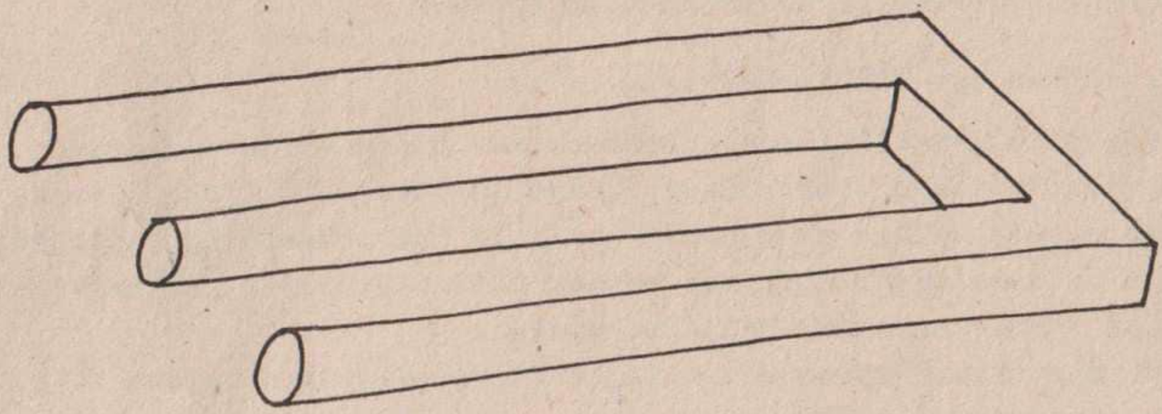


wurzel

1·87

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
21. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

PASCAL- und HILBERT-Matrizen

Im Zusammenhang mit der Testung von Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen mit Hilfe des Computers fanden wir einige Besonderheiten dieser Matrizen. Wir weisen aber darauf hin, daß wir hier im wesentlichen nur interessante Probleme und keine Lösungen dieser Probleme angeben können.

1. Aufbau der PASCAL-Matrix

Ausgehend vom PASCALschen Dreieck der Binomialkoeffizienten werden Matrizen konstruiert, indem aus dem PASCALschen Dreieck, von dessen Spitze ausgehend, Quadrate "herausgetrennt" werden. Die so erhaltenen Matrizen werden PASCAL-Matrizen genannt. Sie sind symmetrisch zur Hauptdiagonalen.
Für die vierreihige quadratische PASCAL-Matrix sähe das z. B. folgendermaßen aus:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

$$
U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} .
$$

Zum Aufbau der Matrizen verwendeten wir das folgende BASIC-Programm:

```
100 REM
110 REM AUFBAU DER PASCAL-MATRIX
130 REM   INPUT :  N=Zeilen- bzw. Spaltenzahl der PASCAL-Matrix
140 REM   OUTPUT:  U(1..N,1..N)=Elemente der PASCAL-Matrix
160 REM   INTERNE VARIABLEN: I,K=Schleifenvariable
170 REM   F1,F2,F3=Fakultaeten fuer die Berechnung der Elemente
180 REM
190 FOR I=1  TO  N
200   FOR K=1  TO  N
210      X=I+K-2
220      GOSUB 400
230      F1=F
240      X=I-1
250      GOSUB 400
260      F2=F
270      X=K-1
280      GOSUB 400
290      F3=F
300      U(I,K)=F1/(F2*F3)
310   NEXT K
320 NEXT I
330 REM
340 END
350 REM
360 REM UNTERPRODGRAMM FAKULTAET
380 REM Variablen:J,X,F
390 REM
400   F=1
410   FOR J=1 TO X
420      F=F*J
430   NEXT J
440 RETURN
450 REM
```

2. Determinante der PASCAL-Matrix

Die Determinante jeder PASCAL-Matrix ist unabhängig von der Zeilenzahl der Matrix gleich 1.

Wir verzichten hier auf einen Beweis. Wer mit Matrizenumformungen zur Bestimmung der Determinante vertraut ist, wird aber leicht sehen, daß sich durch geschickte Zeilen- und Spaltenoperationen jede dieser Matrizen auf die Matrix mit um 1 geringerer Zeilenzahl zurückführen läßt.

3. Die PASCAL-Matrix als Koeffizientenmatrix von Gleichungssystemen

Ergänzt man eine PASCAL-Matrix durch einen Spaltenvektor, so erhält man ein Gleichungssystem. Wir berechneten mit einem Computerprogramm den entsprechenden Lösungsvektor.

Für den Spaltenvektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich der Lösungsvktor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Setzt man für $b = \begin{pmatrix} 1^k \\ 2^k \\ \vdots \\ n^k \end{pmatrix}$ mit k=1,2,..., so ergeben sich

für jedes k ab dem Grad k+1 eines Gleichungssystems konstante Folgen der ersten k Elemente des Lösungsvektors. Ab dem Element k+1 sind alle anderen Elemente des Lösungsvektors Null. Betrachtet man nun diese ersten k+1 Elemente der entsprechenden Lösungsvektoren in Abhängigkeit von k, so zeigen sich dabei verschiedene Gesetzmäßigkeiten:

(1) Das jeweils erste Element jedes Lösungsvektors ist Null.

(2) Das jeweils zweite Element jedes Lösungsvektors hat den Wert $(-1)^{k+1}$ in Abhängigkeit von k.

(3) Das jeweils dritte Element jedes Lösungsvektors hat den Wert $(-1)^k \cdot (2^k-2)$.

(4) Das jeweils letzte von Null verschiedene Element, d. h. das (k+1)-te Element jedes dieser Lösungsvektoren hat den Wert $k!$, (k=1,2,...).

(5) Das jeweils k-te Element jedes dieser Lösungsvektoren hat den Wert $-(k-1)\cdot k!/2$, (k=1,2,...).

Die Bildungsvorschrift bis zum jeweils (k-5). Element jedes dieser Lösungsvektoren (k=6,7,...) ist hier mit angegeben. Weitere Bildungsvorschriften für das jeweils dritte, vierte ... Element sowie eine allgemeine für die (n-m)-ten Elemente dieser Lösungsvektoren in Abhängigkeit von k wären allerdings noch zu finden.

4. Inverse PASCAL-Matrix

Mittels eines Programms berechneten wir die inversen Matrizen der PASCAL-Matrizen. Wir erhielten für n=1...6 folgendes Ergebnis:

n=1 $\quad 1$

n=2 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

n=3 $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

n=4 $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

n=5 $\begin{pmatrix} 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \\ -10 & 30 & -35 & 19 & -4 \\ 10 & -35 & 46 & -27 & 6 \\ -5 & 19 & -27 & 17 & -4 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

n=6 $\begin{pmatrix} 6 & -15 & 20 & -15 & 6 & -1 \\ -15 & 55 & -85 & 69 & -29 & 5 \\ 20 & -85 & 146 & -127 & 56 & -10 \\ -15 & 69 & -127 & 117 & -54 & 10 \\ 6 & -29 & 56 & -54 & 26 & -5 \\ -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

Man kann sehen, daß in den letzten Zeilen bzw. Spalten der inversen Matrizen für n=1...6 jeweils die n-1-te Zeile des PASCALschen Dreiecks, nur mit alternierendem Vorzeichen steht. Die Vorzeichenverteilung auf den Matrizen hat folgendes, immer gleich bleibendes Muster:

$$\begin{matrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Allerdings fanden wir auch hier noch nicht eine allgemeingültige Gesetzmäßigkeit für den Aufbau der inversen Matrizen.

5. Aufbau der HILBERT-Matrix

Die allgemeine n-reihige quadratische HILBERT-Matrix hat folgenden Aufbau:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2\cdot n-1) \end{pmatrix}$$

Auch die HILBERT-Matrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen aufgebaut. Wir verwendeten das folgende BASIC-Programm:

```
100 REM
110 REM PROGRAMM ZUM AUFBAU DER HILBERTMATRIX
130 REM   INPUT : N=Zeilen- bzw. Spaltenzahl der HILBERT-Matrix
140 REM   OUTPUT: U(1..N,1..N)=Elemente der HILBERT-Matrix
160 REM   INTERNE VARIABLEN: I,K=Schleifenvariable
170 REM
180 FOR I=1 TO N
190   FOR K=1 TO N
200      U(I,K)=1/(I+K-1)
210   NEXT K
220 NEXT I
230 END
240 REM
```

6. Determinante der HILBERT-Matrix

Die Determinante der HILBERT-Matrix geht mit wachsendem n gegen Null.

Wir verzichten hier auf einen Beweis und geben nur den Wert der Determinante für n=1...8 an:

n=1	D = 1.0000000000000 E+00
n=2	D = 8.3333333333333 E-02
n=3	D = 4.6296296296296 E-04
n=4	D = 1.6534391534392 E-07
n=5	D = 3.7492951325141 E-12
n=6	D = 5.3672998873887 E-18
n=7	D = 4.8358026257373 E-25
n=8	D = 2.7370501412215 E-33

7. Die HILBERT-Matrix als Koeffizientenmatrix von Gleichungssystemen

Ergänzt man die HILBERT-Matrix durch einen Spaltenvektor, so erhält man ein Gleichungssystem. Bei der Auswertung der Lösungsvektoren stellten wir wieder Gesetzmäßigkeiten fest.

Setzt man den Spaltenvektor $b = \begin{pmatrix} 2^1 \\ 2^2 \\ \vdots \\ 2^n \end{pmatrix}$, so erhält man für n=1...8:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	0	2	0	2	0
	2	-2	4	-4	6	-6	8
		2	-4	8	-12	18	-24
			2	-6	14	-26	44
				2	-8	22	-48
					2	-10	32
						2	-12
							2

Für die Abhängigkeit der Elemente der Lösungsvektoren von k fanden wir folgende Gesetzmäßigkeiten:

(1) Die jeweils ersten Elemente entstehen nach der Bildungsvorschrift $1-(-1)^n$.

(2) Die zweiten Elemente haben den Wert $(-1)^n \cdot 2 \cdot [n/2]$.

(3) Die n-ten Elemente, also die Elemente der letzten Diagonalen sind konstant gleich 2.

(4) Die n-1-ten Elemente ergeben sich nach der Vorschrift $-2 \cdot n+4$.

(5) Die jeweils n-2-ten Elemente haben die Bildungsvorschrift $n^2-5 \cdot n+8$.

(6) Die n-3-ten Elemente ergaben die Vorschrift $-1/3 \cdot n^3+3 \cdot n^2-32/3 \cdot n+16$.

Es lassen sich noch weitere Zusammenhänge ermitteln. Die allgemeine Lösung können wir jedoch nicht angeben.

Dorothee Haroske, Holger Scharm
Spezialschule „Carl Zeiss“ Jena

Die jeweils ersten (n+1) Elemente dieser Lösungsvektoren für n=1...11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	n
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(1)
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	(2)
0	2	-6	14	-30	62	-126	254	-510	1022	-2046	(3)
↓	0	6	-36	150	-540	1806	-5796	18150	-55980	171006	
	↓	0	24	-240	1560	-8400	40824	-186480	818520	-3498000	
		↓	0	120	-1800	16800	-126000	834120	-5103000	29607600	
			↓	0	720	-15120	191520	-1905120	16435440	-129230640	(10)
				↓	0	5040	-141120	2328480	-29635200	322494480	(9)
					↓	0	40320	-1451520	30240000	-479001600	(8)
						↓	0	362880	-16329600	419126400	(7)
							↓	0	3628800	-199584000	(6)
								↓	0	39916800	(5)
									↓	0	(4)
										↓	

(1) $x_1 = 0$ $(n \geq 1)$

(2) $x_2 = -(-1)^n$ $(n \geq 1)$

(3) $x_3 = (-1)^n \cdot (2^n - 2)$ $(n \geq 1)$

(4) $x_{n+1} = n!$ $(n \geq 1)$

(5) $x_n = -\frac{1}{2}(n-1) \cdot n!$ $(n \geq 1)$

(6) $x_{n-1} = \frac{1}{24}(n-2)\ 3(n-2)+1 \quad \cdot n!$ $(n \geq 2)$

(7) $x_{n-2} = -\frac{1}{48}(n-3)\ (n-3)^2+(n-3) \quad \cdot n!$ $(n \geq 3)$

(8) $x_{n-3} = \frac{1}{5760}(n-4)\ 15(n-4)^3+30(n-4)^2+5(n-4)-2 \quad \cdot n!$ $(n \geq 4)$

(9) $x_{n-4} = -\frac{1}{11520}(n-5)\ 3(n-5)^3+10(n-5)^2+5(n-5)-2 \quad \cdot n!$ $(n \geq 5)$

(10) $x_{n-5} = \frac{1}{725760}(n-6)\ 315(n-6)^4-1260(n-6)^3+3521(n-6)^2-4326(n-6)+1894 \quad \cdot n!$ $(n \geq 6)$

Preisaufgaben

T 1

2

Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem und zwei Punkte $P_1=(a,0)$ auf der x-Achse und $P_2=(0,b)$ auf der y-Achse, wobei $a,b > 0$. Jetzt werden zwei Kreise K_1 und K_2 gezeichnet. Der Mittelpunkt von K_1 liege auf der x-Achse und der von K_2 auf der y-Achse. Desweiteren gehe K_1 durch P_1 und K_2 durch P_2. Die beiden Kreise schneiden sich im ersten Quadranten im Punkt P und haben im Schnittpunkt eine gemeinsame Tangente. Man finde den geometrischen Ort aller so zustandekommenden Punkte P, wobei P_1 und P_2 dabei fest bleiben sollen.

T 2

1

Es sei $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$ und keine zwei der Winkel α,β,γ gleichzeitig gleich Null.
Man zeige, daß dann gilt:
$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1$.

T 3

1

Gegeben seien zwei Kreise K_1 und K_2 unterschiedlichen Radiuses. Der Durchschnitt der Kreisflächen beider Kreise sei leer. Auf einem der beiden Kreise liege der Punkt A. Man konstruiere nun alle möglichen Kreise K, die K_1 und K_2 berühren und durch A gehen. Man betrachte dabei die verschiedenen Möglichkeiten der Lage von A auf K_1 oder K_2.

T 4

1

Im Dreieck ABC gelte: $\sphericalangle CAB = 2\cdot\sphericalangle ABC$.
Man finde die Länge der Seite a, wenn die Längen der Seiten b und c bekannt sind.

T 5

2

Es ist unter allen komplexen Zahlen z mit $|z-25i|\leq 15$ diejenige mit dem größten Realteil zu finden.

T 6

1

В шар вписан правильный тетраэдер, затем в тетраэдер снова вписан шар. Найти отношение поверхностей двух шаров.

FDJ-Studentenklub „Schmiede“

Wer "Junge Welt"-Leser ist, wird vielleicht zur Kenntnis genommen haben, daß ein Studentenclub unserer Universität am Abschlußturnier der Aktion "ALLE REDEN ÜBER FUSSBALL - WIR SPIELEN" teilgenommen hat und beim Fußball-Volksfest in Krostitz am 7. Oktober 1986 den zweiten Platz belegte. Es ist allerdings ein Irrtum anzunehmen, daß hier Sportstudenten am Werke waren. Der größte Teil der Mannschaft beschäftigt sich mit Mathematik. Dieser außergewöhnliche "Auftritt" des FDJ-Studentenclubs "Schmiede", dessen Trägersektion die Sektion Mathematik ist, soll uns Anlaß sein, etwas mehr über diesen Club zu berichten.

Als Studenten der Sektionen Mathematik und Wirtschaftswissenschaften Anfang der 70er Jahre ein neues Wohnheim im Neubaugebiet Lobeda in Besitz nahmen, dachten sie auch darüber nach, wie und wo sie ihre Freizeit verbringen wollten. Am Ende allen Nachdenkens und anschließenden Schaffens konnte im November 1972 in Kellerräumen des neuen Wohnheimes der FDJ-Studentenclub "Schmiede" eröffnet werden. Seitdem wurden rund 240 Studenten, aber auch einige Jugendliche aus dem Wohngebiet "H.-Duncker-Str.", als Mitglieder in's "Kaderbuch" des Clubs eingeschrieben. Nach wie vor sorgt eine Mannschaft von ca. 50 Clubmitgliedern in ehrenamtlicher Tätigkeit dafür, daß an 5 Öffnungstagen in der Woche stets ein abwechslungsreiches Programm läuft. Wenn mittwochs und sonnabends zur Disco gerufen wird, reicht oft die Kapazität von 120 Plätzen nicht aus. Der Dienstag und der Donnerstag sind zumeist Vorträgen, Gesprächsrunden, Foren, manchmal aber auch dem Bierabend vorbehalten. Am Montag wird die allgemeine Öffnungszeit von 19.00 - 23.00 Uhr, nur sonnabends geht's eine Stunde länger, zumeist auch durch Musik ausgefüllt. Unter "M i C - Musik im Club" stellten sich bereits eine ganze Reihe von Liedermachern, kleinen Gruppen und Volkskunstkollektiven vor, aber auch Clubmitglieder selbst gestalten so manchen Abend.

Seit Gründung des Clubs fanden somit etwa 1000 Vorträge statt, ungezählt ist die Zahl der Besucher zu ca. 1500 Tanzabenden. Auf der Habenseite stehen aber auch 35000 NAW-Stunden, denn alle Bau-, Renovierungs- und Verschönerungsarbeiten werden zum größten Teil von den Clubmitgliedern selbst erledigt. Somit ist es schon gerechtfertigt, daß Clubmitglieder gerne kundtun: "... bei uns läuft mehr als nur Bier!" Aber auch dem wird redlich zugesprochen und damit alten studentischen Bräuchen Folge geleistet.

Sicher suchten viele Clubmitglieder zunächst erst einmal eine Einrichtung, in der sie Interessen nachgehen und sich vom Studium entspannen konnten. Oftmals wurden sie auch schon beim ersten Besuch während der "Jenaer Informations-Tage" oder der ersten Studienwoche in ihren Bann gezogen. Viele ehemalige Clubmitglieder bestätigen aber auch gerne, daß sie durch die "Schmiede" eine ganze Menge an Erfahrungen mitnehmen konnten, die sie heute bei der Organisierung des gesellschaftlichen Lebens in ihren Arbeitskollektiven, ob in der Schule oder in Betrieben, ständig zur Anwendung bringen können. Zu diesen Erfahrungen zählen auch die Organisation zahlreicher clubinterner Veranstaltungen, die wesentlich zur ständigen Festigung des Kollektivs, das sich durch Ausscheiden von Absolventen und Neuaufnahme jüngerer Studenten ständig erneuert, beitragen. Der alljährlich am ersten Novemberwochenende stattfindende Clubgeburtstag hat dabei seinen festen Platz und bietet beste Möglichkeiten zur Begegnung der verschiedenen "Clubjahrgänge".

Aber wie man eigentlich auch schon vermuten kann, spielt auch der Sport eine gewichtige Rolle im "inneren Clubleben". Sportlerforen sind fester Bestandteil des "Schmiede"-Programms. Ein Patenschaftsvertrag mit dem SC Motor Jena schafft dafür beste Voraussetzungen, aber auch die Möglichkeit zu einer Reihe von sportlichen Vergleichen. Bekannte Sportler wie Heike Drechsler, Wolfgang Hoppe und Dietmar Schauerhammer, die auch ab und zu im Club anzutreffen sind, und deren Entwicklung die Clubmitglieder intensiv verfolgen, wurden als Ehrenmitglieder aufgenommen. Und mit der Anführung der alljährlich stattfindenden Clubvergleiche im Fußball schließt sich der Kreis dieses Berichtes. Nach einem 4 : 3 Sieg über die Mannschaft des FDJ-Studentenclubs "Rosenkeller" faßte die Mannschaft den Entschluß, sich an der Umfrage der "Jungen Welt" nach dem besten Fußballer der DDR aller Zeiten zu beteiligen und sich "höheren" Aufgaben zu stellen ...

Bild 1: Die Mannschaft des FDJ-Studentenclubs "Schmiede" beim Fußball-Volksfest in Krostitz

Bild 2: "Bremser zu Gast im Club" - Sportlerforum mit Dietmar Schauerhammer (2. von rechts) und weiteren Bobsportlern des ASK "Vorwärts" Oberhof

Bild 2

R. Schmidt-Röh
Sektion Mathematik

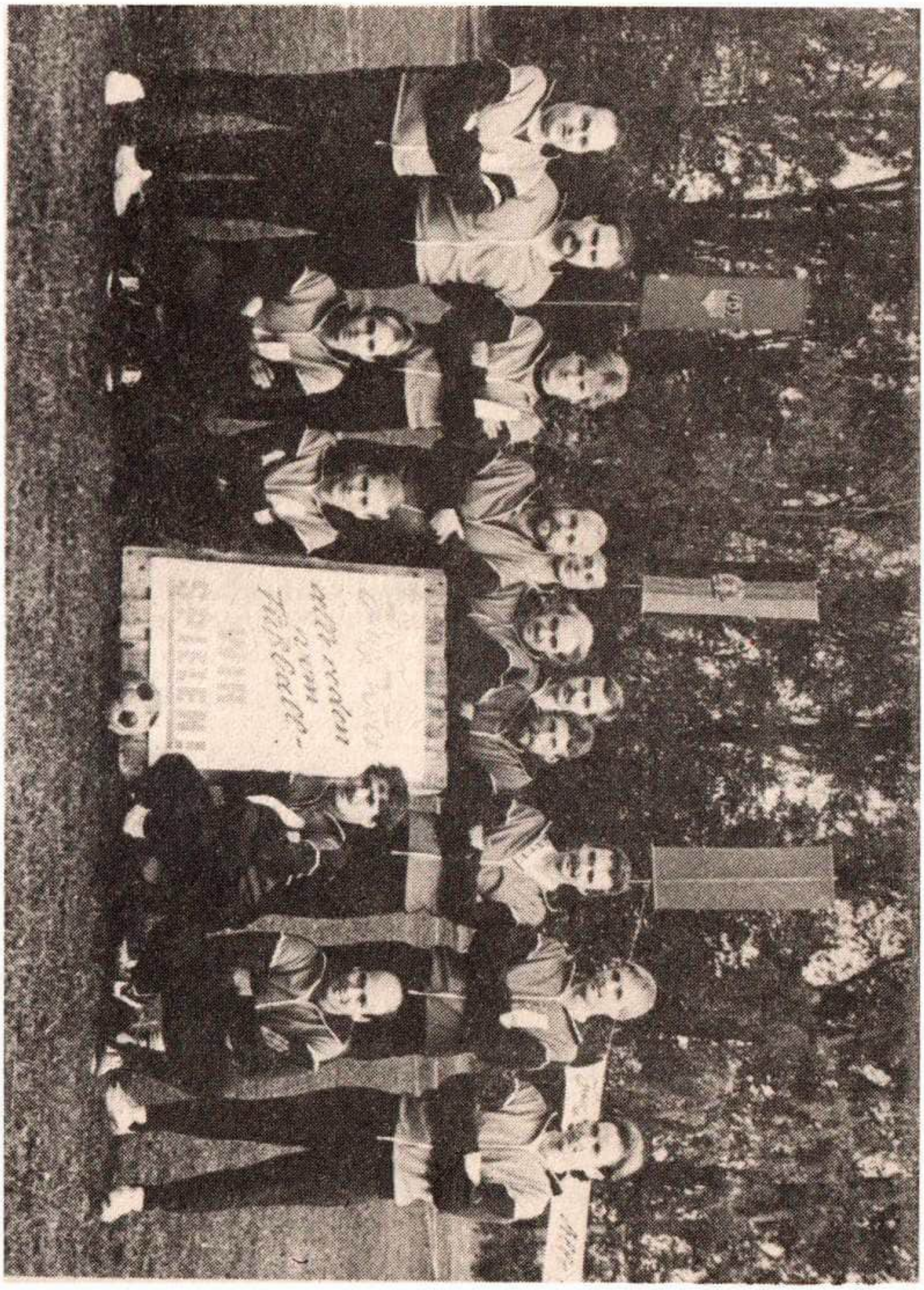


Bild 1

Jahresinhaltsverzeichnis 1986

&/&/&/&/&/&/&/&/&/&/&/&/&/&

Auch die Wissenschaft hat ihre Zeit
der Unmündigkeit,
wenn sie eben anfängt und noch
fast kindisch ist,
dann ihre Jugend,
wenn sie üppig und übermütig ist,
darauf ihre Mannesjahre,
wenn sie gesetzt und gebändigt ist,
und endlich ihr Greisenalter,
wenn sie trocken und erschöpft ist.

Bacon "Ueber die Wandelbarkeit der Dinge"

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: C. Dahmke, J. Dimler, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 19. 1. 87

Titelseite: M. Torke

SSN 0232-4539	Wurzel	Jena	21 (1987) 1	S. 1–16

Tragödien der Wissenschaft bestehen in der Ermordung schöner Theorien durch ekelhafte Fakten.

T. H. Huxley

wurzel 2·87

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
21. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Beiträge zur elementaren Zahlentheorie

Einleitung

Die elementare Zahlentheorie beschäftigt sich vornehmlich mit den natürlichen Zahlen. Wir wollen uns hier etwas näher mit dem Begriff des Teilers einer natürlichen Zahl n, $n=1,2,3,\dots$, beschäftigen. Wir setzen dabei die Kenntnis der Gesetze der elementaren Rechenoperationen und der Anordnung als bekannt voraus. Wir berufen uns weiter auf die Erfahrung, daß bei der Division zweier natürlicher Zahlen a,b zwei nicht-negative ganze Zahlen q,r existieren, so daß $a=qb+r$ mit $0 \leq r < b$ gilt (der Leser überzeuge sich, daß mit der letzten Bedingung für r die Eindeutigkeit von q und r ableitbar ist).
Ist der Divisionsrest $r=0$, so steht b in einem besonderen Verhältnis zu a, das wir mit dem Zeichen $b|a$, in Worten "b teilt a" oder "b ist ein Teiler von a", ausdrücken: für natürliche Zahlen a,b sei

$b|a$ genau dann, wenn es eine natürliche Zahl q gibt mit der Eigenschaft, daß $a=qb$ ist.

Es ist nützlich zu erkennen, daß aus $b|a$ die Relation $b \leq a$ folgt.
Betrachten wir nun etwa die ersten 6 natürlichen Zahlen n, so stellen wir bei der Suche nach natürlichen Zahlen t mit $t|n$ fest, daß es genau eine natürliche Zahl gibt, die nur einen Teiler hat ($n=1$), daß es natürliche Zahlen gibt, die genau zwei Teiler haben (wir nennen solche natürlichen Zahlen $n > 1$, die nur die sogenannten "trivialen Teiler" 1 und n haben, Primzahlen) und daß es schließlich natürliche Zahlen n gibt, die mehr als zwei natürliche Zahlen als Teiler besitzen (wir nennen sie "zusammengesetzte Zahlen"): Die natürliche Zahl

n heißt zusammengesetzt genau dann, wenn es natürliche Zahlen a,b gibt mit $n=ab$ und $1 < a \leq b < n$.

Damit zerfällt die Menge der natürlichen Zahlen in drei disjunkte Teilmengen, die Menge 1 , die Menge aller Primzahlen und die Menge der zusammengesetzten Zahlen.
Da die Menge der zusammengesetzten Zahlen offensichtlich unendlich viele Elemente besitzt (man betrachte etwa die Vielfachen

von 2), muß nicht notwendig die Menge der Primzahlen unendlich viele Elemente besitzen.
Und doch ist es so, wie bekanntlich EUKLID vor mehr als 2000 Jahren bewiesen hat: Nimmt man an, es gibt nur endlich viele Primzahlen, die wir

$$p_1,\dots,p_n$$

nennen wollen, so erhält man mit der wie folgt konstruierten natürlichen Zahl

$$m=p_1p_2\cdots p_n+1$$

und dem (vom Leser selbst zu beweisenden) Sachverhalt, daß der kleinste von 1 verschiedene Teiler einer vorgegebenen natürlichen Zahl größer 1 stets eine Primzahl ist, die sicher falsche Aussage, daß es eine Primzahl gibt, die Teiler von 1 ist.

Der aufmerksame Leser wird sich an dieser Stelle fragen, woher wir die Gewißheit nehmen, daß eine beliebige nicht-leere Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen ein eindeutig bestimmtes minimales Element im Sinne der üblichen Kleinerrelation "$<$" besitzt.

Genau dies wird in der elementaren Zahlentheorie zum Postulat erhoben (als durch die Erfahrung bestätigt, wie die eingangs erwähnte "Division mit Rest") und ist Grundlage zum Beispiel für das nachstehende Induktionsprinzip:

> $\mathbb{N}$ bezeichne die Menge der natürlichen Zahlen, und es sei M eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ($M \neq \emptyset$, $M \subseteq \mathbb{N}$). Auf M sei eine Aussage A(m) für die Elemente m aus M erklärt.
> Dann gilt A(m) für alle m aus M, falls die folgenden zwei Sachverhalte nachgewiesen werden können:

(i) Es gilt $A(m_o)$ für das minimale Element m_o aus M.
(ii) Für jedes $m > m_o$ aus M gilt A(m) unter der Bedingung, daß A(k) gilt für alle k aus M mit $k < m$.

Dieses Induktionsprinzip wird vor allem dann von Interesse sein, wenn M unendlich viele Elemente hat und es kann natürlich $M \subset \mathbb{N}$ gesetzt werden, wie es im Beweis des nachstehenden Fundamentalsatzes der Zahlentheorie der Fall ist.
Beispiele für $M=\mathbb{N}$ liefern die Aufgaben,
$2^n \geq n+1$ und $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \dots n\cdot n! = (n+1)!-1$

für alle $n \geq 1$

zu beweisen, was dem Leser überlassen bleibt.
Nun aber zum Beweis des Induktionsprinzips. Wir beweisen, daß es hinreichend ist, (i) und (ii) nachzuweisen, um zu wissen, daß die Aussage A(m) dann für alle m aus M richtig ist.

Wir führen den Beweis indirekt, das heißt, wir betrachten zwar (i) und (ii) als nachgewiesen, nehmen aber an, daß es Elemente m' aus M gibt, für die A(m') falsch ist.
Diese Elemente m' bilden eine Menge M' mit $M' \neq \emptyset$ und $M' \subset M \subseteq N$.
Also besitzt M' ein minimales Element, das wir m_o' nennen (und als Element von M betrachten) und für das A(m') eine falsche Aussage ist, während für alle $k < m_o'$ die Aussage A(k) wahr ist.

Nun folgt aus (i), daß $m_o' > m_o$ sein muß, da sonst mit $m_o' = m_o$ die Aussage $A(m_o)$ identisch mit $A(m_o')$ zugleich wahr und falsch wäre. Betrachten wir jetzt den als richtig vorausgesetzten Sachverhalt (ii) für $m = m_o'$:

Da die dortigen Voraussetzungen für das spezielle $m = m_o'$ erfüllt sind, dürfen wir über (ii) auf die Gültigkeit von $A(m_o')$ schließen, das heißt, wir erhalten "$A(m_o')$ ist wahr" im Widerspruch zur Definition von m_o'.
Also kann es keine Elemente m' aus M geben, für die A(m') falsch ist, falls (i) und (ii) gilt. Das wollten wir beweisen.

Der nachstehende F u n d a m e n t a l s a t z der Zahlentheorie streicht die Bedeutung der Primzahlen als multiplikative Bausteine der natürlichen Zahlen heraus.
Der anschließende Beweis stammt von dem ungarischen Mathematiker J. SURÁNYI aus dem Jahre 1962 und zeichnet sich durch erfrischende Kürze aus (/1/).

Fundamentalsatz der Zahlentheorie

> Jede natürliche Zahl $n > 1$ läßt sich als Produkt von Primzahlen darstellen, wobei die Darstellung bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist.

Beweis: Der Satz gilt für 2 und jede weitere Primzahl. Es sei daher n eine zusammengesetzte Zahl, und wir nehmen die Richtigkeit des Satzes für alle natürlichen Zahlen kleiner als n an. Dann gibt es natürliche Zahlen a,b mit n=ab und $1 < a \leq b < n$.

Da der Satz für a und b gilt, geben die Primfaktoren von a und b eine Primfaktorzerlegung von n. Damit ist die Existenz einer Darstellung nachgewiesen.

Der kleinste Teiler $p > 1$ von n ist natürlich eine Primzahl. Wenn wir zeigen können, daß p unter den Primfaktoren von a oder b vorkommt, so ist auch die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung von n nachgewiesen. Denn nach Induktionsannahme (Voraussetzung in (ii)) hat die Zahl n' in $n=pn'$ wegen n' n eine eindeutige Primfaktorzerlegung.

Es ist nun $p \leq a$, da p der kleinste Teiler größer 1 von n ist. Für $p=a$ gilt unsere Behauptung. Für $p < a$ bilden wir mit $a'=a-p$ die Zahl $n''=a'b=(a-p)b=n-pb$. Damit ist $p \mid n''$, $0 < n'' < n$ und n'' besitzt eine eindeutige Primfaktorzerlegung, die aus den Zerlegungen von a' und b resultiert. Folglich muß p unter den Primfaktoren von a' oder b vorkommen. Ist p in b enthalten, so sind wir fertig. Ist a' durch p teilbar, so auch $a=a'+p$. Somit ist auch in diesem Fall der Beweis beendet.

Üblicherweise faßt man in der Primfaktorzerlegung

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k$$

gleiche Primzahlen zu Primzahlpotenzen zumsammen und nennt

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, \quad p_1 < p_2 \cdots < p_r \quad \text{für } r > 1, \quad \alpha_i \geq 1$$

die kanonische Zerlegung von n.

Mit dem Produktzeichen $\prod$, das wir für alle natürlichen Zahlen n induktiv definieren durch

$$\prod_{i=1}^{1} a_i := a_1 \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i := \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot a_n \quad \text{für } n > 1,$$

folgt für die kanonische Zerlegung von n die Schreibweise

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}, \quad p_1 < p_2 < \cdots < p_r \quad \text{für } r > 1, \quad \alpha_i \geq 1,$$

auf die wir künftig zurückgreifen wollen. So auch im folgenden.

S a t z . Ist $n > 1$ in der kanonischen Zerlegung

(1) $$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$$

gegeben, so läßt sich jeder Teiler t von n in der Form

$$(2) \qquad t = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}\,, \qquad 0 \leq k_i \leq \vartheta_i$$

darstellen.

Beweis: Es sei t ein beliebiger Teiler von n. Mit $t|n$ gibt es eine natürliche Zahl d, so daß

$$dt = n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\vartheta_i}\,.$$

Ist t=1, so wählen wir die k_i sämtlich gleich Null. Es sei nun $t > 1$. Jeder Primteiler (Teiler, der Primzahl ist) von t muß wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung von n mit einer der Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ übereinstimmen.

Nehmen wir nun an, der betrachtete Primteiler p_i von t kommt in t mit einer Häufigkeit $k_i > \vartheta_i$ vor, so würde die Zahl n' in

$$dt' p_i^{k_i - \vartheta_i}\, p_i^{\vartheta_i} = p_i^{\vartheta_i}\, n'$$

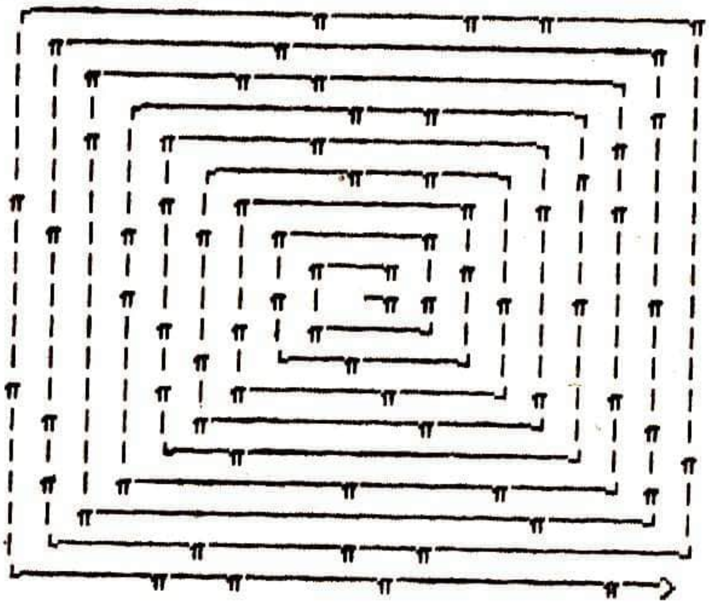
eine Primfaktorzerlegung besitzen, in der der Primfaktor p_i nicht vorkommt und eine solche, in der er mit der Vielfachheit $k_i - \vartheta_i > 0$ vorhanden ist. Deshalb gilt für jedes k_i die Relation $k_i \leq \vartheta_i$, womit der Beweis abgeschlossen ist.

Wir werden (2) im nächsten Abschnitt benutzen. Unabhängig davon löse der Leser folgende

A u f g a b e : Bezugnehmend auf die abgebildete "Primzahl-Spirale" zeige man mit Hilfe der Funktion n! (n-Fakultät), daß es in der Folge der natürlichen Zahlen beliebig große Lücken zwischen den Primzahlen gibt.

PRIMZAHL-

SPIRALE



Die Teilerfunktion d(n)

Wir definieren die Funktion d(n) für alle natürlichen Zahlen n durch

$$d(n) := \sum_{t/n} 1 \quad ,$$

was bedeutet, daß d(n) die Anzahl der Teiler t der natürlichen Zahl n angibt.

Ein Blick auf die ersten Funktionswerte

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
d(n)	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6

zeigt, daß gerade Funktionswerte sehr viel häufiger auftreten als ungerade und daß wir gar die Vermutung aussprechen können:

Die Anzahl d(n) der Teiler einer natürlichen Zahl n ist genau dann ungerade, wenn n eine Quadratzahl ist.

Da $n=\sqrt{n}\sqrt{n}$ und in n=dt der Teiler t stets mit dem sogenannten Komplmentärteiler d ein Pärchen bildet, steht die Frage, wann und nur wann sich ein Teiler mit sich selbst als Komplementärteiler begnügen muß.

Weiter wissen wir bereits über d(n), daß der Funktionswert 2 unendlich oft angenommen wird. Andererseits ergibt sich für

$$n=2^m \text{ der Wert } d(n)=m+1 = 1+\frac{\log n}{\log 2} ,$$

da die Teiler von 2^m die Zahlen $1=2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^m$ sind ("log" steht stets für den natürlichen Logarithmus).

Durchläuft n also die Werte 2^m mit wachsendem m, so wächst d(n) etwa wie die Logarithmusfunktion logn.

Ein Blick in die Literatur (etwa /1/) besagt, daß Zahlen vom Typ 2^m nur "durchschnittlich" viele Teiler besitzen. Es gibt Folgen natürlicher Zahlen n, bei denen d(n) stärker wächst als logn. Um dies beweisen zu können, wollen wir zunächst eine Formel und eine wichtige Eigenschaft von d(n) ableiten. Vorher einigen wir uns noch, was "teilerfremd" für zwei natürliche Zahlen a,b bedeutet. Zwei natürliche Zahlen

a,b heißen teilerfremd genau dann, wenn 1 der einzige gemeinsame Teiler t ($t|a$ und $t|b$) ist.

Der angekündigte Satz lautet nun wie folgt.

S a t z . Ist $n > 1$ in der kanonischen Zerlegung

(3) $$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\vartheta_i}$$

gegeben, so ist die Anzahl $d(n)$ der Teiler von n durch

(4) $$d(n) = \prod_{i=1}^{r} (\vartheta_i + 1)$$

bestimmt, und $d(n)$ hat überdies die Eigenschaft

(5) $d(ab) = d(a)d(b)$, falls a,b teilerfremd sind.

Beweis: Wegen (2) ist jeder Teiler von n in der Form

$$t = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}, \qquad 0 \le k_i \le \vartheta_i$$

darstellbar. Da ein Teiler von n eindeutig durch die Auswahl von r Zahlen

$$k_1, \ldots, k_r$$

festgelegt ist, ist die Anzahl der Teiler von n gleich dem Produkt der Auswahlmöglichkeiten der einzelnen k_i:
$d(n) = (\vartheta_1+1)(\vartheta_2+1)\ldots(\vartheta_r+1)$, was (4) ist.

Nun zu (5). Für $a=1$ oder $b=1$ haben wir nichts zu beweisen (siehe Funktionswerttabelle). Es bleibt der Fall $a,b > 1$. Hierfür seien die kanonischen Zerlegungen von a,b gegeben durch

$$a = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\vartheta_i} \quad , \qquad b = \prod_{i=1}^{s} q_i^{\mu_i} .$$

/1/ KRÄTZEL, Zahlentheorie, Mathematik für Lehrer, Band 19, DVW 1981.

Dann ist wegen der Teilerfremdheit von a,b

$$ab = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_r^{\nu_r} q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2} \dots q_s^{\mu_s}$$

die kanonische Zerlegung der natürlichen Zahl ab (bis auf die Reihenfolge der Faktoren), da keine der Primzahlen p_i unter den q_i vorkommt. Es ist dann mit (4)

$$d(ab)=(\nu_1+1)(\nu_2+1)\dots(\nu_r+1)(\mu_1+1)(\mu_2+1)\dots(\mu_s+1)$$

$$= \prod_{i=1}^{r}(\nu_i+1) \prod_{i=1}^{s}(\mu_i+1) = d(a)d(b) ,$$

was wir noch zeigen wollten.

Statt (5) hinzuschreiben, sagt man "d(n) ist multiplikativ". Die Bedingung der Teilerfremdheit kann dabei nicht weggelassen werden, wie $d(4) \neq d(2)d(2)$ zeigt.

Nun wollen wir uns davon überzeugen, daß d(n) für gewisse Folgen natürlicher Zahlen n tatsächlich rascher wächst als log n. Statt $n=2^m$, $m=1,2,3,\dots$ betrachten wir die sich als "teilerreicher" entpuppende Zahlenfolge

$$(6) \qquad n = \prod_{i=1}^{r} p_i^m , \qquad m=1,2,3,\dots ,$$

worin $p_1 < p_2 < \dots < p_r$, r beliebig, festgelegte Primzahlen sein sollen mit $r > 1$.

Wegen (4) erhalten wir

$$d(n) = \prod_{i=1}^{r} (m+1) = (m+1)^r > m^r$$

und wegen (6)

$$\log n = m \sum_{i=1}^{r} \log p_i = m\, L(r),$$

worin L(r) eine von r abhängige reelle Zahl ist und für die Summe über $\log p_i$ steht. Wichtig ist nun, daß L(r) zwar groß sein kann, aber fest bleibt, wenn m groß wird. Somit erhalten wir

$$d(n) > m^r = \left(\frac{\log n}{L(r)}\right)^r = \frac{\log n}{(L(r))^r} (\log n)^{r-1} \gg (\log n)^{r-1} ,$$

wenn nur n hinreichend groß ist, wofür wir nur m in (6) hinreichend groß ($m \geq m_o$) wählen müssen.

Wir fassen diese Untersuchung etwas genauer in einem Satz zusammen und fügen eine ergänzende Aussage hinzu, die wir anschließend beweisen.

Satz. Es sei $r > 1$ eine (beliebig groß) vorgegebene natürliche Zahl und $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ die ersten r Primzahlen.
Dann gibt es eine von r abhängige natürliche Zahl $m_o = m_o(r)$, so daß für die Zahlenfolge

$$(7) \qquad n = \prod_{i=1}^{r+1} p_i^m , \qquad m = m_o, m_o+1, m_o+2, m_o+3, \dots$$

Die Abschätzung

$$(8) \qquad d(n) > (\log n)^r$$

erfüllt ist.
Es sei weiter $\varepsilon > 0$ eine (beliebig klein) vorgegebene reelle Zahl. Dann gibt es eine von ε abhängige natürliche Zahl $n_o = n_o(\varepsilon)$, so daß die Abschätzung

$$(9) \qquad d(n) < n^{\varepsilon} \qquad \text{für alle} \quad n > n_o$$

erfüllt wird.

Zu beweisen ist noch (9). Wir schreiben n in der kanonischen Zerlegung

$$n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_r^{\nu_r} , \qquad \text{so daß } d(n) = \prod_{i=1}^{r} (\nu_i + 1).$$

Im Gegensatz zum Beweis von (8) können hier die nicht notwendig aufeinanderfolgenden Primzahlen $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ beliebig groß werden. Hieraus ergibt sich die Idee, eine von n abhängige Funktion f unbestimmt vorzugeben, deren Funktionswert f(n) die beteiligten Primzahlen p_i unterteilt in solche mit $p_i < f(n)$ und solche mit $p_i \geq f(n)$. Dann ist $d(n) = p_1(n) \cdot p_2(n)$, worin

$$p_1(n) := \prod_{p_i < f(n)} (\nu_i + 1) \quad \text{und} \quad p_2(n) := \prod_{p_i \geq f(n)} (\nu_i + 1).$$

Zuerst betrachten wir $p_1(n)$. Offensichtlich ist

$$n \geq p_i^{\nu_i} \geq 2^{\nu_i} \quad \text{also} \quad \nu_i \leq \frac{\log n}{\log 2} ,$$

und es gibt eine natürliche Zahl n_1, so daß

$$1 + \nu_1 \leq 1 + \frac{\log n}{\log 2} < (\log n)^2 \qquad \text{für} \quad n \geq n_1 .$$

Somit gilt

(10) $\log(1+\nu_i) < 2 \log\log n$ für $n \geq n_1$.

