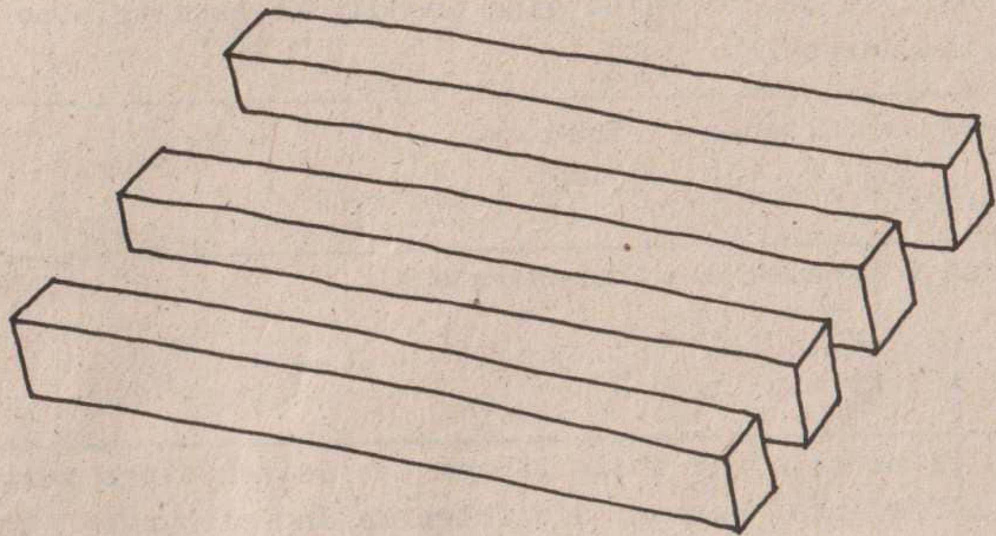


wurzel

1 · 88

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
22. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Preisaufgaben

U 1 Löse folgende Gleichung

$$2^{x-1} + 2^{x-4} + 2^{x-2} = 6{,}5 + 3{,}25 + 1{,}625 + \ldots \quad ,$$

wobei die rechte Seite eine unendliche geometrische Reihe darstellt.

U 2 Beweise folgende Gleichung:

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 \quad .$$

U 3 Löse folgendes Gleichungssystem:

$$x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17$$
$$x + xy + y = 5 \quad .$$

U 4 Es seien m, n und p die Längen der Seiten eines beliebigen Dreiecks. Beweise die folgende Ungleichung:

$$m^2 + n^2 + p^2 < 2(mn + mp + np) \ .$$

U 5 Bestimme die Menge aller x, für die gilt:

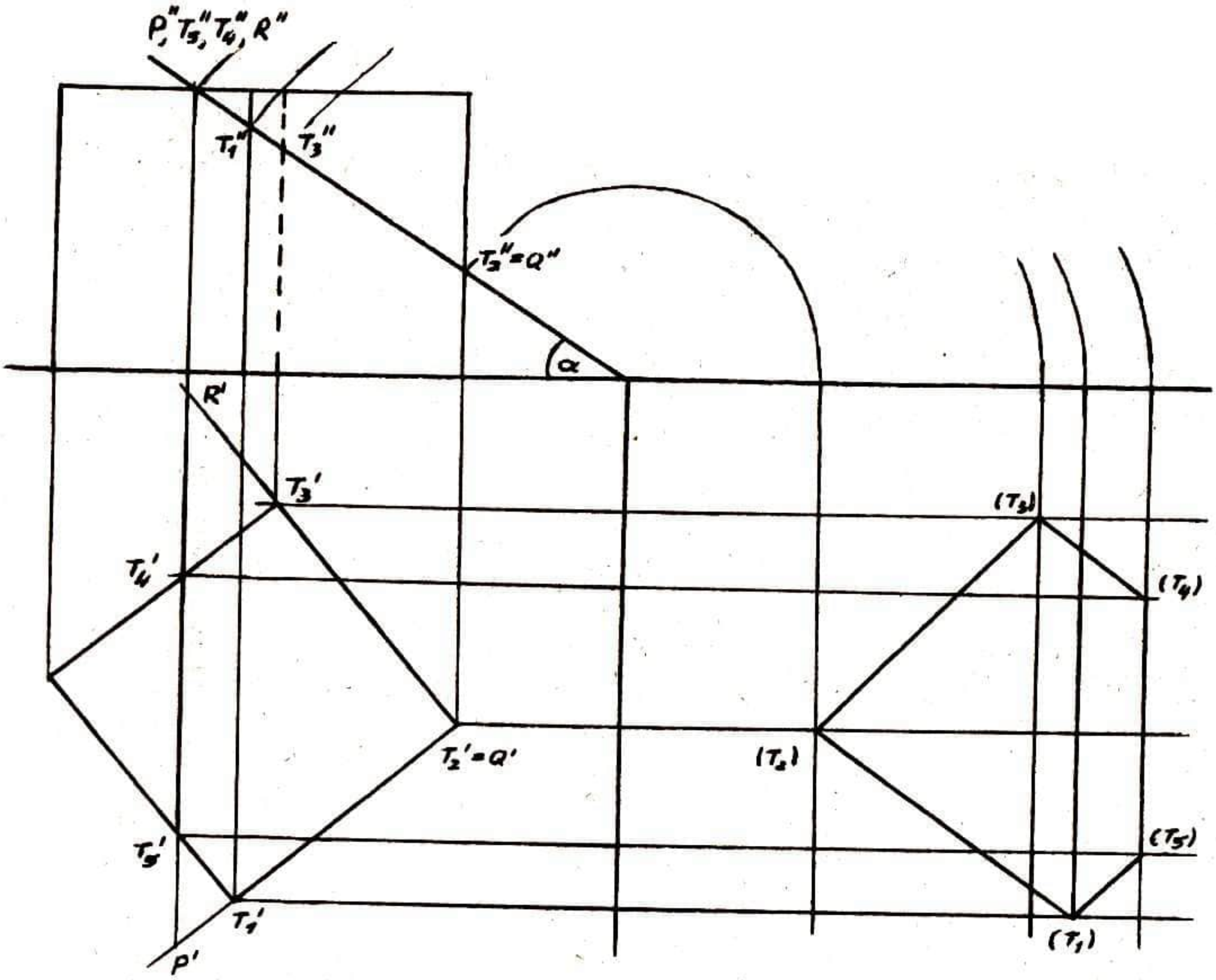
$$\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2 \quad .$$

U 6 Хорда окружности равна I0 см. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой - секущая, парал лельная касательной. Определить радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен I2 см.

Einsendeschluß: 1. 5. 1988

Aufgaben zur gegenseitigen Lage von Ebenen und Körpern (Fortsetzung)

Ausführung



Das Fünfeck $(T_1)(T_2)(T_3)(T_4)(T_5)$ entspricht nach Konstruktion der wahren Größe und Gestalt des Fünfecks $T_1T_2T_3T_4T_5$.
Als zeichnerische Kontrolle kann das Ergebnis des ersten Aufgabenteils, wonach $\overline{T_1T_2} \parallel \overline{T_3T_4}$ und $\overline{T_1T_5} \parallel \overline{T_2T_3}$ ist, genutzt werden. Der Neigungswinkel der Schnittebene mit der Bildebene ist dem Aufriß zu entnehmen.

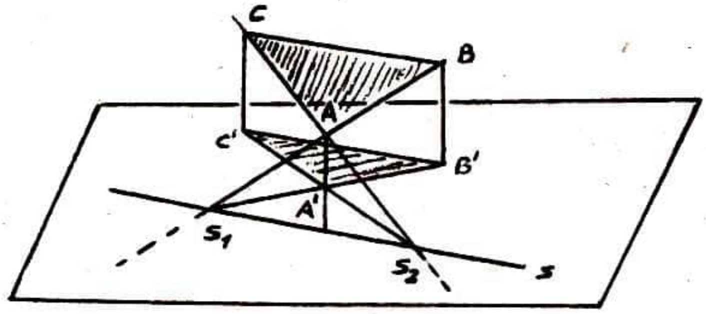
Variante 2: Eintafelbild

Theoretische Grundlagen

Bei dieser Konstruktionsmöglichkeit ist für das Umklappen der Schnittfigur in die Bildebene erst die Schnittgerade der Schnittebene mit der Bildebene zu bestimmen. Im Unterricht der POS wurde dafür der Begriff "nullte Höhenlinie h_0" verwendet.

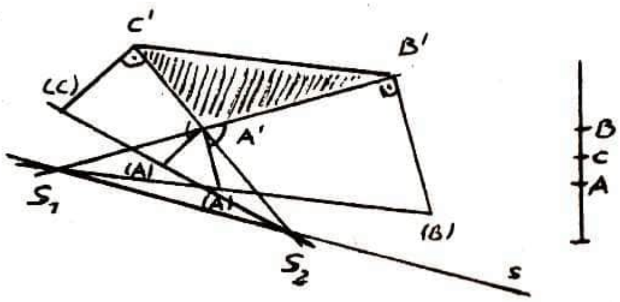
Zur Konstruktion dieser Höhenlinie werden die "Durchstoßpunkte" zweier in der Schnittebene liegenden Geraden durch die Bildebene benötigt.

Am Beispiel eines schräg zur Bildebene im Raum liegenden Dreiecks ABC sei das erläutert. Die Geraden durch die Eckpunkte A,B bzw. AC durchstoßen die Bildebene in den Punkten S_1 und S_2.



Die Gerade s durch die Punkte S_1 und S_2 ist die gesuchte Schnittgerade der Dreiecksebene mit der Bildebene. Zur Kontrolle kann noch der Durchstoßpunkt der Geraden durch die Eckpunkte B und C des Dreiecks konstruiert werden, der ebenfalls auf der Schnittgeraden s liegen muß.

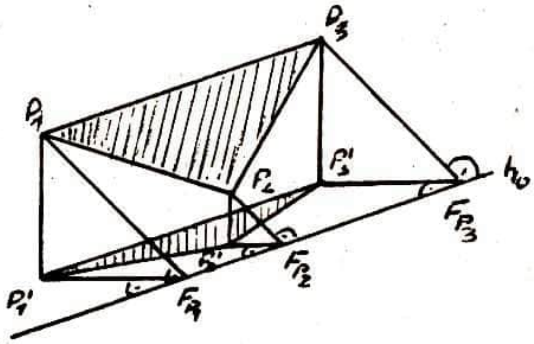
Die Konstruktion der Punkte S_1 und S_2 erfolgt durch das Umklappen der Dreiecke $S_1B'B$ bzw. $S_2C'C$ in die Bildebene - analog dem in der POS vermittelten Verfahren zur Bestimmung der wahren Länge einer Strecke und des Neigungswinkels einer Strecke gegen die Bildebene.



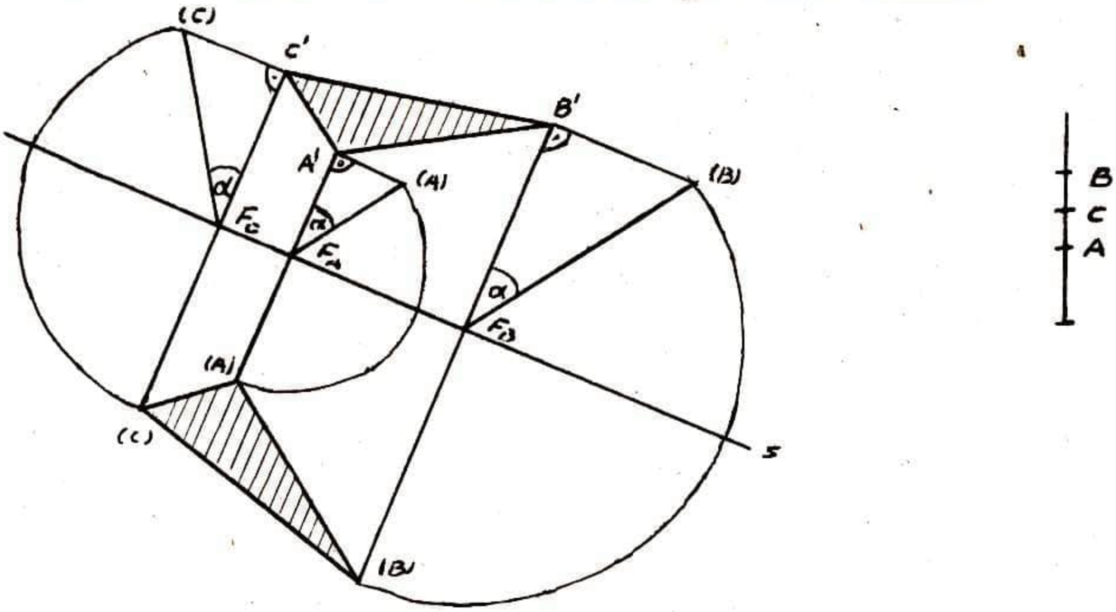
Ferner werden zur Konstruktion der wahren Größe und Gestalt der Schnittfigur mittels Eintafelbild noch "Fallinien" benötigt, d. h. die Geraden einer Ebene, die senkrecht zu den einzelnen Höhenlinien dieser Ebene verlaufen. Damit steht das Bild (der Riß) einer Fallinie ebenfalls senkrecht auf der "nullten Höhenlinie".

Für die einzelnen Dreiecke PF_PP', die vom Originalpunkt P, seinem Bildpunkt P' und dem Fußpunkt F_P der Fallinie durch den Originalpunkt auf der Höhenlinie h_0 gebildet werden, wurde in der POS der Begriff "Stützdreieck" benutzt.

Mittels dieser Stützdreiecke kann die Umklappung der Originalpunkte der Schnittfigur in die Bildebene konstruiert werden.

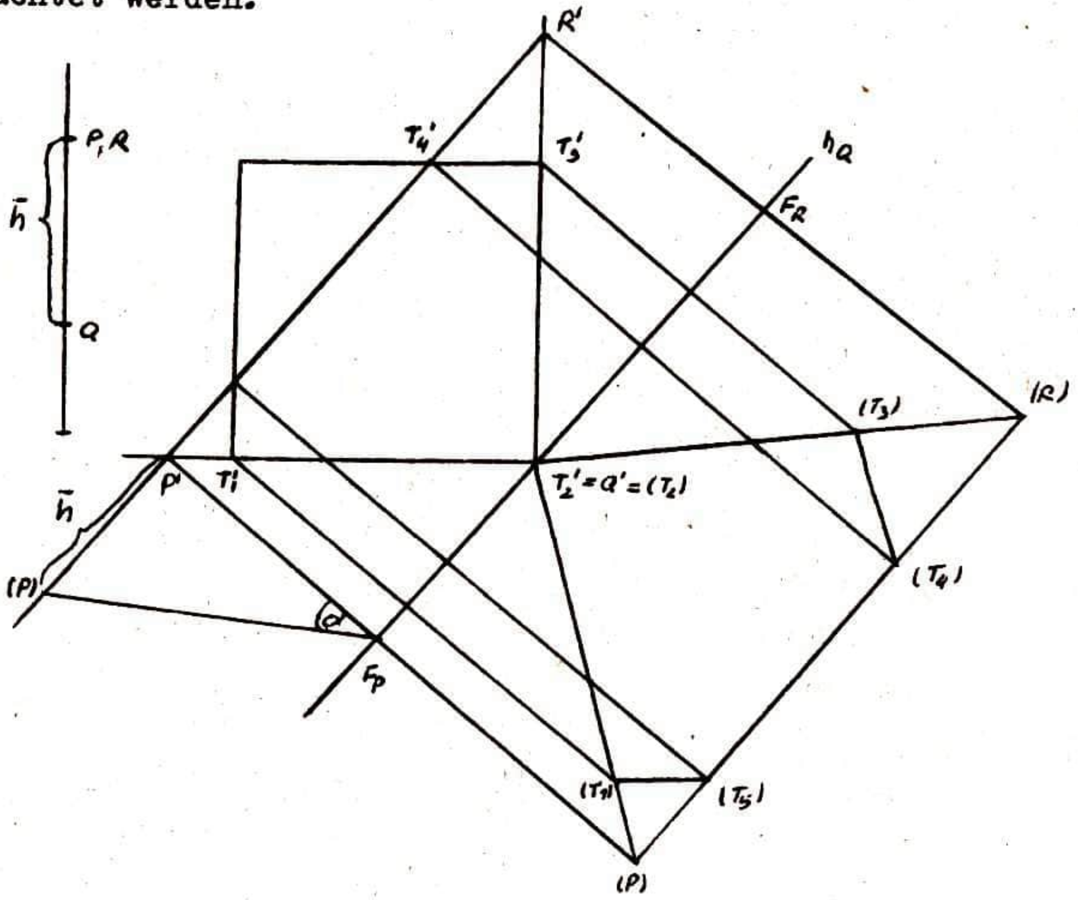


Die für das Stützdreieck erforderliche Seitenlänge PP' ist dem Höhenmaßstab des Eintafelbildes zu entnehmen. Das so konstruierte Dreieck (A)(B)(C) entspricht der wahren Größe und Gestalt des Dreiecks ABC. Der Neigungswinkel der Dreiecksebene zur Bildebene kann in einem der Stützdreiecke gemessen werden.



Ausführung

In unserer Aufgabe vereinfacht sich allerdings die Konstruktion der wahren Größe und Gestalt der Schnittfigur. Nach Voraussetzung ist $\overline{PR}$ parallel zur Bildebene und stellt somit selbst eine Höhenlinie der Schnittebene dar. Außerdem muß die Umklappung der Schnittfigur in die Bildebene nicht unbedingt um die Schnittgerade (nullte Höhenlinie) erfolgen, sondern kann durchaus auch um jede andere Höhenlinie der Schnittebene vorgenommen werden. Die Schnittfigur erscheint dann in der durch die gewählte Höhenlinie bestimmten Ebene, die parallel zur Bildebene liegt. Beim Einzeichnen der Stützdreiecke muß dann aber die neue Höhendifferenz der Originalpunkte zu dieser "Hilfs"-Bildebene beachtet werden.

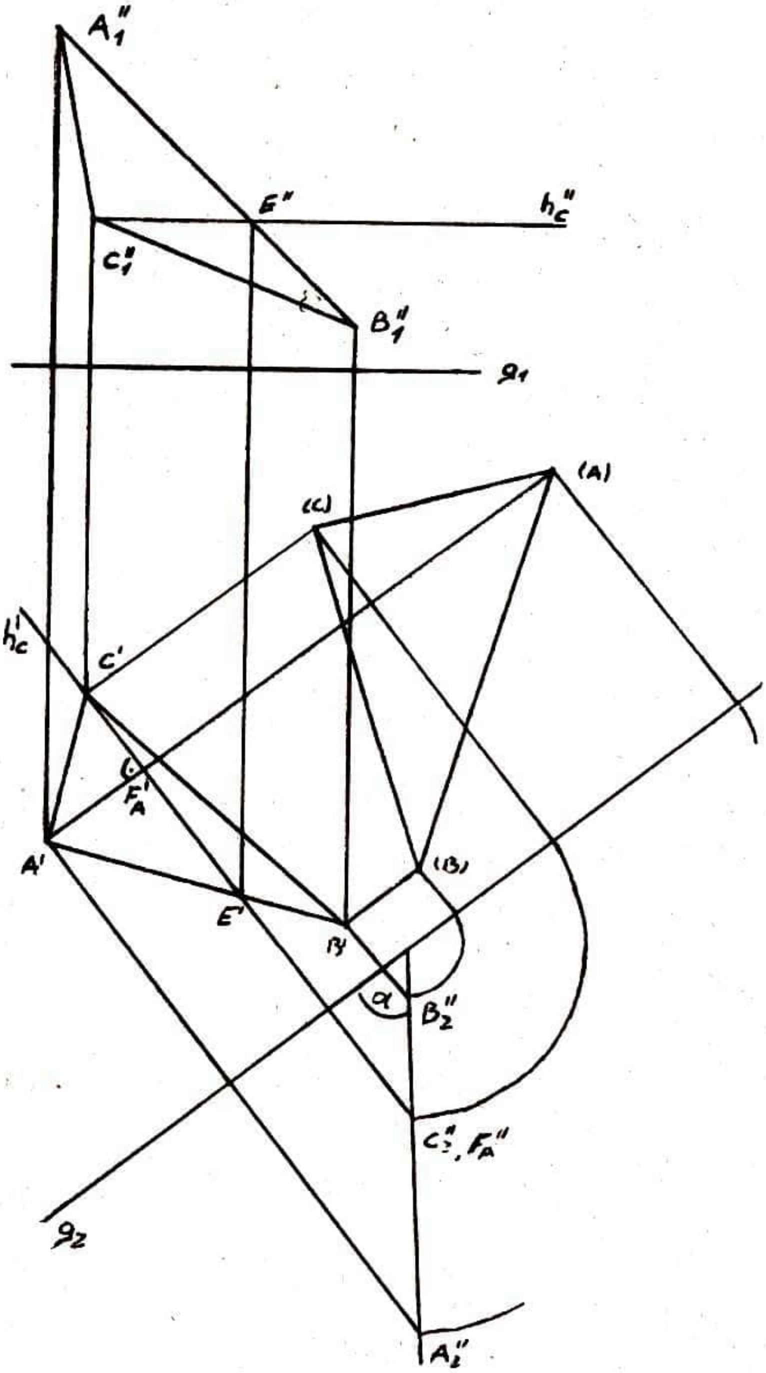


Für die Konstruktion wird zweckmäßigerweise der "niedrigste" Punkt der Schnittfigur, also $T_2 = Q$ gewählt. Die Parallele zu $\overline{P'R'}$ durch Q' ist die für die Umklappung erforderliche Höhenlinie h_Q. Außerdem vereinfacht sich die Konstruktion, wenn zunächst das Dreieck PQR in die "Hilfs"-Bildebene umgeklappt wird. Man kommt mit einem Stützdreieck aus, da P und R gleich hoch liegen. Mittels der Schnittpunkte der verlängerten Falllinien durch T_1', T_3', T_4' und T_5' mit den Dreiecksseiten des Dreiecks (P) (Q) (R) kann die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur $T_1T_2T_3T_4T_5$ sofort angegeben werden.
Die Kontrolle kann wie bei Variante 1 durchgeführt werden.
Der Neigungswinkel der Schnittebene mit der Bildebene kann dem Stützdreieck entnommen werden.

Determination

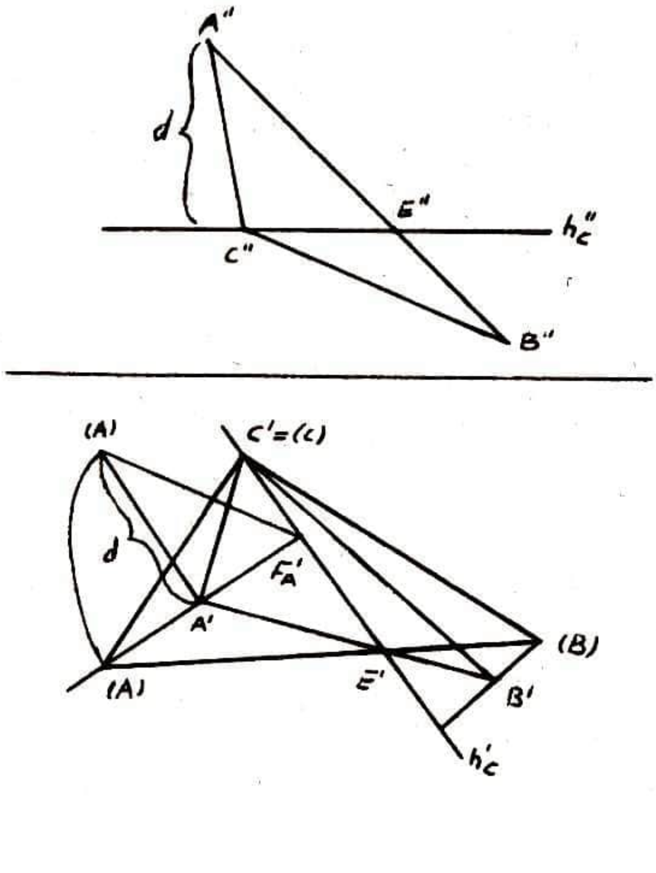
Nicht immer ist die Schnittebene wie in unserem Aufgabenbeispiel so durch drei nicht auf einer Gerade liegenden Punkte vorgegeben, daß zwei der Punkte auf einer zur Bildebene parallelen Geraden liegen. Deshalb ist die Variante 1 zur Lösung analoger Aufgaben allgemein nicht so einfach zu realisieren, auch bei Anwendung der Variante 2 können Schwierigkeiten auftreten. Eine Kopplung beider Varianten erweist sich als zweckmäßig.

Wiederum am Beispiel eines Dreiecks ABC in allgemeiner Lage im Raum sei das gekoppelte Vorgehen demonstriert.



Ausgehend von einer Darstellung des Dreiecks im Zweitafelbild wird eine zweite Aufrißebene gesucht, zu der das Dreieck ABC senkrecht steht, um das Verfahren nach Variante 1 vollziehen zu können. Zur Realisierung wird durch einen Eckpunkt des Dreiecks eine Höhenlinie gelegt, die, um einen weiteren Bezugspunkt zu erhalten, eine Dreieckseite schneiden muß. In unserem Fall wäre das die Höhenlinie durch den Eckpunkt C. Die zeichnerische Lösung wäre im Aufriß eine Parallele durch C_1'' zur Rißachse. Der somit erhaltene Schnittpunkt E" mit der Dreieckseite $\overline{A_1''B_1''}$ wird in den Grundriß übertragen. Durch sein Bild E' auf der Strecke $\overline{A'B'}$ mit dem Punkt C' ist das Bild der Höhenlinie im Grundriß bestimmt. Da die Fallinien durch die Eckpunkte A und B des Dreiecks senkrecht auf der Höhenlinie h_C stehen, muß die Rißachse der zweiten gesuchten Aufrißebene parallel zu den Fallinien der Dreiecksebene gezeichnet werden, damit die Dreiecksebene senkrecht auf der zweiten Aufrißebene steht (z. B. Parallele zu $A'F'_A$). Bei exakter Konstruktion müssen dann die Bildpunkte A''_2, B''_2 und C''_2 auf einer Geraden liegen, die mit der Rißachse den Neigungswinkel α der Dreiecksebene mit der Grundrißebene einschließt. Das weitere Vorgehen zur Bestimmung der wahren Größe und Gestalt des Dreiecks ABC bzw. der durch diese Ebene bestimmten Schnittfigur ist das bereits bekannte.

Das hier beschriebene Vorgehen empfiehlt sich besonders dann, wenn die Schnittfigur zunächst nicht im Aufriß darstellbar ist, sondern nur der Körper und die durch drei Punkte gegebene Schnittebene in allgemeiner Lage.
Ist allerdings die Schnittfigur als solche durch das Zweitafelbild dargestellt, kann nach der bereits dargestellten Konstruktion einer Höhenlinie im Auf- und Grundriß sofort die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur durch Paralleldrehen zur Grundrißebene konstruiert werden. Ist beispielsweise unser für die Demonstration gewähltes Dreieck ABC nicht die Schnittebene, sondern bereits die Schnittfigur, so läßt sich mittels des umgeklappten Stützdreiecks $A'F'_A(A)$ der Eckpunkt (A) des Dreiecks konstruieren. Da C auf der gewählten Höhenlinie liegt, ist C' gleich dem Eckpunkt (C) des Dreiecks. Ferner liegt der Eckpunkt (B) des



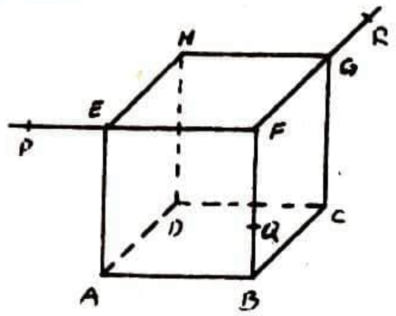
Dreiecks sowohl auf der Geraden durch (A) und E' als auch auf der Senkrechten zu h'_C durch B', so daß die Zuhilfenahme eines weiteren Stützdreiecks nicht erforderlich ist. Der Nachteil besteht in dieser Darstellung darin, daß sich die Bilder der Dreiecke A'B'C' und (A)(B)(C) gegenseitig überdecken.

3. Aufgaben zur selbständigen Bearbeitung

Hinweis

In einem der nachfolgenden Hefte werden eventuell erforderliche Lösungshilfen zur Bewältigung der Aufgaben bzw. die Lösungen selbst zur Kontrolle angegeben.

Aufgabe 1:



In unserem erörterten Beispiel schneidet die durch die Punkte P, Q und R festgelegte Ebene einen Würfel in einer (ebenen) Figur.
Konstruieren Sie die wahre Größe und Gestalt dieser Figur für $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{PF} = 6$ cm, $\overline{QF} = 2,5$ cm, $\overline{RF} = 5$cm!
Bestimmen Sie zeichnerisch den Neigungswinkel der Ebene PQR zur Grundrißebene!

Aufgabe 2:

Streckenlängen und Winkel, die sich konstruktiv ermitteln lassen, können auch berechnet werden. Dazu sind die bekannten Strahlensätze, die Satzgruppe des Pythagoras und andere in der Planimetrie vermittelten Sätze auf den Raum zu übertragen.
Entwickeln Sie für die Aufgabe 1 Formeln zur rationellen Berechnung der Seitenlängen der Schnittfigur und des Neigungswinkels der Schnittebene zur Bildebene!
Berechnen Sie die einzelnen Seitenlängen und den Neigungswinkel für die in Aufgabe 1 angegebenen Bedingungen, und vergleichen Sie die zeichnerisch und rechnerisch ermittelten Resultate miteinander!

Aufgabe 3:

Bei dem in Aufgabe 1 im Schrägbild dargestellten Sachverhalt seien die Punkte P, Q und R auf dem jeweiligen Strahl $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{FB}$ und $\overrightarrow{FG}$ frei beweglich.

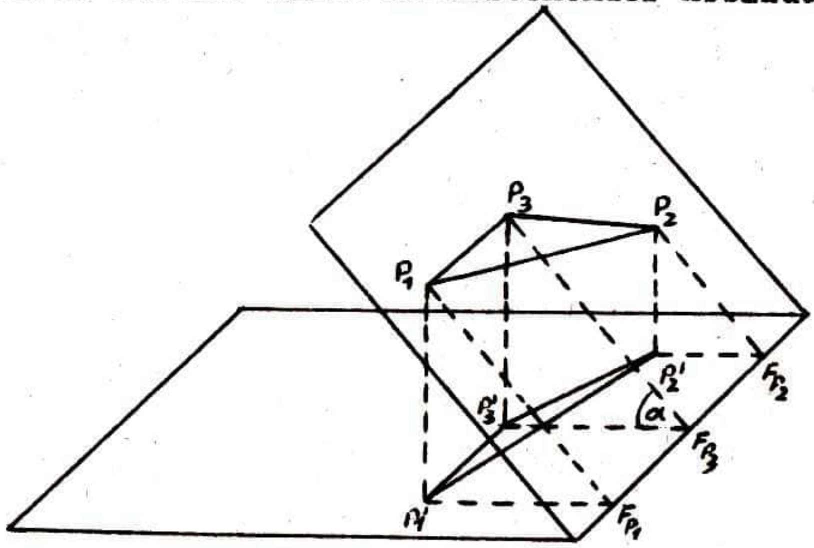
Geben Sie Bedingungen für die Lage von P, Q und R auf den jeweiligen Strahlen an, so daß nachfolgend angeführte Figuren beim Schnitt des Würfels durch die Ebene PQR entstehen!

a) gleichseitiges Dreieck
b) gleichschenkliges Dreieck
c) unregelmäßiges Dreieck
d) Quadrat
e) gleichschenkliges Trapez
f) regelmäßiges Fünfeck
g) beliebiges Sechseck
h) regelmäßiges Sechseck

Aufgabe 4:

Für den Flächeninhalt einer schräg zur Bildebene liegenden Figur gilt die Formel $A = \frac{A'}{\cos\alpha}$.
(A - Flächeninhalt der Originalfigur,
A' - Flächeninhalt der im Grundriß abgebildeten Figur,
α - Neigungswinkel der Figur zur Bildebene)

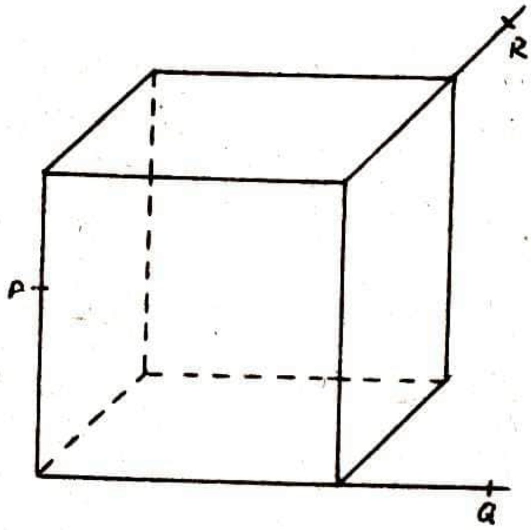
Leiten Sie mit Hilfe nebenstehender Abbildung die angegebene Formel her, indem Sie Zerlegungen bzw. Ergänzungen von ebenen Figuren nutzen!
Berechnen Sie mittels dieser Formel den Flächeninhalt der Schnittfigur von Aufgabe 1!



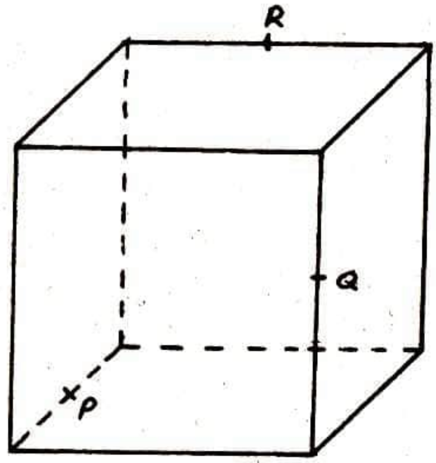
Aufgabe 5:

Durch ein Schrägbild ($q = \frac{1}{2}$) ist ein Würfel und eine Schnittebene mittels der Punkte P, Q und R vorgegeben.

5.1.



5.2.



Ermitteln Sie für die Abbildungen 5.1. und 5.2. die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur und den Neigungswinkel der Schnittebene zur Grundrißebene!

Dr. Rainer Dörr
FSU, Sektion Mathematik
Bereich Methodik

Inhaltsverzeichnis

Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras

In diesem Abschnitt soll der Satz des Pythagoras in zweierlei Hinsicht verallgemeinert werden. Zuerst soll seine Gültigkeit im dreidimensionalen euklidischen Raum untersucht werden und in einem zweiten Teil soll dieser Satz in der euklidischen Ebene variiert werden.

(1) Der Satz des Pythagoras besagt, daß die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks genauso groß wie der Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse ist. Sind also a, b die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks und c dessen Hypotenuse, dann gilt $a^2 + b^2 = c^2$. Bekannt ist die Möglichkeit zur Berechnung der Raumdiagonalen eines Quaders mit $e^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (Abb. 1). Betrachten wir den Quader und stellen uns die Aufgabe, die Figur in Teile zu zerlegen, in denen die Größe e, a, b, c Körperkanten sind und die Seitenflächen sämtlich rechtwinklige Dreiecke ausmachen, erfüllen 6 solche Teile die gestellte Forderung, wobei eine solche Figur schraffiert in Abb. 1 hervorgehoben ist. Eine derartige räumliche Figur wird als Orthoschem bezeichnet. Ein Orthoschem besitzt sämtlich rechtwinklige Dreiecke als Seitenflächen im dreidimensionalen Raum und ist durch einen total-orthogonalen Kantenzug (Abb. 2) ausgezeichnet. Dabei gilt: $a \perp b \perp c$

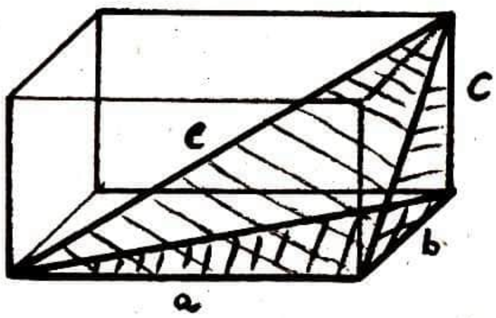


Abb. 1

Beim Vergleich mit Abb. 1 läßt sich unschwer die Beziehung $e^2 = a^2 + b^2 + c^2$ als richtig anerkennen. Diese Gleichung wird als "räumlicher Pythagoras" bezeichnet. Das Analogon zum rechtwinkligen Dreieck stellt somit das Orthoschem

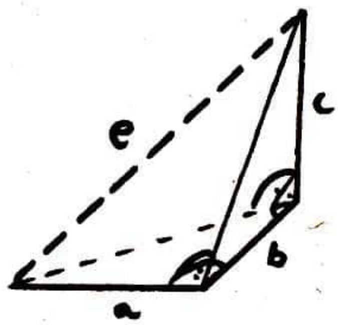


Abb. 2

(oder orthogonaltetraeder) im $\mathbb{R}^3$ dar und der "räumliche Pythagoras" ist eine analytische Möglichkeit der Beschreibung dieser Figur.

(2) Eine anders geartete Verallgemeinerung ergibt sich, wenn wir die Gültigkeit des Satzes untersuchen und dabei die Quadrate durch andere Figuren ersetzen. Die Gültigkeit für quadratische Flächen mit $a^2 + b^2 = c^2$ läßt sich auch in der Form schreiben, daß die Flächeninhalte $A_1 = a^2$, $A_2 = b^2$, $A_3 = c^2$ die Gleichung $A_1 + A_2 = A_3$ erfüllen. Es soll nun untersucht werden, welche Bedingungen an die Figuren über den Dreiecksseiten gestellt werden müssen, damit die genannte Gleichung für beliebige Figuren erfüllt ist. Natürlich erhebt sich sofort die Bedingung, daß das Dreieck rechtwinklig ist, also $a^2 + b^2 = c^2$ Gültigkeit besitzt. Da Quadrate einander stets ähnlich sind, soll als weitere Forderung, zunächst als Vermutung, formuliert werden, wenn die Figuren über Katheten und Hypotenuse ähnlich sind, dann gilt die Beziehung $A_1 + A_2 = A_3$.
Das soll im folgenden bewiesen werden:
Es ist bekannt, daß sich Flächeninhalte ähnlicher Figuren wie die Quadrate entsprechender Seiten bzw. Strecken verhalten. Es gilt somit am rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis $a^2 : b^2 : c^2 = A_1 : A_2 : A_3$. Aus dieser Proportion lassen sich mehrere Verhältnisgleichungen aufstellen.

(1) $\frac{a^2}{b^2} = \frac{A_1}{A_2}$ (2) $\frac{b^2}{c^2} = \frac{A_2}{A_3}$ (3) $\frac{a^2}{c^2} = \frac{A_1}{A_3}$

O.B.d.A. wählen wir 2 Proportionen aus, etwa (2) und (3).
Durch äquivalente Umformung ergeben sich aus (2) $A_2 = A_3 \cdot \frac{b^2}{c^2}$ und aus (3) $A_1 = A_3 \cdot \frac{a^2}{c^2}$. Die Addition von A_1 und A_2 liefert

$A_1 + A_2 = \frac{A_3 \cdot (a^2+b^2)}{c^2}$ und da nach unserer 1. Forderung $a^2 + b^2 = c^2$ ist, ergibt sich $A_1 + A_2 = A_3$.
Dieses Ergebnis läßt sich als Satz formulieren:

<u>S a t z :</u> Sind bei einem rechtwinkligen Dreieck die Figuren über den Katheten und der Hypotenuse ähnlich, dann erfüllen deren Flächeninhalte die Gleichung $A_1 + A_2 = A_3$.

Ein Beispiel mit Halbkreisen als ähnliche Figuren soll dies belegen.

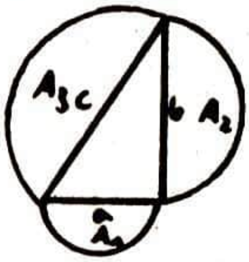


Abb. 3

$A_1 + A_2 = A_3$

Für die Halbkreisfläche A gilt:

$A = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$ und somit

$\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2$, woraus

$a^2 + b^2 = c^2$ folgt.

Literatur:

/1/ Pythagoras - müssen es immer Quadrate sein? in: alpha 3/85 W. Jungk, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1985

/2/ Polyedergeometrie in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung. J. Böhm/E. Hertel, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980.

Frank Heinrich
Sektion Mathematik
Bereich Methodik

Lösungsbedingungen

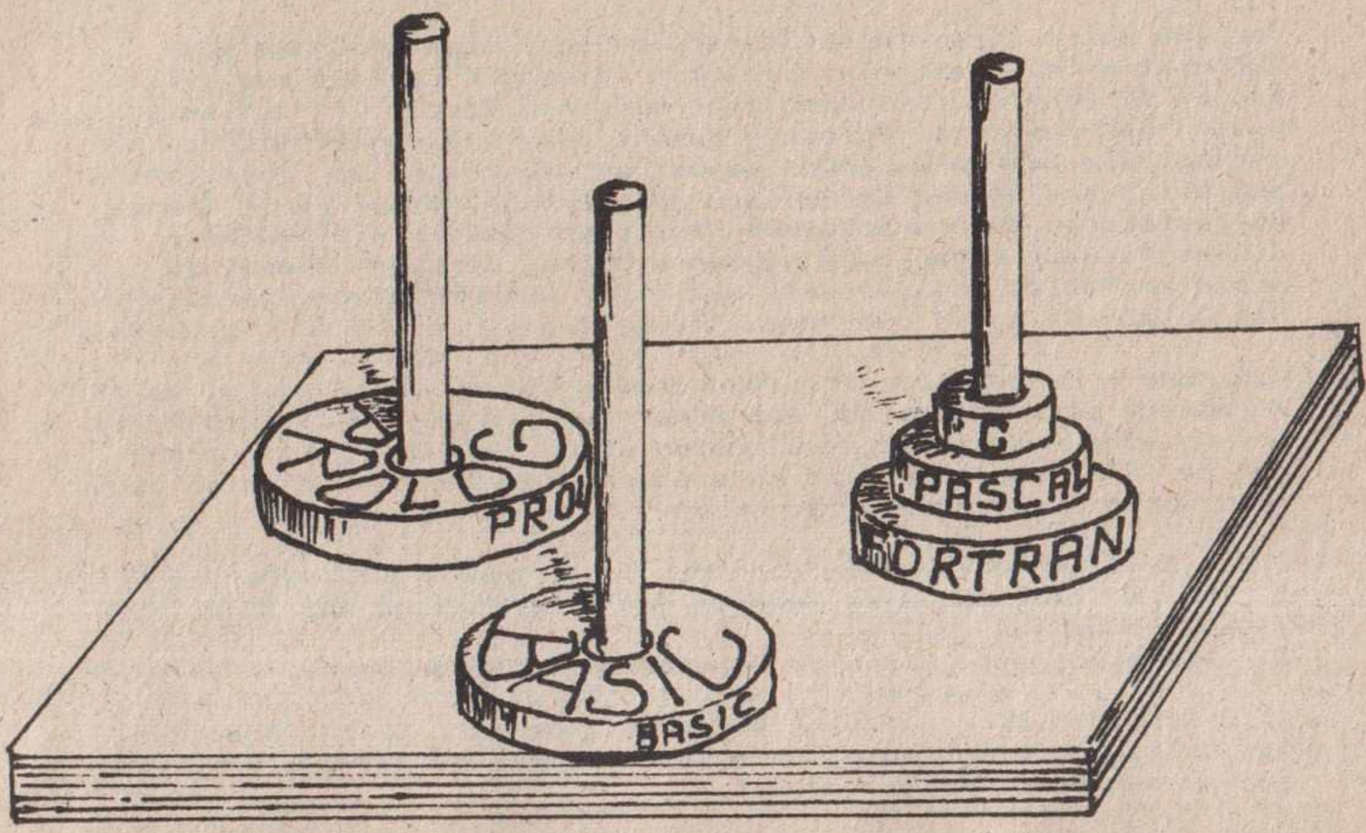
Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "Wurzelpreisaufgaben" an uns zu senden.

Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“
Leiter: Stefan Posselt
Chefredakteur: Eckhard Stein
Redaktion: C. Dahms, J. Dimler, N. Patzschke, O. Kotowski
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M. Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 9. 12. 87
Titelseite: M. Torke

Das Problem des Lucas



wurzel

2 · 88

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

22. Jahrgang ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Problem des Lucas

"Ein Objekt heißt rekursiv,
wenn es sich selbst teilweise enthält
oder durch sich selbst definiert ist."
(Niklaus Wirth, 1979)

Vor 100 Jahren brachte ein Monsieur Claus (das Anagramm des Mathematikers Lucas) ein Spiel mit folgender Legende auf den Markt: Zu Benares in Indien gibt es einen Tempel, in dem seit vielen Jahrhunderten Priester bemüht seien, einen Turm so zu versetzen, wie Brahma es ihnen selbst geboten habe. Der Turm besteht angeblich aus 64 der Größe nach geordneten und auf einer Stange aufgesteckten dünnen goldenen Blättchen. Sobald die Mönche dieses Ritual hinter sich gebracht haben, wird der Tempel zu Staub zerfallen und die Welt mit einem Donnerschlag untergehen. Das Spiel ist unter dem Namen "Türme von Hanoi" bekannt geworden.

Als Modell eignen sich drei senkrechte Stangen, die auf einem Holzbrett befestigt sind. Auf einer der Stangen (Nr.1) steckt am Anfang eine Anzahl unterschiedlich großer, in der Mitte durchbohrter Scheiben. Sie sind nach abnehmender Größe von unten nach oben übereinandergestapelt.

Diese Scheiben werden nun nach den folgenden Regeln versetzt:
1. Stecke immer nur eine Scheibe von einer Stange auf eine andere um.
2. Lege stets eine kleinere Scheibe auf eine größere.

Alle Scheiben sind auf eine andere Stange (Nr. 2) zu versetzen. Gesucht ist die optimale Lösung dieser Aufgabe, also ein Versetzen in möglichst wenig Schritten.

In diesem Artikel werden wir Programme zur Lösung dieses Problems erarbeiten und diskutieren. Darüber hinaus werden einige allgemeine Aussagen zur Anwendung rekursiver Prozeduren und Funktionen formuliert.

Die Scheiben bekommen der Größe nach die Nummern 1 bis n.
Die kleinste Scheibe trägt die Nr. 1.

<u>Problem:</u> Lege k Scheiben von a nach b!

<u>Problemlösung:</u>
Ist k=0,
so ist keine Versetzung
vorzunehmen.
Andernfalls
lege die obersten k-1 Scheiben
von Stange a nach Stange c,
dann die k-te Scheibe
von a nach b
und anschließend die obersten k-1 Scheiben
von Stange c nach Stange b.

Diese Vorschrift besitzt eine rekursive Struktur, denn um k-1 Scheiben zu versetzen, muß die gleiche Vorschrift wiederum angewandt werden (für k := k-1). Der Abbruch ist gegeben, wenn k=0 gilt.

Beispiel:

k=4 Scheiben von Stange a=3 nach Stange b=1:
(a) 3 Scheiben von Stange a=3 nach Stange c=2
(b) die 4. Scheibe von Stange a=3 nach Stange b=1
(c) 3 Scheiben von Stange c=2 nach Stange b=1

k=3 Scheiben von Stange a=3 nach Stange b=2:
(a) 2 Scheiben von Stange a=3 nach Stange c=1
(b) die 3. Scheibe von Stange a=3 nach Stange b=2
(c) 2 Scheiben von Stange c=1 nach Stange b=2

k=3 Scheiben von Stange a=2 nach Stange b=1:
(a) 2 Scheiben von Stange a=2 nach Stange c=3
(b) die 3. Scheibe von Stange a=2 nach Stange b=1
(c) 2 Scheiben von Stange c=3 nach Stange b=1

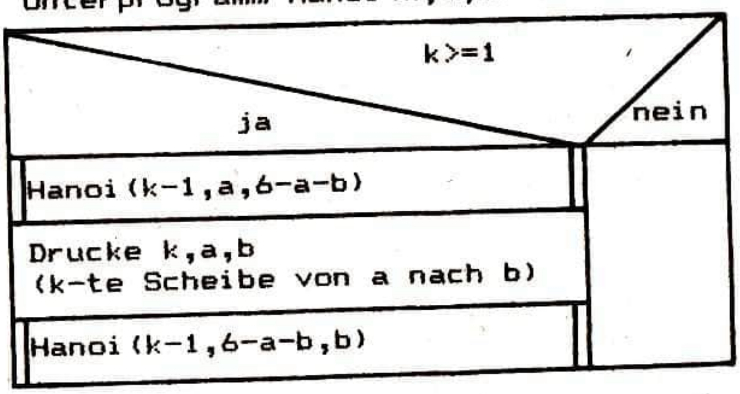
und so weiter

Mit der Formel c = 6-a-b kann die Nr. der jeweiligen "Hilfsstange" c berechnet werden.

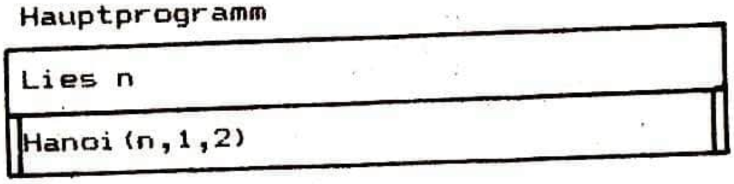
Die Vorschrift wird gestartet mit:
Alle n Scheiben von Stange a=1 nach Stange b=2.

