienten a_K ausmultiplizieren. Dann können wir die Ausdrücke (Summanden), welche die gleiche Potenz der Zahl z enthalten, zusammenfassen, indem wir die entsprechende Potenz ausklammern. Auf diese Weise erhalten wir neue Koeffizienten $b_0,\ldots,b_n$, die nicht von z abhängen. Nun können wir für $f(x_0+z)$ schreiben
$f(x_0+z) = b_0 + b_1 z + \ldots + a_n z^n$. Der Koeffizient vor z^n bleibt unverändert, wie man sich leicht überzeugen kann. Wir untersuchen nun zwei Fälle.

1. Fall: Nicht alle $b_1,\ldots,b_{n-1}$ sind Null.

Sei o.B.d.A. $b_K \neq 0$, aber alle $b_i = 0$ für $1 \leq i < K$, also $b_1 = \ldots = b_{K-1} = 0$. Somit ist
$f(x_0+z) = f(x_0) + b_K z^K + b_{K+1} z^{K+1} + \ldots + a_n z^n$.
Es sollte $f(x_0) \neq 0$ sein, somit ist eine Division der Gleichung durch $f(x_0)$ möglich und wir erhalten, indem wir $c_K = \frac{b_K}{f(x_0)}, \ldots, c_n = \frac{a_n}{f(x_0)}$ setzen, den Ausdruck

$$\frac{f(x_0+z)}{f(x_0)} = 1 + c_K z^K + \ldots + c_n z^n.$$

Da wir von $b_K \neq 0$ ausgegangen waren, gilt nun auch $c_K \neq 0$.

Wir klammern nun aus der Summe $c_{K+1}z^{K+1}+\ldots+c_n z^n$ den Faktor $c_K z^K$ aus und erhalten:

$$\frac{f(x_0+z)}{f(x_0)} = (1+c_K z^K)+c_K z^K \cdot \left(\frac{c_{K+1}}{c_K} z+ \frac{c_{K+2}}{c_K} z^2+\ldots+ \frac{c_n}{c_K} z^{n-K}\right).$$

Nach Anwendung der Betragsungleichung folgt nun

$$\left|\frac{f(x_0+z)}{f(x_0)}\right| \leq \left|1+c_K z^K\right|+\left|c_K z^K\right| \cdot \left|\frac{c_{K+1}}{c_K} z+\ldots+ \frac{c_n}{c_K} z^{n-K}\right| \qquad (3)$$

Nun ist natürlich wieder $\frac{c_{K+1}}{c_K} z+\ldots+ \frac{c_n}{c_K} z^{n-K}$ ein Polynom über die komplexe Zahl z, dessen absolutes Glied verschwindet.

Also gibt es nach Lemma 3 zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $\delta > 0$, so daß aus $|z| < \delta$ die Ungleichung

$\left|\frac{c_{K+1}}{c_K} z +\ldots+ \frac{c_n}{c_K} z^{n-K}\right| < \frac{1}{2}$ folgt.

Also ergibt der Ausdruck (3) für $|z| < \delta$:

$\left|\frac{f(x_0+z)}{f(x_0)}\right| < \left|1+c_K z^K\right| + \frac{1}{2}\left|c_K z^K\right|$. Bis jetzt sollte $|z| < \delta$ sein. Wir wollen nun zusätzlich fordern, daß $c_K z^K$ negativ wird. $c_K z^K$ wird genau dann negativ, falls $\arg(c_K z^K) = \pi$.

Anmerkung: Jede komplexe Zahl c läßt sich darstellen als $c=a+bi$ mit $a,b \in \mathbb{R}$. Nun stellt man sich ein rechtwinkliges Koordinatensystem vor, in dem der Realteil a auf der Abszissenachse und der Imaginärteil b auf der Ordinatenachse abgetragen wird. Somit entspricht jeder komplexen Zahl ein Punkt in diesem Koordinatensystem. Als arg c definiert man sich nun diejenige Funktion, die einer komplexen Zahl den Winkel, der zwischen dem positiven Teil der Abszissenachse und der durch den Koordinatenursprung und durch (a,b) bestimmten Strecke eingeschlossen wird. Gilt nun $\arg c = \pi$, folgt natürlich, daß c auf dem negativen Halbstrahl der Abszissenachse liegen muß und somit negativ ist.

Nun gilt $\pi = \arg(c_K z^K) = \arg c_K + K \arg z$.

Daraus ergibt sich $\arg z = \dfrac{\pi - \arg c_K}{K}$.

Sei also nun z hinreichend klein und erfülle zusätzlich obige Gleichung.

Somit ist $c_K z^K = -|c_K z^K|$.

Demnach haben wir nun

$$\left|\frac{f(x_0+z)}{f(x_0)}\right| < \left|1-|c_K z^K|\right| + \frac{1}{2}|c_K z^K| .$$

Wir wählen jetzt z so klein, daß $|c_K z^K| < 1$ erfüllt ist.

Dann gilt: $1 - |c_K z^K| > 0$ und somit

$$\left|1 - |c_K z^K|\right| = 1 - |c_K z^K| .$$

Somit ergibt sich folgende Ungleichung

$$\left|\frac{f(x_0+z)}{f(x_0)}\right| < 1 - |c_K z^K| + \frac{1}{2}|c_K z^K| = 1 - \frac{1}{2}|c_K z^K| .$$

Da $|c_K z^K| < 1$ ist, folgt $1 - \frac{1}{2}|c_K z^K| < 1$.

Also kann bei richtig gewähltem z $\left|\frac{f(x_0+z)}{f(x_0)}\right|$ kleiner als 1 werden.

Da $\left|\frac{f(x_0+z)}{f(x_0)}\right| = \frac{|f(x_0+z)|}{|f(x_0)|} < 1$, muß $|f(x_0+z)| < |f(x_0)| = f(x_0)$

da $f(x_0) > 0$ vorausgesetzt war.

Somit haben wir den 1. Fall bewiesen.

2. Fall: alle $b_i = 0$, $i=1,\dots,b-1$

Also erhält man die Gleichung $f(x_0+z) = f(x_0) + a_n z^n$.

Wir dividieren wieder durch $f(x_0)$ und somit ist

$\left|\frac{f(x_0+z)}{f(x_0)}\right| = |1+c_n z^n|$, wobei $c_n = \frac{a_n}{f(x_0)} \neq 0$ ist.

Nun wählen wir wieder z so, daß $\arg z = \dfrac{\pi - \arg c_n}{n}$ und $|c_n z^n| < 1$ gilt.

Damit ist $\left|\frac{f(x_0+z)}{f(x_0)}\right| = \left|1 - |c_n z^n|\right| = 1 - |c_n z^n| < 1$.

Dies bringt uns auf die geforderte Ungleichung $|f(x_0+z)| < |f(x_0)|$.

6. Lemma: Ist R die untere Grenze der Menge W aller möglichen Werte $|f(x)|$ des Polynoms $f(x)$, so gibt es wenigstens eine komplexe Zahl x_0, für die $f(x_0) = R$ gilt.

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in N}$ eine gegen Null konvergierende Folge von positiven reellen Zahlen. Da R untere Grenze für $|f(x)|$ sein soll, muß es zu jedem a_n ein x_n' geben, so daß $0 \leq |f(x_n')| - R < a_n$. Da die Folge der a_n gegen Null konvergiert, muß es zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N geben, so daß für alle Indizes n größer N $a_n < \varepsilon$. Somit gilt für alle $n > N$:

$$0 \leq |f(x_n')| - R < \varepsilon .$$

Damit konvergiert die Folge $(f(x_n'))_{n\in N}$ gegen R. Da $(f(x_n'))_{n\in N}$ konvergiert, muß sie auch beschränkt sein. Also gibt es eine Zahl $M > 0$ mit $|f(x_n')| < M$, $n=1,2,\ldots$. Nach dem 4. Lemma gibt es zu dieser Zahl M eine Zahl N', so daß für alle $|x| > N'$: $|f(x)| > M$. Da für alle $x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots$ die Ungleichung $|f(x_n')| < M$ gilt, kann für keines dieser x_i' $|f(x_i')| > M$ gelten. Somit gilt $|x_n'| < N'$. Damit ist auch die Folge $(x_n')_{n\in N}$ beschränkt. Wenn sie beschränkt ist, muß sie eine konvergente Teilfolge besitzen. Nennen wir diese $(\bar{x}_n)_{n\in N}$ und ihr Grenzwert sei x_0 (also $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = x_0$).

Da $(f(\bar{x}_n))_n$ eine Teilfolge von $(f(x_n'))_n$ ist, muß diese ebenfalls gegen R konvergieren, also auch $\lim\limits_{n\to\infty} |f(\bar{x}_n)| = R$. (4)

Da $f(x)$ ein Polynom und somit stetig ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} |f(\bar{x}_n)| = |f(x_0)| \qquad (5)$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) folgt nun $|f(x_0)| = R$.

Nun sind wir in der Lage, den Beweis abzuschließen. Sei R wieder die untere Grenze für die Werte $|f(x)|$. Wissen nach 6. Lemma: Es gibt mindestens eine komplexe Zahl x_0, so daß $f(x_0) = R$. Wenn wir zeigen können, daß $R = 0$, ist der Satz damit bewiesen. Wir nehmen darum an, $R \neq 0$. Dann wäre auch $f(x_0) \neq 0$. Jetzt muß nach 5. Lemma gelten: Es gibt eine komplexe Zahl x_0+z mit $f(x_0+z) < f(x_0) = R$, denn die Voraussetzungen des Lem-

mas sind erfüllt, da ja $R > 0$ und sonst auch $f(x_0) > 0$. Wenn nun ein x' existiert mit $f(x') < R$, so ist dies ein Widerspruch dazu, daß R untere Grenze der Funktionswerte von $f(x)$ ist.
Deshalb gilt $R = 0$ und $f(x)$ hat somit eine komplexe Nullstelle.

Kommen wir nun zu einfachen Folgerungen aus dem eben bewiesenen Satz.

Folgerung 1: Jedes komplexe Polynom vom Grade $n > 1$ besitzt genau n Nullstellen.

Beweis: Sei uns das Polynom $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_n x + a_0$ gegeben. Aus dem Fundamentalsatz folgt nun, es existiert eine komplexe Zahl x_1 mit $f(x_1) = 0$. Also ist $a_n x_1^n + \ldots + a_1 x_1^n + a_0 = 0$. Nun kann man das Polynom $f(x)$ in der Form $(x-x_1)\cdot f'(x)$ darstellen, wobei $f'(x)$ ein neues Polynom über x ist, mit der Eigenschaft, daß der Grad von $f'(x)$ $(n-1)$ beträgt. Nun existiert nach Aussage des Fundamentalsatzes wieder eine komplexe Zahl x_2 mit $f'(x_2) = 0$. Nun können wir $f'(x)$ als $(x-x_2)\cdot f''(x)$ darstellen, wobei $f''(x)$ ein Polynom vom Grade $n-2$ ist. Führen wir dieses Verfahren fort, so erhalten wir für $f(x)$ die Darstellung $(x-x_1)(x-x_2)\cdot \ldots \cdot(x-x_n)$. Wir erhalten für alle x_i, $i=1,\ldots,n$, $f(x_i) = 0$ und haben somit n Nullstellen erhalten.

Der Satz liefert eine weitere Aussage, die wir an dieser Stelle aber nicht beweisen wollen, nämlich

Folgerung 2: Ist $f(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, so läßt sich $f(x)$ in der Form

$$d(x-c_1)^{e_1}\cdot(x-c_2)^{e_2}\cdot\ldots\cdot(x-c_K)^{e_K}\cdot(x^2+a_1x+b_1)^{f_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+a_Lx+b_L)^{f_L}$$

darstellen,

wobei $d, c_1, \ldots, c_K, e_1, \ldots, e_K, a_1, \ldots, a_L, b_1, \ldots, b_L, f_1, \ldots, f_L$ gewisse reelle Zahlen sind.

Der Fundamentalsatz der Algebra tauchte als Vermutung bereits im 17. Jahrhundert auf. Sie wurde erstmals belegbar von dem französischen Mathematiker GIRARD ausgesprochen, und im Jahre 1746 unternahm D'ALEMBERT den Versuch, den Satz zu beweisen.

Soweit heute bekannt, war es GAUSS, dem der erste Beweis dieses Satzes gelang und das im Jahre 1799.

