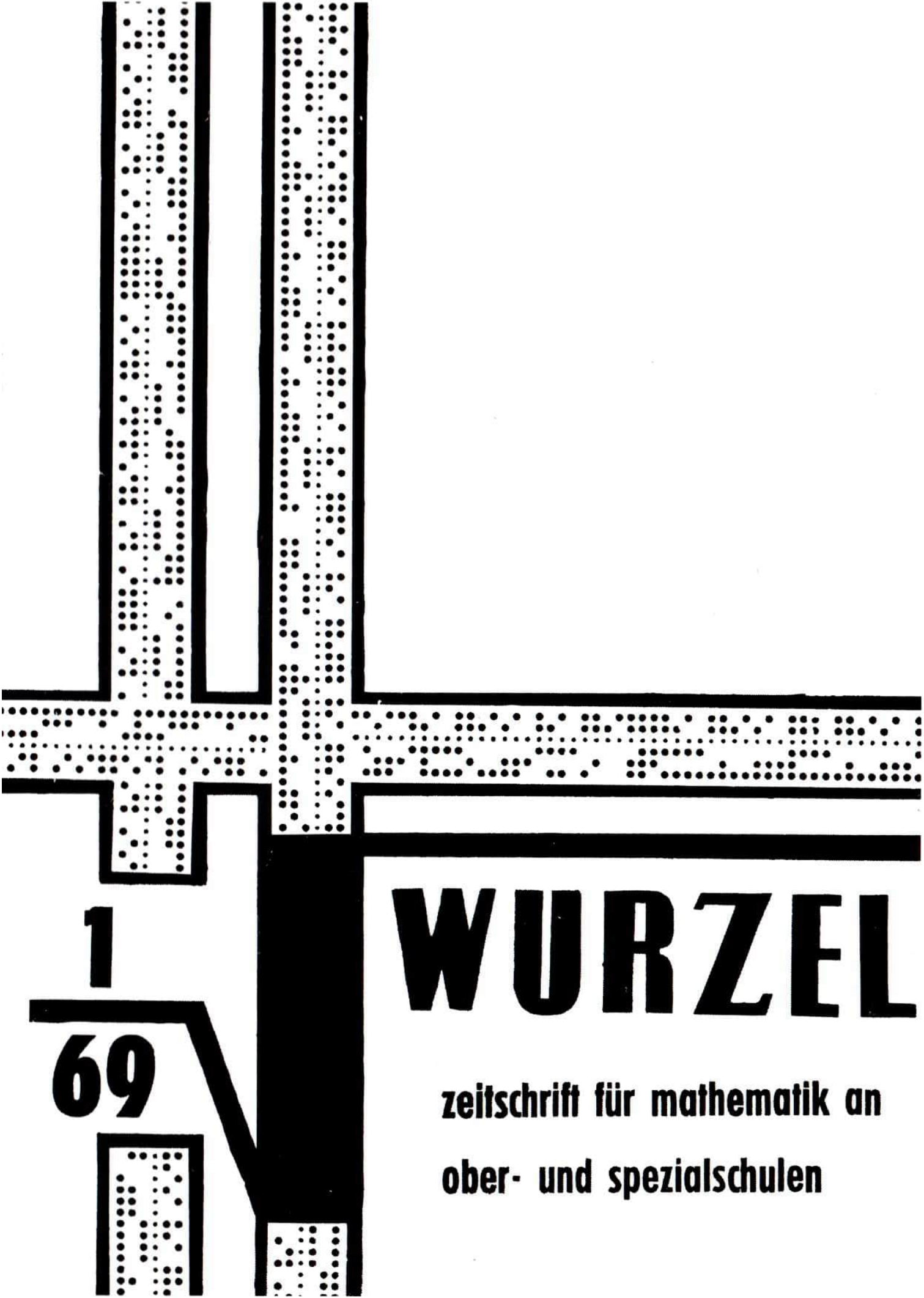




1

69

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom FDJ -Aktiv der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Dr. Eike Hertel, Wolfgang Ulbrich
Mitarbeiter: W.Kiefer, N.Kuse, R.Lorenz, L.Staiger,
E.Taubald, R.Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Aus der mathematischen Kybernetik II

2. Die Maus im Labyrinth

Nach dem Vorbild des amerikanischen Mathematikers und Nachrichtentechnikers Claude E. Shannon stellen wir die Aufgabe, eine automatische Maus zu konstruieren, die in einem gegebenen Labyrinth ein Stück Speck sucht, das an irgend einer Stelle dieses Labyrinths liegt.

Zunächst wird das Labyrinth beschrieben. Es bestehe aus lauter Zellen, deren Grundrisse kongruente gleichseitige Dreiecke seien, und je zwei dieser Zellen mögen längs einer ganzen Wand aneinander grenzen. Einige dieser Wände mögen Türen besitzen. Wir setzen ferner voraus, daß an jeder Wand, durch die keine Tür führt, ständig eine rote Lampe brennt. Über jeder Tür seien drei Lampen angebracht, eine grüne, eine blaue und eine rote. Diese Lampen dienen der Maus zur Orientierung im Labyrinth. Bevor sie ihre Suchaktion beginnt, sollen alle Türen grün beleuchtet sein. Wenn die Maus eine grün beleuchtete Tür passiert, soll diese Tür hinfort blau beleuchtet sein. Passiert sie eine blau beleuchtete Tür, so soll das blaue Lämpchen verlöschen und das rote soll leuchten. Von der Maus fordern wir noch, daß sie so konstruiert ist, daß sie sich stets geradlinig vom Mittelpunkt einer Zelle zum Mittelpunkt einer benachbarten Zelle mit sofortiger 60° -Drehung nach rechts bewegt, so daß sie die rechte Wand der erreichten Zelle vor sich hat.

Die Zelle, in der die Maus zu Beginn der Suche sitzt, möge wenigstens eine Tür besitzen.

3. Algorithmen

Die zu konstruierende Maus darf nicht planlos umherirren, sondern sie muß durch ein Steuerorgan nach einer vom Konstrukteur wohl-durchdachten Vorschrift durch das Labyrinth geleitet werden. Dieses Steuerorgan kann als ein informationsverarbeitendes System aufgefaßt werden. Es nimmt nämlich in jeder Zelle Informationen über die Farbe der dort leuchtenden Lampen auf und muß diese Informationen in Steuerinformationen, die das weitere Handeln der Maus veranlassen, umsetzen. Theoretische Voraussetzung für eine erfolgreiche Suche ist das ausführliche Studium des vom Steuerorgan zu leistenden Informationsverarbeitungsprozesses. Zur mathematischen Beschreibung von Informationsverarbeitungsprozessen eignen sich die Algorithmen (siehe dazu "Wurzel"-Nr.10/68 "Einführung in die Rechentechnik"). Eine genaue Untersuchung des Algorithmenbegriffes wird in der Algorithmentheorie, einem Teilgebiet der mathematischen Kybernetik, durchgeführt. Zur Erläuterung des Algorithmenbegriffes kehren wir noch einmal zum Regler-Bügeleisen zurück und stellen die von ihm geleistete Informationsverarbeitung algorithmisch dar. Dazu führen wir die Operatoren

A: Ausschalten der Heizspirale

E: Einschalten der Heizspirale

und die Bedingungen

α : Die Temperatur des Bügeleisens liegt unterhalb der unteren Grenztemperatur

β : Die Temperatur des Bügeleisens liegt oberhalb der oberen Grenztemperatur

ω : Enten sind Säugetiere

ein. Die Bedingung ω ist, wie man sieht, nie erfüllt. Der Algorithmus der Informationsverarbeitung im Regler-Bügeleisen kann damit kurz folgendermaßen dargestellt werden:

(1) $\overset{3}{\downarrow} \alpha \overset{1}{\uparrow} E \overset{7}{\downarrow} \beta \overset{2}{\uparrow} A \overset{2}{\downarrow} \omega \overset{3}{\uparrow}$

In dieser Folge kommen zwei Sorten numerierter Pfeile vor. Auf jede Bedingung muß unbedingt ein nach oben gerichteter numerierter Pfeil folgen, zu dem irgendwo in der Folge genau ein nach unten gerichteter Pfeil mit der gleichen Nummer existieren muß. Der Algorithmus ist nun von links nach rechts abzuarbeiten. Dabei werden abwärts gerichtete Pfeile nicht beachtet. Stößt man auf einen Operator, so ist diese Operation abzuarbeiten. Gelangt man zu

einer Bedingung, so ist zu prüfen, ob sie erfüllt ist oder nicht. Ist sie erfüllt, so beachte man den Pfeil $\uparrow$ hinter dieser Bedingung nicht und gehe zum nächsten Buchstaben über. Ist sie nicht erfüllt, so setze man die Arbeit bei $\downarrow$ fort.

Der Algorithmus (1) ist also folgendermaßen zu lesen: Zunächst prüfe man α , d.h. man prüfe, ob das Eisen zu kalt ist. Wenn ja, führe man E aus (Heizen), wenn nicht, prüfe man β , d.h. man stelle fest, ob das Eisen zu heiß ist. Wenn ja, stelle man die Heizung ab (Operation A wird ausgeführt), wenn nicht, wird man durch die stets unerfüllte Bedingung w wieder an den Anfang des Algorithmus verwiesen, und dieselbe Arbeit beginnt erneut.

4. Der Suchalgorithmus der Maus

Einen passenden Algorithmus (es gibt mehrere) beschreiben wir zunächst in Worten durch folgende 5 Festlegungen:

1. Befindet sich der Speck in der betrachteten Zelle, so soll die Maus das erfolgreiche Ende ihrer Suche melden.
2. Besitzt die Zelle zwei blau beleuchtete Türen, so soll sie durch die Tür, durch die sie gekommen ist, zurückkehren. (Man beachte, daß der Algorithmus den Fall ausschließt, daß eine Zelle mit drei blau beleuchteten Türen betreten wird.)
3. Besitzt die Zelle eine grün und nicht zwei blau beleuchtete Türen, so soll sie durch eine grün beleuchtete Tür weitergehen.
4. Besitzt die Zelle genau eine blau und keine grün beleuchtete Tür, so soll sie durch die Tür mit der blauen Lampe gehen.
5. Sind alle Lampen rot, so soll sie anhalten und das erfolglose Ende ihrer Suche melden.

Der Nachweis dafür, daß durch Befolgung der in den Punkten 1 bis 5 zusammengefaßten Vorschrift wirklich der Speck gefunden wird, falls die Zelle mit dem Speck von der Anfangszelle überhaupt erreichbar ist, soll hier nicht geführt werden, weil dies kein kybernetisches, sondern ein graphentheoretisches Problem ist.

Als nächstes wollen wir diesen Algorithmus in formaler Gestalt notieren. Dazu führen wir folgende Abkürzungen ein:

Operatoren:

S: Die Maus soll melden, daß sie den Speck gefunden hat.

L: Die Maus soll eine 120° -Drehung nach links machen.

R: Die Maus soll eine 120° -Drehung nach rechts machen.

V: Die Maus soll durch die Tür gehen, vor der sie steht (mit sofortiger 60° -Drehung nach rechts (siehe oben)).

E: Die Maus soll das erfolglose Ende der Suche melden.

Bedingungen:

σ : Der Speck befindet sich in der betrachteten Zelle.

β : Die Tür vor der Maus ist blau beleuchtet.

γ : Die Tür vor der Maus ist grün beleuchtet.

ω : Enten sind Säugetiere.

Damit kann nun der Algorithmus als Folge von Operatoren und Bedingungen so dargestellt werden:

(2) $\downarrow \sigma \uparrow S \omega \uparrow \downarrow \gamma \uparrow L \gamma \uparrow V \omega \uparrow \downarrow \beta \uparrow L V \omega \uparrow \downarrow R V \omega \uparrow \downarrow \beta \uparrow$
 $R V \omega \uparrow \downarrow L \gamma \uparrow V \omega \uparrow \downarrow L V \downarrow \gamma \uparrow V \omega \uparrow \downarrow \beta \uparrow L \gamma \uparrow V \omega \uparrow$
 $\downarrow R V \omega \uparrow \downarrow L \gamma \uparrow V \omega \uparrow \downarrow \beta \uparrow V \omega \uparrow \downarrow E \downarrow$

Dem Leser wird empfohlen, sich an Hand einiger selbstgewählter Labyrinthsituationen davon zu überzeugen, daß dieser Algorithmus genau das in den Punkten 1 bis 5 formulierte Verfahren zur Durchforschung des Labyrinths darstellt.

Dr. G. Wechsung

Leiter der Abteilung Mathem. Kybernetik
 an der Sektion Mathematik
 der Friedr.-Schiller-Universität
 Jena

Aufgaben (Serie 1/69)

(A25) Man löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} y - 2xy = 4 \quad (1) \\ -x + y - 4x^2y = 2 \quad (2) \end{array}$$

(A26) p_1 und p_2 seien Primzahlzwillinge ($p_1 > 10$). Man beweise, daß dann stets das Produkt

$$(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_2 + 1)$$

durch 120 teilbar ist.

(A27) Es seien $a > 0$ und $b > 0$. Man zeige, daß dann gilt

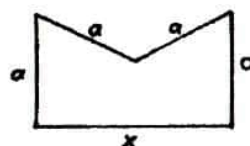
$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

(A28) Man beweise, daß in jedem Dreieck ABC gilt

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{SB}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{SC}}{\overline{CC'}} = 1,$$

wenn S ein Punkt im Inneren des Dreiecks ist und A' , B' , C' die Schnittpunkte der Strecken $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ mit den Geraden durch S und A , B , C sind.

- (A29) Für welchen Wert x hat die gegebene Fläche den größten Flächeninhalt?



- (A30) In einem Dreieck teilen die Höhe h_c , die Winkelhalbierende w_γ und die Seitenhalbierende s_c den Winkel γ in vier gleiche Teile. Wie groß sind die drei Winkel α , β und γ des Dreiecks?

Preisauflage (P. 25)

In einer Ebene sei ein Winkel α gegeben. Auf der Winkelhalbierenden liege der Punkt P . Von P gehe ein zur Winkelhalbierenden senkrechter Strahl aus und werde an den Schenkeln des Winkels α reflektiert. Wieviel Reflexionen finden statt (Die Schenkel seien unendlich lang.)?

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisauflage erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisauflage" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Drehungen eines Würfels I

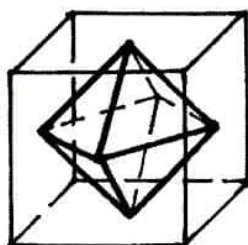
Beim Spielwürfel sind die Zahlen Eins bis Sechs immer in ganz bestimmter Anordnungsweise aufgetragen. Die Summe gegenüberliegender Augenzahlen ist stets sieben, und schaut man von oben auf den eine Sechs zeigenden Würfel, so liegen die übrigen Zahlen im Uhrzeigersinn gesehen meist in der Reihenfolge zwei - drei - fünf - vier. Offenbar kann man die Zahlen aber auch anders auf

dem Würfel anordnen. Wieviele Möglichkeiten gibt es? Jemand möchte zu jeder solchen Möglichkeit je einen Würfel herstellen, er würde dann lauter sich durch die Anordnung der Zahlen unterscheidende Würfel bekommen. Er überlegt hierfür so: "Für die Bezifferung der ersten Fläche habe ich sechs mögliche Zahlen, für die zweite Fläche bleiben dann fünf (das gibt insgesamt schon $6 \cdot 5$ Möglichkeiten), für die dritte Fläche kann ich noch unter vier Zahlen wählen, für die vierte unter drei, für die fünfte unter zwei, und die sechste Fläche bekommt die übriggebliebene Zahl. Insgesamt gibt es $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten, ich kann also 720 verschiedene Würfel herstellen", und er baut auf Grund dieser Überlegung die Würfel. Am Schluß stellt er jedoch fest, daß sich ein großer Teil der Würfel in der Anordnung der Zahlen nicht unterscheidet!

Um dieser Sache auf den Grund zu gehen, überlegen wir, wie man zwei Würfel auf gleiche Anordnung der Zahlen hin überprüft. Man bringt sie doch - wenigstens in Gedanken - zunächst ungeachtet der Bezifferung zur Deckung und versucht dann durch Bewegungen des einen Würfels eine Übereinstimmung der Augenzahlen herbeizuführen. Die Bewegungen, an die wir dabei denken, sind Drehungen, bei denen sich die Lage der einzelnen Flächen zwar ändert, der Würfel als Ganzes aber die alte Lage unverändert wieder einnimmt (z.B. 90° -Drehung um die Mittelsenkrechte einer Fläche). Es ist klar, daß man stets z. B. die beiden Einsen zur Deckung bringen kann. Bei den weiteren Bewegungen müssen dann die Fläche mit der Eins und demzufolge die ihr gegenüberliegende Fläche als Ganzes ungeändert bleiben, man kann also nur noch um die die beiden Flächenmittelpunkte verbindende Achse drehen, und zwar um 90° , 180° und 270° . Wenn so keine Übereinstimmung der Augenzahlen erreichbar ist, dann sind die Würfel sicher verschieden beziffert. Nun ist auch zu sehen, inwiefern sich unser Würfelabrikant verrechnet hat: Er hat nicht berücksichtigt, daß sich viele der nach seiner Vorschrift hergestellten Würfel durch Bewegung zur Deckung bringen lassen. Die richtige Zahl der verschiedenen Anordnungen bekommt man erst, wenn man diese Bewegungen mit berücksichtigt. Man könnte so überlegen: Eine erste Fläche bekommt die Zahl Eins, für die gegenüberliegende Fläche gibt es dann fünf Möglichkeiten der Bezifferung, die

sicher alle auf Anordnungen führen, die sich nicht durch Bewegungen ineinander überführen lassen. Für die übrigen vier Flächen sind alle Bezifferungen auszusuchen, die sich nicht durch Drehung um die Mittelsenkrechte der Eins-Fläche ineinander überführen lassen. Das bedeutet, daß man eine der vier Flächen willkürlich mit einer der vier noch verfügbaren Zahlen besetzen kann, und daß alle möglichen Anordnungen der drei übrigen Zahlen auf den drei restlichen Flächen – es gibt sechs Möglichkeiten hierfür – dann zu nicht ineinander überführbaren Anordnungen führen. Insgesamt stellen wir fest: Es gibt $5 \cdot 6 = 30$ verschiedene Möglichkeiten, einen Würfel mit den sechs Augenzahlen zu besetzen. Übrigens, wenn die Summe gegenüberliegender Zahlen immer sieben sein soll, gibt es nur zwei Möglichkeiten, beide kann man auf den handelsüblichen Würfeln verwirklicht finden.

Bei einem mathematischen Schülerwettbewerb in der Schweiz wurde folgende Aufgabe gestellt (veröffentlicht in der Zeitschrift "Elemente der Mathematik", Januar 1968): "Die Seitenflächen eines regulären Oktaeders werden durch acht gegebene Farben gefärbt, wobei jede Fläche eine verschiedene Farbe erhalten muß. Wieviele nicht äquivalente Färbungen sind möglich? (Äquivalent bedeutet durch Rotation überführbar)". Diese Aufgabe kann man



auch so formulieren: Auf wieviel verschiedene Weisen kann man auf die acht Ecken eines Würfels acht Farben verteilen, wobei solche Färbungen nicht verschieden sind, die sich durch Drehung des Würfels ineinander überführen lassen? Denn die Flächenmittelpunkte eines Würfels bilden die Ecken eines regulären Oktaeders,

und jede Bewegung, die den Würfel in sich überführt, führt auch das Oktaeder in sich über. Bei der Lösung dieser Aufgabe analog zu den obigen Überlegungen wird man die 120° -Drehungen um die Raumdiagonale des Würfels zu berücksichtigen haben, sie führen offenbar den Würfel in sich über und lassen dabei sogar zwei Ecken fest. Dem Leser wird empfohlen, die Aufgabe jetzt schon zu lösen, obwohl die folgenden Ausführungen einen Lösungsweg zeigen werden.

W. Börner

wissenschaftlicher Assistent
an der Sektion Mathematik der FSU Jena

Lösungen

(A5):

$$x + y = u + v \quad (\text{I})$$

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \quad (\text{II})$$

Durch Umstellung erhält man

$$x - u = v - y \quad (\text{Ia})$$

$$x^2 - u^2 = v^2 - y^2 \quad (\text{IIa})$$

$$(x+u)(x-u) = (v+y)(v-y)$$

Ist hier $x-u = 0$, dann gilt $u = x$ und nach (Ia) $v = y$,
d.h. es gilt immer $x^n + y^n = u^n + v^n$.

Ist $x-u \neq 0$, dann kann man die Gleichung durch $x-u = v-y$
dividieren und erhält $x+u = v+y$. Wegen (Ia) ergibt sich dann
 $x = v$ und $u = y$, damit gilt auch hier immer

$$x^n + y^n = u^n + v^n.$$

(A6): Der Flächeninhalt des Flächenstückes QBC ist gleich einem
Viertel des Flächeninhalts A der
tönnchenförmigen Fläche.

$$A_{QBC} = A_{ABC} - 2A_{ABQ}$$

Das Flächenstück ABC ist ein
Kreissektor. Seine Fläche berechnet

$$\text{ sich nach: } A = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2, \alpha = \angle CAB$$

$\angle DAE$ ist rechter Winkel, $\overline{AB} = a$

und $\overline{BR} = \frac{a}{2}$, daher $\angle BAR = 30^\circ$

und wegen $\angle BAR = \angle CAD$ ist auch $\angle CAB = \alpha = 30^\circ$.

$$\text{Somit gilt } A_{ABC} = \frac{\pi}{12} a^2$$

$\overline{AQ}$ halbiert den Winkel α , daraus folgt $\angle QAB = \frac{\alpha}{2} = 15^\circ$

$$A_{ABQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AQ} \cdot \overline{AB} \cdot \sin(\angle QAB)$$

$$\text{für } \overline{AQ} \text{ erhält man durch Pythagoras } (\overline{AQ})^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\text{folglich } \overline{AQ} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \text{ mithin } A_{ABQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a \cdot \sin 15^\circ$$

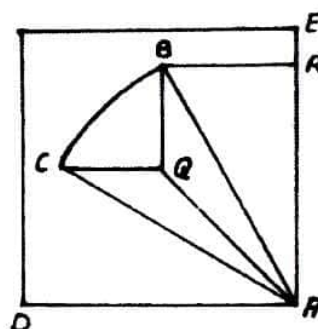
Für $\sin 15^\circ$ erhält man durch eine einfache Beziehung am re-
gulären 12-Eck $\sin 15^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ und somit

$$A_{ABQ} = a^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{a^2}{4 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\text{Es ist dann } A_{QBC} = \frac{\pi}{12} a^2 - 2 \frac{a^2}{4 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = a^2 \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2 \cdot \sqrt{2}} \right)$$

$$\text{Wegen } A = 4A_{QBC} \text{ folgt hieraus } A = a^2 \left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3} \right)$$

(Aufgabe (A6) und Lösung eingesandt von P. Czeizner, Halle)



(A7): Zuerst wird das Problem in einer beliebigen Ebene E, die $\overline{AB}$ enthält, untersucht. In dieser Ebene seien das gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ sowie sein Umkreis K konstruiert.

Behauptung: Liegt ein Punkt P auf dem Kreisbogen $K_1 = \widehat{AB}$ des Umkreises K, auf dem C nicht liegt, so gilt $\angle APB = 120^\circ$.

Beweis: Das Viereck APBC ist Sehnenviereck, $\angle APB$ und $\angle ACB$ sind gegenüberliegende Innenwinkel. Daraus folgt:

$$\angle APB + \angle ACB = 180^\circ$$

Nach Voraussetzung gilt aber $\angle ACB = 60^\circ$. Folglich muß gelten: $\angle APB = 120^\circ$.

Spiegelt man K_1 an AB, so entsteht der Kreisbogen K_1' . Analog muß für alle Punkte P' auf K_1' gelten:

$$\angle AP'B = 120^\circ$$

K_1 und K_1' stellen somit den geometrischen Ort aller gesuchten Punkte in einer Ebene dar.

Da dieser Sachverhalt für alle Ebenen, die $\overline{AB}$ enthalten, zutrifft, ergibt sich der gesuchte geometrische Ort als die Rotationsfläche, die durch K_1 (mit AB als Rotationsachse) erzeugt wird.

(A8): Eine gerade Zahl läßt sich aus den drei gewürfelten genau dann zusammenstellen, wenn mindestens eine gerade Zahl unter den gewürfelten ist. Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeit dafür, daß lauter ungerade Zahlen gewürfelt wurden.

Für einen Würfel gilt: Die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Zahl zu würfeln, ist $\frac{1}{2}$, da in der Hälfte aller möglichen Fälle ungerade Zahlen auftreten.

Da sowohl mit dem ersten als auch mit dem zweiten und dritten Würfel ungerade Zahlen gewürfelt werden müssen, sind somit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ aller Fälle günstig für das Würfeln von lauter ungeraden Zahlen.

Somit fällt in $\frac{7}{8}$ aller Fälle mindestens eine gerade Zahl, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß sich aus den drei gewürfelten Zahlen eine gerade Zahl zusammenstellen läßt, beträgt $\frac{7}{8}$.

(A10): Es sei $a_0 = a_{00} + \dots + a_{0m} \cdot 10^m$ und die Differenz d der Folge habe die Form $d = d_0 + \dots + d_r \cdot 10^r$. Dann gilt

$$a_n = a_0 + nd$$

Setzen wir $n_1 = 10^k$ und $n_2 = 10^{k+1}$ mit $k > m$. so erhalten wir in beiden Fällen die gleiche Ziffernsumme s_z , nämlich $s_z = a_{00} + \dots + a_{0m} + d_0 + \dots + d_r$.

Setzen wir nun $a_{n_2} = a_{n_1} + 10^{k+r} \cdot d$, so ist

$$s_z = a_{00} + \dots + a_{0m} + 2(d_0 + \dots + d_r).$$

Die Folge der s_z ist somit für $d \neq 0$ weder konstant noch arithmetisch.

(A11): Durch Division der beiden oberen Gleichungen erhalten wir

$\frac{b}{a} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$. Wir formen diese Beziehung durch Additionstheoreme um:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = \tan \frac{\alpha+\beta}{2} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha+\beta)}{1 + \cos(\alpha+\beta)}} \end{aligned}$$

Daraus folgt $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1 - \cos(\alpha+\beta)}{1 + \cos(\alpha+\beta)}$

und nach Umformungen ergibt sich

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Da nach Voraussetzung $a^2 + b^2 \neq 0$ ist, existiert dieser Ausdruck.

(A12): Es gibt mindestens zwei Primzahlen der Form $4n+3$, z.B. 3, 103.

Es werde nun angenommen, es gebe nur endlich viele Primzahlen der Form $4n+3$. Sie werden mit $p_1, p_2, \dots, p_n$ bezeichnet. Es sei nun $P = 4 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n - 1$

P hat die Form $4k+3$ und kann daher nicht nur Primteiler der Form $4n+1$ haben. Da aber laut Annahme nur $p_1, \dots, p_n$ als Primzahlen der Form $4k+3$ existieren, müßte P durch ein p_i ($1 \leq i \leq n$) teilbar sein. Das ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, daß $P+1$ durch $p_1, \dots, p_n$ teilbar ist. Somit existieren nicht nur endlich viele Primzahlen der Form $4k+3$.

(A13): Wir zeigen zuerst durch indirekten Beweis, daß die Zahlen $m, 2m, 3m, \dots, km$ bei Division durch k paarweise verschiedene Reste lassen.

Es gelte $i < k$ und $j < k$, sowie $i < j$. Dann lassen sich die Zahlen $i \cdot m$ und $j \cdot m$ in der Form $i \cdot m = n_1 k + q$ und $j \cdot m = n_2 k + p$ darstellen. Es sei $q = p$. Dann erhalten wir

$$j \cdot m - i \cdot m = (j - i)m = (n_2 - n_1)k$$

Das ist ein Widerspruch, da $(j - i) \geq 1$ und $(k, m) = 1$ ist. Da wir aber genau k Zahlen haben, so erhalten wir alle Reste, die möglich sind $(0, \dots, k-1)$.

Wenn nun der Rest von n bei Division durch k gleich r ist, so gibt es unter den Zahlen $m, 2m, \dots, km$ genau eine, die den Rest $(k-r)$ läßt. Es sei dies xm , dann gilt

$$\begin{aligned} n + mx &= (n_1 k + r) + (n_2 k + (k-r)) \\ &= (n_1 + n_2 + 1)k \end{aligned}$$

(A16): Wir benennen die in der Aufgabe vorkommenden Aussagen wie folgt: " $a > 0$ ": A

" $a = b$ ": B

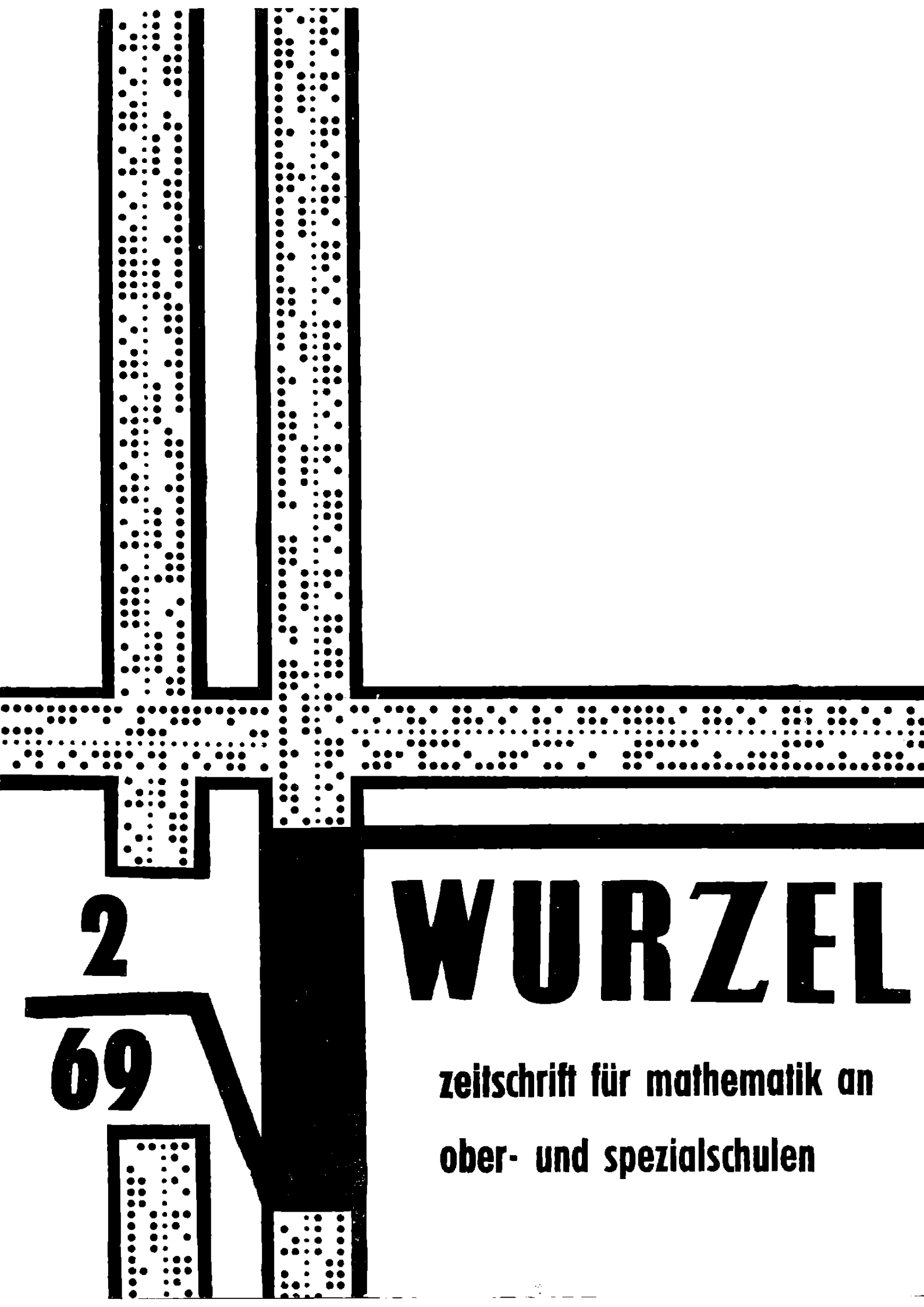
" $a < b$ ": C

Dann ist zu prüfen, ob $(A \rightarrow B \rightarrow C) \wedge C \rightarrow \overline{A \vee B}$ eine aussagenlogische Identität darstellt ($\rightarrow$ bedeutet "entweder - oder"). Wir stellen die Wahrheitwerttabelle auf:

A	B	C	$A \rightarrow B \rightarrow C$	$(A \rightarrow B \rightarrow C) \wedge C$	$\overline{A \vee B}$	Gesamtaussage
W	W	W	F	F	F	W
W	W	F	F	F	F	W
W	F	W	F	F	F	W
W	F	F	W	F	F	W
F	F	F	F	F	W	W
F	W	F	W	F	F	W
F	F	W	W	W	W	W
F	W	W	F	F	F	W

Der Schluß ist also richtig.

Ab Januar 1969 ist der 10. des folgenden Monats Einsendeschluß für die Preisaufgaben.



2

69

WURZEL

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

Herausgegeben vom FDJ -Aktiv der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Dr. Eike Hertel, Wolfgang Ulbrich
Mitarbeiter: W.Kiefer, N.Kuse, R.Lorenz, L.Staiger,
E.Taubald, R.Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Aus der mathematischen Kybernetik III

5. Automaten

Mit der Angabe des Algorithmus in der obigen Form (2) ist der Informationsverarbeitungsvorgang des Steuerorgans der zu konstruierenden Maus hinreichend genau bekannt. Es kann nun das Steuerorgan selbst entworfen werden, welches diesen Algorithmus abarbeitet.

Die Maus wird mit Hilfe geeigneter technischer Vorrichtungen in der Lage sein, eine 120° -Rechtsdrehung, eine 120° -Links-drehung, eine Vorwärtsbewegung von Zelle zu Nachbarzelle (s.o.) auszuführen und erfolgreiche bzw. erfolglose Suche zu melden. Die Konstruktion solcher Bauteile ist keine kybernetische sondern eine technische Frage und wird hier als unproblematisch angesehen. Daß die Maus aber in der richtigen Weise von diesen Organen Gebrauch machen kann, muß durch einen sogenannten Steuerautomaten gewährleistet werden, der genau den Algorithmus (2) verwirklicht.

Bevor man die praktische Konstruktion eines solchen Automaten in Angriff nehmen kann, muß man seine Arbeitsweise theoretisch beschreiben. Dazu eignet sich der rein mathematische Begriff des abstrakten Automaten. (Abstrakte Automaten werden in einem eigenen Zweig der mathematischen Kybernetik, der Automatentheorie, gesondert untersucht.) Zur Erläuterung dieses Begriffes stellen wir eine Zwischenbetrachtung an. Das Steuerorgan der Maus wird ausführlich im nächsten Abschnitt beschrieben.

Wenn man einen konkreten Automaten von mathematischer Warte aus beschreibt, legt man keinen Wert darauf, daß dieser Automat aus

Schaltern, Knöpfen, Tasten, Drähten, Lämpchen, Spulen, Röhren, Widerständen u.dgl. besteht, sondern man stellt fest, daß er gewisse Eingabewerte aufnehmen, gewisse Ausgabewerte ausgeben und gewisse innere Zustände annehmen kann und daß er im Prinzip folgendermaßen arbeitet:

Befindet er sich im Zustand z und bekommt er die Eingabe x , so geht er in einen neuen, von z und x abhängigen Zustand $z' = f(z, x)$ über und gibt ein von z und x abhängiges Element $y = g(z, x)$ aus. Ist dies geschehen, so ist der Automat bereit, eine weitere Eingabeinformation auf die gleiche Weise zu verarbeiten. Das Ergebnis dieser abstrahierenden Betrachtungen fassen wir noch einmal zusammen: Zu einem abstrakten Automaten A gehören folgende fünf Dinge:

1. Eine Menge Z von inneren Zuständen von A .
2. Eine Menge X von möglichen Eingabeelementen von A .
3. Eine Menge Y von möglichen Ausgabeelementen von A .
4. Eine Funktion f , die jedem Paar $[z, x]$, $z \in Z$ und $x \in X$, einen neuen Zustand $z' = f(z, x)$ zuordnet (die sogenannte Überföhrungsfunktion).
5. Eine Funktion g , die jedem Paar $[z, x]$, $z \in Z$ und $x \in X$, ein Ausgabeelement $y = g(z, x)$ zuordnet (die sogenannte Ausgabefunktion).

Man schreibt dann $A = [Z, X, Y, f, g]$.

Die Funktionen f und g kann man entweder durch Tabellen oder durch sogenannte Graphen angeben. Wir wollen beides an einem einfachen Beispiel erläutern und fassen dazu eine gewöhnliche Wechselschaltung mit zwei Schaltern A und B als Automaten auf. Jeder Schalter kann zwei Stellungen annehmen, die wir mit 0 und 1 bezeichnen wollen. Insgesamt sind daher vier Zustände möglich, nämlich $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Der Zustand $(0,0)$ bedeutet: A und B befinden sich beide in der Stellung 0, $(0,1)$ bedeutet: A befindet sich in Stellung 0, B befindet sich in Stellung 1, usw. Wir setzen noch voraus, daß die Birne genau in den Zuständen $(0,0)$ und $(1,1)$ brennt. Unser Automat hat zwei Eingabeelemente a und b (a bedeutet eine Betätigung von A , b eine Betätigung von B) und zwei Ausgabeelemente h und d (h : hell, die Birne brennt, d : dunkel, die Birne brennt nicht). Die Funktionen f und g dieses Automaten können durch folgende Tabellen

dargestellt werden, die ohne weiteres verständlich sind:

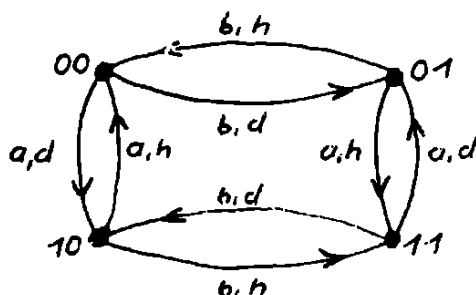
f:

	a	b
00	10	01
01	11	00
10	00	11
11	01	10

g:

	a	b
00	d	d
01	h	h
10	h	h
11	d	d

Bei der graphischen Darstellung ordnet man jedem Zustand z einen ebenfalls mit z bezeichneten Knotenpunkt eines Graphen zu (siehe Skizze). Zwei derartige Knoten z_1 und z_2 werden genau dann durch einen von z_1 nach z_2 weisenden Pfeil mit der Aufschrift x,y verbunden, wenn bei Eingabe von x auf den Zustand z_1 der Zustand z_2 entsteht und dabei y ausgegeben wird. In unserem Falle ergibt sich damit folgendes Bild:



In einer letzten Fortsetzung soll der Steuerautomat der Maus näher beschrieben werden.

Dr. G. Wechsung

Leiter der Abteilung Mathem. Kybernetik
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Aufgaben (Serie 2/69)

(A31) Wieviel verschiedene Teiler besitzt die Zahl

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

(A32) Man konstruiere ein Dreieck, von dem eine Seite, die Summe der beiden anderen sowie die Höhe auf eine dieser Seiten gegeben sind.

(A33) Gegeben sei eine Folge $\{b_n\}$ durch $b_0 = 3$ und $b_n = b_{n-1} + 2n - 1$.

Wie groß ist die Summe der ersten n Glieder?

(A34) Man zeige, daß $(m - 1)! + 1$ nur dann durch m teilbar ist, wenn m Primzahl oder gleich 1 ist.

(A35) Man zeige, daß für alle α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) gilt:

$$\cot \frac{\alpha}{2} > 1 + \cot \alpha$$

(A36) Man bestimme alle Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen, die folgender Gleichung genügen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

Preisauflage (P. 26)

In einer Ebene seien die Punkte P_1, P_2, P_3 fest vorgegeben. Ein Punkt P erfülle die Bedingung, daß ein Quadrat mit der gegebenen Seitenlänge a so konstruiert werden kann, daß P_1, P_2, P_3, P auf jeweils verschiedenen Quadratseiten liegen. Man gebe die Menge aller Punkte P an.

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisauflage erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

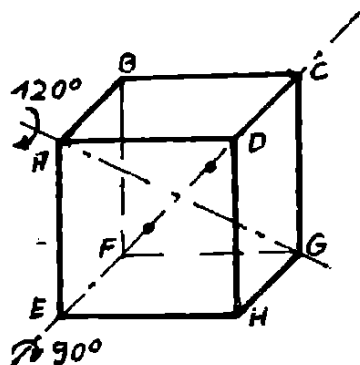
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisauflage" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Drehungen eines Würfels II

Zur Lösung der in Teil I angegebenen Aufgabe über die Drehungen eines Würfels betrachten wir die Bewegungen, die einen Würfel als Ganzes in sich überführen. Zwei Sorten solcher Bewegungen wurden schon genannt: 1. Drehung um die Verbindungsachse der Mittelpunkte gegenüberliegender Flächen, Drehwinkel sind 90° , 180° und 270° , 2. Drehung um die Raumdiagonalen, Drehwinkel sind 120° und 240° . Von der ersten Sorte gibt es pro Achse drei Drehungen und, da drei Achsen möglich sind, insgesamt neun Drehungen. Von

der zweiten Sorte gibt es pro Raumdiagonale zwei, insgesamt acht Drehungen. Wenn man einen Würfel zuerst um eine Raumdiagonale und anschließend um eine Achse durch Flächenmittelpunkte dreht, so ergibt sich insgesamt eine Bewegung, bei der der Würfel als Ganzes wiederum fest geblieben ist. Wir führen diese "Zusammensetzung von Bewegungen" einmal an einem Beispiel an Hand der Figur durch. Die 120° -Drehung um die in der Figur ange-



gebene Achse wird durch folgende Tabelle beschrieben:

Punkt:	A	B	C	D	E	F	G	H
geht über in:	A	D	H	E	B	C	G	F

Und zur 90° -Drehung um die eingezeichnete Achse gehört die folgende Tabelle:

Punkt:	A	B	C	D	E	F	G	H
geht über in:	D	C	G	H	A	B	F	E

Um zu sehen, in welchen Punkt z.B. B bei der Zusammensetzung der beiden Drehungen übergeht, entnimmt man der ersten Tabelle: B geht über in D; der zweiten Tabelle entnimmt man, daß dann D bei der zweiten Drehung in H übergeht. Also geht bei der zusammengesetzten Bewegung B in H über. Insgesamt findet man für die Zusammensetzung folgende Tabelle:

Punkt:	A	B	C	D	E	F	G	H
geht über in:	D	H	E	A	C	G	F	B

Bei der Veranschaulichung dieser Bewegung findet man, daß es sich um eine 180° -Drehung handelt, deren Achse die Verbindung der Mittelpunkte der Kanten AD und FG ist. Dies ist eine dritte Sorte von Bewegungen, die den Würfel in sich überführen. Insgesamt haben wir jetzt

- 8 Drehungen um die Raumdiagonalen
- 9 Drehungen um die Verbindungsgeraden von Mitten gegenüberliegender Flächen
- 6 Drehungen um die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Kanten,

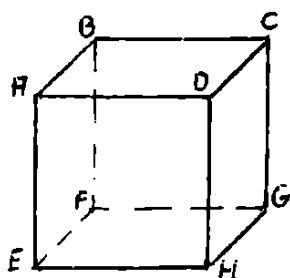
insgesamt 23 Drehungen. Da die Drehung um 0° auch den Würfel als Ganzes fest läßt, wollen wir sie dazuzählen, so daß wir von 24 Drehungen reden können. Wir wollen nun zeigen, daß es keine weiteren Drehungen gibt, d.h., wir beweisen den folgenden Satz:

S a t z: Es gibt genau 24 Drehungen, die den Würfel als Ganzes  in sich überführen.