Die Notation der Lösung kann auch in Form von Struktogrammen erfolgen:

Unterprogramm Hanoi(k,a,b)



Hauptprogramm



Das Struktogramm läßt sich leicht in ein Turbo-Pascal-Programm übertragen.

```
PROGRAM Tuerme_von_Hanoi;
VAR n, Anzahl: integer;

{$A-}
PROCEDURE Hanoi(k, a, b: integer);
BEGIN
IF k >= 1 THEN
  BEGIN
    Hanoi(k - 1, a, 6 - a - b);
    write(k : 3, ':', a, '=>', b);
    Anzahl := Anzahl + 1;
    Hanoi(k - 1, 6 - a - b, b)
  END
END;
{$A+}

BEGIN
clrscr;
write('Anzahl der Scheiben: ');
readln(n);
Anzahl := 0;
writeln('Bewegungen der einzelnen Scheiben:');
writeln('Scheibe : von => nach');
Hanoi(n, 1, 2);
writeln;
writeln('Anzahl der Bewegungen: ', Anzahl)
END.
```

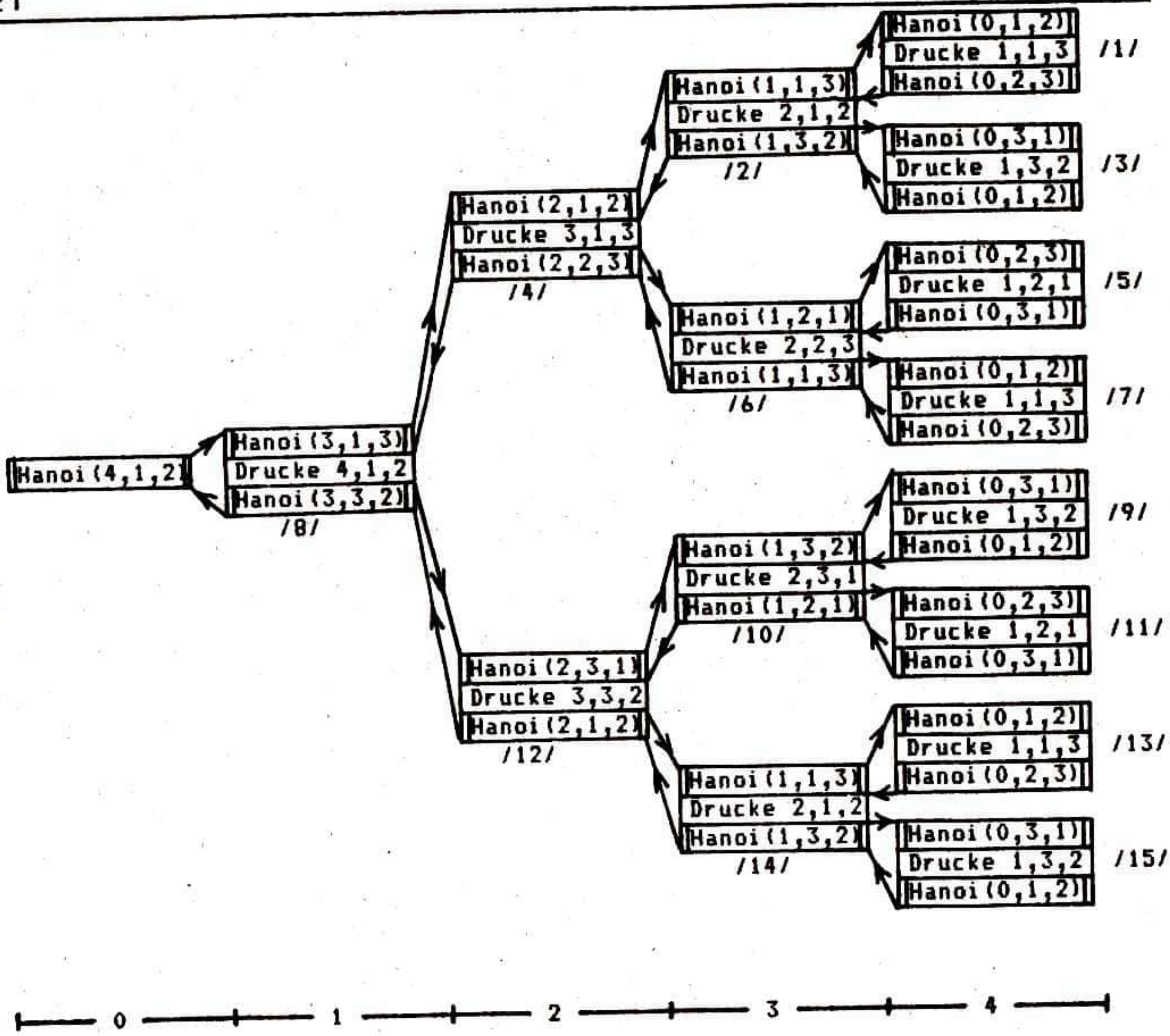
Mit der globalen Variablen Anzahl wird die Anzahl der Bewegungen ermittelt. Geben Sie das Programm z.B. in einen Personalcomputer 1715 ein und starten Sie es für verschiedene n. Ermitteln und begründen Sie den Zusammenhang zwischen n und Anzahl! Schätzen Sie ab, wie lange man benötigen würde, um 64 Scheiben umzustapeln!

k, a und b sind formale Wertparameter. Bei jedem Aufruf der Prozedur Hanoi wird Speicherplatz für diese Variablen bereitgestellt.

Man sieht an der Prozedur Hanoi, daß rekursive Programme oft sehr kurz und elegant sind. Der Mensch ist - im Gegensatz zu einem Computer - jedoch nur schwer in der Lage, den überblick bei der Programmabarbeitung zu behalten.

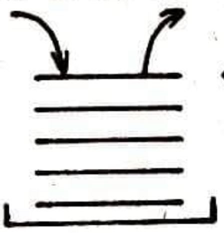
Der folgende gerichtete Graph illustriert die Programmabarbeitung (Beispiel n=4), wobei die Pfeile die Aufrufe und die Rückkünfte angeben.

Die Zahl in Schrägstrichen gibt die Reihenfolge der Drucke an.



Rekursionstiefe

Der Computer realisiert rekursive Prozeduren und Funktionen mit Hilfe eines Stapels (Kellerspeicher, stack) für die Parameter u.a. Größen. Das Element, das als letztes in den Stapel eingebracht wurde, ist das erste, das aus dem Stapel zu entnehmen ist. Ein Stapel arbeitet nach dem LIFO-Prinzip (last in - first out).



← Stapelzeiger (stackpointer) zeigt auf das oberste/top Element.

Bei jedem rekursiven Aufruf einer Prozedur bzw. Funktion werden gestapelt:

1. die Rückkehradresse und
2. die Werte aller lokalen Variablen (auch die der Wertparameter).

Die Rückkehradresse markiert entweder die write-Anweisung (beim 1. Aufruf), oder das Ende der Prozedur Hanoi (beim 2. Aufruf). Denken Sie daran, daß das Pascal-Programm bei der Programmabarbeitung als Maschinencode vorliegt! (Im Pascal für Kleincomputer können nach dem Compilerlauf die Maschinencode-Adressen der einzelnen Programmzeilen angesehen werden.) Nach der Abarbeitung von Hanoi erfolgt ein Entstapeln der Rückkehradresse sowie der Werte der lokalen Variablen. Damit wird ein Pulsieren des Stapels deutlich.

Es ergibt sich die Frage nach der Effizienz des rekursiven Programmierens. Bei jedem rekursiven Aufruf seien x Bytes zu stapeln. Sind n Scheiben zu versetzen, so ist die Rekursionstiefe maximal n (vgl. die Angaben an dem gerichteten Graphen). Daher sind maximal n * x Bytes im Stapel eingetragen. Der Speicherplatzaufwand wächst also linear mit der Problemgröße n. Dies ist ein günstiges Verhalten. Mit der Compiler-Direktive {$A-} wird in Turbo-Pascal die Befähigung der Rekursivität eingeschaltet. Aufgrund des Aufwandes im Hintergrund zum Stapeln und Entstapeln ist ein rekursives Programm in der Regel langsamer als ein iteratives Programm, das das gleiche Problem löst. Rekursives Programmieren ist also dort angebracht, wo die Problemlösung eine besonders naheliegende rekursive Struktur besitzt und wo sich nicht unmittelbar eine iterative Problemlösung angeben läßt.

BASIC verfügt nicht über einen Mechanismus für rekursive Prozeduren und Funktionen. Wenn Sie dennoch rekursiv programmieren möchten, so sind Sie verpflichtet, den Stapel selbst anzulegen und zu verwalten. Als Datenstrukturen eignen sich ein- oder mehrdimensionale Felder, in die die Werte der "lokalen Variablen" eingetragen werden. (Der Speicher eines Computers kann als eindimensionales Feld aufgefaßt werden.)

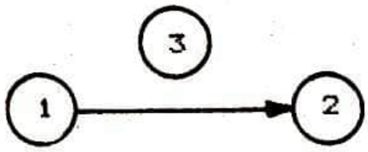
Im folgenden wird ein BASIC-Programm angegeben, das auf einem Kleincomputer (KC 85/2) entwickelt wurde.

```
10 CLS
20 INPUT "Anzahl der Scheiben:";K : PRINT
30 DIM R(K,3)
40 A=1 : B=2 : H=0
50 IF K<>0 THEN GOSUB 100 : ELSE GOSUB 200
60 IF K<>0 OR H<>0 THEN 50
70 END
80 !------------------------------------
100 REM Stapeln
110 H=H+1
120 R(H,1)=K : R(H,2)=A : R(H,3)=B
130 K=K-1 : B=6-A-B
140 RETURN
150 !------------------------------------
200 REM Entstapeln
210 K=R(H,1) : A=R(H,2) : B=R(H,3)
220 H=H-1
230 PRINT K;":";A;"=>";B
240 K=K-1 : A=6-A-B
250 RETURN
```

Von Natur aus ist das Problem "Türme von Hanoi" rekursiv. Aus der rekursiven Lösung lassen sich jedoch iterative Lösungen herleiten. Erarbeiten Sie ein Programm, das einen derartigen Algorithmus realisiert! Als Programmiersprachen schlagen wir Turbo-Pascal (Personalcomputer 1715) und BASIC (Kleincomputer KC 85) vor. Dazu geben wir folgende Hinweise:

Aus den Lösungen unserer Programme erkennt man, daß jeder zweite Zug mit Scheibe Nr. 1 erfolgt. Ist Scheibe Nr. 1 bewegt worden, so stehen als nächste zwei andere zur Wahl. Da eine aber kleiner als die andere ist, muß diese bewegt werden.
Für die Bewegung der Scheiben bedeutet:
l - mathematisch positiver Drehsinn (links herum)
r - mathematisch negativer Drehsinn (rechts herum)

Anordnung der Stangen:



Man ermittelt für n=4:

Scheibe Nr.	von	nach	Drehsinn
1	1	3	r
2	1	2	l
1	3	2	r
3	1	3	r
1	2	1	r
2	2	3	l
1	1	3	r
4	1	2	l
1	3	2	r
2	3	1	l
1	2	1	r
3	3	2	r
1	1	3	r
2	1	2	l
1	3	2	r

Scheibe Nr.	Drehsinn
1	r
2	l
3	r
4	l

Senden Sie an die links angegebene Anschrift die Unterlagen zu Ihrem Programm (Kurzbeschreibung, Programmlisting, Struktogramm)! Geben Sie bitte mit an: Name, Vorname, Privatanschrift, Schule/Arbeitsstelle, Tätigkeit, Alter. Für die (unserer Meinung nach) originellsten Programme winken einige Buchpreise. Die Auswertung des Wettbewerbs und das Literaturverzeichnis werden in einem späteren Artikel veröffentlicht.
Einsendeschluß: 30.4.87

<u>Autoren:</u>

Dr. Michael Fothe

Spezialschule mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung Erfurt
Vilniuser Str. 18
Erfurt, 5 0 6 2

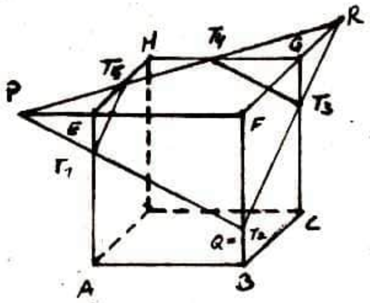
Prof. Dr. sc. Immo O. Kerner

Pädagogische Hochschule Dresden
Karl-Friedrich-Wilhelm-Wander
Sektion Mathematik
Wigardstr. 17
Dresden, 8 0 6 0

Lösungshinweise bzw. Lösungsangaben zu den „Aufgaben zur gegenseitigen Lage von Ebenen und Körpern"

Zur Aufgabe 1 und 2:

Möglichkeiten der konstruktiven Lösung wurden bereits im Beitrag selbst am Beispiel erläutert, so daß hier nur Hinweise zur rechnerischen Lösung gegeben werden.



T_1T_2: Aus $\overline{T_1T_2} : \overline{PT_2} = \overline{EF} : \overline{PF}$ und

$\overline{PT_2} = \sqrt{\overline{PF}^2 + \overline{FQ}^2}$ mit

$\overline{EF} = \overline{AB} = 4\,\text{cm}$, $\overline{PF} = 6\,\text{cm}$ und

$\overline{FQ} = 2{,}5\,\text{cm}$ erhält man

$\overline{T_1T_2} \approx 4{,}3$ cm.

$\overline{T_2T_3}$: Analog zur Berechnung von $\overline{T_1T_2}$ ergibt sich aus der Strahlensatzfigur $F(G)R(T_3)T_2$ für $\overline{T_2T_3} \approx 4{,}5$ cm.

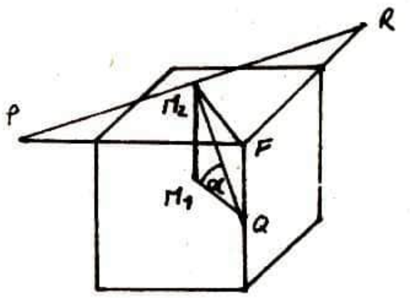
$\overline{T_3T_4}$: Mittels Strahlensatzfigur $P(T_4)R(T_3)Q$ läßt sich $\overline{T_3T_4}$ berechnen, wobei mittels Strahlensatzfigur $F(G)R(T_3)Q$ sich $\overline{RT_3} : \overline{RQ}$ durch $\overline{RG} : \overline{RF}$ ersetzen läßt.
Wegen $\overline{RG} = \overline{RF} - \overline{FG} = 1\,\text{cm}$ erhält man $\overline{T_3T_4} = 1{,}3\,\text{cm}$.

$\overline{T_4T_5}$: Mittels Strahlensatzfigur $P(T_4)R(G)F$ läßt sich $\overline{RT_4}$ und mittels Strahlensatzfigur $F(E)P(T_5)R$ läßt sich $\overline{PT_5}$ sowie durch Differenzbildung dieser Werte von $\overline{PR}$ läßt sich $\overline{T_4T_5}$ berechnen.
Wegen $\overline{PR} = \sqrt{\overline{PF}^2 + \overline{RF}^2}$ erhält man die Formel

$\overline{T_4T_5} = \sqrt{\overline{PF}^2 + \overline{RF}^2}\,\left(1 - \frac{\overline{RG}}{\overline{RF}} - \frac{\overline{PE}}{\overline{PF}}\right)$ und somit $\overline{T_4T_5} \approx 3{,}7$ cm.

$\overline{T_1T_5}$: Versuchen Sie sich nochmals selbst! Sie erhalten
$\overline{T_1T_5} \approx 1{,}9$ cm.

α: Zur Berechnung des Neigungswinkels α wird die Fallinie der Ebene durch den Punkt Q benötigt.



$M_1M_2 \perp PR$, $M_1M_2 \perp M_1Q$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_1Q}}$$

Hierbei ist $\overline{M_1M_2} = \overline{FQ} = 2{,}5$ cm, $\overline{M_1Q} = \overline{M_2F}$ läßt sich mittels Anwendung der Satzgruppe des Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck PFR ermitteln.

Aus $\overline{FM_2}^2 = \overline{PM_2} \cdot \overline{M_2R}$ und $\overline{PF}^2 = \overline{PM_2} \cdot \overline{PR}$ bzw. $\overline{RF}^2 = \overline{RM_2} \cdot \overline{PR}$

folgt $\overline{FM_2} = \sqrt{\dfrac{\overline{PF}^2 \cdot \overline{RF}^2}{\overline{PF}^2 + \overline{RF}^2}}$.

Somit ergibt sich für die gegebenen Werte ein Neigungswinkel von $\alpha \approx 33^\circ$.

Zur Aufgabe 3:

a,b,c) Für alle $\overline{FP} = \overline{FR} = \overline{FQ} \leq \overline{AB}$ ergeben sich gleichseitige Dreiecke. Desweiteren entstehen als Schnitte gleichseitige Dreiecke, wenn $2 \cdot \overline{AB} < \overline{FP} = \overline{FR} = \overline{FQ} < 3 \cdot \overline{AB}$.
Die Bedingungen für gleichschenklige bzw. unregelmäßige Dreiecke lassen sich gleichermaßen durchdenken.

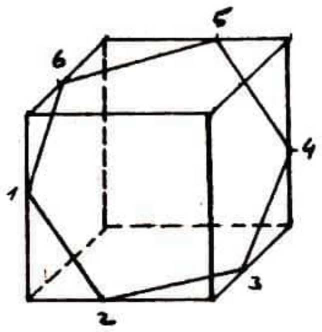
d) Quadrate entstehen bei den Vorgaben für die Lage von P, Q und R nur als Grenzfälle, d. h., wenn P, Q und R in genau einer Seitenfläche des Würfels vorkommen
(z. B.: P, R beliebig und Q = F)

e) Eine Möglichkeit für das Entstehen von gleichschenkligen Trapezen sind die Bedingungen $\overline{FP} = \overline{FR} < \overline{AB}$ und $\overline{FQ} > \overline{AB}$.
Finden Sie in Analogie zu a,b,c) auch hier noch die anderen Möglichkeiten.

f) Im Beitrag wurde bereits am Fünfeck erörtert, daß Schnittgeraden zueinander parallel sind, wenn die Schnittebene zwei zueinander parallele Ebenen (hier: gegenüberliegende Seitenflächen des Würfels) schneidet. Somit gibt es kein regelmäßiges Fünfeck als Schnittfigur.

g,h) Ein regelmäßiges Sechseck entsteht nur dann, wenn die Eckpunkte des Sechsecks den Mittelpunkten der jeweiligen Würfelkante entsprechen. Die Bedingungen für die Lage von P, Q und R sind dann leicht abzulesen.

In der nebenstehenden Abbildung erscheint die Figur 123456 auch als regelmäßiges Sechseck, kann aber keine <u>ebene</u> Figur sein.



Versuchen Sie mittels der im Beitrag angedeuteten "Dreiebenenprobe" zu begründen, warum die Figur 123456 nicht durch den Schnitt einer Ebene entstehen kann.

Zusammenfassend ist feststellbar (in vereinfachter Form):

- Wenn alle drei Punkte P, Q, R auf den Würfelkanten liegen, entstehen Dreiecke als Schnittfigur.
- Wenn zwei Punkte auf den Würfelkanten liegen und ein Punkt außerhalb, so entstehen Vierecke.
- Wenn ein Punkt auf der Würfelkante liegt und zwei Punkte außerhalb, so entstehen Fünfecke.

Somit lassen sich leicht die Bedingungen für die Lage von P, Q und R angeben, wenn allgemein als Schnittfigur ein Sechseck entstehen soll.

<u>Zur Aufgabe 4:</u>

Ein Dreieck ABC mit dem Neigungswinkel α, dessen Seite AB parallel zur Bildebene ist, hat den Flächeninhalt

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2}$$

und für den Flächeninhalt seiner Projektion gilt

$$A' = \frac{\overline{A'B'} \cdot h'}{2} .$$

Wegen $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ nach Voraussetzung und $h' = h \cdot \cos\alpha$ folgt

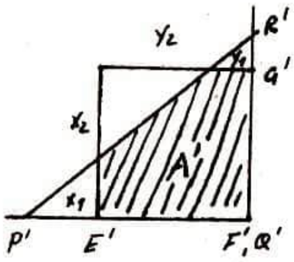
$$A' = \frac{\overline{AB} \cdot h \cdot \cos\alpha}{2} = A \cdot \cos\alpha .$$

Da aber jede geradlinig begrenzte Figur so in Dreiecke zerlegt

zerlegt werden kann, daß deren eine Seite parallel zur Grundrißebene verläuft, gilt allgemein:

> Die Fläche einer ebenen **Figur wird** bei **Projektion** mit dem Cosinus des Neigungswinkels verkleinert.

Berechnung des Flächeninhalts der Schnittfigur aus Aufgabe 1:



$y_1 : \overline{PF} = \overline{RG} : \overline{RF}$
$x_1 : \overline{RF} = \overline{PE} : \overline{PF}$

Aus y_1 und x_1 läßt sich y_2 und x_2 bestimmen, somit der Flächeninhalt des Dreiecks, der vom Flächeninhalt des Quadrates zu subtrahieren ist.

Mittels $A = \frac{A'}{\cos\alpha}$ erhält man dann für $A \approx 15{,}2\ cm^2$.

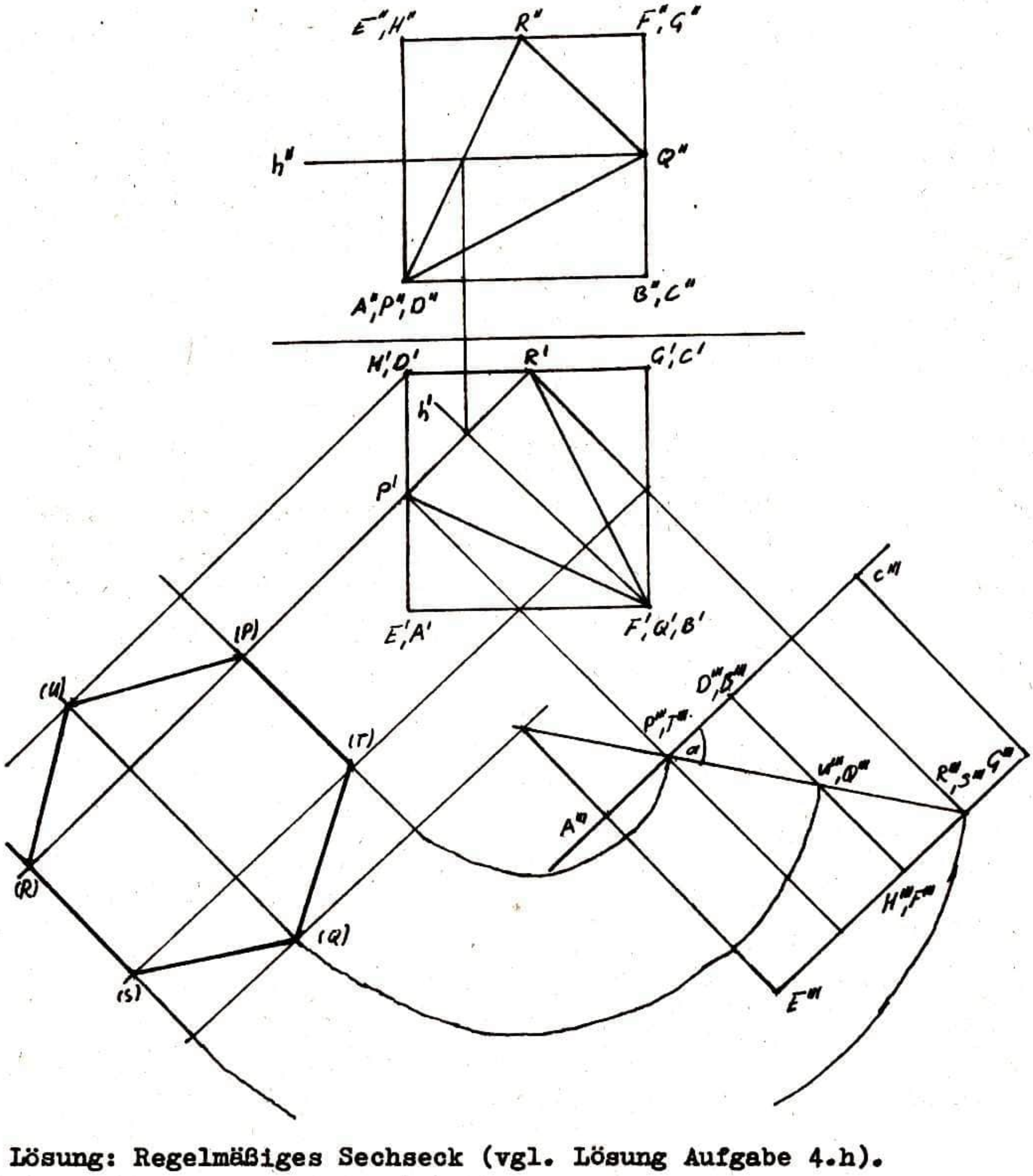
Zur Aufgabe 5:

Die Lösung wird an Aufgabe 5.2. demonstriert.

(1) Darstellen des im Schrägbild gegebenen Sachverhalts im Zweitafelbild.

(2) Einzeichnen des Dreiecks PQR als Schnittebene zur besseren Vorstellung.

- Festlegen einer Höhenlinie der Schnittebene zur Umklappung der Schnittebene, Darstellen der Höhenlinie im Aufriß und übertragen in den Grundriß.
- Wahl einer weiteren Aufrißebene, auf der die Schnittebene senkrecht steht (Rißachse senkrecht zum Bild h' der festgelegten Höhenlinie).
- Konstruktion des zweiten Aufrißes und Konstruktion der wahren Größe und Gestalt der Schnittfigur nach bekanntem Verfahren.



Lösung: Regelmäßiges Sechseck (vgl. Lösung Aufgabe 4.h).

Die Aufgabe 5.1. können Sie jetzt analog lösen.

Dr. Rainer Dörr
Sektion Mathematik
Bereich Methodik

Nachträge zur „Lehre von Gerade und Ungerade“

Im folgenden sollen einige Ergänzungen zur Artikelfolge "Die Lehre von Gerade und Ungerade"(Wurzel 1986) gegeben werden.

1. Die Erkenntnis, daß die Zahlen in gerade Zahlen und ungerade Zahlen eingeteilt werden können, gehört zum ältesten zahlentheoretischen Wissen über Zahlen. Die Ägypter kannten schon früh die Teilbarkeit durch 2, wie ihre Rechenalgorithmen erkennen lassen. Die Bezeichnungen "gerade" bzw. "ungerade"sind aber für das frühe Ägypten nicht nachweisbar, sondern erst ab der alten pythagoreischen Schule in Griechenland, die auf babylonisches Wissen aufbaut.

2. Das altägyptische Wissen über Gerade und Ungerade wurde von den Griechen übernommen. (Bei den Römern dann mit pares und impares (lat.) bezeichnet, vgl. auch die heutige französische Bezeichnung pair und impair.) Im deutschen Mittelalter hießen sie gleiche und ungleiche Zahlen. Der heutige Sprachgebrauch "gerade und ungerade" stammt wohl von Stifels deutscher "Arithmetik" 1545 her.

3. Das altägyptische Wissen über Gerade und Ungerade wurde von den Griechen übernommen und später direkt bzw. über arabische Mathematiker nach Mitteleuropa überliefert. Bei den Indern finden wir dieses spezielle Wissen nicht ausgeprägt, dadurch findet man im mittelalterlichen Europa nur teilweise die "Grundrechenarten" Verdopplung bzw. Halbierung, je nach dem, welche Quellen der Überlieferung zugrunde gelegen haben (einige arabische Mathematiker schöpften aus indischen Quellen !). Bei Leonardo von Pisa ("liber abaci"1202) finden sich diese Rechnungsarten nicht, halten sich aber z.B. bis in Christian Wolffs "Anfangsgründe"(1710).

4. Die "Grundrechenarten" waren: Zählung, Addition, Subtraktion, Verdopplung(Duplatio), Multiplikation, Halbierung(Mediatio), Division, Aufsteigung(Reihenrechnung) und Wurzelziehen. Diese Zusammenstellung (nach steigendem Schwierigkeitsgrad) ist nur im historischen Zusammenhang in der Gesamtentwicklung des Rechnens verständlich. "Man kann behaupten, daß die Zahl der unter-

schiedenen Spezies im umgekehrten Verhältnis zur Höhe der vorhandenen Mathematischen Kenntnis steht."(Tropfke).

5. Die Inder untersuchten keine "figurierten Zahlen", ein Gebiet, welches bei den Griechen ein großes Interesse fand. Diese fanden für die Dreieckszahlen $n(n+1)/2$, die Quadratzahlen n^2 und die heteromeken Zahlen $n(n+1)$ die Entwicklungen:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$$
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$
$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1) .$$

Also die Summe der ersten ganzen bzw. ungeraden bzw. geraden Zahlen. Später fand man auch andere Beziehungen, wie

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(n+2)/6 \quad \text{(n ungerade)}$$
$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(n+2)/6 \quad \text{(n gerade)}$$

und

$$1^3 = 1$$
$$2^3 = 3 + 5$$
$$3^3 = 7 + 9 + 11$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und viele andere.

6. Schon zu Platons Zeiten war ein Spiel bekannt, welches sich die Eigenschaften von Gerade und Ungerade zunutze machte: "Gerade und Ungerade". Dazu ein Beispiel:

Ein Spieler erhält 2 Münzen (z.B. 5Pf und 10Pf) und soll jede in eine Hand nehmen. Die Zahl der Münze in der rechten Hand soll verdoppelt werden, dann ist die Zahl der Münze der linken Hand dazu zu addieren. Nun wird angesagt, ob das Resultat eine gerade oder ungerade Zahl ist. Ist die Zahl gerade, liegt (was herauszufinden ist) das 5Pf-Stück in der rechten Hand, ansonsten in der linken.

Man kann natürlich beliebige andere Münzen nehmen, solange eine Zahl gerade und die andere ungerade ist. In jedem Fall kann man mittels der Rechenregeln für Gerade und Ungerade feststellen, in welcher Hand sich welche Münze befindet.

Dieter Bauke
Gera

Preisaufgaben

U 7 Основанием треугольной пирамиды служит равнобедренный прямоугольный треугольник. Боковые грани, заключающие равные стороны основания, перпендикулярны к плоскости основания, высота пирамиды равна H, а угол, составленный одним из двух равных ребер пирамиды с плоскостью основания, равен α.
В эту пирамиду вписана прямая треугольная призма так, что три ее вершины лежат на боковых ребрах пирамиды, три другие ее вершины лежат на основании пирамиды, а диагональ одной из двух ее равных боковых граней составляет с плоскостью основания угол β. Определить боковую поверхность и объем вписанной прямой треугольной призмы.

U 8 Es seien die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (a,b,c,x,y,z \neq 0)$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$$

Beweise die Beziehung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad .$$

U 9 Berechne x für die Gleichung

$$\log_{15}\log_4\log_3 x = 0$$

U 10 Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$$

$$\lg(x + y - 3) = 1$$

U 11 Beweise, daß für die Winkel eines Vierecks die folgende Beziehung gilt:

1

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\gamma - \cos^2\delta = 2\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\gamma)\cos(\alpha+\beta)$$

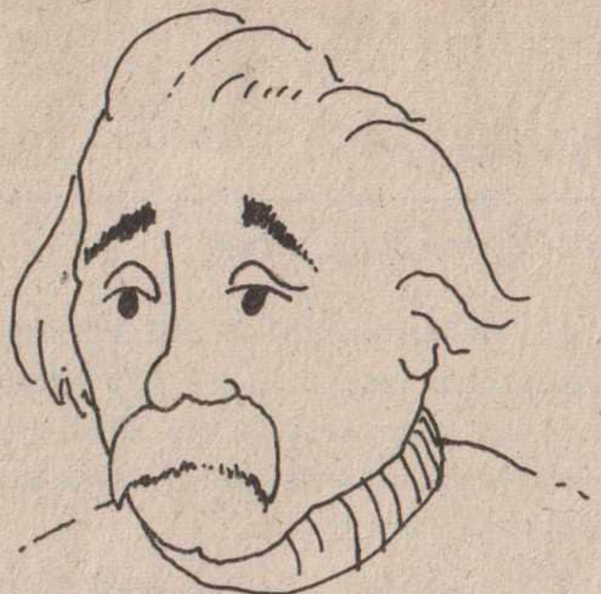
U 12 Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck mit dem gleichen Flächeninhalt wie ein gegebenes Dreieck ABC

1

Einsendeschluß: 1. 6. 1988

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung"
Leiter: Stefan Posselt
Chefredakteur: Eckhard Stein
Redaktion: C. Dahms, J. Dimler, N. Patzschke, O. Kotowski
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 14. 1. 1988
Titelbild: Ellen Bilow



Manchmal frage ich mich selber / Bin ich's oder sind die andern Kälber?

Albert Einstein

wurzel 3 · 88

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

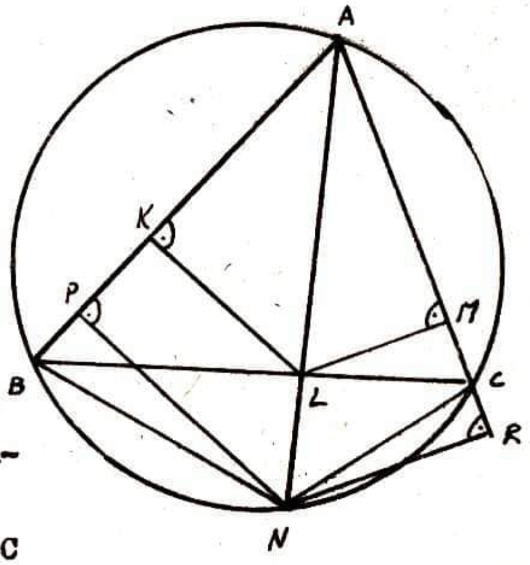
22. Jahrgang ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Lösungen der 28. IMO (nach Jörg Jahnel)

1. Wir betrachten die Gesamtanzahl Z der Fixpunkte, genommen über alle Permutationen von S. $i \in S$ ist offenbar in genau $(n-1)!$ Permutationen Fixpunkt. Diese sind genau diejenigen, die aus einer Permutation von $S\setminus\{i\}$ durch Hinzunahme des Fixpunkts i entstehen. Es folgt:
$$Z = \sum_{i=1}^{n} (n-1)! = n(n-1)! = n!$$
Andererseits gilt laut Definitionen
$$Z = \sum_{k=0}^{n} K\cdot p_n(K)$$
Daraus folgt $\sum_{k=0}^{n} K\cdot p_n(K) = n!$, was zu beweisen war.

2. Gegenüber der Aufgabenstellung führen wir zwei weitere Bezeichnungen ein.



P sei der Lotfußpunkt von N auf die Gerade AB, R der Lotfußpunkt von N auf die Gerade AC. Dann AN die Halbierende des Winkels $\sphericalangle$ BAC ist, gilt
$\overline{PN} = \overline{RN}$.
Da N der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle$ BAC mit dem Umkreis des Dreiecks Δ ABC ist, gilt weiterhin
$\overline{BN} = \overline{CN}$.
Nun ist $\overline{BP} = \sqrt{\overline{BN}^2-\overline{PN}^2}$ und $\overline{CR} = \sqrt{\overline{CN}^2-\overline{RN}^2}$, denn für $B \neq P$ bzw. $C \neq R$ folgt dies aus dem Lehrsatz von PYTHAGORAS und in den restlichen Fällen ist es trivial. Es gilt also
$\overline{BP} = \overline{CR}$.
Weiterhin ist $\sphericalangle \overline{ABN} + \sphericalangle \overline{ACN} = 180^\circ$, da $\square$ABNC ein Sehnenviereck ist.
Wir unterscheiden nun die folgenden drei Fälle.
<u>1. Fall:</u> $\sphericalangle \overline{ABN} < 90^\circ$
Dann ist $\sphericalangle \overline{ACN} > 90^\circ$, P liegt also im Innern von AB und R

außerhalb von AC. Es ist also $\overline{KB}-\overline{KP} = \overline{BP}$ und $\overline{MR}-\overline{MC} = \overline{CR}$.
Man erhält

$$\overline{KB} - \overline{KP} = \overline{MR} - \overline{MC} \quad |+ \overline{MC} + \overline{KP}$$
$$\overline{KB} + \overline{MC} = \overline{KP} + \overline{MR}$$

2. Fall: $\sphericalangle \overline{ABN} = 90^\circ$
Dann ist auch $\sphericalangle \overline{ACN} = 90^\circ$, damit B=P und C=R. Damit ist die Beziehung

$$\overline{KB} + \overline{MC} = \overline{KP} + \overline{MR}$$

trivial.

3. Fall: $\sphericalangle \overline{ABN} > 90^\circ$
Dann ist $\sphericalangle \overline{ACN} < 90^\circ$, P liegt außerhalb von AB und R im Innern von AC. Es ist also $\overline{KP}-\overline{KB} = \overline{BP}$ und $\overline{MC}-\overline{MR} = \overline{CR}$. Man erhält

$$\overline{MC} - \overline{MR} = \overline{KP} - \overline{KB} \quad |+ \overline{MR} + \overline{KB}$$
$$\overline{KB} + \overline{MC} = \overline{KP} + \overline{MR}$$

Zusammenfassend gilt also immer $\overline{KB}+\overline{MC} = \overline{KP}+\overline{MR}$. Da AL die Winkelhalbierende von $\sphericalangle$ BAC ist, gilt $\overline{LM} = \overline{LK}$. Es ergibt sich

$$\frac{1}{2}\,\overline{KB}\cdot\overline{LK} + \frac{1}{2}\,\overline{MC}\cdot\overline{LM} = \frac{1}{2}\,\overline{KP}\cdot\overline{LK} + \frac{1}{2}\,\overline{MR}\cdot\overline{LM}$$

Da der Inhalt einer Dreiecksfläche immer die Hälfte des Produktes aus einer Grundseitenlänge und der Länge einer zugehörigen Höhe ist, folgt

$$A_{LKB} + A_{LMC} = A_{LKN} + A_{LMN},$$

denn die Länge der Höhe von N auf LK ist $\overline{KP}$ und die Länge der Höhe von N auf LM beträgt $\overline{MR}$. Beidseitige Addition von A_{AKLM} liefert

$$A_{AKLM} + A_{LKB} + A_{LMC} = A_{AKLM} + A_{LKN} + A_{LMN},$$

was nichts anderes bedeutet, als $A_{ABC} = A_{AKNM}$. Dies war zu zeigen.

3. Sei $S=\{0,\dots,K-1\}$. Wir betrachten die Funktion $\varphi\colon S^n \to R$ mit $(y_1,\dots,y_n) \longmapsto \varphi(y_1,\dots,y_n) = y_1|x_1|+\dots+y_n|x_n|$. Zunächst untersuchen wir den Wertebereich $R(\varphi)$. Wegen $y_i \geq 0$ und $|x_i| \geq 0$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ gilt für alle $y \in S^n$ die Beziehung

$$\varphi(y) \geq 0.$$

Andererseits ist wegen $y_i \leq K-1$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\varphi(y_1,\dots,y_n) &= y_1|x_1|+\dots+y_n|x_n| \\ &\le (K-1)(|x_1|+\dots+|x_n|) \\ &\le (K-1)\cdot n\cdot\sqrt{\frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{n}} \quad \text{(Ungleichung zwischen arithm. und quadr. Mittel)} \\ &= (K-1)\cdot\sqrt{n} \quad (x_1^2+\dots+x_n^2=1,\ n\sqrt{\tfrac{1}{n}}=\sqrt{n})\end{aligned}$$

für alle $(y_1,\dots,y_n)\in S^n$ erfüllt. Es gilt also $R(\varphi)\subseteq[0,(K-1)\sqrt{n}]$. Dieses Intervall wird nun durch äquidistante Zwischenpunkte in K^n-1 Intervalle der Länge $\frac{(K-1)\cdot\sqrt{n}}{K^n-1}$ zerlegt. Da S^n aber K^n Elemente hat, gibt es zwei Argumente $y^1,y^2\in S^n$, so daß $\varphi(y^1)$ und $\varphi(y^2)$ im gleichen Intervall liegen, also

$$|\varphi(y^1)-\varphi(y^2)| \le \frac{(K-1)\cdot\sqrt{n}}{K^n-1}$$

ist, wobei $y^1 \neq y^2$ gilt. Explizit heißt dies,

$$|(y_1^1-y_1^2)|x_1|+\dots+(y_n^1-y_n^2)|x_n|| = \frac{(K-1)\cdot\sqrt{n}}{K^n-1}.$$

Sollte nun für $i\in\{1,\dots,n\}$ $x_i<0$ sein, dann setzen wir $a_i = y_i^2-y_i^1$, falls $x_i \ge 0$ ist, jedoch $a_i = y_i^1-y_i^2$. Man prüft nun ohne weiteres nach, daß

$$(y_i^1-y_i^2)|x_i| = a_i x_i$$

für alle $i\in\{1,\dots,n\}$ gilt, was

$$|a_1x_1+\dots+a_nx_n| \le \frac{(K-1)\cdot\sqrt{n}}{K^n-1}$$

zur Folge hat. Nach Konstruktion sind die Zahlen $a_1,\dots,a_n$ ganz, nicht sämtlich gleich Null und betragsmäßig höchstens gleich K-1. Damit ist die Behauptung bewiesen.

4. Nach Aufgabenstellung gilt für jedes $n\in N_0$ sowohl $f(f(f(n))) = f(n+1987)$, als auch $f(f(f(n))) = f(n)+1987$. Für alle $n\in N_0$ ist also $f(n+1987) = f(n)+1987$. Wir behaupten nun, daß für alle $n,k\in N_0$ $f(n+1987k) = f(n)+1987k$ gilt und beweisen dies durch vollständige Induktion nach k.

<u>Induktionsanfang</u>: $k=0$

Hier wird $f(n) = f(n)$ behauptet, was trivial ist.

Induktionsschritt:

Es sei $f(n+1987k) = f(n)+1987k$. Wir betrachten nun $k+1$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(n+1987(k+1)) &= f(n+1987k+1987) \\ &= f(n+1987k)+1987 && \text{(obige Formel)} \\ &= f(n)+1987k+1987 && \text{(Induktionsanfang)} \\ &= f(n)+1987(k+1), \end{aligned}$$

so daß die Behauptung bewiesen ist.

Nunmehr seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$, wobei $n_1 \equiv n_2 (1987)$ ist. Wenn $n_1 \leq n_2$ ist, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $n_2 = n_1 + 1987k_0$, was $f(n_2) = f(n_1) + 1987k_0$, also $f(n_2) \equiv f(n_1) \quad (1987)$ zur Folge hat. Wenn $n_1 > n_2$ ist, erhält man $f(n_1) \equiv f(n_2) \quad (1987)$, also das gleiche Ergebnis.

$\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}/1987\mathbb{Z}$ bezeichne nun die Einschränkung des Standardhomomorphismus von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}/1987\mathbb{Z}$ auf die neue Grundmenge $\mathbb{N}_0$. σ ist also die Abbildung, die jedem Element aus $\mathbb{N}_0$ seine Restklasse und 1987 zuordnet.

Das obige Ergebnis bedeutet somit nichts anderes, als daß $\sigma \circ f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}/1987\mathbb{Z}$ ausschließlich von der Restklasse des Arguments modulo 1987 abhängt.

Es gibt also eine Abbildung $g : \mathbb{Z}/1987\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/1987\mathbb{Z}$ derart, daß

$$g(\sigma(n)) = \sigma(f(n))$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Wir betrachten nun die Verkettung $g \circ g$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$g(g(\sigma(n))) = g(\sigma(f(n))) = \sigma(f(f(n))).$$

Anwendung der Aufgabenstellung liefert nun

$$g(g(\sigma(n))) = \sigma(n+1987) = \sigma(n).$$

Da σ die gesamte Menge $\mathbb{Z}/1987\mathbb{Z}$ als Wertebereich hat, gilt also

$$g(g(x)) = x$$

für alle $x \in \mathbb{Z}/1987\mathbb{Z}$.

Wir führen nun in $\mathbb{Z}/1987\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation $\simeq$ durch

$$x \simeq y :\Longleftrightarrow x = y \text{ oder } x = g(y)$$

$\simeq$ ist offenbar laut Definition reflexiv. Sie ist symmetrisch, denn aus $x \simeq y$ folgt sofort $y \simeq x$, falls $x=y$ ist und im entgegengesetzten Fall gilt $x = g(y)$, also $g(x) = g(g(y)) = y$

und $y \simeq x$. Desweiteren ist $\simeq$ transitiv, da aus $x \simeq y$ und $y \simeq z$ sofort $x \simeq z$ folgt, falls $x=y$ oder $y=z$ ist und im entgegengesetzten Fall $x=g(y)$ und $y=g(z)$, also $x = g(g(z)) = z$ gilt.
Die Äquivalenzklassen von $\simeq$ sind ein- oder zweielementig. Da $\mathbb{Z}/1987\mathbb{Z}$ genau 1987 Elemente enthält, muß es eine einelementige Klasse geben. Das heißt, es gibt ein $x_o \in \mathbb{Z}/1987\mathbb{Z}$ mit

$$g(x_o) = x_o.$$

n_o sei nun ein Repräsentant der Klasse x_o, das heißt, es gelte $\sigma(n_o) = x_o$. Wegen der Definition von g erhalten wir

$$\sigma(f(n_o)) = g(\sigma(n_o)) = g(x_o) = x_o = \sigma(n_o).$$

$f(n_o)$ liegt also in derselben Restklasse modulo 1987 wie n_o, das heißt, es gibt ein $l_o \in N_o$ derart, daß $f(n_o) = n_o+1987l_o$ oder $n_o = f(n_o)+1987l_o$ gilt.
Die erste Variante liefert $f(f(n_o)) = f(n_o+1987l_o) = f(n_o)+1987l_o = n_o+2\cdot 1987l_o$.
Die Aufgabenstellung liefert $2\cdot 1987l_o = 1987$, also $l_o = \frac{1}{2}$.
Die zweite Variante hat dagegen
$f(n_o) = f(f(n_o)+1987l_o) = f(f(n_o))+1987l_o$, also $n_o-1987l_o = n_o+1987+1987l_o$ und damit $l_o = -\frac{1}{2}$ zur Folge.
In beiden Varianten ist $l_o \in N_o$ nicht möglich. Durch diesen Widerspruch ist gezeigt, daß eine Funktion f im Sinne der Aufgabe nicht existieren kann. Die Aufgabe ist damit gelöst.

5. Man wählt in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem, wobei eine Einheit bei der Einteilung der Koordinatenachsen einer Längeneinheit in der Ebene entspreche. Wir betrachten im weiteren die n Punkte mit den Koordinaten (i,i^2) für $i \in \{1,\dots,n\}$. Dies sind offenbar n verschiedene Punkte, die auf einer Parabel liegen. Da Parabeln mit Geraden bekanntlich höchstens zwei Schnittpunkte haben, bilden tatsächlich beliebige drei der n Punkte ein nicht entartetes Dreieck. Es bleibt zu zeigen, daß zwei beliebige der n Punkte irrationalen Abstand haben und die Dreiecke, die von beliebigen drei der n Punkte gebildet werden, rationale Flächeninhalte haben.

Wir berechnen den Abstand zweier der n Punkte. Diese haben die Koordinaten (x,x^2) und (y,y^2), mit $x < y$. Nach dem Satz von PYTHAGORAS ist der Abstand d gleich $\sqrt{(y-x)^2+(y^2-x^2)^2}$.

Trivial ist nun

$$d > y^2-x^2.$$

Wäre $d \geq y^2-x^2+1$, dann müßte gelten:

$$(y-x)^2 + (y^2-x^2)^2 \geq (y^2-x^2+1)^2$$

$$y^2+x^2-2xy+(y^2-x^2)^2 \geq (y^2-x^2)^2 + 2y^2-2x^2+1 \quad \text{(biomischer Satz)}$$

$$3x^2 \geq y^2 + 2xy + 1. \quad \text{(ordnen)}$$

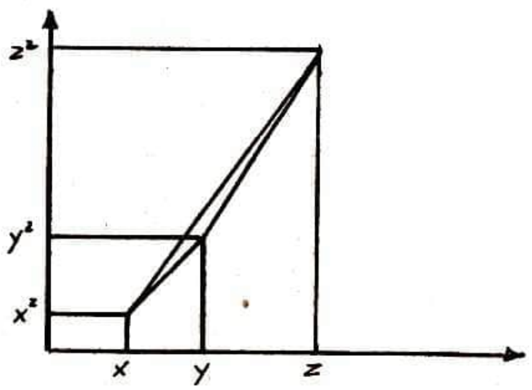
Andererseits liefert $y > x$ die Beziehung $y^2+2xy+1 > 3x^2+1$, so daß wir bei einem Widerspruch angelangt sind.

Es gilt also $y^2-x^2 < d < y^2-x^2+1$, so daß d nicht ganzzahlig sein kann.

Damit ist d als Wurzel aus einer natürlichen Zahl, die keine Quadratzahl ist, irrational.

Wir betrachten nun den Inhalt eines Dreiecks, das von drei der n Punkte gebildet wird. Diese haben die Koordinaten (x,x^2), (y,y^2) und (z,z^2) mit $x < y < z$.

Skizze:



Es gilt somit

$$A = \frac{(x^2+z^2)}{2} \cdot (z-x) - \frac{(x^2+y^2)}{2} (y-x) - \frac{(y^2+z^2)}{2} (z-y),$$

speziell ist A rational. Damit ist die Aufgabe gelöst.

6. Angenommen, für ein gewisses $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ wäre die Behauptung falsch. Das heißt, die kleinste nichtnegative, ganze Zahl K, so daß K^2+K+n keine Primzahl liefert, erfüllt die Ungleichung $\sqrt{\frac{n}{3}} < K \leq n-2$.

Für diese Zahl K untersuchen wir die (zusammengesetzte) Zahl

K^2+K+n. Deren kleinster von 1 verschiedener Teiler sei p. Wir unterscheiden zwei Fälle.

<u>1. Fall:</u> $p \leq 2K$

<u>Unterfall 1.1.:</u> $p \leq K$

Es gilt $K^2+K+n \equiv 0(p)$. Daraus folgt $(K-p)^2 + (K-p) + n \equiv 0(p)$, wobei K-p eine nichtnegative ganze Zahl kleiner als K ist. Wegen der obigen Konstruktion von K muß also $(K-p)^2 + (K-p)+n$ Primzahl sein, so daß nur $(K-p)^2 + (K-p) + n = p$ möglich ist, was

$$p \geq n$$

zur Folge hat.

<u>Unterfall 1.2.:</u> $K+1 \leq p \leq 2K$

Es gilt $K^2 + K + n \equiv 0(p)$. Daraus folgt $(K-p)^2+(K-p)+n \equiv 0(p)$. Die leicht nachprüfbare Identität $x^2+x+n = (-x-1)^2+(-x-1)+n$ liefert $(p-K-1)^2 + (p-K-1) + n \equiv 0(p)$. p-K-1 ist dabei eine nichtnegative, ganze Zahl kleiner als K. Wegen der obigen Konstruktion von K muß also $(p-K-1)^2 + (p-K-1) + n$ Primzahl sein, so daß nur $(p-K-1)^2 + (p-K-1) + n = p$ möglich ist, was

$$p \geq n$$

zur Folge hat.

Im 1. Fall gilt also generell $p \geq n$. Da p der kleinste von 1 verschiedene Teiler der zusammengesetzten Zahl K^2+K+n ist, gilt $K^2+K+n \geq p^2 \geq n^2$. Wegen $K \leq n-2 < n-1$ folgt weiter $n^2 \leq K^2+K+n < (n-1)^2 + (n-1) + n = n^2$. Dies ist ein Widerspruch. Der 1. Fall tritt nicht ein.

<u>2. Fall:</u> $p \geq 2K+1$

Da p der kleinste Teiler von K^2+K+n ist, gilt $K^2+K+n \geq p^2 \geq (2K+1)^2 = 4K^2+4K+1$. Es folgt

$$K^2 + K + n \geq 4K^2 + 4K + 1 \quad | -K^2-K$$

$$n \geq 3K^2 + 3K + 1.$$

Erst recht gilt dann $n > 3K^2$ und wegen $K > \sqrt{\frac{n}{3}}$

$$n > 3\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right)^2 = n.$$

Dies ist ein Widerspruch. Der 2. Fall tritt nicht ein.

Unsere Annahme führt also in allen Fällen zum Widerspruch. Also ist sie widerlegt, die Behauptung bewiesen.

Allgemeine magische Quadrate und Produkte

Seit jeher gehören das Lösen und Bearbeiten magischer Quadrate und Produkte zu beliebten Denksportaufgaben der Unterhaltungsmathematik. Es sollen hier Möglichkeiten gezeigt werden, solche Aufgaben zu bearbeiten und sich entsprechende Quadrate bzw. Produkte selbst zu konstruieren. Dabei beziehen sich folgende Betrachtungen auf den Bereich der ganzen Zahlen Z.

Untersuchen wir zunächst den Fall $\sigma=3$. Unter σ (mit $\sigma \geq 3$) wollen wir die Ordnung des Quadrates verstehen, in der Art und Weise, daß das magische Quadrat aus σ-Zeilen und somit σ-Spalten besteht und folglich σ^2-Elemente die Feldes des Quadrates ausfüllen. Für $\sigma=3$ lassen sich die Elemente $a_1 \ldots a_9$ etwa in folgender Anordnung angeben.