Weiter ist mit $\exp(x) := e^x$ und (i) für $p_i < f(n)$

$$P_1(n) = \exp(\log \prod_{(i)} (\nu_i+1)) = \exp(\sum_{(i)} \log(\nu_i+1))$$

und weiter mit (10)

$$P_1(n) < \exp(2 \log\log n \, S_1(n))$$

worin

$$S_1(n) := \sum_{p_i < f(n)} 1 < f(n) \quad \text{ist.}$$

Somit gilt

(11) $$P_1(n) < \exp(2f(n)\log\log n) .$$

Nun zu $P_2(n)$. Wir benutzen hier die bekannte Ungleichung $\nu+1 < 2^\nu$, ν aus $\mathbb{N}$, und erhalten

(12) $$P_2(n) \leq 2^{S_2(n)} \quad \text{mit} \quad S_2(n) := \sum_{i=1}^{r} \nu_i$$

und schätzen jetzt n wie folgt ab: $p_i \geq f(n)$

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\nu_i} \geq \prod_{p_i \geq f(n)} p_i^{\nu_i} \geq \prod_{p_i \geq f(n)} (f(n))^{\nu_i} = (f(n))^{S_2(n)}$$

woraus

$$S_2(n) \leq \frac{\log n}{\log f(n)}$$

folgt. Dies in (12) eingesetzt ergibt zusammen mit (11)

(13) $$d(n) < \exp(2f(n)\log\log n + \log 2 \frac{\log n}{\log f(n)})$$

Der erste Summand im Exponenten wird mit wachsendem f(n) im Wachstum beschleunigt, während der zweite Summand dann schwächer wächst.

f(n) ist also optimal für einen Wert, bei dem beide Summanden etwa gleich sind. Ein Näherungswert hierfür ist

$$f(n) = \log n(\log\log n)^{-2}$$

und dies ergibt wegen (13) mit $n \geq \exp(\exp(9))$

$$d(n) \leq \exp(\log n(\log\log n)^{-\frac{1}{2}}) = n^{\frac{1}{(\log\log n)^{1/2}}} \leq n^{\varepsilon}$$

für $n \geq n_0 := \exp(\exp(\max(9, (\frac{1}{\varepsilon})^2))$, was noch zu zeigen war.

(8) sagt, daß sich der Teilerreichtum erhöht, wenn die Anzahl der beteiligten Primzahlen wächst. Nun ist es naheliegend, die

Zahlenfolge

(14) $n = p_1 p_2 \cdots p_r$, $r=2,3,4,\ldots$

zu betrachten, worin die p_i die ersten r Primzahlen bedeuten. Bezeichnet nun $\pi(x)$ die übliche Primzahlfunktion, die die Anzahl der Primzahlen $\leq x$ angibt, so kann der Leser nachweisen, daß es eine natürliche Zahl n_o gibt mit

(15) $d(n) > n^{\frac{\log 2}{4 \log\log n}}$ für alle $n > n_o$,

wenn man folgendes als bekannt voraussetzt:

(A) Da p_r die r-te Primzahl in der Folge der natürlichen Zahlen sein soll, ist selbstverständlich $\pi(p_r) = r$.

(B) Es gibt eine Konstante $n_1 > 0$, so daß mit Rücksicht auf (14)
$\log n = \sum_{i=1}^{r} \log p_i < 2p_r$ für alle $p_r > n_1$, und schließlich

(C) Es gibt eine Konstante $n_2 > 0$, so daß
$\pi(n) > \frac{1}{2} \frac{n}{\log n}$ für alle $n > n_2$.

Die Aussagen (B) und (C) sind Folgerungen aus den sehr tiefliegenden asymptotischen Aussagen

$$\sum_{i=1}^{r} \log p_i \sim p_r, (p_r \to \infty) \text{ und } \pi(n) \sim \frac{n}{\log n}, \quad (n \to \infty).$$

Letztere Aussage ist der berühmte P r i m z a h l s a t z , worin "$\sim$" als "asymptotisch gleich" gelesen wird und bedeutet, daß der Quotient aus den beteiligten Funktionen links und rechts von "$\sim$" bei n gegen unendlich ($n \to \infty$) den Grenzwert 1 hat. Die Existenz dieses Grenzwertes voraussetzend hat der russische Mathematischer ČEBYŠEV (1821-1894) bereits 1850 die

"Vergleichsfunktion" $\frac{n}{\log n}$ für $\pi(n)$ gefunden.

Der Nachweis der Existenz des Grenzwertes beschäftigte die Mathematiker von da an noch ein ganzes Jahrhundert, bis im Jahre 1949 unabhängig voneinander P. ERDOES und A. SELBERG einen elementaren Existenzbeweis veröffentlichten.

Dr. Horn, FSU
Sektion Mathematik

Bericht vom Arbeitskreis 9 des XVI. Treffens von FDJ-Studenten mit NPT

Mathematische Modellierung und Software

(Arbeitskreis-Leiter: Ingo Frommeyer, Forschungsstudent Mathematik)

Diesem Arbeitskreis gehörten die NPT Dr.P.Fichtner (VEB Kombinat Carl-Zeiss), Prof.Dr.A.Pietsch und Dr.D.Schütze (Sektion Mathematik, FSU Jena) sowie 15 Studenten und junge Wissenschaftler an. Einleitend berichtete Dr.Schütze über die direkte Forschungskooperation zwischen der Universität Jena und dem Kombinat Carl-Zeiss.
Die FDJ-Studenten waren ein sachkundiges Publikum, die viele Fragen vor allem zu den technischen Realisierungsbedingungen des AMOS-Projektes (Automatische Modellierung Optischer Systeme) hatten. Vor allem Idee und Realisierung des dreistufigen Rechnerverbundsystems des Kombinates Carl-Zeiss rief großes Interesse hervor. Es wurde erkannt, daß dieses Prinzip verallgemeinerungswürdig ist und eine bessere Auslastung der Rechner gewährleistet. Nachdem das fachliche Interesse der Studenten einigermaßen befriedigt war, wandten wir uns der Frage zu, welche Rolle die selbständige wissenschaftliche Arbeit an den einzelnen Sektionen spielt, welche Anforderungen realisiert werden müssen und wie eine bessere Vorbereitung der Studenten auf ihren späteren Einsatz in der Praxis erreicht werden kann.
Da diese Fragen in engem Zusammenhang stehen, wurden sie auch nicht getrennt behandelt. Dr.Fichtner konnte hier wertvolle Hinweise aus seiner Tätigkeit im Kombinat Carl-Zeiss geben. So ist vor allem das frühzeitige Heranführen der Studenten an Preisaufgaben und deren möglichst selbständige Bearbeitung unter sachkundiger Betreuung eine wichtige Methode, die mit dazu beiträgt, daß künftige Absolventen den Anforderungen der Forschung in der Industrie besser gerecht

werden.
Prof.Pietsch betonte die Rolle einer soliden Grundausbildung, die sich auch an den Belangen der Praxis orientieren und nicht allein auf innermathematische Prinzipien stützen soll. Es war deutlich zu spüren, daß die Studenten dieselben Positionen vertraten, wie sie auch auf der zentralen Konferenz der FDJ-Studenten und jungen Wissenschaftler im September in Jena herausgearbeitet wurden. Bemerkenswert war die Unterschiedlichkeit der praktizierten Möglichkeiten für selbständig wissenschaftliche Arbeit an den einzelnen Hochschulen und Universitäten. So wurden sie an den meisten Mathematiksektionen als unzureichend eingeschätzt. Es wurde aber auch ein Beispiel (nicht aus der Mathematik) genannt, in dem alle Studenten vom ersten Semester an mit der selbständigen wissenschaftlichen Arbeit konfrontiert wurden. Interessant ist auch, wie die Kooperation mit der Industrie verwirklicht wird. Meist wird zu einer weitgehend ausgearbeiteten Theorie ein praktisches Problem gesucht. Diese Methode ist aber wenig tragfähig. Erfolgversprechender, wenn auch schwieriger auszuführen und durchzustehen, sind solche Projekte wie z.B. die ZBA-Entwicklung (Elektronenstrahlbelichtungsanlage) an der Sektion Mathematik der FSU. Somit wurde eine Forschungsaufgabe bearbeitet, ohne daß man vorher genau weiß, welche Art der Mathematik dort benötigt wird. Dieses Vorgehen erfordert besondere Risikobereitschaft.

Ingo Frommeyer
Arbeitskreisleiter

&&&&/&/&/&/&/&/&/&/&/&/&/&/&/&&&

Die Majorität der Dummen ist unüberwindbar
und für alle Zeiten gesichert.
Der Schrecken ihrer Tyrannei ist indessen gemildert
durch Mangel an Konsequenz.

Albert Einstein

Preisaufgaben

T 7 1

Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом .

T 8 1

Eine sechsziffrige Zahl z beginne von links mit der Ziffer 1. Wenn wir diese 1 vom Anfang wegnehmen und sie an die übriggebliebene Ziffernfolge rechts anhängen, so entsteht eine Zahl, die dreimal so groß ist wie z.

Man ermittle die Zahl z .

T 9 2

Welchen Bedingungen müssen die reellen Zahlen $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ genügen, so daß der Ausdruck

$$(a_1+b_1x)^2 + (a_2+b_2x)^2 + (a_3+b_3x)^2$$

das Quadrat eines Polynoms ersten Grades in x mit reellen Koeffizienten ist?

T 10 1

In zwei gleichartigen Gefäßen, von denen jedes ein Fassungsvermögen von 30 Litern hat, befinden sich insgesamt 30 Liter Spiritus. Es werde nun das erste Gefäß vollständig mit Wasser und dann das zweite mit der Mischung, die im ersten Gefäß entstanden ist, wiederum bis zum Rand aufgefüllt. Anschließend werden in einem Becken der gesamte Inhalt des ersten Gefäßes und 12 Liter vom Inhalt des zweiten Gefäßes gemischt.

Wieviel Liter Spiritus befanden sich zu Anfang in den Gefäßen, wenn am Ende das Becken 2 Liter mehr Spiritus als das zweite Gefäß enthält?

T 11 1

Es sei n eine natürliche Zahl, größer als 1 und α ein Winkel, der folgender Bedingung genügt:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)} .$$

Man zeige, daß dann gilt: $\tan n\cdot\alpha > n\cdot\tan\alpha$

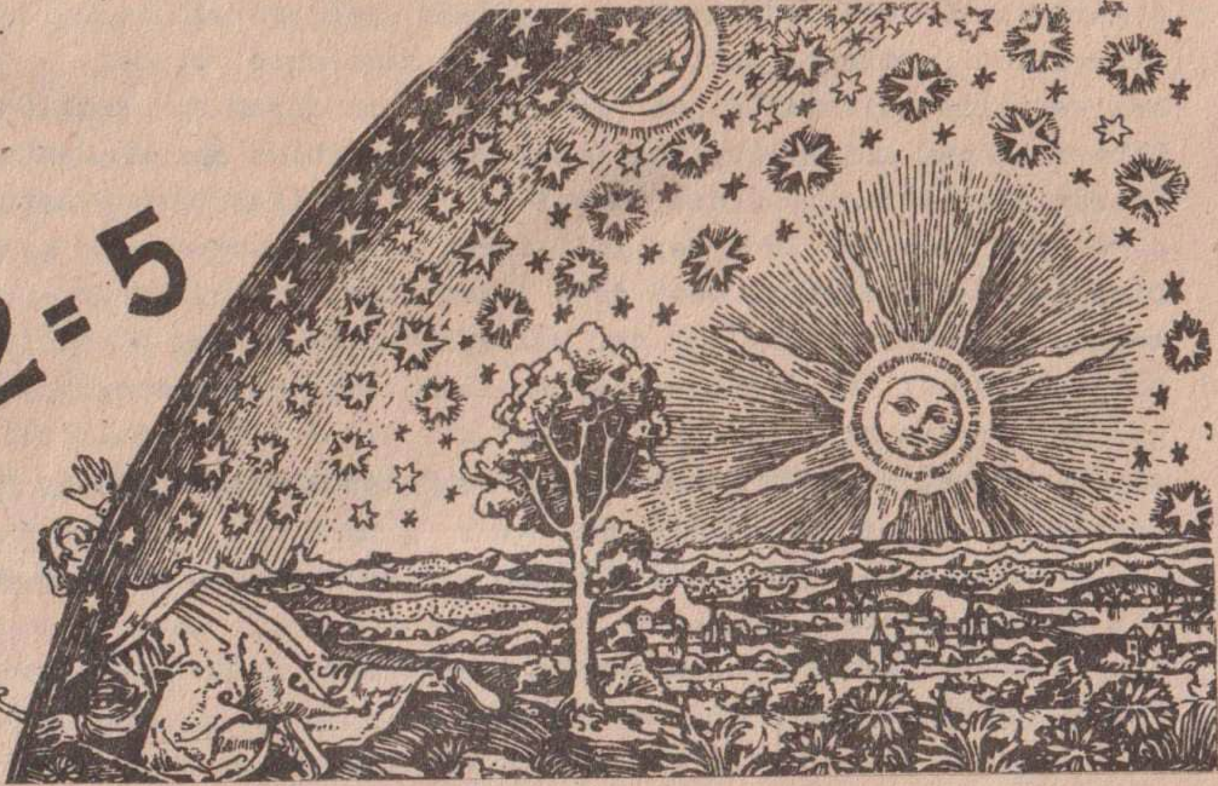
T 12 2

Gegeben seien drei Punkte A,E,F. Man konstuiere jetzt ein Quadrat so, daß A ein Eckpunkt ist und E und F auf zwei verschiedenen Seiten des Quadrates liegen, die nicht durch den Punkt A gehen, oder auf deren Verlängerungen.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: C. Dahmke, J. Dimler, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 19. 1. 87
Titelseite: M. Torke

Alles ist relativ
die andere Mathematik
jenseitige Wahrheit

2+2=5



wurzel 3·87

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

21. Jahrgang ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0.20 M

Multiplikation komplexer Zahlen

Mit der praktischen Nutzung von Rechnern wuchs das Interesse an guten, d.h. schnell arbeitenden Programmen für bestimmte Probleme. Heute existieren viele Algorithmen, die effektiv numerischen, kombinatorische und andere Problemstellungen lösen. Wir wollen in diesem Beitrag der Frage nachgehen, ob bei bei gewissen arithmetischen Operationen, in denen nur Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen von Variablen als elementare Operationen vorkommen, die Anzahl der Multiplikationen eventuell durch Erhöhung der Zahl der Additionen verringert werden kann. Dies mag man einsehen, weiß doch jeder noch aus seiner Vortaschenrechnerzeit, daß bei der Multiplikation zweier 10-ziffriger Zahlen 100 mal auf die elementaren Einmaleinskenntnisse zurückgegriffen werden muß, jede Ziffer muß mit jeder Ziffer multipliziert werden, am Ende müssen dann die Zwischenergebnisse in wohlbestimmter Weise aufaddiert werden.
Die Addition von zwei zehnziffrigen Zahlen erscheint uns da noch als die leichtere Übung.
Über komplexe Zahlen wurde bereis in früheren Heften berichtet. Wir geben kurz einige Eigenschaften.
Für komplexe Zahlen sind eine Gleichheitsrelation, zwei zweistellige Operationen + und $\cdot$ definiert.
Jede komplexe Zahl läßt sich darstellen in der Form $a + b \cdot i$, wobei a und b reelle Zahlen sind, das Symbol i bezeichnet die imaginäre Einheit. Es gelten folgenden Beziehungen.

1. $(a + b \cdot i) = (a' + b' \cdot i) \leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$
2. $(a + b \cdot i) \cdot (a' + b' \cdot i) = (a \cdot a' - b \cdot b') + (a \cdot b' + a' \cdot b) \cdot i$
3. $(a + b \cdot i) + (a' + b' \cdot i) = (a + a') + (b + b') \cdot i$

Gilt $b = 0$, so ist $a + b \cdot i = a$ eine reelle Zahl, die reellen Zahlen bilden eine echte Teilmenge der komplexen Zahlen.
Aus 2. folgt für $a = a' = 0$ und $b = b' = 1$: $i \cdot i = -1$, d.h. i ist eine Quadratwurzel aus -1, die andere ist dann $-i$.
Den an komplexen Zahlen interessierten Leser verweisen wir auf ein Standardlehrbuch zur Algebra.

Laut Definitionsgleichung 2. müssen wir bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen vier Multiplikationen reeller Zahlen ausführen.
Ist es möglich, mit weniger Multiplikationen auszukommen?

Dazu geben wir folgendes Programm an.

```
f1 := a + b
f2 := f1 • a'
f3 := b' - a'
f4 := a • f3
f5 := f4 + f2
f6 := a' + b'
f7 := b • f6
f8 := f2 - f7
```

Nach Ausführung des Programms tragen die Variablen f5 und f8 die Werte $a \cdot b' + a' \cdot b$ und $a \cdot a' - b \cdot b'$.
Gebraucht haben wir nur drei Multiplikationen zur Berechnung von f2, f4 und f7. Freilich ist selten etwas für umsonst: Wir brauchen jetzt fünf Additionen, drei mehr als in 2..
Gibt es nun einen weiteren Trick, um die Anzahl der Multiplikationen weiter zu verringern?
Selbst wer wagt, wird hier nichts gewinnen, denn es läßt sich zeigen, daß drei Multiplikationen reeller Zahlen notwendig sind, um eine Multiplikation von komplexen Zahlen auszuführen.
(In speziellen Fällen geht es freilich:

$$(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2 \;)$$

Zum Beweis unserer Behauptung wollen wir etwas mehr bereitstellen.
Es sei $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen rationalen Zahlen, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $Y = \{y_1, \ldots, y_p\}$ zwei disjunkte Mengen von Variablen für ganze Zahlen.

M sei eine Matrix

$$n\ M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{r1} & m_{r2} & \cdots & m_{rp} \end{pmatrix},$$

deren Elemente Linearkombinationen von Elementen aus X über $\mathbb{Z}$, d.h.

$$m_{ij} = z_o^{(i,j)} + \sum_{k=1}^{n} z_k^{(i,j)} x_k$$

$$\text{für } 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq p,\quad z_k^{(i,j)} \in \mathbb{Z} \quad .$$

Ein jedes solches Element kann man offensichtlich ohne Multiplikation nur durch wiederholte Addition oder Subtraktion von Elementen aus X und $\mathbb{Z}$ erzeugen.

s Zeilen $i_1, \ldots, i_s$ von M heißen linear unabhängig modulo $\mathbb{Z}$, falls für alle ganzen Zahlen $u_1, \ldots, u_s$ gilt

$$\left(\bigwedge_{1 \leq k \leq p} \sum_{j=1}^{s} u_j \cdot m_{i_j k} \in \mathbb{Z} \right) \rightarrow u_1 = \ldots = u_s.$$

Die größte Anzahl von linear unabhängigen Zeilen in M modulo $\mathbb{Z}$ nennen wir den Zeilenrang von M.

Es gilt folgender Satz

Besitzt M den Zeilenrang R so sind für die Berechnung von

$$\sum_{k=1}^{p} m_{ik} \cdot y_k \quad , \quad 1 \leq i \leq r,$$

wenistens R Multiplikationen notwendig.

In der nächsten Folge werden wir diesen Satz beweisen.

Die uns interessierende Anwendung ist der Fall

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad Y = \{ a', b' \},\ X = \{ a, b \}.$$

Die drei Zeilen von M sind offensichtlich unabhängig modulo $\mathbb{Z}$.

Fortsetzung folgt.

Thomas Gundermann,
Sektion Mathematik, FSU

Preisaufgaben

T 13 2 На плоскости заданы прямая, окружность радиуса н см (н – целое число) и внутри окружности 4н отрезков длинной I см.
Доказать, что можно провести параллельную или перпендикулярную заданной прямой хорду заданной окружности, которая будет иметь общие точки по крайней мере с двумя заданными отрезками.

T 14 1 Man beweise, daß die Ausdrücke $2x+3y$ und $9x+5y$ für dieselben ganzen Zahlen x und y durch 17 teilbar sind.

T 15 2 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Man finde im Inneren einen solchen Punkt N, so daß die Winkel $\sphericalangle NBC$, $\sphericalangle NAB$ und $\sphericalangle NCA$ gleich sind.

T 16 1 Seien x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung

$$x^2-(a+d)x-ad-bc=0 \quad .$$

Man beweise, daß dann x_1^3 und x_2^3 Lösungen der Gleichung

$$y^2-(a^3+d^3+3abc-3bcd)y+(ad-bc)^3=0$$ sind.

T 17 1 Es seien α, β, γ die Winkel eines beliebigen Dreiecks. Man beweise, daß dann folgende Ungleichung gilt :

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}<\frac{1}{4} \quad .$$

T 18 1 Welche ganzen Zahlen a, b, c erfüllen die Ungleichung

$$a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c \quad .$$

Einsendeschluß: 9. 6. 1987

XXVI. Bezirksolympiade
10. Klasse

1. Von einer natürlichen Zahl x sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:
   (1) Im Zweiersystem geschrieben hat x genau sieben Stellen.
   (2) Schreibt man x im Dreiersystem, so tritt keine Ziffer mehr als zweimal auf.
   (3) Im Fünfersystem geschrieben hat x genau vier Stellen.

   Beweisen Sie, daß es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und geben Sie diese Zahl an!

2. Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0,1,...,6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0,1,...,6 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steins dieselbe Zahl steht). Insgesamt besteht hiernach ein Dominospiel aus genau 28 Steinen.
   Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel). Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen.
   (a) Ermitteln Sie die kleinste Anzahl $k > 1$ von verschiedenen Steinen eines Dominospiels, die eine geschlossene Kette bilden können!
   (b) Aus einem Dominospiel sollen geschlossene Ketten aus je k verschiedenen Steinen gebildet werden (k sei die in (a) genannte Zahl). Dabei soll jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer dieser Ketten verwendet werden. Ermitteln Sie die größte Anzahl g von Ketten, die so zustandekommen können!
   (c) Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen geschlosse-

nen Ketten aus je k verschiedenen Steinen, die sich überhaupt bilden lassen! (Es darf also jeder Stein des Dominospiels in beliebig vielen dieser Ketten auftreten.) Dabei gelten zwei geschlossene Ketten genau dann als gleich, wenn sie bei geeigneter Wahl eines Anfangssteins und einer Durchlaufungsrichtung gleichlautende Zahlenfolgen zeigen. Beispielsweise gelten die beiden Ketten

(2,4), (4,5), (5,5), (5,1), (1,2)

und (5,4), (4,2), (2,1), (1,5), (5,5)

als einander gleich.

3. Über eine Gerade h und drei Punkte S,A,B auf h wird vorausgesetzt, daß A zwischen S und B liegt. Ferner wird über eine Gerade $g \neq h$ vorausgesetzt, daß sie h in S schneidet. Gesucht sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen (a) und (b) erfüllen:

(a) Der Punkt P liegt auf g.

(b) Der Innenwinkel $\sphericalangle$ SBP im Dreieck SBP hat dieselbe Größe wie einer der Winkel, den AP mit g bildet.

(I) Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn ein Punkt P die Bedingungen (a), (b) erfüllt, dann kann er (aus voraussetzungsgemäß gegebenen h,g,S,A,B) durch eine Konstruktion erhalten werden.

(II) Beschreiben Sie eine Konstruktion, für die die Aussage in (I) zutrifft!

(III) Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn ein Punkt P nach der Beschreibung (II) konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen (a), (b).

4. Ermitteln Sie unter allen denjenigen Werten, die

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 22 \qquad (1)$$

für ganzzahlige x und y annehmen kann, den kleinsten Wert z, der eine natürliche Zahl ist!

Geben Sie alle diejenigen Paare (x;y) ganzer Zahlen an, bei denen sich in (1) dieser Wert z ergibt.

5. Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 5$ ist, so gilt: Wird eine Kugel von n Ebenen geschnitten, so entstehen auf der Kugeloberfläche höchstens 22 Teilflächen.

6. Beweisen Sie, daß für jede reelle Zahl $x > 1$ die Ungleichungen

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$$

gelten!

11./12. Klasse

1. Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x;y;z)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + y - z = -1 \quad (1)$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1 \quad (2)$$

$$-x^3 + y^3 + z^3 = -1 \quad (3)$$

2. Im Raum seien zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2 gegeben. Ferner seien d_1 und d_2 zwei gegebene Streckenlängen. Beweisen Sie die folgende Aussage:
Wie man auch auf g_1 Punkte P_1, P_2 mit $\overline{P_1P_2} = d_1$ und auf g_2 Punkte Q_1, Q_2 mit $\overline{Q_1Q_2} = d_2$ wählt, stets ergibt sich für das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten P_1, P_2, Q_1, Q_2 ein und derselbe Wert.

3A. Man untersuche, ob es vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die die folgende Eigenschaft haben: Jede dieser vier Zahlen läßt sich so in zwei positive ganzzahlige Summanden x und y zerlegen, daß sie jeweils ein Teiler von $x \cdot y$ ist.

3B. Man beweise, daß in jedem Dreieck ABC für die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ die Größen α, β, γ der Innenwinkel $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ sowie für den Inkreisradius ϱ und den Flächeninhalt F die Ungleichung

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} \geqq \frac{27\varrho}{8F} \qquad (1)$$

gilt. Man geben alle diejenigen Dreiecke an, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

4. Beweisen Sie: Für jedes Sehnenviereck ABCD, dessen Diagonale BD durch den Mittelpunkt N der Diagonalen AC verläuft, gilt die folgende Gleichung (1).

$$2 \cdot \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 . \qquad (1)$$

5. Zwei Personen, A und B, spielen mit n in einer Geraden angebrachten Lampen ($n > 3$) das folgende Spiel:
Zum Spielgebinn sind alle Lampen ausgeschaltet. Eine ganze Zahl k mit $1 < k < n - 1$ wird vereinbart. Dann verläuft das Spiel so, daß die Spieler, mit A beginnend, abwechselnd am Zug sind:
Jeder Spieler schaltet, wenn er am Zug ist, nach eigener Wahl eine Anzahl nebeneinanderliegender Lampen ein, mindestens eine und höchstens k. Gewonnen hat derjenige Spieler, der die letzte der n Lampen einschaltet.
Man beweise, daß der Spieler A für jedes $n > 3$ und jedes k mit $1 < k < n - 1$ durch eine geeignete Vorgehensweise (Strategie) den Gewinn erzwingen kann.

6. Es sei (x_n) diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$x_1 = \sqrt{3} \qquad (1)$$

und

$$x_{n+1} = \sqrt{9x_n^2 + 11x_n + 3} \quad (n=1,2,3,\ldots) \qquad (2)$$

gilt. Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ sei ferner (y_n) die durch

$$y_n = \frac{x_n}{a^n} \qquad (n=1,2,3,\ldots) \qquad (3)$$

definierte Zahlenfolge.
Man ermittle alle diejenigen $a \neq 0$, für die die Folge (y_n) konvergent ist.

Lösungen der Bezirksolympiade 10. Klasse

1. I. Wenn x, y und z reelle Zahlen sind, die das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen, so folgt:
Nach (1) ist $y = -x+z-1$. Aus (2) folgt damit

$$\begin{aligned} x^2 - (x^2 + z^2 + 1 - 2xz + 2x - 2z) + z^2 &= 1, \text{ also} \\ xz - x + z - 1 &= 0, \\ y(z - 1) + z - 1 &= 0, \\ (x + 1)(z - 1) &= 0, \\ x = -1 \text{ oder } z &= 1. \end{aligned}$$

Für $x = -1$ ist nach (1) $y = z$, woraus aus (3) folgt:

$$\begin{aligned} 1 + 2y^3 &= -1 \\ y^3 &= -1 \\ y &= -1. \end{aligned}$$

Für $z = 1$ wird ebenfalls nach (1) $y = -x$. Nach (3) ist dann $-2x^3 + 1 = -1$

$$x = 1.$$

Also können nur die Tripel $(-1; -1; -1)$ und $(1; -1; 1)$ das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen.

II. Tatsächlich erfüllen diese Tripel die Gleichungen (1), (2) und (3), wie man leicht nachprüft.

2. Es seien auf g_1 sowohl P_1, P_2 mit $\overline{P_1P_2} = d_1$ als auch P_1', P_2' mit $\overline{P_1'P_2'} = d_1$ sowie auf g_2 sowohl Q_1, Q_2 mit $\overline{Q_1Q_2} = d_2$ als auch Q_1', Q_2' mit $\overline{Q_1'Q_2'} = d_2$ gelegen. Zu beweisen ist, daß unter diesen Voraussetzungen stets die beiden Tetraeder

$$P_1P_2Q_1Q_2 \quad \text{und} \quad P_1'P_2'Q_1'Q_2'$$

einander volumengleich sind. Dieser Beweis kann folgendermaßen geführt werden:
Es sei e die durch P_2, g_2 verlaufende Ebene.
Die beiden Tetraeder

$$P_1P_2Q_1Q_2 \quad \text{und} \quad P_1P_2Q_1'Q_2' \qquad (1)$$

(siehe Abb. 1) haben jeweils eine in der Ebene e liegende Seitenfläche, nämlich

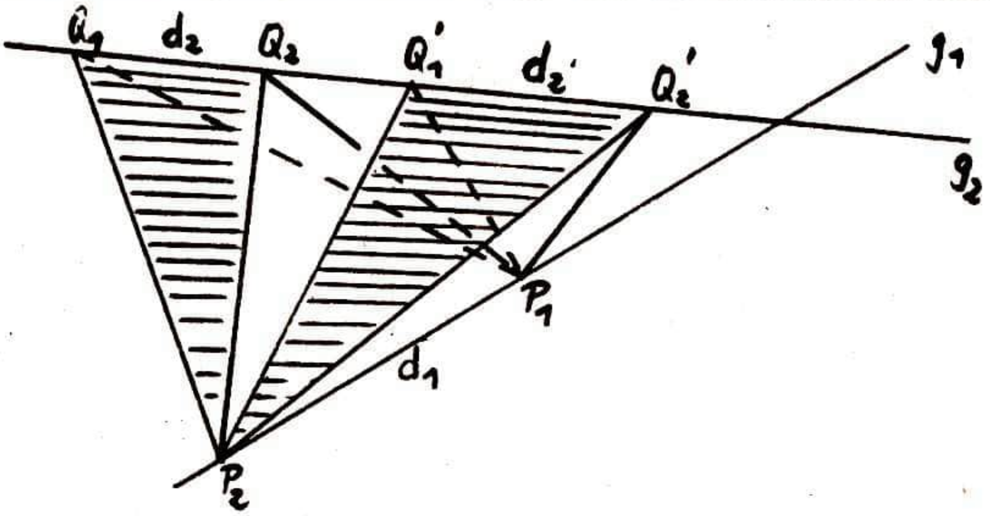
$$P_2Q_1Q_2 \quad \text{bzw.} \quad P_2Q_1'Q_2' \,. \qquad (2)$$

Diese beiden Dreiecke sind einander flächengleich, da $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_1'Q_2'}$ gilt und die zu diesen Seiten gehörenden Dreieckshöhen miteinander übereinstimmen, nämlich das Lot von P_2 auf g_2 sind.
Ferner stimmen in den Tetraedern (1) die zu den Seitenflächen (2) gehörenden Tetraederhöhen miteinander überein; sie sind nämlich das Lot von P_1 auf die Ebene e.
Also sind die beiden Tetraeder (1) zueinander volumengleich.
Ebenso beweist man, daß die beiden Tetraeder

$$P_1P_2Q_1'Q_2' \quad \text{und} \quad P_1'P_2'Q_1'Q_2'$$

zueinander volumengleich sind.
Aus beiden Volumengleichheiten folgt die zu beweisende Aussage.

Abb. 1



Andere Lösungsmöglichkeiten ergeben sich, indem man das Volumen V von $P_1P_2Q_1Q_2$ durch d_1, d_2 und weitere Bestimmungsstücke, die die Lage von g_1 und g_2 charakterisieren, ausdrückt und dabei feststellt, daß es möglich ist, diejenigen Bestimmungsstücke zu vermeiden, die P_1,P_2 und Q_1, Q_2 genauer als durch $\overline{P_1P_2} = d_1$ bzw. $\overline{Q_1Q_2} = d_2$ auf g_1 bzw. g_2 festlegen. Beispielsweise gilt (Abb. 2): Ist φ die Größe eines (nicht überstumpfen) Winkels, den g_1 mit einer zu g_2 parallelen (und g_1 schneidenden) Geraden g_2' bildet, und ist h der Abstand, den g_2 von der zu g_2 parallelen und g_1 enthaltenden Ebene f hat, so ist

$$V = \frac{1}{6} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot h \cdot \sin\varphi \,.$$

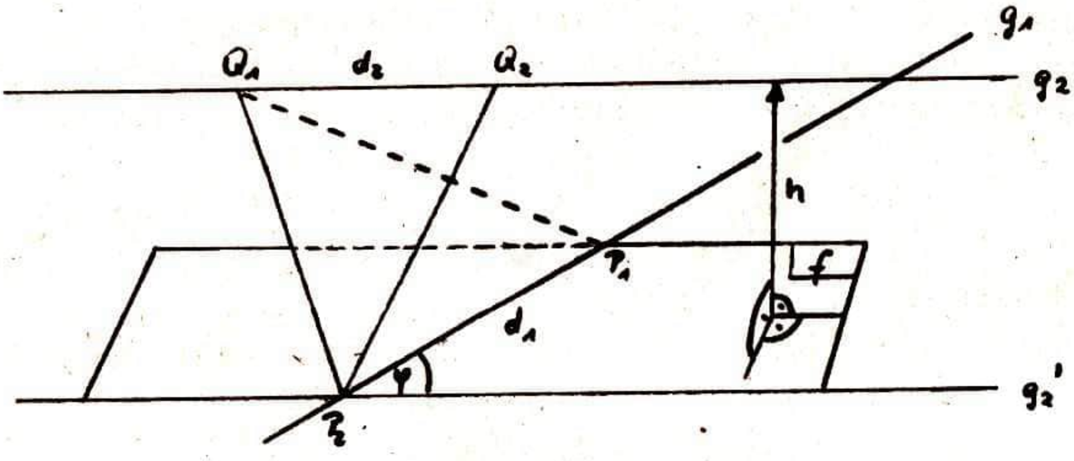


Abb. 2

3A. Es gibt vier solche Zahlen. Zum Beweis dieser Aussage genügt es, die genannten Eigenschaften für ein Beispiel zu bestätigen. Ein solches Beispiel bilden etwa die Zahlen 242, 243, 244, 245; denn

$242 = 22+220$ ist wegen $242\cdot 20 = 22\cdot 220$ ein Teiler von $22\cdot 220$,
$243 = 81+162$ ist wegen $243\cdot 54 = 81\cdot 162$ ein Teiler von $81\cdot 162$,
$244 = 122+122$ ist wegen $244\cdot 61 = 122\cdot 122$ ein Teiler von $122\cdot 122$,
$245 = 35+210$ ist wegen $245\cdot 30 = 35\cdot 210$ ein Teiler von $35\cdot 210$.

Hinweis:
Da das Suchen eines solchen Beispiels durch bloßes Probieren (ohne zu wissen, ob überhaupt vier derartige Zahlen existieren) wenig sinnvoll ist, wird man nach wirksameren heuristischen Motiven vorgehen, z. B. folgendermaßen:
Eine natürliche Zahl n hat genau dann die genannte Eigenschaft, wenn ($n \geq 2$ gilt und) n ein Teiler von einem der Produkte

$$k\cdot(n-k) \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

ist. Wegen $k\cdot(n-k) = kn - k^2$ ist das gleichbedeutend damit, daß n ein Teiler von einer der Quadratzahlen k^2 $(k=1,\ldots,n-1)$ ist. Hierfür ist hinreichend[1], daß die Zahl n ihrerseits

[1] Es gilt sogar "äquivalent" statt "hinreichend". Wenn nämlich n quadratfrei ist, d. h. durch eine Quadratzahl $q^2 > 1$ teilbar, so hat n eine Primfaktorzerlegung $n=p_1\ldots p_m$ aus paarweise ver-
(Forts. nächste Seite)

durch eine Quadratzahl $q^2 > 1$ teilbar ist; denn wenn dies zutrifft, so existiert eine natürliche Zahl a mit $n = q^2 \cdot a$, und damit ist n wegen $n \cdot a = q^2 a^2$ ein Teiler des Quadrates der natürlichen Zahl $k = qa$, die wegen $k = \frac{n}{q}$ und $q > 1$ kleiner als n ist.

Nun kann man z. B. versuchen, vier Zahlen der geforderten Art etwa als

$$n = 2^2 \cdot a, \qquad (1)$$
$$n+1 = 3^2 \cdot b, \qquad (2)$$
$$n+2 = 5^2 \cdot c, \qquad (3)$$
$$n+3 = 7^2 \cdot d \qquad (4)$$

zu finden. Hiervon werden (1) und (2), also

$$4a + 1 = 9b$$

etwa gelöst durch $b = 1 + 4t$, $a = 2 + 9t$,

$$n = 8 + 36t; \qquad (5)$$

sodann werden (5) und (3), also

$$10 + 36t = 25c$$

etwa gelöst durch $t = -10 + 25u$, $c = -14 + 36u$,

$$n = -352 + 900u; \qquad (6)$$

schließlich werden (6) und (4), also

$$-349 + 900u = 49d$$

etwa gelöst durch $u = -16 + 49v$, $d = -301 + 900v$,

$$n = -14752 + 44100v,$$

für $v = 1$ also $n = 29348$.

Hat man die Lösungsfindung wie hier als Nachweis hinreichender Bedingungen formuliert, so ist eine Probe nicht erforderlich. Andernfalls ist es für die Korrektheit der Lösung (wie oben bemerkt, sogar allein) erforderlich, die verlangte Eigenschaft zu bestätigen:

---

1 (Fortsetzung)

schiedenen Primzahlen, und dann ist n k^2, d. h. $n \cdot u = k^2$ nur möglich, wenn auch die Primfaktorzerlegung von u alle Primzahlen $p_1, \dots, p_m$ enthält, also nur mit $u \geq n$ und folglich $k^2 \geq n^2$, $k \geq n$.

(Dies wird für die obige Lösungsgewinnung nicht benötigt.)

29348 = 4·7337 = x+y ist Teiler von xy für x = 2·7337,
y = 2·7337,
29349 = 9·3261 = x+y ist Teiler von xy für x = 3·3261,
y = 6·3261,
29350 = 25·1174 = x+y ist Teiler von xy für x = 5·1174,
y = 20·1174,
29351 = 49·599 = x+y ist Teiler von xy für x = 7·599,
y = 42·599.

3B. Nach der Formel $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos x)$ und dem Kosinussatz gilt

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2a}(1+\cos\alpha) = \frac{1}{2a}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{4abc}.$$

Entsprechend ist

$$\frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{c^2+a^2-b^2+2ac}{4abc}, \quad \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{4abc}.$$

Bezeichnet T die linke Seite der Ungleichung (1), so gilt folglich

$$T = \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{4abc}$$

mit der Abkürzung $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ also

$$T = \frac{s^2}{abc}.$$

Ferner ist[1] $F = \varrho \cdot s$, also

$$T = \frac{s^3}{abc}\,\frac{\varrho}{F}. \qquad (2)$$

Nun gilt nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel[2]

$$\frac{1}{3}(a+b+c) \geq \sqrt[3]{abc} \qquad (3)$$

und darin das Gleichheitszeichen genau im Fall $a = b = c$.

---

[1] Als bekannter Sachverhalt zu zitieren oder z. B. durch Zerlegung von ABC in die Teildreiecke ABM, BCM, CAM (M Inkreismittelpunkt) zu beweisen.

[2] Als bekannter Sachverhalt zu zitieren oder z. B. so zu beweisen: Es sei o. B. d. A. $a \leq b \leq c$, also $b = a+u$, $c = a+u+v$ mit $u,v \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 - 27abc &= (3a+2u+v)^3 - 27a(a+u)(a+u+v)\\ &= 9au^2 + 9auv + 9av^2 + 8u^3 + 12u^2v + 6uv^2 + v^3\\ &= 0,\end{aligned}$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau im Fall $u = v = 0$.

Äquivalent zu (3) ist

$$s^3 \geq \frac{27}{8}\, abc,$$

und das Gleichheitszeichen in (3) ist äquivalent zu dem in (4). Damit folgt aus (2), (4)

$$T \geq \frac{27}{8}\, F\,,$$

d. h. die zu beweisende Ungleichung (1), und es folgt, daß das Gleichheitszeichen in (1) genau im Fall $a = b = c$, d. h. genau für alle gleichseitigen Dreiecke gilt.

4. Mit $\alpha = \overline{\sphericalangle BAD}$ ist nach dem Satz über Gegenwinkel im Sehnenviereck $\overline{\sphericalangle BCD} = 180^\circ - \alpha$. Nach dem Kosinussatz und wegen $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ gilt daher

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\cos\alpha$$

und $$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cdot\cos\alpha\,,$$

also $$2\cdot\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{AD}^2-2\cdot(\overline{AB}\cdot\overline{AD}-\overline{BC}\cdot\overline{CD})\cdot\cos\alpha\,, \quad (2)$$

wegen $\overline{\sphericalangle ANB} = \overline{\sphericalangle DNC}$, $\overline{\sphericalangle BNC} = \overline{\sphericalangle AND}$

(Scheitelwinkel) und

$$\overline{\sphericalangle ABN} = \overline{\sphericalangle DCN}, \quad \overline{\sphericalangle BCN} = \overline{\sphericalangle ADN}$$

(Peripheriewinkel über dem Bogen $\widehat{AD}$ bzw. $\widehat{AB}$ des Kreises, dem das Sehnenviereck einbeschrieben ist) gilt

$$\triangle ABN \sim \triangle DCN \quad (3)$$

und $$\triangle BCN \sim \triangle ADN.$$

Aus (3) folgt $\overline{AB}:\overline{DC} = \overline{AN}:\overline{DN}$,

wegen der Voraussetzung $\overline{AN} = \overline{CN}$ also

$$\overline{AB}:\overline{CD} = \overline{CN}:\overline{DN}. \quad (5)$$

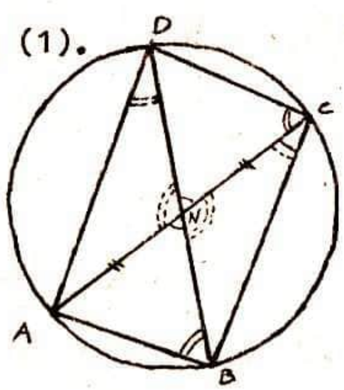
Aus (4) folgt $\overline{BC}:\overline{AD} = \overline{CN}:\overline{DN}. \quad (6)$

Wegen (5) und (6) ist

$$\overline{AB}:\overline{CD} = \overline{BC}:\overline{AD},$$

also $$\overline{AB}\cdot\overline{AD} = \overline{BC}\cdot\overline{CD}.$$

Damit ergibt sich aus (2) die Behauptung (1).



Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: C. Dahmke, J. Dimler, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 9. 3. 1987

Titelseite: M. Torke

Wenn man sich vergewissert hat, dass der Lehrsatz wahr ist, beginne man ihn zu beweisen.

Pólya

wurzel

4·87

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

21. Jahrgang ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Preisaufgaben

T 19 ②

Каждый из участников турнира встретился по одному разу со всеми остальными участниками, причём ни одна встреча не закончилась вничью. Доказать, что среди спортсменов найдется такой, кто назовет всех остальных участников турнира, если станет перечислять тех, кого победил он сам, и тех, кого победили побежденные им соперники.

T 20 ①

Man beweise

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \, .$$

T 21 ①

Es ist folgendes Gleichungssystem zu lösen :

$$\frac{x}{y} = \frac{a + b - \dfrac{ab}{a + b}}{a - b + \dfrac{ab}{a - b}} \, , \qquad x + y = 2a^3$$

wobei $|a| \neq |b|$ gilt.

T 22 ①

Gesucht ist der größte Wert des Ausdruckes

$$(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)^{-1} ,$$

wenn $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

T 23 ②

In eine Kugel mit Radius R sei eine regelmäßige vierseitige Pyramide einbeschrieben.
Berechne das Volumen dieser Pyramide, wenn der Kreis, der die Grundseite umschreibt, den Radius r hat.

T 24 ①

Beweise, daß für alle natürlichen Zahlen $n \; 1$ folgende Ungleichung gilt :

$$1/n + 1/(n + 1) + \ldots + 1/(n^2 - 1) + 1/n^2 < 1 \, .$$

Einsendeschluß: 2. 7. 1987

Beiträge zur elementaren Zahlentheorie

3. Die Teilerfunktion $\sigma(n)$

Wir definieren die Funktion $\sigma(n)$ für alle natürlichen Zahlen n durch

$$\sigma(n) := \sum_{t/n} t ,$$

also als Summe aller Teiler t von n.
Gibt man n in der kanonischen Zerlegung

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\,i}$$

vor, so folgt aus den Untersuchungen aus der Einleitung (WURZEL 2·87), daß durch das Ausmultiplizieren von

$$(1+p_1^1+p_1^2+\ldots+p_1^{\nu_1})\cdot(1+p_2^1+p_2^2+\ldots+p_2^{\nu_2})\cdot\ldots\cdot(1+p_r^1+p_r^2+\ldots+p_r^{\nu_r})$$

die Summe aller Teiler von n, also $\sigma(n)$, entsteht. Da weiter

$$1 + p_i^1 + p_i^2 +\ldots+ p_i^{\,i} = \frac{p_i^{\nu_i+1}-1}{p_i-1} ,$$

haben wir eine Formel für $\sigma(n)$ gefunden:

S a t z : Für natürliche Zahlen n gilt

(1) $$(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\nu_i+1}-1}{p_i-1} , \quad \text{falls } n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\nu_i}.$$

Außerdem gilt

(2) $\sigma(ab) = \sigma(a)\,\sigma(b)$, falls a,b teilerfremde natürliche Zahlen sind.

Wir haben noch (2) zu beweisen. Da $\sigma(1)=1$, erhalten wir für a=1 oder b=1 sofort die gewünschte Beziehung. Es sei nun $a>1$, $b>1$, und

$$a = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\nu_i} \qquad \text{und} \qquad b = \prod_{i=1}^{s} q_i^{\mu_i}$$

seien die zugehörigen kanonischen Zerlegungen von a und b. Da nun a,b teilerfremde natürliche Zahlen sind, ist

$$ab = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\nu_i} \prod_{i=1}^{s} q_i^{\mu_i} = p_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{\nu_r}\, q_1^{\mu_1}\cdot\ldots\cdot q_s^{\mu_s}$$

bis auf die Reihenfolge der Faktoren die kanonische Zerlegung der natürlichen Zahl ab. Wegen (1) ist also

$$\sigma(ab) = \frac{p_1^{\nu_1+1}-1}{p_1-1} \cdots \frac{p_r^{\nu_r+1}-1}{p_r-1} \cdot \frac{q_1^{\mu_1+1}-1}{q_1-1} \cdots \frac{q_s^{\mu_s+1}-1}{q_s-1}$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\nu_i+1}-1}{p_i-1} \prod_{i=1}^{s} \frac{q_i^{\mu_i+1}-1}{q_i-1} = \sigma(a)\sigma(b),$$

was wir beweisen wollten.