Dazu treffen wir drei Vorbereitungen:

- Wir stellen einige spezielle 180° -Drehungen zusammen, mit denen wir anschließend operieren wollen. Es sei
 α_B die 180° -Drehung um die Verbindung der Mitten von AB und GH
 α_D " " " " " " " " " " AD FG
 α_E " " " " " " " " " " AE CG
 α_G " " " " " " " " " " DH BF
 α_C " " " " " " Mittelsenkrechte der Fläche ABCD
 α_F " " " " " " " " " " ABFE
 α_H " " " " " " " " " " ADHE
 α_A die Drehung mit dem Drehwinkel 0° .

Die Bezeichnung haben wir so gewählt, daß immer derjenige Punkt in A übergeht, der als Index bei α steht; der Leser



soll sich hiervon bei jeder der angegebenen Drehungen an Hand der Figur selbst überzeugen.

- Wir stellen fest: Es gibt genau drei Bewegungen, bei denen der Punkt A fest bleibt: die 120° - und die 240° -Drehung um die Raumdiagonale AG und natürlich die 0° -Drehung; wir be-

zeichnen sie mit α_1 , α_2 und α_0 .

- Wenn man irgendeine 180° -Drehung mit sich selbst zusammensetzt, so ergibt sich die 0° -Drehung. Denn wenn man zweimal um dieselbe Achse um 180° dreht, so sind insgesamt Anfangs- und Endlage der einzelnen Würfecken gleich.

Nun beweisen wir den Satz. Es sei β eine beliebige Bewegung, die den Würfel in sich überführt. Bei β geht der Punkt A in einen wohlbestimmten Eckpunkt X über. Setzt man jetzt β mit der oben mit aufgezählten Drehung α_X zusammen, indem man zuerst β , dann α_X anwendet, so geht bei dieser Zusammensetzung A in sich selbst über, denn bei β geht A nach X, bei α_X geht dann X nach A. Also ist diese Zusammensetzung eine von den in Vorbereitung 2. genannten Bewegungen, d.h., gleich α_1 oder gleich α_2 oder gleich α_0 .

Wir schreiben hierfür:

$$\beta \circ \alpha_X = \alpha_i, \quad i = 0 \text{ oder } 1 \text{ oder } 2,$$

wobei die linke Seite gelesen werden kann: " β zusammengesetzt mit α_X ". Jetzt wenden wir noch einmal die Drehung α_X an und

$$\text{bekommen} \quad (\beta \circ \alpha_X) \circ \alpha_X = \alpha_i \circ \alpha_X.$$

Man darf auf der linken Seite die letzten beiden "Faktoren" zusammenfassen, sie bedeuten ja Zusammensetzung von α_X mit sich selbst, d.h., wie wir in 3. feststellten, die Drehung um 0° . Wenn man aber β mit der 0° -Drehung zusammensetzt, so erhält man nur β .

$$\text{Somit gilt} \quad \beta = \alpha_i \circ \alpha_X.$$

Diese Formel bedeutet, daß sich eine beliebige den Würfel als Ganzes festlassende Bewegung aus einer der drei Drehungen α_1 und einer der acht Drehungen α_A bis α_H zusammensetzen läßt. Und das wiederum bedeutet, daß es nur $3 \cdot 8 = 24$ Möglichkeiten für eine Bewegung β gibt. Damit ist der Satz bewiesen.

Jetzt können wir noch einmal auf das eingangs genannte Problem der Anordnung der Augenzahlen auf den Würfel Flächen zurückkommen. Bei einer die Drehungen des Würfels nicht berücksichtigenden Überlegung waren wir auf 720 Möglichkeiten gekommen. Inzwischen wissen wir, daß es 24 Drehungen des Würfels in sich gibt. Die 720 Zuordnungen der Zahlen zu den Flächen gruppieren sich demnach in Klassen zu je 24, die jeweils innerhalb einer Klasse alle durch Drehung auseinander hervorgehen. Somit gibt es $720 : 24 = 30$ verschiedene nicht ineinander überführbare Bezifferungen. Dem Leser wird es nicht schwerfallen, in analoger Weise auch die Aufgabe über die Oktaederfärbung zu lösen.

W. Börner

wissenschaftlicher Assistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Lösungen

$$\begin{aligned} (A14): \text{ Es ist } & \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} \\ &= |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1 \end{aligned}$$

Um die Beträge auflösen zu können, macht man eine Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} \text{I. Fall:} \quad & \sqrt{x-1} < 2 \\ & 2 - \sqrt{x-1} + 3 - \sqrt{x-1} = 1 \\ & \sqrt{x-1} = 2 \end{aligned}$$

Widerspruch!

$$\begin{aligned} \text{II. Fall:} \quad & 2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3 \\ & \sqrt{x-1} - 2 + 3 - \sqrt{x-1} = 1 \\ & 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III. Fall:} \quad & \sqrt{x-1} > 3 \\ & \sqrt{x-1} - 2 + \sqrt{x-1} - 3 = 1 \\ & \sqrt{x-1} = 3 \end{aligned}$$

Widerspruch!

Als Lösungsmenge ergibt sich $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$ oder $5 \leq x \leq 10$.

(A18): Es ist zu zeigen, daß gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{2^{14}}\right)^{1024} < \frac{16}{15}$$

Es gilt: für $n > 0$

$$2^{3n+2} - 2^{2n+2} < 2^{3n+2} - 2^{2n+2} + 2^n$$

$$(2^n - 1)2^{2n+2} < (2^{2n+2} - 2 \cdot 2^{n+1} + 1)2^n$$

$$\begin{aligned} \frac{2^{2n+2}}{(2^{n+1} - 1)^2} &< \frac{2^n}{2^n - 1} \\ \left(\frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}\right)^{2^{k+1}} &< \left(\frac{2^n}{2^n - 1}\right)^{2^k} \end{aligned}$$

dann gilt:

$$\frac{16}{15} = \left(\frac{2^4}{2^4-1}\right)^{2^0} > \left(\frac{2^5}{2^5-1}\right)^{2^1} > \dots > \left(\frac{2^{13}}{2^{13}-1}\right)^{2^9} > \left(\frac{2^{14}}{2^{14}-1}\right)^{2^{10}}$$

$$2^{28} - 1 < 2^{28}$$

$$\frac{2^{14} + 1}{2^{14}} < \frac{2^{14}}{2^{14}-1}$$

Daraus folgt:

$$\left(1 + \frac{1}{2^{14}}\right)^{1024} < \frac{16}{15}$$

(Die Lösung wurde eingesandt von Joachim Puhl,
EOS Arnstadt)

(P.21.1): (eingesandt von H.-D. Gronau, EOS Neubrandenburg)

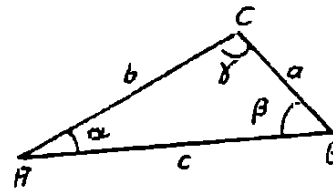
Es sei $\beta = 2\alpha$, hieraus folgt $b > a$

Es gibt somit 3 Fälle:

$$b = a+1 = c+2 \quad (1)$$

$$b = c+1 = a+2 \quad (2)$$

$$c = b+1 = a+2 \quad (3)$$



Nach dem Sinussatz folgt:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha$$

$$\text{und: } \frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\pi - 3\alpha)}{\sin \alpha} = 4 \cos^2 \alpha - 1$$

man erhält:

$$\frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - 1 \quad \text{oder} \quad ac = b^2 - a^2 \quad (4)$$

$$\text{Aus (1) und (4) folgt: } a_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Diese Lösungen entfallen, da sie nicht im Bereich der ganzen Zahlen liegen.

$$\text{Aus (2) und (4) folgt: } a_3 = 4 \quad \text{und} \quad a_4 = -1$$

a_4 entfällt, da a_4 nicht positiv ist.

$$\text{Aus } a_3 = 4 \text{ folgt: } c_3 = 5 \quad \text{und} \quad b_3 = 6$$

$$\text{Aus (3) und (4) folgt: } a_5 = 1$$

$$\text{daraus ergibt sich: } c_5 = 3 \quad \text{und} \quad b_5 = 2$$

Diese Lösung entfällt ebenfalls, da $c_5 \geq a_5 + b_5$

Wir erhalten somit als Lösung:

$$a = 4, b = 6, c = 5$$

(P.21.2): (eingesandt von G. Wagner, EOS Worbis, Kl.12B)

Hilfssatz: Das Produkt der Ziffern einer mehrstelligen

Zahl ist immer kleiner als die Zahl selbst

$$(p(x) < x, x \geq 10).$$

Beweis: Es sei $x = a_0 + a_1 \cdot 10 + \dots + a_n \cdot 10^n \quad n \geq 0$

$$\text{Dann ist } p(x) \leq 9^n \cdot a_n$$

$$x \geq 10^n \cdot a_n$$

Hieraus folgt wegen $a_n \neq 0$: $x \geq p(x)$

$$1. \text{ Es ist } x^2 - 10x - 22 = (x - 5)^2 - 47 \geq 0 \text{ oder } x \geq 12$$

$$2. \text{ Wegen } p(x) = x^2 - 10x - 22 \leq x \text{ folgt aber}$$

$$(x - \frac{11}{2})^2 \leq \frac{209}{4}$$

und damit folgt: $x \leq \frac{\sqrt{209} + 11}{2} < 13$

3. Aus 1. und 2. folgt:

$12 \leq x < 13$, d.h. höchstens $x = 12$ kann die gesuchte Zahl sein.

Probe: $p(x) = p(12) = 2 = (12 - 5)^2 - 47$

Ergebnis: Die Zahl 12 ist die gesuchte Zahl.

(P.21.5): (eingesandt von R. Schmidt, SpS Zeiss Jena, Kl.11)

Nach Voraussetzung gilt:

$$f(x + a) = \frac{a}{2} + \sqrt{af(x) - (f(x))^2}$$

Daraus folgt:

$$f(x + 2a) = \frac{a}{2} + \sqrt{af(x + a) - (f(x + a))^2}$$

$$\text{und } f(x + 3a) = \frac{a}{2} + \sqrt{af(x + 2a) - (f(x + 2a))^2}$$

Weiterhin gilt:

$$f(x + a) - \frac{a}{2} = \sqrt{af(x) - (f(x))^2}$$

$$\text{und } (f(x + a))^2 - af(x + a) + \frac{a^2}{4} = af(x) - (f(x))^2$$

(Gleichung (1))

Analog ist

$$(f(x + 2a))^2 - af(x + 2a) + \frac{a^2}{4} = af(x + a) - (f(x + a))^2$$

(Gleichung (2))

(1) - (2) ergibt:

$$(f(x + a))^2 - af(x + a) - (f(x + 2a))^2 + af(x + 2a) =$$
$$= af(x) - (f(x))^2 - af(x + a) + (f(x + a))^2$$

$$af(x + 2a) - (f(x + 2a))^2 = af(x) - (f(x))^2$$

$$\sqrt{af(x + 2a) - (f(x + 2a))^2} = \sqrt{af(x) - (f(x))^2}$$

$$\frac{a}{2} + \sqrt{af(x + 2a) - (f(x + 2a))^2} = \frac{a}{2} + \sqrt{af(x) - (f(x))^2}$$

$$f(x + 3a) = f(x + a)$$

Hieraus folgt, daß $f(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode $2a$ ist.

Ein Beispiel für eine solche Funktion mit $a = 1$ ist

$$f(x) = \frac{1}{4}(-1)^{[x]} + \frac{3}{4}$$

(P.21.6): Für beliebiges natürliches n gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n + 2^k - 1}{2^k} \right] = n$$

Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt.

Induktionsanfang: $n = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2^{k-1}}{2^k} \right] = 0$$

Es werde nun angenommen, daß für alle $n < n'$ die Behauptung richtig sei.

Induktionsschritt: Dann gilt die Behauptung auch für n'

Man unterscheide nun zwei Fälle:

1. Fall: $n' = 2^1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2^1 + 2^{k-1}}{2^k} \right] = \sum_{k=1}^{1+1} \left[\frac{2^1 + 2^{k-1}}{2^k} \right] + \sum_{k=1+2}^{\infty} \left[\frac{2^1 + 2^{k-1}}{2^k} \right]$$

$$\text{Nun gilt: } \left[\frac{2^1 + 2^{k-1}}{2^k} \right] = 0 \text{ für } k > 1 + 1$$

$$= 1 \text{ für } k = 1 + 1$$

$$= 2^{1-k} \text{ für } k \leq 1$$

$$\text{Somit: } \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2^1 + 2^{k-1}}{2^k} \right] = \sum_{k=1}^1 2^{1-k} + 1 = 2^1$$

2. Fall: $n' = 2^1 + m$ mit $0 < m < 2^1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2^1 + m + 2^{k-1}}{2^k} \right] &= \sum_{k=1}^1 \left[2^{1-k} + m + 2^{k-1} \right] \\ &= \sum_{k=1+1}^{\infty} \left[\frac{2^1 + 2^{k-1} + m}{2^k} \right] \end{aligned}$$

Da $m < 2^1$ gilt nun:

$$(1) \left[\frac{2^1 + 2^{k-1} + m}{2^k} \right] = 0 \text{ für } k > 1 + 1$$

$$= 1 \text{ für } k = 1 + 1$$

$$\text{außerdem } \left[2^{1-k} + \frac{m + 2^{k-1}}{2^k} \right] = 2^{1-k} + \left[\frac{m + 2^{k-1}}{2^k} \right]$$

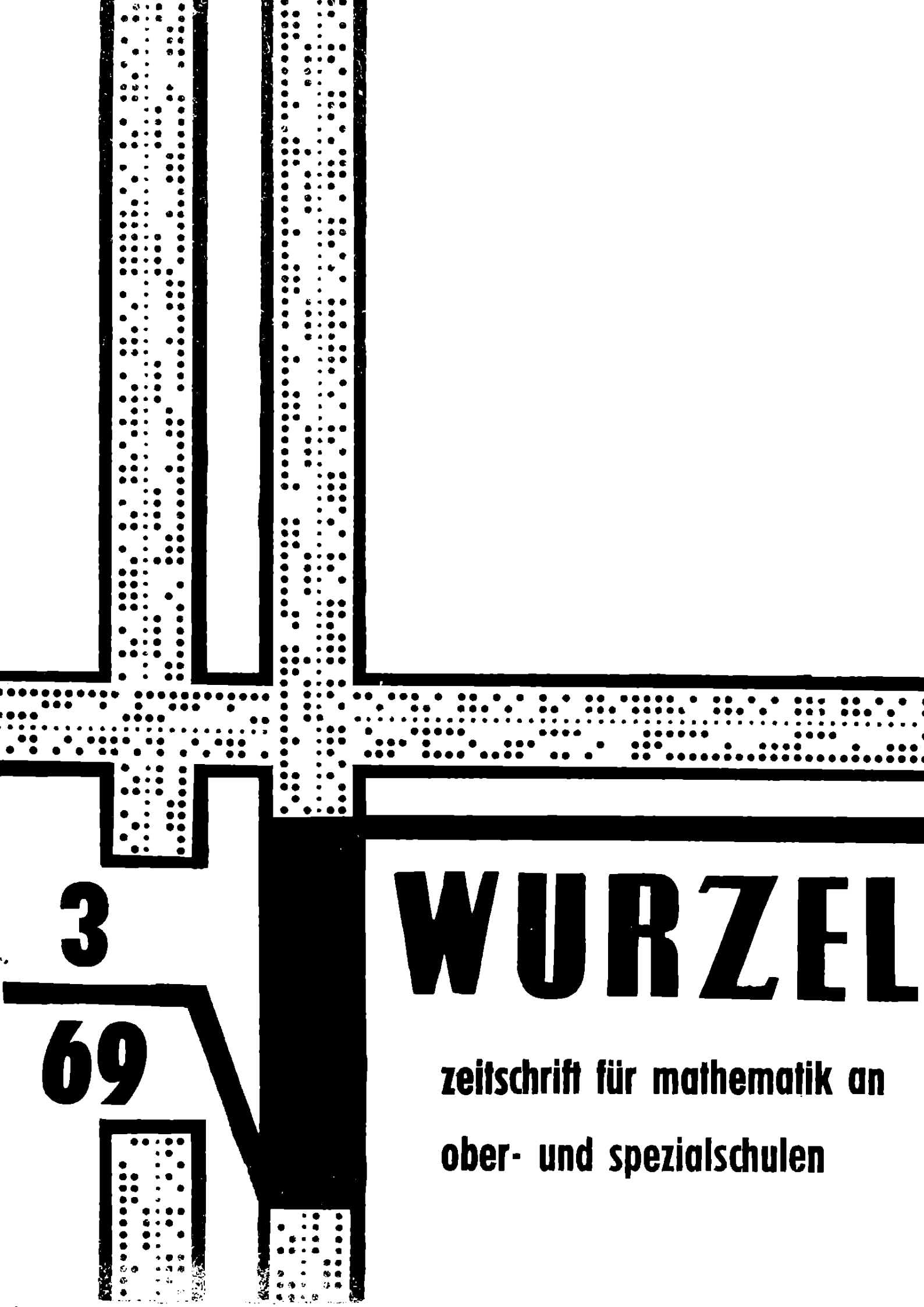
Man erhält:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n' + 2^{k-1}}{2^k} \right] = \sum_{k=1}^1 2^{1-k} + 1 + \sum_{k=1}^1 \left[\frac{m + 2^{k-1}}{2^k} \right]$$

Wegen (1) ist auch $\left[\frac{m + 2^{k-1}}{2^k} \right] = 0$ für $k > 1 + 1$

$$\sum_{k=1}^1 \left[\frac{m + 2^{k-1}}{2^k} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{m + 2^{k-1}}{2^k} \right] = m \text{ nach Induktionsvor-}$$

$$\text{aussetzung, da } m < n' \\ \text{Somit gilt: } \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n' + 2^{k-1}}{2^k} \right] = 2^1 + m = n'$$



3

69

WURZEL

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

Herausgegeben vom FDJ -Aktiv der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Dr. Eike Hertel, Wolfgang Ulbrich
Mitarbeiter: W.Kiefer, N.Kuse, R.Lorenz, L.Staiger,
E.Taubald, R.Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Aus der mathematischen Kybernetik IV

6. Der Steuerautomat der Maus

Wir gehen nun zur Beschreibung des gesuchten Steuerautomaten für die Maus über. Diese Aufgabe läuft darauf hinaus, Zustands-, Eingabe- und Ausgabemenge sowie Überföhrungs- und Ausgabefunktion dieses Automaten passend festzulegen.

Als Eingabemenge wählen wir $X = \{\gamma, \beta, \rho, \sigma\}$. γ, β, σ behalten ihre obige Bedeutung bei, ρ bedeutet: Die vor der Maus befindliche Tür ist rot beleuchtet. Die Menge der Ausgabeelemente ist selbstverständlich die Menge $Y = \{S, R, L, V, E\}$ der von der Maus zu erledigenden Operationen. Zur Darstellung des Algorithmus in einem abstrakten Automaten braucht man folgende Zustände:

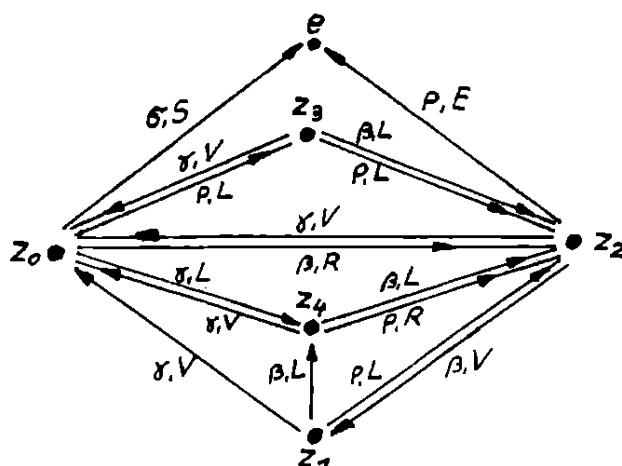
- z_0 : Die Maus befindet sich in der Anfangszelle oder hat soeben eine grün beleuchtete Tür durchlaufen.
- z_1 : Die Maus hat eben eine blau beleuchtete Tür durchlaufen.
- z_2 : Die Maus ist bereit, die eben untersuchte Tür zu durchlaufen
- z_3 : Die Maus geht in den Zustand z_3 über, wenn sie im Zustand z_0 eine rot beleuchtete Tür vor sich sieht.
- z_4 : Die Maus geht in den Zustand z_4 über, wenn sie im Zustand z_0 eine grün beleuchtete Tür oder im Zustand z_1 eine blau beleuchtete Tür vor sich sieht.

e: Endzustand

Die Überföhrungs- und Ausgabefunktion sind aus dem Graphen auf Seite 27 zu entnehmen.

Dieser Automat hat die Eigenart, daß nicht in jedem Zustand für jedes Eingabeelement ein neuer Zustand als Folgezustand erklärt

ist. Man nennt ihn deshalb einen partiellen Automaten. Dies wirkt sich aber auf unsere Untersuchungen nicht aus.



Dem Leser wird empfohlen, sich davon zu überzeugen, daß dieser Automat genau so arbeitet, wie es der oben angegebene Algorithmus vorschreibt. Dabei beachte man, daß der Automat durch die verschiedenen Zustände in der Lage ist, in verschiedener Weise auf gleiche Eingabeelemente zu reagieren, daß er also durch seine verschiedenen Zustände in gewisser Weise die Vorgeschichte einer jeden in seiner Suchaktion auftretenden Situation berücksichtigen kann.

Die nächste Aufgabe bestände nun darin, diesen abstrakten Automaten konkret zu realisieren. Das kann zum Beispiel mit Mitteln der sogenannten Schaltalgebra erreicht werden, soll aber hier nicht durchgeführt werden, weil der dafür erforderliche Aufwand zu groß würde.

Bei der Realisierung würde man es technisch so einrichten, daß die Ausgabe L die Inbetriebnahme desjenigen Organs der Maus veranlaßt, das eine 120°-Linksdrehung der Maus bewirkt. Entsprechend müßten die anderen Ausgaben V, R, S, E in wirkliche Handlungen der Maus umgesetzt werden. Der angegebene Automat könnte in diesem Sinne tatsächlich als eine Art "Gehirn" der Maus betrachtet werden.

Dr. G. Wechsung
Leiter der Abteilung Mathem. Kybernetik
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Für interessierte Leser folgen einige Angaben über die Literatur, auf die sich der Autor bei der Abfassung der Artikelserie "Aus der mathematischen Kybernetik" im wesentlichen gestützt hat.

Über den Gegenstand der Kybernetik kann bei

A. A. Ljapunow: Über einige allgemeine Fragen der Kybernetik, Probleme der Kybernetik, Band 1, Akademie-Verlag Berlin 1962

nachgelesen werden. Über Automaten und über die Maus im Labyrinth findet der Leser weitere Angaben im Buch

N. E. Kobrinski und B. A. Trachtenbrot, Einführung in die Theorie endlicher Automaten, Akademie-Verlag Berlin 1967.

Aufgaben (Serie 3/69)

(A37) Aus der Gültigkeit der Aussage "Wenn eine natürliche Zahl a durch p und q teilbar ist, so ist sie auch durch $p \cdot q$ teilbar" schlußfolgere man ohne zahlentheoretische Hilfsmittel:
Wenn a nicht durch $p \cdot q$ teilbar ist, so ist a nicht durch p oder nicht durch q teilbar.

(A38) Welche Beziehung besteht zwischen den Ausdrücken $99^{50} + 100^{50}$ und 101^{50} ?

(A39) Man konstruiere ein Viereck $ABCD$ aus den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ und dem Winkel zwischen den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.

(A40) Man löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x + y &= -4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{4}{21}\end{aligned}$$

(A41) Gegeben seien die drei Eckpunkte eines Dreiecks $P_1 \sim (x_1, y_1)$, $P_2 \sim (x_2, y_2)$, $P_3 \sim (x_3, y_3)$. Man berechne die Koordinaten des Umkreismittelpunktes.

(A42) Man beweise, daß für beliebiges ganzzahliges n ($n \geq 2$) immer gilt:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

Preisaufgabe (P. 27)

Man zeige, daß für beliebiges natürliches n gilt:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 3$$

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Funktionalgleichungen I

Im Schulunterricht der 9. und 10. Klasse begegnet man zum ersten Male Beziehungen, die man üblicherweise als Additionstheoreme bezeichnet. Denken wir etwa an das Gesetz:

$$(1) \quad \lg(x \cdot y) = \lg x + \lg y,$$

das benutzt wird, um die (schwierigere) Operation der Multiplikation auf die der Addition (ihrer Logarithmen) zurückzuführen. Schreiben wir $l(x) = \lg x$, so gilt also

$$(1') \quad l(x \cdot y) = l(x) + l(y).$$

Das ist ein Beispiel für eine Funktionalgleichung. (In Zukunft abkürzend FGL genannt). Die Funktion $l(x) = \lg x$ nennen wir eine Lösung der FGL (1').

Auch in der Trigonometrie sind Additionstheoreme geläufig. Wir wissen z.B., daß

$$(2) \quad \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y$$

gilt. Setzen wir $c(x) = \cos x$, so nimmt (2) die Form an:

$$(2') \quad c(x+y) + c(x-y) = 2c(x) \cdot c(y).$$

Auch das ist ein Beispiel einer FGL. Sie wird als d'Alembert-sche Funktionalgleichung bezeichnet, nach dem französischen Mathematiker d'Alembert (1717-1783). D'Alembert stieß auf diese FGL bei der Begründung der Regel für die Addition von Kräften,

d.h. bei einem physikalischen Problem.

Aber auch durch geometrische Probleme kann man zu Funktionalgleichungen gelangen. Folgen wir einem Gedankengang des französischen Mathematikers Legendre (1752-1833). Bezeichnen wir die Seitenlängen eines Rechtecks R mit x und y , dann ist der Flächeninhalt des Rechtecks natürlich abhängig von diesen Seitenlängen. Er ist eine Funktion der zwei Veränderlichen x und y , $F(x,y)$. Wir wollen uns auf den Standpunkt stellen, daß wir erst eine Formel für den Flächeninhalt gewinnen wollen. Welche Eigenschaften müßte $F(x,y)$ haben? Wenn man das Rechteck durch eine Parallele zu einer der Seiten in zwei Rechtecke R_1 und R_2 zerlegt, so müßte die Summe der Flächeninhalte von R_1 und R_2 gleich dem Flächeninhalt von R sein. Das bedeutet in Formeln: Ist $x = x_1 + x_2$ (bzw. $y = y_1 + y_2$) so gilt

$$(3_1) \quad F(x_1 + x_2, y) = F(x_1, y) + F(x_2, y)$$

$$(3_2) \quad F(x, y_1 + y_2) = F(x, y_1) + F(x, y_2)$$

Der Flächeninhalt $F(x,y)$ von R müßte also die FGLen (3_1) , (3_2) erfüllen, d.h. ein System von Funktionalgleichungen.

Es entsteht hier sofort das Problem: Welche Funktionen $F(x,y)$ erfüllen dieses System? Solche Funktionen heißen Lösungen von $(3_1, 3_2)$. Das Lösen von FGLen bildet einen der ältesten Problemkreise der Analysis. Große Mathematiker wie Euler, d'Alembert, Gauß, Cauchy, Abel, Weierstraß, Darboux, Hilbert um nur einige Namen zu nennen, befaßten sich wiederholt und eingehend mit der Auflösung von Funktionalgleichungen. In den letzten 50 Jahren haben viele Mathematiker Arbeiten über die Lösung von Funktionalgleichungen veröffentlicht. Es handelt sich also um die Aufgabe, sämtliche Funktionen zu finden, die eine vorgegebene FGL erfüllen. In unseren obigen Beispielen würden zum Beispiel auch $l(x) = 2 \lg x$ eine Lösung von $(1')$ und $c(x) = 1$ eine Lösung von $(2')$ sein.

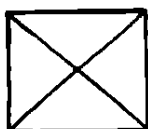
Ehe wir an die Lösung von FGLen gehen wollen wir aber erklären, was wir unter einer FGL verstehen wollen. Hierzu geben wir zuerst die Definition des Begriffs "Ausdruck":

D e f i n i t i o n: (1) Die unabhängigen Veränderlichen



$(x_1, x_2, \dots, x_k)$ sind Ausdrücke.

(2) Sind $A_1, A_2, \dots, A_m$ Ausdrücke und ist F eine



Funktion von m Veränderlichen, so ist

$F(A_1, A_2, \dots, A_m)$ ein Ausdruck.

(3) Sonst gibt es keine Ausdrücke.

Damit geben wir die Definition der Funktionalgleichung:

D e f i n i t i o n:



Eine FGL ist eine Gleichung $A_1 = A_2$ zwischen zwei Ausdrücken, welche k unabhängige Veränderliche $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ und n ($n \geq 1$) unbekannte Funktionen $F_1, F_2, \dots, F_n$ sowie eine endliche Zahl von bekannten Funktionen enthält.

In unseren ersten beiden Beispielen ist $k = 2$ und $n = 1$.

Nun zur Lösung einiger Funktionalgleichungen. Als erstes Beispiel betrachten wir eine FGL besonders einfacher Gestalt:

$$(4) \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Sie wird nach dem französischen Mathematiker Cauchy (1789-1857) als Cauchysche FGL bezeichnet. Sie wurde durch Cauchy selbst 1821 etwa wie folgt gelöst: Mit der Methode der vollständigen Induktion beweist man aus (4) sofort

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$$

Setzt man $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ so ergibt sich

$$(5) \quad f(nx) = n \cdot f(x)$$

Setzt man $x = \frac{y}{n}$ so erhält man wegen $nx = y$

$$f\left(\frac{y}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(y)$$

Bezeichnen wir jetzt mit m eine positive ganze Zahl, so wird mit $y = mz$ hieraus

$$f\left(\frac{m}{n}z\right) = \frac{1}{n} \cdot f(mz) = \frac{m}{n} \cdot f(z)$$

wegen (5). Setzen wir hier $z = 1$ und $f(1) = c$, wobei c also irgendeine Konstante ist, so wird

$$(6) \quad f(x) = cx$$

für alle positiven rationalen Zahlen $x = \frac{m}{n}$. Dieses Ergebnis gilt auch noch für $x = 0$ und für die negativen rationalen Zahlen $x = -\frac{m}{n}$; denn aus (4) folgt für $x = 0$ sofort $f(0) = 0$. Setzen wir aber in (4) $y = -x$ so ergibt sich für negative rationale x

$$f(0) = f(x) + f(-x)$$

oder $f(x) = -f(-x) = -c \cdot (-x) = cx$

d.h. wieder (6). Man kann sich nun überlegen, daß (6) auch für irrationale Werte von x eine Lösung von (4) darstellt, falls man nur solche Funktionen sucht, wie sie in der Schule betrach-

tet werden. Das wollen wir hier nicht beweisen. Durch Einsetzen stellt man fest, daß $f(x) = cx$ auch wirklich eine Lösung der Cauchyschen FGL ist. Die sämtlichen Lösungen der FGL (6) sind also, geometrisch gesprochen, die Geraden durch den Nullpunkt des Koordinatensystems, mit Ausnahme der y-Achse selbst.

Dr. rer. nat. habil. H.-J. Glaeske
Oberassistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Lösungen

(P.21.4) · (eingesandt von R.Schmidt, SpS Carl Zeiss Jena, Kl.11)

Behauptung: In jedem beliebigen Tetraeder läßt sich immer ein Eckpunkt so finden, daß man aus den Längen der von ihm ausgehenden Kanten ein Dreieck konstruieren kann.

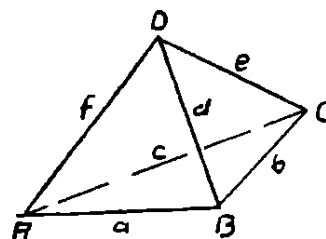
Beweis: Ein Dreieck ist genau dann konstruierbar, wenn die Längen seiner Seiten die Dreiecksungleichungen erfüllen.

Sei keine Kante des Tetraeders größer als

$\overline{AB} = a$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} b &\leq a \text{ und } b < a+d \\ d &\leq a \text{ und } d < a+b \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} c &\leq a \text{ und } c < a+f \\ f &\leq a \text{ und } f < a+c \end{aligned} \quad (2)$$



Behauptung: Es gilt $a < b+d$ (1'') oder
 $a < c+f$ (2'')

Indirekter Beweis: Es sei $a \geq b+d$ (1')
und $a \geq c+f$ (2')

Durch Addition von (1') und (2') folgt:

$$2a \geq b+c + d+f$$

Im Dreieck $\triangle ABC$ gilt $b+c > a$

somit muß gelten $a > d+f$.

Das ist ein Widerspruch, da im Dreieck $\triangle ABD$ gilt $a < d+f$.

Daraus folgt: (1') oder (2') ist falsch. Daher ist (1'') oder (2'') richtig. Daraus folgt in Verbindung mit (1) bzw. (2) die Behauptung.

(P.23): (eingesandt von D.Soyka, EOS Spremberg)

Hat das Gleichungssystem das Lösungstripel (x_1, y_1, z_1) so kann man sofort ein weiteres Tripel (x_2, y_2, z_2) angeben, mit $x_2 = y_1$, $y_2 = x_1$, $z_2 = z_1$, da das Gleichungssystem in x und y symmetrisch ist.

Gibt es nur eine Lösung des Systems, so muß also gelten $x = y$, und das System vereinfacht sich wie folgt:

$$2x^2 = z \quad (1)$$

$$2x + z = a \quad (2)$$

Durch Einsetzen von z erhält man:

$$2x + 2x^2 = a \quad (3)$$

und somit die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a}{2}} \quad (4)$$

Es gebe aber höchstens eine Lösung für x . Daraus erhält man:

$$\frac{1}{4} + \frac{a}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad a = -\frac{1}{2} \quad (5)$$

Somit hat höchstens für $a = -\frac{1}{2}$ das Gleichungssystem genau eine Lösung.

Eine Lösung des Gleichungssystems für $a = -\frac{1}{2}$ läßt sich aus (1) und (4) sofort angeben, nämlich:

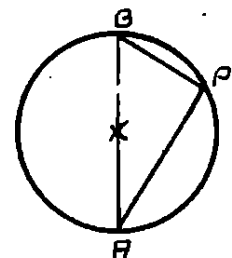
$$x = y = -\frac{1}{2}, \quad z = \frac{1}{2}$$

Das Gleichungssystem hat daher für $a = -\frac{1}{2}$ und nur für $a = -\frac{1}{2}$ genau eine Lösung.

(P.24): (eingesandt von D.Müller, EOS Herzberg, Klasse 10)

Behauptung: Der gesuchte geometrische Ort ist die gesamte Oberfläche der Kugel mit dem Durchmesser $\overline{AB}$.

Beweis: I. Es sei $P \neq A, B$ ein beliebiger Punkt der Oberfläche dieser Kugel. Verbindet man A mit B und P und E mit P , so ist das Dreieck $\triangle APB$



nach der Umkehrung des Thalesatzes rechtwinklig. Es gilt also $\angle APB = 90^\circ$, d.h., der Punkt P ist ein Punkt des gesuchten geometrischen Ortes. Da $P \neq A, B$ beliebig angenommen wurde, ist damit gezeigt, daß alle Punkte der Oberfläche der Kugel außer A und B zum geometrischen Ort gehören. Man weist leicht nach, daß die Behauptung auch für $P \equiv A$ oder $P \equiv B$ gilt.

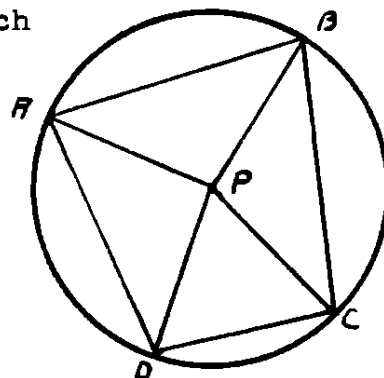
Damit ist gezeigt, daß alle Punkte der Kugeloberfläche zum geometrischen Ort gehören.

II. Ist S ein beliebiger Punkt, der nicht auf der Kugeloberfläche liegt, so gilt stets $\angle ASB \neq 90^\circ$ (Daher kann S keine Projektion von A auf eine durch B verlaufende Ebene sein). Da der Punkt S beliebig angenommen wurde, ist damit gezeigt, daß alle Punkte, die nicht auf der Kugeloberfläche liegen, nicht zum geometrischen Ort gehören.

Aus I. und II. folgt die Richtigkeit der Behauptung.

(A17): Man zeige zunächst: Wenn es einen Punkt P mit den geforderten Eigenschaften gibt, dann ist das Viereck konvex und seine gegenüberliegenden Innenwinkel ergänzen sich zu 180° . Wenn der Punkt P zu den vier Eckpunkten des Vierecks gleiche Abstände hat, dann kann man eine Kugel mit dem Mittelpunkt P, auf deren Oberfläche die vier Eckpunkte liegen, konstruieren.

Schneidet man nun diese Kugel mit der Ebene, in der die vier Punkte liegen, so ergibt sich als Schnittfigur ein Kreis, auf dessen Peripherie die Eckpunkte des Vierecks liegen. Somit ist das Viereck ein Sehnenviereck, d.h. es ist konvex und seine gegenüberliegenden Innenwinkel ergänzen sich zu 180° .



Nun zeige man die Umkehrung:

Es sei das Viereck konvex und seine gegenüberliegenden Innenwinkel ergänzen sich zu 180° . Das Viereck ist also ein Sehnenviereck. Man erhält einen Punkt P, der von allen Eckpunkten den gleichen Abstand hat, als Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks.

Damit ist die Umkehrung bewiesen. Somit ist auch die Behauptung richtig.

(A20): "Wenn es draußen regnet" werde mit p bezeichnet. Aus der Wahrheit von Peters Aussage schließe man durch folgende Wahrheitstabelle:

p	$\sim p$	$p \rightarrow \sim p$
W	F	F
F	W	W

daß die Aussage $p \rightarrow \sim p$, d.h. "Wenn es draußen regnet, regnet es draußen nicht", dann und nur dann wahr ist, wenn p falsch ist. Somit regnet es draußen nicht.

(A21): Es ist $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ$

$$\begin{aligned} &= \sin(30-20)^\circ + \sin(30+20)^\circ \\ &= \sin 30^\circ \cos 20^\circ - \cos 30^\circ \sin 20^\circ \\ &\quad + \sin 30^\circ \cos 20^\circ + \cos 30^\circ \sin 20^\circ \\ &= 2\sin 30^\circ \cos 20^\circ \\ &= \cos 20^\circ \end{aligned}$$

Die Gleichung $\cos 20^\circ = \sin x$

hat aber genau die Lösungen $x_1 = 70^\circ + k \cdot 360^\circ$

$$x_2 = 110^\circ + k \cdot 260^\circ$$

wobei k eine beliebige ganze Zahl ist.

(A22): Den ersten Ball kann der Vater einem beliebigen der 8 Söhne geben. Den zweiten Ball kann er einem beliebigen von den übriggebliebenen 7 Söhnen geben usw. Den 5. Ball kann er dann einem der 4 übriggebliebenen Söhne geben. Somit erhalten wir $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ Möglichkeiten für die Aufteilung der Bälle.

(A23): (eingesandt von J. Puhl, 303 Arnstedt, Klasse 12)

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $k = 1$

$$16 = 4 \cdot 4$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\underbrace{11 \dots 155 \dots 56}_k = (\underbrace{33 \dots 34}_{k-1}) \cdot (\underbrace{33 \dots 34}_{k-1})$$

Induktionsbehauptung:

$$\underbrace{11 \dots 155 \dots 56}_{k+1} = (\underbrace{33 \dots 34}_k) \cdot (\underbrace{33 \dots 34}_k)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \underbrace{11 \dots 155 \dots 56}_{k+1} &= \underbrace{11 \dots 155 \dots 56}_k + \underbrace{1100 \dots 0400 \dots 0}_{k-1} \\ &= (\underbrace{33 \dots 34}_{k-1}) \cdot (\underbrace{33 \dots 34}_{k-1}) + \underbrace{200 \dots 0400 \dots 0}_{k-1} + 9 \cdot 10^{2k} \\ &= (\underbrace{33 \dots 34}_{k-1}) \cdot (\underbrace{33 \dots 34}_{k-1}) + 6 \cdot (\underbrace{33 \dots 34}_{k-1}) \cdot 10^k + 9 \cdot 10^{2k} \\ &= (\underbrace{33 \dots 34}_{k-1} + 3 \cdot 10^k) \cdot (\underbrace{33 \dots 34}_{k-1} + 3 \cdot 10^k) \\ &= (\underbrace{33 \dots 34}_k) \cdot (\underbrace{33 \dots 34}_k) \end{aligned}$$

(A24): Lösung durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $u_m = u_{m-1}u_0 + u_m u_1 = u_m$

Induktionsvoraussetzung:

Die Gleichung sei richtig für $n = 1, 2, \dots, k$.

Dann gilt speziell auch:

$$u_{m+k-2} = u_{m-1}u_{k-2} + u_m u_{k-1}$$

$$u_{m+k-1} = u_{m-1}u_{k-1} + u_m u_k$$

Zu zeigen ist nun, daß die Gleichung auch für $n = k+1$ richtig ist, also $u_{m+k} = u_{m-1}u_k + u_m u_{k+1}$. Da die Folge eine Fibonacci-Folge war, gilt:

$$\begin{aligned} u_{m+k} &= u_{m+k-1} + u_{m+k-2} \\ &= u_{m-1}u_{k-1} + u_m u_k + u_{m-1}u_{k-2} + u_m u_{k-1} \\ &= u_{m-1}(u_{k-1} + u_{k-2}) + u_m(u_k + u_{k-1}) \\ &= u_{m-1}u_k + u_m u_{k+1} \end{aligned}$$



4

69

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom FDJ -Aktiv der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Dr. Eike Hertel, Wolfgang Ulbrich
Mitarbeiter: W.Kiefer, N.Kuse, R.Lorenz, L.Staiger,
E.Taubald, R.Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Funktionalgleichungen II

Mit dem Ergebnis im ersten Teil ("Wurzel"-Nr.3/69, Seite 32) können wir auch das System zur Bestimmung einer Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks lösen. Betrachten wir etwa (3_1) , so sehen wir, daß die zweite Veränderliche immer y heißt, d.h. wir können (3_1) wie eine FGL für eine Funktion einer Veränderlichen betrachten. Schreiben wir etwa $F_y(x) = F(x,y)$, so nimmt (3_1) die Gestalt an:

$$F_y(x_1 + x_2) = F_y(x_1) + F_y(x_2).$$

Das ist aber die Cauchysche FGL. Ihre Lösung ist

$$F_y(x) = g \cdot x$$

Dabei ist es aber wichtig zu bemerken, daß unser g nur in Abhängigkeit von x konstant ist, bezüglich y aber variabel sein kann: $g = g(y)$. Durch Einsetzen prüft man sofort, daß

$$F_y(x) = g(y) \cdot x$$

Lösung ist. Nun soll aber F auch noch (3_2) genügen. Durch Einsetzen (der Faktor x hebt sich weg) ergibt sich

$$g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2)$$

Das ist aber wieder die Cauchysche FGL für die Funktion $g(y)$. Ihre Lösung ist bekanntlich

$$g(y) = c \cdot y$$

Insgesamt haben wir also $F(x,y) = cxy$ für den Inhalt des Rechtecks R . Der Wert der Konstante c hängt von der Wahl des Maßstabs ab. Wird der Maßstab so gewählt, daß der Flächeninhalt des Quadrates mit der Seitenlänge 1 gleich 1 ist, so ergibt sich $1 = c \cdot 1 \cdot 1$, d.h. $c = 1$ und damit unsere bekannte Formel.