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Abb. 1

Man spricht allgemein von einem magischen Quadrat der Ordnung σ, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Die Summe der Elemente einer Zeile ist gleich der Summe der Elemente jeder anderen Zeile.

(2) Die Summe der Elemente einer Spalte ist gleich der Summe der Elemente jeder anderen Spalte.

(3) Die Summe der Elemente einer Diagonalen ist gleich der Summe der Elemente der anderen Diagonale.

(4) Alle genannten Summen sind gleich groß.

Bezeichnet man diese Summe mit S, so gilt für $\sigma=3$:

(1) $a_1+a_2+a_3 = S$ (4) $a_1+a_4+a_7 = S$ (7) $a_1+a_5+a_9 = S$

(2) $a_4+a_5+a_6 = S$ (5) $a_2+a_5+a_8 = S$ (8) $a_3+a_5+a_7 = S$

(3) $a_7+a_8+a_9 = S$ (6) $a_3+a_6+a_9 = S$

Ziel der weiteren Berechnungen soll es nun sein, allgemeine Lösungen für die Elemente $a_1 \ldots a_9$ zu erhalten und somit eine Konstruktionsmöglichkeit für ein mag. Quadrat anzugeben.

Zunächst ist folgender Satz hilfreich:

S a t z 1: Ist S die Summe des magischen Quadrates 3. Ordnung, dann gilt stets für das Mittelelement $a_5 = \frac{S}{3}$.

Beweis. Aus Gleichung (1) und Gleichung (7) folgt: $a_4+a_7 = a_5+a_9$.
Analog ergibt sich aus (6) und (8): $a_6+a_9 = a_5+a_7$.
Die Addition dieser neuen Gleichungen liefert:
$a_4+a_7+a_6+a_9 = a_5+a_9+a_5+a_7$ und somit $a_4+a_6 = 2a_5$.
Infolge der Gültigkeit von (2) ergibt sich durch Addition von a_5: $a_4+a_5+a_6 = 3a_5$, also nach Voraussetzung $a_4+a_5+a_6 = S$ und daher $S = 3a_5$ oder $a_5 = \frac{S}{3}$ $(a_5 \neq 0)$. w.z.b.w.

Diese Beziehung läßt sich nun auf a_5 in den Gleichungen (1-8) anwenden und einsetzen.
Durch algebraische Betrachtungen kann einfach gezeigt werden (etwa durch Addition der Gleichungen (5), (7), (8)), daß Gleichung (1) und Gleichung (3) eine lineare Abhängigkeit von den folgenden Gleichungen aufweisen. Damit bleibt ein Gleichungssystem von 6 Gleichungen. Aus methodischen Gründen wird die Numerierung von vorhin beibehalten:

(2) $a_4+a_6 = \frac{2}{3} S$ (6) $a_3+a_6+a_9 = S$

(4) $a_1+a_4+a_7 = S$ (7) $a_1+a_9 = \frac{2}{3} S$

(5) $a_2+a_8 = \frac{2}{3} S$ (8) $a_3+a_7 = \frac{2}{3} S$

Da $a_5 = \frac{S}{3}$, setzen wir als Lösung eine beliebige ganze Zahl n, also $a_5 = n$.
Für die restlichen 8 unbekannten Elemente sind die 6 oben genannten Gleichungen linear unabhängig. Damit ist entsprechend der Lösbarkeit eines solchen Gleichungssystems die Größe von 2 Unbekannten frei wählbar. O.B.d.A. setze ich $a_1 = P$ und $a_2 = Q$ $(P,Q \in Z)$. Damit erhält man folgende weitere bestimmte Lösungen für die restlichen Elemente:

$a_3 = 3N-P-Q$; $a_4 = 4N-2P-Q$; $a_6 = -2N+2P+Q$;
$a_7 = P+Q-N$; $a_8 = 2N-Q$; $a_9 = 2N-P$.

Man überzeuge sich von der Richtigkeit durch Einsetzen in (1)...(8).

Beispiel:

Abb. 2

0	1	17
23	6	-11
-5	11	12

S=18

N=6
P=0
Q=1

allgemeines Schema (σ=3)

Abb. 3

P	Q	3N-P -Q
4N -2P -Q	N	-2N +2P +Q
P+Q -N	2N-Q	2N-P

S=3N

N
P
Q

Zur Konstruktion der Quadrate können zwei Hauptfälle unterschieden werden:

(1) N,P,Q (∈ Z) werden beliebig gewählt und anschließend das Quadrat konstruiert, da alle restlichen Elemente sowie die Summe S damit eindeutig bestimmt sind.

(2) S ist vorgegeben und somit auch N. Die Elemente sind ganzzahlig, wenn 3/S ist. Dadurch sind P,Q frei wählbar und die restlichen Elemente sind damit gleichfalls bestimmt.

σ=4:

Nun sind 16 Elemente zu bestimmen, die gleichfalls den Bedingungen (1)...(4) genügen. Es lassen sich hierbei 10 Gleichungen aufstellen, deren Summe gleich S ist.

a_1	a_2	a_3	a_4
a_5	a_6	a_7	a_8
a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}

Abb. 4 σ=4

Die Vorgehensweise sei ähnlich wie bei σ=3. Um den Lösungsprozeß des Gleichungssystems zu vereinfachen, sei folgender Satz in den Mittelpunkt weiterer Betrachtungen gestellt:

S a t z 2: Für magische Quadrate 4. Ordnung gilt, die Summe der inneren Elemente ist S, also $a_6+a_7+a_{10}+a_{11}=S$.

Beweis. Die Addition der Gleichungen für Spalte 2 und Spalte 3

des Schemas liefert: $a_2+a_6+a_{10}+a_{14}+a_3+a_7+a_{11}+a_{15} = 2S$. In analoger Weise addiert man die für die Diagonalen zutreffenden Gleichungen und erhält: $a_1+a_6+a_{11}+a_{16}+a_{13}+a_{10}+a_7+a_4 = 2S$. Eine neuerliche Addition der erhaltenen Gleichungen liefert unter Anwendung der Kommutativität der Addition:
$(a_1+a_2+a_3+a_4) + (a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}) + 2(a_6+a_7+a_{10}+a_{11}) = 4S$, was nach Voraussetzung nichts anderes als $S + S + 2(a_6+a_7+a_{10}+a_{11}) = 4S$ ergibt. Durch weiteres Auflösen folgt $S = a_6+a_7+a_{10}+a_{11}$.

w.z.b.w.

Für magische Quadrate 4. Ordnung lassen sich sofort weitere Beziehungen ableiten:

(1) $a_5+a_8+a_9+a_{12} = S$

(2) $a_2+a_3+a_{14}+a_{15} = S$

(3) $a_1+a_4+a_{13}+a_{16} = S$

Diese Beziehungen sind von dem Standpunkt aus interessant, wenn man die symmetrische Lage der in (1) bis (3) genannten Elemente beachtet.
Für $\sigma=4$ lassen sich 8 linear unabhängige Gleichungen aufschreiben. Das bedeutet, daß bei 16 Elementen 8 Unbekannte frei wählbar sind.
Setzt man beispielsweise $a_1=E$, $a_6=A$, $a_7=B$, $a_8=F$, $a_9=H$, $a_{10}=C$, $a_{11}=D$, $a_{15}=G$, so ergibt sich folgendes Lösungsschema

E	2B−2E+F+G−H	A+C−G	−B+D+E−F+H
C+D−F	A	B	F
H	C	D	A+B−H
A+B−E+F−H	−B+D+2E−F−G+H	G	B+C−E

Abb. 5

Auch hier sind 2 Fälle unterscheidbar:

(1) Die Summe S ist als ganze Zahl vorgegeben. Dann sind A,B, C,D so wählbar, daß ihre Summe = S ist. E,F,G,H sind frei wählbar, da die restlichen Elemente eindeutig daraus bestimmbar sind.

(2) Die frei wählbaren 8 Elemente werden angegeben. Damit sind die restlichen Elemente und die Summe S eindeutig bestimmt.

Bei den bisherigen Betrachtungen fällt auf, daß die erhaltenen Lösungen für die Elemente a_i (i=1,..16) mitunter umfangreiche Ausdrücke darstellen. Durch geeignete Wahl der frei wählbaren Elemente lassen sich diese Ausdrücke reduzieren.
So setzte E. Bergholz 1910 a_6=B, a_7=C, a_{10}=A, a_{11}=D, a_5=D+E-H. Daraus resultiert folgendes Berechnungsschema

	a_1	a_2	a_3	a_4	
	A-E	C+E+G	B+F-G	D-F	
a_5	D+E-H	B	C	A-E+H	a_8
a_9	C-F+H	A	D	B+F-H	a_{12}
	B+F	D-E-G	A-F+G	C+E	
	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	

Abb. 6

In ähnlicher Weise lassen sich die Berechnungsmöglichkeiten für $\sigma=3$ gleichfalls günstiger gestalten.

Für ein allgemeines σ haben wir für die σ^2-Unbekannten $2\sigma+2$ lineare Gleichungen, von denen 2σ voneinander unabhängig sind. Folglich kann man $\sigma(\sigma-2)$ Größen a_i mit $i=1...\sigma^2$ beliebig auswählen.

Diese Konstruktionsmöglichkeit erfüllt die Aufgabe, ein magisches Quadrat zu bilden, welches kein "traditionelles" zu sein braucht, d. h. nicht aufeinanderfolgende natürliche Zahlen enthalten muß. Es sind beliebige ganze Zahlen verwendbar, sogar negative und nicht jede unbedingt nur einmal.

Beispiel: $\sigma=4$
S=10

Festlegung: $a_6=1$
$a_7=2$
$a_{10}=3$
$a_{11}=4$

Ergebnis

5	-1	-3	9
1	1	2	6
8	3	4	-5
-4	7	7	0

Abb. 7

Mittels eines einfachen Konstruktionsprinzips ist es für beliebige magische Quadrate beliebiger Ordnung sofort möglich, aus ihnen magische Produkte zu erzeugen. Ein solches Verfahren beruht auf der Regel der Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis, wobei die Basis erhalten bleibt und die Exponenten addiert werden. So ist es klar, wenn man eine beliebige natürliche Zahl als Basis der Potenzen und die Elemente irgendeines magischen Quadrates mit gleichen Summen als Exponenten nimmt, daß hieraus ein magisches Produkt entsteht. Liegt etwa das magische Quadrat (a) vor,

(a)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

und wählt man eine beliebige Basis b (b=3), dann ergibt sich (b),

(b)

3^4	3^9	3^2
3^3	3^5	3^7
3^8	3^1	3^6

woraus das magische Produkt (c) folgt:

81	19683	9
27	243	2187
6561	3	729

Das Produkt P beträgt im Beispielsfall 14348907.

Als weitere Anregung möchte der Leser untersuchen, ob gleichfalls ein mag. Produkt vorliegt, wenn die Basis b eine negative ganze Zahl darstellt oder Untersuchungen anstellen, welche weiteren Anordnungsmöglichkeiten der Elemente a_i außer den hier angegebenen noch existieren, damit ein Quadrat magisch bleibt.

Literatur:

B.A. Kordemski, Köpfchen, Köpfchen!
Urania-Verlag Leipzig/Jena/Berlin 1968

Frank Heinrich
Sektion Mathematik
Bereich Methodik

Preisaufgaben

U 13 Доказать, что:

1. середины ребер правильного тетраэдра могут служить вершинами правильного октаэдра,
2. прямые, соединяющие середины противоположных ребер правильного тетраэдра, пересекаются в одной точке, делятся в точке пересечения пополам и взаимно перпендикулярны, а также перпендикулярны соответствующим ребрам тетраэдра,
3. плоскость, проходящая через две прямые, соединяющие середины противоположных ребер правильного тетраэдра, делит объем тетраэдра пополам. Найти отношение объемов данного правильного тетраэдра и октаэдра, вершинами которого могут служить середины ребер тетраэдра.

U 14 Berechne x : $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$

U 15 Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\sqrt[\lg(xy)]{(xy)^{xy}} = 10$$

$$2x + 2y = 5$$

U 16 Beweise die Ungleichung von Bunjakowski-Schwarz

$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 ,$$

wobei die Gleichheit nur für

$$\frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$ gilt.

U 17 Es seien $a_1, \ldots, a_n$ die Glieder einer arithmetischen Folge. Beweise die folgende Gleichung:

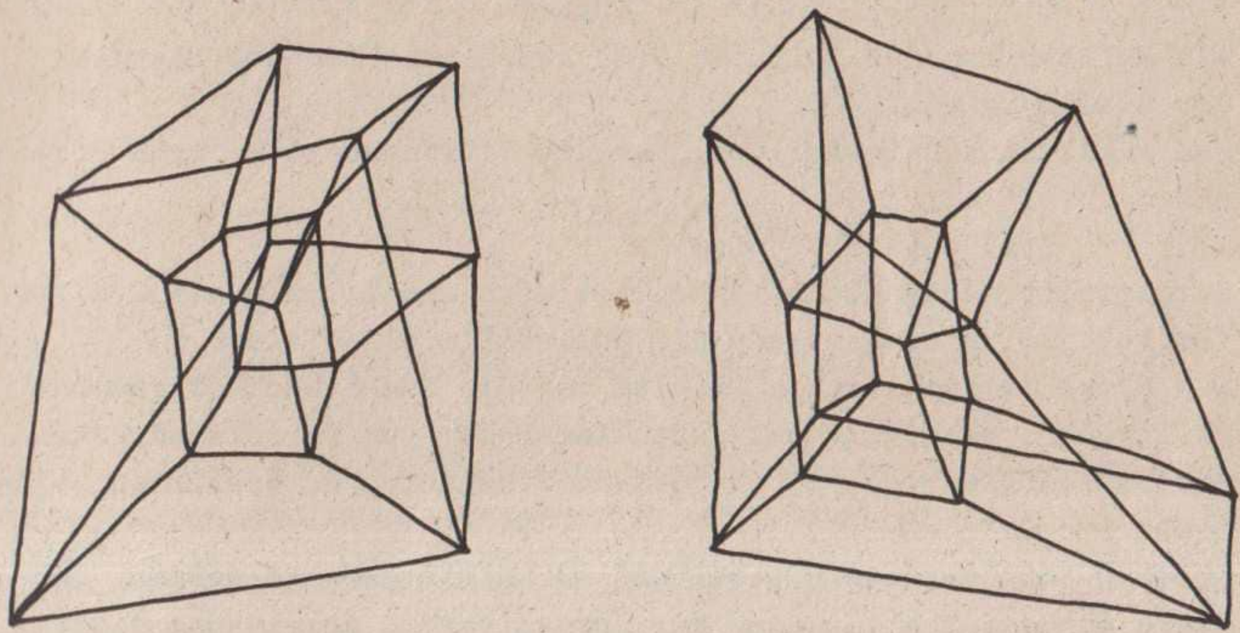
$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

U 18 Löse folgende Ungleichung

$$\sin x + \sin 3x < \sin 2x + \sin 4x$$

Einsendeschluß: 1. 7. 1988

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung"
Leiter: Stefan Posselt
Chefredakteur: Eckhard Stein
Redaktion: C. Dahms, J. Dimler, N. Patzschke, O. Kotowski
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 10. 2. 88
Titelseite: M. Torke



wurzel $\sqrt{4 \cdot 88}$

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
22. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Das Verfahren von Graeffe zur näherungsweisen Berechnung der Nullstellen von Polynomen (von Dr. Kurt Stallknecht)

Gegeben sei das Polynom

(1) $$P(z) = z^n - a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_o.$$

Als Nullstellen des Polynoms P(z) bezeichnet man die Lösungen der Gleichung P(z) = 0.

Man sagt, eine Nullstelle z_1 hat die Vielfachheit k, wenn P(z) als

$$P(z) = (z-z_1)^k \, Q(z)$$

dargestellt werden kann. Dabei ist Q(z) ein Polynom mit $Q(z_1) \neq 0$.

Ist k=1, so bezeichnet man die Nullstelle als einfach.

Ein altes mathematisches Problem war die Suche nach allgemeingültigen Formeln, die nur durch Anwendung von Wurzelausdrücken die Nullstellen von (1) aus den Koeffizienten a_k bestimmen sollten.

Um 1830 konnte von N.H. Abel und E. Galois gezeigt werden, daß diese Suche für $n > 4$ wegen der Unmöglichkeit der Lösung dieses Problems erfolglos bleiben mußte.

In diesem Artikel soll nun beschrieben werden, wie man ausgehend von den Koeffizienten a_k zumindest Folgen zur Approximation der Nullstellen von (1) bilden kann.

1. Der Fundamentalsatz der Algebra

S a t z : Die Gleichung P(z) = 0 besitzt in der Menge der komplexen Zahlen genau n Lösungen, wenn man die Lösungen mit ihren Vielfachheiten zählt.

Mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln kann dieser Satz nicht bewiesen werden. Er muß aber zumindest genannt werden, da er sichert, daß die weiteren Ausführungen sinnvoll sind.

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt unmittelbar, daß das Polynom (1) in der Form

(2) $$P(z) = (z-z_1) * (z-z_2) * \ldots * (z-z_n)$$

dargestellt werden kann. Dabei sind $z_1;\ldots;z_n$ die (nicht notwendig verschiedenen) Nullstellen von (1).

2. Der Wurzelsatz von Vieta

Durch Ausmultiplizieren von (2) und dem anschließenden Vergleich mit (1) gelangt man zu den folgenden Beziehungen zwischen den Koeffizienten des Polynoms (1) und seinen Nullstellen:

$$\begin{aligned}
a_o &= z_1 z_2 \cdots z_n \\
a_1 &= z_1 z_2 \cdots z_{n-1} + z_1 z_2 \cdots z_{n-2} z_n + \cdots + z_2 z_3 \cdots z_n \\
&\vdots \\
a_{n-2} &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n = \sum_{j \neq k} z_j z_k \\
a_{n-1} &= z_1 + z_2 + \cdots + z_n
\end{aligned}$$

3. Das Erzeugen einfacher Nullstellen

In (2) müssen nicht notwendig alle Nullstellen und damit nicht alle Faktoren verschieden sein. Fassen wir z. B. alle mit $(z-z_1)$ identischen Faktoren zusammen, so erhalten wir

$$P(z) = (z-z_1)^k \, Q(z), \quad Q(z_1) \neq 0.$$

Durch Differentiation unter Berücksichtigung der Produktregel geht diese Gleichung über in die Form

$$\begin{aligned}
P'(z) &= k(z-z_1)^{k-1} \, Q(z) + (z-z_1)^k \, Q'(z) \\
&= (z-z_1)^{k-1} \, (kQ(z) + (z-z_1) \, Q'(z)).
\end{aligned}$$

Der zweite Faktor in der letzten Zeile ist dabei für $z = z_1$ verschieden von Null. Hieraus schlußfolgern wir:
Ist z_1 eine Nullstelle des Polynoms $P(z)$ mit der Vielfachheit $k > 1$, so ist z_1 auch Nullstelle der Ableitung $P'(z)$ mit der Vielfachheit $k-1$. Also ist $(z-z_1)^{k-1}$ ein Teiler von $P(z)$ und von $P'(z)$, aber $(z-z_1)^k$ ist kein Teiler von $P'(z)$. Hat also $P(z)$ die Struktur

$$P(z) = (z-z_1)^{k_1} * (z-z_2)^{k_2} * \cdots * (z-z_r)^{k_r},$$

so gilt für den größten gemeinsamen Teiler von $P(z)$ und seiner Ableitung

$$ggT(P(z), P'(z)) = c(z-z_1)^{k_1-1} * (z-z_2)^{k_2-1} * \cdots * (z-z_r)^{k_r-1} \quad +)$$

+) Beachte, daß der ggT bei Polynomen nur bis auf einen Zahlenfaktor eindeutig bestimmt ist!

Folglich erhalten wir durch die Bildung des Quotienten

$$P(z)/ggT(P(z),P'(z))$$

ein Polynom, welches dieselben Nullstellen wie $P(z)$ besitzt, dessen Nullstellen aber alle einfach sind.

Da wir den größten gemeinsamen Teiler von $P(z)$ und $P'(z)$ ohne Kenntnis der Nullstellen mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus bestimmen können, haben wir damit ein Verfahren zur Erzeugung einfacher Nullstellen.

Beispiel:

Soll der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 9 und 24 bestimmt werden, so müssen wir nach dem Euklidischen Algorithmus die folgenden Divisionen mit Rest ausführen:

$$\begin{aligned} 24 : 9 &= 2 \quad R\ 6 \\ 9 : 6 &= 1 \quad R\ 3 \\ 6 : 3 &= 2 \quad R\ 0 \end{aligned}$$

Der letzte von Null verschiedene Rest (in diesem Fall 3) gibt den größten gemeinsamen Teiler an.

Völlig analog verfahren wir, wenn wir den größten gemeinsamen Teiler der Polynome

$$P(z) = z^5 - z^4 - 2z^3 + 2z^2 + z - 1$$

und

$$P'(z) = 5z^4 - 4z^3 - 6z^2 + 4z + 1$$

bestimmen wollen:

$$\begin{array}{l} (5z^5 - 5z^4 - 10z^3 + 10z^2 + 5z - 5) : (5z^4 - 4z^3 - 6z^2 + 4z + 1) = z - \frac{1}{5} \\ -(5z^5 - 4z^4 - 6z^3 + 4z^2 + z) \\ \hline \qquad - z^4 - 4z^3 + 6z^2 + 4z - 5 \\ \quad -(- z^4 + \frac{4}{5}z^3 + \frac{6}{5}z^2 - \frac{4}{5}z - \frac{1}{5}) \\ \hline \qquad\quad - \frac{24}{5}z^3 + \frac{24}{5}z^2 + \frac{24}{5}z - \frac{24}{5} \end{array}$$

Da der ggT nur bis auf einen Zahlenfaktor eindeutig bestimmt ist, können wir durch die Multiplikation mit entsprechenden Faktoren das Rechnen mit Brüchen weitgehend vermeiden.

$$
\begin{array}{l}
(5z^4 - 4z^3 - 6z^2 + 4z + 1) : (z^3 - z^2 - z + 1) = 5z + 1 \\
-(5z^4 - 5z^3 - 5z^2 + 5z) \\
\hline
\quad z^3 - z^2 - z + 1 \\
\quad -(z^3 - z^2 - z + 1) \\
\hline
\quad\quad 0
\end{array}
$$

Als ggT erhalten wir das Polynom $z^3 - z^2 - z + 1$.

Wir beseitigen nun die Vielfachheiten der Nullstellen von $P(z)$:

$$
\begin{array}{l}
(z^5 - z^4 - 2z^3 + 2z^2 + z - 1) :(z^3 - z^2 - z + 1) = z^2 - 1 \\
-(z^5 - z^4 - z^3 + z^2) \\
\hline
\quad - z^3 + z^2 + z - 1 \\
\quad -(- z^3 + z^2 + z - 1) \\
\hline
\quad\quad 0
\end{array}
$$

4. Das Quadrieren der Nullstellen

Ohne Kenntnis seiner Nullstellen soll nun aus dem Polynom (1) ein Polynom $P_2(z)$ abgeleitet werden, dessen Nullstellen genau die Quadrate der Nullstellen des Ausgangspolynoms sind. Betrachtet man $P(z)$ in der Darstellung (2), so sieht man, daß jeder Faktor $(z-z_k)$ nur mit $(z+z_k)$ multipliziert werden muß, um das Quadrat von z_k zu erzeugen. Wir bilden deshalb das Produkt

$$
\begin{aligned}
(-1)^n P(z) P(-z) &= (z-z_1) * (z+z_1) * \dots * (z-z_n) * (z+z_n) \\
&= (z^2-z_1^2) * (z^2-z_2^2) * \dots * (z^2-z_n^2).
\end{aligned}
$$

Also gilt für das gesuchte Polynom

$$
(3) \qquad P_2(z^2) = (-1)^n P(z) P(-z)
$$

und wir müssen nur noch z^2 durch z ersetzen.

Durch die wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhalten wir ausgehend von (1) eine Folge von Polynomen

$$
(4) \qquad P_m(z) = z^n - a_{n-1}^{(m)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(m)} z^{n-2} - \dots + (-1)^n a_o^{(m)}
$$

mit den Nullstellen $z_1^m; \dots ; z_n^m$ und $m=2^j$; $j=1;2;\dots$.

Die Berechnung von P_2 und von jedem weiteren Polynom aus dieser Folge kann man mit Hilfe des folgenden Schemas durchführen:

P	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	...	a_3	a_2	a_1	a_o
	1	a_{n-1}^2	a_{n-2}^2	a_{n-3}^2	...	a_3^2	a_2^2	a_1^2	a_o^2
		$-2a_{n-2}$	$-2a_{n-1}a_{n-3}$	$-2a_{n-2}a_{n-4}$	...	$-2a_4a_2$	$-2a_3a_1$	$-2a_2a_o$	
			$2a_{n-4}$	$2a_{n-1}a_{n-5}$	...	$2a_5a_1$	$2a_4a_o$		
				$-2a_{n-6}$	...	$-2a_6a_o$			
P_2	1	$a_{n-1}^{(2)}$	$a_{n-2}^{(2)}$	$a_{n-3}^{(2)}$	...	$a_3^{(2)}$	$a_2^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	$a_o^{(2)}$

Zu dieser Rechenvorschrift gelangt man durch das Einsetzen von (1) in (3). Hiernach erhält man die Koeffizienten $a_k^{(2)}$, indem man zu a_k^2 die abwechselnd mit positivem und negativem Vorzeichen versehenen doppelten Produkte der nach rechts und links gleichweit von a_k entfernten Koeffizienten addiert. Zu beachten ist dabei, daß in unserem Fall a_n gleich Eins ist.

5. Die näherungsweise Berechnung der reellen Nullstellen

Obwohl das Verfahren einen größeren Anwendungsbereich zuläßt, wollen wir hier von zusätzlichen vereinfachenden Voraussetzungen ausgehen. Zunächst nehmen wir an, daß das Polynom (1) nur einfache Nullstellen besitzt, was wegen 3. noch keine Einschränkung ist. Weiterhin wollen wir voraussetzen, daß diese Nullstellen sogar betragsmäßig verschieden und reell sind. Sie sollen nach der Größe des Betrages durchnumeriert sein:

$$|z_1| < |z_2| < \dots < |z_n| .$$

Wir bilden nun aus (1) die Folge der Polynome (4) und wenden auf diese den Wurzelsatz von Vieta an:

$$\begin{aligned}
a_{n-1}^{(m)} &= z_1^m + z_2^m + \dots + z_{n-1}^m + z_n^m \\
&= z_n^m \left[\left(\frac{z_1}{z_n}\right)^m + \left(\frac{z_2}{z_n}\right)^m + \dots + \left(\frac{z_{n-1}}{z_n}\right)^m + 1 \right] \\
a_{n-2}^{(m)} &= z_1^m z_2^m + \dots + z_{n-2}^m z_{n-1}^m + z_{n-1}^m z_n^m \qquad (5) \\
&= z_{n-1}^m z_n^m \left[\left(\frac{z_1 z_2}{z_{n-1} z_n}\right)^m + \dots + \left(\frac{z_{n-2} z_{n-1}}{z_{n-1} z_n}\right)^m + 1 \right] \\
&\vdots \\
a_o^{(m)} &= z_1^m z_2^m \dots z_{n-1}^m z_n^m .
\end{aligned}$$

Da die Ausdrücke in den eckigen Klammern für große m gegen Eins streben, gilt also für $m = 2^j \to \infty$:

$$\sqrt[m]{a_{n-1}^{(m)}} \to |z_n|$$

$$\sqrt[m]{a_{n-2}^{(m)}} \to |z_{n-1}z_n| \implies \sqrt[m]{a_{n-2}^{(m)}/a_{n-1}^{(m)}} \to |z_{n-1}|$$

$$\sqrt[m]{a_{n-3}^{(m)}} \to |z_{n-2}z_{n-1}z_n| \implies \sqrt[m]{a_{n-3}^{(m)}/a_{n-2}^{(m)}} \to |z_{n-2}|$$

$$\vdots$$

$$\sqrt[m]{a_o^{(m)}} = |z_1 z_2 \ldots z_n| \implies \sqrt[m]{a_o^{(m)}/a_1^{(m)}} \to |z_1|$$

Wegen $m = 2^j$ erhalten wir leider nur Näherungsausdrücke für die Beträge der Nullstellen und wir müssen durch Einsetzen der erhaltenen Werte in (1) noch das richtige Vorzeichen ermitteln.

Beispiel:

Mit dem Verfahren von Graeffe sollen Näherungswerte für die Wurzeln des Polynoms

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 3z + 2$$

berechnet werden. Es wurde ein Beispiel gewählt, für das die Wurzeln schon bekannt sind. Es sind die Werte

$$1 + \sqrt{2} = 2{,}41421\ldots,\quad 2 \text{ und } 1 - \sqrt{2} = -0{,}414213\ldots$$

Wir können dadurch in jedem Schritt die erhaltenen Näherungswerte mit den wahren Werten vergleichen.

Die für das Verfahren notwendigen Berechnungen wurden mit Hilfe eines kleinen Basic-Programms auf dem KC 85/2 durchgeführt.

Als erstes Polynom aus der Folge (4) erhält man:

$$P_2(z) = z^3 + 10z^2 + 25z + 4.$$

Hieraus ergeben sich die Näherungswerte

3,16..., 1,58... und 0,4.

Beim Vergleich mit den wahren Werten fällt auf, daß der letzte Näherungswerte schon überraschend gut ist.

Da die Resultate für sich sprechen, werden die weiteren Polynome aus der Folge (4) mit den daraus resultierenden Näherungswerten nun nur kurz angegeben:

$$P_4(z) = z^3 + 50z^2 + 545z + 16$$

2,65...   1,81...   0,4139...

$$P_{16}(z) = z^3 + 1410z^2 + 295425z + 256$$

2,47...   1,95...   0,414213

$P_{32}(z) = z^3 + 1{,}39725\cdot 10^6 z^2 + 8{,}72752\cdot 10^{10} z + 65536$
2,42... 1,994 0,414214

$P_{64}(z) = z^3 + 1{,}77776\cdot 10^{12} z^2 + 7{,}61696\cdot 10^{21} z + 4{,}29497\cdot 10^9$
2,4144 1,99985 0,414214

Bei der Berechnung der Koeffizienten des Polynoms P_{128} streikte der Rechner. Der Wert der größten verarbeitbaren Zahl wurde überschritten.

6. Schlußbemerkungen

a) Unter den gestellten Voraussetzungen müssen alle $a_k^{(m)}$, $m=2;4;8;\ldots$, positiv sein. Wegen (5) muß für große m näherungsweise

$$a_k^{(2m)} \approx \left[a_k^{(m)}\right]^2$$

gelten. Ein von Eins abweichender Faktor

(z. B. $a_k^{(2m)} \approx 2\left[a_k^{(m)}\right]^2$)

zeigt betragsmäßig gleiche Nullstellen an. Durch die Substitution $z = w+b$, mit einer geeigneten Konstante b, kann das Polynom (1) in ein Polynom mit betragsmäßig verschiedenen Nullstellen überführt werden.
Treten für bestimmte k in den Koeffizientenfolgen $a_k^{(m)}$, $m=2;4;8;\ldots$, negative Zahlen auf, so gehört zu jedem solchen k ein Paar konjugiert komplexer Wurzeln.
Streicht man diese Folgen nach dem Abbruch des Verfahrens und rechnet mit den verbliebenen Koeffizienten wie beschrieben weiter, so erhält man Näherungswerte für die reellen Nullstellen von (1) und die Quadrate der Beträge der komplexen Nullstellen.

b) Der Vorteil des Verfahrens von Graeffe besteht darin, daß man mit Sicherheit Näherungswerte für <u>alle</u> (reellen) Nullstellen des Polynoms (1) erhält.

c) Einen schwerwiegenden Nachteil stellt das in Abhängigkeit von m exponentielle Anwachsen der in (4) auftretenden Koeffizienten dar. Dadurch ist das Verfahren für Computer nicht geeignet.

Feuerbach und die merkwürdigen Punkte

0. Einleitung

Jedem Schüler, spätestens ab der 7.Klasse, sollte eine Aussage über Dreiecke bekannt sein, die wir ausdrücken durch folgenden

Hilfssatz 1 .In jedem Dreieck haben die drei Mittelsenkrechten der Seiten genau einen Punkt gemeinsam, den Mittelpunkt des Umkreises.

Von einem guten Schüler sollte man außerdem erwarten, daß er diesen Satz beweisen kann, zumal ein solcher Beweis ganz einfach direkt zu führen ist:
Unter der Mittelsenkrechten der Strecke XY versteht man bekanntlich diejenige Gerade m(XY), für welche die Geradenspiegelung σ mit der Achse m(XY) die beiden Punkte X und Y vertauscht ($\sigma(X) = Y$, $\sigma(Y) = X$). Die Gerade m(XY) ist demnach zugleich die Menge aller Punkte P, die von X und Y den selben Abstand haben ($|PX| = |PY|$). Sind nun A, B, C die Ecken eines beliebigen Dreiecks, so daß also A, B und C nicht auf ein und derselben Geraden liegen, dann schneiden sich die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten AB und BC in einem Punkt M : $m(AB) \cap m(BC) = \{M\}$.
Folglich gilt $|MA| = |MB|$ und $|MB| = |MC|$, also auch $|MA| = |MC|$ und somit $M \in m(AC)$, was zu beweisen war.
Die Behandlung von Sätzen dieser Art, sogenannten "Schnittpunktsätzen", gehört seit über 150 Jahren zum Bestand des elementargeometrischen Unterrichts und wird erst in letzter Zeit und ganz zu Unrecht in unseren Schulen vernachlässigt.
Bemerkenswert ist die Tatsache, daß zwar schon Euklid in seinen "Elementen", dem über zwei Jahrtausende anerkannten Standardwerk der Geometrie, den Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks zur Konstruktion des Umkreises nutzte, aber dem Umstand, daß auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt verläuft, keine Beachtung schenkte. Auch Archimedes, der die entsprechenden Sätze über den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Höhen und drei Seitenhalbierenden im

Dreieck formulierte, faßte diese Aussagen nicht als besondere Phänomene auf. Die Bezeichnung "merkwürdige Punkte" für solche in allen Dreiecken auftretenden Schnittpunkte besonderer Dreieckstransversalen wird erst um 1800 eingeführt, als die entsprechenden Schnittpunktsätze zur Demonstration und Anwendung der neu entstandenen geometrischen Theorien herangezogen wurden. Von besonderer Bedeutung in diesem Zusammenhang ist die Entdeckung von Leonhard Euler (1707-1783) aus dem Jahre 1763, daß in jedem Dreieck der Höhenschnittpunkt H, der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt M auf einer Geraden (Eulersche Gerade!) liegen mit $|HS| = 2|SM|$. Damit war erstmalig ein über die Kenntnisse der alten Griechen hinausgehender Satz der elementaren Dreiecksgeometrie gefunden.
Von gleicher Bedeutung ist die Entdeckung von Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) aus dem Jahre 1822, daß der Kreis (Feuerbachkreis!) durch die Seitenmitten eines beliebigen Dreiecks, der außerdem durch die Höhenfußpunkte und die Mitten der oberen Höhenabschnitte verläuft, den Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks jeweils in genau einem Punkt berührt.

Karl Wilhelm Feuerbach wurde am 30.Mai 1800 in Jena geboren als Sohn des berühmten Juristen Johann Paul Anselm Ritter von Feuerbach, für den unlängst in der Goetheallee in Jena eine Gedenkbüste aufgestellt wurde. Damit gehört der Mathematiker Karl Wilhelm Feuerbach zu jener berühmten Familie, die u.a. den Maler Anselm Feuerbach und Philosophen Ludwig Feuerbach hervorgebracht hat. Karl W. Feuerbach wirkte als Professor der Mathematik am Gymnasium in Erlangen, wo er 1822 seine Schrift "Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks" verfaßte.

Seit dieser Zeit erschienen immer wieder Arbeiten mit Vereinfachungen von Beweisen der Sätze über die merkwürdigen Dreieckspunkte oder der Entdeckung neuer Eigenschaften.

Die grundlegenden Sätze von Euler und Feuerbach sollen im folgenden durch besonders einfache bzw. kurze Beweise hergeleitet werden als Anwendung der Vektorrechnung und der Spiegelungen am Kreis.

1. Eulersche Gerade

Im folgenden werden gelegentlich die Ortsvektoren a, b,..., x von Punkten A, B,..., X mit den Punkten selbst identifiziert, etwa in folgendem Sinne: Unter dem Schwerpunkt s_n eines Systems von n Punkten $x_1,\ldots, x_n$ wird per definitionem der Punkt

$$s_n := (x_1+x_2+\ldots+x_n)/n$$

verstanden. Also ist z.B. der Mittelpunkt $s_2 = (x_1+x_2)/2$ der Strecke X_1X_2 der Schwerpunkt von $\{X_1, X_2\}$.

Sind A', B', C' die Mittelpunkte der Seiten BC, AC, AB eines Dreiecks ABC, so heißen die Geraden s(AA'), s(BB') und s(CC') die Seitenhalbierenden des Dreiecks, und es gilt folgender

Hilfssatz 2. In jedem Dreieck schneiden sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt, dem Schwerpunkt des Dreiecks.

Zum Beweis kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß etwa $C = 0$ Ursprung des Koordinatensystems ist, so daß

$$s = (a+b+c)/3 = \frac{1}{3}(a+b) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) = \frac{2}{3}c'$$

gilt. Folglich liegt der Schwerpunkt S des Dreiecks auf der Seitenhalbierenden s(CC').

Die nun noch fehlende Aussage über den Schnittpunkt H der drei Höhen im Dreieck fällt mit ab beim Beweis des Satzes von Euler, den wir formulieren als

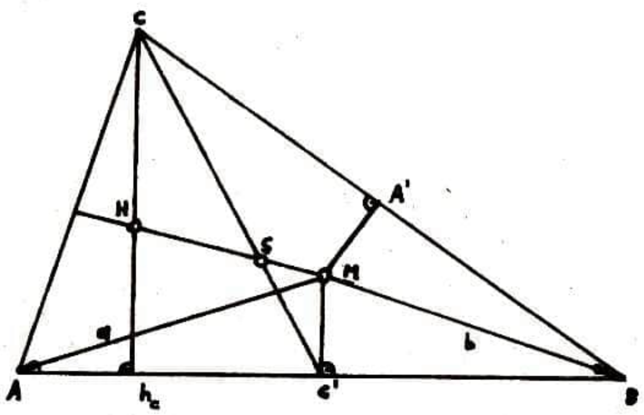
Satz 1. In jedem Dreieck liegen der Höhenschnittpunkt H, der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt M auf einer Geraden (der Eulerschen Geraden) mit

$$3s = h + 2m, \qquad (1)$$

so daß S die Strecke HM im Verhältnis 2:1 teilt.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der Umkreismittelpunkt M Ursprung des Koordinatensystems. Dann gilt für die Beträge der Ortsvektoren der Dreiecksecken

$$|a| = |b| = |c| \quad . \qquad (2)$$



Die Gleichung der Höhe h_c durch C (Gerade durch C senkrecht zur gegenüberliegenden Seite AB) lautet in vektorieller Form

$$(x-c)(a-b) = 0 \quad .$$

Wird hier für x der Punkt

$$p := a+b+c = 3s$$

eingesetzt, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (2)

$$(p-c)(a-b) = (a+b)(a-b) = |a|^2 - |b|^2 = 0 \quad ,$$

so daß $P \in h_c$ gilt. Analog ergibt sich $P \in h_a$ und $P \in h_b$, die drei Höhen des Dreiecks schneiden sich also in dem Punkt $P = H$ mit $h = 3s$, und S teilt demnach HM im Verhältnis 2:1, womit auch die Eulergleichung (1) (für $m \neq 0$) bewiesen ist.

Fortsetzung folgt!

Prof. Dr. E. Hertel
Sektion Mathematik

Katrin Tschirpke
Mathematik-Studentin
2. Studienjahr

Aufgaben der Bezirksolympiade (Klasse 11/12)

1. Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, die das folgende Ungleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x^4 - 6x^2 + 8 \leq 0, \qquad (1)$$
$$2x^2 - 3x > 0. \qquad (2)$$

2. Ein Auto soll einen Rundkurs in einem vorgeschriebenen Umlaufsinn durchfahren. Das zur Verfügung stehende Benzin reicht genau zum einmaligen Durchfahren des Kurses, wurde aber vorher willkürlich in eine Anzahl $n \geq 1$ von Kanistern verteilt, die ebenfalls willkürlich längs des Rundkurses aufgestellt sind. Der Tank des Autos ist zu Beginn leer und besitzt ausreichendes Fassungsvermögen, um beim Erreichen jedes Kanisters dessen Benzin aufzunehmen.
Man beweise, daß es möglich ist, den Startpunkt des Autos so zu wählen, daß der Kurs genau einmal durchfahren werden kann.
(Eventuelle Verluste beim Umfüllen, Mehrverbrauch bei wiederholtem Anfahren usw. sollen nicht berücksichtigt werden.)

Von den nachstehenden Aufgaben ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

3A. Man ermittle den größten Wert, den der Flächeninhalt des Bildes eines beliebig im Raum liegenden Quaders Q mit gegebenen Kantenlängen a, b, c bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Ebene annehmen kann.

3B. Es sei f diejenige für alle geordneten Paare (x,y) natürlicher Zahlen x, y definierte Funktion, die für alle natürlichen Zahlen x, y die folgenden Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt:

$$f(0,y) = y+1, \qquad (1)$$
$$f(x+1,0) = f(x,1), \qquad (2)$$
$$f(x+1,y+1) = f(x,f(x+1,y)). \qquad (3)$$

Man ermittle

a) den Funktionswert $f(3,3)$,

b) den Funktionswert $f(4,2)$.

Hinweis: Gegebenenfalls kann die Angabe eines gesuchten Funktionswertes durch einen rechnerischen Ausdruck mit konkret angegebenen Rechenoperationen erfolgen, wenn deren zahlenmäßige Ausführung ohne Rechenhilfsmittel eine zu lange Rechenzeit erfordern würde.

4. Man beweise für jedes Dreieck ABC: Bezeichnen wie üblich b, c, h_a die Längen der Seiten AC, AB bzw. der auf BC senkrechten Höhe und α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$, so gilt

$$h_a \leq \sqrt{bc} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \,. \qquad (1)$$

Man ermittle alle diejenigen Dreiecke ABC, bei denen in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

5. Man ermittle alle diejenigen Tripel (x,y,z) ganzer Zahlen, die die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$1243 \cdot (1 + yz) = 65 \cdot (xyz + x + z). \qquad (1)$$

6. Ein quadratisches Feld Q der Seitenlänge 10 km ist von einem Wassergraben u umgeben. Zur Bewässerung soll Q durch Anlegen weiterer Gräben g vollständig in rechteckige Felder F_1, F_2, ..., F_n zerlegt werden. (Die Breite der Gräben werde vernachlässigt, Abb. 1 zeigt ein Beispiel für solch eine Zerlegung.)

Abb. 1

Ferner werde gefordert, daß jeder Punkt der Fläche Q nicht weiter als 100 m von einem Wassergraben (u oder g) entfernt ist.

a) Man beweise: Wenn diese Forderung durch Gräben g einer Gesamtlänge von L Kilometern erfüllt wird, so folgt stets $L \geq 480$.

b) Man beweise, daß es einen kleinsten Wert gibt, den L (bei Erfüllung der genannten Forderung) annehmen kann, und ermittle diesen Wert.

Preisaufgaben

U 19 (1) Man bestimme die beiden Lösungen der folgenden Gleichung in Abhängigkeit von m, wobei die eine Lösung doppelt so groß wie die andere sein soll:

$$2x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 9m + 39 = 0 .$$

U 20 (1) Löse die Gleichung

$$32^{(x+5)/(x-7)} = 0{,}25 \cdot 128^{(x+17)/(x-3)}$$

U 21 (1) Löse das folgende Gleichungssystem:

$$\log_{xy}(x - y) = 1 \quad ,$$

$$\log_{xy}(x + y) = 0 \quad ,$$

$$(\log_a x + \log_a y - 2) \cdot \log_{\frac{4}{9}} a = -1 \quad .$$

U 22 (2) α und β erfüllen für x die Bedingung

$$a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c \quad .$$

Man berechne den Ausdruck $4\cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\beta}{2}$.

U 23 (1) Finde die Summe von

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n \quad .$$

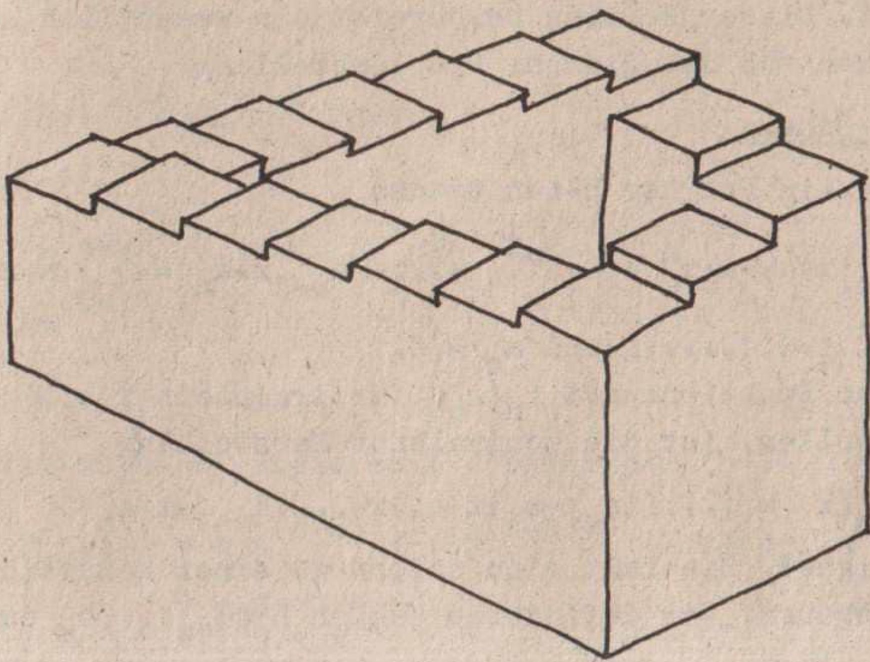
U 24 Две окружности пересекаются в точках А и В. СД – их общая внешняя касательная. Через точки В, С и Д проведена окружность. Доказать, что ее диаметр есть среднее пропорциональное между диаметрами данных окружностей.

Einsendeschluß: 1. 8. 1988

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung"
Leiter: Stefan Posselt
Chefredakteur: Eckhard Stein
Redaktion: C. Dahms, J. Dimler, N. Patzschke, O. Kotowski
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 10. 3. 1988
Titelseite: M. Torke

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	22 (1988) 4	S. 49–64



wurzel $\sqrt{5 \cdot 88}$

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
22. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Das HORNER-NEWTON-Verfahren

Im Heft 7/8 1986 der WURZEL wurde das Halbierungsverfahren zur Berechnung von Näherungswerten für reelle Polynomnullstellen vorgestellt. Dieser Beitrag beschreibt ein wesentlich schnelleres Verfahren für die gleiche Problemstellung.

Das HORNER-Schema

Gegeben sei ein Polynom n-ten Grades

(1) $$P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$, $i=0,1,\dots,n$ und $a_o \neq 0$.
Wenn wir den Funktionswert $P_n(x_o)$ für irgendein $x_o \in \mathbb{R}$ effektiv berechnen wollen, ist die äquivalente Darstellung

(2) $$P_n(x) = (\dots((a_o x + a_1)x + a_2)x + \dots + a_{n-1})x + a_n$$

besser geeignet. Sie läßt sich sofort zu einer Rekursionsvorschrift ausbauen. Wir definieren Zahlen $b_o, b_1, \dots, b_n$ durch

(3) $$\begin{aligned} b_o &= a_o \\ b_1 &= b_o x_o + a_1 \\ &\vdots \\ b_n &= b_{n-1} x_o + a_n \end{aligned}$$

und erhalten

$$P_n(x_o) = b_n.$$

Wenn wir $b_{-1} = 0$ setzen, erhalten wir die Rekursionsformel

(3*) $$b_i = b_{i-1} x_o + a_i, \qquad i=0,1,\dots,n.$$

Die Koeffizienten $b_o, b_1, \dots, b_{n-1}$ definieren ein Polynom

(4) $$P_{n-1}(x) = b_o x^{(n-1)} + b_1 x^{(n-1)-1} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{(n-1)-i},$$

und es gilt

(5) $$P_n(x) = P_n(x_o) + (x - x_o) P_{n-1}(x).$$

Durch Anwendung der gleichen Vorschrift auf $P_{n-1}(x)$ erhalten wir Zahlen $c_o, c_1, \ldots, c_{n-1}$:

$$(6) \qquad \begin{aligned} c_o &= b_o \\ c_1 &= c_o x_o + b_1 \\ &\vdots \\ c_{n-1} &= c_{n-2} x_o + b_{n-1} \end{aligned}$$

bzw. mit $c_{-1} = 0$

$$(6^*) \qquad c_i = c_{i-1} x_o + b_i, \qquad i=0,1,\ldots,n-1$$

und es gilt

$$P_{n-1}(x_o) = c_{n-1}.$$

Die Koeffizienten c_i definieren ein Polynom

$$(7) \qquad P_{n-2}(x) = c_o x^{(n-2)} + c_1 x^{(n-2)-1} + \ldots + c_{n-3} x + c_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-2} c_i x^{(n-2)-i}$$

und es gilt

$$(8) \qquad P_n(x) = P_n(x_o) + (x-x_o) \cdot P_{n-1}(x_o) + (x-x_o)^2 \cdot P_{n-2}(x).$$

Für die Handrechnung sieht das HORNER-Schema so aus:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & a_o & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
x_o & - & b_o x_o & b_1 x_o & \ldots & b_{n-3} x_o & b_{n-2} x_o & b_{n-1} x_o \\ \hline
 & b_o & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} & \boxed{b_n} = P_n(x_o) \\
x_o & - & c_o x_o & c_1 x_o & \ldots & c_{n-3} x_o & c_{n-2} x_o & \\ \hline
 & c_o & c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-2} & \boxed{c_{n-1}} = P_{n-1}(x_o) &
\end{array}$$

bzw. für das Beispiel

$$P_4(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 8x - 120$$

und $x_o = 4$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & -3 & 2 & -8 & -120 \\
4 & - & 8 & 20 & 88 & 320 \\ \hline
 & 2 & 5 & 22 & 80 & \boxed{200} = P_4(4) \\
4 & - & 8 & 52 & 296 & \\ \hline
 & 2 & 13 & 74 & \boxed{376} = P_3(4) &
\end{array}$$

Das NEWTON-Verfahren

Es sei $z \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von $P_n(x)$. Dann gilt

(9) $$P_n(z) = P_n(x_o)+(z-x_o)P_{n-1}(x_o)+(z-x_o)^2 \cdot P_{n-2}(z) = 0.$$

Für $P_{n-1}(x_o) \neq 0$ folgt

$$\frac{P_n(x_o)}{P_{n-1}(x_o)} + (z-x_o) + (z-x_o)^2 \cdot \frac{P_{n-2}(z)}{P_{n-1}(x_o)} = 0$$

bzw.