Mit den heutigen Mitteln der modernen Mathematik ist es möglich, den Fundamentalsatz auf bedeutend kürzere Weise und auf vielfältigen Wegen zu beweisen. Deshalb soll in einem späteren Heft ein funktionstheoretischer Beweis die Möglichkeit der Beweisverkürzung - und somit -erleichterung - aufzeigen. Dazu ist jedoch (im Gegensatz zum vorangegangenen Beweis) eine tiefere Kenntnis der Funktionentheorie notwendig.

Jörg Dimmler, FSU Jena
Mathematik-Student
2. Studienjahr

Preisaufgaben

Lösungsbedingungen:
Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.
Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse, Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.
Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in der Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

Q 49
2

Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же уголом при вершине найти треугольник с наибольшим периметром.

Q 50
1

Man konstruiere ein Viereck aus der Länge der Diagonalen, der Länge zweier gegenüberliegender Seiten und dem Winkel, den diese Seiten miteinander bilden.

Q 51
2

Es sei $[z]$ diejenige ganze Zahl, für die gilt
$z \leq [z] < z + 1$.
Man ermittle alle reellen Zahlen z, für die gilt:

$$-10 \leq z \leq 2$$
$$[z^2] = [z]^2$$

Q 52
1

Man löse das Gleichungssystem

$$\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}$$
$$x + xy + y = 9$$

Q 53
1

Man löse die Ungleichung

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1$$

Q 54
1

In einem Kegel sei eine Kugel einbeschrieben. Die Oberfläche der Kugel verhält sich zur Grundfläche des Kegels wie 4:3. Gesucht ist der Winkel an der Spitze des Kegels.

Einsendeschluß: 1. 1. 85

Der Flug zu den Sternen – Was kostet er?

Dieser Artikel ist gedacht als Fortsetzung eines Aufsatzes aus der WURZEL Nr. 9/84 , wo wir uns im wesentlichen mit der Problematik der Flugzeiten beschäftigt haben. Die Kostenfrage wollen wir über die Abschätzung der notwendigen Antriebsenergie lösen. Das Ziel wird dabei sein, die klassische Ziolkowski-Gleichung für den Fall eines relativistischen Raumfluges zu verallgemeinern. Dazu müssen wir uns mit der Dynamik eines relativistischen Raketenfluges beschäftigen.

Zunächst führen wir einige Abkürzungen ein.

Sei m_R ... die Rakentenmasse

m_T ... die Treibstoffmasse

v ... die Raketengeschwindigkeit

w_A ... die Geschwindigkeit des Abgasstrahles relativ zum Startpunkt

w ... die Geschwindigkeit des Abgasstrahles relativ zur Rakete .

Bis auf w, das eine konstante Größe darstellt, sind alle Größen zeitabhängig und da wir nur eine Beschleunigungsphase betrachten, kann man sie auch als Funktionen von v auffassen. Die Größen w und w_1 messen wir entgegen der Flugrichtung. Grundlage für unsere Rechnung ist eine Impuls- und Massenbilanz der beschleunigten Rakete.

Klassisch ist der Impuls eines Körpers der Masse m, der mit der Geschwindigkeit v fliegt, gerade das Produkt aus m und v. Bei der relativistischen Betrachtung muß man berücksichtigen, daß die Masse m_v von der Geschwindigkeit v und der Ruhemasse m_o gemäß $m_v = m_o/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ abhängt.

Die Bilanzgleichungen, die wir verwenden, lauten:

1. Impulsänderung der Rakete = Impulsänderung des Abgasstrahles
2. Masseänderung der Rakete = Masseänderung des Abgasstrahles.

Drücken wir dies, unter Beachtung der relativistischen Effekte sowie der Tatsache, daß der Abnahme von m_R eine Zunahme von m_T entspricht, mathematisch aus, so bedeutet dies:

$$\Delta\,(m_R\cdot(1-v^2/c^2)^{-1/2}\cdot v) = \Delta\, m_T(1-w_A^2/c^2)^{-1/2}w_A \qquad (1)$$

$$\Delta\,(m_R\cdot(1-v^2/c^2)^{-1/2}) = -\Delta\, m_T(1-w_A^2/c^2)^{-1/2} \qquad (2)$$

Dabei bedeutet $\Delta G = G_E - G_A$ die Differenz zwischen den Werten von G an einem End- und an einem Anfangszustand.
Die etwas einfachere Gestalt der rechten Seite erklärt sich dadurch, daß die Abstoßung eines Abgasteilchens die schon abgestoßenen Abgasteilchen nicht beeinflußt, wohl aber die fliegende Rakete.
Wenn wir zunächst die Gleichung (2) mit w_A multiplizieren und zur Gleichung (1) addieren, so ergibt sich

$$\Delta(m_R\cdot(1-v^2/c^2)^{-1/2}\cdot v) + w_A\cdot\Delta(m_R(1-v^2/c^2)^{-1/2}) = 0.$$

Da wir uns auf den Standpunkt stellen, daß m_R eine Funktion von v ist, können wir, um die Zuwächse auszurechnen, den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden. Somit ergibt sich

$$[m_R(v)\cdot(1-v^2/c^2)^{-1/2}\cdot v]'(\xi)\cdot\Delta v + w_A[m_R(v)(1-v^2/c^2)^{-1/2}]'(\eta)\,\Delta v = 0.$$

Dabei liegen ξ und η im Intervall $(v, v+\Delta v)$.
Kürzen wir durch Δv und bilden dann den Limes für $\Delta v \to 0$, so fallen diese beiden Zwischenwerte mit v zusammen.
Als nächstes überlegen wir uns, wie w_A mit w und v zusammenhängt. Unter Berücksichtigung des Additionstheorems (siehe WURZEL Nr. 9/84 , Formel (4)) und der Orientierung von w und w_A, erhalten wir $w_A = (w-v)/(1-w\cdot v/c^2)$. Wenn wir dies alles einsetzen, so ergibt sich

$$m_R'(v)\cdot v\cdot(1-v^2/c^2)^{-1/2} + m_R(v)\cdot(1-v^2/c^2)^{-3/2} +$$
$$(w-v)/(1-w\cdot v/c^2)\left[m_R'(v)(1-v^2/c^2)^{-1/2} + m_R(v)\cdot v(1-v^2/c^2)^{-3/2}/c^2\right] = 0.$$

Diese Gleichung erweitern wir nun mit $(1-v^2/c^2)^{3/2}\cdot(1-w\cdot v/c^2)$ und multiplizieren aus.
Nach dem Wegheben einiger Summanden verbleibt

$$m_R'(v)\cdot v(1-2v^2/c^2+v^4/c^4) + m_R(1-v^2/c^2) = 0.$$

Kürzen wir noch durch $(1-v^2/c^2)$, so erhalten wir unsere gesuchte Beziehung

$$m_R'(v)\cdot w(1-v^2/c^2) + m_R(v) = 0. \qquad (3)$$

Gleichungen dieses Types, die die unabhängige Variable, eine gesuchte Funktion dieser Variablen und deren Ableitungen verknüpfen, heißen Differentialgleichungen. Sie spielen in der mathematischen Physik eine große Rolle und es gibt für sie eine gut

ausgebaute Lösungstheorie. Dies soll uns hier nicht interessieren. Deshalb geben wir die Lösungsfunktion an und machen anschließend eine Probe.

Die Lösung lautet:

$$m_R(v) = M\left[(1-v/c)/(1+v/c)\right]^{c/2w}.$$

Dabei ist M eine zunächst beliebige Konstante.

Die Probe liefert:

$$m_R'(v) = M\left[(1-v/c)/(1+v/c)\right]^{c/2w-1}\cdot\frac{c}{2w}\cdot\frac{-(1+v/c)/c-(1-v/c)/c}{(1+v/c)^2}$$

$$= m_R(v)\cdot\frac{1+v/c}{1-v/c}\cdot\frac{-1}{w(1+v/c)^2} = -m_R(v)/\left[w\cdot(1-v^2/c^2)\right],$$

und bestätigt das Ergebnis.

Wenn wir M konkretisieren wollen, müssen wir berücksichtigen, daß $m_R(0)$ die Startmasse der Rakete ist, die wir mit M_s bezeichnen wollen. Mit M_{v_e} bezeichnen wir die Masse, die vorliegt, wenn die Rakete ihre vorgesehene Endgeschwindigkeit v_e erreicht hat.

Wir erhalten also:

$$M_1 = \frac{M_{v_0}}{M_s} = \left[(1-v_e/c)/(1+v_e/c)\right]^{c/2w} \qquad (4)$$

Diese Größe heißt das Massenverhältnis. Bisher hatten wir aber nur eine Beschleunigungsphase betrachtet. Bei mehreren, wie sie für einen Raumflug notwendig sind, ergibt sich das Gesamtmassenverhältnis, als das Produkt der Massenverhältnisse für die einzelnen Beschleunigungsetappen. Für das Flugprofil des Beispiels 1 in WURZEL Nr. 9/84 ergäbe sich $M_{ges} = (M_1)^4$. Für die Masse M_{v_e} können wir dann die Leermasse der Rakete (Kabine + Zelle ohne Treibstoff) einsetzen und auf diese Weise die notwendige Treibstoffmasse ausrechnen.

Wir benötigen jetzt lediglich noch Größenangaben für w. Einige erreichte bzw. utopische Ausströmgeschwindigkeiten sind:

a) $c/w_1 = 0{,}77 \cdot 10^5$ (chemische Triebwerke)
b) $c/w_2 = 0{,}3 \cdot 10^3$ (Kernfusionsantrieb)
c) $c/w_3 = 1$ (Annihilationstriebwerk - "Photonenrakete")

Wir wollen $v_e = \frac{c}{3}$ annehmen.

Es ergibt sich:

a) $M_{ges}^{(1)} = (1/2)^{0,77 \cdot 10^5 \cdot 2} \approx 10^{-46358}$

b) $M_{ges}^{(2)} = (1/2)^{0,3 \cdot 10^3 \cdot 2} \approx 10^{-181}$

c) $M_{ges}^{(3)} = (1/2)^2 = \frac{1}{4}$

Wenn wir mit einer sehr optimistischen Leermasse von 100 t rechnen, so erhalten wir folgende Startmassen:

$M_s^{(1)} = 10^{46360}$ t, $M_s^{(2)} = 10^{183}$ t, $M_s^{(3)} = 400$ t

Die beiden ersten Zahlen sind derart unrealistisch, daß wir uns nur mit $M_s^{(3)}$ beschäftigen wollen.

400 t Startmasse bei 100 t Leermasse bedeutet 300 t Treibstoffmasse. Daran entfallen 150 t auf Wasserstoff und 150 t auf Antiwasserstoff, die durch Annihilation die Energie liefern.

Die berühmte Einsteinsche Formel $E = mc^2$ zeigt, daß zur Herstellung des Antiwasserstoffes $3,75 \cdot 10^{15}$ kWh bei einem energetischen Wirkungsgrad 1 notwendig sind. (Moderne Beschleuniger erreichen den energetischen Wirkungsgrad 0,0004!)

Wenn wir berücksichtigen, daß 1980 weltweit $8,044 \cdot 10^{12}$ kWh Elektroenergie erzeugt wurden, so müßten wir diese Energie etwa 466 Jahre nur für die Erzeugung des Treibstoffes sammeln, wobei wir außerdem für unsere Rechnungen von sehr optimistischen Annahmen ausgegangen sind.

Noch schlimmer wird es, wenn wir das Flugprofil des 2. Beispiels betrachten. Hier erhalten wir für die Photonenrakete ein Massenverhalten von $M_{ges} = 6,4 \cdot 10^{-4}$, d. h. wir erhalten eine Startmasse von 156069 t bei 100 t Leermasse.

Wir können also zusammenfassen, daß für Reisen, deren Dauer in der Größenordnung eines Menschenalters liegen, die Energiebarriere einen solchen Flug für absehbare Zeit, wenn nicht gar gänzlich, unmöglich macht.

Dr. G. Dietzel, FSU
Sektion Mathematik

P 59 Wir lösen die zweite Gleichung nach x auf und setzen in die erste ein:

$y^2+\sqrt{3y^2-\frac{4}{3}y-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\,\frac{2y+5}{3}+5$. Hierin setzen wir

$\sqrt{\frac{9y^2-4y-1}{3}}=t\geqq 0$:

$t^2+3t-18=0$, also $t_1=-6$; $t_2=3$.

