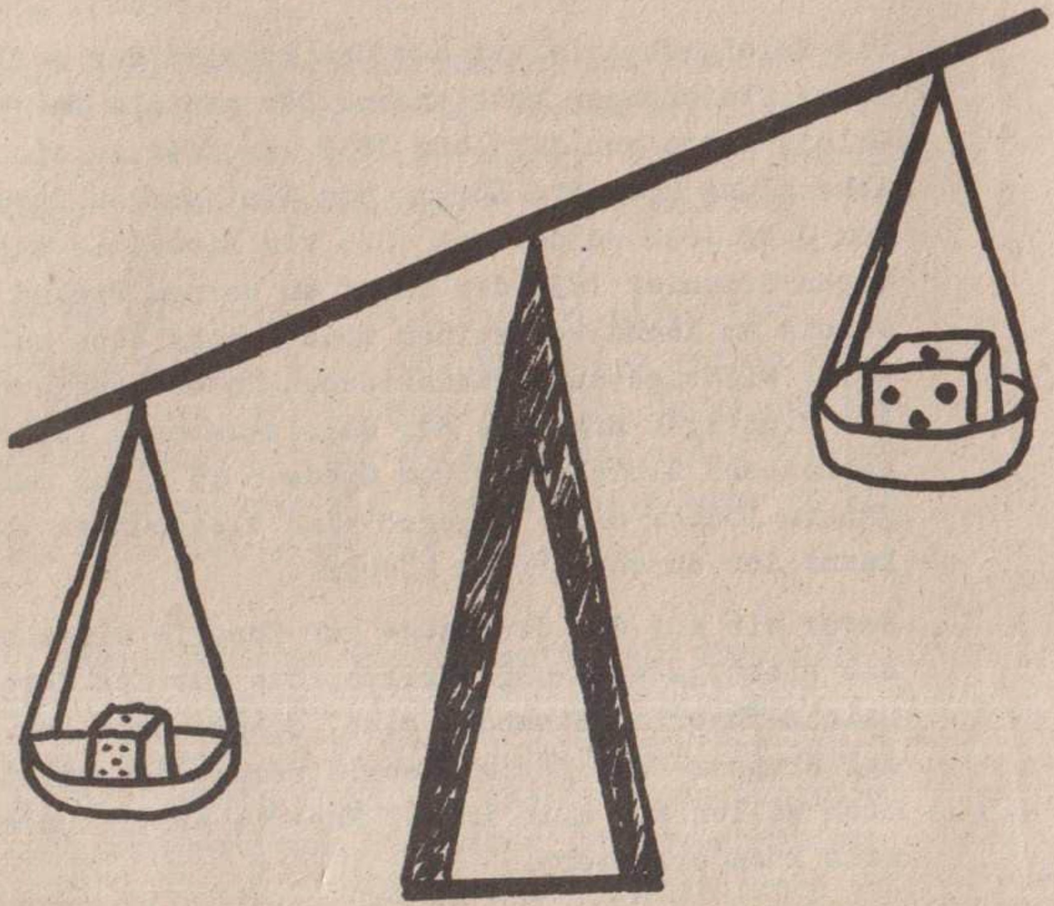
Die Verdopplung des Würfels



1
85

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

19. Jahrgang

ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Einführung in die Galoissche Theorie (1. Teil)

Die Galois-Theorie ist aus dem Problem der Auflösung algebraischer Gleichungen entstanden. Der geniale Mathematiker Evariste Galois lebte von 1811 bis 1832. Er fiel in einem Duell. Seine Abhandlung über die Lösung von Gleichungen durch Wurzelzeichen vom Jahr 1830 wurde erst 1846 von Liouville veröffentlicht. Dagegen erschien 1832 der Brief an seinen Freund Chevalier, den Galois am Abend vor seinem Tode geschrieben hat und in dem er seine wichtigsten mathematischen Entdeckungen mitteilt.
Ein wichtiges Ergebnis der Galois-Theorie ist der Satz, daß algebraische Gleichungen vom Grade $n \geqq 5$ nicht durch Wurzeln allgemein lösbar sind. Dagegen sind Gleichungen vom Grade $n \leqq 4$ bekanntlich durch Wurzeln lösbar.

Bevor wir auf die Grundzüge der Theorie eingehen, wollen wir die wichtigsten Grundbegriffe, die für das Verständnis der Galois-Theorie notwendig sind, zusammenstellen. Einige Begriffe der Gruppen- und Körpertheorie werden den meisten bekannt sein; doch wollen wir alle in der Theorie auftretenden Begriffe nochmals kurz erläutern.

I. Grundbegriffe der Gruppentheorie

a) Definition des Gruppenbegriffs: Eine nicht leere Menge von Elementen a,b,c,... bildet eine Gruppe, wenn folgende Forderungen erfüllt sind:

1. Jedem geordneten Paar von gleichen oder verschiedenen Elementen der Menge ist eindeutig ein Element der Menge zugeordnet, das wir als Produkt der Elemente a b bezeichnen: $a\,b = c$. Die multiplikative Schreibweise ist unwesentlich. Wir wollen jede Art der Verknüpfung zweier Elemente als Multiplikation bezeichnen.

2. Es gilt das Assoziativgesetz: $(ab)c = a(bc)$. Nicht verlangt wird bei allen Gruppen das Kommutativgesetz: $ab=ba$.

3. Es gibt ein Element e, das für alle Elemente a,b,c,... dem Gesetz gehorcht: $ea = ae = a$. e heißt Einheitselement oder Einheit der Gruppe.

4. Zu jedem Element a gibt es ein inverses Element a^{-1}, das der Gleichung genügt: $a\, a^{-1} = e$.

Eine Gruppe heißt insbesondere eine kommutative oder Abelsche Gruppe, wenn für alle Elemente der Gruppe gilt: $ab = ba$. Die Anzahl der Elemente heißt die Ordnung der Gruppe. Bei der Galoisschen Theorie werden wir uns auf Gruppen endlicher Ordnung beschränken.

Der Leser kann sich selbst Beispiele aus der elementaren Mathematik zusammenstellen, z. B. die Menge der ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung, oder die Menge der positiven rationalen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung. Man muß sich allerdings stets davon überzeugen, ob die 4 Forderungen an eine Gruppe erfüllt sind.

b) Untergruppen

Wir definieren: Eine Teilmenge von Elementen der Gruppe G, die für sich die 4 Forderungen (1) bis (4) erfüllt, also selbst eine Gruppe bildet, heißt eine Untergruppe der gegebenen Gruppe G. Die Gruppe selbst und das Einheitselement e sind demnach auch Untergruppen; man nennt sie uneigentliche Untergruppen. Alle anderen Untergruppen sind eigentliche Untergruppen. Es läßt sich leicht zeigen, daß bei endlichen Gruppen die Ordnung einer Untergruppe ein Teiler der Ordnung der ganzen Gruppe ist. Beweis: Es sei H eine Untergruppe von G und $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ alle Elemente von G, die nicht in H enthalten sind. Die Elemente der sogenannten Nebengruppen $h\, x_i$ sind nicht in H enthalten. Dann kann man durch die folgende symbolische Schreibweise alle Elemente der Gruppe erfassen: $G = H + Hx_1 + Hx_2 + \ldots + Hx_{n-1}$. Die Nebengruppe Hx_i ist keine Gruppe, da das Einheitselement in ihr nicht enthalten ist. Hat H m Elemente, dann hat G n m Elemente, also die Ordnung nm. Die Ordnung von H ist m, also ein Teiler von der Ordnung von G.

Nichtleere Teilmengen von Elementen einer Gruppe bezeichnet man als Komplexe. Damit ein Komplex H einer Gruppe G eine Untergruppe von G ist, ist bei endlichen Gruppen notwendig und hinreichend, daß $H\, H \subseteq H$ ist, also daß H mit 2 Elementen auch ihr Produkt enthält. Auf den Beweis verzichten wir hier

(siehe Literaturangaben).
Die Bezeichnungen $\subseteqq$, $\supseteqq$, $\subset$, $\supset$ sind aus der Mengenlehre bekannt.

c) Zyklische Gruppen

Einen besonders einfachen Typus von Gruppen bilden die sogenannten zyklischen Gruppen. Gruppen heißen zyklische Gruppen, wenn sie durch ein Element a erzeugt werden können. Dann sind die Elemente gegeben durch a, $aa = a^2$, $aaa = a^3$ usw. Wir bezeichnen diese Elemente als Potenzen von a.

Man erkennt leicht, daß bei endlichen Gruppen ein Element a mit seinen Potenzen $a^2, a^3 \ldots a^m = e$ eine kommutative Untergruppe bildet, die durch a erzeugte Untergruppe. Gauß nennt sie die Periode von a. m gibt die Ordnung des Elementes an.

Wir wollen als Beispiel hierzu die Permutationsgruppen besprechen.
Es sei eine Anzahl verschiedener Dinge gegeben, die in irgendeiner Reihenfolge vorliegen, etwa die Zahlen 1,2,...,n (es können auch Gegenstände verschiedener Art sein, z. B. Bausteine unterschiedlicher Farbe). Man nennt dies eine Anordnung der Dinge 1,2,...,n. Es ist wohl allen bekannt, daß es $n! = 1.2.3\ldots(n-1)n$ verschiedene Anordnungen gibt. In der Gruppentheorie versteht man unter einer Permutation die Operation der Vertauschung. Sie ist vollständig bestimmt, wenn für jedes Ding feststeht, durch welches es ersetzt wird. Wir verwenden folgende Schreibweise: (Als Beispiel wählen wir n=3)
$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 1 wird durch 2 ersetzt, 2 durch 3 und 3 durch 1.
Demnach gibt es 3! Permutationen

$$e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ a=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ d=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Permutationen bilden eine Menge von 6 (allgemein n!) Elementen. 2 Permutationen hintereinander ausgeführt ergeben wieder eine Permutation. Damit ist das Gesetz der Gruppenbildung gegeben. e ist das Einheitselement. z. B. ist
$ab=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=e$, also $b=a^{-1}$.

Es gilt allgemein der Satz: Jede Gruppe G läßt sich als Permutationsgruppe ihrer Elemente darstellen (siehe Literaturangabe 3).

d) Normalteiler von einer Gruppe

Es sei G eine beliebige Gruppe und H eine Untergruppe von G. g_1 sei ein beliebiges, aber festgewähltes Element aus G, h_i ein beliebiges Element aus H. Die Menge aller durch $g_1\ h_i\ g_1^{-1}$ darstellbaren Elemente , bei denen h_i alle Elemente der Untergruppe H durchläuft, bildet wieder eine Untergruppe von G. Das Produkt zweier Elemente, z. B. $g_1\ h_i\ g_1^{-1}\ g_1\ h_k g_1^{-1} =$ $g_1\ h_i\ h_k\ g_1^{-1} = g_1\ h_l g_1^{-1}$ ist wieder ein Element dieser Menge. Die Untergruppe H heißt zur Untergruppe H konjugiert.

Wir definieren: Die Untergruppe H heißt Normalteiler von G, wenn die Untergruppe $g_1\ h_i\ g_1^{-1}$ bei beliebiger Wahl von g_1 aus G mit H zusammenfällt. Jede Gruppe hat zwei uneigentliche Normalteiler, nämlich das Einheitselement und die Gruppe G selbst. Alle anderen Normalteiler heißen eigentliche Normalteiler. Eine Gruppe, die keine eigentlichen Normalteiler hat, heißt einfach.

e) Isomorphe und homomorphe Gruppen

Zwei Gruppen A und B heißen isomorph, wenn zwischen ihren Elementen eine eineindeutige Zuordnung besteht, wobei das Produkt zweier Elemente aus A das Produkt der entsprechenden Elemente aus B entspricht und umgekehrt. Eine Gruppe B heißt zur Gruppe A homomorph, wenn sich jedem Element von A ein bestimmtes Element aus B zuordnen läßt, so daß jedes Element aus B mindestens einem Element aus A entspricht und dabei das Produkt zweier Elemente aus A in das Produkt der zugeordneten Elemente aus B übergeht. In diesem Fall braucht die Zuordnung nicht eineindeutig zu sein. Es ist leicht einzusehen, daß in isomorphen und homomorphen Gruppen dem Einheitselement aus A das Einheitselement aus B entspricht. Ebenso entsprechen zueinander inversen Elementen aus A zueinander inverse Elemente aus B.

f) Klasse einer Gruppe

Sind a und b beliebige Elemente einer Gruppe, so heißt das Element $c = b\,a\,b^{-1}$ zu a konjugiert (siehe d)). Umgekehrt ist auch a zu c konjugiert. Denn es ist $a = b^{-1}b\,a\,b^{-1}b = b^{-1}c\,b$. Die Menge aller zueinander konjugierten Elemente einer Gruppe bilden, wie man sagt, eine Klasse (konjugierter Elemente) der Gruppe.

Eine Klasse ist durch jedes ihrer Elemente eindeutig bestimmt. Ist z. B. a gegeben, so erhalten wir die ganze Klasse durch $b\,a\,b^{-1}$, wenn b alle Elemente der Gruppe durchläuft. Die ganze Gruppe läßt sich also in Klassen einteilen. Wegen $b\,e\,b^{-1} = e$ bildet das Einheitselement für sich eine Klasse. Hat das Element a die Ordnung m (siehe c), dann hat auch jedes konjugierte Element die gleiche Ordnung, d. h. alle Elemente derselben Klasse haben die gleiche Ordnung.
Bei Abelschen Gruppen ist jedes Element für sich eine Klasse. Wegen $a\,b = b\,a$ ist

$b\,a\,b^{-1} = a\,b\,b^{-1} = a$. Jede Untergruppe ist daher Normalteiler.

g) Symmetrische Gruppen und alternierende Gruppen

Die aus allen Permutationen von n Elementen gebildete Gruppe bezeichnet man als symmetrische Gruppe.(*) Eine Permutation heißt gerade, wenn sie aus einer geraden Anzahl von Vertauschungen zweier Elemente (Transpositionen) hervorgeht.

Bei der Definition einer Gruppe kann man von der konkreten Bedeutung der Elemente und der als Multiplikation bezeichneten Verknüpfung absehen.
Wir sprechen dann von einer abstrakten Gruppe. Man kann sie als eine Menge von Symbolen auffassen, für die eine Verknüpfung erklärt ist, die die Forderungen an eine Gruppe erfüllt (siehe a)). Ein Produkt aus Elementen, etwa a b c ist wieder eine Element der Gruppe. Das inverse Element erhält man durch $(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$.
Weitere Begriffe der Gruppentheorie werden noch im Zusammenhang mit der Körpertheorie erfolgen.

(*) Die Gruppe der geraden Permutationen heißt die alternierende Gruppe.

II. Grundbegriffe der Körpertheorie

a) Definition des Körpers

Ein Körper ist eine Menge von Elementen mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Elemente bilden bezüglich der Addition eine Abelsche Gruppe, das Einheitselement wird mit 0 bezeichnet.
2. Die Elemente bilden mit Ausnahme von 0 eine multiplikative Gruppe. Das Einheitselement wird mit 1 bezeichnet. Wir werden uns hier meistens auf Abelsche multiplikative Gruppen beschränken. Körper mit nichtkommutativer Multiplikation heißen Schiefkörper.
3. Die beiden Gruppenoperationen sind distributiv miteinander verknüpft. Für 3 beliebige Elemente a, b, c gilt: $(a+b)c = ac + bc$.

Besitzt die Menge nur endlich viele Elemente, heißt der Körper ein eindlicher Körper oder ein Galoisfeld. Wegen $a+0 = a$ und $(a+0)b = ab+0b = ab$ folgt, daß $0b = 0$ ist für alle Elemente.

Beispiele: Körper der rationalen Zahlen, der reellen Zahlen oder der komplexen Zahlen.

b) Teilkörper oder Unterkörper eines Körpers

Wir betrachten als Beispiel eines Körpers die Gesamtheit aller ganzen rationalen Funktionen der n Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit rationalen Koeffizienten. Wir nennen ihn K. Diejenigen Funktionen, die bei allen Permutationen der n Variablen unverändert bleiben, bilden auch einen Körper, den wir als Teilkörper oder Unterkörper von K bezeichnen wollen. Wir nennen ihn K_1. Die Funktionen von K_1 heißen symmetrische Funktionen der n Variablen und können als rationale Funktionen der n elementarsymmetrischen Funktionen dargestellt werden. Für n=3 heißen die elementarsymmetrischen Funktionen: $x_1 + x_2 + x_3$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$; $x_1x_2x_3$.

c) Automorphismen eines Körpers

Ein Automorphismus von einem Körper K ist eine isomorphe Abbildung von K auf sich selbst, bei der jedem Element von K ein Bildelement von K zugeordnet wird. Diese Abbildungen sollen folgende Eigenschaften haben:
Sind a,b,... Elemente von K und a',b',... ihre Bildelemente (auch Elemente von K), so gelten folgende Bedingungen:

1. $(a+b)' = a' + b'$
2. $(ab)' = a'b'$ für alle Elemente von K
3. Für $a \neq 0$ ist auch $a' \neq 0$.

Aus diesen Bedingungen läßt sich nachweisen, daß folgende weitere Beziehungen bestehen: Für $a=0$ ist $a'=0$

$(-a)' = -a'$ und $(a-b)' = a' - b'$.

$1' = 1$ und daher auch $\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'}{b'}$

Wenn $a' = b'$, dann ist $a=b$ (siehe Literatur 1).

Wir übertragen diese Abbildung auf Polynome. Es sei $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ in K, wobei die Koeffizienten Elemente von K sind und $a_0 \neq 0$ ist. Als Bild definieren wir: $f'(x) = a_0' + a_1'x + a_2'x^2 \ldots + a_n'x^n$. Man erkennt, daß die Gleichungen $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ und

$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$ gelten.

Ein Polynom in K heißt reduzibel in K, wenn es als Produkt zweier Polynome positiven Grades geschrieben werden kann. Nicht konstante Polynome, die in K nicht reduzibel sind, heißen irreduzibel in K.
Die Gruppe aller Automorphismen von K spielt in der Galoisschen Theorie eine Rolle, wenn wir unter K die Gesamtheit der rationalen Funktionen der Wurzeln einer irreduziblen Gleichung (im Körper der rationalen Zahlen) verstehen. Sie wird als Galoissche Gruppe dieses Körpers bezeichnet.

d) Kompositionsreihen

Ist N_1 ein größter Normalteiler einer Gruppe G, N_2 größter Normalteiler von N_1, N_3 größter Normalteiler von N_2 usw., so erhält man eine Reihe von Untergruppen, so daß jede in der vorhergehenden enthalten ist und schließlich mit dem Einheitselement endet: G; $N_1, N_2, \ldots, N_r = e$. Diese Reihe nennt man eine Kompositionsreihe von G.

e) <u>Begriff der Faktorgruppe</u>

Die Gruppe, deren Elemente durch einen Normalteiler N von G und seine Nebengruppen gebildet werden, heißt die Faktorgruppe des Normalteilers und wird mit G/N bezeichnet. Die Faktorgruppen zweier aufeinanderfolgenden Gruppen einer Kompositionsreihe: G/N_1, N_1/N_2, usw. sind lauter einfache Gruppen. Man nennt sie die Primfaktorgruppen der Kompositionsreihe (oder ihre Primfaktoren). Eine Gruppe, deren Primfaktoren sämtlich zyklische Gruppen sind, heißt eine auflösbare Gruppe. Es gilt der Satz: Jede Untergruppe einer auflösbaren Gruppe ist auflösbar. Ferner gilt: Die symmetrische Gruppe S_n ist für $n \geq 5$ nicht auflösbar (siehe Literatur 1).

f) <u>Erweiterungskörper</u>

Ist E ein Körper und K eine Teilmenge von E, die selbst einen Körper bildet, also die Bedingungen in a) erfüllt, K also Unterkörper von E ist, so heißt E eine Erweiterung von K, im Zeichen $K \subset E$.

Wir werden uns bei der kurzen Einführung der Galoisschen Theorie hauptsächlich mit Gleichungen beschäftigen, deren Koeffizienten rationalen Zahlen sind. Weiter setzen wir voraus, daß wir jede ganze Funktion im Körper der rationalen Zahlen in ihre irreduziblen Faktoren zerlegen können.

Dann gelten folgende Sätze:

1. Eine im Körper R der rationalen Zahlen irreduzible Funktion besitzt keine mehrfachen Wurzeln. Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x) = (x^2-2)(x^2-3) = x^4-5x^2+6$. Sie ist in R irreduzibel und hat nur einfache irrationale Wurzeln. Wäre f(x) z. B. $f(x) = (x^2-2)(x^2-3)(x+\sqrt{2})$, dann wäre eine mehrfache Wurzel vorhanden, aber die Funktion gehört nicht zum Körper.
2. Haben 2 Funktionen f(x) und g(x) im Körper R eine Wurzel gemeinsam und ist f(x) irreduzibel, so ist g(x) durch f(x) teilbar (mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus

zu beweisen).

g) Algebraische Elemente

Es sei $K \subset E$. a sei ein Element von E. a heißt dann algebraisch über K, wenn es von Null verschiedene Polynome gibt, die a zur Wurzel haben. Der mit einer algebraischen Zahl a erweiterte Körper K(a) wird algebraischer Zahlkörper genannt. Im Falle $a = \sqrt{2}$ besteht er aus den Zahlen $r_1+r_2\sqrt{2}$, wenn K der Körper der rationalen Zahlen ist. r_1 und r_2 sind rationale Zahlen. Als Grad von K(a) bezeichnet man den Grad des Polynoms p(x), dessen Wurzel a ist.

h) Zerfällungskörper

K, B und E seien drei Körper, für die $K \subset B \subset E$ gilt. Ist ein Polynom p(x) in K und läßt es sich im Erweiterungskörper E in lauter Linearfaktoren zerlegen, so kann man schreiben:
$p(x) = a_0(x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_s);\quad a_0 \neq 0.$
Wir definieren: Der kleinste Zwischenkörper, in dem diese Zerlegung möglich ist, ist der Körper $K(a_1,a_2,\ldots,a_s)$. Dieser Körper wird Zerfällungskörper von p(x) über K genannt. Er muß die Wurzeln $a_1,a_2,\ldots,a_s$ enthalten.
Zum Zerfällungskörper kann man in einer endlichen Körperkette aufsteigen: $K = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \ldots \subset E_s = E$, wobei

$$E_i = K(a_1,a_2,\ldots,a_i) = E_{i-1}(a_i) \quad \text{gilt.}$$

Der Grad des Zerfällungskörpers wird mit (E/K) bezeichnet. Weitere Begriffe und Überlegungen werden in der Einführung der Galoisschen Theorie noch notwendig sein.

Literatur: 1. Artin: Galoissche Theorie - Teubner-Texte
2. Smirnow: Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. 3/1
3. Speiser: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung

Fortsetzung folgt

Dr. B. Hanisch
Halle

Preisaufgaben

R 1 1

Welche größte Fläche kann ein Dreieck haben, dessen Seitenlängen folgenden Ungleichungen genügen:

$$0 < a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$$

R 2 1

Gegeben sei ein Winkel von 19°. Teile diesen Winkel nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal in 19 gleiche Teile.

R 3 2

Löse folgende Gleichung:

$$\log_{10} x + \log_{\sqrt{10}} x + \log_{\sqrt[3]{10}} x + \ldots + \log_{\sqrt[10]{10}} x = 5,5$$

R 4 2

Es sind Zahlen x,y,z zu finden, für die

$$\frac{\sin x}{1} = \frac{\sin y}{\sqrt{3}} = \frac{\sin z}{2},$$

$x + y + z = \pi$ und $x, y, z \geq 0$ gilt.

R 5 1

In der Gleichung $x^2 - 2x + c = 0$ bestimme man c, wenn die Lösungen der Gleichung x_1, x_2 der Bedingung $7x_2 - 4x_1 = 47$ genügen.

R 6 2

При каком значении q сумма кубов корней уравнения

$$x^2 - x - q = 0$$

будет равна I9?

Stoff-Zeit-Plan der AG „Programmierung von BASIC auf dem HC"

Grundsätzliche Bemerkungen

- Jeden Befehl am HC erläutern - keine Papierarbeit!
- Die den Schülern bekannte Strategie zum Problemlösen weiter ausbauen.
- Durch geschickte Organisation der Rechnung soll der Aufwand so weit wie möglich gesenkt werden.
- Programme weitgehend strukturieren! Von der 7. Doppelstunde an Drill im strukturierten Programmieren.
- Keine explizite Behandlung von Fehlern, sondern Fehlerausschrift provozieren ("Was passiert, wenn ...?"), Fehler korrigieren und dann Regel aufstellen.
- Jedes "Hacken" bei Fehlerkorrekturen vermeiden!
- Altersgerechte Beispiele verwenden (z. B. keine Winkelfunktionen).
- Funktionen usw. dann einführen, wenn sie für die Anwendung und für Beispiele benötigt werden.

1./2. Doppelstunde

Aufbau des HC

Edition von Programmen

Ablauf der Arbeit (1. Programm eingeben, 2. Start mit RUN, 3. Abarbeiten des Programms, 4. Stopp, READ- und DATA-Befehle müssen übereinstimmen).

Beispiele: Berechnungen (dabei muß der Einsatz des Computers sinnvoll werden - große, lange Zahlen): Flächeninhalt von Quadrat, Dreieck, Kreis, Umfang dieser Figuren, physikalische Formeln, Minimum und Maximum zweier Zahlen

$$\min(a,b)=(a + b - ABS(a - b))/2$$
$$\max(a,b)=(a + b + ABS(a - b))/2$$

Schon in der ersten Doppelstunde ein laufendes Programm!

3. Doppelstunde

Variablenbegriff (Name-Wert-Paar)

Zahlen auf dem HC (Gleitkomma, Mantisse, Exponent, diskreter, endlicher Bereich rationaler Zahlen)

Fehlerbetrachtungen wegen Rechnen mit Maschinenzahlen, Stellenauslöschung

Beispiele: Vertauschen von x und y (dynamische Betrachtung)
a) unter Verwendung einer Hilfsvariablen
b) durch Rechnung (x=x+y, y=x-y, x=x-y)
x=x+1 Bringt das immer eine Veränderung?

4./5. Doppelstunde

Zyklen

rekursiver Aufbau der Rechnung, Umsetzen in die iterative Form

Beispiele: Summe von n Zahlen (=1. Zahl + Summe von n-1 Zahlen)
Summe der Beträge von n Zahlen
Berechnen der Fakultät von n (=n * Fakultät von n-1)
Berechnen von Quadratzahlen ($n^2 = (n-1)^2 + 2n - 1$)

6. Doppelstunde

Entscheidungen

Programmablaufplan, Struktogramm

Beispiel: Minimum und Maximum zweier Zahlen (durch Entscheidung)

7./8. Doppelstunde

Algorithmen

Beispiele: Überprüfen, ob a ein Teiler von b ist:
einfaches Dividieren rechentechnisch nicht günstig (an der oberen Grenze des Zahlbereiches kann der Quotient fälschlich ganzzahlig sein)
schrittweises Subtrahieren ist oft unmöglich (Zeit - z. B. 1236548/7)
deshalb Anwenden des Satzes: Wenn b=INT(b/a)*a, so gilt a/b.
"3A+1"-Algorithmus (vgl. Artikel von Prof. Kerner alpha 6/81+1/82)

9. Doppelstunde

Numerische Experimente mit dem HC

Beispiele: Rechnungen mit Parametern, die sich gesetzmäßig ändern (Flächeninhalt und Umfang von Quadrat und Kreis)

Was passiert, wenn ich immer wieder rechne:

a) x=x/2
b) x=1/x
c) x=-x
d) x=x*x
e) x=SQR(x)
f) x=SQR(1-x) (Wert des Goldenen Schnittes)
g) x=-SQR(x)
h) x=(a/x+x)/2 (Berechnung von $\sqrt{a}$ nach Newton)
i) x=x+1/x
j) x=x/10+1

10./11. Doppelstunde

indizierte Variablen

Speicherabbildungsfunktion

Beispiel: Pascalsches Dreieck (mit Arbeit an jeweils nur einer Zeile)

rechentechnische Aufbereitung in drei Schritten:

1. spaltenweises Schreiben
2. zeigen, daß die Berechnung "von vorn" falsch wird
3. in Nullen einbetten (Allgemeinheitscharakter)

12. Doppelstunde

Sortieralgorithmen

Sortieren von n Zahlen durch dauerndes Anwenden der Formel aus 1./2. Doppelstunde

einfache schnellere Sortieralgorithmen

13./14. Doppelstunde

Unterprogrammtechnik

Beispiel: Euklidischer Algorithmus zur Bestimmung des ggT als Unterprogramm

Anwenden beim Kürzen von Brüchen (ohne Primfaktorzerlegung)

15./16. Doppelstunde

Graphik

Beispiele: Zeichnen von Geraden, Polygonen, Kurven und zusammengesetzten Figuren
Reflexion an der Bildschirmbegrenzung

17./18. Doppelstunde

Zeichenkettenarbeit

Beispiele: Länge feststellen, Gleichheitsprüfung, Streichungen, Einfügungen
"Drei Chinesen mit dem Kontrabaß" - alle Vokale durch "i" ersetzen

19./20. Doppelstunde

Umrechnen von Dual- in Dezimalzahlen und umgekehrt
Berechnen der Gödelnummer (theoretische Informatik, Geheimschrift)

Beispiel: Gödelnummer von "der"
Alphabet k=26, d≙4, e≙5, r≙18
$4.26^2 + 5.26^1 + 18 = 2852$
sehr große Zahlen!

21./22. Doppelstunde

Simulieren einer einfachen Turingmaschine (z. B. Addition von 8)
Beweis, daß für ein gegebenes n nicht entscheidbar ist, ob es Gödelnummer eines Algorithmus ist (Versuch, ob Schüler dieser Altersstufe das verstehen können)

23. Doppelstunde

verallgemeinerungsfähige Lösung von linearen Gleichungssystemen mit 2 Variablen/2 Gleichungen

24./25. Doppelstunde

Spiele mit dem HC

M. Fothe, I. Kerner
PH Dresden

Der Stoff-Zeit-Plan der AG "Programmierung von BASIC auf dem HC" bildet die Grundlage eines Kurses, der in diesem Schuljahr am APW-Schülerrechenzentrum in Dresden läuft. Wir hoffen, daß auch andere Einrichtungen (eventuell auch erst in näherer Zukunft) dieses Programm nutzen können. Hinweise und Anfragen bitten wir an die Radaktion oder direkt an

Michael Fothe
7050 Leipzig
Torgauer Str. 32

zu richten.

Die Redaktion

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimmler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kutowski, E. Stein

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M. Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 5. 12. 1984

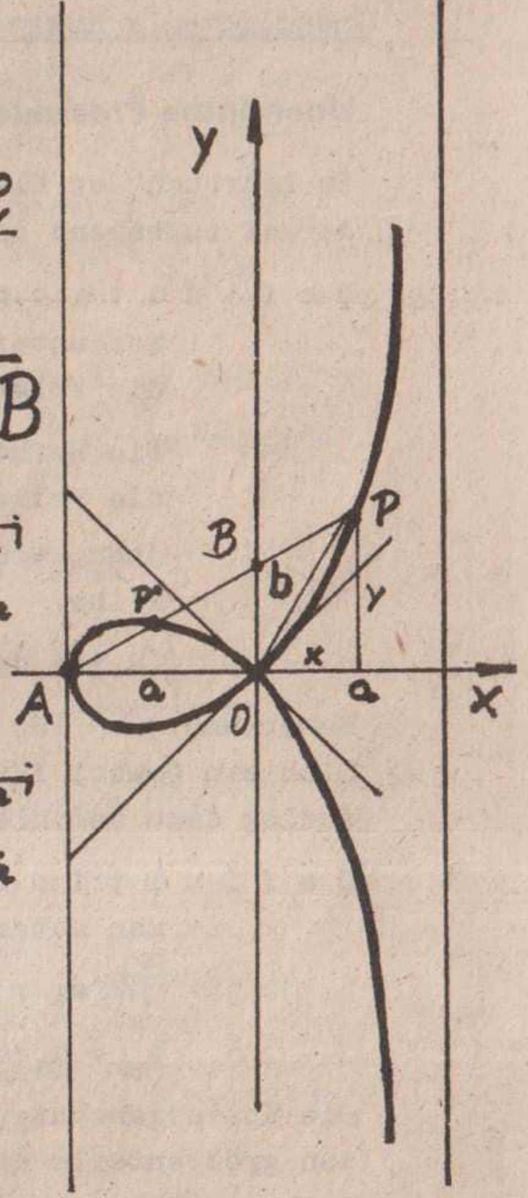
ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	19 (1985) 1	S. 1–16

Strophoide

$$\overline{BP}=\overline{BP'}=\overline{OB}$$

$$\overline{AP'}=(a-x)\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

$$\overline{AP}=(a+x)\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$$



2
85

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

19. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR:
0,20 M

Unendliche Produkte

Im Lehrbuch der Klasse 11 wurde der Begriff der Zahlenfolge und darauf aufbauend der Begriff "Unendliche Reihe" definiert.

D e f i n i t i o n : Ist (a_n) eine Zahlenfolge, so versteht man unter der Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ die Folge der Partialsummen (s_n), wobei $s_n = \sum_{r=1}^{n} a_n$. Die Reihe heißt konvergent dann und nur dann, wenn die Folge (s_n) konvergiert, d. h. $\sum_{r=1}^{\infty} a_r = a$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} s_n = a$. Dabei heißt a der Wert der Reihe.

(a ist der Grenzwert der Folge der Partialsummen.)

Bemerkung: $\sum$ ist keineswegs ein Summenzeichen, sondern lediglich ein Symbol für eine bestimmte Folge.
Analog dazu definiert man das Unendliche Produkt.

D e f i n i t i o n : Ist (a_n) eine Zahlenfolge, so versteht man unter dem Unendlichen Produkt $\prod_{r=1}^{\infty} a_r = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots$ die Folge der Partialprodukte $p_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.

Die Konvergenzuntersuchungen an den Unendlichen Produkten werden größtenteils auf der Grundlage der Konvergenz Unendlicher Reihen geführt. Deshalb einige grundlegende Sätze über die Konvergenz von Reihen.

S a t z A_1: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit positiven Gliedern ist genau dann konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsumme beschränkt ist.

Beispiel: Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ist für $x \geq 0$ eine Reihe mit positiven Gliedern.

- Ist $x \geq 1$, so ist offensichtlich $s_n \geq n$, d. h. aber, die Folge (s_n) ist nicht beschränkt, die Reihe divergiert.
- Ist $x < 1$, so gilt $s_n = 1+x+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} < \frac{1}{1-x}$, d. h. (s_n) ist beschränkt, die Reihe konvergiert (gegen $\frac{1}{1-x}$).

Satz A_2: (1. Vergleichskriterium) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern und ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern derart, daß von einer Stelle an $a_n \leq c_n$ gilt, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent (analog divergent).

Satz A_3: (2. Vergleichskriterium) Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ Reihen mit positiven Gliedern. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent und gilt von einer Stelle an

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}$, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Beispiel: Betrachten wir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Hier gilt
$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{n+2}$$

Daraus folgt nach Satz A_1: Die Reihe konvergiert.
Andererseits ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$. Vergleichen wir die Reihe mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, so können wir sagen, da $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^2+3n+2}$, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ nach Satz A_2.
Die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ kann man mit Satz A_1 nachweisen.

1. **Definition**: Das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot \dots$ (gelesen: Produkt n von 1 bis ∞ über u_n ist gleich ...) soll genau dann konvergent heißen, wenn

a) von einer Stelle ab (etwa für alle $n > n_0$) kein Faktor mehr verschwindet und

b) die hinter dieser Stelle beginnenden Produkte $p_n = u_{n_0+1} \cdot u_{n_0+2} \cdot \dots \cdot u_n$ mit wachsendem n gegen einen endlichen von 0 verschiedenen Grenzwert streben.

Bezeichnet man diesen Grenzwert U_{n_0}, so ist die Zahl $U = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{n_0} \cdot U_{n_0}$ der Wert des Produktes.

2. Erläuterungen zur Definition

- Hätte man definiert, das unendliche Produkt sei konvergent, wenn die Folge der Partialprodukte konvergiert, so wäre jedes Produkt, in dem ein Faktor 0 bzw. jedes Produkt, in dem von einer Stelle an $|u_n| \leq \vartheta < 1$ gilt, konvergent. Diese Fälle wurden mit obiger Definition ausgeschlossen.
- Aus der Definition ist ersichtlich, daß $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} p_{n+1} = U_{n_0}$. Da $p_{n+1} = p_n \cdot u_{n+1}$, ist $u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{p_n}$

  und $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} p_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} p_n} = \frac{U_{n_0}}{U_{n_0}} = 1$ (falls diese Grenzwerte existieren).

  D. h.: In einem konvergenten unendlichen Produkt strebt die Folge der Faktoren gegen 1. Darum setzen wir $u_n = 1+a_n$, wobei die Zahlen a_n als Glieder des Produktes bezeichnet werden, und wir schreiben fortan die Produkte in der Form

  $$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n).$$

3. Konvergenzuntersuchungen an unendlichen Produkten

Der in den folgenden Sätzen gezeigte Zusammenhang zwischen unendlichen Produkten und unendlichen Reihen ermöglicht es uns, Aussagen über das Konvergenzverhalten von Produkten zu machen, da wir in dieser Hinsicht die unendlichen Reihen vollständig beherrschen.

3.1. Unendliche Produkte mit positiven Gliedern

S a t z 1: Ein Produkt $\prod(1+a_n)$ mit positiven Gliedern a_n ist dann und nur dann konvergent, wenn die Reihe $\sum a_n$ konvergiert.

Beweis: Zu zeigen ist: Die Folge der Teilprodukte konvergiert dann und nur dann, wenn die Teilsummen mit wachsendem n gegen einen Grenzwert streben.
Nach dem 1. Hauptkriterium konvergiert eine Zahlenfolge, wenn sie monoton wachsend und beschränkt ist.
Für die Folge der Teilprodukte gilt:

$$p_n = (1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)$$
$$p_{n+1} = (1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\cdot(1+a_{n+1})$$
$$= p_n + p_n \cdot a_{n+1} . \qquad (*)$$

Da nach Voraussetzung $a_i \geq 0$, ist $p_n > 0$ und $a_{n+1} \geq 0$, d. h. auf (*) bezogen $p_{n+1} \geq p_n$ für alle n.

Für die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n \leq s_{n+1} = a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1}.$$

Damit ist gezeigt, daß sowohl die Folge der Teilprodukte als auch die Folge der Partialsummen monoton wächst.

Die Reihenentwicklung der e-Funktion liefert:

$e^x \geq 1+x$ $(x \geq 0)$, damit gilt $p_n = (1+a_1)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \leq e^{a_1}\cdot\ldots\cdot e^{a_n} = e^{s_n}$.

Außerdem ist nach Ausmultiplizieren

$$p_n = 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_1 a_2 + \ldots + a_1 \cdot \ldots \cdot a_n > s_n .$$

Diese letzten zwei Sachverhalte zeigten: Mit s_n bleibt auch p_n beschränkt und umgekehrt.

wzbw.

3.2 Unendliche Produkte mit beliebigen Gliedern

Die absolute Konvergenz definieren wir wie folgt:

$\prod(1+a_n)$ heißt absolut konvergent $\Leftrightarrow_{df}$ $\prod(1+|a_n|)$ ist konvergent.

Zur Untersuchung von unendlichen Produkten können wir den folgenden Satz benutzen.

Satz 2: Das Produkt $\prod(1+a_n)$ ist genau dann absolut konvergent, wenn $\sum a_n$ absolut konvergiert.

Zur Erinnerung: $\sum a_n$ heißt absolut konvergent $\Leftrightarrow_{df}$ $\sum |a_n|$ konvergiert.

Beweis zu Satz 2: Zu zeigen ist also $\prod(1+|a_n|)$ ist konvergent genau dann, wenn $\sum|a_n|$ konvergiert. Es handelt sich hier um unendliche Produkte bzw. Reihen mit positiven Gliedern, wir können also Satz 1 anwenden.

wzbw.

Nun noch ein weiterer Satz, mit dem wir die Konvergenzuntersuchung durchführen können:

Satz 3: Das Produkt $\prod(1+a_n)$ ist genau dann konvergent, wenn die hinter einem passenden Index m begonnene Reihe[1] $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \log(1+a_n)$ konvergiert. (1)

Das unendliche Produkt konvergiert absolut, wenn die genannte Reihe absolut konvergiert. (2)

Hat die Reihe den Wert L_m, so ist

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = (1+a_1)\cdot\ldots\cdot(1+a_m)\cdot e^{L_m}. \qquad (3)$$

1) Der Index m ist so zu wählen, daß $\bigwedge\limits_{n>m} |a_n| < 1.$

Beweis: Als erstes zeigen wir: Ist $\prod(1+a_n)$ konvergent, so konvergiert $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \log(1+a_n)$ für passendes m.

Aus der Voraussetzung in diesem Teilsatz folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, d. h. ab einer Stelle m gilt für alle $n > m$ $|a_n| < 1$.

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = U_m$, wobei $p_n = (1+a_{m+1})\cdot\ldots\cdot(1+a_n)$.

Aufgrund der Stetigkeit der Logarithmusfunktion und da $\bigwedge\limits_{n} p_n > 0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \log p_n = \log U_m$

Da aber
$$\begin{aligned}\log p_n &= \log[(1+a_{m+1})\cdot\ldots\cdot(1+a_n)]\\ &= \log(1+a_{m+1}) +\ldots+ \log(1+a_n)\\ &= s_n\end{aligned}$$

Das heißt $\lim\limits_{n\to\infty} \log p_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \log U_m$. Der Grenzwert der Folge der Partialsummen existiert und hat den Wert $\log U_m$, damit konvergiert die Reihe.

Als nächstes zeigen wir, daß auch die Umkehrung gilt.

Sei $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \log(1+a_n)$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S_m$

$$\begin{aligned}s_n &= \log(1+a_{m+1})+\ldots+\log(1+a_n)\\ &= \log[(1+a_{m+1})\cdot\ldots\cdot(1+a_n)]\\ &= \log p_n.\end{aligned}$$

Da $p_n = e^{\log p_n}$ ist $p_n = e^{s_n}$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S_m = \lim_{n\to\infty} \log p_n$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} e^{s_n} = e^{S_m}.$$ Das heißt, der Grenzwert der Folge der Partialprodukte existiert (und ist e^{S_m}) und damit konver-

giert $\prod(1+a_n)$.
Damit haben wir (1) gezeigt und außerdem herausbekommen, daß $U_m = e^{S_m}$. Das heißt aber $\prod(1+a_n) = (1+a_1)\cdot\ldots\cdot(1+a_m)\cdot U_m =$ $= (1+a_1)\cdot\ldots\cdot(1+a_m)\cdot e^{S_m}$, womit auch (3) bewiesen wäre.
Zum Schluß beweisen wir noch (2). Hierzu müssen wir, da Satz 2 gilt, lediglich zeigen, daß $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=m+1}^{\infty} \log(1+a_n)$ dasselbe Konvergenzverhalten aufweisen.
Dies gelingt uns wie folgt:
Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$.
Andererseits ist
$$(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e^{\log(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}} = e^{\frac{\log(1+a_n)}{a_n}}$$, das heißt
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1.$$ Es gilt also
$$-\varepsilon < \frac{\log(1+a_n)}{a_n} - 1 < \varepsilon \qquad |+1$$
$$1-\varepsilon < \frac{\log(1+a_n)}{a_n} < 1+\varepsilon .$$ Multiplizieren wir nun mit a_n, erhalten wir für $a_n > 0$: $(1-\varepsilon)a_n < \log(1+a_n) < (1+\varepsilon)a_n$

und für $a_n < 0$: $(1+\varepsilon)a_n < \log(1+a_n) < (1-\varepsilon)a_n$.
Damit ist nach dem 1. Vergleichskriterium gezeigt, daß beide Reihen dasselbe Konvergenzverhalten aufweisen.

4. Anwendungsaufgaben

a) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{n}{n^2+1})$. Dies ist eine Reihe mit positiven Gliedern.
Wir wenden Satz 1 an, untersuchen also $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{1^2+1}+\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}+\frac{4}{4^2+1}+\ldots+\frac{m}{m^2+1}+\frac{m+1}{(m+1)^2+1}+\ldots$$
$$\geq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+2\cdot\frac{2^2}{2^{2^2}+1}+\ldots+\frac{2^{r-1}2^r}{2^{r^2}+1}+\ldots$$
$$\geq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots \qquad \ldots+\frac{2^r\cdot 2^r}{2\,2^r\cdot 2^r(1+\frac{1}{2^{r^2}})}+\ldots$$

$$\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \ldots .$$

Das Cauchysche Konvergenzkriterium ist damit nicht erfüllt, d. h. die Reihe ist divergent und damit auch das Produkt.

b) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{\sin^2(n^\alpha)}{n^3})$ Auch hier handelt es such um eine Reihe mit positiven Gliedern. Wir betrachten $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n^\alpha)}{n^3}$, stellen fest, daß wir $\frac{\sin^2(n^\alpha)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ abschätzen können, d. h. die Unendliche Summe ist nach dem 1. Vergleichskriterium konvergent und damit das Produkt.

c) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n x^n)$ Hier sehen wir sofort, daß das Produkt für $|x|=1$ divergiert (siehe Definition). In der Anmerkung zur Definition hatten wir festgestellt, daß die Faktoren eines konvergierenden unendlichen Produktes gegen 1 streben müssen (besser die Folge der Faktoren). Da aber die Folge $((-1)^n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenso wie $(1+(-1)^n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, divergiert auch das Produkt für $|x| \geq 1$. Für $|x|<1$ konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$ absolut wie auch das unendliche Produkt (siehe Satz 2).

d) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n})$ Hier müssen wir wieder mehrere Fälle unterscheiden. Nach Satz 2 konvergiert das Produkt absolut, wenn $\sum \frac{x^n}{n}$ konvergiert und dies ist der Fall für $|x|<1$ (Begründung: genannte Reihe ist eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$). Das heißt aber auch: Für $|x|>1$ divergiert die Reihe und somit auch das Produkt. Für die Randprodukte werden wir den Wert berechnen.

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^{n+1}\tfrac{1}{n}) &= (1+1)(1-\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4})(1+\tfrac{1}{5})(1-\tfrac{1}{6})\cdot\ldots \\ &= 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{6}{5}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\ldots \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n}\right) = (1-1)(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4})(1-\tfrac{1}{5})(1-\tfrac{1}{6})\cdot\ldots\cdot(1-\tfrac{1}{n})$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= 0\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\ldots$$

Für $x = -1$ strebt die Folge der Teilprodukte, in denen kein Faktor mehr 0 ist, gegen Unendlich, das Produkt divergiert. Für $x = 1$ konvergiert das Produkt und hat den Wert 1.

Für die Anwendungsbeispiele sind 2 Sätze über unendliche Reihen von Wichtigkeit, die ich hier noch nennen möchte:

Zu 4a: Konvergenzkriterium von Cauchy:

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{n_0}\ \bigwedge_{n>n_0}\ \bigwedge_{K} |a_{n+1}+\ldots+a_{n+K}| < \varepsilon$$

Zu 4d: Unendliche Reihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ heißen Potenzreihen. Für Potenzreihen gilt:

- Ist $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} = 0$, so konvergiert die Reihe für alle x
- Ist $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_k} = \infty$, so konvergiert die Reihe für $x \neq 0$
- Ist $0 < \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_k|} < \infty$, so konvergiert die Reihe für $|x| < \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{a_k}}$.

Jörg-Michael Wolf
Mathematik/Physik-Lehrerstudent
3. Studienjahr
FSU Jena

Preisaufgaben

R 7 1

In einem Tetraeder sei die Summe der Längen zweier gegenüberliegender Kanten immer konstant. Man zeige, daß dann die Eckpunkte des Tetraeders als Mittelpunkte sich paarweise berührender Kugeln genommen werden können.

R 8 2

Durch den Punkt P, der auf einem gegebenen Kreis k liegt, und durch den Punkt Q, der auf einer gegebenen Gerade g liegt, werde ein beliebiger Kreis h konstruiert, der k außer im Punkt P noch im Punkt R und g außer im Punkt Q noch im Punkt S schneide.
Man zeige, daß bei allen möglichen Konstruktionen von h der Schnittpunkt der Gerade durch R und S mit dem Kreis k immer ein und derselbe ist.

R 9 1

Man zeige, daß aus $\cot(\alpha+\beta)=0$ immer folgt:

$$\sin(\alpha+2\beta) = \sin\alpha .$$

R 10 1

a,b,n seien natürliche Zahlen, mit $1 \leq a < b \leq n$.
Wieviel mögliche Umordnungen der natürlichen Zahlen von 1 bis n gibt es, wobei die Zahlen a und b nicht nebeneinander stehen dürfen?

R 11 1

Man löse das Gleichungssystem

$$\log_{0,5}(y-x) + \log_2 \frac{1}{y} = -2$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

R 12 2

Из пункта A по направлению в B вышел пешеход. Через a ч из B навстречу пешеходу выехал велосипедист, через в ч после своего выезда он встретил пешехода. Сколько времени надо велосипедисту и сколько пешеходу, чтобы пройти весь путь между A и B, если велосипедисту на это требуется на с ч менше, чем пешеходу?

Einsendeschluß 1. 5. 1985

Einführung in die Galoissche Theorie (1. Fortsetzung)

Die allgemeine Idee der Gruppe einer Gleichung hat erst Evariste Galois erkannt. Bereits Niels Henrik Abel (1802 - 1829), Begründer der allgebraischen Geometrie, hat mit Hilfe der Gruppentheorie 1829 gezeigt, daß jede Gleichung mit Abelscher Gruppe durch Wurzeln lösbar ist. Allerdings den Beweis, daß eine Gleichung 5. Grades im allgemeinen nicht auflösbar ist, führte er ohne gruppentheoretische Betrachtungen. Mit der Gleichungstheorie haben sich u. a. Lagrange, Abel und vor allem Gauß beschäftigt. Bedeutend bei der Weiterentwicklung der Gruppentheorie ist sein berühmtes Werk "Disquisitiones arithmeticae" (arithmetische Untersuchungen), 1801 erschienen.