(10) $$z = x_o - \frac{P_n(x_o)}{P_{n-1}(x_o)} - \frac{P_{n-2}(z)}{P_{n-1}(x_o)}(z-x_o)^2.$$

Unter Vernachlässigung des letzten Terms erhalten wir eine neue Näherung x_1 für z durch

(11) $$x_1 = x_o - \frac{P_n(x_o)}{P_{n-1}(x_o)},$$

wobei der "Fehler" durch

(12) $$|x_1-z| = \left|\frac{P_{n-2}(z)}{P_{n-1}(x_o)}\right| \cdot |z-x_o|^2$$

beschrieben wird.

Es sei bekannt, daß $z \in (a,b)$, wobei für alle $x \in (a,b)$ die Bedingungen

(13) $$|P_{n-1}(x)| \geqq m > 0, \qquad |P_{n-2}(x)| \leqq M$$

erfüllt sind. Dann existiert ein Teilintervall $(z-d,z+d) \subseteq (a,b)$, so daß für alle $x_o \in (z-d,z+d)$ das NEWTON-Verfahren

(14) $$x_{k+1} = x_k - \frac{P_n(x_k)}{P_{n-1}(x_k)}, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

quadratisch gegen ξ konvergiert.

Wenn wir nun d "hinreichend klein", d. h. den Startwert x_o "hinreichend nahe" an z wählen, konvergiert die Folge der x_k wesentlich rascher gegen z, als das beim Halbierungsverfahren der Fall war.

Für $d < \frac{m}{M}$ erhalten wir

(15) $$q = |x_o-z| \cdot \frac{M}{m} \leqq d \cdot \frac{M}{m} < \frac{m}{M} \cdot \frac{M}{m} = 1.$$

Damit ergibt sich aus (12) für den Fehler der Näherung x_1

(16) $$|x_1 - z| \leq \frac{M}{m}|x_o - z|^2 \leq \frac{M}{m}(\frac{m}{M} \cdot q)^2 \leq \frac{m}{M} \cdot q^2 .$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir

(17) $$|x_k - z| \leq \frac{M}{m}|x_{k-1} - z| \leq \frac{m}{M} \cdot q^{(2^k)} .$$

Für $|x_{k-1} - z| \approx 10^{-s}$ erhalten wir $|x_k - z| \lesssim \frac{M}{m} \cdot 10^{-2s}$, was in etwa einer Verdopplung der Anzahl gültiger Ziffern in jedem Schritt entspricht. Beziehung (17) beschreibt also, was unter "quadratischer" Konvergenz zu verstehen ist. Näherungsweise ergibt sich

(17*) $$|x_k - z| \lesssim |x_{k-1} - z|^2 .$$

Bevor wir diese rasche Konvergenz am Beispiel veranschaulichen, soll ein kleines BASIC-Programm uns die Berechnung auf einem Kleincomputer ermöglichen. Wir setzen dazu voraus, daß die Koeffizienten A(I) bereits im Rechner gespeichert sind und auch der Startwert X bereits bereitgestellt wurde.
Bei der Berechnung der b_i und c_i verzichten wir auf den Index i, genau wie bei der Folge der Näherungen auf den Index k verzichtet wird.

```
1ØØ  REM *** HORNER-NEWTON-VERFAHREN ***
11Ø  B=Ø:C=Ø
12Ø  FOR I=ØTON
13Ø  C=C*X+B
14Ø  B=B*X+A(I)
15Ø  NEXT I
16Ø  X=X-B/C
17Ø  PRINT X
18Ø  IF ABS (B/C) > EPS GOTO 11Ø
19Ø  END
```

Für $P_2(x) = x^2-2$ erhalten wir mit $x_o=2$ (oder auch $x_o=1$) folgende Folge:

k	x_k
1	1.5
2	1.41666667
3	1.4121569
4	1.4121356

wobei sich x_4 im Rahmen der Rechnergenauigkeit nicht weiter verbessern läßt.
Für $P_4(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 8x - 120$ und $x_o = 4$ ergeben sich die Näherungswerte

k	x_k
1	3.46808511
2	3.29301112
3	3.27542983
4	3.27526347
5	3.27526345

wobei sich x_5 im Rahmen der Rechnergenauigkeit ebenfalls nicht weiter verbessern läßt.

Abschließend sei vermerkt, daß das NEWTON-Verfahren stets konvergiert, wenn nur x_o "nahe genug" an z liegt, allerdings unter Umständen nur "linear", wenn nämlich die Bedingungen (13) nicht erfüllt sind.
Nachteil des NEWTON-Verfahrens ist allerdings, daß keine "sicheren" Fehlerabschätzungen erhalten werden. In einem späteren Beitrag soll deshalb der Einschließungsgedanke des Halbierungsverfahrens wieder aufgegriffen werden.

Dr. J. Komusiewicz
Sektion Mathematik
Bereich Numerik/Optimierung

Preisaufgaben

U 25 Докажите, что среди чисел $2^{м} + 2^{к}$, а также среди чисел $3^{м} + 3^{к}$ бесконечно много квадратов, а среди чисел $4^{м} + 4^{к}$, $5^{м} + 5^{к}$ и $6^{м} + 6^{к}$ нет ни одного квадрата целого числа (здесь м и к – натуральные числа, м $\neq$ к).

U 26 Beweise, daß die Gleichung $x^3 + y^3 = (x + y)^2 + (xy)^2$ keine Lösung im Bereich der natürlichen Zahlen besitzt.

U 27 Die Summe dreier ganzer Zahlen a, b, c sei Null. Beweise, daß dann $2(a^4 + b^4 + c^4)$ das Quadrat einer ganzen Zahl darstellt.

U 28 Untersuche, ob in der Ebene drei Punkte A, B, C existieren, so daß fuer jeden beliebigen Punkt P der Ebene wenigstens eine der Strecken PA, PB, PC irrationale Länge besitzt.

U 29 Die Zahlen +1 und −1 sind in neun kleine Quadrate eines 3 x 3 Quadrates geschrieben. Danach wird jede Zahl in den kleinen Quadraten neu gebildet, indem man das Produkt ihrer Nachbarn bildet. (Zwei kleine Quadrate sind Nachbarn, wenn sie eine gemeinsame Seite haben.) Beweise, daß nach endlich vielen solchen Operationen in den Quadraten nur +1 steht.

U 30 Beweise die Ungleichung

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$$

Einsendeschluß: 1. 9. 1988

Lösungen zur Bezirksolympiade (Klasse 11/12)

1. Die Ungleichung (1) ist der Reihe nach äquivalent mit

$(x^2 - 2)(x^2 - 4) \leqq 0,$

$2 \leqq x^2 \leqq 4,$

$\sqrt{2} \leqq |x| \leqq 2,$

$-2 \leqq x \leqq -\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2} \leqq x \leqq 2.$ (3)

Die Ungleichung (2) ist äquivalent mit

$x(2x - 3) > 0$

und dies mit

$x < 0$ oder $x > \frac{3}{2}$. (4)

Also ist das Ungleichungssystem (1), (2) äquivalent damit, daß (3) und (4) gelten. Wegen $0 < \sqrt{2} < \frac{3}{2} < 2$ ist dies äquivalent mit

$-2 \leqq x \leqq -\sqrt{2}$ oder $\frac{3}{2} < x \leqq 2.$ (5)

Folglich erfüllen genau alle diejenigen reellen Zahlen x, für die (5) gilt, das Ungleichungssystem (1), (2).

Hinweis: Das Ergebnis kann auch so formuliert werden: Die Lösungsmenge von (1), (2) ist die Vereinigungsmenge der Intervalle $[-2, -\sqrt{2}]$ und $(\frac{3}{2}, 2]$.

Andere Lösungsmöglichkeit: Die in einem z,y-Koordinatensystem gebildete Kurve $y = z^2 - 6z + 8$, d. h. $y+1 = (z-3)^2$ ist eine nach oben geöffnete und so gelegene Normalparabel, daß ihr Scheitel die Koordinaten (3,-1) hat. Dem Verlauf dieser Parabel (z. B. genügend genau skizziert) kann man entnehmen, daß $z^2 - 6z + 8 \leqq 0$ genau für alle diejenigen nicht negativen z gilt, für die $2 \leqq z \leqq 4$ ist. Also gilt $x^4 - 6x^2 + 8 \leqq 0$ genau für alle x mit $\sqrt{2} \leqq |x| \leqq 2$, d. h. mit (3).
Analog kann man auch durch Diskussion der Parabel $y = 2x^2-3x$ zu (4) gelangen.

2. I. Im Fall n=1 kann der einzige Kanister offenbar als Startpunkt gewählt werden.

II. Als Induktionsannahme werde vorausgesetzt, daß die Behauptung für n = k Kanister zutrifft ($k \geq 1$). Dann folgt für jede Aufstellung A von k+1 Kanistern:

Unter den Kanistern der Aufstellung A befindet sich wenigstens ein Kanister C, von dem aus der nächste Kanister C' mit dem Inhalt von C erreicht werden kann; denn andernfalls wäre die Summe der Inhalte aller Kanister kleiner als eine für den Rundkurs ausreichende Gesamtmenge. Wird nun der Inhalt von C' in C umgefüllt und C' weggelassen, so entsteht eine Aufstellung A' von k Kanistern, zu der nach Induktionsannahme ein Standort existiert, von dem aus der Rundkurs durchfahren werden kann. Dieser Standort kann an keiner Stelle sein, die zwischen C und dem in der Aufstellung A übernächsten Kanister C" liegt; denn er muß bei einem Kanister C_0 sein (sonst könnte das Auto dort nicht starten), und zwischen C und C" steht bei der Aufstellung A' kein Kanister.

Also enthält für die Aufstellung A' der mit C_0 beginnende Rundkurs auf der Strecke von C_0 bis C (die auch mit C_0= C entartet sein kann) dieselben Standorte wie für A. Dann folgt die Strecke von C bis zu C", und danach folgt auf der Strecke von C" bis C_0 (die auch mit C_0 = C" entartet sein kann) wieder dieselbe Standortverteilung für A' wie für A.

Damit ergibt sich für die Aufstellung A: Nach einem Start in C_0 kann wie bei A' bis C gefahren werden. Anschließend würde (nach Voraussetzung über A') das im Auto und in C und in C' zusammen vorhandene Benzin reichen; daraus (und weil schon der Inhalt von C bis C' reicht) folgt: Das im Auto und in C vorhandene Benzin reicht bis C', und von dort kommt man durch Hinzufügen des Benzins aus C' bis C". Von dort schließlich gelangt man wie bei A' bis C_0.

Also hat sich ergeben, daß bei der Aufstellung A der Rundkurs von C_0 aus durchfahren werden kann; d.h., die Behauptung gilt auch für n = k+1 Kanister.

Mit I. und II. ist die Behauptung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ bewiesen.

Anderer Lösungsweg: Zunächst wird angenommen, daß der Tank des Autos zu Beginn nicht leer ist, sondern genausoviel Benzin enthält, wie zum einmaligen Durchfahren des Rundkurses notwendig ist. Es wird eine Proberunde mit beliebigem Startpunkt gefahren, wobei der Tankinhalt während der gesamten Fahrt registriert wird, bei Halt an einem Kanister vor und nach dem Nachtanken. Am Ende der Fahrt ist der Tankinhalt genau so groß wie zu Beginn. Wählte man einen der Punkte mit minimalem Tankinhalt (dieser fällt mit dem Standpunkt eines der Kanister zusammen) als Startpunkt für die Wertungsrunde (die mit leerem Tank begonnen wird), so ist der Tankinhalt stets nichtnegativ.

Feuerbach und die merkwürdigen Punkte

2. Neunpunktekreis

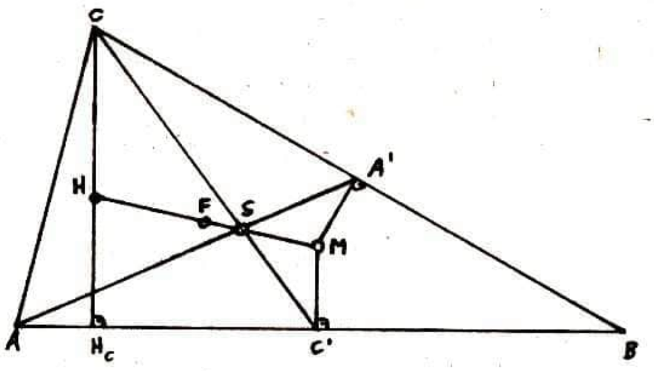
Eine erste Schar von Aussagen über den Feuerbachschen Kreis werde zusammengefaßt in folgendem

Satz 2 . In jedem Dreieck ABC liegen die Seitenmitten A', B', C', die Höhenfußpunkte H_A, H_B, H_C und die Mitten der Höhenabschnitte zwischen dem Höhenschnittpunkt H und den Ecken des Dreiecks auf einem Kreis, dem Feuerbachschen oder Neunpunktekreis, dessen Durchmesser gleich dem Umkreisradius ist und für dessen Mittelpunkt F gilt

$$3s = m + 2f \;, \qquad (3)$$

so daß F auf der Eulerschen Geraden liegt und die Strecke HM halbiert.

Beweis: Durch eine Radialstreckung am Schwerpunkt S mit dem Faktor -1/2 (zentrische Streckung mit dem Zentrum S, dem Streckungsfaktor 1/2 und anschließender Punktspiegelung an S) wird das Dreieck ABC auf das ähnliche Dreieck A'B'C' abgebildet.



Der Höhenschnittpunkt H geht dabei in M über, und der Umkreismittelpunkt M geht in den Umkreismittelpunkt F des Bilddreiecks A'B'C' über, so daß $|SM| = 2|SF|$ gilt und die Feuerbachsche Gleichung (3) bewiesen ist.

Wird diese Gleichung in der Form

$$3s = a+b+c = m+2f \quad \text{bzw.}$$
$$m-a = 2(\tfrac{1}{2}(b+c)-f)$$

geschrieben, so erkennt man, daß der Radius $|m-a|$ des Umkreises gleich dem Doppelten des Radius $|\frac{1}{2}(b+c)-f| = |A'F|$ des Feuerbachkreises ist. Eliminiert man aus den Gleichungen (2) und (3) die Größe m, so ergibt sich

$$3s = a+b+c = 4f-h \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{1}{2}(h+c)-f = f-\frac{1}{2}(a+b) \;,$$

was besagt, daß der Abstand des Mittelpunktes der Strecke HC von F gleich dem Radius $|FC'|$ des Feuerbachkreises ist; die Mitten der "oberen" Höhenabschnitte liegen also auf dem Feuerbachkreis.
Da MC' parallel zu HH_C ist und F Mittelpunkt von HM, muß schließlich $|FH_C| = |FC'|$ gelten, das heißt, daß auch die Höhenfußpunkte auf dem Feuerbachkreis liegen, womit Satz 2 vollständig bewiesen ist.

3. Feuerbachkreis

Die Hauptaussage, die von Karl Wilhelm Feuerbach über den "Neunpunktekreis" gefunden wurde, bezieht sich auf dessen Berührung mit dem In- und den Ankreisen des Dreiecks. Dazu sei zunächst daran erinnert, daß sich in jedem Dreieck die drei Innenwinkelhalbierenden in einem Punkt I schneiden, der Mittelpunkt des Inkreises ist (Kreis im Dreiecksinneren, so daß die Dreiecksseiten auf Tangenten liegen). Der Leser kann diese Aussage in völliger Analogie zu Hilfssatz 1 beweisen. Ähnlich einfach ist die Aussage herzuleiten, daß sich jede Innenwinkelhalbierende mit den beiden Halbierenden der "nicht anliegenden" Außenwinkel im Mittelpunkt eines Ankreises schneidet (Kreis, der mit genau einer Dreieckseite einen Punkt gemeinsam hat, und die beiden anderen Seiten liegen auf Tangenten).
Der abschließende Satz soll durch Inversion am Kreis bewiesen werden nach einer Idee von Taylor aus dem Jahre 1875. "Wurzelfüchse" seien an den Artikel "Spiegelung am Kreis" in Wurzel 3 (1981) erinnert, "ganz alte Hasen" verweisen wir auf die Artikelserie "Die Spiegelung am Kreis - eine geometrische Abbildung mit interessanten Anwendungen" des Jahrgangs 1968 (Hefte 1, 2, 3). Allen "jüngeren" Lesern sei das wichtigste kurz mitgeteilt:
Gegeben sei ein Kreis k (Inversionskreis) mit dem Mittelpunkt

M und der Radiusmaßzahl r. Jedem Punkt $P \neq M$ der Ebene wird nun ein neuer Punkt P' zugeordnet durch die Forderungen:

1. P' liegt auf dem Strahl mit dem Anfangspunkt M, der P enthält.
2. Es gilt $|MP| \cdot |MP'| = r^2$.

Damit ist eine eineindeutige Abbildung der um den Punkt M reduzierten euklidischen Ebene auf sich definiert. Die Punkte P und P' werden bei dieser Abbildung vertauscht, was die Bezeichnung "Spiegelung" bzw. "Inversion" am Kreis k rechtfertigt. Außerdem sind die Punkte des Inversionskreises k Fixpunkte der Abbildung.
Von den vielen interessanten Eigenschaften der Inversionen am Kreis werden hier folgende benötigt:

(I_1) Kreise, die den Inversionskreis senkrecht schneiden, werden auf sich abgebildet.

(I_2) Kreise durch den Mittelpunkt M des Inversionskreises werden auf Geraden abgebildet, die senkrecht zu MN verlaufen, wenn N Mittelpunkt des abzubildenden Kreises ist.

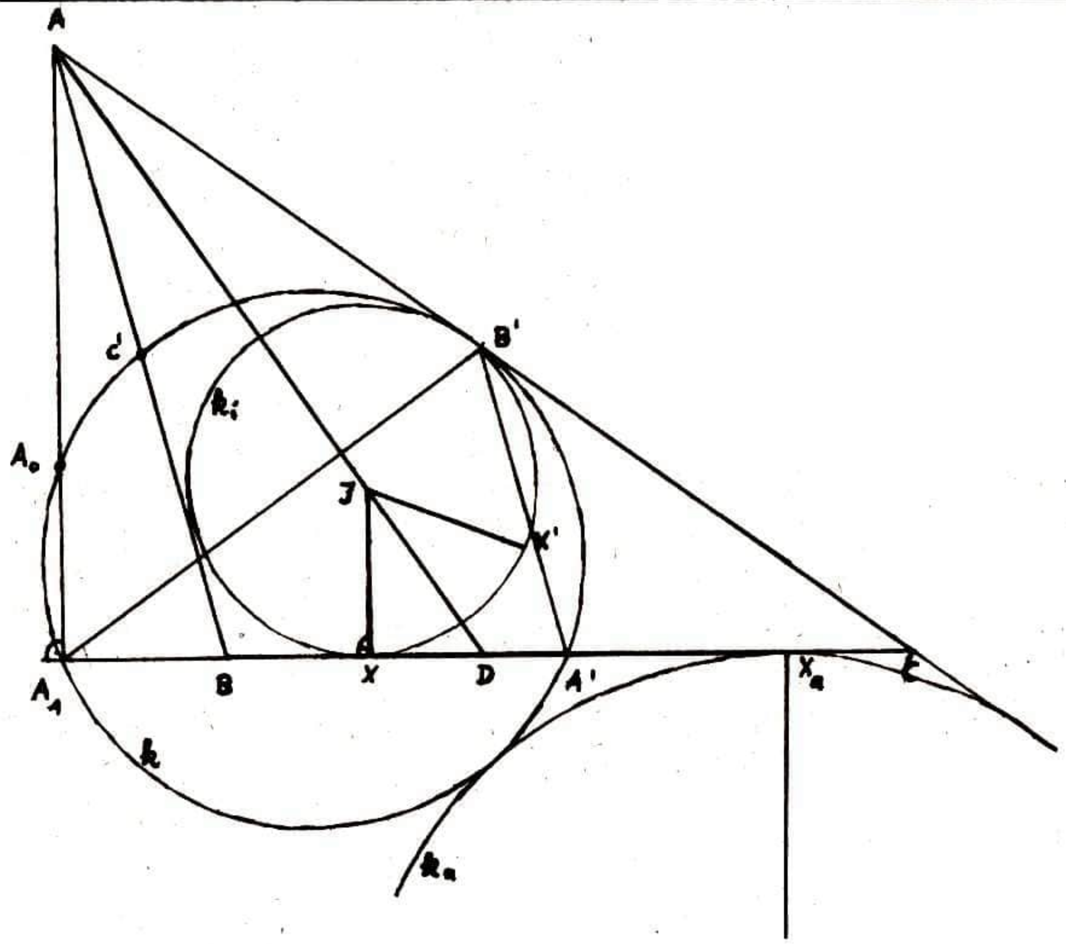
Außerdem benutzen wir folgende zwei Hilfsaussagen, deren elementare Beweise dem Leser überlassen werden sollen:

Hilfssatz 3 . Die Mitte jeder Dreiecksseite halbiert die Strecke, die von den Berührungspunkten des In- und Ankreises mit dieser Seite gebildet wird ($|A'X| = |A'X_a|$).

Hilfssatz 4 . Schneidet die Innenwinkelhalbierende durch A die Gegenseite BC mit dem Mittelpunkt A' im Punkt D, so gilt

$$|A'X|^2 = |A'D| \cdot |A'A_1|$$

für den Inkreisberührungspunkt X und den Höhenfußpunkt A_1 auf der Seite BC.



Nun kann die letzte Aussage über den Feuerbachkreis formuliert werden durch den folgenden

<u>Satz 3</u> . Der Feuerbachkreis eines beliebigen Dreiecks berührt den Inkreis einschließend und die drei Ankreise ausschließend.

<u>Beweis:</u> Wir betrachten das Dreieck ABC mit den entsprechenden Innenwinkelgrößen α, β, γ und dem Feuerbachkreis k durch die Seitenmitten A', B', C', den Höhenfußpunkt A_1 und die Mitte A_0 des oberen Höhenabschnitts HA. Der Inkreis k_i berühre BC in X, der Ankreis k_a berühre BC in X_a.

Nimmt man A' als Mittelpunkt und $|A'X| = |A'X_a|$ (Hilfssatz 3) als Radius eines Inversionskreises l, so ist das Bild k' des Feuerbachkreises k bei Spiegelung an l eine Gerade, weil k den Mittelpunkt A' von l enthält.

Nach (I_2) muß diese Gerade außerdem senkrecht zu $A'A_0$ verlaufen, und sie muß den Punkt D enthalten, denn D ist Bild von A_1 bei der Spiegelung an l wegen $|A'D| \cdot |A'A_1| = |A'X|^2 = r^2$ (Hilfssatz 4). Inkreis k_i und Ankreis k_a schneiden l orthogonal und gehen deshalb nach (I_1) bei Inversion an l in sich über. Die Bildgerade k' des Feuerbachkreises bildet mit der Seite BC einen Winkel der Größe $\delta = |\sphericalangle A'A_0A_1| = |\sphericalangle A'B'A_1|$ (Peripheriewinkel). Ferner ist $\sphericalangle A'B'A_1 = \sphericalangle CB'A_1 - \sphericalangle CB'A'$ und $|\sphericalangle CB'A'| = |\sphericalangle CAB|$. Wegen $|\sphericalangle B'A_1A| = |\sphericalangle CAA_1|$ (denn $|\sphericalangle CA_1A| = 90°$) und $|\sphericalangle CB'A_1| = 2|\sphericalangle CAA_1|$ (Außenwinkel im Dreieck $B'AA_1$) wird

$$\delta = 2|\sphericalangle CAA_1| - |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CAA_1| + |\sphericalangle BAA_1| \quad ,$$

$$\delta = \alpha + 2|\sphericalangle BAA_1| \quad ,$$

$$\delta = \alpha + 2(90° - |\sphericalangle A_1BA|) = \alpha + 180° - |\sphericalangle A_1BA| - |\sphericalangle A_1BA| \quad ,$$

$$\delta = \alpha + \beta - (\alpha + \gamma) = \beta - \gamma$$

Die zweite Tangente von D an k_i und k_a bildet mit BC den Winkel

$$\delta' = |\sphericalangle XIX'| = 2|\sphericalangle XID| = 2|\sphericalangle A_1AD| = \beta - \gamma .$$

Daher ist diese Gerade gleich dem Bild k' des Feuerbachkreises. Da k' also die Kreise k_i und k_a berührt und diese bei der Inversion fest bleiben, muß der Feuerbachkreis k selbst ebenfalls die Kreise k_i und k_a berühren, was zu beweisen war.

Wir hoffen, daß einige Leser diese Ausführungen als Anregung aufgreifen, sich in den großen Kreis derer einzureihen, die eigene schöne Beweise suchen für Eigenschaften der bekannten merkwürdigen Punkte oder neue merkwürdige Punkte oder Linien entdecken. Als weiterführende Literatur empfehlen wir folgendes schönes Buch aus der Schülerbibliotheksreihe:

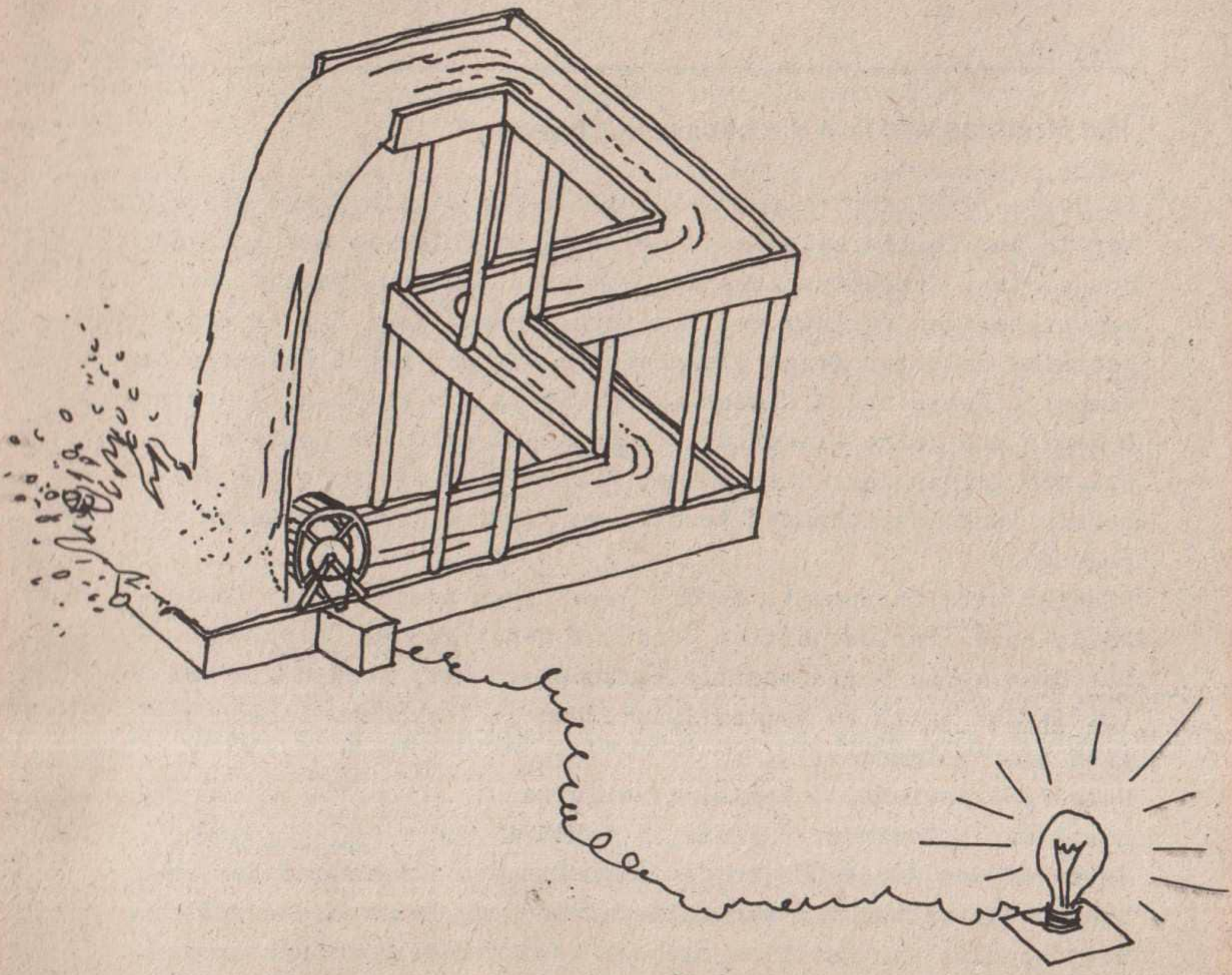
Donath, E.: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968

Katrin Tschirpke
Mathematik-Studentin
2. Studienjahr

Prof. Dr. E. Hertel

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung"
Leiter: Stefan Posselt
Chefredakteur: Eckhard Stein
Redaktion: C. Dahms, J. Dimler, N. Patzschke, O. Kotowski
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 2. 5. 1988
Titelseite: M. Torke

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	22 (1988) 5	S. 65–80



wurzel $\sqrt{6 \cdot 88}$

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
22. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Hat Matthias wirklich die besseren Chancen?

In Heft 4/1987 der "alpha" wird auf Seite 81 die Frage gestellt, wer in der Partie zwischen Holger und Matthias in der letzten Runde eines Schachturniers die größeren Chancen besitzt, wenn vom bisherigen Verlauf des Turniers bekannt ist: Holger und Matthias spielten gegen die gleichen Gegner, wobei Holger 5 Gewinne, 6 Remis und 1 Niederlage erzielte und Matthias 4 Gewinne, 8 Remis und keine Niederlage. Verweisend auf eine Methode von C.H.O'D. Alexander, die auf den "Prinzipien der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung" beruhen soll, wird folgendermaßen vorgegangen:

"Zuerst wird überprüft, ob die jeweiligen Anzahlen der Gewinn-, Remis- bzw. Verlustpartien beider Spieler größer 0 ist. Da Matthias keine Verlustpartie aufzuweisen hat, werden die betreffenden Anzahlen beider Spieler um je 1 erhöht. Danach ergibt sich folgendes:

Holger: 6 Gewinne, 7 Remis, 2 Verluste

Matthias: 5 Gewinne, 9 Remis, 1 Verlust

Jetzt werden die erhöhten Gewinnpunkte von Holger mit den erhöhten Verlustpunkten von Matthias und umgekehrt die erhöhten Gewinnpunkte von Matthias mit den erhöhten Verlustpunkten von Holger sowie noch die erhöhten Remispunkte miteinander multipliziert.

Gewinne für Holger:	$6 \cdot 1 =$	6
Gewinne für Matthias:	$5 \cdot 2 =$	10
Remis:	$7 \cdot 9 =$	$\underline{63}$
		79

Daraus ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeitswerte:

Gewinn für Holger:	$6/79 =$	$0{,}07 =$	7 %
Gewinn für Matthias:	$10/79 =$	$0{,}13 =$	13 %
Remis:	$63/79 =$	$0{,}80 =$	80 %

Somit ist erkennbar, daß Matthias - mathematisch betrachtet - über die besseren Chancen in dieser Partie verfügt.

Die Farbverteilung (Weiß oder Schwarz) für die vorangegangenen Partien sowie für die 13. Partie der beiden Spieler blieb bei dieser mathematischen Bestimmung unberücksichtigt."

Was sagt diese Methode in leichter überschaubaren Beispielen aus:

Beispiel 1 Wenn z. B. Spieler A 4 Gewinne, 0 Remis und 1 Niederlage aufweist (abgekürzt 4/0/1) und B die Bilanz 2/3/0, so hält jeder Schachfreund Spieler A mit 4 Punkten für besser als B mit 3,5 Punkten. Nach der Methode aus der "alpha" hat aber A $5 \cdot 1/(5 \cdot 1+1 \cdot 4+2 \cdot 3) \approx 33$ % Gewinnchancen, B dagegen $2 \cdot 3/15 = 40$ %. Wie im geschilderten Fall von Matthias und Holger wird vorsichtige Spielweise mathematisch angeblich belohnt. Genauer, bei guten Spielern (solchen mit mehr Siegen als Niederlagen) ist bei ungefähr vergleichbarem Punktstand angeblich der besser, der weniger Niederlagen aufweist.

Wie sieht es bei schlechten Spielern aus?

Beispiel 2 Nehmen wir an, A hat die Bilanz 1/0/4 und B 0/3/2, d. h. A wäre mit 1 Punkt schlechter als B mit 1,5 Punkten. Die "alpha"-Regel liefert aber für A eine Siegchance von 40 % und für B von 33 %. Bei schlechten Spielern ist angeblich offensives Spiel zu empfehlen.

Als Beispiel 3 sollen die Bilanzen 11/0/0 sowohl für A als auch B dienen. Dann haben A und B gleiche Siegchancen mit jeweils $12 \cdot 1/(12 \cdot 1+1 \cdot 1+1 \cdot 12) = 48$ %. Warum soll aber ein Remis mit nur 4 % so selten sein?

Als Beispiel 4 betrachten wir die Bilanzen 40/0/10 für A und 20/30/0 für B. Da die Bilanzen so aussehen, als ob sie die Ergebnisse aus Beispiel 1 bestätigen, sollte man erwarten, daß die Wahrscheinlichkeiten erhalten bleiben. Weit gefehlt: Jetzt stehen die Siegchancen für A nur noch $41 \cdot 1/(41 \cdot 1+1 \cdot 31+11 \cdot 21) \approx 14$ %, während sie sich für B auf $231/303 \approx 76$ % erhöhen, obwohl A nun schon 5 Punkte Vorsprung besitzt!

Wenn der Schachfreund nun der "modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung" nicht mehr traut, hat er allen Grund!

Die in der "alpha" vorgestellte Methode findet man übrigens auch in dem Buch "Schach und Zahl" von Eero Bonsdorff, Dr. Karl Fabel und Olavi Riihimaa (Walter-Rau-Verlag Düsseldorf, 2. Auflage 1971) ohne eine mathematische Begründung, aber wenigstens mit genaueren Verweisen: Neben Alexander (British

Chess Magazine, Juni 1955) wird noch auf Dr. E.T.O. Slater (BBCA Magazine, Oktober 1952) aufmerksam gemacht. Da diese Quellen schwer zugänglich sind, wollen wir uns selbst überlegen, welch verrückte Ideen hinter der in der "alpha" veröffentlichten Methode stecken können:

Aus Beispiel 1 ist zu entnehmen, daß die Chance von A, gegen einen der bisherigen Gegner X ($X \neq B$!) zu gewinnen, $4/5 = 80$ % beträgt, während die von B gegen X ($X \neq A$!) zu gewinnen, $2/5 = 40$ % beträgt. Wenn zwei Ereignisse unabhängig voneinander sind, so ist die Wahrscheinlichkeit für ihr gemeinsames Eintreten das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten. Haben die Gegner alle die gleiche Spielstärke, so ergibt sich im Beispiel 1 als Wahrscheinlichkeit dafür, daß sowohl A als auch B gegen X ($X \neq A$, $X \neq B$) gewinnen, $(4/5) \cdot (2/5) = 32$ %. Leitet man die Wahrscheinlichkeiten nur aus dem bisherigen Turnierverlauf ab, dann ist weiterhin die Chance, daß sowohl A gegen X ($X \neq B$) als auch X ($X \neq A$) gegen B gewinnt, 0 %. Wenn A gegen B gewinnt, muß natürlich B gleichzeitig verlieren. Vergißt man nun aber die obigen Bedingungen $X \neq A$ und $X \neq B$ und versucht, die obige Rechnung trotzdem auf das Spiel A gegen B anzuwenden, so käme man auf 0 % für einen Sieg von A gegen B, 0 % für ein Remis und $(1/5) \cdot (2/5) = 8$ % für eine Niederlage. Das ergibt aber zusammen nicht 100 %, denn die Wahrscheinlichkeit, daß im Spiel A gegen B sowohl A als auch B gewinnt, was angeblich 32 % ausmacht, kehrt man aus Vernunftsgründen unter den Teppich. Damit die Gesamtwahrscheinlichkeit wenigstens 100 % ergibt, wird in dem "alpha"-Verfahren nicht durch die Zahl aller Fälle $5 \cdot 5$ dividiert, sondern nur durch die Zahl der nicht offensichtlich unsinnigen Fälle $4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 2$, was in diesem Beispiel als Siegchance von B gegen A $2 \cdot 1/(4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1) = 100$ % ergibt.

Da das Ergebnis mit 100 % etwas kurios aussieht, wird in der "alpha" so getan, als ob man einfach A und B je einen Sieg, ein Remis und eine Niederlage mehr zusprechen könnte. Genauso gut könnte man annehmen, daß beide 10 Siege , Remis und Niederlagen mehr haben; an der Differenz der erzielten Punkte von A und B ändert sich dadurch wirklich nichts. Die mit der "alpha"-Methode berechneten Wahrscheinlichkeiten können sich hingegen drastisch ändern: Denn aus den 100 % Siegchancen für B im Bei-

spiel 4 ohne Addition werden 76 % bei der Addition von je einem Sieg, Remis und einer Niederlage und 40 % bei der Addition von je 10 Siegen, Remis und Niederlagen. Letztere Wahrscheinlichkeit stimmt übrigens mit der aus Beispiel 1 bei Addition von je 1 überein. Es ist wohl offensichtlich geworden, daß bei dieser "mathematischen" Bestimmung nicht nur der Anzugsvorteil des Führers der weißen Steine unberücksichtigt blieb.
Betrachten wir folgendes Gegenkonzept, das weniger anfechtbar ist: Wenn A gegen X ($X \neq B$) gewinnt und B gegen X ($X \neq A$) nicht gewinnt bzw. wenn A gegen X Remis spielt und B gegen X verliert, so ist anzunehmen, daß A gegen B gewonnen hätte. Die Wahrscheinlichkeit im Beispiel 1 beträgt dafür $(4 \cdot 3+4 \cdot 0+0 \cdot 0)/25 = 48$ %. Analog ist die Wahrscheinlichkeit für ein besseres Abschneiden von B als A im Spiel gegen X $(2 \cdot 0+2 \cdot 1+3 \cdot 1)/25 = 20$ %. Und nun zur problematischsten Annahme: Wenn A und B gegen X das gleiche Ergebnis erreichen, so könnte man vermuten, daß sie gegeneinander ein Remis erreicht hätten, was im Beispiel 1 eine Wahrscheinlichkeit von $(4 \cdot 2+0 \cdot 3+1 \cdot 0)/25 = 32$ % ergibt. Dieses Konzept benötigt weder solch windigen Tricks wie das Strecken von 8 % auf 100 % noch das Einführen scheinbarer Gewinne, Remis und Niederlagen. Natürlich läßt es unberücksichtigt, daß im Fall eines haushohen Gewinns von A gegen X und eines knappen Siegs von B gegen X eventuell auch A gegen B gewonnen hätte. Es sagt aber in Übereinstimmung mit unserer Intuition und im Gegensatz zu dem Zugang aus der "alpha", daß in Beispiel 1, 2 und 4 der entsprechend der Punktzahl stärkere Spieler auch die größeren Chancen hat und daß diese Chancen in Beispiel 1 und 4 übereinstimmen. In Beispiel 3 erhält man das Ergebnis, daß die 2 Spieler aufgrund ihrer Superbilanz mit 100 % Wahrscheinlichkeit gegeneinander Remis spielen. Aber einem von der Punktzahl her besseren Spieler werden bei vorsichtigerer Spielweise eventuell geringere Chanchen eingeräumt:
<u>Beispiel 5</u> A habe die Bilanz 34/0/16 und damit 34 Punkte und B wie in Beispiel 4 wieder 20/30/0 und somit einen Punkt mehr. Unser Gegenkonzept liefert für A eine Siegchance von rund 41 %, für B aber nur von 32 %. Kehrt man analog zum Beispiel 2 die Bilanzen um zu 16/0/34 für A und 0/30/20 für B, so sieht man, daß bei schlechten Spielern dem besseren bei offensivem Spiel geringere Siegchancen zugebilligt werden können.

Und was sagt nun das international gebräuchliche Ratingsystem (siehe "Schachlehre" von Dr. Ernst Bönsch, Sportverlag Berlin, 1. Auflage 1985, S. 344 ff) zu der Frage nach Holgers und Matthias' Chancen? Es orientiert sich nur an der erreichten Punktzahl, d. h. räumt Matthias und Holger bei gleicher Spielstärke all ihrer Gegner die gleichen Siegchancen ein. (Dagegen kann bei verschiedener Spielstärke der Gegner ein Sieg gegen einen starken Spieler höher gewertet werden als der gegen einen schwächeren Spieler.) Das Ratingsystem macht aber keine Aussage darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Remis zu erwarten ist. Es ist auch auf Spiele anwendbar, in denen kein Remis zu erwarten ist. Das System basiert nun wirklich auf einem einfachen Grundprinzip der "modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung", und zwar der Normalverteilung. (In der "Schachlehre", Punkt 1.3 auf Seite 344, wird sie "normale Wahrscheinlichkeitsfunktion der statistischen Wahrscheinlichkeitstheorie" genannt; eine Bezeichnung, die man wohl in keinem Mathematikbuch finden wird. Leider enthält das umfangreiche Literaturverzeichnis der "Schachlehre" keinen einzigen Verweis auf eine Quelle, die die Hintergründe des Ratingsystems erhellt.) Die Normalverteilung gestattet z. B. die Aussage, wieviel Punkte für A in einem Kampf von A mit B über mehrere Runden zu erwarten sind, wenn bekannt ist, wieviel Punkte A und B in mehreren Partien gegen einen 3. Spieler X erreicht haben. Wenn z. B. A gegen X in einem Kampf über 100 Partien 64 Punkte erobert hat und das Gleiche X in einem 100-Partien-Kampf gegen B gelang, so wird A voraussichtlich in einem 100-Partien-Kampf gegen B 76 Punkte holen. Dieser Leistungsunterschied von A zu X bzw. von X zu B wird unabhängig von der absoluten Leistungsstärke von A, B und X dadurch ausgedrückt, daß A cirka 100 Ratingwertungspunkte höher als X eingestuft wird und X 100 Punkte höher als B. Die Ratingskala ist linear geteilt, d. h., A ist dann cirka 200 Punkte stärker als B einzuschätzen. Der unteren Tabelle auf S. 345 der "Schachlehre" ist zu entnehmen, wie Ratingdifferenzen D in zu erwartende Punktgewinne P pro Partie umzurechnen sind. Als Näherungsformel wird dafür auf S. 344 P= 1/(1+10D/400) angeboten. Diese Formel (Warum wurde nicht zu P = 1/(1+D/40) gekürzt?)

kann keine vernünftige Näherung darstellen: Für D=0 muß sich P=0,5 ergeben; die Formel liefert jedoch P=1. Schüler ab Klasse 11 können sich eine Näherungsformel für nicht zu große D-Werte aus der exakten Formel für den Zusammenhang zwischen P und D herleiten: Die Annahme einer Normalverteilung besagt $P = 0{,}5+(1/\sqrt{2\pi})\int_0^{D/K} \exp(-x^2/2)dx$, wobei die Konstante K aus dem Vergleich der Tabelle auf Seite 345 der "Schachlehre" mit der Tabelle für $\int \exp(-x^2/2)dx$ (siehe z. B. "Taschenbuch der Mathematik" von I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew, Teubner-Verlag, 11. Auflage 1972, S. 65) bestimmt wird zu $K \approx 286$. Damit ist $1/P \approx 2(1+(2/\sqrt{2\pi})\int_0^{D/K} \exp(-x^2/2)dx)^{-1}$, und aus der Formel für die geometrische Reihe $1/(1+x) = 1-x+x^2-x^3+-\ldots$ gewinnt man für genügend kleines $|x|$ $1/(1+x) \approx 1-x$. Folglich ist $1/P \approx 2(1-(2/\sqrt{2\pi})\int_0^{D/K} \exp(-x^2/2)dx)$. Für kleines $|D|$ kann die Fläche unter der Funktion $\exp(-x^2/2)$ im Intervall $[0,D/K]$ durch die Länge dieses Intervalls mal Funktionswert an der Stelle 0 angenähert werden, d. h. $1/P \approx 2(1-2D/(\sqrt{2\pi}K)$ und $P \approx 1/(2-4D/(\sqrt{2\pi}\cdot 286) \approx 1/(2-D/180)$. Für D=0 wird korrekt P=0,5 reproduziert.

Es ist zu hoffen, daß in Zukunft die Schüler in ihren Mathematik-Zeitschriften niveauvolle Artikel über den Zusammenhang zwischen Schach und Mathematik finden können, denn einerseits hat ein nicht unbeträchtlicher Teil der DDR-besten Schachspieler Mathematik studiert und andererseits wird in den Regeln zum Ratingsystem (siehe "Schachlehre", S. 348) gefordert: "Der Wertungssystem-Sachbearbeiter sollte über genügend Kenntnis der statistischen Wahrscheinlichkeitstheorie verfügen, da diese bei Messungen ... angewendet wird."

Doz. Dr. H. Englisch
KMU Leipzig
Sektion Mathematik

Preisaufgaben

U 31 Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0,1]$ такова, что $f(0)=f(1)=0$. Для любых a, $б \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$f\left(\frac{a+б}{2}\right) \leq f(a)+f(б) \quad .$$

Докажите, что уравнение $f(x)=0$ имеет бесконечно много решений.

1

U 32 Man finde eine durch 30 teilbare Zahl, welche genau 30 verschiedene Teiler (1 und sich selbst eingeschlossen) besitzt.

1

U 33 Im Raum seien die zwei parallelen Ebenen

$$x - y + 2z - 4 = 0$$

und

$$x - y + 2z - 10 = 0$$

gegeben.
Finde den Abstand dieser Ebenen.

1

U 34 Ermittle alle Lösungen von

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos^2 x} = 1$$

1

U 35 Die Seitenhalbierende $\overline{BK}$ und die Winkelhalbierende $\overline{CL}$ des Dreiecks ABC schneiden sich im Punkt P.
Man beweise die Gleichung

$$\frac{2\,\overline{PC}}{\overline{PL}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 1$$

2

U 36 Man löse die Gleichung

1

$$4^x + 6^x = 9^x$$

Einsendeschluß: 1. 10. 1988

Lösungen zur Bezirksolympiade (Klasse 11/12)

Fortsetzung

3A. I. Da bei jeder Parallelprojektion parallele Geraden wieder in parallele Geraden übergehen (falls ihr Bild nicht zu je einem Punkt entartet), haben die Seitenflächen ABCD, EFGH, ABFE, DCGH, ADHE, BCGF von Q Parallelogramme A'B'C'D', E'F'G'H', A'B'F'E', D'C'G'H', A'D'H'E', B'C'G'F' als Bilder (wobei jeweils ein Parallelogramm XYVW auch entarten kann zu einer Strecke XV, auf der Y und W so liegen, daß $\overline{XY} = \overline{WV}$ gilt). Bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen A,...,H liegen diese Parallelogramme so[1], daß das Bild von Q ein Sechseck A'B'C'G'H'E' ist, das die Punkte D' und F' in seiner Fläche enthält (Abb. a), wobei in Entartungsfällen[2] D' auf genau einer der Strekken A'B', A'E' liegen (Abb. b, o.B.d.A. mit D' auf A'B') oder mit A' zusammenfallen kann (Abb. c).

1) Diese Aussagen können anschaulich gewonnen sein; eine abstrakte Beweisführung (Diskussion der Lagemöglichkeiten für A',...,H' bezüglich der Halbebenen, die von Verbindungsgeraden dieser Punkte begrenzt werden) wird nicht vom Schüler verlangt.

2) In den Entartungsfällen wird bei senkrechter Parallelprojektion das Parallelogramm A'C'G'E' zum Rechteck. Die Angabe (bzw. zeichnerische Berücksichtigung) dieses Sachverhaltes wird für den folgenden Lösungsweg nicht benötigt (die Entartungsfälle ergeben, wie in II. gezeigt wird, keinen maximalen Flächeninhalt, und die Beweisführung bis dahin verwendet nur die Parallelogrammeigenschaften).

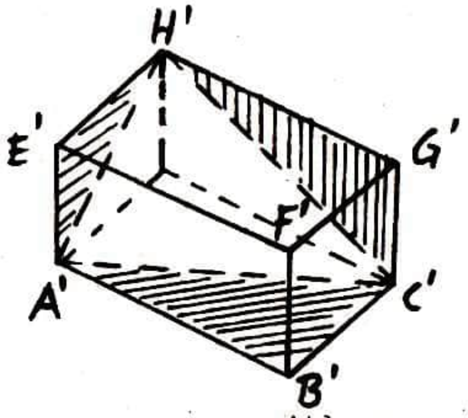


Abb. a

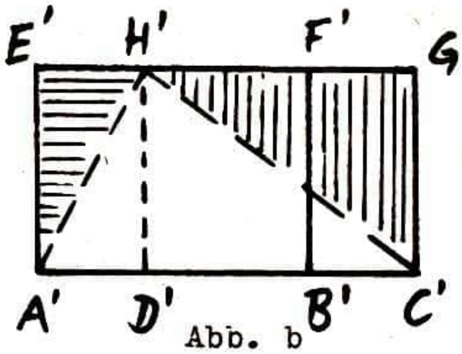


Abb. b

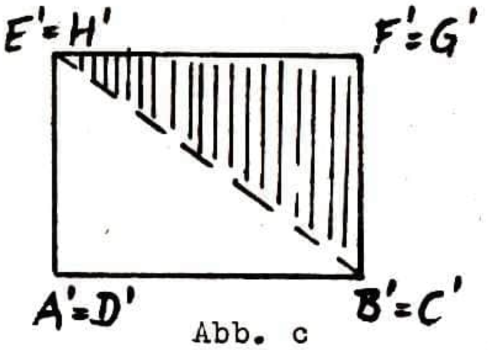


Abb. c

II. Der Flächeninhalt dieses Sechsecks ist doppelt so groß wie der des Dreiecks A'C'H', da die Strecken A'C', C'H', H'A' als Diagonalen die Parallelogrammflächen A'B'C'D', C'G'H'D', H'E'A'D' halbieren.
Das Bild eines Dreiecks bei senkrechter **Parallel**projektion hat genau dann einen maximalen Flächeninhalt, wenn Original- und Bildebene zueinander parallel sind; in diesem Fall ist der Flächeninhalt des Bildes gleich dem Flächeninhalt des Originaldreiecks.
Also ist der gesuchte maximale Flächeninhalt I_{max} des Bildes von Q gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks ACH.

III. Wegen der gegebenen Kantenlängen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AD}$, $c = \overline{AE}$ hat das Dreieck ACH die Seitenlängen

$$m = \overline{AC} = \sqrt{a^2+b^2}, \quad n = \overline{CH} = \sqrt{a^2+c^2}, \quad p = \overline{AH} = \sqrt{b^2+c^2};$$

nach der Heronischen Formel ergibt sich folglich

$$I_{max} = 2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{(m+n+p)(m+n-p)(p+m-n)(p-m+n)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+2mn+n^2-p^2)(p^2-m^2+2mn-n^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4m^2n^2 - (m^2+n^2-p^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4(a^2+b^2)(a^2+c^2) - (2a^2)^2}$$

$$= \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}\,. \qquad (1)$$

Andere Möglichkeit zu III: Man kann ein Koordinatensystem so wählen, daß A, C, H die Koordinaten (0,0,0), (a,b,0), (0,b,c) haben. Hiernach hat das Dreieck ACH den doppelten Flächeninhalt

$$|(a,b,0) \times (0,b,c)| = |(bc, -ac, ab)|,$$

womit (1) folgt.