Wir sehen also, daß man zwangsläufig zu unserer bekannten Inhaltsformel geführt wird, wenn man nur die geometrisch einleuchtende Forderung der Additivität des Inhalts bezüglich der Seiten fordert.

Mit Hilfe der Lösung der Cauchyschen FGL kann man nun auch die FGL (1') lösen. Seien vorerst x und y positiv. Dann führen wir neue Veränderliche x_1, y_1 ein:

$$x = 10^{x_1}, \quad \text{d.h.} \quad x_1 = \lg x$$

$$y = 10^{y_1}, \quad \text{d.h.} \quad y_1 = \lg y$$

Setzen wir noch $l(10^u) = f(u)$, so gilt also nach (1')

$$l(10^{x_1+y_1}) = l(10^{x_1}) + l(10^{y_1})$$

$$\text{also} \quad f(x_1 + y_1) = f(x_1) + f(y_1)$$

Die Funktion f erfüllt also die Cauchysche FGL, d.h. es gilt

$$f(x_1) = c \cdot x_1.$$

Wegen $f(\lg x) = l(x)$ gilt also mit $x_1 = \lg x$

$$(7) \quad l(x) = c \cdot \lg x.$$

Das gilt nur für positive x . Setzt man in (1') $x = y = t$ (>0), so wird $f(t^2) = 2f(t)$.

Setzt man $x = y = -t$, so ergibt sich

$$f(t^2) = 2f(-t).$$

Also gilt $f(t) = f(-t)$. Ist also x negativ, so gilt

$$(7') \quad f(x) = c \cdot l(-x).$$

Man faßt die Ergebnisse (7, 7') zusammen, indem man die Größe

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

eingführt. Damit gilt: Die allgemeine Lösung von (1') hat für $x \neq 0$ die Form

$$l(x) = c \cdot \lg |x|.$$

Soll die FGL (1') auch für $x = 0$ erfüllt sein, so ergibt sich aus (1') für $y = 0$:

$$l(0) = l(x) + l(0),$$

d.h. $l(x) = 0$ für alle x . Das ist die Gleichung der x -Achse. Sie ist also Lösungsfunktion, falls (1') auch für $x = 0$ einen Sinn haben soll. Man nennt diese sofort zu erratende Lösung die triviale Lösung von (1').

Wenn man die umfangreiche Literatur über Funktionalgleichungen durchsieht, so fällt auf, daß fast jede Gleichung ihre eigene

Lösungsmethode benötigt. Die Versuche einer einheitlichen Theorie der Funktionalgleichungen haben noch zu keinem Erfolg geführt. Trotzdem gelang es, gewisse Klassen von Gleichungen zu finden, die einheitlich behandelt werden können. So ist zum Beispiel die Methode der Lösung der Cauchyschen FGL auf alle Funktionalgleichungen des Typs

$$f(x + y) = F(f(x), f(y))$$

anwendbar, d.h. auf alle Additionstheoreme. Man kann sich auch überlegen, daß dieselbe Methode für die Lösung der Gleichung (2') verwendet werden kann. Man stellt dann fest, daß man verschiedene Lösungen erhält, je nachdem ob die Lösungsfunktion Funktionswerte haben kann die größer als 1 oder kleiner als 1 sind. Im letzten Falle erhält man als einzige Lösung von (2'), abgesehen von der trivialen Lösung,

$$c(x) = \cos bx$$

wobei b eine beliebige reelle Konstante ist. Das soll hier nicht vorgerechnet werden.

Unsere Beispiele zeigen aber auch, daß man Funktionalgleichungen in der Mathematik zur Definition von Funktionen verwenden kann. So kann man z.B. die Funktion $l(x) = \lg x$ dadurch erklären, daß man sagt: $l(x) = \lg x$ ist für alle positiven x nichttriviale Lösung der Funktionalgleichung (1') und es gilt $l(10) = 1$. Durch die letzte Bedingung ist die Funktion $l(x)$ eindeutig bestimmt, denn wegen $l(10) = 1$ gilt

$$l(10) = c \cdot \lg 10 = c = 1.$$

Ähnliches gilt für die Funktionen $e(x) = a^x$ und $p(x) = x^\lambda$. Diese kann man mittels der FGLen

$$e(x + y) = e(x) \cdot e(y)$$

$$\text{bzw.} \quad p(x \cdot y) = p(x) \cdot p(y)$$

definieren. Das Problem der Lösung dieser Funktionalgleichungen kann man, ähnlich wie im Falle der FGL für $l(x)$, auf die Lösung der Cauchyschen FGL (4) zurückführen (Man führe das zur Übung durch!).

Wir können hier natürlich nicht annähernd ein Bild von den vielfältigen Methoden zur Lösung von Funktionalgleichungen entwerfen. Für diejenigen aber, die Lust zum Probieren haben, sei beispielhaft noch ein ganz elementares Verfahren erläutert, das in vielen Fällen zum Ziel führt. Hierbei handelt es sich um die

Methode der Spezialisierung der Variablen.

Betrachten wir etwa die FGL

$$(8) \quad f(x+y) + f(x-y) = f(x) + 6xy \sqrt[3]{f(y)} + x^3.$$

Setzen wir $y = 0$ erhalten wir

$$2f(x) = f(x) + x^3$$

$$\text{d.h.} \quad f(x) = x^3.$$

Das ist (Einsetzen!) auch wirklich eine Lösung von (8).

Diese Methode führt bei

$$(9) \quad f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$$

nicht zum Ziel. Für $y = 0$ erhält man nur

$$f(0) = 1.$$

Hier führt eine andere Methode zum Ziel. Setzt man etwa $x = 0$, $y = t$ so wird

$$f(t) - 2f(-t) + 1 - 2f(t) = t - 2.$$

Setzen wir $x = 0$, $y = -t$ ergibt sich

$$f(-t) - 2f(t) + 1 - 2f(-t) = -t - 2.$$

Multiplizieren wir die zweite Gleichung mit -2 und addieren sie zur ersten so ergibt sich

$$-f(t) + 4f(t) = t - 3 + 2t + 6$$

und daraus folgt

$$f(t) = t + 1.$$

Diese Funktion erfüllt auch wirklich die Gleichung (9).

Diese Methode beruht darauf, daß jede Lösung der Ausgangsgleichung notwendigerweise auch die spezialisierte Gleichung erfüllen muß. Diese ist i.a. von einfacherer Bauart und dann leichter zu lösen. Anschließend muß man aber immer prüfen, ob die erhaltenen Lösungen der speziellen Gleichung auch die Ausgangsgleichung erfüllen. Es kann natürlich durchaus der Fall sein, daß die spezialisierte Gleichung mehr Lösungen hat als die ursprünglich gegebene. Hierzu ein Beispiel:

$$(10) \quad f(x+y) + f(x-y) - f(x)(y+2) + y(x^2 - 2y) = 0$$

Hier versagen die bisherigen Methoden. Setzen wir nacheinander $x = 0$, $y = t$; $x = t-2$, $y = -2$; $x = -2$, $y = t-2$ so erhalten wir die drei Gleichungen

$$f(t) + f(-t) - f(0)(t+2) - 2t^2 = 0$$

$$f(t-4) + f(t) - 2(t^2 - 4t + 8) = 0$$

$$f(t-4) + f(-t) - f(-2)t + (t-2)(8-2t) = 0$$

Mit der Methode zur Lösung von (9) erhält man aus (10) sofort

$f(0) = 0$. Setzen wir $f(-2) = b$, so ergibt sich, wenn man die dritte Gleichung von der Summe der beiden ersten subtrahiert,

$$2f(t) = 2t^2 + (4 - f(-2))t.$$

Setzt man noch $\frac{4 - f(-2)}{2} = c$, so ergibt sich

$$f(t) = t^2 + ct.$$

Diese Funktionen erfüllen für alle c die drei spezialisierten Gleichungen. Setzt man aber $f(t)$ in (10) ein, so ergibt sich

$$(x + y)^2 + c(x + y) + (x - y)^2 + c(x - y) - (x^2 + cx)(y + 2) + y(x^2 - 2y) = 0$$

oder $cxy = 0$

für alle x, y , also $c = 0$. Damit ist $f(x) = x^2$ die einzige Lösung von (10).

Mit diesen Anregungen zur eigenen Beschäftigung mit Funktionalgleichungen wollen wir diese kurze Einführung schließen.

Dr. rer. nat. habil. H.-J. Glaeske
Oberassistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Aufgaben (Serie 4/69)

(A43) Gegeben seien drei dreistellige Zahlen, die man durch zyklische Vertauschung einer gegebenen dreistelligen Zahl erhält. Man zeige, daß

- a) die Summe dieser drei so erhaltenen Zahlen nur dann durch 5 teilbar ist, wenn die Quersumme einer Zahl durch 5 teilbar ist,
- b) die Differenz von zwei dieser Zahlen stets durch 9 teilbar ist.

(A44) In einer arithmetischen Folge sei das Produkt der ersten drei Glieder 15 und die Summe dieser Glieder 9. Wie lautet das allgemeine Glied dieser Folge?

(A45) Man bestimme den kleinsten Wert der Funktion

$$f(m) = \frac{\sum_{n|m} n}{\sum_{n|m} n^0} \quad \text{für ganzzahlige } m \ (m > 1) \text{ und beweise, daß sie keinen größten Wert hat.}$$

(A46) Peter und Klaus stehen vor einer verschlossenen Tür und streiten sich. Peter behauptet: "Wenn das Radio im Zimmer spielt, so ist jemand darin."

Klaus ist der Meinung, daß Peter unrecht hat.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Klaus recht hat, wenn man annimmt, daß alle möglichen Fälle mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten können?

(A47) Mit Hilfe der Methode zur Lösung der Cauchyschen Funktionalgleichung bestimme man die Lösung von

$$f(x + y) = \frac{f(x) \cdot f(y)}{f(x) + f(y)}$$

im Bereich der rationalen Zahlen.

(A48) Von allen Geraden einer Ebene, die von einem Punkt dieser Ebene ausgehen, bestimme man diejenige, die mit einer anderen Ebene den größten Winkel einschließt.

Preisaufgabe (P. 28)

Man konstruiere einen Automaten, der folgendes Verhalten realisiert:

Der Automat sortiert Werkstücke nach

I. Qualität

II. Qualität

und Ausschuß

unter folgenden Bedingungen:

- a) Ausschuß wird aussortiert,
- b) ein Werkstück erster Qualität wird immer durchgelassen,
- c) ein Werkstück zweiter Qualität wird genau dann durchgelassen, wenn unmittelbar vorher zwei Werkstücke erster Qualität vorausgegangen sind.

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Post-

stempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken. Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Unser Mathematiklager

Das schon zur Tradition gewordene Mathematiklager des Bezirkes Gera fand vom 17. bis 27.2.1969 in Lobenstein statt. 70 Schüler, unter ihnen auch die Kandidaten für die Republik-Olympiade, verbrachten hier zehn erlebnisreiche Tage. Wie auch schon im Sommerlager fanden neben dem Unterricht noch zahlreiche andere Veranstaltungen statt. Von der Einsatzbereitschaft der Schüler und vom guten gegenseitigen Verstehen zwischen Schülern und Studenten zeugten ein gut gestalteter Abschlußabend und Diskussionen über aktuelle politische und auch fachliche Fragen.

Erstmals in der Geschichte der Mathematiklager wurden Unterrichtsvorträge für Schüler vergeben, d.h. Schüler wurden schon vor Beginn des Lagers angeschrieben, sich vorzubereiten, in einem bestimmten Fachgebiet einen Einführungsvortrag zu halten.

Im folgenden möchten wir eine kurze Charakteristik einiger Unterrichtsgebiete geben.

Die Schüler der 9.Klassen wurden in diesem Lager erstmals mit der Zahlentheorie bekannt gemacht. Am Anfang standen dabei Teilbarkeitsuntersuchungen. Daraus ergab sich der Begriff der Primzahl. Die eindeutige Darstellbarkeit jeder natürlichen Zahl durch ein Produkt von Primzahlen, der sogenannte Hauptsatz der Zahlentheorie, war die Grundlage für die weiteren Untersuchungen mit Hilfe von Zahlenkongruenzen. Es wurde dabei näher auf die ϕ -Funktion und den Eulerschen Satz eingegangen. Zum Abschluß wurden Diophantische Gleichungen behandelt.

Im Fachgebiet Geometrie wurde in der 8.Klasse folgender Satz über die Zerlegungsgleichheit ebener Vielecke (Zwei Vielecke heißen zerlegungsgleich, wenn sie in eine endliche Anzahl einander paarweise kongruenter Vielecke zerlegt werden können.) erarbeitet: Zwei Vielecke sind genau dann zerlegungsgleich, wenn sie flächengleich sind. Darauf aufbauend wurden einfache Flä-

chenverwandlungen behandelt.

In der 9. und 10.Klasse beschäftigten sich die Schüler mit den Kongruenzabbildungen in der Ebene (Im einzelnen sind das die Geradenspiegelung, die Translation, die Rotation sowie die Zusammensetzung dieser Abbildungen.). Dabei wurde auch folgender wichtige Satz hergeleitet: Jede Kongruenzabbildung in der Ebene läßt sich durch höchstens drei Geradenspiegelungen zusammensetzen. Weiter wurde gezeigt, daß die Kongruenzabbildungen eine Gruppe bilden. Zur Übung wurden geometrische Konstruktionsaufgaben gestellt, die durch Anwendung von Kongruenzabbildungen gelöst werden können.

Ein weiteres grundlegendes Unterrichtsfach war die Beweistheorie in der 8. bis 10.Klasse. Dieses Gebiet wurde an Hand des Buches von G.Asser "Einführung in die mathematische Logik I" aussagenlogisch fundiert, d.h. die einzelnen Beweisarten wurden zuerst aussagenlogisch untersucht. Dabei ergab sich z.B. die dem indirekten Beweis entsprechende aussagenlogische Identität

$$p \rightarrow q \leftrightarrow p \wedge \bar{q} \rightarrow kt$$

(kt - Kontradiktion, eine nachweislich immer falsche Aussage).

Dazu folgender Beweis: Die Menge N der echt positiven reellen Zahlen besitzt kein Minimum.

Annahme: N besitze das Minimum γ .

Dann ist $\gamma > 0$ und somit $\frac{\gamma}{2} > 0$, d.h. $\frac{\gamma}{2} \in N$.

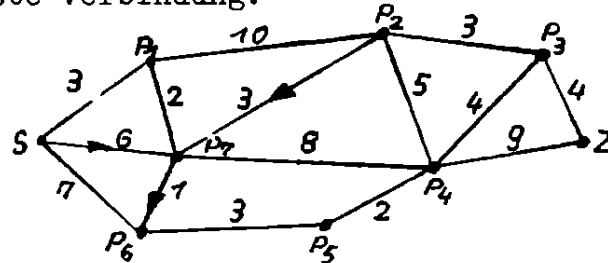
Daraus ergibt sich $\frac{\gamma}{2} \geq \min N = \gamma$

oder $\gamma \geq 2\gamma$

und schließlich $0 \geq \gamma$ woraus ein Widerspruch zu $\gamma > 0$ folgt.

Mit der Graphentheorie hatten wir ein Gebiet ausgesucht, was wir sowohl in der 8. als auch in der 11. und 12.Klasse behandeln konnten. Als Grundlage diente hierbei das Buch von J.Sedláček "Einführung in die Graphentheorie". Aufbauend auf der Definition des Graphen und seiner Bestandteile, Kanten und Knoten, wurden Begriffe wie Kantenfolge, Zusammenhang erläutert. Speziell wurde dann auf die Theorie der Transportnetze eingegangen. Die folgende Aufgabe ist ein Beispiel für die im Unterricht untersuchten Probleme: Innerhalb eines gegebenen Netzes (z.B. Straßennetz) mit bewerteten Kanten (z.B. Länge, Fahrzeit, Kosten) ist die

günstigste Verbindung zwischen zwei Knoten gesucht. Dabei sind zusätzliche Bedingungen ("Einbahnstraßen") zugelassen. Im dargestellten Beispiel ist $S - P_1 - P_7 - P_6 - P_5 - P_4 - P_3 - Z$ die günstigste Verbindung.



Der Lehrgang wurde mit der Planungsmethode PERT (siehe "Wurzel" 10/67 und 11/67) abgeschlossen.

Für die 11.Klasse hatten wir ein Gebiet der mathematischen Kybernetik ausgewählt. Über die abstrakte Beschreibung konkreter Rechner wurden die Schüler mit dem Begriff des abstrakten Automaten (vergleiche "Wurzel" 12/68 bis 3/69) bekannt gemacht. Hierbei wurden auch Graphen zur Beschreibung abstrakter Automaten benutzt. Um den Begriff des abstrakten Automaten exakt fassen zu können wurden Begriffe wie Alphabet, Wortmenge, Zustand, Überföhrungs- und Ausgabefunktion erarbeitet. Weiterhin wurden mit der Äquivalenz und Reduzierung von Automaten Probleme mit zutiefst praxisbezogenem Hintergrund erörtert.

Mit der Algorithmentheorie wurde in der 12.Klasse ebenfalls ein Gebiet der mathematischen Kybernetik behandelt. Dabei standen im Vordergrund Probleme des algorithmischen Berechnens und Entscheidens. Der Algorithmusbegriff wurde an Hand der Turing-Maschine gegeben (siehe auch: B.A.Trachtenbrot "Wieso können Automaten rechnen?"). Vom Modell der Turing-Maschine aus wurde die abstrakte Fassung erarbeitet.

Danach wurde ausführlich auf die algorithmische Unentscheidbarkeit von Semi-Thue-Systemen eingegangen, um den Schölern auch einmal ein Beispiel für die Grenzen der Behandlung einfacher Probleme mit Hilfe von Algorithmen zu geben.

Die Ergebnisse der Lagerolympiade bestätigten, daß ein Großteil der Schüler den ihnen angebotenen, mitunter recht schwierigen Stoff gut verstanden hatte.

Das Betreuerkollektiv

Lösungen

(P.21.3): Zunächst beweise man folgende Ungleichung:

$$n(x_1^2 + \dots + x_n^2) \geq (x_1 + \dots + x_n)^2$$

 Dabei soll gelten $n(x_1^2 + \dots + x_n^2) = (x_1 + \dots + x_n)^2$
 genau dann, wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
 Es gilt $2x_i x_j \leq x_i^2 + x_j^2$ (wegen $(x_i - x_j)^2 \geq 0$).

Das Gleichheitszeichen gilt hier genau dann, wenn $x_i = x_j$. Somit erhält man

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_n)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i^2 + x_j^2}{2} \\ &= n \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

Die behauptete Ungleichung ist bewiesen und offensichtlich gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x_1 = \dots = x_n$. Weiterhin kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $a > 0$ ist. Für $a < 0$ ersetze man a durch $-a$, c durch $-c$ und x_i durch $-x_i$ und das Gleichungssystem geht in ein äquivalentes (mit gleicher Lösungsmenge) über. Man addiere jetzt alle Gleichungen und erhält

$a(x_1^2 + \dots + x_n^2) + (b-1)(x_1 + \dots + x_n) + nc = 0$.
 Nun wird die obige Ungleichung angewandt, man erhält damit $(x_1 + \dots + x_n = X)$:

$$\begin{aligned} \frac{a}{n}X^2 + (b-1)X + nc &\leq 0 \\ (" = " \text{ genau dann, wenn } x_1 = \dots = x_n) \\ \text{oder } X^2 + \frac{n(b-1)}{a}X + \frac{1}{a}n^2c &\leq 0 \\ (X + \frac{n(b-1)}{2a})^2 - \frac{n^2}{4a^2}((b-1)^2 - 4ac) &\leq 0 \quad (I) \end{aligned}$$

Da $(X + \frac{n(b-1)}{2a})^2 \geq 0$, ist diese Ungleichung nur für $((b-1)^2 - 4ac) \geq 0$ lösbar, d.h. die Behauptung a) ist erfüllt.

Ist $(b-1)^2 - 4ac = 0$, so folgt unmittelbar

$$X + \frac{n(b-1)}{2a} = 0, \text{ d.h. } X = -\frac{n(b-1)}{2a}$$

Andererseits gilt in der Ungleichung (I) das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x_1 = \dots = x_n$. Somit ist im Fall b), es kann dann in (I) nur das Gleichheitszeichen gelten, die Lösung eindeutig bestimmt. Für $(b-1)^2 - 4ac > 0$ existieren mehrere Lösungen. Diese Behauptung ist leicht einzusehen.

(A9): Es sei $a \geq b$

Dann gilt wegen $a^3(a-b) \geq b^3(a-b)$

$$a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$$

und auch $4a^4 + 4b^4 \geq 4a^3b + 4ab^3$ (1)

Weiter gilt $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$

wegen $(a^2 - b^2)^2 \geq 0$

und damit $3a^4 + 3b^4 \geq 6a^2b^2$ (2)

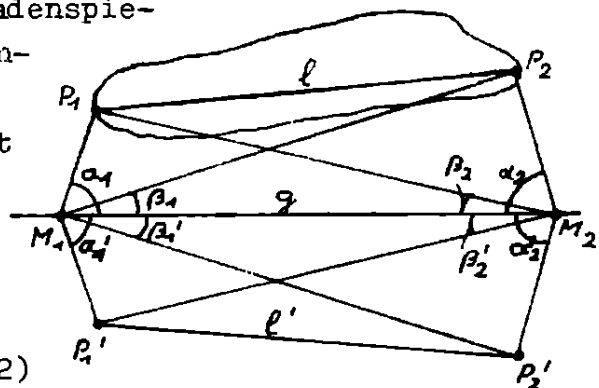
Aus (1), (2) folgt

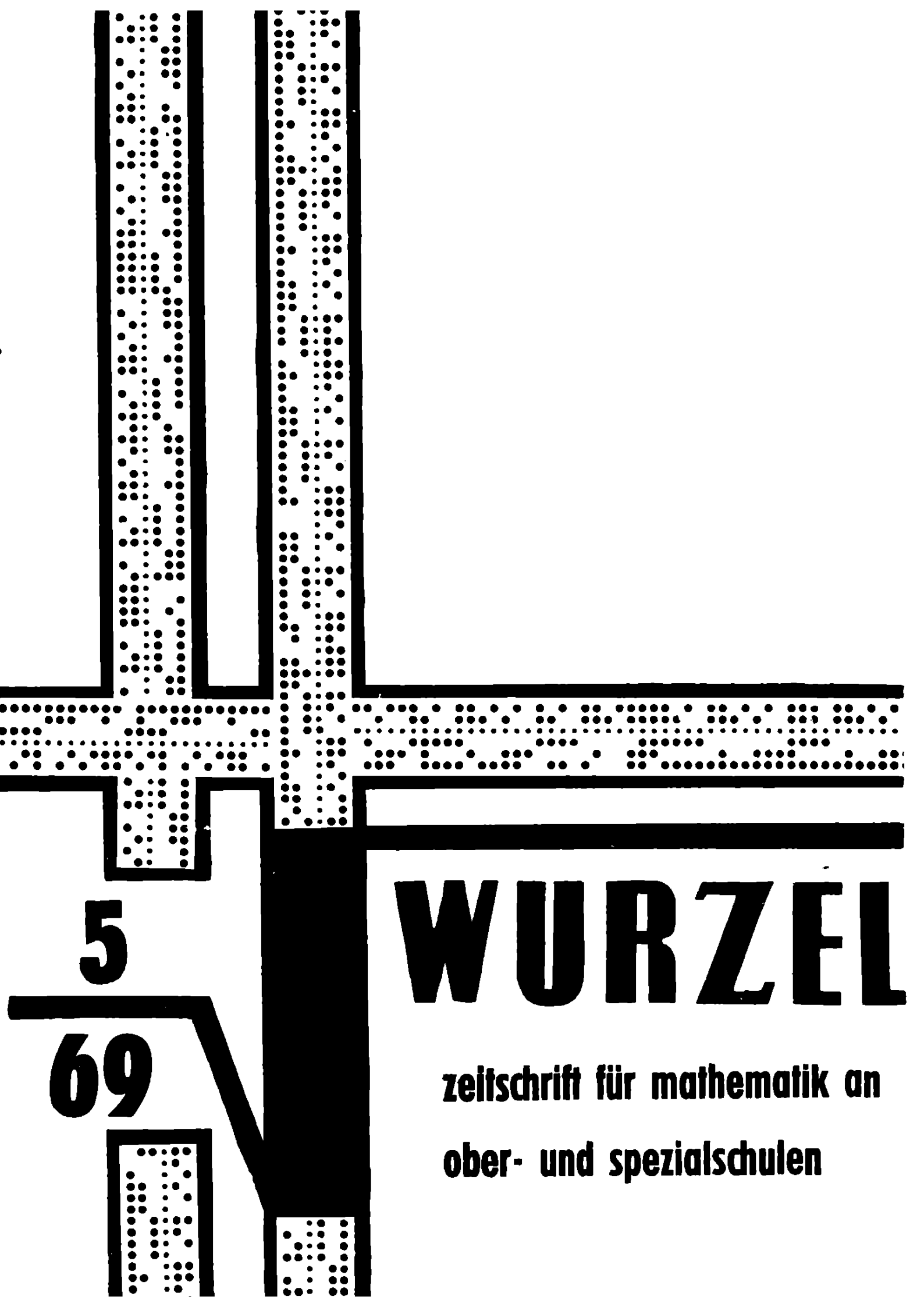
$$\begin{aligned} 1 \leq (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ &\leq a^4 + 4a^4 + 3a^4 + 3b^4 + 4b^4 + b^4 \\ &= 8(a^4 + b^4) \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung

$$\frac{1}{8} \leq a^4 + b^4$$

(A19): Die Lösung der Aufgabe ist einfach. Man markiert durch Meßblatten am Ufergelände eine Hilfsgerade g und benutzt die Eigenschaften der Geradenspiegelung, um eine zur gesuchten Strecke kongruente zu konstruieren. Dazu braucht man nur von zwei Meßpunkten M_1, M_2 auf der Spiegelgeraden aus am Theodoliten die Winkel zwischen P_i, M_j ($i = 1, 2; j = 1, 2$) und g einzustellen und diese Winkel aufs Festland zu übertragen.





5

69

WURZEL

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

Herausgegeben vom FDJ -Aktiv der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Dr. Eike Hertel, Wolfgang Ulbrich
Mitarbeiter: W.Kiefer, N.Kuse, R.Lorenz, L.Staiger,
E.Taubald, R.Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Eine Methode der statistischen Qualitätskontrolle I

1. Problemstellung

Mit der Qualitätskontrolle will sich ein Betrieb davor schützen, daß minderwertige Erzeugnisse in seine eigene Produktion gelangen oder daß durch Auslieferung fehlerhafter Produkte Reklamationen auftreten. Dabei ist es vielfach nicht möglich, jedes Erzeugnis einzeln zu prüfen, da dabei das Erzeugnis zerstört werden kann (z.B. Munition, Sicherungen) oder dieser Prüfvorgang zu langwierig würde (Brenndauer von Glühlampen). Vor der Abteilung Qualitätskontrolle eines Betriebes steht also z.B. die Aufgabe, über eine Lieferung großen Umfangs von gleichartigen Waren auszusagen, wieviele unbrauchbare Stücke sie etwa enthält, wobei diese Lieferung nicht Stück für Stück kontrolliert werden soll. Dazu wird man eine bestimmte Anzahl von Stücken beliebig (d.h. willkürlich) aus der Lieferung herausgreifen, eine sogenannte Stichprobe, und diese Stück für Stück kontrollieren, um dann von der Anzahl der minderwertigen Stücke in der Stichprobe auf die Anzahl der minderwertigen Stücke in der gesamten Lieferung zu schließen.

2. Die hypergeometrische Verteilung

Wir betrachten einen Behälter, der N Kugeln enthält, unter denen sich S schwarze und $N-S$ weiße Kugeln befinden ($0 \leq S \leq N$). Wir greifen wie bei einer Lotterie aus dem Behälter willkürlich n Kugeln heraus und suchen die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich unter den n gezogenen genau s schwarze Kugeln befinden ($0 \leq s \leq n \leq N$). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit wollen wir mit

$P_S(s)$ bezeichnen. (Zur näheren Erläuterung des Begriffes der Wahrscheinlichkeit siehe auch "Wurzel"-Nr.6/68 und 7/8/68 "Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung") Bei festem N und n soll P_S das Verteilungsgesetz sein, das sich auf "von N Kugeln sind S schwarz" bezieht. Berechnen wir $P_S(s)$:
Aus dem Behälter mit N Kugeln können n Kugeln auf

$$\frac{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1)}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$$

verschiedene Arten entnommen werden. Diese Anzahl der Möglichkeiten leitet man durch einfache Überlegungen her (Kombinatorik). Man schreibt $N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = N!$ (N Fakultät), wobei $0! = 1$ gilt. Damit kann man unseren Bruch als

$$\frac{N!}{(N-n)!n!} = \binom{N}{n} \quad (N \text{ über } n)$$

schreiben. Somit ist die Anzahl der möglichen Fälle gegeben durch $\binom{N}{n}$. Wir werden es als "günstigen Fall" bezeichnen, wenn sich unter den n gezogenen Kugeln genau s schwarze (und $n-s$ weiße) befinden. s schwarze Kugeln können auf $\binom{S}{s}$ und $n-s$ weiße auf $\binom{N-S}{n-s}$ verschiedene Arten gezogen werden. Die Anzahl der günstigen Fälle ist also $\binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s}$, denn jede der $\binom{S}{s}$ Möglichkeiten für das Herausnehmen einer schwarzen Kugel kann mit jeder der $\binom{N-S}{n-s}$ Möglichkeiten für das Herausnehmen einer weißen Kugel kombiniert werden. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, das Verhältnis der Anzahlen von günstigen und möglichen Fällen, ist nun

$$P_S(s) = \frac{\binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$

Die Verteilung P_S ist das System der Wahrscheinlichkeiten $P_S(s)$ für alle s mit $0 \leq s \leq \min(n, S)$. Man nennt P_S Hypergeometrische Verteilung, wobei das sogenannte Wahrscheinlichkeitsfeld $[M, \mathfrak{M}, P_S]$ folgende Gestalt hat:

$M = \{0, 1, \dots, \min(n, S)\}$, d.h. M besteht aus allen ganzen Zahlen, die größer oder gleich Null und nicht größer als die kleinere der beiden Zahlen n und S sind. $\mathfrak{M}$ ist das System aller Teilmengen von M , das in der Mengenlehre als Potenzmenge bezeichnet wird (z.B. $\{0\} \in \mathfrak{M}$, $\{0, 4, 5\} \in \mathfrak{M}$ falls $5 \leq \min(n, S)$). Man kann nun die Wahrscheinlichkeit $P_S(A)$ für jedes Element A von $\mathfrak{M}$, d.h. für jede Teilmenge von M , angeben:

$$P_S(A) = \sum_{s \in A} P_S(s)$$

$$\text{z.B. } A = \{0,1,2\}: P_S(0,1,2) = \sum_{s=0,1,2} P_S(s) = P_S(0) + P_S(1) + P_S(2),$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einer "Auswahl auf gut Glück" vom Umfang n aus den N Kugeln (S schwarze) höchstens zwei schwarze Kugeln enthalten sind, setzt sich additiv zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten für "0 schwarze", "1 schwarze" und "2 schwarze".

In Nr.6/69 werden wir eine Anwendung auf das gestellte Problem geben.

L. Kantel

Forschungsstudent (Abt. Wahrscheinlichkeitstr.)
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Aufgaben (Serie 5/69)

(A49) Über den Seiten eines konvexen Vierecks, dessen Diagonalen sich rechtwinklig schneiden, seien rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke mit den Flächeninhalten F_1, F_2, F_3, F_4 errichtet. Man zeige, daß $F_1 + F_3 = F_2 + F_4$ gilt, wenn F_1 und F_3 die Inhalte zweier nicht aneinandergrenzender Dreiecke sind.

(A50) In der linken oberen Ecke eines 2x8-Schachbrettes steht ein Turm. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es, den Turm in die rechte untere Ecke zu ziehen, wenn keine rückläufigen Züge zugelassen sind?

(A51) Man konstruiere ein Dreieck ABC, wenn die Fußpunkte der Höhen h_a und h_b und die Gerade, auf der die Seite $c = AB$ liegt, gegeben sind.

(A52) Man zeige die Richtigkeit folgender Ungleichung für beliebige n (m - ganz und $m < -2$):

$$m(m^2 + 4m - 4 + n) \leq \frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{2}n^2 + 12$$

(A53) Man löse in ganzen Zahlen die Gleichung

$$xy + 3x - 5y = -3$$

(A54) Man beweise: Sind α , β , γ die Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks, so gilt $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}$.

Preisaufgabe (P. 29)

In einer Ebene seien die vier Eckpunkte eines Quadrates und eine beliebige, durch einen dieser Eckpunkte verlaufende Gerade gegeben. Man konstruiere nur mit dem Lineal die Schnittpunkte des Umkreises des Quadrates mit der Geraden.

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Einführung in die Gruppentheorie I

Der Gruppenbegriff gehört heute zu den bedeutendsten Grundbegriffen der Mathematik. Zunächst wurde er als wichtiges Hilfsmittel zur Lösung algebraischer Probleme im vorigen Jahrhundert entwickelt (siehe "Evariste Galois - Mathematiker und Patriot" in "Wurzel"-Nr.7/8/68). Vor allem dem deutschen Mathematiker Felix Klein (1849-1925) ist es zu verdanken, daß der Gruppenbegriff auch in die Geometrie Eingang gefunden hat, ja dort zu einem Grundbegriff und zu einem allgemeinen geometrischen Einteilungsprinzip geworden ist. Die Gruppentheorie spielt heute in allen mathematischen Disziplinen, auch in den neuesten - wie der Automatentheorie - eine wichtige Rolle, und gegenwärtig kommt ihre große Tragweite auch in der Physik mehr und mehr zur Geltung.

Wir wollen uns in diesem Artikel mit dem Gruppenbegriff ein wenig vertraut machen und beginnen dazu zunächst mit einigen be-

kannten elementaren Beispielen.

I. Beispiele

1. Ganze Zahlen

In der 7. und 8. Klasse rechnet man bereits mit ganzen Zahlen; wir wollen die Menge $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ aller ganzen Zahlen mit Γ bezeichnen. Es werden dann in der Schule gewisse einfache Rechengesetze etwa bezüglich der Addition zusammengestellt, z.B.:

O) Die Summe von zwei ganzen Zahlen ist stets wieder eine ganze Zahl. (Etwa $(-3) + 2 = (-1)$).

A) Bei der Summe von drei ganzen Zahlen ist es gleichgültig, welche von zwei aufeinanderfolgenden Summanden zuerst zusammengefaßt wird, etwa:

$$s = [(-3) + 2] + 4 = (-1) + 4 = 3,$$

$$s' = (-3) + [2 + 4] = (-3) + 6 = 3, \text{ also } s = s'.$$

N) Es gibt eine ganze Zahl (nämlich die Null), so daß jede beliebige ganze Zahl erhalten bleibt, wenn man zu ihr diese spezielle Zahl (d.h. die Null) addiert. Z.B.:

$$(-3) + 0 = (-3), \quad 6 + 0 = 6.$$

I) Es gibt zu jeder beliebigen ganzen Zahl stets eine andere, so daß die Summe dieser beiden Zahlen gleich Null wird. Z.B.:

$$(-3) + 3 = 0, \quad 6 + (-6) = 0.$$

K) In jeder Summe zweier ganzer Zahlen sind die Summanden vertauschbar. Z.B.: $(-3) + 2 = 2 + (-3)$.

Mit Hilfe der Elementbeziehung $m \in M$ ("m ist Element der Menge M") und des Folgepfeils $A \rightarrow B$ ("aus der Aussage A folgt die Aussage B") wollen wir in Zukunft solche Grundeigenschaften folgendermaßen charakterisieren:

O) Unbeschränkte Ausführbarkeit der Addition:

$$a \in \Gamma, b \in \Gamma \rightarrow (a + b) \in \Gamma.$$

A) Assoziativgesetz:

$$a, b, c \in \Gamma \rightarrow (a + b) + c = a + (b + c).$$

N) Existenz eines neutralen Elements $0 \in \Gamma$:

$$a \in \Gamma \rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$$

I) Existenz eines entgegengesetzten Elements (Inverses):

$$a \in \Gamma \rightarrow \text{es gibt ein } (-a) \in \Gamma \text{ mit}$$

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

K) Gesetz der Kommutativität:

$$a, b \in \Gamma \rightarrow a + b = b + a.$$

Man kann sich nun die Frage vorlegen, ob bezüglich der Multiplikation im Bereich Γ der ganzen Zahlen dieselben Gesetze gelten. Man sieht sofort, daß bzgl. der Multiplikation O), A) und K) richtig sind. N) gilt ebenfalls, nur muß als neutrales Element jetzt die 1 gewählt werden, denn es ist für jede ganze Zahl a :

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

Als einziges der aufgeführten Gesetze ist I) verletzt, denn etwa zur ganzen Zahl 2 gibt es bzgl. der Multiplikation kein Inverses x ($x \in \Gamma$) mit $2 \cdot x = 1$. Um diese Beziehung zu erfüllen, müßte $x = \frac{1}{2}$ sein, $\frac{1}{2}$ ist aber keine ganze Zahl.

2. Rationale Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen R besteht bekanntlich aus allen Zahlen p , die sich als Quotient $p = \frac{a}{b}$ zweier ganzer Zahlen ($a, b \in \Gamma, b \neq 0$) darstellen lassen. Untersucht man die in R erklärte Multiplikation hinsichtlich der obigen Eigenschaften, so stellt man fest, daß alle Eigenschaften erfüllt sind bis auf die Tatsache, daß es zur rationalen Zahl Null kein Inverses gibt, d.h. es gibt keine rationale Zahl r mit $0 \cdot r = 1$.

Betrachtet man daher die Menge $R' = R \setminus \{0\}$, d.h. die Menge aller rationalen Zahlen ohne die Null, so gilt wieder durchweg:

$$O) p, q \in R' \rightarrow p \cdot q \in R',$$

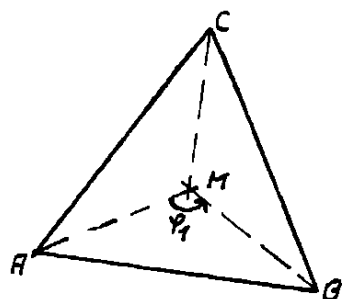
$$A) (p \cdot q)r = p(q \cdot r) \text{ für } p, q, r \in R',$$

$$N) p \in R' \rightarrow 1 \cdot p = p \cdot 1 = p,$$

$$I) p \in R' \rightarrow \text{es gibt genau ein } q \in R' \text{ mit} \\ p \cdot q = q \cdot p = 1 \quad (q = \frac{1}{p}),$$

$$K) p, q \in R' \rightarrow p \cdot q = q \cdot p.$$

3. Drehungen eines gleichseitigen Dreiecks



Schließlich betrachten wir noch ein völlig anders geartetes (nämlich geometrisches) Beispiel. Dazu stellen wir uns ein beliebiges gleichseitiges Dreieck ABC in der Ebene vor. Nun suchen wir solche Drehungen des Dreiecks, die die Ecken des Dreiecks in sich über-

führen, z.B. soll A nach B, B nach C und C nach A überführt werden. Es zeigt sich, daß es im wesentlichen drei solche Drehungen

gibt, die alle Drehungen um den Mittelpunkt M (z.B. Schnittpunkt der Höhen) des Dreiecks sind. Wir beschreiben diese Drehungen wie folgt:

D_1 : Drehung um M und den Winkel $\varphi_1 = +120^\circ$ (mathematisch positiv, d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn); diese Drehung entspricht dem obigen Beispiel, d.h. durch D_1 geht A nach B, B nach C und C nach A.

D_2 : Drehung um M und den Winkel $\varphi_2 = +240^\circ$: A nach C, B nach A und C nach B.

D_3 : Drehung um M und den Winkel $\varphi_3 = +360^\circ$: A nach A, B nach B und C nach C, d.h. diese Drehung ändert eigentlich die Ecken des Dreiecks nicht, und wir setzen sie deshalb gleich der Drehung D_0 um den Winkel $\varphi_0 = 0^\circ$ und nennen $D_0 = D_3$ die identische "Drehung".

Man könnte noch zwei Drehungen durch Umorientierung der Drehwinkel φ_1 bzw. φ_2 gewinnen:

$\bar{D}_1$: $\bar{\varphi}_1 = -120^\circ$ (A nach C, B nach A, C nach B) und

$\bar{D}_2$: $\bar{\varphi}_2 = -240^\circ$ (A nach B, B nach C, C nach A).

Offenbar leistet $\bar{D}_1$ dasselbe wie D_2 , deshalb setzen wir $\bar{D}_1 = D_2$ und analog $\bar{D}_2 = D_1$. Auch Drehungen um M und Drehwinkel $\varphi > 360^\circ$ liefern nichts Neues.

Wir betrachten jetzt die Menge $\delta = \{D_0, D_1, D_2\}$ und erklären die Operation $D_i \circ D_j$ als Hintereinanderausführung der Drehung D_j und (anschließend) der Drehung D_i , wobei i und j die Werte 0, 1, 2 annehmen können. Beispiel:

$$D_1 \circ D_2 \text{ (A} \rightarrow \text{B} \rightarrow \text{C, B} \rightarrow \text{C} \rightarrow \text{A, C} \rightarrow \text{A} \rightarrow \text{B)},$$

also insgesamt geht A nach C, B nach A und C nach B über, d.h.

$D_1 \circ D_1 = D_2$! Allgemein gilt nun wieder

O) $D_i, D_j \in \delta \rightarrow (D_i \circ D_j) \in \delta$,

A) $(D_i \circ D_j) \circ D_k = D_i \circ (D_j \circ D_k)$,

N) $D_i \in \delta \rightarrow D_i \circ D_0 = D_0 \circ D_i = D_i$,

I) $D_i \in \delta \rightarrow$ es gibt genau ein $D_j \in \delta$ mit $D_i \circ D_j = D_j \circ D_i = D_0$
(es ist nämlich $D_1 \circ D_2 = D_2 \circ D_1 = D_0 \circ D_0 = D_0$),

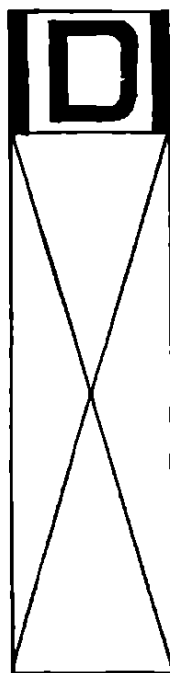
K) $D_i \circ D_j = D_j \circ D_i$.

II. Definition der Gruppe

Die Reihe der obigen Beispiele läßt sich beliebig fortführen. Allen diesen Beispielen ist etwas gemeinsam: es handelt sich

um eine Menge von Objekten (Zahlen, Drehungen, ...) in der eine Operation (Addition, Multiplikation, $\circ$, ...) erklärt ist, bzgl. derer die Gesetze O), A), N), I) und K) gelten. Das berechtigt, ganz allgemein, für solche Strukturen einen Begriff zu schaffen, der dieses Gemeinsame gerade charakterisiert - und das ist der mathematische Begriff der Gruppe.

D e f i n i t i o n:



Eine Gruppe ist eine beliebige Menge G , die mindestens ein Element enthalten soll und in der eine Operation $*$ zwischen je zwei Elementen erklärt ist, welche folgende Eigenschaften hat:

- O) $g, h \in G \rightarrow (g * h) \in G$,
- A) $(f * g) * h = f * (g * h)$,
- N) Es gibt ein $g_0 \in G$, so daß für alle $g \in G$ gilt:
 $g_0 * g = g * g_0 = g$ und
- I) $g \in G \rightarrow$ es gibt ein $\bar{g} \in G$ mit
 $g * \bar{g} = \bar{g} * g = g_0$.