Zur Einführung der Galoisschen Theorie wollen wir uns hier auf Gleichungen mit rationalen Koeffizienten beschränken. Die Ergebnisse lassen sich auch auf beliebige Grundkörper übertragen (siehe Literaturangaben).

Es sei also im Körper der rationalen Zahlen eine irreduzible Funktion gegeben: $f(t) = 0$. Ihre Wurzeln bezeichnen wir mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Mit K bezeichnen wir den Erweiterungskörper, der alle rationalen Funktionen der Wurzeln mit rationalen Zahlenkoeffizienten enthält. Über diesen Körper lassen sich mehrere Aussagen beweisen. Die allgemeinen Beweise findet man in der angegebenen Literatur. Wir wollen die einzelnen Sätze an einem Beispiel erläutern und nachweisen.

1. Satz: Man kann stets n rationale Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ so bestimmen, daß die n! Zahlen $r_1a_1+r_2a_2+\ldots+r_na_n$, die durch Permutation der Wurzeln a_i entstehen, untereinander verschieden sind.

Wir wollen diesen Satz an einem speziellen Beispiel erläutern und nachweisen.

Es sei $f(t) = t^4-5t^2+6$. Man erkennt leicht, daß ihre 4 Wurzeln lauten: $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=-\sqrt{2}$, $a_3=\sqrt{3}$, $a_4=-\sqrt{3}$. Es ergeben sich 24 Gleichungen:

$$r_1a_1 + r_2a_2 + r_3a_3 + r_4a_4 = z_1$$
$$r_1a_1 + r_2a_2 + r_3a_4 + r_4a_3 = z_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_1a_4 + r_2 \quad + r_3a_2 + r_4a_1 = z_{24}$$

Aus $z_1-z_2 = (a_3-a_4)(r_3-r_4) \neq 0$ folgt $r_3 \neq r_4$.
Führt man alle 23 Differenzen z_1-z_2, z_1-z_3 usw. aus, ergibt sich, daß $r_1 \neq r_2$, $r_1 \neq r_3$, $r_1 \neq r_4$, $r_2 \neq r_3$, $r_2 \neq r_4$, $r_3 \neq r_4$ sein muß, wenn alle z_i verschieden sein sollen.
Als Beispiel wählen wir: $r_1=2$, $r_2=3$, $r_3=\frac{1}{2}$ und $r_4=\frac{1}{3}$.
Dann ergeben sich folgende 24 Zahlen z_1 bis z_{24}:

$z_1 = -\sqrt{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$

$z_2 = -\sqrt{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$

$z_3 = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{8}{3}\sqrt{3}$

$z_4 = \frac{5}{3}\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}$

$z_5 = \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{8}{3}\sqrt{3}$

$z_6 = \frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{2}\sqrt{3}$

$z_7 = -z_2$

$z_8 = -z_1$

$z_9 = -z_5$

$z_{10} = -z_6$

$z_{11} = -z_3$

$z_{12} = -z_4$

$z_{13} = \frac{5}{2}\sqrt{2} + \frac{5}{3}\sqrt{3}$

$z_{14} = \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}$

$z_{15} = -\frac{5}{2}\sqrt{2} + \frac{5}{3}\sqrt{3}$

$z_{16} = -\frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}$

$z_{17} = \frac{1}{6}\sqrt{2} - \sqrt{3}$

$z_{18} = -\frac{1}{6}\sqrt{2} - \sqrt{3}$

$z_{19} = -z_{15}$

$z_{20} = -z_{16}$

$z_{21} = -z_{14}$

$z_{22} = -z_{13}$

$z_{23} = -z_{18}$

$z_{24} = -z_{17}$

Man kann nun die Gleichung $(t-z_1)(t-z_2)\ldots(t-z_{24}) = 0$ bilden und erhält folgende Gleichung, wie der Leser nachprüfen kann:

$$(t^2-z_1^2)(t^2-z_2^2)(t^2-z_3^2)(t^2-z_5^2)(t^2-z_4^2)(t^2-z_6^2)(t^2-z_{13}^2)(t^2-z_{15}^2)$$
$$\cdot(t^2-z_{14}^2)(t^2-z_{16}^2)(t^2-z_{17}^2)(t^2-z_{18}^2).$$

Das Produkt der beiden ersten Faktoren $= t^4 - \frac{25}{6}t^2 + (\frac{23}{12})^2$, hat also die Form t^4+at^2+b, wobei a und b rationale Zahlen sind. Man überzeugt sich leicht, daß die nächsten beiden Faktoren wieder ein Produkt der Form t^4+at^2+b haben, wobei a und b wieder 2 rationale Zahlen sind, die nächsten beiden Faktoren wie-

der ein Produkt gleicher Bauart besitzen usw. Es ergibt sich für die Gleichung die Gestalt:
$F_1(t)\cdot F_2(t)\cdot F_3(t)\cdot F_4(t)\cdot F_5(t)\cdot F_6(t) = 0$, wobei alle F_i von der Form $t^4+at^2+b = 0$ sind, a und b rationale Zahlen.
Z. B. ist $F_1(t) = t^4-\frac{25}{6}t^2+(\frac{23}{12})^2$. Ihre Wurzeln sind
$t_1=\sqrt{\frac{25}{12}+\sqrt{\frac{2}{3}}}$; $t_2=-t_1$; $t_3=\sqrt{\frac{25}{12}-\sqrt{\frac{2}{3}}}$; $t_4=-t_3$.
Infolge des Bestehens der Gleichung $F_1(t_1) = 0$ läßt sich jede Zahl aus dem Körper K bereits als Funktion 4. Grades von t_1 darstellen: $a = x_1+x_2t_1+x_3t_1^2+x_4t_1^3+x_5t_1^4$; x_i rationale Zahlen.
Ersetzen wir t_1 durch t_2, ergeben sich für die Zahlen a aus K eine bestimmte Permutation, die wir mit (t_1,t_2) bezeichnen.
Weitere Permutationen sind (t_1,t_3), (t_1,t_4).
Die Eigenschaften dieser Permutationen lassen sich durch folgende Sätze charakterisieren:

<u>2. Satz:</u> Diejenigen Zahlen a aus K, die bei allen Permutationen (t_1,t_i) ungeändert bleiben, bilden den Körper R der rationalen Zahlen.

Beweis: Ist $a=x_1+x_2t_1+x_3t_1^2+x_4t_1^3+x_5t_1^4$ eine rationale Zahl, so ist $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ und $a = x_1$. Die Permutationen haben keinen Einfluß auf die rationale Zahl a. Bleibt umgekehrt a bei allen Permutationen ungeändert, dann ergibt die Addition aller Ausdrücke

$$a = x_1 + x_2t_i + x_3t_i^2 + x_4t_i^3 + x_5t_i^4 \quad (i=1,2,3,4)$$

wieder eine rationale Zahl wegen $t_1+t_2+t_3+t_4 = 0$,

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 = \frac{25}{3}$$
$$t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + t_4^3 = 0 \quad \text{und}$$
$$t_1^4 + t_2^4 + t_3^4 + t_4^4 = \text{auch rational}$$

$4a = 4x_1$ + rationale Zahl, d. h. a ist rational.

Es sei nun $a= x_1+x_2t_1+x_3t_1^2+x_4t_1^3+x_5t_1^4$ eine beliebige Zahl aus K

und
$$a'= x_1+x_2t_2+x_3t_2^2+x_4t_2^3+x_5t_2^4$$
$$a''= x_1+x_2t_3+x_3t_3^2+x_4t_3^3+x_5t_3^4$$
$$a'''= x_1+x_2t_4+x_3t_4^2+x_4t_4^3+x_5t_4^4$$

a', a'', a''' heißen die zu a konjugierten Zahlen.
Dann gilt folgender Satz:

<u>3. Satz:</u> Für 2 beliebige Zahlen a und b aus K gilt stets:

$(a+b)' = a'+b'$; $(a+b)'' = a''+b''$ und $(a+b)''' = a'''+b'''$

$(ab)' = a'b'$; $(ab)'' = a''b''$ und $(ab)''' = a'''b'''$.

Beweis: Wir setzen $a = x_1+x_2t_1+x_3t_1^2+x_4t_1^3+x_5t_1^4$ und

$b = y_1+y_2t_1+y_3t_1^3+y_4t_1^3+y_5t_1^4$ x_i, y_i rational

Durch Einsetzen in obige Gleichungen ergeben sich richtige Beziehungen. Bei den Grundbegriffen der Körpertheorie haben wir bereits den Begriff der Automorphismen eines Körpers definiert. Wir sehen, daß die Permutationen (t_1, t_i) Automorphismen des Körpers K bilden.

<u>4. Satz:</u> Die Permutationen (t_1, t_1), (t_1, t_i) $(i=2,3,4)$ bilden Automorphismen des Körpers K, d. h. jede rationale Beziehung mit rationalen Koeffizienten, die zwischen Zahlen von K besteht, geht durch die Permutationen in richtige Beziehungen über.

Führt man 2 Automorphismen hintereinander aus, so ist das Ergebnis wieder ein Automorphismus. Die Permutationen bilden eine Gruppe. Das Einheitselement ist (t_1, t_1). Es gilt der

<u>5. Satz:</u> Die Permutationen (t_i, t_k) bilden eine Gruppe, die sogenannte Galoissche Gruppe des Körpers K. Sie ist identisch mit der Gruppe aller Automorphismen des Körpers K.

Für unser spezielles Beispiel lassen sich die Sätze alle nachweisen. Die allgemeinen Beweise findet man in der Fachliteratur (siehe Literaturangaben).
Zu ähnlichen Ergebnissen kommen wir, wenn wir die Funktionen $F_i(t)$ untersuchen $(i=2,3,4,5,6)$.
Nennen wir die Galoissche Gruppe G, so können wir noch folgenden Satz nachweisen:

<u>6. Satz:</u> Zu jeder Untergruppe der Galoisschen Gruppe G gehört ein Unterkörper, jeder Unterkörper gehört zu einer Untergruppe.

In unserem Beispiel läßt sich leicht einsehen, daß zu einer Untergruppe der Galoisschen Gruppe stets ein Unterkörper gehört. Nehmen wir z. B. die Untergruppe H mit den Elementen (t_1, t_1) und (t_1, t_3) oder in der üblichen Schreibweise $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$, wobei $(t_1,t_3)(t_1,t_3) = (t_1,t_1)$ ist, so enthält der Unterkörper die rationalen Zahlen und zu einer nichtrationalen Zahl a auch die Zahl a". Umgekehrt kann man einem Unterkörper eine Untergruppe zuordnen.

Man erkennt auch leicht, daß Körper, die durch konjugierte Zahlen entstehen, sogenannte konjugierte Körper, zu konjugierten Untergruppen gehören. In unserem Beispiel ist der Körper K mit seinem konjugierten Körper identisch. Solche Körper nennt man Galoissche Körper. Ferner ist die Galoissche Gruppe eine Abelsche Gruppe.

Für Galoissche Körper bzw. Unterkörper besteht folgender Satz:

<u>7. Satz:</u> Damit ein Unterkörper von K Galoissch ist, ist notwendig und hinreichend, daß seine Gruppe ein Normalteiler von G ist.

Ist z. B. H die Untergruppe von G mit den Elementen $h_1=(t_1,t_1)$ und $h_2=(t_1,t_3)$, $g_1, g_2, \dots, g_i, \dots$ Elemente von G. Die Untergruppe $g_i h_k g_i^{-1} = h_k g_i g_i^{-1} = h_k$ ist identisch mit der Gruppe H, da diese Beziehungen für beliebige g_i und h_k gelten. Also ist H Normalteiler von G. Der zugehörige Unterkörper K_1, der alle rationalen Zahlen und mit einer nicht rationalen Zahl a auch a" enthält, ist mit dem konjugierten Unterkörper identisch, da dieser auch alle rationalen Zahlen und mit a" auch a enthält. Also ist der Unterkörper ein Galoisscher Körper.

Wir haben mit Absicht eine irreduzible Gleichung vierten Grades gewählt, da der Nachweis der bisherigen Sätze für irreduzible Gleichungen vom Grade $n > 4$ mit einem großen Rechenaufwand verbunden ist. Z. B. müßten wir für $n = 5$ $5! = 120$ Gleichungen aufstellen, um den 1. Satz zu beweisen.

Die bisherigen Ergebnisse kann man auf den Fall übertragen, daß R nicht nur der Körper der rationalen Zahlen bedeutet, sondern ein beliebiger mit reellen bzw. komplexen Zahlen sein kann. Die Galoissche Gruppe besteht dann aus allen Automorphismen von K,

bei denen die Größen von R ungeändert bleiben. Durch Bestimmung aller Untergruppen der Galoisschen Gruppe erhält man alle Körper zwischen R und K.
Wir wollen noch zwei wichtige Sätze anführen, die aus dem vorhergehenden folgen.

8. Satz: Ist K_1 ein Galoisscher Unterkörper, der zu dem Normalteiler N von G gehört (G = Galoissche Gruppe), so ist G/N seine Gruppe.
Ist N_1 der größte Normalteiler, so ist G/N_1 eine einfache Gruppe, die keine eigentlichen Normalteiler besitzt. Bedeutet N_i den größten Normalteiler von N_{i-1} ($i=2,3,\ldots,r$), so daß $G, N_1, N_2, \ldots N_r = e$ eine Kompositionsreihe bildet, so sind die Faktorgruppen G/N_1, N_1/N_2 usw. lauter einfache Gruppen. G ist dann eine auflösbare Gruppe.

Es gilt dann der berühmte Satz von Abel:

9. Satz: Eine Gleichung ist dann und nur dann durch Wurzelzeichen auflösbar, wenn ihre Gruppe auflösbar ist.

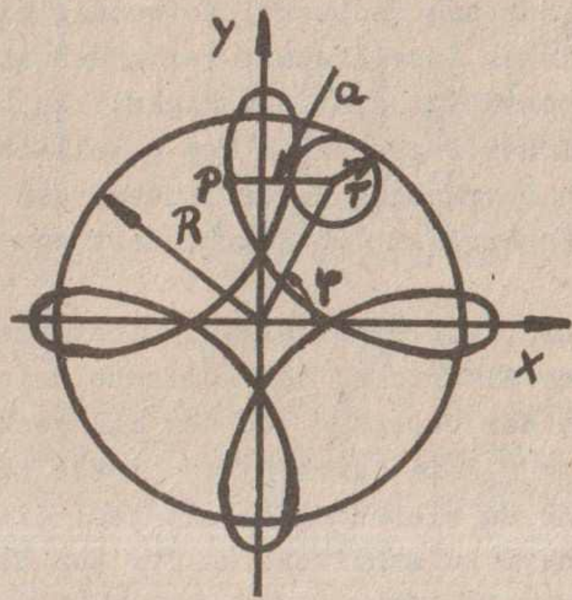
Fortsetzung folgt!

B. Hanisch, Halle

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimmler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kutowski, E. Stein
Anschrift: **WURZEL,** 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 10. 1. 1985

Hypozykloide



$$x = (R-r)\cos\varphi + a\cos[\varphi(R-r)/r]$$

$$y = (R-r)\sin\varphi - a\sin[\varphi(R-r)/r]$$

3
85

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

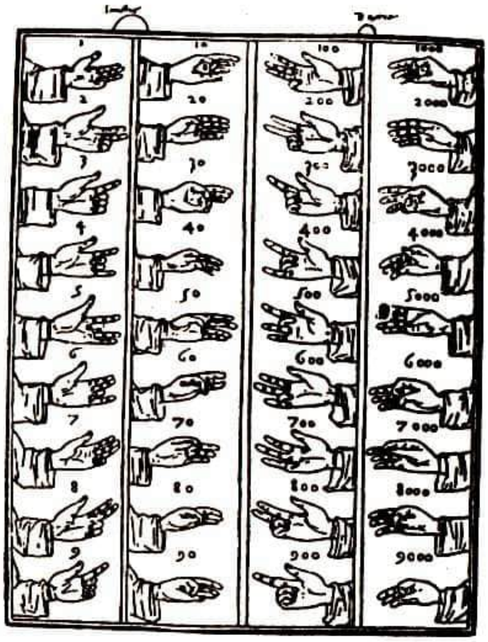
Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

19. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Die Entwicklung der Zahlenschreibweise

Die Geschichte des Altertums zeigte (siehe WURZEL 7/8. 1984), daß die Entwicklung der Naturwissenschaften und ihrer ersten Anfänge, des Zählens und Rechnens, notwendig mit der Entwicklung der menschlichen Gesellschaft verbunden ist. Auch die Zeit des Mittelalters bestätigt die Abhängigkeit mathematischer und naturwissenschaftlicher Forschungen vom gesellschaftlichen Leben. So läßt sich die Begründung dafür finden, daß das Niveau der Mathematik in Europa erst im 16. Jahrhundert dem der alten Griechen gleichkam:

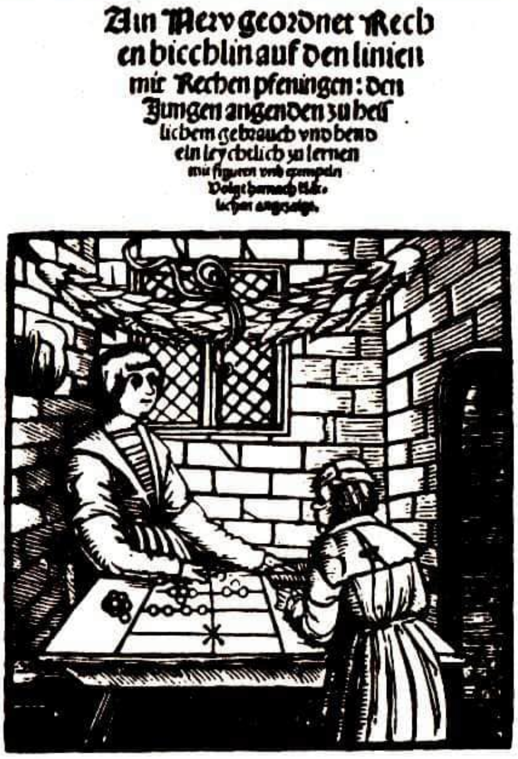
Im 5. Jhrd. u.Z. zerfiel der einstmals mächtigste Sklavenhalterstaat des Altertums, das Römische Reich. In weiten Teilen Europas erfolgte der Übergang von der Sklavenhaltergesellschaft in den Feudalismus. Die herrschende Klasse zeigte nicht das geringste Interesse an wissenden Untertanen; die Leibeigenen hatten auf den Feldern zu schuften, um für den Reichtum von Kirche und Adel zu sorgen. Der Bauer vermochte wohl noch die zu hütenden Tiere zu zählen, besaß aber nicht die Fähigkeit, die Größe des von ihm bestellten Feldes zu berechnen. Wozu auch? Das Land gehörte ihm ja nicht. Zum Zählen bediente man sich seiner Finger. Dem irischen Mönch BEDA - er lebte von 673 - 735 - verdanken wir die Beschreibung der sogenannten Fingerzählung. Verschiedene Stellungen der Finger und Hände bedeuteten jeweils bestimmte Einer, Zehner, Hunderter und Tausender. Unter Zuhilfenahme der Arme gelang es, bis zu einer Million zu zählen. (Abb. 1)



Doch auch die adligen Feudalherren erwiesen sich als recht ungebildet. Selbst Karl der Große, 800 zum Kaiser gekrönt, konnte weder lesen noch schreiben! Wen wundert das aber auch, gab es doch kaum noch Bücher und Schriftstücke. Zeitweise ließ man in den Klöstern die wenigen noch vorhandenen Bücher zum Schutz vor Diebstahl anketten.

Etwas umfangreicheres Wissen besaßen einige Geistliche, deren Interesse jedoch hauptsächlich der Vorausberechnung kirchlicher Feiertage galt.

In der Zeit des Hochfeudalismus (11. - 15. Jhrd.) entstanden in Europa insbesondere an den Kreuzungspunkten wichtiger Handelsstraßen Städte wie Florenz, Genua, Venedig, Mailand und Pisa. In den Städten entwickelte sich verstärkt das Handwerk. Es entstand das Schmiedehandwerk; die Kunst der Waffen- und Goldschmiede vervollkommnete sich. Bedeutung erlangte das Textilhandwerk, der Schiffsbau, das Zimmermannshandwerk. Die feudale Gesellschaftsordnung brachte eine neue Schicht hervor: die Ärzte, Lehrer, Künstler, Architekten, Juristen und Rechenmeister. Die Rechenmeister lehrten zahlungswilligen Kunden das Zählen und Rechnen. Sie selbst berechneten Geldgeschäfte und führten Abrechnungsbücher der Kaufleute. (Abb. 2)



Zur Ausbildung der Ärzte, Rechenmeister und der anderen Angehörigen der neuen Schicht dienten erhalten gebliebene Lehrbücher aus dem Altertum! Selbst die Gründung der ersten Universitäten in Europa förderten kaum die Verbreitung mathematischer Kenntnisse. Zu den Hauptfächern an den Universitäten gehörten Medizin, Theologie, Recht und die Künste. Im Lehrfach "Künste" unterrichtete man neben Grammatik und Musik unter anderem auch Astronomie, Geometrie und Arithmetik. Die Studenten besaßen folglich nur eine unbedeutende mathematische Bildung. Selbst angehende Magister - Universitätslehrer - benötigten keine Mathematikprüfung, um die Lehrerlaubnis zu erhalten. Anstelle einer Prüfung genügte ein Eid, daß man Vorlesungen über Euklids "Elemente" gehört hätte. Als erster setzte sich der Magister Johannes von Gmunden für die Erteilung des Faches Mathematik an der Wiener Universität ein. Dies führte dazu, daß sich diese Universität zu einer bedeutenden Schule der Mathematik und Astronomie entwickelte.

Neben der eigenständigen gesellschaftlichen und wissenschaftlichen Entwicklung in Europa führten die aufblühenden Handelszentren zum regen Wissensaustausch. So verdanken wir die Kenntnis von der Papierherstellung den Chinesen; auch Seide,

Porzellan und Kompaß stammen aus China. Die Reisen der Europäer führten insbesondere neben China auch nach Indien und dem Orient. Einer dieser Reisenden, Leonardo Fibonacci* von Pisa (1170-1240), erwarb während seiner Expeditionen ein umfangreiches Mathematisches Wissen, welches er im Jahre 1202 in seinem Werk "Buch vom Abakus" niederschrieb. In den ersten Kapiteln erläutert Leonardo Fibonacci eine neue Zahlenschreibweise, die er während seiner Reisen nach Arabien kennenlernte. Bereits im 10. Jhrd. traten erstmals diese arabischen Ziffern in Europa auf, doch fanden sie kaum Beachtung. Dabei sollten sie vor allem Kaufleuten und Rechenmeistern gegenüber der bisherigen römischen Schreibweise Erleichterung beim Rechnen bringen. Betrachten wir kurz die römische Zahlenschreibweise:
Nur sieben verschiedene Zeichen genügten, um Zahlen bis zu einer Million darzustellen:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

An der Wahl spezieller Zeichen für 1, 10, 100 und 1 000, aber auch für 5, 50, 500 wird deutlich, daß sowohl die 5 als die 10 Grundzahlen bilden. Wie bereits im Griechischen, Babylonischen und Ägyptischen resultiert eine beliebige Zahl durch Aneinanderreihung der entsprechenden Symbole. Die 4, beispielsweise, würde wie folgt aussehen:

4 = IIII.

Hier wählt man jedoch eine Abkürzung:

4 = 5-1 = IV !

Diese Besonderheit, von einer größeren eine kleinere Zahl abziehen zu dürfen, trägt deshalb auch die Bezeichnung "subtraktive" Zahlenschreibweise. Der Vorteil der subtraktiven Darstellung besteht darin, Zahlenausdrücke in kurzer Form schreiben zu können Allerdings ergeben sich daraus auch Möglichkeiten, daß eine

* Bekannt sind die sogenannten Fibonacci-Zahlen, eine rekursive Zahlenfolge der Gestalt $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n = 2,3,\ldots)$ mit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Folgende Aufgabe hat die Fibonacci-Zahlen als Teillösungen: Ein Kaninchenpaar zeugt jeden Monat ein weiteres Paar. Jeweils zwei Monate später erzeugen auch die neuen Paare pro Monat ein weiteres Paar. Diese haben wiederum nach der gleichen Zeit monatlich ein Nachkommenpaar usw. Wieviel Paare werden innerhalb eines Jahres insgesamt erzeugt?

größere Zahl aus weniger Ziffern besteht als eine kleinere Zahl. Überzeugen wir uns:

3 = III
4 = IV
oder
88 = 50 + 3.10 + 5 + 3 = L X X X V I I I
492 = 490 + 2 = (500 - 10) + 2 = X D I I
oder
998 = 900 + 90 + 8 = (1000 - 100) + (100 - 10) + 5 + 3
= C M X C V I I I
999 = 1·000 - 1 = I M .

Zu beachten bleibt, daß höchstens e i n e kleinere Zahl vor die größere gesetzt werden darf.
48 = 50 - 2 = IIL
zu schreiben, ist falsch!

Ein waagerechter Strich über einem Zeichen bedeutet das Tausendfache, also
$\overline{X}$ = 10 · 1000 = 10 000
$\overline{M}$ = 1 000 000
$\overline{CX}$ = 1 000 · 110 = 110 000 .

Die Darstellung von Brüchen erfolgte natürlich ebenfalls mit römischen Zahlenzeichen. In einem Rechenbüchlein von 1514 findet sich dazu eine Beschreibung:

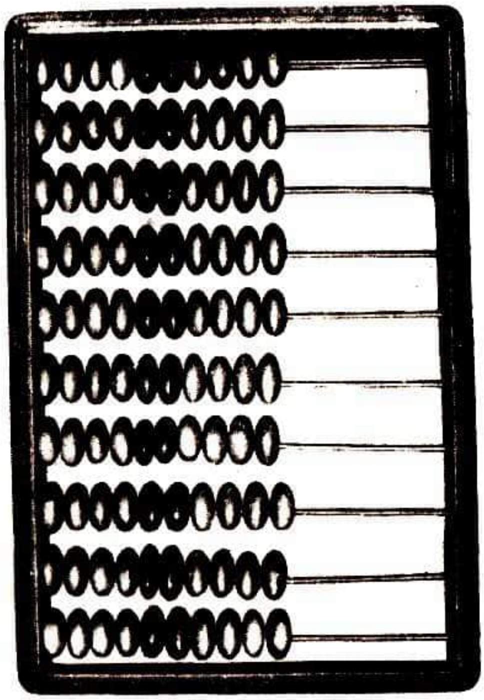
" $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{IIII}}$ Diesse figur ist von bedeüt ain fiertel von ainez ganzen / also mag man auch ain fünfftail / ayn sechstail / ain sybentail oder zwai sechstail und alle ander brüch beschreiben / Als $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{V}}$ / $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{VI}}$ / $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{VII}}$ / $\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{VI}}$. "

Der Nachteil der römischen Zahlenschreibweise besteht in der Unübersichtlichkeit der Ausdrücke und der Unmöglichkeit, schriftliche Rechnungen auszuführen. Wie sollte man auch zwei Zahlen miteinander multiplizieren?
Dennoch führten einige Kaufleute ihre Bücher bis ins 16. Jahrhundert nach der scheinbar äußerst umständlichen römischen Methode. Wie erledigten sie ihre umfangreichen Abrechnungen?

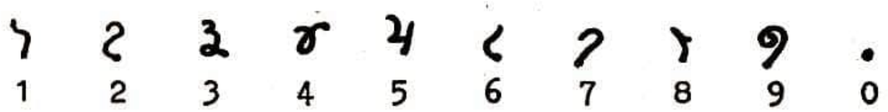
Abb. 2, welche eine mittelalterliche Rechenstube zeigt, gibt eine

Antwort. Auf dem Tisch liegt ein sogenannter Abakus, ein leicht zu handhabendes Recheninstrument. Der Abakus bestand aus einem rechteckigen Brett mit mehreren eingezeichneten parallelen Linien. Die Spalten bedeuteten, von links nach rechts gelesen, Tausender, Hunderter, Zehner und Einer. Eine bestimmte Anzahl Steinchen oder Kugeln auf einer der Linien entsprach der Anzahl der Tausender, Hunderter usw. Durch Verschieben der Steinchen ließen sich einfach Rechenoperationen mühelos und in kurzer Zeit ausführen.

Noch heute finden in einigen Ländern an den Abakus erinnernde Geräte Verwendung. In der Sowjetunion, zum Beispiel, heißt dieses Rechenhilfsmittel Stschoty. (Abb. 3)



Von ihrem ersten Auftreten in Spanien mußten 600 Jahre vergehen, bis die neue, die arabische Zahlenschreibweise, in Europa Anerkennung und Verbreitung fand. Vollkommen richtig ist die Bezeichnung der Zahlen eigentlich nicht, denn ihre Erfindung führt bis nach Indien. Hier verwendete man neun Ziffern und erstmalig ein besonderes Zeichen, die Null:



Handelsreisende brachten die Kenntnis von den indischen Zahlen nach Arabien, wo sie bereits einige Veränderungen erfuhren. In der westarabischen Darstellung ließ man einfach die Null verschwinden:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Demgegenüber erhielt die Null in der ostarabischen Form einen kleinen Punkt und hieß "sifr":

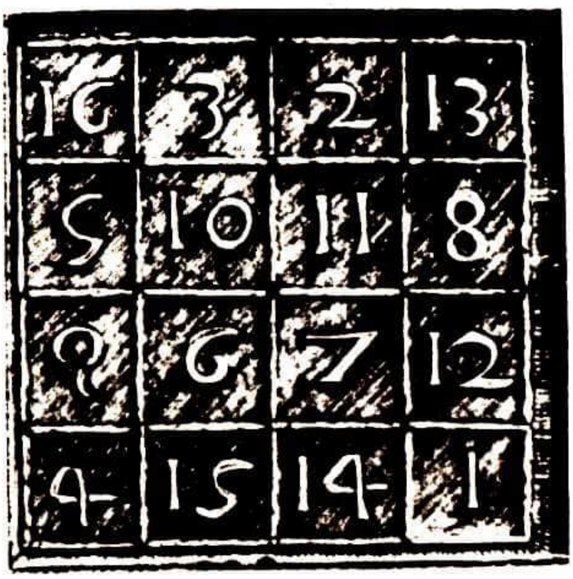
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Unser heutiges Wort "Ziffer" erinnert noch an "sifr".

Über Arabien gelangten die Ziffern schließlich nach Europa. Im 15. Jahrhundert schrieb man

Albrecht Dürer schrieb die arabischen Ziffern auf die folgende Art:

Die Ähnlichkeit mit unserer heutigen Schreibweise ist bereits unverkennbar. Auf seinem Gemälde "Melancholie" sind diese Ziffern in einem magischen Quadrat dargestellt (Abb. 4).

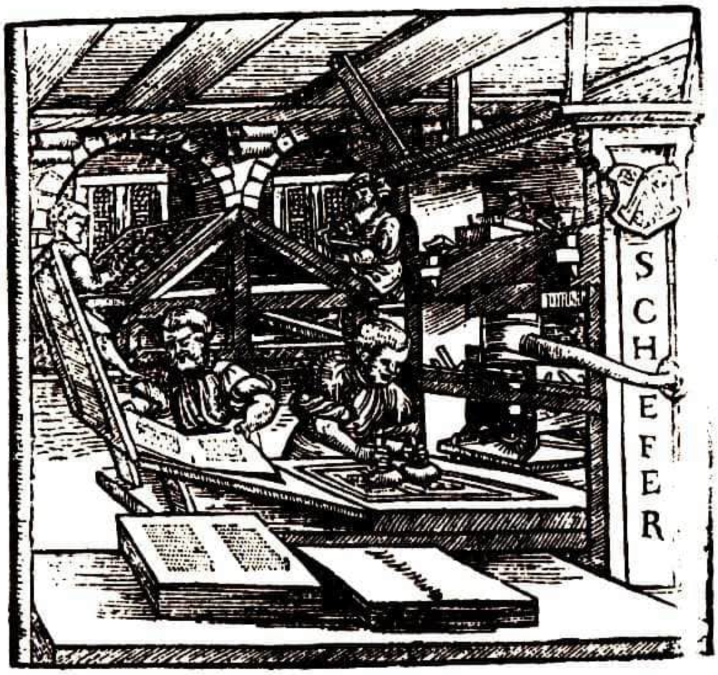


Übrigens geben die beiden in der untersten Zeile stehenden Zahlen an, in welchem Jahr Dürer das Bild anfertigte: 1514.

Nach dem Erscheinen des Werkes "Buch vom Abakus" tauchten in Kaufmannsbüchern häufiger arabische Ziffern auf. Doch mangelte es auch nicht an Gegnern. So entbrannte zwischen den Anhängern der neuen Schreibweise, den sogenannten Algorithmikern, und den Anhängern des Abakusrechnens, den Abakisten, ein heftiger Streit. Vor allem aber fehlte das Verständnis für die seltsame Null. Man brachte dieser "sifr" größtes Mißtrauen entgegen. Kam man bisher ohne Null aus, weshalb sollte es mit einem Mal eine Zahl geben, die nicht einmal etwas ausdrückte - ein besonderes Zeichen für "Nichts" schien Unsinn zu sein. Andererseits fiel der unliebsamen Null eine besondere Bedeutung zu. An eine beliebige Zahl angehängt, verzehnfachte, verhundertfachte usw. sie deren Wert! Auch hing die Größe einer Zahl von der Anordnung jenes Zeichens ab. 378 ist zehnmal kleiner als 3 780; diese Zahl wiederum ist größer als 3078 oder 3 708, aber kleiner als 37 008!
Schließlich erging im Jahre 1299 in Florenz der Erlaß, daß kein Kaufmann mehr die arabischen Ziffern verwenden dürfe. Die offizielle Begründung: Angeblich könnten Betrüger mühelos Abrechnungen fälschen, indem sie mit einem kleinen Strich die 0 in eine 6 oder 9 verwandeln würden. Die Obrigkeit empfahl sogar, die Zahlen künftig nur noch in Worten auszudrücken!

Dem endgültigen Siegeszug der indisch-arabischen Zahlenschreibweise verhalf eine Erfindung des Mainzer Goldschmiedes Johannes Gensfleisch zum Gutenberg um 1430, die Erfindung des Buchdruckes. Mußten bisher handschriftliche Kopien vorhandener Bücher angefertigt werden, um sie im Land verbreiten zu können, stand nun ein wertvolles Hilfsmittel zur Verfügung - die Druckmaschine (Abb. 5).

Schriften erschienen in großer Anzahl, und bald nach Gutenbergs Erfindung tauchten die ersten gedruckten Mathematikbücher auf - mit Zahlen in der indisch-arabischen Schreibweise.



Dipl.-Phys. Roland Fiedler
Sektion Physik der FSU Jena

Literatur

1. Krysicki, W.: Zählen und Rechnen einst und jetzt. Leipzig 1968
2. Struik, D. J.: Abriß der Geschichte der Mathematik. Berlin 1972
3. Wußing, H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathem. Berlin 1979
4. Fiedler, R.: Streifzüge durch die Mathematik. Berlin 1985

Abbildungen

Preisaufgaben

R 13 1

Man löse folgendes Gleichungssystem

(1) $\frac{xy}{x+y} = a$ (2) $\frac{xz}{x+z} = b$ (3) $\frac{yz}{y+z} = c$

R 14 2

Beweise, daß

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

R 15 1

Man konstruiere ein Dreieck aus einem Winkel und zwei Höhen, die auf die anliegenden Seiten des Winkels gefällt sind.

R 16 2

Man drücke den Winkel α mit Hilfe der Winkel β und γ aus

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$$

R 17 1

Man beweise die Gleichheit

$$\operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2}) - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

R 18 2

Пусть а,в,с,д - такие целые числа,которые взаимно просты с числом м = ад - вс .Доказать,что при тех целых значениях (х,у),при которых ах + ву делится на м , сх + ду также делится на м .

Einsendeschluß: 1. 6. 1985

241231

Man ermittle die ersten sechs Glieder $a_1, a_2, \ldots, a_6$ von allen denjenigen Folgen (a_n) reeller Zahlen, die die nachstehenden Eigenschaften (1) bis (5) haben:

(1) Es gilt $a_1 = -\frac{5}{2}$.

(2) Es gilt $a_5 = 3$.

(3) a_1, a_2, a_3, a_4 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge.

(4) a_4, a_5, a_6 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer geometrischen Zahlenfolge.

(5) Die Summe der ersten sechs Glieder der Folge (a_n) beträgt $\frac{13}{2}$.

241232

Man beweise: Wenn die Seitenlängen eines Dreiecks ABC nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann gilt:

a) ABC ist ein spitzwinkliges Dreieck.

b) Die Längen der Höhen des Dreiecks ABC sind nicht kleiner als $\sqrt{2}$.

Von den nachstehenden Aufgaben 241233A und 241233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

241233A

Man ermittle alle Funktionen f mit den folgenden Eigenschaften:

(1) f ist für alle rationalen Zahlen definiert.

(2) Es gilt $f(1) = 1$.

(3) Für alle rationalen Zahlen x und y gilt

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y).$$

241233B

Man ermittle zu jeder geraden natürlichen Zahl $n \geq 2$ alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$x(x+1)(x+2) \ldots (x+n-1) = (x+n)(x+n+1)(x+n+2) \ldots (x+2n-1).$$

241234

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen z mit $1 \leq z \leq 5$, die die Bedingung erfüllen, daß die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x + z$ und die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$ mindestens einen Schnittpunkt mit ganzzahliger Abszisse haben.
Zu jeder Zahl z, die diese Bedingung erfüllt, gebe man - für die betreffende Gerade und die Parabel - die Koordinaten aller Schnittpunkte mit ganzzahliger Abszisse an.

241235

Man ermittle alle diejenigen Tripel (a,b,c) positiver natürlicher Zahlen, für die $a^b + b^c = abc$ gilt.

241236

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die für

$$99^n + 101^n > \frac{51}{25} \cdot 100^n$$

gelten.

Der schöpferische Irrtum
Irrtümer haben ihren Wert,
jedoch nur hier und da.
Nicht jeder, der nach Indien fährt,
entdeckt Amerika.

Erich Kästner

Lösungen

Q 13

Setzen $\log_2 x = a$. Dann folgt

$\frac{1}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{7}{6} = 0$, bzw. $a^2 - \frac{7}{3}a - 2 = 0$

Diese quadr. Gleichung hat die Lösungen $a_1 = 3$; $a_2 = -\frac{2}{3}$

$x_1 = 2^3 = 8$ und $x_2 = 2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ sind die Lösungen.

Die Probe bestätigt deren Richtigkeit.

Q 14

Es gilt $\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$ und $\cos x = \dfrac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$

Wir setzen $\tan\frac{x}{2} = a$.

Dann gilt $\dfrac{1 + 2a - a^2}{1 + a^2} = \frac{1}{5}$, bzw. $\frac{6}{5}a^2 - 2a - \frac{4}{5} = 0$

Diese quadr. Gleichung hat die Lösungen $a_1 = 2$ und $a_2 = -\frac{1}{3}$.

Tatsächlich sind beide Lösungen der Aufgabe; wie die Probe bestätigt.

Q 15

$5 \cdot 5^{x^3} - \dfrac{5}{5^{x^3}} = 24$ Setzen $5^{x^3} = a$

Dann gilt $5a - \frac{5}{a} = 24$ bzw. $5a^2 - 24a - 5 = 0$

Diese quadr. Gleichung hat die Lösungen $a_1 = 5$ und $a_2 = -\frac{1}{5}$. Hierbei entfällt die 2. Lösung, da

5^{x^3} stets positiv ist. a_1 liefert $5^{x^3} = 5$ also $x^3 = 1$

Damit ist $x = 1$ einzige (reelle) Lösung dieser Gleichung, wie die Probe bestätigt.

Q 16

Wir bezeichnen mit x die gesuchte Länge und mit α den kleineren der beiden Winkel. Dann gilt:

$$\frac{\sqrt{7}}{x} = \sin\alpha \qquad \text{und} \qquad \frac{2\sqrt{7}}{x} = \sin(60^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{7}}{\sin\alpha} \qquad \text{und} \qquad \frac{5}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\sin^2\alpha = \frac{3}{28}$, also $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ (nur positive Lösung interessiert).

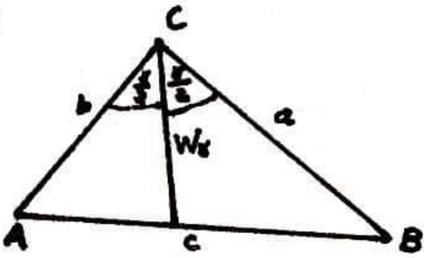
Daraus folgt $x = \frac{2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{14}{3}\sqrt{3}$ LE.

Q 17

Wir bezeichnen die Winkelhalbierende mit w_γ, die Dreieckseiten mit a, b und c und den Winkel, der durch w_γ halbiert wird, wie üblich mit γ (siehe Skizze)

Laut Voraussetzung gilt dann

$$w_\gamma = \frac{ab}{a+b}$$



Das Dreieck wird durch w_γ in zwei Teildreiecke zerlegt. Daher gilt für die Flächeninhalte

$$A_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2}\sin\gamma = \frac{aw_\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{bw_\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2} =$$

$$= \frac{a^2b}{a+b}\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2} + \frac{ab^2}{a+b}\;\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2}$$

$$= \frac{ab}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

Für γ muß also gelten $\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$,

also wegen $0 < \frac{\gamma}{2} < 180^\circ$: $2\cos\frac{\gamma}{2} = 1$, also $\frac{\gamma}{2} = 60^\circ$

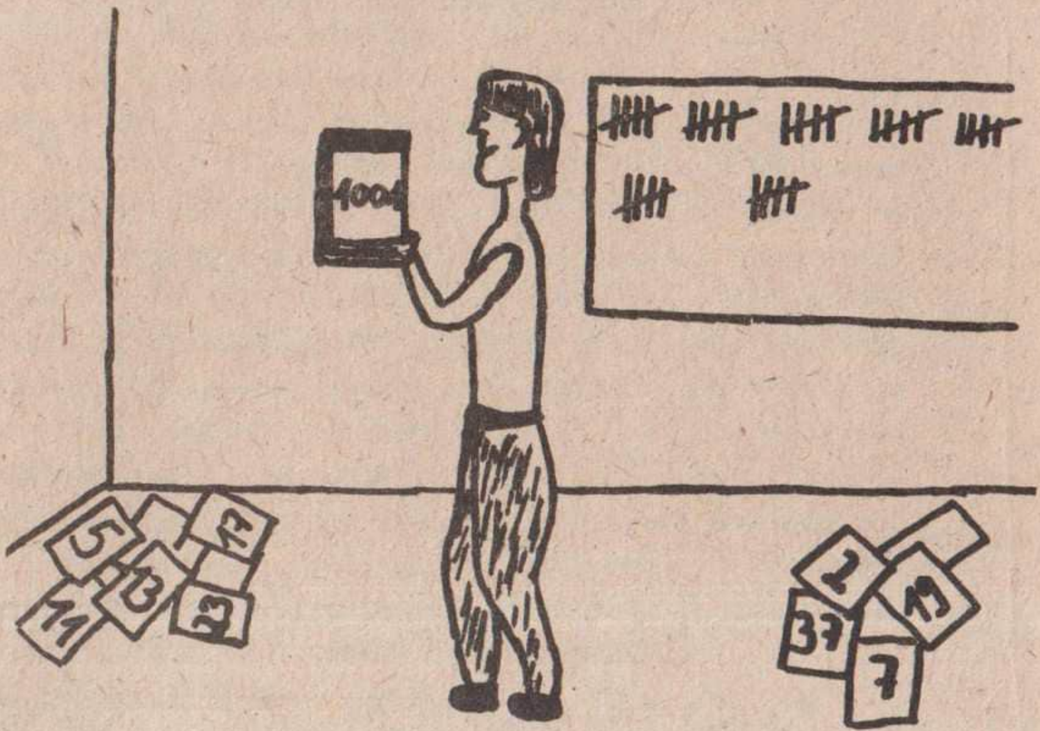
Q.E.D.

Q 18 Wir bezeichnen die parallelen Seiten des Trapezes mit a und c, die Höhe im Trapez mit h und die Höhe des Prisma's mit H. Dann gilt für das Volumen des Prismas:

$$V = A_{TR} \cdot H = \frac{a+c}{2} \cdot h \cdot H = \frac{1}{2}(a \cdot H + c \cdot H) \cdot h \quad , \qquad \text{Q.E.D.}$$

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimmler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kutowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M. Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 7. 2. 85

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	19 (1985) 3	S. 33–48



4

85

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

19. Jahrgang

ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Zum Nutzen von Schnittebenen

Viele räumliche Gebilde lassen sich durch Ebenenschnitte anschaulich erfassen. Bei besonderen Flächen wie z.B. dem Ellipsoid - unsere Erde kann man für bestimmte Näherungsbetrachtungen als Rotationsellipsoid ansehen - oder das Hyperboloid, ja selbst die Kugel werden durch Ebenenschnitte und die dabei erfaßbaren und bekannten Schnittkurven handhabbarer.
Im ersten Teil des Artikels werden wir dazu verschiedene Möglichkeiten zur Darstellung von Ebenen kurz skizzieren um dann im zweiten Teil auf ebene Schnitte mit Flächen zweiter Ordnung eingehen zu können. Im Lehrbuch für Mathematik (Klasse 12)[1] werden mit Hilfe der Analytischen Geometrie auch Geraden im Raum dargestellt.
g_1 mit $P_0, P_1 \in g_1$ und g_2 mit $R_0, R_1 \in g_2$ seien zwei Geraden im Raum und die Koordinaten der Punkte P_0, P_1, R_0, R_1 seien paarweise verschieden.
Die Gerade g_1 läßt sich nun bezüglich des Koordinatensystems $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$ darstellen, durch

$$\vec{x} = \vec{p_0} + t(\vec{p_1} - \vec{p_0}) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad (1)$$

die Gerade g_2 durch

$$\vec{x} = \vec{r_0} + s(\vec{r_1} - \vec{r_0}) \quad (s \in \mathbb{R}) \qquad (2).$$

Zur Vereinfachung benennen wir $(\vec{p_1} - \vec{p_0})$ mit $\vec{a_1}$ und $(\vec{r_1} - \vec{r_0})$ mit a_2 als Richtungsvektoren der Geraden g_1 bzw. g_2. Da diese Geraden leicht für uns zugänglich sind, versuchen wir von g_1, g_2 ausgehend Ebenen durch Gleichungen zu beschreiben. Zunächst nehmen wir den einfachen Fall an, daß sich die beiden Geraden in einem Punkt $S(x_s;\ y_s; z_s)$ schneiden. Dieser Schnittpunkt wäre dann über seine Koordinaten bestimmbar, indem man für $\vec{x}$ in beiden Gleichungen die Koordinaten $(x_s;\ y_s;\ z_s)$ als Koeffizienten einsetzt, beide Gleichungen als Gleichungssystem mit Hilfe entsprechender Koordinaten darstellt und das am Ende entstehende Gleichungssystem löst.

---

[1] Die Schreibweise wird der im Buch entsprechend gewählt.