3B. 1. Behauptung: Für alle $y = 0,1,2,\ldots$ gilt

$$f(1,y) = y+2. \qquad (4)$$

Beweis durch vollständige Induktion:

I. Nach (2) und (1) gilt $f(1,0) = f(0,1) = 2$.

II. Nach (3) folgt aus der Induktionsannahme, für ein y gelte (4), sowie aus (1)

$$f(1,y+1) = f(0,f(1,y)) = f(0,y+2) = y+3$$
$$= (y+1) + 2,$$

also (4) mit $y+1$ statt y.

2. Behauptung: Für alle $y = 0,1,2,\ldots$ gilt

$$f(2,y) = 2y+3. \qquad (5)$$

Beweis:

I. Nach (2) und (4) gilt $f(2,0) = f(1,1) = 3$.

II. Nach (3) folgt aus der Induktionsannahme, für ein y gelte (5), sowie aus (4)

$$f(2,y+1) = f(1,f(2,y)) = f(1,2y+3) = 2y+5$$
$$= 2(y+1) + 3.$$

3. Behauptung: Für alle $y = 0,1,2,\ldots$ gilt

$$f(3,y) = 2^{y+3} - 3. \qquad (6)$$

Beweis:

I. Nach (2) und (5) gilt $f(3,0) = f(2,1) = 5 = 2^3 - 3$.

II. Nach (3) folgt aus der Induktionsannahme, für ein y gelte (6), sowie aus (5)

$$f(3,y+1) = f(2,f(3,y)) = f(2,2^{y+3}-3) = 2(2^{y+3}-3)+3$$
$$= 2^{(y+1)+3} - 3.$$

a) Aus (6) ergibt sich $f(3,3) = 2^6 - 3 = 61$.

b) Aus (2), (3) und (6) ergibt sich

$$f(4,0) = f(3,1) = 2^4 - 3 = 13,$$
$$f(4,1) = f(3,f(4,0)) = f(3,13) = 2^{16} - 3 = 65533,$$
$$f(4,2) = f(3,f(4,1)) = f(3,65533) = 2^{65533} - 3.$$

Bemerkungen:

1. Das letzte Ergebnis kann auch in der Form $f(4,2) = 2^{2^{16}} - 3$ akzeptiert werden.

2. Zu b) kann auch die allgemeine Aussage

$f(4,y) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} - 3$ (worin die 2 insgesamt (y+3)-mal auftritt) durch vollständige Induktion bewiesen werden.

3. Es genügt jedoch auch, einige der allgemeinen Aussagen (4), (5), (6) durch die Ermittlung einzelner Funktionswerte zu ersetzen. Beispielsweise genügt zu a) die Ermittlung der Funktionswerte f(x,y) für
$x = 0;\ y = 1,2,\dots,60,$
$x = 1;\ y = 0,1,\dots,59,$
$x = 2;\ y = 0,1,\dots,29,$
$x = 3;\ y = 0,1,2,3.$

4. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist sowohl gleich $\frac{1}{2}\, ah_a$ (mit $a = \overline{BC}$) als auch gleich $\frac{1}{2}\, bc \cdot \sin\alpha$. Hiernach und nach der Formel
$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ gilt

$$h_a = \frac{bc \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{2bc \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{a}. \qquad (2)$$

Nach dem Kosinussatz sowie nach der Formel $\cos 2x = 1-2\cdot\sin^2 x$ gilt ferner

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$= (b-c)^2 + 4bc \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$
$$\geq 4bc \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} . \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) ergibt sich wegen

$$a,\ b,\ c,\ \sin\frac{\alpha}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2} > 0 \qquad (4)$$

die Behauptung

$$h_a \leq \frac{2bc \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{bc} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} = bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2} .$$

Wegen (4) gilt darin das Gleichheitszeichen genau dann, wenn es in (3) gilt, d. h. genau für alle diejenigen Dreiecke ABC, in denen $b = c$ ist.

5. I. Wenn x, y, z ganze Zahlen sind, die (1) erfüllen, so folgt: Da 1243 zu 65 teilerfremd ist, muß $1 + yz$ durch 65 teilbar sein; d. h., eine ganze Zahl k mit

$$1 + yz = 65 \cdot k \qquad (2)$$

muß existieren. Aus (1) folgt damit $65 \cdot (xyz + x + z) = 1243 \cdot 65 \cdot k$, also

$$(1+yz) \cdot x + z = 1243 \cdot k.$$

Mit (2) ergibt das $65 \cdot k \cdot x + z = 1243 \cdot k$, also

$$z = (1243 - 65 \cdot x) \cdot k. \qquad (3)$$

Setzt man dies in die aus (2) folgende Gleichung $65 \cdot k - yz = 1$ ein, so folgt

$$(65 - y(1243 - 65 \cdot x)) \cdot k = 1.$$

Dies kann wegen der Ganzzahligkeit der Faktoren nur mit

$$65 - y(1243 - 65 \cdot x) = k = \pm 1 \qquad (4)$$

erfüllt werden. Somit gilt

$$y(1243-65\cdot x) = 64 \text{ oder } y(1243-65\cdot x) = 66; \qquad (5)$$

d. h., es ist

$$1243 - 65 \cdot x \text{ Teiler von 64 oder von 66.} \qquad (6)$$

Daraus folgt insbesondere

$$-66 \leq 1243 - 65 \cdot x \leq 66,$$
$$1177 \leq 65 \cdot x \leq 1309,$$

$x = 19$ oder $x = 20$,

$1243-65\cdot x = 8$ oder $1243-65\cdot x = -57$. (7)

Die Bedingungen (6) und (7) werden nur von $1243-65\cdot x = 8$, also $x = 19$ erfüllt, wegen (5) zusammen mit $y = 8$, wonach (4) auf $k = 1$ und daher (3) auf $z = 8$ führt.

Also kann unter allen Tripeln ganzer Zahlen nur

$$(x,y,z) = (19,8,8) \tag{8}$$

die Gleichung (1) erfüllen.

II. Wie aus $1243 \cdot (1+8\cdot 8) = 1243 \cdot 65 = 65 \cdot (19\cdot 8\cdot 8+19+8)$ ersichtlich ist, erfüllt es diese Gleichung.

Mit I. und II. ist gezeigt, daß genau das in (8) genannte Tripel die Forderungen der Aufgabe erfüllt.

Bemerkung: Da die für ganzzahlige x,y,z gestellte Forderung (1) nicht mit $z = 0$ oder mit $1+yz = 0$ erfüllt werden kann, ist sie äquivalent zu $\frac{1243}{65} = x + \cfrac{1}{y+\frac{1}{z}}$. Andererseits gilt $\frac{1243}{65} = 19 + \cfrac{1}{8+\frac{1}{8}}$ (man erhält dies z. B. mit dem Euklidischen Algorithmus). Aus der Theorie der Kettenbrüche folgt dann, daß (19,8,8) das einzige Tripel natürlicher Zahlen ist, das (1) erfüllt. Da jedoch in der Aufgabe auch negative x,y,z zugelassen sind, genügt diese Aussage noch nicht für den Eindeutigkeitsnachweis I.

6. Für jede Zerlegung Z in Felder $F_1, F_2, \ldots, F_n$, die die genannte Forderung erfüllt, seien die Längenmaßzahlen der Seiten von F_i jeweils so mit a_i, b_i bezeichnet, daß $a_i \leq b_i$ gilt. Aus der Forderung folgt dann $a_i \leq 0{,}2$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Da der Flächeninhalt des Feldes Q gleich der Summe der Flächeninhalte der F_i ist, folgt hieraus

$$100 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} 0{,}2 \cdot b_i = 0{,}2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

also $\sum_{i=1}^{n} b_i \geq 500$. (1)

Addiert man die Umfänge der Felder F_i, so erhält man die Summe aus der Länge von u und der doppelten Länge von g; d. h., es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} 2(a_i+b_i) = 40 + 2L.$$

Hieraus und aus (1) folgt

$$L = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} 2(a_i+b_i)-40\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i - 20$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} a_i + 480. \qquad (2)$$

a) Da alle $a_i \geq 0$ sind, folgt aus (2), wie behauptet, $L \geq 480$.

b) Eine der beiden Richtungen von Gräben werde "horizontal", die andere "vertikal" genannt. Ein Feld F_i heiße horizontal bzw. vertikal je nachdem, ob b_i die Längenmaßzahl seiner horizontalen oder seiner vertikalen Seiten ist. Nun trifft stets einer der beiden folgenden Fälle I., II. ein:

I. Wenn es eine horizontale Strecke gibt, die das Feld Q durchquert und dabei nur mit vertikalen Feldern der Zerlegung Z nichtleere Durchschnitte hat, so ist die Summe der Längenmaßzahlen a_i dieser Durchschnitte gleich 10; also gilt erst recht

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq 10. \qquad (3)$$

II. Wenn aber jede horizontale Strecke, die das Feld Q durchquert, mit mindestens einem horizontalen Feld der Zerlegung Z nichtleeren Durchschnitt hat, so folgt, indem man alle diese horizontalen Felder auf eine vertikale Gerade projiziert: Diese Projektionen überdekken eine gesamte vertikale Strecke der Länge 10 km;, d. h., die Summe der Längenmaßzahlen a_i dieser Projektionen ist größer oder gleich 10, also ergibt sich ebenfalls (3).

Somit gilt (3) für jede Zerlegung Z der geforderten Art; hiernach folgt aus (2) für jede solche Zerlegung

$$L \geq 490. \qquad (4)$$

Ferner gilt: es gibt eine Zerlegung der geforderten Art mit

$$L = 490,$$

z. B. die Zerlegung in 50 vertikale Felder mit $a_i = 0{,}2$

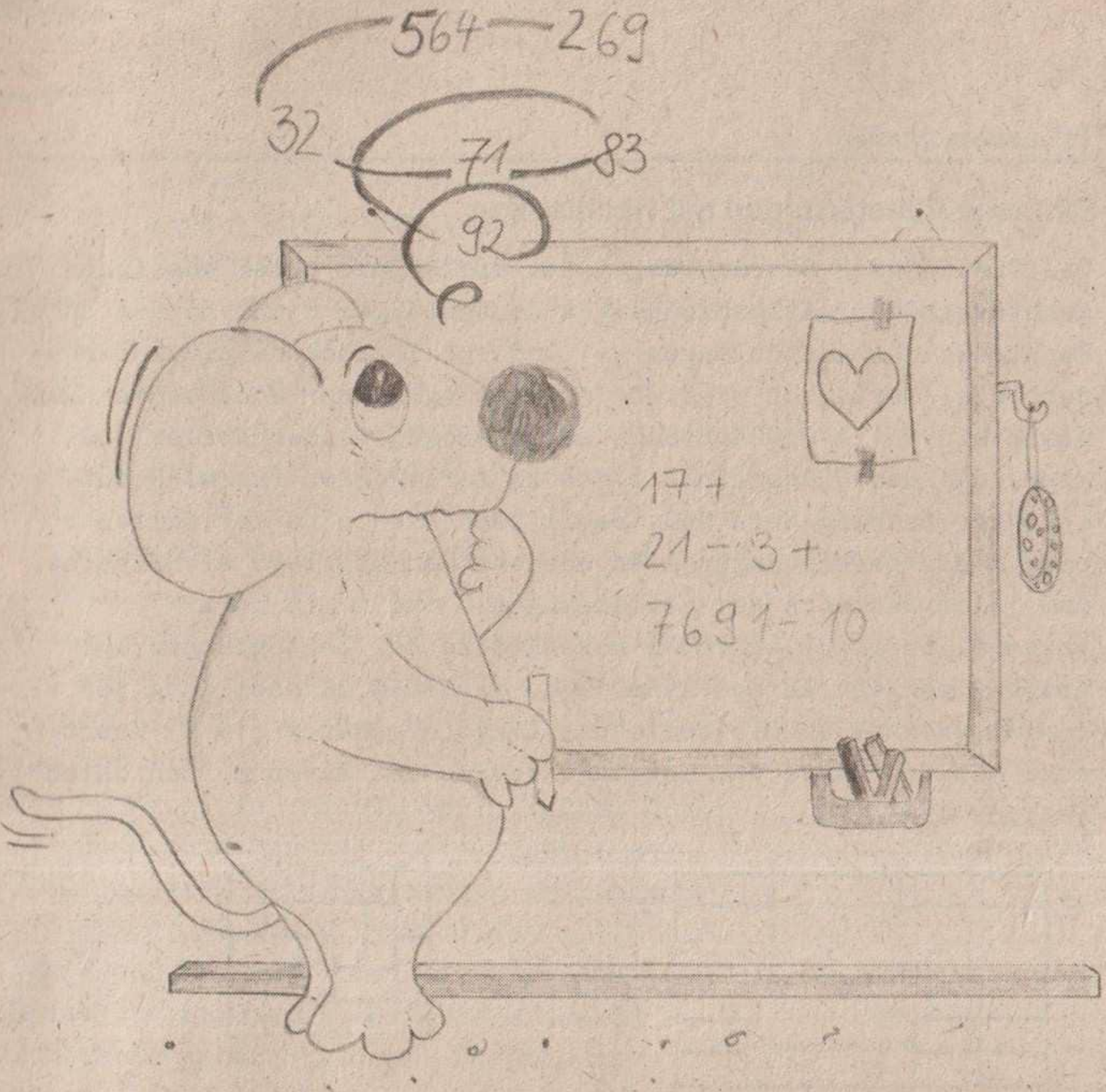
und $b_i = 10$, die genau 49 Gräben g aufweist, deren jeder Länge 10 km hat.

Damit ist, wie gefordert, die Existenz eines kleinsten Wertes für L bewiesen; er beträgt 490.

Bemerkung: Man kann auch sogleich mit der Lösung von b) beginnen und (4) beweisen; damit ist dann erst recht bereits a) gelöst.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung"
Leiter: Stefan Posselt
Chefredakteur: Eckhard Stein
Redaktion: C. Dahms, J. Dimler, N. Patzschke, O. Kotowski
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	22 (1988) 6	S. 81–96



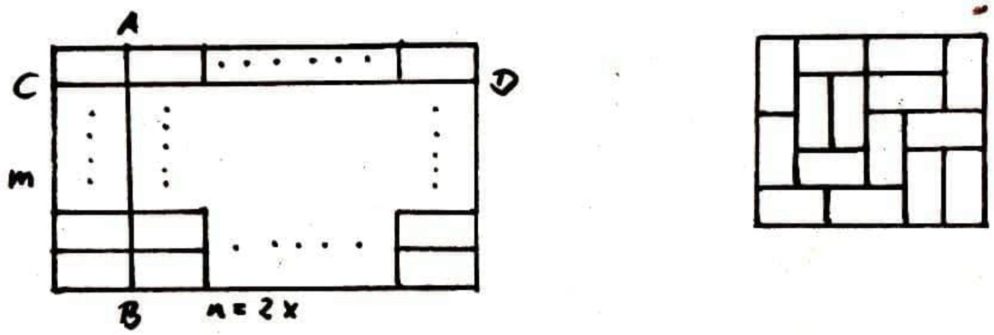
wurzel $\sqrt{7/8 \cdot 88}$

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
22. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,40 M

Einfache Pflasterungen mit Rechtecken

Das Ziel dieser Betrachtungen ist die Angabe aller möglichen Rechteckgrößen mit ganzzahligen Kantenlängen n und m, die durch Rechtecke der Kantenlängen a=1 und b=2 in noch zu präzisierender Weise zerlegbar sind. Da zur Zerlegung nur kongruente Exemplare eines (1 × 2)-Rechtecks herangezogen werden sollen, ist klar, daß der Flächeninhalt des zu zerlegenden (n × m)-Rechtecks geradzahlig sein muß. Damit kann also eine der Seiten n oder m als gerade angenommen werden. Man überlegt sich leicht, daß jedes Rechteck der Seitenlängen n und m mit n=2x ($m, x \in \{1,2,3,\dots\}$) durch $x \cdot m$ Rechtecke der Seitenlängen a=1 und b=2 zerlegt werden kann. Dazu wird wie in Abbildung 1a) verfahren, wonach an die Seite der Länge n genau x (1 × 2)-Rechtecke mit der Kante b=2 angelegt werden und davon m "Schichten" möglich sind.



a) b)

Abb. 1

Folgende Einschränkungen sollen im weiteren im Mittelpunkt der Untersuchungen stehen. Es werden Zerlegungen von (n × m)-Rechtecken in (1 × 2)-Rechtecke gesucht, für die im Gegensatz zu Abbildung 1a) keine durch das Ausgangsrechteck verlaufende Strecke existiert, die aus Kanten von (1 × 2)-Rechtecken besteht. Falls keine solche Strecken wie zum Beispiel $\overline{AB}$ oder $\overline{CD}$ aus Abb. 1a) vorhanden sind, bezeichnen wir die Zerlegung als <u>einfach</u>. Einfache Zerlegungen sind auch dadurch charakterisierbar, daß in der Zerlegung des (n × m)-Rechtecks kein Teilrechteck enthalten ist, das eine Kante der Länge n oder m parallel zur entsprechenden Seite des Ausgangsrechtecks besitzt. Abb. 1b) zeigt eine einfache Zerlegung eines (5 × 6)-Rechtecks.

Es ist im Gegensatz zum allgemeinen Fall durchaus nicht so, daß für jede Kombination natürlicher Zahlen n,m ($n \cdot m \neq 0$) mit der zusätzlichen Bedingung, daß das Produkt von n und m eine gerade Zahl ist, auch eine einfache Zerlegung eines ($n \times m$)-Rechtecks existiert.
Betrachten wir dafür den Fall n=m=6.
Mit einer schönen Idee kann man die Unmöglichkeit einer einfachen Zerlegung eines (6×6)-Rechtecks in (1×2)-Rechtecke beweisen. Es ist klar, daß jedes (1×2)-Rechteck einer eventuell existierenden Zerlegung genau eine interessierende Strecke innerhalb des (6×6)-Rechtecks unterbricht. Dies ist in Abb. 2 ebenso erkennbar, wie die Tatsache, daß durch jedes (1×2)-Rechteck der Zerlegung das (6×6)-Rechteck längs der unterbrochenen Strecke in zwei Teile jeweils ungeraden Flächeninhalts zerlegt wird (in Abb. 2 P und Q). Eine Zerlegung eines solchen Teilpolygons mit (1×2)-Rechtecken ist somit nicht möglich und es muß folglich noch wenigstens ein (1×2)-Rechteck symmetrisch zur Trennlinie der beiden Teile gelegt werden. Diese Überlegung gilt für jede der zu unterbrechenden Strecken. Da dies in einem (6×6)-Rechteck zehn Stück sind, wären für eine Zerlegung mindestens 20 (1×2)-Rechtecke nötig, was jedoch wegen der Flächeninhalte nicht geht ($40 \neq 36$).

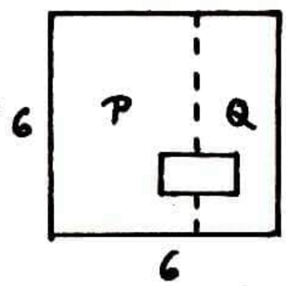
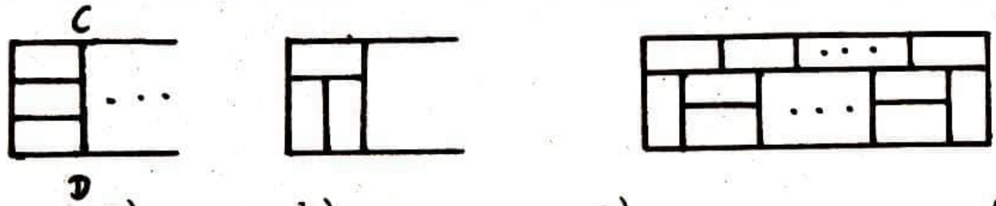


Abb. 2

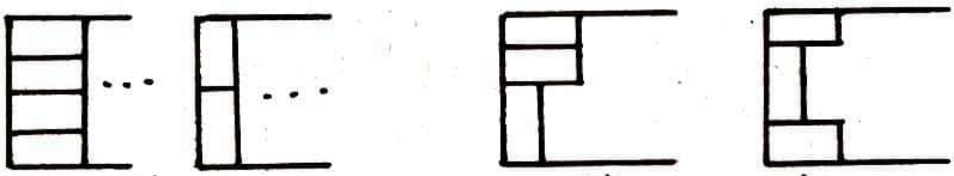
Es wird sich zeigen, daß unser gewähltes Beispiel eine Ausnahme darstellt. Zuvor wollen wir jedoch noch einige zu schmale ($n \times m$)-Rechtecke ausschließen.
Schnell erkennt jeder, daß ein ($2 \times m$)-Rechteck ($m \geq 2$) nicht einfach zerlegbar ist. Es darf kein (1×2)-Rechteck eine Seite der Länge 2 parallel zur kongruenten Seite des zu zerlegenden Rechtecks haben und folglich sind alle (1×2)-Rechtecke "gleichgerichtet". Damit ergibt sich jedoch, daß das ($2 \times m$)-Rechteck halbiert wird und längs einer Symmetrieachse in zwei ($1 \times m$)-Rechtecke zerfällt.
Untersuchen wir nun ein ($3 \times m$)-Rechteck ($m \geq 3$). Es leuchtet sofort ein, daß eine Lage wie in Abb. 3a) wegen $\overline{CD}$ keine einfache

Zerlegung liefert. Analog verhält es sich mit der Situation aus Abbildung 3b). Die einzige Alternative für einen möglichen Beginn der Zerlegung zeigt Abbildung 3c). Aber auch hier kann keine einfache Zerlegung realisiert werden. Der Abschluß zu einem Rechteck kann nur durch Einfügen eines Rechtecks R erreicht werden, womit jedoch die Strecke $\overline{EF}$ das Ausgangsrechteck zerlegt.



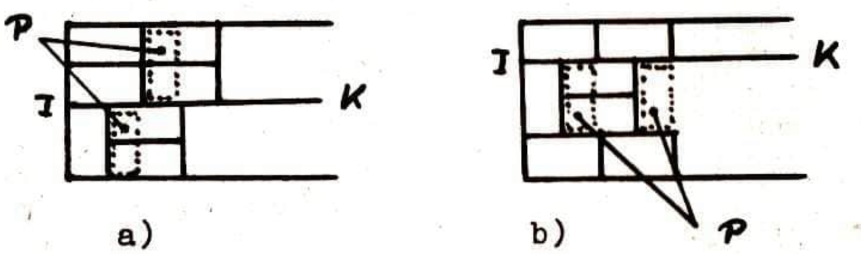
a) b) c) Abb. 3

Ähnliche Betrachtungen werden zeigen, daß auch eine einfache Zerlegung eines $(4 \times m)$-Rechtecks $(m \geq 4)$ nicht möglich ist. Wieder wird die Frage diskutiert, wie eine solche Zerlegung aussehen müßte. Die in Abbildung 4a) dargestellten Möglichkeiten können keine einfache Lösung liefern, wie man sofort sieht. Folglich muß an der Seite des Ausgangsrechtecks mit der Länge 4 genau ein (1×2)-Rechteck mit der längeren Seite anliegen. Dies läßt sich nur auf zwei Arten realisieren, wie es die Abbildungen 4b) und 4c) zeigen.



a) b) c) Abb. 4

In beiden Fällen ist es jedoch so, daß die Einlagerung eines weiteren (1×2)-Rechtecks P entweder zu einem $(4 \times m')$-Rechteck führt, oder die Fortsetzung eindeutig mit "horizontalen" Teilrechtecken geschehen muß (vgl. Abb. 5a,b)).



a) b) Abb. 5

Schließt sich jedoch mit einem der angedeuteten Polygone P die

Figur oder wird danach noch fortgeführt, so ist die Strecke $\overline{IK}$ verantwortlich für die Nichteinfachheit der Zerlegung.
In jedem Fall muß aber wenigstens ein Polygon P eingefügt werden, um einen Abschluß zu finden. Somit ist auch im Fall eines $(4 \times m)$-Rechtecks zwangsläufig keine einfache Zerlegung in (1×2)-Rechtecke möglich.

Bisher haben wir uns überlegt, daß zwei Grundbedingungen erfüllt sein müssen, um ein $(n \times m)$-Rechteck einfach in (1×2)-Rechtecke zu zerlegen. Das war zum ersten die triviale Voraussetzung, daß wenigstens eine der Zahlen n oder m gerade sein muß und zum zweiten, daß jede der Zahlen n oder m größer als vier vorausgesetzt werden kann. Dabei lassen wir den Trivialfall der Zerlegung eines (1×2)-Rechtecks in ein (1×2)-Rechteck unberücksichtigt. Weiterhin wissen wir bereits, daß ein (6×6)-Rechteck nicht einfach zerlegbar ist.
Diese drei Bedingungen A: n oder m gerade

B: $n, m \geq 5$

C: $(n,m) \neq (6,6)$

sind also für unseren Fall unbedingt notwendig, wenn überhaupt eine einfache Zerlegung gelingen soll. Wir werden andererseits gleich beweisen, daß alle anderen denkbaren $(n \times m)$-Rechtecke einfach zerlegbar sind. Dies bedeutet, daß diese drei Bedingungen auch hinreichend für eine einfache Zerlegung sind.

S a t z : Ein $(n \times m)$-Rechteck ist genau dann einfach zerlegbar in (1×2)-Rechtecke, wenn natürliche Zahlen n und m folgenden Bedingungen genügen:
1. $n \cdot m$ ist gerade Zahl ($\Leftrightarrow$ n oder m gerade)
2. n und m sind größer als 4
3. n und m sind nicht gleichzeitig 6.

Beweis. Nach den vorangegangenen Überlegungen ist es ausreichend zu zeigen, daß für jedes $(n \times m)$-Rechteck mit den im Satz angegebenen Eigenschaften für n und m eine einfache Zerlegung existiert. Dazu betrachten wir zuerst Abbildung 6.
Aus dieser ist ersichtlich, daß zu einem vorgegebenem einfach zerlegten $(n \times m)$-Rechteck R ein einfach zerlegtes $((n+4)x(m+4))$ -Rechteck aufgebaut werden kann. Folglich reicht

es aus, einfach zerlegte Rechtecke der Größen

a) $5 \times 2m$ ($m \geq 3$)

b) $6 \times m$ ($m \geq 7$)

c) $7 \times 2m$ ($m \geq 4$)

d) $8 \times m$ ($m \geq 8$) mit variablem

m anzugeben. Wird nämlich eine einfache Zerlegung eines $(k \times l)$-Rechtecks gesucht ($k \cdot l$ gerade; $k,l \geq 5$; $(k,l) \neq (6,6)$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $k \leq l$), so werden zuerst die Zahlen k und l um Vielfache der Zahl 4 reduziert, bis $5 \leq k' \leq 8$ gilt ($k' = k-4h$). Da für $l' = l-4h$ ebenfalls $k' \leq l'$ gilt, reicht es aus, ein $(k' \times l')$-Rechteck entsprechend der folgenden Konstruktionen einfach zu zerlegen und mit h-facher Anwendung der "Umrandung" aus Abbildung 6 liegt ein $(k \times l)$-Rechteck einfach zerlegt vor. Die Abbildung 7 zeigt mögliche einfache Zerlegungen der oben angegebenen 4 Rechtecktypen.

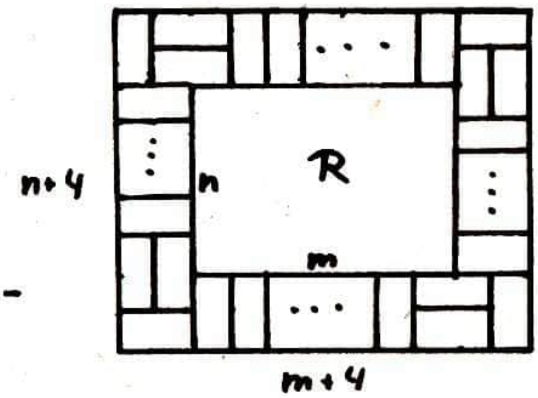
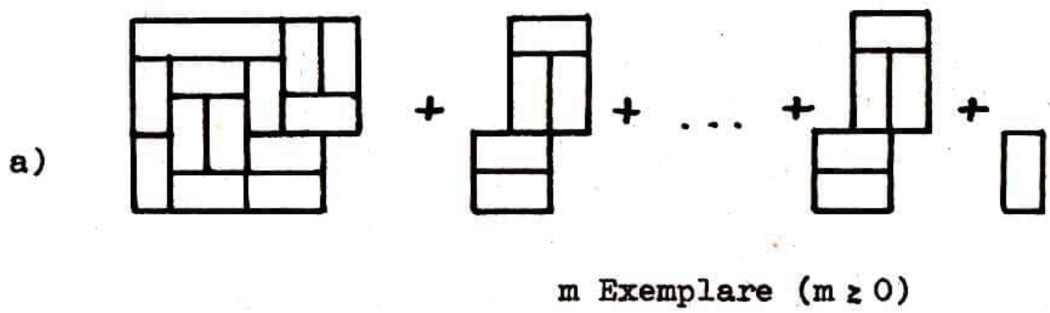
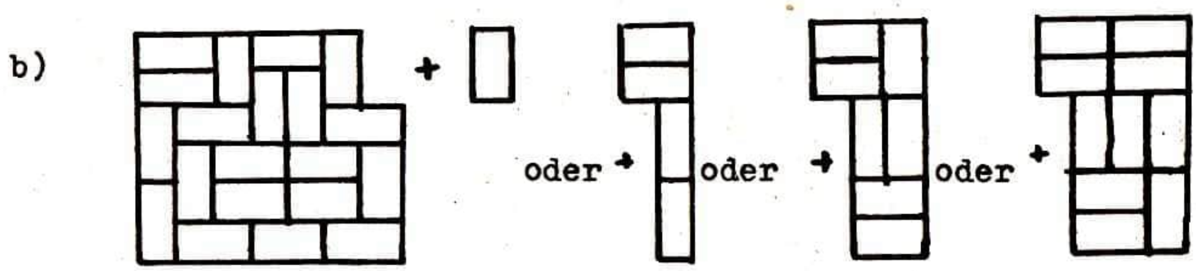
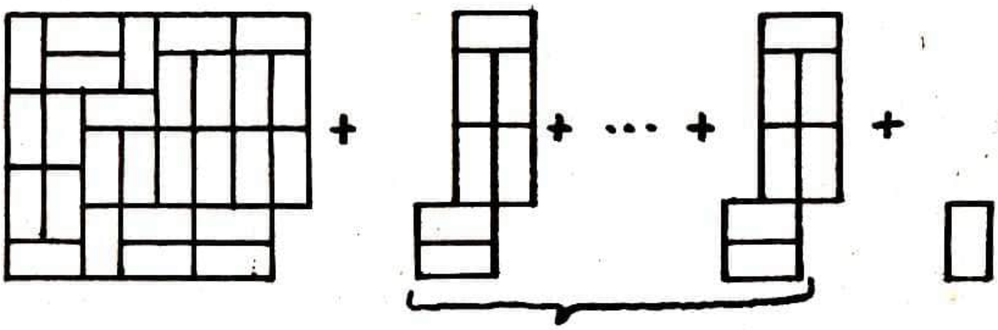


Abb. 6



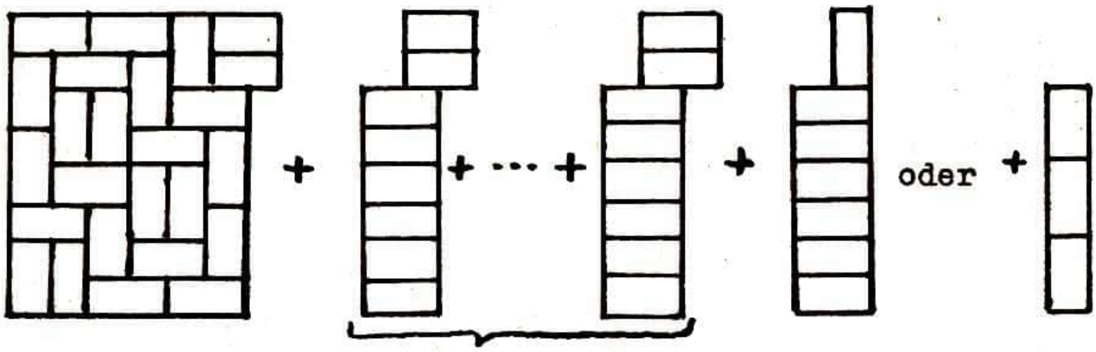


c)



m Exemplare ($m \geq 0$)

d)



m' Exemplare ($m' \geq 0$)

Abb. 7

Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgangen sein, daß noch eine kleine Lücke im Beweis des Satzes vorhanden ist. Es ist nicht möglich, mit diesem Vorgehen eine einfache Zerlegung eines (14×14)-Rechtecks zu finden, da die Reduzierung von n und m um Vielfache von 4 zum (6×6)-Rechteck führt, das nicht einfach zerlegbar ist.

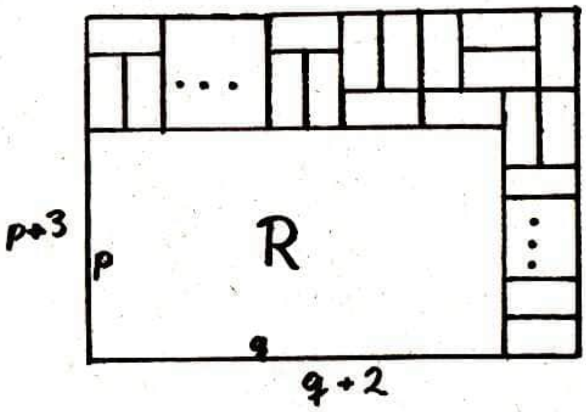
Für alle Paare (n,m) mit n=m und $n = 6 + h \cdot 4$ $(h \geq 1)$ ist somit noch ein Zusatz nötig. Abbildung 8 verdeutlicht, wie aus einem einfach zerlegten $(p \times q)$-Rechteck R mit q gerade ein einfach zerlegtes $(p+3,\ q+2)$-Rechteck entsteht.

Umgekehrt wird ein $((6+4 \cdot h) \times (6+4 \cdot h))$-Rechteck zuerst auf ein $((3+4 \cdot h) \times (4+4 \cdot h))$-Rechteck reduziert $(3+4 \cdot h \geq 5!)$ und dieses wie oben behandelt, wobei nun im Ergebnis der weiteren Reduzierung kein (6×6)-Rechteck entstehen kann.

Insgesamt ist folglich jedes $(n \times m)$-Rechteck mit den im Satz angegebenen Einschränkungen für n und m einfach zerlegbar.

q.e.d.

Abb. 8



Beispielsweise wird mit dem einfach zerlegten (7×8)-Rechteck aus Abb. 7c) und der "Umrandung" aus Abbildung 8 eine einfache Zerlegung eines (10×10)-Rechtecks möglich.

Weiterführende Fragen schließen sich wie an viele gelöste mathematische Probleme auch hier schnell an. Wie sieht es mit einfachen Zerlegungen von $(n \times m)$-Rechtecken aus, wenn allgemein ein $(a \times b)$-Rechteck zur Zerlegung benutzt wird? Welche Aussagen lassen sich treffen bei Benutzung nichtkongruenter Teilrechtecke in der Zerlegung? Welche Methoden bringen im verallgemeinerten räumlichen Problem Erfolg? Wie sehen dort die Ergebnisse aus? Für jeden, der Spaß an Zerlegungsproblemen gefunden hat, eröffnet sich ein weites Betätigungsfeld. Viel Freude dabei!

C. Müller
Sektion Mathematik
Bereich Theoretische Mathematik

Kooperation mit dem VEB Maxhütte

Aus der Arbeit des Jugendforscherkollektivs "Technische Diagnose"

Im Wissenschaftsbereich Stochastik der Sektion Mathematik existiert seit ungefähr 10 Jahren eine enge Forschungskooperation mit dem VEB Maxhütte Unterwellenborn. Die Inbetriebnahme der Kombinierten Formstahlstraße (KFS), einer hochproduktiven, vollautomatisierten Produktionsanlage im Qualitäts- und Edelstahlwerk, erforderte intensivere, zustandsorientierte Instandhaltung und Wartung.
Dr. Grießbach seitens der Mathematik und Diplommathematiker Rolf Wendler, ehemaliger Student der FSU, seitens der Maxhütte stellten sich daraufhin im Rahmen eines Jugendforscherkollektivs, dem weitere junge Ingenieure des VEB sowie Mitarbeiter und Studenten angehören, die Aufgabe, ein möglichst universell einsetzbares Diagnosesystem für den Vor-Ort-Betrieb aufzubauen.
Zur prinzipiellen Funktion eines solchen Diagnosesystems hier einige heranführende Erläuterungen.
Ein jeder weiß: Bezüglich des Geräuschpegels im Wageninneren von PKWs sind die Erzeugnisse unserer Automobilindustrie im internationalen Maßstab ziemlich "weit oben". Obwohl dieser Umstand allgemein kritikwürdig scheint, entbehrt diese Schallkulisse während der Fahrt nicht einer gewissen Nützlichkeit. Gute Kraftfahrer vermögen aus dem Klang des Motors und dem aller mitschwingenden Teile sehr detailliert auf den Betriebszustand ihres Fahrzeuges zu schließen.
Als Schadensindikatoren dienen dabei eine ungewohnte Frequenzzusammenstellung oder das Wahrnehmen von Stoß- und Kratzgeräuschen. Das Bemerkenswerte ist dabei, daß der Kraftfahrer so während einer Fahrt ständig den Fahrzeugzustand überwacht und somit sich und seiner Umwelt durch rechtzeitiges Aus-dem-Verkehr-Ziehen seines Kfz Schaden erspart. Die technische Diagnose stellt sich nun die Aufgabe der gerätetechnischen

Realisierung einer solchen Uberwachung, wobei anstelle von Kraftfahrzeugen Walzanlagen, Turbinen und Werkzeugmaschinen diagnostiziert werden sollen. Die Signale nimmt man dabei natürlich nicht mit dem menschlichen Ohr, sondern mittels Meßfühler auf, die mechanische Vibrationen entweder auf elektromagnetischen oder auf piezoelektrischen Wege in elektrische Signale umwandeln. Das am Ausgang des Meßfühlers entstehende Signal wird dann äquidistant abgetastet und gelangt als Meßreihe in den Speicher eines Mikrorechners. Bis hierher ist technisch alles relativ einfach beherrschbar. Als entscheidend erweist sich jetzt das Problem, aus diesen ständig anfallenden Meßwerten den Maschinenzustand zu rekonstruieren bzw. aus einer Vielzahl von Meßwerten durch Transformationen eine möglichst niedrigdimensionale Signalcharakteristik zu erstellen.

Dies steht in engem Zusammenhang mit der Suche nach einem handlichen und genügend allgemeingültigen mathematischen Modell für eine solche Meßreihe. Die Unmenge von physikalischen Einzelerscheinungen und der Einfluß von Meßstörungen, die am Zustandekommen des Signals mitwirken, lassen es zweckmäßig erscheinen, die Meßreihen als Realisierung eines zufälligen oder stochastischen Prozesses aufzufassen, was die Anwendung von mathematischen Theorien zu Schätzungen von Parametern solcher Prozesse erfordert.

Eine zentrale Stellung nimmt die Fourieranalyse mittels Fouriertransformation ein. Sie gestattet Einsicht in die Frequenzzusammensetzung eines Signals. Würde z.B. an einem Getriebegehäuse ein Meßfühler angebracht werden und die Drehfrequenz einer bestimmten Welle im Getriebe wäre nach der Fouriertransformation im Spektrum sehr deutlich zu sehen, so läge mit großer Wahrscheinlichkeit eine Schädigung oder Unwucht an dieser Welle vor. Im Sinne einer automatischen Uberwachung wäre jetzt noch zu klären, wann eine Maschine eine Frequenz "sehr deutlich sieht". Dazu gibt es einige statistische Theorien, die allerdings zur Anwendung noch einiger Weiterentwicklungen bedürfen.

Neben Diagnoseverfahren, die auf der Fourieranalyse beruhen, gelangen auch andere Verfahren zu immer größerer Bedeutung. Insbesondere wurde von Mitarbeitern der Sektion Mathematik eine Verfahrensklase zur adaptiven Zeitreihenanalyse entwickelt und auf Mikrorechner implementiert. Nach diesen Verfahren erhielt übrigens das Diagnosesystem seinen Markennamen "atisa" (Adaptiv timeseries analysis - Adaptive Zeitreihenanalyse).
Die Arbeiten am Diagnosesystem erbrachten schon beachtliche Zwischenresultate. Zum einen steht den Diagnoseingenieuren der MHU eine Systemversion zu Analysen an der KFS zur ständigen Verfügung, zum anderen konnte Atisa als Diagnosesystem zu einer Drahtwalze des VEB SKET Magdeburg auf der Leipziger Frühjahrsmesse 1987 ausgestellt werden.
Die Anwendung von atisa bleibt nicht auf den Maschinenbau beschränkt. Obwohl sich die Zusammenarbeit mit dem Bereich Medizin erst im Anfangsstadium befindet, läßt sich jetzt schon sagen, daß durch diese Zusammenarbeit die Jenaer EEG-Forschung wieder zu einem international geachteten Gesprächspartner geworden ist.

Jens Dittmann
Sektion Mathematik
5. Studienjahr

Preisaufgaben

U 37 Man zeige, daß aus

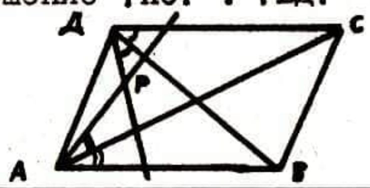
$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n} = 0$$

folgt, daß das Polynom

$$a_n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x + a_1$$

zwischen 0 und 1 eine Nullstelle besitzt.

U 38 Дан параллелограмм АВСД, отличный от ромба. Прямая, симметричная прямой АВ относительно диагонали АС, пересекает в точке Р прямую, симметричную прямой ДС относительно диагонали ДВ. Найдите отношение $|PA| : |PД|$, если известно отношение $|AC| : |BД| = к$.



U 39 Ohne Zuhilfenahme einer Tabelle ist zu entscheiden, welche der Zahlen sin3 und cos5 größer ist.

U 40 Für welche p sind beide Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + 2(p + 1)x + 9p - 5 = 0$$

positiv?

U 41 Man zeige, daß eine beliebige natürliche Zahl a eindeutig in der Form

$$a = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \dots + a_n \cdot n!$$

darstellbar ist, wobei die a_k natürliche Zahlen mit $0 \leq a_k \leq k$ und $a_n \neq 0$ sind.

U 42 Für eine beliebige positive natürliche Zahl beweise man

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$$

Einsendeschluß: 1. 11. 1988

Maria-Pussi

In den letzten Berichten über das Spezialistenlager des Bezirksklubs "Junger Mathematiker" Gera tauchte der Name eines Kartenspieles auf, der den meisten Lesern unbekannt sein dürfte: Maria-Pussi. Dieses Spiel kommt aus Finnland und ist über einen Mathematik-Kongreß bei uns bekannt geworden. Nun breitet es sich ausgehend von einigen Universitäten in unserem Land aus und wird zunehmend beliebter.

Man kann dieses Spiel als eine Mischung von Skat, Doppelkopf und Bridge bezeichnen. Es ist höchst interessant, da es einerseits mehr Spielvarianten als bei Skat oder Doppelkopf gibt, andererseits das Spiel auch einen gewissen Glücksspielcharakter hat (beim Reizen).

Das Erlernen dieses Spiels ist recht schwierig, denn das Regelwerk ist verhältnismäßig umfangreich und der Reiz des Spieles erschließt sich erst, wenn man über eine gewisse Spielpraxis verfügt (5-10 Runden). Dann aber möchten die meisten dieses Spiel nicht mehr gegen Skat o.ä. vertauschen.

Ich werde nun das vollständige Regelwerk angeben, für das ich mich bei Herrn Mathias Vogts bedanken möchte.

Maria-Pussi

1. Allgemeines

Maria-Pussi ist ein Kartenspiel für 4 Personen. Für die Dauer jeweils einer Partie bilden die sich gegenübersitzenden Spieler eine Partei, d.h. spielen zusammen. Diejenige Partei, die zuerst 500 oder mehr Spielpunkte erreicht, hat die Partie gewonnen. Deshalb sind sowohl die Anzahl der zu einer Partie gehörenden Spiele als auch die Dauer einer Partie unbestimmt. Wollen sich mehr als 4 Spieler beteiligen, so müssen die überzähligen Spieler für die Dauer einer Partie aussetzen. Erfahrungsgemäß beträgt die durchschnittliche Dauer einer Partie 30 bis 60 Minuten (im Extremfall genügt ein Spiel für eine Partie).

1.1. Spielkarte

Gespielt wird mit einer Tarockkarte zu 36 Blatt, d.h. ein Skatblatt zuzüglich der vier Sechsen. Die Farben werden mit Herz (H), Schell (S), Eichel (E) und Grün (G) bezeichnet, einzelne Karten in der Form H-As, S-Ober, E-6, G-10 usw. In jeder Farbe gilt die unveränderliche Reihenfolge (beginnend mit der höchsten Karte- in Klammern die Kartenpunkte):

As (11), Zehn (10), König (4), Ober (3), Unter (2),9,8,7,6 (die vier Luschen keine Punkte).

Die 120 Kartenpunkte sind also wie beim Skat verteilt.

Für Ober und Könige, die eine besondere Rolle spielen, gibt es spezielle Bezeichnungen:

Mit "Paar" sind Ober und König einer Farbe gemeint.

Mit "Hälfte" ist Ober oder König einer Farbe gemeint (d.h. die "Hälfte eines Paares).

1.2. Spielpunktzahl

Es gibt drei Möglichkeiten, in einem Spiel Spielpunkte zu erzielen:

a) Kartenpunkte

Das sind die Punkte, die sich durch die eingenommenen Karten (vgl. 1.1.) ergeben.

b) Meldungspunkte

Das sind die Punkte, die man bei einer Trumpf-Meldung (vgl. 1.10.) erhält; nämlich für

Herz-Meldung 100 Punkte, Schell-Meldung 80 Punkte

Eichel-Meldung 60 Punkte, Grün-Meldung 40 Punkte.

(Daher werden Grün- bzw. Eichel-Meldung als niedrige, Schell- bzw. Herz-Meldung als hohe Meldung bezeichnet.)

c) Letzter Stich

Für den letzten Stich im Spiel erhält man 20 Zusatzpunkte, unabhängig davon, wieviel Kartenpunkte im Stich sind (im Extremfall können es vier Luschen sein).

Nach einem Spiel ergeben sich die Spielpunktzahlen für jede Partei aus der Summe ihrer Kartenpunkte, Meldungspunkte und Zusatzpunkte für den letzten Stich.

1.3. Partei- und Platzwahl

Vor einer Partie werden im allgemeinen die beiden Parteien ausgelost. Dazu ziehen alle Teilnehmer verdeckt eine Karte.

a) 4 Mitspieler:

Der Spieler mit der höchsten Karte (er wählt seinen Platz am Tisch) und der Spieler mit der niedrigsten Karte (er setzt sich seinem Partner gegenüber) bilden zusammen die erste, die beiden übrigen Spieler (sie setzen sich beliebig auf die beiden freien Plätze) die zweite Partei. Die so festgelegten Parteien und ihre Sitzordnung bleiben während der gesamten Partie unverändert. Bei der Höhe der Karten entscheidet zunächst die Farbe, danach die Art der Karte.

b) 5 - 7 Mitspieler

Die Auslosung erfolgt nach a), wobei die Spieler mit den mittleren Karten aussetzen müssen. Bei der Auslosung der nächsten Partie ist zu sichern, daß die aussetzenden Spieler auf jeden Fall spielen.

c) 8 oder mehr Mitspieler

Es werden vier (oder mehr) Parteien nach a) ausgelost, die Spieler mit der dritthöchsten und drittniedrigsten Karte bilden die dritte Partei usw. Am ersten Tisch spielen die Parteien 1 und 3 (Partei 1 hat Platzwahl), am zweiten die Parteien 2 und 4 (Partei 2 hat Platzwahl). Beenden beide Tische etwa zur gleichen Zeit ihre Partien, so erfolgt die neue Auslosung gemeinsam. Anderenfalls losen die Spieler, die ihre Partie beendet haben, und die pausierenden Spieler die nächste Partie aus.

1.4. Kartengeben

Der Spieler mit der höchsten Karte ist der erste Kartengeber. Es besteht Abhebepflicht (bei Abwesenheit darf der Partner abheben). Danach werden beginnend beim links vom Kartengeber sitzenden Spieler im üblichen Uhrzeigersinn alle Karten einzeln ausgeteilt, so daß jeder Spieler neun Karten erhält. Wird dabei eine Karte aufgedeckt, so muß derselbe Spieler erneut geben.

Wird vor Einziehen des letzten Stiches festgestellt, daß ein falscher Spieler Karten gegeben hat, so ist das Spiel ungültig, und der richtige Kartengeber gibt. Anderenfalls ist das Spiel gültig und als nächster gibt derjenige, der links vom letzten Kartengeber sitzt.

In Ausnahmefällen darf man dem Partner das Kartengeben übertragen. Dieser muß die Karten so austeilen, daß er jede zweite Karte erhält. Außerdem darf er nicht die unterste Karte anschauen.

1.5. Reizen

Der links vom Kartengeber sitzende Spieler eröffnet das Reizen. Es wird solange im Uhrzeigersinn gereizt, bis drei Spieler gepaßt und der vierte Spieler mit seiner Partei das Reizen gewonnen haben. Im folgenden wird der Spieler, der das Reizen gewonnen hat, als Vorderhand (VH) bezeichnet, die übrigen Spieler in der weiteren Sitzreihenfolge als Linkerhand (LH), Mittelhand (MH) und Hinterhand (HH). VH und MH sind die spielende (S-), LH und HH die nichtspielende Partei (N-Partei).

Das Reizgebot eines Spielers ist diejenige Spielpunktzahl (vgl. 1.2.), die er zusammen mit seinem Partner im Spiel mindestens erreichen will. Als Reizgebote sind nur durch 5 teilbare Zahlen ab 120 (dem Mindestgebot) möglich (also 120, 125, 130, 135 usw.). Jeder Spieler muß entweder das vorhergehende Reizgebot um mindestens 5 überbieten oder passen. Das Passen ist - wie beim Skat und im Gegensatz zu Bridge - endgültig.

Passen alle vier Spieler gleich zu Beginn, so gibt es keine S- und N-Partei. Der links vom Kartengeber sitzende Spieler spielt unter Beachtung der Regeln für das erste Ausspiel (vgl. 1.8.) aus, und am Ende bekommen beide Parteien die von ihnen erreichten Spielpunkte (entsprechend gerundet) gutgeschrieben.

1.6. Kartenaustausch

VH bekommt nach dem Gewinn des Reizens von MH aus dessen Blatt verdeckt vier Karten, die er in sein Blatt aufnimmt ("Rüberschieben" genannt). Danach gibt er wieder verdeckt vier Karten aus seinem nunmehr 13 Karten umfassenden Blatt an MH zurück, die dieser wieder in sein Blatt aufnimmt ("Zurückschieben" genannt). Dieser Kartenaustausch ist Pflicht. Dabei sind die vier Karten jeweils geschlossen und nicht portionsweise rüber- bzw. zurückzuschieben.

Es ist verboten, noch während des Reizens durch andeutungsweises Aussondern einiger Karten für ein eventuelles Rüberschieben den Partner zum Weiterreizen zu ermuntern.