Da man für $\sigma(n)$ mit n aus (1) auch

$$\sigma(n) = (1+p_1^1+\ldots+p_1^{\nu_1})\cdot(1+p_2^1+\ldots+p_2^{\nu_2})\cdot\ldots\cdot(1+p_r^1+\ldots+p_r^{\nu_r})$$

schreiben kann, wird es dem Leser nicht schwerfallen, folgende Aussage zu beweisen:

> $\sigma(n)$ ist genau dann ungerade, wenn n eine Quadratzahl oder das Doppelte einer Quadratzahl ist.

Wir brauchen diesen Sachverhalt für den Beweis des nachfolgenden Satzes von EULER.

Betrachtet man die ersten Funktionswerte (beim Nachrechnen der Funktionswerte beachte man auch (2)),

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\sigma(n)$	1	3	4	5	6	12	8	15	13	18	12	28	14	24	24	31	18	39	20	42

so gilt ersichtlich $\sigma(n)=2n$ für $n=6$, $\sigma(n)>2n$ für $n=12,18,20$ und $\sigma(n)<2n$ für die restlichen natürlichen Zahlen kleiner als 20.

In der Antike klassifizierten die Pythagoräer hiernach die natürlichen Zahlen sinngemäß wie folgt.

Die natürliche Zahl n heißt $\begin{cases} \text{defizient,} & \text{falls } \sigma(n)<2n \\ \text{vollkommen,} & \text{falls } \sigma(n)=2n \\ \text{abundant,} & \text{falls } \sigma(n)>2n \end{cases}$.

Also ist die Zahl 6 vollkommen und die Zahlen 12, 18, 20 sind abundant. Da für jede Primzahl p der Sachverhalt $\sigma(p)=p+1<p+p=2p$ gilt, ist jede Primzahl defizient. Damit folgt sofort, daß es unendlich viele defiziente natürliche Zahlen gibt. Somit müssen nicht notwendig die beiden anderen disjunkten Teilmengen "vollkommen" und "abundant" auch unendlich viele Elemente haben. Es läßt sich allerdings leicht zeigen, daß auch die abundanten Zahlen eine unendliche Menge bilden. Dazu bewei-

se der Leser folgenden Sachverhalt (man beachte (2)):

Ist n abundant und p irgendeine Primzahl mit $p > n$, so ist die natürliche Zahl np abundant.

Es gibt also viele defiziente und viele abundante Zahlen.
Die vollkommenen Zahlen sind hingegen äußerst selten. Die Bestimmung aller dieser Zahlen ist das älteste ungelöste zahlentheoretische Problem, wohl das älteste ungelöste mathematische Problem überhaupt.
Bis 1983 hat man nur 29 entdeckt, die sämtlich gerade sind. Die ersten fünf lauten

6, 28, 496, 8128, 33550336.

Diese 29 vollkommenen Zahlen m berechnen sich nach der Vorschrift

(3) $m = 2^{p-1}(2^p-1)$, (2^p-1) ist Primzahl.

Hierin ist p notwendig eine Primzahl, da für $p=ab$, $a,b > 1$,

$$2^p-1 = 2^{ab}-1 = (2^a-1)(1+2^a+2^{2a}+\ldots+2^{(b-1)a})$$

eine zusammengesetzte Zahl wäre.
Andererseits liefert nicht jede Primzahl p eine Primzahl der Form 2^p-1, wie das leicht nachprüfbare Beispiel

$$2^{11}-1 = 2047 = 23 \cdot 89$$

lehrt. Auf der Suche nach großen Primzahlen, die mit der modernen Kodierungstheorie eine große praktische Bedeutung erlangt haben, kann man sich folglich an der Zahlenfolge

(4) $M_p := 2^p-1$, $p=2,3,5,7,11,\ldots$ (p ist Primzahl)

orientieren, muß aber für jede neu ins Auge gefaßte Zahl dieser Art den Primzahl-Test durchführen, jedenfalls so lange, bis hinreichende theoretische Erkenntnisse vorliegen. Die Frage, ob die Folge (4) unendlich viele Primzahlen enthält, ist z. B. bisher nicht entschieden. Zahlen der Form (4) nennt man nach dem französischen Mönch M. Mersenne (1588 - 1648), auf den die Fragestellung nach Primzahlen dieser Form zurückgeht, MERSENNEsche Zahlen.

Welche der MERSENNEschen Zahlen M_p sind nun Primzahlen?
Wie der Leser aus dem Zusammenhang mit (3) richtig vermutet, sind bisher nur 29 bekannt geworden. Danach ist bei folgenden Primzahlen p auch $M_p = 2^p-1$ eine Primzahl.

Primzahl p	Bemerkung zur Primzahl M_p
2,3,5,7,13,17,19,31, 61,89,107,127,	M_{127} wurde 1914 als Primzahl erkannt und hat 39 Dezimalstellen
521,607,1279,2203, 2281,	Nachweis 1950 - 55, M_{2281} hat 687 Dezimalstellen
3217,4253,4423, 9689,9941,11213,	Nachweis für letztes M_p erfolgte 1964 durch GILLIES, etwa 3363 Dezimalstellen
19937,	Nachweis 1971 durch TUCKERMANN, M_p hat etwa 6000 Dezimalstellen
21701, 23209,	Nachweis 1980 durch NOLL/NICKEL, letztes M_p hat etwa 7000 Dezimalstellen
86243, 132049,	Nachweis 1983 mit einem Hochleistungscomputer, letztes M_p hat 39751 Dezimalstellen, Rechenzeit: 1 Stunde.

Übrigens vermutete MERSENNE die Primzahleigenschaft bei M_2, M_3, M_5, M_7, M_{13}, M_{17}, M_{31} und M_{127}. Für die ersten mag er den Beweis selbst erbracht haben. Mit wachsendem p wird der Primzahltest jedoch immer mehr ein Test für die Leistungsfähigkeit elektronischer Rechenanlagen.

Da die Anzahl der Primzahlen unterhalb 132049 gemäß Primzahlsatz $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$, $x \to \infty$, etwa bei

$$\frac{132049}{\log(132049)} \approx 11000$$

liegt, wird die Seltenheit der MESENNEschen Primzahlen deutlich. Da außerdem $\log(132049) \approx 12$, also die gleiche Größenordnung besitzt wie die Anzahl 29 der bekannten Primzahlen M_p, für die $p \leq 132049$ gilt, ist es nicht verwunderlich, daß Experten, wie der Mathematiker GILLIES, für die Anzahl M(x) jener Primzahlen p unterhalb von, für die M_p eine Primzahl ist, die asymptotische Aussage

$$M(x) \sim c \cdot \log x, \quad x \to \infty, \quad 0 < c = \text{const.}$$

vermuten, falls es überhaupt unendlich viele solcher Primzahlen p gibt.

Alle diese Fakten und Fragestellungen über MERSENNEsche Primzahlen sind nun aufs engste mit den geraden vollkommenen Zahlen m aus (3) verknüpft, wie durch den nachstehenden Satz von EULER (1707 - 1783) deutlich wird. Die Existenz der im zweiten Teil des Satzes erwähnten ungeraden vollkommenen Zahlen ist ungeklärt. Der amerikanische Mathematiker TUCKERMANN zeigte 1973, daß es solche Zahlen unterhalb von 10^{200} nicht gibt.

Satz (Euler)

Eine gerade natürliche Zahl m ist genau dann vollkommen, wenn m von der Form

(5) $m = 2^{p-1}(2^p-1)$ und 2^p-1 eine Primzahl ist.

Ist m eine ungerade vollkommene Zahl, so ist m von der Form

(6) $m = p^{4a+1}\, Q^2$, worin p eine Primzahl > 2 und nicht Primteiler von Q ist. a ist nicht-negativ und ganz.

Beweis: Der erste Teil des Satzes besagt, daß natürliche Zahlen der Form (5), und nur diese, gerade vollkommene Zahlen darstellen.

Wir zeigen zunächst, daß eine gerade vollkommene Zahl m notwendig die Form (5) haben muß.

Da m als gerade vorausgesetzt ist, ist m notwendig von der Gestalt

(7) $m = 2^{n-1}m'$, $n \geqq 2$, 2 teilt nicht m'.

Da weiter m als vollkommen vorausgesetzt wird, gilt

$\sigma(m) = 2m$ und mit (7), wo 2 und m' teilerfremd sind,

$\sigma(m) = \sigma(2^{n-1}m') = \sigma(2^{n-1})\sigma(m') = 2m = 2^n m'$.

Über (1) ergibt sich, wenn man dort r=1 setzt,

$(2^{n-1}) = 2^n-1$ und schließlich folgt

(8) $(2^n-1)\sigma(m') = 2^n m'$.

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl ist der Primfaktor 2 mit der Vielfachheit n auch links in (8) enthalten und zwar vollständig in $\sigma(m')$, da die Primfaktoren von 2^n-1 sämtlich ungerade sind.

Es gibt also eine natürliche Zahl k derart, daß

$(m') = k\cdot 2^n$, woraus wegen (8) $m' = k\cdot(2^n-1)$

folgt. Es ist nun für $k > 1$, da dann 1 und k verschiedene Teiler sind,

$$k\cdot 2^n = \sigma(m') = \sigma(k\cdot(2^n-1)) \geq k(2^n-1)+k+1,$$

was nicht sein kann. Also ist notwendig $k=1$ und es muß

$$2^n = \sigma(m') = \sigma(2^n-1)$$

gelten, was nur erfüllt ist, wenn $m' = 2^n-1$ eine Primzahl ist. Dies ergibt mit (7) die Darstellung (5), wenn man noch $n=p$ setzt. Den Beweis für die Umkehrung, d. h., daß jede Zahl m der Form (5) eine vollkommene Zahl ist, kannte bereits EUKLID, weshalb es dem Leser leicht fallen wird, für m aus (5) $\sigma(m)=2m$ nachzuweisen.

Nun zum zweiten Teil des Satzes. m sei jetzt ungerade und vollkommen. Da $\sigma(1) = 1 = 2\cdot 1 = 2$ ist $m > 1$, und es sei

$$(9) \qquad m = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\nu_i}$$

die kanonische Primfaktorzerlegung von m, in der jede der Primzahlen p_i ungerade ist. Weiter ist wegen $\sigma(m) = 2m$ und (2)

$$\sigma(m) = \sigma\Big(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\nu_i}\Big) = \prod_{i=1}^{r} \sigma(p_i^{\nu_i}) = 2 \prod_{i=1}^{r} p_i^{\nu_i}.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung enthält genau einer der Faktoren $\sigma(p_i^{\nu_i})$ den Primfaktor 2 mit der Vielfachheit 1 in seiner Primfaktorzerlegung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll dies für $i=1$ zutreffen. Es ist dann mit einer natürlichen Zahl k

$$\sigma(p_1^{\nu_1}) = 2(2k+1) \text{ und } (2k+1)\prod_{i=2}^{r} \sigma(p_i^{\nu_i}) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\nu_i} .$$

Da die rechte Seite der zweiten Gleichung eine ungerade Zahl darstellt, ist

$$\sigma(p_i^{\nu_i}) \text{ ungerade für } i=2,3,\dots,r .$$

Nun hat der Leser bereits bewiesen, daß damit

$$p_i^{\nu_i} \text{ ein Quadrat oder das Doppelte eines Quadrates ist}$$

für $i=2,3,\dots,r$. Da $p_i^{\nu_i}$ selbst ungerade ist für alle i, ist notwendig p_i^{i} ein Quadrat für $i=2,3,\dots,r$.
Folglich sind die ν_i, $i=2,3,\dots,r$, gerade, und es ist

$$\prod_{i=2}^{r} p_i^{\nu_i} = \prod_{i=2}^{r} p_i^{2\mu_i} = \Big(\prod_{i=2}^{r} p_i^{\mu_i}\Big)^2 =: Q^2 ,$$

womit Q aus (6) gefunden ist und für (9) steht

$$(10) \qquad m = p^{\nu} Q^2 ,$$

wenn wir $p_1=p$ und $\nu_1=\nu$ setzen.

Aus den bisherigen Überlegungen folgt bereits, daß p als ungerade Primzahl größer 2 ist und daß p kein Teiler von Q ist. Für (6) ist also lediglich noch nachzuweisen, daß α von der Form 4a+1 ist.

Für die natürliche Zahl α gibt es eine nicht-negative Zahl a, so daß α mit genau einer der Zahlen 4a, 4a+1, 4a+2, 4a+3 übereinstimmt. Da $p, p^2, p^3, \ldots$ ungerade Zahlen sind un

(11) $\sigma(p^\alpha) = 1+p+p^2+\ldots+p^\alpha = 2(2k+1)$

eine gerade Zahl ist, muß α notwendig ungerade sein. Also ist α von der Form 4a+1 oder 4a+3. Wir zeigen nun, daß $\alpha = 4a+3$ nicht zutreffen kann. Für diesen Fall wäre

(12) $\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{4a+3}$,

wobei p als Primzahl von der Form p = 4b+1 oder p = 4b-1 ist. Durch vollständige Induktion folgt dann:

1. Für $p = 4b+1$ ist $p^l = 4B_l+1$, $l=1,2,3,\ldots$.
2. Für $p = 4b-1$ ist $p^l = 4B_l+(-1)^l$, $l=1,2,3,\ldots$.

Die B_l sind dabei natürliche Zahlen, die vom Exponenten l abhängen.

Im Fall 1 tritt der Summand 1 in (12) 4a+4 mal auf. Im Fall 2 heben sich die Summanden 1 und -1 in (12) gegenseitig auf. In beiden Fällen folgt also aus dem Ansatz (12), daß 4 ein Teiler von $\sigma(p^\alpha)$ ist, was im Widerspruch zu (11) steht. Also ist nicht von der Form 4a+3. Dann bleibt für α aus (10) nur die Darstellung $\alpha = 4a+1$ übrig. Wir haben damit (6), was wir noch beweisen wollten.

Für die ersten 3 geraden vollkommenen Zahlen >6 läßt sich mit einem Taschenrechner schnell bestätigen, daß

$$1^3 + 3^3 = 28$$
$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 = 496$$
$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3 = 8128.$$

R.V. HEATH hat bewiesen, daß jede gerade vollkommene Zahl $2^{p-1}(2^p-1)$ größer 6 als Summe von

$2^{\frac{p-1}{2}}$ ungeraden Kubikzahlen darstellbar ist.

Mit dem Hinweis

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k-1)^3 = \sum_{r=1}^{k} (2r-1)^3 ,$$

$$= \sum_{r=1}^{k} (8r^3-12r^3+6r-1) = 8S_3 - 12S_2 + 6S_1 - k$$

worin

$$S_i := \sum_{r=1}^{k} r^i , \qquad i=1,2,3$$

ist, kann der Leser den Beweis leicht nachvollziehen.
Die Formeln für $S_i = S_i(k)$ findet man in jedem Tafelwerk.

Nun noch 3 kleine hübsche Aufgaben für freie Minuten. Zeige:

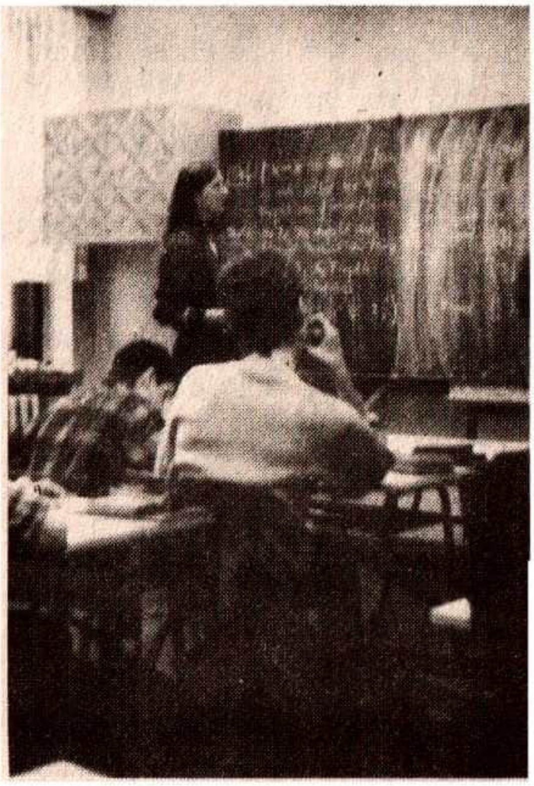
1. Ist die natürliche Zahl n vollkommen oder abundant, so ist jedes Vielfache mn, $m \geqq 2$, eine abundante Zahl.
2. Jeder Teiler einer defizienten Zahl ist wieder defizient.
3. Für jede natürliche Zahl n ist die Potenz p^n defizient, falls p eine Primzahl ist.

Fortsetzung folgt!

Dr. Horn, FSU
Sektion Mathematik

Spezialistenlager des Bezirkes Gera

"Es war toll! Wir würden gern noch länger dableiben!" Diese Äußerung war wohl typisch und beschreibt die Stimmung, die kurz vor Ende die Teilnehmer des diesjährigen Wintermathelagers vom 10. 2. bis 20. 2. beherrschte.



Dabei waren die rund 50 Schüler der Klassen 7 - 11 größtenteils von der Jenaer Zeiss-Spezialschule, aber auch frisches Blut aus den umliegenden Kreisen wurde willkommen geheißen - nicht nur zum Spaß in die Fröbelschule nach Bad Blankenburg gereist. Denn wenn man schon zur creme de la creme der mit mathematischem Denkvermögen gesegneten Teenager gehört, bringt das durchaus auch Verpflichtungen mit sich. Dazu zählten u. a. die im Mathelager abgehaltenen obligatorischen zwei mal 1 1/2 Std. Unterricht pro Tag, auch sonnabends. Der "Lehrbetrieb" wurde größtenteils von Studenten der FSU Jena bestritten. Die Fülle des

vermittelten Stoffes erforderte von jedem volles Engagement, verstand auch nicht jeder immer gleich alles, so stand am Ende doch für alle ein gehöriger Wissenszuwachs zu Buche.
Die Mathematik konnte mit der Mittagspause ad acta gelegt und zum vergnüglichen Teil des Tages übergegangen werden. Letzterer bestand fast vollständig aus Freizeit, die vorrangig mit individuellen Aktivitäten, aber auch durch organisierte Veranstaltungen durchaus unterhaltsam gestaltet wurde. So unternahm man z. B. einen Stadtrundgang durch Bad Blankenburg, auf dem Lokalmatador Friedrich Fröbel hinreichend Huldigung erfuhr, oder einem Ausflug nach Rudolstadt zur Heidecksburg mit ihrem Café und den umliegenden Geschäften. Einer besonders positiven Resonanz erfreute sich eine Wanderung nach Schwarzburg, welche von einem Förster dazu genutzt wurde, endlich das allseitige Interesse an den uns umgebenden Biotopen mittels diesbezüglicher Erklärungen zu befriedigen. In einer Reittouristikstation erhielt man außerdem die Möglichkeit, auf recht zahmen Kleppern gewisse zweideutige prickelnde Gefühle nachzuempfinden, die wohl bei Indianern, Cowboys u. a. in potenzierter Form vorhanden sein müssen, falls Pferd und Reiter sich über den einzuschlagenden Weg im Meinungsstreit befinden.
Zu den sportlichen Aktivitäten der Mathelagerteilnehmer zählte z. B. ein Volleyballturnier, bei dem man gegen die Auswahl der Fröbelschule doch nicht eben brillierte und außerdem ein Fußballturnier, das seinen besonderen Reiz durch die Formierung einer Damenmannschaft erhielt. Diese rekrutierte sich aus 3 Schülerinnen und einer Studentin und erwies sich als den Herrenmannschaften durchaus gewachsen, moralisch zumindestens.
Die Abende waren zum Großteil verschiedenen Kartenspielturnieren vorbehalten. Da aber ein gewisser körperlicher Ausgleich zur geistigen Beanspruchung des Vormittags sich als dringendst nötig erwies, kam man um mehrere Diskos nicht herum. Diese wurden dann z. B. für Anti-Modern-Talking-Protestkundgebungen, zum Fasching feiern bzw. zur wirkungsvollen Umrahmung des Berg- bzw. Abschlußfestes und damit zum Aufrichten aller durch die bevorstehende Abreise am Boden befindlichen Teilnehmer des Wintermathelagers genutzt.

Zu einigen dieser Feierlichkeiten konnten diverse bekannte und beliebte Mathelager-Oldies begrüßt werden, die es trotz altersbedingter z. T. längerer Mathelagerabstinenz immer wieder an den Ort ihres früheren mathematischen und sonstigen Wirkens zurückzieht.
Neben den traditionell zur Faschingsfeier vollzogenen Trauungen von mehr oder weniger zusammenpassenden weiblichen bzw. männlichen Teilnehmern zu Ehepaaren boten einige andere Einlagen des Bergfestes und der Abschlußdisko die willkommene Möglichkeit, die Betreuer bzw. Studenten in mißliche Lagen zu manövrieren und sich so für erlittene Mühen beim vergeblich versuchten Lösen von Übungsaufgaben bzw. Aufstellen von Beweisen zu entschädigen. Aber diese Strapazen wogen wohl am Ende doch nicht so schwer, siehe Ergebnis der eingangs erwähnten Repräsentativumfrage.

Anke Moritz, FSU
Mathematik-Student,
4. Studienjahr

Lösungen Bezirksolympiade

<u>Andere Fortsetzungsmöglichkeit</u> nach (2)

Verlängert man die Strecke AB über B hinaus um ihre eigene Länge bis A', so gilt

$\sphericalangle CBA' = 180^\circ - \sphericalangle CBA$ (Nebenwinkel)

$= \sphericalangle ABC$ (Gegenwinkel im Sehnenviereck)

und $BN \parallel A'C$ (Umkehrung des Strahlensatzes), also

$\sphericalangle BA'C = \sphericalangle ABD$ (Stufenwinkel)

$= \sphericalangle BCA$ (Peripheriewinkel über AD).

Also ist A'BC CDA und daher

$\overline{A'B} : \overline{BC} = \overline{CD} : \overline{DA}$,

$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{BC} \cdot \overline{CD}$,

womit (1) folgt.

5. Der Spieler A kann für jedes n und jedes k ($n > 3$, $1 < k < n-1$) zum Beispiel mit folgender Strategie den Gewinn erzwingen: Ist n ungerade, so schaltet A im 1. Zug genau die in der Mitte der Lampenreihe liegende (die $\frac{n+1}{2}$te) Lampe ein; ist n gerade, schaltet A im 1. Zug genau 2 Lampen in der Mitte ein, die $\frac{n}{2}$te und die $(\frac{n}{2}+1)$te Lampe. Durch diesen 1. Zug von A wird die Lampenreihe in zwei symmetrische Teilbereiche I und II uneingeschalteter Lampen eingeteilt, die die gleiche Anzahl von Lampen enthalten. Diese Anzahl L ist von Null verschieden; denn da die Anzahl a der von A eingeschalteten Lampen höchstens 2 und n mindestens 4 ist, gilt $L = \frac{1}{2}(n-a) \geq \frac{1}{2}(4-2) > 0$. B kann dann in seinen folgenden Zügen, da in einem Zug nur nebeneinanderliegende Lampen eingeschaltet werden dürfen, jeweils nur entweder Lampen aus I oder aus II einschalten. Damit bleibt für A nach jedem Zug von B die Möglichkeit, im jeweils anderen Teilbereich als B den zum Zuf von B symmetrischen Zug auszuführen. Diese Strategie verfolgt A. Da mit jedem Zug wenigstens eine Lampe eingeschaltet wird und für B vor jedem Zug in beiden Teilbereichen eine symmetrische Situation besteht, ist B gezwungen, in einem der Teilbereiche nach endlich vielen Zügen die letzte Lampe einzuschalten. Danach tut das im nächsten Zug auch A im anderen Teilbereich und gewinnt.

6. Aus (1) und (2) folgt durch vollständige Induktion $x_n > 0$ für alle n=1,2,3,... und dann

$$9x_n^2 < x_{n+1}^2 < 9x_n^2 + 12x_n + 4 = (3x_n+2)^2, \qquad (4)$$
$$3x_n < x_{n+1} < 3x_n + 2.$$

Das ergibt zunächst (durch vollständige Induktion)

$x_n > \frac{3^n}{2}$ für alle n=1,2,3,... und dann

$$3 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < 3 + \frac{2}{x_n} < 3 + \frac{4}{3^n}.$$

Nach (3) folgt damit

$$\frac{3}{|a|} < \frac{|y_{n+1}|}{|y_n|} < \frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a| \cdot 3^n}. \qquad (5)$$

1. Ist nun $|a| < 3$ (und $a \neq 0$), so gilt für die Zahl $q = \frac{3}{|a|}$ einerseits $q > 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$; andererseits folgt aus (5)

$$|y_{n+1}| > q \cdot |y_n| \,,$$
$$|y_{n+1}| > q^n \cdot |y_1| \quad (n=1,2,3,\ldots)$$ (durch vollständige Induktion und wegen $|y_1| > 0$ damit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Also ist die Folge (y_n) in diesem Fall divergent.

2. Ist $|a| > 3$, so existiert wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a|\cdot 3^n}\right) = \frac{3}{|a|} < 1 \tag{6}$$

eine Zahl q mit $\frac{3}{|a|} < q < 1$. Für diese Zahl gilt einerseits $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$; andererseits gibt es wegen (6) eine Zahl N so, daß für alle $n \geq N$

$$\frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a|\cdot 3^n} < q,$$

nach (5) also

$$|y_{n+1}| < q \cdot |y_n| \,,$$
$$|y_{N+k}| < q^k \cdot |y_N| \quad (k=1,2,3,\ldots)$$ (durch vollständige Induktion) ist. Daher gilt $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$; also ist die Folge (y_n) in diesem Fall konvergent.

3. Ist $a=3$, so folgt aus (4) nach Division durch 3^{n+1}

$$y_n < y_{n+1} < y_n + \frac{2}{3^{n+1}} \,. \tag{7}$$

Daraus folgt einerseits:

Die Folge (y_n) ist monoton steigend. (8)

Andererseits ergibt sich (durch vollständige Induktion) für alle $n=2,3,4,\ldots$

$$\begin{aligned} y_n &< y_{n-1} + \frac{2}{3^n} \\ &< y_{n-2} + \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &< y_1 + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} \,; \end{aligned}$$

wegen der Konvergenz der unendlichen Reihe $\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots$ gilt somit

Die Folge (y_n) ist nach oben beschränkt. (9)

Aus (8) und (9) ergibt sich: Die Folge (y_n) ist konvergent.

<u>4.</u> Ist $a = -3$, so gilt: Ist n gerade, so hat y_n denselben Wert wie für $a = 3$. Ist n ungerade, so hat y_n entgegengesetzt gleichen Wert wie für $a = 3$. Bezeichnet g den Grenzwert der für $a = 3$ gebildeten Folge (y_n), so hat also für $a = -3$ die Teilfolge der y_n mit geradem n den Grenzwert g und die Teilfolge der y_n mit ungeradem n den Grenzwert $-g$.

Nach (7) gilt $g \geq y_1$, also $g > 0$ und damit $g \neq -g$.
Also ist die (gesamte) Folge (y_n) im Fall $a = -3$ divergent.

Damit ist gezeigt: Die Folge (y_n) ist genau für alle diejenigen a konvergent, für die

$$a \quad -3 \quad \text{oder} \quad a \geq 3$$

gilt.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: C. Dahmke, J. Dimler, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 2. 4. 87

Titelseite: M. Torke

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	21 (1987) 4	S. 49–64

... dass die Schönheit der Gleichung wichtiger ist als die vollkommene Übereinstimmung mit dem Experiment ...

Paul Dirac

wurzel

5 · 87

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
21. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Zerlegung in Stammbrüche

Unter den gebrochenen Zahlen (nicht-negativen rationalen Zahlen) sind in bestimmtem Sinne die sogenannten Stammbrüche $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$; allgemein $\frac{1}{n}$ (n natürliche Zahl, $n \geqq 1$) als die einfachsten zu betrachten. Hier liegt die Frage nahe, ob man alle gebrochenen Zahlen in geeigneter Weise auf Stammbrüche "zurückführen" kann. Jede gebrochene Zahl $\frac{k}{m}$ (k, m natürliche Zahlen $\geqq 1$) ist nun in trivialer Weise als Summe von Stammbrüchen darstellbar:

$$(1) \qquad \frac{k}{m} = \underbrace{\frac{1}{m} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{m}}_{k \text{ Summanden}}$$

Offensichtlich ist dies aber nicht die einzige mögliche Zerlegung; die Zahl $\frac{k}{m}$ gestattet unendlich viele weitere Zerlegungen in Stammbrüche. Angenommen, es ist

$$(2) \qquad \frac{k}{m} = \underbrace{\frac{1}{m_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{m_s}}_{s \text{ Summanden}}$$

mit $s \geqq 2$ und natürliche Zahlen $m_1, \ldots, m_s$. Dann haben wir für jeden Index i ($1 \leqq i \leqq s$) die Abschätzung

$$(3) \qquad \frac{1}{m_i} < \frac{k}{m}$$

oder gleichwertig

$$(4) \qquad m_i > \frac{m}{k} .$$

Nun genügt es offenbar, etwa für m_1 <u>irgendeine</u> natürliche Zahl $> \frac{m}{k}$ zu wählen und dann für die gebrochene Zahl

$$\frac{k}{m} - \frac{1}{m_1} = \frac{km_1 - m}{m_1 m} \qquad (> 0)$$

wie oben die triviale Zerlegung von der Gestalt (1) in $(km_1 - m)$ Summanden $\frac{1}{m_1 m}$ auszuführen.

Die Fortsetzung dieses Verfahrens zeigt, daß in der Zerlegung in Stammbrüche eine weitgehende Willkür herrscht. Wir erhalten auf diesem Wege allerdings <u>keine</u> Antwort auf die folgenden Fragen:

1° Wie kommt man mit möglichst wenigen Stammbrüchen aus? Wie kann man möglichst gut die Anzahl der benötigten Stammbrüche abschätzen?

2° Gibt es stets eine Zerlegung in paarweise verschiedene Stammbrüche?

Diese Fragen sind auch vom Standpunkt der Mathematikgeschichte aus interessant. Bekanntlich spielte in der Bruchrechnung der alten Ägypter die Zerlegung in Stammbrüche eine wichtige Rolle, und der Papyrus Rhind enthält eine entsprechende Zerlegungstabelle für die Brüche $\frac{2}{n}$ mit ungeraden n zwischen 3 und 101 (vgl. /3/, § 6, /2/). Es handelt sich dabei stets um Zerlegungen in paarweise verschiedene Stammbrüche, z. B.

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$$

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232} .$$

Ein Kommentar zu diesen Zerlegungen ist nicht überliefert. So bleibt auch völlig unklar, warum z. B. nicht immer die für uns heute naheliegende Zerlegung

$$\frac{2}{2m+1} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(2m+1)(m+1)}$$

benutzt worden ist. (Auf Grund der Abschätzung (4) ist ja (m+1) als kleinste oberhalb $\frac{2m+1}{2}$ liegende natürliche Zahl der kleinstmögliche Kandidat für einen Stammbruchnenner.) Wir haben hier nicht die Absicht, der schon über hundert Jahre währenden Diskussion um jene Tabelle (vgl. /2/, /6/) neue Erörterungen hinzuzufügen. Vielmehr möchten wir ein leicht zugängliches und reizvolles Stück elementarer Zahlentheorie darlegen, das Fragen verschiedenen Schwierigkeitsgrades darbietet und zur Behandlung in Schüler-Arbeitsgemeinschaften, aber auch zur Festigung des Bruchrechnens geeignet sein dürfte. Das Material der folgenden Abschnitte geht im wesentlichen auf die bekannten Mathematiker Waclaw Sierpiński (Polen) und Pál Erdös (Ungarn) zurück (vgl. dazu /5/).

Wie üblich verstehen wir unter j! ("j Fakultät" für $j \geq 1$) das

Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich j. Desweiteren werden wir aus der elementaren Zahlentheorie die Kongruenzenschreibweise (nur zur Abkürzung) verwenden (vgl. /1/).

Die erste allgemeine Aussage lautet wie folgt.

Behauptung 1. Es seien a, n positive natürliche Zahlen mit $0 < a < n!$, $n \geq 2$. Die gebrochene Zahl $\frac{a}{n!}$ ist dann eine Summe von höchstens (n-1) paarweise verschiedenen Stammbrüchen. Es gilt genauer:

(5) $$\frac{a}{n!} = \sum_{i=2}^{n} x_i ,$$

wobei jede Zahl x_i entweder gleich Null oder gleich einem Stammbruch $\frac{1}{m_i}$ ist. Für jeden auftretenden Stammbruch $\frac{1}{m_i}$ ist $(i-1)! < m_i$ und $i! \equiv 0 \pmod{m_i}$. Insbesondere ist $(i-1)! < m_i \leqq i!$, und m_i ist ein Teiler von $n!$.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion über n. Im Anfangsschritt n=2, a=1 ist nichts zu beweisen. - Die Behauptung sei für (n-1) bewiesen. Wir dividieren a durch n mit Rest: $a = q.n + r$ mit $0 \leqq r < n$. Aus $0 < a < n!$ folgt $0 \leqq q < (n-1)!$. Dann ist

(6) $$\frac{a}{n!} = \frac{qn+r}{n!} = \frac{q}{(n-1)!} + \frac{r}{n!} .$$

Im Falle r=0 ist $0 < q < (n-1)!$, und alles weitere folgt aus der Induktionsvoraussetzung. Im Falle $r > 0$ ist die Zahl r wegen $r < n$ ein Teiler von $n!$. Also ist

(7) $$\frac{r}{n!} = \frac{1}{\frac{n!}{r}}$$

ein Stammbruch mit $\frac{n!}{r} > \frac{n!}{n} = (n-1)!$. Die Induktionsvoraussetzung, angewandt auf $\frac{q}{(n-1)!}$, liefert wegen (6) und (7) das gewünschte Ergebnis.

Beim Beweis dieses Ergebnisses vor Schülern dürfte es wohl genügen, mit dem entscheidenden Reduktionsschritt (6) zu beginnen und alles weitere an Beispielen zu erläutern.

Beispiele.

1° $\frac{7}{24} = \frac{7}{4!}$ ist zu zerlegen. Wir dividieren 7 durch 4 mit Rest und erhalten

$$\frac{7}{24} = \frac{1\cdot 4+3}{4!} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\ .$$

2° $\frac{37}{120} = \frac{37}{5!}$ ist zu zerlegen. Wir dividieren 37 durch 5 mit Rest.

$$\frac{37}{120} = \frac{7.5}{120} + \frac{2}{120} = \frac{7}{24} + \frac{1}{60} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{60}\ .$$

Satz 1. Jeder echte Bruch $\frac{a}{m}$ $(0 < a < m,\ m \geqq 2)$ ist eine Summe von höchstens $2(n-1)$ paarweise verschiedenen Stammbrüchen, wobei die Zahl n durch die Bedingung

(8) $$(n-1)! < m \leqq n!\,, \quad n \geqq 2$$

festgelegt ist.

Beweis. Der Fall "m teilt n!" kann durch passendes Erweitern auf den Fall m=n! zurückgeführt und damit nach Behauptung 1 erledigt werden. Wir setzen also nun voraus: $(n-1)! < m < n!$ und m teilt nicht die Zahl n!. Wir erweitern den Bruch $\frac{a}{m}$ mit n! und dividieren den neuen Zähler a.n! durch m mit Rest:

$$a.n! = q.m + r, \quad 0 \leqq r < m.$$

Daraus folgt:

$$\frac{a}{m} = \frac{q.m}{m.n!} + \frac{r}{n!} = \frac{q}{n!} + \frac{r}{m.n!}$$

Der Fall r=0 ist wegen Behauptung 1 uninteressant. Es sei also $0 < r < m < n!$. $\frac{r}{n!}$ ist ein echter Bruch und besitzt nach Behauptung 1 eine Zerlegung

(9) $$\frac{r}{n!} = \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{m_j}$$

in höchstens (n-1) paarweise verschiedene Stammbrüche. Durch Multiplikation mit $\frac{1}{m}$ folgt daraus:

(10) $$\frac{r}{m.n!} = \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{m.m_j}\ .$$

Andererseits ist nach Behauptung 1

(11) $$\frac{q}{n!} = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{l_i}\ ,$$

wobei jeder Nenner l_i ein Teiler von n! ist. Wäre nun für einen Index i die Zahl m ein Teiler von l_i, so wäre damit auch m ein

Teiler von n! im Widerspruch zur Voraussetzung. Deshalb sind die (s+t) Nenner $l_1,\dots,l_s$, $m.m_1,\dots,m.m_t$ paarweise verschieden, und

$$\frac{a}{m} = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{l_i} + \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{m.m_j}$$

ist die gewünschte Zerlegung. Aus $s \leqq n-1$, $t \leqq n-1$ folgt $s+t \leqq 2(n-1)$.

Beispiele.

1° Man zerlege $\frac{7}{30}$. Es ist $4! < 30 < 5!$. Gleichzeitig ist 30 ein Teiler von 5!. Also haben wir den Bruch so zu erweitern, daß im Nenner 5! erscheint, und danach ist der Zähler durch 5 mit Rest zu teilen.

$$\frac{7}{30} = \frac{28}{5!} = \frac{5.5+3}{5!} = \frac{5}{4!} + \frac{3}{5!} = \frac{1.4+1}{4!} + \frac{1}{40} = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{40}.$$

2° Man zerlege $\frac{3}{37}$. Es ist n=5 wegen $4! < 37 < 5!$. Wir erweitern mit $5! = 120$ und dividieren den neuen Zähler $3.5! = 360$ durch 37 mit Rest.

$$\frac{3}{37} = \frac{9.37+27}{37.5!} = \frac{9}{5!} + \frac{27}{37.5!} = \frac{1.5+4}{5!} + \frac{5.5+2}{37.5!}$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{30} + \frac{1}{37.6} + \frac{1}{37.24} + \frac{1}{37.60}.$$

In diesem Beispiel ist s=2, t=3.

Satz 1 wird durch die folgende Aussage ergänzt.

Satz 2. Jede gebrochene Zahl $\frac{a}{m} > 1$ ist als Summe von endlich vielen paarweise verschiedenen Stammbrüchen darstellbar.

Beweis. Die harmonische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert, was bekanntlich durch eine sehr durchsichtige Abschätzung zu beweisen ist, vgl. /4/. D. h. für $N \longrightarrow \infty$ streben die Teilsummen $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}$ gegen $+\infty$. Es gibt daher eine Zahl s mit

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{i} \leqq \frac{a}{m} < \sum_{i=1}^{s+1} \frac{1}{i} = \frac{1}{s+1} + \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{i}.$$

Gilt in der ersten Ungleichung das Gleichheitszeichen, so sind wir fertig. Ist dagegen

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{i} < \frac{a}{m} < \frac{1}{s+1} + \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{i} ,$$

so setzen wir

$$\frac{a_1}{m_1} := \frac{a}{m} - \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{i}$$

und erhalten

$$0 < \frac{a_1}{m_1} < \frac{1}{s+1} .$$

Nach Satz 1 gibt es eine Darstellung

$$\frac{a_1}{m_1} = \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{l_j}$$

in der o. B. d. A. $l_1 < l_2 \ldots < l_t$ gelten soll. Aus den Ungleichungen

$$\frac{1}{l_1} < \frac{a_1}{m_1} < \frac{1}{s+1}$$

folgt $l_1 > s+1 > s$. In der Darstellung

$$\frac{a}{m} = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{i} + \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{l_j}$$

sind dann alle Nenner paarweise verschieden, was zu beweisen war. Damit ist auch Satz 2 bewiesen.

Durch die Sätze 1 und 2 sind die beiden einleitend formulierten Fragen im Prinzip beantwortet. Man überzeugt sich leicht davon, daß man bei <u>vorgeschriebener</u> Anzahl von (nicht notwendig verschiedenen) Stammbrüchen alle möglichen Zerlegungen durch systematisches Probieren finden kann. Es läßt sich nämlich beweisen:

Behauptung 2. Für jedes $s \geqq 1$ gilt: Jede gebrochene Zahl $\frac{a}{m}$ besitzt nur endlich viele Darstellungen als Summe von s Stammbrüchen.

Beweis. Wir schließen durch Induktion über s. Für s=1 ist nichts zu beweisen. Die Behauptung sei nun für s=t bewiesen, und es sei

$$\frac{a}{m} = \frac{1}{m_1} + \ldots + \frac{1}{m_{t+1}} \tag{12}$$

mit $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_{t+1}$ eine in Frage kommende Darstellung. Dann ist

$$\frac{a}{m} \leq \frac{t+1}{m_{t+1}}$$

oder

(13) $$m_{t+1} \leq \frac{(t+1)m}{a} .$$

Für m_{t+1} kommen nur endlich viele Zahlen in Frage. Für jede dieser Zahlen ist

$$\frac{a}{m} - \frac{1}{m_{t+1}} = \frac{1}{m_1} + \ldots + \frac{1}{m_t}$$

nach Induktionsvoraussetzung nur auf endlich viele Weisen als Summe von t Stammbrüchen darstellbar. Also gibt es insgesamt nur endlich viele (t+1)-Tupel $(m_1, \ldots, m_{t+1})$ mit der Eigenschaft (12). Was zu beweisen war.

Bislang offen ist die von P. Erdös formulierte Frage:
Ist jede Zahl $\frac{4}{m}$ (m natürliche Zahl) eine Summe von drei (nicht unbedingt verschiedenen) Stammbrüchen?

Nach Behauptung 2 kann man diese Frage für jedes m "individuell" durch Probieren entscheiden. So ist es z. B. nicht sehr schwierig nachzuweisen, daß alle Zahlen $\frac{4}{m}$ mit $m \leq 1000$ Summen von drei Stammbrüchen sind. Dabei sind die folgenden Formeln, die für alle natürlichen Zahlen $k \geq 1$ gelten, sehr nützlich:

$$\frac{4}{4k-1} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{k(4k-1)} ;$$

$$\frac{4}{7k-4} = \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2(7k-4)} + \frac{1}{2(2k-1)(7k-4)} ;$$

$$\frac{4}{2k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} .$$

Weitere Einzelheiten findet der Leser in dem angegebenen Buch von L. Holzer /5/, § 2.

Wenn ein echter Bruch mit ungeradem Nenner gegeben ist, dann läßt er sich nach R. Breusch und W. Sierpiński (vgl. /5/, § 4) sogar in paarweise verschiedene Stammbrüche mit ungeraden Nennern zerlegen. Beispiele dafür sind

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{455} + \frac{1}{4095}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{53} + \frac{1}{5565}$$

Die Grundidee besteht darin, daß man nicht wie beim Beweis von Satz 1 die Zahlen n! als Hilfszahlen benutzt, sondern die Produkte aller ungeraden Zahlen von 1 bis zu einer hinreichend großen Zahl. Die Folge dieser Hilfszahlen beginnt so:

$$1,\ 1.3 = 3,\quad 1.3.5 = 15,\quad 1.3.5.7 = 105,\ \ldots\ .$$

Wir bezeichnen mit n!! das n-te Glied dieser Folge, also das Produkt aller ungeraden Zahlen von 1 bis einschließlich (2n-1). Das Analogon der Behauptung 1 lautet dann:

Behauptung 3. Jeder echte Bruch $\frac{a}{n!!}$ $(0 < a < n!!)$ ist eine Summe von höchstens (2n+4) paarweise verschiedenen Stammbrüchen mit ungeraden Nennern.

Dem oben bewiesenen Satz 1 entspricht

Satz 3 (R. Breusch - W. Sierpiński). Jeder echte Bruch mit ungeradem Nenner gestattet eine Darstellung als Summe von endlich vielen paarweise verschiedenen Stammbrüchen mit ungeraden Nennern.

Wir verzichten hier auf die Ausführung der Beweise, die wesentlich mehr Einzelheiten als die oben angeführten Beweise von Behauptung 1 und Satz 1 enthalten.

Abschließend sei unterstrichen, daß alle Überlegungen zur Zerlegung in Stammbrüche nur elementare Abschätzungen und Teilbarkeitsbetrachtungen benutzen.

Literatur

/1/ G. Asser, Grundbegriffe der Mathematik. I. Mengen, Abbildungen. Natürliche Zahlen. MfL Band 1. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 4. Aufl. Berlin 1980

/2/ Autorenkollektiv unter Leitung von F. Jürss, Geschichte des wissenschaftlichen Denkens im Altertum. Akademie-Verlag, Berlin 1982

/3/ I.G. Baschmakowa und A.P. Juschkewitsch. Die Entstehung der Bezeichnungssysteme für die Zahlen. In: Enzyklopädie der Elementarmathematik. Band I. Arithmetik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 7. Aufl. Berlin 1977. S. 3-60

/4/ S. Brehmer, H. Apelt. Analysis. I. Folgen, Reihen, Funktionen. MfL Band 4. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 2. Aufl. Berlin 1976

/5/ L. Holzer, Zahlentheorie III. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965

/6/ H. Wußing, Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. MfL Band 13. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979.

Dr. Neumann, FSU
Sektion Mathematik,
Bereich Theoretische Mathematik

Beiträge zur elementaren Zahlentheorie (Fortsetzung)

Wir wollen uns nun mit einigen verwandten Zahlbegriffen beschäftigen.
Schon durch PYTHAGORAS und seine Schule kam ein gewisser Mystizismus in die Zahlentheorie (etwa Spekulationen über "heilige Zahlen"), die bis ins Mittelalter fortdauerte. Ein Beispiel bieten die befreundeten Zahlen:

Zwei natürliche Zahlen a,b heißen befreundet, wenn
a = Summe der echten Teiler von b
und
b = Summe der echten Teiler von a

ist (t heißt echter Teiler von n, falls t/n und t< n).
Ein Beispiel für ein befreundetes Zahlenpaar ist 220, 284:

$$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11\ , \qquad \sigma(220) = \frac{2^3-1}{2-1}(5+1)(11+1) = 504$$

$$284 = 2^2 \cdot 71\ , \qquad \sigma(284) = \frac{2^3-1}{2-1}(71+1) = 504\ .$$

Damit ist

die Summe der echten Teiler von 220 = 504 - 220 = 284,
die Summe der echten Teiler von 284 = 504 - 284 = 220.