Vereinfacht, nur mit entsprechenden Koordinaten dargestellt, handelt es sich um die Bestimmung von s und t aus:

$$p_{0x} + t\, a_{1x} = r_{0x} + s\, a_{2x}$$

$$p_{0y} + t\, a_{1y} = r_{0y} + s\, a_{2y}$$

$$p_{0z} + t\, a_{1z} = r_{0z} + s\, a_{2z}$$

dabei wurde $\vec{a_1} = a_{1x}\vec{i} + a_{1y}\vec{j} + a_{1z}\vec{k}$; $P_0(p_{0x};p_{0y};p_{0z})$ für g_2 entsprechend $\vec{a_2} = a_{2x}\vec{i} + a_{2y}\vec{j} + a_{2z}\vec{k}$; $R_0(r_{0x};r_{0y};r_{0z})$ verwendet.
Mit den Punkten S; R_0;P_0 haben wir drei Punkte, die ein Dreieck festlegen und damit eine Ebene bestimmen. Wir nehmen zunächst erst einmal an, daß S, R_0 und P_0 nicht kollinear sind.
Sollte S mit R_0 oder mit P_0 zusammenfallen, müßten durch Umbenennung P_1 oder R_1 einbezogen werden, sodaß wir o.B.d.A. vom Dreieck S P_0 R_0 sprechen können.
Zunächst sollte der Leser versuchen einen Punkt X, z.B. den Halbierungspunkt der Strecke $\overline{P_0R_0}$ von S ausgehend mit $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ zu beschreiben. Wie dieser Punkt X liegt jeder andere Punkt der Ebene, die von g_1 und g_2 festgelegt ist, auch in dieser Ebene und wir erhalten die Ebenengleichung

$\vec{X} = \vec{S} + l\vec{a_1} + m\vec{a_2}$ $(l,m \in \mathbb{R})$, eine

Parameterform einer Ebenengleichung. Durch $P_1 = R_1$ kann man das Aufstellen der Ebenengleichung sofort aus drei gegebenen Punkten beginnen, etwa indem man $P_1 = R_1 = S$ verwendet, weil der vierte Punkt in den Überlegungen nicht unbedingt benötigt wurde und damit der Umweg über die Schnittpunktberechnung vermieden wird, indem die Geraden durch P_1 P_0 und P_1R_0 betrachtet werden (vgl. Bild 1).
In den Überlegungen, die soeben angestellt wurden, waren zwei zusätzliche Voraussetzungen enthalten, einmal, daß $g_1 \cap g_2 = \{S\}$ gelten soll und sich keine "Entartungen" für das Dreieck ergeben. Für die Koordinaten der Punkte hatten wir nur gefordert, daß sie paarweise verschieden sein sollen, es wäre damit noch denkbar, daß beide Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ linear abhängig sind. Liegt obendrein ein gemeinsamer Punkt S vor, dann fällt g_1 mit g_2 zusammen, in diesem Fall gibt es mehr als eine Ebene. Sind die beiden Vektoren linear abhängig und die Geraden haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt S, so stellt sich die Frage, ob auch nur eine Ebene existiert, die beide Geraden enthält? Ohne Schwierigkeiten können wir von den

vier Punkten wieder drei geeignete auswählen, etwa $P_0;R_0;R_1$ und mit $\overrightarrow{P_0R_0}$ und $\overrightarrow{R_0R_1}$ die obigen Überlegungen anstellen. Da $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ linear abhängig sind, ergibt sich für $\triangle\ P_0P_1R_0$ usw. bis auf Faktoren die gleiche Darstellung. Die Dreiecke liegen dann in der ermittelten Ebene (überprüfen durch Einsetzen).
Sind nun die beiden Geraden windschief zueinander, d.h., sie haben weder einen gemeinsamen Schnittpunkt noch sind die Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ linearabhängig, so stellt sich wieder die Frage nach einer Ebene, in der sie beide ganz enthalten sind.
Bei unseren bisherigen heuristischen Überlegungen kamen wir auf die Lösung entsprechender Gleichungssysteme in denen Parameter l und m und Koordinaten von Punkten erfaßt waren. Beim gemeinsamen Punkt S vereinfachte sich die Betrachtung für beide Geraden durch die Möglichkeit des Gleichsetzens, bei den linear abhängigen Vektoren war es möglich, den einen durch den anderen auszudrücken und ebenfalls ein lösbares System herzustellen. Haben wir nun weder die einen noch die anderen Bedingungen vorliegen, läßt sich ein System wie die bisherigen nicht erzwingen. Es ist günstig, sich jeden dieser Fälle zeichnerisch und rechnerisch zu erschließen, weil der letzte Fall, daß es keine Ebene gibt, dann erst voll deutlich wird.
Mit den Fällen $g_1 \cap g_2 = \{S\}$, $g_1 \nparallel g_2$ und $g_1 \parallel g_2$ haben wir gleichzeitig auch die Möglichkeit andere Formen zur Darstellung von Ebenengleichungen zu erschließen. So leicht sich die Parameterform einer Ebenengleichung auch gewinnen läßt, bei der Veranschaulichung von Ebenen im System $(0;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\ )$ sind parameterfreie Gleichungen mitunter günstiger.
Aus der Gleichung

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}_1 + s\,\vec{a}_2 \qquad (t,s \in \mathbb{R}) \qquad (3)$$

kann man über

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{1z} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ a_{2z} \end{pmatrix}$$

durch Eliminieren von s und t und geschicktes Zusammenfassen im folgenden Gleichungssystem

$$x - x_0 = ta_{1x} + sa_{2x}$$
$$y - y_0 = ta_{1y} + sa_{2y}$$
$$z - z_0 = ta_{1z} + sa_{2z}$$

die Gleichung (4) erhalten

$$ax + by + cz = d \qquad (a,b,c,d \in \mathbb{R}). \qquad (4)$$

Es handelt sich um eine parameterfreie allgemeine Darstellung einer Ebenengleichung.
Das Lösen des Gleichungssystems sei dem Leser überlassen, weil man sich dabei gleichzeitig die Bedeutung der Koeffizienten a,b,c,d verdeutlichen kann.
Durch eine systematische Fallunterscheidung bezüglich der Koeffizienten a,b,c,d bekommt man schon einen guten Überblick für Sonderfälle und Grenzfälle der Lage der Ebene. Um Verwechslungen zu vermeiden soll erwähnt werden, daß $ax + by - d = 0$ eine Ebene sein kann, die zur z-Achse parallel verläuft $(a,b,d \neq 0)$ und $z = const$ auch eine zur xy-Ebene parallele Ebene.
Ein schneller Einblick in die Lage einer Ebene läßt sich anhand von Spurgeraden (Schnitt der Ebene mit den Koordinatenebenen) gewinnen.
Im allgemeinen Fall der Darstellung einer Ebene (nicht durch den Ursprung, weder zu Achsen noch zu Koordinatenebenen parallel) wird die Ebene von den Koordinatenachsen in drei Punkten durchstoßen.
Diese Punkte seinen $P(x_p;0;0)$; $Q(0;y_q;0)$ und $R(0;0;z_r)$. Mit den Durchstoßpunkten P und Q erhält man die Spurgerade in der xy-Ebene, mit P und R die in der xz-Ebene und letztlich mit Q und R diejenige in der yz-Ebene. Mit diesen drei Punkten kann man nach dem oben geschilderten Verfahren aus $\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{PQ}$ (oder anderen) von P aus die Gleichung vom Typ (3) aufstellen über die Lösung des entsprechenden Gleichungssystems eine parameterfreie Form herstellen, die sich auf die Gestalt

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1 \qquad (5)$$

bringen läßt.
Die Rechnung verläuft analog zu der, die auf (4) führte.
Es ist die Achsenabschnittsgleichung und sie enthält mit $x_p = p$, $y_q = q$ und $z_r = r$ Koordinaten der Punkte P, Q, R.
Mit diesen Punkten und den drei Spurgeraden läßt sich z.B. in Cavalierspersperspektive jeder Punkt der Ebene sehr gut veranschaulichen.

Obendrein hat man auch mit dieser Ebenendarstellung einen schönen Ausgangspunkt für die folgenden heuristischen Überlegungen. Läßt man z.B. die Punkte P und Q fest und den Punkt R für $r > 0$ gegen ∞ "wandern" erhält man eine Ebene, die zur z-Achse parallel verläuft, in der Gleichung würde der Ausdruck $\frac{z}{r}$ zu Null. Bleibt dagegen R fest und für $p, q > 0$ "wandern" P und Q gegen unendlich, liegt mit $z = r$ eine zur xy-Ebene parallele Ebene vor. Wir können uns so Vorstellungen von den jeweiligen Ebenen und ihren parameterfreien Gleichungen verschaffen, die allerdings durch exakte Darstellung und Rechnung abgesichert werden müssen, wobei der Weg über die Parameterdarstellung nicht ungünstig ist, weil er mit geringsten zusätzlichen Bedingungen beschriftet werden kann.
Diese Rechnung wird auch nützlich sein, um zu ergründen, was geschieht, wenn man über den Ursprung "hinwegwandert". Als letzte ebenfalls sehr zweckmäßige parameterfreie Ebenendarstellung wird von uns noch die Hessesche Normalform angegeben, die sich aus der Form (4) ableiten läßt

$$\frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0 .$$

Zur Herleitung verweisen wir auf Brehmer, S. ; H. Belkner: Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra Berlin 1968 S. 247.
Im zweiten Teil des Aufsatzes werden wir Ebenengleichungen vielfältig nutzen.

Fortsetzung folgt!

Dr. M. Hörschelmann, FSU
Bereich Mathematik-Methodik

Die Verteilung von Primzahlen

Der Unterschied zwischen den zusammengesetzten Zahlen und den sogenannten Primzahlen war bereits den Pythagoreern (5. bis 4. Jahrhundert v.u.Z.) bekannt. Euklid (ca. 300 v.u.Z.), der in den "Elementen" das damals vorhandene mathematische Wissen zusammenfaßte, beantwortete die Frage, ob es eine größte Primzahl gibt. Und Eratosthenes von Kyrene (um 200 v.u.Z.) gab ein Verfahren an, mit dem sämtliche Primzahlen zwischen 1 und einer vorgegebenen Zahl n ermittelt werden können. Schon eine oberflächliche Betrachtung einer Primzahltabelle ergibt, daß die Primzahlen ziemlich unregelmäßig aufeinanderfolgen. Man könnte vielleicht eine gewisse Periodizität etwa nach der Art der Atomgewichte der chemischen Elemente im Periodensystem vermuten. Daß die Primzahlen jedoch nicht periodisch wiederkehren, geht schon daraus hervor, daß die zusammengesetzten Zahlen im Sieb des Eratosthenes verschieden oft gestrichen werden müssen, so daß die Periodizität der übrigbleibenden Primzahlen immer wieder von neuem gestört wird.

Um einen Überblick über die Verteilung der Primzahlen bis n=1000 zu gewinnen, betrachten wir die folgende Tabelle:

Intervall	Anzahl der Primzahlen
1 - 250	53
251 - 500	42
501 - 750	37
751 - 1000	36
1001 - 1250	36
1251 - 1500	35
1 - 50	15
501 - 550	6
1001 - 1050	8

Es ist zu vermuten, daß die Anzahl der Primzahlen bei konstanter Intervallänge abnimmt. Diese Abnahme ist jedoch sehr unregelmäßig. Im 18. Jahrhunder warfen die Mathematiker nun folgende Frage auf: Kann man mit Hilfe eines möglichst einfachen Ausdrucks die Anzahl der Primzahlen bis zu einer gewissen Zahl x berechnen?
Es war abzusehen, daß dies nur eine Näherungsformel sein würde, wobei aber der Grad ihrer Genauigkeit wichtig ist.
Wir werden versuchen, im folgenden einen Einblick in die Ergebnisse und verwendeten Methoden zu geben.

1. Die Unendlichkeit der Primzahlen

Satz 1. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Beweis: (nach Euklid) Wir nehmen an, daß es eine größte Primzahl p gäbe, und bilden das Produkt aller Primzahlen $\leq p$ (und nach Annahme damit aller Primzahlen überhaupt): $q=2\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot p$. Nun ist $q+1 = (2\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot p)+1$ durch keine diese Primzahlen teilbar, aber $q+1$ ist größer als 1. Da jede natürliche Zahl > 1 mindestens einen Primteiler besitzt, folgt also: Entweder ist $q+1$ selbst eine Primzahl, oder $q+1$ ist durch Primzahlen größer als p teilbar. Jedenfalls gibt es damit eine Primzahl, die größer als p ist, was im Widerspruch zur Annahme steht.

Wir haben diesen elementaren Beweis hier noch einmal angeführt, weil sich mit dieser Idee bereits eine einfache Abschätzung der n-ten Primzahl p_n gewinnen läßt. Bezeichnet man nämlich die Primzahlen mit $p_1=2$, $p_2=3$ usw., dann gilt

$$\underline{\underline{p_n \leq 2^{2^{n-1}}}}$$

Diese Abschätzung ist für $n=1$ offensichtlich richtig. Weiter folgt nach dem Euklidischen Beweisverfahren durch Induktion von $n-1$ auf n

$$\begin{aligned} p_n &\leq p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} + 1 \\ &\leq 2^{2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-2}} + 1 \quad \text{(Verwendung der Ind.-Voraussetzung)} \\ &\leq 2^{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Wir führen nun die Funktion ein, mit der allgemein die Verteilung der Primzahlen beschrieben wird.

Definition 1. Die Funktion $\pi : (0,\infty)\ N$ mit $\pi(x) = \sum_{p=x} 1$ gibt die Anzahl aller Primzahlen p mit $p \leq x$ an.

Die auf den ersten Blick vielleicht ungewohnte Summenschreibweise bedeutet nichts weiter, als daß für jede Primzahl p eine 1 addiert wird; nichts anderes geschieht letztlich beim Zählen. Derartige Angaben des laufenden Summationsindexes benutzen wir noch öfters.

Mit dem Ergebnis $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$ läßt sich bereits eine Abschätzung von $\pi(x)$ nach unten angeben. Für jedes x 2 gibt es eine natürliche Zahl n mit $2^{2^n} \leq x < 2^{2^{n+1}}$.

Daraus folgt $\pi(x) \geq \pi(2^{2^n}) \geq \pi(p_{n+1}) = n+1 > \frac{1}{\ln 2}(\ln\ln x - \ln\ln 2)$, also $\pi(x) > \frac{\ln\ln x}{\ln 2}$

Leonhard Euler gelang der Beweis einer Aussage, die sich mit diesen Mitteln bereits nicht mehr gewinnen läßt: Die unendliche Summe $\sum \frac{1}{p}$ (wobei p alle Primzahlen durchläuft) ist divergent. Daraus folgt natürlich zunächst auch, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Aber da zum Beispiel die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, läßt sich schlußfolgern, daß es gewissermaßen "mehr" Primzahlen als Quadratzahlen gibt, und dies ist schon erstaunlich.
Wir geben hier noch eine analoge Aussage über ein unendliches Produkt an; der Beweis dafür stammt ebenfalls von Euler.

Satz 2. Das unendliche Produkt $\prod (1-\frac{1}{p})^{-1}$ und die unendliche Summe $\sum \frac{1}{p}$, jeweils erstreckt über alle Primzahlen, sind divergent. Genauer gilt für $x \geq 2$:

$$P(x) = \prod_{p \leq x} (1-\frac{1}{p})^{-1} > \ln x \qquad (1)$$

$$S(x) = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} > \ln\ln x - \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Beweis: Zunächst beweisen wir, daß das Produkt divergiert, und zeigen dann, daß daraus die Divergenz der Summe folgt. Ist u eine reelle Zahl, $0 < u < 1$, und m eine positive ganze Zahl, so gilt

$$\frac{1}{1-u} > \frac{1-u^{m+1}}{1-u} = 1 + u + \ldots + u^m. \text{ (geometrische Reihe!)}$$

Wir setzen speziell $u = \frac{1}{p}$ (p eine Primzahl) und betrachten für jedes $p \leq x$ die entsprechende Ungleichung. Diese Ungleichungen dürfen miteinander multipliziert werden, damit ergibt sich

$$P(x) > \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^m}\right)$$

Zunächst war $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ beliebig. Wir können also auch m so wählen, daß $2^m \geq x$. Es gilt dann:

$$\prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^m}\right) > \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n}$$

mit $[x]$ = ganzzahliger Anteil von x, denn die $p \leq x$ sind die einzig möglichen Primfaktoren der natürlichen Zahlen n mit $1 < n \leq [x]$, und die Ungleichung $2^m \geq x$ sichert, daß tatsächlich jeder Summand rechts in der Entwicklung des Produktes links vorkommt. Damit haben wir bereits das Produkt mit der divergenten harmonischen Reihe verglichen, also die Divergenz des Produkts gezeigt. Die Ungleichung (1) ergibt sich durch

$$P(x) > \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} > \int_1^{[x]+1} \frac{1}{t}\, dt > \ln x.$$

Um die Divergenz der Summe nachzuweisen, benötigen wir die Reihenentwicklung

$$\ln\left(\frac{1}{1-u}\right) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots \qquad (-1 \leq u < 1)$$

welche hier ohne Beweis gegeben wird. Für $u > 0$ folgt die Ungleichung

$$\ln\left(\frac{1}{1-u}\right) - u < \frac{1}{2}\left(u^2 + u^3 + u^4 + \ldots\right).$$

Die geometrische Reihe rechts konvergiert für $|u| < 1$, und man erhält

$$\ln\left(\frac{1}{1-u}\right) - u < \frac{u^2}{2(1-u)} \qquad (0 < u < 1).$$

Wir setzen wieder $u = \frac{1}{p}$ für alle $p \leq x$ und addieren diesmal die entstehenden Ungleichungen:

$$\ln P(x) - S(x) < \frac{1}{2} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p(p-1)} < \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \frac{1}{2}$$

Unter Verwendung von (1) gilt damit

$$S(x) > \ln P(x) - \frac{1}{2} > \ln \ln x - \frac{1}{2} ,$$

also die Behauptung (2).

Die Ungleichung (1) benutzen wir noch, um eine Verbesserung der Abschätzung von $\pi(x)$ nach unten abzuleiten:

$$\ln x < \prod_{p \leq x} (1 - \frac{1}{p})^{-1} = \prod_{n=1}^{\pi(x)} (1 - \frac{1}{n+1})^{-1} = \pi(x) + 1,$$

also $\underline{\underline{\pi(x) > \ln x - 1.}}$

Nun ist trivialerweise $n = \pi(p_n)$, und aus $\pi(p_n) > \ln p_n - 1$ ergibt sich damit für die n-te Primzahl: $p_n < e^{n+1}$, ebenfalls eine Verbesserung des mit der Beweisidee von Satz 1 gewonnenen Resultats.

2. Zahlentheoretische Funktionen

Die bisher gewonnenen Abschätzungen von $\pi(x)$ sind äußerst ungenau. Da alle schärferen Ergebnisse auf zahlentheoretischen Funktionen beruhen, sollen im folgenden Abschnitt einige Eigesnchaften solcher Funktionen erläutert werden, dies zunächst ohne unmittelbaren Bezug auf das Primzahlproblem. Wir beweisen auch einige zusätzliche Aussagen und stellen Zusammenhänge dar, welche in den Abschnitten 3 und 4 (wieder zu $\pi(x)$) keine Rolle spielen. Denn dieser Artikel soll nicht nur eine Einführung in das Primzahlproblem sein, sondern gleichzeitig in grundlegende Ideen der sogenannten analytischen Zahlentheorie überhaupt. Eine weiterführende, wenn auch anspruchsvolle Darstellung ist zum Beispiel E. Krätzel, Zahlentheorie, Band 19 der Studienbücherei MfL, Berlin 1981.

<u>Definition 2.</u> Eine zahlentheoretische Funktion ist eine auf der Menge der positiven ganzen Zahlen erklärte, reell- oder komplex-

wertige Funktion.
Einfache Beispiele für zahlentheoretische Funktionen sind damit alle reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n \geq k}$ mit $k > 0$. Historisch betrachtet wurde dieser Begriff ursprünglich nur auf einige "klassische" Funktionen wie die Eulersche Funktion angewandt; die sehr allgemeine Definition setzte sich erst mit der weiteren Entwicklung dieser mathematischen Disziplin durch.

Definition 3. Eine (nicht identisch verschwindende) zahlentheoretische Funktion $f(n)$ heißt m u l t i p l i k a t i v, wenn $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ für teilerfremde m und n gilt. Die Funktion heißt total multiplikativ, wenn $f(mn) = f(m)\, f(n)$ ohne jede Einschränkung gilt.

Aus der Definition folgt sofort, daß für eine multiplikative Funktion stets $f(1) = 1$ ist, denn es existiert mindestens ein m mit $f(m) = 0$ (nicht identisch verschwindend), und damit ist $f(m) = f(m \cdot 1) = f(m) \cdot f(1)$.

Es werden nun einige für die Untersuchung der Primzahlverteilung wichtige Funktionen vorgestellt. Dabei sollen zwei Wege beschritten werden:

(1) Die Eigenschaften der Funktion werden unmittelbar aus den Definitionen und den Gesetzen für das Rechnen mit natürlichen Zahlen gewonnen.

(2) In der Menge aller zahlentheoretischen Funktionen wird eine Verknüpfung eingeführt, und die Funktionen werden mittels (der durch diese Operation definierten) Funktionalgleichungen charakterisiert.

Der zweite Weg ist zwar wesentlich abstrakter, ermöglicht aber ein tieferes Verständnis innerer Zusammenhänge.

a) Die Funktion $d(n)$

Definition 4. $d(n)$ ist gleich der Anzahl der positiven Teiler der positivere ganzen Zahl n.

Zum Beispiel sind also $d(1) = 1$, $d(2) = 2$, $d(10) = 4$. Man kann $d(n)$ auch geometrisch interpretieren: die Anzahl der positiven Teiler von n ist gleich der Anzahl der Lösungen von $xy = n$ in positiven ganzen Zahlen x, y. Somit ist $d(n)$ gleich der Anzahl der

Gitterpunkte auf dem positiven Ast der Hyperbel $xy=n$. (Ein Gitterpunkt ist ein Punkt der euklidischen Ebene mit ganzzahligen Koordinaten.)

<u>Satz 3.</u> $d(n)$ ist multiplikativ.
<u>Beweis:</u> Zunächst ist $d(1) = 1$. Und falls g.g.T $(m,n)=1$, so folgt aus der Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung, daß jeder Teiler von mn sich eindeutig als Produkt eines Teilers von m mit einem Teiler von n darstellen läßt. Umgekehrt ist jedes derartige Produkt ein Teiler von mn. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß $d(mn) = d(m)\cdot d(n)$ gilt.

<u>Satz 4.</u> Hat n die Primzahlzerlegung $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$, so ist $d(n) = \prod_{i=1}^{r} (a_i + 1)$.

<u>Beweis:</u> $d(n)$ ist multiplikativ, die $p_i^{a_i}$ sind teilfremd, also gilt

$$d(n) = \prod_{i=1}^{r} d(p_i^{a_i})$$

Die einzigen positiven Teiler von $p_i^{a_i}$ sind die (a_i+1) Zahlen $1, p_i, p_i^2, \ldots, p_i^{a_i}$, folglich ist

$$d(n) = \prod_{i=1}^{r} (a_i+1).$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß mitunter auch die gewissermaßen verallgemeinerte Funktion $S_k(n) = \sum_{t/n} t^k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ betrachtet wird. Damit ist $d(n)$ ein Spezialfall von $S_k(n)$ mit $k=0$. Diese Funktion ist ebenfalls multiplikativ.

b) <u>Die Eulersche Funktion</u>

<u>Definition 5.</u> Die Funktion $\varphi(n)$, die definiert ist durch

$\varphi(n)$ = Anzahl der Zahlen $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ mit g.g.T. $(k,n) = 1$,
heißt die Eulersche φ-Funktion.

Mittels Zahlenkongruenzen kann also $\varphi(n)$ als die Anzahl der primen Restklassen modulo n definiert werden. Für den interessierten Leser sei noch

ten Leser sei noch der Satz von Euler genannt: Für $n > 1$ und g.g.T $(a,n) = 1$ gilt $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.
Der Spezialfall n = Primzahl wurde von Fermat entdeckt: Ist p eine Primzahl und g.g.T. $(a,p) = 1$, so gilt $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Um die wichtigsten Eigenschaften der Eulerschen Funktion zu beweisen, benötigen wir den

<u>Hilfssatz 1.</u> Es sei g.g.T$(m,n) = 1$. Durchläuft a ein vollständiges Restsystem (mod m) und b ein vollständiges Restsystem (mod n), so durchläuft $an + bm$ ein vollständiges Restsystem (mod mn).
<u>Beweis:</u> Es gibt $m \cdot n$ Zahlen der Form $an + bm$, und je zwei sind inkongruent (mod mn), denn aus $b_1m + a_1n \equiv b_2m + a_2n \pmod{mn}$ folgt $a_1n \equiv a_2n \pmod{m}$ und daraus wegen g.g.T. $(m,n) = 1$ die Kongruenz $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$; analog ist $b_1 \equiv b_2 \pmod{n}$. Damit erhalten wir die Behauptung

<u>Satz 5.</u> $\varphi(n)$ ist multiplikativ.
<u>Beweis:</u> Zunächst ist wieder $\varphi(1) = 1$, Nun sei g.g.T. $(m,n) = 1$. Es durchlaufe a ein vollständiges Restsystem (mod m), b ein vollständiges Restsystem (mod n). Nach dem Hilfssatz durchläuft dann $an + bm$ ein vollständiges Restsystem (mod mn). Folglich ist $\varphi(mn)$ gleich der Anzahl der ganzen Zahlen $an + bm$, welche der Bedingung g.g.T. $(an + bm, mn) = 1$ genügen. Dies ist aber den beiden Bedingungen

g.g.T. $(an + bm, m) = 1$ und g.g.T. $(an + bm, n) = 1$

oder

g.g.T. $(an,m) = 1$ und g.g.T. $(bm, n) = 1$

oder

g.g.T. $(a,m) = 1$ und g.g.T. $(b,n) = 1$

äquivalent. Laut Definition gibt es nun genau $\varphi(m)$ Werte von a, für die g.g.T. $(a,m) = 1$ ist; analog $\varphi(n)$ Werte von b mit g.g.T. $(b,n) = 1$. Damit existieren also $\varphi(m) \cdot \varphi(n)$ Werte von $an + bm$, die zu mm' teilerfremd sind; mit anderen Worten: es gilt $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

Fortsetzung folgt!

Torsten Rothenwald, FSU
Mathematikstudent, 2. Studienjahr

Preisaufgaben

R 25 ②

Es ist zu zeigen, daß für beliebige (im allgemeinen komplexe) Lösungen des Systems

$$x^2+y^2+xy+1/(xy)=a$$

$$x^4+y^4+x^2y^2-1/(x^2y^2)-2=b^2$$

die Summe für beliebige reelle Zahlen a und b, wobei $a\neq 0$, ebenfalls reell ist.

R 26 ②

Man zeige für beliebige reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$, welche den Beziehungen

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$$

$$b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1$$

genügen, folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n|\leq 1 .$$

R 27 ①

Innerhalb eines gegebenen Kreises sei ein Punkt A fixiert, der nicht mit dem Mittelpunkt des Kreises zusammenfalle. Wir legen jetzt durch A eine beliebige Sehne und durch deren Endpunkte die Tangenten an den Kreis, welche sich im Punkt M schneiden. Man finde den geometrischen Ort aller möglichen Punkte M.

R 28 ①

Wieviel Möglichkeiten gibt es, die Karten eines Skatblattes auf einen Stapel zu legen, so daß sich in der oberen Hälfte des Stapels zwei Asse befinden?

R 29 ①

Man zeige, daß, wenn die positiven Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Beziehung

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=1$$

genügen, gilt:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n\geq n$$

R 30 ② Составим таблицу

I
2,3,4
3,4,5,6,7
4,5,6,7,8,9,IO
. . . .

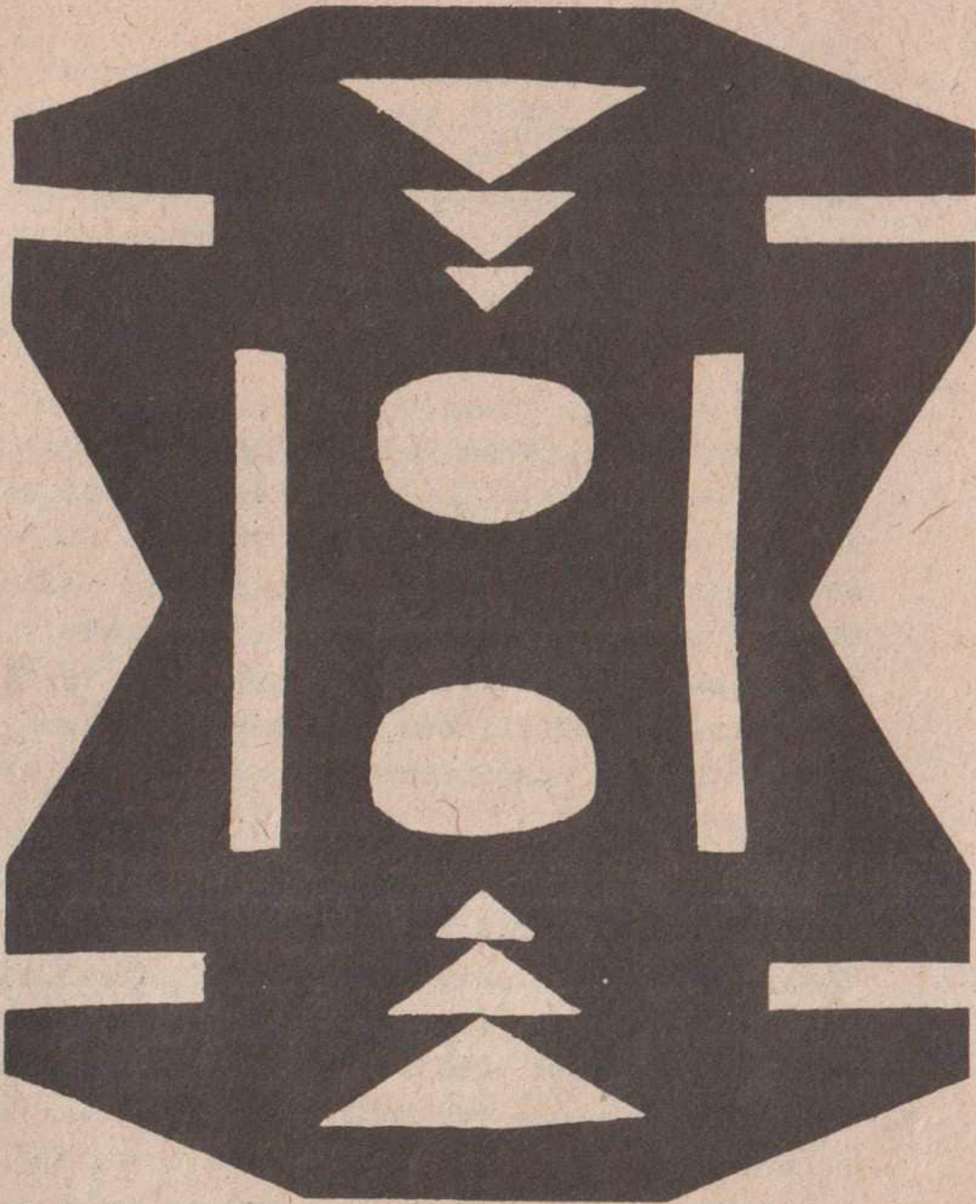
Доказать, что сумма членов каждой горизонтальной строки равна квадрату нечетного числа.

Einsendeschluß: 10. 7. 1985

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 11. 3. 1985

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	19 (1985) 4	S. 49–64



5

85

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

19. Jahrgang

ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Schnittebenen im Raum, Teil II

Wenn wir eine topographische Karte betrachten, so lesen wir dort u. a. an den eingezeichneten Höhenlinien ab, wo sich Berge befinden, welche Anstiege steil, welche flach sind, kurz, wir können uns eine gewisse Vorstellung vom Geländeverlauf bilden.

Bei Graphen von Funktionen mit zwei Variablen, die durch eine Gleichung der Gestalt $f(x,y)=z$ beschrieben werden können, findet man ebenfalls Verhältnisse vor, die an ein Gelände erinnern. Nur sieht man der Gleichung nicht sofort an, wie der Graph aussieht. Es gibt aber die Möglichkeit, nach einer Umformung anhand der Koeffizienten bestimmte Typen von Graphen zu erkennen. Ein nützliches Vorgehen auf diesem Weg bringt das Betrachten von Schnittkurven, die beim Schnitt mit Ebenen entstehen.

Um uns mit dem Vorgehen vertraut zu machen, untersuchen wir erst einmal einfache Fälle.
$f(x,y) = x+y$ soll untersucht werden. Durch einen Vergleich mit den im I. Teil des Artikels beschriebenen Ebenengleichungen erkennen wir sofort, daß $x+y-z = 0$ eine Ebene beschreibt, die durch den Ursprung verläuft. Den genaueren Verlauf verdeutlichen wir uns durch Höhenschnitte mit den Ebenen $z=k$.
Aus $k=x+y$ ergibt sich $y= -x+k$ und es handelt sich um eine Geradenschar, die zu $y = -x$, damit auch zur xy-Ebene parallel ist.
Aus graphischer Sicht handelt es sich um einen Hang, der vom 1. zum 7. Oktanten verläuft. (Man beschreibe die Spurgeraden!)
Indem wir die Aufgabenstellung beim Ableiten der Ebenengleichungen umkehren (Teil I des Artikels), ermitteln wir noch einige Schnittgeraden in der Ebene $z=x+y$. Mit den Ebenen parallel zu xz-Ebene $y=k$ erhalten wir eine Geradenschar $z=x+k$. Damit ist $z=k$ eine weitere Spurgerade der Ebene. Auf diesem Weg lassen sich weitere Schnittgeraden ermitteln, wobei die Achsenabschnittsgleichung auch auf einfache Weise zu den parallelen Ebenen (parallel zu $z=x+y$) führt. Woran ist dies zu erkennen?

Bei $z=x\cdot y$ soll ebenfalls durch Schnitt mit Ebenen ein Rückschluß auf die Gestalt des Graphen gezogen werden.
Schneidet man parallel zur yz-Ebene mit $x=k$ und parallel zur xz-Ebene mit $y=k$, erhält man ebenfalls durch $z=k\cdot y$ und $z=k\cdot x$ Geradenscharen. Wodurch unterscheiden sie sich von denen im ersten Beispiel?

Nur aus diesen Schnittgeradenbündeln kann man noch nicht auf die Gestalt des Graphen schließen, aber schon Höhenschnitte führen mit $c\neq 0$ auf $c=x\cdot y$ Scharen von Hyperbeln (vgl. Bild 2).

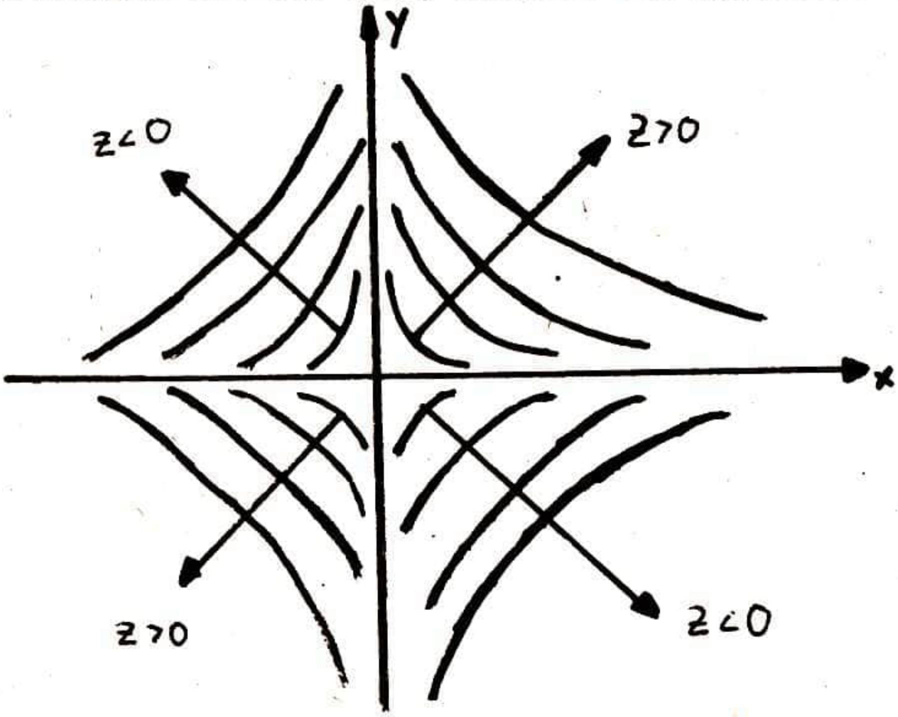


Bild 2

Schnitte mit anderen Ebenen, etwa mit $x+y=1$, so kommt man auf Parabeln ($z=-x^2+x$). Durch weitere Schnitte kann man sich davon überzeugen, daß die Schnittgebilde Geraden, Hyperbeln und Parabeln auftreten. Es liegt ein sattelförmiger Graph vor, die Funktion beschreibt ein hyperbolisches Paraboloid. Dabei handelt es sich um eine sogenannte Schiebefläche, bei der eine nach oben offene Parabel parallel zur xy-Ebene längs einer nach unten offenen Parabel verschoben wird (vgl. Bild 3).
Als weiteres Beispiel untersuchen wir $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$.
Mit Höhenschnitten $z=k$ entsteht $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2k$ und damit auch für

$k=0$ ein Geradenpaar durch den Ursprung 0.
Ist $k \neq 0$, so erhält man Hyperbeln. Schneidet man mit Ebenen parallel zur z-Achse $mx + ny + s = 0$, die nicht durch 0 gehen, dann kann man in

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{n^2}(mx+s)^2 = 2z, \quad n \neq 0,$$

durch geeignete Wahl von m und n ebenfalls Geradenscharen erzeugen. (Die Bedingungen sind zu ermitteln!) Im anderen Fall entstehen Parabeln. Geschnitten mit der Ebene $y=0$ entsteht eine nach oben offene, mit der Ebene $x=0$ eine nach unten offene Parabel

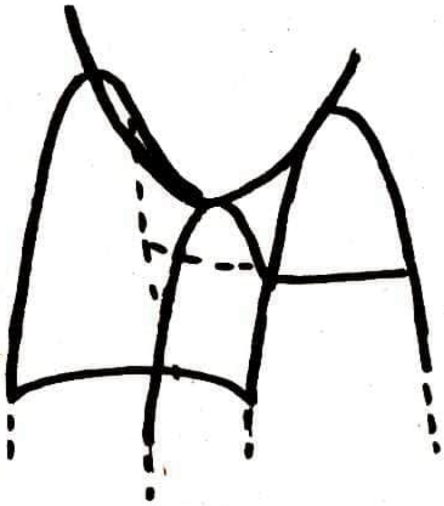


Bild 3

(vgl. Bild 3). Vergleichen wir mit dem vorhergehenden Beispiel, so liegen ähnliche Schnittverhältnisse vor. Im obigen Beispiel liegt ebenfalls ein hyperbolisches Paraboloid vor. Um den Zusammenhang mit dem Fall $x \cdot y - z = 0$ zu zeigen, drehen wir die xy-Ebene um einen Winkel von 45°. Mit den Drehgleichungen $i' = \cos\alpha\, i + \sin\alpha\, j$ und $j' = -\sin\alpha\, i + \cos\alpha\, j$ erhalten wir für $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ über $x' = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x+y)$ und $y' = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(-x+y)$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x^2+2xy+y^2}{a^2} - \frac{(x^2-2xy+y^2)}{b^2}\right] - 2z = 0$$

durch Umbenennung der Variablen und für richtige Wahl von a,b $z = x \cdot y$. Dabei konnten wir die Symmetrie zur xz-Ebene und zur yz-Ebene nutzen.
Diese Fläche hat eine Reihe von interessanten Eigenschaften, und sie läßt sich nur durch Geraden beschreiben (Regelfläche). Da diese Geraden aber durch den Schnitt zweier Ebenen genau bestimmbar sind, könnte man sich Regelflächen auch durch den paarweisen Schnitt von Ebenenscharen entstanden denken.

Zur weiteren Nutzung des geschilderten Schnittprinzips bieten sich Rotationsflächen an, wie die Kugel (1), Rotationsparaboloide (2) und Rotationsellipsoide (3).

(1) $$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

(2) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 2z = 0 \qquad a^2 \neq 0$$

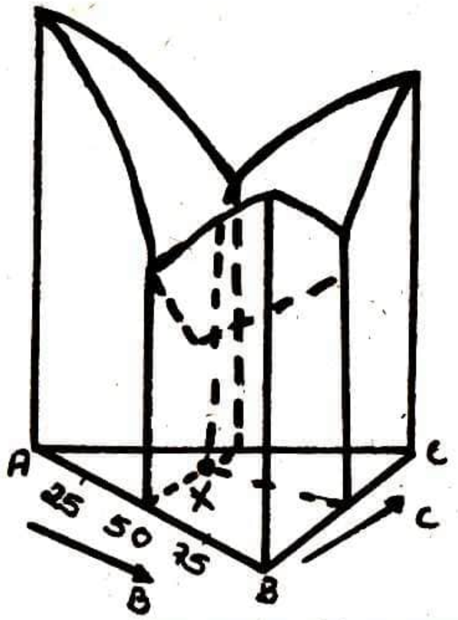
(3) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a^2+c^2 \neq 0$$

Zum selbständigen Einarbeiten in das Verfahren ist es nützlich, die Flächen zu untersuchen.
Als zu beachtende Besonderheit gilt es, für die Funktionsgleichungen $f(x,y)=z$ eine Fallunterscheidung im Definitionsbereich und Wertebereich anzustellen, damit durch die Gleichungen wirklich Funktionen beschrieben werden.
Nicht immer ist es möglich, Flächen zweiter Ordnung durch Funktionsgleichungen zu beschreiben.
Im Anwendungsbereich sind die Bedingungen meist wesentlich komplizierter. Trotzdem kann man aus Höhenschnitten für eine gute Reihe von Problemen eine Vielzahl von Informationen entnehmen.
Zum Abschluß soll deshalb ein Beispiel zeigen, wie man auch technische Aufgabenstellungen so bewältigen kann, allerdings ist dazu ein wesentlich größerer mathematischer Aufwand nötig.

Zum Problem einige Erläuterungen.
In vielen Industriezweigen ist es erforderlich, Mehrstoffsysteme durch Mischung herzustellen. Bei der Glasherstellung werden z. B. verschiedene Stoffe "zusammengeschmolzen". Vereinfacht nehmen wir an, es sei ein Dreistoffgemisch, das durch Schmelzen entstehen soll. Nun ist bekannt, daß sich durch das Mischen die Schmelzverhältnisse ändern; ein stark vereinfachtes System aus drei Stoffen A, B, C wird im Bild 4 dargestellt.

In der Ebene ABC lassen sich die Konzentrationsverhältnisse für die Stoffe A, B, C ablesen, wie dies geschieht, zeigt Bild 5.

Für "ideale" Stoffe kann man noch leicht eine mathematische Beschreibung vornehmen. Bei einem Gemisch aus B_2O_3; SiO_2 und Na_2O würden sich in Abhängigkeit von der Temperatur eine Vielzahl von Zwischenprodukten bilden, so daß eine "wilde Gegend" her-



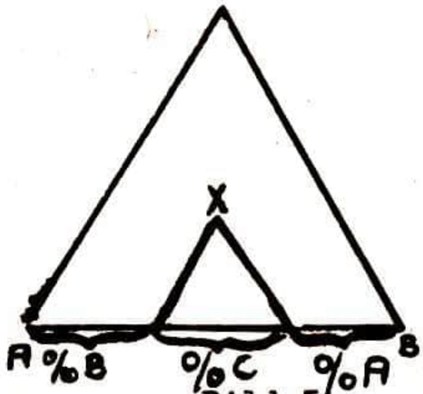


Bild 5

Konzentrationsverhältnis von A nach B, B nach C und C nach A

Bild 4

auskommt, wie man anhand von Höhenschnitten schön sieht (vgl. Bild 6). Gelingt es, solche Zustandsdiagramme mathematisch gut anzunähern, wobei die durch Messung und Berechnung gewonnenen

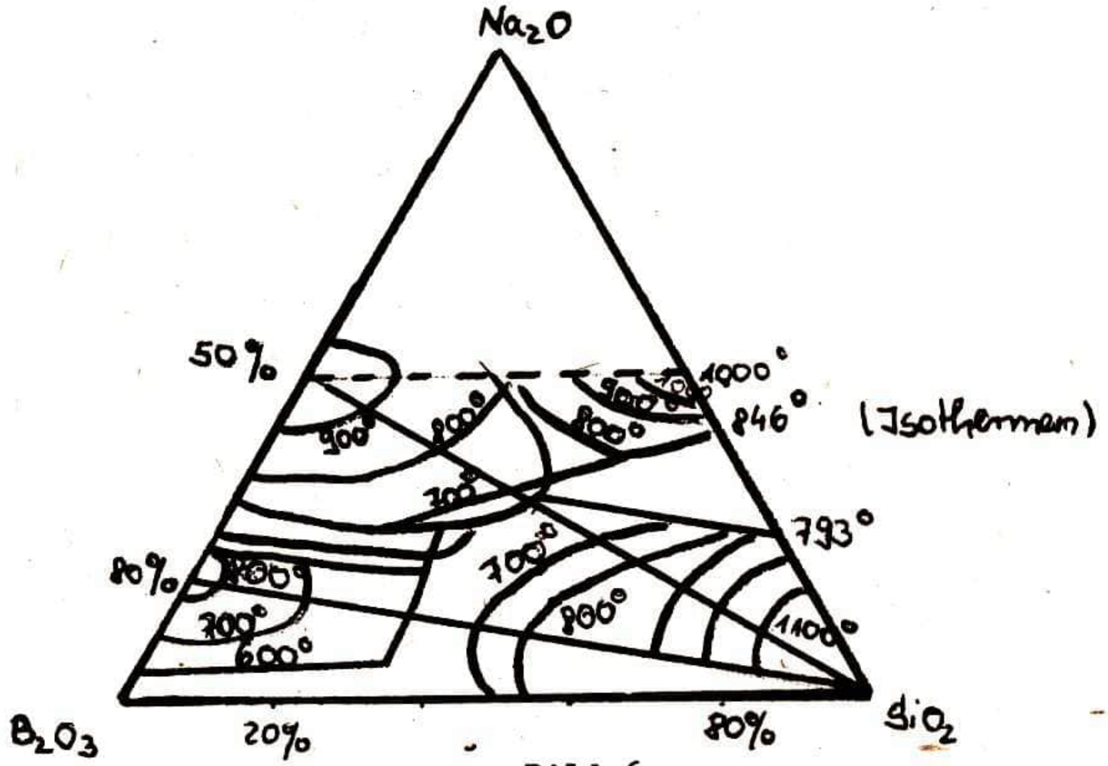


Bild 6

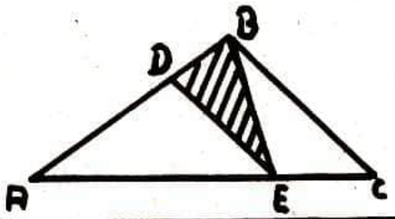
"Höhenlinien" als eine Grundlage genutzt werden können, wirkt sich dies günstig auf die Qualität und Herstellungskosten aus. Mathematische Beschreibungen solcher technischer Prozesse wären auch von Vorteil, weil die Ausgangsstoffe nicht immer eine konstante Zusammensetzung aufweisen, sich aber Verunreinigungen schnell durch chemische Analysen ermitteln lassen und die an sich erforderlichen vielen Schmelzproben auf wenige eingeschränkt werden können. Da die Zusammensetzung der Schmelze auch auf die physikalischen Eigenschaften einen großen Einfluß hat, waren derartige Überlegungen schon vor 100 Jahren in Jena angebracht. Als 1882 ein "glastechnisches Laboratorium" geschaffen wurde, war dies auch nur möglich durch die Zusammenarbeit des Mathematikers und Physikers Ernst Abbe, des "Glasdoktors" Otto Schott und der Brüder Carl und Roderich Zeiss als Mechaniker und Wissenschaftler. Zu mehr als 130 Versuchsgläsern, die optisch gemessen wurden, führte damals der Weg von einer beachtlich größeren Anzahl Schmelzen, die zu dieser Zeit alle erforderlich waren, heute sind zwar ebenfalls viele Versuche notwendig, nur kann man durch den Einsatz moderner mathematischer Verfahren und Rechentechnik viele Fehler und Irrtümer jener Zeit vermeiden, das Schmelzverhalten der Stoffe blieb, die Zusammenarbeit der verschiedenen Wissenschaften mußte enger werden und die Rechentechnik erschließt neue Möglichkeiten.

Dr. M. Hörschelmann
FSU Jena
Methodik des Mathematikunterrichts

Preisaufgaben

R 31
2

Ein gegebenes Dreiech ABC soll so von einer zu BC parallelen Geraden durch D und E geschnitten werden, daß der Flächeninhalt des Dreiecks BDE gleich einer beliebig vorgegebenen Größe k^2 ist. Bei welchem Verhältnis von A (Flächeninhalt des $\triangle$ABC) und k^2 ist diese Aufgabe lösbar und wieviele Lösungen hat sie?



R 32
1

Beweisen Sie, wenn n ganze Zahl ist und $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, so gilt folgende Gleichung

$$\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma = (-1)^{n+1} \cdot 4 \sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma .$$

R 33
2

Es seien 100 ganze Zahlen gegeben, von denen keine gleich Null ist. Wieviele positive und wieviele negative Summanden kommen dann in der Summe

$$(a_1+\dots+a_{100})^2=a_1^2+\dots+a_{100}^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\dots+2a_{99}\cdot a_{100}$$

vor? (Die Anzahl der positiven Zahlen a_i ist nicht bekannt.)

R 34
1

Найти сумму

$$I+2x+3x^2+4x^3+\dots+(\text{м}+I)x^{\text{м}}$$

R 35 In einer Pyramide mit dreieckiger Grundfläche ist der Umfang aller vier Seiten jeweils gleich. Berechnen Sie die Gesamtoberfläche der Pyramide, wenn der Umfang ihrer Seitenflächen jeweils gleich 5 ist.

1

R 36 Es ist zu zeigen, daß zwei unendliche Mengen A und B natürlicher Zahlen existieren, welche folgende Eigenschaft haben: Jede natürliche Zahl läßt sich auf eindeutige Weise als Summe zweier Elemente a+b darstellen, wobei a ein Element aus A und b ein Element aus B ist.

1

Einsendeschluß: 10. 8. 1985

Die Verteilung von Primzahlen
(1. Fortsetzung)

Man kann nun wiederum die Multiplikativität der Funktion benutzen, um die Funktionswerte für $n > 1$ einfacher auszurechnen. Wir gehen analog a) von der Primfaktorenzerlegung $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$ aus,

also ist $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} \varphi(p_i^{a_i})$.

Es genügt daher, eine Berechnungsvorschrift für $\varphi(p^a)$ anzugeben. Bei $a = 1$ ist offensichtlich $\varphi(p) = p-1$. Für $a > 1$ betrachten wir das vollständige Restsystem (mod p^a): $1, 2, \ldots, p^a$. Genau p^{a-1} dieser Zahlen, nämlich die Vielfachen $p, 2p, \ldots, p^a$ von p, sind zu p nicht teilerfremd. Damit haben wir $\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1} = p^a(1 - \frac{1}{p})$. Für unser n erhalten wir

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i} \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$ (d.h. p

durchläuft all jene Primzahlen, durch die n teilbar ist.)

Zum Rechnen mit der Eulerschen Funktion benötigen wir später noch eine andere Eigenschaft.

<u>Satz 6.</u> Es gilt für beliebige $n \geq 1$: $\sum_{t/n} \varphi(t) = n$.

<u>Beweis:</u> Wir benutzen wieder die Darstellung $n = \prod^{r} p_i^{a_i}$. Alle Teiler t von n haben damit die Gestalt $t = \prod_{i=1}^{r} p_i^{b_i}$ wobei $0 \leq b_i \leq a_i$.

Es ist also

$$\sum_{t/n} \varphi(t) = \sum_{0 \leq b_i \leq a_i} \varphi\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{b_i}\right) = \sum_{0 \leq b_i \leq a_i} \prod_{i=1}^{r} \varphi(p_i^{b_i}).$$

Sowohl das Produkt als auch die Summe sind endlich, wir dürfen $\prod$ und $\sum$ vertauschen

$$\sum_{t/n} \varphi(t) = \prod_{i=1}^{r} \sum_{b_i=0}^{a_i} \varphi(p_i^{b_i}) = \prod_{i=1}^{r} \left(\varphi(1) + \varphi(p_i) + \varphi(p_i^2) + \ldots + \varphi(p_i^{a_i})\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \left[1 + (p_i - 1) + p_i(p_i - 1) + \ldots + p_i^{a_i - 1}(p_i - 1)\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i} = n.$$

c) Dirichletsche Multiplikation

Wir führen jetzt die angekündigte, nach P.G.L. Dirichlet (1805–1859) benannte, Verknüpfung zahlentheoretischer Funktionen ein.