1.7. Spielansage

Nach dem Kartenaustausch muß VH seine Spielansage bekanntgeben. Diese wird als Ansage der S-Partei notiert und muß mindestens so hoch wie das letzte Reizgebot sowie durch 5 teilbar sein. Erfolgt von VH keine Spielansage, so wird automatisch sein letztes Reizgebot zur Spielansage. Die S-Partei gewinnt ihr Spiel, falls sie ihre Spielansage erreicht oder überbietet. Im Gegensatz zur N-Partei ist es MH verboten, VH auf den aktuellen Spielstand hinzuweisen. Bei einem offensichtlichen Schwarzspiel kann VH seine Karten sofort auf den Tisch legen, muß aber trotzdem seine Spielansage machen (wenn er höher als sein letztes Reizgebot ansagen will).

1.8. Ausspiel

Mit dem Gewinn des Reizens erhält VH das Recht des Ausspiels. Für das Ausspiel zum ersten Stich gelten folgende Regeln:

a) Es muß ein As ausgespielt werden.
b) Ist a) nicht möglich, so muß Grün ausgespielt werden.
c) Ist weder a) noch b) möglich, so kann jede beliebige andere Karte ausgespielt werden.

Im ersten Stich muß auf jeden Fall das As der angespielten Farbe fallen. VH ist nicht verpflichtet, sich in seinem Blatt ein As bzw. eine Grün-Karte für das Ausspiel zurückzubehalten; er kann z.B. alle seine Asse dem Partner zurückschieben.

Nach dem ersten Stich ist stets derjenige Ausspieler, der den letzten Stich gemacht hat.

1.9. Bedienen

Es gelten folgende Regeln:

a) Farbe bzw. Trumpf muß man bedienen.

b) Sofern dies möglich ist, muß man mit seiner Karte den bisher auf dem Tisch liegenden Stich übernehmen. (Liegen z.B. G-9, G-Ober auf dem Tisch, und der nächste Spieler hat G-7, G-Unter, G-König und G-As, so kann er - falls es nicht der erste Stich ist - nur zwischen G-König und G-As wählen. Liegen hingegen nur G-9 und Trumpf-Ober auf dem Tisch, so kann er jede beliebige Grün-Karte bedienen (denn mit einer Grün-Karte kann man den Stich nicht mehr übernehmen).

c) Wenn bereits Trumpf gemeldet wurde und man die ausgespielte Farbe nicht hat, so muß man - wenn möglich - stechen, unabhängig davon, ob man dabei den bisherigen Stich übernehmen kann (Mitstechen). (Liegen z.B. G-9 und Trumpf-Ober auf dem Tisch, und der nächste Spieler hat kein Grün und nur Trumpf-9, Trumpf-Unter, so muß er eine der beiden Trumpf-Karten bedienen.)

1.10. Trumpfmeldung

Am Beginn jedes Spieles gibt es noch keinen Trumpf. Im Verlauf des Spieles kann eine Partei dann eine Farbe als Trumpf melden und damit die entsprechenden Meldungspunkte (vgl. 1.2.) erhalten, wenn sie Ober und König dieser Farbe besitzt. Gibt es zu diesem Zeitpunkt bereits eine Trumpffarbe, so wird diese durch die neue Trumpffarbe erstzt (der Trumpf wechselt). Bei einer Trumpfmeldung sind folgende Regeln zu beachten:

a) Eine Trumpfmeldung kann nur der Spieler ansagen, der den letzten Stich gemacht hat und demzufolge Ausspieler ist. Die Meldung muß dann vor oder mit dem Ausspielen erfolgen.

b) Es darf frühestens nach dem ersten Stich Trumpf gemeldet werden.

c) Zum Zeitpunkt der Trumpfmeldung müssen sich Ober und König dieser Farbe noch in den Händen der meldenden Partei befinden.

d) Es besteht keine Pflicht, gleich bei der ersten Gelegenheit oder überhaupt Trumpf zu melden.

e) In einem Spiel darf jede Farbe höchstens einmal gemeldet werden. Im Extremfall können in einem Spiel sowohl alle vier als auch keine der Farben gemeldet werden.

Punkt c) erlaubt es, daß sich Ober und König der Trumpffarbe getrennt bei den Partnern einer Partei auf der Hand befinden. Dann muß man sich durch Fragen beim Partner erkundigen (vgl. 1.11.), ob er eine passende Hälfte oder sogar ein Paar besitzt.

1.11. Partnerfragen

Das Partnerfragen dient der Ermittlung von Paaren innerhalb einer Partei, um Trumpf melden zu können. Bezüglich des Partnerfragens verbunden mit Trumpfmeldung gibt es folgende Regeln, die nicht ganz einfach und deshalb beim Spielen oft eine Fehlerquelle sind:

a) Der Spieler, der den letzten Stich gemacht hat, kann vor seinem Ausspiel zum nächsten Stich seinem Partner eine Frage stellen.

b) Dabei gibt es nur zwei Arten von Fragen:

- "Hast Du ein Paar?"
- "Hast Du eine Hälfte in ... (es folgt eine der vier Farben)?"

Insgesamt gibt es also fünf verschiedene Fragen. Jede Frage ist wahrheitsgemäß zu beantworten (auch wenn dadurch das Spiel verloren wird oder der Gegner das Spiel gewinnt). Man kann auch dann nach einer Hälfte fragen, wenn man die dazugehörige Hälfte nicht selbst auf der Hand hat.

c) Der Partner wird gefragt: "Hast Du ein Paar?"
Besitzt er kein Paar, so antwortet er mit "Nein!",

besitzt er ein Paar, so antwortet er mit "Ja ... (es folgt die Farbe, in der er das Paar hat) ist Trumpf!", besitzt er mehrere Paare, so muß er sich für ein Paar entscheiden, wobei er lediglich durch kurzes Nachdenken seinem Partner andeuten kann, daß er mehr als ein Paar hat (deutlichere Hinweise sind als fehlerhaftes Spiel zu werten).

d) Der Partner wird gefragt: "Hast Du eine Hälfte in ...?" Besitzt er die gesuchte Hälfte nicht, so muß er mit "Nein!" antworten, besitzt er die gesuchte Hälfte oder sogar das Paar, so muß er mit "Ja!" antworten. Darauf wiederum antwortet sein fragender Partner mit "... ist Trumpf!", wenn er die andere Hälfte hat, sonst mit "Aber ich nicht!". Das heißt insbesondere, daß eine Farbe nicht gemeldet wird, wenn der Partner nach einer Hälfte gefragt wird und er das Paar hat.

e) Hat man seinen Partner bereits gefragt, so darf man danach im gleichen Spiel nicht mehr ein Paar aus der eigenen Karte melden oder durch die Frage "Hast Du ein Paar?" vom Partner melden lassen. (So braucht man z.B. seinen Partner nicht mehr nach einem Paar zu fragen, wenn man bereits von ihm gefragt wurde.)

f) Hat man seinen Partner bereits nach einer Hälfte gefragt, so darf man ihn im gleichen Spiel nicht mehr nach einem Paar fragen.

Zur Illustration ein Beispiel:

VH hat das Reizen gewonnen und nach dem Kartenaustauschen, bei dem er MH H-As zurückgeschoben hat, die folgenden Karten: H-9, S-As, S-10, S-König, E-As, G-10, G-König, G-Ober, G-7

a) VH spielt E-As und fragt danach MH nach Schell-Hälfte. Damit darf er sein Grün-Paar nicht mehr melden, auch dann nicht, wenn MH auf H-As ins Spiel kommt und Vorhand nach einem Paar fragt (Regel e))!

b) VH schiebt neben H-As auch Grün-Paar zu MH zurück. Er spielt E-As aus und fragt danach MH nach Schell-Hälfte, was dieser verneint oder bejaht. In beiden Fällen kann dann MH, wenn er Ausspieler wird, noch sein Grün-Paar melden.

1.12. Spielbewertung

Der Ausgang des Spieles wird wie folgt bewertet:

a) Erfüllt die S-Partei ihre Spielansage, d.h. sie erreicht oder überbietet diese Punktzahl (ohne aufzurunden), so bekommt sie die Ansage - unabhängig davon, ob und wie weit sie überboten wurde - zu ihrem aktuellen Spielstand addiert, im Falle der Nichterfüllung von ihrem Spielstand subtrahiert.

b) Die N-Partei erhält die von ihr im Spiel erreichte Spielpunktzahl zu ihrem aktuellen Spielstand addiert. Dabei wird auf durch fünf teilbare Zahlen gerundet (d.h. 137---135, 138---140 usw.; 3 Luschen und ein Ober als einzigster Stich ergeben 5 Punkte, 3 Luschen und ein Unter dagegen 0 Punkte - als letzter Stich aber 20 Punkte).

c) Eine wichtige Sonderstellung nimmt das Schwarzspiel ein (d.h. eine Partei macht keinen Stich - und kann daher auch nichts gemeldet haben): Wird die S-Partei schwarzgespielt, so erhält sie ihre Spielansage zweifach von ihrem aktuellen Spielstand subtrahiert, für die N-Partei gilt Punkt b). Wird die N-Partei schwarzgespielt und die S-Partei erfüllt ihre Spielansage, so erhält die N-Partei die Spielansage der S-Partei zweifach von ihrem aktuellen Spielstand subtrahiert, für die S-Partei gilt Punkt a). Wird die N-Partei schwarzgespielt und die S-Partei erfüllt ihre Spielansage nicht, so gelten Punkt a) und b).

d) Für die Bewertung eines Spiels ohne S- und N-Partei siehe 1.4.

1.13. Kontra, Re usw.

Solange ein Spieler der N-Partei noch alle neun Karten auf der Hand hat, kann er Kontra geben ("Spritzen"). Dies wird durch einen Stern an der Spielansage der S-Partei gekennzeichnet. Nach einem Kontra kann ein Spieler der S-Partei Re sagen (gekennzeichnet durch einen zweiten Stern an der Spielansage), solange er noch acht Karten auf der Hand hat.

Daraufhin kann wieder ein Spieler der N-Partei (unabhängig davon, wer das erste Kontra gab) Kontra sagen (dritter Stern), solange er noch sieben Karten auf der Hand hat. Dieses gegenseitige Spritzen kann bis zum Schluß fortgesetzt werden. Jeder einzelne Stern, d.h. jedes Kontra, Re usw., bewirkt eine Verdoppelung des Betrags, den die S-Partei gemäß 1.12. angeschrieben bekommt (ein Re bedeutet also eine Vervierfachung). Bei einem erfüllten Schwarzspiel durch die S-Partei wirken sich die Spritzen auch auf die N-Partei aus:

Spielansage: 150, Kontra 300, Re 600 (wird der S-Partei gutgeschrieben), Schwarz 1200 - wird der N-Partei abgezogen.

Haben in einem Spiel alle vier Spieler gleich gepaßt, so darf kein Kontra gegeben werden.

1.14. Spielliste und Gewinner

Die Spielliste besteht aus vier Spalten: Die ersten beiden für die erste, die letzten beiden für die zweite Partei, die jeweils erste Spalte für die Spielansagen, die jeweils zweite Spalte für den aktuellen Spielstand der jeweiligen Partei.

Beispiel einer Spielliste:

Spieler 1	Spieler 4	Spieler 2	Spieler 3	
(Spielans.)	(Pkt.stand)	(Spielans.)	(Pkt.stand)	(0)
140	+ 140		+ 35	(1)
165	+ 305		- 295	(2)
	+ 375	145*	- 5	(3)
145	+ 230		+ 85	(4)
	+ 380	170	- 85	(5)
150	+ 530		- 45	(6)

(0) Diese Zeile steht nur zur Erläuterung der Spalten da, sie wird normalerweise weggelassen.

(1) Die erste Partei gewinnt ihr Spiel bei einer Spielansage von 140, die zweite Partei erzielt 37 Spielpunkte.

(2) Die erste Partei gewinnt ihr Spiel bei einer Spielansage von 165 und spielt die Gegenpartei schwarz.

(3) Die zweite Partei gewinnt ihr Spiel bei einer Spielansage von 145 und bekam Kontra. Die erste Partei erzielte 69 Spielpunkte.

(4) Die erste Partei erzielte 144 Spielpunkte und verliert ihr Spiel bei einer Spielansage von 145. Die zweite Partei erzielt 92 Spielpunkte.

(5) Die zweite Partei verliert ihr Spiel bei einer Spielansage von 170 (sie konnte nicht melden), die erste Partei erzielt 150 Spielpunkte.

(6) Die erste Partei gewinnt ihr Spiel bei einer Spielansage von 150, die zweite Partei erzielt 42 Spielpunkte.

Gewinner ist diejenige Partei, die zuerst 500 oder mehr Spielpunkte erreicht. Erreichen oder überbieten beide Parteien im gleichen Spiel die 500-Marke, so wird der Gewinner wie folgt ermittelt:

a) Gewinner ist diejenige Partei, die den höchsten Spielstand erreicht hat.

b) Ist ein Entscheid nach a) nicht möglich, so ist diejenige Partei Gewinner, die im letzten Spiel mehr Spielpunkte angeschrieben bekam.

c) Ist ein Entscheid nach a) und b) nicht möglich, so ist die N-Partei des letzten Spieles Gewinner.

Die Gewinner-Partei erhält eine Siegprämie von 200 Punkten. Der Gewinn errechnet sich danach wie folgt:

Gewinn = Gesamtpunktzahl der Gewinnerpartei + 200 Punkte - Gesamtpunktzahl der Verliererpartei

Bei obigen Beispiel erhält man

Gewinn = 530 + 200 - (-45) = 775 Punkte,

was bei einem Spieleinsatz von halben Pfennigen 770/2 = 3,85 M ergibt. Das Spiel um halbe Pfennige hat sich bestens bewährt, dabei schwankt der Gewinn pro Partie etwa zwischen 1,50 M und 12,00 M, im Durchschnitt liegt er (ermittelt bei 426 in folge gespielten Partien) bei 5,00 M. Bei einem zu niedrigen Spieleinsatz wird man zu gewagtem Reizen verführt, und der Glücksspielcharakter des Spiels nimmt stark zu.

Ich möchte noch einige Bemerkungen anschließen, um den Einstieg in die Spielpraxis zu erleichtern.

Viele Neueinsteiger erschrecken vor dem Mindestgebot von 120 beim Reizen. (Immerhin ist das ja die überhaupt erreichbare Augenzahl.) Nur sollte man bedenken, daß man auch noch melden kann und der Partner bei Reizgewinn noch 4 Karten schiebt. Damit möchte ich nicht "wildes" Reizen unterstützen, sondern übertriebener Vorsicht vorbeugen. In meiner bisherigen Praxis habe ich es noch nicht erlebt, daß ein Spiel ohne Reizgebot gespielt wurde.

Noch ein Hinweis zum Reizen: Eine Grenze beim Reizen besteht bei 140, denn bis zu diesem Wert ist ein Spiel ohne Melden zu gewinnen (120 Augen + 20 Punkte letzter Stich), darüber ist dann mindestens eine Meldung erforderlich.
Man kann auch durch sein Reizgebot (nicht aber auf andere Weise) dem Partner seine Bereitschaft zum Schieben kundtun.
Dabei kann man folgende Faustregel anwenden:

eine gute Karte zum Schieben	125
zwei gute Karten zum Schieben	130
drei oder mehr gute Karten zum Schieben	135
"Ich will das Spiel selbst machen"	140

Diese Faustregel ist nicht allgemeingültig, z.B. kann 140 auch eine Ansage zum Schwarzspiel ohne Meldung sein. Unter einer guten Karte zum Schieben verstehe ich As (zugehörige Zehn), Hälften.

Oft kommt es vor, daß man Schieben muß und man hat mehr als 4 gute Karten. In so einem Fall gilt für mich der Grundsatz: Stehende Karten (As, zugehörige 10 usw.) vor Hälften, denn nach Hälften kann man fragen. (Dies ist aber keine Pflichtregel)

Ein bißchen Übung erfordert die Spielansage. Günstig ist es, wenn man von der Schwarzspielpunktzahl ausgeht und die Anzahl der abgehenden Stiche ermittelt und für jeden Stich eine Richtpunktzahl festlegt. Die so ermittelte Punktzahl zieht man von der Schwarzspielpunktzahl ab. Ein Beispiel: Die S-Partei besitzt S-Paar und gibt zwei Stiche ab. Für jeden Stich berechnet VH 25 Punkte, also gehen höchstens

50 Punkte ab. S-Schwarzspiel ergibt 120 + 20 + 80 = 220 Punkte, minus 50 Punkte ergibt 170 Punkte Spielansage.

Bei der Gestaltung des Spiels, also vor dem "Zurückschieben" von VH, muß VH beachten, daß die N-Partei bei Erhalt eines Stiches evtl. "ummelden" kann.

Einige werden sich sicherlich fragen, wozu diese umfangreichen Regeln für das Ausspiel und das Bedienen gut sind, immerhin schränken sie die Spielmöglichkeiten ein. Diese Regeln unterstützen ein Schwarzspiel und erhöhen dabei die Spielmöglichkeiten. Ein Beispiel: VH hat E-As, E-König, E-Ober, H-As, ... VH schiebt unter anderem auch E-As zurück. Nachdem H-As und weitere stehende Karten gespielt wurden, meldet VH Eichel und spielt E-König aus. Hat jetzt LH die E-10, so muß er damit den König übernehmen und MH zieht den Stich mit E-As ein. Der E-Ober ist dann die höchste Trumpfkarte.

Man überlege gut, wann man Trumpf meldet, denn solange kein Trumpf besteht, kann keiner stechen...
Ich würde auch empfehlen, den Punkt 1,11. zum Partnerfragen nochmals durchzulesen, denn hier steckt die Hauptfehlerquelle beim Spielen.

Zum Abschluß noch ein Wort zur Fairneß: Bei keinem anderen Spiel kann man durch noch so kleine Gesten oder scheinbar "harmlose" Bemerkungen, so viel mitteilen, wie bei Maria-Pussi. Die größte Freude beim Spielen wird verdorben, wenn nur einer am Tisch unfair spielt. Jeder eindeutige Verstoß sollte deshalb mit Minuspunkten bestraft werden (entweder Spielverlust oder pauschaler Punktabzug). Man sollte während des Spieles über das Wetter oder gar nicht reden.

Ich wünsche allen, die sich die Mühe machen, dieses Spiel zu erlernen, viel Spaß beim Spielen.

Stefan Posselt

Einführung in Assembler-Programmierung

1. Einleitung

Wer sich aktiv mit Kleincomputern beschäftigt, deren Leistungsfähigkeit ausschöpfen möchte und einen tieferen Einblick in ihre Arbeitsweise erhalten will, kommt um Programmierung in Maschinensprache nicht herum. Die in dieser Nummer der WURZEL beginnende Artikelserie wendet sich daher an die Leser, die mit der Programmierung in BASIC vertraut sind und einen Einstieg in die Programmierung in Maschinensprache suchen. Genauer gesagt geht es uns um die Maschinensprache des Microprozessors U880, der z. B. im KC 85/1/2/3 Einsatz findet. Unser Ziel kann es nicht sein, dieses Thema erschöpfend zu behandeln, sondern nur eine Einführung zu geben, die in sich abgeschlossen ist und es doch schon gestattet, eigene anspruchsvolle Maschinenprogramme zu erstellen und weiterführende Literatur besser zu verstehen.

2. Grundlagen

Zunächst müssen einige zum Verständnis nötige Fakten zusammengetragen werden. In dem uns geläufigen Dezimalsystem erfolgt die Zahlendarstellung bekanntlich zur Basis 1Ø,

z. B. $4325 = 4\cdot 1\O^{3} + 3\cdot 1\O^{2} + 2\cdot 1\O^{1} + 5\cdot 1\O^{o}$.

Völlig gleichwertig, aber dem Computer angepaßt, ist das Dualsystem, in dem die Zahlendarstellung zur Basis 2 erfolgt.

Die Ziffern des Dualsystems sind 1 und Ø,

z. B. $1\O 11\O 1 \text{ (dual)} = 1\cdot 2^{5}+\O\cdot 2^{4}+1\cdot 2^{3}+1\cdot 2^{2}+\O\cdot 2^{1}+1\cdot 2^{o} = 45 \text{ (dez.)}$

Zur Speicherung einer Dualziffer sind nur 2 stabile Zustände (durch Ø und 1 gekennzeichnet) notwendig. Das entspricht einem <u>Bit</u> Speicherbedarf. 8 Bit werden zu einem <u>Byte</u> zusammengefaßt.

$$1 \text{ Byte} \mathrel{\hat{=}} \underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{8 \text{ Bit}}$$

Die zu einem Byte zusammengefaßte Speicherzelle ermöglicht $2^{8} = 256$ verschiedene Belegungen mit Ø oder 1, d. h. jedes Byte kann eine der Zahlen zwischen Ø,...,255 darstellen,

z. B. | Ø | 1 | 1 | Ø | Ø | 1 | 1 | 1 | = Ø11ØØ111 (dual) = 1Ø3 (dezimal)

Eine größere Übersichtlichkeit wird durch die Wahl des Hexa-

dezimalsystems (Zahlendarstellung zur Basis 16) erreicht.
Einer vierstelligen Dualzahl entspricht dann nämlich eine Hexadezimalziffer.
Man vereinbart folgende Hexadezimalziffern:

HEX-Ziffer	Ø	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
≙ dezimal	Ø	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1Ø	11	12	12	14	15

Bsp. für HEX-Zahlen und deren Umrechnung in Dezimalzahlen

Darstellung hexadezimal	Umrechnung	Darstellung dezimal
1BØA	$1\cdot 16^3+11\cdot 16^2+0\cdot 16^1+10\cdot 16^0$	6922
ØE2D	$0\cdot 16^3+14\cdot 16^2+2\cdot 16^1+13\cdot 16^0$	3629

Falls Verwechslungen mit anderen Zahlensystemen möglich sind, werden HEX-Zahlen durch ein hinten angefügtes H gekennzeichnet,
z. B. 3425 H = 13349 (dezimal)
Da jede HEX-Ziffer 4 Bit beansprucht, kann eine Speicherzelle (1 Byte) genau eine zweistellige HEX-Zahl ØØ,...FF speichern.
Man setzt 1KByte = 1024 Byte = 2^{10} Byte.
Jeder Speicherzelle wird eine Adresse zugeordnet, die aus einer 4stelligen HEX-Zahl (2 Byte) besteht. Demnach sind theoretisch

$$16^4 = 65536$$

verschiedene Speicherzellen adressierbar, was einem Speicherbereich von 16^4 Byte = $2^6\cdot 2^{10}$ Byte = 64 KByte entspricht.
Speicherzellen, deren Inhalt nur gelesen werden kann, gehören zum ROM.
Speicherzellen, die auch beschrieben werden können, bilden den RAM.

Da beim KC 85/2(/3) der RAM-Bereich von ØØØØ H - Ø17FH für BASIC-Programme nicht genutzt wird und für den Anwender frei ist, werden wir unsere Beispielprogramme dort ablegen.
Es sei noch kurz an die BASIC-Befehle erinnert, die einen Zugriff zum Speicher gestatten.
Aus dem RAM lesen: PEEK bzw. DEEK
In den RAM schreiben: POKE bzw. DOKE
Weiterhin können bei abgeschalteten IRM (Bildwiederholspeicher) durch die Befehle VPEEK bzw. VPOKE Daten aus dem IRM gelesen

bzw. in den IRM geschrieben werden.
Auf eine Besonderheit sei an dieser Stelle aufmerksam gemacht: Wenn 2 aufeinanderfolgende Bytes als Zahl interpretiert werden sollen, dann ist das hintere Byte stets das "höherwertige" Byte! Man muß also das Byte mit der höheren Adresse mit 256 multiplizieren und zum Byte mit der niedrigeren Adresse addieren, um die entsprechende Zahl zu bestimmen. Konsequenterweise gilt also

DEEK(N) = PEEK(N) + 256*PEEK(N+1).

Als weitere Zugriffsmöglichkeit auf den Speicher bietet sich an, im CAOS-Betriebssystem durch MODIFY direkt die Speicherzellen zu lesen bzw. zu beschreiben. Maschinenprogramme kann man später so eingeben.
Wem diese kurze Einführung in das Dual- und Hexadezimalsystem nicht ausreicht bzw. wer mit obigen BASIC-Befehlen nicht vertraut ist, sollte sich vor der weiteren Lektüre damit etwas beschäftigen.

3. Das Maschinenprogramm

Maschinenprogrammbefehle werden durch HEX-Ziffern codiert. Ein Maschinenprogramm ist dann einfach nur eine Aneinanderreihung von HEX-Ziffern, die Befehle, Daten oder Adressen darstellen und ab einer Speicheradresse abgelegt sind.
Maschinenprogramme können in BASIC über CALL oder USR aufgerufen werden.
Wollte man nur mit HEX-Ziffern operieren, so wäre eine Erarbeitung bzw. Dokumentation von Maschinenprogrammen sehr unübersichtlich. Daher hat man sich ein zusätzliches Hilfsmittel - den Assemblercode - geschaffen. Der Assemblercode ist sehr instruktiv aufgebaut und man kann ihn sich leicht einprägen. Er bedient sich sogenannten Mnemonics (Gedächtnisstützen).
Zunächst erarbeitet man sich das Programm im Assemblercode - auch als Quellprogramm bezeichnet - und übersetzt es anschließend "per Hand" oder mittels Assemblerprogrammen, z. B.

EDAS [1] in den hexadezimalen Befehlscode.
Nun geht es richtig los.

4. Datentransportbefehle - load

In der Maschinensprache stehen dem Benutzer spezielle Speicherzellen, die sogenannten Register zur Verfügung, die je einen Speicherumfang eines Bytes haben. Sie werden folgendermaßen bezeichnet:

A-Register Akkumulator	B-Register	D-Register	H-Register
	C-Register	E-Register	L-Register

Aus ihnen können auch folgende Registerpaare (Doppelregister) gebildet werden, nämlich BC, DE und HL, die dann je einen Speicherumfang von 2 Bytes haben. Wie später einzusehen sein wird, spielt unter den Registern das A-Register und unter den Doppelregistern das HL-Doppelregister eine besondere Rolle, da nur für sie gewisse Befehle ausführbar sind.

Durch den Datentransportbefehl "load" (laden) mit dem Kürzel LD können den Registern Werte zugewiesen werden,
z. B. der Assembler-Befehl "LD B,Ø3" bewirkt:
"lade das B-Register mit der HEX-Zahl Ø3".

Bemerkung: Eine Entsprechung der Wirkungsweise in BASIC wäre LET B = 3. Folglich kann man die Register auch als Variable mit den Namen A,B,C,D,E,H,L auffassen, denen man die Zahlen ØØ,...,FF H zuordnen kann.

Für LD B,Ø3 gibt es aber keinen eigenen Code, sondern nur für LD B,N, wobei das N stellvertretend für eine beliebige zweistellige HEX-Zahl steht. LD B,N hat den Code Ø6. Die Zahl N selber muß in der nächsten Speicherzelle stehen, da die Abarbeitung des Befehles mit dem Code Ø6 bewirkt, daß der Inhalt

[1] EDAS (Abk. von Editor/Assembler) ist ein spezielles Programm zur Unterstützung der Maschinenprogrammentwicklung. Einerseits läßt sich das Quellprogramm im Editorbetrieb leichter erstellen und zum anderen kann es durch einen sogenannten Assemblerlauf sofort in den Maschinencode übersetzt werden.

der folgenden Speicherzelle als eine HEX-ZAHL interpretiert und in das B-Register geladen wird. Also ein Assemblerprogramm, das den Befehl LD B,Ø3 enthält, hat im Maschinencode die Gestalt "...Ø6Ø3...".

Um die weitere Befehlsbeschreibung übersichtlich und systematisch zu gestalten, empfiehlt es sich, folgende Abkürzungen zu verwenden:

r, s	bezeichnet eines der 8-Bit Register des Registersatzes A, B, C, D, E, H oder L
rr	bezeichnet eines der 16-Bit-Doppelregister BC, DE oder HL
N	bezeichnet eine zweistellige HEX-Zahl
NN	bezeichnet eine vierstellige HEX-Zahl
(NN)	bezeichnet den Inhalt der Speicherzelle mit der Adresse NN
(rr)	bezeichnet den Inhalt der Speicherzelle, deren Adresse im Doppelregister rr steht.

LOAD-Befehle

1. $\boxed{\text{LD r,N}}$ bewirkt r ←— N, d. h. das Register r wird mit der zweistelligen HEX-Zahl N geladen.

2. $\boxed{\text{LD r,s}}$ bewirkt r ←— s, d. h. der Inhalt des Registers s wird in das Register r geladen, wobei der Inhalt vom Register s erhalten bleibt.

Tabelle der zugehörigen Befehlscodes

LD A,N	3E
LD B,N	Ø6
LD C,N	ØE
LD D,N	16
LD E,N	1E
LD H,N	26
LD L,N	2E

r =	A	B	C	D	E	H	L
LD A,r	7F	78	79	7A	7B	7C	7D
LD B,r	47	4Ø	41	42	43	44	45
LD C,r	4F	48	49	4A	4B	4C	4D
LD D,r	57	5Ø	51	52	53	54	55
LD E,r	5F	58	59	5A	5B	5C	5D
LD H,r	67	6Ø	61	62	63	64	65
LD L,r	6F	68	69	6A	6B	6C	6D

3. | LD (NN),A | bewirkt (NN) ← A, d. h. der Inhalt des Akkumulators wird in die Speicherzelle mit der Adresse NN geladen

| LD A,(NN) | bewirkt A ← (NN), d. h. der Inhalt der Speicherzelle mit der Adresse NN wird in den Akkumulator geladen.

Befehlscodes:

LD (NN),A	32

LD A,(NN)	3A

Bemerkungen:

1. Die konkrete vierstellige HEX-Adresse NN wird durch die unmittelbar nach dem Befehlscode folgenden 2 Bytes angegeben. Wir machen nochmals darauf aufmerksam, daß das niederwertige Adreßbyte vor dem höherwertigen Adreßbyte angegeben werden muß!
2. Diesen Befehlstyp gibt es nur für das A-Register!

Bevor wir unser erstes Programm erstellen können, muß noch erwähnt werden, daß ein Maschinenprogramm mit einem Rücksprung (RETURN) abgeschlossen werden muß. Der entsprechende Assembler- bzw. Maschinencode ist:

RET	C9

Maschinenprogramme lassen sich in folgender Form gut dokumentieren:

1. Programm

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKEN	ASSEMBLERCODE	BEMERKUNGEN
ØØØØ	Ø6 ØA		LD B,ØAH	; B mit 1Ø (dez.)laden
Ø2	78	für	LD A,B	; A mit B laden
Ø3	32 ØF ØØ	später	LD (ØØØFH),A	; A in Speicherzelle 15 (dez.) laden
Ø6	C9		RET	; Rücksprung

Den Maschinencode gibt man am besten im CAOS-Betriebssystem durch MODIFY Ø ein und kehrt anschließend zu BASIC zurück.

Nach Aufruf des Maschinenprogramms durch CALL Ø wird in die Speicherzelle mit der Adresse 15 die Zahl 1Ø (dez.) geladen. Man überzeuge sich durch

```
CALL Ø: PRINT PEEK(15)
```

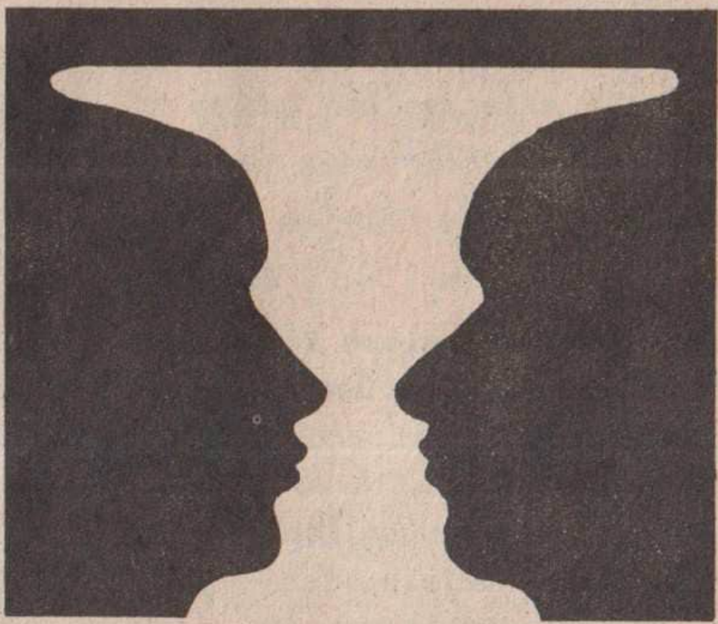
davon. Was würde ausgegeben, wenn zuvor POKE 1,99 ausgeführt wird?

Fortsetzung folgt

Dr. Joachim Puhl
Sektion Mathematik
Bereich Analysis

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung"
Leiter: Stefan Posselt
Chefredakteur: Eckhard Stein
Redaktion: C. Dahms, J. Dimler, N. Patzschke, O. Kotowski
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M. Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	22 (1988) 7/8	S. 97–128



wurzel 9 · 88

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
22. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Aufgaben der OJM der DDR (Klasse 10)

1. Beweisen Sie, daß die Gleichung

$$x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 10 = 0$$

genau zwei reelle Lösungen hat!

2. Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1, x_2 die folgenden Gleichungen (1), (2) erfüllt:

$$f(x_1+x_2) = f(x_1^3) + f(x_2^3), \qquad (1)$$

$$f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1). \qquad (2)$$

Beweisen Sie, daß durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2+\sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

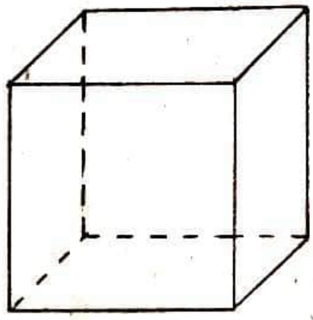


Abb. 1

3A. Die Abbildung 1 wird gewöhnlich als das Bild eines Würfels oder jedenfalls eines achteckigen Körpers in schräger Parallelprojektion angesehen.
Zeigen Sie, daß dies aber auch sowohl das Bild eines zehneckigen als auch das Bild eines zwölfeckigen Körpers in schräger Parallelprojektion sein kann! Zeichnen Sie zu diesem Zweck je einen solchen Körper in einer neu gewählten schrägen Parallelprojektion, bei der alle zehn bzw. alle zwölf Eckpunkte des Körpers als voneinander verschiedene Bildpunkte erscheinen! Geben Sie ferner zu jedem der beiden Körper eine Aufzählung aller Eckpunkte, aller Kanten und aller ebenen Teilflächen einer Oberfläche an, und nennen Sie eine Gerade in einer Projektionsrichtung, bei der das Bild 1 entstehen würde! Eine weitere Begründung wird nicht verlangt.

3B. Ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{2}$ besagt: Aus einem Näherungswert $\frac{a}{b}$, dessen Zähler a und Nenner b positive ganze Zahlen sind, wird ein neuer Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ nach der Vorschrift

$$a' = a^2 + 2b^2, \qquad (1)$$
$$b' = 2ab \qquad (2)$$

gewonnen. Um einschätzen zu können, ob $\frac{a}{b}$ ein geeigneter Anfangswert für dieses Verfahren sein kann, behandelt man die folgende Aufgabe (bei der die Zahl $\sqrt{2}$ wie ein bekannter Wert verwendet wird): Man ermittle alle diejenigen $\frac{a}{b}$ (a,b positive ganze Zahlen), bei denen die Vorschrift (1), (2) auf einen besseren Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ führt, d.h.,

$$\left|\frac{a'}{b'} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right|$$

gilt.

4. Ein Kreis k_1 mit dem Radius $r_1 = 10$ cm und ein Kreis k_2 mit dem Radius $r_2 = \frac{10}{\sqrt{3}}$ cm seien so in einer Ebene gelegen, daß der Mittelpunkt von k_2 außerhalb von k_1 liegt und daß sich k_1 und k_2 in zwei Punkten P_1, P_2 schneiden, für die $\overline{P_1P_2} =$ 10 cm gilt. Ermitteln Sie den Flächeninhalt A des gemeinsamen Flächenstücks der beiden Kreisflächen!

Hinweis: Entsprechend wie bei der obigen Angabe von r_2 soll die zahlenmäßige Angabe von A erfolgen, ohne dabei Näherungswerte (z. B. endliche Dezimalbrüche) für irrationale Zahlen zu verwenden.

5. Worte aus den Buchstaben E, R und S sollen nach folgenden Regeln aus einem zu Anfang vorgegebenen Wort gebildet werden:

(1) Endet ein Wort auf S, so kann ein R angefügt werden.

(2) An ein Wort darf dasjenige Wort angefügt werden, welches aus den gleichen Buchstaben, aber in umgekehrter Reihenfolge besteht.

(3) Treten in einem Wort drei gleiche Buchstaben unmittelbar hintereinander auf, dann dürfen sie durch ein R ersetzt werden.

(4) Zwei aufeinanderfolgende R oder E dürfen weggelassen werden.

Eine beliebige Wahl der Reihenfolge und beliebig häufige Wiederholung der Regelanwendungen sind zugelassen.
Ist es möglich, durch genügend häufige Anwendung dieser Regeln aus dem Wort ES das Wort ER zu erhalten?

6. Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn für reelle Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 gilt, daß jede dieser Zahlen im Intervall $5 \leqq x \leqq 10$ liegt, dann gilt für diese Zahlen stets

$$2(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_5b_5) \leqq a_1^2+b_1^2 + a_2^2+b_2^2 +\ldots+ a_5^2+b_5^2$$
$$\leqq \frac{5}{2}\cdot(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_5b_5).$$

Aufgaben der OJM der DDR (Klasse 11/12)

1. In einer Ebene sei G die Menge aller derjenigen Punkte, deren rechtwinklige kartesische Koordinaten ganze Zahlen sind. Ferner sei F eine Menge von 1988 verschiedenen Farben. Man beweise: Für jede Verteilung von Farben, bei der jeder Punkt aus G genau eine der Farben aus F erhält, gibt es in G vier gleichfarbige Punkte, die die Ecken eines Rechtecks mit achsenparallelen Seiten sind.

2. Man ermittle alle diejenigen Tripel (x,y,z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:
$$1 \cdot x^3 + 9 \cdot y^2 + 8 \cdot y + 8 = 1988, \qquad (1)$$
$$1 \cdot y^3 + 9 \cdot z^2 + 8 \cdot z + 8 = 1988, \qquad (2)$$
$$1 \cdot z^3 + 9 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 8 = 1988. \qquad (3)$$

3. Wieviel verschiedene Wörter $(a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}a_n)$ kann man insgesamt aus den Buchstaben $a_i \in \{1,2,3,4,5\}$, $i=1,\ldots,n$, derart bilden, daß
$$|a_j - a_{j+1}| = 1$$
für $j=1,\ldots,n-1$ gilt?

4. Durch ein konvexes n-Eck $P_1P_2 \ldots P_n$, das einen Inkreis c besitzt, sei eine Gerade g gelegt, die die Seite P_nP_1 in einem Punkt M und eine Seite P_kP_{k+1} $(1 \leq k < n)$ in einem Punkt N schneidet.
Die Gerade g sei so gelegt, daß sie sowohl den Umfang als auch den Flächeninhalt des n-Ecks halbiert, d.h., daß die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:
(1) Die Längen der Streckenzüge $MP_1P_2 \ldots P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2} \ldots P_nM$ sind einander gleich.
(2) Die Flächeninhalte der Vielecke $MP_1P_2 \ldots P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2} \ldots P_nM$ sind einander gleich.
Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt des Kreises c.

5. Es sei (x_n) die durch

$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = 1,$$
$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_{n-1} + 4} \quad (n=2,3,4,\ldots)$$

definierte Zahlenfolge. Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls das zutrifft, ihren Grenzwert.

6A. Alfred und Bernd teilen sich n Äpfel, indem der Reihe nach für jeden einzelnen Apfel durch eine Zufallsentscheidung (z.B. Werfen einer Münze) festgelegt wird, wer diesen Apfel erhält. Ein solcher Verteilungsvorgang heiße für Alfred "günstig" genau dann, wenn Alfred nicht nur am Ende, sondern während des gesamten Vorgangs niemals weniger Äpfel in seinem Besitz hat als Bernd.

Als Wahrscheinlichkeit $w(n)$ dafür, daß ein Verteilungsvorgang für Alfred günstig ist, bezeichnet man den Quotienten, der sich ergibt, wenn die Anzahl aller für Alfred günstigen Verteilungsvorgänge durch die Anzahl aller überhaupt möglichen Verteilungsvorgänge dividiert wird.

a) Man ermittle $w(4)$.

b) Man ermittle $w(n)$ für beliebiges natürliches $n \geqq 2$.

6B. Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ und für je n im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ definierte Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ gibt es reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit $0 \leqq a_i \leqq 1$ $(i=1,\ldots,n)$, für die

$$\left| a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n - \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i) \right| \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

gilt.

Einführung in die sphärische Trigonometrie

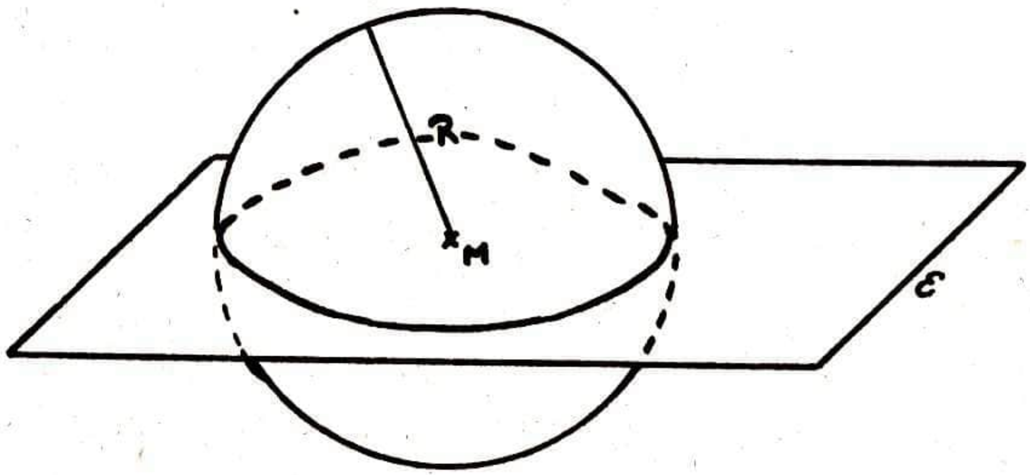
Die spärische Trigonometrie ist eine Trigonometrie auf der Kugeloberfläche. Ihre Entwicklung resultiert aus den Bedürfnissen der menschlichen Gesellschaft und ist eng mit der Entwicklung der Astronomie verbunden. Die Lagebestimmung durch Peilung war früher die einzige Methode für die Schiffahrt auf hoher See. Auch Forschungsreisende in unbekanntem Gelände waren auf sie allein angewiesen. Die notwendigen Messungen wurden mit dem Kompaß, dem Theodoliten, einem Spiegelsextanten oder einem ähnlichen Winkelmeßinstrument sowie mit einer genaugehenden Uhr ausgeführt. Schon die Kenntnis der wichtigsten Sternbilder genügt für eine angenäherte Orientierung. Bei den Ortsbestimmungen wurde davon ausgegangen, daß der gestirnte Himmel dem Beobachter als Teil einer riesigen Kugel erscheint, der scheinbaren Himmelskugel. Auf ihr kann die Lage jedes Punktes durch zwei Zahlenangaben (entsprechend Länge und Breite auf der Erdoberfläche) festgehalten werden. Als Bezugssystem für diese beiden Angaben eignet sich jeder Großkreis mit seinen Polen (siehe Gliederungspunkt 1.). Auf ihm wird von einem festzulegenden Punkte aus die eine Winkelgröße in vorgeschriebener Richtung gemessen, die zweite aber auf einem zum Grundkreis senkrechten Großkreis, der durch die Pole und den Punkt verläuft, dessen Lage bestimmt werden soll. Die dazu erforderlichen mathematischen Hilfsmittel stellt die sphärische Trigonometrie bereit. Da Handel und Schiffahrt bei der Entwicklung der menschlichen Gesellschaft schon seit Jahrtausenden eine entscheidende Rolle spielen, ist es nicht verwunderlich, daß die ersten Erkenntnisse über sphärische Trigonometrie älter sind als die Trigonometrie in der Ebene. Von den Wissenschaftlern, die die Entwicklung der sphärischen Trigonometrie besonders beeinflußten, seien nur Ptolemäus (gestorben 161) und Regiomontanus (1436 - 1476) genannt.

Ptolemäus beschäftigte sich besonders mit Problemen der Astronomie. Seine Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie waren direkt mit der Astronomie verbunden. Die Erkenntnisse von Ptolemäus über sphärische Trigonometrie wurden weit über 1 Jahrtausend von keinem Wissenschaftler überboten.

Regiomontanus (sein deutscher Name war Johannes Müller) übersetzte das astronomische Hauptwerk von Ptolemäus aus dem Griechischen. Er faßte alle bis dahin bekannten Einsichten über sphärische Trigonometrie zusammen und bereicherte sie durch eigene Forschungsergebnisse. In seinem Hauptwerk, das erst 1533 gedruckt wurde, findet man z. B. schon den Sinussatz der spärischen Trigonometrie (siehe Gliederungspunkt 4.).
Die nachfolgenden Ausführungen verfolgen das Ziel, die wichtigsten Grundlagen der sphärischen Trigonometrie darzustellen. Damit ist die Absicht verbunden, Anregungen für die selbständige Beschäftigung mit diesem interessanten Teilgebiet der Mathematik zu geben.

1. Grundbegriffe

Gegeben sei eine Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius R. Sie werde von einer Ebene ε geschnitten (siehe Skizze 1).



Skizze 1

Bezeichnet man den Abstand der Schnittebene vom Kugelmittelpunkt M mit d, so erhält man für $0 \leq d < R$ als Schnittfläche in jedem Falle einen Kreis, wobei die folgenden Fälle zu unterscheiden sind:
Ist $d=0$, so heißt dieser Kreis Großkreis. Sein Mittelpunkt und sein Radius stimmen mit dem Mittelpunkt und dem Radius der Kugel überein. Für $0 < d < R$ nennt man die Schnittflächen Kleinkreise.

Wenn d=R ist, so berührt die Ebene ε die Kugel in einem Punkt und wird deshalb als Tangentialebene bezeichnet.
Zwei verschiedene Großkreise schneiden sich in genau 2 Punkten A und B auf der Kugeloberfläche. Verbindet man diese Punkte miteinander, so erhält man einen Durchmesser der Kugel. A und B heißen Gegenpunkte oder,im Hinblick auf die Erdachse als Gerade, Pole.
Durch zwei beliebige Punkte C und D ($C \neq D$) auf der Kugeloberfläche, die nicht Gegenpunkte sind, und den Mittelpunkt M der Kugel wird genau eine Ebene definiert, die diese 3 Punkte enthält und die Kugel in einem Großkreis schneidet. Für die nachfolgenden Betrachtungen ist die eindeutige (jedoch nicht eineindeutige) Zuordnung

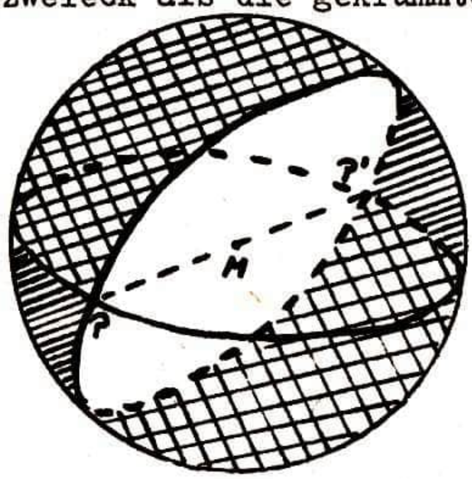
C,D,M $\longrightarrow$ Schnittebene $\longrightarrow$ Großkreis

wichtig. Diesen Sachverhalt wollen wir künftig durch die verkürzte Formulierung"der durch die Punkte C und D definierte Großkreis" ausdrücken.
Unter dem Abstand $\widehat{CD}$ der Punkte C und D versteht man die Länge des Kreisbogens des durch C und D definierten Großkreises. Bezeichnet man mit $\hat{a}$ den im Bogenmaß gemessenen zugehörigen Zentriwinkel (d. h. den Winkel, der von den Radien $\overline{MC}$ und $\overline{MD}$ gebildet wird, so ergibt sich aus der Proportion

$\widehat{AB} : 2\pi R = \hat{a} : 2\pi$ die Formel $\boxed{\widehat{AB} = \hat{a}R}$

2. Kugelzweiecke und Kugeldreiecke

Zwei verschiedene Großkreise zerlegen die Kugeloberfläche in 4 Kugelzweiecke (siehe Skizze 2). Anschaulich kann man sich ein Kugelzweieck als die gekrümmte Begrenzungsfläche eines



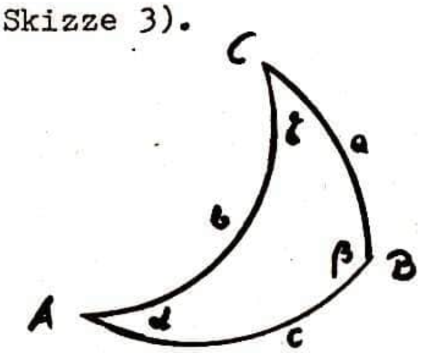
Skizze 2

Apfelsinenstückchens vorstellen.
Unter der Seitenlänge S eines Kugelzweiecks versteht man den Winkel, der von den Radien $\overline{MP}$ und $\overline{MP'}$ gebildet wird, d. h. es ist stets $S = \pi$. Bezeichnen wir mit $\hat{b}$ den im Bogenmaß gemessenen Winkel, den die beiden Großkreisebenen miteinander bilden und mit A_2 die Fläche des Kugelzweiecks, so erhalten wir aus der Proportion

$A_2 : 4\pi R^2 = \hat{b} : 2\pi$ die Formel $\boxed{A_2 = 2\hat{b}R^2}$

Stehen insbesondere die beiden Ebenen senkrecht aufeinander ($\hat{b} = \frac{\pi}{2}$), dann sind die 4 Kugelzweiecke kongruent. Für ihre Fläche gilt: $A_2 = \pi R^2$.
An dieser Stelle soll hervorgehoben werden, daß die sphärische Längenmessung eine Winkelmessung ist. Bei der anschließenden Besprechung des Kugeldreiecks wird dieser Umstand eine große Rolle spielen. Daraus ergibt sich die anfänglich meist befremdende Tatsache, daß man in der sphärischen Geometrie Seiten und Winkel miteinander vergleichen kann.

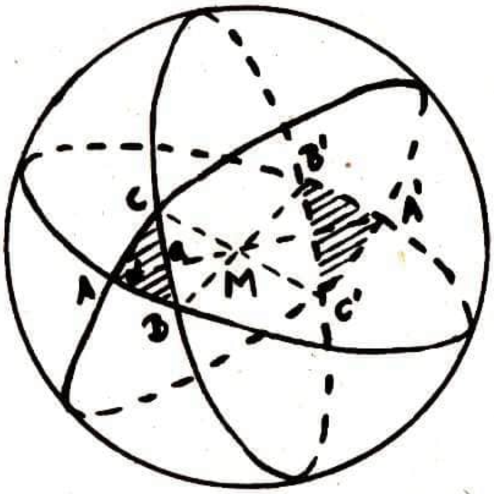
Unter einem Kugeldreieck oder einem sphärischen Dreieck versteht man eine gekrümmte Fläche mit 3 Eckpunkten, 3 Seiten und 3 Winkeln (siehe Skizze 3).