Hierbei entfällt die negative Lösung, wir erhalten die Bestimmungsgleichung

$9y^2-4y-28=0$ für y: $y_1=2$; $y_2=-\frac{14}{9}$

$\Longrightarrow$ $x_1=3$; $x_2=\frac{17}{27}$.

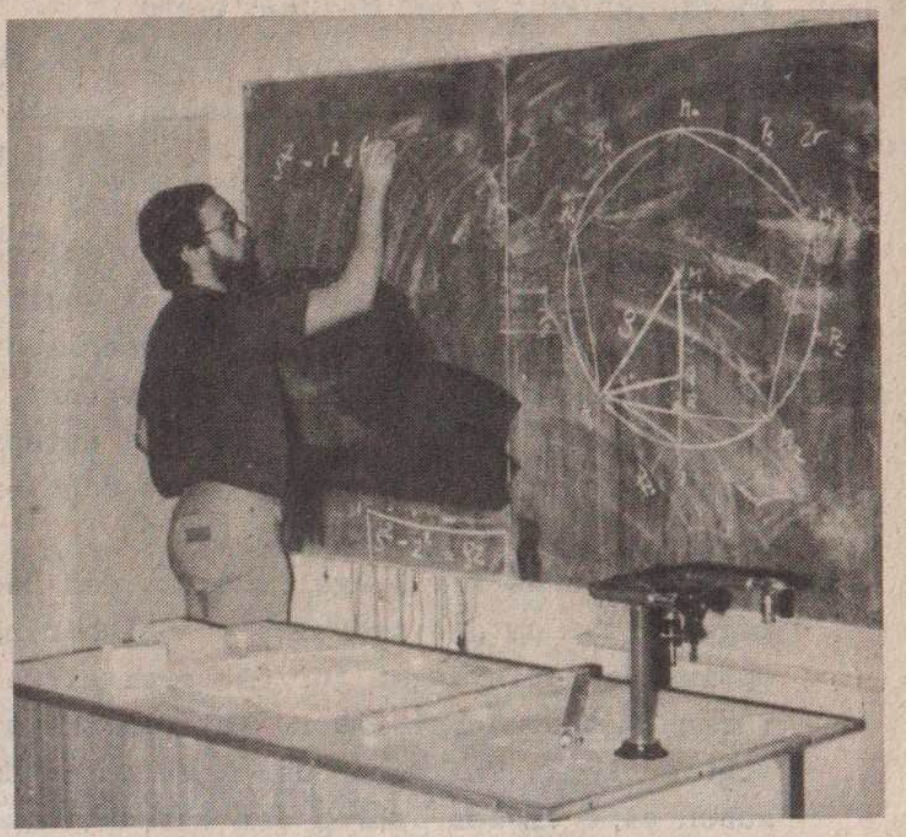
Die Probe bestätigt beide Paare als Lösungen.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Burkhard Götz
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimmler, R. Heinrich, S. Kratochwil, K. Tauscher

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,40 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 30. 8. 84

ISSN-0232-4539	Wurzel	Jena	18 (1984) 10	S. 145–160



11

84

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

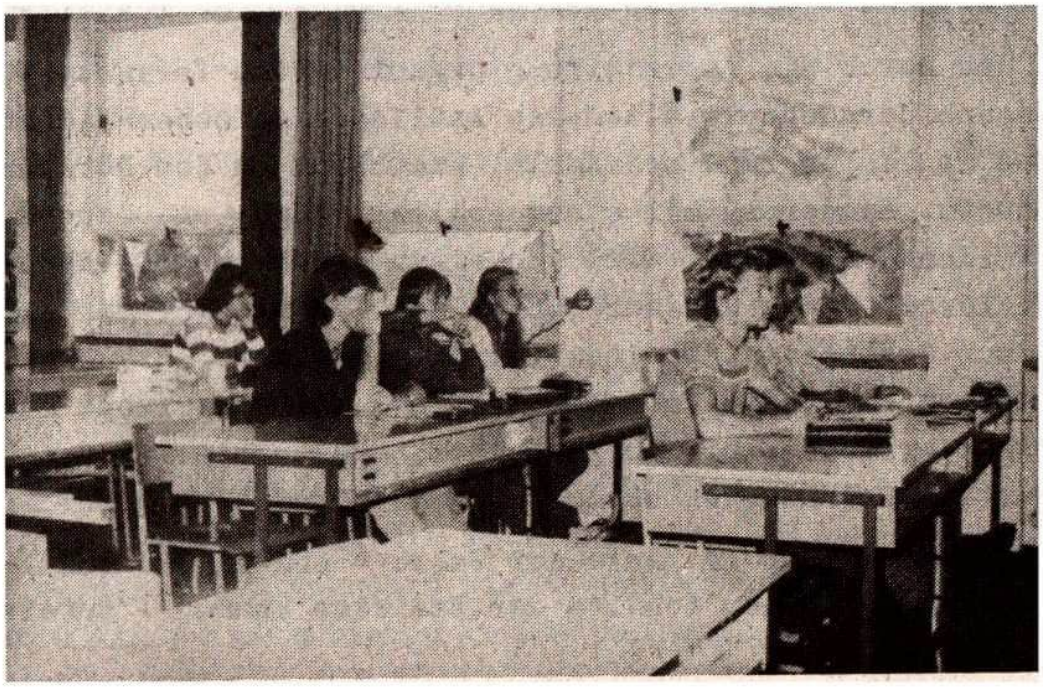
Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
18. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

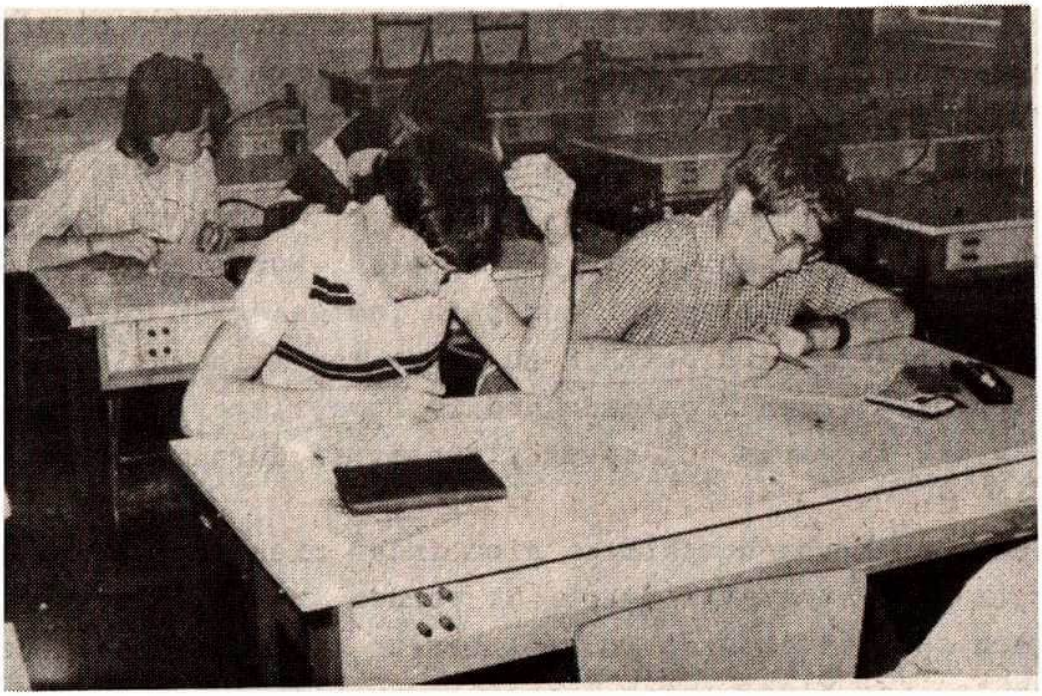
Mathematiklager des Bezirkes Gera

Es ist schon zu einer guten Tradition geworden, daß sich die auf mathematischen Gebieten talentierten Schüler des Bezirkes Gera als Mitglieder des Klubs Junger Mathematiker zu Ferienlagern besonderer Art zusammenfinden.
In jedem Schuljahr werden zwei Ferienlager zu je 10 Tagen durchgeführt; ein Winterlager, das sich unmittelbar an die Bezirksolympiade "Junger Mathematiker" anschließt und ein Sommerlager, das mit dem ersten Ferienmontag beginnt. Der Unterricht wird in vier, den Schulklassen 8 bis 11 entsprechenden Leistungsklassen durchgeführt, die von den Schülern in der Regel altersgerecht durchlaufen werden.
Neben Herrn Werner Krügel vom Rat des Bezirkes, der sich als Lagerleiter um die technische Absicherung und die Schaffung optimaler Bedingungen für die Freizeitgestaltung bemüht, und Herrn Günther Scheuermann, Mathematiklehrer an der Betriebsschule "Ernst Thälmann" des Kombinates Carl Zeiss Jena, der schon seit vielen Jahren den entscheidenden Beitrag zur fachlichen Leitung des Bezirksklubs leistet, nehmen Studenten und Mitarbeiter der Friedrich-Schiller-Universität, vor allem gegenwärtige und ehemalige Mitglieder des FDJ-Jugendobjekts "Studienwerbung - Studienvorbereitung", dem sich auch die WURZEL zugehörig zählt, die fachliche und erzieherische Betreuung wahr. Von diesem Jugendobjekt ging auch vor 20 Jahren die Initiative zur Gründung des Klubs aus. Anfangs stand vor allem die Aufgabe, die Schüler auf die mathematischen Wettbewerbe besonders vorzubereiten. Mit dieser Forderung verband sich zunächst ein Vielseitigkeitstraining besonderer, in der Schule nicht praktizierter Aufgabentypen aus den Randgebieten des Lehrplans oder aus weiterführenden Lehrstoffen. Das geschah zunächst sporadisch, glich sich den in den ersten Olympiaden vorherrschenden Aufgabenstellungen an und litt im ganzen gesehen an sinnvoller Systematik. Daß manche Sachverhalte mehrfach behandelt wurden, andere wichtige Gebiete dagegen unberücksichtigt blieben, stand auf der Tagesordnung und ließ sich schlecht umgehen. Seit etwa 10 Jahren wird in den Lagern nach einem Themenplan, der von Mitarbeitern der FSU und erfahrenen

Lehrern ausgearbeitet wurde, unterrichtet. Dieser Plan, der nach mehrmaliger Erprobung unter Berücksichtigung des neuen Lehrplanes für die Abiturstufen und der im Unterricht gemachten Erfahrungen überarbeitet wurde, ist nunmehr seit zwei Jahren in einer für die nächsten Jahre endgültigen Fassung Grundlage der Unterrichtsplanung. In jedem Lager werden in jeder Klassenstufe 17 Stunden Unterricht erteilt, wobei neben den für 16 Stunden im Stoffverteilungsplan festgelegten Themenkreis in den Winterferien ein Seminar zu aktuellen mathematisch-naturwissenschaftlichen Problemen und im Sommerlager eine Lagerolympiade mit Aufgaben zum behandelten Stoff durchgeführt werden.

Die Arbeit des Klubs beschränkt sich indes nicht auf die Aktivitäten in den Mathematiklagern. So werden in der Zeit zwischen den Lagern seit einigen Jahren die besten und seit diesem Jahr alle Schüler des Klubs durch Korrespondenzzirkel betreut, deren Aufgabenstellungen sich auf den im vergangenen Lager erarbeiteten Lehrstoff konzentrieren. Spitzentalente unter den Klubmitgliedern werden außerdem von den Mitarbeitern der Sek-





tion Mathematik der FSU individuell gefördert.

Die Mathematiklager sind nicht als Fortsetzung der intensiven Lernarbeit in der Ferienzeit gedacht, sondern als spezielle Form der Feriengestaltung zu verstehen und mit einem in Bildung und erholsamer Freizeit ausgewogenem Programm zu gestalten.

Neben den durch die Lagerleitung organisierten Veranstaltungen, wie Besuch der Gedenkstätten des Antifaschistischen Widerstandskampfes in Leubengrund bei Kahla, Exkursion zu den Dornburger Schlössern, Wanderung mit einem Kollektivjäger und Gespräche über Wildhege und Jagd, wird von einem gewählten FDJ-Aktiv aus die Fülle der Ideen und Anregungen der Lagerteilnehmer ein Programm zur Gestaltung der individuellen Freizeit aufgestellt: Diskotheken zum Berg- und Abschlußfest, wo jede Gruppe lustige, immer wieder neue Einlagen gestaltet, Skatturnier sind neben anderen Veranstaltungen schon zur guten Tradition geworden.