Definition 6. Es seien f(n) und g(n) zwei zahlentheoretische Funktionen. Die zahlentheoretische Funktion

$h(n) = \sum_{t/n} f(t)\, g(\frac{n}{t})$ heißt ihr Dirichletsches Produkt. (Dabei bedeutet der Summationsindex wieder, daß die Summe über alle Teiler t von n zu bilden ist.)

Wir vereinbaren hier gleich für diese Produktbildung die Schreibweise $h(n) = f(n) * g(n)$ oder noch kürzer $h = f * g$.

Diese zunächst etwas gekünstelt wirkende Operation erweist sich als zweckmäßig für die Betrachtung zahlentheoretischer Funktionen.
Zunächst ist das Dirichletsche Produkt offensichtlich kommutativ: Man ersetzt die Summation über alle Teiler t/n durch die Summenbildung über alle Paare t,d mit t d = n, also $d = \frac{n}{t}$ und

$f(n) * g(n) = \sum_{t \cdot d = n} f(t) \cdot g(d)$. Damit kann man die Rollen von t und d vertauschen, $f(n) * g(n) = g(n) * f(n)$.
Durch eine ebenfalls noch einfache Rechnung sehen wir die Assoziativität ein.
Es gilt

$$\begin{aligned} f(n) * \left[g(n) * h(n)\right] &= f(n) * \sum_{t_1 t_2 = n} g(t_1)h(t_2) \\ &= \sum_{t_3 d = n} f(t_3) \sum_{t_1 t_2 = d} g(t_1)h(t_2) \\ &= \sum_{t_1 t_2 t_3 = n} g(t_1)h(t_2)f(t_3) = \\ &= \left[f(n) * g(n)\right] * h(n). \end{aligned}$$

Analog zur Multiplikation reeller Zahlen existiert in der Menge der zahlentheoretischen Funktionen ein Einselement bezüglich $*$, das heißt eine Funktion e(n) (hat hier nichts mit der Zahl e=2,7172... zu tun!) mit der Eigenschaft $e * f = f * e = f$. Diese Funktion ist definiert durch

$$e(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

Wie man leicht sieht, ist tatsächlich $e(n) * f(n) = \sum_{t/n} e(t) f(\frac{n}{t}) = f(n)$, da die Summanden nur für $t = 1$ ungleich Null sind.

Betrachten wir umgekehrt die Funktionalgleichung $f * x = e$, dann können wir bei $f(1) \neq 0$ stets eine solche Funktion x finden, für die bei vorgegebenem f die Gleichung erfüllt ist.

Aus $\sum_{t/n} f(\frac{n}{t})\, x(t) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$ folgt zunächst $x(1) = \frac{1}{f(1)}$.

Für $n > 1$ ist $x(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{t/n \\ t\ n}} f(\frac{n}{t})\, x(t)$.

Setzen wir voraus, daß für $k=1,2,\ldots,n-1$ die $x(k)$ bereits ermittelt sind, dann können wir $x(n)$ mit dieser Formel rekursiv berechnen wegen $t < n$. Die Funktion $x(n)$ ist damit ebenso wie $e(n)$ sogar eindeutig bestimmt.

Aus den bisherigen Überlegungen ergibt sich der

<u>Satz 7.</u> Die Menge der zahlentheoretischen Funktionen $f(n)$ mit $f(1) \neq 0$ bildet bezüglich der Dirichletschen Multiplikation eine kommutative Gruppe.

Wie die folgenden Sätze zeigen, bleibt die für die Zahlentheorie wichtige Eigenschaft der Multiplikativität beim Dirichletschen Produkt erhalten.

<u>Satz 8.</u> Sind f und g multiplikativ, so auch $f * g$.

<u>Beweis:</u> Es seien m,n zwei natürliche Zahlen mit $g.g.T(m,n)=1$.

Zunächst ist nach Definition $f(mn) * g(mn) = h(mn) =$

$= \sum_{t/mn} f(t)\, g(\frac{mn}{t})$. Wir können nun t in $t=t_1t_2$ so zerlegen, daß t_1 alle Teiler von m und t_2 alle Teiler von n durchläuft, wobei $g.g.T.(t_1,t_2)=1$. Damit spaltet sich die Summe auf, und wir erhalten.

$$h(mn) = \sum_{t_1/m} \sum_{t_2/m} f(t_1)\, f(t_2)\, g(\tfrac{m}{t_1})\, g(\tfrac{m}{t_2}) = h(m)\, h(n).$$

Dieser Satz läßt sich nicht auf total multiplikative zahlentheoretische Funktionen übertragen; zum Beispiel ist $f(n) = n$ total multiplikativ, aber nicht $h(n) = n * n$.

<u>Satz 9.</u> Die zahlentheoretischen Funktionen $g(n)$ und $f(n) * g(n)$ seien multiplikativ. Dann ist auch $f(n)$ multiplikativ.
<u>Beweis:</u> Es genügt zu zeigen, daß $h = f * g$ nicht multiplikativ ist, wenn es f nicht ist. Sei also f nicht multiplikativ, dann existieren m,n mit g.g.T.$(m,n)=1$ derart, daß $f(mn) \neq f(m) \cdot f(n)$ ist. Unter diesen Zahlenpaaren wählen wir m und n so aus, daß ihr Produkt mn minimal ist. Damit können zwei Fälle eintreten:

(1) $mn = 1$: Daraus folgt $h(1) = f(1) \cdot g(1) = f(1) \neq 1$, denn f war als nicht multiplikativ vorausgesetzt. Somit kann auch h nicht multiplikativ sein (dafür wäre $h(1) = 1$ notwendig, vgl. Bemerkung zur Definition 3).

(2) $mn > 1$: Dann ist $f(pq) = f(p)\, f(q)$ für g.g.T.$(p,q) = 1$ und $pq < mn$. Unsere m,n waren ja so gewählt, daß ihr Produkt minimal ist. Daraus folgt

$$h(mn) = \sum_{\substack{t_1/m \\ t_1 t_2 < mn}} \sum_{t/n} f(t_1 t_2)\, g(\tfrac{mn}{t_1 t_2}) + f(mn)$$

$$= \sum_{t_1/m} \sum_{t_2/n} f(t_1)\, f(t_2)\, g(\tfrac{m}{t_1})\, g(\tfrac{n}{t_2}) - f(m)f(m) + f(mn)$$

$$= h(m)\, h(n) - f(m)f(n) + f(mn) \neq h(m)\, h(n)$$

(da insbesondere t_1, t_2 solche p,q sind).

d) <u>Möbiussche Umkehrformeln</u>

Wir sind jetzt in der Lage, ein wichtiges Gesetz für das Rechnen mit zahlentheoretischen Funktionen einzuführen, mit deren Hilfe wir dann wieder eine Aussage über $\pi(x)$ gewinnen werden. Dazu definieren wir zunächst eine für die Primzahltheorie bedeutsame

Funktion, die nach A.F. Möbius (1790–1868) benannt wurde.

Definition 7. Die zu $f(n) = 1$ bezüglich der Dirichletschen Multiplikation inverse Funktion werde als Möbiussche μ -Funktion bezeichnet.

Versuchen wir, dieser äußerst abstrakten Definition einen vorstellbaren Inhalt abzugewinnen. "Bezüglich $*$ inverse Funktion" bedeutet ja nichts weiter als $1 * \mu\,(n) = e(n)$, und mit der Definition der Dirichlet-Verknüpfung heißt das ausführlich geschrieben

$$\sum_{t/n} \mu\,(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n > 1 \end{cases}.$$

Weiterhin wissen wir, daß $e(n)$ und offensichtlich auch $f(n) = 1$ multiplikativ sind. Mit Satz 9 folgt damit die Multiplikativität von $\mu\,(n)$. Es genügt also wiederum, die Werte $\mu\,(p^a)$ für Primzahlpotenzen zu berechnen, um die Funktion völlig zu beherrschen. Aus den bisherigen Überlegungen ergibt sich $\mu\,(1)=1$ (Multiplikativität!) und $\mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \ldots + \mu(p^a) = 0$. Da unser a dabei beliebig sein kann, erhalten wir für $a=1$ daraus $\mu(p) = -1$ und fortlaufend $\mu\,(p^k) = 0$ für k 1. Mit der gewohnten Darstellung

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i} \quad \text{ist also für } n>1 \quad \mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{für } a_1=a_2=\ldots=a_r=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man kann natürlich auch umgekehrt dies als Definition der Möbiusschen Funktion nehmen und die Funktionalgleichung $1 * \mu = e$ daraus herleiten.

Als erste Anwendung dieser Beziehungen zeigen wir, wie man die bezüglich der Dirichletschen Multiplikation inverse Funktion (mit g^{-1} bezeichnet) einer vorgegebenen, total multiplikativen Funktion g leicht berechnen kann, ohne das Rekursionsverfahren aus c) zu benutzen.

<u>Satz 10.</u> Ist $g(n)$ total multiplikativ, so gilt $g^{-1}(n) = \mu(n)g(n)$. (Auf der rechten Seite steht die gewöhnliche Multiplikation der einzelnen Funktionswerte.)

Beweis: Wir beweisen einfach, daß die angegebene Funktion die Eigenschaften einer inversen Funktion besitzt. Die Eindeutigkeit gilt ohnehin wegen der Gruppeneigenschaft. In der Tat ist

$$\left[\mu(n)\cdot g(n)\right] * g(n) = \sum_{t/n} \mu(t)g(t)\, g(\tfrac{n}{t}) = g(n) \sum_{t/n} \mu(t) = e(n).$$

Hieraus folgt unmittelbar der

Satz 11. (Möbiussche Formeln) Wenn $g(n)$ multiplikativ ist, so gilt: $F(n) = f(n) * g(n) \iff f(n) = F(n) * \left[\mu(n)g(n)\right]$.

Für das praktische Rechnen im nächsten Abschnitt benötigen wir diese Aussage in der folgenden Form:

(1) $$g(n) = \sum_{t/n} f(t) \Rightarrow f(n) = \sum_{t/n} \mu(t)\, g(\tfrac{n}{t})$$

(2) $$h(n) = \sum_{t/n} \mu(t) f(\tfrac{n}{t}) \Rightarrow f(n) = \sum_{t/n} h(n)$$

Um die "Leistungsfähigkeit" der hier dargelegten Theorie anzudeuten, sei noch einmal die Eulersche Funktion betrachtet. Jetzt brauchen wir die Kenntnis von Satz 6 ($\sum_{t/n} \varphi(t) = n$), also $1 * \varphi(n) = n$, vorauszusetzen, zum Beispiel eben diese Funktionalgleichung als Definition zu benutzen. Die übrigen Aussagen aus b) folgen damit aus den Eigenschaften der Dirichletschen Multiplikation: 1 und n sind multiplikative Funktionen, nach Satz 9 ist φ multiplikativ. Die Anwendung der Möbiusschen Formeln gibt

$\varphi(n) = n * \mu(n)$.

Betrachten wir in Satz 11 die Gleichung $F(n) = f(n) * g(n)$ und ihre Auflösung nach $f(n)$ unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß entweder $F(n)$ oder $f(n)$ multiplikativ ist. Es genügt dann, $f(n)$ aus $f(n) = F(n) * \left[\mu(n)g(n)\right]$ für Primzahlpotenzen zu berechnen. Für $n = p^a$ ist

$$f(p^a) = \sum_{t/p^a} \mu(t)\, g(t) F(\tfrac{p^a}{t}) = F(p^a) - g(p)F(p^{a-1}).$$ Allgemein erhalten wir somit bei $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$ als Gleichung zur Berechnung des uns interessierenden Funktionswertes

$$f(n) = \prod_{i=1}^{r}\left(F(p_i^{a_i}) - g(p_i)F(p_i^{a_i-1})\right).$$

Zurück zur Eulerschen Funktion. Wir nehmen als f unser $\varphi(n)$, und damit ist

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} \left(p_i^{a_i} - p_i^{a_i-1}\right) = n \cdot \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

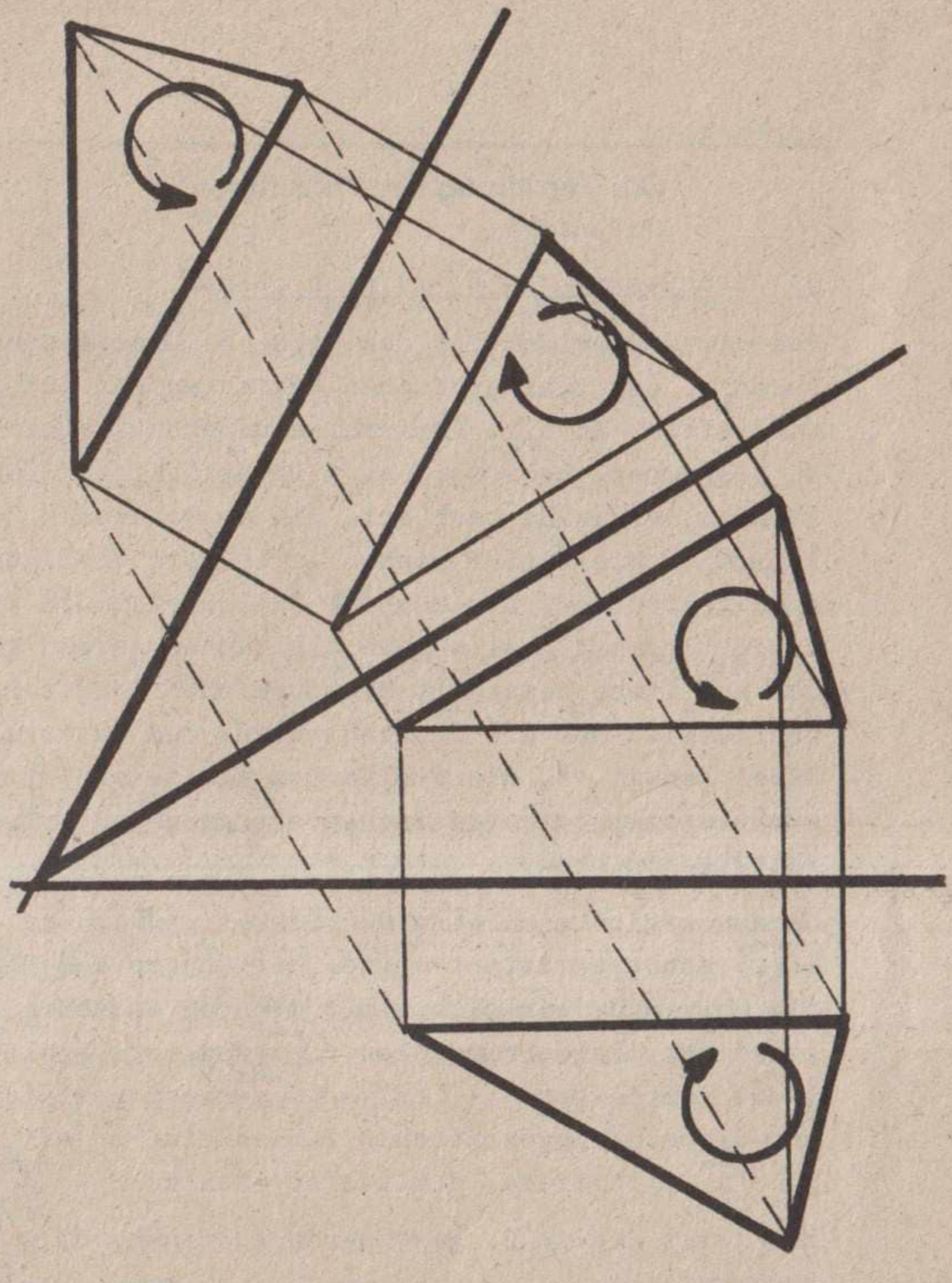
so wie wir das bereits durch arithmetische Umformungen als Folgerung aus Satz 5 gewonnen haben.

Fortsetzung folgt!

Torsten Rothenwald, FSU
Mathematikstudent, 2. Studienjahr

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M. Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 8. 4. 1985



6
85

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

19. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

2.) Gegeben sind 2 Punkte A und B, ein Kreis k_D und eine Gerade g_c.
Es ist ein gleichschenkliges Trapez zu konstruieren, für das A und B die Endpunkte einer Grundseite sind, dessen Punkt C auf g_c und dessen Punkt D auf k_D liegt.

3.) Es ist ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, von dem sein Umfang und die Höhe auf der Basis bekannt sind.

4.) Einem gegebenen Dreieck ABC ist ein anderes Dreieck PQR so einzubeschreiben, daß sein Umfang ein Minimum wird.

Dr. K. Lemnitzer, FSU
Bereich Methodik des Mathematikunterrichts

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M. Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 10. 5. 1985

Die Verteilung der Primzahlen

(2. Fortsetzung)

3. Abschätzung von $\pi(x)$ nach oben

Aus dem Unterricht ist das Sieb des Eratostenes (um 200 v.u.Z.) bekannt, ein sehr einfaches Verfahren zur Aufstellung von Primzahltafeln: Um alle Primzahlen unterhalb einer gewissen Zahl x zu bestimmen, schreibt man alle natürlichen Zahlen n mit $2 \leq n \leq x$ der Reihe nach auf. Die erste dieser Zahlen, die 2, ist Primzahl. Sie bleibt stehen, alle ihre Vielfachen werden jedoch gestrichen. Als nächste Zahl bleibt die 3 stehen, sie ist wieder Primzahl, alle ihre Vielfachen werden gestrichen. Wenn man auf diese Weise mit dem Streichen fortfährt, bleiben schließlich nur die Primzahlen aus dem Intervall $[2,x]$ stehen. Dabei genügt es, die Vielfachen all jener Primzahlen mit $p \leq \sqrt{x}$ zu streichen (die Vielfachen der größeren Primzahlen sind bereits gestrichen).

Daraus ergibt sich eine Möglichkeit, $\pi(x)$ zu berechnen, falls $\pi(\sqrt{x})$ schon ermittelt wurde. Wir ändern das Verfahren ein wenig ab, indem wir alle n mit $1 \leq n \leq x$ aufschreiben. Es werden jetzt sämtliche Primzahlen $\leq \sqrt{x}$ und ihre Vielfachen gestrichen, damit verbleiben $1 + \pi(x) - \pi(\sqrt{x})$ nicht gestrichene Zahlen. Genau diese übriggebliebenen Zahlen sind zu allen Primzahlen $p \leq \sqrt{x}$ teilerfremd, damit also auch zu $P = \prod_{p \leq \sqrt{x}} p$. Wir benutzen jetzt die in 2. gewonnenen Aussagen, um $\pi(x)$ zu berechnen. Zunächst ist

$$1 + \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) = \sum_{\substack{n \leq x \\ \text{g.g.T.}(n,P)=1}} 1 = \sum_{n \leq x} \sum_{t/\text{g.g.T.}(n,P)} \mu(t)$$

$$= \sum_{t/P} \mu(t) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 (\text{mod } t)}} 1 = \sum_{t/P} \mu(t) \sum_{tm \leq x} 1.$$

Durch einfaches Umstellen folgt

$$\pi(x) = \pi(\sqrt{x}) - 1 + \sum_{t/P} \mu(t) \left[\frac{x}{t}\right],$$

wobei $\left[\frac{x}{t}\right]$ den ganzzahligen Anteil von $\frac{x}{t}$ bezeichnet. Wir setzen jetzt $P_y = \prod_{p \leq y} p$ mit $y \leq \sqrt{x}$ und

$$N(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ \text{g.g.T.}(n,P_y)=1}} 1 = \sum_{t/P_y} \mu(t) \left[\frac{x}{t}\right].$$

Dann ist

$N(x) \geq \pi(x) - \pi(y)$, für beliebiges $y \leq \sqrt{x}$ gilt also

$$\pi(x) \leq \pi(y) + \sum_{t/Py} \mu(t)\left[\frac{x}{t}\right].$$

Um zu einer aussagekräftigen Abschätzung für $\pi(x)$ zu kommen, muß y möglichst günstig gewählt werden. Zunächst schätzen wir $\pi(x)$ weiter ab. Aus der bisherigen Ungleichung folgt:

$$\pi(x) \leq \pi(y) + \sum_{t/Py} \mu(t)\,\frac{x}{t} + \sum_{t/Py} 1 = \pi(y) + \frac{x}{Py}\varphi(Py) + \sum_{t/Py} 1$$

(Satz 11!)

$$= \pi(y) + \frac{x}{Py}\varphi(Py) + d(Py) \qquad \text{(Def. der Funktion d(n))}$$

$$= \pi(y) + \prod_{p \leq y}(1-\frac{1}{p}) + 2^{\pi(y)} \qquad \text{(φ und d durch Multiplikativität berechnet)}$$

$$< y + \frac{x}{\ln y} + 2^{y} < \frac{x}{\ln y} + 2^{y+1}$$

Es war $y \leq \sqrt{x}$ vorausgesetzt worden. Insbesondere erfüllt $y = \ln x$ diese Forderung; aus der letzten Ungleichung erhält man daher

$$\pi(x) < \frac{x}{\ln \ln x} + 2^{\ln x+1}.$$

Da uns hauptsächlich $\pi(x)$ für große x interessiert, können wir beispielsweise $x \geq e^3$ (hier ist wieder die Zahl e=2,7172... gemeint) annehmen. Damit vereinfacht sich das Resultat zu

$$\pi(x) < \frac{2x}{\ln \ln x}.$$

4. Die Bertrandsche Vermutung

P. L. Tschebyscheff (1821 - 1894) gelang es als erstem, einen Beweis für eine Vermutung anzugeben, die von Joseph L. F. Bertrand (1822 - 1900) formuliert worden war: Zwischen jeder natürlichen Zahl größer als 1 und ihrem Doppelten liegt mindestens eine Primzahl. Diese Aussage wurde von Bertrand zunächst ohne Beweis, als Postulat gewissermaßen, bei einer gruppentheoretischen Untersuchung benutzt. Wir geben hier einen auf elementaren Mitteln beruhenden Beweis dafür an, weil er in bestimmter Hinsicht typisch für die Zahlentheorie ist:
Die Aussage des Satzes ist allgemeinverständlich, empirisch

leicht überprüfbar für nicht zu große n, in ihrer Einfachheit geradezu faszinierend. Aber zum exakten Beweis ist ein ungeahnter "Anlauf" über recht überraschende "mathematische Bahnen" erforderlich.

Zunächst definieren wir noch zwei weitere Funktionen, die letztlich für die Primzahltheorie geradezu lebenswichtig wurden.

Definition 8. Die Funktionen $\vartheta(x) = \sum\limits_{p \leq x} \ln p$ und $\psi(x) = \sum\limits_{p^m \leq x} m \cdot \ln p$ werden als Tschebyscheffsche Funktionen bezeichnet.

Die zweite Summe ist folgendermaßen zu verstehen: ln p tritt als Summand genau m-mal auf, wenn p^m die höchste Potenz von p ist, welche x nicht überschreitet. Zum Beispiel ist $\psi(10) = 3 \ln 2 + 2 \ln 3 + \ln 5 + \ln 7$. Aus der Definition folgt sofort

$$\vartheta(x) = \ln \Big(\prod_{p \leq x} p \Big) \quad \text{und}$$

$$\psi(x) = \ln (\text{k.g.V. aller positiven ganzen Zahlen} \leq x).$$

Für den Beweis der Betrandschen Vermutung brauchen wir demzufolge nur $\vartheta(2n) - \vartheta(n) > 0$ zu zeigen. Dazu stellen wir jetzt die nötigen Hilfssätze zusammen.

Hilfssatz 1. Für $N = \binom{2n}{n}$ gilt $\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} < N < \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$.

Beweis. Wir bilden $P = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots (2n}$. Es gilt dann $2^{2n} P = N$, denn

$$P = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots (2n)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots (2n)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots (2n)} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} .$$

Wir benutzen nun die leicht einzusehende Ungleichung

$$1 > \Big(1 - \frac{1}{2^2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{4^2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{6^2}\Big) \ldots \Big(1 - \frac{1}{(2n)^2}\Big).$$

Diese Ungleichung läßt sich natürlich ein wenig umschreiben:

$$1 > \Big(\frac{1 \cdot 3}{2^2}\Big)\Big(\frac{3 \cdot 5}{4^2}\Big)\Big(\frac{5 \cdot 7}{6^2}\Big) \ldots \Big(\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\Big)$$

oder: $1 > (2n+1)P^2 > 2nP^2 = \frac{2n}{2^{4n}} N^2$. Und das ist im wesentlichen schon die rechte Seite der Behauptung.

Für die linke Seite beginnen wir analog mit einer elementaren Ungleichung $1 > (1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{5^2})(1-\frac{1}{7^2}) \ldots (1-\frac{1}{(2n-1)^2})$.

Wir erhalten $1 > (\frac{2\cdot 4}{3^2})(\frac{4\cdot 6}{5^2})(\frac{6\cdot 8}{7^2}) \ldots (\frac{(2n-2)\cdot 2n}{(2n-1)^2})$; das heißt nichts weiter als $1 > \frac{1}{4nP^2} = \frac{2^{4n}}{4n\ N^2}$, woraus die linke Seite der Behauptung folgt.

<u>Hilfssatz 2.</u> Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$\vartheta(n) < 2n\cdot\ln 2.$$

Beweis. Für n=1 und n=2 ist die Aussage trivial. Wir nehmen nun an, daß die Behauptung richtig sei für ein $n \geq 2$ und zeigen, daß dann auch $\vartheta(2n-1) < 2(2n-1)\ln 2$ und folglich $\vartheta(2n) = \vartheta(2n-1) < 4n\cdot\ln 2$ gilt. Es sei $N = \binom{2n}{n}$ wie im Hilfssatz 1, wir betrachten die Zahl

$$\frac{N}{2} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{n}{2n} = \frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!} = \binom{2n-1}{n-1}.$$

Sie ist durch alle Primzahlen p mit $n < p \leq 2n-1$ teilbar, also auch durch ihr Produkt. Damit kann dieses Produkt insbesondere nicht größer als $\frac{N}{2}$ sein, und aus $\frac{N}{2} \geq \prod_{n<p\leq 2n-1} p$ folgt durch Logarithmieren beider Seiten $\ln\frac{N}{2} \geq \vartheta(2n-1) - \vartheta(n)$.

Aus dem vorherigen Hilfssatz folgt nun aber

$$\ln N < 2n\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2n.$$

Diese beiden letzten Ungleichungen liefern zusammen

$$\vartheta(2n-1) - \vartheta(n) < (2n-1)\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2n.$$

Nach unserer anfänglichen Voraussetzung ist $\vartheta(n) < 2n\ln 2$, also

$$\vartheta(2n-1) < 2n\ln 2 + (2n-1)\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2n;$$

wegen $n \geq 2$ folgt daraus die gewünschte Ungleichung:

$$\vartheta(2n-1) < 2(2n-1)\ln 2.$$

Um den bisherigen Gedankengang noch einmal zusammenzufassen, nennen wir das Ergebnis mit anderen Worten: Gilt die Behauptung für eine gewisse natürliche Zahl $n > 0$, so ist sie auch für $2n-1$ und damit für $2n$ richtig. Gilt also $\vartheta(n) < 2n\ln 2$ für jedes n im Intervall

$$2^{r-1} \leq n \leq 2^r \quad (r > 1),$$

so auch für jedes n im Intervall $2^r < n \leq 2^{r+1}$. Im Intervall

$2 < n \leq 2^2$ ist aber die Behauptung richtig, denn $\vartheta(4) = \vartheta(3) = \ln 2 + \ln 3 < 6 \ln 2$. Damit können wir das Induktionsprinzip anwenden, die Behauptung ist allgemeingültig.

S a t z 12. (Vertrand/Tschebyscheff). Für $n > 1$ gibt es stets eine Primzahl p derart, daß $n \leq p < 2n$ gilt.

Beweis. Wir führen ihn in zwei Schritten. Zunächst wird $\vartheta(2n) - \vartheta(n) > 0$ für $n > 64$ gezeigt; für kleinere n bestätigen wir den Satz mit einer kleinen Primzahltafel.

Es sei wiederum $N = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \prod_{p \leq 2n} p^{a_p}$, wobei

$$a_p = \sum_{r \geq 1} \left\{ \left[\frac{2n}{p^r}\right] - 2\left[\frac{n}{p^r}\right] \right\}.$$

Die Summe $\ln N = \sum_{p \leq 2n} a_p \ln p$ wird durch eine zweckmäßige Einteilung der Primzahlen $p \leq 2n$ in vier Teile zerlegt:

(1) $n < p \leq 2n$; (3) $\sqrt{2n} < p \leq \frac{2n}{3}$

(2) $\frac{2n}{3} < p \leq n$; (4) $p \leq \sqrt{2n}$.

Die entsprechenden Teilsummen werden mit $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ bezeichnet.

Zu Σ_1: Es ist $\frac{n}{p} < 1$, also $\left[\frac{n}{p}\right] = 0$, analog $1 \leq \frac{2n}{p} < 2$, also $\left[\frac{2n}{p}\right] = 1$ und $\left[\frac{2n}{p^2}\right] = 0$. Für $n < p \leq 2n$ folgt $a_p = 1$, wir erhalten

$$\Sigma_1 = \sum_{n < p \leq 2n} a_p \ln p = \sum_{n < p \leq 2n} \ln p = \vartheta(2n) - \vartheta(n). \tag{i}$$

Zu Σ_2: Wir haben hier $1 \leq \frac{n}{p} < \frac{3}{2}$, also $\left[\frac{n}{p}\right] = 1$ und $\left[\frac{2n}{p}\right]$. Bei $n \geq 3$ gilt ferner $\left[\frac{2n}{p^2}\right] = 0$. Folglich ist unsere Teilsumme

$$\Sigma_2 = 0 \qquad \text{für } n \geq 3. \tag{ii}$$

Zu Σ_3: Es ist $\frac{n}{p^2} < \frac{2n}{p^2} < 1$, also $a_p = \left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] = 0$ oder $= 1$. Daraus ergibt sich $\Sigma_3 \leq \sum_{\sqrt{2n} < p < \frac{2n}{3}} \ln p = \vartheta\left(\frac{2n}{3}\right) - \vartheta(\sqrt{2n})$. Wir schätzen noch $\vartheta(\sqrt{2n})$ ein wenig ab:

$$\vartheta(\sqrt{2n}) = \sum_{p \leq \sqrt{2n}} \ln p \geq \ln 2 \sum_{p \leq \sqrt{2n}} 1 = \pi(\sqrt{2n}) \ln 2.$$

Damit folgt insgesamt $\sum_3 \leq \vartheta(\frac{2n}{3}) - \pi(\sqrt{2n}) \ln 2.$ (iii)

Zu Σ_4: Hier wenden wir die Ungleichung $a_p \leq M_p = \left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right]$ an.

Wir erhalten $\Sigma_4 \leq \sum\limits_{p \leq \sqrt{2n}} M_p \ln p \leq \sum\limits_{p \leq \sqrt{2n}} \frac{\ln 2n}{\ln p} \ln p =$

$$= \ln 2n \sum_{p \leq \sqrt{2n}} 1,$$

das heißt $_4 \leq \pi(\sqrt{2n}) \ln 2n.$ (iv)

Durch Addieren von (i), (ii), (iii) und (iv) folgt die Ungleichung $\ln N \leq \vartheta(2n) - \vartheta(n) + \vartheta(\frac{2n}{3}) - \pi(\sqrt{2n})(\ln 2 - \ln 2n)$, die auch

als $\vartheta(2n) - \vartheta(n) \geq \ln N - \vartheta(\frac{2n}{3}) - \pi(\sqrt{2n}) \ln n$ (v)

geschrieben werden kann.

Wir beweisen jetzt die Behauptung mit (v) für große n, wozu wir drei weitere Ungleichungen benutzen:

(a) Die linke Seite von Hilfssatz 1 liefert $\ln N > 2n \ln 2 - \ln 2\sqrt{n}$.

(b) Nach Hilfssatz 2 gilt

$$\vartheta(\tfrac{2n}{3}) = \vartheta\left(\left[\tfrac{2n}{3}\right]\right) < 2\left[\tfrac{2n}{3}\right] \ln 2 \leq 2(\tfrac{2n}{3}) \ln 2.$$

(c) Für $n \geq 8$ gilt $\pi(n) \leq \frac{n}{2}$, denn nur 2 ist eine gerade Primzahl; für $n \geq 32$ ist demzufolge

$$\pi(\sqrt{2n}) = \pi([\sqrt{2n}]) \leq \tfrac{1}{2}[\sqrt{2n}] \leq \frac{\sqrt{2n}}{2}.$$

In (v) eingesetzt, ergeben (a), (b) und (c) die (wegen (c) nur für $n \geq 32$ gültige) Abschätzung

$\vartheta(2n) - \vartheta(n) > 2n \ln 2 - \ln 2\sqrt{n} - \frac{4n}{3} \ln 2 - \frac{\sqrt{2n}}{2} \ln n$, die wir wieder umschreiben: $\vartheta(2n) - \vartheta(n) > (\frac{2n}{3} - 1) \ln 2 - (\frac{\sqrt{2n}+1}{2}) \ln n.$

Wir haben also $(\frac{2n}{3} - 1) \ln 2 - (\frac{\sqrt{2n}+1}{2}) \ln n > 0$ für genügend großes n . Für n=64 kann man dies einfach ausrechnen; für $n \geq 64$ schreiben wir die Ungleichung wieder in einer anderen Form und ersetzen n durch die reelle Funktionsvariable x:

$\sqrt{2x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\ln x}{\ln 2} - \frac{3\sqrt{2}}{\ln 2} \cdot \frac{\ln \sqrt{4x}}{\sqrt{4x}} > 0.$ Man zeigt nun, daß

$f_1(x) = \sqrt{2x} - \frac{3}{2} \frac{\ln x}{\ln 2}$ und $f_2(x) = \frac{-3\sqrt{2}}{\ln 2} \cdot \frac{\ln 4x}{4x}$ für $x \geq 64$ eine positive Ableitung besitzen, daher wachsend sind. Für x=64 ist $f_1 + f_2$ positiv, für wachsendes x gilt dies damit erst recht.

Womit die letzte Ungleichung für $n \geqq 64$ gezeigt und der Satz für solche n bewiesen wäre. (Die Überprüfung mittels Primzahltabelle für $n < 64$ kann man bei Langeweile in der Straßenbahn durchführen.)

Dieser Beweis dürfte beim ersten Überfliegen freilich eher abstoßen als zum intensiven Durcharbeiten anregen. Aber es sei noch einmal an eingangs zu diesem Kapitel gemachten Bemerkungen erinnert. Und alle zum Beweis benutzten Gedanken sind angegeben oder mittels Schulmathematik nachvollziehbar.

5. Der Primzahlsatz

Wir wollen noch die weitere Entwicklung der Primzahltheorie wenigstens andeuten, ohne allerdings die entsprechenden Beweise anzugeben.

Bereits C.F. Gauß (1777 - 1855) und A.M. Legendre (1752 - 1833) sprachen die Vermutung aus, daß das Verhalten von $\pi(x)$ asymptotisch gleich dem von $\frac{x}{\ln x}$ sei. Das heißt, sie vermuteten $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1$. Diese Vermutung konnte allerdings nicht bewiesen werden, und lange Zeit gab es keine bedeutenden Fortschritte auf diesem Gebiet. P.L. Tschebyscheff gelang zwar noch kein Nachweis dieses Grenzwertes, aber er konnte zunächst zeigen, daß dieser Limes, falls er überhaupt existiert, gleich 1 sein muß. Weiterhin führte er die in 4. definierten Funktionen ein und wies nach, daß sich mit ihrer Hilfe die Untersuchung von $\pi(x)$ auf einfachere Funktionen reduzieren läßt, und zwar (das Zeichen $\sim$ bedeute asymptotische Gleichheit)

$$\pi(x) \sim \frac{\vartheta(x)}{\ln x} \sim \frac{\psi(x)}{\ln x} ,$$

womit die Mathematiker schon wesentlich "handlichere" Ausdrücke zur Verfügung hatten. Der Primzahlsatz $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1$ konnte damit in der Form $\psi(x) \sim x$ bewiesen werden. Schließlich wurde diese Aussage 1896 durch J. Hadamard und C. de la Vallée-Poussin unabhängig voneinander bewiesen, und zwar durch Hilfsmittel aus der Theorie der über den komplexen (!) Zahlen definierten Funktionen. Fünfzig Jahre lang galt daher der Primzahlsatz als unzugänglich für elementarmathematische Methoden. Ein lediglich auf Abschätzungen reeller Funktionen (und Integralen über ihnen) aufgebauter Beweis wurde 1949 von Selberg angegeben.

Torsten Rothenwald, FSU

Mathematikstudent,
2. Studienjahr

Preisaufgaben

R 37 1

Für gegebene reelle Zahlen a,b finde man alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=\sqrt{\frac{b+x}{b-x}}+\sqrt{\frac{b-x}{b+x}}$$

R 38 2

Man gebe alle Lösungen der Gleichung $8x^4 + 8x^3 - x = a$ in Abhängigkeit vom reellen Parameter a an!

R 39 1

Gesucht sind alle arithmetischen Folgen, deren erste drei Glieder addiert 15 und multipliziert miteinander 80 ergeben.

R 40 1

Man berechne die Summe der ersten n Glieder der Reihe $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1)$.

R 41 1

Man finde alle Lösungen der Gleichung $x(x+1)(x-1)(x+2) = 24$.

R 42 2

Имеется два сплава золота и серебра, в первом количества этих металлов находятся в отношений 2:3, во втором - в отношений 3:7. Сколько необходимо взять каждого сплава, в котором количества золота и серебра были бы в отношений 5:II ?

Einsendeschluß: 1. 9. 1985

Die Anwendung der Spiegelung beim Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben

Das Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben wird oft erleichtert, wenn man dabei bestimmte Methoden anwendet. Jedoch gelingt die Lösung einer Aufgabe in der Regel nicht durch eine einzige Erkenntnis, gewissermaßen "auf einen Schlag", sondern meist sind je nach Komplexität der Aufgabe mehrere Vorgehensweisen erforderlich. Wenn man vom Anwenden einer bestimmten Methode beim Lösen einer Aufgabe spricht, so versteht man darunter, wie man zunächst vorgehen wird, d. h. nach welchen Prinzipien man sich sozusagen einen Zugang zur Lösung verschafft. Häufig gelingt es, die Konstruktion auf die Bestimmung eines Punktes (oder mehrerer Punkte) zurückzuführen, manchmal sucht man über die Konstruktion einer Teilfigur (meist eines Teildreiecks) oder einer zur gesuchten ähnlichen Figur zum Ziele zu kommen. Oftmals wendet man aber auch Transformationen auf die Planfigur oder Teile derselben an, um eine Konstruktionsmöglichkeit herauszufinden. Der Anwendung von Transformationen liegt folgende Überlegung zugrunde: Ein wichtiger Schritt auf dem Wege zur Lösung ist das Anfertigen einer Planfigur. Man geht dabei von der Annahme aus, daß eine Lösung existiert und entwirft eine skizzenhafte Darstellung einer Lösung, d. h. man zeichnet eine Figur, die möglichst "so aussieht wie" die verlangte, zeichnet darin die gegebenen Stücke ein und hebt diese farbig hervor. Nun zeigt es sich, daß oft die gegebenen Stücke "nicht günstig" liegen und sich die Aufgabe nicht auf die Konstruktion eines Punktes zurückführen läßt oder eine Hilfsfigur konstruierbar ist. In solchen Fällen versucht man mit Hilfe von Transformationen aus der skizzierten Lösungsfigur eine andere zu gewinnen, in der die gegebenen Stücke sich in einer solchen Lage befinden, daß man die Konstruktion ausführen kann. Es bereitet dann meist keine Schwierigkeit, daraus die gesuchte Figur zu finden.

Im folgenden soll an einer Reihe von Beispielen gezeigt werden, wie man durch Anwenden der Spiegelung Konstruktionsaufgaben lösen kann.

Mit Hilfe einer Spiegelung versucht man

1. gegebene Stücke in die Figur einzuführen,
2. gegebene Stücke "zusammen"zubringen,
3. gleichlange Strecken oder gleichgroße Winkel zur Deckung zu bringen,
4. eine symmetrische Figur zu erzeugen, so daß ein gesuchter Punkt auf der Symmetrieachse liegt.

Es ist jedoch oft so, daß sich eine Aufgabe nicht eindeutig einem der angeführten Fälle zuordnen läßt.

Zu 1.) Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, von dem a, b und $\alpha - \beta$ gegeben sind.
In der Planfigur, die man zunächst zeichnet, kann man a und b, nicht aber $\alpha - \beta$ einzeichnen.
Wählt man die Mittelsenkrechte der Strecke AB als Spiegelgerade, so ist $\overline{AC'}$ das Bild der Seite $\overline{BC}$ bei Spiegelung an dieser Geraden und der Winkel CAC' ist gleich $\alpha - \beta$.

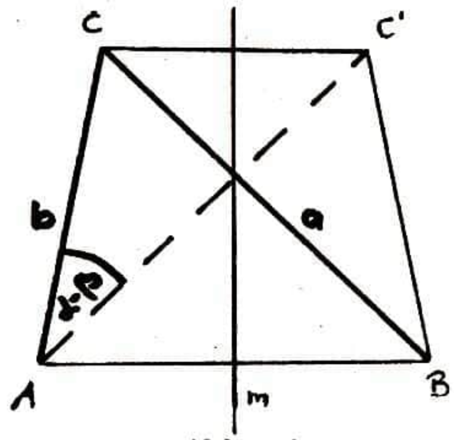


Abb. 1

Wegen $\overline{AC'} = \overline{BC} = a$ sind im Dreieck AC'C zwei Seiten und der der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt. Für den Punkt B lassen sich leicht zwei Bestimmungslinien finden.

Zu 2.) Es ist ein Tangentenviereck ABCD zu konstruieren, wenn folgende Stücke bekannt sind:
a, d, β, δ, $(a > d)$.
Nachdem man die gegebenen Stücke in die Planfigur eingezeichnet hat, erkennt man, daß zwar durch jede der gegebenen Seiten jeweils zwei Ecken des gesuchten Vierecks bestimmt sind. Mit welcher Seite man aber die Konstruktion auch beginnen würde, für einen dritten Eckpunkt

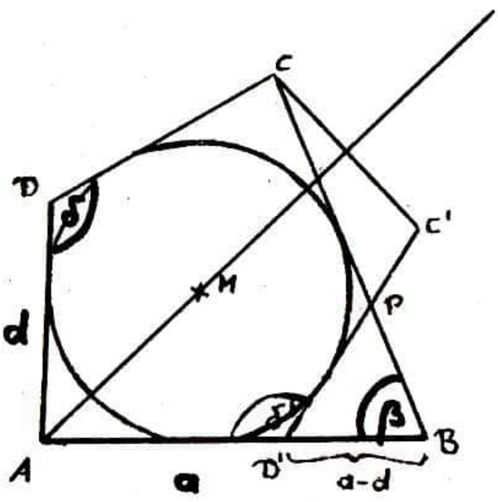


Abb. 2

läßt sich stets nur eine Bestimmungslinie angeben. Man versucht deshalb, die gegebenen Stücke "zusammenzubringen".
Ist M Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, so halbiert die Gerade AM den Winkel bei A. Bei Spiegelung des Dreiecks ACD an der Geraden AM wird D auf D' und C auf C' abgebildet. D' liegt auf der Geraden AB und die Gerade C'D' ist wie die Gerade CD Tangente an dem Kreis. C'D' schneide die Gerade BC in P.
Vom Dreieck D'BP sind die Seite $\overline{D'B}$ und die beiden Winkel BD'P und PBD' bekannt; es läßt sich konstruieren, ebenfalls der Inkreis des gesuchten Vierecks, für den neben der Geraden D'P auch die beiden Geraden BP und D'B Tangenten sind. Für A,D und C lassen sich je zwei Bestimmungslinien angeben.

Zu 3.) Gegeben ist ein Dreieck ABC und auf $\overline{AB}$ ein Punkt D. Konstruiere auf der Geraden AC einen Punkt P so, daß die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$ von P aus unter gleichen Winkeln erscheinen!

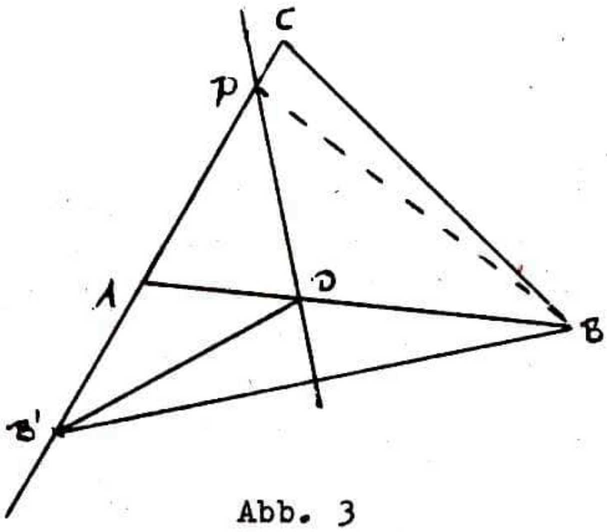


Abb. 3

$\overline{AD}$ und $\overline{DB}$ erscheinen von P aus unter gleichen Winkeln, wenn die Gerade DP den Winkel BPA halbiert.
Das Bild B' des Punktes B bei Spiegelung an der Geraden DP liegt auf der Geraden AC und es gilt: $\overline{DB'} = \overline{DB}$. Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{BB'}$ schneidet die Gerade AC in P.

zu 4a) Es sind eine Gerade s und zwei Kreise k_1 und k_2 gegeben (vgl. Abb. 4). Man konstruiere Quadrate, von denen zwei gegenüberliegende Ecken auf s und je eine Ecke auf k_1 und k_2 liegen. ABCD sei ein gesuchtes Quadrat mit A und C auf s, D auf k_1 und B auf k_2. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften des Quadrates ist D das Bild von B bei Spiegelung an der Geraden s. Da B auf k_2 liegt, muß sein Bild D auch auf k_2', dem Bild von k_2 liegen.

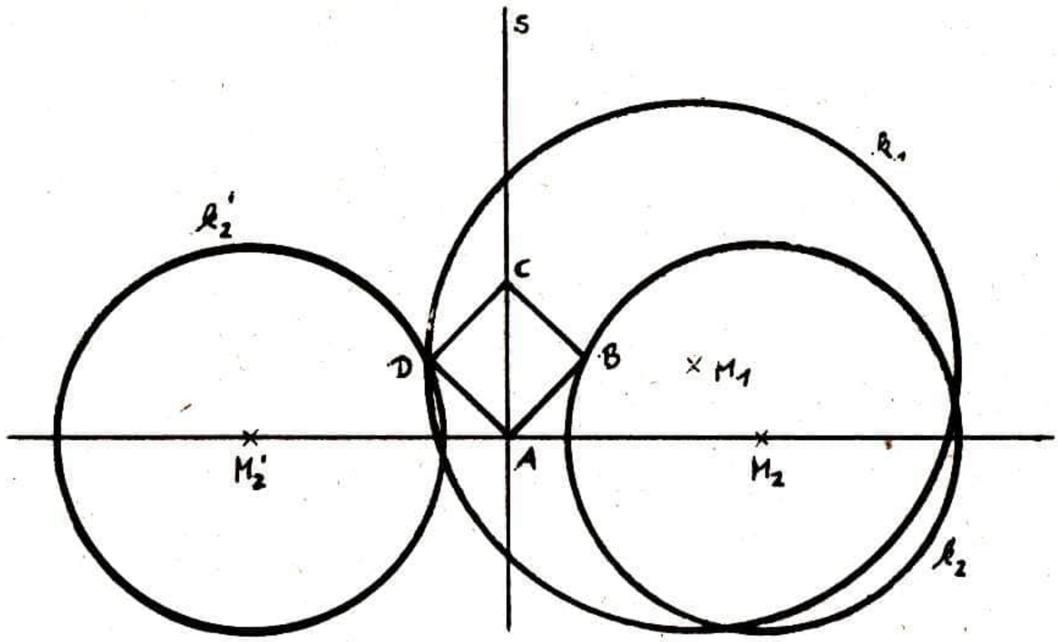


Abb. 4

D ist also Schnittpunkt der Kreise k_1 und k_2'. Nachdem D gefunden ist, lassen sich die übrigen Punkte des Quadrates leicht bestimmen.
Was läßt sich über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung aussagen?

b) Gegeben seien eine Gerade AB und zwei Punkte P und Q, die nicht auf $\overline{AB}$ liegen, aber beide bezüglich AB der gleichen Halbebene angehören (Vgl. Abb. 5). Es soll auf der Geraden AB derjenige Punkt O konstruiert werden, der nicht auf der Geraden PQ liegt und der folgender Bedingung genügt:
$\sphericalangle AOP = \sphericalangle BOQ$.
Man löst diese Aufgabe durch Spiegelung eines der Punkte P oder Q an der Geraden AB.

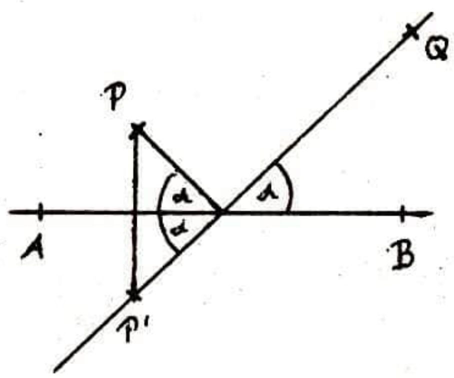


Abb. 5

Diese Aufgabe kommt in abgewandelter Form mehrfach in Praxis vor. Tritt z. B. eine Billardkugel auf eine Wand (an die Bande), wird sie so zurückgeworfen, daß die Bahn der Kugel vor dem Aufprall und ihre Bahn nach dem Aufprall gleiche Winkel mit der

Bande bilden.