Skizze 3

Diese mathematisch unexakte Erklärung wollen wir durch die folgende genetische Definition ersetzen (bei einer genetischen Definition wird beschrieben, wie das zu definierende Objekt entsteht):
Gegeben seien 3 Punkte A, B und C auf der Kugeloberfläche, die folgende Bedingungen erfüllen:
a) Die 3 Punkte sind voneinander verschieden.
b) Die Punkte liegen so, daß nicht alle drei auf ein und demselben Großkreis liegen.
c) Je zwei der gegebenen Punkte sind nicht Gegenpunkte.

Dann definiert jedes der drei Punktepaare (AB), (AC) und (BC) einen Großkreis. Auf diese Weise entstehen 3 verschiedene Großkreise, die die Kugeloberfläche in 8 Teilflächen zerlegen. Jede solche Teilfläche heißt Kugeldreieck (siehe Skizze 4).



Skizze 4

Die Bedingung (b) ist gewissermaßen eine "sphärische Analogie" zu der bekannten Tatsache, daß 3 Punkte in der Ebene ein (ebenes) Dreieck bilden, falls sie nicht alle drei auf ein und derselben Geraden liegen.
Unter dem Winkel α versteht man den Winkel, den die beiden durch die Punktepaare (AB) und (AC) definierten Großkreisebenen miteinander bilden. Analoges gilt für die Winkel β und γ. Die Seitenlänge a (künftig einfach als Seite a bezeichnet) ist der Winkel, den die Radien $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$ einschließen. Für die Winkel β und γ gilt das Entsprechende. Wir betrachten künftig nur Kugeldreiecke, bei denen alle 3 Seiten kleiner als π sind. Solche Dreiecke bezeichnet man auch als <u>Eulersche Dreiecke</u>. In diesen Dreiecken sind auch alle Winkel kleiner als π. Der Leser kann sich leicht überlegen, daß für Eulersche Dreiecke die beiden Ungleichungen

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 < a+b+c < 2\pi \\ \pi < \alpha+\beta+\gamma < 3\pi \end{array}}$$

und

gelten. (Man beachte bei der zweiten Ungleichung den Unterschied zur ebenen Geometrie!). Um die Fläche des Kugeldreiecks ABC (siehe Skizze 4) zu bestimmen, gehen wir von folgenden Überlegungen aus:

- Je 2 der insgesamt 8 entstandenen Dreiecke sind wegen der vorhandenen Zentralsymmetrie zum Kugelmittelpunkt kongruent, d. h. sie stimmen in allen 3 Seiten und 3 Winkeln überein und haben auch die gleiche Fläche. In unserer Skizze sind das beispielsweise die Eulerschen Dreiecke ABC und A'B'C'. Folglich füllen 4 Dreiecke die halbe Kugeloberfläche aus und ihre Flächensumme ist $2\pi R^2$.
- Jedes Dreieck, das mit $\triangle ABC$ eine Seite gemeinsam hat, ergänzt es zu einem Kugelzweieck. Bezeichnen wir mit A_3 die Fläche des Dreiecks ABC, dann gilt nach der schon bewiesenen Flächenformel für Kugelzweiecke:

$$2\alpha R^2 + 2\beta R^2 + 2\gamma R^2 - 2A_3 = 2\pi R^2$$

$$R^2(\alpha + \beta + \gamma - 2\pi) = A_3 .$$

Setzt man $\alpha + \beta + \gamma - 2\pi = \varepsilon$, so ergibt sich als Flächenformel

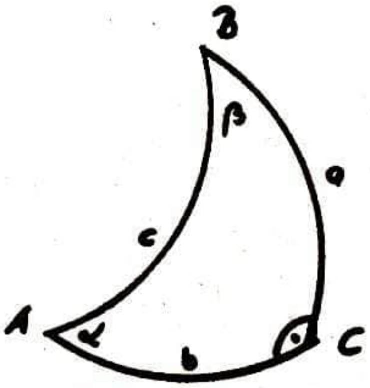
$$\boxed{A_3 = \varepsilon \cdot R^2}$$

ε bezeichnet man als sphärischen Exzeß. Das bedeutet sinngemäß "Überschreitung" ("Überschuß") der Winkelsumme über π .

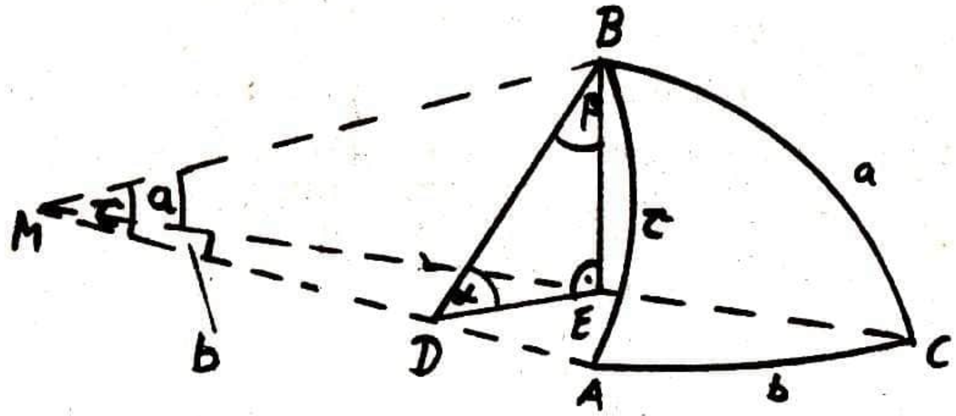
3. Das rechtwinklige sphärische Dreieck

Ein sphärisches Dreieck heißt rechtwinklig, wenn mindestens einer der 3 Winkel ein rechter ist. Wie in der ebenen Geometrie heißt dann die gegenüberliegende Seite dieses Winkels Hypotenuse und die beiden anderen Seiten heißen Katheten. Im rechtwinkligen Kugeldreieck gelten eine Reihe von Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln, die wir nachfolgend untersuchen wollen.

Gegeben sei ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck ABC mit $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (siehe Skizze 5). Folglich stehen die durch die Punktepaare (AC) und (BC) definierten Großkreisebenen senkrecht aufeinander. Wir legen durch den Eckpunkt B eine Ebene, die senkrecht auf diesen beiden Großkreisebenen steht (siehe Skizze 6). Ihre Schnittfläche mit der durch die Punkte A, B, C und M festgelegten dreiseitigen körperlichen Ecke ist ein rechtwinkliges Dreieck (in Skizze 6 mit BDE bezeichnet und schraffiert).



Skizze 5



Skizze 6

Dann gilt:

$$\cos a = \frac{\overline{ME}}{\overline{MB}}$$

$$\cos b = \frac{\overline{MD}}{\overline{ME}} \quad ; \qquad \overline{MD} = \cos b \cdot \overline{ME}$$

$$\cos c = \frac{\overline{MD}}{\overline{MB}} = \frac{\cos b \cdot \overline{ME}}{\overline{MB}} = \cos b \cdot \cos a$$

(1) $\boxed{\cos c = \cos a \cdot \cos b}$

$$\sin a = \frac{\overline{BE}}{\overline{BM}}\ ; \qquad \overline{BE} = \sin a \cdot \overline{BM}$$

$$\sin c = \frac{\overline{BD}}{\overline{BM}}\ ; \qquad \overline{BD} = \sin c \cdot \overline{BM}$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = \frac{\sin a \cdot \overline{BM}}{\sin c \cdot \overline{BM}} = \frac{\sin a}{\sin c}$$

(2) $\boxed{\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}}$

Analog kann man leicht beweisen:

(2') $\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}$

(3) $\cos \alpha = \cos a \cdot \sin \beta$ (3') $\cos \beta = \cos b \cdot \sin \alpha$

(4) $\cos c = \cot \alpha \cdot \cot \beta$

(5) $\sin a = \operatorname{tg} b \cdot \cot \beta$ (5') $\sin b = \operatorname{tg} a \cdot \cot \alpha$

(6) $\cos \alpha = \operatorname{tg} b \cdot \cot c$ (6') $\cos \beta = \operatorname{tg} a \cdot \cot c$

Die Formeln (1) bis (6) kann man sehr schön zusammenfassen in der folgenden

Neperschen Regel:

Wenn man in einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck den rechten Winkel (in unserem Falle γ) nicht mit zählt und die Katheten (in unserem Falle a und b) durch ihre Komplemente (in unserem Falle durch $90^\circ-a$ bzw. $90^\circ-b$) ersetzt,

so ist

der Kosinus eines Stückes

gleich dem Produkt der Kotangenten der anliegenden

oder

gleich dem Produkt der Sinus der nichtanliegenden Stücke.

(Man beachte dabei die Beziehungen $\sin(90^\circ-x) = \cos x$, $\cos(90^\circ-x) = \sin x$, $\cot(90^\circ-x) = \operatorname{tg} x$!)

Wir wollen die Anwendung dieser Regel für den 2. Teil erläutern.

Fortsetzung folgt!

Prof. Schlosser
Sektion Mathematik
Bereich Methodik

Preisaufgaben

U 43 Seien x, y und z die Seitenlängen eines Dreiecks. Man zeige, daß die Größe

$$\left| \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \right|$$

kleiner als 1/8 ist!

U 44 Auf wieviel Nullen endet die Zahl

$$4^{(5^6)} + 6^{(5^4)} \quad ?$$

U 45 Wieviel Achsen der Rotationssymmetrie besitzt ein Würfel?

U 46 Sei f eine Funktion, die für alle reellen x die Gleichung

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} \cdot f(x)$$

erfüllt. Man zeige, daß f periodisch ist!

U 47 Auf der Sehne AB eines Kreises mit Mittelpunkt O werde ein Punkt M beliebig festgelegt. Durch die Punkte A, M und O werde ein Kreis gelegt, der den ersten Kreis in den Punkten A und C schneidet.
Man beweise, daß die Strecken BM und CM gleichlang sind!

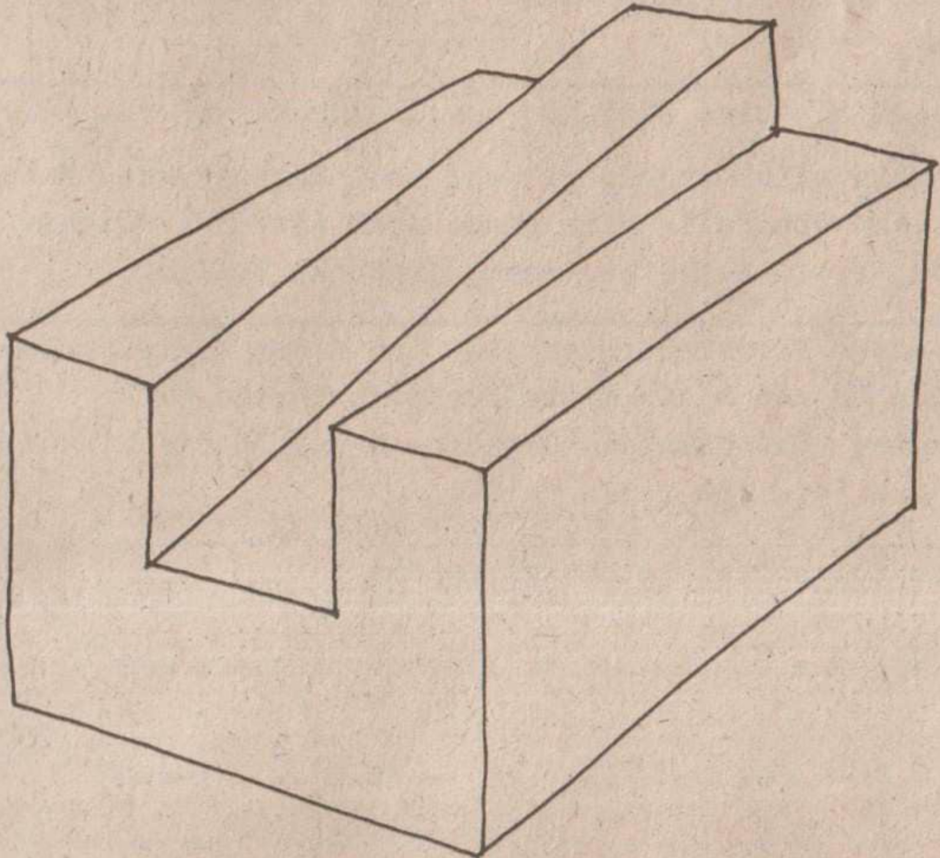
U 48 При каких **н** и **к** числа I, 2, ..., **н·к** можно разбить на **н** групп так, чтобы суммы чисел во всех группых были одиноковыми?
Для всех таких **н** и **к** постройте пример такой разбиении!

Einsendeschluß: 1. 12. 1988

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“
Leiter: Stefan Posselt
Chefredakteur: Eckhard Stein
Redaktion: C. Dahms, J. Dimler, N. Patzschke, O. Kotowski
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M. Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: M. Torke

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	22 (1988) 9	S. 129–144



wurzel 10 · 88

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
22. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Preisaufgaben

U 49 Доказать, что двучлен $3x^4 + 1$ есть **сумма** трёх квадратов.

U 50 x_1 und x_2 seien Lösungen der Gleichung $x^2 - ax + 1 = 0$, wobei a eine natürliche Zahl ist. Beweise, daß dann $x_1^5 + x_2^5$ ebenfalls eine ganze Zahl ist. Für welchen kleinsten Wert a ist diese Summe durch 25 teilbar.

U 51 In einem Parallelogramm ABCD sei M der Mittelpunkt der Seite CB und N der Mittelpunkt der Seite CD. Beweise, daß dann die Geraden AM und AN die Diagonale BD in drei gleiche Teile teilt.

U 52 Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{x + y}{xy} = \frac{z}{12} \qquad x + y + z + t = 22$$

$$\frac{z + t}{zt} = \frac{5}{18} \qquad xyzt = 648$$

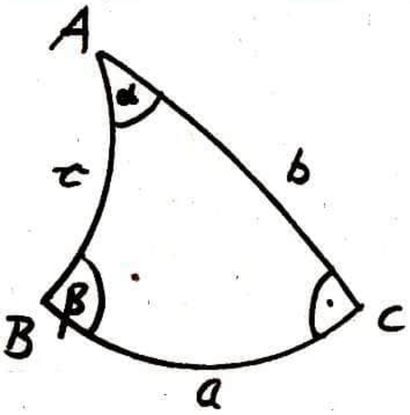
U 53 Es sei $\alpha + \beta + \gamma = n \cdot \pi$. Beweise die folgende Beziehung:

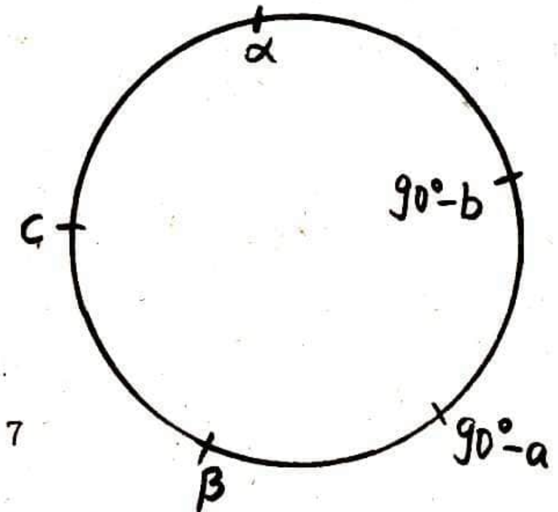
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 = (-1)^n 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma .$$

U 54 Können $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ Glieder einer arithmetischen Folge sein?

Einsendeschluß: 1. 1. 1989

Einführung in die sphärische Trigonometrie
(Schluß)





Skizze 7

$\cos c = \sin(90^\circ - a)\ \sin(90^\circ - b)$, d. h.

(1) $\cos c = \cos a \cdot \cos b$

$\cos \beta = \sin(90^\circ - b)\ \sin \alpha$, d. h.

(3') $\cos \beta = \cos b \cdot \sin \alpha$

$\cos(90^\circ - a) = \sin \alpha \cdot \sin c$, d. h.

(2) $\dfrac{\sin a}{\sin c} = \sin \alpha$

$\cos(90^\circ - b) = \sin c \cdot \sin \beta$, d. h.

( ) $\dfrac{\sin b}{\sin c} = \sin \beta$

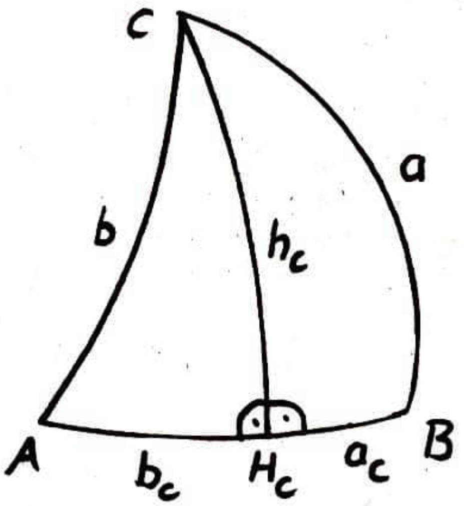
$\cos \alpha = \sin \beta \cdot \sin(90^\circ - a)$, d. h.

(3) $\cos \alpha = \cos a \cdot \sin \beta$

Wendet man den 1. Teil der Neperschen Regel an, so erhält man die Formeln (4) bis (6).

4. Das schiefwinklige sphärische Dreieck

Wie in der Ebene gibt es auch für das Kugeldreieck einen Sinussatz; im Gegensatz dazu gelten jedoch 2 Kosinussätze, die man als 1. Kosinussatz bzw. Seitenkosinussatz und 2. Kosinussatz bzw. Winkelkosinussatz bezeichnet. Die Beweise führen wir, indem wir ein beliebiges schiefwinkliges Dreieck ABC in zwei rechtwinklige Dreiecke AH_cC und H_cBC (siehe Skizze 8) zerlegen und die Formeln (1) bis (6) anwenden. Dabei ist die inhaltliche Bedeutung der verwendeten Symbole zu beachten.



Skizze 8

- Nach Formel (2) bzw. (2') gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\sin h_c}{\sin b} \quad , \quad \sin\beta = \frac{\sin h_c}{\sin a} \quad , \qquad \text{d. h.}$$

$\sin\alpha \cdot \sin b = \sin\beta \cdot \sin a$ bzw.

$\sin\alpha : \sin\beta = \sin a : \sin b$.

In seiner vollständigen Formulierung lautet der Sinussatz:

$$\boxed{\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma}$$

- Wie der Kosinussatz in der Ebene bestehen auch die beiden Kosinussätze der sphärischen Trigonometrie aus jeweils drei Teilen. Wir betrachten zunächst den

Seitenkosinussatz:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos\beta \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma \end{aligned}}$$

Im folgenden soll der 1. Teil dieses Satzes bewiesen werden. Wendet man auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke AH_cC und H_cBC die Formel (1) an, so ergibt sich:

$$\cos a = \cos a_c \cos h_c, \quad \cos b = \cos b_c \cdot \cos h_c \quad \text{bzw.}$$

$\cos h_c = \frac{\cos a}{\cos a_c}$, $\cos h_c = \frac{\cos b}{\cos b_c}$. Folglich ist

$\frac{\cos a}{\cos a_c} = \frac{\cos b}{\cos b_c}$ bzw.

$$\cos a \cdot \cos b_c = \cos b \cos a_c$$
$$= \cos b \cos(c-b_c).$$

Durch Anwendung eines Additionstheorems erhält man:

$$\cos a \cdot \cos b_c = \cos b(\cos c \cos b_c + \sin c \sin b_c)$$

$$\cos a = \frac{\cos b \cos c \cos b_c}{\cos b_c} + \frac{\cos b \sin c \sin b_c}{\cos b_c}$$
$$= \cos b \cos c + \cos b \sin c \operatorname{tg} b_c$$

Nach Formel (6) gilt:

$$\cos \alpha = \operatorname{tg} b_c \cot b, \quad \operatorname{tg} b_c = \frac{\cos \alpha}{\cot b} = \frac{\cos \alpha \sin b}{\cos b}$$

Daraus folgt:

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos b \sin c \frac{\cos \alpha \sin b}{\cos b}$$
$$= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha, \quad \text{w.z.b.w.}$$

- Der <u>Winkelkosinussatz</u> wird in der Literatur meist in der folgenden Weise formuliert:

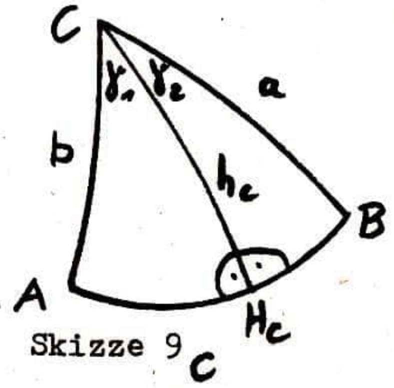
$$\boxed{\begin{aligned} -\cos \alpha &= \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a \\ -\cos \beta &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \cos b \\ -\cos \gamma &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{aligned}}$$

Wir beschränken uns wieder auf den Beweis des 1. Teiles und zerlegen zu diesem Zwecke das schiefwinklige sphärische Dreieck ABC in die beiden rechtwinkligen Teildreiecke AH_cC und H_cBC (siehe Skizze 9).
Die Anwendung der Formeln (3) und (3') führt zu den beiden Gleichungen

$\cos \alpha = \sin \gamma_1 \cos h_c$, $\cos \beta = \sin \gamma_2 \cos h_c$. Daraus folgt:

$\frac{\cos \alpha}{\sin \gamma_1} = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma_2}$ bzw.

$$\sin\gamma_2 \cos\alpha = \cos\beta \sin\gamma_1$$
$$= \cos\beta \sin(\gamma - \gamma_2).$$



Skizze 9

Durch die Anwendung eines Additionstheorems erhält man:

$$\sin\gamma_2 \cos\alpha = \cos\beta(\sin\gamma\cos\gamma_2 - \cos\gamma\sin\gamma_2)$$
$$= \cos\beta\sin\gamma\cos\gamma_2 - \cos\beta\cos\gamma\sin\gamma_2$$
$$\cos\alpha = \frac{\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma_2}{\sin\gamma_2} - \cos\beta\cos\gamma$$
$$= \cos\beta\sin\gamma\cot\gamma_2 - \cos\beta\cos\gamma\ .$$

Nach Formel (4) gilt:

$$\cos a = \cot\gamma_2 \cot\beta$$
$$\cot\gamma_2 = \frac{\cos a}{\cot\beta} = \frac{\cos a \sin\beta}{\cos\beta}$$

Daraus folgt:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\beta\sin\gamma\cos a\sin\beta}{\cos\beta} - \cos\beta\cos\gamma$$
$$\cos\alpha = \sin\beta\sin\gamma\cos a - \cos\beta\cos\gamma\ , \qquad \text{d. h.:}$$
$$-\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos a, \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Schlußbemerkungen

Es sei abschließend betont, daß der vorstehende Beitrag wirklich nur als eine Einführung in die sphärische Trigonometrie betrachtet werden kann. So finden beispielsweise der Halbwinkelsatz, der Halbseitensatz, die Neperschen Analogien und die Mollweideschen Formeln keine Erwähnung. Insbesondere konnte der Autor aus verschiedenen Gründen seine ursprüngliche Absicht nicht verwirklichen, die verschiedenen Grundaufgaben für die Berechnung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks zu diskutieren und durch Beispiele zu illustrieren. In einem weiteren Beitrag sollten einige interessante Anwendungen der sphärischen Trigonometrie in der Astronomie, Nautik und mathematischen Geographie behandelt werden.
Angedeutet soll noch der Zusammenhang zwischen sphärischer und ebener Trigonometrie werden. Man kann zeigen, daß für $R \to \infty$ der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie in den Sinussatz der ebenen Trigonometrie und der Seitenkosinussatz in den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie übergeht. Außerdem gilt der Satz von Legendre für große, aber noch endliche R:
"Ein sphärisches Dreieck mit kleinen Seiten und deshalb auch kleinem Exzeß hat einen nahezu gleichen Flächeninhalt wie ein ebenes Dreieck, das die gleichen absoluten Seitenlängen hat. Jeder Winkel des ebenen Dreiecks ist um ein Drittel des Exzesses kleiner als der entsprechende Winkel des sphärischen Dreiecks" (Zitiert nach Kleine Enzyklopädie Mathematik, Leipzig 1965, Seite 323).

Prof. G. Schlosser
Sektion Mathematik

Lösungen der DDR-Olympiade (Klasse 11/12)

1. Es sei $n = 1988$. Für jede natürliche Zahl a gilt: Da F nur n Farben enthält, gibt es unter den $n+1$ Punkten
$$(a;0),(a;1),\dots,(a;n)$$
zwei von gleicher Farbe; es seien etwa
$$(a;s_a),\ (a;t_a) \text{ von der Farbe } f_a \quad (0 \leqq s_a < t_a \leqq n).$$
Da F nur endlich viele Farben enthält, muß eine von ihnen unter den so definierten Farben f_a $(a=0,1,2,\dots)$ unendlich oft vorkommen; dies sei etwa die Farbe φ.
Da es ferner nur endlich viele Möglichkeiten für ganze Zahlen s, t mit $0 \leqq s < t \leqq n$ gibt, muß in den soeben nachgewiesenen unendlich vielen Punktepaaren $(a;s_a)$, $(a;t_a)$ der Farbe φ mindestens eine dieser Möglichkeiten für s_a, t_a, etwa die Möglichkeit $s_a = \sigma$, $t_a = \tau$, zweimal (sogar unendlich oft) vorkommen, etwa in den Punktepaaren mit $a = \alpha$ und mit $a = \beta$ $(\alpha \neq \beta)$.
Das besagt: Es gibt vier Punkte
$$(\alpha;\sigma),\ (\alpha;\tau),\ (\beta;\sigma),\ (\beta;\tau) \text{ der Farbe } \varphi;$$
die Existenz solcher Punkte war zu beweisen.

<u>Bemerkung:</u> Anstelle der Folgerung, daß eine Farbe φ unendlich oft unter den f_a vorkommen muß, kann man auch (mit einer Variante des Dirichletschen Schubfachschlusses) erhalten, daß unter $n \cdot \binom{n+1}{2}+1$ der Farben f_a, etwa unter denen mit $a=0,1,\dots,n\cdot\binom{n+1}{2}$, eine sein muß, die $\left(\binom{n+1}{2}+1\right)$ mal vorkommt. Dann sind unter den $\binom{n+1}{2}+1$ Punktepaaren $(a;s_a)$, $(a;t_a)$ dieser Farbe φ zwei mit den gleichen s_a-, t_a-Werten σ, τ.
Derartige Beweisführungen vermeiden den Rückgriff auf unendliche Mengen, benötigen aber mehr Beweismittel, im Beispiel die Anzahlformel $\binom{n+1}{2}$ für Paare $(s;t)$ mit $0 \leqq s < t \leqq n$ sowie Varianten (in anderen Beweiswegen auch: mehrfaches Anwenden) des Schubfachschlusses.

2. I. Wenn ein Tripel (x,y,z) reeller Zahlen die Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:

(a) Jede der Zahlen x,y,z ist kleiner als 13.

Beweis: Aus (1) folgt

$$x^3 = 1980 - 9y^2 - 8y = 1980 - (3y + \frac{4}{3})^2 + \frac{16}{9} \leqq$$
$$\leqq 1980 + \frac{16}{9} < 13^3, \quad x < 13.$$

Entsprechend erhält man $y < 13$ und $z < 13$.

(b) Keine der Zahlen x,y,z ist größer als 10.

Beweis: Wäre $x > 10$, so könnte man aus (a) auf $x^2 < 13^2$ schließen und damit aus (3)

$$z^3 = 1980 - 9x^2 - 8x > 1980 - 9 \cdot 13^2 - 8 \cdot 13 =$$
$$= 1980 - 13 \cdot 125 > 0, \quad z > 0$$

erhalten; andererseits folgte

$$z^3 = 1980 - 9x^2 - 8x < 1980 - 9 \cdot 10^2 - 8 \cdot 10 = 1000,$$
$z < 10$.

Daraus könnte man wegen $z > 0$ auf $z^2 < 10^2$ schließen und aus (2)

$$y^3 = 1980 - 9z^2 - 8z > 1980 - 9 \cdot 10^2 - 8 \cdot 10 = 1000,$$
$y > 10$

erhalten. Mit $x > 10$, $y > 10$ ergäbe sich aber

$x^3 + 9y^2 + 8y + 8 > 1988$ im Widerspruch zu (1).

Entsprechend beweist man $y \leqq 10$ und $z \leqq 10$.

(c) Eine der Zahlen x,y,z ist gleich 10.

Beweis: Andernfalls wären nach (b) alle drei Zahlen x,y,z kleiner als 10. Dann aber folgte aus (3)

$$x^3 - z^3 = x^3 + 9x^2 + 8x - 1980$$
$$= (x-10)(x^2+19x+198).$$

Wegen $x < 10$ und $x^2 + 19x + 198 = (x+ \frac{19}{2})^2 - \frac{361}{4} + 198$
$$\geqq - \frac{361}{4} + 198 > 0$$

folgte

$x^3 - z^3 < 0, \quad x < z.$

Entsprechend ergäbe sich $y < x$ und $z < y$, also der

Widerspruch $z < y < x < z$.

(d) Es gilt $(x,y,z) = (10,10,10)$.
Beweis: Ist die in (c) genannte Zahl $x = 10$, so folgt aus (3)

$$z^3 = 1980 - 9x^2 - 8x = 1980 - 9\cdot 10^2 - 8\cdot 10 = 1000,$$
$$z = 10$$

und damit aus (2) ebenso $y = 10$.
Entsprechend schließt man, wenn die in (c) genannte Zahl $y = 10$ oder $z = 10$ ist.

II. Die Probe zeigt, daß das Tripel (10,10,10) die Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt.

Mit I. und II. ist gezeigt, daß genau dieses Tripel die genannten Gleichungen erfüllt.

3. Bezeichnet man
die Anzahl der aus n Buchstaben bestehenden zulässigen Wörter mit x_n,
die Anzahl der von diesen mit 1 beginnenden zulässigen Wörter mit y_n,
die Anzahl der von diesen mit 2 beginnenden zulässigen Wörter mit z_n,
die Anzahl der von diesen mit 3 beginnenden zulässigen Wörter mit u_n,
die Anzahl der von diesen mit 4 beginnenden zulässigen Wörter mit v_n,
die Anzahl der von diesen mit 5 beginnenden zulässigen Wörter mit w_n,
dann gilt offenbar (wegen der Symmetrie) $v_n = z_n$ und $w_n = y_n$ und weiter

$$x_n = 2y_n + 2z_n + u_n, \qquad (1)$$
$$y_n = z_{n-1}, \qquad (2)$$
$$z_n = y_{n-1} + u_{n-1}, \qquad (3)$$
$$u_n = 2z_{n-1}. \qquad (4)$$

Aus (2), (3) und (4) ergibt sich

$z_n = z_{n-2} + 2z_{n-2} = 3z_{n-2}$ mit $z_1 = 1,\ \ z_2 = 2,$

also $\begin{cases} z_{2n} = 2\cdot 3^{n-1}, & n \geqq 1 \\ z_{2n+1} = 3^n, & n \geqq 0. \end{cases}$

Aus (2) erhält man somit

$y_{2n} = z_{2n-1} = 3^{n-1}$, $y_{2n+1} = z_{2n} = 2\cdot 3^{n-1}$,

$u_{2n} = 2z_{2n-1} = 2\cdot 3^{n-1}$, $u_{2n+1} = 2z_{2n} = 4\cdot 3^{n-1}$

und somit

$x_{2n} = 2y_{2n} + u_{2n} = 2\cdot 3^{n-1} + 4\cdot 3^{n-1} + 2\cdot 3^{n-1} = 8\cdot 3^{n-1}, \quad n \geqq 1,$

$x_{2n+1} = 2y_{2n+1} + 2z_{2n+1} + u_{2n+1} = 4\cdot 3^{n-1} + 2\cdot 3^n + 4\cdot 3^{n-1} = 14\cdot 3^{n-1}, n \geqq 1.$

Für x_n mit n=1 erhält man schließlich

$x_1 = 5.$

4. Mit O sei der Mittelpunkt und mit r der Radius des Inkreises bezeichnet. Da alle Seiten des n-Ecks Tangenten an den Inkreis sind und folglich in jedem Dreieck $P_iP_{i+1}O$ $(1 \leqq i < n)$ der Berührungsradius Höhe auf P_iP_{i+1} ist, ergibt sich der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit

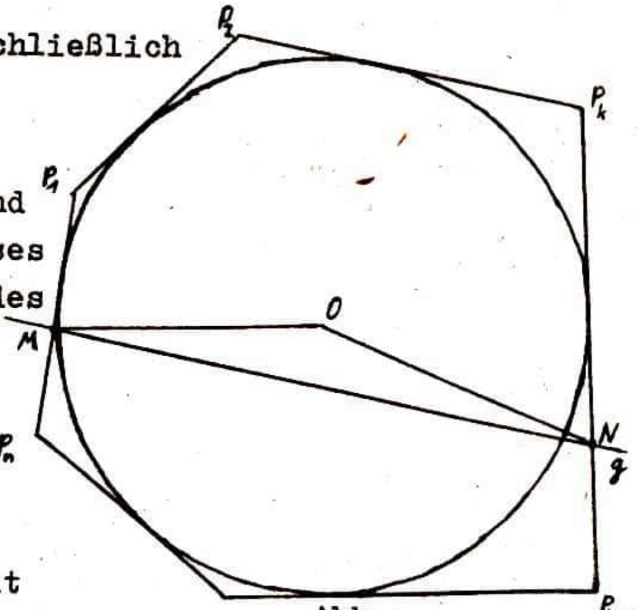


Abb.

$\frac{r}{2} \cdot \overline{P_iP_{i+1}}$.

Ebenso ergibt sich der Flächeninhalt der Dreiecke MP_1O, P_kNO, $NP_{k+1}O$ bzw. P_nMO mit $\frac{r}{2}\,\overline{MP_1}$, $\frac{r}{2}\,\overline{P_kN}$, $\frac{r}{2}\,\overline{NP_{k+1}}$ bzw. $\frac{r}{2}\,\overline{P_nM}$. Aus Voraussetzung (1) der Aufgabe folgt

$$\frac{r}{2}\,(\overline{MP_1} + \overline{P_1P_2} + \ldots + \overline{P_kN}) = \frac{r}{2}\,(\overline{NP_{k+1}} + \overline{P_{k+1}P_{k+2}} + \ldots + \overline{P_nM}),$$

also

$$\frac{r}{2}\,\overline{MP_1} + \frac{r}{2}\,\overline{P_1P_2} + \ldots + \frac{r}{2}\,\overline{P_kN} = \frac{r}{2}\,\overline{NP_{k+1}} + \frac{r}{2}\,\overline{P_{k+1}P_{k+2}} + \ldots + \frac{r}{2}\,\overline{P_nM},$$

d.h., die Flächeninhalte der Vielecke $MP_1P_2 \ldots P_kNO$ und

$NP_{k+1}P_{k+2} \dots P_nMO$ sind einander gleich.

Ginge nun die Gerade g nicht durch O, so läge O im Innern von einem der beiden in (2) genannten Vielecke, o.B.d.A. etwa von $MP_1P_2 \dots P_kN$ (siehe Abb.). Dessen Flächeninhalt wäre somit die Summe der Flächeninhalte des Vielecks $MP_1P_2 \dots P_kNO$ und des Dreiecks MNO, das nicht zur Strecke MN entartet wäre. Zugleich wäre der Flächeninhalt von $NP_{k+1}P_{k+2} \dots P_nM$ die Differenz der Flächeninhalte des Vielecks $NP_{k+1}P_{k+2} \dots P_nMO$ und des Dreiecks MNO. Damit ergäbe sich zwischen den in (2) genannten Flächeninhalten eine Differenz, die gleich dem doppelten Flächeninhalt von MNO, also nicht Null wäre. Wegen dieses Widerspruchs ist die Annahme, g ginge nicht durch O, widerlegt, d.h. der verlangte Beweis geführt.

5. Es sei a die positive Lösung der Gleichung

$$a = \frac{a+1}{a+4}, \qquad (1)$$

nämlich der Gleichung $a^2 + 3a - 1 = 0$, d.h. die Zahl

$$a = \frac{1}{2}(\sqrt{13} - 3). \qquad (2)$$

Wegen $3 < \sqrt{13} < 4$ gelten für diese Zahl die Ungleichungen

$$0 < a < \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Nach Definition der x_n gilt (wie man durch vollständige Induktion erhält)

$$x_n > 0 \qquad (4)$$

für alle n=1,2,3,... . Nun wird bewiesen:

Behauptung: Für alle n=0,1,2,... gilt

$$|x_{n+1} - a| < \frac{3}{2^n}.$$

Beweis:

I. Wegen (3) gilt $\frac{1}{2} < 1 - a < 1$, also $|x_1 - a| = |x_2 - a| < 1$ und damit erst recht $|x_1 - a| < 3$, $|x_2 - a| < \frac{3}{2}$, d.h. die Behauptung für n=0 und für n=1.

II. Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ gilt der Schluß: Wenn die Behauptung für n = k und für n = k-1 gilt, d.h., wenn die Ungleichungen

$$|x_{k+1}-a| < \frac{3}{2^k} \quad \text{und} \quad |x_k-a| < \frac{3}{2^{k-1}} \qquad (5)$$

gelten, so folgt nach Definition der Folge (x_n) und nach (1)

$$|x_{k+2}-a| = \left| \frac{x_{k+1}+1}{x_k+4} - \frac{a+1}{a+4} \right| = \left| \frac{x_{k+1}-a}{x_k+4} + \frac{a+1}{x_k+4} - \frac{a+1}{a+4} \right|$$

$$= \left| \frac{x_{k+1}-a}{x_k+4} - \frac{(a+1)(x_k-a)}{(x_k+4)(a+4)} \right| .$$

Wegen (4) und (3), also $x_k+4 > 4$, $a+4 > 4$ und $a+1 < 2$, ergibt sich daraus

$$|x_{k+2}-a| \leqq \frac{|x_{k+1}-a|}{x_k+4} + \frac{(a+1)|x_k-a|}{(x_k+4)(a+4)} \leqq \frac{|x_{k+1}-a|}{4} + \frac{2|x_k-a|}{4\cdot 4}$$

und somit wegen (5)

$$|x_{k+2}-a| < \frac{3}{4\cdot 2^k} + \frac{3}{8\cdot 2^{k-1}} = \frac{3}{2^{k+1}} ,$$

d.h. die Behauptung für $n = k+1$.

Mit I., II. ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

Damit ist gezeigt: Die Folge (x_n) ist konvergent, ihr Grenzwert ist die in (2) angegebene Zahl a.

6A. Jeder Verteilungsvorgang ist durch eine n-gliedrige Folge darstellbar, in der jedes Glied A oder B lautet. Eine solche Folge sei "j-Folge" genannt, wenn sie genau j Glieder A enthält. Eine Folge heiße genau dann "günstig", wenn sie einen für Alfred günstigen Verteilungsvorgang darstellt. Für

die größte ganze Zahl $m \leqq \frac{n}{2}$ (*)

gelten nun folgende Aussagen:

(1) Jede j-Folge mit $j < m$ ist ungünstig.

(2) Die (einzige) n-Folge (AA...A) ist günstig.

(3) Für jedes j mit $m \leqq j < n$ ist die Anzahl aller ungünstigen j-Folgen gleich der Anzahl aller (j+1)-Folgen.
Dies kann wie folgt bewiesen werden:
Zu jeder ungünstigen j-Folge F gibt es eine kleinste

Zahl $k \geqq 1$ derart, daß das k-te Glied B lautet, während sich unter den vorangehenden k-1 Gliedern ebenso viele Glieder A wie B befinden. Man ordne der Folge F diejenige Folge F' zu, die aus F dadurch entsteht, daß in den ersten k Gliedern überall A durch B und B durch A ersetzt wird. Für diese Zuordnung gilt:

I. Die Folge F' ist jeweils eine (j+1)-Folge.

II. Sind zwei ungünstige j-Folgen F_1, F_2 voneinander verschieden, so auch ihre zugeordneten Folgen F_1', F_2'.

III. Jede (j+1)-Folge G ist die zugeordnete Folge G = F' einer ungünstigen j-Folge F. Wegen $j \geqq m$, also $j+1 > \frac{n}{2}$, enthält G nämlich mehr Glieder A als B; also gibt es eine kleinste Zahl $k \geqq 1$ derart, daß das k-te Glied A lautet, während sich unter den vorangehenden k-1 Gliedern ebenso viele Glieder B wie A befinden. Daher hat diejenige Folge F die verlangten Eigenschaften (ungünstige j-Folge mit F' = G zu sein), die aus G dadurch entsteht, daß in den ersten k Gliedern überall B durch A und A durch B ersetzt wird.

Mit I., II., III. ist die behauptete Anzahlgleichheit bewiesen.

Bezeichnet man die Anzahl aller j-Folgen mit a_j und die Anzahl aller günstigen j-Folgen mit g_j, so ergibt sich nach (1), (2), (3): Die Anzahl aller günstigen Folgen ist

$$
\begin{aligned}
g_0 + \ldots + g_n &= g_m + \ldots + g_{n-1} + g_n \\
&= (a_m - a_{m+1}) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + a_n \quad (**) \\
&= a_m .
\end{aligned}
$$

Die Anzahl a_m aller m-Folgen ist bekanntlich $a_m = \binom{n}{m}$; die Anzahl aller zu berücksichtigenden n-gliedrigen Folgen überhaupt ist 2^n. Damit ergibt sich:

a) $w(4) = \binom{4}{2} : 2^4 = 6 : 16 = \frac{3}{8}$.

b) $w(n) = \binom{n}{m} : 2^n$ mit m aus (*)

Bemerkungen zu anderen Lösungsmöglichkeiten:

Der Wert w(4) kann auch durch Aufzählen aller günstigen viergliedrigen Folgen (AAAA), (AAAB), (AABB), (ABAA), (ABAB) gefunden werden.
Für ungerades n ist $\binom{n}{m} = \binom{n}{m+1}$; somit kann für jedes n statt m auch die kleinste ganze Zahl $m' \geq \frac{n}{2}$ genommen werden.
Die Summation (**) kann auch durch Interpretation der Summanden (als Anzahlen) umschrieben werden, z.B. auch in grafischer Veranschaulichung.
Auch bei derartigen anderen Beschreibungsmöglichkeiten ist zu beachten: Aus der Darstellung soll ersichtlich sein, daß die Feststellungen I., II., III. (bzw. für anderen Beweisverlauf analog fundierende Aussagen) vorliegen. Eine gleichermaßen detaillierte Beschreibung ihres Zutreffens wird nicht in jedem Fall zu fordern sein.

6B. Zur Abkürzung sei gesetzt:

$$\begin{aligned}
A_1 = A_2 = \ldots = A_{n-1} &= 1-f_1(1) - f_2(1)-f_3(1)-\ldots-f_{n-1}(1)-f_n(1),\\
A_n &= -f_1(0) - f_2(0)-f_3(0)-\ldots-f_{n-1}(0)-f_n(0),\\
A_{n+1} &= f_1(0) + f_2(1)+f_3(1)+\ldots+f_{n-1}(1)+f_n(1),\\
A_{n+2} &= f_1(1) + f_2(0)+f_3(1)+\ldots+f_{n-1}(1)+f_n(1),\\
&\ddots\\
A_{2n} &= f_1(1) + f_2(1)+f_3(1)+\ldots+f_{n-1}(1)+f_n(0).
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{2n} = n-1,$$

also

$$|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_{2n}| \geq n-1.$$

Daher muß für mindestens einen der 2n Summanden

$$|A_i| \geq \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

gelten; d.h.: Es gibt unter den Systemen

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n) = &(1,1,1,\ldots,1,1),\\
&(0,0,0,\ldots,0,0);\\
&(0,1,1,\ldots,1,1),\\
&(1,0,1,\ldots,1,1),\\
&\ddots\\
&(1,1,1,\ldots,1,0)
\end{aligned}$$

mindestens eines, für das

$$\left| a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n - \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i) \right| \geq \frac{1}{2} - \cdot \frac{1}{2n}$$

gilt; die Existenz solcher a_i war zu beweisen.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“
Leiter: Stefan Posselt
Chefredakteur: Eckhard Stein
Redaktion: C. Dahms, J. Dimler, N. Patzschke, O. Kotowski
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Titelbild: M. Torke

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	22 (1988) 10	S. 145–160

wurzel $\sqrt{\text{II} \cdot 88}$

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
22. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Nach Aufruf des Programms durch CALL Ø ist in die Speicherzelle 16 der Wert 255 und in die Speicherzelle 17 der Wert 254 eingeschrieben. Man überzeuge sich durch ?PEEK(16) bzw. ?PEEK(17).

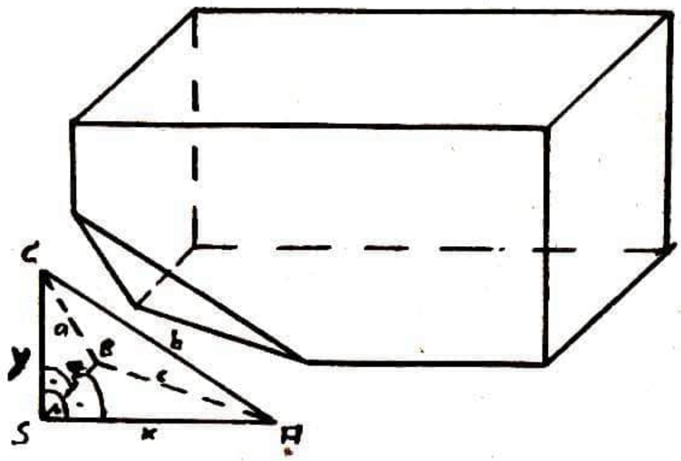
Fortsetzung folgt!

Dr. J. Puhl
Sektion Mathematik
Bereich Analysis

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung"
Leiter: Stefan Posselt
Chefredakteur: Eckhard Stein
Redaktion: C. Dahms, J. Dimler, N. Patzschke, O. Kotowski
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Titelbild: M. Torke

Analogon zum Satz des Pythagoras

Es soll ein Analogon des Satzes des Pythagoras im dreidimensionalen Raum untersucht werden. Betrachten wir den Quader und stellen uns die Aufgabe, ihn so zu zerlegen, daß eine Schnittfigur ein Tetraeder darstellt.



Das Tetraeder besitzt drei rechtwinklige Dreiecke als Seitenflächen, wobei der Scheitelpunkt der rechten Winkel in diesem Fall S ist. Es läßt sich nun vermuten, daß die Summe der Quadrate der Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke ($\triangle$ ASC; $\triangle$ BSC; $\triangle$ ASB) gleich dem Quadrat des Flächeninhaltes des nicht rechtwinkligen Dreiecks ist.

Das soll im folgenden bewiesen werden. Dazu sei der Flächeninhalt des Dreiecks ASC mit A_1, des Dreiecks BSC mit A_2, des Dreiecks ASB mit A_3 und des Dreiecks ABC mit A_4 bezeichnet.

$A_1 = \frac{x \cdot y}{2}$ $\qquad$ $A_2 = \frac{y \cdot z}{2}$ $\qquad$ $A_3 = \frac{x \cdot z}{2}$

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \frac{x^2z^2 + y^2z^2 + x^2y^2}{4}$$

Nach Cosinussatz gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\gamma = \arc \cos \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \qquad A_4 = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin \gamma$$

$$a^2 = y^2 + z^2 \qquad b^2 = x^2 + z^2 \qquad c^2 = x^2 + z^2$$

$$A_4 = \frac{\sqrt{(z^2+y^2)(z^2+x^2)}}{2} \cdot \sin\left[\arccos\left(\frac{z^2}{\sqrt{(z^2+y^2)(z^2+x^2)}}\right)\right]$$

$$A_4^2 = \frac{(z^2+y^2)(z^2+x^2)}{4} \cdot \left(1 - \frac{z^4}{(z^2+y^2)(z^2+x^2)}\right)$$

$$A_4^2 = \frac{x^2z^2 + y^2z^2 + x^2y^2}{4}$$

Damit wäre der folgende Satz bewiesen:

Für jedes Tetraeder mit 3rw und einer nrw Begrenzungsfläche, das sich als Schnittfigur bei einem "Eckenschnitt" (vgl. Abb.) durch einen Quader erhalten läßt, gilt:

Die Summe der Quadrate der Flächeninhalte der rechtwinkligen Begrenzungsflächen ist gleich dem Quadrat des Flächeninhaltes der nicht rechtwinkligen Begrenzungsfläche.

Ein weiterer Beweis läßt sich unter Anwendung der Heronischen Dreiecksformel angeben. Die Heronische Dreiecksformel lautet:

$A = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$, wobei $s = \frac{a+b+c}{2}$ ist und a,b,c die Seiten des entsprechenden Dreiecks sind.

Behauptung: $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A_4^2$

$$A_1 = \frac{x \cdot z}{2} \qquad A_2 = \frac{y \cdot z}{2} \qquad A_3 = \frac{x \cdot y}{2}$$

$$A_4 = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)}$$

$$\left(\frac{x \cdot z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y \cdot z}{2}\right)^2 + \left(\frac{x \cdot y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)$$

$$4(z^2x^2+y^2z^2+x^2z^2) = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

$$4(z^2x^2+y^2z^2+x^2z^2) = -a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$$

a,b,c lassen sich gemäß des Satzes des Pythagoras folgendermaßen darstellen:

$$a^2 = z^2 + y^2 \qquad b^2 = z^2 + x^2 \qquad c = x^2 + y^2$$

$$4(z^2x^2+y^2z^2+x^2z^2) = -(z^2+y^2)^2 - (z^2+x^2)^2 - (y^2+x^2)^2 +$$
$$(2z^2+2y^2)(z^2+x^2) + (2z^2+2x^2)(y^2+x^2) + (2z^2+2y^2)(x^2+y^2)$$

$$4(z^2x^2+y^2z^2+x^2z^2) = -2z^4-2y^4-2x^4-2z^2y^2-2x^2z^2-2y^2x^2+2z^4+$$
$$2x^4+2y^4+2z^2y^2+2x^2z^2+2y^2x^2+4(z^2x^2+y^2z^2+x^2y^2)$$

$$0 = 0 \qquad \text{wahr}$$

Da alle Umformungen im Bereich der nichtnegativen Zahlen äquivalent sind, gilt auch die Ausgangsgleichung $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A_4^2$

q.e.d.

Jörg Strehmann
Frank Bielig
Spezialschule Frankfurt/O.

Preisaufgaben

U 55 Man zeige, daß jede natürliche Zahl $n > 1$ die Gleichung

2

$$[\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[4]{n}] + \ldots + [\sqrt[n]{n}]$$
$$= [\log_2 n] + [\log_3 n] + [\log_4 n] + \ldots + [\log_n n]$$

erfüllt.

Dabei ist $[x]$ die größte ganze Zahl m mit $m \leq x$.

U 56 Man zeige, daß eine Primzahl p, für die p^r ein Teiler

2

von $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ ist, die Ungleichung $p^r \leq m$ erfüllt.

U 57 1 Сумма двух рациональных чисел x и y - натуральное число, сумма обратных к ним чисел $1/x$ и $1/y$ - тоже натуральное число. Какими могут быть x и y?