Wenn in einer Gruppe G außerdem noch die Eigenschaft K) $g, h \in G \rightarrow g * h = h * g$ erfüllt ist, so heißt G kommutative oder abelsche Gruppe - nach dem hervorragenden norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802 - 1829).

Dr. E. Hertel

Oberassistent

an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Lösungen

(A4): Gegeben seien eine Gerade g und zwei Punkte P_1 und P_2 auf derselben Seite von g . Man konstruiere einen Kreis durch P_1 und P_2 , der g berührt.
Zur Lösung dieser Aufgabe gibt es mehrere Möglichkeiten. Drei davon geben wir an.

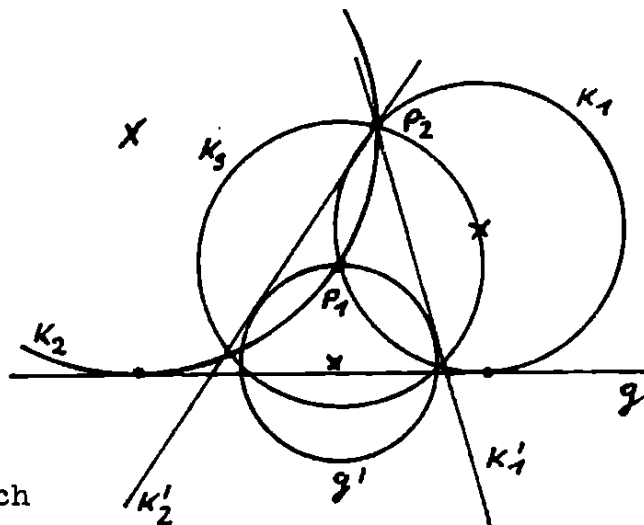
1. Lösung (durch Spiegelung am Kreis)

a) Konstruktion

Voraussetzung: P_1 liege nicht auf g .

Als Spiegelkreis K_g wählt man den Kreis um P_1 mit dem Ra-

dius $\overline{P_1P_2}$. Man spiegelt zunächst g an K_S . Das Bild von g ist ein Kreis g' durch P_1 . Durch P_2 legt man Tangenten an g' (K'_1 und K'_2) und spiegelt sie an K_S . Die Bilder von K'_1 und K'_2 - es sind K_1 und K_2 - sind die Lösungen der Aufgabe.



b) Beweis

K'_1 und g' haben nach Konstruktion genau

einen Punkt gemeinsam. Nach den Abbildungsgesetzen der Spiegelung am Kreis haben dann auch K_1 und g genau einen Punkt gemeinsam, d.h. K_1 berührt g . Da P_2 auf K_S liegt und K'_1 nach Konstruktion eine Gerade ist, ist K_1 ein Kreis durch P_1 und P_2 . Genauso zeigt man, daß K_2 die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

c) Determination

1. Fall: P_2 liegt auf g : Dann liegt P_2 auch auf g' . In diesem Fall gibt es nur eine Tangente durch P_2 , deshalb erhält man als Lösung nur einen Kreis.
2. Fall: $P_1P_2 \parallel g$: Daraus folgt: Eine der beiden Tangenten durch P_2 verläuft durch P_1 . Diese Gerade geht bei der Spiegelung in sich selbst über und man erhält ebenfalls als Lösung nur einen Kreis.
3. Fall: P_1 liegt nicht auf g und $P_1P_2 \nparallel g$: In diesem Fall gibt es als Lösung zwei Kreise, da zwei verschiedene Tangenten existieren.

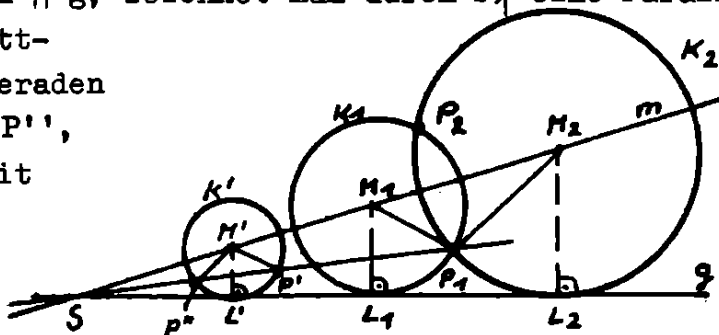
(Literatur: W. Börner, "Die Spiegelung am Kreis - eine geometrische Abbildung mit interessanten Anwendungen", "Wurzel"-Nr. 1/68 bis 3/68)

2. Lösung (Ähnlichkeitskonstruktion)

a) Konstruktion

Man zeichne die Mittelsenkrechte m zu $\overline{P_1P_2}$. Auf m legt man einen Punkt M' fest und zeichnet um M' einen Kreis K' , der

g berührt. Man verbindet P_1 mit dem Schnittpunkt S von m und g. Falls $m \parallel g$, zeichnet man durch P_1 eine Parallele zu g. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit K' , P' und P'' , verbindet man mit M' und zeichnet die Parallelen durch P_1 . Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit m sind die Mittelpunkte M_1 und M_2 der gesuchten Kreise K_1 und K_2 .



b) Beweis

L_1 , L_2 und L' seien die Projektionen von M_1 , M_2 und M' auf g.

1. Fall: $m \parallel g$: Nach Konstruktion ist das Viereck $M'P'P_1M_1$ ein Parallelogramm und es gilt $\overline{M'P'} = \overline{M_1P_1}$. Weiterhin gilt $\overline{M'P'} = \overline{M'L'} = \overline{M_1L_1}$, folglich gilt $\overline{M_1P_1} = \overline{M_1L_1}$.

2. Fall: $m \nparallel g$: Nach Konstruktion gilt $M'P' \parallel M_1P_1$ und $M_1L_1 \parallel M'L'$. Daraus folgt:

$$\triangle SP'M' \sim \triangle SP_1M_1 \text{ und } \triangle SM_1L_1 \sim \triangle SM'L'.$$

Nach den Strahlensätzen folgt weiter:

$$\overline{SM'} : \overline{M'P'} = \overline{SM_1} : \overline{M_1P_1} \text{ und}$$

$$\overline{SM'} : \overline{M'L'} = \overline{SM_1} : \overline{M_1L_1}.$$

Wegen $\overline{M'P'} = \overline{M'L'}$ folgt hieraus wie im Fall 1

$$\overline{M_1P_1} = \overline{M_1L_1}.$$

L_1 liegt also auf K_1 . Da M_1L_1 senkrecht auf g steht, ist g Tangente von K_1 . K_1 verläuft also durch P_1 und berührt g. Da M_1 auf der Mittelsenkrechten von P_1P_2 liegt, liegt P_2 auch auf K_1 .

Ebenso zeigt man, daß K_2 den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Die Determination überlassen wir dem Leser.

3. Lösung (Sekanten-Tangenten-Satz)

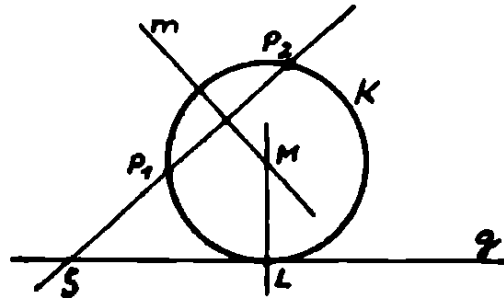
a) Analysis

Angenommen, die Aufgabe ist gelöst und K ist ein Kreis durch P_1 und P_2 , der g berührt. Dann liegt der Mittelpunkt von K auf der Mittelsenkrechten m der Sehne $\overline{P_1P_2}$.

Verlängert man P_1P_2 , so erhält man mit g den Schnittpunkt S , oder P_1P_2 verläuft parallel zu g . Ist L der Berührungspunkt von K und g , so gilt im ersten Fall der Sekanten-Tangenten-Satz

$$\overline{SP_1} \cdot \overline{SP_2} = (\overline{SL})^2.$$

Falls $P_1P_2 \parallel g$ gilt, ist m identisch mit ML . In beiden Fällen läßt sich der Punkt L und daraus der Punkt M konstruieren.



b) Konstruktion

1. Fall: $P_1P_2 \nparallel g$: Man nehme auf m einen beliebigen Punkt an und schlage um ihn einen Kreisbogen K' , der durch P_1 und P_2 verläuft. Von S lege man an K' eine Tangente an. Der Berührungspunkt sei L' . Man trage von S aus auf g die Strecke $\overline{SL'}$ ab. Der Endpunkt dieser Strecke, L , ist ein Punkt des Kreise
2. Fall: $P_1P_2 \parallel g$: Den Punkt L erhält man als Schnittpunkt von m und g .

Aus den drei Punkten P_1 , P_2 und L läßt sich in beiden Fällen eindeutig ein Kreis konstruieren.

c) Determination

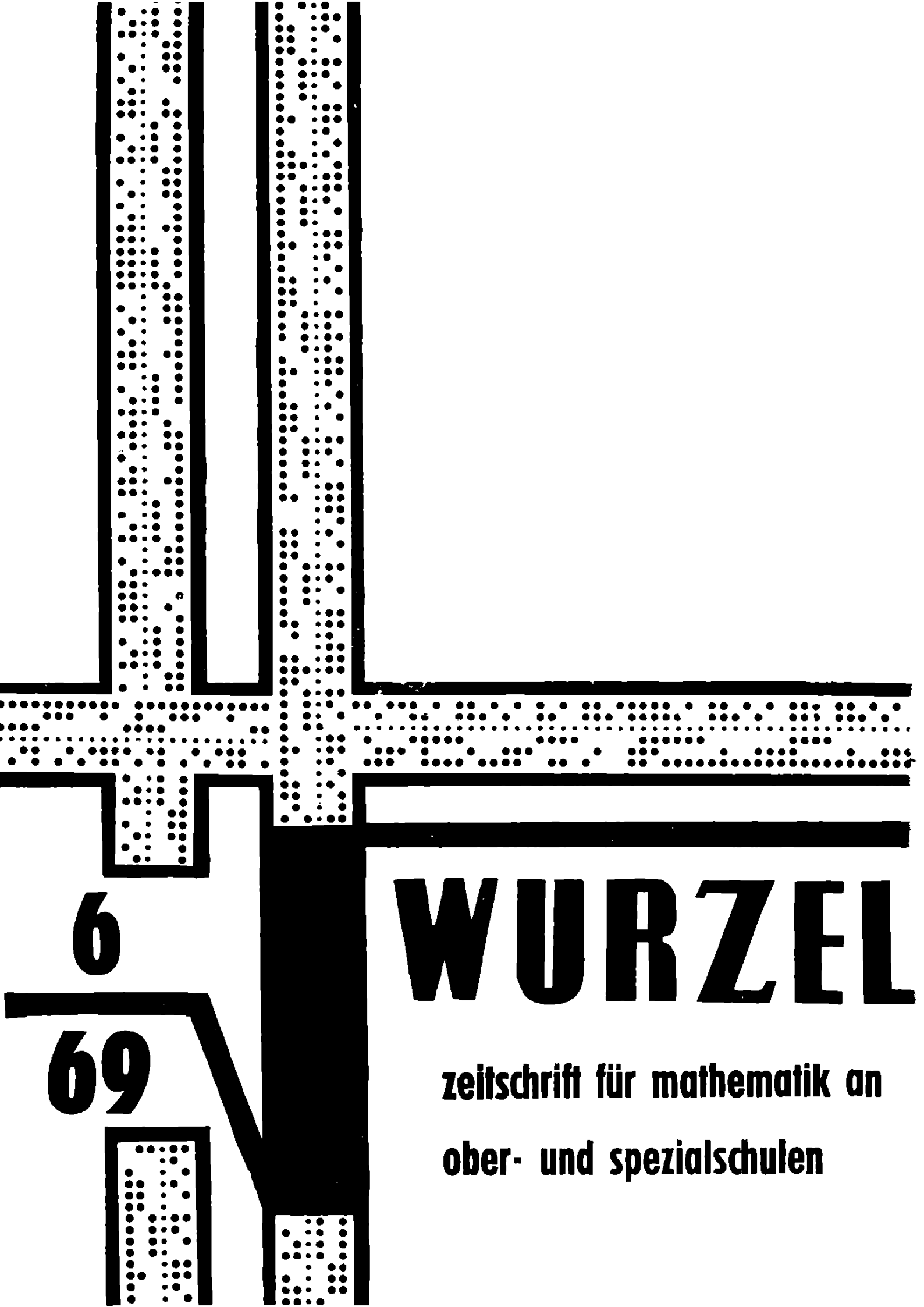
1. Fall: $P_1P_2 \parallel g$: Es gibt nur einen Kreis als Lösung
2. Fall: P_1 (oder P_2) liegt auf g : Daraus folgt $\overline{SL} = 0$, d.h. $S \equiv L$. Es gibt ebenfalls nur einen Kreis als Lösung.
3. Fall: $P_1P_2 \nparallel g$, P_1 und P_2 liegen nicht auf g : Dann gib es auf g zwei Punkte L bzw. L_1 , für die gilt:

$$\overline{SL} = \overline{SL_1} = \overline{SL'}.$$
 Es gibt deshalb auch zwei Kreise K bzw. K_1 als Lösung.

(A31): Die Zahl besitzt

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = (1 + 1)^5 = 2^5$$

Teiler



6

69

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom FDJ -Aktiv der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Dr. Eike Hertel, Wolfgang Ulbrich
Mitarbeiter: W.Kiefer, N.Kuse, R.Lorenz, L.Staiger,
E.Taubald, R.Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Eine Methode der statistischen Qualitätskontrolle II

3. Anwendung auf das gestellte Problem

Wir stellen fest, daß das in 1. beschriebene Verfahren mit dem Kugelmodell übereinstimmt. Mit Hilfe der hypergeometrischen Verteilung können wir also feststellen, wie groß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Stichprobe aus n Objekten mit s unbrauchbaren Objekten ist, wenn die gesamte Lieferung aus N Objekten mit S unbrauchbaren Objekten besteht. Da wir aber S nicht kennen, müssen wir einen Schätzwert $\hat{S}$ angeben. Wir wählen $\hat{S}$ so, daß die zugehörige Wahrscheinlichkeit unserer tatsächlich beobachteten Stichprobe $P_{\hat{S}}(s)$ maximal wird. Dazu fassen wir $P_{\hat{S}}(s)$ als Funktion von S auf und untersuchen, wann die Ungleichungen $P_{\hat{S}}(s) < P_{\hat{S}-1}(s)$ oder $P_{\hat{S}}(s) > P_{\hat{S}-1}(s)$ gelten.

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{P_{\hat{S}}(s)}{P_{\hat{S}-1}(s)} &= \frac{\binom{S}{s} \binom{N-S}{n-s}}{\binom{S-1}{s} \binom{N-S+1}{n-s}} \\ &= \frac{S!(N-S)!(S-s-1)!(N-S-n+s+1)!(n-s)!}{(S-s)!s!(N-S-n+s)!(n-s)!(S-1)!(N-S+1)!} \\ &= \frac{S \cdot (N-S-n+s+1)}{(N-S+1)(S-s)} . \end{aligned}$$

Also gilt $P_{\hat{S}}(s) < P_{\hat{S}-1}(s) \iff \frac{P_{\hat{S}}(s)}{P_{\hat{S}-1}(s)} < 1$

$$\iff S \cdot (N-S-n+s+1) < (N-s+1)(S-s)$$

$$\iff SN - S^2 + Ss - Sn + S < NS - Ns - S^2 + Ss + S - s$$

$$\iff S > \frac{N+1}{n} \cdot s$$

Ebenso gilt: $P_S(s) > P_{S-1}(s) \leftrightarrow S < \frac{N+1}{n} \cdot s$

(" $\leftrightarrow$ ": genau dann, wenn).

Das bedeutet: $P_S(s)$ als Funktion von S wächst für $S < \frac{N+1}{n} \cdot s$.

Ihr Maximum nimmt sie für die größte ganze Zahl, die den Wert $\frac{N+1}{n} \cdot s$ nicht übersteigt, d.h. für $\hat{S} = \left[\frac{N+1}{n} \cdot s \right]$ an. Die Aussage der Qualitätskontrolle lautet:

Die wirkliche Anzahl S der unbrauchbaren Objekte liegt in der Nähe des Wertes $\hat{S} = \left[\frac{N+1}{n} \cdot s \right]$.

Wenn wir annehmen, daß $n > 1$, $s < n$ und $\frac{N}{n}$ eine ganze Zahl ist, so lautet die Aussage $\hat{S} = \left[\frac{N}{n} \cdot s + \frac{s}{n} \right] = \frac{N}{n} \cdot s$, also $\frac{\hat{S}}{N} = \frac{s}{n}$, d.h. es ist anzunehmen, daß das Verhältnis von schlechten und guten Waren in der gesamten Lieferung mit dem Verhältnis in der Stichprobe übereinstimmt, was sehr einleuchtend ist.

Abschließend noch ein Zahlenbeispiel:

$N = 1000$, $n = 300$, $s = 10$. S ist nicht bekannt. Wir wissen, daß die Ungleichung $S \geq 10$ gilt. Nimmt man nun für die gesamte Lieferung $S = 10$ an, so erhält man mit

$$P_{10}(10) = \frac{\binom{10}{10} \binom{1000-10}{300-10}}{\binom{1000}{300}} \approx 0,0008$$

für die wirklich aufgetretene Zahl $s = 10$ eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit. Auch die Annahme, daß S sehr groß ist, z.B. $S = 90$, ist unhaltbar, denn $P_{90}(10) \approx 0,0001$ ist ebenfalls sehr klein. Mit $\hat{S} = \left[\frac{N+1}{n} \cdot s \right]$ erhält man $S = 33$ und $P_{33}(10) \approx 0,125$. Die größte Wahrscheinlichkeit hat die festgestellte Anzahl $s = 10$ also bei einer Lieferung mit 33 unbrauchbaren Objekten. Bestehen nun für das Zulassen der Lieferung kritische Werte $\frac{N}{S}$, also untere Schranken, so kann sofort über Zulassung oder Ablehnung entschieden werden. Natürlich treten dabei Fälle auf, derart, daß das wirkliche S vom Schätzwert $\hat{S}$ wesentlich abweicht und so eine relativ gute Lieferung abgewiesen wird oder eine Lieferung mit zu großer Fehlerrate passieren darf. Dieses "Risiko" geht man ein, da man auch die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen kann und im Endeffekt diese Fehler nicht sehr häufig sind.

L. Kantel

Forschungsstudent (Abt. Wahrscheinlichkeitsr.)
an der Sektion Mathematik
der FSU Jena

Aufgaben (Serie 6/69)

(A55) Man suche eine natürliche Zahl n so, daß das

	Gleichungssystem	$\begin{aligned} nx - y &= 5 \\ 2x + 3ny &= 7 \end{aligned}$
	eine Lösung besitzt, bei der x positiv und y negativ ist.	

(A56) Man berechne

	$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1)$
--	---

(A57) Man zeige: Keine der aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 gebildeten Zahlen ist Teiler einer anderen solchen Zahl.

(A58) Man zeige, daß $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ eine irrationale Zahl ist.

(A59) Auf einem Kreisbogen liegen die Punkte M, N und A.

	A und M teilen den Bogen im Verhältnis 3:13 und A und N im Verhältnis 4:24. Man berechne den Winkel $\angle MAN$.
--	--

(A60) Man stelle die Fibonaccische Zahlenfolge

	$(a_0 = a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2})$ als Summe zweier geometrischer Folgen dar.
--	---

Preisaufgabe (P.30)

	Man zeige, daß $1155^{1958} + 34^{1958}$ keine Quadratzahl ist.
--	---

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Einführung in die Gruppentheorie II

Nachdem wir im ersten Teil dieses Artikels ("Wurzel" 5/69) den Begriff der Gruppe definiert und einige elementare Beispiele betrachtet haben, wollen wir jetzt speziellere Gruppen betrachten.

III. Endliche Gruppen

Wie wir in der Gruppensdefinition gefordert hatten, ist eine Gruppe eine nichtleere Menge G , in der eine zweistellige Operation erklärt ist, die wir in der Definition durch $*$ bezeichnet hatten. Genaugenommen muß man zwischen der Menge G und der zugehörigen Gruppe unterscheiden, denn zur Gruppe gehört ja außer der Menge eben noch eine Operation $*$. Wir wollen deshalb für die Gruppe die Bezeichnung $[G, *]$ wählen. Die Bezeichnung der Operation ist dabei für allgemeine Gruppen (deren Elemente keine Zahlen sind) unwesentlich. Man benutzt aber gern die aus der Arithmetik üblichen Bezeichnungsweisen der Addition oder Multiplikation für die Gruppenoperationen. Im ersten Fall spricht man von einer additiven Gruppe $[G, +]$, und das neutrale Element nennt man dann auch "Nullelement". Im zweiten Fall nennt man die Gruppe $[G, \cdot]$ multiplikativ und das entsprechende neutrale Element "Einselement". Wir wollen uns hier auf die multiplikative Schreibweise allgemeiner Gruppen beschränken. So hätten wir z.B. im Falle der Drehgruppe eines gleichseitigen Dreiecks die Hintereinanderausführung zweier Drehungen $D_i \circ D_j$ auch einfach (multiplikativ) durch $D_i \cdot D_j$ bzw. $D_i D_j$ bezeichnen können.

D e f i n i t i o n:



Eine Gruppe $[G, \cdot]$ heißt endlich, wenn die Menge G nur endlich viele Elemente enthält.

Wir wollen nun die Frage untersuchen, ob es zu jeder natürlichen Zahl n ($n \geq 1$) eine Gruppe $[G_n, \cdot]$ gibt, wo G_n genau n Elemente enthält. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall:

$n = 1$: Die Menge G_1 müßte also genau ein Element a_1 enthalten, $G_1 = \{a_1\}$. Da keine weiteren Elemente vorhanden sind, kann a_1 nur mit sich selbst multipliziert werden, und das Ergebnis muß wieder a_1 sein: $a_1 a_1 = a_1$. Wenn wir die Operation so definiert haben, so ist sofort klar, daß alle Gruppeneigenschaften 0), A), N), I) und "sogar" K)

erfüllt sind. a_1 ist nämlich insbesondere Einselement der Gruppe $[G_1, \cdot]$, und a_1 ist ferner zu sich selbst invers, d.h. das im Sinne von I) zu a_1 inverse Element ist a_1 . Wir können also folgendes Ergebnis formulieren: Jede einelementige Menge $M = \{m\}$ wird zu einer Gruppe $[M, \cdot]$ durch Einführung der "Multiplikation" (1) $m \cdot m = m$. Alle diese Gruppen haben dieselbe Struktur, d.h. die Operation muß immer im Sinne von (1) definiert werden. Man sagt deshalb auch, daß es bis auf Isomorphie genau eine Gruppe $[M, \cdot]$ gibt, wobei M einelementig ist.

$n = 2$: Gegeben sei die Menge $G_2 = \{a_1, a_2\}$. Wir wollen in G_2 eine Multiplikation erklären, so daß $[G_2, \cdot]$ Gruppe wird. Damit N) gilt, muß ein Element die Rolle eines Einselementes spielen, etwa a_1 , d.h. es muß gelten:

$$(2) a_1 a_1 = a_1 \text{ und } (3) a_1 a_2 = a_2 a_1 = a_2.$$

Dann muß nur noch (4) $a_2 a_2 = a_k$ definiert werden. Um zu entscheiden, welcher der zunächst möglichen zwei Fälle (nämlich $a_k = a_1$ oder $a_k = a_2$) in Frage kommt, ist I) zu beachten. a_2 muß ein Inverses a_i haben mit $a_2 a_i = a_i a_2 = a_1$. Wegen (3) kann a_i aber nur gleich a_2 sein, also ist a_k in (4) gleich a_1 zu setzen, d.h. a_2 ist zu sich selbst invers. Das Ergebnis $a_1 a_1 = a_1$,

$a_1 a_2 = a_2 a_1 = a_2$, $a_2 a_2 = a_1$ kann in einer Multiplikationstafel (Struktur- oder Gruppentafel) zusammengefaßt werden.

	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2
a_2	a_2	a_1

Das Produkt $a_i a_j$ steht in einer solchen Tabelle immer im "Schnittpunkt" der dem ersten Element a_i entsprechenden Zeile mit der dem zweiten Element a_j entsprechenden Spalte. Im hier betrachteten Fall ist die Reihenfolge jedoch unwesentlich, d.h. $[G_2, \cdot]$ ist kommutativ. Die Gruppentafel kommutativer Gruppen muß bezüglich der "Diagonalen" (Produkte $a_i a_i$) symmetrisch sein. Als Ergebnis des Falles $n = 2$ kann wieder formuliert werden: Es gibt bis auf Isomorphie genau eine Gruppe $[M, \cdot]$, wobei M zwei Elemente enthält.

$n = 3$: Sei $G_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$. Damit $[G_3, \cdot]$ Gruppe ist, muß die Multiplikation wieder so erklärt sein, daß ein Element

Einselement ist. Z.B. $a_1: a_1a_1 = a_1, a_1a_2 = a_2a_1 = a_2, a_1a_3 = a_3a_1 = a_3$. Dann ist noch zu definieren $a_2a_3 = a_k$.

1.Fall: $a_k = a_2$: Dann ist (5) $a_2a_3 = a_2a_1 (= a_2)$. Zu a_2 muß es ein Inverses a_i geben mit $a_ia_2 = a_1$, wir multiplizieren (5) von links mit diesem a_i :

$$a_i(a_2a_3) = a_i(a_2a_1),$$

da A) gelten soll, folgt daraus

$(a_ia_2)a_3 = (a_ia_2)a_1$, also $a_1a_3 = a_1a_2$ bzw. $a_3 = a_2$, das stünde im Widerspruch dazu, daß G_3 drei (verschiedene) Elemente enthält, also $a_k = a_2$ unmöglich.

2.Fall: $a_k = a_3$: Dann ist $a_2a_3 = a_1a_3$, von rechts mit dem Inversen zu a_3 multipliziert liefert $a_2 = a_1$. Also ist nur möglich der

3.Fall: $a_k = a_1$, d.h. $a_2a_3 = a_1$.

Nach ähnlichen Überlegungen folgt ferner, daß $a_2a_2 = a_3$ gelten muß und $a_3a_3 = a_2$ sowie $a_3a_2 = a_1$.

Ergebnis: Es gibt bis auf Isomorphie genau eine Gruppe

$[M, \cdot]$, wo M drei Elemente enthält.

Es soll hier noch eine Bemerkung zum Begriff der Isomorphie gemacht werden. Isomorphe Gruppen sind solche, die sich im wesentlichen nur durch die Bezeichnung ihrer Elemente

	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_2	a_3
a_2	a_2	a_3	a_1
a_3	a_3	a_1	a_2

(Tafel I)

(nicht der Anzahl!) und eventuell

durch die Bezeichnung der Operation (+, o, ·) unterscheiden. Etwas genauer fassen wir den Begriff durch folgende Definition:



Zwei endliche Gruppen heißen isomorph, wenn bei geeigneter Wahl der Elementbezeichnung ihre Strukturtafeln übereinstimmen.

Beispiel: Oben haben wir die Gruppe $[G_3, \cdot]$ betrachtet mit der Gruppentafel I. Andererseits kennen wir bereits eine Gruppe mit drei Elementen, nämlich die Gruppe $[d, o]$, wo $d = \{D_0, D_1, D_2\}$ die Menge der Drehungen eines gleichseitigen Dreiecks ist. Stellen wir für diese Gruppe die Strukturtafel auf, so ergibt sich (Tafel II). Bezeichnen wir die Elemente um, d.h. setzen $D_i = a_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2$),

so wird aus Tafel II die Tafel I, und $[G_3, \cdot]$ ist folglich isomorph zu $[\delta, 0]$.

(Tafel II)

	D_0	D_1	D_2
D_0	D_0	D_1	D_2
D_1	D_1	D_2	D_0
D_2	D_2	D_0	D_1

$n = 4$: Wir haben bisher das schöne Ergebnis erhalten, daß es für $n = 1, 2, 3$ jeweils bis auf Isomorphie genau eine Gruppe gibt. Bereits bei $n = 4$ gilt diese scharfe Aussage nicht mehr. Wir geben dazu zwei nicht isomorphe Gruppen $[A_4, \cdot]$ bzw. $[B_4, \cdot]$ durch ihre Strukturtafeln an:

	a_1	a_2	a_3	a_4		b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_1	b_2	b_3	b_3
a_2	a_2	a_1	a_4	a_3	b_2	b_2	b_3	b_4	b_1
a_3	a_3	a_4	a_1	a_2	b_3	b_3	b_4	b_1	b_2
a_4	a_4	a_3	a_2	a_1	b_4	b_4	b_1	b_2	b_3

Diese beiden Gruppen sind aber auch (bis auf Isomorphie) die einzigen Gruppen mit vier Elementen.

Nachdem wir für die Zahlen $n = 1, 2, 3, 4$ unsere eingangs gestellte Frage vollständig gelöst haben (Existenz und Eindeutigkeit), wollen wir die Existenzfrage für allgemeines n beantworten in dem folgenden

S a t z: Zu jeder Menge $G_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ gibt es mindestens  destens eine Gruppe $[G_n, \cdot]$.

Beweis: Wir definieren in G_n eine Operation wie folgt:

$a_k a_1 = a_r$ mit $r = k + 1 - 1 - gn$, wobei die natürliche Zahl $g = 0$ oder $g = 1$ so zu wählen ist, daß $1 \leq r \leq n$. Damit wird insbesondere $a_1 a_1 = a_1$ für alle a_1 (a_1 Einselement). Man überlegt sich nun leicht, daß mit dieser Multiplikation $[G_n, \cdot]$ eine Gruppe ist: 0) gilt nach Definition der Multiplikation, A) gilt, da das Produkt $a_i a_j a_k$ von drei Elementen nur von der Indexsumme $i+j+k$ und nicht von der Reihenfolge der Faktoren abhängt. Aus demselben Grund gilt auch K). a_1 ist Einselement, also ist N) erfüllt. Ferner gibt es zu jedem Element a_k ein Inveres a_i mit $i = 2 + gn - k$, wobei $g = 0$ oder $g = 1$ zu setzen ist, so daß wieder $1 \leq i \leq n$ gilt, also ist auch I) erfüllt.

Die so definierten Gruppen heißen zyklische Gruppen. Mit $b = a_2$, $bb = b^2 = a_3$, ..., $b^{n-1} = a_n$, $b^n = b^0 = a_1$ kann G_n als $G'_n = \{b, b^2, b^3, \dots, b^n\}$ geschrieben werden, und man sagt, die zyklische Gruppe $[G'_n, \cdot]$ wird von dem Element b erzeugt. So läßt sich z.B. die früher behandelte Drehgruppe $[8,0]$ als von D_4 erzeugte zyklische Gruppe auffassen.

Der hier behandelte Teil der Theorie endlicher Gruppen erscheint vielleicht als mathematische Spielerei, daß aber endliche Gruppen in der höheren Algebra eine große Rolle spielen, kann hier nur erwähnt werden. Auch in der Geometrie spielen endliche Gruppen z.B. als Decktransformationsgruppen geometrischer Figuren eine wichtige Rolle.

Dr. E. Hertel
Oberassistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Wir geben hier noch zwei Aufgaben an, die wir dem Leser als Übung zum Teil I empfehlen:

1. Man prüfe die Menge der natürlichen Zahlen $N = \{1, 2, \dots\}$ hinsichtlich Gruppeneigenschaften bezüglich der Addition.
2. Man gebe sämtliche Drehungen und Spiegelungen an, welche die vier Ecken eines Quadrates in sich überführen und prüfe, ob die Menge dieser Abbildungen bezüglich der Operation der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe bilden.

Lösungen

(A25): $y - 2xy = 4$ (1)

$-x + y - 4x^2y = 2$ (2)

Aus (1) folgt $y(1 - 2x) = 4$ und (da $1 - 2x \neq 0$):

$$y = \frac{4}{1-2x} \quad (1)'$$

Aus (2) folgt $-x + y(1 - 4x^2) = 2$ (2)'

Durch Einsetzen von (1)' in (2)' erhält man

$$-x + \frac{4(1 - 4x^2)}{1 - 2x} = 2$$

$$-x + 4 + 8x = 2$$

$$x = -\frac{2}{7} \quad (3)$$

(3) in (1)' eingesetzt ergibt $y = \frac{28}{11}$.

Die Lösung des Gleichungssystems lautet somit:

$$x = -\frac{2}{7}, \quad y = \frac{28}{11}$$

(A28): Die in der Skizze eingezeichneten Hilfslinien XX' , YY' , ZZ' sind Parallelen zu den Dreiecksseiten AB , BC , AC . Dann

gilt nach dem Strahlensatz:

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{AA'}} - \frac{\overline{SA'}}{\overline{AA'}} = 1 - \frac{\overline{SA'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{YY'}}{\overline{BC}} \quad (1)$$

$$\frac{\overline{SB'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{CZ}}{\overline{BC}} \quad (2)$$

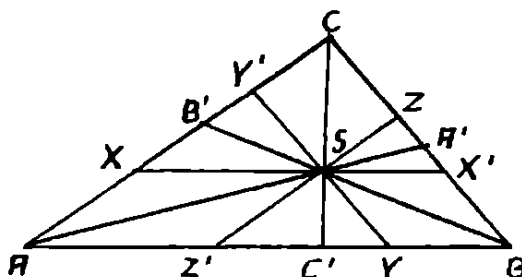
$$\frac{\overline{SC'}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{BX'}}{\overline{BC}} \quad (3)$$

Da die Vierecke $YBX'S$ und $SZCY'$ nach Konstruktion Parallelogramme sind, gilt $\overline{YS} = \overline{BX'}$ und $\overline{SY'} = \overline{CZ}$. Damit ist auch wegen (2) und (3)

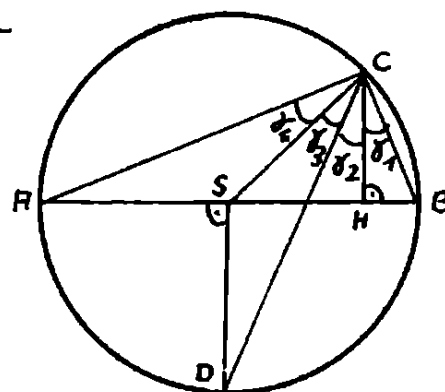
$$\frac{\overline{YY'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{YS}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{SY'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BX'}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{CZ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{SC'}}{\overline{CC'}} + \frac{\overline{SB'}}{\overline{BB'}}$$

und wegen (1) folgt dann die Behauptung:

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{SB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{SC'}}{\overline{CC'}} = 1$$



(A30): Der Umkreis um das Dreieck ABC möge die Verlängerung der Winkelhalbierenden w_Y im Punkt D schneiden. Dann halbiert D den Bogen $\widehat{AB}$. Die Mittelsenkrechte der Seite AB halbiert ebenfalls diesen Bogen $\widehat{AB}$. Das heißt aber, daß sich die Winkelhalbierende und die Mittelsenkrechte in D schneiden. Weiter sind die Höhe $CH = h_c$ und die Mittelsenkrechte parallel zueinander, da sie senkrecht auf $\widehat{AB}$ stehen.



(Voraussetzung:

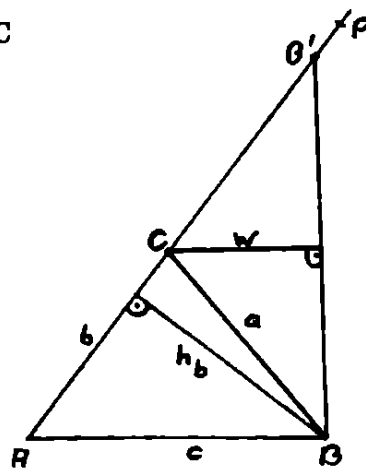
$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4)$$

Damit gilt $\angle HCD = \angle SDC$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen). Das Dreieck DCS ist also gleichschenkelig. Die Mittelsenkrechte auf AB, auf der die Strecke $\overline{DS}$ liegt, geht durch den Mittelpunkt des Umkreises. Auch die Mittelsenkrechte auf CD, die gleichzeitig Höhe im Dreieck DCS ist, verläuft durch den Mittelpunkt. Die beiden eben genannten Geraden schneiden sich aber in S. Damit ist S der Mittelpunkt des Umkreises. Da S gleichzeitig der Fußpunkt der Seitenhalbierenden ist, muß nach dem Satz des Thales der gegenüberliegende Winkel $\gamma = 90^\circ$ sein. $\beta = \angle HBC$ ist gleich $\angle CHB - \angle BCH = 90^\circ - \frac{90^\circ}{4} = 67,5^\circ$ und der dritte Winkel α ist gleich $180^\circ - \beta - \gamma = 22,5^\circ$.

(A32): Man konstruiere ein Dreieck, von dem eine Seite, die Summe der beiden anderen Seiten sowie die Höhe auf eine dieser Seiten gegeben sind.

a) Analysis

Angenommen, das Dreieck $\triangle ABC$ sei das gesuchte, d.h. es gelte $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} + \overline{BC} = a + b$ und das Lot von B auf AC habe die Länge h_b . Der Winkel $\angle BAC$ ist durch c und h_b eindeutig bestimmt. Deshalb muß c auf einem Strahl $\overrightarrow{AP}$ liegen. (P sei "genügend weit" von A entfernt). Spiegelt man die Strecke $\overline{BC}$ an der Winkelhalbierenden w des Winkels $\angle BCP$, so geht sie in die kongruente Strecke $\overline{B'C}$ über. Der Punkt B' liegt auf $\overrightarrow{AP}$ und es gilt $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB'}$, also $\overline{AB'} = a + b$. Die Winkelhalbierende w ist gleichzeitig Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{BB'}$. Daraus ergibt sich die Konstruktion.



b) Konstruktion

Man konstruiere zunächst aus $\overline{AB} = c$, h_b und $\overline{AB'} = a + b$ das Dreieck $\triangle ABB'$. Den Eckpunkt C des gesuchten Dreiecks erhält man als Schnittpunkt von $\overline{AB'}$ mit der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{BB'}$.

c) Beweis und Determination

Daß das konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe genügt, ergibt sich unmittelbar aus der Analysis und der Konstruktion. Es ist nur noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Das Dreieck $\triangle APB'$ ist eindeutig konstruierbar, falls $c \geq h_b$. Den Punkt C kann man ebenfalls eindeutig konstruieren, falls $a + b \geq c$. Um zu zeigen, daß C der einzige Punkt auf AP ist, für den $\overline{AC} + \overline{BC} = a + b$ gilt, nimmt man an, es gäbe einen weiteren Punkt C' auf AP, der dieselbe Eigenschaft hat. Aus $C' \neq C$ folgt aber

$$\overline{AC'} + \overline{BC'} > a + b.$$

Damit ist die Eindeutigkeit bewiesen.

(P.22): Gegeben seien ein Kreis K und zwei Punkte P_1 und P_2 .

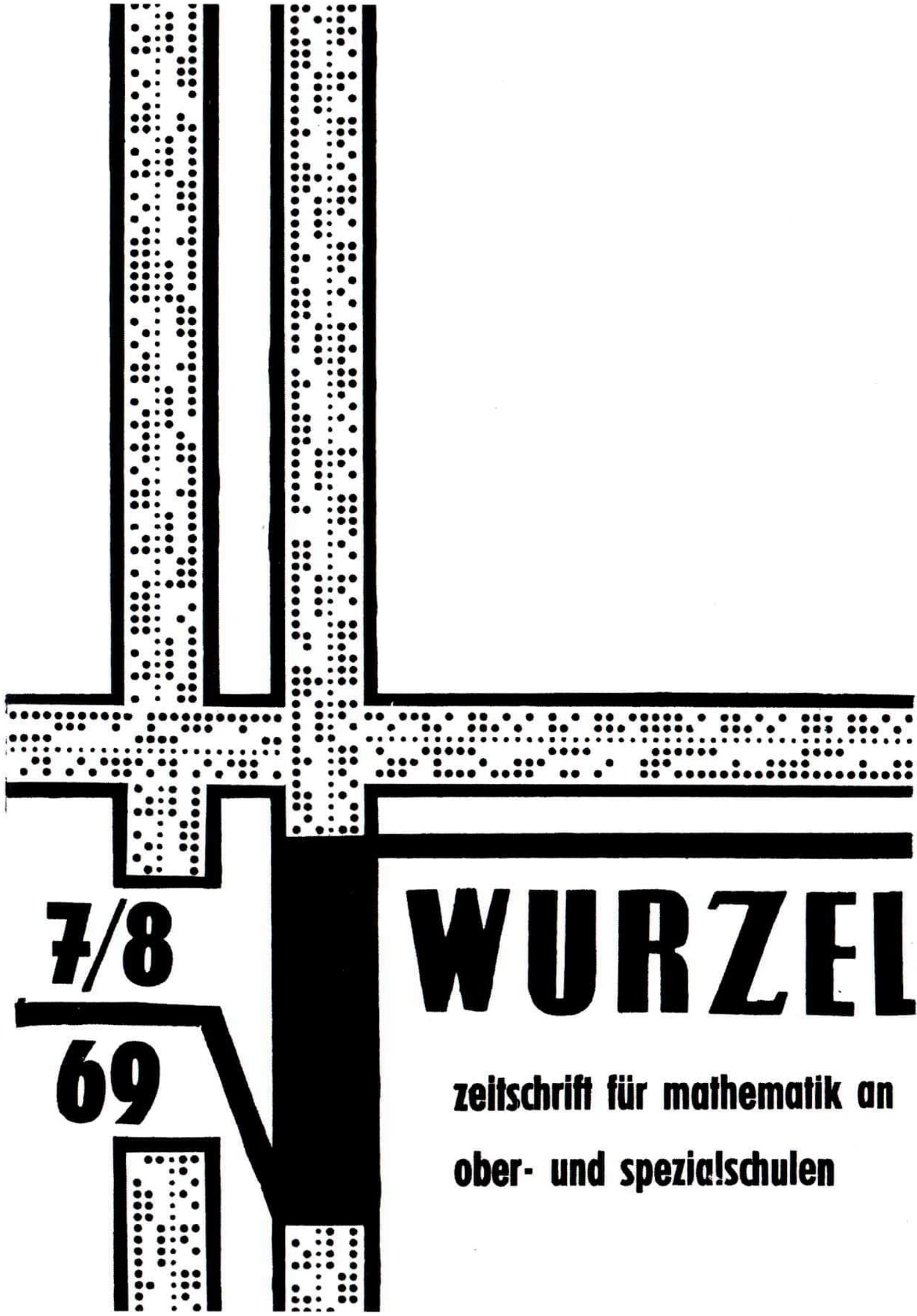
Gesucht ist derjenige Kreis durch P_1 und P_2 , der K berührt.

Zur Lösung dieser Aufgabe, die übrigens von keinem Einsender richtig gelöst wurde, bietet sich die Spiegelung am Kreis an.

Als Spiegelkreis wähle man zweckmäßig den Kreis mit dem Radius $\overline{P_1P_2}$ um den Mittelpunkt P_1 (oder P_2). Alle Überlegungen, die Konstruktion und die Determination verlaufen wie bei Aufgabe A4 (1.Lösung).