Dazu folgende Aufgabe:

Auf der Spielfläche eines rechteckigen Billards liegen in den Punkten A und B zwei Kugeln (siehe Abb. 6). In welche Richtung muß man die Kugel B stoßen, damit sie

a) nach einmaliger Reflexion an einer Wand die Kugel A trifft,

b) nach zweimaliger Reflexion an den Wänden des Billards die Kugel A trifft?

Wieviele Lösungen sind dabei möglich?

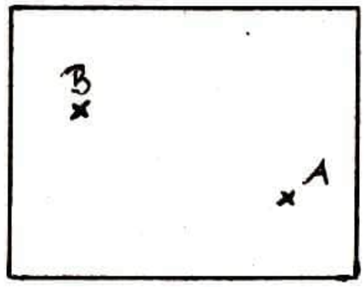


Abb. 6

Auch bei der Reflexion eines Lichtstrahls am ebenen Spiegel treffen wir auf den gleichen mathematischen Sachverhalt. Einfallswinkel α und Reflexionswinkel α' und demzufolge auch die beiden Winkel β und β' sind gleich groß (vgl. Abb. 7).

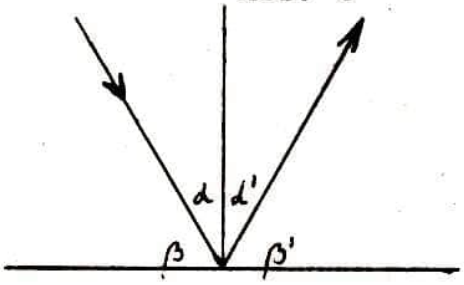


Abb. 7

Dazu die folgenden Aufgaben:

.) Ein Lichtstrahl, der von einem Punkt A ausgeht, soll an zwei Geraden s_1 und s_2 so reflektiert werden, daß er schließlich durch den gegebenen Punkt B hindurchgeht (vgl. Abb. 8).

Die Konstruktion ist immer ausführbar, ist das Ergebnis aber auch in jedem Fall physikalisch sinnvoll?

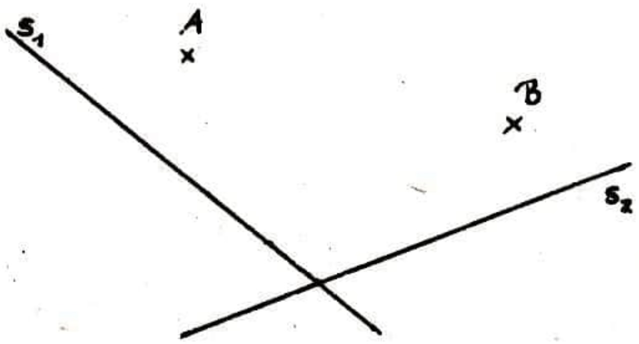


Abb. 8

.) Es sind zwei Parallelen p und q sowie die beiden dazwischenliegenden Punkte A und B gegeben (vgl. Abb. 9). Es ist der Weg eines Lichtstrahls zu konstruieren, der von A ausgeht und nach je zweimaliger Reflexion an p und q nach B geworfen wird.
Die erste Reflexion erfolge an p.

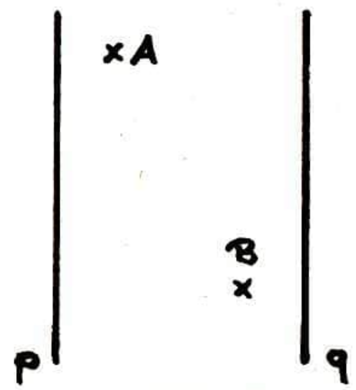


Abb. 9

Zu dem in Abb. 5 dargestellten Sachverhalt kann die Aufgabenstellung auch wie folgt formuliert werden:
Man bestimme auf der Geraden AB denjenigen Punkt O, für welchen der aus den Strecken $\overline{PO} + \overline{OQ}$ zusammengesetzte Weg ein Minimum wird.
Die Länge der an der Geraden AB gespiegelten Teilstrecke $\overline{PO}$ bleibt unverändert, d. h. es ist

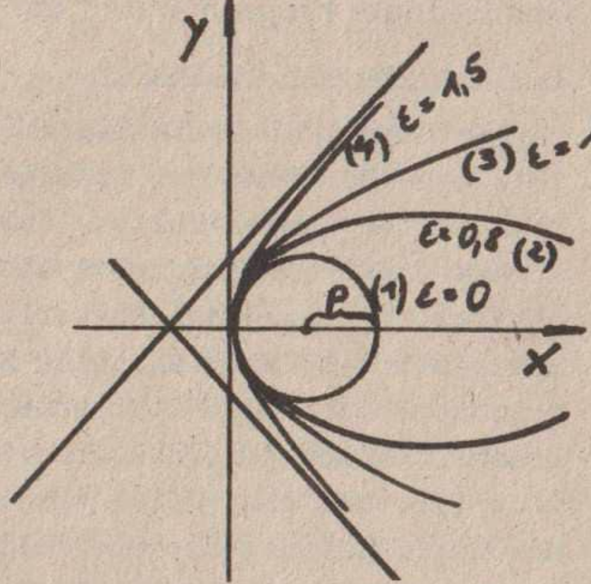
$$\overline{PO} + \overline{OQ} = \overline{P'O} + \overline{OQ}.$$

Für $\overline{P'O} + \overline{OQ}$ wird das Minimum aus der Verbindungsstrecke von Q und P' gebildet.
$\overline{PO}$ und $\overline{OQ}$ liegen für den gesuchten Weg also auf symmetrischen Geraden zur Geraden AB. Beide Wegstrecken bilden in O gleichgroße Winkel mit AB.
Dazu folgende Aufgabe:

.) Gegeben ist ein spitzer Winkel α und ein Punkt P, der zu α gehört, aber nicht auf den Schenkeln des Winkels liegt.
Man verbinde je einen Punkt eines Schenkels mit einem des anderen Schenkels und mit P so, daß das entstehende Dreieck den kleinstmöglichen Umfang hat.

Zum Schluß geben wir zur Übung noch einige Aufgaben an, die durch Anwendung der Spiegelung gelöst werden können.

1.) Gegeben sind zwei Kreise k_A und k_B mit den Mittelpunkten M_A und M_B sowie ein Punkt C.
Es ist ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, dessen Spitze C ist, dessen Basis parallel zu M_AM_B ist, dessen Eckpunkt A auf k_A und dessen Eckpunkt B auf k_B liegt.



(1) Kreis $\varepsilon = 0$
(2) Ellipse
(3) Parabel
(4) Hyperbel

Scheitelgleichung

$$y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2)x^2$$

7/8
85

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

19. Jahrgang

ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,40 M

Das Erlanger Programm und der Geometrielehrgang in der POS

1. Anliegen des Beitrages

Der Mathematiker Felix Klein (1849 - 1925) erhielt im Jahre 1872 eine Berufung zum Professor an die Universität Erlangen. Dort war es damals üblich, daß ein neu berufener Professor eine sogenannte Programmschrift über seine beabsichtigten wissenschaftlichen Forschungen vorlegen mußte. Kleins Programmschrift mit dem Titel "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" ist unter der Bezeichnung "Erlanger Programm" bekannt geworden und wird auch heute noch stark beachtet. (Irrtümlicher Weise wird verschiedentlich der Inhalt seiner Antrittsrede, die ebenfalls jeder neu berufene Professor halten mußte, als "Erlanger Programm" bezeichnet.)
Der nachstehende Beitrag verfolgt das Ziel, die Leser mit den wesentlichen Gedanken von F. Klein, wie er sie im "Erlanger Programm" formuliert hat, bekanntzumachen. Dazu ist für mathematisch interessierte Schüler der EOS die Einführung des Gruppenbegriffs notwendig, den sie gegenwärtig im Unterricht nicht kennenlernen. Es soll versucht werden, die prinzipielle Bedeutung dieses wichtigen Begriffes für die verschiedensten Teilgebiete der Mathematik deutlich zu machen. Möglicherweise werden dadurch Leser angeregt, sich gründlicher und umfassender mit den Gruppen zu beschäftigen. Der Beitrag will zeigen, daß Kleins Auffassungen den wissenschaftlichen Hintergrund für die Behandlung der Verschiebungen, Geradenspiegelungen, Drehungen und zentrischen Streckungen im Rahmen des Geometrielehrgangs der POS bilden und für systematisierende Betrachtungen große Bedeutung haben. Damit ist auch die Absicht verbunden, gewisse Orientierungen für die methodische Gestaltung des Unterrichts zu geben.

2. Das "Erlanger Programm"

2.1. Grundgedanken des "Erlanger Programms"

Klein stellt sich die Aufgabe, die verschiedenen Geometrien (die elementare euklidische oder Kongruenzgeometrie, die Ähnlichkeits- oder äquiforme Geometrie, die affine Geometrie, die affine Geometrie usw.) nach einheitlichen Gesichtspunkten zu untersuchen. Dabei geht er von der Überlegung aus, daß die Geometrie die Eigenschaften von Figuren untersucht, die bei gewissen Transformationen, d. h. eineindeutigen Abbildungen der Ebene auf sich (wie z. B. Verschiebungen, Geradenspiegelungen, Drehungen und zentrischen Streckungen), unverändert (invariant) bleiben. Die Transformationen bilden mit Ausnahme der Spiegelungen jeweils eine Gruppe, die man Transformationsgruppe nennt. Jeder Geometrie kann man eine derartige Transformationsgruppe zuordnen, was später noch ausführlich betrachtet werden soll. Durch die jeweilige Transformationsgruppe wird die betreffende Geometrie vollständig charakterisiert. Die in der Geometrie untersuchten Eigenschaften bleiben gegenüber allen Transformationen der Transformationsgruppe invariant. So kann man die verschiedenen Geometrien als Invariantentheorien der zugehörigen Transformationsgruppe auffassen. Die elementare Geometrie beispielsweise ist dadurch charakterisiert, daß ihre Sätze gegenüber der Hauptgruppe oder äquiformen Gruppe invariant bleiben. (Die Hauptgruppe besteht aus allen Verschiebungen, Geradenspiegelungen, Drehungen und zentrischen Streckungen.) Diese Invarianz ist unmittelbar einleuchtend, denn nimmt man irgendeinen Satz der elementaren Geometrie über Dreiecke, so ist ein solcher Satz ja gar nicht daran gebunden, wo in der Ebene das Dreieck gerade liegt, ob es groß oder klein ist, genauer, ob man das Dreieck in ein anderes ähnliches verwandelt, ob man das Dreieck in der Ebene verschiebt, oder ob man das Dreieck an einer Geraden der Ebene spiegelt. Auch durch eine Drehung um einen festen Punkt ändert sich an dem betreffenden Satz nichts.

2.2. Zum Gruppenbegriff

Die Bezeichnung Gruppe geht auf den bekannten französischen Mathematiker GALOIS (1811 - 1832) zurück. Die von ihm betrachteten Gruppen waren ausschließlich Permutationsgruppen, worauf in diesem Beitrag nicht näher eingegangen werden kann. Den Mathematikern KLEIN (1849 - 1925) und LIE (1842 - 1899) kommt das Verdienst zu, den Gruppenbegriff exakt definiert und wesentlich erweitert zu haben. Durch die Untersuchung von Transformationsgruppen haben sie die Verbindung der Gruppentheorie mit der Geometrie hergestellt. Inzwischen ist die Gruppentheorie zu einem umfangreichen wissenschaftlichen Gebäude ausgebaut worden. Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich jedoch auf die Definition und Erläuterung des Gruppenbegriffs.

D e f i n i t i o n 1: Eine Menge G von Elementen a,b,c,... heißt Gruppe genau dann, wenn die folgenden 4 Axiome erfüllt sind:

(I) Je zwei Elementen $a,b \in G$ ist eindeutig ein Element $c \in G$ zugeordnet (man bezeichnet dieses Element c meist als "Produkt" von a und b und verwendet die Bezeichnung $c=a \cdot b$, in dieser Darstellung ist die Reihenfolge zu berücksichtigen, weil im allgemeinen Fall $a \cdot b \neq b \cdot a$ ist).

(II) Es gilt das Assoziativgesetz, d. h. es ist $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(III) In G existiert ein Element e derart, daß für alle $a \in G$ die Bedingung $a \cdot e = e \cdot a = a$ erfüllt ist (man kann beweisen, daß es nur ein Element mit dieser Eigenschaft geben kann).
Das Element e wird Einselement bzw. Einheitselement bzw. neutrales Element genannt.

(IV) Zu jedem Element $a \in G$ existiert ein Element $a^{-1} \in G$, für das $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ gilt.
Das Element a^{-1} bezeichnet man als inverses Element von a.

Ist in einer Gruppe außerdem noch das Kommutativgesetz erfüllt, d. h. gilt für beliebige Elemente a und b der Gruppe $a \cdot b = b \cdot a$, so nennt man sie kommutativ oder abelsch.
Der Gruppenbegriff hängt nicht von der Bezeichnung der Zuordnungsvorschrift (man nennt das auch Art und Weise der Verknüpfung von je 2 Elementen) als Multiplikation ab, wie die nachfolgenden Beispiele zeigen werden. Es kann sich u. a. auch um eine additive Verknüpfung $a+b$ handeln. Man spricht dann von einer additiven Gruppe, ihr neutrales Element pflegt man mit 0 zu bezeichnen und nennt es Nullelement, es erfüllt die Bedingung

$a+0 = 0+a = a$ für alle $a \in G$. Das bezüglich der Addition inverse Element zu a schreibt man $(-a)$ und nennt es das zu a negative oder entgegengesetzte Element; es gilt $a+(-a) = (-a)+a = 0$. Eine additive abelsche Gruppe heißt auch Modul.

D e f i n i t i o n 2: Eine nichtleere Teilmenge U einer Gruppe G heißt eine Untergruppe von G, wenn in U bezüglich der in der Gruppe G definierten Zuordnung alle 4 Axiome erfüllt sind.

Beispiel 1:
Die Menge G_1 sei die Menge der (positiven und negativen) ganzen Zahlen einschließlich der Zahl Null. Je zwei beliebigen ganzen Zahlen wird ihre Summe zugeordnet, die wiederum eine ganze Zahl ist. Man überzeugt sich leicht davon, daß bei dieser Verknüpfung alle Gruppenaxiome erfüllt sind. Das neutrale Element ist die Zahl 0, das inverse Element z. B. der ganzen Zahl (-5) ist (+5). Außerdem gilt das Kommutativgesetz, d. h. G_1 ist eine additive abelsche Gruppe.

Beispiel 2:
Man könnte vermuten, daß die Menge der ganzen Zahlen auch bezüglich der Multiplikation als Verknüpfung eine Gruppe bilden und in diesem Falle das neutrale Element die Zahl 1 sei. Eine Prüfung ergibt, daß die 3 ersten Bedingungen erfüllt sind, jedoch nicht Axiom (IV). Das inverse Element der ganzen Zahl 4 beispielsweise wäre $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ ist jedoch keine ganze Zahl. Folglich liegt keine Gruppe vor.

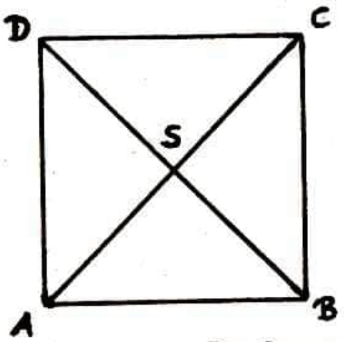
Beispiel 3:
Die Menge G_2 der positiven rationalen Zahlen dagegen bildet bezüglich der Multiplikation als Verknüpfung eine Gruppe, wovon man sich leicht überzeugen kann. (Die Zahl 1 ist das neutrale Element; das inverse Element einer beliebigen rationalen Zahl r ist die reziproke Zahl $\frac{1}{r}$.)

Beispiel 4:
Sei G_3 die Menge aller (positiven und negativen) rationalen Zahlen einschließlich der Zahl 0. Je zwei beliebigen rationalen Zahlen a und b werde ihre Summe $a+b$ zugeordnet. Auch in diesem Falle liegt eine Gruppe vor; das neutrale Element ist die Zahl

0 und das inverse Element einer beliebigen rationalen Zahl a ist die entgegengesetzte rationale Zahl (-a). Die Gruppe G_3 ist ebenso wie die Gruppe G_2 kommutativ.
Zu bemerken ist noch $G_1 \subset G_3$, d. h. die Gruppe G_1 ist eine Untergruppe der Gruppe G_3.

Beispiel 5:

Die zu untersuchende Menge - sie werde G_4 genannt - sei die Menge derjenigen Drehungen eines Quadrates ABCD um den Schnittpunkt S einer Diagonalen, die die Figur in sich überführen.



Je zwei Drehungen, die sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2 unterscheiden, werden als identisch betrachtet. Es gibt unter diesen Voraussetzungen insgesamt 4 Drehungen und die Menge G_4 besteht aus folgenden Elementen:

a_0: Drehung um 0° ("In-Ruhe-lassen")
a_1: Drehung um $\frac{\pi}{2}$
a_2: Drehung um π
a_3: Drehung um $\frac{3\pi}{2}$

Die Verknüpfung von je zwei Elementen wird definiert als das Nacheinanderausführen der entsprechenden Drehungen. Die Menge G_4 erfüllt alle Gruppenaxiome, wie man leicht feststellen kann. Als neutrales Element enthält G_4 das Element a_0; das inverse Element von a_1 z. B. ist das Element a_3, denn $a_1a_3 = a_3a_1 = a_0$ (a_1a_3 bzw. a_3a_1 bedeutet ja Drehung um 2π, und diese Drehung ist nach unseren Festlegungen mit der Drehung um 0° identisch). Da die Verknüpfung der Elemente kommutativ ist, handelt es sich um eine abelsche Gruppe. Die verschiedenen Möglichkeiten der Verknüpfung kann man sehr übersichtlich in der folgenden Tafel darstellen:

	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_2	a_3	a_0
a_2	a_2	a_3	a_0	a_1
a_3	a_3	a_0	a_1	a_2

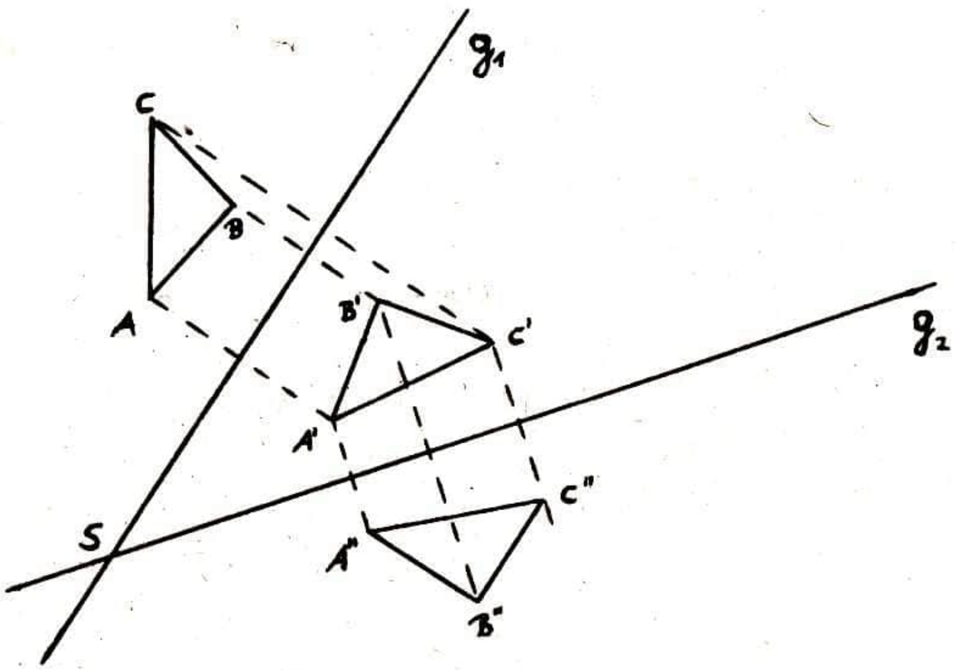
Beispielhafte Erläuterung:

a_1 (Drehung um $\frac{\pi}{2}$) ist das Ergebnis der Verknüpfung von a_2 (Drehung um π) und a_3 (Drehung um $\frac{3\pi}{2}$), denn die Drehung um $\frac{5\pi}{2}$ wird mit der Drehung um $\frac{\pi}{2}$ identifiziert.

Beispiel 5 läßt sich in der Weise verallgemeinern, daß man die Menge aller Drehungen um einen festen Punkt betrachtet. Wie die Anschauung zeigt, bildet diese Menge ebenfalls eine Gruppe. Auf den exakten Beweis soll verzichtet werden.

Beispiel 6:

Das letzte Beispiel legt die Frage nahe: Ist die Menge aller Geradenspiegelungen ebenfalls eine Gruppe, wenn man die Verknüpfung von zwei Spiegelungen als das Nacheinanderausführen dieser beiden Spiegelungen definiert?



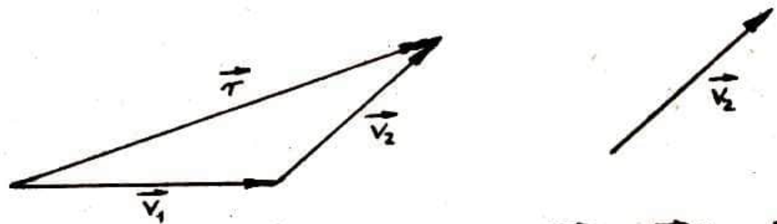
(Skizze)

Diese Frage muß man verneinen, denn sind die beiden Spiegelgeraden zueinander parallel, so ist die Verknüpfung eine Verschiebung, und schneiden sich die beiden Spiegelgeraden in einem Punkt S, so ist die Verknüpfung eine Drehung um S. Das das Gruppenaxiom (I) nicht erfüllt ist, liegt keine Gruppe vor.

Beispiel 7:

Beim letzten Beispiel wollen wir uns mit der Menge aller Verschiebungen beschäftigen. Das Verknüpfen von zwei gegebenen Verschiebungen möge wieder das Nacheinanderausführen dieser Verschiebungen bedeuten. Bei dieser Verknüpfung ist die Menge aller Verschiebungen eine Gruppe. Den Nachweis der Gruppeneigenschaften führt man am schnellsten mit Hilfe der Vektorrechnung, denn jede Verschiebung läßt sich eindeutig durch einen Vektor charakterisieren. Das Nacheinanderausführen zweier Verschiebungen bedeutet das Addieren zweier Vektoren. Aus der Definition und den Gesetzmäßigkeiten der Vektoraddition ergibt sich:

Die Summe zweier Vektoren v_1 und v_2 ist wieder ein Vektor, d.h. $\vec{v}_1+\vec{v}_2 = \vec{r}$ (Axiom I),



Die Vektoraddition ist assoziativ, es ist $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$ (Axiom II),
das neutrale Element dieser Gruppe ist der Nullvektor $\vec{o}$, der die Gleichungen $\vec{v} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{v} = \vec{v}$ erfüllt (Axiom III), wegen $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{o}$ ist das inverse Element eines Vektors $\vec{v}$ der dazu entgegengesetzte Vektor $(-\vec{v})$ (Axiom IV).
Da die Vektoraddition außerdem noch kommutativ ist, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$, liegt eine abelsche Gruppe vor.
Abschließend sei zur Bedeutung der Gruppen erwähnt, daß sie neben den Anwendungen in der Geometrie überall dort eine Rolle spielen, wo Abbildungen, Transformationen und Symmetrieeigenschaften auftreten und Gebilde untersucht werden, die invariant

sind. Insbesondere findet die Gruppentheorie ihre Anwendung bei der Auflösung algebraischer Gleichungen (im Rahmen der Galoisschen Theorie). In der Relativitätstheorie spielt die Gruppe der Lorentz-Transformationen eine große Rolle. Mit Hilfe der Gruppentheorie kann man in der Kristallphysik durch Betrachtung der Symmetriegruppen einen Überblick über sämtliche möglichen Kristallformen gewinnen.

2.3. Die Gruppe der Bewegungen (Kongruenzgruppe) und ihre Untergruppen

Die Menge aller Verschiebungen, Drehungen um einen Punkt und Geradenspiegelungen bildet eine Gruppe G_B, die Bewegungs- oder Kongruenzgruppe genannt wird. Das konnte man schon nach der Besprechung der Beispiele 5, 6 und 7 vermuten. Dabei wird die Verknüpfung zweier Bewegungen wieder als das Nacheinanderausführen der betreffenden Bewegungen definiert.

Auf den strengen Beweis dafür, daß in G_B die 4 Gruppenaxiome erfüllt sind, soll in diesem Rahmen verzichtet werden. Die Menge aller Verschiebungen G_V (siehe Beispiel 7) und die Menge aller Drehungen G_D (siehe Beispiel 5) sind Untergruppen der Bewegungsgruppe G_B, die Menge aller Geradenspiegelungen dagegen nicht (siehe Beispiel 6). Durch folgende Übersicht wurden die Invarianten der Bewegungsgruppe verdeutlicht:

Bewegungsgruppe G_B

Transformationen:	Invarianten:
Verschiebungen,	Orthogonalität von zwei Geraden;
Drehungen um einen Punkt,	Parallelität von zwei Geraden;
Geradenspiegelungen.	Inzidenz (vereinigte Lage) von Punkt und Gerade;
	Anordnung von Punkten auf einer Geraden;
	Streckenlänge;
	Winkelgröße.

Die durch die Elemente der Bewegungsgruppe G_B bzw. deren Verknüpfungen definierten Abbildungen bezeichnet man kurz als längentreue und winkeltreue Abbildungen; die Originale (z. B. Winkel, Strecken, Dreiecke, Vierecke) und deren Bilder heißen kongruent zueinander. Durch die Bewegungsgruppe wird die sogenannte Kongruenzgeometrie beschrieben.

Untergruppen

G_V (Gruppe aller Verschiebungen)

G_D (Gruppe aller Drehungen um einen Punkt)

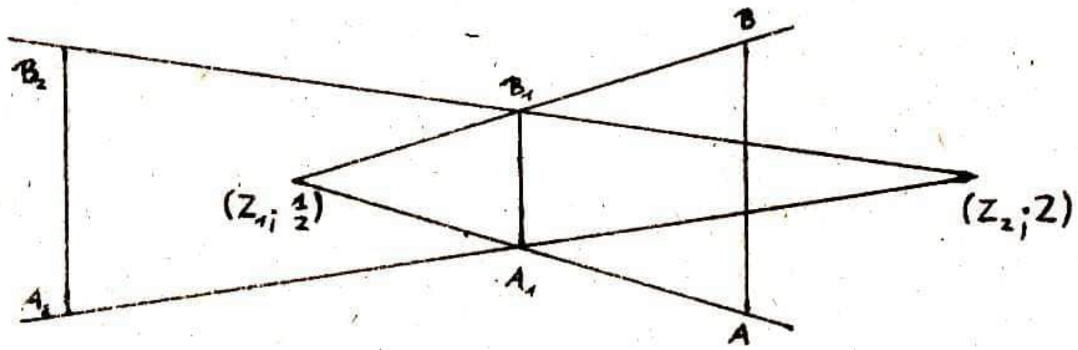
Nicht: (Menge aller Geradenspiegelungen)

$G_{V,\,D}$

(Die Menge aller Verschiebungen und Drehungen um einen Punkt ist ebenfalls eine Untergruppe)

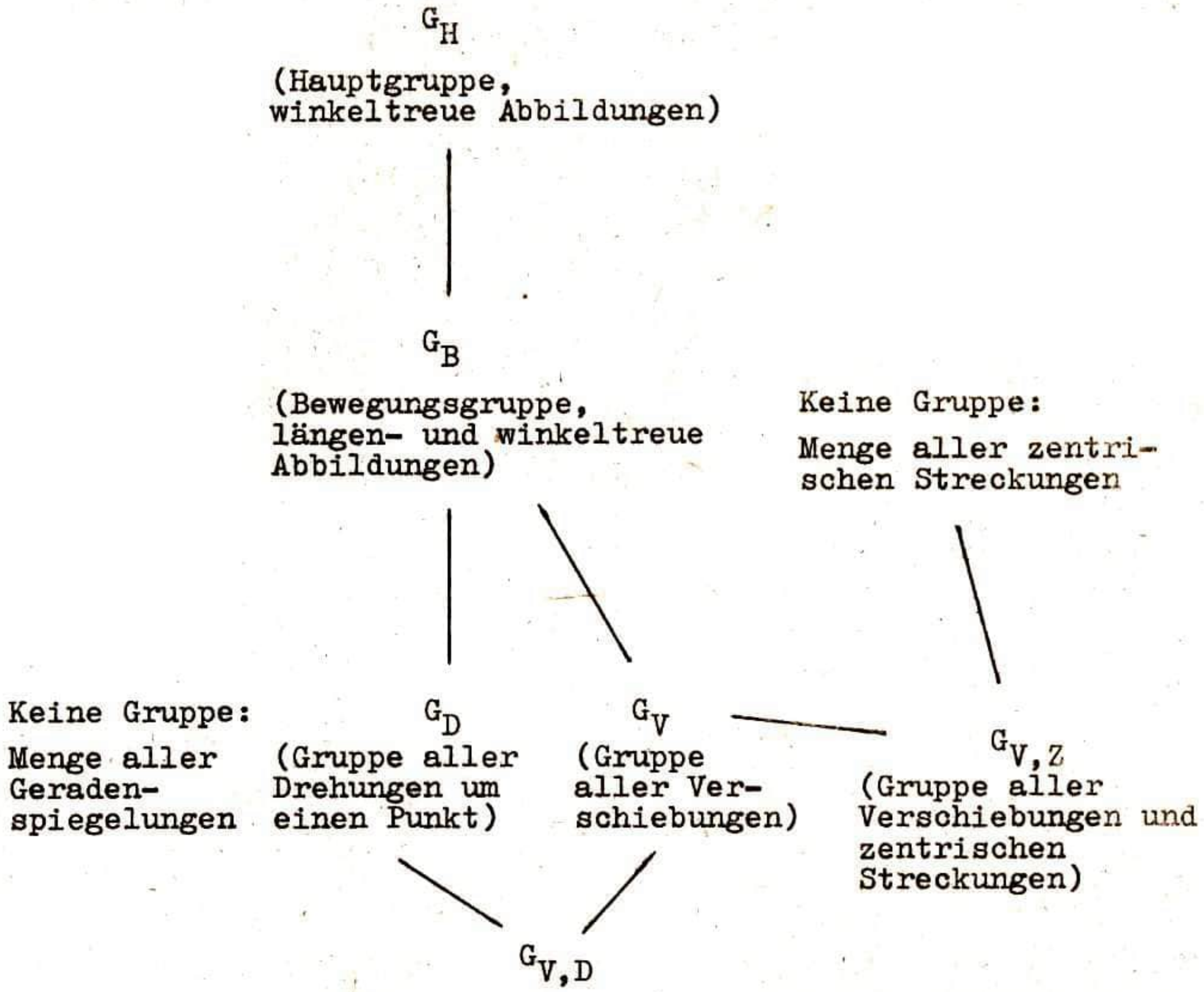
2.4. Die Hauptgruppe oder äquiforme Gruppe

Es soll zunächst die Menge aller zentrischen Streckungen betrachtet werden, wobei eine zentrische Streckung durch Angabe eines Streckungszentrums Z und eines Streckungsfaktors k ($k \in P$, $k > 0$) eindeutig festgelegt ist. Es ergibt sich die Frage, ob die Menge aller zentrischen Streckungen bezüglich des Nacheinanderausführens als Verknüpfung eine Gruppe bildet. Diese Frage muß verneint werden, denn im Falle $Z_1 \neq Z_2$ und $k_1 \cdot k_2 = 1$ ergibt das Nacheinanderausführen der beiden zentrischen Streckungen $(Z_1;\ k_1)$ und $(Z_2;\ k_2)$ eine Verschiebung, wie das folgende einfache Beispiel veranschaulicht:



Folglich ist das Gruppenaxiom (I) nicht erfüllt, und es liegt keine Gruppe vor. Dagegen bildet die Menge aller Verschiebungen, Drehungen um einen Punkt, Geradenspiegelungen und zentrischen Streckungen eine Gruppe, die Hauptgruppe G_H oder äquiforme Gruppe der Transformationen. Man erkennt sofort, daß die Hinzunahme der Menge aller zentrischen Streckungen zu den Elementen

der Bewegungsgruppe G_B den Verzicht auf die Längentreue der Abbildungen bedeutet. Die Hauptgruppe G_H oder äquiforme Gruppe der Transformationen charakterisiert die Ähnlichkeits- oder äquiforme Geometrie.
Durch folgende Übersicht soll der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Transformationsgruppen dargestellt werden:



2.5. Ausblick

Verzichtet man auch auf die Winkeltreue, so gelangt man zu einer Transformationsgruppe, die als affine Gruppe bezeichnet wird und die affine Geometrie charaktersiert. Wesentliche Invarianzeigenschaften der affinen Abbildungen sind die Parallelität von 2 Geraden, die Inzidenz von Punkt und Gerade und das Teilverhältnis je dreier Punkte. Auf eine exakte Definition dieser Transformationen muß hier verzichtet werden. Beispielhaft sei erwähnt, daß bei einer affinen Abbildung ein Kreis in eine Ellipse übergeht. Wenn man bei der senkrechten Eintafelprojektion eine ebene Figur um die Spur ihrer Ebene klappt, so ist die senkrechte Eintefalprojektion das affine Bild dieser Umklappung.

Geht man noch einen Schritt weiter und verzichtet bei den elementaren geometrischen Eigenschaften auch noch auf die Parallelität von 2 Geraden, so stößt man auf die Gruppe der projektiven Transformationen, die die projektive Geometrie beschreibt. Als elementare geometrische Eigenschaft bleibt die Inzidenz von Punkt und Gerade erhalten. Es sei nur noch darauf hingewiesen, daß projektive Abbildungen bei der Zentralprojektion entstehen.

Projektive Transformationsgruppe	———	Projektive Geometrie
Affine Transformationsgruppe	———	Affine Geometrie
Hauptgruppe	———	Ähnlichkeitsgeometrie
Bewegungsgruppe	———	Kongruenzgeometrie

3. Die Widerspiegelung des "Erlanger Programms" im Geometrielehrgang der POS

Nachfolgend soll untersucht werden, ob man das "Erlanger Programm" als den wissenschaftlichen Hintergrund für die in den Lehrbüchern realisierte Konzeption zur Behandlung der Verschiebungen, Geradenspiegelungen, Drehungen um einen Punkt und zentrischen Streckungen betrachten kann.

Diese Frage besteht aus 2 Teilfragen, nämlich:

1. Werden bei der Behandlung der genannten Transformationen die invarianten geometrischen Eigenschaften deutlich herausgearbeitet?

2. Werden bei der Lehrbuchgestaltung die vier Gruppeneigenschaften der jeweiligen Transformationsgruppe berücksichtigt?

3.1. Die Behandlung der Verschiebungen, Geradenspiegelungen und Drehungen um einen Punkt

Bekanntlich erfolgt die Behandlung der Bewegungen in den Klassen 4, 5 und 6, wobei

- in Klasse 4 die Verschiebungen Unterrichtsgegenstand sind,
- in Klasse 5 die Verschiebungen wiederholt und die Geradenspiegelungen sowie die Drehungen um einen Punkt gelehrt werden und schließlich
- in Klasse 6 nach einer Wiederholung das Nacheinanderausführen von Verschiebungen, Geradenspiegelungen und Drehungen um einen Punkt behandelt wird und darauf aufbauend die Begriffe Bewegung und Kongruenz definiert werden. Eine Analyse der Lehrbücher ergibt, daß <u>die invarianten elementargeometrischen Eigenschaften</u> der Verschiebungen, Spiegelungen an einer Geraden und Drehungen um einen Punkt anschaulich herausgearbeitet und explizit formuliert werden. So heißt es z. B. im Lehrbuch für Klasse 5 (S. 158):

"Für jede Spiegelung gilt:

(1) Jede Strecke $\overline{AB}$ hat als Bild eine Strecke, die Strecke $\overline{A'B'}$. $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ sind gleich lang.

(2) Jede Gerade g = AB hat als Bild eine Gerade, die Gerade g' = A'B' ... .

(3) Sind zwei Geraden zueinander parallel, so sind auch ihre Bildgeraden zueinander parallel.

(4) Der Schnittwinkel zweier Geraden ist stets gleich dem Schnittwinkel ihrer Bildgeraden. Stehen insbesondere die beiden Geraden aufeinander senkrecht, so stehen auch ihre Bildgeraden aufeinander senkrecht."

Inhaltlich gleichwertige Aussagen findet man auch bezüglich der Drehungen um einen Punkt (Lehrbuch Kl. 5, S. 178/179) und der Verschiebungen (Lehrbuch Kl. 4, S. 196 bzw. S. 200), wobei bei den Verschiebungen in Klasse 4 die Aussage über die Invarianz der Winkelgröße fehlt, weil die notwendigen stofflichen Voraussetzungen noch nicht behandelt sind. Die bezüglich der

Spiegelungen zitierten Invarianzeigenschaften werden in Klasse 6 (Lehrbuch S. 135) als gemeinsame Eigenschaften aller Verschiebungen, Geradenspiegelungen und Drehungen um einen Punkt herausgearbeitet. Unverständlich ist, warum dabei der Invarianz der Streckenlänge eine Sonderstellung eingeräumt wird, indem sie als Satz gekennzeichnet und herausgestellt ist (siehe Lehrbuch Kl. 6, S. 134). Rein sachlich ist eine derartige Sonderstellung nicht gerechtfertigt, zumindest müßte in gleicher Weise die Invarianz der Winkelgröße als Satz formuliert werden. Aus den gemeinsamen Eigenschaften aller Verschiebungen, Geradenspiegelungen und Drehungen um einen Punkt sind folgerichtig die Eigenschaften der Bewegungen abgeleitet (siehe Lehrbuch Kl. 6, S. 143). Ein Vergleich mit den in 2.3. angeführten Invarianten der Bewegungsgruppe G_B zeigt geringfügige Unterschiede. Es ist sicher aus didaktisch-methodischen Gründen gerechtfertigt, wenn im Lehrbuch als eine Eigenschaft genannt wird, daß das Bild einer Geraden wieder eine Gerade ist. Im Grunde genommen ergibt sich diese Eigenschaft aus der Invarianz von Orthogonalität und Parallelität zweier Geraden. Es wäre jedoch angebracht, die Inzidenz von Punkt und Gerade zusätzlich als wichtige Eigenschaft der Bewegungen zu formulieren. Die Möglichkeiten, bei der inhaltlichen und methodischen Gestaltung der Lehrbücher die Gruppeneigenschaften der jeweiligen Transformationsgruppe im Auge zu haben und zu berücksichtigen, sind sicher gering, weil das für das Nacheinanderausführen von Bewegungen gleicher Art (von 2 oder mehr Verschiebungen bzw. Geradenspiegelungen bzw. Drehungen um einen Punkt) oder von verschiedener Art (z. B. drehen, anschließend spiegeln, danach verschieben usw.) zur Verfügung stehende Zeitvolumen sehr beschränkt ist. Außerdem würde es bei den Schülern zu Unverständnis führen, wollte man im Unterricht das neutrale Element ("In-Ruhe-lassen") der jeweiligen Transformationsgruppe erwähnen, weil es dafür keine echte Motivation gibt. Durch die Wahl geeigneter Beispiele sollte der Lehrer jedoch unbedingt die Assoziativität und Kommutativität der verschiedenen Bewegungen verdeutlichen. Außerdem ist es ohne viel Zeitaufwand möglich, nach der Verschiebung (bzw. Drehung) einer Figur nach derjenigen

Verschiebung (bzw. Drehung) zu fragen, welche die Bildfigur wieder in die Originalfigur überführt (d. h. nach dem inversen Element). Die Berücksichtigung der beiden letzten Hinweise führt zu einer tieferen geistigen Durchdringung der zu behandelnden Bewegungen. Es ist schade, daß es in den Lehrbüchern keine Beispiele oder Schüleraufträge gibt, die auf das Inverse hinzielen. Leider bleiben auch die Besonderheiten der Geradenspiegelungen (das Nacheinanderausführen zweier Spiegelungen ist eine Verschiebung oder eine Drehung) unberücksichtigt. Lediglich Aufgabe 11 (Lehrbuch Kl. 5, S. 164) deutet diesen Sachverhalt an.

3.2. Die Behandlung der zentrischen Streckungen und Ähnlichkeitsabbildungen

Auch bei der Behandlung der zentrischen Streckungen sind die Ideen des "Erlanger Programms" als wissenschaftliche und methodische Orientierungsgrundlage unverkennbar, denn neben der konstruktiven Komponente dieses Stoffgebietes stehen die Eigenschaften und das Nacheinanderausführen von zentrischen Streckungen im Mittelpunkt. Die innere Geschlossenheit des Gesamtlehrgangs der Abbildungen würde jedoch deutlicher hervortreten, wenn herausgearbeitet würde, daß für die zentrischen Streckungen dieselben Eigenschaften gelten wie für die Bewegungen, jedoch die "Längentreue" (Original- und Bildstrecke sind gleich lang) nur erhalten bleibt, wenn der Sonderfall k=1 (k Streckungsfaktor) vorliegt. Die als Abbildungseigenschaften formulierten Aussagen betreffen hier nicht nur Invarianzeigenschaften, sondern auch andere Gesetzmäßigkeiten, wie z. B.:
"(4) Das Bild jeder Strecke ist k-mal so lang wie ihr Original.' (Lehrbuch Kl. 8, S. 33).
Nach den vorliegenden Erfahrungen sind jedoch derartige Aussagen aus methodischen Gründen sehr zweimäßig. Leider vermißt man im Lehrbuchabschnitt "Ähnliche Figuren" (Lehrbuch Kl. 8, ab S. 36) eine zusammenfassende Darstellung der elementargeometrischen Eigenschaften, die bei Ähnlichkeitsabbildungen erhalten bleiben. Im Lehrbuch ist berücksichtigt, daß die Menge aller zentrischen Streckungen bezüglich des Nacheinanderausführens keine Gruppe bildet. Es wird das Nacheinanderausführen von 2

zentrischen Streckungen $(Z_1; k_1)$ und $(Z_2; k_2)$ untersucht und festgestellt, daß im Falle $Z_1 \neq Z_2$ und $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ "die Zusammensetzung beider Streckungen ... wiederum eine zentrische Streckung" ist (Lehrbuch Kl. 8, S. 36).
Gleichzeitig werden die Schüler auch aufgefordert, den Fall $k_1 \cdot k_2 = 1$ zu prüfen, bei dem - wie schon ausgeführt - eine Verschiebung entsteht. Im Lehrbuchabschnitt "17 Ähnlichkeitsabbildungen" (Lehrbuch Kl. 8, S. 36 bis S. 38) sind die Möglichkeiten, bei der Wahl der Beispiele und Aufgaben die Gruppeneigenschaften der Hauptgruppe G_4 zu berücksichtigen, bei weitem nicht ausgeschöpft. Das wäre jedoch wünschenswert, nicht der Gruppen, sondern des tieferen Verständnisses wegen.

4. Schlußbemerkungen

Die fachliche und methodische Orientierung des Lehrgangs zur Abbildungsgeometrie in der POS am "Erlanger Programm" ist unverkennbar und zu begrüßen. Wünschenswert wären dabei eine stärkere Konsequenz, eine größere Bewußtheit bei den Lehrern und eine noch mehr aufeinander abgestimmte innere Geschlossenheit dieses Lehrgangs, nicht als Verbeugung vor dem Gruppenbegriff, sondern wegen der stärkeren geistigen Durchdringung und des tieferen Verständnisses der geometrischen Transformationen. In dem vorstehenden Beitrag wurde versucht, dazu einige Anregungen zu geben.

Professor G .Schlosser, FSU
Bereich Methodik des Mathematikunterrichts

Die Wissenschaft überbrückt nicht die Abgründe des Denkens. Sie steht bloß als Warntafel davor. Die Zuwiderhandelnden haben es sich selbst zuzuschreiben.

Karl Kraus

Wie kann man mit algorithmisch unzugänglichen Problemen fertig werden?

1. Der Inhalt des Artikels in Kurfassung

Wir gehen von der Beobachtung aus, daß Computer ihre Arbeit taktweise, in kleinen Einzelschritten, erledigen. Heutige Computer schaffen etwa eine Million solcher Schritte (Operationen) in einer Sekunde. Die Zahl der Rechenschritte oder, wie wir auch sagen wollen, die Rechenzeit, kann nun zur Beurteilung der Kompliziertheit eines Rechenprozesses herangezogen werden. Es hat sich herausgestellt, daß Probleme existieren, die einerseits von sehr großem ökonomischen Interesse sind, bei denen aber andererseits schon für sehr kleine Eingaben astronomisch große Rechenzeiten der zu ihrer Lösung auszuführenden Rechenprozesse erforderlich sind. Solche Probleme wollen wir hier unzugänglich nennen.

Es ist nun eine verblüffende und praktisch bedeutungsvolle Erkenntnis, daß man in vielen Fällen eine drastische Senkung der Rechenzeit auf ein erträgliches Maß erreichen kann, wenn man sich mit Näherungslösungen an Stelle genauer Lösungen zufrieden gibt. Einige Beispiele dieser Art sollen im folgenden vorgestellt werden.

2. Was sind (diskrete) Optimierungsprobleme?

Um das bisher Gesagte genauer ausführen zu können, brauchen wir zunächst eine klare Vorstellung darüber, was ein Problem sein soll. Wir beschränken uns dabei auf sogenannte (diskrete) Optimierungsprobleme. Ein solches liegt dann vor, wenn folgende Dinge gegeben sind:
(Bei Verständnisschwierigkeiten sollte der Leser gleich die im nächsten Abschnitt angegebenen Beispiele mit einbeziehen.)

1. Eine Menge A sogenannter Eingaben, die wir uns als "Aufgaben" vorstellen wollen, zu denen "Lösungen" gesucht werden.
2. Zu jeder Eingabe x eine endliche Menge L(x) von "Lösungen".
3. Eine Bewertungsfunktion b der Lösungen, die jeder Lösung eine natürliche Zahl zuordnet, die wir als die "Güte" der

Lösung ansehen wollen.

Weiter wollen wir uns vorstellen, daß die Güte einer Lösung umso besser wird, je größer ihr b-Wert ist. (Auch der umgekehrte Fall ist denkbar. Hat man ihn vor Augen, muß man im folgenden "max" durch "min" ersetzen.)

Nun kann man jedem $x \in A$ einen <u>optimalen Wert</u>

$$b^*(x) = \max\{ b(y) : y \in L(x)\}$$

zuordnen, das ist also der größte b-Wert, den eine Lösung von x erreichen kann. Ist $b(y) = b^*(x)$ für ein $y \in L(x)$, so nennt man y eine <u>optimale (beste) Lösung</u> für x.

Das Optimierungsproblem besteht dann darin, zu jedem $x \in A$ eine optimale Lösung zu finden. (Wir vermeiden es, von <u>der</u> optimalen Lösung zu sprechen, weil es im allgemeinen mehrere verschiedene Lösungen gibt, die die Optimalitätsbedingung $b(y) = b^*(x)$ erfüllen.) Das Optimierungsproblem zu lösen, heißt, einen Algorithmus anzugeben, der eine Funktion f berechnet, die jedem $x \in A$ eine Lösung $f(x)$ derart zuordnet, daß $f(x) \in L(x)$ und $b(f(x)) = b^*(x)$ gilt.

Es geht also bei einem Optimierungsproblem darum, für eine <u>Schar gleichartiger Aufgaben</u> beste Lösungen zu finden, wobei durch eine Bewertungsfunktion festgelegt wird, was "beste" Lösungen sein sollen.

3. Beispiele für Optimierungsprobleme

<u>1. Beispiel:</u> Das Problem von den 2 Lastenträgern

Gegeben sind n Gegenstände mit bekannten Gewichten $x_1,\dots,x_n$ und zwei Lastenträger, die ein Tragevermögen von m Gewichtseinheiten haben. Es handelt sich nun darum, den beiden Lastenträgern eine möglichst große Zahl der gegebenen Gegenstände aufzubürden.

Wenn wir die Menge dieser Aufgaben als Beispiel für ein Optimierungsproblem begreifen wollen, wie sie im vorigen Abschnitt behandelt worden sind, brauchen wir nur folgende Festlegungen zu treffen:

<u>Eingaben</u> sind (n+1)-tupel der Form $x=(x_1,\dots,x_n;m)$, wobei

$n, m, x_1, \ldots, x_n$ beliebige positive natürliche Zahlen sein dürfen. (Man beachte, daß insbesondere auch die Zahl n der Gegenstände von Aufgabe zu Aufgabe variieren kann.)

Eine Lösung von $x=(x_1,\ldots,x_n;m)$ hat die Form (J_1,J_2), wobei $J_1 \cup J_2 \subseteq \{1,\ldots,n\}$ und $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ und $\sum_{i \in J_1} x_i \leq m$ und $\sum_{i \in J_2} x_i \leq m$ zu gelten hat. J_1 ist die Menge der Gegenstände, die dem ersten Lastenträger aufgeladen wird, und J_2 ist für den zweiten bestimmt.

Die Bewertungsfunktion b für die Lösungen ist definiert als $b((J_1,J_2))$ = Anzahl der Elemente von $J_1 \cup J_2$, das ist die Gesamtzahl der Gegenstände, die bei dieser Lösung getragen werden sollen.

$b^*(x)$ ist dann die größte Zahl von Gegenständen, die die beiden Lastenträger tragen können, ohne überlastet zu werden.