Daß der Bezirksklub im Laufe der Jahre - obwohl die Schüler aus den verschiedenen Schulen des Bezirkes kommen - zu einem

echten Kollektiv gewachsen ist, äußert sich auch darin, daß sich ausnahmslos jeder Teilnehmer auf das nächste Lager freut und seinen ganzen Ehrgeiz daran setzt, sich die Mitgliedschaft für das nächste Lager zu sichern.

Repräsentativ für alle ist wohl die Meinung von Detlef Nitzschke (10. Klasse) aus Jena über das Lagerleben, die er am Ende des Sommerlagers '84 äußerte:

"Das Mathematiklager hat sich auch in seinem 20. Jahr gut bewährt. Der Unterricht wird so durchgeführt, daß jeder etwas lernen kann. Wenn man einmal nicht gleich alles versteht, helfen gern die Studenten der FSU Jena.

Gut finde ich, daß die Festigung unseres Wissens im Rahmen des Korrespondenzzirkels jetzt besser organisiert wird, indem alle Mitglieder monatlich Aufgaben zu den im letzten Lager behandelten Komplexen erhalten.

Aber nicht nur der Unterricht im Lager ist interessant. In der Freizeit unterhalten wir uns auch über nicht mathematische Probleme. Es fanden Skat-, Tischtennis- und Volleyballturniere statt. Von Herrn Krügel und dem FDJ-Aktiv wurden uns Betriebsbesichtigungen der Pappe- und Kartonagenfabrik Wurzbach und der Heinrichshütte bei Wurzbach organisiert. Großes Interesse bestand auch für die Wanderung von Wurzbach nach Lobenstein. Eine weitere Wanderung nach Harra mußte leider wegen des schlechten Wetters ausfallen.

Zwei große Erlebnisse waren wieder das Bergfest und die Abschlußdisko.

Ich habe bisher an jedem Lager teilgenommen und habe jedesmal eine Menge dazugelernt und mich gut erholt."

G. Scheuermann, Th. Gundermann

Für richtige Lösungen der hier veröffentlichten Aufgaben der Lagerolympiade, die an die Redaktion der WURZEL geschickt werden, werden den Einsendern die angegebenen Punkte als Preisaufgabenpunkte gutgeschrieben (außer Aufgaben 8.1, 10.2, 10.3, 11.2).

Aufgaben der Lagerolympiade Sommer 1984

8.1. Im Imperium logicum trifft ein Wanderer, der nach A will, einen Einwohner. Die Einwohner des Imperium logicum sagen entweder stets die Wahrheit oder lügen stets (d. h. verneinen alle Aussagen, bilden dann aber die Aussageverbindungen korrekt). Mit welcher der folgenden zwei Fragen kann der Wanderer garantiert den Weg nach A ermitteln?

a) Hätten Sie auch vor einer Stunde gesagt, daß dieser Weg nach A führt?

b) Stimmt es, daß dieser Weg nach A führt und Sie die Wahrheit sagen?

8.2. Zwei Primzahlen P_1 und P_2 heißen Primzahlzwillinge, wenn $P_2-P_1 = 2$. Beweise, daß für alle Primzahlzwillinge (P_1,P_2) mit $P_1 > 3$ die Summe P_1+P_2 durch 12 teilbar ist!

8.3. Beweise den folgenden Satz:

Sind D,E,F die Fußpunkte der Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$, dann halbieren die Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$ die Innenwinkel des Dreiecks $\triangle DEF$. (Da der Beweis für alle drei Winkel analog verläuft, genügt es, ihn für den Winkel $\sphericalangle FDE$ zu führen.)

9.1. Beweise: Sind m und n zwei beliebige natürliche Zahlen, dann ist 30 stets ein Teiler der ganzen Zahl $z = m \cdot n(m^4-n^4)$.

9.2. Fünf Kugeln $K_1,\ldots,K_5$ mit gleichem Radius r seien so angeordnet, daß jede Kugel genau zwei andere berührt und daß ihre Mittelpunkte $M_1,\ldots,M_5$ ein ebenes regelmäßiges Fünfeck bilden. Eine sechste Kugel K_6 mit dem Radius r berühre jede der fünf Kugeln $K_1,\ldots,K_5$.

Untersuche, ob K_6 die Ebenen durch $M_1,\ldots,M_5$ schneidet, berührt oder nicht erreicht!

9.3. Beweise durch vollständige Induktion:

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ ist die Zahl $m = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ein ganzzahliges Vielfaches von 133.

10.1. Ein Stab der Länge l wird in zwei auf gut Glück ausgewählten Punkten zersägt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man aus den so gewonnenen Stücken ein Dreieck zusammensetzen kann?

10.2. Man bestimme ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen und dem Umfang U = 1242 LE.

10.3. Ein Tetraeder ABCS wird von einer Ebene ε geschnitten, die durch B geht, die Kante AS in Punkt D und die Kante CS in Punkt E schneidet.

Im einzelnen kennt man:

$A(0;0;0)$; $B(6;8;0)$; $C(0;12;0)$; $S(x_S, y_S, z_S)$,

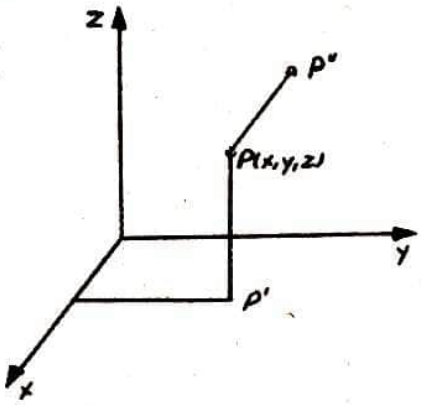
$D(2;4;6)$; $E(x_E;9;4)$.

Konstruiere in senkrechter Zweitafelprojektion

(a) den Grundriß der Schnittfläche;

(b) die Schnittgerade von mit der Grundrißebene!

<u>Hinweis:</u>



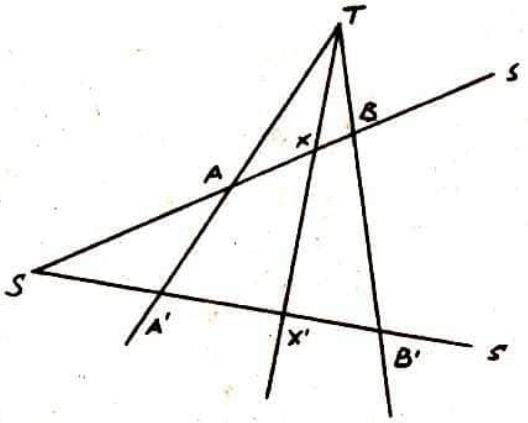
11.1. Ermittle alle reellen Zahlen x, für die

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} > 1 \quad \text{gilt!}$$

11.2. Man zeige, daß die Menge der geraden Permutationen von n Elementen bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden!
(Eine Permutation der Charakteristik +1 heißt gerade).
Bilden die ungeraden Permutationen (Charakteristik -1) ihrerseits ebenfalls eine Gruppe? Begründe Deine Entscheidung!

11.3. 6 Punkte A;A';B;B';X und X' mit den folgenden Eigenschaften seien gegeben:
A, X, B liegen auf einer Geraden s,
A',X',B'liegen auf einer Geraden s',
s und s' schneiden sich im Punkt S,
die Geraden g(A,A'); g(B,B') und g(X,X') schneiden sich in einem Punkt T.
Beweise, daß dann

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{BS}} : \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{A'S}}{\overline{A'S}} : \frac{\overline{A'X'}}{\overline{B'X'}} \quad \text{gilt.}$$



Programm des Mathematiklagers des Bezirkes Gera

Themenkomplexe:

A Logik-Mengenlehre-Relationen-Kombinatorik-Wahrscheinlichkeitsrechnung-Algebraische Strukturen.

B Zahlentheorie-lineare Gleichungssysteme-Gleichungen, Ungleichungen-komplexe Zahlen -goniometrische Gleichungen und Ungleichungen-Analysis.

C Elementargeometrie-Konstruktionen-Spiegelung am Kreis-Polyeder-Darstellende Geometrie-Kegelschnitte.

D Aufgabentraining-Übungen-Anwendungen-Wiederholung.

Lernabschnitt S 8 — 16 Doppelstunden

A Logik und Mengenlehre — 4 bis 5 Dstd.

Rolle der Logik in der Mathematik, Beziehungen zur Umgangssprache, Grundbegriffe der formalen Logik, klassische Aussagenverbindungen, Wahrheitswerttabellen, wichtige aussagenlogische Identitäten, Übungen zum Übertragen konkreter Sachverhalte in eine formale Sprache. - Mengenbegriff (CANTOR), Mengenoperationen und -relationen, Kreuzprodukt von Mengen.

B Zahlentheorie — 4 Dstd.

Vertiefung des Schulwissens über Teilbarkeit und Primfaktorzerlegung (insbesondere Beweise der grundlegenden Sätze), größter gemeinsamer Teiler und Euklidischer Algorithmus, Übungsaufgaben.

C Geometrische Beweise — 5 bis 6 Dstd.

Vertiefung des Schulwissens über geometrische Sätze (Winkel an parallelen Geraden, Winkel im Kreis, Sätze über kongruente und ähnliche Dreiecke), Anwendungen bei verschiedenartigen Aufgaben, Vervollkommnung der Beweistechniken (Kennenlernen und Bewußtmachen verschiedener Beweisverfahren und heuristischer Regeln zum Finden der Beweisidee).

D Aufgabentraining — 2 Dstd.

Lösen von Knobelaufgaben

Lernabschnitt W 8 — 16 Doppelstunden

A Logik — 4 bis 5 Dstd.

Wiederholung der Grundbegriffe, vielfältige Aufgaben und logische Spiele, Dirichletscher Schubfachschluß, wichtige Gesetz-

mäßigkeiten des mathematischen Schließens und deren Anwendung bei Beweisen, Beweisprinzipien (direkter und indirekter Beweis, Kontraposition), Umgang mit Quantifikatoren (exakte Formulierungen von Sätzen, mehrere Quantifikatoren, Verneinung, Beweisen quantifizierter Aussagen).

B Zahlenkongruenzen 4 Dstd.

Begriff der Zahlenkongruenz als Verallgemeinerung der Gleichheitsrelation, Eigenschaften und deren Beweise, Rechnen mit Restklassen, Zahlenpotenzen, Teilbarkeitsregeln, lineare Bestimmungskongruenzen, diophantische Gleichungen.

C Geometrie 5 bis 6 Dstd.

Dreieckskonstruktionen, Übungen zum korrekten und vollständigen Lösen einer Konstruktionsaufgabe, Beschäftigung mit bemerkenswerten Punkten und Linien des ebenen Dreiecks, Konstruktions- und Berechnungsaufgaben am Kreis.

D Aufgabentraining

Übungsaufgaben vorzugsweise aus den Themen des Lernabschnitts S 8

Lernabschnitt S 9 16 Doppelstunden

A Relationen 6 Dstd.

Graphen als Darstellungsmöglichkeiten für Relationen, Eigenschaften bekannter Relationen, Ordnungsrelationen, Äquivalenzrelationen, Abbildungen und ihre Eigenschaften, Gleichmächtigkeit von Mengen, vollständige Induktion.

B Zahlentheorie 4 Dstd.

Erweiterung und Vertiefung des Wissens aus S 8 und W 8 durch Anwendung auf schwierigere zahlentheoretische Aufgaben, Lösen von Olympiadeaufgaben, Eigenschaften von Summen und Produkten von Zahlen wie z. B. Summe von Quadratzahlen u. ä.

C Spiegelung am Kreis 4 Dstd.

Sekantensatz und Sekanten-Tangenten-Satz (mit Beweisen), Arbeiten mit der Abbildungsvorschrift und Herleiten von Eigenschaften, Beweise von Sätzen in dieser Geometrie, Anwendungen bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

D Aufgabentraining

Wiederholung der Themen aus W 8 und S 8

Lernabschnitt W 9 16 Doppelstunden

A Kombinatorik 5 Dstd.

Kombinatorische Grundregeln für Variationen, Permutationen und Kombinationen (mit Beweisen), Anwendungen, Binomialkoeffizienten und ihre Eigenschaften, Aufgaben (Pascalsches Dreieck, Teilbarkeit, Zahlenkongruenzen, Primzahlen).