U 58 2 Die Winkelhalbierende des Winkels BAC des Dreiecks ABC schneidet den Umkreis dieses Dreiecks im Punkt K. Man beweise, daß die Länge der Projektion der Strecke AK auf die Gerade AB (bzw. AC) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Seiten AB und AC ist.

U 59 1 Man löse das folgende Gleichungssystem:

$$\sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6$$
$$\sqrt{x+y} - y + x = 2$$

U 60 1 Ralf wurde ein Taschenrechner geschenkt, mit dem er für gegebenes a und b nur a+b, a-b, a+1 und 1/a berechnen kann. Ralf sagt, daß er mit höchstens 6 Operationen eine Zahl quadrieren und mit höchstens 20 Operationen zwei Zahlen multiplizieren kann.
Wie macht er das?

Einsendeschluß: 1. 2. 1989

Lösungen der DDR-Olympiade (Klasse 10)

1. Es sei f die durch $f(x) = x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 10$
$$= (x-2)^4 + x^2 - 2x - 6$$
$$= (x-2)^4 + (x-1)^2 - 7$$
definierte Funktion. Für sie gilt:
(1) Es ist $f(0) = 10 > 0$.
(2) Für alle x im Intervall $1 \leqq x \leqq 2$ ist
$-1 \leqq x - 2 \leqq 0$, also $(x-2)^4 \leqq 1$, und
$0 \leqq x - 1 \leqq 1$, also $(x-1)^2 \leqq 1$, also
$$f(x) \leqq 1 + 1 - 7 < 0.$$
(3) Es ist $f(4) = 16 + 9 - 7 > 0$.
(4) Im Intervall aller $x < 1$ ist f streng monoton fallend; denn aus $x_1 < x_2 < 1$ folgt
$x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0$, also $(x_1-2)^4 > (x_2-2)^4$, und
$x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0$, also $(x_1-1)^2 > (x_2-1)^2$,
also $f(x_1) > f(x_2)$.
(5) Im Intervall aller $x > 2$ ist f streng monoton steigend; denn aus $2 < x_1 < x_2$ folgt
$0 < x_1 - 2 < x_2 - 2$, also $(x_1-2)^4 < (x_2-2)^4$, und
$0 < x_1 - 1 < x_2 - 1$, also $(x_1-1)^2 < (x_1-1)^2$,
also $f(x_1) < f(x_2)$.

Wegen (1), (2) gibt es im Intervall $(0;1)$ und wegen (2), (3) im Intervall $(2;4)$ aufgrund der Stetigkeit von f je (mindestens) eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Wegen (4) gibt es unter allen $x < 1$ und wegen (5) unter allen $x > 2$ auch jeweils keine weitere Lösung; wegen (2) liegt auch im Intervall $[1;2]$ keine Lösung. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

2. Aus (1) mit $x_1 = x_2 = 0$ folgt $f(0) = f(0) + f(0)$, also $f(0) = 0$.
Aus (2) mit $x_1 = x_2 = 1$ folgt $f(1) = f(1) + f(1)$, also $f(1) = 0$.

Für jedes reelle x folgt aus (1) mit $x_1 = x$, $x_2 = 0$ ferner $f(x) = f(x^3) + f(0) = f(x^3)$. Somit besagt (1) auch, daß für alle reellen Zahlen x_1, x_2

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \qquad (3)$$

gilt. Für jedes reelle x folgt aus (3) mit $x_1 = x$, $x_2 = 1$ ferner $f(x+1) = f(x) + f(1) = f(x)$. Somit ergibt sich der Reihe nach

$$f(2) = 0, \quad f(3) = 0, \quad f(4) = 0, \quad f(5) = 0. \qquad (4)$$

Aus (2) mit $x_1 = x_2 = \sqrt{5}$ folgt $f(5) = \sqrt{5} \cdot f(\sqrt{5}) + \sqrt{5} \cdot f(\sqrt{5})$ und daraus

$$f(\sqrt{5}) = 0. \qquad (5)$$

Damit folgt aus (3), (4), (5), daß der gesuchte Funktionswert eindeutig bestimmt ist; er ergibt sich zu

$$\begin{aligned} f(2+\sqrt{5}) &= f(2) + f(\sqrt{5}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es gibt auch Lösungswege ohne den Übergang zu (3), z.B.:

Für die Zahl $a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ist $a^2 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) = a+1$, $a^3 = 2+\sqrt{5}$. Damit folgt (nachdem man wie oben $f(1) = 0$ aus (2) hergeleitet hat) einerseits aus (1) mit $x_1 = a$, $x_2 = 1$ und aus (2) mit $x_1 = x_2 = a$

$$\begin{aligned} f(2+\sqrt{5}) = f(a^3) = f(a^3) + f(1) &= f(a+1) \\ &= f(a^2) = 2a \cdot f(a). \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus (2) mit $x_1 = a^2$, $x_2 = a$

$$f(a^3) = a^2 \cdot f(a) + a \cdot f(a^2) = 3a^2 \cdot f(a).$$

Wegen $2a \neq 3a^2$ folgt dann durch Subtraktion $f(a) = 0$ und damit $f(2+\sqrt{5}) = 0$.

3A. Zeichnungen: Abb. 1 + 2

<u>zehneckiger Körper</u>

Eckpunkte:

A,B,C,D,E,F,G,H,P,R.

Kanten:

AB, BC, CD, DA,
EF, FG, GH, HE,
BP, PA, FR, RE,
AE, BF, CG, DH, PR.

ebene Teilflächen:

ABCD, EFGH,
ABP, EFR,
BCGF, CDHG, DAEH,
APRE, PBFR.

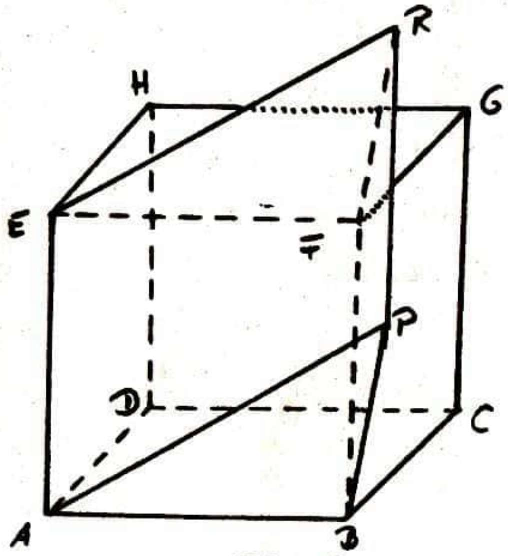


Abb. 1

<u>zwölfeckiger Körper</u>

Eckpunkte:

A,B,C,D,E,F,G,H,P,Q,R,S.

Kanten:

AB, BC, CD, DA,
EF, FG, GH, HE,
BP, PQ, QA, FR, RS, SE,
AE, BF, CG, DH, PR, QS.

ebene Teilflächen:

ABCD, EFGH,
ABPQ, EFRS,
BCGF, CDHG, DAEH,
AQSE, QPRS, PBFR.

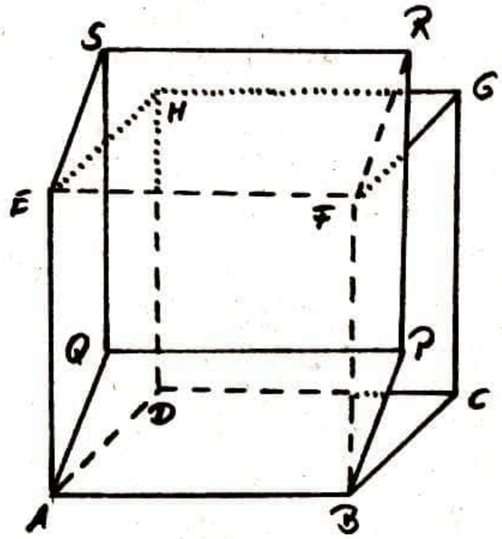


Abb. 2

Für beide Körper:
Gerade in Projektionsrichtung
z.B.:
Die Gerade durch P und B.

Bemerkung: Zu beiden Teilaufgaben gibt es noch zahlreiche andere Lösungen.

3B. Die zu diskutierende Ungleichung

$$\left|\frac{a^2 + 2b^2}{2ab} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right|$$

gilt wegen $a,b > 0$ genau dann, wenn

$$|a^2 + 2b^2 - 2ab\sqrt{2}| < |2a^2 - 2ab\sqrt{2}|$$

gilt, und dies ist äquivalent mit

$$|a - b\sqrt{2}|^2 < 2a \cdot |a - b\sqrt{2}| . \qquad (3)$$

Da für ganze a,b wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ stets $\frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$, also $|a-b\sqrt{2}| > 0$ gilt, ist (3) äquivalent mit

$$|a-b\sqrt{2}| < 2a$$

und dies der Reihe nach mit

$$-2a < a - b\sqrt{2} < 2a,$$
$$-a \quad b\sqrt{2} < 3a. \qquad (4)$$

Für $b > 0$ ist (4) äquivalent mit $b\sqrt{2} < 3a$. Also führen (1), (2) genau für alle $\frac{a}{b} > \frac{1}{3}\sqrt{2}$ auf einen besseren Näherungswert.

Fortsetzung folgt!

Einführung in die Assembler-Programmierung (Fortsetzung)

Als nächstes wenden wir uns den Ladebefehlen zu, die in Verbindung mit Doppelregistern vorkommen.

4. $\boxed{\text{LD rr,NN}}$ bewirkt rr ← NN ,

d. h. das Doppelregister rr wird mit der vierstelligen HEX-Zahl NN geladen.

Befehlscodes:

LD BC,NN	Ø1
LD DE,NN	11
LD HL,NN	21

Bemerkung:
Die konkrete vierstellige HEX-Zahl NN wird wieder durch die unmittelbar nach dem Befehlscode folgenden 2 Bytes angegeben. (Niederwertiges Byte steht vor höherwertigem Byte!)

5. $\boxed{\text{LD rr,(NN)}}$ bewirkt rr ← (NN)
← (NN+1)

$\boxed{\text{LD (NN),rr}}$ bewirkt (NN+1) ← rr
(NN) ←

Bemerkung:
Da der Ladevorgang durch die Pfeile hinreichend erläutert wird, werden wir zukünftig auf eine verbale Formulierung verzichten.

Befehlscodes:

LD BC,(NN)	ED 4B
LD DE,(NN)	ED 5B
LD HL,(NN)	2A

LD (NN),BC	ED 43
LD (NN),DE	ED 53
LD (NN),HL	22

6. $\boxed{\text{LD (rr),A}}$ bewirkt (rr) ← A

$\boxed{\text{LD A,(rr)}}$ bewirkt A ← (rr)

Befehlscodes:

LD (BC),A	Ø2
LD (DE),A	12
LD (HL),A	77

LD A,(BC)	ØA
LD A,(DE)	1A
LD A,(HL)	7E

7. LD (HL),r bewirkt (HL) ← r

LD r,(HL) bewirkt r ← (HL)

LD (HL),N bewirkt (HL) ← N

Befehlscodes:

LD (HL),B	7Ø
LD (HL),C	71
LD (HL),D	72
LD (HL),E	73
LD (HL),H	74
LD (HL),L	75

LD B,(HL)	46
LD C,(HL)	4E
LD D,(HL)	56
LD E,(HL)	5E
LD H,(HL)	66
LD L,(HL)	6E

LD (HL),N	36

Bemerkung:

Das Doppelregister HL und der Akkumulator A spielen eine Sonderrolle. Weitere load-Befehle folgen später.

2. Programm

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKEN	ASSEMBLERCODE	BEMERKUNGEN
ØØØØ	ED 4B ØØ Ø1		LD BC,(Ø1ØØH)	A mit Inhalt der Speicherzelle, deren Adresse in den Zellen 256/257 (dez.) steht, laden
Ø4	ØA		LD A,(BC)	
Ø5	21 FE ØØ		LD HL,ØØFEH	Inhalt von A in Speicherzelle mit Adr. 254 laden
Ø8	77		LD (HL),A	
Ø9	C9		RET	Rücksprung

Den Maschinencode gibt man wieder im CAOS-Betriebssystem (für

KC85/2/3) durch MODIFY Ø ein und kehrt zu BASIC zurück.
Nach Aufruf des Programms durch CALL Ø wird der Inhalt der Speicherzelle, deren Adresse in den Speicherzellen 256 und 257 (dez.) steht, in die Speicherzelle mit der Adresse 254 (dez.) geladen. Man überzeuge sich z. B. durch

```
DOKE 256,5:CALL Ø: ?PEEK(254)
```

davon, daß 33 ausgedruckt wird. Denn durch DOKE 256,5 wird die Adresse 5 in die Speicherzellen 256 und 257 geladen, durch CALL Ø wird anschließend der Inhalt der Speicherzelle 5 - nämlich 21H ≙ 33 - nach Zelle 254 geladen und mit ?PEEK(254) ausgegeben.

Bemerkungen:

1. Am obigen Beispielprogramm wurde die Möglichkeit der indirekten Adressierung vorgeführt. Man kennt die Adresse selbst nicht, weiß aber, wo sie steht.
2. Um sich mit der Wirkungsweise der load-Befehle vertraut zu machen, sollte man auch selbständig einige kleine Beispielprogramme erarbeiten und testen.

5. Der Sprungbefehl - jump

Da ein Maschinenprogramm nur eine Aneinanderreihung von HEX-Ziffern ist (die Befehle, Daten oder Adressen darstellen), und ab einer gewissen Speicheradresse abgelegt ist, muß der Prozessor bei der Befehlsabarbeitung immer wissen, welche Adresse als nächste abgearbeitet wird. Dazu dient ein Programmzähler, der durch das PC-Register (programm counter) realisiert wird. Das PC-Register ist also ein zu diesem speziellen Zweck dienendes Doppelregister, das z. B. beim Sprungbefehl eine wichtige Rolle spielt.

In einem BASIC-Programm können durch den GOTO-Befehl absolute Sprünge durchgeführt werden. In der Maschinensprache entspricht das dem jump-Befehl (Sprungbefehl) - abgekürzt mit JP.

$\boxed{\text{JP NN}}$ bewirkt PC ←— NN, d. h. in das PC-Register (Programmzähler) wird die Adresse NN geladen, und somit deren Inhalt als nächster Befehl vom Prozessor abgearbeitet.

Befehlscode:

JP NN	C3

Bemerkung:

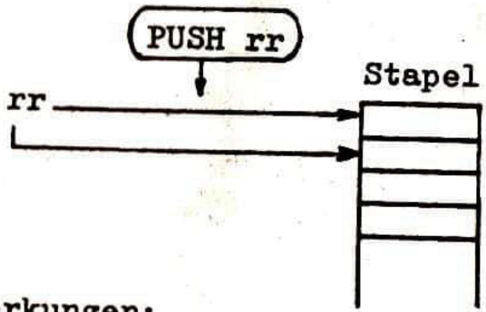
Die konkrete 4-stellige HEX-Adresse NN wird wieder durch die unmittelbar nach dem Befehlscode folgenden 2 Bytes angegeben.

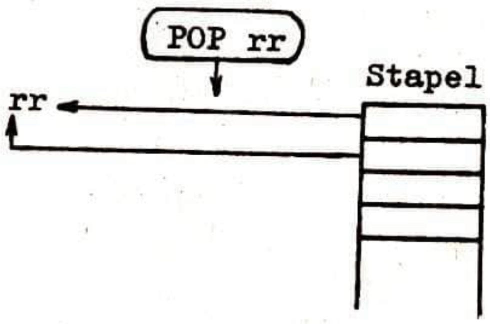
6. Der Stapel - stack

Als nächstes lernen wir einen wichtigen speziellen Speicherbereich kennen, in dem man Inhalte der Register zwischenspeichern kann. Es handelt sich um den Stapel (stack). Man stelle sich einen Stapel Kartons vor, wobei jeder Karton stellvertretend für eine 2stellige HEX-Zahl steht. Klar, daß der Karton, der als letzter oben auf dem Stapel liegt, auch als erster wieder weggenommen werden muß. Um nun dem Prozessor die Arbeit mit einem "stack" zu ermöglichen, muß er immer das obere Ende des Stapels kennen. Dazu dient der Stapelzeiger (stack-pointer). Realisiert wird der stack-pointer wieder über ein spezielles Doppelregister, dem SP-Register.

Natürlich ergibt sich die Frage, wie der Stapel genutzt werden kann. Die entsprechenden Befehle sind PUSH und POP.

PUSH rr	schafft eine Kopie des Doppelregisters rr auf den Stapel. Nach Ausführung des Befehls PUSH rr ist der Inhalt des SP-Registers um 2 erniedrigt.
POP rr	hebt die Daten vom Stapel ab und lädt sie in das Doppelregister rr. Nach Ausführung des Befehls POP rr ist der Inhalt des SP-Registers um 2 erhöht.

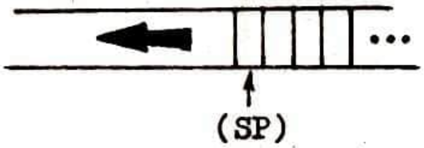




Bemerkungen:

1. Eigentlich ist es doch verwunderlich, daß, wenn etwas auf den

Stapel kommt, der stack-pointer erniedrigt wird. Es liegt einfach daran, daß der Stapel in Richtung abnehmender Adressen aufgebaut wird.



2. Beim POP-Befehl wird die beschriebene Zelle nicht gelöscht, später vielleicht nur wieder überschrieben.

Befehlscodes:

PUSH BC	C5
PUSH DE	D5
PUSH HL	E5

POP BC	C1
POP DE	D1
POP HL	E1

3. Programm

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKEN	ASSEMBLERCODE	BEMERKUNGEN
ØØØØ	Ø1 ØE ØØ		LD BC,ØØØEH	
Ø3	C5		PUSH BC	
Ø4	E1		POP HL	
Ø5	22 ØØ Ø1		LD (Ø1ØØH),HL	
Ø8	C9		RET	

Zunächst wird das BC-Register mit 14 (dez.) geladen. Durch PUSH BC und POP HL wird das BC-Register in das HL-Register copiert und dessen Inhalt in den Speicherzellen 256 und 257 (dez.) abgelegt.
Nach CALL Ø : ? DEEK(256) muß also 14 ausgegeben werden.

7. Inkrementier- und Dekrementier-Befehle

Als erster Arithmetik-Befehl wird ein Befehl vorgestellt, mit dessen Hilfe der Inhalt eines Registers oder Doppelregisters um Eins erhöht (increase) bzw. vermindert (decrease) werden kann. Die entsprechenden Assemblercodes werden durch INC bzw. DEC gekennzeichnet.

1. **INC r** erhöht den Inhalt des Registers r um 1.

DEC r vermindert den Inhalt des Registers r um 1.

Befehlscodes:

INC A	3C
INC B	Ø4
INC C	ØC
INC D	14
INC E	1C
INC H	24
INC L	2C

DEC A	3D
DEC B	Ø5
DEC C	ØD
DEC D	15
DEC E	1D
DEC H	25
DEC L	2D

2. **INC rr** erhöht den Inhalt des Doppelregisters rr um 1.

DEC rr vermindert den Inhalt des Doppelregisters rr um 1.

Befehlscodes:

INC BC	Ø3
INC DE	13
INC HL	23
INC SP	33

DEC BC	ØB
DEC DE	1B
DEC HL	2B
DEC SP	3B

3. | INC (HL) | 34 | | DEC (HL) | 35 |

erhöht bzw. vermindert den Inhalt der Speicherzelle, deren Adresse im Doppelregister HL steht.

4. Programm

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKEN	ASSEMBLERCODE	BEMERKUNGEN
ØØØØ	3E FF		LD A, FF H	A mit 255 (dez.)laden
Ø2	21 1Ø ØØ		LD HL,ØØ1ØH	HL mit 16 (dez.)laden
Ø5	77		LD(HL),A	Zelle 16 mit 255 lad.
Ø6	23		INC HL	HL auf 17 erhöhen
Ø7	77		LD (HL),A	Zelle 17 mit 255 lad.
Ø8	35		DEC (HL)	Inhalt von Zelle 17 um 1 vermindern
Ø9	C9		RET	Rücksprung

Die Wurzel

Nr. 12

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

22. Jahrgang ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Crofton's Seilliniensatz

Wir stellen uns die folgende Aufgabe:

Gegeben seien zwei ebene konvexe Polygone P und Q, die keine gemeinsamen Punkte haben sollen. Ein Polygon P (bzw. Q) heißt konvex, wenn für je zwei Punkte aus P (bzw. Q) ihre gesamte Verbindungsstrecke innerhalb von P (bzw. Q) liegt.
Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zufällig auf P geworfene Gerade g auch Q schneidet?

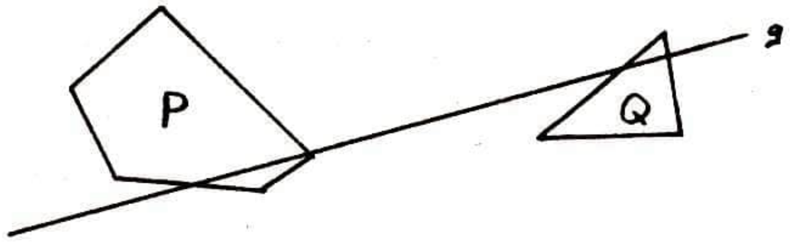


Bild 1.

Um diese Frage beantworten zu können, werden wir zuerst eine geeignete Parameterdarstellung für Geraden angeben (siehe Abschnitt 1). Auf dieser Grundlage werden dann für die Anzahl der Schnittpunkte aller Geraden, die eine Strecke (siehe Abschn. 2), mehrere Strecken, einen Streckenzug bzw. ein konvexes Polygon (siehe Abschnitte 3 und 4) schneiden, Maßzahlen berechnet. Damit läßt sich der Menge aller Geraden, die sowohl das Polygon P als auch Q treffen, ebenfalls eine Zahl zuordnen (siehe Abschnitt 5), mit deren Hilfe wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen können.

1. Parameterdarstellung von orientierten Geraden

Wir wollen zuerst einer Geraden g in eineindeutiger Weise Parameter zuordnen. Die Parametrisierung von Geraden etwa durch die Länge des Lotes vom Nullpunkt auf die Gerade und den Winkel $0 \leq \varphi < 2\pi$, den das Lot mit der Abszisse bildet, ist für Geraden, die durch den Koordinatenursprung gehen, nicht eindeutig. Deshalb betrachten wir Geraden mit einer Orientierung, wie sie in Bild 2 durch Pfeilspitzen angedeutet ist. Eine orientierte Gerade ist eindeutig bestimmt durch einen auf ihr liegenden

Punkt (x_o, y_o) und ihre Richtung $(-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ ist dadurch der Winkel φ eindeutig festgelegt. Für diesen Winkel φ definieren wir

$$p := x_o \cos\varphi + y_o \sin\varphi .$$

Dabei ist p unabhängig von der Wahl des Punktes (x_o, y_o) auf g. Wir veranschaulichen uns die Parameter p und φ für ein Paar g und $\bar{g}$ von entgegengesetzt orientierten Geraden an der folgenden Skizze.

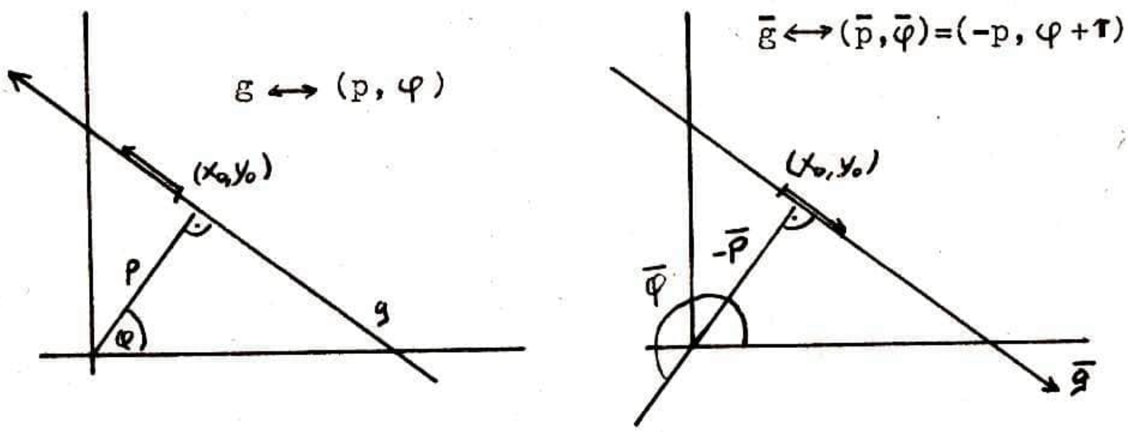


Bild 2.

Dabei ist der Parameter p die in Abhängigkeit von der Orientierung mit einem Vorzeichen versehene Länge des Lotes vom Koordinatenursprung auf die Gerade.
Jeder orientierten Geraden ist in eindeutiger Weise ein Parameterpaar (p, φ) mit $-\infty \leq p \leq \infty$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ zugeordnet (Bild 3).

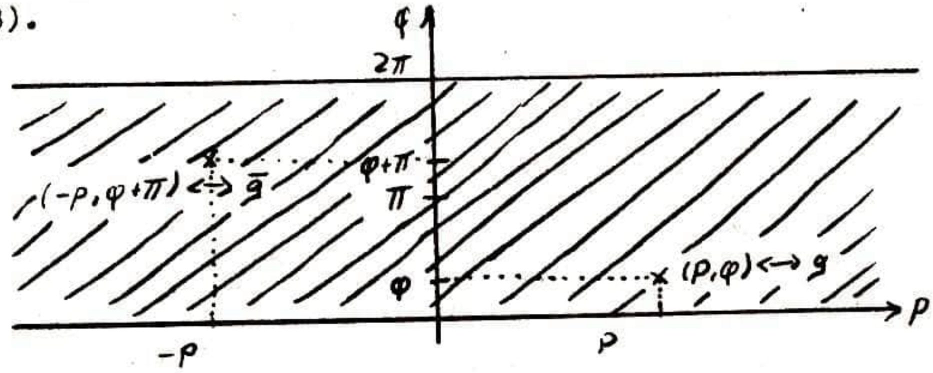


Bild 3.

Umgekehrt gehört zu jedem Punkt (p, φ) aus dem schraffierten Streifen genau eine orientierte Gerade g.

2. Schnitt mit einer Strecke

Wir betrachten nun die Strecke S mit den Endpunkten (0,0) und (1,0) und ordnen ihr eine Zahl zu, die als Maßzahl für die Menge aller orientierten Geraden, die S schneiden, aufgefaßt werden soll.

Für festen Winkel φ trifft g die Strecke S genau dann, wenn für den vorzeichenbehafteten Abstand p gilt:

$$0 \leq p \leq l\cos\varphi\ , \quad \text{falls } \cos\varphi \geq 0$$

$$l\cos\varphi \leq p \leq 0\ , \quad \text{falls } \cos\varphi \leq 0 \quad \text{(s. Bild 4).}$$

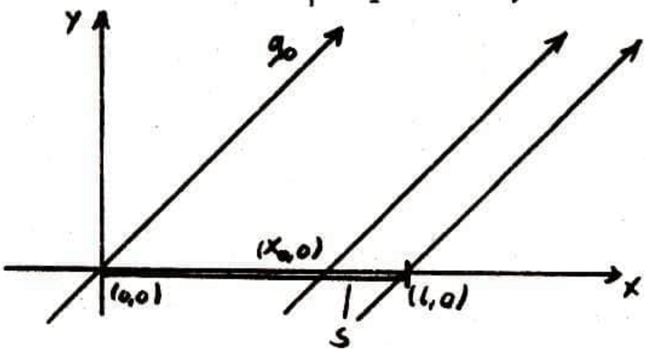


Bild 4.

Das folgt unmittelbar aus $p = x_0 \cos\varphi$ und dem Umstand, daß alle zu g_0 parallelen Geraden mit $0 \leq x_0 \leq 1$ die Strecke S schneiden. Wegen der Eindeutigkeit der verwendeten Parametrisierung entspricht jedem p, das die obige Bedingung erfüllt, genau eine orientierte Gerade. Für die Anzahl aller orientierten Geraden, die S schneiden, liegt es deshalb nahe, die Länge $l|\cos\varphi|$ als Maß zu benutzen.

Als Maßzahl für die Menge aller zu g_0 parallelen nichtorientierten Geraden, die S schneiden, setzen wir damit für alle φ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$:

$$\mu_\varphi(S) := \frac{1}{2}\int_0^{l|\cos\varphi|} dp = \frac{1}{2}\, l|\cos\varphi|.$$

Durch Integration über alle φ; $0 \leq \varphi < 2\pi$; erhalten wir

$$\mu(S) := \int_0^{2\pi} \mu_\varphi(S)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l|\cos\varphi|} dp\,d\varphi = 2l;$$

eine Größe, die wir als Maßzahl für die Menge aller Geraden, die S schneiden, interpretieren können und die im Parameterraum der Hälfte der schraffierten Fläche entspricht (Bild 5).

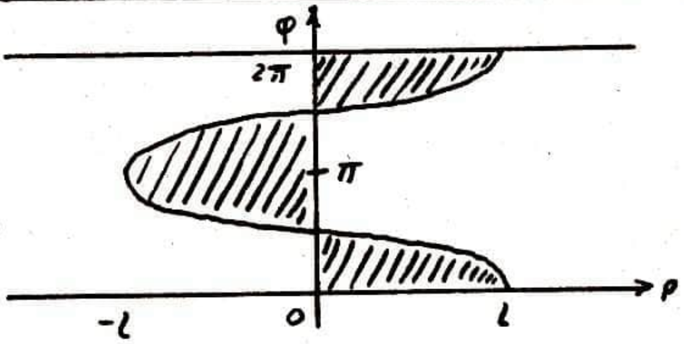


Bild 5.

Die Bestimmung einer Maßzahl für alle Geraden, die eine Strecke schneiden, ist so auf eine Flächenberechnung im Parameterraum zurückgeführt worden.

Der Wert $\mu(S)$ ändert sich nicht, wenn S in der Ebene bewegt wird. Man sagt: die Maßzahl $\mu(S)$ ist invariant gegenüber Bewegungen in der Ebene.

Falls eine Gerade die Strecke S enthält, ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{3\pi}{2}$ und $\mu_\varphi(S) = 0$. Wenn S entartet ist und nur aus dem Nullpunkt besteht, ist $l=0$ und damit auch $\mu_\varphi(S) = 0$. Diese Fälle müssen also nicht weiter berücksichtigt werden.

3. Schnitt mit mehreren Strecken

Nun seien k Strecken $S_1,\ldots,S_k$ mit den Längen $l_1,\ldots,l_k$ gegeben (siehe Bild 6).

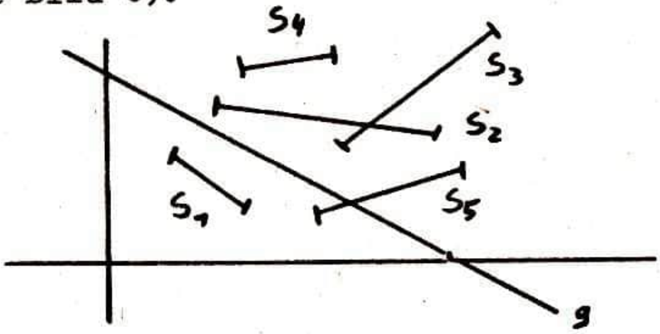


Bild 6.

Für jede Gerade g seien $f_i(g) = 1$, wenn g die Strecke S_i schneidet und sonst 0 für $i=1,\ldots,k$.

Für fast alle Geraden ist die Anzahl $\bar{n}(g)$ der Schnittpunkte von g mit $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$:

$$\bar{n}(g) = \sum_{i=1}^{k} f_i(g).$$

Als Maß für die Anzahl der Schnittpunkte aller Geraden mit $S_1 \cup \dots \cup S_k$ setzen wir nun

$$n(S_1 \cup \dots \cup S_k) := \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{n}(g(p,\varphi))dpd\varphi$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \int_0^{2\pi} \int_0^{l_i/\cos\varphi/} f_i(g(p,\varphi))dpd\varphi.$$

Durch $g(p,\varphi)$ wird ausgedrückt, daß wir die Gerade g durch die Parameter p und φ repräsentieren.
Geraden, die eine Strecke enthalten oder durch einen Schnittpunkt von Strecken gehen, haben keinen Einfluß auf die Maßzahl, wie wir uns im vorigen Abschnitt überlegt haben.

Damit erhalten wir für die Anzahl der Schnittpunkte fast aller Geraden mit $S_1 \cup \dots \cup S_k$:

$$n(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k) = 2 \sum_{i=1}^{k} l_i.$$

Das Ergebnis wird besonders anschaulich, wenn wir die Strecken $S_1, \dots, S_k$ zu einem (offenen oder geschlossenen) Streckenzug zusammenfügen (siehe Bild 7).

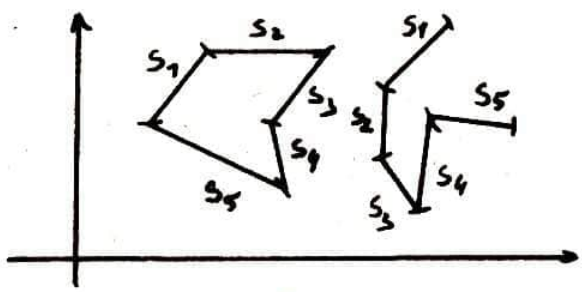


Bild 7.

Es sei also $C := S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ ein Streckenzug der Länge $L = \sum_{i=1}^{k} l_i$. Dann ist die Anzahl n(C) der Schnittpunkte fast aller Geraden, die die Kurve C schneiden,

$$n(C) = 2L$$

und hängt nur von der Länge der Strecken, nicht aber von ihrer Lage ab.

4. Schnitt mit einem konvexen Polygon

Wenn C der Rand eines konvexen Polygons P ist (siehe Bild 8), schneidet eine Gerade g die Kurve C entweder in zwei Punkten (vgl. g_1), in einem Eckpunkt (vgl. g_2), oder sie enthält eine der Strecken $S_1, \ldots, S_k$ (vgl. g_3).

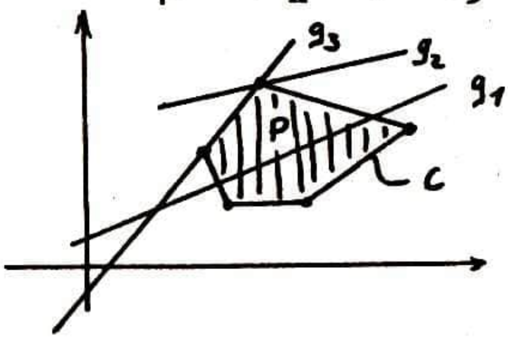


Bild 8.

Die letzten beiden Fälle können wir wegen der Feststellung, daß die Maßzahlen für Geraden in diesen Lagen Null sind, vernachlässigen.
Wir können also als Maßzahl für die Menge aller Geraden, die P treffen, die Hälfte der Anzahl der Schnittpunkte von Geraden mit dem Rand von P nehmen.
Es sei also P ein konvexes Polygon (d. h. mit zwei Punkten aus P liegt ihre gesamte Verbindungsstrecke auch in P), dessen Umfang U(P) = L ist. Dann ist die Größe $\mu(P)$ mit

$$\mu(P) = U(P)$$

eine Maßzahl für die Menge aller Geraden, die P schneiden.

(Fortsetzung folgt)

Dr. S. Nagel
Sektion Mathematik
Bereich Kybernetik

Einführung in die Assembler-Programmierung
(Fortsetzung aus 7/8 · 88 und 11 · 88)

8. Unterprogramme

Wenn Programmteile mehrmals abgearbeitet werden sollen oder um ein Programm übersichtlicher zu gestalten, empfiehlt es sich, mit Unterprogrammen zu arbeiten. In BASIC werden Unterprogramme durch GOSUB Zeilen-Nr. aufgerufen. Weiterhin müssen Unterprogramme mit RETURN abgeschlossen werden. Ähnlich funktioniert das auch in der Maschinensprache. Der entsprechende Assemblerbefehl zum Aufruf eines Unterprogramms lautet CALL.

CALL NN	bewirkt:

1. Sprung in ein Unterprogramm mit der Startadresse NN,
2. vor dem Absprung wird die Rücksprungadresse gerettet, die auf dem Stack abgelegt wird.

Befehlscode:

CALL NN	CD

Weiterhin muß ein Unterprogramm immer mit RET abgeschlossen werden.

RET

bewirkt, daß die beiden obersten Bytes vom Stack abgehoben und in das PC-Register (Programmzähler) geladen werden.

Von der Wirkungsweise entspräche diesen Befehlen also:

$$\text{CALL NN} \longleftrightarrow \begin{cases} \text{PUSH PC} \\ \text{JP NN} \end{cases}$$

$$\text{RET} \longleftrightarrow \text{POP PC}$$

Für die Arbeit mit Unterprogrammen ergibt sich somit als wichtige Erkenntnis:

ACHTUNG: Daten, die innerhalb eines Unterprogrammes mit PUSH auf den Stack gebracht werden, müssen vor dem Rücksprung auch wieder durch POP abgehoben werden, da sonst bei RET eine falsche Rücksprungadresse benutzt wird!!!

Unser Kenntnisstand über Maschinenprogrammierung gestattet uns schon ein wenig, mit Unterprogrammen des BASIC-Interpreters bzw. des Betriebssystems HC-CAOS zu experimentieren. Wir beschränken uns hier auf den KC 85/2/3.

Bisher waren wir immer gezwungen, Daten durch poken bzw. peeken zu übergeben bzw. auszugeben. In Verbindung mit der Funktion USR(X), die ebenfalls dem Aufruf von Maschinenprogrammen dient und den Subroutinen des BASIC-Interpreters

CALL C96F - Parameterübergabe von BASIC-Variabler an das DE-Register

CALL DØ1B - Parameterübergabe von Register A,B an die BASIC-Variable,

kann man das Problem auch anders lösen.

5. Programm

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKEN	ASSEMBLERCODE	BEMERKUNGEN
ØØØØ	CD 6F C9		CALL C9 6F	; Param. an DE
Ø3	7A		LD A,D	; D in A laden
Ø4	43		LD B,E	; E in B laden
Ø5	CD B1 DØ		CALL DØ B1	; A,B an BASIC
Ø8	C9		RET	

Bemerkung:

Vor Aufruf der USR-Funktion muß allerdings noch die Anfangsadresse des Maschinenprogramms in die Adresse 3Ø4H (L-Teil) 3Ø5H (H-Teil) eingetragen werden, was in unserem Beispiel durch DOKE 772,Ø erfolgt. ?USR(X) leistet jetzt das gleiche wie ?INT(X).

Im Begleitmaterial zum KC 85/3 im Kapitel "Systemübersichten" werden die Unterprogramme des Betriebssystems erläutert. Der Aufruf der Unterprogramme erfolgt über sogenannte Programmverteiler (PV). Z. B. wird der Programmverteiler 1 durch CALL FØØ3H aufgerufen und die gewünschte UP-Nr. wird nach dem CALL-Befehl durch ein "definition-byte" (DEFB) angegeben. Führen wir das an einem weiteren Beispiel-Programm vor. Das Unterprogramm mit der UP-Nr. ØØH dient der Zeichenausgabe auf dem Bildschirm, wobei der Zeichencode des gewünschten Zeichens im A-Register zu stehen hat. Da bei der Zeichenausgabe auf den Bildwiederholspeicher (IRM) zurückgegriffen wird, muß dieser erst zugeschaltet und vor der Rückkehr in das BASIC- wieder abgeschaltet werden. Dazu dienen die beiden Unterprogramme

CALL FØ18H - zuschalten des IRM
CALL FØ1BH - abschalten des IRM.

6. Programm

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKEN	ASSEMBLERCODE	BEMERKUNGEN
ØØØØ	CD 18 FØ		CALL FØ18H	; IRM ein
Ø3	CD 6F C9		CALL C96FH	; Param. an DE
Ø6	7B		LD A,E	; E in A laden
Ø7	CD Ø3 FØ		CALL FØØ3H	; Aufruf PV1
ØA	ØØ		DEFB	; UP-Nr. ØØH
ØB	CD 1B FØ		CALL FØ1BH	; IRM aus
ØE	C9		RET	

Nach DOKE 772,Ø können wir uns überzeugen, daß A=URS(X) dem Befehl ?CHR(X) gleichwertig ist.

Vielleicht ist jetzt mancher etwas neugierig geworden und wüßte gern, wie Def.-Bytes im laufenden Programm ausgewertet werden können. Das ist relativ einfach zu machen. Man bedenke, daß nach Aufruf eines Unterprogramms durch CALL NN die Rücksprungadresse auf dem Stack liegt.Will man aber mit Def.-Bytes arbeiten, so ist das aber genau die Adresse des 1. Def.-Bytes. Man kann also diese Bytes lesen und muß dann nur die Rücksprungadresse entsprechend modifizieren. Machen wir uns das an einem einfachen Beispiel klar.

7. Programm

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKEN	ASSEMBLERCODE	BEMERKUNGEN
ØØØØ	CD 1Ø ØØ		CALL UP	;Aufruf UP zur Bestimmung des Def.-Bytes
Ø3	FF		DEFB	;bel. Def.-Byte vorgebbar
Ø4	47		LD B,A	;A in B laden
Ø5	3E ØØ		LD A,ØØH	;A Null setzen
Ø7	CD B1 DØ		CALL DØB1	;Übergabe von A,B an BASIC
ØA	C9		RET	
ØØ1Ø	E1	UP	POP HL	;Rücksprungadr. in HL
11	7E		LD A,(HL)	;Def.-Byte nach A
12	23		INC HL	;Rücksprungadr. erhöhen
13	E5		PUSH HL	;neue Rücksprungadr. auf Stack
14	C9		RET	

Zur Vorbereitung der USR-Funktion führen wir wieder DOKE 772,Ø durch.
Wird nun ?USR(1) ausgeführt, so wird das Def.-Byte, das in Speicherzelle 3 steht, ausgegeben. In unserem Fall also FFH ≙ 255 (dez.).

Bemerkung:
Durch Benutzung von Marken wird das Programm besser strukturiert und übersichtlicher.

Fortsetzung folgt

Dr. Joachim Puhl
Sektion Mathematik
Bereich Analysis

U 61 Man bestimme, für welche a das Gleichungssystem

$$x^2+y^2 = 2(1+a)$$
$$(x+y)^2 = 14$$

genau zwei Lösungen hat.

U 62 Die natürlichen Zahlen p und q seien teilerfremd. Das Intervall $[0,1]$ teilt man in p+q gleichlange Intervalle. Man zeige, daß in jedem dieser Intervalle, außer den zwei Begrenzungsintervallen, genau eine der p+q-2 Zahlen

$$\frac{1}{p},\frac{2}{p},\ldots,\frac{p-1}{p},\frac{1}{q},\frac{2}{q},\ldots,\frac{q-1}{q}$$

liegt.

U 63 Gegeben sei eine Folge von 2n+1 Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ derart, daß für alle k 1,2,3,... 2n-1

$$a_k \geq \frac{1}{2}(a_{k-1}+a_{k+1})$$ gilt.

Man zeige, daß folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n-1}}{n} \geq \frac{a_0+a_2+a_4+\ldots+a_{2n}}{n+1}$$

Für welche Folgen gilt die Gleichheit?

U 64 Welches ist der kleinste Wert des Verhältnisses der Flächeninhalte zweier gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke, wobei die Ecken des einen Dreiecks auf 3 verschiedenen Seiten des anderen Dreiecks liegen?

U 65 Man löse das Gleichungssystem

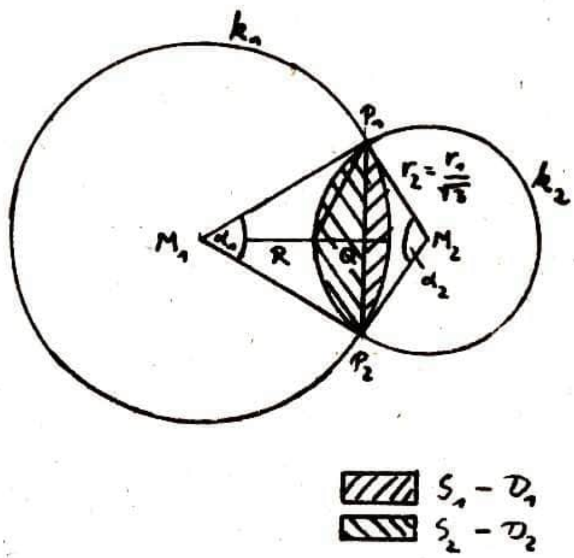
$$z^2+1 = 2\,xy$$
$$x^2-1 = 2yz\;\; 1-4xy$$

U 66 2

Назовём число уравновешенным, если в его десятичной записи некоторое начало совпадает с некоторым концом (например, числа 1981, 17217 уравновешенны, а число 1314134 нет).
Докажите, что существует число, которое после приписывания к нему справа любой из 10 цифр становится уравновешенным.

Einsendeschluß: 1. 3. 1989

Lösungen der DDR-Olympiade (Klassenstufe 10, Fortsetzung)



4. Die Mittelpunkte von k_1, k_2 seien M_1 bzw. M_2. Die Gerade durch M_1, M_2 schneide P_1P_2 in Q. Das Dreieck $P_1P_2M_1$ ist gleichseitig mit $\overline{P_1P_2} = \overline{M_1P_1} = \overline{M_1P_2} = r_1 = 10$ cm; daher gilt $\overline{\sphericalangle P_1M_1P_2} = \overline{\sphericalangle P_2P_1M_1} = \overline{\sphericalangle P_1P_2M_1} = 60^\circ$. Da die Verbindungsgerade der Kreismittelpunkte die Schnittsehne halbiert und auf ihr senkrecht steht, ist $\overline{QP_1} = \frac{1}{2} r_1$ und $\overline{\sphericalangle M_2QP_1} = 90^\circ$; hieraus und aus $\overline{M_2P_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} r_1$ folgt nach dem Satz des Pytha-

goras

$$\overline{M_2Q} = r_1\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\, r_1 = \frac{1}{2}\, r_2.$$

Verlängert man M_2Q über Q hinaus um seine eigene Länge bis R, so liegt folglich R auf k_2; außerdem aber ist P_1Q im Dreieck M_2RP_1 sowohl Höhe als auch Seitenhalbierende. Dieses Dreieck ist daher auch mit $\overline{M_2P_1} = \overline{RP_1}$ gleichschenklig, also sogar gleichseitig. Da Q (als Punkt der Schnittsehne) innerhalb k_1 liegt, M_2 aber nach Voraussetzung außerhalb k_1, folgt wegen $r_2 < r_1$, daß R innerhalb k_1 liegt. Daraus und aus der Symmetrie bezüglich M_1M_2 ergibt sich: Es gilt

$$A = (S_1 - D_1) + (S_2 - D_2)$$

mit folgenden Bezeichnungen:

S_1: Flächeninhalt des Kreissektors $\overset{\frown}{P_1P_2M_1}$ von k_1 mit dem Zentriwinkel der Größe $\alpha_1 = \overline{\sphericalangle P_1M_1P_2} = 60^\circ$,

S_2: Flächeninhalt des Kreissektors $\overset{\frown}{P_1P_2M_2}$ von k_2 mit dem Zentriwinkel der Größe $\alpha_2 = \overline{\sphericalangle P_1M_2P_2} = 2 \cdot \overline{\sphericalangle P_1M_2R} = 120^\circ$,

D_1: Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2M_1$,

D_2: Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2M_2$, wegen $\triangle M_2QP_2 \cong \triangle M_2QP_1 \cong \triangle RQP_1$ auch Flächeninhalt des Dreiecks M_2RP_1.

Hiernach und wegen $r_2^2 = \frac{1}{3}\, r_1^2$ erhält man nach den Flächeninhaltsformeln für Kreissektoren und gleichseitige Dreiecke

$$S_1 = \frac{1}{6}\pi r_1^2,\quad D_1 = \frac{1}{4}\, r_1^2\sqrt{3},\quad S_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2,\quad D_2 = \frac{1}{4}\, r_2^2\sqrt{3},$$

$$A = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{\pi}{9} - \frac{1}{12}\sqrt{3}\right)r_1^2$$

$$= \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \cdot 100\ \text{cm}^2.$$

Hinweise zu anderen Lösungsmöglichkeiten:
Für das Ergebnis können auch mehrere andere Formelschreibweisen akzeptiert werden, z.B. $A = \left(\frac{250}{9}\pi - \frac{100}{3}\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$.

An einigen Stellen kann statt mit den obigen Begründungen auch mit Sätzen über das Drachenviereck $M_1P_1M_2P_2$, die gleichschenkligen Dreiecke $P_1P_2M_1$, $P_1P_2M_2$ oder die Symmetrie bezüglich M_1M_2 argumentiert werden.

Bei der Herleitung zu Lageaussagen und zur Flächenzusammensetzung kann anstelle verbaler Begründung ein stärkerer Bezug auf die Abbildung akzeptiert werden.
Bei manchen Herleitungsvarianten wird aber auch die Beachtung weiterer Lageaussagen nötig. Argumentiert man z.B. damit, daß man S_1+S_2 als "Vierecksflächeninhalt D_1+D_2 mit nochmals hinzugefügtem Teilinhalt A" deutet (und damit zu $A = (S_1+S_2) - (D_1+D_2)$ gelangt), so wird verwendet, daß das gemeinsame Flächenstück der beiden Kreise eine Teilfläche des Vierecks $M_1P_1M_2P_2$ ist.

5. Man kann zunächst zeigen: Wenn in einem Wort w die Anzahl a der Buchstaben S nicht durch 3 teilbar ist, dann gilt dies auch für jedes Wort, das nach den Regeln (1) bis (4) aus w gebildet wird: Für die Regeln (1) und (4) gilt es, weil sich a nicht ändert. Für die Regel (3) gilt es, weil a entweder unverändert bleibt oder um 3 verkleinert wird.
Für die Regel (2) gilt es, weil sich a verdoppelt, wobei aus einer Zahl der Form $a = 3n+1$ oder $a = 3n+2$ (n ganzzahlig) eine Zahl der Form $2a = 3\cdot 2n + 2$ bzw. $2a = 3\cdot(2n+1) + 1$ entsteht. Damit folgt: Durch (beliebig oft ausgeführte) Anwendung der Regeln (1) bis (4) kann aus dem Wort ES (mit a=1) niemals das Wort ER (mit a=0) erhalten werden.

6. 1) Es gilt stets
$$(a_i - b_i)^2 \geqq 0,$$
also $\quad 2a_ib_i \leqq a_i^2 + b_i^2 \quad (i=1,2,3,4,5).$

Addiert man diese fünf Ungleichungen, so ergibt sich die linke der behaupteten Ungleichungen.

2) Da nach Voraussetzung
$$a_i \leqq 10 \leqq 2b_i, \text{ also } 2b_i - a_i \geqq 0,$$
und $\quad b_i \leqq 10 \leqq 2a_i, \text{ also } 2a_i - b_i \geqq 0$

gilt, folgt ferner
$$(2b_i - a_i)(2a_i - b_i) \geqq 0,$$
$$5a_ib_i - 2b_i^2 - 2a_i^2 \geqq 0,$$

$$a_i^2 + b_i^2 \leq \frac{5}{2} a_i b_i \quad (i=1,2,3,4,5).$$

Addiert man diese fünf Ungleichungen, so ergibt sich die rechte der behaupteten Ungleichungen.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung"
Leiter: Stefan Posselt
Chefredakteur: Eckhard Stein
Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M. Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932