Der Leser beweise folgende naheliegenden Aussagen:

1. Eine natürliche Zahl ist genau dann vollkommen, wenn sie mit sich selbst befreundet ist.

2. Zwei natürliche Zahlen a und b sind genau dann befreundet, wenn $\sigma(a) = \sigma(b) = a+b$ ist.

Die befreundeten Zahlen wurden im Mittelalter zur Stiftung von Freundschaften benutzt. So zitiert M. CANTOR in seinen Vorlesungen über Geschichte der Mathematik (Teubner-Verlag, Leipzig 1907) ein Rezept:

> Man soll die Zahlen 220 und 284 aufschreiben, die kleinere der betreffenden Person zu essen geben, die größere selbst essen. Der Verfasser habe die erotische Wirkung des Verfahrens in eigener Person erprobt.

Bisher sind über tausend solcher Zahlenpaare bekannt.
Im Jahr 1974 entdeckte H.J.J. te RIELE vier befreundete Paare natürlicher Zahlen, von denen der jeweils größere Partner 32, 40, 81 und 152 Dezimalstellen hat. Die bis dahin bekannte größte befreundete Zahl hatte nur 25 Dezimalstellen.
Es ist nicht bekannt, ob es unendlich viele befreundete Paare natürlicher Zahlen gibt. Die bisherigen Untersuchungen sprechen für "ja". Der ungarische Mathematiker ERDÖS hat für die Anzahl A(x) von befreundeten Paaren (m,n) mit $m < n < x$ die Vermutung

$$A(x) \geqq cx^{1-\varepsilon}, \qquad 0 < c = \text{const.}, \qquad \varepsilon > 0$$

ausgesprochen.
1981 konnte Carl POMERANCE diese Vermutung durch den Beweis der Ungleichung

$$A(x) \leqq x \exp\{-(\log x)^{1/3}\}$$

stark stützen. Da für $x \to \infty$

$$\pi(x) \sim x(\log x)^{-1} = x \exp\{-\log \log x\},$$

ist zumindest für große x klar, daß es erheblich weniger befreundete Zahlenpaare als Primzahlen unterhalb von x gibt.

Mit einem BASIC-Programm und einem Kleinrechner hat der Autor im Intervall $[1,1900]$ lediglich fünf Pärchen gefunden, von denen drei vollkommene Zahlen darstellen.

BEFREUNDETE ZAHLEN,	SIGMA(A) = SIGMA(B) = A+B,	A,B < 1901
A = 6	B = 6	SIGMA(A)=SIGMA(B) = 12
A = 28	B = 28	SIGMA(A)=SIGMA(B) = 56
A = 220	B = 284	SIGMA(A)=SIGMA(B) = 504
A = 496	B = 496	SIGMA(A)=SIGMA(B) = 992
A = 1184	B = 1210	SIGMA(A)=SIGMA(B) = 2394

Um 1950 definierte der indische Mathematiker A.K. SRINIVASAN:

Eine natürliche Zahl n soll praktisch heißen genau dann, wenn für alle $k \leq n$ die Zahl k als Summe von verschiedenen echten Teilern von n darstellbar ist.

Es stellt sich heraus, daß alle geraden vollkommenen Zahlen praktisch sind. Dies, und die Tatsache, daß es unendlich viele nicht-vollkommene praktische Zahlen gibt, folgt aus der Aussage:

Die Zahlen $n = 2^{m-1}(2^m-1)$, $m=2,3,4,\ldots$ sind praktisch.

Hierbei ist es egal, ob 2^m-1 eine Primzahl ist oder nicht. Denn als echte Teiler treten stets die folgenden Zahlen auf:

(I) $1,2,2^2,\ldots,2^{m-1}$

und

(II) $2^m-1, 2(2^m-1), 2^2(2^m-1),\ldots,2^{m-2}(2^m-1)$

und jedes $k \leq n$ ist als Summe solcher Teiler unterschiedlicher Größe darstellbar. Dies beweise der Leser durch Fallunterscheidung: (i) $k \leq 2^{m-1}$, (ii) $2^{m-1} < k < n$, (iii) $k=n$.

Hinweis für (i): Man betrachte k in der Darstellung als Dualzahl.

In neuester Zeit wurde die Definition einer perfekten (= vollkommenen) Zahl verallgemeinert:

Eine natürliche Zahl n heißt k-fach-perfekt, wenn für die natürliche Zahl k die Gleichung $\sigma(n) = k \cdot n$ erfüllt ist.

Die vollkommenen Zahlen sind also zweifach-perfekt. 120 und 672 sind dreifach-perfekt, weil $\sigma(120)=360$ und $\sigma(672) = 3\cdot 672$ ist. Mit einem Taschenrechner läßt sich noch leicht unter Beachtung von (1) nachprüfen, daß

$$n = 2178540 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2\cdot 13\cdot 19 \text{ und } \sigma(n)=4n,$$

womit 2178540 als vierfach-perfekte Zahl nachgewiesen ist.

Verwenden wir die Bezeichnung "P_k-Zahl" für eine k-fach-perfekte Zahl, so kann der Leser über (1) leicht nachweisen:

Jede P_5-Zahl hat mehr als 5 verschiedene Primteiler.

Das größte k, für das P_k-Zahlen bekannt sind, ist k=8. Es wurden bisher fünf P_8-Zahlen gefunden. Die kleinste davon hat L. BROWN 1954 bekanntgegeben. Sie hat 41 verschiedene Primfaktoren.

Da (1) äquivalent ist zu

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r} \left(1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\dots+\frac{1}{p_i^{\nu_i}}\right) \quad \text{für } n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\nu_i}$$

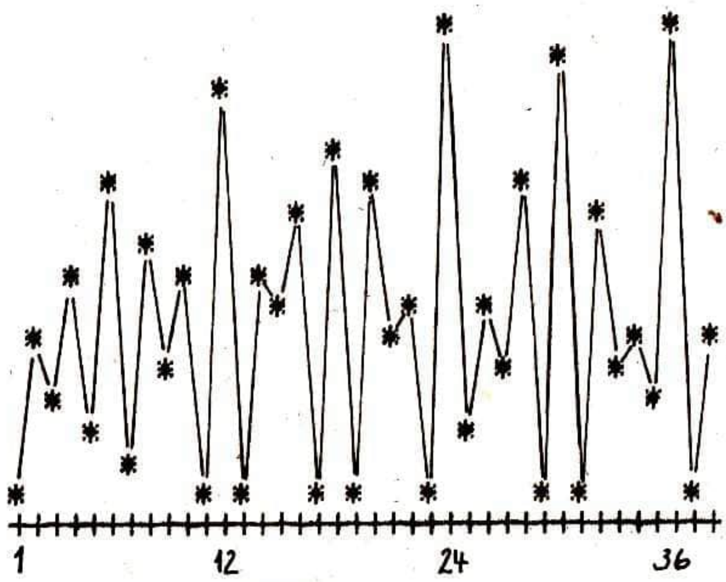
ist nicht so ohne weiteres klar, daß der Funktionswert $\frac{\sigma(n)}{n}$ beliebig groß werden kann und schon gar nicht, daß für wenigstens ein n ein beliebig groß vorgegebener ganzzahliger k-Wert von der Funktion angenommen wird.

Den ersten Teil können wir mit relativ einfachen Mitteln klären, wenn wir den Rechnerdruck unserer sehr eigenwilligen Funktion $\frac{\sigma(n)}{n}$ (siehe Graphik "(1/N)* SIGMA(N)") betrachten.

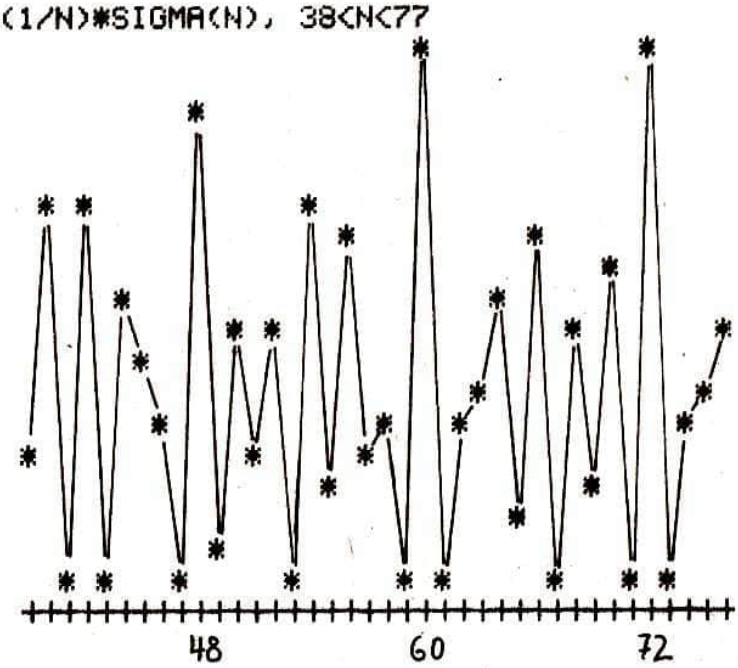
Durchläuft n die Folge der Primzahlen p, n=p, so bilden die Funktionswerte $\frac{\sigma(n)}{n} = 1 + \frac{1}{p}$ eine fallende Folge rationaler Zahlen, deren Werte nahe bei 1 liegen. Da der Kleinrechner das Graphikzeichen mit dem ganzzahligen Anteil des 10-fachen Funktionswertes ausgedruckt hat, geraden alle Primzahlen ab 11 auf gleiche Höhe und bilden die "Täler" im "Gebirge" der Funktionswerte.

Betrachtet man nun die "Berggipfel", so fällt auf, daß die "von links sichtbaren" mit Ausnahme der ersten drei anscheinend zu Argumenten n gehören, die Vielfache von 12 sind.

(1/N)*SIGMA(N), N<39



(1/N)*SIGMA(N), 38<N<77



N	SIGMA(N)	(1/N)*SIGMA(N)
1	1	1
2	3	1.5
3	4	1.33333333
4	7	1.75
5	6	1.2
6	12	2
7	8	1.14285714
8	15	1.875
9	13	1.44444444
10	18	1.8
11	12	1.09090909
12	28	2.33333333
24	60	2.5
36	91	2.52777778
48	124	2.58333333

Schluß folgt

Dr. Horn, FSU
Sektion Mathematik

Preisaufgaben

T 25 Löse folgende Gleichung :

1 $\sqrt{a/x - 1} + \sqrt{x/a + 1} = \sqrt{2a/x}$, $a > 0$.

T 26 Löse folgendes Gleichungssystem :

2
$$\begin{aligned} ax+by+cz &= a+b+c \\ bx+cy+az &= a+b+c \\ cx+ay+bz &= a+b+c \end{aligned} \qquad a+b+c \neq 0$$

T 27 Wieviel Glieder der Folge 5, 9, 13, 17, ... muß man zusammenaddieren, damit die Summe gleich 10877 ist ?

1

T 28 In das Dreieck ABC sei ein Kreis einbeschrieben. Dieser berühre die Seite AB im Punkt D, so daß gilt : $AC \cdot CB = 2AD \cdot DB$.
Man beweise, daß das Δ ABC rechtwinklig ist !

2

T 29 Man beweise, daß für beliebige N und jede natürliche Zahl k stets gilt :

1

$$N^k - 1 - k(N-1) = (N-1)^2(N^{k-2} + 2N^{k-3} + \ldots + (k-2)N + k - 1)$$

T 30 Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб, острый угол которого равен a. Под каким углом к плоскости основания нужно провести плоскость, чтобы в сечении получить квадрат с вершинами на боковых ребрах призмы?

2

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: C. Dahmke, J. Dimler, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 29. 4. 1987

Titelbild: M. Torke

Das entscheidende Kriterium ist Schönheit; für hässliche Mathematik ist auf dieser Welt kein beständiger Platz.

G. H. Hardy

wurzel 6·87

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

21. Jahrgang ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Multiplikation von Matrizen

Für Matrizen läßt sich eine Operation Matrixmultiplikation definieren. Dabei wird eine m-zeilige und n-spaltige Matrix, kurz (mxn)-Matrix, mit einer (nxp)-Matrix so verknüpft, daß eine (mxp)-Matrix entsteht.
Es sei dazu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Die Elemente der Produktmatrix

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Sind nun bestimmt durch

$$C_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

d. h. das Element der i-ten Zeile und j-ten Spalte von C erhält man durch "Multiplikation" der i-ten Zeile von A mit der j-ten Zeile von B. Wenn Zeilenanzahl der ersten Matrix nicht gleich der Spaltenanzahl der zweiten Matrix ist, ist keine Multiplikation dieser Matrizen möglich.
Einen wichtigen Fall von Matrixmultiplikation haben wir, falls die zweite Matrix genau eine Spalte hat, wir sprechen dann auch manchmal von Vektoren und kennzeichnen sie mit einem Pfeil, z. B. $B = \vec{e}$.

Matrizen erfreuen sich einer großen Anwendungsbreite in der Mathematik, aber auch bei praktischen, numerischen Prozessen. Einige Exemplare sind in dem Heft WURZEL 1/87 vorgestellt worden.

Wir wollen nun den in Heft 3/87 versprochenen Beweis des dort formulierten Satzes führen.

Wir hatten behauptet, daß für die Berechnung von $M \cdot \vec{y}$ wenigstens r Multiplikationen notwendig sind, falls M den Zeilenrang r hat.

Nun können wir gleich annehmen, daß M genau r Zeilen besitzt, anderenfalls reicht es, eine Teilmatrix mit genau r Zeilen zu betrachten, die dann nur modulo $\mathbb{Z}$ unabhängige Zeilen enthält.

Wir nehmen an, es seien t Multiplikationen notwendig, bei denen $l_1, l_2, \ldots, l_t$ berechnet werden. Dann kann man $M \cdot \vec{y}$ darstellen als lineare Funktion der Veränderlichen $l_1, l_2, \ldots, l_t$ und Variablen aus $X \cup Y$, d. h.

$$M \cdot \vec{y} = N \cdot \vec{l} + \vec{f},$$

hierbei ist $l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_t \end{pmatrix}$ und $\vec{f}$ ebenfalls ein Vektor der Länge t, der nur Linearkombinationen von Elementen aus $X \cup Y$ über Z enthält, für dessen Berechnung also keine Multiplikationen notwendig sind. N ist eine (rxt)-Matrix, deren Elemente <u>ausschließlich</u> zu Z gehören, um $N \cdot \vec{l}$ auszurechnen braucht man ebenfalls keine Multiplikation, es reicht in durch N bestimmter Weise Elemente von $\vec{l}$ zu addieren.

Wir nutzen nun einen aus der Algebra bekannten Fakt:

Gilt $r > t$, so sind Zeilen in N <u>linear abhängig</u>, d. h. es gibt einen Zeilenvektor $\vec{z}^T = (z_1, z_2, \ldots, z_r)$, dessen Elemente nicht sämtlich 0 und ganze Zahlen sind, so daß $\vec{z}^T \cdot N = (0,0,\ldots,0)$.

Aus einer Matrix A erhält man die transponierte Matrix A^T, indem man Zeilen und Spalten vertauscht, aus einem (Spalten-)Vektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_t \end{pmatrix}$ wird so ein Zeilenvektor $\vec{z}^T = (z_1, z_2, \ldots, z_t)$.

Wir wollen diesen Faktor nicht beweisen, sondern an einem Beispiel veranschaulichen. Für die Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{z}^T = (-1,1,-2) \quad \text{gilt } \vec{z}^T \cdot N = (0,0,0).$$

Und einen Vektor $\vec{z}^T$ finden wir auch, wenn wir Elemente von N umändern.

Zurück zu unserem Beweis:

Mit $\vec{z}^T \cdot N = \vec{0}^T$, wir setzen $\vec{0}^T = (0,0,\ldots,0)$ zur Abkürzung, gilt

$$\vec{z}^T \cdot M \cdot \vec{y} = \vec{z}^T \cdot N \cdot \vec{1} + \vec{z}^T \cdot \vec{f}$$

$$\vec{z}^T \cdot M \cdot \vec{y} = \vec{z}^T \cdot \vec{f}.$$

In $\vec{z}^T \cdot \vec{f}$ treten keine Produkte von Variablen aus $X \cup Y$ auf, da in $\vec{z}^T$ nur ganze Zahlen und in $\vec{f}$ nur Linearkombinationen von Elementen aus $X \cup Y$ über Z auftreten. Damit dürfen in $\vec{z}^T \cdot M$ keine Variablen aus $X \cup Y$ zu finden sein, denn sonst entstehen durch Multiplikation mit $\vec{y}$ ganz sicher Produkte von Variablen. Wenn $\vec{z}^T \cdot M$ keine Variablen enthält, dann sind laut Definition die Zeilen von M modulo Z abhängig im Widerspruch zur Annahme. Damit haben wir den Satz bewiesen.

Natürlich hätten wir uns die Mühe des Beweises nicht gemacht, wenn wir nur Multiplikationen von komplexen Zahlen im Auge gehabt hätten. Aber unser Satz kann mehr. Wir wollen jetzt fragen, wieviele Multiplikationen sind notwendig, um zwei $(n \times n)$-Matrizen miteinander zu multiplizieren.

Laut Definition braucht man für jedes Element der resultierenden $(n \times n)$-Matrix genau n Multiplikationen, insgesamt macht das n^3 Multiplikationen. Gibt es nun Tricks, um mit weniger Multiplikationen auszukommen?

Sind $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}, y_{11}, \ldots, y_{nn}$ $2 \cdot n^2$ verschiedene Variablen, so sind zunächst die n Zeilen von

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

linear unabhängig modulo Z, damit benötigen wir, um

$$(*) \qquad X \cdot \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \; X \cdot \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \; \ldots, \; X \cdot \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$$

zu berechnen, jeweils wenigstens n Multiplikationen.

Die Produkte $(*)$ sind nun gerade die Spalten der Matrix

$$X \cdot Y = X \cdot \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

damit brauchen wir, um $X \cdot Y$ zu berechnen, wenigstens $n \cdot n$ Multiplikationen.
Jetzt, da wir eine untere Schranke für die Anzahl der Multiplikationen haben, wollen wir versuchen, die obere Schranke n^3 herunterzudrücken.

Fortsetzung folgt!

Th. Gundermann, FSU
Sektion Mathematik

Beiträge zur Zahlentheorie (Schluß)

Eine Teilfolge hiervon bilden die Zahlen

$$n = m! \quad , \quad m=4,5,6,\dots$$

und wir finden für die so definierten n

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{t/n} t = \frac{1}{n}\sum_{d\cdot t=n} t = \sum_{d\cdot t=n} \frac{t}{n} = \sum_{d/n} \frac{1}{d}$$

$$= \sum_{d/m!} \frac{1}{d} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \,.$$

Die letzte Summe ist die m-te Partialsumme der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, die divergent ist, was nichts anderes bedeutet, als daß die angegebene m-te Partialsumme größer wird als jede vorgegebene reelle Zahl $C > 0$, wenn nur m hinreichend groß gewählt wird. Es gibt hierzu verschiedene Beweise. Wir wählen einen Beweis, der einfachste Eigenschaften des RIEMANNschen Integrals und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ausnutzt:

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \int_{k}^{k+1} dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{k} \geq \sum_{k=1}^{m} \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x}$$

und weiter

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \sum_{k=1}^{m} \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{m+1} \frac{dx}{x} = \log(m+1)$$

Unsere m-te Partialsumme wächst also mindestens so wie $\log(m+1)$ mit m wächst. Etwas genauer gilt

$$(13) \qquad \log(m+1) \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \leq 1 + \log m.$$

Der Beweis zum rechten Teil der Doppelungleichung verläuft analog und ist dem Leser überlassen.
Der linke Teil von (13) besagt, daß $\frac{\sigma(n)}{n}$ unbeschränkt wächst und damit nicht ausgeschlossen ist, daß zu jeder natürlichen Zahl k auch P_k-Zahlen existieren.

Der englische Mathematiker HONSBERGER bemerkt in einem Artikel über "Mathematische Edelsteine" (Verlag Vieweg, 1981), daß es bisher nicht gelungen ist, die folgenden grundlegenden Fragen zu beantworten:

(A) Gibt es zu einer vorgegebenen natürlichen Zahl k 2 unendlich viele P_k-Zahlen?

(B) Gibt es eine ungerade P_k-Zahl?

Immerhin gibt es ein paar hübsche Aufgaben, die P_k-Zahlen betreffen.

1. Ist n eine P_3-Zahl und kein Vielfaches von 3, so ist $3n$ eine P_4-Zahl.
2. Ist $3n$ eine P_{4k}-Zahl und ist n nicht durch 3 teilbar, so ist n eine P_{3k}-Zahl.
3. Ist n eine P_3-Zahl und 3 ein Teiler von n, während 5 und 9 keine Teiler von n sind, dann ist $45n$ eine P_4-Zahl.

Wie schwierig die Frage (A) ist, erkennt man aus folgender Überlegung.
Wir betrachten die Funktion $\frac{\sigma(n)}{n}$ auf dem Intervall $[1,N]$, wo N beliebig groß gewählt werden kann, und berechnen ihren durchschnittlichen Wert auf $[1,N]$ mit

$$\frac{1}{N}\sum_{n\le N}\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{1}{N}\sum_{n\le N}\ \sum_{dt=n}\frac{1}{t} = \frac{1}{N}\sum_{dt\le N}\frac{1}{t}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{t\le N}\frac{1}{t}\sum_{d\le \frac{N}{t}} 1 = \frac{1}{N}\sum_{t\le N}\frac{1}{t}\left[\frac{N}{t}\right],$$

was ein Zwischenergebnis darstellt, worin $[x]$ das Größte Ganze von x bezeichnet, $[x] \le x < [x] + 1$. Es ist deshalb mit einer wohlbestimmten Funktion g

$$\left[\frac{N}{t}\right] = \frac{N}{t} - g\left(\frac{N}{t}\right), \qquad 0 \le g\left(\frac{N}{t}\right) < 1.$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{1}{N}\sum_{n\le N}\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{t\le N}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{N}\sum_{t\le N}\frac{1}{t}\, g\left(\frac{N}{t}\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t^2} - \sum_{t>N}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{N}\sum_{t\le N}\frac{1}{t}\, g\left(\frac{N}{t}\right)$$

Von der ersten Summe rechts weiß man, daß sie eine konvergente Reihe darstellt (summe über alle reziproken Quadratzahlen) mit dem Reihenwert $\pi^2/6$.
Für die nächste Summe kann der Leser analog zu (13)

$$\sum_{t>N}\frac{1}{t^2} := \lim_{X\to\infty}\sum_{t=N+1}^{X}\frac{1}{t^2} \le \frac{1}{N}$$

nachweisen, so daß mit (13) insgesamt gilt:

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n\le N}\frac{\sigma(n)}{n} - \frac{\pi^2}{6}\right| \le \frac{2\cdot\log N}{N}.$$

Der durchschnittliche Wert von $\frac{\sigma(n)}{n}$ auf $[1,N]$ unterscheidet sich also mit wachsendem N immer weniger von der reellen Zahl $\frac{\pi^2}{6}$. In diesem Sinne sagt man, daß $\frac{\sigma(n)}{n}$ die durchschnittliche Größenordnung

$$\frac{\pi^2}{6} \approx \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{22}{7}\right)^2 = \frac{484}{294} = 1{,}64\ldots$$

hat (die angegebenen Dezimalziffern sind exakt).
Hieraus wird klar, daß P_k-Zahlen, $k \ge 2$, mit wachsendem k immer seltener werden. Gibt es trotzdem zu jedem $k \ge 2$ jeweils unendlich viele P_k-Zahlen?
Eine sehr viel einfachere Frage ist, wie groß bei vorgegebenem k die kleinste P_k-Zahl mindestens sein muß. Hierzu ist wegen

(13) für alle n

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{t/n} \frac{1}{t} \leq \sum_{k \leq n} \frac{1}{k} \leq 1 + \log n .$$

Ist n eine P_k-Zahl, so gilt folglich

$$k \leq 1 + \log P_k, \quad \text{also } e^{k-1} \leq P_k .$$

Für großes k ist also bereits die kleinste zugehörige P_k-Zahl ein Zahlenriese.

Nebenbei erhalten wir den abschließenden

S a t z : Für die Folge natürlicher Zahlen $n=m!$, $m=2,3,4,\ldots$ ist

(14) $\sigma(n) \geq \frac{n}{2} \log\log n.$

Für alle natürlichen Zahlen n gilt

(15) $\sigma(n) \leq n(1+\log n).$

<u>Beweis:</u> Wegen der bisherigen Untersuchungen ist lediglich noch (14) zu begründen. Mit (13) ergab sich

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \log m ,$$

und mit $n=m!$ folgt $n < m^m$, also

$$\log n < m \log m, \quad \text{also } \log\log n < 2 \log m,$$

woraus sich (14) ergibt, was noch zu zeigen war.

Die Abschätzung (14) ist recht gut. (15) läßt sich über (1) und die gleiche Beweisidee, die zur analogen Abschätzung über d(n) in WURZEL   geführt hat, verbessern zu

$$\sigma(n) \leq (1+\ )e^C n \log\log n,$$

für alle $\varepsilon > 0$ und $n > N(\varepsilon)$, worin C die EULERsche Konstante ist.

Die EULERsche Konstante C ist definiert durch

$$C := \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \log m\right).$$

Zeige über (13), daß $0 < C \leq 1$ gilt.

Dr. G. Horn, FSU
Sektion Mathematik

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker (DDR)
10. Klasse

1. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei x eine beliebig vorgegebene Streckenlänge. Die Seiten des Dreiecks ABC seien jeweils um eine Strecke dieser Länge x verlängert, und zwar BA über A hinaus bis A', CB über B hinaus bis B' und AC über C hinaus bis C'.
   Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen das Dreieck A'B'C' stets denselben Umkreismittelpunkt wie das Dreieck ABC hat.

2. Man ermittle die kleinste positive natürliche Zahl n, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:
   (1) Es gibt genau 144 natürliche Zahlen, die Teiler von n sind.
   (2) Unter den Teilern von n befinden sich 10 unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

3A. Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x_1,x_2,x_3) von reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen!

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \qquad (1)$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3, \qquad (2)$$
$$x_1x_2x_3 = 1. \qquad (3)$$

3B a) Beweisen Sie, daß fünf paarweise verschiedene reelle Zahlen existieren, mit denen die folgende Aussage gilt!
   Für jede Auswahl von drei der fünf Zahlen existiert ein Dreieck, dessen Seitenlängen die drei ausgewählten Zahlen als Maßzahlen haben (wobei zum Messen aller drei Seitenlängen dieselbe Maßeinheit benutzt wird).
   b) Ermitteln Sie, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, wie viele paarweise nicht kongruente Dreiecke insgesamt sich aus diesen fünf Zahlen auf die in a) genannte Art gewinnen lassen!

c) Beweisen Sie, daß stets dann, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, mindestens eines der genannten Dreiecke spitzwinklig ist!

4. Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $k \geqq 2$ die Anzahl aller Lösungen (x,y,z,t) der Gleichung

$$\overline{xy} + \overline{zt} = \overline{yz},$$

worin für x, y, z, t nur natürliche Zahlen mit

$1 \leq x \leq k-1$, $1 \leq y \leq k-1$, $1 \leq z \leq k-1$, $0 \leq t \leq k-1$

zugelassen sind!

Dabei bezeichnet jeweils $\overline{pq}$ diejenige Zahl, die im Positionssystem der Basis k mit den Ziffern p,q (in dieser Reihenfolge) geschrieben wird.

5. Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0,1,...,6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0,1,...,6 je genau einmal vor. Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen. Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen. Eine geschlossene Kette aus drei verschiedenen Steinen werde kurz "Dreierkette" genannt. Zwei Dreierketten gelten genau dann als gleich, wenn sie aus denselben Steinen bestehen.

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen aus je genau 7 verschiedenen Dreierketten $K_1,\dots,K_7$ bestehenden Mengen $K_1,\dots,K_7$, bei denen jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer der Ketten $K_1,\dots,K_7$ vorkommt!

(Wie üblich heißen zwei Mengen $M= K_1,\dots,K_7$ und $M' = K_1',\dots,K_7'$ genau dann einander gleich, wenn jede in der Menge M enthaltene Kette K_i auch in M' enthalten ist und umgekehrt auch jede in M' enthaltene Kette in M.)

6. Beweisen Sie, daß es einen Körper mit den folgenden Eigenschaften (1) bis (4) gibt!
   (1) Die Oberfläche des Körpers besteht aus genau sechs ebenen Vierecken.
   (2) Unter diesen Vierecken gibt es zwei, die keine Seitenkante miteinander gemeinsam haben.
   (3) Außer den Seitenkanten dieser beiden Vierecke hat der Körper noch genau vier weitere Seitenkanten.
   (4) Die Mittelpunkte dieser vier Seitenkanten liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene.

12. Klasse

1. 500 Bonbons sollen unter Verwendung von Umhüllungen passender Größen so zu einem Scherzpaket zusammengepackt werden, daß die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt sind. Dabei soll sich (2) auf jede Möglichkeit beziehen, alle Bonbons auszupacken, indem man nach und nach jeweils eine zugängliche Umhüllung öffnet und entfernt (falls mehrere Umhüllungen zugänglich sind, in beliebiger Reihenfolge):
   (1) Es gibt genau eine Umhüllung, die das gesamte Paket enthält.
   (2) Beim Öffnen dieser und jeder weiteren Umhüllung zeigt sich, daß deren Inhalt entweder aus mindestens drei sämtlich mit Umhüllung versehenen Teilpaketen oder aus genau einem nicht umhüllten Bonbon besteht.

   Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Umhüllungen, die ein solches Paket aufweisen kann.

2. Man ermittle alle diejenigen Zahlenfolgen (a_n) mit $n=1,2,3,\ldots$, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:
   (1) Für alle ganzen Zahlen m,n mit $n > m > 0$ gilt $a_{n+m} \cdot a_{n-m} = a_n^2 - a_m^2$.
   (2) Es gilt $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{5}{2}$.

3. Es seien $k_1,\dots,k_n$ Kugelkörper, jeder einschließlich seiner Randpunkte verstanden. Diese Kugeln seien beliebig im Raum gelegen; es sei auch zugelassen, daß sie einander durchdringen oder berühren. Die Vereinigungsmenge der k_i habe das Volumen V.
Man beweise, daß es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl aus den Kugeln k_i so zu treffen, daß je zwei der ausgewählten Kugeln keinen gemeinsamen Punkt haben und daß die Vereinigungsmenge der ausgewählten Kugeln ein Volumen $U \geqslant \frac{1}{27} V$ hat.

4. Man ermittle die kleinste positive ganze Zahl a, für die $(a+1)^5 - a^5 - 1$ durch 18305 teilbar ist.

5. Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geqq 3$, mit denen die folgende Aussage gilt:

   Jede ebene konvexe n-Ecksfläche $A_1A_2\dots A_n$ wird vollständig überdeckt von den Flächen der n Kreise, die die Strecken A_iA_{i+1} als Durchmesser haben ($i=1,\dots,n$; es sei $A_{n+1} = A_1$ gesetzt).

   Dabei sei jede n-Ecksfläche und jede Kreisfläche einschließlich ihrer Randpunkte verstanden.

6A. Im Mathematiklager schlägt ein Zirkelleiter den n Schülern ($n \geqq 3$) seiner Gruppe vor, den Schüler, der den Tafeldienst wahrzunehmen hat, nach folgender Methode auszuwählen:
Die Schüler werden mit $P_1,P_2,\dots,P_n$ numeriert und stellen sich in dieser Reihenfolge im Kreis auf. Dabei folgt (im Umlaufsinn $P_1,P_2,\dots$) auf P_n wieder P_1. Durch Münzwurf wird zunächst entschieden, ob P_1 oder P_2 aus dem Kreis ausscheidet. Liegt "Wappen" oben, so scheidet P_1 aus, bei "Zahl" P_2.
Danach wird der Ausscheid mit denjenigen beiden noch nicht ausgeschiedenen Schülern fortgesetzt, die auf den soeben zuletzt ausgeschiedenen Schüler im genannten Umlaufsinn folgen. Bei "Wappen" scheidet wieder der in dem Umlaufsinn erste von diesen beiden aus, bei "Zahl" der zweite. Dies wird solange wiederholt, bis nur noch ein Schüler übrigbleibt, der dann als Diensthabender bestimmt wird.

a) Man berechne im Fall $n=3$ die Wahrscheinlichkeiten W_1, W_2, W_3 dafür, daß P_1, P_2 bzw. P_3 als Diensthabender bestimmt werden.

b) Man beweise für jedes $n \geqslant 3$, daß die Auswahlmethode ungerecht ist, d. h. daß die Wahrscheinlichkeit, als Diensthabender bestimmt zu werden, nicht für alle Schüler $P_1, P_2, \ldots, P_n$ gleich ist.

Bemerkung: Tritt irgendein zufälliges Ereignis A als Folge irgendeines von m Ereignissen aus einer Gesamtzahl von N möglichen Ereignissen (die einander ausschließen und gleichwahrscheinlich sind) ein, so bezeichnet man als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A die Zahl $p = \frac{m}{N}$.

6B. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_{1987}$ nichtnegative reelle Zahlen, für die die Summe der Quadrate gleich 10 und die Summe der dritten Potenzen größer als 1 ist.
Untersuchen Sie, ob es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl
a) von 9 dieser Zahlen,
b) von 10 dieser Zahlen
so zu treffen, daß die Summe der ausgewählten Zahlen größer als 1 ist!
(Kommt eine Zahl mehrmals unter den $x_1, \ldots, x_{1987}$ vor, so darf sie auch höchstens ebenso oft unter die ausgewählten Zahlen aufgenommen werden.)

Preisträger der XXVI. OJM

Einen ersten Preis in der Klasse 10 erhielten

Hans-Peter Störr, Klasse 9, Spezialschule "Hans Beimler" Karl-Marx-Stadt

Torsten Ehrhardt, Klasse 9, Spezialschule "Hans Beimler" Karl-Marx-Stadt

Einen ersten Preis in der Klasse 11/12 erhielten

Uta Hövel,	Spezialschule "Heinrich Hertz" Berlin
Gunter Döge,	Spezialschule "Friedrich Engels" Riesa
Ingo Warnke,	Spezialschule "Georg Thiele" Kleinmachnow
Andreas Siebert, Klasse 10,	Spezialschule "Heinrich Hertz" Berlin
Dirk Liebscher	Spezialschule "Georg Thiele" Kleinmachnow

Zweite Preise erhielten in

der Klasse 10	der Klasse 11/12
Enrico Thierbach Karl-Marx-Stadt	Sven Suska Berlin
Carsten Deus (9) Karl-Marx-Stadt	Gerd Kunert Karl-Marx-Stadt
Stefan Liebscher (9) Kleinmachnow	Aicke Hinrichs Magdeburg
Torsten Griga Leipzig	Gerard Zanker (1o) Karl-Marx-Stadt
Jan Fricka (9) Pasewalk	Martin Welk Eisenach
Astrid Mirle (9) Riesa	Andrea Mans Berlin
Christine Thomas Zittau	Jan Elsing Berlin
Dirk Männel (9) Freiberg	Stephan Werner Roßlau

Die Redaktion der WURZEL gratuliert allen
Preisträgern der XXVI. Olympiade
Junger Mathematiker der D D R !

Preisaufgaben

T 31 1

Löse folgendes Gleichungssystem

$$3 \quad 4x + 2y \quad - 5 \quad 2x - y \quad = 2$$
$$7 \quad 4x + 2y \quad + 2 \quad 2x - y \quad = 32$$

T 32 2

Berechne die Summe der ersten n Glieder der Folge 7, 77, 777, ...

T 33 2

Konstruiere ein Rhombus, wenn die Summe der Diagonalen und der Winkel zwischen Diagonale und Seite gegeben sind

T 34 1

Man berechne x

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

T 35 1

Wieviele fünfstellige Zahlen kann man aus den Ziffern 1, 2, 1, 2, 0 bilden?

T 36 2

В треугольной пирамиде ОАБС проведено сечение $А_IБ_IС_I$ параллельно основанию. Р – середина стороны БС, П – середина стороны СА, Ф – середина стороны АБ. Точка $А_I$ соединена с Р, точка $Б_I$ – с П, точка С – с Ф.

Доказать, что :

I. прямые $А_IР$, $Б_IП$ и $С_IФ$ пересекаются в одной точке,

2. геометрическое место точек пересечения этих прямых при поступательном движении $А_IБ_IС_I$ (паралеллььно плоскости основания) – есть прямая, которая соединяет вершину пирамиды с центром тяжести ее основания.

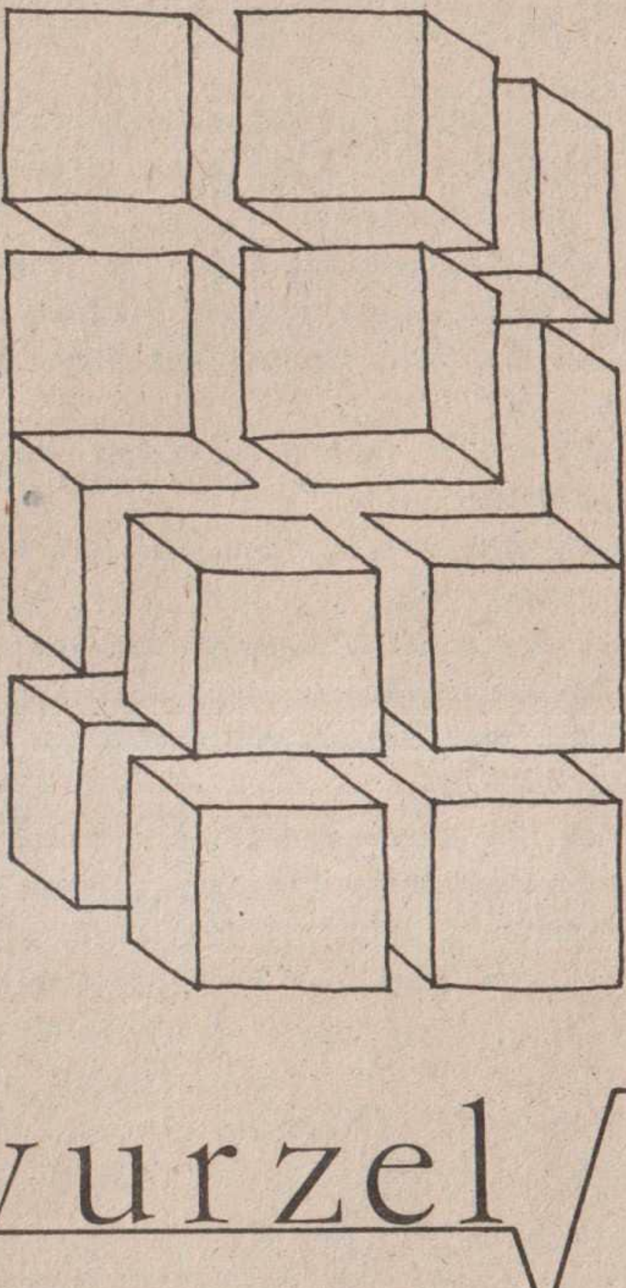
Если представить боковые ребра неограниченно продолженными в обе стороны, то при каком положении движущейся плоскости указанные прямые будут паралеллььны ?

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung“
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: C. Dahmke, J. Dimler, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 9. 6. 1987

Titelbild M. Torke

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	21 (1987) 6	S. 81–96



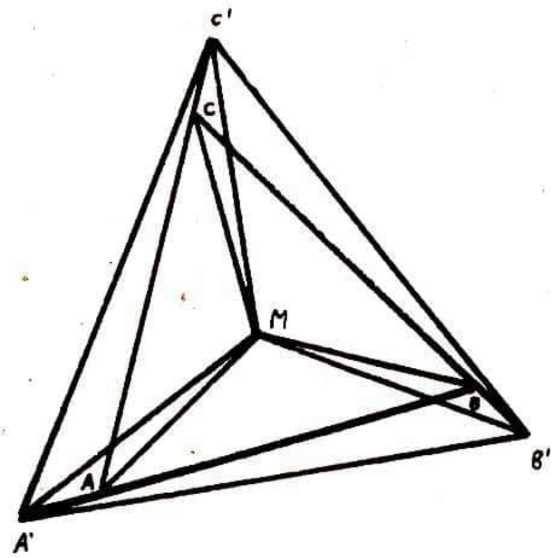
wurzel $\sqrt{}$ 7/8 · 87

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
21. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,40 M

Lösungen der DDR-Olympiade 10.Klasse

1. Es sei M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC und somit Mittelpunkt des Umkreises dieses Dreiecks.
   Sei r die Länge des Umkreisradius, dann gilt $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = r$.
   Da das Dreieck ABC gleichseitig ist, ist jeder seiner Innenwinkel 60° groß. Da in einem solchen Dreieck der Umkreismittelpunkt gleichzeitig Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist, gilt $\sphericalangle MBA = 30^\circ$.
   Ferner ist $\sphericalangle ABB' = 120^\circ$ (als Nebenwinkel zum Winkel ABC), und deshalb gilt $\sphericalangle MBB' = 150^\circ$.
   Entsprechend läßt sich zeigen, daß auch die Winkel MCC' und MAA' 150° groß sind.
   Demnach sind die Dreiecke MBB', MCC' und MAA' nach dem Kongruenzsatz sws kongruent zueinander; denn in jedem dieser Dreiecke schließen zwei Seiten von der Länge r bzw. x einen Winkel der Größe 150° ein.
   Daraus folgt, daß die Strecken $\overline{MA'}$, $\overline{MB'}$ und $\overline{MC'}$ als entsprechende Seiten kongruenter Dreiecke gleich lang sind, d. h. M ist von den Punkten A', B' und C' gleich weit entfernt und somit Mittelpunkt des Umkreises auch des Dreiecks A'B'C'.



Andere Lösungsdarstellung:

Wegen $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ und $\measuredangle AMB = \measuredangle BMC = \measuredangle CMA$ (Beweis wie oben) gilt: Durch eine Drehung um den Umkreismittelpunkt M des Dreiecks ABC kann A auf B, B auf C und C auf A abgebildet werden. Diese Drehung bildet die Verlängerung von BA über A hinaus auf die Verlängerung von CB über B hinaus ab und diese auf die Verlängerung von AC über C hinaus. Also bildet sie A' auf B' und B' auf C' ab; somit folgt $\overline{MA'} = \overline{MB'} = \overline{MC'}$.

2. I. Behauptung: (2) wird genau dann erfüllt, wenn die Primfaktorzerlegung von n

$$n = 2^{e_1} \cdot 3^{e_2} \cdot 5^{e_3} \cdot 7^{e_4} \cdot P_5^{e_5} \cdot \ldots \cdot P_k^{e_k} \qquad (3)$$

(mit Primzahlen $P_k > \ldots > P_5 > 7$, falls $k > 4$ ist, und) mit natürlichen Zahlen e_i, insbesondere

$$e_1 \geq 3,\ e_2 \geq 2,\ e_3 \geq 1,\ e_4 \geq 1, \qquad (4)$$

lautet.

Beweis: Wenn (2) erfüllt ist, so ist unter den zehn genannten Teilern

mindestens einer durch 8 teilbar,
mindestens einer durch 9 teilbar,
mindestens einer durch 5 teilbar,
mindestens einer durch 7 teilbar;

also gilt dann (3) mit (4).

Wenn umgekehrt (3), (4) gelten, so ist n durch jede der Zahlen 1,2,...,10 teilbar, also ist dann (2) erfüllt.

II. Alle natürlichen Teiler von n kann man folgendermaßen, jeden genau einmal, bilden:

Tritt in der Primfaktorzerlegung (3) der Faktor $P_i^{e_i}$ auf, so wähle man eine der Zahlen

$$1,\ p_i,\ p_i^2, \ldots, p_i^{e_i}. \qquad (5)$$

Das Produkt der so gewählten Zahlen $p_i^{d_i}$ $(i=1,\ldots,k)$ ist einer der zu bildenden Teiler von n.

Da es für jeden Faktor $p_i^{e_i}$ also e_i+1 Möglichkeiten (5) der Auswahl gibt, ist

$$(e_1+1) \cdot (e_2+1) \cdot \ldots \cdot (e_k+1)$$

die Anzahl aller Teiler von n (aus (3)).

III. Aus I. und II. folgt: Die gesuchte kleinste Zahl mit (1), (2) ist die kleinste Zahl (3), die außer (4) auch noch

$$(e_1+1) \cdot (e_1+1) \cdot \ldots \cdot (e_k+1) = 144 \qquad (6)$$

erfüllt.

Die folgende Tabelle enthält alle Möglichkeiten, (6) unter Berücksichtigung von (4), d. h. von

$$e_1+1 \geq 4, \; e_2+1 \geq 3, \; e_3+1 \geq 2, \; e_4+1 \geq 2, \qquad (7)$$

zu erfüllen.