B Lineare Gleichungssysteme und Determinanten 5 Dstd.

Gewinnung von Beispielen aus praktischen und Olympiadeaufgaben, Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme (Additions- und Gleichsetzungsverfahren, verketteter Algorithmus nach Gauß-Jordan), Beschreibung von Gleichungssystemen durch Determinanten, Berechnung von Determinanten und Anwendung bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen.

C Polyeder 4 Dstd.

Logisch-kombinatorische Überlegungen zum Beweis des Eulerschen Polyedersatzes, Ableitung der fünf regulären Polyeder, Eigenschaften, Aufgaben.

D Aufgabentraining 2 Dstd.

Wiederholung der Themen aus Abschnitt S 9

Lernabschnitt S 10 16 Doppelstunden

A Wahrscheinlichkeitsrechnung 5 bis 6 Dstd.

Zufällige Ereignisse, Operationen zwischen zufälligen Ereignissen, Ereignisalgebra, relative Häufigkeit, der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff, bedingte Wahrscheinlichkeit, geometrische Wahrscheinlichkeit, axiomatische Definition und Rechenregeln, Bayessche Formel.

B Gleichungen und Ungleichungen 4 bis 5 Dstd.

Komplizierte diophantische und Wurzelgleichungen, Systeme von Gleichungen und Ungleichungen, Abschätzung bei Ungleichungen, vollständige Fallunterscheidungen.

C Darstellende Geometrie 4 Dstd.

Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen in Zweitafelprojektion, Schnitte, wahre Größe und Gestalt verschiedener Gebilde, Körperdurchdringung, Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens durch Schrägdarstellungen und Aufgaben aus der räumlichen Geometrie.

D Aufgabentraining 2 Dstd.

Wiederholung der Themen aus W 9

Lernabschnitt W 10 16 Doppelstunden

A Wahrscheinlichkeitsrechnung 4 bis 5 Dstd.

Beschreibung diskreter Zufallsgrößen, Erwartungswert und Streuung, Verteilungsfunktionen (Gleichverteilung, Binomialverteilung, hypergeometrische Verteilung, Poisson-Verteilung).

B Komplexe Zahlen 5 Dstd.

Motivation der Einführung von komplexen Zahlen (Zahlenbereichserweiterung), Darstellungsformen für komplexe Zahlen, Rechenregeln, Formel von Moivre, n-te Einheitswurzeln, Kreisteilung.

C Beweise in der räumlichen Geometrie 4 bis 5 Dstd.

Verallgemeinerung ebener Sätze für den Raum (Analogiemethode zur Satz- und Beweisfindung), spezielle Tetraeder (Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras, Höhensatz, Kathetensatz), Festigung und Steigerung des räumlichen Vorstellungsvermögens an Hand ausgewählter Olympiadeaufgaben.

D Aufgabentraining 2 Dstd.

Wiederholung und Festigung der Themen aus Lernabschnitt S 10

Lernabschnitt S 11 16 Doppelstunden

A Algebra (I) 5 Dstd.

Gruppenbegriff mit Beispielen aus Zahlenbereichen, Mengenlehre, Zahlentheorie und Geometrie sowie abstrakter Art, - Strukturtafeln, wichtige Sätze und Eigenschaften (bis zum Satz von Fermat), Permutationsgruppen, Isomorphie von Gruppen.

B Goniometrische Gleichungen und Ungleichungen 4 bis 5 Dstd.

Komplizierte goniometrische Gleichungen und Ungleichungen, Gleichungssysteme, Lösungsverfahren für goniometrische Gleichungen, Gleichungen mit Parametern.

C Geometrie 4 bis 5 Dstd.

Lösen komplizierter Konstruktionsaufgaben, Anwendung von Sätzen über Winkelfunktionen, Beweise mit Winkelfunktionen.

D Aufgabentraining 2 Dstd.

Vertiefung und Wiederholung der Themen aus W 10

Fortsetzung im nächsten Heft

Preisaufgaben

Q 55 ① Für gegebene reelle Zahlen a,b finde man alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} + \sqrt{\frac{b-x}{b+x}}$$

Q 56 ② Man gebe alle Lösungen der Gleichung $8x^4 + 8x^3 - x = a$ in Abhängigkeit vom reellen Parameter a an!

Q 57 ① Gesucht sind alle arithmetischen Progressionen, deren erste drei Elemente addiert 15 und miteinander multipliziert 80 ergeben.

Q 58 ① Man berechne die Summe der ersten n Glieder der Reihe $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)$!

Q 59 ① Man finde alle Lösungen der Gleichung $x(x+1)(x-1)(x+2) = 24$.

Q 60 ② Доказать, что если окружность касается трёх сторон выпуклого четырёхугольника и не пересекает четвёртой, то сумма четвёртой и противоположной ей стороны меньше суммы остальных сторон четырёхугольника.

Lösungsbedingungen:
Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.
Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse, Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.
Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Einsendeschluß 1. 2. 85

Geschichte der Logik (Teil 4)
Algorithmische Logik

In diesem letzten Beitrag zur Geschichte der Logik wollen wir auf eine moderne Entwicklung der mathematischen Logik etwas genauer eingehen.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß sich bei der gegenwärtigen hochentwickelten Rechentechnik die Tendenz zeigt, daß im Rahmen der Kosten einer rechentechnischen Anlage der Anteil der Kosten für die Software (Systemunterlagen) gegenüber den Kosten für die Hardware (Gerätetechnik) zunehmend größer wird und heute meist schon weit mehr als 50 Prozent der Gesamtkosten ausmacht. Dies ist eine der Ursachen für die gegenwärtigen äußerst vielfältigen theoretischen Untersuchungen auf dem Software-Sektor, die weltweit durchgeführt werden. Ihre Resultate und Bemühungen kann man der sogen. Programmierungstheorie zuordnen. Wie bei jeder speziellen mathematischen Theorie war man auch hier bestrebt, eine logische Grundlage für diese Theorie zu schaffen, die Programmierungstheorie als ein formalisiertes logisches System darzustellen. So entwickelte sich die algorithmische Logik. Ihr Anliegen ist das Auffinden und Formulieren der wichtigsten Gesetzmäßigkeiten, die Berechnungsprozesse betreffen, unabhängig von konkreten Maschinen oder Algorithmen, Programmiersprachen und Berechnungsobjekten. Sie beschäftigt sich mit Eigenschaften von Programmteilen und ihren Verknüpfungen, von Berechnungen, Datenstrukturen usw. Ihre Resultate können angewandt werden bei der Analyse von Programmen, speziell bei der Verifikation von Eigenschaften von Programmen, in der Theorie der Datenstrukturen, der Algorithmentheorie, der Kompliziertheitstheorie, beim Algorithmenentwurf, dem Aufbau von Programmiersprachen u. a. Die zu untersuchenden Gesetzmäßigkeiten ähneln dabei den Gesetzen der Aussagenlogik und Prädikatenlogik, und der Aufbau des Systems der algorithmischen Logik ist analog dem Aufbau einer jeden formalisierten prädikatenlogischen Sprache.

Erste Untersuchungen von Programm-Eigenschaften mit Mitteln der Logik finden wir in den Jahren 1959 bzw. 1962 bei dem sowjeti-

schen Mathematiker J. I. Janow und dem Amerikaner J. McCarthy. Janow entwickelte ein System für das Beweisen der Äquivalenz von Programmen und McCarthy für die Korrektheit von Programmen. Zwei Programme heißen äquivalent, wenn sie die gleichen Ergebnisse liefern. Ein Programm heißt korrekt bezüglich zweier Eigenschaften A und B, wenn die Gültigkeit von A für die Eingangsdaten des Programms die Gültigkeit von B für die Ausgangsdaten zur Folge hat.

Ein erstes logisches System, das geeignet ist, allgemeine Programmeigenschaften zu untersuchen bzw. zu beschreiben, enthält eine 1966 erschienene Monographie von Helmut Thiele, einem Schüler von Karl Schröter. Dieses Buch mit dem Titel "Wissenschaftstheoretische Untersuchungen in algorithmischen Sprachen" wird gelegentlich als Ursprung der algorithmischen Logik bezeichnet. Ausgangspunkt von Thiele war eine graphentheoretische Beschreibung algorithmischer Prozesse durch L. A. Kaloujnine (Kiew). Die Formalisierung erfolgte durch eine Erweiterung des üblichen Prädikatenkalküls der ersten Stufe. Nebenbei bemerkt, sind der Name Helmut Thieles (geb. 1926) und die Jahreszahl 1966 aus anderem Grunde auch für die Universität Jena bedeutungsvoll. Nachdem 1966 die Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena als erste Mathematik-Sektion im Hochschulwesen der DDR gegründet wurde, war Professor Thiele ihr erster Sektionsdirektor.

1967 zeigte der Schweizer Erwin Engeler, daß gewisse Termination-Eigenschaften von Programmen (das sind Eigenschaften, nach denen ein Programm überhaupt zu einem Ergebnis gelangt) in gewissen logischen Systemen ausgedrückt werden können. Die Arbeiten von Engeler waren 1968 der Ausgangspunkt für eine Gruppe von Wissenschaftlern der Universität Warschau, sich mit algorithmischer Logik zu beschäftigen. Diese Warschauer Schule unter Leitung von Andrzej Salwicki gilt inzwischen im Weltmaßstab als eine der führenden Gruppen auf diesem Gebiet. Ihr gehören ferner an L. Banachowski, A. Kreczmar, G. Mirkowska, H. Rasiowa und viele andere. Gegenwärtig finden wir Forschungen zur algorithmischen Logik überall, wo theoretische Computerwissenschaft betrieben wird. Besonders starke Zentren gibt es neben Polen

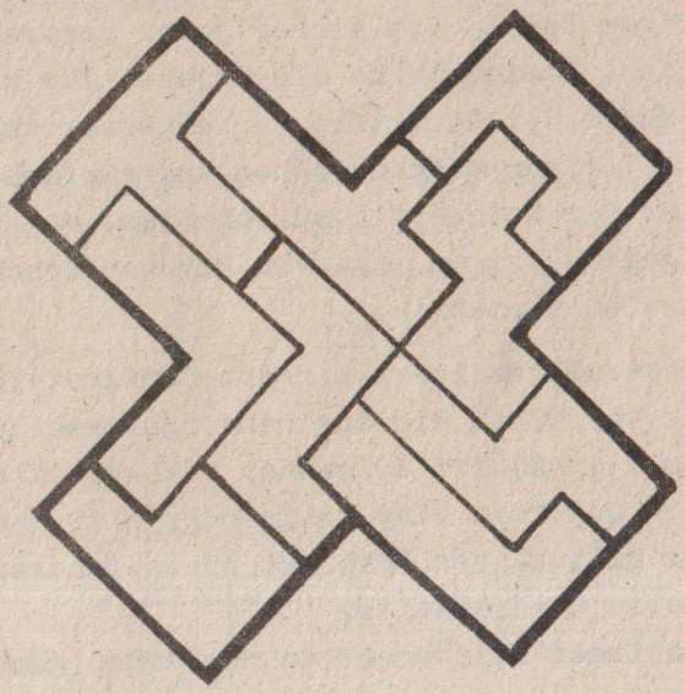
noch in den USA und in der Sowjetunion. Das Gebiet der algorithmischen Logik hat sich dabei selbst zu einer vielfältigen Wissenschaft entwickelt, in der unterschiedlichste Logik-Systeme untersucht werden, die schon heute kaum noch von einzelnen Wissenschaftlern überblickt werden können. Von McCarthy stammt der zukunftsweisende Ausspruch, daß die Beziehung zwischen Berechnung und Logik im vor uns liegenden Jahrhundert ebenso fruchtbar für die Entwicklung von Wissenschaft und Technik sein wird, wie dies im vergangenen Jahrhundert die Beziehung zwischen Analysis und Physik gewesen ist.