Ist beispielsweise (10,7,1,12,5,8;20) eine Eingabe, so bedeutet das, daß 6 Gegenstände mit den Gewichten 10,7,...,8 zur Auswahl stehen für zwei Lastenträger, von denen jeder 20 Gewichtseinheiten tragen kann. Einige Lösungen (der Leser sollte zur Übung alle Lösungen bestimmen) sind gegeben durch ({1,2,3},{4,6}), ({2,3,5},{1,6}) oder ({4,5},{3,6}). Das Mengenpaar ({1,4},{2,5,6}) ist keine Lösung, weil hier dem ersten Träger ein zu großes Gesamtgewicht, nämlich $x_1+x_4 = 10+12 = 22$ aufgeladen würde. Man sieht leicht ein, daß die beiden ersten Lösungen optimal sind und den optimalen Wert 5 realisieren.

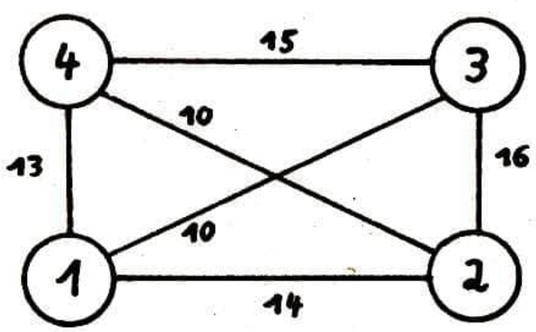
2. Beispiel: Das Rundreiseproblem (Dies ist ein Optimierungsproblem, bei dem beste Lösungen durch kleinste Werte der Bewertungsfunktion charakterisiert sind.)

Wir betrachten Aufgaben folgender Art. Gegeben sind n Städte, jede ist mit jeder durch eine Straße bekannter Länge verbunden, und ein Hausierer will von der Stadt 1 aus alle Städte auf einer kürzesten Route besuchen und wieder zur Stadt 1 zurückkehren.

Dieses sogenannte Rundreiseproblem läßt sich folgendermaßen in unser Schema einordnen.

Eingaben sind hier Netze von n Städten, die wir etwa durch Entfernungstabellen für diese n Städte beschreiben können. Dabei

ist n variabel, d. h. verschiedene Eingaben können verschiedene Anzahlen von Städten enthalten.
$L(x)$ ist die Menge der $(n-1)!$ verschiedenen Routen durch das Netz x dieser n Städte. (Eine Route ist durch Festlegen einer Reihenfolge gegeben, in der die n Städte besucht werden sollen. Da die Reise in der Stadt 1 beginnt, muß noch die Reihenfolge der übrigen n-1 Städte festgelegt werden. Dafür gibt es bekanntlich $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ Möglichkeiten. Beweis?)
Für jede Rundreise y verstehen wir unter $b(y)$ die Länge des Weges y. Das Optimum $b^*(x) = \min\{b(y) : y \in L(x)\}$ ist die minimale Weglänge einer Rundreise durch x. Für das Städtenetz



sind in der folgenden Tabelle alle Rundreisen zusammengestellt.

Route	Länge der Route
1 2 3 4 1	58
1 2 4 3 1	49
1 3 2 4 1	49
1 3 4 2 1	49
1 4 2 3 1	49
1 4 3 2 1	58

Wie man sieht, liegt das Optimum bei 49, und dieser Wert wird durch vier Routen realisiert. (Daß davon je zwei durch Umkehrung der Durchlaufrichtung auseinander hervorgehen, interessiert uns dabei nicht weiter.)

4. Über die Kompliziertheit von Optimierungsproblemen

Ohne genauer über Computer Bescheid zu wissen, kann jedermann zunächst folgende Aussagen leicht begreifen. Um ein Optimierungsproblem vom Rechner behandeln zu lassen, braucht man ein Verfahren (einen Algorithmus), nach dem der Rechner vorgehen kann, wenn ihm dieses Verfahren durch Programmierung mitgeteilt wird. Der Rechner ist dann in der Lage, für jede Eingabe x eine optimale Lösung y auszugeben. Die Zahl der Rechenschritte (die Rechenzeit), die der Rechner dazu benötigt, hängt offensichtlich von x ab. Wir nennen diese Zahl daher t(x).

Wie wir schon gesehen haben, ist x nicht immer eine natürliche Zahl. Es ist sinnvoll, die Rechenzeit nicht auf x selbst zu beziehen, sondern auf die Länge einer Niederschrift von x, d.h. auf die Zahl der Symbole (einschließlich eventueller Trennzeichen), die nötig sind, um die Eingabe x aufzuschreiben. Im obigen Beispiel x=(10,7,1,12,5,8;20) braucht man 18 Zeichen, um x aufzuschreiben. Wir wollen dann sagen, daß x die Länge 18 hat.

Als Maßstab für die Kompliziertheit, mit der ein Algorithmus arbeitet, nimmt man nun die Funktion

$$T(N) = \max \{t(x) : x \text{ hat die Länge } N\},$$

d. h. die größtmögliche Rechenzeit, die bei Eingaben der Länge N auftreten kann.

Selbstverständlich versucht man bei jedem Problem, einen Algorithmus mit möglichst kleiner Zeitkompliziertheit T(N) zu finden. Was das Rundreiseproblem und das Problem von den zwei Lastenträgern angeht, so haben alle bisher gefundenen Algorithmen zu ihrer Lösung eine Zeitkompliziertheit von mindestens $T(N) = 2^N$. (Das liegt, grob gesprochen, daran, daß all diese Algorithmen darauf hinauslaufen, alle Lösungen durchzumustern, und in beiden Fällen kann man sich überlegen, daß die Zahl der Lösungen exponentiell in der Länge der Eingabe sein kann.)

Diese exponentielle Zeitkompliziertheit bedeutet eine herbe Enttäuschung für den praktischen Anwender, denn ein Rechner, der etwa eine Million Operationen pro Sekunde ausführen kann, brauchte Rechenzeiten von etwa 13 Tagen, 36 Jahren oder 366 Jahrhunderten(!) für Eingaben der Länge 40, 50 bzw. 60. Da solche Eingabelängen für ökonomische Zwecke durchaus noch sinnvoll und notwendig sind, kann man mit den angegebenen Algorithmen nicht zufrieden sein. Wer kann schon 366 Jahrhunderte auf ein Rechenergebnis warten!

Nun liegt die Frage nahe: Erlauben die genannten Probleme grundsätzlich keine schnelleren Lösungsalgorithmen, oder waren wir bisher nur noch nicht geschickt genug, schnellere Algorithmen zu finden? Diese Frage ist offen, aber es bestehen triftige theoretische, hier nicht erörterbare Gründe zu der Annahme, daß diese Probleme wirklich so schwierig (unzugänglich) sind.

5. Verzicht auf genaue Lösungen - ein Mittel zur Überwindung der Unzugänglichkeit

Angesichts dieser Tatsache ist man gezwungen, sich nach Möglichkeiten umzusehen, wie man doch noch mit solchen Problemen fertig werden kann. Wir wollen hier nur einen von mehreren Auswegen diskutieren: den Verzicht auf genaue Lösungen. Dieser Ausweg funktioniert nicht immer, aber in manchen Fällen kann man dadurch zu sehr brauchbaren Rechenzeiten gelangen.

Wir behandeln ausführlich nur das Problem der zwei Lastenträger. Wir ändern es insofern ab, als wir uns jetzt für Funktionen f interessieren, die nicht die scharfe Bedingung

$$f(x) \in L(x) \quad \text{und} \quad b(f(x)) = b^*(x)$$

erfüllen, sondern die abgeschwächte

(1) $$f(x) \in L(x) \quad \text{und} \quad b(f(x)) \geq b^*(x)-1,$$

d. h. wir suchen Lösungen, die nun höchstens 1 vom Optimum abweichen. Die Abschwächung der ursprünglichen Aufgabenstellung, die wir vornehmen, ist also denkbar gering. Es ist deshalb beinahe unglaublich, daß sie schon dazu ausreicht, daß dieses abgeschwächte Problem mit der Zeitkompliziertheit $T(N)=cN^2\log^2 N$ (wobei wir mit N die Eingabelänge und c eine geeignete positive Konstante bezeichnen) lösbar ist. Und dies bedeutet, daß die Rechenzeit für Eingaben der Länge 60 nicht mehr Jahrhunderte, sondern nur noch Bruchteile einer Sekunde (!) beträgt. Jeder

Anwender nimmt eine (mögliche) Abweichung vom Optimum um 1 gern in Kauf, wenn dies zu derart beträchtlichen Rechenzeitgewinnen führt, die das Problem von einem unzugänglichen in ein solches verwandeln, das in einer für menschliche Belange vertretbaren Zeit gelöst werden kann.

Wir wollen nun einsehen, daß die Berechnung einer Funktion f, die die Bedingung (1) erfüllt, wirklich in der angegebenen Zeit erfolgen kann. Dazu geben wir folgendes Verfahren zur Berechnung von f an:

Eingabe: $x=(x_1,\dots,x_n;m)$.

1. Ordne $(x_1,\dots,x_n)$ nach wachsender Größe. Die Folge, die durch die Umordnung entsteht, wollen wir mit $(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_n})$ bezeichnen. Es gilt also $x_{i_1} \le x_{i_2} \le \dots \le x_{i_n}$.
2. Bilde die Summen
$$x_{i_1}$$
$$x_{i_1} + x_{i_2}$$
$$\vdots$$
und finde dabei l und dasjenige k heraus, für das
$$x_{i_1} + \dots + x_{i_l} \le m \quad \text{und, falls } l < n,$$
$$x_{i_1} + \dots + x_{i_l} + x_{i_{l+1}} > m$$
und
$$x_{i_1} + \dots + x_{i_k} \le 2m \quad \text{und, falls } k < n,$$
$$x_{i_1} + \dots + x_{i_k} + x_{i_{k+1}} > m$$
gilt.
3. Bilde $J_1 = \{i_1,\dots,i_l\}$ und
$$J_2 = \begin{cases} \{i_{l+1},\dots,i_k\} & \text{, falls } x_{i_{l+1}}+\dots+x_{i_l} \le m, \\ \{i_{l+2},\dots,i_k\} & \text{, sonst} \end{cases}$$
(Dies heißt insbesondere $J_2 = \emptyset$, falls l=k.)

Es ist klar, daß die beiden Lastenträger höchstens k Gegenstände tragen können. Denn k+1 oder mehr Gegenstände übersteigen das Tragevermögen beider Träger zusammengenommen, weil dies bereits für die k+1 leichtesten Gegenstände zutrifft. Dies heißt also, daß das Optimum k oder k-1 ist. Der letztere Fall tritt dann ein, wenn es nicht möglich ist, die k Gegenstände auf die Lastenträger so zu verteilen, daß kein Gegenstand übrigbleibt und die Belastungsgrenzen der Träger nicht überschritten werden. Ein Beispiel dafür ist $x=(6,7,9;11)$.

Da für die gefundene Lösung $f(x)$ ebenfalls nur die Werte $b(f(x)) = k$ oder $b(f(x)) = k-1$ in Frage kommen, liegt es auf der Hand, daß $b(f(x)) \geq b^*(x)$ gilt, (1) also erfüllt ist.

Ein Beispiel dafür, daß der Algorithmus keine optimale Lösung findet, ist $(3,4,5,8,8;15)$. Er findet die Lösung $(\{1,2,3\},\{5\})$, während $(\{3,4\},\{1,2,5\})$ optimal ist.

Wir kommen nun zur Abschätzung der Rechenzeit des Algorithmus. Mit N bezeichnen wir die Länge der Eingabe von x. Offensichtlich gilt $n \leq N$. Die Umordnung in der ersten Etappe kann mit n^2 Vergleichen erledigt werden (wie?). (Es sei angemerkt, daß sogar $b.N \log N$ Schritte ausreichen für ein geeignetes $b > 0$.) Eine Addition zweier Zahlen, deren Länge kleiner ist als M, kann in $a\,M \log^2 M$ Schritte bewerkstelligt werden, wobei $a > 0$ eine geeignete Konstante ist. Dieses Resultat ist nicht so einfach zu gewinnen, und es kann hier nur ohne Beweis mitgeteilt werden. Insgesamt sind in der 2. Etappe höchstens n Additionen zu erledigen, wobei jeweils die Länge der Summanden durch N abgeschätzt werden kann, also brauchen wir für die 2. Etappe des Algorithmus höchstens $an.N \log^2 N \leq a\,N^2 \log^2 N$ Schritte. Zum Aufschreiben von J_1 und J_2 werden nochmals höchstens n Schritte gebraucht, und zur Entscheidung der Fallunterscheidung für J_2 reichen $an.N \log^2 N \leq a\,N^2 \log^2 N$ Additionen. Das sind insgesamt höchstens

$$c_1 n^2 + 2aN^2 \log^2 N + c_2 n \leq cN^2 \log^2 N$$

Schritte mit einem geeigneten $c > 0$. Die Koeffizienten c_1 und c_2 kommen daher, daß zur Realisierung eines der notwendigen Rechenschritte auf einem Rechner eine gewisse feste Anzahl von Rechnerschritten erforderlich sind. Auf eine genauere Begründung dieser letzteren Aussage müssen wir hier verzichten, weil dazu ein tieferes Eindringen in die Theorie der Programmierung notwendig wäre.

6. Kleiner Ausblick auf weitere Resultate

Zunächst ist die folgende Bemerkung von Interesse.
Wenn man im Problem von den zwei Lastenträgern die Bewertungsfunktion - und damit das Problem selbst - folgendermaßen abändert

$$b((J_1,J_2)) = \sum_{i \in J_1 \cup J_2} x_i,$$

so erhält man wieder ein Optimierungsproblem, das jetzt darin besteht, eine möglichst große Last zu transportieren. Auch dieses Problem ist unzugänglich. Wenn man zu diesem Problem die Abschwächung (1) betrachtet, so bleibt es unzugänglich. Führt man dagegen die folgende großzügige Abschwächung ein

(2) $\qquad b(f(x)) \geq (1-\varepsilon)b^*(x), \qquad \varepsilon > 0$, konstant, aber beliebig klein,

so erhält man wieder Lösungen in vertretbarer Zeit.
Die Bedingung (2) bedeutet anschaulich, daß wir mit Lösungen zufrieden sind, deren Wert von der optimalen um einen festen, sehr kleinen Bruchteil des optimalen Wertes abweicht. Diese Bedingung ist wirklich sehr großzügig, weil für größer werdende x natürlich auch $b^*(x)$ immer größer wird.

Schließlich bemerken wir, daß das Rundreiseproblem selbst bei der Abschwächung (2) noch unzugänglich bleibt. Hier müssen also für praktische Belange gänzlich andere Wege gegangen werden.

Prof. G. Wechsung, FSU
Bereich Mathematische Kybernetik

Preisaufgaben

R 43

1

Beweise, daß für zwei ungerade Zahlen gilt, a^3-b^3 ist genau dann durch 2^n teilbar, wenn es a-b ist.

R 44

2

Beweise, daß die Lösungen der Gleichung

$$x^2 + 4kx + 4(k+1) = 0$$

für beliebige reelle Werte k reelle Zahlen sind. Berechne die Vorzeichen für alle möglichen Werte von k.

R 45

2

Berechne

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4} + \frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+3} = \frac{5}{2}.$$

R 46

1

$\log_{12} 2$ sei gleich a. Berechne $\log_6 16$.

R 47

1

Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks, von dem die Seitenhalbierende der Seite AC 6 cm lang ist und der Winkel bei A 45° und der bei B 15° groß ist.

R 48

2

Пусть a, b – катеты прямоугольного треугольника, c – гипотенуза, h – высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу. Доказать, что треугольник со сторонами h, $c+h$, $a+b$ является прямоугольным.

Einsendeschluß: 1. 11.85

Lösungen

Q 43 (nach Jürgen Schefter, Reichwalde, Dorfstr. 35)

Angenommen, es sei keine der Zahlen durch 3 teilbar. Dann gilt: $a \equiv 1 \bmod 3$ oder $a \equiv -1 \bmod 3$, also $a^2 \equiv 1 \bmod 3$. Analog folgt: $b^2 \equiv 1 \bmod 3$, $c^2 \equiv 1 \bmod 3$. Aus $a^2+b^2 = c^2$ folgt dann $1+1 \equiv 1 \bmod 3$. Da diese Gleichung falsch ist, stimmt die Annahme nicht, und eine Zahl muß durch 3 teilbar sein.

Q 44 (nach Jürgen Schefter, Reichwalde, Dorfstr. 35)

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$$

Da offensichtlich $x=0$ keine Lösung ist, kann man durch $\sqrt[3]{x}$ dividieren:

$$1 + \sqrt[3]{2-\frac{3}{x}} = \sqrt[3]{12-\frac{12}{x}}$$

Durch die Substitution $y = \sqrt[3]{2-\frac{3}{x}}$ folgt:

$$1 + y = \sqrt[3]{4+4y^3}$$

$$1 + 3y + 3y^2 + y^3 = 4 + 4y^3$$

$$y^3 - y^2 - y + 1 = 0$$

$$(y^2-1)(y-1) = 0$$

$$y_1=1 \quad y_2 = -1 \quad y_3 = 1$$

Wegen $x = \frac{3}{2-y^3}$ folgt

$$x_1=3 \quad x_2=1$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

Q 45 (nach Uta Hövel, Berlin, Fischerinsel 5)

Vor.: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0 \qquad (1)$

ges.: alle reellen x, die (1) erfüllen

Lsg: Angenommen, es gibt ein $x \in P$, das (1) erfüllt. Damit die Termumformungen übersichtlicher werden, substituiere ich. Es sei $z = x+2$.

Dann gilt:

$$\sqrt[3]{z-1} + \sqrt[3]{z} = -\sqrt[3]{z+1}$$

$$z-1+3\sqrt[3]{(z-1)^2 z} + 3\sqrt[3]{(z-1)z^2} + z = -(z+1)$$

$$3\sqrt[3]{(z-1)z}\,(\sqrt[3]{z-1} + \sqrt[3]{z}) = -3z$$

$$3\sqrt[3]{(z-1)z} \cdot \sqrt[3]{z+1}\,(-1) = -3z$$

$$3\sqrt[3]{(z-1)z(z+1)} = 3z$$

$$(z-1)z(z+1) = z^3$$

$$(z-1)z(z+1) - z^3 = 0$$

$$z((z^2-1)-z^2) = 0$$

$$z \cdot 1 = 0$$

$$z = 0$$

Wenn es eine Lsg. gibt $z=0 \leftrightarrow x=-2$

Rückschluß: für $x = -2$ gilt

$$\sqrt[3]{(-2)+1} + \sqrt[3]{(-2)+2} + \sqrt[3]{(-2)+3} =$$
$$= \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{+1} = 0$$

-2 ist also tatsächlich die einzige Lösung der Gleichung. $L = \{-2\}$

Q 46 (nach Steffen Großert, Berlin, Heidekampweg 90)

Eliminiert man α und β aus dem Gleichungssystem, so bleibt nur noch eine (unabhängige) Gleichung mit den restlichen Variablen a,b,x,y übrig.

Wir quadrieren die ersten beiden Gleichungen:

I' $\quad x^2 \cos^2\alpha + y^2 \sin^2\beta + 2xy \cos\alpha \sin\beta = a^2$

II' $\quad x^2 \sin^2\beta + y^2 \cos^2\alpha - 2xy \cos\alpha \sin\beta = b^2$

III $\quad (x^2+y^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2ab$

Jetzt addieren wir alle 3 Gleichungen und erhalten:

$$(x^2+y^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\beta) = a^2+2ab+b^2$$

und als Endergebnis:

$$2(x^2+y^2) = (a+b)^2$$

Q 49 (nach Holger Heinrich, Forst, Dr.-Otto-Nuschke-Str. 7a)

Wenn c eine Konstante ist,
hängt der Umfang wegen
a = a+b+c
nur noch von der Summe s
der Seiten a und b ab.

$s = a+b.$ (1)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad (2)$$

$$b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma} \qquad (3)$$

(2) und (3) in (1):

$$s = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma} + \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$s = \frac{c \sin\alpha + c \sin\beta}{\sin\gamma} \qquad (4)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \qquad (5)$$

(5) in (4):

$$s = \frac{c \sin\alpha + c \sin(180^\circ - \alpha - \gamma)}{\sin\gamma}$$

$$s = \frac{c \sin\alpha + c(\sin\alpha \cos\gamma + \sin\gamma \cos\alpha)}{\sin}$$

$$s = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma} + \frac{c \sin\alpha \cos\gamma}{\sin\gamma} + \frac{c \sin\gamma \cos\alpha}{\sin\gamma}$$

$$s = \left(\frac{c}{\sin\gamma} + c \cot\gamma\right) \sin\alpha + c \cos\alpha \qquad (6)$$

(wegen Quadrantenbez. und $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$)

Die Gleichung (6) beschreibt die Abhängigkeit der Summe s vom Winkel α , wobei γ und c Konstanten sind (lt. Aufgabe). Der Maximalwert von s ergibt sich als Nullstelle der 1. Ableitung der Funktion $f(\alpha) = s$, wenn die 2. Ableitung für diesen Wert negativ ist.

$$f'(\alpha) = s' = \left(\frac{c}{\sin\gamma} + c \cot\gamma\right)\cos\alpha - c \sin\alpha .$$

$$0 = \left(\frac{1}{\sin\gamma} + \cot\gamma\right) c \cos\alpha - c \sin\alpha \quad | + c \sin\alpha$$

$$c \sin\alpha = \left(\frac{1}{\sin\gamma} + \cot\gamma\right) c \cos\alpha \quad |: c\cos\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sin\gamma} + \cot\gamma \qquad (7)$$

Die Gleichung (7) ermittelt den Winkel α für den Fall des maximalen Umfangs aus dem Winkel γ .
Nun soll die Beziehung zwischen α und β untersucht werden.

$$180^\circ = \alpha + \beta + \gamma$$
$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \qquad (8)$$

(8) in (7):

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sin(180^\circ) - \alpha - \beta)} + \cot(180^\circ - \alpha - \beta)$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)} - \cot(\alpha + \beta) \qquad \text{(Quadrantenbez.)}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha} - \frac{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha} \quad |\cdot \cos\alpha\,(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)$$

$$\sin\alpha(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) = \cos\ (1 - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$

$$\sin^2\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha\sin\alpha = \cos\alpha - \cos^2\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\cos\beta = \cos\alpha$$

$$\cos\beta(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \cos\alpha$$

$$\alpha = \beta$$

Bei gegebener Seite c und gegebenem Winkel γ hat genau das Dreieck mit den gleichen Basiswinkeln, also das gleichschenklige Dreieck den größten Umfang.

Die 2. Ableitung der Funktion $f(\alpha)$ ist

$$f''(\alpha) = -\left(\frac{1}{\sin\gamma} + \cot\gamma\right) c \sin\alpha - c\cos\alpha$$

Die Funktion $f''(\alpha)$ ist negativ, wenn die Faktoren $\left(\frac{1}{\sin\gamma} + \cot\gamma\right)$, c, $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ positiv sind.

Wenn $\alpha = \beta$, dann folgt aus $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\alpha = \beta \leq 90^\circ$

d.h.

$\cos \alpha \geq 0$

$\sin \alpha \geq 0$ (α, β, γ haben positive Werte).

Aus $\left(\frac{1}{\sin\gamma} + \cot\gamma\right)$ wird

$$\frac{1}{\sin\gamma} + \cot\gamma = \frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

für $\gamma \leq 180^\circ$ (wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$) ist

$\sin\gamma \geq 0$ und $\cos\gamma \geq -1$, also $1+\cos\gamma \geq 0$.

$\rightarrow$ der Faktor $\frac{1}{\sin\gamma} + \cot\gamma$ ist Null oder positiv.

Da c eine Seite eines Dreiecks ist, ist auch der Faktor c positiv.

Damit ist bewiesen, daß $f''(\alpha)$ für $\alpha = \beta$ negativ ist, d. h. es handelt sich tatsächlich um den Maximalwert der Funktion $f(x)$.

Q 51 (nach Michael Gräber, Rostock, St.-Jantzen-Ring 49)

Ich zerlege das Intervall $\langle -10; 2\rangle$ so, daß ich mehrere Intervalle erhalte, wobei innerhalb von jedem Intervall $[z]$ gleich ist:

$[z]$	$z \in$	$[z]^2 = [z^2]$	$z^2 \in$	$z \in$	
-10	-10	100	$(99; 100\rangle$	$\langle -10; -\sqrt{99}) \vee (\sqrt{99}; 10\rangle$	-10
-9	$(-10; -9\rangle$	81	$(80; 81\rangle$	$\langle -9; -\sqrt{80}) \vee (\sqrt{80}; 9\rangle$	-9
-8	$(-9; -8\rangle$	64	$(63; 64\rangle$	$\langle -8; -\sqrt{63}) \vee (\sqrt{63}; 8\rangle$	-8
-7	$(-8; -7\rangle$	49	$(48; 49\rangle$	$\langle -7; -\sqrt{48}) \vee (\sqrt{48}; 7\rangle$	-7
-6	$(-7; -6\rangle$	36	$(35; 36\rangle$	$\langle -6; -\sqrt{35}) \vee (\sqrt{35}; 6\rangle$	-6
-5	$(-6; -5\rangle$	25	$(24; 25\rangle$	$\langle -5; -\sqrt{24}) \vee (\sqrt{24}; 5\rangle$	-5
-4	$(-5; -4\rangle$	16	$(15; 16\rangle$	$\langle -4; -\sqrt{15}) \vee (\sqrt{15}; 4\rangle$	-4
-3	$(-4; -3\rangle$	9	$(8; 9\rangle$	$\langle -3; -\sqrt{8}) \vee (\sqrt{8}; 3\rangle$	-3
-2	$(-3; -2\rangle$	4	$(3; 4\rangle$	$\langle -2; -\sqrt{3}) \vee (\sqrt{3}; 2\rangle$	-2
-1	$(-2; -1\rangle$	1	$(0; 1\rangle$	$\langle -1; 0) \vee (0; 1\rangle$	-1
0	$(-1; 0\rangle$	0	$(-1; 0\rangle$	0	0
1	$(0; 1\rangle$	1	$(0; 1\rangle$	$\langle -1; 0) \vee (0; 1\rangle$	$(0; 1\rangle$
2	$(1; 2\rangle$	4	$(3; 4\rangle$	$\langle -2; -\sqrt{3}) \vee (\sqrt{3}; 2\rangle$	$(\sqrt{3}; 2\rangle$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

In der Spalte (2) ist z aus der Spalte (1) gefolgert worden, in der Spalte (5) aus der Spalte (4).

Die Spalte (6) ist der Durchschnitt von (2) und (5) und somit die Lösung.

$$L = \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; \langle 0; 1 \rangle; (\sqrt{3}; 2 \rangle\}$$

Man sollte die Menschen nur so viel lernen lassen, daß ihr Leben ausreicht, das Gelernte wieder zu vergessen. W. Ehrenforth

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M. Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 24. 6. 85

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	19 (1985) 7/8	S. 97–128

9
85

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

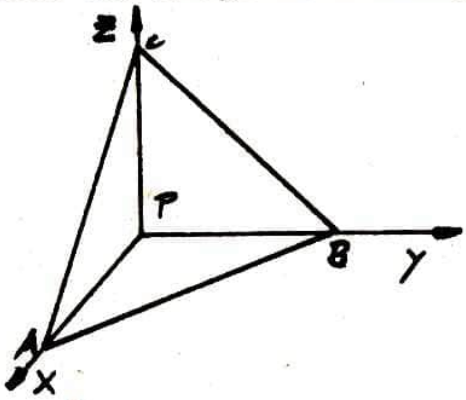
19. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Systematisches Probieren beim Lösen räumlicher Probleme

Wenn man Probleme löst, verbringt man oft viel Zeit mit Probieren. Nur wenn man das Ziel bzw. ein Teilziel erfaßt hat, oder wenn man sich für eine bestimmte Strategie entscheiden kann, arbeitet man systematisch.

Die meisten Aufgaben in der Stereometrie werden von uns systematisch gelöst, insbesondere Aufgaben zur Berechnung von Körpern oder zur Herleitung von Formeln zur Körperberechnung zählen dazu.

Beispiel:
Von einem Tetraeder PABC mit
$\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = 90^\circ$
sei die Summe S der sechs Kanten bekannt.
Bestimme das maximale Volumen!



Solche Aufgaben sind durchaus anspruchsvoll und nicht ohne Reiz. Sie werden aber meistens erst durch zusätzliche Bedingungen, die es zu beachten gilt, zum Problem. In unserem Beispiel müssen für die erforderlichen Abschätzungen erst Ungleichungen der Art $\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}$ oder
$\frac{a+b}{2} \leqq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ und $3abc \leqq a^3+b^3+c^3$ bzw. $3\sqrt[3]{abc} \leqq a+b+c$
zusammengetragen oder hergeleitet werden.
Sind aber solche zusätzlichen Bedingungen nicht gegeben, so handelt es sich für uns um sogenannte Standardaufgaben. Sie stellen dann kein echtes Problem mehr dar, da ähnliche Aufgaben von uns bereits mehrfach gelöst wurden, und wir benötigen keine Probierphase.

Da meistens für das Lösen "echter" Probleme in Leistungskontrollen, Prüfungen und Olympiaden wenig Zeit zur Verfügung steht, kann man es sich nicht leisten, allzu lange planlos zu probieren. In solchen Situationen ist es vernünftig, die Strategie des systematischen Probierens anzuwenden.

Das wollen wir an einigen Aufgaben der räumlichen Geometrie

demonstrieren.
Beim Lösen räumlicher Probleme ist es zum Beispiel oft günstig, sich anhand eines analogen Problems in der Ebene die Schwierigkeiten bewußt zu machen und sich ein mögliches Vorgehen zu durchdenken.

Aufgabe 1: Aus einem aus 125 Teilwürfeln bestehenden Würfel sind Teilwürfel so zu entnehmen, daß in den einzelnen Würfelschichten gleich welcher Lage jeweils genau zwei Würfel in jeder beliebigen Reihenanordnung fehlen, wobei das gleiche auch für die Raumdiagonalenanordnung zutreffen soll!

Am Beispiel eines Würfels mit 64 Teilwürfeln soll die Lösung des Problems durch Übertragen in die Ebene durchdacht werden.

Zunächst gilt es zu überlegen, ob sich die geforderten Bedingungen überhaupt für eine Würfelschicht realisieren lassen, was sich in unserem Fall als relativ einfach erweist.
Abb. 1 zeigt eine solche Möglichkeit.

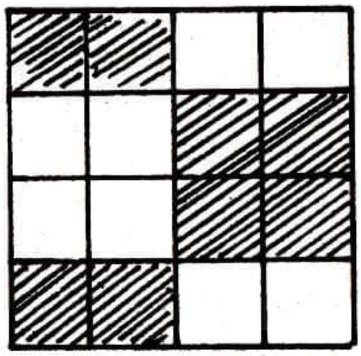
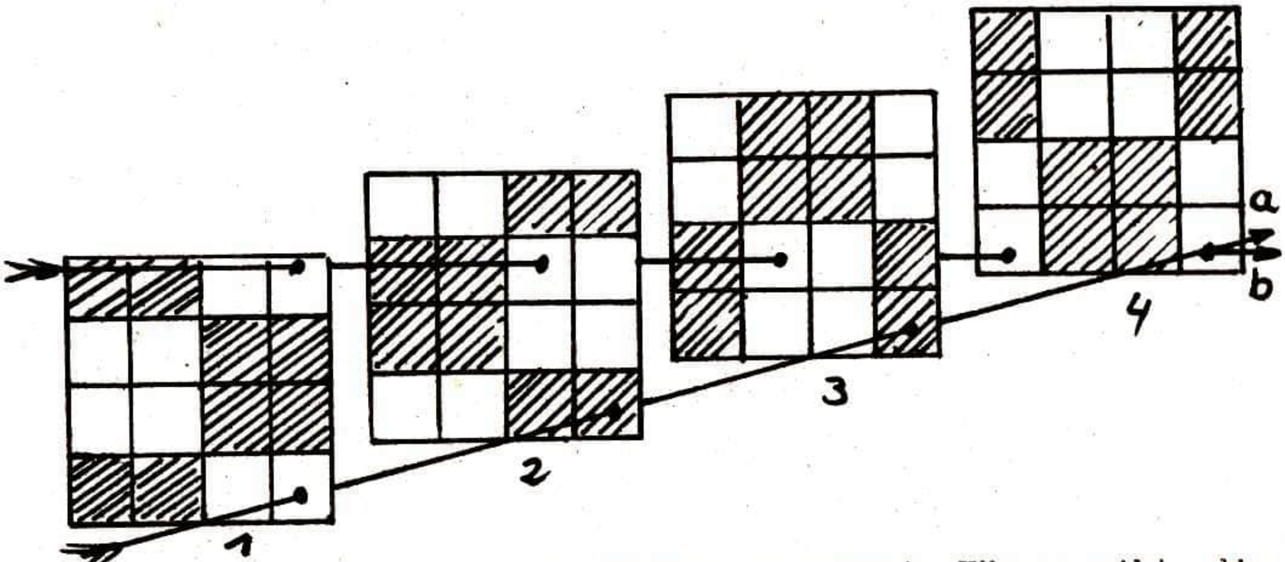


Abb. 1

Da es bei 64 Teilwürfeln jeweils vier Schichten mit 16 Würfeln gibt, muß nun geprüft werden, ob es verschiedene Möglichkeiten der Anordnung gibt.
Durch Abb. 2 wird das bestätigt. Somit kann jetzt geprüft werden, ob die geforderte Bedingung auch in "Tiefenrichtung" erfüllt wird (Pfeil a zeigt das Vorgehen an).
Da die Bedingung für alle 16 Tiefenreihenanordnungen zutrifft, ist somit nur noch die Anordnung bezüglich der Raumdiagonalen zu untersuchen. Hier zeigt Pfeil b gerade eine Raumdiagonale, die die geforderte Bedingung nicht erfüllt. Es steht die Frage, ob eine Umordnung der Schichten weiterhilft.
Für die Reihenfolge 1 - 3 - 2 - 4 der Schichten finden wir die Bedingungen realisiert.
Versuchen Sie sich jetzt an der Aufgabe 1!

Abb. 2



Aufgabe 2: Prüfe, ob es ebenflächig begrenzte Körper gibt, die wenigstens zwei zueinander parallele Raumdiagonalen haben!

Wenn man den Sachverhalt nicht sofort durchblickt, sollte auch hier der Fall zunächst in der Ebene untersucht werden.
Beginnt man mit der einfachsten regelmäßigen Figur, dem Quadrat, kann man sofort feststellen, daß es die geforderte Eigenschaft nicht hat. Es erhebt sich die Frage, wie kann man das Quadrat zweckmäßig zu einer anderen Figur ergänzen, um zum gewünschten Ergebnis zu kommen.
Ein systematisches Hinzufügen von Parallelen zu den Diagonalen (siehe Abb. 3), liefert eine Figur, die außer den beiden vorhergehenden parallelen Quadratseiten AD und BC noch über weitere parallele Diagonalen verfügt (Abb. 4).
Beginnt man im Raum die Untersuchung mit dem Würfel, bei dem die Raumdiagonalen auch nur einmal in ihrer Richtung vertreten sind, so läßt sich durch Analogieschluß ein

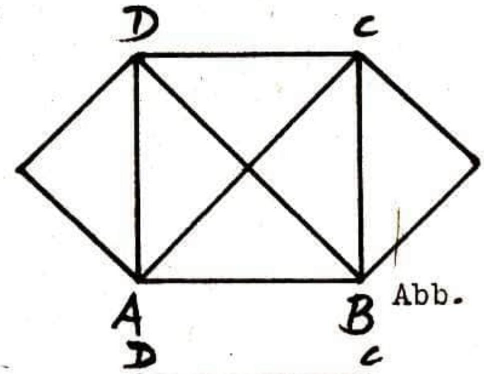


Abb. 3

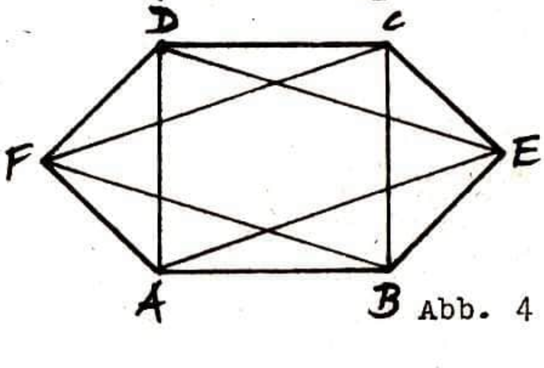


Abb. 4

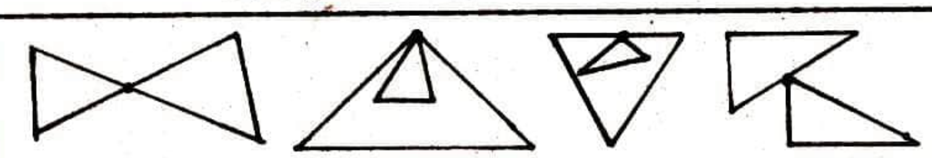
Körper mit der gewünschten Eigenschaft finden. Das wäre der um zwei quadratische Pyramiden ergänzte Würfel, wobei die Pyramidenspitzen sich als Mittelpunkte zweier dem Würfel entgegengesetzt benachbarter gleichgroßer Würfel ergeben.

Man kann natürlich auch von anderen ebenen regelmäßigen Figuren ausgehen, welche die Bedingung in der Ebene erfüllen, z.B. das reguläre Sechseck. Also liegt es nahe, im Raum dann regelmäßige n-seitige Prismen zu untersuchen. Das regelmäßige sechsseitige Prisma erfüllt z. B. ebenfalls die Bedingungen.
Suchen Sie nach weiteren Möglichkeiten!

Aufgabe 3: Gegeben seien Kantenmodelle von Würfeln.
Gesucht werden Lagemöglichkeiten von jeweils zwei Modellen derart, daß die Würfel 1,2,3,...,n ($n \in N$) gemeinsame Punkte[1] haben.
Wie groß kann die höchstmögliche endliche Anzahl n von gemeinsamen Punkten sein?

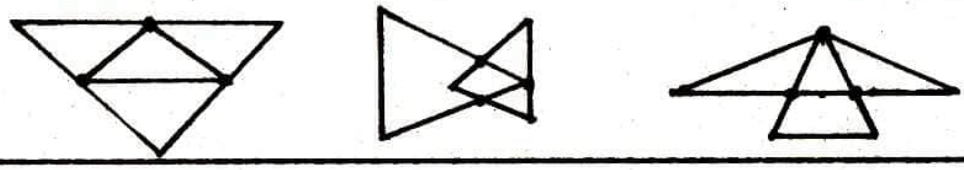
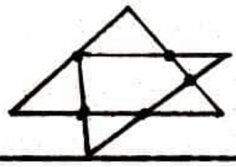
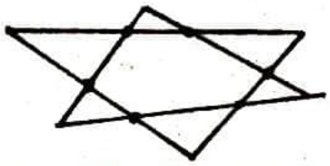
Auch hier kann der Sachverhalt an einem analogen Problem in der Ebene systematisch durchprobiert werden, um erst einen Anhaltspunkt für die Lösung des räumlichen Problems zu erhalten.

Anhand von zwei Dreiecken in einer Ebene sollen Lösungen angedeutet werden.[2]

gemeinsame Punkte	Beispiele
1	
2	

1) Es zählen dazu Schnittpunkte von Kanten und Berührungspunkte von Ecken mit Ecken bzw. Kanten.

2) Gemeint sind in diesem Fall dann nur die Dreieckslinien und keine Dreiecksflächen, d. h. es werden nur Randpunkte der Dreiecke betrachtet.

gemeinsame Punkte	Beispiele
3	
4	
5	
6	

Vielleicht reichen diese Überlegungen bereits, um die Aufgabe 3 lösen zu können.

Aufgabe 4: In wie viel Teile wird der Raum durch n Ebenen in allgemeiner Lage zerlegt? [3)]

Übertragen in die ebene Geometrie würde diese Aufgabe lauten:

In wieviele Teile wird die Ebene durch n Geraden in allgemeiner Lage zerlegt?

Als Anfänge wird man sich überlegen, um wieviel die Anzahl der Teile zunimmt, wenn zu den bereits vorhandenen Geraden noch eine weitere hinzukommt.

Unterstützen läßt sich die Überlegung durch eine Veranschaulichung (Abb. 5).

Dann kommt man zu der Beziehung

$$e_n = e_{n-1} + n \qquad \text{mit} \quad e_1 = 2$$

und kann sich nun das Ganze für die Aufgabe 4 durchdenken.

An einer solchen Lösung ist nichts auszusetzen.

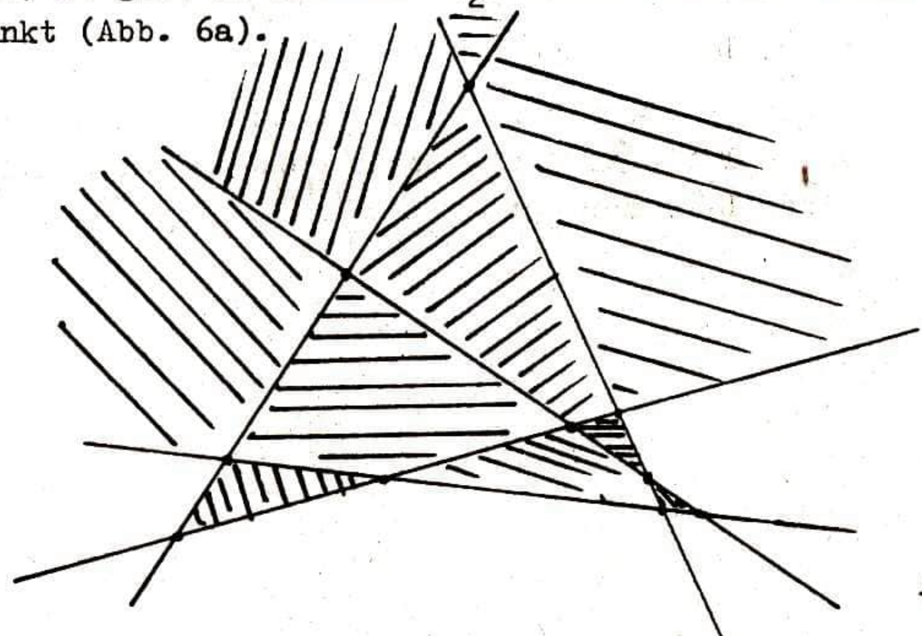
---

3) Allgemeine Lage bedeutet, daß keine zueinander parallele Ebenen in die Betrachtung einbezogen werden.

$n=1$, $e_n=2$ $n=2$, $e_n=4$ $n=3$, $e_4=7$ $n=4$, $e_n=11$

Abb. 5

Günstiger ist aber das Entwickeln einer Gleichung, mit der sofort e_n durch das Einsetzen von n berechnet werden kann.
Da es sich bei dieser Aufgabe um das Ermitteln von Anzahlen handelt, ist es sinnvoll, nach einer eineindeutigen Zuordnung der Ebenenteile auf eine Menge, die leicht abzählbar ist, zu suchen. Wie man auch hier systematisch vorgehen kann, soll demonstriert werden.
Zum Beispiel können die Schnittpunkte der n Geraden gezählt werden. Es ergeben sich $\binom{n}{2}$ Schnittpunkte. Faßt man diese Schnittpunkte jeweils als "tiefsten" Punkt genau einer Teilebene auf, so gibt es zunächst $\binom{n}{2}$ Teilebenen mit einem "tiefsten" Punkt (Abb. 6a).

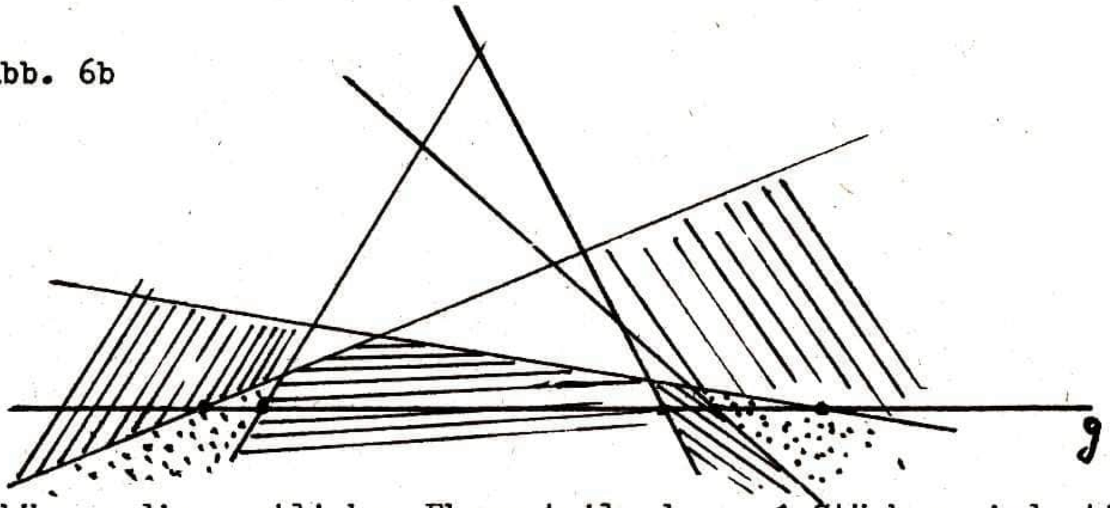


Beispiel
$n=5$

Abb. 6a

Die somit verbleibenden Teile der Ebene sind nach "unten" unendlich. In diese Teile läßt sich eine Hilfsgerade g legen, die dabei in n+1 Stücke geteilt wird.

Abb. 6b



So können die restlichen Ebenenteile den n+1 Stücken eindeutig zugeordnet werden. Dabei gibt es n+1 oder $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}$ Teilebenen ohne "tiefsten" Punkt (Abb. 6b).
Es ergibt sich als gesuchte Gleichung

$$e_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}.$$

Die für das ebene Problem gefundene Lösungsidee kann nun auf das analoge räumliche Problem übertragen werden.
Beachten Sie beim Lösen der Aufgabe 4, daß eine Ecke im Raum von drei Ebenen gebildet wird!

Vielleicht wurde an den Aufgabenbeispielen deutlich, daß man beim Lösen von Problemaufgaben Schwierigkeiten abbauen und möglichst rationell vorgehen kann, indem man bewußt bestimmte Methoden und Strategien nutzt, wie hier das Zurückführen des räumlichen Problems auf einen analogen Fall in der Ebene und das Durchdenken der Lösungsidee durch systematisches Probieren.

Dr. R. Dörr, FSU
Bereich Methodik des Mathematikunterrichts

26. Internationale Mathematikolympiade

Vom 1. Juli bis zum 11. Juli 1985 fand die 26. Internationale Mathematikolympiade statt, an der 209 junge 'Mathematiker' aus 38 Ländern teilnahmen. Gastgeber war in diesem Jahr Finnland, Wettkampfort die 200km von Helsinki entfernt liegende Stadt Joutsa.
In Joutsa verbrachten die Teilnehmer über eine Woche und nutzten die Abgelegenheit des Hotels, um die Natur Finnlands näher kennenzulernen oder an und auf einem der finnischen Seen sich aktiv zu erholen. Ausflüge in die nähere Umgebung, so zum Beispiel nach Lathi, gaben Einblicke in die Besonderheiten des Landes.
Den Höhepunkt der Olympiade stellte natürlich der Leistungsvergleich auf mathematischem Gebiet dar. Am 4. und 5. Juli stellten die Teilnehmer in den beiden Klausuren im Joutsa-school-centre ihr Wissen und Können unter Beweis. An jedem der beiden Tage mußten drei Aufgaben gelöst werden, die Arbeitszeit betrug jeweils 4,5 Stunden.
Die beiden letzten Tage verbrachten die Delegationen in Helsinki. An der dortigen Universität fand die Verleihung der Preise statt.
Die Mannschaft unserer Republik kann dabei auf folgende sehr gute Ergebnisse verweisen:

Ulrich Meister (12.Klasse, Ludwigsfelde)	32 Punkte,	II.Preis
Jörg Jahnel (10.Klasse, Jena)	26 Punkte,	II.Preis
Volker Brundisch (12.Klasse,Kleinmachnow)	22 Punkte,	II.Preis
Ingo Warnke (10.Klasse, Kleinmachnow)	20 Punkte,	III.Preis
Angelika Drauschke (12.Klasse,Neustrelitz)	19 Punkte,	III.Preis
Georg Hein (12.Klasse, Berlin)	17 Punkte,	III.Preis

Bei einer inoffiziellen Länderwertung käme unsere Republik mit 136 von möglichen 252 Punkten auf den sechsten Platz, an der Spitze steht Rumänien mit 201 Punkten, gefolgt von den USA(180) und Ungarn(168).

14 Teilnehmer, die mehr als 33 Punkte erreichten, erhielten einen ersten Preis, unter ihnen Geza Kos aus Ungarn und Daniel Tataru aus Rumänien mit voller Punktzahl. 35 Teilnehmer konnten sich mit wenigstens 22 Punkten zweite Preise sichern. Für einen dritten Preis waren 15 Punkte erforderlich. Den Preisträgern wurde vom Veranstalter eine Medaille überreicht.

Für jede Aufgabe konnten 7 Punkte erreicht werden, der Gesamtdurchschnitt der erreichten Ergebnisse lag bei 14,9 . Für die einzelnen Aufgaben entsteht dabei folgendes Bild:

Aufgabe 1 : 4,1 Punkte
Aufgabe 2 : 3,8 Punkte
Aufgabe 3 : 0,8 Punkte
Aufgabe 4 : 2,5 Punkte
Aufgabe 5 : 1,9 Punkte
Aufgabe 6 : 2,1 Punkte

Vielleicht wird der Leser bei seinen Lösungsversuchen die Schwierigkeiten bei den Aufgaben anders verteilt finden, als sich aus dieser Übersicht erwarten läßt, lösbar sind die Aufgaben jedenfalls alle.

Noch eine Bemerkung zum Titelbild: Die etwas ungewöhnliche Form des Männchens auf dem Olympiade enblem findet ihre Begründung darin, daß die Umrandung der Figur dem Verlauf der Nordgrenze Finnlands ähnlich ist.

Thomas Gundermann

Aufgaben 26. IMO

Aufgabe 1:

Es sei ABCD ein konvexes Viereck und k ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Seite $[A,B]$ liegt und der die anderen drei Seiten von ABCD berührt. Ferner sei ABCD ein Sehnenviereck.