Ferner ist in der Tabelle jeweils für

$$n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot q$$

die gemäß (3), (4) verbleibende Zahl

$$q = 2^{e_1-3} \cdot 3^{e_2-2} \cdot 5^{e_3-1} \cdot 7^{e_4-1} \cdot p_5^{e_5} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k} \qquad (8)$$

angegeben. Bei Aufstellung der Tabelle ergibt sich sogleich, daß (6), (7) nicht mit mehr als einem positiven Wert unter den $e_5, \ldots, e_k$ erfüllbar ist. Daher braucht (8) nur mit $k=5$ genommen zu werden. Ferner gilt: n wird genau dann am kleinsten, wenn q am kleinsten wird; deshalb genügt es, in (8) (mit $k=5$) nur die Primzahl $p_5=11$ zu berücksichtigen:

Zerlegung (6) mit (7)	e_1-3	e_2-2	e_3-1	e_4-1	e_5	q gemäß (8)
144 = 12.3.2.2.1	8	0	0	0	0	256
= 9.4.2.2.1	5	1	0	0	0	32.3
= 8.3.3.2.1	4	0	1	0	0	16 .5
= 8.3.2.3.1	4	0	0	1	0	16 .7
= 6.6.2.2.1	2	3	0	0	0	4.27
= 6.4.3.2.1	2	1	1	0	0	4.3.5
= 6.4.2.3.1	2	1	0	1	0	4.3 .7
= 6.3.4.2.1	2	0	2	0	0	4 .25
= 6.3.2.4.1	2	0	0	2	0	4 .49
= 4.9.2.2.1	0	6	0	0	0	729
= 4.6.3.2.1	0	3	1	0	0	27.5
= 4.6.2.3.1	0	3	0	1	0	27 .7
= 4.4.3.3.1	0	1	1	1	0	3.5.7
= 4.3.6.2.1	0	0	4	0	0	625
= 4.3.4.3.1	0	0	2	1	0	25.7
= 4.3.3.4.1	0	0	1	2	0	5.49
= 4.3.2.6.1	0	0	0	4	0	2401
= 6.3.2.2.2	2	0	0	0	1	4 .11
= 4.3.3.2.2	0	0	1	0	1	5 .11
= 4.3.2.3.2	0	0	0	1	1	7 .11
= 4.3.2.2.3	0	0	0	0	2	121

Die Tabelle zeigt, daß q genau für

$$e_1=5,\ e_2=2,\ e_3 = e_4 = e_5 = 1$$

am kleinsten wird.

Die gesuchte kleinste Zahl mit (1), (2) ist demnach

$$n = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$
$$= 110880.$$

3A. <u>1. Lösungsweg:</u>

I. Wenn ein Tripel (x_1,x_2,x_3) reeller Zahlen das Gleichungssystem erfüllt, so folgt:

Setzt man aus (1)

$$x_3 = 3 - x_1 - x_2 \tag{4}$$

in (2) ein, so ergibt sich

$$x_1^3+x_2^3+27-27(x_1+x_2)+9(x_1+x_2)^2-x_1^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2-x_2^3 = 3,$$

nach Division durch 3 also

$$9(x_1+x_2) - 3(x_1+x_2)^2 + x_1x_2(x_1+x_2) = 8; \qquad (5)$$

setzt man (4) in (3) ein, so folgt

$$3x_1x_2 - x_1x_2(x_1+x_2) = 1. \qquad (6)$$

Für die beiden Zahlen

$$p = x_1x_2, \qquad (7)$$

$$s = x_1+x_2 \qquad (8)$$

besagen (5) und (6) also

$$9s - 3s^2 + ps = 8, \qquad (9)$$

$$3p - ps = 1. \qquad (10)$$

Nach Addition und anschließender Division durch 3 folgt

$$3s - s^2 + p = 3,$$

und setzt man hieraus

$$p = s^2 - 3s + 3 \qquad (11)$$

in (9) ein, so ergibt sich

$$9s - 3s^2 + s^3 - 3s^2 + 3s = 8,$$

$$(s-2)^3 = 0,$$

$$s = 2.$$

Nach (11), (7), (8) folgt hieraus

$$p = 1, \qquad (12)$$

$$x_1x_2 = 1,$$

$$x_1 + x_2 = 2. \qquad (13)$$

Setzt man $x_2 = 2-x_1$ aus (13) in (12) ein, so folgt

$$2x_1 - x_1^2 = 1,$$

$$x_1 = 1$$

und damit aus (13) und (4)

$$x_2 = 1,$$

$$x_3 = 1.$$

Also kann nur das Tripel (1,1,1) das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen.

II. Es erfüllt offensichtlich dieses Gleichungssystem. Somit hat genau das Tripel (1,1,1) diese geforderte Eigenschaft.

2. Lösungsweg:

Aus (1) folgt $(x_1+x_2+x_3)^3 = 27$, d. h.

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+6x_1x_2x_3+3(x_1x_2(x_1+x_2)+x_1x_3(x_1+x_3)+x_2x_3(x_2+x_3)) = 27.$$

Setzt man hierin (2) und (3) ein und dividiert durch 3, so folgt

$$x_1x_2(x_1+x_2) + x_1x_3(x_1+x_3) + x_2x_3(x_2+x_3) = 6 . \qquad (14)$$

Weiterhin gilt: Jedes Tripel (x_1,x_2,x_3), in dem die Zahl 0 vorkommt, ist nicht Lösung des Gleichungssystems, da es (3) nicht erfüllt. Jedes Tripel (x_1,x_2,x_3), in dem alle Zahlen von 0 verschieden sind und mindestens eine negative Zahl vorkommt, ist ebenfalls nicht Lösung des Gleichungssystems, wie man folgendermaßen zeigen kann: Wäre ein solches Tripel Lösung, wo wären wegen (3) genau zwei der Zahlen negativ, o.B.d.A. etwa $x_1 = -u$, $x_2= -v$, $x_3=w$ mit positiven u,v,w, und nach (1) wäre die linke Seite von (14) die Zahl

$$uv(-u-v) - uw(3+v) - vw(3+u) < 0$$

im Widerspruch gegen (14).

Schließlich gilt: Für jedes Tripel (x_1,x_2,x_3), in dem alle Zahlen positiv sind, ist nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

$$\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3} ,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur im Fall $x_1 = x_2 = x_3$. Daher können nur in diesem Fall die beiden Gleichungen (1) und (3) erfüllt sein, und hiermit folgt aus (1): $3x_1=3$, also $x_1=1$. Somit kann insgesamt nur das Tripel (1,1,1) das Gleichungssystem erfüllen; die Probe zeigt, daß es dies tut.

3B. a) Zum Beweis genügt die Angabe eines Beispiels von fünf Zahlen und der Nachweis, daß die genannte Aussage mit den Zahlen dieses Beispiels gilt. Ein solches Beispiel bilden etwa die Zahlen 5,6,7,8,9; die Aussage für sie kann folgendermaßen bewiesen werden: Für jede Auswahl von drei Zahlen a,b,c aus den fünf genannten Zahlen und für jede Reihenfolge der Bezeichnungen a,b,c dieser drei Zahlen gilt $a \geq 5$, $b \geq 5$ und $c \leq 9$, also $a+b \geq 10 > c$; somit erfüllen die drei Zahlen alle drei für sie formulierbaren Dreiecksungleichungen, folglich existiert ein Dreieck, dessen Seitenlängen die Maßzahlen a,b,c haben.

b) Liegen fünf Zahlen $z_1,\ldots,z_5$ mit der in a) genannten Eigenschaft vor, so kann man insgesamt ebenso viele paarweise nicht kongruente Dreiecke auf die in a) genannte Art erhalten, wie es Mengen aus je drei der fünf Zahlen gibt (denn für je zwei verschiedene dieser Mengen gilt infolge der paarweisen Verschiedenheit von $z_1,\ldots,z_5$: Jedes der beiden erhaltenen Dreiecke hat mindestens eine Seitenlänge, die in dem anderen Dreieck nicht vorkommt; also sind die beiden Dreiecke einander nicht kongruent).

Für die Anzahl dieser Mengen kann entweder als bekannter Sachverhalt der Wert $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$ zitiert werden, oder dieses Ergebnis kann z. B. folgendermaßen erhalten werden: Es gibt ebenso viele der gesuchten Mengen, wie es Möglichkeiten gibt, zwei der fünf Zahlen nicht als Elemente einer solchen Menge auszuwählen. Wenn z_1 eine dieser Zahlen ist, gibt es für die andere genau die vier Möglichkeiten z_2,z_3,z_4,z_5; wenn z_1 nicht, aber z_2 eine dieser Zahlen ist, gibt es für die andere genau die drei Möglichkeiten z_3,z_4,z_5; ... usw. Somit ist die gesuchte Anzahl 4+3+2+1=10.

c) Für jedes Dreieck mit Seitenlängen

$$a < b < c$$

gilt: Wenn das Dreieck nicht spitzwinklig ist, so hat der Winkel, der der Seite der Länge c gegenüberliegt, eine Größe

$$\gamma \geq 90^\circ.$$

Nach dem Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ folgt daraus

$$c^2 \geq a^2 + b^2.$$

Wäre nun keines der in b) genannten Dreiecke spitzwinklig, so müßte, wenn man o.B.d.A.

$$z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5$$

voraussetzt, auch gelten:

$$z_3^2 \geq z_1^2 + z_2^2 > 2z_1^2, \quad z_4^2 \geq z_2^2 + z_3^2 > 2z_2^2,$$

$$z_5^2 \geq z_3^2 + z_4^2 > 2(z_1^2+z_2^2) = (z_1+z_2)^2 + (z_1-z_2)^2 > (z_1+z_2)^2,$$

also $z_5 > z_1 + z_2$ im Widerspruch zur Dreiecksungleichung. Damit ist die Annahme, daß keines der genannten Dreiecke spitzwinklig wäre, widerlegt.

4. I. Wenn k,x,y,z,t natürliche Zahlen sind, für die $k \geq 2$ sowie $1 \leq x,y,z \leq k-1$ und $0 \leq t \leq k-1$ sowie die geforderte Gleichung, d. h.

$$k \cdot x + y + k \cdot z + t = k \cdot y + z \qquad (1)$$

gilt, so folgt: Es gilt

$$k \cdot x + t = (k-1) \cdot (y-z), \qquad (2)$$

wegen $x \geq 1$ und $t \geq 0$ also

$$y - z \geq \frac{k \cdot 1 + 0}{k-1} > 1$$

und daher

$$y - 1 > z. \qquad (3)$$

Wegen $z \geq 1$ gilt folglich

$$y > 2 \qquad (4)$$

und wegen $k-1 \geq y$ demnach

$$k > 3.$$

Gemäß (4) ist also

$$y \text{ eine der Zahlen } 3,4,\ldots,k-1, \qquad (5)$$

gemäß (3) ist

$$z \text{ eine der Zahlen } 1,2,\ldots,y-2. \qquad (6)$$

II. Umgekehrt folgt, wenn $k > 3$ ist und (5), (6) sowie (2) gelten: y und z erfüllen erst recht die Bedingungen $1 \leq y,z \leq k-1$; daher gilt einerseits

$$(k-1) \cdot (y-z) < (k-1) - (k-0) < k^2.$$

Andererseits gilt wegen (6), also (3), auch

$(k-1) \cdot (y-z) > k-1;$

also ist $(k-1) \cdot (y-z)$ eine im Positionssystem der Basis k zweistellige Zahl. Durch (2) sind folglich zu y,z jeweils natürliche Zahlen x,t mit $1 \leq x \leq k-1$, $0 \leq t \leq k-1$ eindeutig bestimmt, und für diese y,z,x,t ist mit (2) auch die geforderte Gleichung (1) erfüllt.

III. Nach I. und II ergibt sich: Für k=2 und für k=3 ist die gesuchte Lösungsanzahl 0; im Fall $k \geq 4$ ist die gesuchte Lösungsanzahl gleich der Anzahl aller derjenigen Paare (y,z), die gemäß (5) und (6) zu bilden sind. Dabei durchläuft z jeweils

$$\begin{array}{ll} \text{für } y = 3 & \text{den Wert } z = 1, \\ \text{für } y = 4 & \text{die Werte } z = 1,2, \\ \dots\dots\dots & \\ \text{für } y = k-1 & \text{die Werte } z = 1,2,\dots,k-3; \end{array} \tag{9}$$

die gesuchte Anzahl beträgt somit

$$1 + 2 + \dots + (k-3)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (k-3) \cdot (k-2).$$

Bemerkung: Die erhaltene Formel bleibt auch für k=2 und k=3 richtig; die hier für $k \geq 4$ formulierte Herleitung kann bei entsprechendem Kommentar auch als Herleitung im Fall k = 3 verstanden werden, nämlich wenn vereinbart wird, daß die in (5) und (9) auftretende Aufzählung 3,4,...,k-1 im Fall $k \geq 3$ eine y-Werte-Anzahl bzw. Zeilen-Anzahl 0 bedeuten soll.

5. In jeder Dreierkette (a,b), (b,c), (c,a) sind a,b,c drei paarweise verschiedene Zahlen; denn wäre a=b, so wären (b,c) und (c,a) zwei gleiche Steine; entsprechend widerlegt man a=c und b=c. Umgekehrt gibt es zu je drei paarweise verschiedenen Zahlen a,b,c genau eine Dreierkette, die diese Zahlen enthält. Weiter gilt:

I. Wenn M = $K_1,\dots,K_7$ eine Menge mit den in der Aufgabe beschriebenen Eigenschaften ist, so folgt:

Da in den Dreierketten $K_1,\dots,K_7$ kein Stein mehrmals auftritt, enthalten sie 21 Steine. Da das Dominospiel aber nur 21 Steine (a,b) mit a = b enthält[1], kommt jeder dieser Steine in (genau)

---

1 Die bis zu dieser Stelle des Lösungstextes verwendeten Aussagen können auch als bekannter Sachverhalt aus 261032 zitiert werden.

einer der Ketten $K_1,\dots,K_7$ vor.
Also enthält eine dieser Ketten, o.B.d.A. die Kette K_1, den Stein (0,1).
Man kann daher eine eventuelle Umbenennung der Zahlen 2,3,4,5,6 so vornehmen, daß

diejenige dieser fünf Zahlen die neue Benennung 2 (1)

erhält, mit der

$$K_1 = (0,1),(1,2),(2,0) \tag{2}$$

ist.
Weiter enthält nun eine der Ketten $K_2,\dots,K_7$, o.B.d.A. die Kette K_2, den Stein (0,3). Da K_2 außerdem keinen der in (2) genannten Steine enthält, folgt somit: In K_2 kommt außer 0 und 3 als dritte Zahl weder 1 noch 2 vor. Man kann daher eine Umbenennung der Zahlen 4,5,6 so vornehmen, daß

diejenige dieser drei Zahlen die neue Benennung 4 (3)

erhält, mit der

$$K_2 = (0,3),(3,4),(4,0) \tag{4}$$

ist. Danach folgt:
O.B.d.A. enthält K_3 den Stein (0,5) und außerdem keinen der Steine in (2), (4), also außer 0, 5 keine der Zahlen 1,2,3,4.
Somit ist

$$K_3 = (0,5),(5,6),(6,0). \tag{5}$$

O.B.d.A. enthält K_4 den Stein (1,3) und außerdem keinen der Steine in (2), (4). Also kann man eine Umbenennung der Zahlen 5,6 so vornehmen, daß

diejenige dieser zwei Zahlen die neue Benennung 5 (6)

erhält, mit der

$$K_4 = (1,3),(3,5),(5,1) \tag{7}$$

ist.
O.B.d.A. enthält K_5 den Stein (1,4) und außerdem keinen der Steine in (2),(4),(7). Somit ist

$$K_5 = (1,4),(4,6),(6,1). \tag{8}$$

O.B.d.A. enthält K_6 den Stein (2,3) und außerdem keinen der Steine in (4), (7). Somit ist

$$K_6 = (2,3),(3,6),(6,2), \tag{9}$$

und für K_7 verbleibt nur

$$K_7 = (2,4),(4,5),(5,2).$$

Also können nur solche Mengen $M = \{K_1,\dots,K_7\}$ die in der Aufgabe genannten Eigenschaften haben, die nach Ausführung von Umbenennungen gemäß (1), (3), (6) die in (2), (4), (5), (7), (8), (9), (10) genannten Ketten enthalten.

II. Jede solche Menge hat diese Eigenschaften, da eine Umbenennung gemäß (3) die Kette (2) nicht ändert und ebenso eine Umbenennung gemäß (6) keine der Ketten (2), (4), (5) ändert, so daß die an M gestellten Forderungen der Aufgabe sich - nach diesen Umbenennungen - aus den Angaben (2), (4), (5), (7), (8), (9), (10) bestätigen lassen.

III. Mit I. und II. ist bewiesen, daß genau alle diejenigen Mengen $M = \{K_1,\dots,K_7\}$, die gemäß (1) - (10) zu erhalten sind, die in der Aufgabe geforderten Eigenschaften haben. Ferner folgt: Je zwei solche Mengen M, M', bei deren Gewinnung gemäß (1) bis (10) zwei unterschiedliche Wahlen in (1) getroffen wurden, sind voneinander verschieden, da diejenige Kette, die nach der zu M führenden Wahl (1) die in (2) genannte Kette K_1 ist, nicht in M' vorkommt. Ebenso folgt: Je zwei Mengen M, M', bei deren Gewinnung zwar dieselbe Wahl in (1), aber unterschiedliche Wahlen in (3) getroffen wurden, sind voneinander verschieden, da die in M gemäß (4) enthaltene Kette K_2 nicht in M' vorkommt. Entsprechend sind auch je zwei Mengen voneinander verschieden, bei deren Gewinnung zwar in (1) sowie in (3) jeweils gleichlautende Wahlen, aber in (6) unterschiedliche Wahlen getroffen wurden.

Somit ergibt sich insgesamt: Man erhält bei allen und nur den $5\cdot 3\cdot 2$ Möglichkeiten, die Wahlen in (1), (3), (6) zu treffen, Mengen mit den in der Aufgabe geforderten Eigenschaften, jede dieser Mengen genau einmal.
Also beträgt die gesuchte Anzahl dieser Mengen

$$5\cdot 3\cdot 2 = 30.$$

6. Es genügt, einen Körper K zu beschreiben und aus seiner Beschreibung herzuleiten, daß er die Eigenschaften (1) bis (4) hat. Ein Beispiel hierfür ist das folgende: K sei der Restkörper, der verbleibt, wenn man von einer Pyramide P = ABCDS vermittels einer geeigneten Schnittebene s eine Pyramide EFGHS abschneidet. Dabei seien P und s gegeben durch ihre Darstellung in Zweitafelprojektion (Abb.), wobei die Aufrißebene und die (noch nicht in die Zeichenebene heruntergeklappte) Grundrißebene zugleich die y,z-Ebene bzw. die x,y-Ebene eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems seien. In diesem Koordinatensystem sei

$$A=(8,4,0),\ B=(14,8,0),\ C=(8,20,0),\ D=(2,8,0),\ S=(8,-4,12).$$

Als Schnittebene s sei die x,z-Ebene gewählt. Für ihre Schnittpunkte E,F,G,H mit den Kanten AS, BS, CS, DS erhält man[1]

$$E=(8,0,6),\ F=(10,0,8),\ G=(8,0,10),\ H=(6,0,8).$$

Für den so definierten Restkörper K gilt in der Tat, wie gefordert:

(1) Die Oberfläche von K besteht genau aus den sechs ebenen Vierecken ABCD (Grundfläche von P in der x,y-Ebene), EFGH (Schnittfläche von P mit der Ebene s), ABFE, BCGF, CDHG, DAEH (Teilflächen der Seitenflächen ABS, BCS, CDS, DAS von P).

(2) Die Vierecke ABCD und EFGH haben die Seitenkanten AB, BC, CD, DA bzw. EF, FG, GH, HE, also keine gemeinsame Seitenkante.

(3) Außer diesen hat der Körper K noch genau die 4 Seitenkanten AE, BF, CG, DH.

(4) Deren Mittelpunkte sind[1]

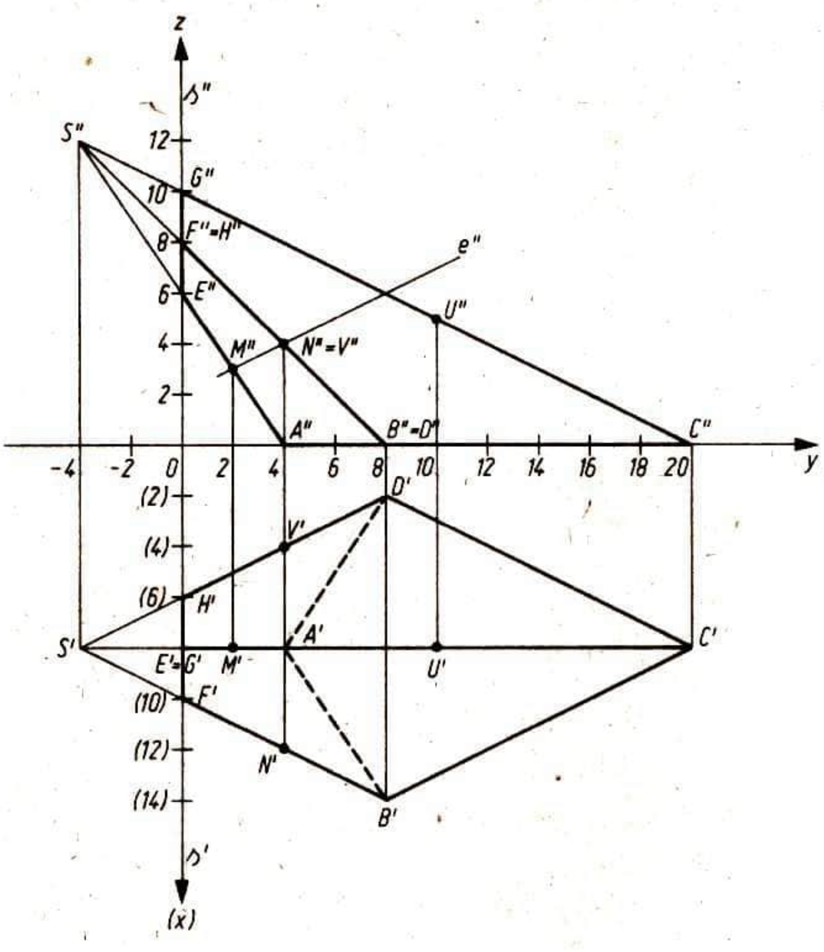
$$M=(8,2,3),\ N=(12,4,4),\ U=(8,10,5),\ V=(4,4,4).$$

Daß diese vier Punkte nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen, kann man z. B. folgendermaßen nachweisen:

---

1 Diese Koordinaten lassen sich mit Hilfe des Strahlensatzes jeweils aus Koordinaten ermitteln, die der Zeichnung entnommen werden können, oder aber rein rechnerisch (mit Formeln der analytischen Geometrie aus den Koordinaten von A,B,C,D,S) gewinnen.

Wegen der Gleichheit der Aufrisse N" = V" steht die durch M,N,V gelegte Ebene e senkrecht zur Aufrißebene; bei senkrechter Projektion von e auf die Aufrißebene ergibt sich also eine Gerade e"; sie geht durch M", N". Diese Gerade e" in der y,z-Ebene hat den Anstieg $(4-3) : (4-2) = \frac{1}{2}$. Dagegen hat die Gerade durch N", U" den Anstieg $(5-4) : (10-4) = \frac{1}{6}$. Also liegt U" nicht auf e"; folglich kann auch U nicht auf e liegen.



Sommerlager Bad Blankenburg

Auszüge aus der Lagerchronik

10.7.1987

Am Freitag standen wir wie immer 7 Uhr auf, frühstückten und wurden danach im Unterricht gestreßt. Das hatten wir überstanden, als es 11.30 Uhr das beliebte und wohlschmekkende Mittagessen gab.

Der Nachmittag sollte für einige nicht uninteressant werden. Gegen 13.15 Uhr trafen sich alle Interessenten für Computerspiele und Lederarbeiten vor der Schule. Wir fuhren mit dem Zug nach Rudolstadt und suchten den Weg zum Pionierhaus. Dort wurden wir von einem älteren Mann empfangen, der eine kurze Vorrede über den Inhalt des Nachmittags hielt und dann jedem viel Glück wünschte. Die Mädchen gingen zu einer Frau vom Pionierhaus. Dort sollten wir unter dem Thema "Lederarbeiten" etwas schönes herstellen. Wir waren von dem ersten Vorschlag der Frau ziemlich enttäuscht, aber fanden zum Schluß doch noch eine Tasche, die allen gefiel. Die genähten Taschen wurden von uns mit einem schönen, selbstentworfenen Muster versehen. Wir waren alle sehr froh über unsere neuen Ausgehtaschen.

Die Jungens erfuhren von dem freundlichen Mann etwas über Computer und durften auch mit ihnen spielen. Gegen 17.30 Uhr waren wir zum Abendbrot alle wieder in der Schule.

Am Abend wurde dann noch wie jeden Tag Pussi, Tischtennis und Volleyball gespielt. Die Nachtruhe beendete offiziell den Freitag für alle.

11.7.1987

Nach dem wie immer hervorragenden Frühstück begann auch an diesem Samstag der Unterricht um 8.00 Uhr. Die 10. Klasse hatte dabei zuerst bei Herrn Scheuermann und danach Ungleichungen bei Ingo. Diese beiden Stunden verliefen planmäßig und ohne größere Schwierigkeiten. Der sich anschlie-

Für zukünftige Entwicklungen im Soft- und Hardware ist die Beachtung des GKS-Konzepts unumgänglich.

Günther Schorr
Sektion Mathematik
Bereich Gerätekybernetik

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: C. Dahmke, J. Dimler, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 27. 7. 1987
Titelbild: M. Torke

ßende Weg zum Speisesaal ließ alle Herzen höher schlagen, denn es gab Schnitzel, Kartoffeln, Gurkensalat und Soße sowie als Nachspeise Erdbeeren. Nach diesem Schmaus schieden sich dann wieder die Geister. Manche vergnügten sich beim Volleyball und ein anderer Teil bereitete das für den Abend vorgesehene Bergfest vor. Letztere konnten dann zu fortgeschrittener Stunde wieder einmal ihren Ideenreichtum unter Beweis stellen. So gehörten neben der Disco auch der "Indianertanz" und der Sketch mit A ndreas Gubsch als "Hauptakteur" zu den Höhepunkten. Weiterhin möchte ich hiermit noch einmal auf die Mühen und Kosten des stellvertretenden Lagerleiters Gutberlet aufmerksam machen, der an diesem Abend für jeden von uns 2 Würste gebraten hat, die von Geschmack und Würze kaum zu übertreffen sein dürften.
Das Bergfest endete dann schließlich mit dem letzten Lied. Dann hieß es nur noch schnell waschen und ins Bett, denn Sonntag früh ging es beizeiten hinaus.

12.7.1987

Am Sonntag führten wir wie in jedem Mathelager unsere große Wanderung durch. Natürlich war an diesem Tag kein Unterricht. Leider mußten wir genauso früh aufstehen wie in der Woche.
Eine Attraktion unserer Wanderung sollte die Bergbahn bei Obstfelderschmiede sein. Deshalb fuhren wir gleich mit dem Zug von Bad Blankenburg aus dorthin und ließen uns mit der Bergbahn nach Lichtenhain befördern. Aufgrund eines starken Andrangs an der Bahn konnten wir wenig vom technischen Prinzip mitbekommen, da im Wagen keine Stecknadel hätte zu Boden fallen können. Trotzdem haben alle die Fahrt gut überstanden und konnten wenigstens die Landschaften sehen.
In Lichtenhain angekommen, übernahm Herr Scheuermann die Führung und es ging querfeldein über Oberweißbach zum Fröbelturm. Hier machten wir eine "15" mit Limo und Selters und wanderten danach zurück nach Lichtenhain, um dort Mittag

zu essen. Die Portionen waren vielleicht für Spatzen gedacht, aber nicht für ausgehungerte "Malas" nach einer anstrengenden Wanderung. Trotzdem hat das Essen allen gut geschmeckt.
Nachdem man uns gesättigt hatte, fuhren wir mit der "Elektrischen" , eine Mischung aus Berliner S-Bahn und Straßenbahn, nach Cursdorf, denn von hier aus führte uns der Weg zum Bahnhof von Katzhütte. Unterwegs hatten wir noch eine feuchte Angelegenheit, da ein Bach zu überqueren war, der auf eine unter Wasser stehende Wiese führte. Das wußte keiner und die ersten mußten in Form von nassen Füßen daran glauben. Aber Herr Krügel rettete die Lage und beschloß, den Bach an einer anderen Stelle zu überqueren. So kamen wir dennoch pünktlich in Katzhütte an und fuhren mit dem Zug zurück. In der Schule angekommen stopfte man sich gleich mit Abendbrot voll.

14.7.1987
Nach der üblichen Morgenhektik (Aufstehen - Waschen - Frühstück) hieß es zum letzten Mal Unterricht. Einige Studenten (ich will hier keine Namen anführen!) versuchten, uns noch krampfhaft das beizubringen, was wir nun schon eine Woche lang nicht verstanden hatten. So gingen wir dann gestreßt zum Mittagessen. Im Anschluß daran kam der Fotograf und knipste unsere "schönen" Gesichter.
Jetzt hieß es für Interessenten: Auf zur Goethe-Gedenkstätte nach Großkochberg!
Die anderen spielten in dieser Zeit Federball, Pussi, Tischtennis oder gingen baden. Einige sangen mit Gitarrebegleitung bekannte Lieder.
Nach unserem vorletzten Abendbrot hier im Mathelager wurde ein Volleyballturnier gegen die Schulmannschaft ausgetragen. Nur unsere kräftigen (?) Betreuer konnten diese "Profimannschaft" bezwingen.
Unsere letzte reguläre Nachtruhe beendete diesen Tag.

Sybill Wolfram , Karsten Hannewald

Aufgaben der Lagerolympiade

OKL 7

1.1 Löse das folgende Kryptogramm !
Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. (Die Lösungsschritte brauchen nicht begründet werden.)

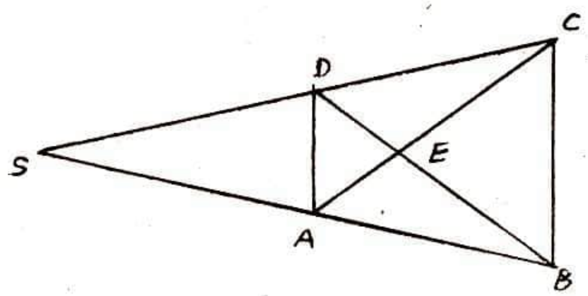
$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{ANI} & + & \mathrm{PAK} & = & \mathrm{KLP} \\ + & & + & & + \\ \mathrm{NLR} & + & \mathrm{NMS} & = & \mathrm{AKT} \\ \hline \mathrm{PTK} & + & \mathrm{LPL} & = & \mathrm{RSS} \end{array}$$

1.2 Ermittle alle sechsstelligen Zahlen der Form XY36XY, die durch 36 teilbar sind ! Die Lösungsschritte sind zu begründen !

2. Professor XYZ war genau so gelehrt wie zerstreut. Er hatte eine große Bibliothek, die sich in drei Räumen befand. Im ersten waren nur Nachschlagewerke, im zweiten nur wissenschaftliche Arbeiten auf seinem Spezialgebiet, im dritten nur wissenschaftliche Zeitschriften. Als er seine berühmte Arbeit "Ueber die Unsterblichkeit der Maikäfer" schrieb, herrschte auf seinem Schreibtisch eine unbeschreibliche Unordnung, und er konnte drei Sachen nicht finden: ein Wörterbuch der Eskimosprache, ein Lehrbuch der Nasenheilkunde und ein Pamphlet seines erbitterten Widersachers, des Doktor Schwätzer. Der Professor war furchtbar aufgeregt und beschuldigte seinen Laboranten, daß dieser das Wörterbuch wahrscheinlich irgendwo zwischen die wissenschaftlichen Arbeiten gestellt habe und das Lehrbuch sowie das Pamphlet zwischen die Zeitschriften. Der Laborant verneinte das und sagte, daß der Professor wie immer diese drei Sachen in ein Regal im ersten Zimmer geworfen habe. Die Frau des Professors drückte die Vermutung

aus, daß sich das Wörterbuch wahrscheinlich zwischen den Zeitschriften befinde, das Lehrbuch und das Pamphlet dagegen zwischen den wissenschaftlichen Arbeiten. Jeder bestand auf seiner Meinung und es entstand ein heftiger Wortwechsel. Die Tochter des Professors, die das alles mit angehört hatte, sagte:"Alles, was ihr behauptet, ist falsch." Sie hatte recht.
Wo befanden sich die vermißten Sachen, in den Bibliothekregalen oder auf dem Schreibtisch ?

3. Für die unten dargestellte Figur gelte $\overline{SA} = \overline{SC}$ und $\overline{SB} = \overline{SD}$.
Beweise, daß dann das Dreieck ΔBDE gleichschenklig ist !



OKL 8

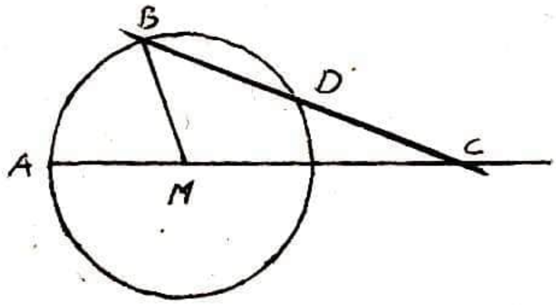
1.1 Bestimme den g.g.T. der drei Zahlen 5525, 1292 und 1071 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. Stelle den größten gemeinsamen Teiler als Linearkombination dieser Zahlen dar !

1.2. Beweise: $ggT(a,b) \cdot kgV(a,b) = a \cdot b$

2. In einem Spiel zeigte man den drei Teilnehmern fünf Zettel, und zwar drei weiße und zwei schwarze Zettel. Dann verband man allen dreien die Augen und klebte jedem einen weißen Zettel auf die Stirn, die schwarzen Zettel vernichtete man. Danach nahm man die Binden wieder ab und erklärte, daß derjenige Sieger sein werde, der als erster die Art seines Zettels angeben könne. Niemand der Spieler sah den Zettel an der eigenen Stirn, dafür aber die

seiner Mitspieler. Nach einiger Zeit kamen alle drei gleichzeitig zu dem Schluß, daß jeder von ihnen einen weißen Zettel habe. Welche Ueberlegungen stellten sie an ? Die Lösung dieser Aufgabe ist sauber zu formulieren !

3. Es seien k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und A ein Punkt, der auf k liegt. Ferner sei C ein Punkt außerhalb von k, und C liege auf der Geraden durch A und M so, daß M zwischen A und C liegt. (Abb.)
Eine durch den Punkt C gehende Gerade, die nicht durch M geht, schneidet k in den Punkten B und D so, daß D zwischen B und C liegt und $\overline{CD} = \overline{MA}$ gelte.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen der Winkel ∢ACB dreimal so groß wie der Winkel ∢ACB ist !



OKL 9

Man bestimme alle n mit $\varphi(n)=1,2,3,4,5,6,14$!

OKL 10

10.1 Nach der Facharbeiterprüfung sollen an einer Schule 36 Lehrlinge mit je einem Buch ausgezeichnet werden. Es stehen 400.-M zur Verfügung, die restlos ausgegeben werden sollen. Es kommen drei Fachbücher in Frage zum Preis von 9.50 , 11.- und 13.75M. Wieviel Bücher von jeder Sorte müssen gekauft werden ?

10.2 Gegeben seien zwei Kugeln K und K' in Zweitafelprojektion

durch die Koordinaten ihrer Projektionen bezüglich
on durch die Koordinaten ihrer Projektionen bezüglich eines rechtwinkligen Koordinatensystems (0,x,y) .
Die x-Achse ist Rißachse.
Mittelpunkte:

$M=(M_1(6,-7),M_2(6,8))$ von K
$M`=(M_1`(11,-6),M_2`(11,6))$ von K`

Die Radien sind $r = 3,5$ für K und $r` = 4,5$ für K`.
Man konstruiere die Zweitafelprojektion eines Quadrates, dessen Echpunkte auf dem Durchschnittskreis der beiden Sphären von K und K`liegen !

10.3 Zur Entscheidung darüber, ob einer Serie von 80 Produkten die Güteklasse "1" zugesprochen werden kann, wird folgendes Stichprobenverfahren benutzt: Die Serie erhält nur dann die Bezeichnung "Güteklasse 1", wenn entweder unter fünf zufällig der Serie entnommenen Produkten kein defektes ist oder unter diesen fünf Produkten genau ein defektes ist, jedoch unter drei weiteren zufällig entnommenen Produkten kein defektes zu finden ist.
(1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält die Serie die Bezeichnung "Güteklasse 1", wenn sie insgesamt zehn defekte Produkte enthält ?
(2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Serie die Bezeichnung "Güteklasse 1" nicht erteilt, obwohl sie nur insgesamt zwei defekte Produkte enthält ?

OKL 11

11.1 Es sei S die Menge aller Strecken s_i in der Ebene. In dieser Menge wird folgende Verknüpfung eingeführt :

$$s_i + s_j = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} := s_{i+j}$$

So sei eine Strecke OP und $N = \langle \overline{OP} \rangle$ die von ihr erzeugte Untergruppe.
(1) Man zeige die Gruppeneigenschaften von S mit der angegebenen Verknüpfung und die Normalteilereigenschaf-

ten für N !

(2) Man konstruiere die Nebenklassen von (S,+) nach N und gebe die zugehörige Faktorgruppe (S,+)/N durch Konstruktion einer geeigneten Verknüpfung der Nebenklassen an !

11.2. Drei nicht kollineare Punkte A, B und C werden durch eine affine Abbildung K abgebildet, so daß

$$K(A) = B \;,\; K(B) = C \;,\; K(C) = A \quad \text{gilt.}$$

(1) Man bestimme einen Fixpunkt der Abbildung !

(2) Man beweise, daß keine weiteren Fixpunkte existieren !

11.3 (1) Man ermittle die Menge aller reellen Zahlen a, für die die Ungleichung

$$\sin^8 x + \cos^8 x \leq a$$

reellwertige Lösungen hat !

(2) Wieviele Winkel $x \in (0, 2\pi)$ gibt es für den Fall der Gleichheit, wenn $a = a_{min}$ belegt wird ?

Preisaufgaben

T 37 In einem Punkt A in der Ebene P liege eine nach allen Seiten strahlende Lichtquelle. Ueber der Ebene sei ein Hohlspiegel angebracht, welcher die Form einer Halbsphäre mit dem Radius 1 hat. Die Spiegelseite des Hohl-
1 spiegels sei der Ebene zugewandt. Die Symmetrieachse der Halbsphäre steht senkrecht auf der Ebene und verläuft durch den Punkt A.

Bekannt ist noch, daß der kleinste Winkel, unter dem die von der Lichtquelle ausgesandten und vom Hohlspiegel reflektierten Strahlen auf der Ebene auftreffen, 15° beträgt.

Wie hoch über der Ebene befindet sich der Hohlspiegel und welchen Radius hat die Kreisfläche auf der Ebene, auf der die reflektierten Strahlen auftreffen?

T 38 Die Fassungsvermögen dreier quaderförmiger Gefäße A, B, C verhalten sich wie 1 : 8 : 27 . In ihnen befinde sich Wasser im Verhältnis 1 : 2 : 3 .
Nach dem Ausgleichen der Wasserstände in den Gefäßen durch Schütten von Wasser aus A in B und danach aus B in C werde vom C nach B 900/7 Liter und dann vom B nach A soviel Wasser geschüttet, daß der Wasserstand in A zweimal so hoch ist wie in B.
Nach diesen Operationen befindet sich in A 100 Liter mehr Wasser als vor diesen Umschüttungen.
Wieviel Wasser enthielt jedes Gefäß am Anfang?

1

T 39 Man löse die Gleichung

$$\cos(\pi x/31)\cdot\cos(2\pi x/31)\cdot\cos(4\pi x/31)\cdot\cos(8\pi x/31)\cdot$$
$$\cdot\cos(16\pi x/31) = 1/32$$

1

T 40 Показать, что если плоскость, проведенная через концы трех ребер параллелепипеда, исходящих из одной вершины, отсекает от параллелепипеда правильный тетраэдр, то параллелепипед можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник.

1

T 41 Es ist ein rechtwinkliges Dreieck mit gegebener Länge der Hypothenuse und gegebener Länge der Winkelhalbierenden des rechten Winkels zu konstruieren.

2

T 42 Einem Kreis mit bekanntem Radius R soll ein Dreieck ABC mit vorgegebenen Winkel ABC und vorgegebener Länge der Seite AC umbeschrieben werden, so daß der Kreis der Inkreis des Dreiecks ist.
Man finde die Beziehung, die zwischen der Größe des Winkels und der Länge der Seite bestehen muß, um die Lösbarkeit der Aufgabe zu garantieren.

1

Einsendeschluß: 1. 12. 1987

Einführung in die Computergrafik

In der heutigen Zeit ist der breite Einsatz unterschiedlicher Rechentechnik in allen Lebensbereichen des Menschen zu beobachten. Die Computer - Anwendungen erstrecken sich von Forschung, Lehre, Produktion ,Konstruktion, Bankwesen ... bis zum Einsatz des Homecomputers. Durch die unterschiedlichen Anforderungen der einzelnen Gebiete erhielt die Entwicklung spezifischer Hardwarebausteine und neuer Softwarekomponenten einen deutlichen Vorschub. Die Verarbeitung von künstlichen oder realen Bildern auf dem Computer ist ein solches Spezialgebiet. Gegenwärtig existieren in der ganzen Welt für die Verarbeitung von Bildinformationen eine unübersehaubare Vielfalt von grafischer Peripherie (Bildschirmgeräte als Vektor- bzw. Rasterdisplays, Plotter, Digitalisiergeräte, Grafikdrucker, ...). Die einsetzbaren Grafiksysteme (Software) waren bzw. sind oft stark geräteabhängig (bezogen auf die angeschlossenen grafischen Ein- und Ausgabegeräte) und natürlich für die spezielle Anwendung konzipiert.
Die Computer-gestützte Verarbeitung von Bildern kann heute in drei Hauptgebiete untergliedert werden :

- generative Grafik
- Bildverarbeitung (IMAGE ANALYSIS)
- Bildanalyse (SCENE ANALYSIS)

Dabei beschäftigt sich die Bildverarbeitung mit abgetasteten, digitalisierten Bildern (Fotos, Satellitenbilder) und versucht durch spezielle Verfahren (z.B. künstliche Färbung, Kontrastmanipulation, Konturerfassung) eine Bildverbesserung (Bilderkennung) zu erreichen. Die Bilder liegen vor und nach der Bearbeitung in Form von Pixelmengen vor (Pixel - Bildpunkt auf Rasterdisplays, der unterschiedliche Färbung bzw. Helligkeitswerte annehmen kann.)

Die Bildanalyse versucht aus einem unstrukturierten Bild bekannte Urbilder (bekannte grafische Objekte) wiederzuerkennen und eine formale Beschreibung über Struktur, Lage, Größe oder ähnliches auszugeben (z.B. Schrifterkennung). In der generativen Grafik (auch Computergrafik) werden künstliche Bilder aus grafischen Darstellunselementen (Punkt, Polygonzug, Text-Zeichen, ...) erzeugt. Das zu bearbeitende Bild liegt als grafische Datenstruktur vor und kann vom Rechner erzeugt, manipuliert und auf der grafischen Peripherie dargestellt werden.

Die Computergrafik ist ein relativ junges Gebiet innerhalb der Informatik, das in den letzten Jahren in vielen Gebieten der Forschung und Volkswirtschaft eine breite Anwendungspalette gefunden hat:

- CAD/CAM - Systeme zum Erarbeiten von technischen Darstellungen in Maschinenbau, Bauwesen, Leiterplattenentwurf, Schaltkreisentwurf

Einsatz zur Auswertung von Meßprotokollen aus Technik, Medizin, Simulation, ... , zur Ueberwachung von automatisierten Anlagen, ...

- Darstellung von Diagrammen, Funktionen, Uebersichtsbildern

Grundlegende Prinzipien für ein standardisiertes Grafiksystem

Ausgehend von einfachen einfarbigen Kurvendarstellungen auf Plottern und primitiven Bildschirmgeräten erwuchs schnell die Forderung nach leistungsstärkeren spezialisierten Anwendungsmöglichkeiten. Die Hardwarehersteller reagierten mit der Entwicklung mehrfarbiger hochgenauer Geräte, farbtüchtiger Bildschirmgeräte (Rasterdisplays, Vektordisplays,...). Die Vielfalt der Geräte und ihre unterschiedliche Intelligenz hatten zur Folge, daß die Software zum Betreiben der

grafischen Peripherie sehr eng an die jeweilige Hardware gebunden und ihr Austausch praktisch unmöglich war. Dieses Problem ist auch heute weltweit noch nicht überwunden.
Erfolgte zuerst vorwiegend der Einsatz von passiven grafischen Systemen (nur Ausgabe der Bildinformation →Plotter), so zeigte sich später immer mehr die Notwendigkeit für interaktive grafische Systeme (Mensch kann am grafischen Display über spezielle grafische Eingabegeräte wie Lichtstift, Rollkugel usw. das Bild direkt manipulieren).
Zusammenfassend kann man feststellen, daß die Vielfalt und Kompliziertheit der eingesetzten Grafiksoft- und Hardware ständig zugenommen hat. Die starke Anwendungs- bzw. Geräteabhängigkeit der Systeme erlaubte keinerlei Datenaustausch über die eigene Anwendung hinweg, der Austausch der Bearbeiter und Entwickler war aufgrund der unterschiedlichen Systemphilosophie ebenfalls sehr schwer.

Seit etwa 1975 wurden internationale Untersuschungen mit dem Ziel, Vorschriften für ein leistungsfähiges standardisiertes interaktives Grafiksystem zu erstellen, durchgeführt.
Die Erfahrungen aus der Arbeit mit den bisherigen Grafiksystemen ließen folgende allgemeine Prinzipien für die Standardisierung erkennen :

- Das Grafiksystem muß in drei Software-Schichten unterteilt werden, um eine geräteunabhängige und anwenderunabhängige Konzeption zu erlangen. Man unterscheidet dabei die anwenderorientierte Schicht (1) mit einer Anwenderschnittstelle (Grafikaufrufe für den Anwender, z.B. in der Programmiersprache FORTRAN), den internen grafischen Kern - Schicht (2) - zur Ausführung aller Grafikoperationen über einer geeigneten grafischen Datenstruktur und die geräteorientierte Schicht (3) (Geräteinterface) zur Umsetzung aller Grafikoperationen auf der angeschlossenen grafischen Peripherie.

- Für die Langzeitspeicherung und Uebertragung von Bildern muß eine geeignete Datenstruktur, das METAFILE als verbindlicher Standard konzipiert werden.