Dr. G. Lischke
Bereich Mathematische Kybernetik und Rechentechnik
FSU Jena

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Burkhard Götz
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimmler, R. Heinrich, S. Kratochwil, K. Tauscher

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 8. 10 84



12
84

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
18. Jahrgang

Sonderpreis für DDR:
0,20 M

Domino und Geometrie

1. Einführung

Mit der üblichen Spielweise von Domino, diesem mehr als 150-jährigen Spiel, ist sicher jeder vertraut. Es ist jedoch auch möglich, Dominosteine als Objekte für kombinatorische Aufgaben innerhalb der Geometrie zu benutzen. Anliegen dieses Artikels ist es, einen anschaulichen und einfachen Zugang zu einem Teilgebiet der Mathematik zu schaffen, das sich unter anderem mit der gegenseitigen Lage von Figuren beschäftigt - der kombinatorischen Geometrie.

Dazu verallgemeinern wir den Dominostein zu einem Polimino. Darunter verstehen wir aneinandergelegte Einheitsquadrate (1 cm x 1 cm) mit folgenden Eigenschaften:

a) die Quadrate sind zueinander seitenparallel,
b) es gibt keinen Eckpunkt eines Quadrates im Innern einer anderen Quadratseite,
c) besitzen zwei Quadrate nur einen gemeinsamen Eckpunkt, so besitzen sie wenigstens ein gemeinsames Nachbarquadrat.

Damit sollen die in Abb. 1a) - 1c) dargestellten Fälle von Quadratzusammenlegungen ausgeschlossen werden.

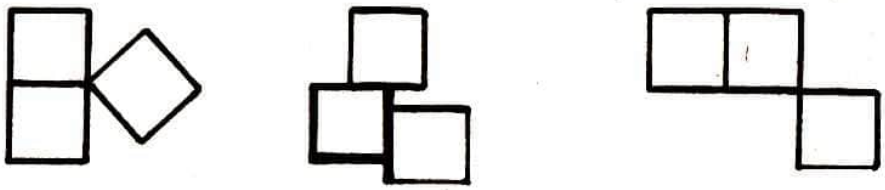


Abb. 1

Der einfachste dieser Poliminosteine ist der Monomino, der nur aus einem Quadrat besteht (Abb. 2a). Weiterhin existiert ein Stein aus zwei Quadraten, der eingangs erwähnte Domino (Abb. 2b), zwei verschiedene Triminos (Abb. 2c,d), fünf verschiedene Tetraminos (Abb. 3) und zwölf Pentaminos (Abb. 6).

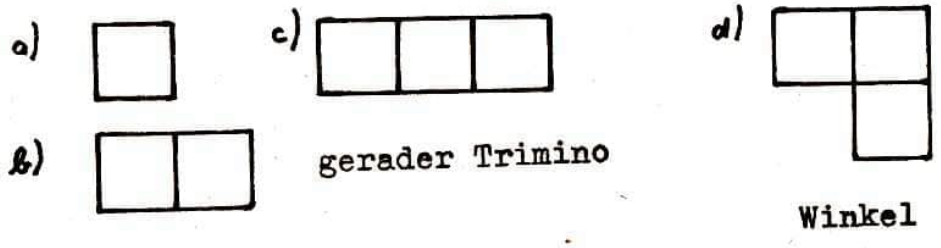


Abb. 2

Für die Beschäftigung mit den Poliminos ist es sinnvoll, sich diese im Maßstab 2:1 aus Pappe zurechtzuschneiden.

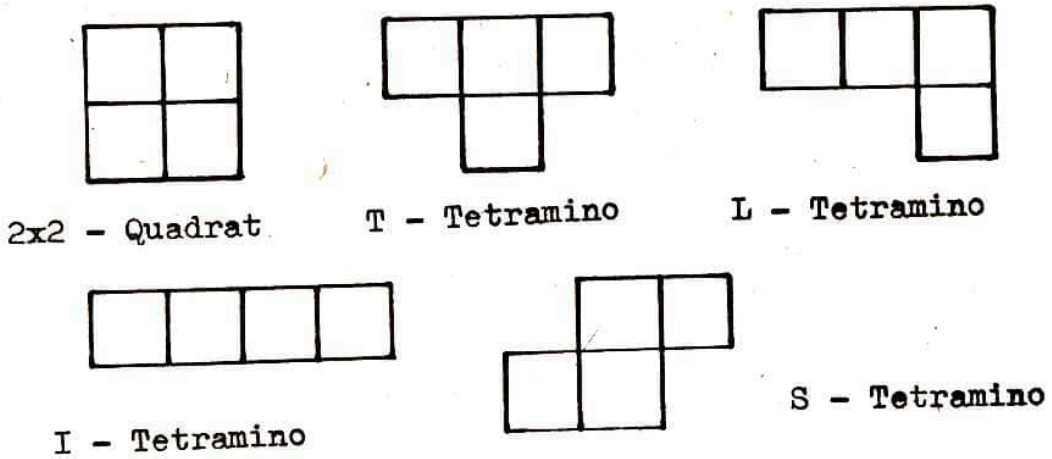


Abb. 3

2. Schachbrettaufgaben

In vielen Problemen steht die Frage im Vordergrund, ob mit bestimmten Poliminosteinen eine vorher festgelegte Fläche, in unserem Fall vorerst ein 8x8-Quadrat, achsenparallel ausgefüllt werden kann. Es ist naheliegend, dieses 8x8-Quadrat als Schachbrett zu bezeichnen. Ist es nun möglich, alle zwölf Pentaminosteine auf einem Schachbrett unterzubringen und vielleicht noch ein 2x2-Quadrat?

Beginnen wir jedoch einfach. Daß ein Schachbrett mit 32 Dominosteinen ausgelegt werden kann, ist sicher sofort klar. Schneidet man jedoch (gedanklich) zwei diagonale Eckquadrate vom Schachbrett ab, ist es nicht einfach, nunmehr 31 Dominosteine auf der Restfläche (Abb. 4) Platz finden zu lassen. Auch der eifrigste Probierer hat hier keine Chance! Es geht überhaupt nicht!

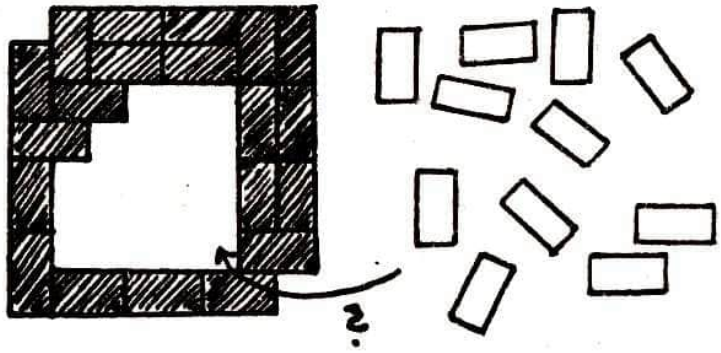


Abb. 4

Man kann sich diesen Sachverhalt nun recht leicht mit Hilfe des Schachbretts (übliche schwarz-weiß-Färbung) verdeutlichen. Indem vom Schachbrett zwei diagonale Ecken abgetrennt werden, werden zwei Felder gleicher Farbe beseitigt und es gilt, noch 30 schwarze und 32 weiße Felder (oder umgekehrt) zu bedecken. Jeder Dominostein bedeckt jedoch genau ein schwarzes und ein weißes Feld. 31 Dominosteine können somit nicht 32 Felder bedecken, die von der gleichen Farbe sind!

Ähnlich kann man beweisen (man färbe das Schachbrett geschicht dreifarbig), daß mit einem Monomino und 21 geraden Triminos keine Schachbrettbedeckung existiert, wenn der Monomino in einer Ecke liegt. Andererseits findet man jedoch wenigstens eine Lage des Monominos auf dem Schachbrett so, daß mit 21 weiteren Geraden Triminos eine Bedeckung gelingt.

Die beiden Triminosteine unterscheiden sich nun nicht nur in der Form, sondern auch in ihren Eigenschaften. Ebenfalls entsteht die Frage, ob 21 Winkel und 1 Monomino eine Bedeckung des Schachbretts gestatten. Diese Frage ist nun unabhängig von der Lage des einzelnen Quadrates stets mit "ja" zu beantworten. Auch diese Aussage gilt es zu beweisen. Man könnte dazu alle 64 Möglichkeiten der Monominolage betrachten (es genügen bereits 10 nichtsymmetrische Lagen) und die Bedeckung jeweils konkret angeben. Eleganter, einfacher, effektiver und verallgemeinerungsfähig sind jedoch folgende Überlegungen:

1. Jedes 2x2-Quadrat läßt sich trivialerweise von einem Monomino (beliebige Lage) und einem Winkel bedecken (Abb. 5a).
2. In einem 4x4-Quadrat liegt der Monomino stets in einer 2x2-Ecke, die man mit 1. bedeckt. Fügt man wie in Abb. 5b einen

Winkel 2 hinzu, so entsteht in den anderen 2x2-Ecken die Situation, daß ein kleines Quadrat bedeckt ist, jeweils das dem Zentrum zugewandte. Die Restfläche ist nun mit 3 Winkeln ausfüllbar, womit insgesamt 5 Winkel und 1 Monomino (beliebige Lage) ein 4x4-Quadrat bedecken.

3. In einem 8x8-Quadrat liegt der Monomino stets in einer 4x4-Ecke, die man mit 2. bedeckt. Fügt man wie in Abb. 5c einen Winkel 6 hinzu, so ist analog zu 2. wieder in den restlichen 4x4-Ecken ein kleines Quadrat bedeckt. Die übrige Fläche kann nun mit Hilfe der 2. Aussage durch Winkel bedeckt werden. Insgesamt gestatten somit 4x5+1=21 Winkel und ein Monomino (beliebige Lage) stets eine Bedeckung des Schachbretts.

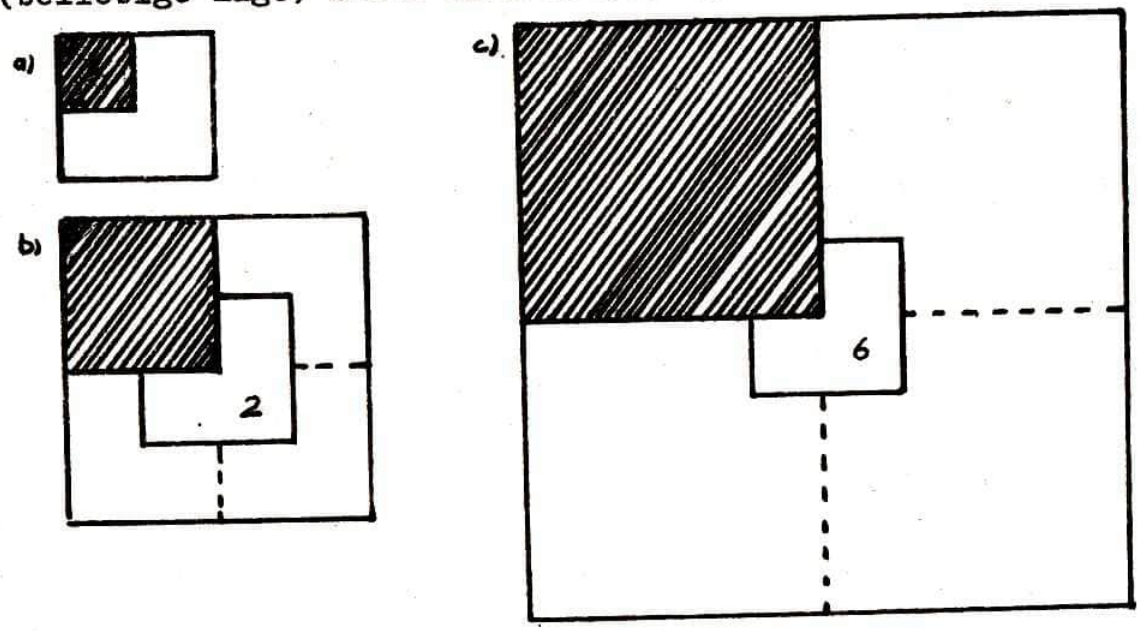


Abb. 5

Verallgemeinernd ist es möglich zu folgern, daß jedes $2^n x 2^n$-Quadrat mit $\frac{1}{3}(2^{2n}-1)$ Winkeln und 1 Monomino in beliebiger Lage bedeckt werden kann.