Lösungshinweis zur Aufgabe (A15):

a) Durch Umkreisradius und Grundseite $\overline{AB}$ ist der Winkel $\angle ACB$ des Dreiecks $\triangle ABC$ konstant festgelegt, allerdings gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten. Man zeige, daß der Winkel $\angle AS_2B$ (S_2 ist Schnittpunkt der Winkelhalbierenden) dadurch ebenfalls festgelegt ist. In Aufgabe A15/b zeige man dasselbe für den Winkel $\angle AS_2B$. S_2 ist jetzt Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Aus $\angle AS_2B$, $\overline{AB}$ und $\overline{AS_2}$ läßt sich das Dreieck $\triangle ABS_2$ und aus diesem mit Hilfe des Umkreises das Dreieck $\triangle ABC$ konstruieren.



7/8

69

WURZEL

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

Herausgegeben vom FDJ -Aktiv der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Dr. Eike Hertel, Wolfgang Ulbrich
Mitarbeiter: W.Kiefer, N.Kuse, R.Lorenz, L.Staiger,
E.Taubald, R.Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Aus der Arbeit des wissenschaftlichen Studentenzirkels „Rationelle Lehrmethoden“

Im September 1968 wurde auf Initiative des Assistenten der Abteilung Kybernetik, Lutz Bernhard, der wissenschaftliche Studentenzirkel "Rationelle Lehrmethoden" ins Leben gerufen. Er setzt sich zusammen aus Studentinnen und Studenten des dritten Studienjahres Mathematik-Diplom und steht unter der Leitung des Initiatoren. Auf seine Anregung hin beschäftigen wir uns mit der Schaffung eines Prüfungsmodells. Dieser Aufgabe kommt insofern Bedeutung zu, als auf Grund der wachsenden Studentenzahlen alle Bereiche des Studiums so rationell wie möglich gestaltet werden müssen. Unsere Arbeit ist damit gleichzeitig ein Beitrag zur Hochschulreform.

Zunächst muß etwas zu unserem Anliegen gesagt werden. Wir haben uns folgende Ziele gestellt:

1. Als Nahziel betrachten wir die Schaffung einer Prüfungsstruktur. Dabei soll berücksichtigt werden, daß diese Struktur dazu geeignet sein muß, die Prüfung auf einem Automaten durchzuführen. Des weiteren steht dabei das Problem der Ein- und Ausgabe von Informationen (z.B. Fragen, Antworten) während der Prüfung. Dies soll so gestaltet werden, daß gleichzeitig bis zu 20 Studenten geprüft werden können.
2. Als Fernziel betrachten wir die Aufstellung eines Programms für die Elektronische Datenverarbeitungsanlage Robotron 300 und die Durchführung der Prüfung mit dieser Anlage.

Zur Erreichung dieser Ziele sind natürlich viele umfangreiche

Teilaufgaben zu lösen.

Wir sind zunächst von einem konkreten Vorlesungsstoff ausgegangen und haben ihn in inhaltlich zusammenhängende Gebiete, die sogenannten Familien, unterteilt. Jede dieser Familien besteht aus einer Schar von Fragen, die wir nach Schwierigkeitsgraden anordneten. Eine weitere wichtige Aufgabe war die Aufstellung eines Antwortprinzips. Wir haben uns festgelegt auf die Prinzipien der "Auswahlantwort" (Der Prüfling erhält zusammen mit der Frage eine gewisse Menge von Antworten und wählt hieraus die seiner Meinung nach richtige aus.) und der "Lückenantwort" (Der Prüfling erhält zusammen mit der Frage einen Antwortsatz, in dem verschiedene Worte ausgelassen sind. Diese Lücken sind von ihm dann auszufüllen.). Der vom Prüfling gegebenen Antwort wird ein "Wahrheitswert" zugeordnet. Wir lassen dabei drei "Wahrheitswerte" - falsch, richtig, halbrichtig - zu.

Jetzt gingen wir daran, in groben Zügen den Ablauf einer Prüfung zu erfassen und ein Teilprogramm für einen Prüfling aufzustellen. Dies soll hier kurz skizziert werden:

1. Schritt: Auf Grund der Vorleistung des Prüflings wird ihm eine entsprechende Schwierigkeitsstufe zugeordnet. Unter den zu dieser Stufe gehörenden Familien wird willkürlich eine ausgewählt. Aus dieser Familie bekommt der Prüfling eine Frage gestellt.
2. Schritt: Der vom Prüfling gegebenen Antwort wird jetzt nach einer vom Antwortprinzip abhängenden Funktion ein "Wahrheitswert" zugeordnet. Davon ausgehend bestimmt sich dann der weitere "Weg" des Prüflings durch den Stoff.

Jeder der beiden Schritte repräsentiert natürlich ein ganzes Programm. Um dieses Programm aufzustellen, muß man verschiedene Teile konkretisieren. Wir sind dazu folgendermaßen vorgegangen. In den Familien wurden je zwei Fragen zu einer sogenannten Einheit E zusammengefaßt, allerdings nicht willkürlich. Eine Einheit E besteht aus einer Frage e_1 mit der dazugehörenden "Ergänzungsfrage" e_2 , die in der Regel mehr inhaltliche Substanz beinhaltet. Außerdem enthält E noch einen Hinweis zur Frage e_1 . Dieser wird nur dann gegeben, wenn e_1 halbrichtig beantwortet wurde. Ausführlicher dargestellt lauten dann die beiden Schritte etwa wie

folgt:

1. Nach der wie oben beschriebenen Auswahl der Familie wird in dieser eine Einheit E_1 ausgewählt. Von dieser Einheit wird die Frage e_1 gestellt.
 - 2.1. Wird e_1 richtig beantwortet, so wird die Frage e_2 gestellt.
 - 2.2. Wird e_1 falsch beantwortet, so wird eine neue Einheit einer niedrigeren Schwierigkeitsstufe ausgewählt.
 - 2.3. Wird e_1 halbrichtig beantwortet, so muß zunächst gefragt werden, ob e_1 das erste Mal gestellt wurde.
 - 2.3.1. Wurde e_1 das erste Mal gestellt, so wird der Hinweis zu e_1 gegeben und e_1 wird noch einmal gestellt.
 - 2.3.1.1. Wird e_1 beim zweiten Mal richtig beantwortet, so wird wie bei 2.1. verfahren.
 - 2.3.1.2. Wird e_1 beim zweiten Mal falsch beantwortet, so wird wie bei 2.2. verfahren.
 - 2.3.1.3. Wird e_1 beim zweiten Mal halbrichtig beantwortet, so wird eine neue Einheit ausgewählt, die etwa dem Schwierigkeitsgrad von E_1 entspricht.
 - 2.3.2. e_1 wurde bereits das zweite Mal gestellt. Dann wird wie bei 2.3.1.3. verfahren.
 - 2.4. Ist e_2 gestellt worden, so gibt es nur zwei Möglichkeiten, entweder sie wurde richtig beantwortet oder nicht richtig.
 - 2.4.1. Wurde e_2 richtig beantwortet, so wird eine neue Einheit einer höheren Schwierigkeitsstufe ausgewählt.
 - 2.4.2. Wurde e_2 nicht richtig beantwortet, so wird eine neue Einheit der Schwierigkeitsstufe ausgewählt, zu der E_1 gehört.

Hierbei ist eine Punktbewertung der Antworten noch nicht berücksichtigt.

Die Aufstellung eines Programmes anhand dieser Schritte hängt davon ab, in welcher Form die Eingabe bzw. Ausgabe der Antworten bzw. Fragen erfolgt. Es hat sich gezeigt, daß die Ein- und Ausgabe über Schreibmaschinen die zur Zeit wohl günstigste Lösung darstellt.

wissenschaftlicher Studentenzirkel
"Rationelle Lehrmethoden"
an der Sektion Mathematik
der FSU Jena

Aufgaben (Serie 7/8/69)

(A61) Kann man ein ungleichseitiges Dreieck durch einen Schnitt
in zwei kongruente Dreiecke zerlegen?

(A62) Man löse folgendes Gleichungssystem:

$$5x - 2xy + y + 3 = 0$$

$$2x - xy - y + 9 = 0$$

(A63) Wieviele geordnete Tripel ganzer Zahlen (x, y, z) gibt es,
die der Ungleichung $|x| + |y| + |z| < 20$ genügen?

(A64) Man zeige, daß für $n \geq 1$ der Ausdruck

$$10^{n+1} - 10(n+1) + n$$

stets durch 81 teilbar ist.

(A65) Die 17. Potenz einer dreistelligen Zahl endet auf die Ziffer 3. Auf welche Ziffer endet die Zahl selbst?

(A66) Ein in 6×6 Felder unterteiltes Quadrat sei vollkommen mit Dominosteinen ausgelegt. Jeder der 18 Dominosteine überdecke genau zwei Felder. Man beweise, daß es innerhalb des Quadrats stets eine Gerade gibt, die keinen Stein zerlegt.

Preisaufgabe (P. 31)

Man löse die Funktionalgleichung

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot \cos y$$

Preisaufgabe (P. 32)

Zwei Elemente a, b einer Gruppe G heißen vertauschbar, wenn $ab = ba$ ist. Man beweise, daß die Gesamtheit derjenigen Elemente aus G , die mit allen Elementen aus G vertauschbar sind, eine abelsche Untergruppe von G bilden.

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die

Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Achtung: Einsendeschluß für die Preisaufgaben (P.31) und (P.32) ist der 30. August 1969.

Leichte Kost für die Ferien

Ein Kapitän wird gefragt, wie alt er sei. Er antwortet: "Das Produkt aus meinem Alter, der Anzahl meiner Kinder und der Anzahl der Passagiere auf meinem Schiff beträgt 32 195." Wie alt ist der Kapitän?

Fliegt ein Flugzeug vom Nordpol aus 100 km nach Süden, anschließend 100 km nach Westen und danach 100 km nach Norden, so gelangt es wieder zum Nordpol.

Frage: Gibt es auf der Südhalbkugel einen entsprechenden Punkt, von dem aus man jeweils 100 km nach Süden, dann 100 km nach Westen und dann 100 km nach Norden fliegt und dabei zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

Zwei Brüder kaufen für 50,-M eine Lampe, jeder bezahlt die Hälfte. Nachdem die beiden den Laden verlassen haben, entsinnt sich der Verkäufer, daß die Lampe nur 45,-M kostet. Er schickt deshalb den Brüdern seinen Sohn mit den übrigen 5,-M nach. Der Sohn behält 2,-M als Trinkgeld und gibt den Brüdern nur die restlichen 3,-M. Die Brüder haben somit 47,-M für die Lampe bezahlt, und 2,-M hat der Sohn behalten. Dies sind zusammen 49,-M. Wer hat die fehlende Mark?

Einführung in die Gruppentheorie III

Zum Schluß dieser Artikelserie über den Gruppenbegriff wollen wir uns noch mit dem wichtigen Begriff der Untergruppe beschäftigen und abschließend noch ein Beispiel für Gruppen betrachten, nämlich die Permutationsgruppen.

IV. Untergruppen

Wir hatten früher festgestellt, daß die Menge Γ der ganzen Zahlen bezüglich der Addition eine Gruppe $[\Gamma, +]$ bildet mit der Zahl 0 als neutralem Element (Nullelement). Der Leser überzeugt sich leicht davon, daß die Menge R der rationalen Zahlen bezüglich der Addition ebenfalls eine Gruppe bildet, $[R, +]$ mit 0 als Nullelement. Worin unterscheiden sich diese beiden Gruppen? Offenbar darin, daß die Menge R umfassender als die Menge Γ ist, d.h. es gilt $\Gamma \subseteq R$, die Menge Γ ist eine Teilmenge der Menge R . Das führt uns auf den Begriff der Untergruppe, den wir in der folgenden Definition ganz allgemein formulieren wollen:

D e f i n i t i o n:

[D] $[H, *]$ heißt Untergruppe der Gruppe $[G, *]$, wenn gilt

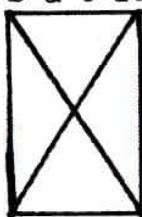
1. $H \subseteq G$ (H Teilmenge von G) und
2. H bildet bezüglich der in G erklärten Operation $*$ selbst eine Gruppe.

In dieser Definition ist durchaus zugelassen, daß $H = G$ gilt, d.h. jede Gruppe kann als Untergruppe von sich selbst aufgefaßt werden. Eine weitere einfache Untergruppe kann zu jeder beliebigen Gruppe $[G, *]$ folgendermaßen gefunden werden:

Sei n das neutrale Element der Gruppe $[G, *]$, dann gilt $n * n = n$, d.h. die nur aus dem einen Element n bestehende Menge $\{n\}$ bildet bereits bezüglich der in G erklärten Operation $*$ eine Gruppe $[\{n\}, *]$ - die entsprechenden Eigenschaften sind leicht zu prüfen (n ist zu sich selbst invers, und n ist neutrales Element von $[\{n\}, *]$).

Die beiden Untergruppen $[G, *]$ und $[\{n\}, *]$ nennt man triviale Untergruppen der Gruppe $[G, *]$.

Wir beschränken uns im folgenden wieder auf multiplikative Gruppen und beweisen einen Satz über notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Teilmenge H von G eine Untergruppe von $[G, \cdot]$ bildet:

S a t z:  $[G, \cdot]$ sei eine Gruppe, H sei eine Teilmenge von G ($H \subseteq G$). Dann ist $[H, \cdot]$ genau dann eine Gruppe (also Untergruppe von $[G, \cdot]$), wenn mit je zwei beliebigen Elementen x und y aus H stets auch das Element xy^{-1} wieder in H liegt, wobei y^{-1} das zu y inverse Element aus G sein soll.

Beweis: Es sind genauer die beiden folgenden Aussagen zu beweisen:

- a) Wenn $[H, \cdot]$ Untergruppe von $[G, \cdot]$ ist, so gilt stets für $x \in H$ und $y \in H$ auch $xy^{-1} \in H$ (notwendige Bedingung).
- b) Wenn aus $x \in H$ und $y \in H$ stets folgt $xy^{-1} \in H$, so ist $[H, \cdot]$ Untergruppe von $[G, \cdot]$ (hinreichende Bedingung).

Zu a): Wenn $[H, \cdot]$ Untergruppe ist, so muß nach Eigenschaft I) für $y \in H$ auch $y^{-1} \in H$ gelten und für $x \in H$ nach 0) also auch $xy^{-1} \in H$, was zu beweisen war.

Zu b): Jetzt muß gezeigt werden, daß aus der Eigenschaft ($x \in H$ und $y \in H \rightarrow xy^{-1} \in H$) folgt, daß $[H, \cdot]$ Gruppe ist. Da x und y beliebige Elemente aus H sein können, setzen wir zunächst $x = y$, dann folgt also $xx^{-1} \in H$. xx^{-1} ist aber gleich dem Einselement e der Gruppe $[G, \cdot]$, d.h. dieses Einselement e liegt auch in H und damit ist N) für $[H, \cdot]$ erfüllt. Weiter folgt aus $e \in H$ und $y \in H$ auch $ey^{-1} \in H$, wegen $ey^{-1} = y^{-1}$ gilt also: für beliebiges $y \in H$ ist auch $y^{-1} \in H$, d.h. I) ist für $[H, \cdot]$ erfüllt. Die Assoziativität A) ist natürlich für $[H, \cdot]$ erfüllt, da diese Eigenschaft für alle Elemente aus G gilt. Schließlich muß noch 0) nachgewiesen werden, d.h. es ist zu zeigen, daß aus $x \in H$ und $y \in H$ auch $xy \in H$ folgt. Zunächst folgt wegen I), daß mit $y \in H$ auch $y^{-1} \in H$ gilt, wie wir schon gezeigt haben. Wir setzen $y^{-1} = z$. Dann gilt also $x \in H$ und $z \in H$. Daraus folgt nach Voraussetzung $xz^{-1} \in H$, also $x(y^{-1})^{-1} = xy \in H$, womit der Satz vollständig bewiesen ist.

V. Permutationsgruppen

Gegeben sei eine beliebige endliche Menge $M_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Wir wollen jetzt eineindeutige Abbildungen von M_n auf sich untersuchen, d.h. Abbildungen, die jedem Element a_i aus M_n genau ein Element a_j aus M_n zuordnen. Eine solche Abbildung läßt sich allein durch eine Indexzuordnung beschreiben, wenn die Elemente von M_n (wie oben) durchnummeriert sind. Z.B. kann diejenige Abbildung P von $M_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ in sich, die a_1 in a_2 , a_2 in a_3 und a_3 in a_1 überführt, charakterisiert werden durch die die Indexzuordnung $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$. Wir wollen dafür kurz schreiben

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad - \text{ das Element mit dem Index}$$

in der oberen Reihe geht in das Element mit dem darunter stehenden Index über. Offenbar kann eine solche eineindeutige Selbstabbildung einer endlichen Menge auch als Vertauschung der Anordnung von endlich vielen Elementen aufgefaßt werden. Durch P wird z.B. die Anordnung (a_1, a_2, a_3) in die Anordnung (a_2, a_3, a_1) überführt.

D e f i n i t i o n :



Eine eineindeutige Abbildung einer endlichen Menge in sich heißt Permutation.

(Lateinisch: permutare = vertauschen).

Wir führen jetzt eine Operation in der Menge Π_n aller Permutationen von n Elementen ein, nämlich die Hintereinanderausführung von Permutationen, die wir wieder multiplikativ schreiben wollen.

Wenn $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ und $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$, so definieren

wir das "Produkt" $P_3 = P_2 P_1$ von P_2 und P_1 wie folgt:

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_{i_1} & j_{i_2} & \dots & j_{i_n} \end{pmatrix} \quad \text{wird erhalten, indem man zuerst die}$$

Permutation P_1 ausführt (z.B.: $1 \rightarrow i_1$) und anschließend P_2 (z.B.: $i_1 \rightarrow j_{i_1}$). Das Ergebnis dieser Hintereinanderausführung schreiben wir also wieder als Permutation, in der zum Ausdruck kommt, in welche Elemente die Ausgangselemente insgesamt nach Anwendung beider "Vertauschungen" P_1 und P_2 übergehen.

Beispiel: Mit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ wird $QP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Es sei gleich hier vermerkt, daß das Produkt von Permutationen im allgemeinen nicht kommutativ ist, d.h. führt man zuerst die Permutation Q und dann die Permutation P aus, so erhält man ein anderes Ergebnis: $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq QP$.

Das Produkt ist also immer "von rechts nach links" zu bilden.

Satz: Die Menge Π_n aller Permutationen von n Elementen bildet bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

Beweis: 0) ist erfüllt, da das Produkt zweier Permutationen nach Definition stets wieder eine Permutation ist. Auch die Assoziativität A) überlegt man sich leicht, denn in dem Produkt $P_1 P_2 P_3$ dreier Permutationen sind unabhängig von eventueller Klammerung die Permutationen der Reihe nach von rechts nach links auszuführen. Schließlich führen wir als Einselement die identische Permutation $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ ein, bei der jedes Element auf sich selbst abgebildet wird. Damit gilt N). Endlich definieren wir die zu $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ inverse Permutation P^{-1} durch Vertauschung der "Zeilen" von P:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

wobei die "Spalten" in P^{-1} so vertauscht werden können, daß die Zahlen i_1, i_2 usw. in die natürliche Reihenfolge 1, 2, ..., n gelangen. Damit ist jedenfalls auch I) erfüllt und der Satz bewiesen.

Wir wollen das Beispiel der Gruppe $[\Pi_3, \cdot]$ der Permutationen von drei Elementen genauer aufschreiben:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weitere Permutationen von drei Elementen gibt es offenbar nicht (In der 11. Klasse lernt man, daß es genau $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ verschiedene Permutationen von n Elementen gibt.). Bei dieser Gruppe handelt es sich - wie bei allen Permutationsgruppen - also um eine endliche Gruppe. Ihre Struktur geht aus der Gruppentafel (Tafel I) hervor. Der Leser prüfe durch Berechnen der ent-

sprechenden Produkte die Richtigkeit der Strukturtafel, an der man außerdem erkennt, daß die Gruppe $[\Pi_3, \cdot]$ eine nichttriviale abelsche Untergruppe besitzt, nämlich die Gruppe $\{P_0, P_1, P_2, \cdot\}$.

	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
P ₀	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
P ₁	P ₁	P ₂	P ₀	P ₄	P ₅	P ₃
P ₂	P ₂	P ₀	P ₁	P ₅	P ₃	P ₄
P ₃	P ₃	P ₅	P ₄	P ₀	P ₂	P ₁
P ₄	P ₄	P ₃	P ₅	P ₁	P ₀	P ₂
P ₅	P ₅	P ₄	P ₃	P ₂	P ₁	P ₀

Die große Bedeutung der Permutationsgruppen beruht in dem folgenden Satz von Cayley:

S a t z: Jede endliche Gruppe ist isomorph zu einer gewissen



Permutationsgruppe.

Der Beweis dieses Satzes findet sich z.B. in dem Büchlein "Einführung in die Gruppentheorie" (Alexandroff), worauf wir interessierte Leser verweisen.

Dr. E. Hertel
Oberassistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Konstruktion eines Automaten (Lösung der Preisaufgabe P. 28)

In der Nr. 4/69 wurde folgende Preisaufgabe gestellt:

Man konstruiere einen Automaten, der folgendes Verhalten realisiert:

Der Automat sortiert Werkstücke nach

I. Qualität

II. Qualität

und Ausschuß

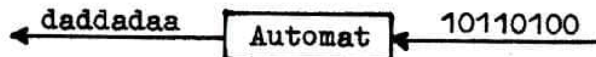
unter folgenden Bedingungen:

- a) Ausschuß wird aussortiert,
- b) ein Werkstück erster Qualität wird immer durchgelassen,

- c) ein Werkstück zweiter Qualität wird genau dann durchgelassen, wenn unmittelbar vorher zwei Werkstücke erster Qualität vorausgegangen sind.

Wir wollen hier den Lösungsweg für diese Aufgabe ausführlich darstellen. Die Ausführungen beziehen sich auf die Artikelserie "Aus der mathematischen Kybernetik" in "Wurzel" Nr.12/68 bis Nr.3/69.

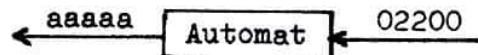
Betrachten wir einmal das Verhalten des zu realisierenden Automaten, wenn nur Werkstücke erster Qualität (gekennzeichnet im folgenden durch 1) und Ausschuß (durch 0 gekennzeichnet) einlaufen, z.B.:



Der Automat gibt entsprechend der Vorschrift aus, daß die Werkstücke entweder durchgelassen (d) oder aussortiert (a) werden. Komplizierter wird das Verhalten dann, wenn auch Werkstücke zweiter Qualität (durch 2 gekennzeichnet) einlaufen. Wie reagiert der Automat auf solche Eingabefolgen?

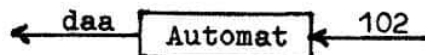
Das können wir uns an einigen Beispielen veranschaulichen:

I. Es laufen nur 0 und 2 ein:



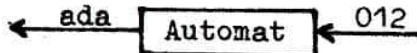
Da hierbei nie 1 auftritt, wird 2 nach unserer Vorschrift c) immer mit a bewertet (d.h. aussortiert).

II.



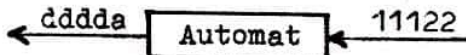
Auch hierbei reagiert der Automat auf 2 mit a, da unmittelbar vor der 2 eine 0 einläuft. Wann "läßt" nun eigentlich der Automat eine 2 "durch"?

III.



Auch hier wird die 2 noch nicht "durchgelassen", da unmittelbar vor der 2 die Kombination 01 und nicht 11 einläuft.

IV.



Jetzt reagiert der Automat auf die erste 2 mit d, denn unmittelbar vor ihr steht 11 (die dritte 1 bleibt unberücksichtigt). Die zweite 2 wird aber mit a bewertet, da vor

ihr 12 steht, also nicht 11.

Bis jetzt haben wir nur das äußere Verhalten des Automaten betrachtet. Was geht aber in seinem Inneren vor, damit er eine eingegebene 2 genau nach Vorschrift c) mit a bzw. d belegt? Werden dem Automaten eine 0 oder eine 1 eingegeben, so weiß er nach Vorschrift a) bzw. b) sofort, daß 0 mit a und 1 mit d belegt wird. Wird ihm eine 2 eingegeben, so muß er diese genau dann mit d belegen, wenn unmittelbar vorher 11 eingegeben wurde, d.h. er müßte noch einmal die vorhergegangenen Eingaben betrachten. Das ist aber auf Grund der Definition des Automaten nicht möglich.

Er muß sich also immer die letzten zwei Eingaben unter folgendem Gesichtspunkt merken:

11 oder nicht 11.

Betrachten wir dazu eine Reihe von Beispielen:

Automat	← 10	merkt: nicht 11
Automat	← 1021	merkt: nicht 11
Automat	← 10211	merkt: 11

Wie kann nun der Automat bei 21 (d.h. nicht 11) eine folgende 1 so zuordnen, daß er dann 11 merkt.

Offensichtlich muß er jede eingegangene 1 merken und prüfen, ob darauf noch eine 1 folgt.

Betrachten wir weitere Beispiele:

gemerkt: keine 1	Automat	← 1	merkt: eine 1
gemerkt: eine 1	Automat	← 2	merkt: keine 1
gemerkt: eine 1	Automat	← 0	merkt: keine 1
gemerkt: eine 1	Automat	← 1	merkt: 11
gemerkt: 11	Automat	← 0	merkt: keine 1,

d.h. der Automat merkt sich immer nur die letzten beiden Zahlen, wenn es zweimal die 1 war, sonst reicht es aus, die letzte zu merken, da man 2 oder 0 nicht durch eine weitere Eingabe zu 11 vervollständigen kann.

gemerkt: 11 Automat $\xleftarrow{1}$ merkt: 11

weil die dritte 1 überflüssig ist.

gemerkt: 11 Automat $\xleftarrow{2}$ merkt: keine 1

und genau hierbei reagiert der Automat auf die 2 mit der Ausgabe d.

Wie kann sich nun ein Automat überhaupt etwas merken? Ein Automat merkt mit seinen Zuständen. Offenbar benötigen wir hier drei Zustände:

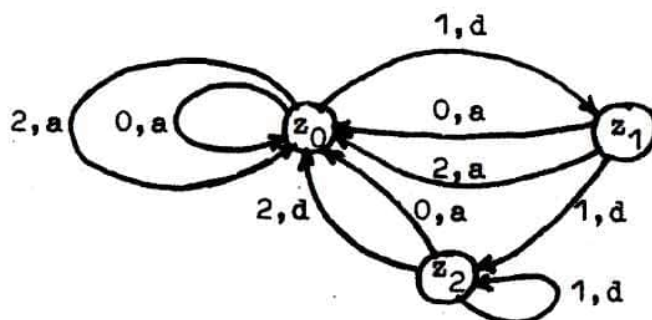
z_0 - keine 1
 z_1 - eine 1
 z_2 - 11

Nun lassen sich auch leicht Aussagen über die Überföhrungsfunktion f und die Ausgabefunktion g machen (Man vergleiche mit den Beispielen!).

f	z_0	z_1	z_2
0	z_0	z_0	z_0
1	z_1	z_2	z_2
2	z_0	z_0	z_0

g	z_0	z_1	z_2
0	a	a	a
1	d	d	d
2	a	a	d

Der Graph hat dann folgende Gestalt:



ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACH

Wir möchten unsere Leser darauf hinweisen, daß jährlich ein Sammelband der "Wurzel" erscheint. Der Preis eines Sammelbandes beläuft sich auf 8,00 M. Bestellungen sind bis zum 30. Juli an unsere Adresse zu richten. Die Sammelbände 1967 und 1968 sind dann etwa ab September 1969 lieferbar.

Lösungen

(A26): Laut Voraussetzung sind p_1 und p_2 Primzahlzwillinge.

$p_1 - 1, p_1, p_2 - 1, p_2, p_2 + 1$ sind demnach aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Das Produkt von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar. Da p_1 und p_2 Primzahlzwillinge sind und $p_1 > 10$ gilt, ist $p_1 - 1, p_2 - 1$ oder $p_2 + 1$ durch 5 teilbar. $p_1 - 1, p_2 - 1, p_2 + 1$ sind außerdem aufeinanderfolgende gerade Zahlen, deshalb ist eine von ihnen durch 4 teilbar.

$p_1 - 1, p_1, p_2 - 1$ sind drei aufeinanderfolgende Zahlen, deshalb ist (da p_1 Primzahl ist) $p_1 - 1$ oder $p_2 - 1$ durch 3 teilbar.

Insgesamt gilt also: $(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_2 + 1)$ ist durch $5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 240$ und somit auch durch 120 teilbar.

(A27): Es gilt $\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b}$.

Da $a > 0$ und $b > 0$, folgt

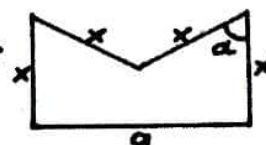
$$\frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Zu Aufgabe (A29):

Da die Aufgabe (A29) falsch gestellt wurde und deshalb trivial lösbar ist, wird diesmal eine berichtigte Fassung dieser Aufgabe gegeben:

Für welches x hat die nebenstehende Figur den kleinstmöglichen Flächeninhalt?

(Es gelte $\alpha < \frac{\pi}{2}$)



(A33): Es gilt $b_0 = 3 = 3 + 0^2$
 $b_1 = 3 + 1 = 3 + 1^2$
 $b_2 = 3 + 1 + 3 = 3 + 2^2$
 $b_3 = 3 + 1 + 3 + 5 = 3 + 3^2$

Man beweist nun mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion, daß $b_n = 3 + n^2$ gilt.

Die gesuchte Summe lautet dann

$$\begin{aligned}\sum_{v=0}^n b_v &= \sum_{v=0}^n (3 + v^2) = \sum_{v=0}^n 3 + \sum_{v=0}^n v^2 \\ &= 3(n+1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + n + 18)\end{aligned}$$

(A34): Wir beweisen die Kontraposition der Aussage, d.h. folgende Aussage: Wenn $m = p \cdot q$ ($p, q > 1$) ist, dann teilt m nicht $(m-1)! + 1$.

Es gilt dann nämlich: p teilt $(p \cdot q - 1)!$, da $p < p \cdot q - 1$. Das gleiche gilt für q . Somit teilt $p \cdot q$ die Zahl $(p \cdot q - 1)!$ und kann daher nicht $(p \cdot q - 1)! + 1$ teilen.

(A35): Es gilt $\cot \frac{\alpha}{2} - \cot \alpha$

$$\begin{aligned}&= \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} > 1 \quad (\text{wegen } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

Also gilt $\cot \frac{\alpha}{2} - \cot \alpha > 1$.

(A36): Aus $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$ folgt stets $x = y = z = 0$.

Angenommen, x , y und z seien verschieden von Null und es gelte $x = 2^a x_1$, $y = 2^b y_1$, $z = 2^c z_1$ (x_1 , y_1 und z_1 ungerade).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a \leq b \leq c$.

Dann folgt aus $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$

$$(2^a x_1)^2 + (2^b y_1)^2 + (2^c z_1)^2 = 2 \cdot 2^a \cdot 2^b \cdot 2^c \cdot x_1 y_1 z_1$$

Nachdem man durch $(2^a)^2$ gekürzt hat, erhält man

$$\begin{aligned}x_1^2 + (2^{b-a} y_1)^2 + (2^{c-a} z_1)^2 &= 2 \cdot 2^{b+c-2a} x_1 y_1 z_1 \\ &= 2^{b+c+1-2a} x_1 y_1 z_1\end{aligned}$$

Da auf der rechten Seite der Gleichung eine gerade Zahl steht, muß auch links eine gerade Zahl stehen. Daraus

folgt $b - a = 0$ und $k = c - a > 0$. Man erhält

$$x_1^2 + y_1^2 + (2^k z_1)^2 = 2^{k+1} x_1 y_1 z_1 \quad (k > 0).$$

Man zeige, daß die rechte Seite der Gleichung durch vier teilbar ist, die linke jedoch nicht.

(A38): Es ist

$$(1 + \frac{1}{100})^{50} = 1 + \binom{50}{1} \frac{1}{100} + \binom{50}{2} \frac{1}{100^2} + \binom{50}{3} \frac{1}{100^3} + \dots$$

und

$$(1 - \frac{1}{100})^{50} = 1 - \binom{50}{1} \frac{1}{100} + \binom{50}{2} \frac{1}{100^2} - \binom{50}{3} \frac{1}{100^3} + \dots$$

$$(1 + \frac{1}{100})^{50} - (1 - \frac{1}{100})^{50} =$$

$$= 2\binom{50}{1} \frac{1}{100} + 2\binom{50}{3} \frac{1}{100^3} + 2\binom{50}{5} \frac{1}{100^5} + \dots > 1, \text{ da}$$

$$2\binom{50}{1} \frac{1}{100} = 1 \text{ und alle weiteren Summanden positiv sind.}$$

Damit wird aber

$$(1 + \frac{1}{100})^{50} > 1 + (1 - \frac{1}{100})^{50}$$

und nach Multiplikation mit 100^{50}

$$101^{50} > 100^{50} + 99^{50}$$

(A39): Konstruktionsbeschreibung:

Man konstruiert zuerst das Dreieck $\triangle DCB'$ aus den Seiten $\overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{DB'}$ und dem eingeschlossenen Winkel α (Winkel zwischen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$). Aus den Seiten $\overline{B'C}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AD} = \overline{BB'}$ konstruiert man das Dreieck $\triangle BB'C$. Damit hat man die Punkte B, C und D des Vierecks gewonnen.

Der vierte Eckpunkt A ergibt sich als Eckpunkt des Dreiecks $\triangle ABD$ aus den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ und $\overline{AD}$.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Konstruktion wird dem Leser überlassen.

(A42): (eingesandt von A. Möbius, Erw. Leibnitzschule Leipzig, Klasse 10).

Die Lösung erfolgt durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 2$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} > \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

folglich gilt: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$

Induktionsschritt:

Es gelte: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ für $n \geq 2$.

Dann gilt: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
 $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n(n+1)} + 1}{\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$

Somit gilt die Behauptung.

Ein anderer Lösungsweg wurde von M. Schulze, EOS "Friedrich Engels", Karl-Marx-Stadt, Klasse 10, gewählt:

Für $n \geq 2$ gilt: $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

...

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ Addition liefert:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

(A41): Gegeben:

$$P_1 \sim (x_1, y_1)$$

$$P_2 \sim (x_2, y_2)$$

$$P_3 \sim (x_3, y_3)$$

g_1 - Mittelsenkrechte zu $\overline{P_1P_2}$

g_2 - Mittelsenkrechte zu $\overline{P_1P_3}$

Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ergibt den Mittel-

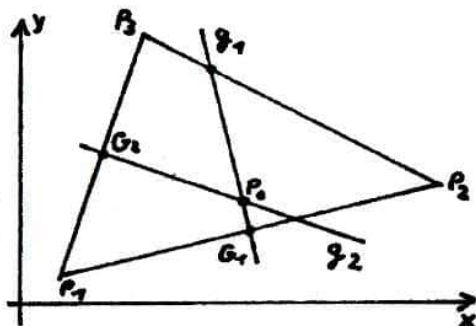
punkt des Umkreises, d.h. der Schnittpunkt von g_1 und g_2 ergibt P_0 .

Gleichung von g_1 : g_1 verläuft durch die Punkte P_0 und G_1

$$G_1 \sim \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Anwendung der Zweipunkteform der Geradengleichung ergibt:

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{0,5(x_1 + x_2) - x_0}{0,5(y_1 + y_2) - y_0} \quad (I)$$



Gleichung von g_2 : g_2 verläuft durch die Punkte P_0 und G_2

$$G_2 \sim \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2} \right)$$

Anwendung der Zweipunkteform der Geradengleichung ergibt:

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{0,5(x_1 + x_3) - x_0}{0,5(y_1 + y_3) - y_0} \quad (II)$$

Aus Gleichung I und II ergeben sich die Koordinaten von $P_0 \sim (x_0, y_0)$.

(A47): Zunächst bemerke man, daß $f(x) \neq 0$, da sonst

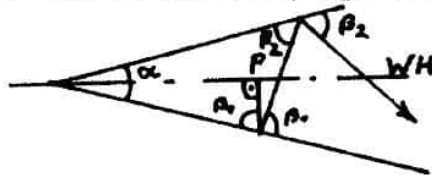
$f(2x) = f(x+x) = \frac{0}{0}$, d.h. nicht bestimmbar. Mit Hilfe der vollständigen Induktion zeige man dann, daß

$$f(n \cdot x) = \frac{f(x)}{n}.$$

Es sei nun $f(1) = c$ ($c \neq 0$), dann erhält man

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{n \cdot c}{m}.$$

(P.25): (eingesandt von R. Schmidt, SpS Carl Zeiss Jena, Kl. 11)



Es gilt: $\beta_1 = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ $\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ (erste Reflexion)

$$\beta_2 = \pi - (\pi - \beta_1) - \alpha$$

$$\beta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \cdot \alpha \text{ (zweite Reflexion)}$$

Behauptung: Fur die n -te Reflexion gilt

$$\beta_n = \frac{\pi}{2} - \frac{2n-1}{2} \cdot \alpha$$

Beweis: (vollständige Induktion)

Induktionsanfang: siehe oben

Induktionsschritt: Es sei $\beta_n = \frac{\pi}{2} - \frac{2n-1}{2} \cdot \alpha$

$$\text{Dann gilt } \beta_{n+1} = \pi - (\pi - \beta_n) - \alpha$$

$$\beta_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{2n-1}{2} \cdot \alpha - \alpha$$

$$\beta_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{2(n+1)-1}{2} \cdot \alpha$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Für $\beta_n > \alpha$ findet stets noch die $(n+1)$ -te Reflexion statt. Für $\beta_n \leq \alpha$ finden keine weiteren Reflexionen statt. Wenn k die Anzahl der stattfindenden Reflexionen ist, gilt deshalb $\alpha < \beta_{k-1}$, $\beta_k \leq \alpha$.

Daraus folgt: $\frac{\pi}{2} - \frac{2k-3}{2} \cdot \alpha > \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \frac{2k-1}{2} \cdot \alpha \leq \alpha$

$$\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{1}{2} > k, \quad \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{1}{2} \leq k$$

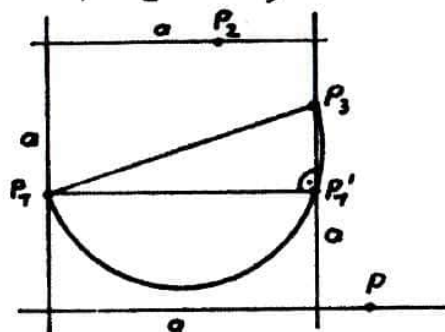
$$\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{1}{2} \leq k < \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{1}{2}$$

$$k = \left[\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{1}{2} \right]$$

(P.26): Man konstruiere zunächst alle Quadrate der Seitenlänge a , auf deren Seiten die Punkte P_1 , P_2 und P_3 liegen, und zwar sollen P_1 und P_2 , P_2 und P_3 bzw. P_1 und P_3 auf gegenüberliegenden Quadratseiten liegen. Die Konstruktion erfolgt nach dem Satz des Thales (siehe Skizze). Als Menge M aller Punkte P erhält man die Quadratseiten, auf denen weder P_1 , P_2 noch P_3 liegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte

$$\overline{P_1 P_2} \leq \overline{P_2 P_3} \leq \overline{P_1 P_3}.$$

Man überlege sich, wieviel verschiedene Quadrate man konstruieren kann, d.h., aus wieviel Geraden die Menge M besteht!



(A54): $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$
 $= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2(\alpha + \beta) \geq \frac{3}{4}$

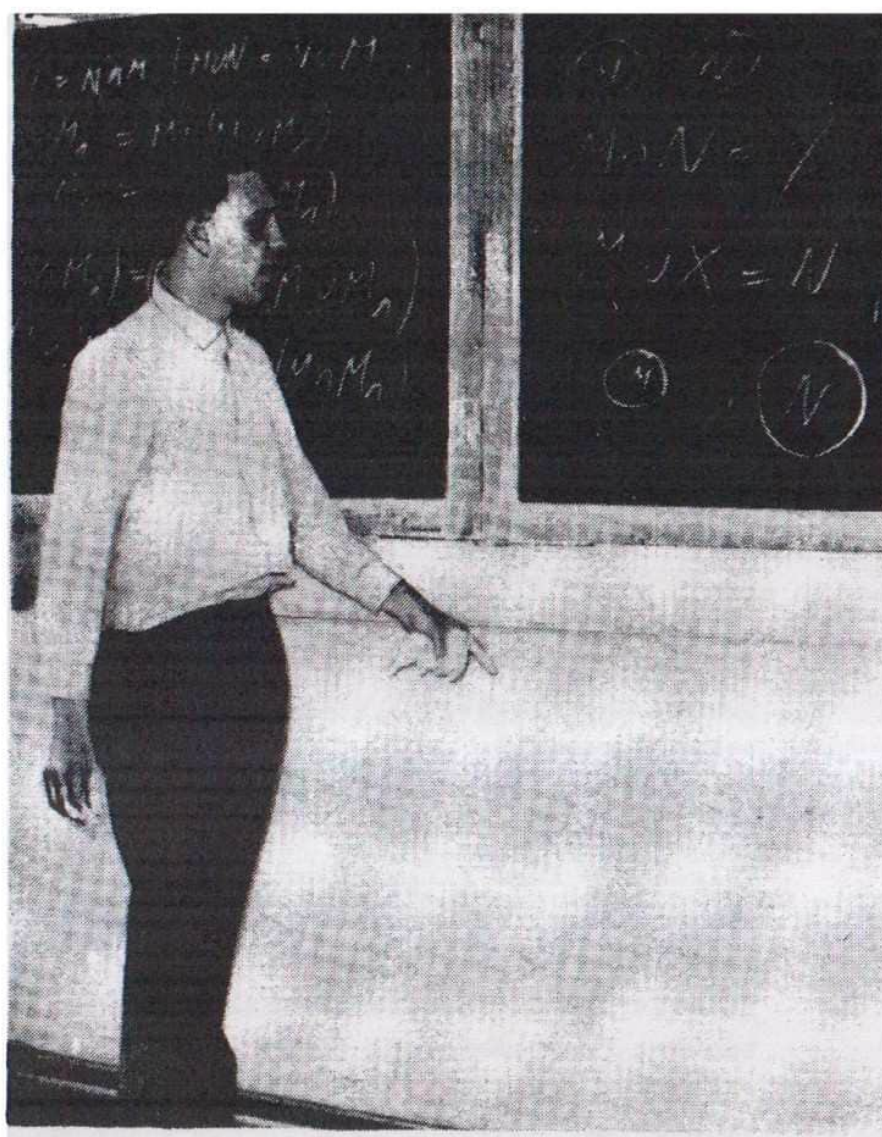
Hieraus folgt $2\cos^2 \alpha + 2\cos^2 \beta + 2\cos^2(\alpha + \beta) \geq \frac{3}{2}$
 $1 + \cos 2\alpha + 1 + \cos 2\beta + 2\cos^2(\alpha + \beta) \geq \frac{3}{2}$

$$2 + 2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + 2\cos^2(\alpha + \beta) \geq \frac{3}{2}$$

$$\cos^2(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$$

$$+ \frac{1}{4}\cos^2(\alpha - \beta) - \frac{1}{4}\cos^2(\alpha - \beta) + 1 - \frac{3}{4} \geq 0$$

und $(\cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta))^2 + \frac{1}{4}\sin^2(\alpha - \beta) \geq 0$, was stets erfüllt ist.



WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

9

69

Liebe Leser!

In dieser Nummer wollen wir Sie mit unseren Plänen für das Jahr 69/70 bekannt machen. Ab September erscheint die "Wurzel" wie angekündigt mit 16 Seiten. Auf diesen 16 Seiten sollen Sie mit vielen interessanten Problemen der Mathematik, mit dem Leben an unserer Sektion und mit Neuigkeiten aus Wissenschaft und Technik bekannt gemacht werden. Im fachlichen Teil sind für dieses Jahr folgende Artikel geplant:

Im Septemberheft beginnt eine Artikelserie über komplexe Zahlen, die das Rechnen mit komplexen Zahlen, ihre geometrische Deutung und die Darstellung in Polarkoordinaten beinhaltet.