- Der grafische Kern (Schicht 2) muß alle zwei- und dreidimensionalen Darstellungselemente, alle geometrischen Operationen (Transformationen, Abschneideoperationen, , perspektivische Darstellungen, ...), alle Steuerfunktionen des Systems sowie die grafische Ein- und Ausgabe verwalten und die Verbindung zum Anwender über das Nutzerinterface (Schicht 1) bzw. zum grafischen Gerät (WORKSTATION) über das Geräteinterface (Schicht 3) herstellen.
- Das Geräteinterface (Schicht 3) ist so aufzubauen, daß trotz aller spezifischen Eigenschaften der unterschiedlichen Geräte die Kern - Funktionen in gleicher Weise dargestellt werden. Damit ist der Nutzer eines solchen Systems nicht mehr gezwungen, sich mit der speziellen Geräteansteuerung zu befassen.

Die Funktionen des GKS (Graphical Kernel System)

Seit 1984 existiert ein internationaler Standard (wird in der DDR als TGL übernommen) über die Struktur und die Wirkungsweise des "Graphical Kernel System" (GKS).
Die funktionelle Beschreibung dieses Systems für zweidimensionale Darstellungen soll nun in grober Form skizziert werden.
Der gesamte Umfang des Standards zur funktionellen Beschreibung des GKS umfaßt 280 Seiten. Im Rahmen dieses Artikels werden nur einzelne Funktionenklassen der Anwenderschnittstelle (Schicht 1) auszugsweise betrachtet.

Darstellungselemente des GKS (Outputprimitive)

Im GKS erhält der Nutzer über bereitgestellte Routinen (z.B. FORTRAN-Funktionen bzw. Unterprogramme) die Möglichkeit, beliebige Bilder mit folgenden Darstellungselementen (Primitiven) aufzubauen :

- Polyline
- Polymarker
- Text
- FILL AREA
- CELL AREA
- GENERALIZED DRAWING PRIMITIVE (GDP)

Mehrere PRIMITIVE können in einem SEGMENT zusammengefaßt werden.

Polyline:

GKS generiert eine Menge von verbundenen Linien, die durch eine Punktfolge definiert sind (Polygonzug).

Polymarker:

GKS generiert ausgewählte Symbole (•,+,*,o,...) zentriert an vorgegebenen Stellen (Positionen).

Text:

GKS generiert eine Zeichenfolge (Text), die an einer vorgegebenen Position beginnt.

FILL AREA:

GKS generiert ein Flächenstück, das durch ein Polygon begrenzt ist. Dieses Flächenstück kann mit einer Farbe, einem Muster bzw. einer Schraffur versehen werden.

CELL AREA:

GKS generiert einen Pixelbereich (Leuchtpunktmenge) mit bestimmten Farbgebungen.

GENERALIZED DRAWING PRIMITIVE (GDP):

GKS kann über dieses Darstellungselement spezielle (nicht standardgemäße) Hardwarefähigkeiten der angeschlossenen Grafikgeräte benutzen (z.B. Darstellung eines Kreises o.ä.).

Attribute für Primitive

Jeder Primitive können im GKS geometrische und nichtgeometrische Attribute sowie Identifikatoren ("Namen-Attribute") zugeordnet werden. Geometrische Attribute legen beispielsweise die Schriftrichtung und die Zeichengröße für TEXT oder die Symbolgröße für POLYMARKER fest. Die nichtgeometrischen Attribute bestimmen die Art der Darstellung, z.B. den Linientyp und die Farbe.
Die PICK-Identifikatoren versehen die entsprechenden Darstellungselemente mit einem Namen (Code), der zur Rückerkennung der Primitive im kompletten Bildern dient (z.B. durch das Antippen mit dem grafischen Eingabegerät Lichtstift).
Für jede Primitiv-Art können mehrere Attribut-Bündel (Zusammenfassung aller Attributtypen) vordefiniert werden. Die aktuelle Zuordnung geschieht über einen Index(Bündelnummer) und kann beliebig oft variiert werden. Durch dieses Attributkonzept können auch fertige Bilder sehr schnell in anderer Art repräsentiert werden (andere Farben, andere Linientypen,...).

WORKSTATION

GKS basiert auf dem Konzept der abstrakten grafischen Arbeitsstationen (WORKSTATION), d.h. es werden folgende Typen von Arbeitsstationen unterschieden:

- OUTPUT WORKSTATIONS
  (grafische Ausgabegeräte: grafische Bildschirmgeräte, Plotter, Drucker)
- INPUT WORKSTATIONS
  (grafische Eingabegeräte: Lichtstift, Rollkugel, spezielle Tastaturen,...)

Die Verwendung von grafischen Eingabegeräten ist bei interaktiven Grafiksystemen die effektivste Dialogvariante. Meistens werden vom Eingabegerät Werte im Hardware-Koordinatensystem (DC) geliefert, die im GKS-Kern durch die inverse Normalisierungstransformation überführt werden.

- OUTIN WORKSTATIONS
  (grafische Ein- und Ausgabegeräte)
  Im GKS werden noch die Arbeitsstationen WISS (WORKSTATION INDEPENDENT SEGMENT STORAGE), der arbeitsstationsunabhängige Segmentspeicher zur Verwaltung von Segmenten, sowie MO (METAFILE OUTPUT) und MI (METAFILE INPUT) für die Langzeitspeicherung von Bilddaten unterstützt. Mit Hilfe dieser können Bild- und andere Anwenderdateien auf externen Speichermedien (Magnetplatten, Disketten, Magnetbänder...) geschrieben werden und auch wieder gelesen bzw. verarbeitet werden.
  An einem GKS-System können mehrere Arbeitsstationen unterschiedlicher Typen gleichzeitig betrieben werden. Die korrekte Ansteuerung der angeschlossenen Geräte wird durch das Geräteinterface (Schicht 3) garantiert. Da die anschließbare Grafikhardware sehr unterschiedliche Leistungsmerkmale besitzen kann, müssen eventuell fehlende Hardwarefunktionen im Geräteinterface (Schicht 3) durch Software realisiert werden.

Koordinatensysteme und Transformationen

Im GKS kann der Anwender sein Bild in seinem eigenen Koordinatensystem aufbauen (z.B. technische Zeichnungen in mm, Landkarten in km,...). Dieses Nutzerkoordinatensystem wird als World Coordinate System (WC) bezeichnet. Um alle möglichen Anwenderprobleme in gleicher Weise behandeln zu können, wird im GKS eine Normalisierung (NORMALIZATION TRANSFORMATION) durchgeführt. Dabei legt der Anwender ein WINDOW (Fenster: Rechteck bei 2D -, Quader bei 3D - Darstellungen) im WC fest, das dann in einem normalisierten Koordinatenraum (Normalized device coordinate, NDC) abgebildet wird. Die Koordinatenbereiche im NDC liegen im Intervall [0,1]. Bildelemente, die außerhalb des Fensters (im WC) liegen, werden an den Fenstergrenzen abgeschnitten. Nach der NORMA-

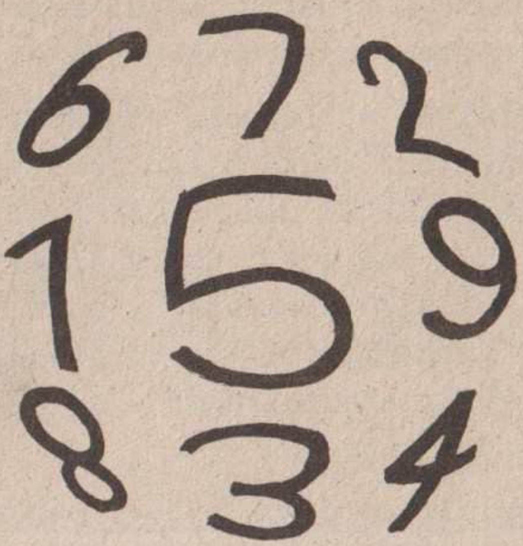
LIZATION TRANSFORMATION erfolgt die WORKSTATION TRANSFORMATION, d.h. die Koordinatentransformation vom NDC in die Gerätekoordinaten (DC, Hardwarekoordinaten) des angeschlossenen grafischen Ausgabegerätes. Mit diesen Koordinatenwerten werden nun die Bildelemente auf dem Bildschirm, dem Plotter, ... dargestellt. Die hier dargestellte Vorgehensweise ist stark vereinfacht, da die exakte Beschreibung aller Koordinatenmanipulationen im GKS den Rahmen dieses Artikels sprengen würde.
Zusätzlich zu diesen Transformationen gibt es die Möglichkeit, Segmente (Zusammenfassung von inhaltlich zusammengehörenden Primitiven) mit speziellen Segmenttransformationen zu manipulieren.

Zusammenfassung

Mit der Festlegung des GKS-Standards ist eine solide Grundlage für die Computergrafik geschaffen worden, die folgende positiven Merkmale besitzt:

- Festlegung einheitlicher grafischer Fachbegriffe
- Bereitstellung einheitlicher Anwender- und Geräteschnittstellen
- Behandlung der Grafikgeräte als abstrakte Arbeitsstationen
- Austauschbarkeit der Anwenderprogramme und Bilddaten
- einheitliche Koordinatentransformationen
- einheitliches Dateiformat (METAFILE) für Langzeitspeicherungen .

Der Standardisierungsprozess ist für die 2D-GKS-Implementationen abgeschlossen. Für die Verarbeitung von 3D-Bildern existiert ein Standardentwurf.
International werden viele GKS-Funktionen (z.B. Koordinatentransformationen) schon von spezieller Hardware in den Grafikgeräten gelöst, worin sich die wachsende Verbreitung der GKS-Idee ausdrückt.



wurzel 9 · 87

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

21. Jahrgang ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Ein Computer lernt TIC-TAC-TOE [1]

Viele Leser der WURZEL werden sicher schon mit der Programmiersprache BASIC vertraut sein und auch die Möglichkeit besitzen, z. B. in entsprechenden Arbeitsgemeinschaften ihre Kenntnisse auf einem Kleincomputer umzusetzen.

Im vorliegenden Artikel wollen wir ein BASIC-Programm entwikkeln, das uns gestattet, gegen einen Computer "TIC-TAC-TOE" (auch bekannt unter "KREUZE und NULLEN") zu spielen. Doch der absolute Knüller ist, daß unser Computer beim Spielen lernt[2]. Anfangs kennt er nur die Spielregeln, doch während des Spiels modifiziert er in Abhängigkeit vom Spielausgang seine Strategie und mit wachsender "Spielerfahrung" - d. h. Anzahl der Spiele - erhöht sich seine Gewinnquote.

Zunächst zu den Spielregeln von "TIC-TAC-TOE"

Zwei Spieler wählen je ein Zeichen "X" (Kreuz) oder "O" (Null). Auf einem quadratischen Spielfeld mit 3x3 Feldern wird von den Spielern abwechselnd in ein freies Feld ihr Zeichen "X" oder "O" eingezeichnet. Es gewinnt, wer zuerst drei gleiche Zeichen in einer Reihe, Spalte oder Diagonalen markiert hat. Ergibt sich nach Belegung aller Felder kein Sieger, endet das Spiel unentschieden.

Auf dem Bildschirm wird das Spielfeld wie folgt dargestellt[3]:

```
1  2  3
4  5  6
7  8  9
```

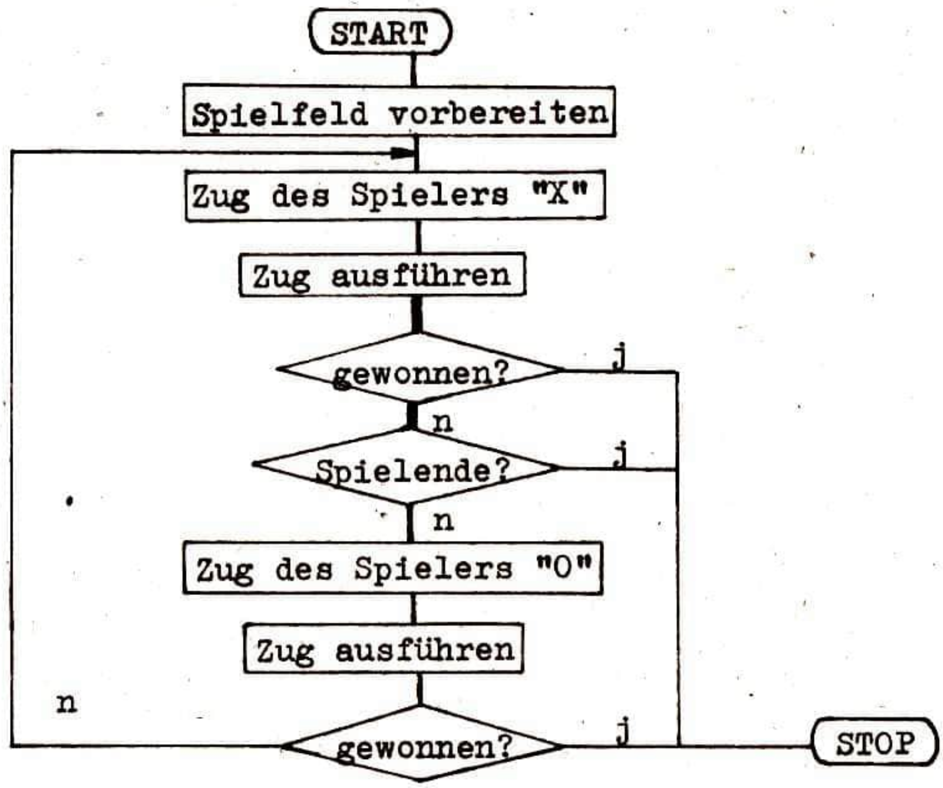
---

1) Dieses Spiel ist ein Standardbeispiel in einführenden Büchern über künstliche Intelligenz.

2) Unter lernen verstehen wir einen informationsverarbeitenden Prozeß, durch den ein biologisches oder technisches System Erfahrungen erwirbt, die beim künftigen Verhalten berücksichtigt werden können.

3) Auf ausschmückendes Beiwerk (z. B. eine gefälligere Spielfelddarstellung) müssen wir im Interesse der Programmlänge verzichten.

Ein Spieler bestimmt seinen Zug durch Angabe einer Zahl F ($1 \leq F \leq 9$). Das entsprechende Feld wird dann durch das Zeichen des Spielers "X" oder "O" überschrieben. Wir vereinbaren, daß stets "X" beginnt.
Um eine hohe Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden wir ausgiebig von der Unterprogrammtechnik Gebrauch machen.
Unterprogramme mit häufigem Aufruf werden möglichst weit vorn im Programm angelagert, um die Programmabarbeit zu beschleunigen. Unter diesem Gesichtspunkt wurden die Adressen der nun folgenden Unterprogramme gewählt.
Der folgende Datenflußplan gibt eine Übersicht der zu behandelnden Teilprobleme beim Spielablauf von "TIC-TAC-TOE".



Da das Spielfeld 9 Felder besitzt, kann das Spielende nur nach einem Zug des Spielers "X" erfolgen.
Die Stellung auf dem Spielfeld wird im Variablenfeld A(1),...,A(9) abgespeichert.
Wir vereinbaren

$$A(F) = \begin{cases} -1, & \text{falls Feld F mit "O" besetzt} \\ 0, & \text{falls Feld F nicht besetzt} \\ 1, & \text{falls Feld F mit "X" besetzt} \end{cases}$$

d. h. der Spieler "O" wird durch -1 und der Spieler "X" durch 1 dargestellt.

Beispiel:

```
                 X 2 0                            A(1)= 1,A(2)= 0,A(3)=-1
Der Stellung     X 0 6  entspricht demnach        A(4)= 1,A(5)=-1,A(6)= 0
                 0 8 X                            A(7)=-1,A(8)= 0,A(9)= 1.
```

Zu Beginn eines Spieles muß also A(F)=0 für F=1,...,9 gesetzt werden. Da wir später auch die Reihenfolge der Züge wissen wollen, benötigen wir ein weiteres Variablenfeld R(1),...,R(9), um diese Informationen abzuspeichern. Wir setzen

R(Z) = F,

d. h. R(Z) gibt an, welches Feld F beim Zug Nr. Z belegt wurde.

Kommen wir nun zu den einzelnen Unterprogrammen.

```
2400 ! SPIELFELDVORBEREITUNG
2410 PAPER7:WINDOW 13,19,5,11:CLS
2420 PRINT AT (13,5);"1  2  3"
2430 PRINT AT (16,5);"4  5  6"
2440 PRINT AT (19,5);"7  8  9"
2450 FOR F=1 TO 9
2460 A(F)=0
2470 NEXT
2480 WINDOW:PAPER1
2490 RETURN
```

Erläuterung:

Das UP druckt das Spielfeld auf dem Bildschirm aus und setzt entsprechend die zugehörigen Werte des Feldes A(1),...,A(9) gleich Null.

Da die Dimension des Feldes A(F) kleiner als 10 ist, braucht es nicht extra vereinbart werden.

Zukünftig soll der Stringvariablen SP immer das Zeichen eines Spielers "X" oder "O" und der Variablen SP die entsprechende zugehörige Zahl 1 oder -1 zugeordnet sein. Weiterhin gibt Z immer die Zug-Nr. im laufenden Spiel an (1 ≤ Z ≤ 9).

```
800 !ZUGAUSFUEHRUNG
810 J=INT((F-1)/3)+1: I=F-3*(J-1):COLOR 0,7
820 PRINT AT (10+3*J,2+3*I);SP
830 A(F)=SP: R(Z)=F:COLOR 7,1
840 RETURN
```

Erläuterung:

Das UP erfüllt zwei Aufgaben. Erstens wird das Feld F ($1 \leq F \leq 9$) des Spielfeldes mit dem Zeichen SP$ überschrieben (vgl. Zeilen 810 und 820) und zweitens wird die dadurch veränderte Stellung im Variablenfeld A(F) und die Zugreihenfolge im Variablenfeld R(Z) registriert (vgl. Zeile 830). Noch einige Erläuterungen zu erstens: Aus der Angabe der Feld-Nr. F muß zunächst die Printposition für das Zeichen SP$ ermittelt werden. Zu diesem Zweck numerieren wir die Spalten und Zeilen des Spielfeldes jeweils von 1 bis 3. Dann berechnet sich die Nummer des Feldes, das sich in der Spalte I und in der Zeile J befindet, durch

$$F = 3*(J-1) + I.$$

Ist F vorgegeben, bestimmen sich I und J sofort gemäß Zeile 810 und hieraus ergibt sich die Printposition nach Zeile 820.

Als nächstes soll der Computer in die Lage versetzt werden, ausgehend von einer Stellung des Spielfeldes zu testen, ob ein Spieler gewonnen hat. Dazu benötigt er ein Datenfeld D(1),...,D(24), das alle Gewinnstellungen beschreibt. Die Bereitstellung fester Datensätze erfolgt im UP "Initialisierung"[1].

```
3500 REM INITIALISIERUNG
3510 DIM D(24)
3520 DATA 1,2,3,4,5,6,7,8,9
3530 DATA 1,4,7,2,5,8,3,6,9
3540 DATA 1,5,9,3,5,7
3550 FOR J=1 TO 24
3560 READ D(J)
3570 NEXT
3580 RETURN
```

1) initialisieren - beginnen, anfangen

Erläuterung:

Über den DATA-READ-Befehl werden den Feldvariablen D(J) gewisse Werte zugewiesen, deren Bedeutung man sich folgendermaßen klarmachen kann.

D(J),D(J+1),D(J+2) stellen
für J=1,4,7 die Nummern der Felder einer Reihe
für J=10,13,16 die Nummern der Felder einer Spalte
für J=19,22 die Nummern der Felder einer Diagonalen
dar.

```
700 ! GEWINNTEST
710 GW=0:J=-2
720 J=J+3: IF J>23 THEN RETURN
730 U=A(D(J)): V=A(D(J+1)):W=A(D(J+2))
740 IF U=0 THEN GOTO 720
750 IF U=V AND V=W THEN GW=U: ELSE GOTO 720
760 RETURN
```

Erläuterung:

Es wird nacheinander die Belegung aller Reihen, Spalten und Diagonalen überprüft. Bei gleicher Belegung verschieden von Null (vgl. 740 und 750) hat man eine Gewinnstellung ermittelt.

Falls GW=-1 hat "O" gewonnen.
Falls GW=0 bisher kein Gewinner.
Falls GW=1 hat "X" gewonnen.

Die einzelnen"Spielerpersönlichkeiten" müssen über entsprechende Unterprogramme realisiert werden.

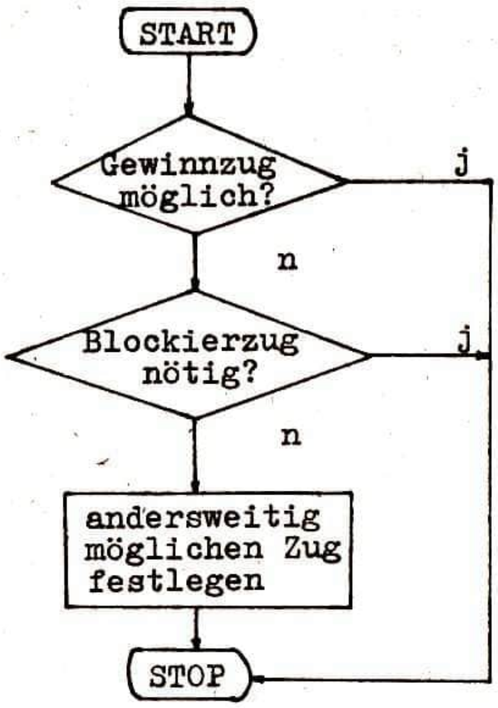
Betrachten wir zur Einstimmung den Spieler "Homo Sapiens", der schließlich auch am "TIC-TAC"-Spiel teilnehmen soll und seinen Zug über einen INPUT-Befehl eingibt.

```
1900 !ZUG H.SAPIENS
1910 LOCATE 28,5: INPUT "IHR ZUG?"; F
1920 IF F<1 OR F>9 OR A(F)<>0 THEN GOTO1910
1930 RETURN
```

Erläuterung:

Zeile 1920 testet auf unerlaubte Züge des H. Sapiens, wie z.B. unfaires Überschreiben eines schon belegten Feldes.

Um allerdings über den Computer einen Zug festlegen zu können, muß dieser die Spielregeln beherrschen. Das wird über folgenden Datenflußplan realisiert.



Wie kann nun ein Gewinn- oder Blockierzug[1] ermittelt werden?

```
600 ! GEWINNZUG
610 J=1
620 U=A(D(J)): V=A(D(J+1)): W=A(D(J+2))
630 IF U=V AND W=0 AND U=P THEN F=D(J+2): RETURN
640 IF V=W AND U=0 AND V=P THEN F=D(J): RETURN
650 IF W=U AND V=0 AND W=P THEN F=D(J+1): RETURN
660 IF J<21 THEN J=J+3: GOTO 620
670 F=0: RETURN
```

<u>Erläuterung:</u>

Die Variable P habe den Wert 1 oder -1 und repräsentiert somit den Spieler "X" oder "O". Nacheinander wird in der Zeile

---

1) Unter einem <u>Gewinnzug</u> verstehen wir einen Zug, bei dem ein Spieler eine Zeile, Spalte oder Diagonale mit seinem Zeichen so vervollständigen kann, daß er gewinnt. Ein <u>Blockierzug</u> vereitelt einen Gewinnzug des Gegners.

620 den Variablen U, V, W die Belegung bzgl. aller Reihen, Spalten und Diagonalen zugeordnet. In den Zeilen 630 bis 650 wird überprüft, ob je zwei Felder die gleiche Belegung haben, das dritte Feld jedoch noch unbesetzt ist und ob die Belegung der besetzten Felder mit P übereinstimmen. Falls dieser Fall eintritt, hat man einen Gewinnzug F für den Spieler,dem P entspricht, ermittelt, andernfalls setzt man F=0.

```
500 ! GEWINN-BLOCKIERZUG
510 IF Z<4 THEN F=0: RETURN
520 P=SP
530 GOSUB 600
540 IF F<>0 THEN RETURN
550 P=-P
560 GOSUB 600
570 RETURN
```

Erläuterung:

In Zeile 530 wird ein Gewinnzug für den Spieler,dem der Wert von SP entspricht, gesucht. Falls es keinen gibt, wird wegen Zeile 550 in Zeile 560 ein Gewinnzug für den Gegner (d. h. ein Blockierzug) gesucht. Gewinn- bzw. Blockierzüge sind erst ab dem vierten Zug möglich.

Falls keiner ermittelt wird (F=0!), muß andersweitig ein möglicher Zug festgelegt werden.

Das ist dann die entscheidende Stelle, wo der Computer hinzulernen kann!

Zunächst wollen wir uns aber darauf beschränken, daß der Computer - ohne Strategie - einfach aus den verbleibenden möglichen Zügen einen zufällig "auswürfelt".

```
1700 ! ZUFALLSZUG
1710 K=0
1720 FOR F=1 TO 9
1730 IF A(F)=0 THEN K=K+1: H(K)=F
1740 NEXT
1750 Y= INT(RND(1)*K)+1
1760 F=H(Y)
1770 RETURN
```

Erläuterung:

Das Variablenfeld H(1),...,H(9) dient als Hilfsfeld, um die Nummern aller freien Felder (mögliche Züge) zu speichern (vgl. Zeilen 1710 bis 1740). Aus den K freien Feldern wird zufällig eine Zahl Y zwischen 1,...,K ermittelt (vgl. Zeile 1750) und das Feld des nächsten Zuges durch Zeile 1760 festgelegt.

Jetzt können wir das UP für den ersten über den Computer realisierten Spieler "Mr. Caos" (weil er caotisch spielt und die möglichen Züge nur auswürfelt) zusammenstellen.

```
1800 ! ZUG MR. CAOS
1810 GOSUB 500
1820 IF F<>0 THEN RETURN
1830 GOSUB 1700
1840 RETURN
```

Erläuterung:

In Zeile 1810 wird ein Gewinn- oder Blockierzug gesucht. Falls es keinen gibt, wird ein möglicher Zug in Zeile 1830 zufällig bestimmt.

Eigentlich wäre jetzt höchste Zeit für ein Spielchen zwischen H. Sapiens und Mr. Caos. Doch etwas Geduld ist noch vonnöten. Wir fassen gemäß des Datenflußplanes von Seite 2 den Spielablauf zu einem UP zusammen.

```
                                        Bemerkungen
2000 ! SPIELAUFFUEHRUNG
2010 GOSUB 2400                       ; Spielfeldvorbereitung
2020 Z=0
2030 SP=1: SP$="X": Z=Z+1
2040 ON UX GOSUB 1900, 1800           ; Zug des Spielers "X"
2050 GOSUB 800                        ; Zugausführung
2060 GOSUB 700                        ; Gewinntest
2070 IF GW=1 THEN RETURN              ; Abbruch falls "X" gew.
2080 SP=-1: SP$="O": Z=Z+1
2090 IF Z>9 THEN RETURN               ; Spielende?
2100 ON UO GOSUB 1900, 1800           ; Zug des Spielers "O"
2110 GOSUB 800                        ; Zugausführung
```

```
2120 GOSUB 700                  ; Gewinntest
2130 IF GW=-1 THEN RETURN       ; Abbruch, falls "O" gew.
2140 GOTO 2030                  ; Wdhlg. des Zyklus
```

Erläuterung:

Vor Aufruf des UP "Spielausführung" werden durch entsprechende Wahl der UP-Nr. UX und UO die Spieler festgelegt. Das Spielergebnis wird durch GW signalisiert.

Zum Beispiel: UX=1, UO=2 bewirkt, daß H. Sapiens mit "X" gegen Mr. Caos mit "O" spielt, während UX=2, UO=2 bewirkt, daß Mr. Caos gegen sich selbst spielt.

Jetzt kommt es nur noch darauf an, das TIC-TAC-Programm möglichst komfortabel zu gestalten. Die Zusammenstellung der Spieler (Spielerauswahl) und Spielauswertung realisieren wir ebenfalls über Unterprogramme.

```
3000 REM SPIELERAUSWAHL
3010 CLS
3020 PRINT:PRINT"     SPIELER":PRINT
3030 PRINT"H.SAPIENS  (1)"
3040 PRINT"MR. CAOS   (2)"

3100 PRINT
3110 INPUT"NR. SPIELER X"; UX
3120 INPUT"NR. SPIELER O"; UO
3130 PRINT
3140 INPUT" ANZAHL SPIELE?";AZ
3150 CLS:RETURN
```

Bemerkung:

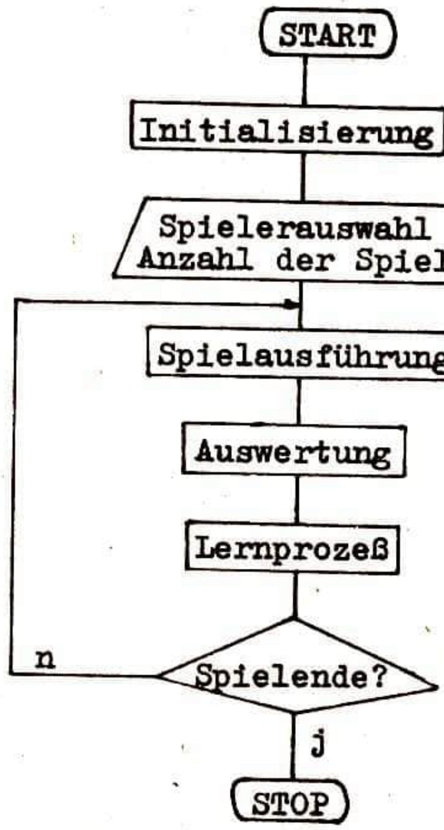
Das Spieleraufgebot kann einfach ergänzt werden.

```
2200 REM SPIELAUSWERTUNG
2210 IF GW=-1 THEN GO=GO+1
2220 IF GW=0 THEN UN=UN+1
2230 IF GW=1 THEN GX=GX+1
2240 WINDOW 10,19,20,38: CLS
2250 PRINT"   SPIELAUSWERTUNG":PRINT
2260 PRINT"        X  :  O"
```

```
2270 PRINT
2280 PRINT"GEW.    ";GX;SPC(3);GO
2290 PRINT"VERL.   ";GO;SPC(3);GX
2300 PRINT"UNENT.  ";UN;SPC(3);UN
2310 WINDOW:RETURN
```

Erläuterung:
Der aktuelle Spielstand wird auf dem Bildschirm ausgegeben.

Der Datenflußplan für das endgültige "TIC-TAC-TOE"-Programm bekommt folgendes Aussehen:



Umgesetzt in ein Basic-Programm:

```
10 REM TIC-TAC-TOE
20 GOSUB 3500                    ; Initialisierung der Daten
30 GOSUB 3000                    ; Spielerauswahl
40 GX=0:GO=0:UN=0
50 FOR N=1 TO AZ                 ; AZ - Anzahl der Spiele
60 PRINT AT (9,3);" SPIEL-NR.";N
```

```
70 GOSUB 2000                     ; Spielausführung
80 GOSUB 2200                     ; Spielauswertung
90 GOSUB 2500                     ; Lernprozeß
100 NEXT
110 LOCATE 28,5: INPUT"NOCH EIN SPIEL? (J/N)";A$
120 IF A$="J" THEN GOTO 30
130 CLS
140 PRINT AT (15,5);"ES WAR MIR EIN VERGNUEGEN": END
```

Erläuterung:
Zeile 90 wird erst Bedeutung erlangen, wenn lernende Unterprogramme eingebaut werden, die nämlich in Spielauswertung einen Lernprozeß (dazu spezielles UP nötig) durchlaufen müssen. Einstweilen genügt für uns

```
2500 ON UX GOSUB 560,560
2510 ON UO GOSUB 560,560
```

Bemerkung:
GOSUB 560 bewirkt nur RETURN.

Da H. Sapiens keine Lust hatte, 200 Spiele gegen Mr. Caos zu bestreiten, haben wir zwei Spieler vom Niveau des Mr. Caos dazu gewinnen können, gegeneinander zu spielen (d. h. UX=2, UO=2). Unser Ergebnis,erzielt auf einem KC85/2, lautet:

	"X" (Mr. Caos)	:	"O" (Mr. Caos)
gewonnen	65		36
unentsch.	99		99
verloren	36		65

Da bei dem Spiel "TIC-TAC" der beginnende Spieler einen Vorteil hat, ist es nicht verwunderlich, daß Mr. Caos "X" öfter gewann. Von Bedeutung wird dieses Ergebnis für uns werden, wenn wir ein lernendes Programm gegen Mr. Caos spielen lassen. Dann sollten signifikante Unterschiede zu obigem Ergebnis erwartet werden können.

Fortsetzung folgt!

Dr. Joachim Puhl
Bereich Analysis

Preisaufgaben

T 43 1

Пирамида, в основании которой лежит прямоугольник со сторонами а и в, с равными между собой боковыми ребрами л рассечена плоскостью, параллельной основанию, на две равновеликие части. Найти расстояние от плоскости сечения до вершины.

T 44 1

Beweise die folgende Gleichheit:

$$(x+y+z)^3-((x+y-z)^3+(x+z-y)^3+(y+z-x)^3) = 24xyz .$$

T 45 1

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3 &= 6\\
x_2+x_3+x_4 &= 9\\
x_3+x_4+x_5 &= 3\\
x_4+x_5+x_6 &= -3\\
x_5+x_6+x_7 &= -9\\
x_6+x_7+x_8 &= -6\\
x_7+x_8+x_1 &= -2\\
x_8+x_1+x_2 &= 2
\end{aligned}$$

T 46 1

Beweise, daß für alle $a > 0$ gilt:

$$\log_b a = \log_{b^n} a^n .$$

T 47 1

Beweise, daß die Summe

$$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$$

durch 9 teilbar ist.

T 48 2

Konstruiere ein Quadrat, dessen Flächeninhalt gleich 3/8 von dem eines gegebenen Quadrates ist.

Einsendeschluß: 1. 1. 1988

Lösungen

S 22 nach Jörg Schmidt, Freiberg, Klasse 11

Allgemein sei folgendes bekannt:

- n Lose befinden sich vor jedem Ziehen in der Urne
- 8 Lose davon gewinnen $\Rightarrow (n-8)$ "Nieten" sind darunter
- Es werden immer 5 Lose zusammenhängend gezogen.

a) Unter den 5 Losen sollen genau 2 Sachgewinne sein.

- Es gibt C_8^2 Möglichkeiten, aus 8 Gegenständen genau 2 auszuwählen (Gewinne).
- Nun müssen noch 3 "Nieten" gezogen werden, um "genau 2 Gewinne" zu erhalten. Dafür gibt es $C^3_{(n-8)}$ Möglichkeiten.
- Somit gibt es z Möglichkeiten, daß genau 2 Sachgewinne dabei sind:

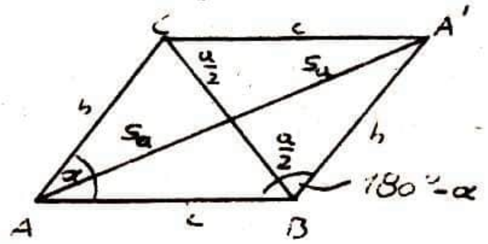
$$z = C_8^2 \cdot C^3_{n-8} = \binom{8}{2} \cdot \binom{n-8}{3}$$

b) Unter den 5 Losen sollen mindestens 2 Gewinne sein.

- Dies ist nur die Summe der Fälle (aller Fälle) für genau 2, genau 3, genau 4 , genau 5 Sachgewinne.
- Insgesamt gibt es für "mindestens 2 Gewinne" y Möglichkeiten:

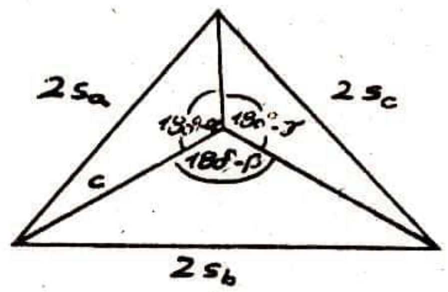
$$y = \sum_{i=2}^{5} C_8^i \cdot C_{n-8}^{5-i}$$
$$= \sum_{i=2}^{5} \binom{8}{i} \cdot \binom{n-8}{5-i}$$

S 26 nach Jürgen Schefter, Reichwalde, Programmierer



$$A_{\Delta ABA'} = A_{\Delta ABC} = A$$

Wegen $(180° - \alpha) + (180° - \beta) + (180° - \gamma)$
$= 540° - (\alpha + \beta + \gamma) = 360°$
existiert folgendes Dreieck (siehe untere Skizze):



$A_S \mathrel{\hat=}$ Flächeninhalt des Dreiecks aus den Seitenhalbierenden $\Rightarrow 4A_S = 3A$

$A : A_S = 4 : 3$

S 30 nach Tino Weidl, Karl-Marx-Stadt

A, B, C, D seien die Ecken des Parallelogramms. Dann sind E, F, G, H die Seitenmittelpunkte.

$M = g_{HF} \cap g_{EG}$, $K = g_{FD} \cap g_{GE}$, $I = g_{GB} \cap g_{HF}$,

$N = g_{BG} \cap g_{DF}$, $L = g_{ED} \cap g_{BH}$.

Aus $g_{GE} \parallel g_{AD} \parallel g_{BC}$ und $g_{HF} \parallel g_{AB} \parallel g_{DC}$ sowie der Definition von E, F, G, H folgt :

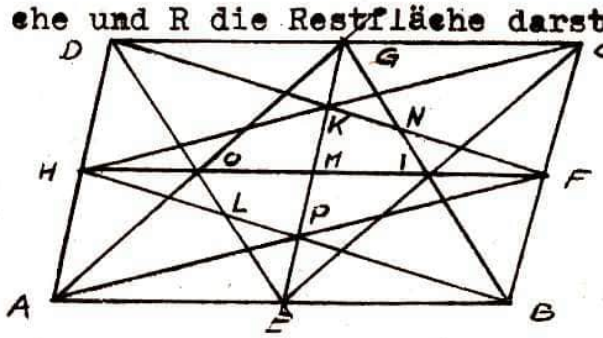
▱ ABCD ~ ▱MFCG mit $k = 2$ (Proportionalitätsfaktor)

$\overline{MI} = \overline{MF}/2 = \overline{IF}$, $\overline{GK} = \overline{KM} = \overline{GM}/2$

▱AELH ~ ▱MINK mit $k = 2$ (gilt analog für alle anderen Teilparallelogramme)

$G = A_{ABCD}$, X - gesuchte Fläche

Daraus folgt, daß $G = 4 \cdot X + X + R$ ist, wobei $4 \cdot X$ dem Flächeninhalt des ▱AEPH entspricht, X die gesuchte Fläche und R die Restfläche darstellen.



$$R = A_{EIO} + A_{OIG} + A_{HPK} + A_{PFK} - 2 \cdot X$$

$A_{EIO} = 1/4 \cdot A_{ECD} = 1/8 \cdot G$ (und analog weiter)

$$R = 1/2 \cdot G - 2 \cdot X$$

$$G = 4 \cdot X + X + 1/2 \cdot G - 2 \cdot X$$

$$1/2 \cdot G = 3 \cdot X$$

$$X = 1/6 \cdot G$$

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: C. Dahmke, J. Dimler, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 27. 7. 1987
Titelbild: M. Torke

wurzel 10 · 87

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

21. Jahrgang ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

TIC-TAC-TOE

Nun soll unser "TIC-TAC"-Spiel durch die Teilnahme von Mr. Computer - ein während des Spiels lernendes Programm - bereichert werden. Wie schon bekannt, muß, falls kein Gewinn- oder Blockierzug ermittelt wird, der Computer andersweitig einen möglichen Zug festlegen. Mr. Caos machte dies recht unorthodox durch auswürfeln. Mr. Computer bedient sich da schon feinsinnigerer Methoden.

Er geht folgendermaßen vor. Für jede Zug-Nr. Z und jedes Feld F speichert er als Bewertung ab, wie "günstig" es ist, bei Zug-Nr. Z das Feld F zu besetzen. Diese Informationen werden in einem gesonderten Variablenfeld S(Z,F) festgehalten, und zwar geschieht das so:

> Zu Beginn sind alle Züge gleichwertig, d. h. S(Z,F)=0 (≙ Mr. Caos). Gewinnt Mr. Computer, dann hat sich seine Zugwahl bewährt und die entsprechenden Werte von S(Z,F) werden um 1 erhöht. Verliert er hingegen, war die Zugwahl schlecht, und die entsprechenden Werte von S(Z,F) werden um 1 verringert. Bei Unentschieden erfolgt keine Änderung. Nun dürfte auch klar sein, wie Mr. Computer seinen möglichen Zug festlegt. Bei Zug-Nr. Z wird einfach das unbesetzte Feld F mit der höchsten Bewertung S(Z,F) ausgewählt (gibt es mehrere Kandidaten dafür, wird einer zufällig bestimmt), weil sich dieser Zug bisher am besten bewährt hat. Man erkennt also, in Abhängigkeit vom Erfolg bzw. Mißerfolg werden die Chancen für ein Feld, bei einem gewissen Zug ausgewählt zu werden, geändert. Mit anderen Worten, es findet ein "Lernprozeß" statt.

Vorsorglich hatten wir schon die Reihenfolge der Züge durch R(Z)=F gespeichert. Bedenkt man weiterhin, daß

$$A(R(Z)) * GW = \begin{cases} 1, & \text{falls Gewinner machte Zug-Nr. Z} \\ 0, & \text{falls unentschieden} \\ -1, & \text{falls Verlierer machte Zug-Nr. Z,} \end{cases}$$

(man mache sich diesen Zusammenhang klar!), dann läßt sich der Lernprozeß formelmäßig durch

$$S(Z,R(Z)) = S(Z,R(Z)) + A(R(Z)) * GW$$

ausdrücken.

```
1200 REM LERNPROZESS
1210 FOR J=1 TO Z-2
1220 S(J,R(J))=S(J,R(J))+A(R(J))*GW
1230 NEXT
1240 RETURN
```

Im nächsten UP wird ein freies Feld mit der höchsten Bewertung gesucht.

```
1000 REM LERNZUG
1010 M = -10000
1030 K=0
1040 FOR F=1 TO 9
1050 IF A(F)<>0 THEN 1090
1060 IF S(Z,F)<M THEN 1090
1070 IF S(Z,F)=M THEN K=K+1:H(K)=F:GOTO 1090
1080 IF S(Z,F)>M THEN M=S(Z,F):H(1)=F:K=1
1090 NEXT
1100 GOSUB 1750
1110 RETURN
```

<u>Erläuterung:</u>
Zunächst wird getestet, ob das Feld F frei ist (Zeile 1050). Anschließend wird die Bewertung der Felder ausgewertet (Zeilen 1060 - 1080). Das Hilfsfeld H(K) speichert alle Felder mit der bis dahin höchsten Bewertung ab. Ergibt sich eine höhere Bewertung (Zeile 1080), wird auch das Hilfsfeld neu gesetzt. Mit GOSUB 1750 in Zeile 1100 wird unter allen freien Feldern mit gleicher bester Belegung eins zufällig ausgewählt.

Damit bestimmt Mr. Computer seinen Zug gemäß UP

```
1300 REM ZUG MR. COMP
1310 GOSUB 500                ; Gewinn-Blockierzug
1320 IF F<>0 THEN RETURN
1330 GOSUB 1000               ; Lernzug
1340 RETURN
```

Abschließend brauchen wir nur noch die zu Mr. Computer gehörigen UP's in das Gesamtprogramm einzubauen. Dazu bedarf es nur weniger Ergänzungen.

Folgende Ergänzungen sind nötig:

```
3050 PRINT "MR. COMP    (3)"     ; Aufnahme ins Anfangsmenu

2040 ON UX GOSUB 1900,1800,1300    ; UP-Verteiler durch Adr.
2100 ON UO GOSUB 1900,1800,1300      UP"Zug Mr. Comp" erg.

2500 ON UX GOSUB 560,560,1200      ; UP-Verteiler durch Adr.
2510 ON UO GOSUB 560,560,1200        UP"Lernprozeß" ergänz.
```

Wir haben die Fähigkeiten von Mr. Computer getestet. Hier die Ergebnisse:

Es wurden jeweils 200 Spiele durchgeführt[1].

1. Runde

	"X" (Mr. Computer) (d.h. UX=3)	"O" (Mr. Caos) (d.h. UO=2)
gewonnen	82	2
unentsch.	116	116
verloren	2	82

2. Runde

	"X" (Mr. Caos)	"O" (Mr. Comp.)
gewonnen	43	29
unentsch.	128	128
verloren	29	43

3. Runde

	"X" (Mr. Computer)	"O" (Mr. Computer)
gewonnen	7	2
unentsch.	191	191
verloren	2	7

Man sollte sich jedoch hüten, voreilige Schlüsse über die Güte der Lernfähigkeit von Mr. Computer zu ziehen. Dazu bedürfte es weiterer statistischer Untersuchungen, die aber den Rahmen dieses Artikels sprengen würden.
Bei anderen Spielrunden wurden ähnliche Ergebnisse ermittelt, so daß im Vergleich zu den Ergebnissen der Runde "Mr. Caos" gegen Mr. Caos" das bessere Abschneiden von "Mr. Computer gegen Mr. Caos" auffallend ist. Wenn Mr. Computer mit "O" spielt

---

1) Jede Spielrunde wurde mit RUN gestartet, um unter den gleichen Bedingungen S(Z,F)=0 zu beginnen, d.h. keine "Spielerfahrung".

(vgl. 2. Runde), scheinen noch Lernpotenzen vorhanden zu sein, denn der Spieler mit "O" kann bei diesem Spiel immer ein unentschieden erzwingen. Man könnte z. B. das Programm dadurch verbessern, daß man die Zugwahl (bei den ersten Zügen) auch vom vorhergehenden Zug des Gegners abhängig macht. Euren Ideen sind keine Grenzen - ausgenommen durch die Speicherkapazität - gesetzt.

Bei unseren angegebenen Beispielen wurde Mr. Computer stets wieder in den "geistigen" Urzustand eines Mr. Caos versetzt. Verwendet Mr. Computer schon gesammelte Spielerfahrungen, sehen die Ergebnisse für ihn noch besser aus.