3. Abstrakte Puzzles

Schon in der letzten Aufgabe galt es, ein Problem der Art zu bewältigen, daß eine gewisse Anzahl von Steinen (21 Winkel und 1 Monomino) auf eine bestimmte Fläche (Schachbrett) gelegt werden soll. Diese Lage - oder Puzzleaufgaben sind interessanter, wenn sich die Formenvielfalt der zur Verfügung stehenden Steine vergrößert. Schon beim Tetramino haben wir fünf verschiedene

Steine, die insgesamt eine Fläche von 20 Quadraten belegen. Stellt sich naheliegend die Frage, ob mit allen fünf Tetraminos ein Rechteck ausgefüllt werden kann. Drei mögliche Rechtecke stehen dabei zur Auswahl: 1x20-, 2x10- und 4x5-Rechteck. Ersteres ist offensichtlich unmöglich. Bei den anderen beiden heißt es erstmal probieren, ehe man wieder feststellt: Es geht nicht! Ähnlich den Dominos kann man auch hier die Unmöglichkeit einer Bedeckung durch Färbung der Rechtecke und der Steine beweisen. Die entscheidende Figur ist für die Beweisführung der T-Tetramino.

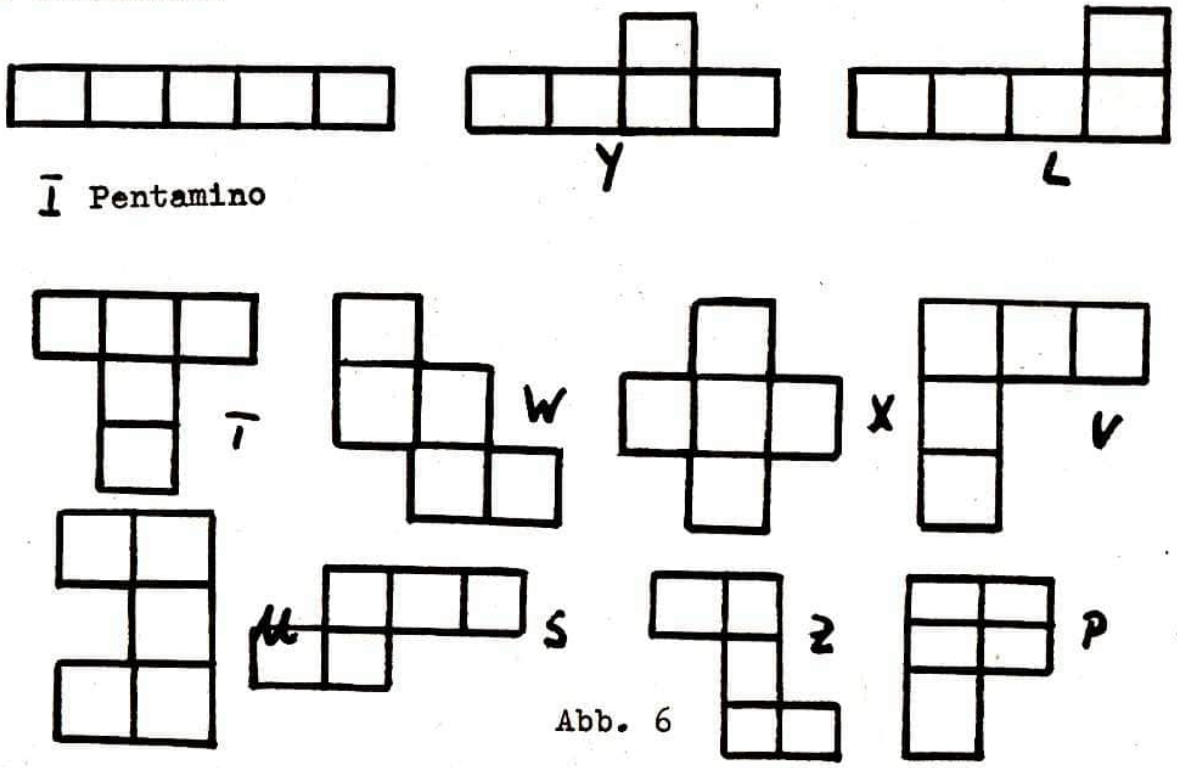


Abb. 6

Nimmt man zu diesen fünf Tetraminos einen beliebigen Pentamino (Abb. 6) hinzu, so könnte mit diesen 6 Steinen ein 5x5-Quadrat belegt werden. Welche der zwölf Pentaminos gestatten dies? Leicht läßt sich sicher der I-Pentamino ausschließen, aber schon mit dem U-Pentamino gelingt es nach einigen Versuchen (Abb. 7).

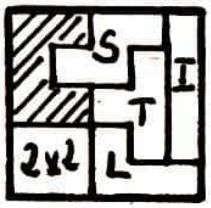


Abb. 7

Versucht doch selbst einmal die Pentaminos in die beiden Klassen "I-ähnliche", das heißt keine Bedeckung gestattende, und "U-ähnliche" einzuordnen.

Damit sind wir bei den zwölf Pentaminos angelangt, wo es uns sicher nicht schwerfällt, alle zwölf auf ein Schachbrett zu legen. Jedoch bleibt da als Restfläche nicht unbedingt ein 2x2-Quadrat übrig. Dies zu erreichen bedarf doch schon guter Beobachtungs- und Kombinationsgabe, insbesondere, wenn man den Platz des 2x2-Quadrates vergibt. Es geht jedoch in allen Fällen zu meistern, auch wenn es viel Geduld erfordert.
Ein Beispiel zeigt Abb. 8.

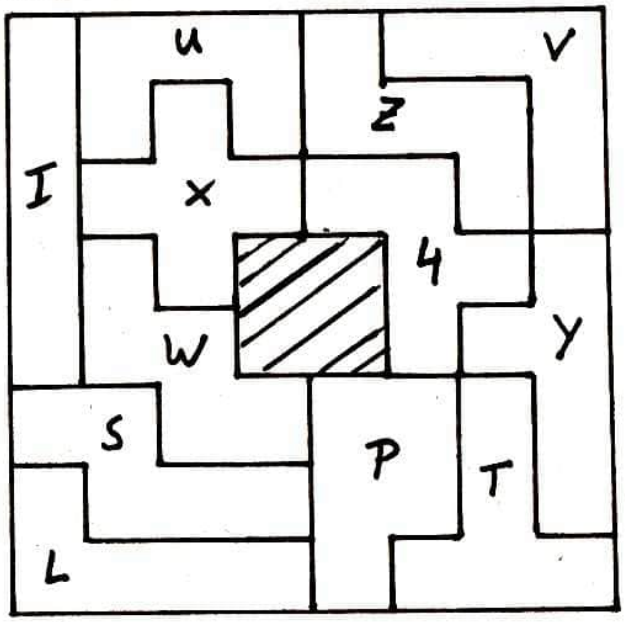


Abb. 8

Insgesamt existieren 65 wesentlich verschiedene Bedeckungen des Schachbretts mit den zwölf Pentaminos und einem 2x2-Quadrat. Sieht man die Lösung vor sich, scheint alles leicht zu sein. Diese Eigenschaft besitzt die Mathematik in vielen Bereichen, was ihre Schönheit, aber auch Kompliziertheit verdeutlicht.

Wie bei den Tetraminos steht auch für die Fünfersteine die Aufgabe, welche Rechtecke in die zwölf Pentaminos zerlegbar sind von den denkbaren 2x30-, 3x20-, 4x15-, 5x12- und 6x10-Rechtecken.

Interessant ist weiterhin folgende Aufgabe. Man wähle ein beliebiges Pentamino aus und vergrößere alle Seitenlängen auf das 3-fache. Damit haben in diesem großen Pentamino 9 Fünfersteine

Platz und man wähle von den verbliebenen 11 Steinen 9 so aus, daß eine Bedeckung gelingt. Ein Beispiel dafür zeigt Abb. 9.

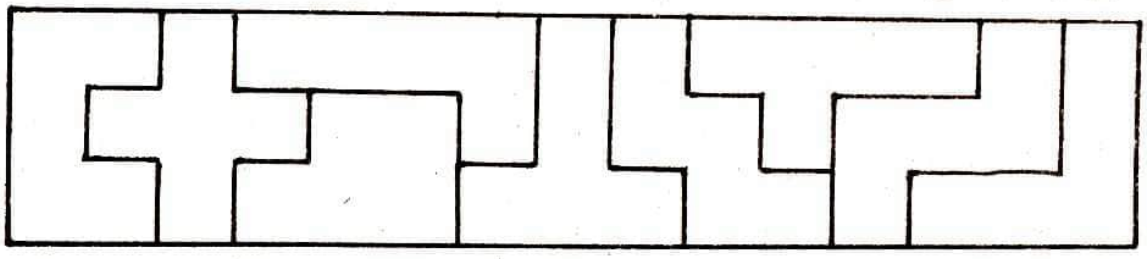


Abb. 9

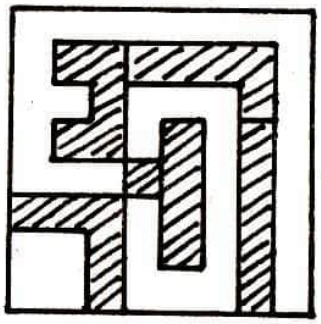
Versucht, für alle zwölf Pentaminos eine solche Zerlegung zu finden.

4. Spielen mit Pentamino

Mit den zwölf Pentaminosteinen und einem 8x8-Quadrat ist ein einfaches, aber reizvolles und interessantes Kombinations- und Logikspiel gegeben. Zwei (oder auch mehr) Spieler stehen sich gegenüber. Die Pentaminos liegen vor Beginn des Spiels übersichtlich neben der Spielfläche, dem 8x8-Quadrat. Nach der Einigung darüber, wer beginnt, werden abwechselnd jeweils ein Stein auf die Spielfläche (achsenparallel) gelegt. Sieger ist nun derjenige Spieler, der den letzten Stein noch legen konnte und damit dem Gegner (dem Nachziehenden) ein weiteres Legen mit einem der verbliebenen Steine unmöglich macht.

Bleibt die Frage zu beantworten, welches die Minimalzahl von Steinen ist, die gelegt werden muß, um ein weiteres Ziehen zu verhindern. Wie Abbildung 10 zeigt, ist dies schon mit 5 Zügen realisierbar. Damit verläuft im allgemeinen eine Partie mit 5 - 11 Zügen, ist somit kurzweilig und kann schnell neu begonnen werden.

Abb. 10



Carsten Müller
Forschungsstudent,
Sektion Mathematik, FSU

Aufgaben:

1. Man beweise, daß eine Bedeckung eines 8x8-Quadrates mit 21 geraden Triminos und 1 Monomino, der in einer Ecke liegt, unmöglich ist.

2. Man beweise, daß eine Bedeckung eines 2x10- und eines 4x5-Rechtecks mit den fünf Tetraminos unmöglich ist.

3. Man gebe wenigstens fünf Pentaminos an, die jeweils einzeln mit den fünf Tetraminis zusammen ein 5x5-Quadrat bedecken und zeige dies mit einer Zeichnung.

4. Man suche weitere Bedeckungen eines 8x8-Quadrates mit den zwölf Pentaminos und einem 2x2-Quadrat in unterschiedlichen Lagen.

5. Man beweise, daß jede Lage eines 2x2-Quadrates auf einem 8x8-Quadrat eine Bedeckung mit den zwölf Pentaminos gestattet.

6. Man gebe wenigstens noch 5 Zerlegungen anderer "vergrößerter' Pentaminos an, wie in Abb. 9.

7. Man gebe Zerlegungen von 3x20-, 4x15-, 5x12- und 6x10-Rechtecken mit Hilfe der zwölf Pentaminos an.

8. Während eines Spiels mit Pentaminos, an dem zwei Spieler beteiligt sind, entstand folgende Lage (Abb. 11). Kann der nächstlegende Spieler A gewinnen? Welche Fortsetzung muß er wählen?

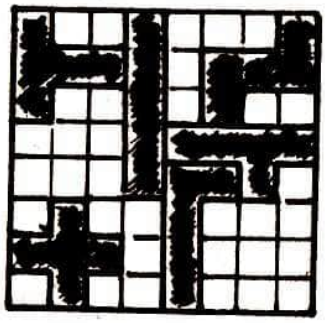


Abb. 11

9. Man beweise, daß gilt: $3/2^{2n}-1$ für n

Preisaufgaben

Q 61 ① Zeige, daß, wenn $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$, dann ist $(a+b+c)^3 = 27abc$.

Q 62 ① Löse folgende Gleichung: $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$

Q 63 ② Konstruiere ein Dreieck aus den 3 Seitenhalbierenden.