Man beweise: $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB}$.

Aufgabe 2:

Es sei n eine natürliche Zahl, und es sei k eine ganze, zu n teilerfremde Zahl mit $0<k<n$. Ferner sei $M=\{1,2,\dots,n-1\}$. Jede Zahl aus der Menge M sei mit genau einer der Farben blau oder weiß gefärbt. Dabei sei vorausgesetzt:

(a) Für alle $i\in M$ haben i und n-i stets die gleiche Farbe, und

(b) für alle $i\in M, i\neq k$ haben i und $|k-i|$ stets die gleiche Farbe.

Man zeige, daß dann alle Elemente aus M die gleiche Farbe haben.

Aufgabe 3:

Für jedes Polynom P mit $P(x)=\sum_{i=o}^{k} a_i x^i$ und ganzzahligen Koeffizienten bezeichne w(P) die Anzahl derjenigen Koeffizienten von P, die ungerade Zahlen sind. Außerdem sei für i=o,1,2,... $Q_i(x)=(1+x)^i$.

Man beweise: Für jede endliche Folge $\langle i_1,i_2,\dots,i_n\rangle$ ganzer Zahlen mit $0\leq i_1<i_2<\dots<i_n$ gilt die Ungleichung $w(Q_{i_1}+Q_{i_2}+\dots+Q_{i_n})\geq w(Q_{i_1})$.

Aufgabe 4:

Es sei M eine Menge aus 1985 verschiedenen positiven ganzen Zahlen. Keine dieser Zahlen hat Primteiler größer als 26. Man beweise: In M gibt es vier paarweise verschiedene Elemente, für die ihr Produkt die vierte Potenz einer ganzen Zahl ist.

Aufgabe 5:

Es sei ABC ein Dreieck und k_1 ein Kreis durch die Punkte A und C, der die Strecken [A,B] bzw. [B,C] ein weiteres Mal in den voneinander verschiedenen Punkten K bzw. N schneidet. Der Mittelpunkt von k_1 sei mit O bezeichnet. Ferner sei k_2 der Umkreis des Dreiecks KBN. Der Umkreis des Dreiecks ABC schneide k_2 in genau zwei verschiedenen Punkten B und M.

Man beweise $\sphericalangle CMB = 90^\circ$.

Aufgabe 6:
Für jede reelle Zahl x_1 sei die Folge $\langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ durch $x_{n+1} = x_n(x_n + \frac{1}{n})$ für alle $n \geq 1$ definiert.
Man beweise: Es gibt einen und nur einen Anfangswert x_1, für den die Bedingung $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ für alle $n \geq 1$ erfüllt ist.

Preisaufgaben

R 49

1

Gegeben sind 2n Elemente. Man betrachte jetzt alle Möglichkeiten, diese zu n Paaren zusammenzufassen, wobei zwei Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge der Elemente innerhalb der Paare und in der Reihenfolge der Paare unterscheiden, als identisch gelten sollen. Wieviele solche Zusammenfassungen gibt es?

R 50

2

Ein Bassin werde aus zwei Hähnen mit Wasser gefüllt. Wenn man zuerst den ersten Hahn ein Drittel der Zeit, welche man benötigt, das Becken mit dem zweiten Hahn zu füllen und anschließend den zweiten Hahn ein Drittel der Zeit, welche man benötigt, das Becken mit dem ersten Hahn zu füllen, öffnet, so hat man das Fassungsvermögen des Bassins zu $\frac{13}{18}$ ausgeschöpft. Man berechne, wieviel Zeit jeder Hahn für sich benötigt, das Bassin zu füllen, wenn bei Öffnung beider Hähne das Bassin nach 3h 36 min gefüllt ist.

R 51

1

Man zeige, daß wenn die Funktion $f(x) = A \cos x + B \sin x$, wobei A und B beliebige Konstanten sind, für zwei Argumente x_1, x_2, mit $x_1 - x_2 = K$, verschwindet, dann ist die Funktion für jedes x gleich Null.

R 52 1

P,Q,R,S seien die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA eines Parallelogrammes ABCD. Man ermittle den Flächeninhalt der Figur, welche durch die Geraden AQ, BR, CS, DP begrenzt wird, wobei der Flächeninhalt des Parallelogramms bekannt ist.

R 53 2

Ein Gefäß enthalte p-%ige (Vol %) Säurelösung. Aus ihm entnehmen wir a Liter und ersetzen diese Menge durch a Liter q-%ige Säurelösung. Diesen Vorgang wiederholen wir k mal und erhalten eine r-%ige Säurelösung. Wieviel Liter Säurelösung befinden sich in dem Gefäß?

R 54 2

На стороне АВ прямоугольника АВСД найти такую точку Е, из которой стороны АД и ДС были бы видны под равными углами. При каком соотношении между сторонами прямоугольника задача разрешима?

Einsendeschluß: 1. 12. 1985

Lösungen

Q 52 (nach Andrea Maas, Wilhelmsburg, Str. d. Freundschaft 30)

I. $\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}$

II. $x + xy + y = 9$

Ich stelle zunächst I. um, indem ich $\sqrt{\frac{x}{y}}$ substituiere

I. $\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}$ $\qquad \sqrt{\frac{x}{y}} = a \;, \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{a}$

$a - \frac{1}{a} = \frac{3}{2}$ $\qquad a > 0 \quad a \in P$

$\qquad x,y \neq 0$

$a^2 - \frac{3}{2}a - 1 = 0$

Nach der Lösungsformel für quadratische Gl. gilt:

$a_{1/2} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$

$a_1 = 2 \qquad a_2 = -\frac{1}{2} \qquad a > 0$

$\underline{\underline{a=2}}$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$$

$\frac{x}{y} = 4 \qquad \underline{\underline{x=4y}}$ Diesen Wert setze ich in II. ein.

II. $x + xy + y = 9$

$$4y + 4y^2 + y = 9$$

$$y^2 + \frac{5}{4}y - \frac{9}{4} = 0$$

$$y_{1/2} = -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} + \frac{144}{64}}$$

$$= -\frac{5}{8} \pm \frac{13}{8}$$

$\underline{\underline{y_1 = 1}} \qquad \underline{\underline{y_2 = -\frac{9}{4}}}$

$\underline{\underline{x_1 = 4}} \qquad \underline{\underline{x_2 = -9}}$

Die Lösungen des Systems sind: $x = 4; \quad y = 1$

$x = -9; \quad y = -\frac{9}{4}$

Für $z_2 = \frac{1}{8} - \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{a}{8}}$ ist $x^2 + \frac{x}{2} - \left(\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{a}{8}}\right) = 0$

und somit $x_{3,4} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{a}{8}}\right)}$

$$\underline{\underline{x_{3,4} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{3}{16} - \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{a}{8}}}}}$$

Da für x in Bezug auf den Zahlenbereich keinerlei Einschränkungen gemacht wurden, sind aufgrund der Äquivalenz der Umformungen $x_{1,2,3,4}$ für jedes reelle a Lösungen der gegebenen Gleichung.

Q 57 (nach Uta Hövel, Berlin, Fischerinsel 5)

Die Bildungsvorschrift für eine arithmetische Folge mit dem Anfangsglied a_1 beginnt so: $a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_1 + 2d$

$\vdots$

Es sind solche a_1 und d gesucht, daß für die so definierte arithmetische Folge gilt: $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ (I)

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$ (II)

(I) $a_1 + (a_1+d) + (a_1+d) = 15$

$3a_1 + 3d = 15$

$a_1 + d = 5$ (1)

(II) $a_1 \cdot (a_1+d) \cdot (a_1+2d) = 80$

(1) $a_1 \cdot 5 \cdot (5+d) = 80$

Wegen (1) ist $d = 5-a_1$.

$a_1 \cdot 5 \cdot (5+5-a_1) = 80$

$a_1(10-a_1) = 16$

$a_1^2 - 10a + 16 = 0$

$(a_1-8)(a_1-2) = 0$

1) $a_1=8$ (1) $\rightarrow$ $d=-3$

Das allgemeine Glied von a_n lautet also:

$a_n = 8 - 3(n-1)$ für $n \geq 1$

$(a_n) = (11-3n)$

2) $a_1=2$ (1) $\rightarrow$ $d=3$

Allgemeines Glied:

$a_n = 2 + 3(n-1)$ für $n \geq 1$

$(a_n) = (3n-1)$

Q 60 (nach Jürgen Schefter, Reichwalde, Dorfstr. 35)

$\overline{AD} < \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FD}$ als Folge der Dreiecksungleichung

$\overline{AD} - \overline{FE} < \overline{AE} + \overline{FD}$

$\overline{BC} + \overline{FE} = \overline{BE} + \overline{CF}$, da EBCF Tangentenviereck ist.

Durch Addition erhält man:

$\overline{AD} + \overline{BC} < \overline{AB} + \overline{CD}$.

Q 61 (nach Wulf Böttger, Berlin, Gabbeallee 18a)

Es soll gelten: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{c} = -\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad c = -(a+3(\sqrt[3]{a})^2 \cdot \sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}^{\,2} + b)$$

$$\Leftrightarrow \quad a+b+c = -3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$$

Damit gilt:

$$(a+b+c)^3 = 3^3\left[-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\right]^3 = -a \cdot b \cdot 27(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3$$

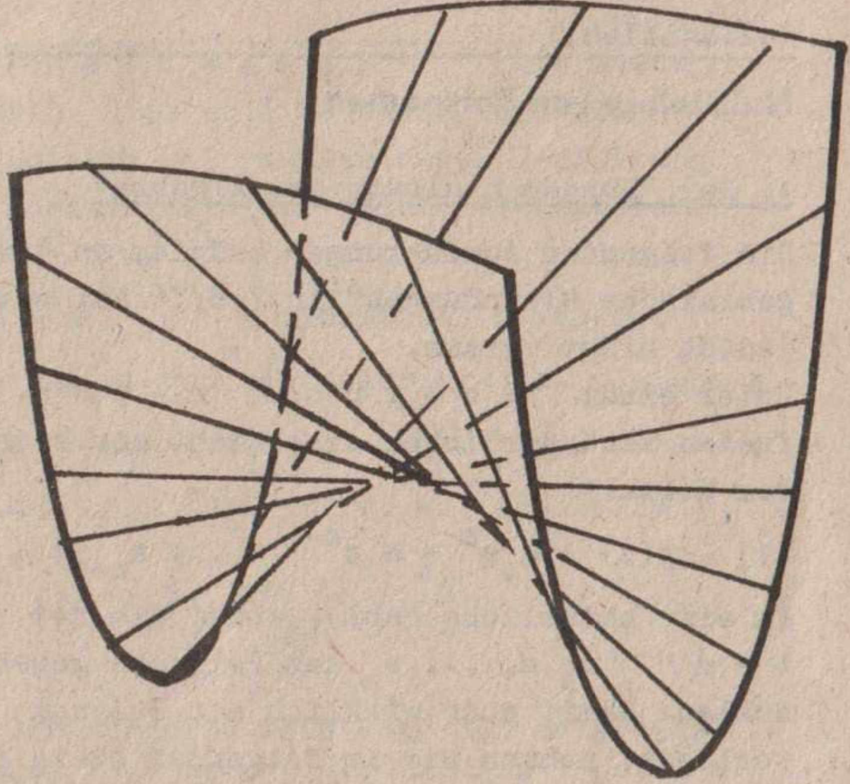
$$= -ab \cdot 27 \cdot (-\sqrt[3]{c})^3 = 27abc$$

d. h. $\underline{\underline{(a+b+c)^3 = 27abc}}$

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Pätschke, O. Kotowski, E. Stein

Anschrift: **WURZEL**, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 25. 7. 1985



hyperbolisches Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

10
85

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

19. Jahrgang

ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Nullstellen von Polynomen

1. Der "Fundamentalsatz der Algebra"

Die folgenden Ausführungen knüpfen an die WURZEL-Beiträge "Algebraische Gleichungen" in 7,8/76 an, setzen deren Kenntnis jedoch nicht voraus.
Unter einem Polynom n-ten Grades in der freien Veränderlichen z versteht man einen Ausdruck p(z) von der Gestalt

$$(1) \quad p(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$$

(n eine natürliche Zahl), wobei die n+1 "Koeffizienten" $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des Polynoms gegebene feste Zahlen sein sollen. Damit auch wirklich ein Polynom n-ten Grades vorliegt, nehmen wir im folgenden stets an, daß a_0 von Null verschieden sei ($a_0 \neq 0$).
Der (zuerst von GAUSS in seiner Doktorarbeit 1799 bewiesene) sogenannte "Fundamentalsatz der Algebra" sagt aus, daß es zu jedem Polynom n-ten Grades n Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ gibt, so daß sich p(z) als Produkt von n "Linearfaktoren" in der Gestalt

$$(2) \quad p(z) = a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$$

schreiben läßt.
Die n Zahlen $z_1, \ldots, z_n$, die nicht notwendig alle voneinander verschieden zu sein brauchen, nennt man "Nullstellen" des Polynoms p(z). Wie man sieht, sind sie Lösungen (oder "Wurzeln") der Polynomgleichung (oder "algebraische Gleichung")

$$(3) \qquad p(z) = 0.$$

Der Fundamentalsatz der Algebra gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, daß z als komplexe Veränderliche aufgefaßt wird, d. h. daß sie sich darstellen läßt in der Gestalt

$$(4) \quad z = x+iy \qquad x,y \text{ reell} \qquad i^2 = -1.$$

Die Koeffizienten des Polynoms können komplexe oder reelle Zahlen sein.

Man hat lange Zeit geglaubt, daß sich Polynomgleichungen prinzipiell mit Hilfe von "R a d i k a l e n" (lat. radix, die Wurzel) auflösen lassen. Dies soll bedeuten, daß sich diese Gleichungen durch geschickte Umformungen unter Einführung neuer Veränderlicher im wesentlichen auf reine Potenzgleichungen der Form

(5) $$u^k = a \qquad k \text{ natürlich, } a \text{ gegeben}$$

zurückführen lassen, wie man es von der quadratischen Gleichung

(6) $$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

her gewohnt ist. Diese läßt sich bekanntlich auf die beiden Gleichungen

(7) $$z = -\frac{a_1}{2a_0} + u \qquad u^2 = \left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0}$$

zurückführen.

Seit Anfang des vorigen Jahrhunderts weiß man, daß derartige Umformungen für Polynomgerade n g r ö ß e r als v i e r nicht existieren. Darüber hinaus führen die genannten Umformungen in den noch zugelassenen Fällen n=3 und n=4 auf sehr komplizierte Gleichungssysteme. Ihre Lösung erfordert selbst bei der Ermittlung r e e l l e r Nullstellen von Polynomen mit r e e l l e n Koeffizienten die Auswertung k o m p l e x e r Zwischenresultate.

Außerdem ist die Lösung reiner Potenzgleichungen der Gestalt (5) nicht damit abgetan, daß man an ihrer Stelle symbolisch $n = \sqrt[k]{a}$ schreibt. Auf Grund des Fundamentalsatzes verbergen sich hinter diesem Symbol stets k (im allgemeinen komplexe) Zahlen, deren k-te Potenzen die Zahl a ergeben.

Beschränkt man sich auf den Bereich der reellen Zahlen, so versteht man unter dem Symbol $\sqrt[k]{a}$ stets die p o s i t i v e reelle Wurzel der Gleichung $u^k = a$, wobei man von vornherein nur p o s i t i v e "Radikanden" a zuläßt. Zur Veranschaulichung geben wir noch einmal die in 8/76 hergeleiteten drei dritten Wurzeln aus der Zahl a=2 an:

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \qquad z_2 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1+i\sqrt{3}) \qquad z_3 = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

Wie vereinbart, sollen dabei $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt{3}$ die betreffenden positiven reellen Wurzeln bedeuten. Man überzeuge sich durch Ausmultiplizieren unter Beachtung von $i^2 = -1$ davon, daß gilt

$z_2^3 - z_3^3 = 2.$

2. Reelle Nullstellen reeller Polynome

Die meisten aus innermathematischen und physikalisch-technischen Anwendungen herrührenden Polynomaufgaben betreffen die Frage nach reellen Nullstellen reeller Polynome.

Unter einem "r e e l l e n" Polynom versteht man ein Polynom, dessen Koeffizienten reelle Zahlen sind. Desweiteren soll es sich stets um ein solches Polynom handeln. Ferner schränken wir auch den Variabilitätsbereich der freien Veränderlichen auf den Bereich der reellen Zahlen ein. Wir bringen dies dadurch zum Ausdruck, daß wir diese reelle Veränderliche mit x bezeichnen. Die Frage nach den Lösungen von Polynomgleichungen reduziert sich dann von selbst auf die Frage nach den r e e l l e n Nullstellen dieser Polynome.

Prinzipiell spielen sich alle weiteren Betrachtungen im Bereich der reellen Zahlen ab, so daß wir dies nicht mehr gesondert zum Ausdruck bringen werden.

Unter den genannten Einschränkungen folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra jetzt lediglich die Aussage, daß ein Polynom h ö c h s t e n s n Nullstellen besitzt. Dies läßt sich durch Induktionsschluß leicht direkt beweisen.

Wir gehen dazu aus von dem Sachverhalt, daß für jedes Polynom n-ten Grades $p(x)$ und für beliebige Zahlenpaare x, x_o gilt

(8) $$p(x) - p(x_o) = (x-x_o)p_{n-1}(x),$$

wobei $p_{n-1}(x)$ ein gewisses Polynom (n-1)-ten Grades darstellt, dessen Koeffizienten von x_o abhängen. Dies folgt aus der bekannten Zerlegungsformel

(9) $$x^k-x_o^k=(x-x_o)(x^{k-1}+x^{k-2}x_o+x^{k-3}x_o^2+\ldots+xx_o^{k-2}+x_o^{k-1}),$$

die ihrerseits leicht durch Ausmultiplizieren bestätigt werden kann. k ist dabei eine natürliche Zahl größer als Eins.

Ist nun x_o eine Nullstelle von $p(x)$, so folgt aus (8) für $p(x)$ die Darstellung

(10) $$p(x) = (x-x_o)p_{n-1}(x).$$

Ein Polynom n-ten Grades kann also höchstens e i n e Nullstelle m e h r besitzen als ein gewisses, ihm und dieser Nullstelle zugeordnetes Polynom (n-1)-ten Grades. Da ein Polynom e r s t e n Grades stets genau e i n e Nullstelle besitzt, ist die obige Behauptung im Sinne eines Induktionsschlusses bewiesen.

Es ist natürlich möglich, daß $p_{n-1}(x)$ dieselbe Nullstelle x_o von $p(x)$, der es nach (10) zugeordnet ist, s e l b s t als Nullstelle besitzt. Man sagt dann, x_o sei (mindestens) eine d o p p e l t e Nullstelle von $p(x)$. Allgemein kann x_o eine k - f a c h e Nullstelle von $p(x)$ sein, was bedeuten soll, daß in Verallgemeinerung von (10) eine Darstellung von $p(x)$ der Form

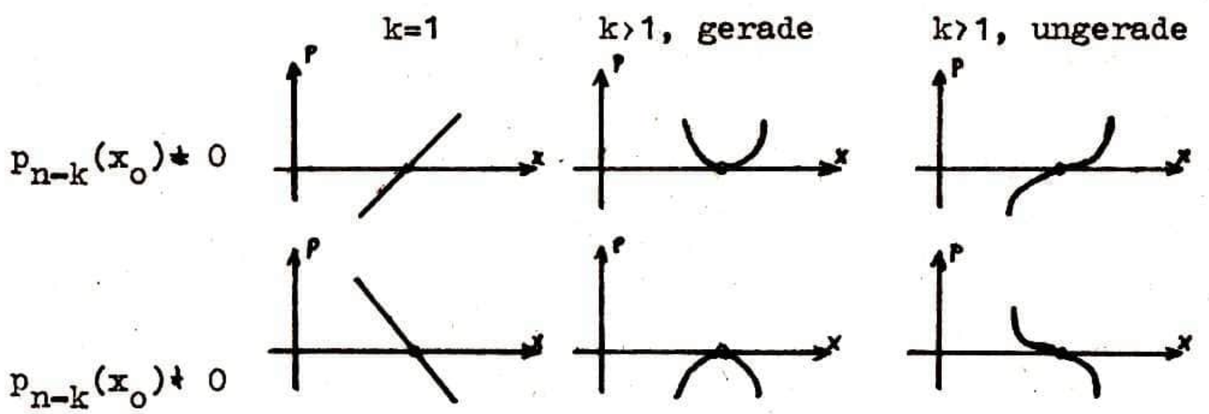
(11) $$p(x) = (x-x_o)^k \, p_{n-k}(x)$$

gilt, wobei das Polynom (n-k)-ten Grades $p_{n-k}(x)$ an der Stelle x_o verschieden von Null ist: $p_{n-k}(x_o) \neq 0$.

Aus der letztgenannten Eigenschaft von $p_{n-k}(x)$ folgt, daß es eine beidseitige Umgebung der Stelle x_o gibt, in der dieses Polynom entweder nur positive oder nur negative Werte annimmt, je nachdem, ob $p_{n-k}(x_o) > 0$ oder $p_{n-k}(x_o) < 0$ ausfällt. Das Kurvenbild von $p(x)$ in der genannten Umgebung von x_o ist dann dem Kurvenbild des Polynoms

(12) $$q_o(x) = (x-x_o)^k \, p_{n-k}(x_o)$$

sehr ähnlich. Insbesondere erhält man (bei einer geeignet gewählten Fallunterscheidung) die folgenden sechs charakteristischen Bilder für den Verlauf eines Polynoms in der Umgebung einer Nullstelle:



Besitzt das Polynom $p_{n-k}(x)$ eine oder mehrere (notwendigerweise von x_0 verschiedene) Nullstellen, so läßt es sich in der gleichen Weise multiplikativ zerlegen wie $p(x)$ selbst. Bei weitestmöglicher Fortsetzung dieses Prozesses gelangt man schließlich zu einer Darstellung von $p(x)$ der Gestalt

(13) $$p(x) = q_j(x) \cdot r_{n-j}(x),$$

wo $q_j(x)$ ein Polynom j-ten Grades ist, das dieselben Nullstellen wie $p(x)$ hat, während $r_{n-j}(x)$ ein nullstellenfreies Polynom $(n-j)$-ten Grades darstellt. j kann dabei höchstens gleich n sein. Unter einem Polynom null-ten Grades soll ein Polynom verstanden werden, daß für alle x-Werte den konstanten Wert a_0 hat.

Beispiel: $p(x) = x^5-x^4-x+1$, $q_3(x) = (x+1)(x-1)^2$, $r_2(x) = x^2+1$.

Fortsetzung folgt

Prof. Wallisch FSU
Sektion Mathematik

Der Geizige liest jedes gekaufte Buch aufmerksam; er will etwas für sein Geld haben. (Jean Paul)

Lösungen

Q 55 (nach Steffen Großert, Berlin, Heidekampweg 90)

Wir multiplizieren die gegebene Gleichung mit

$$\sqrt{(a+x)(a-x)(b+x)(b-x)}$$

und erhalten:

$$(a+x+a-x)\sqrt{b^2-x^2} = (b+x+b-x)\sqrt{a^2-x^2}$$

Vereinfachen und Quadrieren ergibt:

$$4a^2(b^2-x^2) = 4b^2(a^2-x^2).$$

Schließlich erhalten wir:

$$(a^2-b^2)x^2 = 0$$

Für $|a| \neq |b|$ ist also nur $x=0$ Lösung der Gleichung,
für $|a| = |b|$ ist x beliebig im Definitionsbereich wählbar, d. h. $-|a| < x < |a|$
für $a=0$ oder $b=0$ ist die Gleichung nicht definiert.

Q 62 (nach Gerald Eichler, Dresden, Striesener Str. 38d)

$$9^x + 6^x = 2^{2x+1}$$
$$3^{2x} + 6^x = 2\cdot 2^{2x}$$
$$3^x 3^x + 6^x = 2\cdot 2^x\cdot 2^x \qquad |:2^x$$
$$1{,}5^x 3^x + 3^x = 2\cdot 2^x$$
$$3^x(1{,}5^x+1) = 2\cdot 2^x \qquad |:2^x$$
$$1{,}5^x(1{,}5^x+1) = 2$$
$$(1{,}5^x)^2+1{,}5^x-2 = 0$$

$$z = 1{,}5^x \qquad x = \log_{1,5} z = \frac{\ln z}{\ln 1{,}5}$$
$$z^2+z-2 = 0$$
$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2}$$
$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$z_1 = -2$ $\quad$ x_1 nicht definiert, da ln-2 nicht definiert.

$z_2 = 1$ $\quad$ $x_2 = \log_{1,5} 1 = 0$

Nur für x=0 wird die Gleichung erfüllt.

Q 64 (nach Jörg Gollnick, Berlin, Liebensteiner Str. 41)

Nach der Voraussetzung $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$ gilt

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$
$$\tan(\alpha+\beta) = 1$$
$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} = 1, \text{ da } \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \qquad (1)$$
$$\tan\alpha+\tan\beta = 1-\tan\alpha\cdot\tan\beta$$
$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\cdot\tan\beta = 1 \qquad |+1$$
$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\cdot\tan\beta+1 = 2$$
$$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta) = 2$$

Der Ausdruck $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$ hat für $(\alpha+\beta) = \frac{\pi}{4}$ den Wert 2.

R 5 (nach Lars Mönch, Erfurt, G.-Freytag-Str. 10)

$$x^2 - 2x + c = 0$$

Nach dem Vietaschen Wurzelsatz gilt:

$x_1 + x_2 = -p = 2 \qquad x_1 \cdot x_2 = c = q$

$$x_1 = 2 - x_2$$

I $\quad x_1 + x_2 = 2$

II $\quad 7x_2 - 4x_1 = 47$

Die Längen dieses Systems sind:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 4 = 11$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 47 & 7 \end{vmatrix}}{D} = 14 - 47 = \frac{-33}{11} = -3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 47 \end{vmatrix}}{D} = \frac{47+8}{11} = \frac{55}{11} = 5$$

$$c = x_1 \cdot x_2 = -15$$

R 6 (nach Kirstin Neschke, Dresden, Borthener Str. 12)

Nach dem Vietaschen Wurzelsatz sind x_1 und x_2 genau dann die Lösungen der Gleichung $x^2-x-q = 0$, wenn gilt

$x_1 + x_2 = 1 \qquad (1) \quad$ und

$x_1 \cdot x_2 = -q \qquad (2)$

Lt. Aufgabe soll gelten

$x_1^3 + x_2^3 = 19 \qquad (3)$

Es muß also gelten

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2) = 19 \quad$ und wegen (1)

$$x_1^2+x_2^2-x_1x_2 = 19$$

Wegen (1) ist $x_2 = 1-x_1$ und somit

$$x_1^2 +(1-x_1)^2 - x_1(1-x_1) = 19$$

$$x_1^2+1-2x_1+x_1^2-x_1+x_1^2 = 19$$

$$3x_1^2 - 3x_1 - 18 = 0$$
$$x_1^2 - x_1 - 6 = 0$$
$$x_{1_{1,2}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+24}{4}}$$
$$x_{1_{1,2}} = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$x_{1_1} = 3 \qquad x_{1_2} = -2$$

Wegen (1) ist dann $x_{2_1} = -2$ und $x_{2_2} = 3$

und wegen (2) ergibt sich daraus $\underline{\underline{q=6}}$.

R 9 (nach Jürgen Schefter, Reichwalde, Dorfstr. 35)

$$\cot(\alpha+\beta) = 0$$
$$\frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} = 0$$
$$\cot\alpha\cot\beta = 1$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos\alpha\sin 2\beta = 2\cos\alpha\cos\beta\sin\beta = 2\sin\alpha\sin^2\beta$$
$$\sin\alpha\cos 2\beta = \sin\alpha\cos^2\beta - \sin\alpha\sin^2\beta$$
$$\cos\alpha\sin 2\beta + \sin\alpha\cos 2\beta = \sin\alpha\cos^2\beta + \sin\alpha\sin^2\beta$$
$$= \sin\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta)$$
$$\underline{\underline{\sin(\alpha+2\beta) = \sin\alpha}}$$

R 10 (nach Steffen Großert, Berlin, Heidekampweg 90)

Die Anzahl der möglichen Plazierungen von ab bzw. von ba ist gleich n-1. Die restlichen n-2 Zahlen können auf $p_{n-2} = (n-2)!$ verschiedene Arten angeordnet werden. Damit stehen a und b in

$$2\cdot(n-1)\cdot(n-2)! = 2\cdot(n-1)!$$

Anordnungen nebeneinander. Die Gesamtzahl von möglichen Anordnungen von n Zahlen ist $p_n = n!$. Damit existieren $n! - 2(n-1)!$ Umordnungen, in denen a und b nicht nebeneinander stehen.

$\boxed{R\ 11}$ (nach Jürgen Schefter, Reichwalde, Dorfstr. 35)

$$\log_{0,5}(y-x) + \log_2 \frac{1}{y} = -2 \qquad y > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ln(y-x)}{\ln \frac{1}{2}} + \frac{\ln \frac{1}{y}}{\ln 2} = -2$$

$$\ln(y-x)y = -2 \ln \frac{1}{2}$$

$$y(y-x) = 4$$

Also: $x^2 + y^2 = 25$

$y^2 - yx = 4$

Mit $y = kx$ folgt:

$x^2(1+k^2) = 25$

$x^2(k^2-k) = 4$

Aus $\frac{1+k^2}{k^2-k} = \frac{25}{4}$ folgt: $k_1 = -\frac{1}{7}$ $\qquad k_2 = \frac{4}{3}$

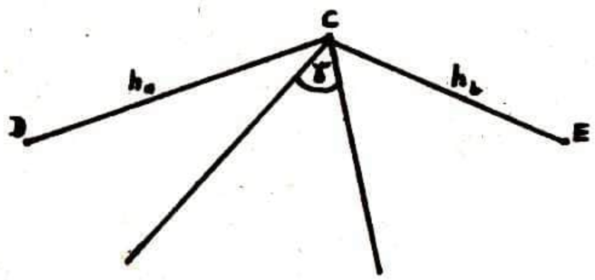
x erhält man aus $x^2(1+k^2) = 25$ unter Berücksichtigung von $y = kx > 0$.

$$x_1 = -\frac{7}{2}\sqrt{2} \qquad y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = 3 \qquad y_2 = 4$$

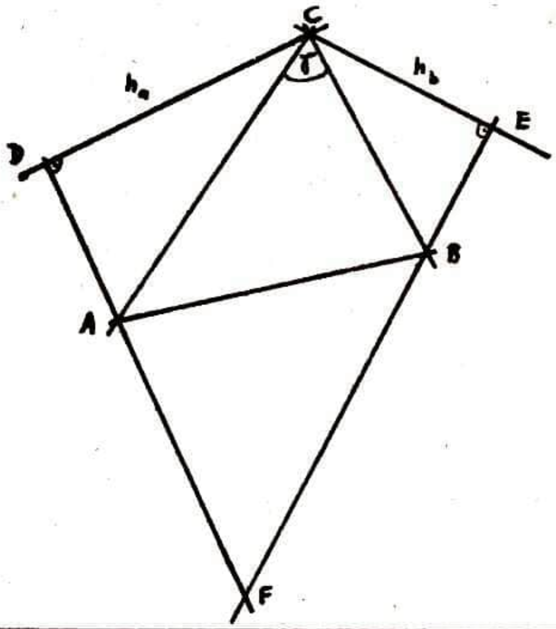
$\boxed{R\ 15}$ nach Jörg Stein, Eisenach, 19 Jahre

Nach der Aufgabenstellung sind folgende Stücke gegeben:



Konstruktionsbeschreibung:

1. Auf die Höhen h_a und h_b werden in den Punkten D und E die Lote gefällt.
2. Die Lote schneiden sich im Punkt F.
   Die durch den Winkel gegebenen Strahlen werden so verlängert, daß Schnittpunkte mit DF und EF entstehen. Diese Schnittpunkte bilden die Eckpunkte des Dreiecks (A und B).
3. Durch die so entstandenen Punkte ist das Dreieck eindeutig definiert.



R 16 nach Jürgen Schefter, Buchwalde, 31 Jahre, Bauarbeiter

Aus $4 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 = -\cos(\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)+\cos(\varphi_2+\varphi_3-\varphi_1)$

$+\cos(\varphi_3+\varphi_1-\varphi_2)-\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)$

folgt bei $\varphi_1 = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ $\quad _2 = \frac{\beta+\gamma}{2}$ $\quad _3 = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} \sin\frac{\beta+\gamma}{2}$

$= -\cos\gamma + \cos\beta + \cos\alpha - \cos(\alpha+\beta+\gamma)$

Also: $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = 0$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma + k\pi \qquad$ k ganz

========================

$\boxed{\text{R 12}}$ nach Steffen Großert, 1195 Berlin, Heidekampweg 90

Die drei gegebenen Zeiten bezeichnen wir mit a, b, c, die Zeit, die der Fußgänger für die Gesamtstrecke benötigt, mit t_F, die, die der Radfahrer benötigt, mit t_R. Weiterhin seien v_F und v_R die Geschwindigkeiten des Fußgängers bzw. des Radfahrers. Dann gilt:

(1) $t_F = t_R + c$

(2) $\frac{t_F}{t_R} = \frac{v_R}{v_F}$ bzw. $v_F t_F = v_R t_R = e$

Ist e die Gesamtstrecke von A nach B, so folgt aus den Aussagen über das Zusammentreffen:

(3) $v_F(a+b) + v_R \cdot b = e$

Mit (2) erhalten wir:

$$a+b + \frac{v_R}{v_F} b = \frac{e}{v_F}$$

$$a+b + \frac{t_F}{t_R} b = t_F$$

und wegen (1):

$$t_R(a+b) + (t_R+c)b = (t_R+c)t_R$$

$$\Leftrightarrow t_R^2-(a+2b-c)t_R - bc = 0$$

$$t_R = \frac{a-c}{2} +b \pm\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 +b^2+b(a-c)+bc}$$

$$= \frac{a-c}{2} +b\pm \sqrt{\frac{(a-c)^2}{4} +b^2+ab}$$

Da t_R stets positiv ist, hat die negative Wurzel keinen physikalischen Sinn und entfällt. Mit (1) erhalten wir also:

$$t_R = \frac{a-c}{2} +b+\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+ab+b^2} \quad \text{und} \quad t_F = \frac{a+c}{2} +b+\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+ab+b^2}$$

Preisaufgaben

R 55 Durch einen Punkt P im Innern des Dreiecks ABC werden drei Geraden, parallel zu den Seiten des Dreiecks, gelegt. Die Geraden zerteilen das Dreieck in sechs Teile. Drei davon sind Dreiecke, deren Flächeninhalte mit S_1, S_2, S_3 gegeben seien. Man berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

2

R 56 Ein Parallelogramm ABCD werde von zwei Scharen paralleler Geraden geschnitten. Jede Schar bestehe aus n Geraden. Die Geraden der einen Schar seien parallel zu AB, die der anderen parallel zu BC.
Wieviel Parallelogramme können aus dem so entstandenen Netz ausgewählt werden?

1

R 57 Es ist zu zeigen, daß

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

1

R 58 Von einem Punkt S im dreidimensionalen Raum mögen drei Strahlen ausgehen. Auf einem Strahl sei ein Punkt A fixiert. Man ermittle den geometrischen Ort aller Schwerpunkte von Dreiecken ABC, wobei die Punkte B und C je auf den anderen beiden von S ausgehenden Strahlen liegen.

2

R 59 Man zeige, daß für alle reellen Zahlen x, mit $|x| \leq 1$ und für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$(1-x)^n + (1+x)^n \leq 2^n.$$

1

R 60 Даны верхнее и нижнее основания трапеции а и б. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

2

Einsendeschluß: 1. Januar 1986

Aus dem Studentenleben

Damit die WURZEL ihren Aufgaben im Jugendobjekt "Studienvorbereitung - Studienwerbung" gerecht wird, ist es auch nötig, die Leser über den Studienalltag und Probleme, die während des Studiums auftreten, zu informieren. Damit möchten wir eine alte WURZEL-Tradition wieder aufgreifen. In diesem Beitrag soll die

SEMINARGRUPPE L III/2 (Mathematik-Physik-Lehrer,
3. Studienjahr)

vorgestellt und einige ihrer Erfahrungen weitergegeben werden.

Unsere Seminargruppe besteht aus 19 Studentinnen bzw. Studenten und wurde Anfang des 6. Semesters gebildet. Seitdem gibt es in unserem Studienjahr nur noch zwei Seminargruppen - gegenüber fünf bzw. vier Seminargruppen bis zum 5. Semester. Diese Veränderungen fanden auf Grund der Festlegung der Diplomthemen für jeden einzelnen Studenten statt. Gleichzeitig mit dieser Aufteilung begann auch die wahlobligatorische Ausbildung in den einzelnen Gebieten (z. B. Mathematik- und Physik-Methodik, Geometrie, Kompliziertheitstheorie, Psychologie).

Doch genug der technischen Daten. Was können wir auf Grund unserer dreijährigen Studienerfahrung angehenden Studenten raten?

Faßt das Studium als ein Ganzes auf! Was soll das bedeuten?
Man nutzt die Zeit des Studiums am besten, wenn man Studieren als eine besondere Art zu leben auffaßt. Wohl kaum wieder im Leben hat man derartige Gelegenheiten,über seine Zeit so (relativ) frei zu verfügen. Das kann zu uneffektivem Bummeln verführen, aber auch die nötigen Möglichkeiten bereitstellen, um produktiv zu werden.
Stellt Euch kritisch allen Problemen, die auf Euch zukommen werden!
In vielen Fällen nutzt dabei eine offene Aussprache zwischen den Studenten und den Lehrkräften. Manche Probleme stehen noch, wie z. B.

- die Notwendigkeit des Fünfjahresstudiums für ein besseres Vorbereitetsein auf den Lehrerberuf,
- die nicht optimale Vorbereitung auf die praktische Seite des Lehrerberufes.

Ein jeden berührendes und oft diskutiertes Problem ist die Frage nach den Proportionen, die die einzelnen Fächer im Studium einnehmen. Es bringt nichts, wenn man einigen Fächern (auf Grund bestehender Vorurteile oder auch schlechter Erfahrungen) weniger Aufmerksamkeit widmet. Zu einer allseitig entwickelten Lehrerpersönlichkeit gehört neben gediegenem fachlichen Wissen auch eine intensive Auseinandersetzung mit dem Marxismus/Leninismus sowie die Aneignung pädagogischen Wissens. Gerade im späteren Beruf als Lehrer wird eine klare weltanschauliche Stellungnahme als auch ein Wissen um das wie, weshalb und wohin von Bildung und Erziehung abverlangt.

"Bestand und Gesundheit der menschlichen Gesellschaft hängen stärker als zuvor von der Schule ab.
... Zuweilen hält man die Schule nur für ein Instrument zur Weitergabe einer Höchstmenge von Wissen an die heranwachsende Generation. Das ist nicht richtig. Wissen allein ist tot; die Schule aber dient dem Lebendigen. Sie soll in den jungen Menschen alle Eigenschaften und Fähigkeiten entwickeln, die für die Wohlfahrt der Allgemeinheit wertvoll sind.
... Die Schule sollte es sich immer zum Ziel setzen, den jungen Menschen als harmonische Persönlichkeit und nicht als Spezialist zu entlassen.
... Die Entwicklung der allgemeinen Fähigkeit zu selbständigem Denken und Urteilen sollte stets an der ersten Stelle stehen und nicht die Aneignung von Spezialkenntnissen."
(Albert Einstein: Aus meinen späteren Jahren. Stuttgart 1952; S. 35, 45)
Die Äußerungen von Einstein sind ein guter Maßstab,mit Hilfe dessen man die Sinnhaltigkeit des Studiums und der eigenen Studienhaltung und -aktivitäten messen kann.

Was bleibt noch zu sagen? Zu einem engen Zusammenhalt in der Seminargruppe trägt ein vielseitiges und interessantes Kulturleben bei. Gemeinsame Geburtstagsfeiern, Theater- und Kinobesuche oder auch Feiern im kleinen Rahmen und spontan organisierte Fußballspiele bilden den notwendigen erholsamen Ausgleich zum Lehrbetrieb. Diese kulturelle und sportliche Betätigung trägt auch zum gegenseitigen Verständnis in der Seminargruppe bei. FDJ-Versammlungen, unter **liberalen** Verhältnissen durchgeführt, werden von allen Studenten aufmerksamer verfolgt und letztendlich effektiv.

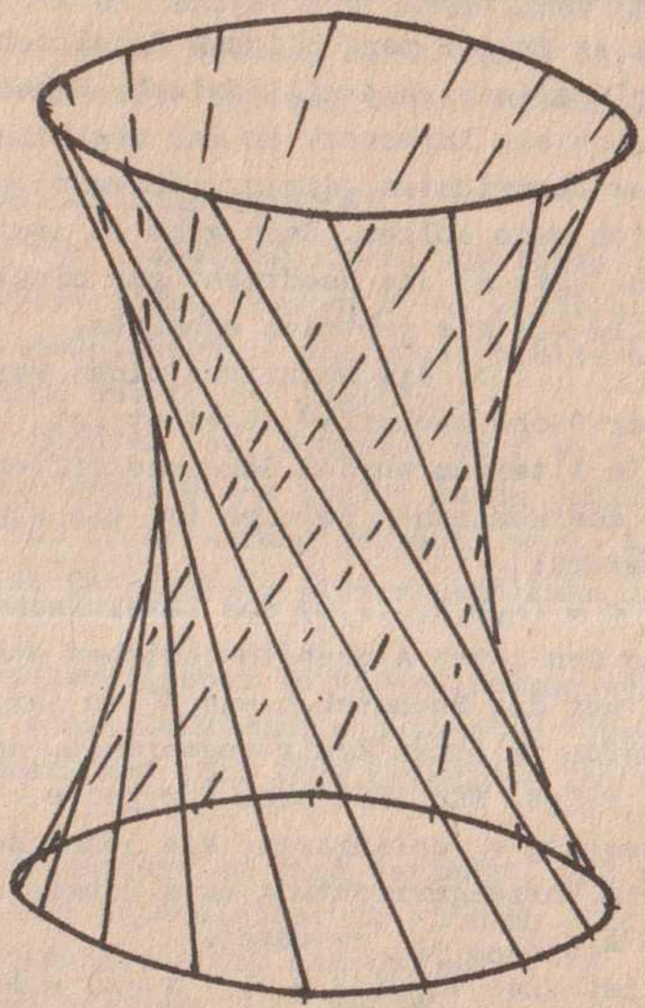
Stefan Kratochwil, FSU
Mathematik-Physik-Lehrer-Student

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Pätschke, O. Kotowski, E. Stein

Anschrift: **WURZEL**, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 25. 7. 1985

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	19 (1985) 10	S. 145–160

einschaliges
Hyperboloid



11
85

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
19. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Computer und die Ubertragung geheimer Nachrichten

1. Geheime Nachrichten und Verschlüsselung

Seitdem es in der menschlichen Gesellschaft Staaten gibt und damit diplomatische und militärische Geheimnisse existieren, besteht auch ein Interesse an der möglichst sicheren Übertragung geheimer Nachrichten, die nur für ganz bestimmte Empfänger verständlich sein sollen. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten, nämlich daß Unbefugte a) die Nachricht gar nicht erhalten können,
und falls sie sie trotzdem erhalten,
b) die Nachricht nicht verstehen können, weil sie in einer "Geheimschrift" abgefaßt ist.

Schon im Altertum wurden Geheimschriften entwickelt. Aus den Zeiten des Römischen Reiches ist die sogenannte Cäsar-Chiffre überliefert:

Es sei $\mathfrak{A} = (A,B,C,\dots,Z)$ das lateinische Alphabet, und A_i bezeichne den i-ten Alphabetbuchstaben aus $\mathfrak{A}$, $i=1,2,\dots,26$. Wir denken uns die Buchstaben aus $\mathfrak{A}$ in ihrer Reihenfolge im Uhrzeigersinn in einem Kreis angeordnet, wobei also auf A_{26} wieder A_1 folgt. Nun läßt sich für jedes $k \in \{1,2,\dots,26\}$ eine Verschlüsselung v_k definieren, die jedem Buchstaben A_i den im Kreis in Uhrzeigerrichtung um k Schritte weiter gelegenen Buchstaben $A_{i+k(\mathrm{mod}\ 26)}$ zuordnet.

Z. B. ist also $v_{26}(A_i) = A_i$, $v_1(A) = B$, $v_1(B) = C$, $v_3(D) = G$.

Für ein Wort wird die Verschlüsselung buchstabenweise vorgenommen.

Z. B. ist $v_{20}(TOR) = NIL$. Im allgemeinen gibt jedoch die Verschlüsselung kein "sinnvolles" Wort, z. B. ist
$v_1(WURZEL) = XVSAFM$.

Die Wahl von k liefert jeweils eine andere Variante dieser Geheimschrift – k heißt auch der Schlüssel.

Natürlich müssen bei dieser Art der Chiffrierung sowohl das Verschlüsselungsprinzip als auch der Schlüssel geheimgehalten werden, sonst ist die Entschlüsselung für unbefugte Empfänger der Nachricht sehr einfach.

Aber auch ohne Kenntnisse des Systems kommt ein geübter Beobachter bei längeren Texten relativ leicht hinter das Geheimnis der Verschlüsselung. Ähnlich verhält es sich mit Weiterentwicklungen, die es über die Jahrhunderte hinweg gegeben hat. Hier spielt eine große Rolle, daß die Buchstaben natürlicher Sprachen verschieden häufig verwendet werden, z. B. ist E der häufigste Buchstabe der deutschen wie der englischen Sprache.

2. Systeme mit öffentlicher Verschlüsselung

Mit der breiten Anwendung von Computersystemen zum Verwalten großer Datenmengen in Großbetrieben, Banken u. a. entsteht durch die erforderliche Datensicherheit ein neues breiteres Bedürfnis nach dem Ausschluß unbefugter Zugriffe.
Bei der Verwaltung von Bankkonten über Computer darf es z. B. nicht möglich sein, daß der Stand eines Kontos durch Unbefugte verändert oder überhaupt nur in Erfahrung gebracht wird. Auch bei anderen Anwendungen ist Datenschutz eine wesentliche Bedingung.
In einer bahnbrechenden mathematischen Veröffentlichung schlugen DIFFIE und HELLMAN 1976 die Benutzung sogenannter "Systeme mit öffentlicher Verschlüsselung" vor. Ihre Grundidee ist die folgende:
Von einem guten Verschlüsselungssystem wird verlangt, daß für zugelassene Benutzer Ver- und Entschlüsselung einfach sind, dagegen für Unbefugte die Entschlüsselung schwer ist.
Wenn es gelingt, ein System herzustellen, bei dem es auch bei Kenntnis der Verschlüsselungsart immer noch schwierig ist, die Nachricht zu entschlüsseln (d. h. die Verschlüsselungsfunktion v_k noch nicht die Entschlüsselungsfunktion e_k liefert), so kann jeder Benutzer B des Systems seine Verschlüsselung v_B öffentlich bekanntgeben. Jeder, der B eine nur für B bestimmte Nachricht N schicken will, braucht dann nur die Funktion v_B auf N anzuwenden und $v_B(N)$ an B zu schicken. B wendet daraufhin seine Entschlüsselungsfunktion e_B auf $v_B(N)$ an und erhält $e_B(v_B(N)) = N$. Die Schwierigkeit liegt in der Konstruktion solcher Systeme, die auch tatsächlich (und möglichst mathematisch nachweisbar) nicht zu "knacken" sind.
Bevor wir jedoch mehr zur mathematischen Beschreibung solcher

Systeme sagen, wollen wir ein von RABIN angegebenes mechanisches Analogon beschreiben, das die Grundidee deutlich macht:
Angenommen, die Nachricht wird in einer Truhe mit Vorhängeschloß verschickt: (Bild 1)
Im "klassischen" System würde die Truhe verschlossen und der Schlüssel auf einem sicheren Weg dem Empfänger gesondert zugeschickt, damit er beim Empfang der Truhe diese öffnen kann.

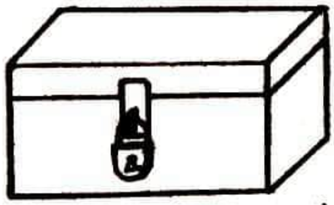


Bild 1

Öffentliche Verschlüsselung kann bedeuten:
Jede Person verfügt über ausreichend viele Vorhängeschlösser (die sich ohne Schlüssel schließen lassen - eine leicht zu erfüllende Bedingung) und einen Schlüssel zum Öffnen dieser Schlösser. Nun verteilt jede Person ihre Vorhängeschlösser, z. B. auf Postämtern. Will A an B eine Nachricht schicken, so verschließt A mit einem Vorhängeschloß von B die Truhe mit der Nachricht und schickt sie an B. Nur B kann diese dann öffnen (ohne Gewalt anzuwenden).
Das vorherige Verteilen der Schlösser kann durch einen Trick sogar vermieden werden:
A schließt die Truhe mit einem seiner Schlösser und schickt sie an B. B schließt die Truhe zusätzlich mit einem seiner Schlösser und schickt sie an A. A öffnet sein Schloß und schickt die Truhe an B. Nun kann B die Truhe öffnen, und die Nachricht war zwischendurch stets gesichert.
Formal entspricht dies folgendem "Protokoll":

(1) A sendet $v_A(N)$ an B.
(2) B sendet $v_B(v_A(N))$ an A.
(3) A sendet $e_A(v_B(v_A(N)))$ an B.
(4) B bildet $e_B(e_A(v_B(v_A(N)))) = N$

(die letzte Gleichheit muß bei der Konstruktion des Systems gesichert werden - sie bedeutet Kommutativität der entsprechenden Funktionen. Für die oben angegebene mechanische Variante ist es tatsächlich egal, in welcher Reihenfolge die Schlösser angebracht und wieder entfernt werden.)