Hier beispielsweise ein Ergebnis, wobei Mr. Computer schon eine Spielerfahrung von 200 Spielen "Mr. Caos gegen Mr. Computer" gesammelt hatte:

	"X" :	"O"
	Mr. Computer	Mr. Caos
gewonnen	100	-
unentsch.	100	100
verloren	-	100

Es ist auch interessant, die Entwicklung der Zugbewertung S(Z,F) zu verfolgen.

Z. B. hatte nach jenen 200 Spielen S(1,5) die höchste Bewertung, d. h. "der 1. Zug ist 5" hatte sich am besten bewährt (für den Gegner!).

Um nicht jedesmal mit dem Urzustand starten zu müssen, kann man sich natürlich die Zugbewertung notieren und vor Spielbeginn wieder eingeben. (Ohne RUN starten!)

Noch eine Bemerkung zur 3. Runde "Mr. Computer gegen Mr. Computer".

Die Spielauswertung könnte zu der Meinung verleiten, daß durch den Lernprozeß zwei Spitzenkönner herausgebildet wurden, die beide das Spiel so gut beherrschten, daß nur noch "Unentschieden" als Spielausgang möglich war. Weit gefehlt! Innerhalb weniger Züge waren beide in einen stabilen Zugzyklus geraten, aus dem kein Entkommen mehr war. Denn nach einem Unentschieden findet keine Umbewertung der Züge statt. Selbstgefällig wurden

Spiel für Spiel immer die gleichen Züge gemacht, der Umwelt hohes Können vorgaukelnd. Das kommt davon, wenn Mittelmaß (in diesem Stadium waren beide stehengeblieben) sich an sich selbst mißt und starr in seinem "Denkschema" verharrt. Ein paar Spielchen gegen Mr. Caos bringen da wieder etwas Bewegung rein.
Es wäre schön, wenn ihr eigene, vielleicht sogar besser lernende Programme entwickeln, testen und uns mitteilen würdet. Auch wäre es möglich, ein Programm "Mr. Superhirn" zu entwickeln, das eine optimale Strategie realisiert und als "Lehrer" für Mr. Computer dienen könnte, um nachzuweisen, daß die Qualifikation eines Lehrers sich positiv auf die Lerngeschwindigkeit auswirkt. Ihr habt sicher viel, viel mehr Ideen und Interpretationsmöglichkeiten. Wir sind auf Eure Zuschriften und Meinungen zu dem Artikel gespannt.

Dr. Joachim Puhl
Bereich Analysis

Preisaufgaben

T 49 Löse folgende Gleichung

1

$$5 - \quad x + 1 + \quad 2x^2 + x + 3 \quad 1 \; .$$

T 50 Löse folgendes Gleichungssystem

1

$$y^2 + yz + z^2 = a^2$$
$$x^2 + xz + z^2 = b^2$$
$$x^2 + xy + y^2 = c^2 \; .$$

Dabei gilt $a, b, c > 0$.

T 51 (2)

Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, а высота ее проходит через точку пересечения гипотенузы с биссектрисой прямого угла основания. Боковое ребро, проходящее через вершину прямого угла, наклонено к плоскости основания под углом α. Определить объем пирамиды и углы наклона боковых граней к плоскости основания, если биссектриса прямого угла основания равна м и образует с гипотенузой угол $45 + \alpha$.

T 52 (1)

Ein Quadrat mit der Seitenlänge a umsehreibe ein anderes und dieses ein drittes usw. bis ins unendliche.
Berechne die Summe der Flächeninhalte all dieser Quadrate.

T 53 (1)

Die Höhe einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide sei H, der Winkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche betrage φ.
Berechne den Radius der einbeschriebenen Kugel.

T 54 (1)

Berechne x und y

$$5^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 200$$
$$5^{2\sqrt[3]{x}} + 2^{2\sqrt{y}} = 689 \quad .$$

Einsendeschluß: 1. 2. 1988

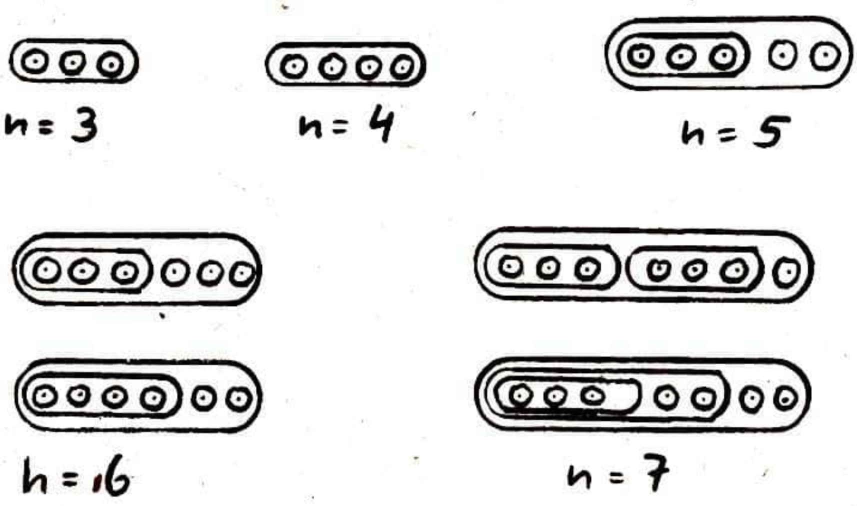
Lösungen der DDR-Olympiade der Klassen 11/12

1. Für jede positive ganze Zahl $n \neq 2$ sei ein Paket, das genau n Bonbons enthält und (1), (2) erfüllt, ein "n-Paket" genannt. Zu jedem Bonbon eines n-Pakets gibt es eine Umhüllung, die genau dieses Bonbon enthält (denn andernfalls gabe es, im Widerspruch zu (2), eine Umhüllung, die dieses nicht nochmals umhüllte Bonbon und daneben weitere Teile enthielte). Die außer diesen n Umhüllungen der einzelnen n Bonbons sonst noch in dem n-Paket vorkommenden Umhüllungen seien "Zusatzhüllen" genannt.
Durch vollständige Induktion wird nun bewiesen[1]: Die Maximalzahl von Zusatzhüllen eines n-Pakets ist die größte ganze Zahl, die kleiner als $\frac{n}{2}$ ist.

I. Jedes 1-Paket besteht aus genau einem Bonbon mit seiner Umhüllung, hat also keine Zusatzhüllen.
Jedes 3-Paket besteht aus genau drei Bonbons mit ihren Umhüllungen und genau einer Zusatzhülle.
Für $n=1$ und $n=3$ trifft demnach die Behauptung zu.

---

1 Als heuristische Möglichkeit, eine Gesetzmäßigkeit für Maximalzahlen zu vermuten, können etwa die Realisierungen in Abb. dienen:



II. Es sei $k \geq 4$, und es werde als Induktionsannahme vorausgesetzt, daß für alle positiven ganzen $n < k$ mit $n \neq 2$ jeweils die Maximalzahl von Zusatzhüllen eines n-Pakets die größte ganze Zahl kleiner als $\frac{n}{2}$ sei. Dann folgt:

Es gibt k-Pakete mit maximaler Zahl von Zusatzhüllen (da es überhaupt nur endlich viele Möglichkeiten gibt, ein k-Paket zu bilden). Für jedes solche Paket gilt: Öffnet man seine nach (1) vorliegende äußere Umhüllung H, so besteht ihr Inhalt nach (2) und wegen $k > 1$ aus mindestens drei sämtlich mit Umhüllung versehenen Teilpaketen. Wären es fünf oder mehr, so könnte man diesen Inhalt ohne Verletzung von (2) dadurch ändern, daß man um genau drei der Teilpakete eine neue Umhüllung hinzufügt. Das widerspricht der vorausgesetzten Maximalität der Zusatzhüllenzahl des k-Pakets. Also besteht der Inhalt von H entweder aus genau drei oder aus genau vier Teilpaketen. Jedes von ihnen erfüllt nach (2) selbst wieder (1) und (2), ist also ein n_i-Paket ($i=1,2,3$ oder $i=1,2,3,4$); dabei ist nach (2) jedes n_i eine positive ganze Zahl mit $n_i \neq 2$. Ferner gilt

$$n_1 + n_2 + n_3 = k \quad \text{bzw.} \quad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = k. \tag{3}$$

Also sind alle $n_i < k$. Jedes dieser n_i-Pakete muß seinerseits eine maximale Zahl z_i von Zusatzhüllen aufweisen (sonst könnte man es durch ein n_i-Paket mit größerer Zusatzhüllenzahl ersetzen, was der Maximalität des k-Pakets widerspricht). Nach Induktionsannahme ist somit jeweils z_i die größte ganze Zahl kleiner als $\frac{n_i}{2}$.

In jedem der Fälle $k=2m$, $k=2m+1$ gibt es für die n_i hinsichtlich ihrer Darstellbarkeit als $n_i=2m_i$ oder $n_i=2m_i+1$ (m, m_i ganzzahlig) bis auf die Reihenfolge genau die Möglichkeiten der folgenden Tabelle. Anschließend sind dort die z_i und unter Anwendung von (3) ihre Summe s angegeben:

k	n_1	n_2	n_3	n_4	z_1	z_2	z_3	z_4	s
2m	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3$		m_1-1	m_2-1	m_3-1		m-3
	$2m_1$	$2m_2+1$	$2m_3+1$		m_1-1	m_2	m_3		$\boxed{m-2}$
	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3$	$2m_4$	m_1-1	m_2-1	m_3-1	m_4-1	m-4
	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3+1$	$2m_4+1$	m_1-1	m_2-1	m_3	m_4	m-3
	$2m_1+1$	$2m_2+1$	$2m_3+1$	$2m_4+1$	m_1	m_2	m_3	m_4	$\boxed{m-2}$
2m+1	2m	$2m_2$	$2m_3+1$		m_1-1	m_2-1	m_3		m-2
	$2m_1+1$	$2m_2+1$	$2m_3+1$		m_1	m_2	m_3		$\boxed{m-1}$
	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3$	$2m_4+1$	m_1-1	m_2-1	m_3-1	m_4	m-3
	$2m_1$	$2m_2+1$	$2m_3+1$	$2m_4+1$	m_1-1	m_2	m_3	m_4	m-2

Die sämtlichen Zusatzhüllen des k-Pakets sind nun: die s Zusatzhüllen der einzelnen n_i-Pakete und dazu noch die Umhüllung H. Wegen der Maximalität scheiden für s alle Möglichkeiten außer den hervorgehobenen aus, und man erhält: Die Maximalzahl von Zusatzhüllen eines k-Pakets ist im Fall k=2m die Zahl m-1, im Fall k=2m+1 die Zahl m. Das ist die Behauptung für n=k.

Mit I. und II. ist somit die Behauptung für alle positiven ganzen $n \neq 2$ bewiesen. Sie ergibt für n=500: Die Maximalzahl von Zusatzhüllen ist 249. Die gesuchte größtmögliche Zahl aller Umhüllungen beträgt somit 749.

<u>2. Lösungsweg:</u>

Jede Möglichkeit, ein 500-Paket zu bilden, läßt sich so beschreiben, daß man nach dem Einhüllen der einzelnen Bonbons (Beweis wie im 1. Lösungsweg) in wiederholten Schritten, so oft dies noch möglich ist, etwa für i=1,...,m, jeweils genau eine Zusatzhülle um eine Anzahl, etwa a_i, von bereits vorliegenden Teilpaketen legt. Bei jedem dieser Schritte verringert sich die Anzahl der vorliegenden Teilpakete, beim i-ten

Schritt um genau a_i-1 $(i=1,\dots,m)$. Somit entsteht genau dann eine der Möglichkeiten, gemäß (1), (2) ein 500-Paket zu bilden, wenn man die a_i so wählt, daß

$$500-(a_1-1)-\dots-(a_m-1)=1$$

und

$$a_i \geqq 3 \quad \text{für alle } i=1,\dots,m$$

gilt.

I. Für jedes 500-Paket gilt folglich

$$500 \quad (a_i-1)+\dots+(a_m-1) \geqq m\cdot 2,$$

also $m<250$, d. h. $m \leqq 249$.

II. Die Anzahl $m=249$ ist auch in der Tat durch eine Bildungsmöglichkeit eines 500-Pakets erreichbar, z. B. indem man

$$a_1=\dots=a_{248}=3, \quad a_{249}=4$$

wählt.

Also ist 249 die Maximalzahl von Zusatzhüllen.

2. I. Wenn eine Zahlenfolge (a_n) die Bedingungen erfüllt, so folgt durch vollständige Induktion, daß

$$a_n=\frac{2}{3}\left(2^n-2^{-n}\right) \quad \text{für } n=1,2,3,\dots$$

gilt:

(a) Es gilt $a_1=1=\frac{2}{3}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)$ und $a_2=\frac{5}{2}=\frac{2}{3}\cdot\left(4-\frac{1}{4}\right)$, also die Behauptung für $n=1$ und $n=2$.

(b) Wenn $k\geqq 2$ ist und die Behauptung für $n=k$ und $n=k-1$ gilt, d. h. wenn $a_k=\frac{2}{3}(2^k-2^{-k})$, $a_{k-1}=\frac{2}{3}(2^{k-1}-2^{-k+1})$ ist, so folgt: Wegen $k\geqq 2$ ist $a_{k-1}\neq 0$, also ergibt sich aus (1) und (2)

$$a_{k+1}=\frac{a_k^2-a_1^2}{a_{k-1}}=\frac{\frac{4}{9}\left(\left(2^k-2^{-k}\right)^2-\frac{9}{4}\right)}{\frac{2}{3}\left(2^{k-1}-2^{-k+1}\right)}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{2^{2k}-4-\left(\frac{1}{4}-2^{-2k}\right)}{2^{k-1}-2^{-k+1}}$$

$$=\frac{2}{3}\left(2^{k+1}-2^{-k-1}\right),$$

d. h. die Behauptung für $n=k+1$.

Daher kann nur die durch (3) gegebene Folge die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.

II. Sie erfüllt diese Bedingungen; denn (2) wurde in I.(a) bestätigt, und für alle ganzen $n > m > 0$ folgt aus (3)

$$a_{n+m} \cdot a_{n-m} = \frac{2}{3}(2^{n+m} - 2^{-n-m}) \cdot \frac{2}{3}(2^{n-m} - 2^{-n+m})$$

$$= \frac{4}{9}(2^{2n} + 2^{-2n} - 2 + 2 - 2^{2m} - 2^{-2m})$$

$$= a_n^2 - a_m^2 .$$

Somit erfüllt genau die Folge (3) die Bedingungen der Aufgabe.

Bemerkungen: Es gibt verschiedene andere Lösungsansätze. Beispielsweise kann man aus (1), (2) durch "gewöhnliche" vollständige Induktion (Schluß von k auf k+1, nicht wie oben von k und k-1 auf k+1) das Formelpaar $2a_n - a_{n-1} = 2^n$, $a_n - 2a_{n-1} = 2^{-n+1}$ für $n=2,3,...$ beweisen. Daraus folgt $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{3}(2^n + 2^{-n+1})$, nach Aufsummieren also $a_n = a_1 + \frac{1}{3}(2 \cdot \frac{2^n-1}{2-1} + \frac{2^{-n}-1}{2^{-1}-1})$ usw. Als heuristischen Vorspann wird man, auch wenn dies nicht für die Vollständigkeit des Lösungsweges notwendig ist, die Gewinnung einer Vermutung voranstellen, indem man etwa in $a_1=1$, $a_2 = \frac{5}{2}$, $a_3 = \frac{21}{4}$, $a_4 = \frac{85}{8}$ die Nenner als 2^{n-1} und die Zähler als $1 + ... + 4^{n-1}$ oder die dreifachen Zahlen 3, 15, 63, 255 als $2^{2n}-1$ darstellt.

3. Die Kugel k_i habe den Mittelpunkt M_i, den Radius r_i und das Volumen V_i $(i=1,...,n)$. Man definiere z. B. folgendermaßen eine Auswahl aus den k_i: Unter den Kugeln k_i gibt es eine mit maximalem Radius. In einem ersten Auswahlschritt sei eine solche Kugel gewählt; o.B.d.A. sei sie k_1. Man bilde die Kugel K_1 um M_1 mit dem Radius $3r_1$. Sind alle k_i in K_1 enthalten, so sei die Auswahl beendet.
Andernfalls gibt es unter allen denjenigen Kugeln k_i, die nicht in K_1 enthalten sind, eine mit maximalem Radius. Im zweiten Auswahlschritt sei eine solche gewählt; o.B.d.A. sei sie k_2. Man bilde die Kugel K_2 um M_2 mit dem Radius $3r_2$. Sind alle k_i in der Vereinigungsmenge $K_1 \cup K_2$ enthalten, so sei die Auswahl beendet.

In dieser Weise wird fortgesetzt: Im m-ten Auswahlschritt wird unter allen denjenigen Kugeln k_i, die nicht in der (zuvor gebildeten Menge $K_1 \cup \ldots \cup K_{m-1}$ enthalten sind, eine mit maximalem Radius gewählt; o.B.d.A. sei sie k_m. Man bilde die Kugel K_m um M_m mit dem Radius $3r_m$. Sind alle k_i in $K_1 \cup \ldots \cup K_{m-1} \cup K_m$ enthalten, so sei die Auswahl beendet. Dieses Ende des Auswahlverfahrens muß einmal eintreten (o.B.d.A. mit dem m-ten Auswahlschritt): denn wegen

$$k_i \subset K_i \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq m \tag{1}$$

ist nach jedem Auswahlschritt mindestens eine Kugel mehr als beim vorangehenden Auswahlschritt in der betreffenden Menge K_1...bzw.$K_1 \cup \ldots \cup K_{m-1}$ bzw. $K_1 \cup \ldots \cup K_m$ enthalten, steht also nicht mehr für einen nächsten Auswahlschritt zur Verfügung. Daß eine so definierte Auswahl die geforderten Bedingungen erfüllt, kann folgendermaßen bewiesen werden:

Für alle i mit $1 \leq i$, $i+1 \leq m$ gilt wegen der Maximalität von r_i, die bei der Auswahl von k_i zu beachten war, $r_i \geq r_{i+1}$. Folglich ist

$$r_i \geq r_j \quad \text{für alle } 1 \leq i < j \leq m. \tag{2}$$

Ferner ist für $1 \leq i < j \leq m$ stets k_j nicht in $K_1 \cup \ldots \cup K_{j-1}$, also erst recht nicht in K_i enthalten. Somit gibt es einen Punkt P in k_j mit $\overline{M_iP} > 3r_i$. Nach der Dreiecksungleichung folgt hieraus und aus (2), daß $\overline{M_iM_j} \geq \overline{M_iP} - \overline{M_jP} > 3r_i - r_j \geq r_i + r_j$ gilt. Damit ist gezeigt, daß k_i und k_j keinen gemeinsamen Punkt haben; denn[1] wäre X ein solcher, so folgte wieder aus der Dreiecksungleichung $\overline{M_iM_j} \leq \overline{M_iX} + \overline{M_jX} = r_i + r_j$.

Für das Volumen U von $k_1 \cup \ldots \cup k_m$ gilt somit[2]

$$V_1 + \ldots + V_m = U. \tag{3}$$

---

1 Zu akzeptieren ist auch, wenn hier statt des obigen Beweisabschnitts zur Begründung als bekannter Sachverhalt angeführt wird, daß eine Kugel vom Radius r_j nur dann k_i berühren oder durchdringen kann, wenn sie ganz in der zu k_i konzentrischen Kugel vom Radius $r_i + 2r_j$ liegt.

2 Daß für die Volumina $T_1, \ldots, T_m; S$ von Körpern $B_1, \ldots, B_m$; $B_1 \cup \ldots \cup B_m$ stets $T_1 + \ldots + T_m \geq S$ und im Fall $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(1 \leq i < j \leq m)$ sogar $T_1 + \ldots + T_m = S$ gilt, kann als bekannter Sachverhalt verwendet werden.

Für das Volumen Q_i von K_i gilt wegen des Radius $3r_i$ von K_i einerseits $Q_i = 27V_i$, also

$$V_i = \frac{1}{27} Q_i \quad (i=1,\dots,m), \tag{4}$$

andererseits wegen (1) und nach Definition der Auswahlbeendigung bei k_m

$$K_1 \cup \dots \cup K_m \supseteq k_1 \cup \dots \cup k_n. \tag{5}$$

Ist nun Q das Volumen von $K_1 \cup \dots \cup K_m$, so gilt einerseits[1]

$$Q_1 + \dots + Q_m \geqq Q, \tag{6}$$

andererseits wegen (5)

$$Q \geqq V. \tag{7}$$

Aus (3), (4), (6), (7) erhält man die nachzuweisende Ungleichung $U \geqq \frac{1}{27} V$.

4. Für jede positive ganze Zahl a ist

$$(a+1)^5 - a^5 - 1 = 5a(a^3+2a^2+2a+1) = 5a(a+1)(a^2+a+1)$$

genau dann durch $18305 = 5 \cdot 7 \cdot 523$ teilbar, wenn

$$a(a+1)(a^2+a+1) \text{ durch } 7 \cdot 523 \text{ teilbar ist.} \tag{1}$$

Darin ist

$$523 \text{ Primzahl;} \tag{2}$$

denn 523 ist durch keine der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 teilbar, und es gilt $23^2 > 523$.

Man kann nun zunächst a so zu ermitteln versuchen, daß

$$a^2 + a + 1 \text{ durch } 523 \text{ teilbar} \tag{3}$$

ist, d. h. daß eine positive ganze Zahl k mit

$$a^2 + a + 1 = 523\,k \tag{4}$$

existiert. Ist diese Gleichung lösbar, so gilt wegen $a > 0$

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{523 \cdot 4k - 3}\,; \tag{5}$$

dann ist also $523 \cdot 4k - 3$ eine ungerade Quadratzahl. Daraus

---

1 Daß für die Volumina $T_1,\dots,T_m;S$ von Körpern $B_1,\dots,B_m$; $B_1 \cup \dots \cup B_m$ stets $T_1+\dots+T_m \geqq S$ und im Fall $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(1 \leqq i < j \leqq m)$ sogar $T_1+\dots+T_m = S$ gilt, kann als bekannter Sachverhalt verwendet werden.

folgt der Reihe nach:

$2092k - 3$ hat eine der Einerziffern 1, 5, 9;
$2092k$ hat eine der Einerziffern 4, 8, 2;
k hat eine der Einerziffern 2, 7, 4, 9, 1, 6.

Außerdem ist nach (4) und weil $a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1$ eine ungerade Zahl ist, auch k ungerade und hat somit eine der Einerziffern 1, 7, 9. Betrachtet man solche Zahlen k der Reihe nach, so zeigt sich:

Für k=1 ist $523 \cdot 4k - 3 = 2089$ wegen $45^2 < 2089 < 46^2$ keine Quadratzahl.

Für k=7 ist $523 \cdot 4k - 3 = 14641 = 121^2$, nach (5) also a=60.
Damit ist gezeigt: Für a=60 gilt

$$a^2 + a + 1 = 523 \cdot 7, \tag{6}$$

und zwar ist k=7 in (4) die kleinste positive ganze Zahl, also auch

a=60 die kleinste positive ganze Zahl, für die (3) gilt. (7)

Wegen (6) erfüllt a=60 sogar (1). Für alle positiven ganzen $a < 60$ folgt dagegen aus $0 < a$, $a+1 < 523$ sowie aus (7) und (2), daß diese a nicht (1) erfüllen.

Die kleinste Zahl mit den in der Aufgabe genannten Eigenschaften ist somit a=60.

Es gibt noch andere <u>Lösungsmöglichkeiten</u>. Beispielsweise kann man (1) mit $n = a^2+a$ als $(7.523) \mid (n(n+1))$ schreiben und hierfür als einzige Möglichkeiten

(A) $(7 \cdot 523) \mid (n+1)$, (B) $(7 \cdot 523) \mid n$
(C) $7 \mid n$ und $523 \mid (n+1)$, (D) $7 \mid (n+1)$ und $523 \mid n$

diskutieren:

(A) hat die kleinste positive Lösung $n = 7 \cdot 523 - 1$ und damit a=60.

(B) hat die kleinste positive Lösung $n = 7 \cdot 523$, also keine kleinere als (A).

(C) bzw. (D) führt auf n=7g bzw. n=7g-1 und damit weiter auf $7g \pm 1 = 523h$ mit ganzen $g,h > 0$. Das ergibt
$7(g-74h) \pm 1 = 5h$, $3 \cdot 7(g-74h) \pm 3 - 14h = h$, also
$h = 7m \pm 3$ mit ganzem m.

Gäbe es hierfür eine kleinere Lösung als in (A), so wäre

$$7g < 7 \cdot 523 - 1 \quad \text{bzw.} \quad 7g - 1 < 7 \cdot 523 - 1,$$

also $523h < 7 \cdot 523$ bzw. $523h < 7 \cdot 523 - 1$

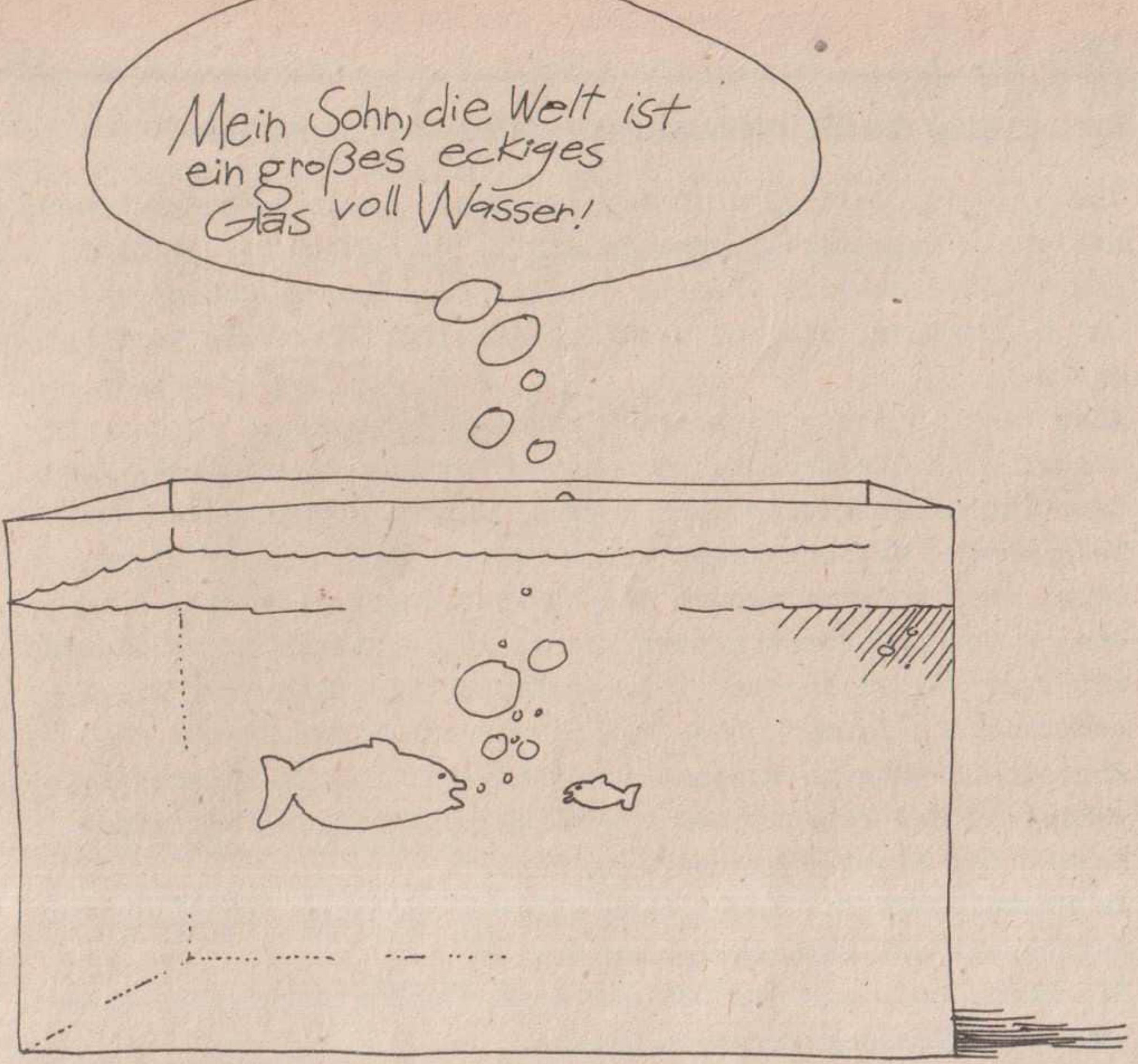
und daher $h < 7$. Hiernach verbliebe nur $h=3$ bzw. $h=4$, also $n = 523 \cdot 3 - 1$ bzw. $n = 523 \cdot 4$, womit sich jedoch $a^2 + a = n$ als nicht ganzzahlig lösbar erweist.

Fortsetzung folgt

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: C. Dahmke, J. Dimler, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: **WURZEL,** Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M. Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 22. 9. 1987
Titelseite: M. Torke



wurzel 11 · 87

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
21. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Bericht über die 28. Internationale Mathematikolympiade

Vom 5. - 16. Juli fand in Havanna/Kuba die diesjährige Internationale Mathematikolympiade statt. Es nahmen 237 Schüler aus 42 Ländern teil. Das zu bewältigende Pensum belief sich auf 6. Aufgaben, die auf zwei 4,5-stündige Klausuren verteilt waren.
Aber nicht nur die Mathematik stand auf dem Plan, sondern es wurden auch Stadtrundfahrten durch Havanna organisiert. Zum sportlichen Ausgleich nach getaner Arbeit wurden unter den Teilnehmern Wettschwimmen veranstaltet, z.B. in der Playa Giron und im Swimmingpool des DDR-Botschaftsgebäudes. Beim Besuch des DDR-Botschafters kam es zu lebhaften Diskussionen mit ihm. Die Teilnehmer interessierten sich sehr für die Geschichte des Landes. Dies kam auch durch einen Besuch des Ernesto-Che-Guevra-Museums zum Ausdruck. Ebenso konnten Kontakte mit der kubanischen Jugend geknüpft werden bei einem Besuch des Pionierlagers "Jose Marti".
Im Mittelpunkt des Interesses aller stand aber natürlich der Wettstreit auf mathematischem Gebiet.
Die Mannschaft aus der DDR war dabei sehr erfolgreich. Alle unsere Teilnehmer errangen Preise.
Zwei Schüler aus unserer Mannschaft erhielten volle Punktzahl, und zwar Frank Göring (10.Klasse) von der Spezialklasse der Technischen Hochschule Ilmenau und Gerd Kunert (11.Klasse) von der Spezialklasse der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt. Zu bemerken ist, daß in diesem Jahr der 1.Preis nur bei voller Punktzahl erteilt wurde. Deshalb mußte sich Uta Hövel (12.Klasse) von der EOS "Heinrich Hertz" Berlin schon bei 40 Punkten mit einem 2.Preis begnügen. Jörg Jahnel (12.Klasse) von der Spezialschule "Carl Zeiss" Jena erreichte 39 Punkte und errang damit ebenfalls einen 2.Preis. 37 Punkte und einen 2.Preis bekam Gunter Döge (12.Klasse) von der Spezialschule "Friedrich Engels" Riesa. Mit 31 Punkten erreichte Jugo Wamke (12.Klasse) einen 3.Preis. Er kommt von der Erweiterten Spezialschule "Georg Thiele" Kleinmachnow.

Als eine besondere Attraktion wurde von allen Beteiligten ein Junge aus Australien angesehen, der 40 Punkte erhielt. Sein Name ist Terenc Tao. Dieser Erfolg war vielleicht sein schönstes Geschenk zu seinem 12. Geburtstag, den er während der Tage der IMO feierte.

Länderwertung

	Ges.Punktzahl	1.Preise	2.Preise	3.Preise
1. Rumänien	250	5	1	-
2. BRD	248	4	2	-
3. UdSSR	235	3	3	-
4. DDR	231	2	3	1
5. USA	220	2	3	1
6. Ungarn	218	-	5	1

Vergabe der Preise:

1.Preis	42 Punkte
2.Preis	32-41 Punkte
3.Preis	18-31 Punkte

Jörg Jahnel

Aufgaben der 28. IMO

1. Sei $S = \{1,\ldots,n\}$ $(n \geq 1)$ und sei $p_n(k)$ die Anzahl der Permutationen von S mit genau k Fixpunkten.
   Man beweise:
   $$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$$
   (Hinweis: Eine Permutation f von S ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung von S auf S. Ein Element $i \in S$ heißt Fixpunkt von S, falls $f(i) = i$ ist.)

2. ABC sei ein spitzwinkliges Dreieck. Die Halbierende des Innenwinkels bei A schneidet die Seite BC in L und den Umkreis des Dreiecks in N $(N \neq A)$. Seien K und M die Fußpunk-

te der Lote von L auf AB bzw. AC.
Man beweise:
Die Flächeninhalte des Vierecks AKNM und des Dreiecks ABC sind gleich.

3. Es seien $x_1,\dots,x_n$ reelle Zahlen mit $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$.
Man beweise:
Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ gibt es ganze Zahlen a_i $(i = 1,2,\dots,n)$, für die

$$|a_1x_1 + \dots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$$

gilt, wobei die Nebenbedingungen:
- nicht alle a_i sind gleich Null,
- für alle i gilt $|a_i| \leq k-1$

erfüllt sind.

4. Man beweise:
Es gibt keine Funktion $f: N_o \to N_o$, welche für alle $n \in N_o$ die Eigenschaft $f(f(n)) = n + 1987$ besitzt.
$(N_o = \{0,1,2,\dots\})$

5. Es sei n eine natürliche Zahl ≥ 3.
Man beweise:
Es gibt eine Anordnung von n Punkten in der Ebene, für die je zwei beliebige Punkte einen irrationalen Abstand haben, und je drei beliebige Punkte ein nicht entartetes Dreieck mit rationalem Flächeninhalt bilden.

6. Sei n eine ganze Zahl ≥ 2.
Man beweise:
Wenn $k^2 + k + n$ für alle ganze Zahlen k mit $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$ eine Primzahl ist, dann ist auch $k^2 + k + n$ für alle ganzen Zahlen k mit $0 \leq k \leq n-2$ eine Primzahl.

Lösungen der DDR-Olympiade (Fortsetzung)

5. I. Für jede Dreiecksfläche $F = A_1A_2A_3$ und jede konvexe Vierecksfläche $F = A_1A_2A_3A_4$ gilt die genannte Überdeckungsaussage; dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

Wäre die Aussage falsch, so gäbe es einen Punkt P in F, der außerhalb jeder der drei bzw. vier genannten Kreise läge. Da diese Kreise den Rand von F überdecken, läge P im Innern von F. Da F konvex ist, ergäben sich Winkel $\sphericalangle A_iPA_{i+1}$ $(i=1,\dots,n; A_{n+1}=A_1$; mit $n=3$ bzw. $n=4)$, für die

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\sphericalangle A_iPA_{i+1}} = 360^\circ \qquad (1)$$

gelten müßte. Andererseits wäre, da[1] P außerhalb der Kreise über den Durchmessern A_iA_{i+1} läge $\overline{\sphericalangle A_iPA_{i+1}} < 90^\circ$ $(i=1,\dots,n)$, also

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\sphericalangle A_iPA_{i+1}} < n \cdot 90^\circ,$$

was (1) wegen $n \leqq 4$ widerspricht.

II. Für jedes $n > 4$ gibt es eine konvexe n-Ecksfläche $A_1A_2\dots A_n$, die von den genannten Kreisen nicht überdeckt wird; dies zeigt etwa folgendes Beispiel:

Ist $A_1A_2\dots A_n$ ein regelmäßiges n-Eck und P sein Mittelpunkt, so gilt (1) (jetzt mit $n > 4$) und daher $\overline{\sphericalangle A_iPA_{i+1}} = \frac{1}{n} \cdot 360^\circ < 90^\circ$ für alle $i=1,\dots,n; A_{n+1} = A_n$. Also[1] liegt P außerhalb aller Kreise über den Durchmessern A_iA_{i+1}.

Mit I. und II. ist bewiesen, daß die in der Aufgabe genannte Aussage genau für n=3 und n=4 gilt.

---

1 Als bekannter Sachverhalt wird hier verwendet: Genau dann liegt ein (nicht auf der Geraden durch A_i, A_{i+1} gelegener) Punkt P außerhalb des Kreises mit A_iA_{i+1} als Durchmesser, wenn $\overline{\sphericalangle A_iPA_{i+1}} < 90^\circ$ gilt.

6A. Zur Abkürzung wird W für einen Münzwurf mit dem Ergebnis "Wappen" und Z für einen Wurf mit dem Ergebnis "Zahl" geschrieben.

a) Da für n=3 der Diensthabende durch zweimaliges Werfen der Münze eindeutig bestimmt ist, entspricht jede mögliche Auswahl genau einer der Folgen (W,W),(W,Z),(Z,W),(Z,Z), wobei die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Folgen untereinander gleich sind, d. h. jeweils gleich $\frac{1}{4}$. Offenbar werden durch die oben angegebenen Folgen als Diensthabende, entsprechend obiger Reihenfolge, P_3, P_2, P_1, P_3 ausgewählt. Folglich ergibt sich für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten:
$W_1 = \frac{1}{4}$, $W_2 = \frac{1}{4}$, $W_3 = \frac{1}{2}$.

b) Jeder möglichen Auswahl entspricht genau eine (n-1)-elementige Folge aus Würfen W und Z, wobei wiederum das Auftreten sämtlicher derartiger Folgen gleichwahrscheinlich ist. Ihre Gesamtzahl ist gleich der Anzahl der Variationen von 2 Elementen in Gruppen zu n-1 Elementen und damit gleich 2^{n-1}.
Diese (n-1)-elementigen Folgen seien in zwei Klassen A und B eingeteilt. Zu A gehören genau die Folgen, die mit W beginnen, zu B genau die Folgen, die mit Z beginnen. Weiterhin werde mit k_i^A $(i=1,2,\dots,n)$ die Anzahl derjenigen Folgen aus A bezeichnet, bei denen P_i als Diensthabender ausgewählt wird; analog werde k_i^B definiert.
Ist f eine Folge aus A und bildet man eine Folge $\bar{f}$ dadurch, daß das erste Element von f durch Z ersetzt wird, so ist $\bar{f}$ eine Folge aus B. Bei f werde P_i als Diensthabender bestimmt. Da die Ergebnisse der Münzwürfe bei f und $\bar{f}$ ab 2. Wurf übereinstimmen, der 2. Wurf bei f zwischen P_2 und P_3, bei $\bar{f}$ aber zwischen P_3 und P_4 entscheidet, wird folglich bei $\bar{f}$ der Schüler P_{i+1} als Diensthabender bestimmt.
Analog gilt umgekehrt. Ist $\bar{f}$ eine Folge aus B, die P_{i+1} als Diensthabenden bestimmt, und entsteht f aus $\bar{f}$, indem das erste Element durch W ersetzt wird, so ist f eine Folge aus A und bestimmt P_i als Diensthabenden. Somit gilt

$$k_i^A = k_{i+1}^B \quad (i=1,2,\ldots,n;\ k_{n+1}^B = k_1^B \text{ gesetzt}). \qquad (1)$$

Angenommen, die Auswahlmethode wäre gerecht, dann müßte wegen der Gleichwahrscheinlichkeit der Auswahl für jeden Schüler gelten:

$$k_i^A + k_i^B = \frac{2^{n-1}}{n} = k \quad (i=1,2,\ldots,n). \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) ergäbe sich

$$k_i^A + k_{i-1}^A = k \quad (i=2,3,\ldots,n+1;\ k_{n+1}^A = k_1^A \text{ gesetzt}). \qquad (3)$$

Offenbar gilt $k_1^A = 0$, weil P_1 sofort ausscheidet, wenn beim ersten Wurf W fällt. Setzt man das in (3) für i=2 ein, so erhält man $k_2^A = k$ und hieraus nach (3) für i=3 weiter $k_3^A = 0$.

Andererseits gehört die Folge (W,W,Z,W,...,W) zur Klasse A und führt zur Bestimmung von P_3 als Diensthabendem; d. h., es gilt $k_3^A \geq 1$. Mit diesem Widerspruch ist die Annahme, die Auswahlmethode wäre gerecht, für alle $n \geq 3$ widerlegt.

Bemerkungen:

Für gewisse Werte von n gibt es auch andere (einfachere) Möglichkeiten, auf einen Widerspruch zu schließen.
So liefert z. B. für ungerades n ein fortgesetztes Einsetzen in (3) den Widerspruch $(k_1^A =)\ k_{n+1}^A = k$.
Für jedes n, das nicht Zweierpotenz ist, folgt sogar sofort aus der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit ein Widerspruch zur Ganzzahligkeit der Folgenanzahl $k = \frac{2^{n-1}}{n}$ (auch ohne daß man erst die k_i^A und k_i^B einführt und mit ihnen k in der Gestalt (2) schreibt).

6B. a) Eine solche Auswahl ist nicht stets möglich, z. B. nicht für

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{50}},\ x_2 = \ldots = x_{999} = \frac{1}{10},\ x_{1000} = \ldots = x_{1987} = 0.$$

Für diese Zahlen ist nämlich

$$x_1^2 + \ldots + x_{1987}^2 = \frac{1}{50} + \frac{998}{100} = 10$$

und

$$x_1^3 + \ldots + x_{1987}^3 = \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} + \frac{998}{1000} > \frac{1}{50 \cdot 10} + \frac{499}{500} = 1,$$

die Voraussetzungen sind also erfüllt; aber für jede Auswahl von neun dieser Zahlen ist (wegen $0<\frac{1}{10}<\frac{1}{\sqrt{50}}$) deren Summe

$$s \leqq \frac{1}{50} + \frac{8}{10} < \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1.$$

b) Eine solche Auswahl ist (unter den genannten Voraussetzungen) stets möglich. Zum Beweis sei für nichtnegative $x_1,\dots,x_{1987}$

$$x_1^2 + \dots + x_{1987}^2 = 10 \tag{1}$$

$$x_1^3 + \dots + x_{1987}^3 > 1 \tag{2}$$

und o.B.d.A.

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \dots \geqq x_{1987} \tag{3}$$

vorausgesetzt.

Wählt man dann die zehn Zahlen $x_1,x_2,\dots,x_{10}$ aus, so gilt:

Falls $x_1>1$ ist, ist erst recht $x_1+\dots+x_{10}>1$.

Falls aber $1 \geqq x_1$ ist, folgt hieraus und aus (3)

$$1 \geqq x_i^2 \quad (i=1,\dots,10).$$

Nochmals wegen (3), also $x_i-x_{10} \geqq 0 \quad (i=1,\dots,10)$, folgt hieraus

$$x_i - x_{10} \geqq x_i^3 - x_{10} \cdot x_i^2 \quad (i=1,\dots,10).$$

Summiert man dies und wendet (1), (3) und (2) an, so erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10} x_i &\geqq \sum_{i=1}^{10} x_i^3 + x_{10} \cdot \left(10 - \sum_{i=1}^{10} x_i^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^{10} x_i^3 + x_{10} \cdot \sum_{i=11}^{1987} x_i^2\\ &\geqq \sum_{i=1}^{10} x_i^3 + \sum_{i=11}^{1987} x_i^3\\ &> 1.\end{aligned}$$

Über die Auflösbarkeit gewisser Gleichungen

Eingangs wollen wir einige grundlegende Begriffe klären, ohne näher ihre allgemein bekannte Bedeutung zu erläutern. Zuerst soll der Begriff der algebraischen Erweiterung untersucht werden. Dieser spielt eine große Rolle bei dem Problem der Auflösung einer Gleichung.
Es sei uns ein Zahlkörper K vorgegeben.

<u>Def.1:</u> Eine Zahl α heißt algebraisch über dem Körper K genau dann, wenn es Koeffizienten $a_0,\dots,a_n \in K$ gibt, so daß α eine Wurzel der Gleichung $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$ ist. Im anderen Fall wollen wir α transzendent über K nennen.

<u>Bemerkung:</u> So ist jedes Element aus K algebraisch über K $(x-a=0)$.

<u>Def.2:</u> Unter $K[\alpha]$ wollen wir die Menge aller Zahlen der Gestalt $g(\alpha)=a_0+a_1\alpha+\dots+a_n\alpha^n$ verstehen, wobei $n \in N$ und $a_0,\dots,a_n \in K$.

<u>Bemerkung:</u> Es bleibt dem interessierten Leser überlassen, nachzuprüfen, daß $K[\alpha]$ einen Ring bildet.

<u>Def.3:</u> Man versteht unter der durch Adjunktion von α zu K entstehenden einfachen Erweiterung den Zahlkörper $K(\alpha)$, wobei die Elemente von $K(\alpha)$ die Gestalt

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \text{ mit } g(\alpha)\neq 0 \text{ und } f(\alpha),\ g(\alpha)\in K[\alpha] \text{ haben.}$$

Wir wollen nun als erstes eine wichtige Aussage darüber treffen, wann eine Gleichung der allgemeinen Gestalt

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad (1)$$

durch Radikale auflösbar ist.
Zuvor gehen wir aber zum Körper $R(a_0,\dots,a_n)$ über, indem wir die Koeffizienten $a_0,\dots,a_n$ adjungieren, und zwar zum Körper R der rationalen Zahlen.

Den erhaltenen Körper nennt man Rationalitätsbereich der vorgegebenen Gleichung. Wir wollen ihn mit Δ bezeichnen. Nun adjungieren wir zu Δ noch die Wurzeln $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ und nennen den erhaltenen Erweiterungskörper $\Omega = \Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ auch Normalkörper oder GALOISschen Körper der gegebenen Gleichung.
Mit diesen Bezeichnungen gilt der

Satz 1: Die Gleichung $f(x) = a_o x^n + \dots + a_n = 0$ ist genau dann in Radikale auflösbar, wenn der Normalkörper einen Erweiterungskörper $\Sigma = \Delta(\varrho_1,\dots,\varrho_k)$ besitzt, den man dadurch erhält, daß man zu Δ gewisse Wurzeln

$\varrho_1 = \sqrt[n_1]{A_1}$, $\varrho_2 = \sqrt[n_2]{A_2}$, ... , $\varrho_k = \sqrt[n_k]{A_k}$ adjungiert, wobei A_1 in Δ, A_2 in $\Delta(\varrho_1)$, A_3 in $\Delta(\varrho_1,\varrho_2)$ usw. enthalten sind.