Q 64 Es ist bekannt, daß $\alpha + \beta = \pi/4$. Man berechne $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$.

Q 65 Die Seiten der Grundfläche eines Quaders seien gleich a und b. Die Diagonale des Quaders bildet mit der Ebene der Grundfläche den Winkel α. Bestimme den Oberflächeninhalt des Quaders.

Q 66 Окружность покрыта несколькими дугами.Эти дуги могут налегать друг на друга,но ни одна из ных не покрывает окружность целиком.Доказать,что всегда можно выбрать несколько из этих дуг так,чтобы они тоже покрывали всю окружность и составляли в сумме не более 720.

Einsendeschluß: 1. März 1985

Irrationalitätsbeweise II

Im Abschnitt 2 (WURZEL 1/84) wurde die Methode der Wechselwegnahme vorgestellt. Ein anderer Typ des Irrationalitätsbeweises stützt sich auf die elementare Teilbarkeitslehre der ganzen Zahlen, einem Teilgebiet der Zahlentheorie.

3. Elementare zahlentheoretische Irrationalitätsbeweise

Eine ganze Zahl a heißt ein Teiler der ganzen Zahl b (in Zeichen $a|b$), wenn es eine ganze Zahl c mit $b = ac$ gibt. Der größte gemeinsame Teiler zweier ganzer Zahlen a und b wird im weiteren durch das Symbol (a,b) bezeichnet. Er ist definiert als die eindeutig bestimmte nichtnegative ganze Zahl, die den folgenden Eigenschaften genügt:

I. (a,b) ist ein gemeinsamer Teiler von a und b, d. h. $(a,b)|a$ und $(a,b)|b$.

II. Ist t ein eliebiger gemeinsamer Teiler von a und b, so gilt auch $t|(a,b)$.

Mit Ausnahme des Falles $a = b = 0$ entspricht diese Definition der Vorstellung, daß (a,b) unter allen gemeinsamen Teilern der größte ist. Wie man sich leicht überzeugt, ist $(0,0) = 0$.

Die elementaren zahlentheoretischen Irrationalitätsbeweise sind indirekte Beweise. Man nimmt zunächst an, die zu untersuchende reelle Zahl ξ sei rational, etwa der Quotient der ganzen Zahlen a und b, wobei der Bruch in gekürzter Gestalt und der Nenner positiv vorausgesetzt werden dürfen. Es sei also

$$\xi = \frac{a}{b} \text{ mit } b > 0 \text{ und } (a,b) = 1. \qquad (3)$$

Durch Konstruktion eines logischen Widerspruches wird sodann diese Annahme ad absurdum geführt. Dazu dient der

S a t z 3: Ist p eine Primzahl und $p|ab$, so gilt $p|a$ oder $p|b$.

Beweis: Eine Primzahl ist dadurch charakterisiert, daß sie als positive Teiler nur die Zahl 1 und sich selbst besitzt. Deshalb kommen für den größten gemeinsamen Teiler von a und p nur die Möglichkeiten $(a,p) = 1$ oder $(a,p) = p$ in Betracht. Im zweiten Falle ist nichts mehr zu beweisen, da aus $(a,p) = p$ sofort $p|a$

gefolgert werden kann. Ist $(a,p) = 1$, so gilt $(ab,bp) = b$. Da aber jeder gemeinsame Teiler zweier ganzer Zahlen auch ein Teiler des größten gemeinsamen Teilers dieser Zahlen sein muß, folgt wegen $p|bp$ und der Voraussetzung p/ab hieraus p/b, wiederum die Behauptung des Satzes.

Als [illegible] Anwendung des Satzes 3 soll nochmals die Irrationalität v[illegible] gezeigt werden.

Wäre $\xi = \sqrt{2}$ eine rationale Zahl und als solche in der Darstellung (3) gegeben, dann müßte die Gleichung $a^2 = 2b^2$ in positiven ganzen Zahlen a und b mit $(a,b) = 1$ lösbar sein. Das ist jedoch unmöglich. Zunächst würde $a^2 = 2b^2$ nämlich $2/a^2$ und nach Satz 3 folglich $2/a$ verlangen. Also ist a eine gerade Zahl, d. h. $a = 2c$ mit ganzzahligem $c > 0$. Dann gilt weiter $2c^2 = b^2$, somit $2/b$ und in Verbindung mit der Geradzahligkeit von a schließlich $(a,b) \geq 2$ entgegen der Voraussetzung $(a,b) = 1$. Die Annahme, $\sqrt{2}$ sei rational, war demnach falsch.

Dieses, wohl den meisten Schülern der höheren Klassen vertraute Beweisprinzip für die Irrationalität von $\sqrt{2}$, kann in leicht modifizierter Ausführung zur Bestätigung allgemeiner Resultate benutzt werden.

<u>S a t z 4:</u> Ist $m > 0$, ganzzahlig und nicht die n-te Potenz einer ganzen Zahl, so ist $\sqrt[n]{m}$ irrational.

Beweis: Es sei unter den angegebenen Bedingungen $\xi = \sqrt[n]{m}$ rational, angenommen in der Gestalt (3). Aus dieser Annahme ergibt sich $a^n = mb^n$, wobei außerdem $b > 1$ gelten muß. Wäre $b = 1$, also $a^n = m$, widerspräche dies der Voraussetzung, daß m nicht die n-te Potenz einer ganzen Zahl sein soll. Ist jedoch $b > 1$, so existiert eine Primzahl p mit p/b. Daraus folgt p/mb^n, wegen $a^n = mb^n$ auch p/a^n und nach (für $n > 2$ wiederholter) Anwendung des Satzes 3 weiter p/a. Die Tatsache, daß die Primzahl p ein gemeinsamer Teiler von a und b ist, liefert schließlich die Abschätzung $(a,b) \geq p \geq 2$ im Widerspruch zu $(a,b) = 1$.

<u>S a t z 5:</u> Genügt die reelle Zahl ξ einer algebraischen Gleichung

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und $a_0 = 1$, so ist ξ entweder ganzzahlig oder irrational.

Beweis: Angenommen, ξ wäre weder ganzzahlig noch irrational, also von der Gestalt (3) mit $b > 1$. Dann bestünde nach Voraussetzung die Gleichheit

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot \frac{a}{b} + a_n = 0$$

und hieraus folgend

$$a^n = -b(a_1 a^{n-1} + a_2 a^{n-2} b + \ldots + a_{n-1} a b^{n-2} + a_n b^{n-1}).$$

Insbesondere besagt die letzte Gleichung $b \mid a^n$. Da jede natürliche Zahl $b > 1$ mindestens einen Primteiler p besitzt, ist ein Widerspruch zur obigen Annahme unvermeidlich. Denn aus $p \mid b$ und $b \mid a^n$ ergibt sich $p \mid a^n$, weiter vermöge des Satzes 3 die Teilbarkeitsaussage $p \mid a$ und somit $(a,b) \geq p \geq 2$.

Der Satz 5 ist trotz seiner Einfachheit bemerkenswert. Um eine reelle Zahl ξ als irrational zu erkennen, reicht es nämlich nach Satz 5 bereits aus, daß

I. ξ einer solchen algebraischen Gleichung genügt.
II. ξ keine ganze Zahl ist.

Dies jedoch festzustellen, gelingt für viele algebraische Zahlen fast mühelos. Zwei Beispiele mögen das verdeutlichen.

<u>Beispiel 1:</u> $\xi = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2}}$

Wegen $\xi^3 = 2 + \sqrt{2}$ ist $(\xi^3 - 2)^2 = 2$. Damit ist aber schon gezeigt, daß die Zahl ξ die Eigenschaft I erfüllt. Da ferner $2 < 2 + \sqrt{2} < 4$ gilt, genügt ξ der Ungleichung $1 < \xi < 2$ und folglich der Eigenschaft II. Also ist ξ irrational.

<u>Beispiel 2:</u> $\xi = \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$

Aus $\xi - \sqrt{2} = \sqrt[3]{2}$ gewinnt man zunächst

$$(\xi - \sqrt{2})^3 = \xi^3 - 3\xi^2\sqrt{2} + 6\xi - 2\sqrt{2} = 2$$

und nach einer einfachen Umformung

$$(\xi^3 + 6\xi - 2)^2 = 2(3\xi^2 + 2)^2,$$

die bestätigung der Eigenschaft I für . Die Abschätzungen $1 < \sqrt[3]{2} < 1{,}5$ und $1 < \sqrt{2} < 1{,}5$ liefern $2 < \xi < 3$, die Nichtganzzahligkeit von ξ. Also ist ξ irrational.

Dr. Lothar Schnabel
Bereich Theor. Mathematik
FSU Jena

XXV. Internationale Mathematikolympiade 1984

1. Es seien x, y und z nichtnegative reelle Zahlen, für die $x + y + z = 1$ gilt.
Man beweise die Ungleichung:

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27} \,!$$

(BRD)

2. Man finde ein Paar a,b positiver ganzer Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:
(1) Die Zahl $ab(a+b)$ ist nicht durch 7 teilbar.
(2) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ ist durch 7^7 teilbar.
Begründen Sie Ihre Antwort!

(Niederlande)

3. In der Ebene seien zwei verschiedene Punkte O,A gegeben. Für jeden Punkt $X \neq O$ der Ebene sei $w(X)$ das Bogenmaß des Winkels $\sphericalangle AOX$ ($0 \leq w(X) < 2\pi$, entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen) und $C(X)$ bezeichne die Kreislinie mit dem Mittelpunkt O und dem Radius der Länge $\overline{OX} + \frac{w(X)}{\overline{OX}}$. Seien endlich viele Farben gegeben und jeder Punkt der Ebene sei mit einer von ihnen gefärbt.
Man beweise, daß es einen Punkt Y gibt, für den $w(Y) > 0$ gilt und dessen Farbe auf der Kreislinie $C(Y)$ vorkommt.

(Rumänien)

4. In einem konvexen Viereck ABCD sei die Gerade CD eine Tangente an den Kreis mit dem Durchmesser [AB].
Man beweise, daß die Gerade AB dann und nur dann den Kreis mit dem Durchmesser [CD] berührt, wenn die Geraden BC und AD parallel sind.

(Rumänien)

5. Ein ebenes konvexes n-Eck ($n > 3$) habe den Umfang p und die Summe der Längen aller Diagonalen sei d.
Beweise:

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] - 2$$

($[x]$ bedeute die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist).

(Mongolei)

6. Es seien a,b,c,d ungerade ganze Zahlen, so daß
(1) $0 < a < b < c < d$,
(2) $ad = bc$ und
(3) $a+d = 2^k$ und $b+c = 2^m$ für passende ganze Zahlen k,m gilt.

Beweise, daß $a = 1$ ist.

(Polen)

Themenkomplexe Mathematiklager, Fortsetzung

Lernabschnitt W 11 — 16 Doppelstunden

A <u>Algebra (II)</u> — 5 Dstd.

Einführung weiterer algebraischer Strukturen wie Ringe und Körper, Eigenschaften dieser Strukturen mit Beweisen, Anwendung auf den Aufbau der Zahlenbereiche.

B <u>Folgen, Reihen, Grenzwerte</u> — 4 bis 5 Dstd.

Vom Schulstoff abweichende Einführung, wichtige Eigenschaften und Sätze (z. T. den Schulstoff erweiternd, Beweise für dort nur angegebene Sätze), Olympiadeaufgaben zur Motivation, Übungen, Arbeit mit dem Summenzeichen, Stetigkeit von Funktionen.

C <u>Kegelschnitte</u> — 4 bis 5 Dstd.

Schnitt eines Kegels mit einer Ebene, Eigenschaften der Schnittfiguren, Dandelinsche Kugeln, Leitlinien, Kegelschnitte als geometrische Örter, Herleitung der Gleichungen der Kegelschnitte im kartesischen Koordinatensystem, Tangenten an die Kegelschnitte.

D <u>Aufgabentraining</u> — 2 Dstd.

Wiederholung der Themen aus S 11 und W 10

Lernabschnitt S 12 16 Doppelstunden

Für den Lernabschnitt S 12 stehen in den einzelnen Themenkomplexen folgende Spezialgebiete zur Auswahl:

A Vektorräume und Matrizen

B Funktionen in mehreren Variablen

Differentialgleichungen

C Projektive Geometrie (Erlanger Programm)

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Burkhard Götz
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimmler, R. Heinrich, S. Kratochwil, K. Tauscher

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 5. 11. 1984