3. Ein mathematisches System mit öffentlicher Verschlüsselung

Nun zur ungefähren Beschreibung des von DIFFIE und HELLMAN vorgeschlagenen Systems:

Es sei $A_n = (a_1,\dots,a_n)$ eine Folge paarweise verschiedener natürlicher Zahlen. Für praktische Zwecke ist es wichtig, daß n genügend groß ist, etwa n = 200. Um jedoch auch ein Beispiel geben zu können, beschränken wir uns im Beispiel auf n = 10.

Der Vektor A_n dient als Schlüssel und wird veröffentlicht. Er entsteht auf folgende Weise aus einer anderen Folge $B_n = (b_1,\dots,b_n)$, für die erfüllt ist, daß jede Komponente größer als die Summe der vorhergehenden Komponenten ist:

$$b_i > \sum_{j=1}^{i-1} b_j .$$

Solche Folgen B_n heißen superwachsend.
Nun wählt man ein m, für das $m > 2b_n$ gilt, und ein k, das zu m teilerfremd ist, d. h. es existiert eine natürliche Zahl k' mit $k \cdot k' = 1 \bmod m$.
Dann setzt man

$$a_i = k \cdot b_i \bmod m \qquad \text{für } i=1,\dots,n.$$

<u>Beispiel:</u>
$B_{10} = (1,3,5,11,21,44,87,175,349,701)$

m = 1590

k = 43 - dies ist möglich, da $43 \cdot 37 = 1 \bmod 1590$, also k' = 37.

Dadurch entsteht $A_{10} = (43,129,215,473,903,302,561,1165,697,1523)$.
Benutzer B denkt sich B_{10}, m und k aus, hält diese Daten geheim, bildet A_{10} und veröffentlicht A_{10}.
Will nun A eine Nachricht an B schicken, so muß A zunächst seine Nachricht als Binärfolge der Länge 10 codieren. Von solchen Folgen gibt es nur $2^{10} = 1024$, aber wir müssen hier daran denken, daß n für praktische Zwecke sehr viel größer als 10 ist.

Als Binärcodierungsprinzip kann z. B. eine Codierung aller Symbole der Schreibweise (einschließlich Leertaste) durch $2^6 = 64$ Binärsymbole vereinbart werden, die auch öffentlich bekannt sei.

Nehmen wir nun an, A will B die Nachricht 0101101100 schicken. Dazu braucht A nur die Zahl $0\cdot 43+1\cdot 129+0\cdot 215+1\cdot 473+1\cdot 903+$ $+0\cdot 302+1\cdot 561+1\cdot 1165+0\cdot 697+0\cdot 1523 = 3231$ zu bilden, und diese Zahl sendet A an B.

Für Personen C, die die Entschlüsselung von B nicht kennen, ist es sehr zeitaufwendig, allein aus dieser Zahl und der Kenntnis von A_n die Information 0101101100 zurückzugewinnen, für B jedoch ist es bedeutend einfacher:

B bildet $k'\cdot 3231 \mod m$

$$= k'\cdot\sum_{i=1}^{10}\alpha_i a_i \mod m$$

$$= \sum_{i=1}^{10}\alpha_i\, k'\cdot k\cdot b_i \mod m$$

$$= \sum_{i=1}^{10}\alpha_i\, b_i\ .$$

Im Beispiel ist dies

$$37\cdot 3231 \mod 1590$$

$$= 75\cdot 1590+297 \mod 1590$$

$$= \underline{\underline{297}}$$

Diese Zahl muß nun als Summe der b_i dargestellt werden, um die α_i zu erhalten. Da B_n jedoch superwachsend ist, gibt es hierfür nur eine Möglichkeit:

$$297 = 0\cdot 1+1\cdot 3+0\cdot 5+1\cdot 11+1\cdot 21+0\cdot 44+1\cdot 87+1\cdot 175+0\cdot 349+0\cdot 701$$

Also ist die Nachricht 0101101100.

Leider ist dieses so einfache System doch nicht ganz so sicher wie anfänglich erhofft: 1982 entwickelte SHAMIR eine Methode, mit der man es in vertretbarer Rechenzeit mit Hilfe eines Computers "knacken" kann.

Die Idee der öffentlichen Bekanntgabe eines Schlüssels war jedoch sehr wesentlich und wurde in andersartigen Systemen verwendet. Das System von RIVEST, SHAMIR und ADLEMAN nutzt aus, daß es schwierig ist, aus einem gegebenen Produkt $n = p\cdot q$ zweier Primzahlen p,q die Primzahlen zurückzugewinnen, falls man nur n kennt. Für dieses System ist bisher noch keine Methode bekannt, wie man es (natürlich für "große" n) in vertretbarer Rechenzeit "knacken" kann.

4. Weitere Anwendungen

Zum Abschluß dieser kurzen Einführung in die Cryptographie, wie das Gebiet auch genannt wird, wollen wir noch zwei weitere Anwendungen erwähnen.

4.1. Ein Problem bei der Benutzung öffentlicher Verschlüsselungssysteme ist die Bestimmung der Echtheit des Absenders. Wie kann B sicher sein, daß eine Nachricht, die angeblich von A stammt, auch wirklich von A geschickt wurde? Es könnte ja eine Fälschung sein, die von C geschickt wurde, um B zu täuschen.
Dazu sendet A an B das Paar $(N, e_A(N))$ (wobei natürlich nur A seine Entschlüsselung e_A kennt). B wendet daraufhin v_A (das öffentlich bekannt ist) auf $e_A(N)$ an und erhält N, also Übereinstimmung von erster und zweiter Komponente, falls die Nachricht N wirklich von A war.

4.2. Es ist möglich, daß Personen $A_1, \ldots, A_m$ miteinander kommunizieren, um gemeinsam die Funktion $f(x_1, \ldots, x_m)$ zu berechnen, wobei jede Person A_i nur x_i weiß und nichts über die Werte x_j der anderen Personen A_j erfährt (obwohl dies paradox erscheinen mag).

Die Cryptographie ist ein sich rasch entwickelndes Teilgebiet der Mathematischen Informatik, das, wie wir zumindest andeutungsweise gesehen haben, Zahlentheorie, Kompliziertheit von Berechnungen und Anwendungen in der Rechentechnik verbindet.

Dr. Andreas Brandstädt
FSU, Sektion Mathematik
Bereich Mathematische Kybernetik
und Rechentechnik

Wie mißt man am besten?

Für das Ohmsche Gesetz in der Form $u = R \cdot I + U_o$ sollen R und U_o durch Messungen bestimmt werden. Einstellgröße ist die Stromstärke I, Maßgröße die Spannung U.

Es müssen Messungen bei mindestens zwei verschiedenen Stromstärken vorgenommen werden, um die zwei unbekannten Parameter bestimmen zu können.
Bei zwei Messungen bei jeweils I_1 und I_2 hätten wir

$$U_1 = RI_1 + U_o, \qquad U_2 = RI_2 + U_o.$$

Daraus ergäbe sich $R = \frac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1}$ $\quad U_o = U_2 - \frac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1} \cdot I_2$

Damit könnten wir uns zufrieden geben, gäbe es nicht Meßfehler. Das Voltmeter hat eine Meßgenauigkeit, die der Hersteller mit genaueren Geräten feststellt.

Der Hersteller mißt mit dem genaueren Voltmeter eine Spannung, diese wird danach m-mal mit dem zu testenden Gerät gemessen. Die Abweichung der Meßwerte des zu testenden Gerätes vom Meßwert des genaueren Vergleichs-Voltmeters werden analysiert. In der Regel sind die Abweichungen nicht konstant. Teilt man die x-Achse in halboffene Intervalle der Länge $\frac{1}{n}$ ein und trägt über dem rechten Intervallende die Anzahl der Abweichungen, deren Werte in dem Intervall liegen, geteilt durch m ein, so erhält man bei $m \rightarrow \infty$ und $n \rightarrow \infty$ eine Kurve, die sogenannte Verteilungsdichte der Abweichung (d. h. der Meßfehler!).
In vielen Fällen ist diese Verteilungsdichte der Meßfehler eine Gaußsche Glockenkurve

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Aus der Konstruktionsidee dieser Verteilungsdichte folgt, daß die Häufigkeit, daß der Meßfehler bei m Messungen im Intervall (a,b] liegt, annähernd durch die Beziehung

$$\text{Häufigkeit} \approx m \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

bestimmt wird.

Betrachtet man die Gaußsche Glockenkurve, so sieht man, daß die

Häufigkeiten am größten sind, wenn das Intervall den Punkt μ enthält. Der Punkt μ heißt Erwartungswert.
Vergleicht man die Häufigkeiten für ein Intervall um den Punkt μ, und ändert man den Wert σ , so stellt man fest, daß die Häufigkeit immer größer wird je kleiner σ ist.
Der Wert σ heißt die Streuung.

Ein gutes Meßgerät sollte also den Erwartungswert $\mu = o$ haben und eine möglichst kleine Streuung.

Kehren wir zum Ohmschen Gesetz zurück. Wenn wir drei oder mehr Messungen durchführen, so stellen wir fest, daß die Gleichungen widersprüchlich sind. Deshalb betrachten wir die Gleichung der Form

$$U_i = \hat{R}\cdot I_i + \hat{U}_o + \varepsilon_i; \quad i=1,2$$

Aus den zwei Gleichungen können wir die Werte $\hat{R}$ und $\hat{U}_o$ berechnen

$$\hat{R} = \frac{U_2-U_1-\varepsilon_2+\varepsilon_1}{I_2-I_1} \qquad \hat{U}_o = U_2 - \varepsilon_2 - \frac{U_2-U_1-\varepsilon_2+\varepsilon_1}{I_2-I_1}\cdot I_2$$

Wir sind jedoch nicht in der Lage, die Meßfehler größenmäßig anzugeben.

Bei m Messungen können wir Werte $\tilde{R}$ und $\tilde{U}_o$ nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen: $\tilde{R}$ und $\tilde{U}_o$ als Funktion von I_i und U_i werden so bestimmt, daß

$$\sum_{i=1}^{m} (U_i - \tilde{R}I_i - \tilde{U}_o) \qquad \text{minimal wird.}$$

Bei zwei Messungen sieht das so aus:

$$(U_1 - \tilde{R}I_1 - \tilde{U}_o)^2 + (U_2 - \tilde{R}I_2 - \tilde{U}_o)^2 \rightarrow \text{min.}$$

Zuerst suchen wir das Minimum in $\tilde{U}_o$:

$$(U_1 - \tilde{R}I_1 - \tilde{U}_o)^2 + (U_2 - \tilde{R}I_2 - \tilde{U}_o)^2$$

$$= 2\left\{ \tilde{U}_o^2 - \tilde{U}_o(U_1+U_2-\tilde{R}I_1-\tilde{R}I_2) + \frac{(U_1-\tilde{R}I_1)^2}{2} + \frac{(U_2-\tilde{R}I_2)^2}{2} \right\}$$

Das Minimum liegt bei $\tilde{U}_o = \dfrac{U_1+U_2-\tilde{R}I_1-\tilde{R}I_2}{2}$.

Bei diesem $\tilde{U}_o$ suchen wir das Minimum von $\tilde{R}$

$$(U_1-\tilde{R}I_1-\tilde{U}_o)^2 + (U_2-\tilde{R}I_2-\tilde{U}_o)^2 =$$

$$2\left\{\tilde{R}^2\left(\frac{I_1-I_2}{2}\right)^2 - \hat{R}\left(\frac{I_1-I_2}{2}\right)(U_1-U_2) - \left(\frac{U_1+U_2}{2}\right)^2\right\}$$

Das Minimum liegt bei $\tilde{R} = \dfrac{U_1-U_2}{I_1-I_2}$

Damit hätten wir $\tilde{R} = \dfrac{U_1-U_2}{I_1-I_2}$, $\tilde{U}_o = \dfrac{I_2U_1-U_2I_1}{I_2-I_1}$

$$\tilde{R} = \hat{R} + \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{I_2-I_1}, \quad \tilde{U}_o = \hat{U}_o + \varepsilon_2 + \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)I_2}{I_2-I_1}$$

Wie die Meßfehler schwanken, so schwanken auch die berechneten Größen $\tilde{R}$ und $\tilde{U}_o$. Ist das Voltmeter gut, so sind die häufigsten Meßfehler in der Nähe der Null, damit sind die häufigsten Werte für $\tilde{R}$ bzw. $\tilde{U}_o$ in der Nähe von $\hat{R}$ bzw. $\hat{U}_o$.

Der Wert $\eta_1 = \dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{I_2-I_1}$ ist der Fehler bei der Bestimmung von $\hat{R}$,

$\eta_2 = \dfrac{\varepsilon_1 I_2-\varepsilon_2 I_1}{I_2-I_1}$ ist der Fehler bei der Bestimmung

von $\hat{U}_o$. Hieraus eröffnet sich für uns eine Möglichkeit, die Fehler zu verkleinern, indem die Differenz I_2-I_1 möglichst groß gewählt wird.

Wenn wir den Versuch m-mal durchführen, so können wir $\tilde{R}$ und $\tilde{U}_o$ bestimmen nach analogen Formeln

$$\tilde{R} = \frac{m \cdot \sum_{i=1}^{m} I_iU_i - \sum_{i=1}^{m} I_i \sum_{i=1}^{m} U_i}{m\sum_{i=1}^{m} I_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right)^2}$$

$$\tilde{U}_o = \frac{\sum_{i=1}^{m} I_1^2 \sum_{i=1}^{m} U_i - \sum_{i=1}^{m} I_i \sum_{i=1}^{m} I_iU_i}{m\sum_{i=1}^{m} I_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} I_i\right)^2}$$

Die Berechnungsfehler werden kleiner, wenn die Differenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einstellungen von I möglichst groß sind.

Dr. D. Beyer
FSU, Sektion Mathematik
Bereich Stochastik

Ungleichungen

Ungleichungen spielen in verschiedenen Teilgebieten der höheren Mathematik eine große Rolle, zum Beispiel zur Bestimmung von Maxima und Minima und zur Berechnung einiger Grenzwerte. Ungleichungen treten unter anderem in der Fehlerrechnung und bei Intervallbetrachtungen auf. Im folgenden wollen wir einige wichtige Ungleichungen und ihre Anwendungen darstellen.

Beim Umgang mit Ungleichungen müssen bestimmte Regeln beachtet werden:

Für alle reellen Zahlen gilt:

1) Wenn $a \leq b$, dann ist $b \geq a$
2) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, dann gilt: $a+c \leq b+d$
3) Wenn $a < b$ und $c < d$, dann folgt: $a \cdot c < b \cdot d$, wenn $b, c > 0$
   Diese Bedingung ist notwendig, denn es gilt z. B.
   $-2 < -1$ und $3 < 7$, aber nicht $(-2) \cdot 3 < (-1) \cdot 7$
4) Wenn $a \leq b$, dann ist $-a \geq -b$
5) Aus $a \leq b$ folgt $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$, falls $a > 0$
6) Gilt $a \leq b$ und $b \leq a$, dann ist $a = b$.

Spezielle Ungleichungen

Als nächstes wollen wir einige Ungleichungen näher betrachten.

I. Dreiecksungleichung

Diese spezielle Form findet in der Geometrie ihre meiste Anwendung. Sie stellt den bekannten Sachverhalt dar, daß die Summe zweier Seiten eines Dreiecks stets größer ist als die dritte.

S a t z 1: Für alle reellen Zahlen a,b gilt:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Das Gleichheitszeichen gilt, wenn a und b das gleiche Vorzeichen besitzen.

Beweis: Definition: Für zwei Zahlen x und y gilt:

$$\max\{x,y\} = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq y \\ y, & \text{wenn } y > x \end{cases}$$

Es gilt: $a \leq \max\{a,-a\} = |a|$

$b \leq \max\{b,-b\} = |b|$

Daraus folgt mit Regel (2)

$$a+b \leq |a| + |b| \qquad (1)$$

Ebenso gilt: $-a \leq \max\{a,-a\} = |a|$

$-b \leq \max\{b,-b\} = |b|$

und damit: $-(a+b) \leq |a| + |b| \qquad (2)$

Aus (1) und (2) ergibt sich:

$$|a+b| = \max\{a+b,-(a+b)\} \leq |a| + |b|$$

w.z.b.w.

Folgerungen:

1) Es gilt: $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$
2) Für alle $a_1 \ldots a_n$ gilt:
$$|a_1+\ldots+a_n| \leq |a_1|+\ldots+|a_n|$$
(Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion)
3) $\max\{a,b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ bzw.
$$\min\{a,b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

Ihr könnt einmal versuchen, diese Folgerungen mit der Dreiecksungleichung zu beweisen.

II. Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

D e f i n i t i o n : a heißt arithmetisches Mittel der Zahlen $x_1 \ldots x_n$, wenn gilt: $a = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

g heißt geometrisches Mittel der positiven Zahlen $x_1 \ldots x_n$, wenn gilt: $g = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$

Zwischen diesen beiden Mitteln existiert folgende Ungleichung:

S a t z 2 : Das geometrische Mittel ist nicht größer als das arithmetische Mittel dieser Zahlen. Sind die Zahlen nicht alle gleich, dann ist das geometrische Mittel echt kleiner als das arithmetische.

Beweis: Zu zeigen ist: $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$

Setzen: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \lambda$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \lambda^n$$

$$\frac{a_1}{\lambda} \cdot \frac{a_2}{\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{\lambda} = 1$$

Setzen: $\frac{a_1}{\lambda} = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{\lambda} = \alpha_n$

d. h. wir haben zu zeigen, daß aus

$$1 = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \quad \text{folgt:} \quad \lambda \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

$$\lambda \leq \frac{1}{n}\left(\frac{\lambda a_1}{\lambda} + \ldots + \frac{\lambda a_n}{\lambda}\right) \qquad \Big| : \lambda$$

$$1 \leq \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda} + \ldots + \frac{a_n}{\lambda}\right) \qquad \Big| \cdot n$$

$$n \leq \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda} + \ldots + \frac{a_n}{\lambda} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

Damit ist das Problem darauf zurückgeführt, folgende Relation zu zeigen:

Wenn $\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = 1$, dann ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \geq n$.

Dieser Beweis erfolgt durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang:

Für $n=1$ gilt: $\alpha_1 = 1$ und damit $\alpha_1 \leq n = 1$

Induktionsvoraussetzung:

Angenommen, die zu zeigende Ungleichung gilt für n Zahlen

Induktionsschritt:

1. Fall: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$, trivial

2. Fall: o.B.d.A.

Wenn es ein α_1 gibt mit $\alpha_1 > 1$, dann existiert ein α_2 mit $\alpha_2 < 1$

Daraus folgt: $0 < (\alpha_1 - 1)(1 - \alpha_2)$

und damit $0 < \alpha_1 + \alpha_2 - 1 - \alpha_1 \alpha_2$

und $\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_1 \alpha_2 + 1$ (1)

Zu zeigen ist jetzt, daß gilt:

Aus ${}_1 \cdot \ldots \cdot {}_{n+1} = 1$ folgt $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1} \geq n+1$

Setze $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \beta$

Dann gilt $\beta \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n+1} = 1$ und damit (da jetzt nur noch n Faktoren):

$$\beta + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{n+1} \geq n \qquad \text{(Induktionsvor.)}$$

$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n+1} \geq n$$

mit (1) gilt: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n+1} \geq n+1$

w.z.b.w.

Folgerungen:

1) Ist das Produkt von n positiven Zahlen gleich 1, so ist ihre Summe mindestens n.

2) Für das harmonische Mittel $h = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ gilt: h - g

3) Sei A eine beliebige positive Zahl. Zerlegt man diese Zahl in positive Summanden, so daß deren Produkt maximal wird, dann sind alle Summanden gleich. Zerlegt man A in positive Faktoren, so daß ihre Summe minimal ist, dann sind alle Faktoren gleich.

(Beweise können selbständig gemacht werden.)

Diese Beziehungen werden wir später bei Extremwertaufgaben weiter betrachten.

Mit Hilfe der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel kann man weitere beweisen, z. B. die Bernoullische Ungleichung.

Stephan Schiller, FSU
Robert Wackernagel, FSU
Mathematikstudenten, 2. Studienjahr

Lösungen

Q 56 (nach Kirstin Neschke, Dresden, Borthener Str. 12)

$$8x^4 + 8x^3 - x = a \qquad a \in P$$

Ich setze $a=8(x^2+bx)^2+c(x^2+bx)$ mit $b,c \in P$.

Dann soll lt. Aufgabe gelten

$$8x^4 + 8x^3 - x = 8(x^2+bx)^2 + c(x^2+bx)$$
$$8x^4 + 8x^3 - x = 8(x^4+2bx^3+b^2x^2) + cx^2 + bcx$$
$$8x^4 + 8x^3 - x = 8x^4 + 16bx^3 + 8b^2x^2 + cx^2 + bcx$$
$$8x^4 + 8x^3 - x = 8x^4 + 16bx^3 + (8b^2+c)x^2 + bcx$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt

$8 = 8$

$8 = 16\,b \longrightarrow b = \frac{1}{2}$

$8b^2+c = 0$

$bc = -1 \longrightarrow c = -2$

Daraus folgt $8(x^2+\frac{x}{2})^2 - 2(x^2+\frac{x}{2}) = a$

Es sei $z = x^2 + \frac{x}{2}$. Dann ist

$$z^2 - \frac{z}{4} - \frac{a}{8} = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{a}{8}}$$

Wegen $z = x^2 + \frac{x}{2}$ ist für

$z_1 = \frac{1}{8} + \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{a}{8}}$ und somit

$$x^2 + \frac{x}{2} - \left(\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{a}{8}}\right) = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{a}{8}}\right)}$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{3}{16} + \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{a}{8}}}$$

Preisaufgaben

Einsendeschluß: 1. 2. 86

R 61 Sei $A = \frac{1.3.5. \,\ldots\, .(2n-1)}{2.4.6. \,\ldots\, .\, 2n}$, wobei n eine positive ganze Zahl ist. Man zeige, daß ab einem gewissen k die Folge $A, 2A, 4A, 8A, \ldots, 2^k A, \ldots$ nur aus ganzen Zahlen besteht.

1

R 62 Man bestimme ab + cd, falls

$$a^2 + b^2 = 1$$
$$c^2 + d^2 = 1$$
und $ac + bd = 0$ ist.

1

R 63 Die Kreise K_1 und K_2 berühren sich im Punkt P. Eine Sekante durch den Punkt P schneidet K_1 in A_1 und K_2 in A_2. Eine andere Sekante durch den Punkt P schneidet K_1 in B_1 und K_2 in B_2. Man zeige, daß die Dreiecke PA_1B_1 und PA_2B_2 ähnlich sind.

1

R 64 Gegeben ist ein Dreieck ABC. Man konstruiere Punkte U, V, W auf den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, so daß der Umfang des Dreiecks UVW minimal wird.

2

R 65 | 1

Seien a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 und b ganze Zahlen und

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2 .$$

Man zeige, daß nicht alle Zahlen gleichzeitig ungerade sein können.

R 66 | 2

Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности на стороны вписанного в нее треугольника, лежат на одной прямой.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: **WURZEL,** 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M. Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 10. 10. 85

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	19 (1985)	S. 161–176

12

85

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

19. Jahrgang

ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Preisaufgaben

R 67

2

Zwei Körper begannen sich von zwei Punkten einer Geraden, die einen Abstand von 20 m haben, aus in ein und dieselbe Richtung zu bewegen. Der eine von ihnen, der hintere, bewegt sich gleichmäßig beschleunigt und legt in der ersten Sekunde 25 m und in der zweiten $\frac{1}{3}$ m mehr zurück. Der zweite Körper bewegt sich gleichmäßig verzögert. In der ersten Sekunde legt er 30 m und in der zweiten $\frac{1}{2}$ m weniger zurück. Nach wieviel Sekunden holt der erste Körper den zweiten ein?

R 68

1

Man finde eine vierstellige Zahl mit folgenden Eigenschaften: Die Summe der Quadrate der äußeren Ziffern beträgt 13, die der inneren 85. Wenn man von der gesuchten Zahl 1089 abzieht, so erhält man eine vierstellige Zahl mit denselben Ziffern, nur in umgekehrter Reihenfolge.

R.69

1

Für drei reelle Zahlen gelte die Beziehung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} .$$

Zeigen Sie, daß dann eine der drei Summen a+b, b+c, c+a gleich Null ist.

R 70

1

Man zeige, daß aus $3 \sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$ folgt $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan\alpha$.

R 71

2

Durch jede Kante eines Tetraeders werde eine Ebene parallel zur gegenüberliegenden Kante gelegt. Man finde eine Beziehung zwischen dem Volumen des so erhaltenen Parallelepipeds und dem Volumen des Tetraeders.

Einsendeschluß: 1. 4. 1986

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.
Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

Nullstellen von Polynomen 1. Fortsetzung

3. Einschließung der Nullstellen eines Polynoms

Da es (außer im Falle $n=2$) keine, oder zumindest keine praktisch brauchbaren Auflösungsformeln für Polynomgleichungen gibt, ist man darauf angewiesen, sich aus den Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ eines Polynoms zunächst grobe und dann immer genauere Informationen über die Lage eventueller Nullstellen zu verschaffen. Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit "groben" Informationen. Sie sollen selbstverständlichen einen möglichst geringen Rechenaufwand erfordern.

Wir möchten an dieser Stelle zunächst einige Bemerkungen zum Begriff und Gebrauch von Ungleichheitszeichen machen. Erfahrungsgemäß ergeben sich begriffliche Schwierigkeiten, wenn die Beziehungen "kleiner" und "größer" im Bereich der reellen Zahlen, also einschließlich der negativen Zahlen angewandt werden. Am klarsten lassen sich diese Beziehungen als Lage - Beziehungen zweier Zahlen a und b auf einer Zahlengeraden definieren:

$a < b$	(a "kleiner" b)	a liegt links von b
$a > b$	(a "größer" b)	a liegt rechts von b
$a \leq b$	(a "kleiner gleich" b)	a liegt nicht rechts von b
$a \geq b$	(a "größer gleich" b)	a liegt nicht links von b.

Insbesondere ist in diesem Sinne die "kleinste" von k Zahlen $c_1,\dots,c_k$, in Zeichen: $\min\{c_1,\dots,c_k\}$, diejenige, die am weitesten links auf der Zahlengeraden liegt.
Beispiel: $\min\{-2,1,-10,0\} = -10$.
Um die "absolute" Größe einer Zahl im Sinne ihrer Entfernung vom Nullpunkt auf der Zahlengeraden zu erfassen, hat man den "Absolutbetrag" $|a|$ einer Zahl a eingeführt. Dieser ist für $a \neq 0$ immer eine positive Zahl, die durch

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a > 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

definiert ist. Als Ergänzung ist $|0| = 0$ festgelegt.
Will man bereits durch die Schreibweise zum Ausdruck bringen, daß es sich bei a um eine negative Zahl handelt, so schreibt man $-a$ statt a.

Wir wenden uns nun der Aufgabe zu, ohne größere Rechnungen ein möglichst kleines Intervall auf der x-Achse anzugeben, in dem sämtliche positiven Nullstellen von p(x) liegen, sofern es überhaupt welche gibt.
Anders ausgedrückt soll ein Intervall angegeben werden, außerhalb dessen mit Sicherheit keine positiven Nullstellen von p(x) liegen. Wir setzen also für diese Betrachtung voraus, daß x positiv sei. Ferner sei

(14) $$a = \min\{a_1/a_0, a_2/a_0, \dots, a_n/a_0\} .$$

Vergleichen wir nun das Polynom $p(x)/a_0$ mit dem Polynom

(15) $$q(x) = x^n + a(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1),$$

so ist für positive x der Klammerausdruck selbst positiv, und es gilt daher auf Grund der Definition (14)

(16) $$p(x)/a_0 \geq q(x).$$

Fällt nun a nicht-negativ aus ($a \geq 0$), so ist offensichtlich $q(x) > 0$, und daher $p(x) \neq 0$ für alle $x > 0$.
Ist dagegen a negativ ($a < 0$), so setzen wir $a = -|a|$ und bringen q(x) unter Verwendung der Zerlegungsformel (9) mit $k=n$, $x_0=1$ für $x \neq 1$ auf die Gestalt

$$(17) \qquad q(x) = x^n - |a| \frac{x^n-1}{x-1}$$

$$= \frac{|a| + x^n(x-1-|a|)}{x-1}$$

Wie man sofort sieht, sind Zähler und Nenner beide positiv, sobald $x \geq 1+|a|$ ist. Unter Beachtung von (16) folgt für diese x-Werte wiederum, daß $p(x) \neq 0$ ist.

Aus den obigen Betrachtungen ergibt sich unmittelbar auch eine Einschließung für die n e g a t i v e n Nullstellen von $p(x)$, indem man die Einschließung der p o s i t i v e n Nullstellen des Polynoms

$$(18) \qquad p(-x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$$

mit $b_0=(-1)^n a_0$, $b_1=(-1)^{n-1}a_1$, ..., $b_{n-1} = -a_{n-1}$, $b_n=a_n$ zugrunde legt. Hat $p(-x)$ die positiven Nullstellen $x_1,\ldots,x_k$, so hat $p(x)$ die negativen Nullstellen $-x_1,\ldots,-x_k$.

Wir fassen unsere Ergebnisse im folgenden Satz zusammen:

S a t z : Es sei

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad a_0 \neq 0$$

ein reelles Polynom der reellen Veränderlichen x und

$$a = \min\{a_1/a_0, a_2/a_0, \ldots, a_{n-1}/a_0, a_n/a_0\}$$

$$b = \min\{-a_1/a_0, a_2/a_0, \ldots, (-1)^{n-1}a_{n-1}/a_0, (-1)^n a_n/a_0\}$$

Dann liegen sämtliche Nullstellen von $p(x)$, sofern es überhaupt welche gibt, in dem Intervall

$$-(1+|b|) < x < 1+|a| .$$

Im Falle $a \geq 0$ besitzt $p(x)$ keine positiven Nullstellen,

im Falle $b \geq 0$ besitzt $p(x)$ keine negativen Nullstellen.

Aus diesem Satz läßt sich unter anderem schlußfolgern, daß $p(x)$ im Falle

$$a_n \neq 0, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

überhaupt keine Nullstellen haben kann. Die Umkehrung hiervon gilt (leider) nicht. So ist z. B. das Polynom $p(x) = x^2-2\alpha x+1$

nullstellenfrei für $c^2 < 1$, also insbesondere für $0 < c < 1$, was zur Folge hat, daß $a = -2c$ negativ ausfällt.

Weiter läßt sich aus der Herleitung des obigen Satzes folgende Tabelle bezüglich der Vorzeichen von $p(x)/a_o$ außerhalb des Lösungsintervalls gewinnen:

	$x \leq -(1+\lvert b\rvert)$	$x \geq 1 + \lvert a\rvert$
n gerade	$p(x)/a_o > 0$	$p(x)/a_o > 0$
n ungerade	$p(x)/a_o < 0$	$p(x)/a_o > 0$

Da ein Polynom als stetige Funktion keinen Zwischenwert ausläßt, folgt aus der zweiten Zeile der Tabelle, daß jedes Polynom u n g e r a d e n Grades m i n d e s t e n s e i n e Nullstelle besitzt.
Wenn also ein Polynom k e i n e Nullstelle hat, so muß sein Grad n g e r a d e sein. Dies trifft insbesondere für das nullstellenfreie Polynom $r_{n-j}(x)$ der Zerlegung (13) zu, d. h. es ist $(n-j)$ eine gerade Zahl. Demzufolge ist j gerade oder ungerade, je nachdem dies für n zutrifft. Mit anderen Worten: Die Anzahl j der Nullstellen eines Polynoms n-ten Grades ist unter Berücksichtigung der Vielfachheit dieser Nullstellen für gerades (ungerades) n selbst gerade (ungerade).

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem Beispiel. Für

$$p(x) = 2x^3 - 10x^2 + 13x - 4$$

ist $a=-5$, $b=2$. Also liegen sämtliche Nullstellen von $p(x)$ (d. h. mindestens eine einfache, eventuell zwei weitere einfache oder aber eine doppelte) im Intervall $0 < x < 6$.

Auf die Problematik der genaueren Berechnungen von Polynom-Nullstellen soll in einem weiteren Beitrag eingegangen werden.

Prof. Wallisch, FSU
Sektion Mathematik
Bereich: Numerik/Optimierung

$\boxed{\text{R 17}}$ nach Kerstin Zinner, Rauenstein

Beweis: $\arctan(3+2\sqrt{2}) - \arctan\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

$$\arctan(3+2\sqrt{2}) - \arctan\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \qquad |\ \tan$$

$$\tan\Big[\underbrace{\arctan(3+2\sqrt{2})}_{\alpha} - \underbrace{\text{carctan}\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\beta}\Big] = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

nach den goniometrischen Gleichungen gilt:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$1 = \frac{\tan[\arctan(3+2\sqrt{2})] - \tan(\arctan\frac{\sqrt{2}}{2})}{1+\tan[\arctan(3+2\sqrt{2})]\cdot\tan(\arctan\frac{\sqrt{2}}{2})} \qquad (\tan(\arctan\alpha)=\alpha)$$

$$1 = \frac{3+2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+(3+2\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$1 = \frac{3+\frac{3}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{3}{2}\sqrt{2}+2}$$

$$1 = \frac{3+\frac{3}{2}\sqrt{2}}{3+\frac{3}{2}\sqrt{2}}$$

$1 = 1$ w.A. (da aus äquivalenten Umformungen hervorgegangen)

$$\underline{\underline{\arctan(3+2\sqrt{2}) - \arctan\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}}} \qquad \text{w.z.b.w.}$$

$\boxed{\text{R 14}}$ nach Jürgen Schefter, Reichwalde, 31 Jahre, Bauarbeiter

I	$1+2+\ldots+2^{n-1}$	$= s$
II	$2+2^2+\ldots+2^n$	$= 2s$
II-I	$\underline{\underline{s = 2^n-1}}$	

Das ist die mit Abstand eleganteste, schönste und einfachste Lösung dieser Aufgabe! Natürlich führt auch die vollständige Induktion oder die Anwendung der Summenformel der geometrischen Reihe zur Bestätigung der Aussage.

R 13 nach Gerd Heber, Erfurt, 19 Jahre

Die Umformung der Gleichung (1) nach x ergibt $x = \frac{a \cdot y}{y-a}$.

Setzt man x in (2) ein, so erhält man $y = \frac{ab \cdot z}{ab+zb-za}$.

Setzt man y in (3) ein, so ergibt sich für z:

$$z^2(ab-bc+ac) - abc \cdot 2 \cdot z = 0.$$

$z_1 = 0$ ist für das Gleichungssystem undiskutabel.

$$z_2 = \frac{2abc}{ab-bc+ac}$$

Unter Verwendung von z_2 ergibt sich für $y = \frac{2abc}{ab+bc-ac}$.

Unter Verwendung von y ergibt sich für x

$$x = \frac{2abc}{bc-ab+ac}.$$

Die Richtigkeit liefert die Einsetzung in (1), (2) und (3).

R 18 nach Silke Umbreit, Ilmenau, Kl. 11

Voraussetzung: $a, b, c, d \in G$

$m = ad - bc$ I

$m \,/\, ax+by$ II

Behauptung: $m \,/\, cx+dy$

Beweis:

$ad - bc \equiv 0(m)$ wegen I

$ad \equiv bc(m)$

$adxy \equiv bcxy(m)$

III $ax \cdot dy \equiv by \cdot cx(m)$

$ax+by \equiv 0(m)$ wegen II

IV $ax \equiv -by(m)$

$dy \equiv -cx(m)$ wegen III, IV

$dy-cx \equiv 0(m)$

$\curvearrowright m \,/\, cx + dy$ q.e.d.

&"&"&"&"&"&"&"&"&"&

Zeit und Ewigkeit

Eine amerikanische Journalistin fragte einmal Albert Einstein: "Welch ein Unterschied besteht zwischen der Zeit und der Ewigkeit?" "Mein Kind", antwortete Einstein gutmütig, "wenn ich die Zeit hätte, Ihnen diesen Unterschied zu erklären, würde eine Ewigkeit vergehen, bis Sie ihn verstehen würden."

&"&"&"&"&"&"&"&"&"&

Ungleichungen (1. Fortsetzung)

III. Bernoullische Ungleichung

S a t z 3 : a) Für alle reellen Zahlen α,h mit $0<\alpha\leq 1$ und $h\geq -1$ gilt: $(1+h)^{\alpha}\leq 1+\alpha h$

b) Für alle reellen Zahlen α,h mit $\alpha>1$ oder $\alpha<0$ und $h\neq -1$: $(1+h)^{\alpha}\geq 1+\alpha h$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $\alpha=0$, $\alpha=1$ oder h=0.

Beweis: a) Beweis für rationales α

α läßt sich darstellen als $\alpha=\frac{m}{n}$ und für $0<\alpha=\frac{m}{n}\leq 1$ gilt: $0<m\leq n$ mit $m,n\in N$, $h\geq -1$.

Dann ergibt sich:

$$(1+h)^{\alpha}=(1+h)^{m/n}=\sqrt[n]{(1+h)^m\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{(n-m\text{ Faktoren})}}$$

$$=\sqrt[n]{\underbrace{(1+h)\cdot\ldots\cdot(1+h)}_{m\text{ Faktoren}}\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}$$

$$\overset{\text{Satz 2}}{\leq}\frac{m(1+h)+(n-m)}{n}=$$

$$= \frac{m+mh+n-m}{n} = \frac{m\cdot h+n}{n} = 1+\frac{m}{n}h$$
$$= 1+\alpha h$$

b) $\alpha = r > 1 \quad r = \frac{m}{n}$. Daraus folgt $0 < m \leq n$; $m,n \in N$, $\frac{1}{r} < 1$

Wir haben die Ungleichung schon für $\alpha < 1$ und wenden sie nun wie folgt an:

$(1+rh)^{1/r} \leq 1+rh\cdot\frac{1}{r} = 1+h$

Daraus folgt: $1+rh \leq (1+h)^r$ und die Behauptung.

Der Beweis zu a) und b) für irrationale α erfolgt mit Hilfe von Grenzübergängen (s. Korowkin, "Ungleichungen").

Die Bernoullische Ungleichung dient uns z. B. bei der Berechnung von Minima und Maxima von Funktionen (s. Kapitel V) sowie beim Beweis der folgenden Ungleichung.

IV. Ungleichung zwischen verallgemeinerten arithmetischem und geometrischem Mittel

S a t z 4 : Für alle reellen Zahlen $a_1,\dots,a_n$, $p_1,\dots,p_n$ mit $a_1\dots a_n \geq 0$, $0 \leq p_1\cdot\dots\cdot p_n = 1$ und $p_1+\dots+p_n = 1$ gilt:

$$a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{p_n} \leq a_1p_1+a_2p_2+\dots+a_np_n$$

Beweis: erfolgt durch vollständige Induktion

Induktionsanfang:

Ungleichung gilt für $n = 2$

Bew.: 1. Fall: a_1 oder $a_2 = 0$, trivial

2. Fall: $a_1, a_2 > 0$

Dann gilt:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{p_1} = \left(1+\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\right)^{p_1} \overset{\text{Satz 3}}{\leq} 1+p_1\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)$$

$$= 1+\frac{p_1a_1}{a_2} - p_1$$

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{p_1} \leq \frac{p_1a_1}{a_2} + \underbrace{(1-p_1)}_{p_2} \qquad \Big|\cdot a_2$$

$$a_1^{p_1}\cdot a_2^{p_2} \leq p_1a_1 + p_2a_2$$

Induktionsvoraussetzung:

Angenommen, es gilt: $a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{p_n} \leq a_1p_1 + \ldots + a_np_n$

Induktionsschritt:

Zu zeigen, daß dann Ungleichung auch für n+1 gilt:

$$a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_{n+1}^{p_{n+1}} = a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_{n-1}^{p_{n-1}}\cdot(\underbrace{a_n^{\frac{p_n}{p_n+p_{n+1}}}\cdot a_{n+1}^{\frac{p_{n+1}}{p_n+p_{n+1}}}}_{b_n})^{p_n+p_{n+1}}$$

Nach Induktionsvor. gilt nun (da nur noch n Faktoren)

$$a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_{n+1}^{p_{n+1}} \leq a_1p_1+\ldots+a_{n-1}p_{n-1}+(p_n+p_{n+1})b_n$$

$$\leq a_1p_1+\ldots+a_{n-1}p_{n-1}+$$

$$+(p_n+p_{n+1})(a_n\cdot\frac{p_n}{p_n+p_{n+1}} + a_{n+1}\cdot\frac{p_{n+1}}{p_n+p_{n+1}})$$

$$= a_1p_1+\ldots+a_{n+1}p_{n+1}$$

w.z.b.w.

Aus den bisherigen Ungleichungen kann man natürlich weitere Ungleichungen herleiten, z. B. die Höldersche Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \leq (\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q)^{\frac{1}{q}} \text{ mit } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

und als deren Spezialfall für p und q gleich 2 die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

Für Leser, die mit der Vektorrechnung vertraut sind, möchten wir hier folgende Erklärung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für die Ebene geben. Dazu definieren wir:

- das Skalarprodukt zweier Vektoren $\bar{v}=(a_1,a_2)$ und $\bar{w}=(b_1,b_2)$ als $|(\bar{v},\bar{w})|=|\bar{v}|\cdot|\bar{w}|\cdot|\cos\ (\bar{v},\bar{w})|$
- den Betrag eines Vektors $\bar{v}$ als

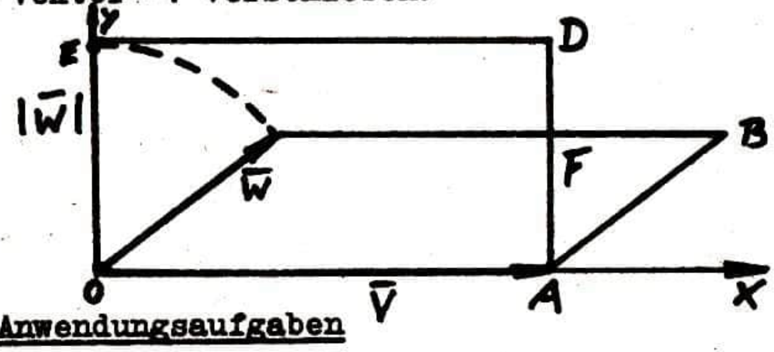
$$|\bar{v}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$

Somit läßt sich die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für n=2 auch folgendermaßen schreiben:

$$|(\bar{v},\bar{w})| \leq |\bar{v}|\cdot|\bar{w}|$$

Geometrisch bedeutet $(\bar{v},\bar{w})$ den Flächeninhalt des Parallelogramms OABC und $|\bar{v}|\cdot|\bar{w}|$ den Flächeninhalt des Rechteckes OADE.

Zur Veranschaulichung, daß gilt: $F_{OABC} \leq F_{OADE}$, braucht man nur das Dreieck ABF um den Vektor $-\bar{v}$ verschieben.



V. Anwendungsaufgaben

Mit den Ungleichungen in den bisherigen Kapiteln haben wir Mittel gewonnen, um weitere Ungleichungen zu beweisen bzw. um Minimal- und Maximalwerte zu berechnen. Einige Hinweise dazu wollen wir in diesem Kapitel geben.

Aufgabe 1:

Man beweise: $\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$

Beweis: Setzen: $\sqrt[n]{n} = 1+\alpha_n$, $\alpha_n > 0$

Dann gilt: $n = (1+\alpha_n)^n = \left[(1+\alpha_n)^{n/2}\right]^2$

Nehmen wir $n > 2$, also $\frac{n}{2} > 1$, so gilt mit Satz 3

$(1+\alpha_n)^{n/2} > 1+ \frac{n}{2}\alpha_n$ und damit

$$n > (1+ \frac{n}{2}\alpha_n)^2 = 1+n\alpha_n + \frac{n^2}{4}\alpha_n^2 .$$

Hieraus folgt

$$n > \frac{n^2}{4}\alpha_n^2, \quad \alpha_n^2 < \frac{4}{n}, \quad \alpha_n < \frac{2}{\sqrt{n}}$$

und $\sqrt[n]{n} = 1+\alpha_n < 1+ \frac{2}{\sqrt{n}}$

w.z.b.w.

Folgerung:

Da $1+ \frac{2}{\sqrt{n}} = a_n$ eine monoton fallende Folge ist, muß $\sqrt[n]{n}$ beschränkt sein. Man kann sich davon überzeugen, daß $\sqrt[3]{3}$ das größte Glied der Folge $\sqrt[n]{n}$ ist. Weil andererseits stets $\sqrt[n]{n} \geq 1$ gilt, strebt diese Folge damit gegen 1, da a_n gegen 1 konvergiert.

Aufgabe 2:

Für $x+y+z=1$ und $0 \leq x,y,z \leq 1$ gilt:

$$0 \leq xy + xz + yz - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

Beweis:

linke Ungleichung:

$$xy + xz + yz - 2xyz = xy(1-z) + xz(1-y) + yz \geq 0$$

rechte Ungleichung:

o.B.d.A. $\quad z \geq y \geq z \geq 0$

1. Fall: $z \leq \frac{1}{2}$. Daraus folgt: $1-2x \geq 0,\ 1-2y \geq 0,\ 1-2z \geq 0$

Dann gilt:

$$\sqrt[3]{(1-2x)(1-2y)(1-2z)} \overset{\text{Satz 2}}{\leq} \frac{(1-2x)+(1-2y)+(1-2z)}{3}$$

$$\sqrt[3]{(1-2x)(1-2y)(1-2z)} \leq \frac{3-2(x+y+z)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z) \leq \frac{1}{27} \qquad (1)$$

$$1-2(x+y+z) + 4(xy+xz+yz) - 8xyz \leq \frac{1}{27}$$

$$4(xy+xz+yz-2xyz) \leq \frac{28}{27}$$

Daraus folgt Behauptung.

2. Fall: $z > \frac{1}{2}$. Daraus folgt: $x,y < \frac{1}{2}$

und damit

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z) < 0 < \frac{1}{27}$$

Das entspricht (1) und damit der Behauptung.

w.z.b.w.

Schon allein aus diesen beiden Beispielen erkennt man, daß man Ungleichungen nicht nur mechanisch mit einigen Vorschriften beweisen kann, sondern für jede diesen oder jenen "Kunstgriff" finden muß.

Folgende Ungleichungen können nun zur Übung gelöst werden.

Aufgabe 3:

Man beweise

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\ .$$

Aufgabe 4:

Man beweise

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2} > 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(Hinweis: Man benutze Ungleichung aus Aufgabe 3)

Aufgabe 5:

Man beweise: Ist $0 > \alpha > -1$, so gilt

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

(Hinweis: Bernoullische Ungleichung)

Minima und Maxima

Wir haben schon wiederholt darauf hingewiesen, daß man mit Hilfe von Ungleichungen auch Extremwerte bestimmen kann. Im folgenden wollen wir dazu einige Beispiele angeben. Zunächst zeigen wir eine Extremwertaufgabe, die mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung gelöst wird.

Aufgabe 6:

Man bestimme den kleinsten Wert der Funktion

$$x^{\alpha} - ax, \quad a > 0, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 1$$

Lösung: Wegen $\alpha > 1$ und für $z \geq -1$ gilt nach Satz 3:

$(1+z)^{\alpha} \geq 1 + \alpha z$ (Gleichheit nur für $z=0$)

Wir setzen nun $1+z = y$ und es ergibt sich:

$y^{\alpha} \geq 1 + \alpha(y-1)$, $y^{\alpha} - \alpha y \geq 1 - \alpha$ für $y \geq 0$

(Gleichheit nur für $y=1$)

Daraus folgt: $(cy)^{\alpha} - \alpha c^{\alpha-1}(cy) - (1-\alpha)c^{\alpha}$

Setzen: $x = cy$ und $\alpha c^{\alpha-1} = a$

$$c = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

und erhalten dadurch:

$$x^{\alpha} - ax \geq (1-\alpha)c^{\alpha} = (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $x = c = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Deshalb erreicht die Funktion ihren Minimalwert bei

$x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ und er beträgt $(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.

Aufgabe 7:

Mit Hilfe von Aufgabe 6 bestimme man den kleinsten Wert der Funktion $x^6 - 8x^2 + 5$.

Aufgabe 8:

Man suche den größten Wert der Funktion

$$x^\alpha - ax \quad \text{falls } 0 < \alpha < 1,\ a > 0,\ x \geq 0.$$

Zum Schluß zeigen wir nun noch die Anwendung der Ungleichung zwischen arithmetischen und geometrischen Mittel bei der Bestimmung von Extremwerten.

Aufgabe 9:

In eine gegebene Kugel ist ein Zylinder größten Volumens einzuzeichnen.

Lösung: Wir bezeichnen mit R den Radius der Kugel, mit r den Radius des Zylinders und mit h die Höhe des Zylinders. Dann gelten folgende Formeln:

Volumen des Zylinders: $V = \pi r^2 h$

Höhe des Zylinders: $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$

Wir erhalten: $V = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$

Setzen nun $z = \frac{1}{4\pi^2} V^2$ und folglich

$$z = r^4 (R^2 - r^2)$$

$$\text{bzw. } \frac{1}{4} z = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} (R^2 - r^2)$$

z ist das Produkt dreier Faktoren, deren Summe gleich R^2 ist. Nach Folgerung 3 zu Satz 2 wird z dann seinen größten Wert annehmen, wenn gilt:

$$\frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2} = R^2 - r^2 \quad \text{und damit}$$

$$r = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Da z und V ihren größten Wert für dasselbe r annehmen, ist der Zylinder mit $r = R\ \frac{2}{3}$ der volumenreichste.

Aufgabe 10:

In eine gegebene Kugel ist ein Kegel größten Volumens einzuzeichnen.

Aufgabe 11:

An einer senkrechten Wand hängt ein Plakat. In welcher Entfernung von der Wand muß ein Beobachter stehen, damit der Winkel, unter dem er das Plakat (von unten) sieht, am größten ist.

(Hinweis: $\tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\alpha \ \tan\beta}$)

Stephan Schiller, FSU
Robert Wackernagel, FSU
Mathematikstudenten, 2. Studienjahr

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein

Anschrift: **WURZEL,** 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 31. 10. 1985

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	19 (1985) 12	S. 177–192