Beweis: 1.Teil: Unter der Voraussetzung, daß die Gleichung durch Radikale auflösbar ist, lassen sich die Wurzeln der Gleichung aus ihren Koeffizienten und Radikalen $\varrho_1, \dots ,\varrho_k$ durch endliche Kombination der vier Grundrechenarten gewinnen. Da der Körper $\Sigma = \Delta(\varrho_1, \dots ,\varrho_k)$ jedoch die Koeffizienten $a_o, \dots ,a_n$ ebenso wie die Radikale $\varrho_1, \dots ,\varrho_k$ enthält, müssen auch die Wurzeln $\alpha_1, \dots ,\alpha_n$ in Σ liegen, da jeder Körper bezüglich der Grundrechenarten abgeschlossen ist. Damit ist Ω als kleinster Zahlkörper, der Δ und $\alpha_1, \dots ,\alpha_n$ enthält, ein Teilkörper von Σ.
Wenn wir nun umgekehrt davon ausgehen, daß Ω ein Teilkörper von Σ ist, so sind die Wurzeln $\alpha_1, \dots ,\alpha_n$ unserer Gleichung in Σ enthalten. Somit lassen sich die Wurzeln aus gewissen Radikalen $\varrho_1, \dots ,\varrho_k$ und bestimmten Zahlen aus Δ darstellen. Da jedoch $\Delta = R(a_o, \dots ,a_n)$, kann jede Zahl aus Δ aus den Ko-

effizienten erzeugt werden. Daher kann man die Wurzeln der Gleichung durch endliche Kombination der vier Grundrechenarten aus $a_o, \dots, a_n$ und den Radikalen erzeugen. Dies bedeutet, daß die Gleichung durch Radikale auflösbar ist. ∎

Es soll nun im weiteren gezeigt werden, daß es für algebraische Gleichungen vom Grade $n \geq 5$ keine Auflösungsformel allgemeiner Art gibt. Auf Grund von Satz 1 wissen wir, daß eine beliebige algebraische Gleichung vom Grade n genau dann durch Radikale auflösbar ist, wenn der GALOIS-Körper $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ in einem Erweiterungskörper $\Delta(\varrho_1, \dots, \varrho_k)$ enthalten ist, der aus Δ durch Adjunktion bestimmter Radikale $\varrho_1 = \sqrt[n_1]{A_1}$ bis $\varrho_k = \sqrt[n_k]{A_k}$ hervorgeht, wobei jeweils A_i zu $\Delta(\varrho_1, \dots, \varrho_{i-1})$ gehören sollte.
Bei genauerer Betrachtung erkennt man, daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen kann, daß die $n_1, \dots, n_k$ Primzahlen sind. Der geneigte Leser möge sich davon leicht selbst überzeugen.
Wir adjungieren jetzt zu Δ jeweils eine primitive p_1-te, ..., p_k-te Einheitswurzel, wobei die Bezeichnung $p_1, \dots, p_k$ darauf verweisen soll, daß wir die $n_1, \dots, n_k$ schon als Primzahlen ansehen. Den so erzeugten Körper $\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ wollen wir mit G bezeichnen. Wenn unsere Gleichung durch Radikale auflösbar ist, so ist sicherlich ihr Normalkörper Ω im Körper $G(\varrho_1, \dots, \varrho_k)$ enthalten. Tritt der Fall ein, daß ein Radikand A_i eines Radikals ϱ_i die Gestalt $A_i = a^{p_i}$ hat, wobei a ein Element aus dem Körper $G(\varrho_1, \dots, \varrho_{i-1})$ ist, dann stellt die Adjunktion des Radikals ϱ_i zu $G(\varrho_1, \dots, \varrho_{i-1})$ keine echte Erweiterung dar. Von dieser Überlegung ausgehend, kommen wir zum
<u>Satz 2:</u> Ist A_i nicht die p_i-te Potenz eines beliebigen Elemen-

tes aus dem Körper $G(\rho_1, \ldots, \rho_{i-1})$, so ist das Polynom $x^{p_i}-A_i$ über $G(\rho_1, \ldots, \rho_{i-1})$ irreduzibel.

<u>Beweis:</u> Wir führen den Beweis indirekt, indem wir annehmen, daß das Polynom $x^{p_i}-A_i$ über $G(\rho_1, \ldots, \rho_{i-1})$ sich in die Form $x^{p_i}-A_i = \varphi(x)\psi(x)$ zerlegen läßt, wobei φ und ψ Polynome über $G(\rho_1, \ldots, \rho_{i-1})$ sind. Ist ε eine primitive p_i-te Einheitswurzel und x_o eine beliebige Nullstelle, so lassen sich die anderen Nullstellen x_r in der Gestalt $x_r = \varepsilon^r x_o$ schreiben. Damit nimmt das konstante Glied b des Polynoms φ die Form

$$b = (-1)^r x_{\nu_1} x_{\nu_2} \ldots x_{\nu_r} = \varepsilon'(-x_o)^r \text{ mit } \varepsilon' = \varepsilon^{\nu_1} \ldots \varepsilon^{\nu_r}$$

und $1 \leq r < p_i$ an. ε' ist offensichtlich eine p_i-te Einheitswurzel und es gilt: $b^{p_i} = \varepsilon'^{p_i}(-x_o)^{rp_i} = (-1)^{rp_i} A_i^r$, d.h. $A_i^r = (-1)^{rp_i} b^{p_i}$. Da jedoch $1 \leq r < p_i$ und p_i Primzahl, sind r und p_i teilerfremd, somit existieren ganze Zahlen s und t mit $rs + tp_i = 1$. Damit gilt: $A_i = A_i^{rs+p_i t} = A_i^{rs} A_i^{p_i t} = ((-1)^{rs} b^s A_i^t)^{p_i}$. Somit ist entgegen unserer Annahme A_i die p_i-te Potenz eines Elementes aus $G(\rho_1, \ldots, \rho_{i-1})$. ∎

Zur weiteren Vorbereitung des Hauptsatzes benötigen wir noch 4 Hilfssätze, von denen der nächste ohne Beweis angegeben werden soll.

<u>Satz 3:</u> Gilt $\rho_i = \sqrt[p_i]{A_i} \notin G(\rho_1, \ldots, \rho_{i-1})$, so ist

$$\rho_i^m \in G(\rho_1, \ldots, \rho_{i-1}) \Longleftrightarrow p_i \text{ teilt } m.$$

<u>Satz 4:</u> Die Gleichung möge durch Radikale auflösbar sein und α sei eine Wurzel dieser Gleichung. Ferner gelten die wie oben vereinbarten Bezeichnungen. Dann existieren Radikale $\rho_1 = \sqrt[p_1]{A_1}, \ldots, \rho_h = \sqrt[p_h]{A_h}$ $(h \leq k)$ mit $A_1 \in G$,

$A_2 \in G(\rho_1), \ldots, A_h \in G(\rho_1, \ldots, \rho_{h-1})$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

1. $\alpha = u_o + \rho_h + u_2\rho_h^2 + \ldots + u_{p_h-1}\rho_h^{p_h-1}$ (2), wobei $u_i \in G(\rho_1, \ldots, \rho_{h-1})$ gilt,

2. $\rho_1 \notin G, \rho_2 \notin G(\rho_1), \ldots, \rho_h \notin G(\rho_1, \ldots, \rho_{h-1})$,

3. $\alpha \notin G(\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_{h-1}), \alpha \notin G(\rho_1, \rho_3, \rho_4, \ldots, \rho_{h-1})$, $\ldots, \alpha \notin G(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{h-2}, \rho_h), \alpha \notin G(\rho_1, \ldots, \rho_{h-1})$.

Beweis: Wenn die Gleichung (1) durch die Radikale $\rho_1, \ldots, \rho_k$ auflösbar ist, dann liegt ihre Wurzel α in $\Omega = \Delta(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ und damit in einem Körper der Gestalt $G(\rho_1, \ldots, \rho_h)$ mit $h \leq k$. Somit läßt sich α in der Form $\alpha = a_o + a_1\rho_h + \ldots + a_{p_h-1}\rho_h^{p_h-1}$ darstellen, wobei $a_i \in G(\rho_1, \ldots, \rho_{h-1})$. Wir dürfen nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\rho_1 \notin G, \ldots$ $\ldots, \rho_h \notin G(\rho_1, \ldots, \rho_{h-1})$ und α in keinem Körper der Gestalt $G(\rho_1, \ldots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \ldots, \rho_h)$ mit $i = 1, \ldots, h$, liegt. Ansonsten könnte man in der Darstellung für α einige Radikale weglassen. Nun müssen wir noch zeigen, daß man bei passender Wahl des Radikals ρ_h erreichen kann, daß sein Koeffizient a_1 in der Darstellung für α gleich 1 ist.

Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_l \neq 0$ mit $(1 \leq l \leq p_h)$. Wir setzen dann $a_l\rho_h^l = \rho_h'$. Es gibt nun wieder ganze Zahlen s und t mit $sl + tp_h = 1$. Wir erhalten also: $\rho_h'^s = a_l^s\rho_h^{ls} = a_l^s\rho_h^{1-tp_h} = a_l^s\rho_h A_h^{-t}$

und somit:

$$\rho_h = v\rho_h'^s \text{ mit } v = A_h^t a_l^{-s} \in G(\rho_1, \ldots, \rho_{h-1}).$$

Offensichtlich ist $\rho_h' \notin K(\rho_1, \ldots, \rho_{h-1})$, sonst wäre auch $\varrho_h = v\varrho_h'^{s} \in K(\varrho_1, \dots ,\varrho_{h-1})$. Das sollte aber **nicht** der Fall sein. Wir ersetzen nun ϱ_h durch ϱ_h' und betrachten wieder die Darstellung (2) für α:

$$\alpha = a_o + a_1 v\varrho_h'^{s} + a_2 v^2\varrho_h'^{2s} + \dots + \varrho_h' + \dots$$
$$\dots + a_{p_h-1} v^{p_h-1}\varrho_h'^{(p_h-1)s} \qquad (3) \quad .$$

In dieser Darstellung sind alle Potenzen $\varrho_h'^{vs}$ voneinander verschieden; wäre nämlich $\varrho_h'^{v_2 s} = \varrho_h'^{v_1 s}$ (mit $v_1 > v_2$), so würde $\varrho_h'^{(v_1-v_2)s} = 1$ gelten, und nach dem angegebenen Satz 3 müßte $(v_1-v_2)s$ durch p_h teilbar sein. Wegen der Darstellung $sl + tp_h = 1$ kann s aber nicht durch p_h teilbar sein und wegen $0 < v_1-v_2 < p_h$ ist auch v_1-v_2 nicht durch p_h teilbar. Somit sind also für $v_1 \neq v_2$ alle Potenzen $\varrho_h'^{v_1 s}$ und $\varrho_h'^{v_2 s}$ voneinander verschieden.

Es sei nun $vs = qp_h + r$. Dann ist

$$\varrho_h'^{vs} = (\varrho_h'^{p_h})^q \varrho_h'^{r} = b\varrho_h'^{r} \text{ mit } b = (\varrho_h'^{p_h})^q \in G(\varrho_1, \dots ,\varrho_{h-1}).$$

Wenn nun v die Werte 1 bis p_h-1 durchläuft, so durchläuft r in bestimmter Reihenfolge $1, \dots ,p_h-1$. Dann kann (3) in der Form

$$\alpha = u_o + \varrho_h' + u_2\varrho_h'^{2} + \dots + u_{p_h-1}\varrho_h'^{p_h-1}$$

geschrieben werden.

Wir kommen nun zum nächsten Satz, dessen Beweis an dieser Stelle den Rahmen des Artikels sprengen würde, den aber der interessierte Leser in jedem guten Algebrabuch finden kann.

<u>Satz 5:</u> Wenn die Gleichung (1) durch Radikale $\varrho_1, \dots ,\varrho_k$ mit den Wurzelexponenten $p_1, \dots ,p_k$ auflösbar ist, so sind die ϱ_i ganzrationale Funktionen der Wurzeln der Glei-

chung (1) mit Koeffizienten aus dem bekannten Körper G.

Jörg Dimler
Mathematik-Student
5. Studienjahr

Fortsetzung folgt!

Preisaufgaben

T 55 Vereinfache folgenden Ausdruck:

1

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$$

T 56 Löse folgendes Gleichungssystem:

1

$$\frac{x_1 - a_1}{m_1} = \frac{x_2 - a_2}{m_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{m_n}$$

$$x_1 + \dots + x_n = a$$

$$(m_i \neq 0\ ,\ i = 1,\dots,n)$$

T 57 Finde solche Werte für p und q, daß die Lösungen der quadratischen Gleichung

1

$$x^2 + px + q = 0$$

gleich p und q sind.

T 58 Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete und die Summe der anderen Kathete mit der Hypotenuse bekannt sind.

2

T 59 Beweise:

2

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}$$

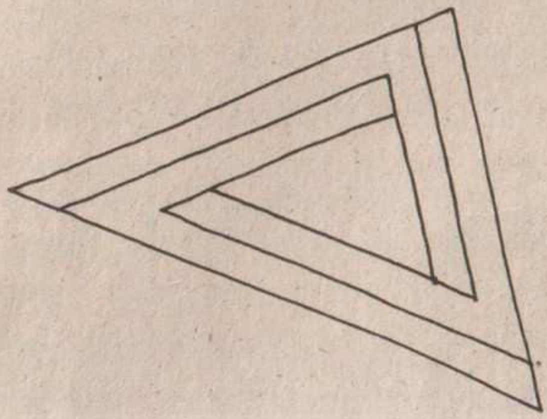
T 60

1	От станции А отправился поезд, который идёт со скоростью 30 км/ч через некоторое время за ним отправился второй поезд со скоростью 40 км/ч. Оба поезда должны были прибыть на станцию В в одно и то же время, но когда поезд прошёл 2/3 расстояния между станциями, его скорость уменьшилась вдвое, поэтому второй поезд догнал первый, не доезжая до станции В 8 км. Определить расстояние между станциями А и В.

Einsendeschluß: 1. 3. 1988

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: C. Dahmke, J. Dimler, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 20. 10. 1987
Titelseite: M. Torke

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	21 (1987) 11	S. 161–176



wurzel

12 · 87

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
21. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

20 Jahre WURZEL – Gelegenheit zu Rückblick und Ausschau

Siegmundsburg ist ein kleiner Ort am Rennsteig, an dem die Sektion Sportwissenschaft der Friedrich-Schiller-Universität ein Trainingszentrum unterhält. Dieser Ort liegt ca. 94 Kilometer von Jena entfernt. Aber auch von wesentlich weiteren Wegen ließen sich die ehemaligen Mitglieder der Redaktion nicht abschrecken, um das 20-jährige Bestehen "ihrer" Zeitschrift zu feiern, natürlich zusammen mit den Aktiven und in der gemeinsamen Überzeugung, daß die WURZEL immer jung bleibt.
Unsere Schülerzeitschrift WURZEL wurde mit der Zielstellung gegründet, die Leser an die Mathematik heranzuführen, ihnen Anregung zur Beschäftigung mit der Mathematik über den Schulstoff hinaus zu geben und das Mathematikstudium vorzustellen. Letzteres auch, um Mut.zu machen, sich für diesen Studienwunsch zu entschließen.
Das erste Heft erschien im Januar 1967. Daß bereits damals ein Rieseninteresse der Schüler an der Mathematik bestand, bewies die sich sprunghaft entwickelnde Nachfrage. Die Grenzen der Vervielfältigung mit Wachsmatrizen waren schnell erreicht. (Die im A4-Format erschienenen ersten Nummern sollen übrigens als Geheimtip unter Sammlern gelten.)
Beginnend mit Heft 5/67 erfolgte der Druck im Kleinoffset durch die Druckerei Volkswacht. Unverändert ist seither die durch das fotomechanische Druckverfahren diktierte Notwendigkeit, jeden Monat ein im wahrsten Sinne druckreifes Manuskript fertigzustellen. Dramatische Spannung, wenn ein Autor seinen Artikel verspätet abliefert, die Aufgaben noch fehlen oder am Semesterende alle Redaktionsmitglieder im Prüfungsstreß stecken. In solchen Bewährungssituationen zeigte sich, welch verschworenes Kollektiv die WURZEL-Mannschaft darstellt. Kennzeichnend für die Zeitschrift als rein studentische Aktivität ist der zwangsläufig damit verbundene ständige Austausch der Mitarbeiter. Jedes Jahr werden Studenten des er-

sten Semesters neu integriert, werden andere nach ihrem Studienabschluß verabschiedet. Allen, die einmal zum WURZEL-Kollektiv gehörten, sind diese Jahre in prägender Erinnerung. Während des Wochenendes in Siegmundsburg wurden nicht nur Erinnerungen an die gemeinsame Arbeit, sondern auch an die traditionellen WURZEL-Feiern ausgetauscht. Sie waren von Musizieren, Singen, Gedichten und Sketchen geprägt. Mit Schmunzeln wurde an eine WURZEL-Hymne, gedichtet zum 5-jährigen Jubiläum und eine eigene Fußballmannschaft zu einem Sektionssportfest erinnert. Ins Gedächtnis zurückgerufen wurden gemeinsame Urlaubsfahrten und die Tatsache, daß einige auch ihren Ehepartner in der WURZEL-Redaktion fanden.
Nach wie vor ist Werbung für das Mathematikstudium eine wichtige Aufgabe unserer Zeitschrift. Beim Zusammentreffen der verschiedenen Jahrgänge entbrannte eine lebhafte Diskussion darüber, welches die Gründe sind, daß andere Studienrichtungen wie Elektronik, Chemie, Physik und Informatik attraktiver wirken. Liegt es an der hohen Abstraktheit der Mathematik, dem zu wenig bekannten Profil des Studiums oder einem unklaren Einsatzbild des Diplommathematikers in der Industrie? Alle waren sich aber darin einig, daß Zielstellung und Zielgruppe der WURZEL auch ihren weiteren Weg bestimmen werden. Und Einigkeit bestand auch in dem Wunsch, die Zeitschrift so interessant und vielseitig zu gestalten, daß die Leser mit innerer Spannung auf das nächste Heft warten. Dieser Aufgabe wird unsere WURZEL nur gewachsen sein, wenn sich viele (ehrenamtliche) Autoren qualifizierter Beiträge finden, und auch Sie, lieber Leser, uns durch eingesandte Anregungen, Kritik und Beiträge helfen.

Gregor Weske

Preisaufgaben

T 61

1

Es seien a, b und c die Seiten eines Dreiecks. Beweise, daß dann die Gleichung

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

keine reellen Lösungen hat.

T 62

1

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$1 + y + \sqrt{x} = 0$$
$$y + \sqrt{x + 23} = 0$$

T 63

1

Berechne x

$$7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$$

T 64

1

Die Summe der ersten p Glieder einer arithmetischen Folge sei $s_p = q$ und die Summe der ersten q Glieder $s_q = p$. Berechne die Summe s_{p+q} der ersten p+q Glieder.

T 65

2

Beweise, daß das Quadrat einer Seite eines regelmäßigen in einem Kreis einbeschriebenen Fünfecks gleich der Summe des Quadrates des Radiuses dieses Kreises mit dem Quadrat einer Seite eines in diesem Kreis einbeschriebenen 10-Ecks ist.

T 66

1

Равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при вершине вращается вокруг прямой, перпендикулярной к его основанию, расстояние от оси вращения до высоты треугольника в н раз больше радиуса вписанной в треугольник окружности. Определить объём полученного тела вращения.

Einsendeschluß: 1. 4. 1988

Über die Auflösbarkeit gewisser Gleichungen (Fortsetzung)

Der 6. und letzte Satz zur Vorbereitung des Satzes von Ruffini und Abel hat einen rein kombinatorischen Hintergrund.

Satz 6: Sei $T = R(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ der durch Adjunktion jeweils einer primitiven p_1-ten, ... ,p_k-ten Einheitswurzel $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ zum Körper der rationalen Zahlen entstehende Erweiterungskörper. Dann gilt, daß jede rationale Beziehung über T in der Form $\varphi(x_1, \ldots, x_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ gleich Null bei beliebiger Permutation der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ erhalten bleibt, wobei die $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ elementarsymmetrische Polynome sind.

Beweis: Sei $\alpha_1 = x_1, \ldots, \alpha_n = x_n$ eine beliebige Belegung der Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Die Werte der Polynome dafür seien $\sigma_1 = p_1, \ldots, \sigma_n = p_n$. Nach Voraussetzung sollte gelten, daß $\varphi(\alpha_1, \ldots \alpha_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$ ist. Da wir für $x_1 = \alpha_{i_1}, \ldots, x_n = \alpha_{i_n}$ bei den elementarsymmetrischen Polynomen dieselben Werte $\sigma_1 = p_1, \ldots$ $\ldots, \sigma_n = p_n$ erhalten. Damit folgt aus $\varphi(x_1, \ldots, x_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0$ mit obiger Ersetzung: $\varphi(\alpha_{i_1}, \ldots \alpha_{i_n}, p_1, \ldots, p_n) = 0$. Da die α_{i_j} beliebig gewählt waren, gilt $\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}, \sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0$. ∎

Nach diesen Vorbemerkungen sind wir nun in der Lage, den bekannten Satz über die Nichtauflösbarkeit von algebraischen Gleichungen anzugeben und zu beweisen. Der Satz geht auf die beiden Mathematiker RUFFINI und ABEL zurück und trägt deshalb auch ihren Namen.

Satz von Ruffini und Abel:

Für die algebraischen Gleichungen vom Grade $n \geq 5$ gibt es keine allgemeine Formel, durch die jeweils eine Wurzel jeder dieser Gleichungen durch Radikale darstellbar ist.

Beweis: Wir gehen davon aus, daß es wenigstens für eine Wurzel einer jeden algebraischen Gleichung

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} -+ \dots +(-1)^n \sigma_n = 0$$

vom gegebenen Grade $n \geq 5$ eine allgemeine Formel gibt mit $x_1 = r(\varrho_1, \dots ,\varrho_h, \sigma_1, \dots ,\sigma_n)$, wobei r eine rationale Funktion in $\varrho_1, \dots ,\varrho_h, \sigma_1, \dots ,\sigma_n$ mit Koeffizienten aus $R(\varepsilon_1, \dots ,\varepsilon_k)$ ist. Natürlich soll r unabhängig von der Art der betrachteten Gleichung sein.
Nun sind nach dem Satz 5 die $\varrho_1, \dots ,\varrho_h$ ganzrationale Funktionen in den Wurzeln $x_1, \dots ,x_n$ mit Koeffizienten aus $G = \Delta(\varepsilon_1, \dots ,\varepsilon_k)$. Außerdem gilt $\Delta = R(\sigma_1, \dots ,\sigma_n)$, d.h. die $\varrho_1, \dots ,\varrho_h$ sind Funktionen in $x_1, \dots ,x_n, \sigma_1, \dots ,\sigma_n$ mit Koeffizienten aus T. Also ist $\varrho_i = r_i(x_1, \dots ,x_n, \sigma_1, \dots ,\sigma_n)$. Wegen unserer Annahme sind die $r_i(x_1, \dots ,x_n, \sigma_1, \dots ,\sigma_n)$ von der speziellen Gestalt unserer Gleichung unabhängig.
Wir betrachten nun eine spezielle Permutation s der Variablen $x_1, \dots ,x_n$. Und zwar diejenige, welche x_1 in x_2, x_2 in x_3, x_3 in x_4, x_4 in x_5, x_5 in x_1 überführt und im Falle $n > 5$ die restlichen Wurzeln unverändert läßt.
Also $$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & \dots & n \end{pmatrix} .$$
Es gilt nun, daß sich der Wert des Radikals ϱ_1 bei der Anwendung von s auf die Wurzeln nicht ändert, da $\varrho_1 = r_1(x_1, \dots ,x_n, \sigma_1, \dots ,\sigma_n) = \sqrt[p_1]{A_1}$ und A_1 eine rationale Funktion in $\sigma_1, \dots ,\sigma_n$ mit Koeffizienten

aus T ist. Somit stellt die Gleichung $\varrho_1^{p_1} = A_1$ eine rationale Beziehung zwischen $x_1, \ldots, x_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ mit Koeffizienten aus T dar. Indem wir Satz 6 anwenden, können wir schlußfolgern, daß

$s(\varrho_1^{p_1}) = s(A_1)$ bzw. wegen $s(\varrho_1^{p_1}) = (s(\varrho_1))^{p_1}$ und $s(A_1) = A_1$: $s(s(\varrho_1)^{p_1}) = A_1$ gilt, d.h. $s(\varrho_1)$ ist ebenfalls eine p_1-te Wurzel aus A_1. Somit folgt, daß $s(\varrho_1) = \varepsilon_1^z \varrho_1$, wobei z eine entsprechende nichtnegative ganze Zahl ist. Es gilt dann weiterhin

$s^m(\varrho_1) = s^{m-1}(s(\varrho_1)) = \varepsilon_1^z(s^{m-1}(\varrho_1)) = \varepsilon_1^{mz}\varrho_1$.

Folglich gilt nun $s^5(\varrho_1) = \varrho_1 = \varepsilon_1^{5z}\varrho_1$, d.h. $\varepsilon_1^{5z} = 1$, da s^5 die identische Permutation ist.

Wir betrachten zum Abschluß unseres Beweises noch die Permutationen

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & \ldots & n \end{pmatrix} \text{ und } u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Es gelten die Beziehungen $tu = s$, $t^3 = u^3 = I$, wobei $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$. Nun kann man analog - wie oben gezeigt - nachweisen, daß man passende nichtnegative ganze Zahlen μ und λ wählen kann, so daß die Gleichungen

$t(\varrho_1) = \varepsilon_1^{\mu}\varrho_1$ und $u(\varrho_1) = \varepsilon_1^{\lambda}\varrho_1$ mit $\varepsilon_1^{3\mu} = \varepsilon_1^{3\lambda} = 1$

gelten. Somit ist $\varepsilon_1^z = \varepsilon_1^{\mu+\lambda}$ und damit $\varepsilon_1^z = 1$. Damit ändert also die Permutation s den Wert des Radikals ϱ_1 tatsächlich nicht.

Auf analogem Wege kann man sich davon überzeugen, daß durch die Permutation s auch die Werte der Radikale $\varrho_2, \ldots, \varrho_h$ nicht geändert werden.

Wir betrachten nochmals die Gleichung

$$x_1 = r(\varrho_1, \ldots, \varrho_h, \sigma_1, \ldots, \sigma_n) .$$

Nach Satz 6 bleibt die Gleichung bei Anwendung von s unverändert, d.h. $s(x_1) = r(s(\varrho_1), \dots, s(\varrho_h), s(\sigma_1), \dots, s(\sigma_n))$. Weiterhin gilt aber $s(x_1) = x_2$, $s(\varrho_i) = \varrho_i$, $s(\sigma_j) = \sigma_j$. Zusammenfassend erhalten wir also: $x_1 = r(\varrho_1, \dots \varrho_h, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = x_2$. Dies steht aber im Widerspruch zur Unabhängigkeit der Wurzeln $x_1, \dots, x_n$, womit der Satz bewiesen wäre.

Abschließende Bemerkung:

Die Formulierung des Satzes sowie dessen Beweis lassen noch die Möglichkeit offen, daß zwar keine allgemeine Formel für beliebige algebraische Gleichungen vom Grade $n = 5$ existiert, es aber doch für jede algebraische Gleichung eine von deren Gestalt abhängige Auflösung in Radikale geben könnte. Deshalb soll an dieser Stelle noch ein Satz erwähnt werden, der hier nicht bewiesen werden soll.

<u>Satz:</u> Jede Gleichung vom Primzahlgrad $p \geq 5$ mit rationalen Koeffizienten, die über dem Körper der rationalen Zahlen irreduzibel ist und nur ein Paar von echt komplexen Wurzeln besitzt, ist nicht durch Radikale auflösbar.

Jörg Dimler
Mathematik-Student
5. Studienjahr

Aufgaben zur gegenseitigen Lage von Ebenen und Körpern

1. Vorbemerkung

Das Lösen von Aufgaben, bei denen die Lage von Ebenen und Körpern zueinander (Bestimmen von Schnittfiguren) Gegenstand der Problemstellung ist, trägt wesentlich zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens bei und findet vielseitige Anwendung in der Technik.
Im Unterricht der POS werden solche Aufgaben nur an einigen Stellen bei der Behandlung der "Darstellenden Geometrie" in Klasse 7 und der "Körperberechnung und Körperdarstellung" in Klasse 10 (ab Schuljahr 1987/88 in Klasse 9) gelöst. Dabei erfolgt noch eine Einschränkung auf Spezialfälle wie zum Beispiel

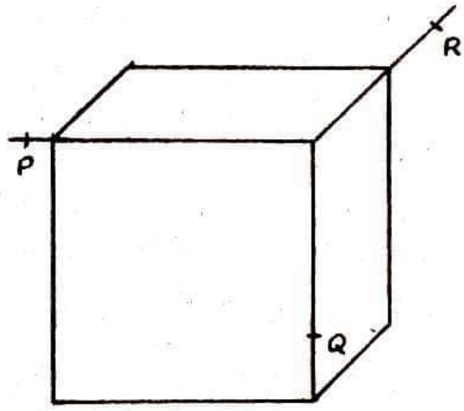
- Bestimmen der wahren Größe und Gestalt von Schnittfiguren an Körpern mittels Zweitafelprojektion - Schnittebene durch Zweitafelbild oder durch Aufgabentext bereits senkrecht zur Aufrißebene vorgegeben,
- Bestimmen der wahren Größe und Gestalt von Seitenflächen einzelner Körper (Pyramiden) mittels Ein- und Zweitafelprojektion - die für das Umklappen in die Bildebene erforderliche Gerade ist durch die in der Bildebene liegende Grundkante des Körpers bereits vorgegeben.

Diese Vorgehensweise im Unterricht der POS dient der Vermittlung grundlegender Verfahrenskenntnisse, die für das Lösen komplexerer Probleme erforderlich sind. Allerdings werden im Unterricht der POS kaum solche komplexen Aufgaben zur gegenseitigen Lage von Ebenen und Körpern gelöst. Deshalb wird in diesem Beitrag angedeutet, wie beim Lösen von Problemen, die keine "Spezialfälle" sind, die erforderlichen Bedingungen zur Anwendung der im Schulunterricht vermittelten Verfahrenskenntnisse geschaffen werden können. Desweiteren werden Aufgaben für eine selbständige Auseinandersetzung mit der angegebenen Thematik angeführt.

2. Erörterungen an einem Beispiel

Aufgabe:

Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a, der von einer Ebene, die durch drei vorgegebene Punkte P, Q und R festgelegt ist, geschnitten wird.



1. Bestimme durch Konstruktion im Schrägbild die Art der Schnittfigur!
2. Bestimme zeichnerisch die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur und den Neigungswinkel der Schnittebene PQR zur Ebene, die durch die Grundfläche des Würfels bestimmt ist.

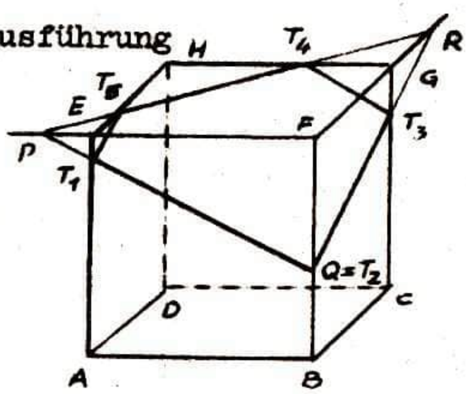
Lösung des ersten Teils der Aufgabe:

Theoretische Grundlagen

(1) Eine Ebene ist eindeutig bestimmt durch
- drei Punkte, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen,
- eine Gerade und einen außerhalb der Geraden liegenden Punkt,
- zwei sich schneidende Geraden,
- zwei zueinander parallel liegenden Geraden.

(2) Zwei Ebenen, die sich schneiden, haben eine Gerade (Schnittgerade) gemeinsam.
Drei Ebenen, die sich paarweise schneiden, bilden eine räumliche Ecke, d. h. ihre Schnittgeraden schneiden sich in einem Punkt.

Ausführung



(1) Die Gerade PQ liegt sowohl in der Ebene ABFE (vordere Seitenfläche des Würfels) als auch in der Schnittebene PQR. Somit ist sie Schnittgerade beider Ebenen.

T_1 und T_2 (=Q) sind deshalb

Eckpunkte der gesuchten Schnittfigur.

(2) Analog ist das Vorgehen bezüglich der Geraden QR.
T_3 ist ein weiterer Eckpunkt der gesuchten Schnittfigur.

(3) Analog ist auch das Vorgehen bezüglich der Geraden PR.
T_4 und T_5 ergeben sich als weitere Eckpunkte der gesuchten Schnittfigur.

(4) Die Verbindung der Eckpunkte T_1, T_2, T_3, T_4 und T_5 liefert die gesuchte Schnittfigur $T_1T_2T_3T_4T_5$.

Ergebnis

Die Schnittfigur ist ein (unregelmäßiges) Fünfeck, bei dem die Seiten $\overline{T_1T_5}$ und $\overline{T_2T_3}$ bzw. $\overline{T_1T_2}$ und $\overline{T_3T_4}$ parallel zueinander liegen.

Kontrolle und Determination

(1) "Dreiebenenprobe" anhand Punkt (2) der theoretischen Grundlagen
Die Schnittebene PQR und die Ebenen ABFE (vordere Seitenfläche des Würfels) und EFGH (Deckfläche des Würfels) schneiden sich paarweise. Ihre Schnittgeraden T_1T_2, T_4T_5 und EF müssen sich deshalb in einem Punkt (räumlicher Eckpunkt) schneiden.
Nach Voraussetzung liegt P auf der Geraden EF und nach Konstruktionsvorgehen auch auf den Geraden T_1T_2 bzw. T_4T_5.
Analog kann die Kontrolle bezüglich der räumlichen Eckpunkte Q und R geführt werden.

(2) $\overline{T_1T_2}$ liegt in der Ebene ABFE und $\overline{T_3T_4}$ in der Ebene DCGH.
Da die vordere und hintere Seitenfläche eines Würfels parallel zueinander liegen, können sich die Geraden T_1T_2 und T_3T_4 nicht schneiden. Nach Konstruktion liegen T_1T_2 und T_3T_4 beide in der Schnittebene PQR.
Wenn sich zwei Geraden nicht schneiden, aber in ein und derselben Ebene liegen, dann sind sie parallel zueinander.
Analog kann die Begründung für die Parallelität von $\overline{T_1T_5}$ und $\overline{T_2T_3}$ geführt werden.

Lösung des zweiten Teils der Aufgabe:

Um die eingangs erwähnten Verfahrenskenntnisse aus der POS anwenden zu können, ist zur Lösung der Aufgabe eine andere Darstellungsweise zu wählen.

Variante 1: Zweitafelbild

Vorüberlegung

Die Strategie besteht hier darin, das Zweitafelbild so anzulegen, daß die Schnittebene senkrecht auf der Aufrißebene steht. In unserem Fall ist es zweckmäßig, mit dem Grundriß zu beginnen. Maßgebend ist dabei die Gerade PR, die in derselben Ebene wie die Deckfläche des Würfels liegt. Steht der Würfel auf der Grundrißebene, so liegt die Strecke $\overline{PR}$ parallel zur Grundrißebene und wird dort in wahrer Länge abgebildet. Die Rißachse ist dann so zu legen, daß sie senkrecht auf P'R' steht. Somit wäre dann auch die Schnittebene selbst senkrecht zur Aufrißebene und wird dort als Gerade durch die Bildpunkte P"=R" und Q" bestimmt.
Jetzt kann die Konstruktion der wahren Größe und Gestalt der Schnittfigur nach dem bekannten Verfahren erfolgen.

Fortsetzung folgt

Dr. Rainer Dörr
Sektion Mathematik
Bereich Methodik

Halbreguläre Polygone

Auf der Peripherie eines Kreises werden n-Punkte in gleichen Abständen angeordnet. Werden diese Punkte hintereinander durch Strecken verbunden, erhalten wir reguläre Polygone mit gleich langen Seiten und gleich großen Innenwinkeln. Wir gehen nun davon aus, mittels einer Bewegung (Drehung, Abb. 1), zu jedem Punkt seinen Bildpunkt auf der Peripherie des Kreises zu konstruieren. Dabei ist das Drehzentrum mit dem Kreismittelpunkt identisch. Die Drehrichtung sei beliebig, wobei jedoch im folgenden stets von einer Linksdrehung ausgegangen wird. An die Größe des Drehwinkels wird folgende Bedingung gestellt: $\alpha < \frac{360^\circ}{n}$

Die erhaltenen Bildpunkte bezeichnen wir mit 1 ... n.

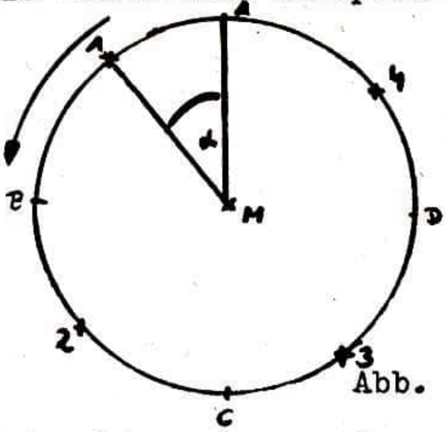


Abb. 1

Nun kann die weitere Konstruktion der halbregulären Polygone beginnen. Es sei noch darauf hingewiesen, daß es sich bei bestimmten n lediglich um Näherungskonstruktionen handelt, wenn n kein Teiler von 360 ist.

Betrachten wir n = 3:

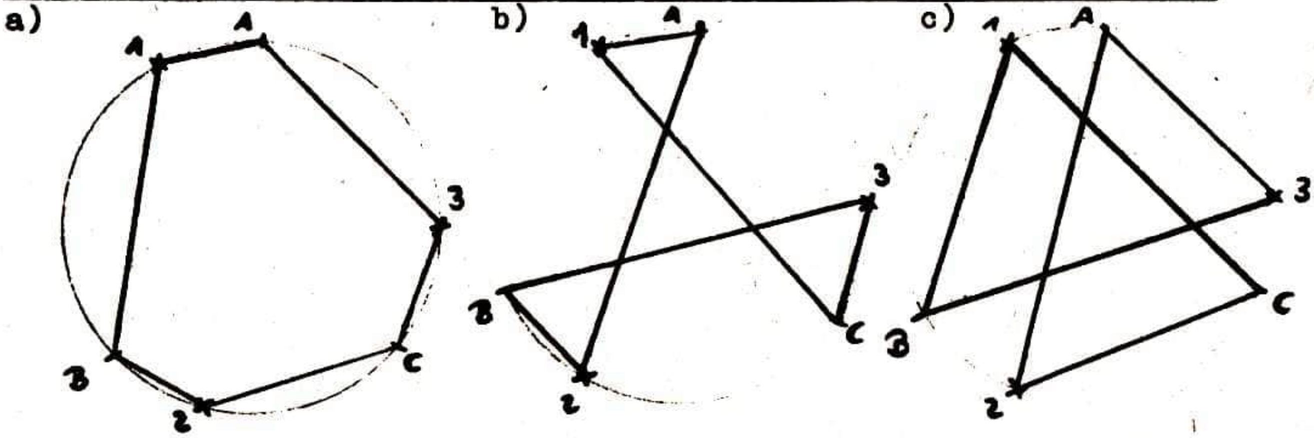
Wie bisher beschrieben, legen wir die Punkte A, B, C fest und konstruieren die Bildpunkte 1, 2, 3. Es sei nun die Aufgabe gestellt, jeden Orginalpunkt mit 2 Bildpunkten zu verbinden und umgekehrt jeden Bildpunkt mit 2 Orginalpunkten zu verbinden. Für den Fall n = 3 existieren 3 solche Möglichkeiten:

a) $A <^{1}_{3}$ $B <^{2}_{1}$ $C <^{3}_{2}$

b) $A <^{1}_{2}$ $B <^{2}_{3}$ $C <^{3}_{1}$

c) $A <^{3}_{2}$ $B <^{1}_{3}$ $C <^{2}_{1}$

Diese 3 Möglichkeiten stellen folgende 3 halbreguläre Polygone dar (Abb. 2):



Kreis und Bezeichnungen stellen nur noch Hilfsmittel dar. Diese entstandenen Figuren werden als Polygone 1. Art bezeichnet. Zu jeder dieser erhaltenen Form existiert infolge des Dualitätsprinzips ein weiteres halbreguläres Polygon. Dabei ordnet man jeder Strecke der Figur ihren Mittelpunkt zu. Diese Mittelpunkte werden wiederum miteinander verbunden in der Reihenfolge, wie die Figuren 1. Art in einem Zug durchzeichenbar sind (Abb. 3).

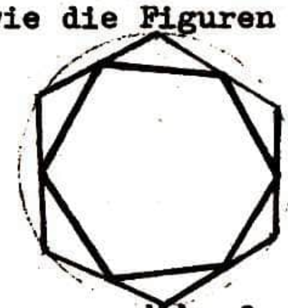


Abb. 3

Dabei entstehen erneut in sich abgeschlossene Figuren, die wir als halbreguläre Polygone 2. Art bezeichnen (Abb. 4). Sie haben durch diese Konstruktionsmöglichkeit nicht den gleichen Umkreis wie die Figuren 1. Art erhalten.

Diese Konstruktionen lassen sich auf beliebige n-Punkte übertragen. Einen gewissen Sonderfall bilden n = 1 und n = 2.

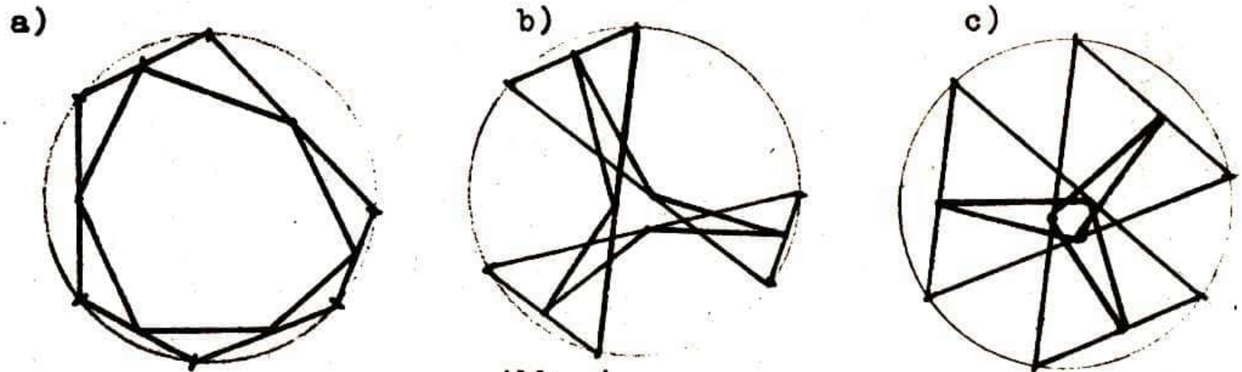


Abb. 4

Gleichfalls besteht die Möglichkeit, aus halbregulären Polygonen 2. Art halbreguläre Polygone 1. Art zu erzeugen, etwa durch Anlegen von Tangenten an die Eckpunkte der Figuren 2. Art bzw. auch wiederum durch Streckenhalbierung. Darüber soll jedoch hier weiter nichts aufgeführt werden.

Betrachten wir noch einige Besonderheiten, so ergibt sich, daß alle Strecken in einem halbregulären Polygon 2. Art gleiche Länge besitzen und in halbregulären Polygonen 1. Art jeweils 2 Streckenlängen auftreten. Ist n ungerade, so sind alle entstehenden halbregulären Polygone in einem Zug zeichenbar. Ist n gerade, sind in einigen Fällen mehrere Züge nötig.

Es sei noch, ohne Beweisangabe, eine Möglichkeit zur Berechnung der Anzahl A_n halbregulärer Polygone gegeben.

n	A_n	A_n 1. Art	A_n 2. Art
1	0	0	0
2	2	1	1
3	6	3	3
4	12	6	6
5	20	10	10
6	30	15	15
7	42	21	21
8	56	28	28
9	72	36	36
10	90	45	45
⋮			
n	n^2-n	$\frac{n^2-n}{2}$	$\frac{n^2-n}{2}$

$$A_n = n^2 - n$$

Als rekursive Vorschrift ergibt sich für die Anzahl:

$$A_{n+1} = A_n + 2n$$

Die Anzahl A_n setzt sich dabei als Summe aus 2 konvexen halbregulären Polygonen (im Beispiel Abb. 2a) und 4a) und n^2-n-2 nichtkonvexen halbregulären Polygonen (im Beispiel Abb. 2b,c) und 4b,c)) zusammen.

Zusammenfassend lassen sich halbreguläre Polygone mittels kongruenter Decktransformationen definieren. Während zur Definition regulärer Polygone die Äquivalenz der Ecken und die Äquivalenz der Kanten nötig ist, kann man Polygone mit äquivalenten Ecken (1. Art) oder Polygone mit äquivalenten Seiten (2. Art) mit gutem Recht halbregulär nennen.

Es bleibt nun dem Leser überlassen, weitere Eigenschaften der halbregulären Polygone zu untersuchen.

Literatur:

/1/ L. Fejes-Toth, Reguläre Figuren. B.G. Teubner-Verlagsgesellschaft Leipzig, 1965

/2/ Vorlesungsmitschriften zur Polyedergeometrie von J. Böhm, Jena 1983/84.

Frank Heinrich
Sektion Mathematik
Bereich Methodik

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: C. Dahmke, J. Dimler, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 11. 11. 1987
Titelseite: M. Torke

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	21 (1987) 12	S. 177–192