In einer Artikelserie über Fehlerrechnung wird eine Einführung in die elementare Fehlerrechnung gegeben und die Notwendigkeit der Fehlerrechnung begründet. Der Leser wird mit Näherungsmethoden und Iterationsverfahren sowie mit Fehlerabschätzungen bekannt gemacht.

Eine weitere Artikelserie beschäftigt sich mit Folgen, Reihen und Grenzwerten. Dabei wird in Anlehnung an den Schulstoff auf Folgen nur kurz eingegangen. Bei der Einführung der Reihen sowie der Begriffe Grenzwert und Konvergenz wird Wert auf anschauliche Beispiele gelegt.

In einer umfangreichen Artikelserie wird der Leser mit Elementen der Programmierung bekannt gemacht. Dabei stützen wir uns auf die Artikelserie "Einführung in die Rechentechnik" in "Wurzel"-Nr.6-12/68. Es wird die Problemstellung aus der Wirtschaft, die Flußbildtechnik, der Aufbau und die Arbeitsweise des elektronischen Kleinrechners SER 2c, die Darstellung von Zahlen behandelt. Die Serie soll abschließen mit Programmierbeispielen für den SER 2c.

Je eine Artikelserie über ein interessantes Problem aus der Geometrie und über Kombinatorik sind ebenfalls geplant.

Der Aufgabenteil wird sich in Zukunft mehr auf die Artikel beziehen, was natürlich für September noch nicht zu realisieren ist, da ab September 1969 viele Leser erstmals unsere Zeitschrift in der Hand haben. Alle Aufgaben der Serie werden als Preisaufgaben gewertet und die eingesandten Lösungen dementsprechend bewertet.

In Artikeln über unsere Sektion sollen Sie mit dem Studienablauf, Wissenswerten über die Arbeit an unserer Sektion und die Studienvorbereitung bekannt gemacht werden. Umfangreiche Informationen über die Ausbildung an unserer Sektion erhalten Sie in der Sondernummer zum 20. Jahrestag der Gründung unserer Republik.

Wir werden ferner in Zukunft bemüht sein, durch mathematische Anekdoten, Rätsel und Zahlenspiellereien unsere Zeitschrift etwas aufzulockern, ohne in den Artikeln und Preisaufgaben auf mathematische Strenge zu verzichten.

Wir wollen mehr auf Probleme, die beim Lesen unserer Zeitschrift auftauchen, eingehen. Uns interessiert die Meinung der Leser zu den Artikelserien und zur gesamten Gestaltung der "Wurzel". Berichte über die Arbeit von Mathematikzirkeln an den Schulen sollen in der "Wurzel" veröffentlicht werden. Wir fordern unsere Leser auf, uns solche und ähnliche Berichte zu senden. Wir haben vor, ein Korrespondentensystem zu errichten, um jederzeit über die Arbeit der Mathematikzirkel, Mathematiklager usw. informiert zu sein und Sie gegebenenfalls mit "Wurzel"-Mitarbeitern zu besuchen. Ferner wollen wir die Korrespondenten sowie ausgezeichnete Schüler einladen, unsere Sektion zu besuchen. Auch Korrespondententreffen und "Wurzel"-Pressefeste stehen in den kommenden Jahren auf dem Programm.

Die Redaktion

I N F O R M A T I O N - I N F O R M A T I O N - I N F O

KYBERNETISCHE FABRIK

nennen die Einwohner von NOWOSIBIRSK ein in dieser sowjetischen Stadt vor vier Jahren eingerichtetes elektronisches Rechenzentrum. Dort sind jetzt rund 450 Mitarbeiter im Durchschnittsalter von 30 Jahren beschäftigt. Jeder zehnte führt den Dokortitel. Das Rechenzentrum Nowosibirsk bedient mehr als die Hälfte der 50 Akademieinstitute Sibiriens und versetzt die Wissenschaftler in die Lage, Untersuchungen in Fragen der Netz- und Branchenplanung, der Optimierung von Produktionsabläufen durch Anwendung mathematischer Methoden wirksam zu betreiben.

Komplexe Zahlen I

Die komplexen Zahlen wurden von Gauß systematisch in die Mathematik eingeführt, nachdem andere Mathematiker (unter ihnen ist besonders Euler zu nennen) entscheidende Vorarbeiten geleistet hatten. Von Gauß stammt auch die heute übliche geometrische Darstellung der komplexen Zahlen (1831), die wir noch genau untersuchen werden. Nach ihrer Einführung stießen die komplexen Zahlen keineswegs auf ungeteilte Zustimmung. Viele Mathematiker der damaligen Zeit sahen darin etwas Unwirkliches. Darauf deutet auch noch die Bezeichnung "imaginär" hin, die in der Theorie der komplexen Zahlen eine wichtige Rolle spielt. Heute gehören die komplexen Zahlen zum selbstverständlichen Allgemeingut eines jeden Mathematikers. Im folgenden soll versucht werden, die Grundlagen der Theorie der komplexen Zahlen auf exakte Weise zu beschreiben.

1. Einführung der komplexen Zahlen

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen sind die reellen Zahlen, die wir mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen wollen. Zu zwei reellen Zahlen α_1 und α_2 bilden wir das Zahlenpaar $a = (\alpha_1, \alpha_2)$. Hierbei ist die Reihenfolge der Zahlen α_1 und α_2 wichtig, wir sprechen deshalb auch von einem geordneten Zahlenpaar. In der Gesamtheit aller Zahlenpaare, die wir auf diese Weise bilden können, definieren wir:

D e f i n i t i o n :



1. Zwei Zahlenpaare $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $b = (\beta_1, \beta_2)$ heißen gleich genau dann, wenn $\alpha_1 = \beta_1$ und $\alpha_2 = \beta_2$ gilt. Wir schreiben dann $a = b$.
2. Zu zwei Zahlenpaaren $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $b = (\beta_1, \beta_2)$ definieren wir ihre Summe $a + b$ durch $a + b =_{\text{Df}} (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$.

Man muß sich darüber im klaren sein, daß in der Gesamtheit aller Zahlenpaare im ersten Moment keinerlei Operationen, wie Gleichheit oder Addition, erklärt sind. Unsere Festlegung der Gleichheit und der Addition ist zu einem gewissen Grade willkürlich, wenn auch sehr naheliegend. Diese beiden ersten Definitionen erlauben uns bereits, einige einfache Rechenregeln abzuleiten. Da $a + b$ ebenfalls ein geordnetes Paar ist, ist es

sinnvoll, $(a + b) + c$ zu bilden. Hierbei sei $c = (\gamma_1, \gamma_2)$.
Wir erhalten:

$$\begin{aligned}(a + b) + c &= [(\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1, (\alpha_2 + \beta_2) + \gamma_2] \\ &= (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2).\end{aligned}\tag{1}$$

Andererseits können wir die Summe der Zahlenpaare a und $b + c$ ausrechnen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}a + (b + c) &= [\alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1), \alpha_2 + (\beta_2 + \gamma_2)] \\ &= (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2).\end{aligned}\tag{2}$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (1) und (2) stimmen überein. Somit ist nach der Definition der Gleichheit der Zahlenpaare

$$(a + b) + c = a + (b + c).\tag{3}$$

Diese Regel nennt man das Assoziativgesetz der Addition. Es zeigt, daß es für die Ausführung der Addition der drei Zahlenpaare a , b und c belanglos ist, ob man erst a und b und anschließend c addiert oder erst b und c und anschließend a . Wir können daher ohne Verwechslungsgefahr statt $(a + b) + c$ einfach $a + b + c$ schreiben.

Wir können sofort ein zweites, ebenfalls sehr einfaches Gesetz herleiten. Aus der Definition der Addition folgt nämlich unmittelbar

$$\begin{aligned}a + b &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) \\ &= (\beta_1 + \alpha_1, \beta_2 + \alpha_2) \\ &= b + a.\end{aligned}$$

Diese Regel nennt man das Kommutativgesetz der Addition. Es zeigt, daß es bei der Ausführung der Addition auf die Reihenfolge der Zahlenpaare a und b nicht ankommt.

Wir wollen jetzt eine dritte Operation, nämlich die Multiplikation zweier Zahlenpaare, einführen. Sind wieder $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $b = (\beta_1, \beta_2)$, so wäre es naheliegend, die Multiplikation der Zahlenpaare a und b durch

$$a \cdot b =_{\text{Def}} (\alpha_1 \cdot \beta_1, \alpha_2 \cdot \beta_2)\tag{4}$$

festzulegen. Es zeigt sich jedoch, daß diese Definition sehr unzweckmäßig ist. Die Rechenregeln, die man aus der Theorie der reellen Zahlen kennt, würden bei einer derartigen Definition der Multiplikation von geordneten Zahlenpaaren nicht mehr durchweg gültig sein. Es ist aber ein Ziel unserer Überlegungen, die elementaren Grundrechenarten für Zahlenpaare so zu definieren, daß man mit ihnen in gleicher Weise rechnen kann wie mit den reellen Zahlen. Die Rolle der Zahl 0 im Bereich der reellen Zah-

len übernimmt jetzt das Zahlenpaar $(0,0)$. In Analogie zu den reellen Zahlen werden wir an eine mögliche Definition der Multiplikation der Zahlenpaare $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $b = (\beta_1, \beta_2)$ folgende Forderung stellen: Aus $a \cdot b = (0,0)$ soll folgen, daß entweder $a = (0,0)$ oder $b = (0,0)$ oder aber $a = b = (0,0)$ ist. Der Definitionsversuch (4) erfüllt diese Forderung aber nicht. Für $a = (1,0)$ und $b = (0,1)$ wäre nämlich $a \cdot b = (0,0)$. Wir wählen deshalb eine etwas kompliziertere (wie sich später herausstellen wird, geometrisch leicht deutbare) Definition der Multiplikation.

D e f i n i t i o n :

D 3. Ist $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $b = (\beta_1, \beta_2)$, so definieren wir das Produkt $a \cdot b$ durch

$$a \cdot b =_{\text{Df}} (\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2, \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1). \quad (5)$$

Statt $a \cdot b$ schreiben wir in Zukunft auch ab . Wir werden später nachprüfen, daß $ab = (0,0)$ dann und nur dann gilt, wenn mindestens eines der beiden Zahlenpaare gleich $(0,0)$ ist. Zuvor wollen wir aber das Distributivgesetz herleiten, das die Addition und die Multiplikation verknüpft.

Es seien wieder $a = (\alpha_1, \alpha_2)$, $b = (\beta_1, \beta_2)$ und $c = (\gamma_1, \gamma_2)$ drei geordnete Zahlenpaare. Dann ist $b + c = (\beta_1 + \gamma_1, \beta_2 + \gamma_2)$ und somit erhalten wir nach (5):

$$a(b+c) = [\alpha_1(\beta_1 + \gamma_1) - \alpha_2(\beta_2 + \gamma_2), \alpha_1(\beta_2 + \gamma_2) + \alpha_2(\beta_1 + \gamma_1)].$$

Rechnen wir die Klammern aus und fassen anschließend wieder geschickt zusammen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} a(b+c) &= (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \beta_2 - \alpha_2 \gamma_2, \alpha_1 \beta_2 + \alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_2 \gamma_1) \\ &= [(\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2) + (\alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2), (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1)] \\ &= ab + ac. \end{aligned}$$

Somit ist

$$a(b + c) = ab + ac. \quad (6a)$$

(5) zeigt ferner, daß

$$\begin{aligned} ab &= (\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2, \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \\ &= (\beta_1 \alpha_1 - \beta_2 \alpha_2, \beta_2 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_2) \\ &= ba \end{aligned} \quad (7)$$

gilt. (7) ist ebenfalls ein Kommutativgesetz. Mit seiner Hilfe können wir nun aus (6a) die Gleichung

$$(b + c)a = ba + ca (= ab + ac) \quad (6b)$$

herleiten. (6a) und (6b) nennt man die beiden Distributivgesetze.

In der "Wurzel" 10/69 werden wir eine geometrische Interpretation einführen und im Zusammenhang damit die Beziehungen zwischen geordneten Zahlenpaaren und komplexen Zahlen kennenlernen.

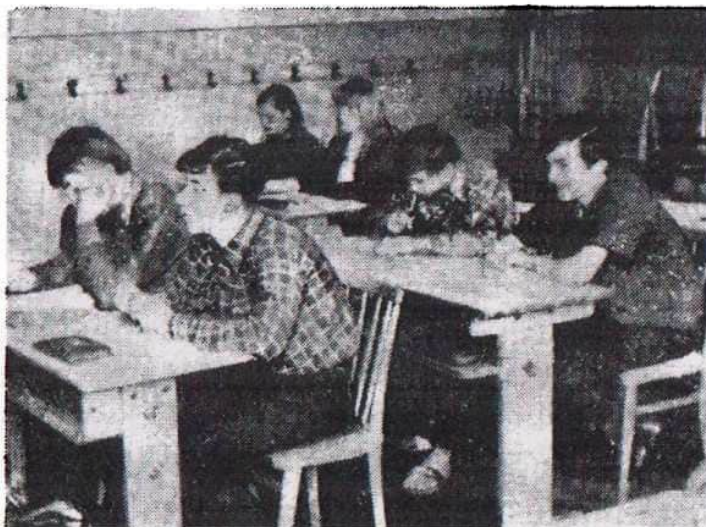
Dr. habil H. Triebel

Dozent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Unser Mathematiklager

Die Teilnahme an Mathematikspezialistenlagern steht schon seit mehreren Jahren auf dem Ferienplan vieler Mathe-Asse unseres Bezirkes. So waren auch in diesem Sommer etwa 80 Schüler eingeladen, ihre Mathematikkenntnisse im Lager in Greiz zu erweitern und zu vertiefen. Leider konnte unser Betreuerkollektiv, Mitarbeiter und Studenten der Fr.-Schiller-Universität Jena, nur 35 Schüler begrüßen. Viele Stammgäste aus vergangenen Mathematiklagern fehlten, denn die Einladungen vom Rat des Bezirkes waren sehr spät ausgegeben worden. Das Betreuerkollektiv hofft, daß die Schüler, die aus diesem Grunde nicht angereist sind, weiterhin Interesse am Lager haben und auch künftig wieder kommen werden.

Unser diesjähriges Mathematiklager stand in Vorbereitung des 20. Jahrestages der DDR unter dem Motto: "Wir vollbringen Höchstleistungen für unseren sozialistischen Friedensstaat!". Dieser Gedanke zog sich durch unsere gesamte fachliche Arbeit und die Freizeitgestaltung. Daß alle Schüler halfen, dieses unser Motto zu verwirklichen, zeigten die guten Ergebnisse der Lagerolympiade, das disziplinierte Verhalten der Schüler und die rege Mitarbeit bei allen Veranstaltungen. So waren die zwei Wochen in Greiz für alle sehr arbeits- und erlebnisreich. Ein umfangreiches und



interessantes Fachprogramm wurde den Schülern durch die Mitarbeiter der Sektion Mathematik, Herrn Dr. Börner und Herrn Dr. Hertel, und durch Studenten geboten. Die folgenden Ausführungen sollen einen kurzen Einblick geben:

Ein Schwerpunkt der fachlichen Arbeit in diesem Lager waren die Grundlagen der Mathematik. So wurde in den unteren Klassenstufen (8 und 9) Mengenlehre behandelt. Aufbauend auf die Cantorsche Mengendefinition

lernten die Schüler einfache Eigenschaften von Mengen und Operationen mit Mengen kennen.

In der 10. Klasse wurde mit der Gruppentheorie (vgl. Wurzel 5/69.... ..7/8/69) ein weiterer grundlegender Bestandteil der Mathematik behandelt.



Für die 11. Klasse hatten wir uns etwas besonderes herausgesucht: Zunächst wurde die Russelsche Antinomie, ein Widerspruch in der Cantorschen Mengenlehre, erläutert. Man bildet hierbei eine Menge R nach folgender Vorschrift:

$$R: \quad X \in R \iff X \notin X.$$

Durch Belegung von X mit R , d.h. durch die Frage: "Ist $R \in R$?" erhält man den Widerspruch

$$R \in R \iff R \notin R.$$

Hieraus ersahen die Schüler, daß ein anderer Zugang zur Mengenlehre, die ja ein fundamentaler Bestandteil der Mathematik ist, gefunden werden mußte. Als Beispiel eines solchen Zugangs wurde dann die Axiomatisierung der Mengenlehre nach J. v. Neumann, Gödel und Bernays behandelt.

In der Funktionentheorie untersuchten die Schüler der 11. Klasse Funktionen mit mehreren Veränderlichen. Sie lösten Extremwertprobleme und führten Koordinatentransformationen durch.

Die Schüler der 10. Klasse beschäftigten sich noch mit interessanten Problemen aus dem Bereich der komplexen Zahlen (vgl. auch die mit "Wurzel" 9/69 beginnende Artikelserie). Nachdem die Schü-

ler mit komplexen Zahlen umgehen konnten, wurden sie mit interessanten Anwendungen auf die analytische Geometrie der Ebene bekannt gemacht.

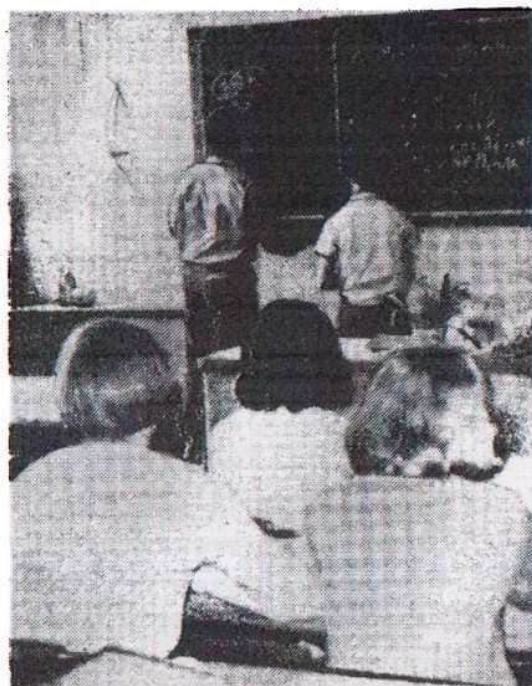
Geometrie durfte in unserem Spezialistenlager natürlich nicht fehlen. Die Schüler der 9. Klasse beschäftigten sich mit der Spiegelung am Kreis (s. Wurzel 1/68 bis 3/68), und in der 11. Klasse wurde mit der Inhaltslehre ein moderner Zweig der Geometrie behandelt. Inhaltslehre beschäftigt sich mit dem Rauminhalt von Polyedern. Im Lager wurden besonders einige algebraische Eigenschaften, die in diesem Zusammenhang von Interesse sind, betrachtet.

In der Klassenstufe 8 wurde neben Einführungen in Zahlentheorie und Kombinatorik näher auf die Struktur von Rechenautomaten eingegangen. Es wurde die Frage: "Wie addiert ein Automat?" behandelt. Als geeignete Hilfsmittel zur Beantwortung dieser Frage erwiesen sich Funktionsschaltungen, so daß die Schüler auch einen Einblick in die Schaltalgebra, ein Teil der mathematischen Kybernetik, erhielten.

Einen anderen Teil der Kybernetik, die Theorie der Nervennetze, lernten die Schüler der 10. Klasse kennen. Es wurden prinzipieller Aufbau und Wirkungsweise des menschlichen Nervensystems aufgezeigt und dann der Übergang zu einer geeigneten abstrakten mathematischen Beschreibung vollzogen. Dieses Gebiet der mathematischen Kybernetik vermittelt grundlegende Erkenntnisse für den Aufbau von Automaten, die bestimmte Teilfunktionen des menschlichen Gehirns realisieren können.

Nachdem das fachliche Programm erläutert wurde, sollen nun zwei Mitarbeiter unseres Kollektivs vorgestellt werden.

Herr Dr. Börner ist Oberassistent an der Sektion Mathematik. Seit zwei Jahren nimmt er regelmäßig an unseren Lagern teil. Die Vorbereitung unterstützt er, indem er hilft, die Fachprogramme auszuarbeiten. Seine interessanten und anschaulichen Geometriestun-



den haben bei den Schülern viel Anklang gefunden.

Ludwig Staiger ist Student im 4. Studienjahr der Diplomanden.

Er gehört zu den "Veteranen" des Lagers, denn er war bereits vor fünf Jahren als Schüler im ersten Lager dabei. Die Studenten, die damals das Betreuerkollektiv bildeten, förderten sein Interesse an der Mathematik, so daß Ludwig, der übrigens auch an einer IMO teilnahm, vor drei Jahren in Jena ein Mathematikstudium aufnahm. Er gehört zu den besten Studenten unserer Sektion. Den Mathematiklagern ist er stets treu geblieben, und seine Algebrastunden sind bei den Schülern beliebt.

Natürlich kam im Lager Greiz auch die Erholung nicht zu kurz.

Ausflüge in die herrliche Umgebung, rege Diskussionen um aktuelle Probleme, ein Abend am Lagerfeuer und sportliche Veranstaltungen boten die Möglichkeit, das kameradschaftliche Verhältnis zwischen Betreuern und Schülern zu vertiefen. An einem Leichtathletiksportfest beteiligten sich ausnahmslos alle Schüler und Betreuer. Einen Höhepunkt bildete unser Ganztagsausflug zur Talssperre Pöhl.

Eine gute Tradition besteht auch darin, stets einen prominenten Gast von der Sektion Mathematik der Fr.-Schiller-Universität begrüßen zu können. In diesem Lager hielt Dozent Dr. habil M. Walk einen interessanten Vortrag über das Wesen der dynamischen Optimierung. Seine Ausführungen über die bisherige Entwicklung und die Perspektiven der Mathematik in unserer Republik waren ebenfalls sehr interessant.

Um auf alle Erlebnisse genauer einzugehen, müßte der Platz für unseren Beitrag wesentlich erweitert werden. Schreibt uns deshalb, was Ihr über das Mathematiklager wissen möchtet. Wir sind auch dankbar für Anregungen zur Gestaltung des Lagers. Noch unentdeckten "Mathe-Assen" geben wir gern Auskunft darüber, welche Möglichkeiten bestehen, an unseren Lagern teilzunehmen.

Das Betreuerkollektiv

Kleine Knebelerei

Er ist doppelt so alt, wie sie alt war, als er so alt war, wie sie heute ist. Beide zusammen sind 42 Jahre alt.

Aufgaben (Serie 9/69)

(A67) Gibt es eine Zahl, die ausschließlich aus Einsen besteht,
☐ und die durch 173 teilbar ist?

(A68) Beweisen Sie, daß die Verbindung der Seitenmitten eines
☐ beliebigen Vierecks ein Parallelogramm ergibt.

(A69) Man beweise: Ist $a + b + c = 1$, dann gilt

☐
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$$

(A70) Der Nenner des folgenden Bruches ist rational zu machen:

☐
$$A = \frac{59}{1 + 3 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{4}}$$

(A71) Man berechne die Diagonalen eines Sehnenvierecks mit
☐ Hilfe der vier gegebenen Seiten.

(A72) Man finde die kleinste Permutationsgruppe, die die Per-
☐ mutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ enthält.

Achtung: Ab September 1969 werden alle Aufgaben der Serie als
Preisaufgaben gewertet, eine extra Preisaufgabe ent-
fällt somit.

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der
Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Ein-
sender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf
Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des
Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner
fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die
Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Post-
stempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere
Adresse einzuschicken.

Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw.
Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse
und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsen-
dungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksich-
tigt werden.

Aus der Sektion Mathematik

Vom 15.9. bis zum 20.9. veranstaltet die Sektion Mathematik der Fr.-Schiller-Universität Jena zu Ehren des 20. Jahrestages der Gründung der DDR eine wissenschaftliche Konferenz. Auf dieser Konferenz wird über Probleme der Mathematik und des wissenschaftlichen Gerätebaues beraten. Neben Fachvorträgen und Beratungen aus den Bereichen Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kybernetik, Rechentechnik und numerische Mathematik finden Beratungen über Fragen der Ausbildung und Erziehung, des 4-Jahres-Studiums und der Prognose der Mathematik in Jena statt. Zahlreiche prominente Gäste des In- und Auslandes haben ihr Kommen zugesagt.

Im September dieses Jahres findet im GST-Lager Schirgiswalde die vormilitärische Ausbildung der Studenten des 1., 2. und 3. Studienjahres statt. Die elf Tage dauernde Ausbildung sieht neben Ordnungsübungen, Umgang mit Handfeuerwaffen und Politausbildung auch taktische Geländeübungen. Orientierungsmärsche mit Karte



und Kompaß und eine verstärkte sportliche Ausbildung der Freunde vor. In der Freizeit finden militärpolitische Diskussionen, Buchlesungen, Gruppenversammlungen und Sportwettkämpfe statt. Zur gleichen Zeit besuchen die Studentinnen einen DRK-Lehrgang. Die Ausbildung wird von Angehörigen der Universität und Offiziersschülern der NVA getragen. Der Aufbau des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus, den wir im erbitterten Klassenkampf mit dem Imperialismus durchführen, erfordert von jedem einzelnen eine konsequente Hal-

tung zur Erhöhung der Verteidigungsbereitschaft unserer Republik. Doch genügt nicht nur die Bereitschaft dazu, jeder muß auch dazu in der Lage sein. Daher sind wehrsportliche Ausbildung und Wehrerziehung fester Bestandteil der Erziehung und Ausbildung aller Studenten.

Etwa 180 Studenten unserer Sektion arbeiteten im Juli in drei FDJ-Studentenbrigaden im Baueinsatz. Sie gaben ihrem Partner, dem VE(B) Straßen-, Brücken- und Tiefbaukombinat Gera, bei der Erfüllung seiner Volkswirtschaftspläne politische und ökonomische Hilfe. Die ökonomische Aufgabenstellung sah die termingerechte Fertigstellung einiger Straßenabschnitte im Gebiet Bad Köstritz - Serba-Trotz - Kahla und im Stadtgebiet Jena vor. Die durchschnittliche Planerfüllung betrug 108 % der erarbeitete Wert beträgt etwa 250 000 Mark. Darüber hinaus wurden durch den Einsatz der FDJ-Studentenbrigaden wertvolle Arbeitskräfte für den Aufbau des Stadtzentrums Jena frei. Alle drei Brigaden nahmen am Wettbewerb der Studentenbrigaden der Universität teil. Zu den Programmen der Brigaden gehörten auch FDJ-Versammlungen, Gespräche mit den Bauarbeitern und Brigadeabende im Studentenkeller. Der Erlös einer Sonderschicht am 19.7.69 wurde auf ein Spendenkonto für das kämpfende vietnamesische Volk überwiesen. Die besten FDJ-Studenten werden zum "Treffen Junger Sozialisten" im Oktober in Berlin delegiert. Durch ihren hervorragenden Einsatz bekundeten die Studenten ihre Verbundenheit zu unserem sozialistischen Staat und die Bereitschaft, überall tatkräftig mit Hand anzulegen.

I N F O R M A T I O N - I N F O R M A T I O N - I N F O

Computer steuert Fischfang

Mit dem Computer "Minsk 22" wird von Kaliningrad aus der Einsatz der sowjetischen Fischfangflotille im Atlantik und in der Ostsee gesteuert. Die Anlage errechnet in Sekundenschnelle den Zug von Fischschwärmen und die günstigsten Varianten des Einsatzes der Schiffe.

Buntes Allerei

Kennen Sie eigentlich den von Weinmeister 1878 verfaßten Merksvers für π ? (Die Buchstaben der einzelnen Wörter ausgezählt ergeben die einzelnen Stellen).

"Wie, o dies π
Macht ernstlich so vielen viele Müh'!
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein!"

In einer Klasse waren drei faule Schüler. Damit ihre Faulheit nicht so schnell offenbar wurde, beschloß der Faulste, jeden dritten Tag, der zweite, jeden fünften Tag, der dritte, jeden sechsten Tag ohne Aufgaben zu erscheinen. Als sie zum ersten Male alle drei ohne Aufgaben erschienen, riß dem Lehrer die bis dahin mühsam bewahrte Geduld und Wann trat die Katastrophe ein?

Jemand hat auf der Bank 500 M. Er hebt nacheinander ab
zuerst 200 M, bleiben also 300 M,
dann 150 M, bleiben also 150 M,
dann 90 M, bleiben also 60 M,
schließlich 60 M, bleiben also 0 M.

zusammen 500 M, zusammen 510 M.
Er hat also noch 10 M auf dem Konto. So kann man mühelos sein Vermögen vermehren.

Ein vergilbtes Manuskript (diese Aufgabe ist eindeutig lösbar!):

```
88***** : 8*** = ****
*****
*****
*****
*8***
8***8
*****
***88
-
```

Raten und Rechnen (jedes Kästchen bedeutet eine Ziffer, gleiche Kästchen bedeuten gleiche Ziffern):

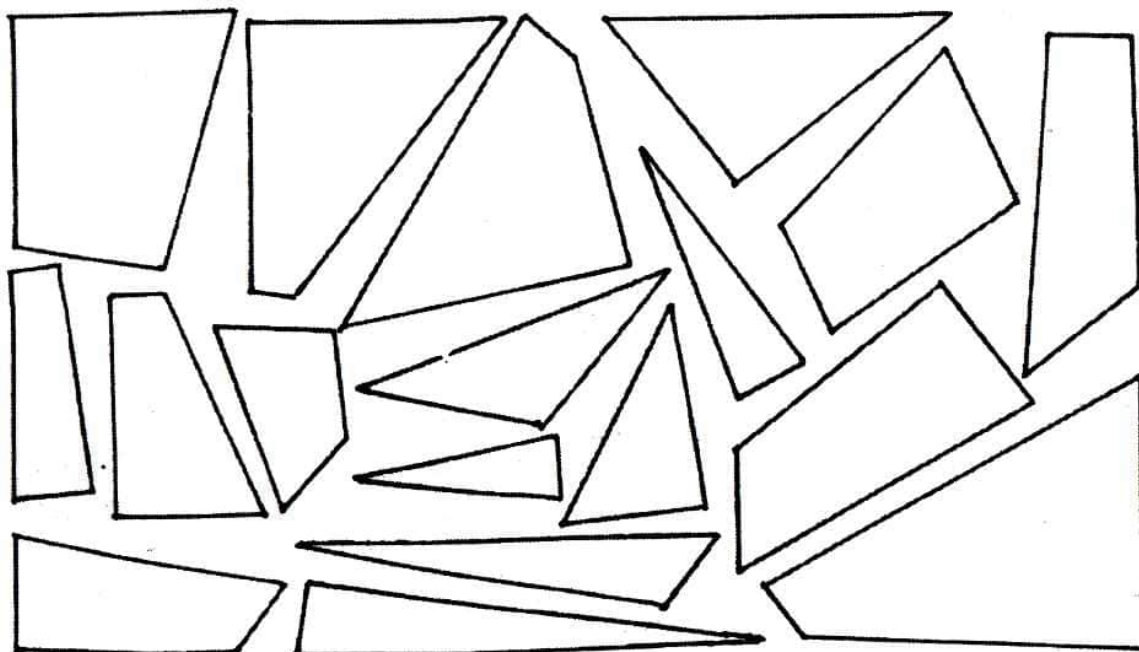
$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} \\
 : \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad - \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Aus der "Wurzel"-Werkstatt:

Das Schreibmaschinenmanuskript der "Wurzel" wird auf DIN A4-Bögen geschrieben. Berechnen Sie, wieviel Platz freigelassen werden muß, um beim Druck ein Bild der Größe 5cm x 10cm unterbringen zu können!

Für Mußestunden

Man setze ein Quadrat zusammen!



Laser enträtselt Mikrowelt

Erstmals ermöglicht ein vom VEB Carl Zeiss Jena entwickeltes neues Laser-Strahlenstichmikroskop im Jenaer Akademieinstitut für Mikrobiologie und experimentelle Therapie Untersuchungen über das Verhalten von Einzelzellen oder intrazellulären Bestandteilen gegenüber Licht- und Wärmestrahlung genau definierter Wellenlänge. Das Zeiss-Gerät arbeitet auf der Grundlage eines Rubin-Impulslasers in gezielter Bestrahlung von Flächen bis zu wenigen Quadrat-Mikrometern. Die extrem kurze Lichtblitzdauer von einer zehntausendstel Sekunde erlaubt es in der Zellbiologie Untersuchungen von außerordentlich kurzzeitigen Schock- und Reizeinwirkungen anzustellen, um die Zusammenhänge von Struktur und Funktion der Zellbestandteile sowie damit verbundener Regulationsmechanismen aufzuklären. Der Problembereich ist unter anderem auch von hohem Interesse für eine mikrobielle Eiweißsynthese zur Stärkung des Weltnahrungspotentials.

Zum Titelbild

Unser Titelbild zeigt Harald Fischer, einen Teilnehmer des diesjährigen Mathematikspezialistenlagers des Bezirkes Gera. Harald Fischer kommt aus der Spezialoberschule des VEB Carl Zeiss Jena und nimmt im September 1969 ein Mathematikstudium an der Sektion Mathematik unserer Universität auf.

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Wolfgang Ulbrich, Rainer Wackernagel
Mitarbeiter: R. Großmann, W. Kiefer, N. Kuse, R. Lorenz,
S. Müller, L. Staiger, E. Taubald, I. Zenner

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"Wurzel"-Redaktion



10

69

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

Komplexe Zahlen II (Schluß)

2. Geometrische Interpretation

Nachdem wir gelernt haben, mit den geordneten Zahlenpaaren zu rechnen, wollen wir eine verkürzte Schreibweise und eine damit verbundene geometrische Interpretation einführen. Hierzu betrachten wir die reellen Zahlen als Untermenge aller geordneten Zahlenpaare, indem wir jeder reellen Zahl α umkehrbar eindeutig das Zahlenpaar $(\alpha, 0)$ zuordnen. In diesem Sinne unterscheiden wir in Zukunft nicht mehr zwischen der reellen Zahl α und dem Zahlenpaar $(\alpha, 0)$. Wir wollen jetzt die Multiplikation des Zahlenpaares $b = (\beta_1, \beta_2)$ mit der reellen Zahl α (also im Sinne unserer Vereinbarung mit dem Zahlenpaar $(\alpha, 0)$) ausrechnen. Es ist

$$\alpha b = (\alpha, 0) \cdot (\beta_1, \beta_2) = (\alpha\beta_1, \alpha\beta_2). \quad (8)$$

Man hat also einfach die beiden reellen Zahlen β_1 und β_2 mit α zu multiplizieren. Wir betrachten jetzt "imaginäre" Zahlenpaare. Das sind Zahlenpaare der Form $(0, \alpha)$. Ist wiederum $b = (\beta_1, \beta_2)$, so erhalten wir

$$(0, \alpha) \cdot b = (0, \alpha)(\beta_1, \beta_2) = (-\alpha\beta_2, \alpha\beta_1). \quad (9)$$

Also auch hier vereinfacht sich die Multiplikation wesentlich. Die beiden letzten Formeln zeigen, daß die reellen und imaginären Zahlenpaare eine besondere Rolle spielen. Unsere bisherigen Resultate erlauben es, ein allgemeines Zahlenpaar in eindeutiger Weise in ein reelles und ein imaginäres Zahlenpaar zu zerlegen. Hierfür führen wir noch folgende Vereinbarung ein. Neben unserer Festsetzung, 1 und $(1, 0)$ als nicht verschieden anzusehen, setzen wir $i = (0, 1)$. Dann folgt aber aus der Definition der Addition und den Multiplikationsformeln (8) und (9) für ein Zahlenpaar

$$a = (\alpha_1, \alpha_2) =$$

$$= (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) = \alpha_1(1, 0) + (0, 1)\alpha_2 = \alpha_1 + i \cdot \alpha_2.$$

Hierzu hat man in den Formeln (8) und (9) $\beta_2 = 0$ zu setzen.

$a = \alpha_1 + i \cdot \alpha_2$ bezeichnet man als komplexe Zahl. Sie setzt sich aus dem "Realteil" α_1 und dem "Imaginärteil" α_2 zusammen. Als Beispiel wollen wir $i \cdot i = i^2$ ausrechnen. Setzt man in der Formel (9) $\alpha = 1$ und $b = (0, 1)$, so erhalten wir

$$i^2 = (-1, 0) = -1 \quad (10)$$

In diesem Sinne ist also die komplexe Zahl i eine Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ im Bereich der komplexen Zahlen. Mit Hilfe

der Rechenregel (10) kann man sich die Multiplikation der komplexen Zahlen (so nennen wir ab jetzt die geordneten Zahlenpaare) leicht merken. Es sei $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $b = (\beta_1, \beta_2)$. Dann zeigt die Formel (5), daß

$$a \cdot b = \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 + i(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \quad (11)$$

gilt. Lösen wir nun in dem Ausdruck

$$a \cdot b = (\alpha_1 + i\alpha_2)(\beta_1 + i\beta_2)$$

die Klammern auf, indem wir die Distributivgesetze (6a) und (6b) verwenden, so erhalten wir

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \alpha_1(\beta_1 + i\beta_2) + i\alpha_2(\beta_1 + i\beta_2) = \\ &= \alpha_1\beta_1 + i^2\alpha_2\beta_2 + i\alpha_1\beta_2 + i\alpha_2\beta_1. \text{ Da } i^2 = -1 \text{ ist, folgt} \\ a \cdot b &= \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1). \end{aligned} \quad (12)$$

Selbstverständlich stimmt dieses Resultat mit der Formel (11) überein, da wir zu seiner Herleitung nur gültige Rechenregeln verwendet haben. Man multipliziert somit zwei komplexe Zahlen, indem man die Klammern in der üblichen Weise auflöst und die Rechenregeln $1 \cdot i = i \cdot 1 = i$ und $i^2 = -1$ verwendet.

Wir gehen jetzt zu einer geometrischen Deutung der komplexen Zahlen über. Jede komplexe Zahl setzt sich aus zwei reellen Zahlen zusammen, dem Realteil und dem Imaginärteil. Wir zeichnen uns ein x-y-Achsenkreuz auf (siehe Abbildung 1). Wir können jetzt jede komplexe Zahl

$a = \alpha_1 + i\alpha_2 = (\alpha_1, \alpha_2)$ geometrisch deuten, indem wir den Realteil α_1 auf der x-Achse und den Imaginärteil α_2 auf der y-Achse vom Nullpunkt aus abtragen (Abbildung 1). Die Punkte der Ebene und die komplexen Zahlen sind dann umkehrbar eindeutig einander zugeordnet. Diese geometrische Interpretation

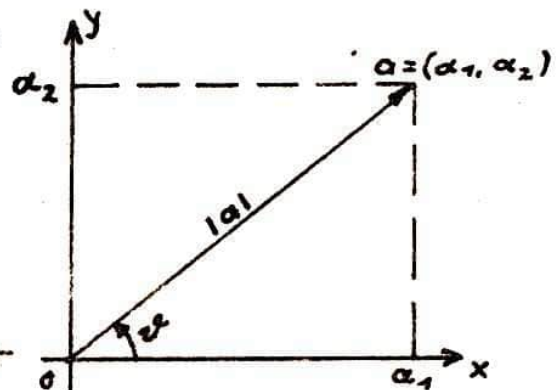


Abb. 1

legt eine zweite Darstellung der

komplexen Zahlen nahe, die wir Polardarstellung nennen wollen.

Jede komplexe Zahl a kann man durch ihren Abstand $|a|$ zum Nullpunkt und durch den Winkel θ kennzeichnen. Hierbei ist

$0 \leq \theta < 2\pi$. Aus dem Satz von Pythagoras folgt

$$|a|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \quad (13)$$

und somit $|a| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$

Ferner ist $\tan \vartheta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. (14)

Die Abbildung zeigt nun, daß man umgekehrt α_1 und α_2 aus $|a|$ und ϑ berechnen kann. Es ist

$$\alpha_1 = |a| \cdot \cos \vartheta \quad \text{und} \quad \alpha_2 = |a| \cdot \sin \vartheta. \quad (15)$$

Zur Abkürzung führen wir die komplexe Zahl

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta \quad (16)$$

ein. Dann können wir aber die komplexe Zahl $a = (\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 + i \cdot \alpha_2$ in die Form

$$\begin{aligned} a &= |a| \cdot \cos \vartheta + i \cdot |a| \cdot \sin \vartheta = |a| (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta) = \\ &= |a| \cdot e^{i\vartheta} \end{aligned} \quad (17)$$

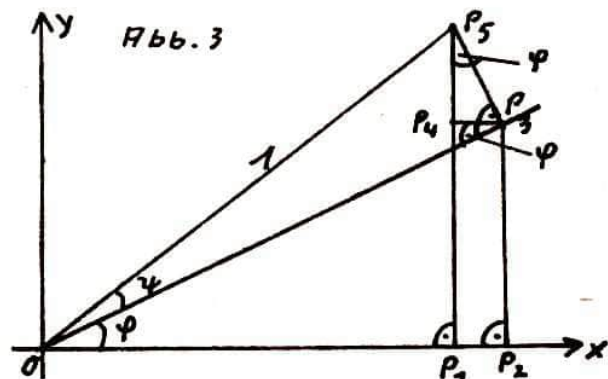
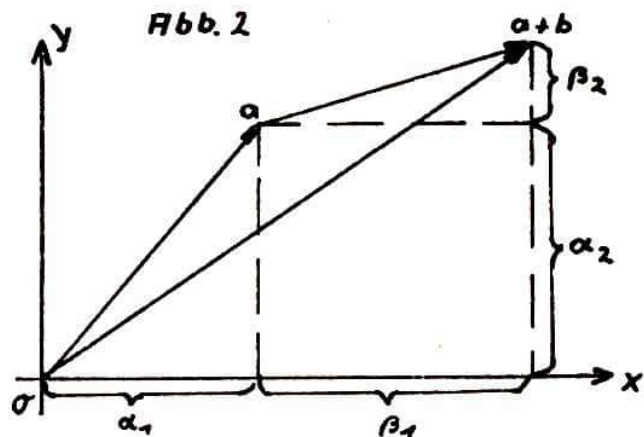
umschreiben. (17) nennt man auch die Polardarstellung einer komplexen Zahl a . $|a|$ nennt man den Betrag der Zahl a und ϑ das Argument der Zahl a .

Zum Abschluß wollen wir die Addition und die Multiplikation komplexer Zahlen geometrisch deuten und zugleich eine bemerkenswerte Eigenschaft der Zahlen $e^{i\vartheta}$ herleiten. Zu diesem Zweck deuten wir die komplexen Zahlen

$a = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $b = (\beta_1, \beta_2)$ als Vektoren mit α_1 und α_2 bzw. β_1 und β_2 als Komponenten. Wir tragen den Vektor a vom Nullpunkt aus ab und den Vektor b vom Endpunkt des Vektors a (Abbildung 2).

Der so erhaltene Endpunkt ist die komplexe Zahl $a + b$, wie man sofort aus der Abbildung 2 sieht. Die Addition von komplexen Zahlen ist somit gleich der Addition von Kräften in einem Kräfteparallelogramm. Um die Multiplikation in gleicher Weise geometrisch deuten zu können, führen wir eine Vorbetrachtung durch. Wir geben eine geometrische Herleitung der Additionstheoreme

für $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$. Aus der Abbildung 3 liest man folgende Relationen ab: $\overline{OP_5} = 1$,
 $\cos(\varphi + \psi) = \overline{OP_1} =$
 $= \overline{OP_2} - \overline{P_1P_2} =$
 $= \overline{OP_3} \cdot \cos \varphi - \overline{P_3P_4} =$
 $= \overline{OP_5} \cdot \cos \psi \cdot \cos \varphi - \overline{P_3P_5} \cdot \sin \varphi$



$$\begin{aligned}
&= \cos \varphi \cdot \cos \varphi - \overline{OP_5} \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi = \\
&= \cos \varphi \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \sin \varphi
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sin(\varphi + \psi) &= \overline{P_1 P_5} = \overline{P_1 P_4} + \overline{P_4 P_5} = \overline{P_2 P_3} + \overline{P_4 P_5} = \\
&= \overline{OP_3} \sin \varphi + \overline{P_3 P_5} \cdot \cos \varphi = \\
&= \overline{OP_5} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \overline{OP_5} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \\
&= \sin \varphi \cdot \cos \psi + \sin \psi \cdot \cos \varphi.
\end{aligned}$$

Somit gelten die Additionstheoreme

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin \varphi \cdot \cos \psi + \sin \psi \cdot \cos \varphi \quad \text{und} \quad (18)$$

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cdot \cos \psi - \sin \varphi \cdot \sin \psi. \quad (19)$$

Nach der Art unseres Vorgehens liegen die Winkel φ und ψ zwischen 0 und 2π , $\varphi + \psi$ liegt somit zwischen 0 und 4π . In den Formeln (18) und (19) hat man zu berücksichtigen, daß $\cos \vartheta$ und $\sin \vartheta$ Funktionen mit der Periode 2π sind.

Mit Hilfe dieser Formeln können wir jetzt die Multiplikation komplexer Zahlen geometrisch deuten. Es sei $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $b = (\beta_1, \beta_2)$. Wir wollen $|ab|$ ausrechnen. Die Formeln (5) und (13) führen zu

$$\begin{aligned}
|ab|^2 &= (\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2)^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)^2 = \\
&= \alpha_1^2 \beta_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 + \alpha_1^2 \beta_2^2 + 2\alpha_1 \beta_2 \alpha_2 \beta_1 + \alpha_2^2 \beta_1^2 = \\
&= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) = |a|^2 |b|^2.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$|ab| = |a| \cdot |b|. \quad (20)$$

Schreiben wir jetzt ab in die Polardarstellung (17) um, so erhalten wir

$$ab = |ab| \cdot e^{i\vartheta} = |a| \cdot |b| \cdot e^{i\vartheta}. \quad (21)$$

Setzen wir andererseits

$$a = |a| \cdot e^{i\varphi}, \quad b = |b| \cdot e^{i\psi},$$

so erhalten wir

$$ab = |a| \cdot e^{i\varphi} \cdot |b| \cdot e^{i\psi} = |a| \cdot |b| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi}. \quad (22)$$

Vergleichen wir die Darstellungen (21) und (22), so folgt

$$e^{i\vartheta} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi}. \quad (23)$$

Wir wollen jetzt den Winkel ϑ aus den Winkeln φ und ψ bestimmen. Dazu erinnern wir uns an die Formel (16). Die nochmalige Verwendung der Multiplikationsregel für komplexe Zahlen führt zu

$$\begin{aligned}
e^{i\vartheta} &= (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)(\cos \psi + i \cdot \sin \psi) = \\
&= \cos \varphi \cdot \cos \psi - \sin \varphi \cdot \sin \psi + i(\sin \varphi \cdot \cos \psi + \sin \psi \cdot \cos \varphi).
\end{aligned}$$

Wir benutzen jetzt die Additionstheoreme (18) und (19) und erhalten

$$e^{i\vartheta} = \cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi) = e^{i(\varphi + \psi)}. \quad (24)$$

Aus der Formel (23) folgt nun die bemerkenswerte Multiplikationsregel

$$e^{i(\varphi + \psi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi}. \quad (25)$$

Die Formel (22) führt uns zu der Polardarstellung

$$\begin{aligned} ab &= |a| \cdot |b| \cdot e^{i(\varphi + \psi)} = \\ &= |a| \cdot |b| (\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi)). \end{aligned} \quad (26)$$

Diese Formel läßt eine einfache geometrische Deutung zu. Man geht von einer der beiden komplexen Zahlen, sagen wir a , aus. a und b deuten wir als Vektoren. Wir strecken den Vektor a mit $|b|$ und drehen den so erhaltenen Vektor $|b| \cdot a$ um den Winkel ψ . Das Resultat ist $a \cdot b$ (man vergleiche hierzu Abbildung 3).

Wir wollen jetzt noch auf die Frage eingehen, wann das Produkt $ab = 0$ ist. Die Formel (20) zeigt, daß in diesem Fall

$$0 = |a| \cdot |b|$$

gelten muß. Somit ist entweder $|a| = 0$ oder $|b| = 0$ oder $|a| = |b| = 0$. Aus der Formel (13) folgt für $|a| = 0$, daß $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ sein muß. Entsprechend für $|b| = 0$. Somit sieht man, daß $a \cdot b = 0$ dann und nur dann bestehen kann, wenn mindestens eine der beiden komplexen Zahlen a oder b gleich 0 ist.

Zum Schluß noch eine Bemerkung zur Multiplikation komplexer Zahlen. Wir denken uns die komplexen Zahlen a , b und c in Polardarstellung gegeben, also $a = |a| \cdot e^{i\varphi}$, $b = |b| \cdot e^{i\psi}$, $c = |c| \cdot e^{i\vartheta}$.

Dann folgt aus der Formel (26)

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot c &= (|a| \cdot |b| \cdot e^{i(\varphi + \psi)}) \cdot c = \\ &= |a| \cdot |b| \cdot |c| \cdot e^{i(\varphi + \psi + \vartheta)} = \\ &= a(|b| \cdot |c| \cdot e^{i(\psi + \vartheta)}) = a \cdot (b \cdot c). \end{aligned}$$

Diese Formel nennt man das Assoziativgesetz der Multiplikation.

Wie bei der Addition, so schreiben wir auch hier $abc = a \cdot b \cdot c$ statt $(a \cdot b) \cdot c$.

Damit haben wir die Grundzüge der Theorie der komplexen Zahlen entwickelt. Die komplexen Zahlen spielen in zahlreichen Teilgebieten der Mathematik, Physik und Technik eine fundamentale Rolle. Viele Vorgänge der Natur kann man unter Verwendung komplexer Zahlen in mathematisch übersichtlicher Form beschreiben.

Dr. habil. H. Triebel

Wir stellen vor: Dozent Dr. habil. Hans Triebel

Dr. habil. Hans Triebel ist Dozent an der Sektion Mathematik der FSU Jena und arbeitet auf dem Gebiet der Funktionalanalysis. Er



wurde am 7.2.1936 geboren. In Dessau besuchte er die Rosa-Luxemburg-Oberschule und legte dort 1954 sein Abitur ab.

Von 1954 bis 1959 studierte er in Jena. Nach Beendigung seines Studiums arbeitete er ein Jahr im VEB Carl Zeiss Jena. 1960 wurde er Assistent am Institut für Mathematik der FSU Jena. Hier promovierte er im Dezember 1962 mit der Arbeit "Über die Lamé'sche Differentialgleichung". Nach seiner Promotion wurde er für ein Jahr nach Lenin-grad delegiert.

Im Januar 1966 habilitierte Dr. Triebel mit der Arbeit "Zur Theorie der quasilinearen elliptischen

Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme". Seit Februar 1969 ist er Dozent. Dr. Triebel ist einer der profiliertesten Mitarbeiter der Abteilung Funktionalanalysis. Das unterstreichen nicht zuletzt 19 Veröffentlichungen in verschiedenen mathematischen Zeitschriften.

Preisaufgaben (Serie 10/69)

(A73) Man stelle die komplexe Zahl



$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 + i)$$

geometrisch dar (Polarkoordinaten).

Wie groß ist $a^2 = a \cdot a$?

(A74) Man bestimme sämtliche Elemente einer Gruppe G , für die die Relation $a^2 = a$ gilt.



(A75) Es ist zu beweisen: Wenn $\frac{1}{n}(2^n - 2)$ ganzzahlig ist, so ist



auch $\frac{2^{2^n} - 1}{2^n - 1} - 2$ eine ganze Zahl.

(A76) Warum kann man aus der Gültigkeit des Satzes

"Die Diagonalen eines Rhombus stehen senkrecht aufeinander."
ohne weitere geometrische Überlegungen auf die Gültigkeit
des Satzes

"Ein Viereck, dessen Diagonalen nicht senkrecht aufeinander
stehen, ist kein Rhombus."
schließen?

(A77) Man beweise, daß

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\tan \alpha + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \text{ gilt.}$$

(A78) Gegeben sei eine Funktion $f(i\varphi)$, $-\infty < \varphi < \infty$, mit

$$f(i(\varphi + \psi)) = f(i\varphi) \cdot f(i\psi), \quad \varphi, \psi \text{ reell.}$$

Die Zerlegung der komplexen Zahl $f(i\varphi)$ in Real- und Imagi-
närteil sei

$$f(i\varphi) = g(i\varphi) + i \cdot h(i\varphi), \quad g(i\varphi) \text{ und } h(i\varphi) \text{ reell.}$$

Man beweise

$$g(i(\varphi + \psi)) = g(i\varphi)g(i\psi) - h(i\varphi)h(i\psi) \text{ und}$$

$$h(i(\varphi + \psi)) = g(i\varphi)h(i\psi) + h(i\varphi)g(i\psi).$$

Ferner zeige man, daß die Additionstheoreme (18) und (19)
Spezialfälle dieser Formeln sind. Wie hat man hierbei
 $f(i\varphi)$ zu wählen?

Achtung: Seit September 1969 werden alle Aufgaben der Serie als
Preisaufgaben gewertet, eine extra Preisaufgabe ent-
fällt somit.

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der
Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Ein-
sender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf
Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des
Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner
fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die
Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Post-
stempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere
Adresse einzuschicken. Wir weisen darauf hin, daß alle uns ein-
gesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Ein-
senders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen
sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, kön-
nen nicht berücksichtigt werden.

Aus der Sektion Mathematik

Studienprogramm für das Grundstudium Mathematik

Ab September 1969 erfolgt die Ausbildung der Diplom-Mathematiker im 4-Jahresstudium. An die Studenten des ersten Studienjahres werden damit schon von Anfang an erhöhte Anforderungen gestellt. Wir wollen in dieser und der nächsten Ausgabe der "Wurzel" unsere Leser mit dem Studienprogramm für das Grundstudium der Diplom-Mathematiker bekannt machen.

Dieses Studienprogramm ist auf der Grundlage des Rahmenstudienprogramms für das Grundstudium der Grundstudienrichtung Mathematik vom 7.3.1969, welches von der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin ausgearbeitet und mit Vertretern der Sektionen Mathematik der DDR beraten wurde, entstanden.

1. Ausbildungs- und Erziehungsziel

Für die Grundstudienrichtung Mathematik wird die Ausbildung durch die internationalen Entwicklungstendenzen der Mathematik sowie die gesellschaftlichen Erfordernisse des umfassenden Aufbaus des Sozialismus in der DDR, unter Berücksichtigung des Prinzips der Einheit von Bildung und Erziehung, bestimmt. Im Prozeß der Ausbildung sind bei den Studenten die Eigenschaften und Verhaltensweisen zu entwickeln, die das Leitbild des sozialistischen Wissenschaftlers kennzeichnen.

Jeder Student muß breite theoretische Grundkenntnisse sowohl in Mathematik als auch in Marxismus-Leninismus erhalten, die ihm einen hohen Grad von Disponibilität verleihen. Jeder Absolvent soll eine fundierte Ausbildung in einem Spezialgebiet besitzen, die an die neuesten Erkenntnisse dieses Gebiets heranreicht und und ihn für einen Einsatz in einem speziellen, jedoch nicht zu engen Bereich der Volkswirtschaft oder der verschiedenen Bildungs- und Forschungseinrichtungen vorbereitet. Zur Entwicklung einer sozialistischen Großforschung und bei Berücksichtigung des in der sozialistischen Praxis erforderlichen Verhältnisses von Hochschulkadern mit Diplom und Promotion muß es zur Regel werden, daß Diplom-Mathematiker in einem Kollektiv unter Anleitung promovierter Wissenschaftler arbeiten. In der Praxis werden folgende Anforderungen stufenweise an den Mathematiker gestellt:

- a) Einsatz der im Studium vermittelten Kenntnisse und Methoden in der Praxis.
- b) Einarbeitung in neue mathematische Gebiete mit neuen Methoden sowie Anwendung der erarbeiteten Kenntnisse auf praktische Probleme.
- c) Selbständige Entwicklung mathematischer Modelle und Lösungsmethoden bei gestellten Problemen.
- d) Erkennen sich abzeichnender wissenschaftlicher Tendenzen und selbständige Formulierung neuer Aufgabenstellungen.
- e) Die Fähigkeit, ein Kollektiv zu leiten und anzuleiten.

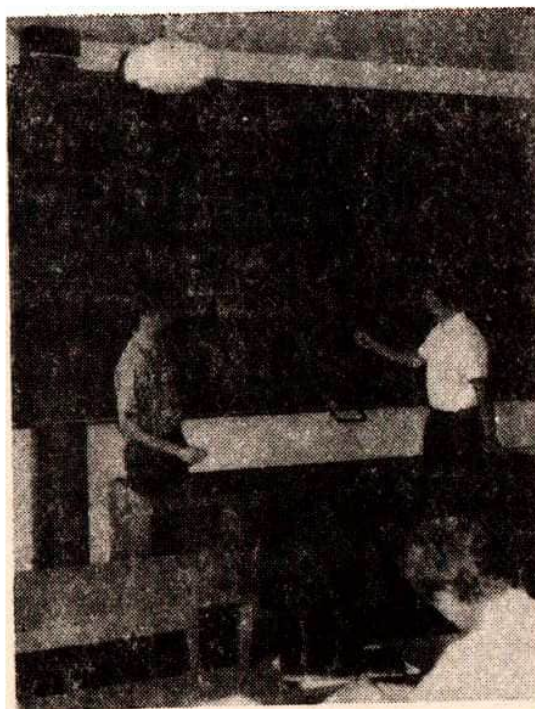
Das Ziel der Ausbildung besteht im Erreichen der Stufen a) und b) und mit Einschränkung c). Zur Erreichung der Stufen d) und e) sind jahrelange praktische Erfahrungen nötig, die durch ein sinnvolles System der Weiterbildung ergänzt werden.

Das Prinzip des wissenschaftl.-produktiven Studiums wird während der gesamten Studienzeit auf verschiedenen Stufen verwirklicht.

Im Vordergrund steht die aktive Auseinandersetzung des Studierenden mit dem Stoff.

Für das Grundstudium sind zwei Studienjahre vorgesehen, die je 40 Wochen umfassen. Die Aufgaben des Grundstudiums sind:

- a) Vermittlung von Mathematik-Grundkenntnissen (Fakten, mathematisches Schließen, Verständnis mathematischer Probleme und Methoden) in genügender Breite, um die Basis aller in der DDR vorgesehenen Fachstudienrichtungen zu legen und diese Fachausbildung einzuleiten.
- b) Befähigung der Studenten zu wissenschaftlichen Arbeiten.
- c) Durchführung der Grundausbildung im Fach Marxismus-Leninismus.
- d) Vermittlung theoretischer und praktischer militärischer Kenntnisse.



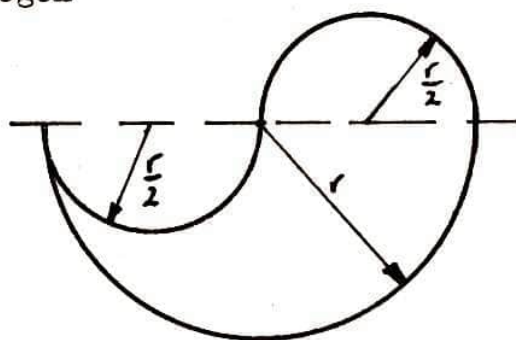
- e) Durchführung des Sportunterrichts.
- f) Durchführung des Sprachunterrichts.
- g) Vorbereitung und Treffen der Entscheidung über die Aufteilung der Studenten auf die Fachstudienrichtungen nach staatlichen Kennziffern.

Über den erfolgreichen Abschluß des Grundstudiums wird ein Beleg ausgestellt, der zur Aufnahme des Fachstudiums berechtigt und unter Umständen einen Hochschulwechsel zuläßt.

Buntes Allerlei

Kann man auf einem Schachbrett das Pferd von der linken unteren Ecke des Brettes in die rechte obere Ecke so ziehen, daß es dabei auf jedem Feld genau einmal abgesetzt wird?

Die abgebildete Figur ist mit einem Schnitt in zwei kongruente Teile zu zerlegen



Das Gleichungssystem $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$ (1)

$x - y = 4$ (2)

wurde wie folgt gelöst:

Aus (1) folgt $x^2 + y^2 = 2xy$

$x^2 - 2xy + y^2 = 0$

$(x - y)^2 = 0$

$x - y = 0.$

Nach (2) ist aber $x - y = 4.$

Somit gilt $0 = 4.$ Wo steckt der Fehler?

Einführung in die Spieltheorie I

In der Natur und Gesellschaft stößt man häufig auf Situationen, in denen die Beteiligten unterschiedliche Interessen haben und jeder ein gewisses Ziel erreichen will. Das eine solche Situation wiedergebende mathematische Modell heißt "strategisches" Spiel. Jedes Unterhaltungsspiel (Damespiel, Halma usw.), also Spiele im üblichen Sinn des Wortes, stellt eine solche Konfliktsituation dar. Aber auch für viele andere Situationen, etwa die Verteidigung einer Festung im Krieg, kann man oft ein abstraktes Spielmodell konstruieren. Die systematische Untersuchung "strategischer" Spiele begann im Jahre 1928 durch den hervorragenden Mathematiker J. v. Neumann. Seitdem sind viele Probleme aufgeworfen und gelöst worden.

Zur Einführung in die Begriffe der Spieltheorie wählen wir ein einfaches, aber charakteristisches Beispiel. Zwei Spieler A und B wählen unabhängig voneinander einen der drei Werte -1 , 0 oder $+1$. Der von A gewählte Wert werde mit s bezeichnet, der von B gewählte mit t . B hat an A den Betrag $s(t-s)+t(t+s)$ zu entrichten. Wenn A beispielsweise die Zahl -1 wählt, gewinnt er $-(t+1)+t(t-1)$ Einheiten, also 2 , -1 oder -2 Einheiten, je nachdem, ob B -1 , 0 oder $+1$ wählt. Der Gewinn oder der Verlust eines jeden Spielers hängt also nicht nur von seiner eigenen Verhaltensweise ab, sondern auch von der Verhaltensweise seines Gegenspielers. Dies ist ein Hauptmerkmal aller Spiele, die in der Spieltheorie untersucht werden. Ein grundlegender Begriff in der Spieltheorie ist der Begriff der Strategie. Man versteht darunter einen Plan, der für jeden nach den Spielregeln möglichen Spielverlauf einen Zug angibt. In Spielen mit nur einem Zug, wie in unserem Beispiel, ist die Strategie identisch mit dem Zug. Eine Strategie im Schachspiel ist in unserem Sinne ein Verzeichnis, das für jede Stellung der Figuren einen Zug angibt. Wählt jeder Spieler eine Strategie, so ist der Verlauf und der Ausgang eines jeden Spieles bestimmt. In unserem Beispiel verfügen die beiden Spieler A und B über drei Strategien. Bezeichnen wir mit S bzw. T die Menge aller Strategien von A bzw. B, so ist $S = \{-1, 0, +1\}$ und $T = \{-1, 0, +1\}$. Es sei $A(s,t)$ der Gewinn des Spielers A, wenn er die Strategie s und B die Strategie t wählt. Entsprechend werde der Gewinn $B(s,t)$ des Spielers B defi-

niert. Nach den Spielregeln ist $A(s,t) = -B(s,t) = s(t-s)+t(s+t)$. Wir sind jetzt in der Lage, ein Zwei-Personen-Spiel im mathematischen Sinn des Wortes zu definieren:

D e f i n i t i o n:

Ein Zwei-Personen-Spiel Γ wird bestimmt durch die Angabe

- a) der Mengen der Strategien S und T der beiden Spieler,
- b) der Gewinnfunktionen $A(s,t)$ und $B(s,t)$ der beiden Spieler.

Formal schreibt man hierfür kurz:

$$\Gamma = \{S, T; A(s,t), B(s,t)\}.$$

Eine Partie eines Spieles Γ verläuft somit folgendermaßen: Die Spieler A und B wählen unabhängig voneinander ihre Strategien s und t (s aus S , t aus T). Nach Beendigung der Partie erhält A $A(s,t)$ und B $B(s,t)$ Einheiten aus einer nicht näher bestimmten Quelle ausgezahlt.

In unserem Beispiel gibt es nur endlich viele Strategien. Außerdem ist der Verlust des einen Spielers der Gewinn des anderen, also $A(s,t) + B(s,t) = 0$. Solche Spiele werden endliche Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele genannt. Mit ihnen wollen wir uns jetzt näher beschäftigen. S möge aus den Strategien $s_1, s_2, \dots, s_{m-1}, s_m$ und T aus den Strategien $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n$ bestehen. Dann genügt zur Beschreibung eines endlichen Zwei-Personen-Nullsummen-Spiels die Angabe der Gewinnmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

des Spielers A .

Die Zahl a_{ik} , d.h. diejenige Zahl, die in der i -ten Zeile und k -ten Spalte der Matrix A steht, ist der Gewinn des Spielers A , wenn er die Strategie s_i und B die Strategie t_k wählt. Für die Elemente b_{ik} der Gewinnmatrix B des Spielers B gilt offensichtlich $b_{ik} = -a_{ik}$. In unserem Beispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wie werden nun die beiden Spieler vernünftigerweise spielen? Die Spieltheorie nimmt an, daß beide Spieler folgende Überlegungen

anstellen: "Bei jeder Wahl einer Strategie habe ich zu befürchten, daß mein Gegner meinen Gewinn so klein wie möglich macht. Wähle ich also eine Strategie, die diesen kleinsten Gewinn so groß wie möglich macht, dann gehe ich so sicher, wie ich es vernünftigerweise nur tun kann." Spieler A sucht also in der Gewinnmatrix A in jeder Zeile das Minimum und wählt aus diesen m Zahlen das Maximum. Mathematisch ausgedrückt heißt dies die Zahl $\max_i \min_j a_{ij}$ zu berechnen. Er wird also eine Zeile, d.h. die entsprechende Strategie, wählen, die diesen Mindestgewinn garantiert. Spieler B wird entsprechend zuerst die Maxima in den Spalten bestimmen und aus diesen das Minimum auswählen, d.h. $\min_j \max_i a_{ij}$ berechnen. B verliert dann höchstens $\min_j \max_i a_{ij}$ Einheiten. In unserem Beispiel wird sich A deshalb für die Strategie $s_2 = 0$ und B für die Strategie $t_2 = 0$ entscheiden. Der Gewinn beider Spieler ist deshalb $A(0,0) = B(0,0) = 0$.

Dr. A. Liemant
Assistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Lösungen

(A37): Man bezeichne die Aussagen

- a ist durch p teilbar mit s
- a ist durch q teilbar mit t
- a ist durch p·q teilbar mit u.

Die Aussage "Wenn a durch p und q teilbar ist, so ist a durch p·q teilbar" ergibt sich als

$$s \wedge t \rightarrow u.$$

Die Kontraposition dieser Aussage ergibt

$$\sim u \rightarrow \sim(s \wedge t)$$

(Als Kontraposition der Aussage $A \rightarrow B$ bezeichnet man die Aussage $\sim B \rightarrow \sim A$. Es gilt hierbei

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \sim B \rightarrow \sim A).$$

Da $\sim(s \wedge t) \leftrightarrow \sim s \vee \sim t$

ergibt sich aus $s \wedge t \rightarrow u$ die Aussage

$$\sim u \rightarrow \sim s \vee \sim t$$

oder in Worten "Wenn a nicht durch p·q teilbar ist, so ist a nicht durch p oder nicht durch q teilbar".

(P.27): Es gilt für $n \geq 3$

$$n! > 2^{n-1} \text{ und somit } \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Man erhält:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Es ist nun

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} < 3$$

Also gilt die zu beweisende Ungleichung:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 3.$$

(P.32): Es ist zu zeigen, daß

$Z = \{z: z \in G \wedge \forall g(g \in G \rightarrow zg = gz)\}$ eine abelsche Untergruppe von G ist.

Man zeige zunächst, daß Z Untergruppe von G ist. Dazu wird der Satz aus Heft 7/8/69 Seite 80 benutzt:

Zu zeigen ist:

$$x, y \in Z \rightarrow x \cdot y^{-1} \in Z.$$

Man zeigt zunächst:

$y \in Z \rightarrow y^{-1} \in Z$, d.h. auch y^{-1} ist mit allen Elementen aus G vertauschbar:

Es gilt, da $y \in Z$, für alle $g \in G$

$$yg = gy.$$

$$\text{Nun ist auch } y^{-1}ygy^{-1} = y^{-1}gyy^{-1}$$

$$\text{oder } gy^{-1} = y^{-1}g,$$

also ist mit y auch $y^{-1} \in Z$.

Nun ist zu zeigen $xy^{-1} \in Z$, d.h. für alle $g \in G$:

$$xy^{-1}g = gxy^{-1}.$$

Zunächst ist $xy^{-1}g = xgy^{-1}$, da y^{-1} mit g vertauschbar ist.

Danach vertausche man x mit g und erhält:

$$xgy^{-1} = gxy^{-1}$$

und als Endresultat

$$xy^{-1}g = gxy^{-1}, \text{ was zu zeigen war.}$$

Noch zu zeigen ist, daß Z eine abelsche Gruppe ist, d.h.

$$x, y \in Z \rightarrow xy = yx.$$

Da $Z \subseteq G$ ist, folgt somit aus $y \in Z$ auch $y \in G$.

Bekannt ist nun, daß für $x \in Z$ und $y \in G$ $xy = yx$ ist, also erst recht für $y \in Z$.

(A44): Die ersten drei Glieder der arithmetischen Folge seien

$a_0, a_1 = a_0 + d, a_2 = a_0 + 2d$. Es gilt dann

$$a_0(a_0 + d)(a_0 + 2d) = 15 \quad (1)$$

$$\text{und } a_0 + a_0 + d + a_0 + 2d = 9$$

$$\text{oder } a_0 + d = 3 \quad (2)$$

Mittels (2) erhält man aus (1):

$$(3 - d) \cdot 3 \cdot (3 + d) = 15$$

$$\text{oder } 9 - d^2 = 5.$$

Somit ergeben sich für d die Werte $+2$ oder -2 , für a_0 entsprechend 1 oder 5 .

Als Lösung ergeben sich folgende arithmetische Folgen:

$$\begin{array}{ll} \text{I } (a_n)_n = 1, 2, \dots & \text{mit } a_n = 1 + 2n \\ \text{oder II } (a'_n)_n = 1, 2, \dots & \text{mit } a'_n = 5 - 2n. \end{array}$$

(A64): Es gilt

$$\begin{aligned} 10^{n+1} - 10(n+1) + n &= (9+1)^{n+1} - 9(n+1) - 1 = \\ &= 9^{n+1} + \binom{n+1}{1}9^n + \dots + \binom{n+1}{n-1}9^2 + \binom{n+1}{n}9 + 1 - \\ &\quad - 9(n+1) - 1 = \\ &= 9^{n+1} + \binom{n+1}{1}9^n + \dots + \binom{n+1}{n-1}9^2. \end{aligned}$$

Diese Summe ist für beliebiges natürliches n immer durch 81 teilbar.

Zum Titelbild

Das Titelbild zeigt die Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena.

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Wolfgang Ulbrich, Rainer Wackernagel
Mitarbeiter: R. Großmann, W. Kiefer, N. Kuse, R. Lorenz,
S. Müller, L. Staiger, E. Taubald, I. Zenner

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"Wurzel"-Redaktion



11

69

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

Einiges über Folgen und Reihen I

Sehr häufig operiert man in der Mathematik mit Folgen. Insbesondere nimmt der Begriff des Grenzwertes einer Folge in vielen Gebieten der Mathematik eine zentrale Stellung ein. Im vorliegenden Beitrag soll eine Einführung in diesen Begriff gegeben werden, um ihn dann auf Reihen anzuwenden.

1. Folgen

D e f i n i t i o n:



Ist jeder natürlichen Zahl n genau eine reelle Zahl a_n zugeordnet, so nennen wir $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ eine Folge. a_n heißt das n -te Glied der Folge.

Eine Folge bezeichnen wir im weiteren auch kurz mit (a_n) .

Zur Verdeutlichung betrachten wir einige Beispiele:

B1: die Folge der natürlichen Zahlen: $0, 1, 2, \dots, n, \dots$

B2: die Folge der Primzahlen

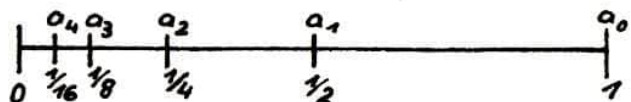
B3: die Folge der Ziffern hinter dem Komma, wenn man $\frac{2}{3}$ als Dezimalzahl schreibt: $6, 6, 6, \dots, 6, \dots$

B4: $\pi, -\frac{1}{2}, \pi, -\frac{2}{3}, \dots, \pi, -\frac{n}{n+1}, \dots$

Wir lenken unsere Aufmerksamkeit nun auf solche Folgen, deren Glieder a_n bei immer größer werdendem n eine ganz bestimmte Eigenschaft besitzen. Dazu veranschaulichen wir uns die Folge

B5: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

auf der Zahlengeraden:



Bei dieser Folge hat man den Eindruck, daß a_n sich mit wachsendem n immer mehr der Null nähert. Man kann noch sehr viele Folgen finden, die so eine Tendenz zur Null hin besitzen. Betrachten wir das folgende Beispiel:

B6: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}, \dots$

Skizziert man die ersten Glieder dieser Folge auf einer Zahlengeraden, so empfindet man auch ein gewisses Streben der Glieder nach Null (jetzt allerdings von beiden Seiten her). Damit meinen wir offenbar, daß der Abstand von a_n zur Null, also der Betrag von a_n ($|a_n|$) der Null nahekommt. Wie können wir aber dieses "Nahekommen", "Streben", "Tendieren", ... genau erfassen? In den beiden vorhergehenden Beispielen gilt $|a_n| > |a_{n+1}|$. Das ist aber eine sehr starke Eigenschaft (Monotonie). Es gibt hingegen viele

Beispiele, wo diese Monotonieeigenschaft nicht erfüllt ist und trotzdem ein "Tendieren" zur Null hin besteht.

B7: (a_n) mit $a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}$ (k natürliche Zahl)

Die ersten Glieder dieser Folge sind 0, -1, 0, $-\frac{1}{3}$, 0, $-\frac{1}{5}$, ...

B8: (a_n) mit $a_{2k} = \frac{7}{k+2}$, $a_{2k+1} = \frac{7}{k+1}$ (k natürliche Zahl)

Die ersten Glieder lauten

$$\frac{7}{2}, \frac{7}{1}, \frac{7}{3}, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{3}, \frac{7}{5}, \frac{7}{4}, \frac{7}{6}, \frac{7}{5}, \frac{7}{7}, \frac{7}{6}, \dots$$

Den Beispielen B5 bis B8 ist gemeinsam, daß es höchstens endlich viele Glieder gibt, die betragsmäßig nicht kleiner als $\frac{1}{2}$ sind. In B5, B6 und B7 sind es höchstens die Glieder a_0 und a_1 , in B8 höchstens (grob gesagt) die ersten 40 Glieder, für die gilt, gilt $|a_n| \geq \frac{1}{2}$ (Da es uns nur auf die Endlichkeit der Anzahl der Ausnahmeglieder ankommt, braucht man nicht deren genaue Anzahl festzustellen, und diese Vergrößerungen sind ausreichend.). Für alle anderen Glieder (das sind unendlich viele) dieser Folge gilt also $|a_n| < \frac{1}{2}$. Weil diese unendlich vielen Glieder die endlich vielen Ausnahmen weit überwiegen, sagt man auch, daß "fast alle" Glieder der Folge die Beziehung $|a_n| < \frac{1}{2}$ erfüllen.

Nun ist es aber so, daß die Bedingung

$$|a_n| < \frac{1}{2} \text{ für fast alle } n$$

noch lange nicht ausreicht, um das Streben gegen Null zu erfassen. Das zeigt auch das folgende Beispiel.

B9: 8, 8, 8, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$, ..., $\frac{2}{5}$, ...

Hier gilt für fast alle Glieder $|a_n| < \frac{1}{2}$, trotzdem wird der Abstand zur Null nicht kleiner als $\frac{2}{5}$. Es muß also auch gefordert werden, daß fast alle Glieder kleiner als $\frac{2}{5}$ werden, daß fast alle Glieder kleiner als beispielsweise $\frac{1}{27}$ werden, ja auch, daß fast alle Glieder kleiner als 10^{-8} werden usw. Es läuft also darauf hinaus, daß zu jeder vorgegebenen positiven Zahl ϵ (auch wenn sie noch so klein ist) höchstens endlich viele Glieder die Bedingung $|a_n| < \epsilon$ nicht erfüllen dürfen. Betrachten wir beispielsweise B6 und $\epsilon = 10^{-10}$. In diesem Fall gilt

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1},$$

und $|a_n| < 10^{-10}$ soll für fast alle n gelten, also $\frac{1}{n+1} < 10^{-10}$. Das ist aber dann der Fall, wenn $n+1 > 10^{10}$, also erst recht,

wenn $n > 10^{10}$. Also für alle $n > 10^{10}$, und das sind fast alle n (weil $n \leq 10^{10}$ nur für endlich viele natürliche Zahlen erfüllt ist), gilt $|a_n| < 10^{-10}$. Wir müssen uns aber darüber im Klaren sein, daß wir nur einen ganz bestimmten ϵ -Wert, nämlich $\epsilon = 10^{-10}$ betrachtet haben. Und vorhin haben wir uns am Beispiel $\epsilon = \frac{1}{2}$ klargemacht, daß es völlig unzureichend ist, nur einen ϵ -Wert zu betrachten. Wir müssen also alle ϵ -Werte betrachten. Darauf wollen wir jedoch an dieser Stelle verzichten und erst einmal unsere Überlegungen über die Vorstellungen des Strebens gegen Null zu einer exakten Aussage zusammenfassen:

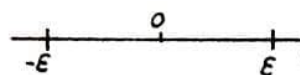
D e f i n i t i o n:



Die Folge (a_n) heißt Nullfolge, wenn für jedes $\epsilon > 0$ für fast alle n gilt:

$$|a_n| < \epsilon.$$

Anschaulich bedeutet das, daß außerhalb des markierten Bereiches höchstens endlich viele Glieder der Folge liegen, und das für jedes $\epsilon > 0$.



Jetzt folgt ein Beweis dafür, daß es sich bei B6 um eine Nullfolge handelt. Dazu betrachten wir eine beliebige positive Zahl ϵ und den Ausdruck

$$|a_n| = \frac{1}{n+1} < \epsilon.$$

Die letzte Ungleichung ist richtig, wenn n größer als $\frac{1}{\epsilon} - 1$ ist. Deshalb können wir garantieren, daß die Ungleichung $|a_n| < \epsilon$ für alle n größer als $\frac{1}{\epsilon}$ erfüllt ist (Vergrößerung), also für dieses ϵ für fast alle n . Das vorgegebene ϵ war aber beliebig, es verkörpert sozusagen jede positive Zahl und deshalb ist die Folge B6 eine Nullfolge. Durch ähnliche Überlegungen kann man zeigen, daß auch die Folgen B5, B7 und B8 Nullfolgen sind.

K. Fleischmann

Assistent

an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Preisaufgaben (Serie 11/69)



(A79) Zwei Spieler (A und B) haben je ein Streichholz, das sie - vom Gegenspieler unbemerkt - in der geschlossenen Hand auf den Tisch legen können. Spieler A nennt eine Zahl (0, 1 oder 2) und darauf B eine davon verschiedene. Es

erhält derjenige Spieler einen Punkt, der mit seiner Zahl die Gesamtsumme der verdeckten Hölzer "erraten" hat. Sind beide Zahlen falsch, erhält keiner der Spieler einen Punkt. Welche Strategien stehen dem Spieler A und welche dem Spieler B zur Verfügung?

Beispiel: Eine Strategie für A wäre:

Kein Streichholz in die Hand zu nehmen und 1 zu sagen.

B kann beispielsweise folgende Strategie wählen: Er nimmt ein Streichholz in die Hand und sagt 2 wenn A 1 oder 0 angibt, und er sagt 1, falls A 2 als Gesamtsumme vermutet.

Wie sieht die Gewinnmatrix für A aus? Besitzt dieses Spiel einen Sattelpunkt?

(A80) Man berechne sämtliche komplexen Zahlen a , so daß

(a) $a^2 = 1$, (b) $a^2 = -1$, (c) $a^n = 1$ ist.

Hierbei ist n eine natürliche Zahl, also $n = 1, 2, \dots$

Man deute die Resultate geometrisch.

Hinweis: Es ist zweckmäßig, die Polarkoordinatendarstellung zu nehmen und zuerst zu zeigen, daß $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$ ist, sofern $\alpha - \beta = 2\pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) gilt. α und β sind hierbei reelle Zahlen.

(A81) Man entscheide, ob die Folge (a_n) mit den Gliedern

$$a_n = \frac{2}{3n-4} (-1)^{5n+1}$$

eine Nullfolge ist (Beweis!).

(A82) Zu einer Strecke $\overline{AB}$ sei eine Parallele gezeichnet. Man teile nur mit Hilfe des Lineals $\overline{AB}$ in drei gleiche Teile.

(A83) Zu jeder komplexen Zahl $a = a_0 + a_1 i$ (a_0 und a_1 reell) kann die sogenannte konjugiert-komplexe Zahl $\bar{a}$ gebildet werden, die durch $\bar{a} = a_0 - a_1 i$ definiert ist. Man deute den Übergang von a zu $\bar{a}$ geometrisch und beweise, daß $a\bar{a} = |a|^2$ ist.

(A84) Man zeige, daß es zu jeder natürlichen Zahl n ganze Zahlen a und b gibt, so daß

$$(\sqrt{2} - 1)^n = a + b\sqrt{2} \text{ gilt.}$$

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken. Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Buntes Allerlei

Auflösung der Knocheleien aus Nr.9/69

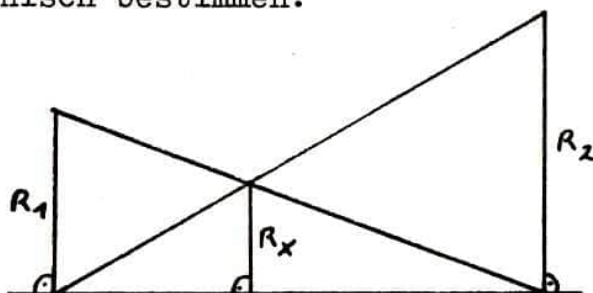
Ein vergilbtes Manuskript: $88417868 : 8932 = 9899$

$$\begin{array}{r} 80388 \\ 80298 \\ \hline 71456 \\ 88426 \\ \hline 80388 \\ 80388 \\ \hline 80388 \\ 80388 \\ \hline 0 \end{array}$$

Raten und Rechnen: $1261 - 519 = 742$

$$\begin{array}{r} : \quad + \quad - \\ 13 \cdot 9 = 117 \\ \hline 97 + 528 = 625 \end{array}$$

Den Gesamtwiderstand bei der Parallelschaltung von Widerständen kann man graphisch bestimmen:



Man beweise die Richtigkeit dieser Konstruktion!

(Der Gesamtwiderstand bei der Parallelschaltung von zwei Widerständen berechnet sich nach der Formel

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad).$$

Wir stellen vor: Dr. rer. nat. Alfred Liemant



Dr. Alfred Liemant ist Assistent im Bereich Wahrscheinlichkeitsrechnung der Sektion Mathematik der FSU Jena. Er wurde am 5.2.41 geboren. In Lichtenstein (Sa.) besuchte er die Oberschule und legte 1959 sein Abitur ab. Anschließend studierte er bis 1962 in Jena. Seit Abschluß seines Studiums arbeitet er als wissenschaftlicher Assistent an der Sektion Mathematik. Im Januar 69 promovierte er mit der Arbeit "Invariante zufällige stationäre Punktfolgen". Zur Zeit beschäftigt sich

Dr. Liemant mit Problemen der Lagerhaltung, einem modernen Teilgebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Einführung in die Spieltheorie II (Schluß)

Wir stellen nun die Frage: "Was würden A und B tun, wenn sie wüßten, daß ihre Partner nach den im ersten Teil angeführten Überlegungen vorgehen?" Wenn A annimmt, daß B auf Grund dieser Überlegungen $t_2 = 0$ wählt, dann wird er ebenfalls $s_2 = 0$ wählen, denn dies sichert ihm den größten Wert in der zweiten Spalte. Folglich hat sich durch die Kenntnis der Strategie von B seine Wahl nicht geändert. Ähnlich wird auch die Entscheidung von B nicht beeinflusst wenn er weiß, daß A $s_2 = 0$ wählt. Beide Spieler haben also keinen Grund, ihre Entscheidungen zu revidieren. Diese Eigenschaft unseres Spiels beruht darauf, daß es in der Gewinnmatrix A ein Element (nämlich $a_{22} = 0$) gibt, das das kleinste in seiner Zeile und zugleich das größte in seiner Spalte ist. Solche Elemente nennt man Sattelpunkte nach einer naheliegenden geometrischen Analogie, auf die wir hier nicht weiter eingehen. Wir können wie folgt formulieren:

Besitzt die Gewinnmatrix A eines endlichen Zwei-Personen-Nullsummenspiels einen Sattelpunkt, dann gibt es für jeden Spieler eine Strategie (optimale Strategie genannt), die ihm einen Mindestgewinn sichert, der nicht vergrößert werden kann, wenn er die optimale Strategie des Gegners kennt.

Diese Aussage stellt einen wichtigen Satz in der mathematischen Spieltheorie dar. Die optimalen Strategien stellen also beide Spieler zufrieden.

Nicht jedes Spiel besitzt einen Sattelpunkt. Ein Beispiel hierfür ist die Pfennigwette, die durch folgende Regel beschrieben wird: A und B legen verdeckt einen Pfennig auf den Tisch, Zahl oder Wappen nach oben. Zeigen beide Münzen die gleiche Seite, gehen sie an A, im anderen Fall an B. Das Spiel hat folgende Gewinnmatrix A:

		B wählt	
		Zahl	Wappen
A wählt	Zahl	1	-1
	Wappen	-1	1

Keines der vier Elemente ist ein Sattelpunkt. Der Mindestgewinn für A beträgt -1, jede Strategie sichert ihm diesen Wert. Das gleiche gilt für B. Man sieht, daß es in diesem Spiel für keinen Spieler eine Strategie gibt, von der der Gegner unterrichtet sein darf. Es existieren also keine optimalen Strategien wie für Spiele mit Sattelpunkten. Welches Verhalten schlägt aber nun die Spieltheorie den beiden Spielern vor? Wenn nur eine Partie gespielt wird, ist kein Zug besser als der andere. Spielt man jedoch mehrere Partien, wird es sicher unangebracht sein, eine Vorliebe für Zahl oder Wappen zu entwickeln, oder auch nur nach irgendeiner Gesetzmäßigkeit Wappen und Zahl zu wechseln. Der Gegner könnte nämlich nach einiger Zeit die Taktik erkennen und daraus Nutzen ziehen. Da also ein systematischer Wechsel vom Gegner erraten werden kann, muß die Wahl von Wappen oder Zahl zufällig sein. Wir werden deshalb annehmen, daß Spieler A mit Wahrscheinlichkeit p Wappen wählen wird. Wählt nun B ständig Zahl, gewinnt A mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ einen Pfennig und verliert mit Wahrscheinlichkeit p einen Pfennig. Der mittlere Gewinn ist somit gleich $1 \cdot (1-p) + (-1) \cdot p = 1-2p$ ¹⁾. Entscheidet sich B immer für Zahl, gewinnt A im Mittel $(-1)(1-p) + 1 \cdot p = 2p-1$ Pfennige. Ist nun $p < \frac{1}{2}$ gewinnt B ständig, wenn er Zahl wählt. Bei $p > \frac{1}{2}$ gewinnt er, wenn er Wappen wählt. Die einzige Möglichkeit für A zu verhindern, daß B ständig gewinnt, besteht darin, $p = \frac{1}{2}$ zu setzen. Aus analogen Gründen wird B ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit $q = \frac{1}{2}$ Zahl oder Wappen wählen. Der mittlere Gewinn ist für beide Spieler gleich Null.

Nach diesen Überlegungen werden also beide Spieler vernünftigerweise ihre Entscheidungen dem Zufall überlassen. Um die Wahrscheinlichkeit $p = q = \frac{1}{2}$ zu realisieren, werden sie etwa eine Münze werfen und je nachdem auf welche Seite die Münze fällt ihre Strategie wählen. Es läßt sich zeigen, daß A sein Verhalten nicht zu ändern braucht, wenn er weiß, daß B eine Münze wirft. Analog gilt diese Aussage für B. Der mittlere Mindestgewinn kann für beide Spieler nicht vergrößert werden. Es gibt also für beide Spieler solche Verhaltensweisen (optimale Verhaltensweisen), die analoge Eigenschaften besitzen, wie die optimalen Strategien in Spielen mit Sattelpunkten. Daß diese Aussage auch für jedes beliebige endliche Zwei-Personen-Nullsummenspiel ohne Sattelpunkt richtig ist, ist der Inhalt eines der grundlegenden Sätze der Spieltheorie. Der erste Beweis dieses Satzes stammt von J. v. Neumann aus dem Jahre 1928.

Eines der ältesten Spiele, das Schachspiel, ist ein endliches Zwei-Personen-Nullsummenspiel, wenn man Gewinn, Niederlage und Remis mit +1, -1 und 0 bewertet. Das Schachspiel besitzt einen Sattelpunkt und deshalb gibt es für Weiß und Schwarz optimale Strategien. Dieses interessante Ergebnis erhielt der Mathematiker Zermelo bereits im Jahre 1911. Die Gesamtheit aller Strategien ist jedoch so gewaltig, daß es auch in absehbarer Zeit kaum gelingen wird, eine optimale Strategie für Weiß und Schwarz anzugeben. Dies trifft auch für fast alle anderen bekannten Brettspiele (Damespiel, Halma usw.) zu. Der Reiz aller dieser Spiele bleibt also erhalten.

Dr. A. Liemant
Assistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

- ¹⁾ Der mittlere Gewinn berechnet sich aus der Summe der Produkte der verschiedenen Gewinnmöglichkeiten mit den Wahrscheinlichkeiten dieser Möglichkeiten, also hier konkret Gewinn 1 mal Wahrscheinlichkeit für Gewinn 1 plus "Gewinn" -1 (Verlust) mal Wahrscheinlichkeit für Verlust.

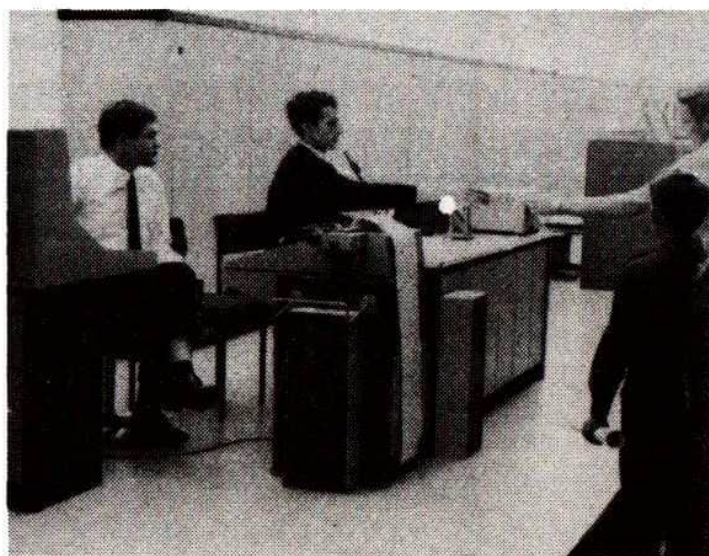
Was ist Marxistisch-Leninistische Organisationswissenschaft?

Die Marxistisch-Leninistische Organisationswissenschaft (MLO) untersucht die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten, die für die Organisation und Leitung von Menschen bzw. Menschengruppen und ihrem Zusammenwirken im gesellschaftlichen System gültig sind.

Ziele der MLO sind die rationelle Gestaltung von gesellschaftlichen Prozessen und Systemen, zum Beispiel die Produktion in einem Industriebetrieb und die Gestaltung seines Leitungssystems, die Sicherung des rationellen Zusammenwirkens von Teilsystemen untereinander und mit dem Gesamtsystem (z.B. das Zusammenspiel einzelner Betriebsabteilungen und ihr richtiges Arbeiten im Interesse des Gesamtbetriebes) und die optimale Verhaltensweise der Systeme gegenüber allen Anforderungen.

Für Sie ist es sicher interessant zu wissen, woher diese Antwort stammt. In der

Ausstellung zum
XX. Jahrestag der DDR
"Kämpfer und Sieger"
steht unter anderem
ein Robotron 300,
der etwa 100 Auswahl-
fragen beantworten
kann. "WURZEL" stell-
te ihm obige Frage.
Sofort nach Einlegen
des zugehörigen Loch-
streifens druckte



R 300 die Antwort aus (dazu werden weniger als zwei Sekunden benötigt!).

Nach der kurzen elementaren Einführung in die Grundzüge der Spieltheorie empfehlen wir unseren Lesern, ihre Kenntnisse durch Selbststudium zu erweitern. Ein sehr geeignetes Buch ist "Elemente der Spieltheorie" (von J.S. Wentzel), erschienen in der Reihe "Kleine naturwissenschaftliche Bibliothek". Wir werden Ihnen durch geeignete Aufgaben im Weiteren die Möglichkeit geben, Ihre Kenntnisse zu überprüfen.

Aus der Sektion Mathematik

Studienprogramm für das Grundstudium Mathematik (Fortsetzung)

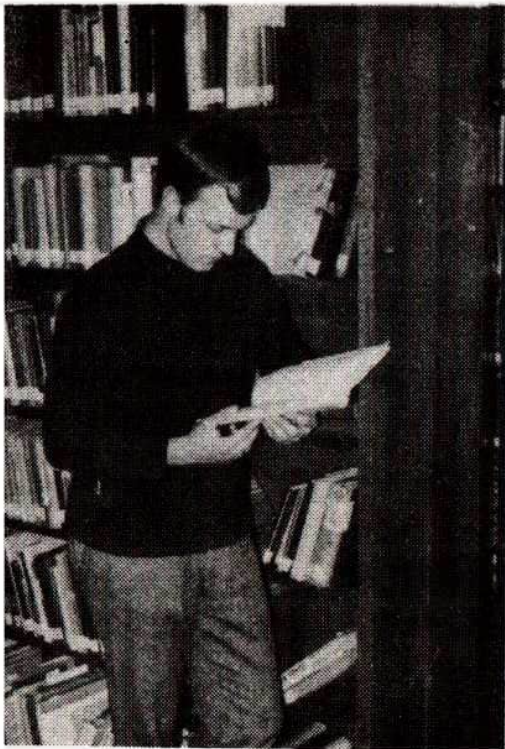
2. Studienformen

Den Studienformen der aktiven Aneignung und schöpferischen Verarbeitung des Stoffes ist der Vorzug zu geben.

Die Ausbildung wird durch die folgenden Studienformen gestaltet:

1. Vorlesung,
2. Unterrichtsvorlesung,
3. Übung,
4. Selbststudium.

Hierbei kommt dem Selbststudium eine hervorragende Bedeutung zu.



In der ersten Phase des wissenschaftlich-produktiven Studiums ist die Fähigkeit zur selbständigen Wissensaneignung mit Hilfe von Lehrbüchern und programmierten Lehrmaterialien zu entwickeln. Die Vorlesung dient der Darstellung größerer Zusammenhänge und unterstützt das Selbststudium durch gezielte Hinweise. Die Unterrichtsvorlesungen sind zum Unterschied von den Übungen Veranstaltungen, in denen neuer Stoff erarbeitet wird. Von den Vorlesungen grenzen sie sich insofern ab, als sie hauptsächlich dem Unterrichtsgespräch Raum bieten sollen. Sie stehen

unter Anleitung eines Assistenten bzw. Lehrers im Hochschuldienst und werden seminargruppenweise durchgeführt. Der Stoff wird nach vorgegebener Literatur bzw. Lehrmaterial erarbeitet. Dabei ist auf die Erziehung zur Fähigkeit der sauberen selbständigen Wiedergabe erworbenen Wissens Wert zu legen. Die Aufteilung des durch den Grundkurs zu vermittelnden Stoffes auf Vorlesung, Unterrichtsvorlesung und Selbststudium wird durch das Lehrkollektiv vorgenommen. Die Übungen dienen vorwiegend der Kontrolle, dem Rechnen von Beispielen und der Anwendung der theoreti-

schen Kenntnisse.

Das Grundprinzip des Studiums besteht in der dialektischen Verbindung zwischen Aneignung und Anwendung wissenschaftlicher Kenntnisse und Erkenntnisse. Von den Erzieherkollektiven ist ein System der wissenschaftlich-produktiven Tätigkeit zu entwickeln, das das passive Element im Studium schrittweise zugunsten der aktiven Betätigung, der aktiven Wissensaneignung zurückdrängt. Es ist ein Stufenprogramm zur Entwicklung der erforderlichen Fähigkeiten zu fixieren.

Für die Grundkurse sind Lehrmaterialien zu benutzen, die folgenden Anforderungen genügen:

- a) Es enthält den Stoffumfang, der in dem dieser Disziplin entsprechenden Zeitanteil, der in der Stundentafel ausgewiesen ist, zu bewältigen ist.
- b) Die Darstellung trägt methodischen und didaktischen Erwägungen Rechnung.
- c) Jedem Stoffabschnitt des entsprechend gegliederten Lehrmaterials ist eine Zeit zugeordnet, die dem Studenten die durchschnittliche Dauer für das Durcharbeiten ausweist.
- d) Literaturhinweise für ein weiterführendes Studium sind abschnittsweise zu geben.
- e) In die Darstellung sind Übungsaufgaben aufzunehmen.
- f) Im Lehrmaterial sind die Stoffgebiete zu kennzeichnen, über die Vorlesungen gehalten werden, z.B. als Übersichtsvorlesungen.
- g) Das Lehrmaterial ist mit einem begleitenden Kontrollsystem zu versehen. Die Möglichkeit maschineller Prüfungen und der Einsatz von Lernmaschinen ist zu berücksichtigen. Für das Durcharbeiten des zu testierenden Stoffkomplexes sind Endtermine zu setzen, die das Erreichen des Studienjahreszieles sichern. Die Kontrolle über die Einhaltung der Termine obliegt dem Erzieherkollektiv.
- h) Bestimmte Stoffkomplexe sind in Form von programmierten Lehrmaterialien auszugeben.

In der Phase des Grundstudiums besteht die Zielstellung im wissenschaftlich-produktiven Studium im selbständigen Erarbeiten des mathematischen Stoffes durch Literaturstudium, im Vertrautsein im Umgang mit Wissensspeichern, in der Fähigkeit, die eige-

ne geistige Arbeit zu planen und diszipliniert einzuhalten, in der Entwicklung der Fähigkeit, in einem Kollektiv wissenschaftlich zu arbeiten, sowie im Erwerben der Fähigkeit, mathematische Sachverhalte schriftlich und mündlich einwandfrei wiederzugeben. Besonders im Grundkurs Operationsforschung ist die Fähigkeit des mathematischen Modellierens zu entwickeln.

3. Stundentafel

Bezeichnungen: Vorlesung: V

Unterrichtsvorlesung: UV

Übung: Ü

Selbststudium: S

Die Zeitangaben bezeichnen die Anzahl der Stunden pro Woche.

Grundkurs	1.Studienjahr				2.Studienjahr			
	V	UV	Ü	S	V	UV	Ü	S
Analysis	4	2	2	10	4	2	2	10
Algebra	4	2	2	10	-	-	-	-
Kybernetik/Rechen- technik/Numerik	2	-	1	3	5	-	4,5	10
Operationsforschung	-	-	-	-	2	1	1	5
Marxismus-Leninismus	2	-	1	3	2	-	1	3
Russisch	-	2	-	2	-	-	-	2
Englisch	-	2	-	2	-	-	-	2
Sport	--	-	2	-	-	-	2	-
Gesamt	58				58,5			

Bei der Ausbildung in Rechentechnik ist ein Automatenpraktikum einzubeziehen.

Die Bewertung der Leistungen der Studenten erfolgt auf Grund von Klausuren und der Mitarbeit in Unterrichtsvorlesungen und Übungen. Das Erzieherkollektiv des Studienjahres setzt nach Bedarf Abschlußklausuren und Abschlußprüfungen an bzw. fordert die Anfertigung von Belegarbeiten. Diese Maßnahmen bedürfen der Zustimmung des stellvertretenden Direktors für Erziehung und Ausbildung.

Anmerkung der Redaktion: Zu diesem Studienprogramm gehört ein ausführliches Lehrprogramm, in dem die einzelnen Grundkurse in Stoffgebiete eingeteilt und auf Wochen aufgeschlüsselt sind. Wir sind gern bereit, Interessenten dieses Lehrprogramm zu schicken.

Lösungen

(A45): Wir beweisen zunächst die folgenden Ungleichungen:

Ist p ein Teiler von n , so gilt

$$n + 1 \geq p + \frac{n}{p} \geq 2\sqrt{n}$$

I. Es ist sicher $\frac{n}{p} \geq 1$

$$\frac{n}{p}(p - 1) \geq p - 1$$

$$n - \frac{n}{p} \geq p - 1$$

$$n + 1 \geq p + \frac{n}{p}$$

II. Es gilt $(p - \sqrt{n})^2 \geq 0$

$$p^2 - 2\sqrt{n}p + n \geq 0$$

$$p - 2\sqrt{n} + \frac{n}{p} \geq 0$$

$$p + \frac{n}{p} \geq 2\sqrt{n}$$

Jetzt wird über die Teiler p summiert:

$$(n + 1) \cdot \sum_{p|n} p^0 \geq \sum_{p|n} \left(p + \frac{n}{p}\right) \geq 2\sqrt{n} \cdot \sum_{p|n} p^0$$

Dabei ist $\sum_{p|n} p^0$ die Anzahl der Teiler.

Bei dieser Summation tritt jeder Teiler einmal als p und einmal als $\frac{n}{p}$ auf. Deshalb gilt

$$\frac{n + 1}{2} \cdot \sum_{p|n} p^0 \geq \sum_{p|n} p \geq \sqrt{n} \cdot \sum_{p|n} p^0$$

$$\text{und} \quad \frac{n + 1}{2} \geq \frac{\sum_{p|n} p}{\sum_{p|n} p^0} \geq \sqrt{n}$$

$$\text{Für } n = 2 \text{ gilt } f(2) = \frac{1 + 2}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Für } n \geq 3 \text{ gilt } f(n) \geq \sqrt{3} > \frac{3}{2}$$

Damit nimmt $f(n)$ den kleinsten Wert für $n = 2$ an. Einen größten Wert kann $f(n)$ wegen $f(n) \geq \sqrt{n}$ nicht besitzen.

(A46): Die Aussage "Das Radio im Zimmer spielt." bezeichnen wir mit A. Die Aussage "Es ist jemand im Zimmer." wird mit B bezeichnet.

Die Aussagenverbindung $A \rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. Da es insgesamt vier mögliche Fälle gibt, ist die Wahrscheinlichkeit, daß $A \rightarrow B$ wahr ist ist, gleich $\frac{3}{4}$.

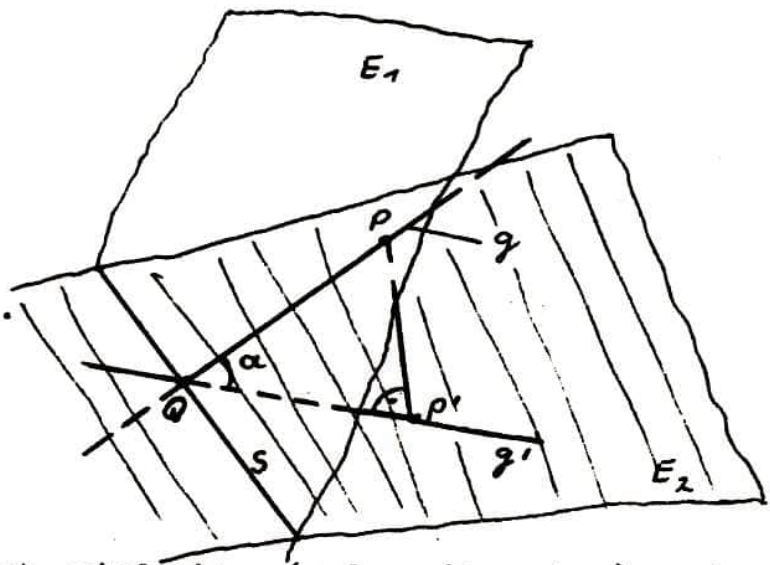
(A48): Der gegebene Punkt P liege in E_1 . Die Projektion von P auf E_2 sei P' .

Der Winkel zwischen g und E_2 ist definiert als der Winkel zwischen g und der Projektion von g auf E_2 (g').
Aus $P \in g$ folgt stets $P' \in g'$.

Es gilt:
$$\sin \alpha = \frac{\overline{PP'}}{\overline{PQ}}.$$

Da $\overline{PP'}$ konstant ist, wird $\sin \alpha$ (und somit auch α) maximal, wenn $\overline{PQ}$ minimal ist. Daraus folgt:

α ist maximal, wenn $g \perp s$.



(A49): Die Viereckseiten seien a, b, c, d und die Diagonalenabschnitte e, f, g, h .

Der Flächeninhalt eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks mit der Hypotenuse l ist $F_{\Delta} = \frac{l^2}{4}$. Daraus folgt

$$F_1 = \frac{a^2}{4} = \frac{e^2 + h^2}{4}$$

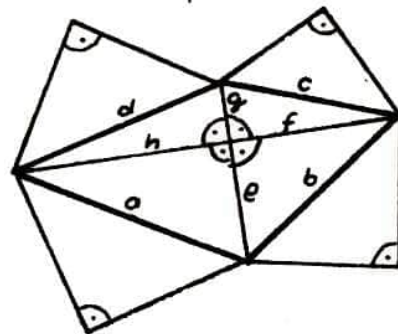
$$F_2 = \frac{b^2}{4} = \frac{e^2 + g^2}{4}$$

$$F_3 = \frac{c^2}{4} = \frac{g^2 + f^2}{4}$$

$$F_4 = \frac{d^2}{4} = \frac{f^2 + h^2}{4}$$

Deshalb gilt:

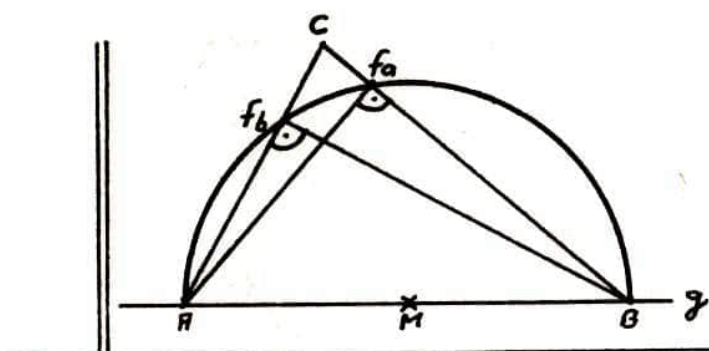
$$F_1 + F_3 = \frac{e^2 + f^2 + g^2 + h^2}{4} = F_2 + F_4$$



(A51): Analysis: f_a und f_b liegen auf dem Halbkreis über $\overline{AB}$.

(Umkehrung des Thales-Satzes!)

Konstruktion: Man konstruiert den Punkt M als Schnittpunkt von g und der Mittelsenkrechten zu $\overline{F_a F_b}$. Um M schlägt man einen Kreis mit dem Radius $\overline{MF_a} = \overline{MF_b}$. Die Schnittpunkte dieses



Kreises mit g sind die Eckpunkte A und B des gesuchten Dreiecks. Den Punkt C erhält man als Schnittpunkt der Strahlen $\overrightarrow{Af_b}$ und $\overrightarrow{Bf_a}$.

(A53): Es gilt $(x - 5)(y + 3) = xy + 3x - 5y - 15$

Daraus folgt $(x - 5)(y + 3) = -18$

Für jedes Produkt gibt es nun eine Lösung:

$(-18) \cdot 1$	$x = -13$	$y = -2$
$(-9) \cdot 2$	$x = -4$	$y = -1$
$(-6) \cdot 3$	$x = -1$	$y = 0$
$(-3) \cdot 6$	$x = 2$	$y = 3$
$(-2) \cdot 9$	$x = 3$	$y = 6$
$(-1) \cdot 18$	$x = 4$	$y = 15$
$18 \cdot (-1)$	$x = 23$	$y = -4$
$9 \cdot (-2)$	$x = 14$	$y = -5$
$6 \cdot (-3)$	$x = 11$	$y = -6$
$3 \cdot (-6)$	$x = 8$	$y = -9$
$2 \cdot (-9)$	$x = 7$	$y = -12$
$1 \cdot (-18)$	$x = 6$	$y = -21$

Zum Titelbild

Die "Wurzel"-Redaktion nahm am "Treffen Junger Sozialisten" vom 5.10. bis 7.10. in Berlin teil.

Der Banjo-Spieler ist Klaus Fleischmann, der Verfasser unseres Artikels "Einiges über Folgen und Reihen".

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

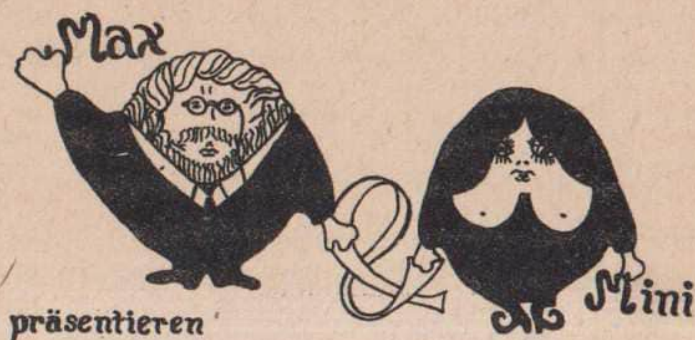
Redaktion: Leitung: Wolfgang Ulbrich, Rainer Wackernagel
Mitarbeiter: R.Großmann, W.Kiefer, N.Kuse, R.Lorenz, S.Müller, L.Staiger, E.Taubald, I.Zenner

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"Wurzel"-Redaktion

MB am abend

28.
1969
11.

*Pythagoras war einsam -
wir rechnen heut' gemeinsam!*



- Der programmierte Student
- Sport
- Unser aktuelles Interview
- MB-Rätsel
- Leser fragen - MB am abend antwortet

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
FDJ-Aktiv der
Sektion Mathematik
an der
Friedrich-Schiller-
Universität Jena

12

69

Einiges über Folgen und Reihen II

2. Konvergente Folgen

Im ersten Teil dieser Artikelserie führten wir den Begriff der Nullfolge ein. Dabei ließen wir uns von der Vorstellung leiten, daß bei einer Nullfolge (a_n) die Glieder a_n gegen Null streben. Wir wissen auch, daß nicht jede Folge ein solches Verhalten hat. Aber manche Folgen verhalten sich in gewisser Weise ähnlich, etwa

$$B10: \left(\frac{n+2}{n+1}\right), \text{ d.h. } \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+2}{n+1}, \dots$$

Veranschaulicht man sich diese Folge an der Zahlengeraden, so gewinnt man den Eindruck, daß sich die Glieder dieser Folge immer mehr der Eins nähern. Auch bei dem folgenden Beispiel erkennt man ein ähnliches Verhalten:

$$B11: 1, 0, \frac{5}{9}, \frac{8}{16}, \frac{17}{25}, \frac{24}{36}, \frac{37}{49}, \dots, \frac{(-1)^n + n^2}{(n+1)^2}, \dots$$

(Man skizziere diese Folge!)

Kann man auch so ein Streben gegen Eins exakt beschreiben?

Nun, bei dem Streben gegen Eins kommt es offensichtlich auf den Abstand zur Eins an, d.h. auf $|a_n - 1|$.

Dieser Abstand muß sich klein machen

lassen gegenüber jedem vorgegebenen positiven ε , und zwar in dem bereits bekannten Sinne: $|a_n - 1| < \varepsilon$ darf für höchstens endlich viele n verletzt sein. Oder anders gesagt:

Fast alle Glieder der Folge liegen in dem

markierten Bereich. Wir fassen unsere Überlegungen zusammen zu einer

D e f i n i t i o n:



Wir sagen, die Folge (a_n) konvergiert gegen a, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle Glieder dieser Folge die Ungleichung

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad (*)$$

erfüllen.

Konvergiert (a_n) gegen a, so heißt a Grenzwert von (a_n) , und wir schreiben $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Insbesondere konvergiert also eine Nullfolge (b_n) gegen Null, also $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Zur weiteren Verdeutlichung dieser Definition betrachten wir

$$B12: \frac{34}{7}, \frac{51}{10}, \frac{64}{13}, \dots, \frac{15n + 35 - (-1)^n}{3n + 7}, \dots$$

Das n -te Glied a_n dieser Folge lässt sich umformen zu

$$a_n = 5 - \frac{(-1)^n}{3n+7}.$$

Anschaulich ist klar, daß dabei der Ausdruck $\frac{(-1)^n}{3n+7}$ gegen Null strebt, und deshalb wird von der 5 also immer weniger abgezogen. So kann man vermuten, daß die Folge (a_n) gegen 5 konvergiert. Um diese Vermutung zu überprüfen, setzen wir $a = 5$ und erhalten

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left| \frac{15n + 35 - (-1)^n}{3n + 7} - 5 \right| = \left| -\frac{(-1)^n}{3n+7} \right| \\ &= \frac{1}{3n+7} < \frac{1}{3n} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Geben wir uns jetzt ein positives ε vor und verlangen von der natürlichen Zahl n , daß $\frac{1}{n} < \varepsilon$ gilt, d.h. $n > \frac{1}{\varepsilon}$, dann gilt für diese Zahl n wegen der aufgestellten Ungleichungskette auch $|a_n - a| < \varepsilon$. Nun gibt es aber nur endlich viele natürliche Zahlen n , die die Ungleichung $n > \frac{1}{\varepsilon}$ nicht erfüllen, und deshalb ist die Bedingung (*) für fast alle n erfüllt. Das vorgegebene ε war aber beliebig, und somit erhalten wir das folgende Resultat: Die Folge B12 konvergiert gegen 5, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n + 35 - (-1)^n}{3n + 7} = 5.$$

B13: $1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$

Welches Verhalten zeigt diese Folge bei wachsendem n ? Von der Anschauung her kommen höchstens 1 und -1 als Grenzwert in Betracht. Wir wollen uns davon überzeugen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$ nicht gilt:

Für ein ungerades n erhält man

$$|a_n - a| = |(-1)^n - 1| = |-1 - 1| = 2.$$

Nun gibt es aber unendlich viele ungeraden Zahlen, und deshalb ist zum Beispiel für $\varepsilon = 1$ die Ungleichung (*) unendlich oft verletzt, d.h. sie gilt nicht für fast alle n . Daraus folgt sofort, daß die Folge $((-1)^n)$ nicht gegen 1 konvergiert (Analog überlegt man sich, daß auch die Zahl -1 nicht Grenzwert dieser Folge ist.). Abschließend bemerken wir (ohne Beweis), daß die Folgen B10 und B11 tatsächlich gegen 1 konvergieren (Der Leser bewaise dies!).

K.Fleischmann

Assistent
an der Sektion Mathematik
der FSU Jena

Preisaufgaben (Serie 12/69)

(A85) Man bestimme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{n-1}{2n+1} \right)$ (Beweis!).

(A86) Man löse die Funktionalgleichung

$$f(x) \cdot f(x+y) = (f(y))^2 \cdot (f(x-y))^2 \cdot 2^{y+4}$$

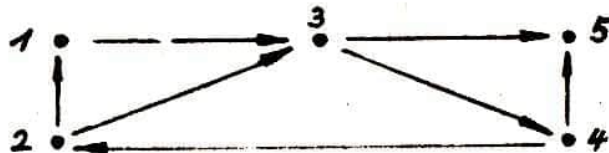
(Siehe Artikel in "Wurzel"-Nr. 3/69 bis 4/69).

(A87) In einem Dreieck mit dem Flächeninhalt S seien auf den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ die Punkte M , N , P so gegeben, daß gilt

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{1}{4}.$$

Wie groß ist dann der Flächeninhalt des Dreiecks, das von den Strecken $\overline{AN}$, $\overline{BP}$ und $\overline{CM}$ abgetrennt wird?

(A88) Vorgegeben ist folgendes System von Punkten und Pfeilen (Netz):



Die beiden Spieler A und B wählen sich jeweils einen Punkt aus. Wird dabei von beiden Spielern der gleiche Punkt gewählt oder werden zwei Punkte gewählt, die nicht durch einen Pfeil verbunden sind, so ist der Gewinn jedes Spielers gleich Null. Werden zwei Punkte gewählt, die durch einen Pfeil verbunden sind, so gewinnt der Spieler, der den bei der Pfeilspitze gelegenen Punkt gewählt hat einen Punkt.

Wie sieht die Gewinnmatrix für den Spieler A aus?

Besitzt dieses Zwei-Personen-Nullsummenspiel einen Sattelpunkt?

Welche optimalen Strategien gibt es für die beiden Spieler?

(A89) Man zeige, daß die 1., 2. und 3. Potenz der Zahl

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation bilden.

(A90) Man bestimme den geometrischen Ort aller Punkte eines

(x,y) -Koordinatensystems, für die $|z - 3 + 2i| \leq 3$ gilt, wobei z eine komplexe Zahl ist.

Für jeden vollständigen Lösungsweg einer Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).

Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind bis zum 10. des folgenden Monats (Datum des Poststempels) unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken. Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Buntes Allerlei

Man finde einen Polygonzug, der aus vier Strecken besteht, und der durch alle neun Punkte der folgenden Figur verläuft.



Man bilde aus den Ziffern 3, 1, 9, 5, ohne diese anders anzuordnen, durch Zeichensetzung einen Ausdruck, der den Wert 52 hat (z.B. $3 \cdot (1+9) \cdot 5 = 150$).

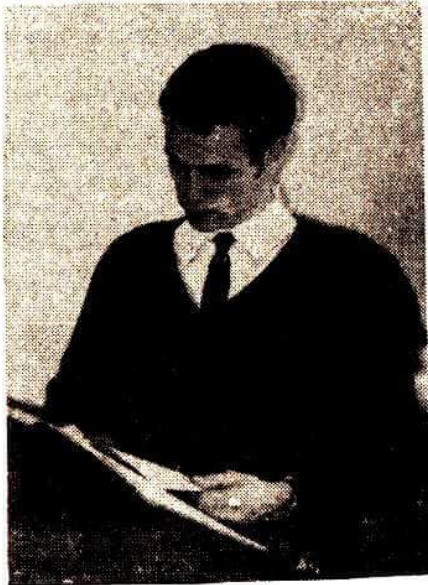
Jemand beweist folgendermaßen, daß 1 die größte natürliche Zahl ist:

Ich nehme an, eine natürliche Zahl $k > 1$ sei die größte Zahl. Dann ist aber $k^2 = k \cdot k > k \cdot 1 = k$ eine noch größere Zahl, also ein Widerspruch zur Annahme. Dieser Widerspruch kann nur gelöst werden, wenn $k = 1$ ist, denn $1^2 = 1$. Daraus folgt, daß 1 die größte natürliche Zahl ist.

Wo steckt der Trugschluß?

Wir stellen vor:

Diplom-Mathematiker Klaus Fleischmann



Klaus Fleischmann, am 6.12.41 geboren, legte 1960 sein Abitur an der Henfling-Oberschule in Meiningen ab. Nachdem er seinen zweijährigen freiwilligen Ehrendienst in der NVA abgeleistet hatte, begann er 1962 ein Mathematikstudium an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Während seines Studiums war er 2. Sekretär der FDJ-Leitung der Sektion Mathematik und Leiter eines mathematischen Schülerzirkels. Als Assistent (im Bereich Wahrscheinlichkeitsrechnung) ist er unter anderem verantwortlich für die Arbeitsbereiche der

Hilfsassistenten an unserer Sektion.

Numerische Mathematik I

Die Mathematik ist neben ihrer Bedeutung als selbständige Wissenschaft unentbehrliches Hilfsmittel und Werkzeug für die Naturwissenschaften, die Technik, die Ökonomie und immer weitere Bereiche unseres Lebens geworden. Bei ihrer Anwendung kommt es in den meisten Fällen auf die Gewinnung numerischer, d.h. durch Zahlen darstellbarer Resultate an. Derjenige Zweig der Mathematik, der sich mit der tatsächlichen Durchrechnung konkreter Einzelfälle bis zum zahlenmäßigen Ergebnis beschäftigt, wird "Numerische Mathematik" genannt. In der vorliegenden Artikelserie sollen einige Probleme und Methoden der Numerischen Mathematik geschildert werden.

Zunächst wollen wir jedoch die Betrachtungsweise der Numerischen Mathematik noch etwas näher erläutern und sie der Theoretischen oder "Reinen" Mathematik gegenüberstellen.

Vom Standpunkt der Theoretischen Mathematik gilt ein Problem meistens als gelöst, wenn die Existenz der Lösung und ihre Unität nachgewiesen sind. Allenfalls wird noch darauf eingegangen, wie man die Lösung "im Prinzip" ermitteln könnte, was jedoch oft nur die Bedeutung eines Gedankenexperiments hat.

Demgegenüber sieht es die Numerische Mathematik als ihre Aufgabe

an, einen gangbaren Weg für die tatsächliche zahlenmäßige Konstruktion der Lösung zu finden. Unter Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Rechenhilfsmittels, der geforderten Genauigkeit der Lösung und des erforderlichen Zeitaufwands werden Verfahren entwickelt, bewertet und einander gegenübergestellt. Da man beim numerischen Rechnen in der Regel gezwungen ist, Näherungswerte anstelle von theoretisch exakten Werten zu verwenden, besteht eine weitere Grundaufgabe der Numerischen Mathematik in der Untersuchung der Fortpflanzung von Fehlern im Laufe einer Rechnung und in der Abschätzung des resultierenden Fehlers. Es liegt auf der Hand, daß sich Theoretische und Numerische Mathematik ständig gegenseitig ergänzen und beeinflussen. Wieviel Spielraum und Anregung die Numerische Mathematik für das mathematische Denken bietet, läßt sich schon aus der Tatsache schließen, daß ein Mathematiker wie CARL FRIEDRICH GAUSS, selbst ein passionierter Rechner, wesentliche Ideen und noch heute verwendete Methoden zu diesem Gegenstand beigesteuert hat. Natürlich befinden wir uns heute hinsichtlich der zur Verfügung stehenden Rechenhilfsmittel in einer weitgehend veränderten Situation. Rechenmaschinen und Rechenautomaten ermöglichen es, numerische Rechnungen in einem unvorstellbar großen Umfang durchzuführen. Dieser Umstand war Anlaß zur Entwicklung neuer numerischer Methoden, die ganz auf die Arbeitsweise und Möglichkeiten der Rechenautomaten zugeschnitten sind und mit früheren Hilfsmitteln kaum durchführbar gewesen wären. Trotzdem gibt es Probleme der Numerischen Mathematik, die durch die Entwicklung der Rechenautomaten nicht nur nicht beseitigt, sondern durch deren Einsatz sogar besonders aktuell geworden sind. Hierzu gehört in erster Linie das Problem des Rechnens mit ungenauen Zahlen und der hierdurch hervorgerufenen Fehlerhaftigkeit der numerischen Resultate. Obwohl ein Rechenautomat Zahlen mit großer Stellenzahl verarbeitet (in praxi 8-12-stellige Zahlen), also die einzelnen Grundrechenoperationen mit verhältnismäßig großer Genauigkeit ausführt, stellt die Kompliziertheit der durch die Geschwindigkeiten moderner Rechenautomaten ermöglichten Rechnungen (mehrere Millionen Rechenschritte sind keine Seltenheit) das Problem der Fehlerfortpflanzung und Fehlerhäufung wieder in den Vordergrund. Daher sind die folgenden Ausführungen

über die Genauigkeit numerischer Rechnungen für das Rechnen mit Bleistift und Papier und für das Rechnen mit einer Maschine oder einem Automaten gleichermaßen von Bedeutung.

1. Richtigkeit und Genauigkeit einer Rechnung

Bei einer Rechnung unterscheidet man zweckmäßig zwischen Richtigkeit und Genauigkeit.

Eine Rechnung ist *r i c h t i g*, wenn kein Fehler im Sinne einer falschen Rechnung vorliegt. Eine falsche Rechnung kann aufgedeckt werden durch Rechenproben, durch Vergleich mit einer Überschlagsrechnung oder durch Wiederholung der Rechnung möglichst in abgeänderter Form. Sie kann vom menschlichen Rechner weitgehend vermieden werden durch übersichtliche Anordnung und klare Gliederung möglichst in Form eines Rechenschemas. Nebenrechnungen führt man nicht auf einem Zettel aus, den man später fortwirft, sondern an einer dafür vorgesehenen Stelle des Rechenblattes, so daß die Rechnung ohne Schwierigkeit von anderen kontrolliert werden kann. Bei einer Automatenrechnung ist die Richtigkeit so gut wie garantiert.

Wenn eine im genannten Sinne richtige Rechnung zu einem *u n g e n a u e n* Resultat führt, so kommen im wesentlichen drei Fehlerquellen als Ursache in Frage:

Erstens stammen bei der Anwendung mathematischer Methoden auf Probleme der Praxis die meisten Zahlen, die in die Rechnung eingehen, aus Messungen und manchmal sogar nur aus Schätzungen, Sie sind daher von vornherein mit mehr oder weniger großen Fehlern behaftet.

Die zweite Ursache hängt mit der Darstellung der beim Rechnen verwendeten Zahlen zusammen. Hier und im folgenden wollen wir annehmen, daß alle in einer Rechnung auftretenden Zahlen in *D e z i m a l f o r m* dargestellt sind (Die Verwendung anderer Zahlensysteme wie z.B. des Dualsystems in Rechenautomaten ändert nichts Wesentliches an unseren Betrachtungen.). Grundsätzlich können nun beim numerischen Rechnen nur Zahlen mit einer gewissen Höchstzahl von Stellen verwendet werden. Diese Höchstzahl liegt beim Rechnen mit der Maschine, mag es sich um eine gewöhnliche Bürorechenmaschine oder einen Automaten handeln, von vornherein fest. Es ist daher faktisch nicht möglich, eine Rechnung, in der Irrationalzahlen wie z.B. $\sqrt{2}$, e , π vorkommen, ex-

akt auszuführen. Das Gleiche gilt sogar für alle Rechnungen, in denen rationale Zahlen vorkommen, die (wie z.B. $\frac{1}{3}$) nur durch einen u n e n d l i c h e n Dezimalbruch dargestellt werden können. Für eine numerische Rechnung allein brauchbar sind die (auf eine feste Stellenzahl beschränkten) e n d l i c h e n Dezimalbrüche, zu denen wir hier auch die sämtlichen ganzen Zahlen zählen. Alle übrigen reellen Zahlen müssen durch diese endlichen Dezimalbrüche angenähert werden, so daß das numerische Rechnen zwangsläufig zu einem Rechnen mit Näherungswerten wird. Die dritte Fehlerquelle schließlich ergibt sich aus der Tatsache, daß man die durch eine Formel vorgeschriebenen Operationen wie z.B. das Dividieren oder Wurzelziehen in den meisten Fällen gar nicht exakt ausführen kann, so daß man gezwungen ist, Näherungsverfahren anstelle der eigentlich geforderten Operation anzuwenden.

Dozent Dr. habil. W.Wallisch
Leiter des Bereichs Numerische Mathem.
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Aus der Sektion Mathematik

Neue Lehrmethoden an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

In Anbetracht der großen Bedeutung, die die Mathematik in unserer sozialistischen Gesellschaft hat, kommt es darauf an, neben einer modernen inhaltlichen Gestaltung der Ausbildung, die Mathematik auch so zu lehren, daß bestmögliche Studienergebnisse von allen Studenten erreicht werden können.

Eine Möglichkeit, das Studium rationeller zu gestalten, ist der Einsatz programmierten Lehrmaterials.

So konstituierte sich im vergangenen Studienjahr im Bereich Methodik eine Arbeitsgruppe "Programmierung in der mathematischen Grundausbildung". Die Mitarbeiter dieser Arbeitsgruppe haben sich das Ziel gestellt zu untersuchen, wie durch den Einsatz von programmiertem Lehrmaterial die Effektivität in der mathematischen Grundausbildung erhöht werden kann. Besonderes Augenmerk wird dabei dem Übergang von der Schule zur Universität geschenkt. Jeder Bewerber soll günstige Startbedingungen für sein Studium

der Mathematik erhalten und im Grundstudium die Fähigkeiten erwerben, die für das weitere Studium unentbehrlich sind. So wurden und werden z.B. Lehrprogramme entwickelt, in denen wichtige Grundbegriffe aus dem Schulstoff wiederholt werden. Mit ihrer Hilfe soll bei unterschiedlichen Voraussetzungen der Bewerber eine möglichst einheitliche Ausgangsbasis für das weitere Studium geschaffen werden.

Eines dieser Programme ist z.B. dem Komplex "Potenzen, Wurzeln und Logarithmen" gewidmet, ein anderes der "Vektorrechnung".

Da die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten besonders im Prozeß der selbständigen Lösung von Aufgaben gefördert wird, konzentrierte sich die Arbeitsgruppe auch auf die Erarbeitung von sogenannten "Übungsprogrammen". Eines davon ist das Programm zur Erlernung der Technik des Integrierens, mit dem im Mai dieses Jahres ein Versuch im ersten Studienjahr der Lehrerstudenten durchgeführt wurde.

43 Studenten erlernten das Integrieren nicht wie bisher nach einer Methode, die dem üblichen Schulunterricht gleicht, sondern erarbeiteten sich die erforderliche Technik an Hand eines Lehrprogramms. Etwa die gleiche Anzahl lernte nach der herkömmlichen Methode. Die Arbeit nach Programm fand bei allen beteiligten Studenten großen Anklang. Sie brachten zum Ausdruck, daß ihnen das Lernen Freude gemacht hat und äußerten den Wunsch, in Zukunft noch öfter nach einem Programm zu lernen. In einer Abschlußklausur stellte sich heraus, daß diejenigen, die nach der neuen Methode lernten, im Durchschnitt bessere Leistungen zeigten als die übrigen.

So sollen auch in Zukunft noch weitere Lehrprogramme erarbeitet werden und die vorhandenen verbessert werden, damit die Arbeit nach Lehrprogrammen einen festen Platz in der Ausbildung an der Sektion Mathematik einnehmen kann.

Ein späterer Beitrag wird sich mit dem Aufbau eines Programms beschäftigen.

Dr. K. Lemnitzer
Oberassistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Lösungen

(P31): Die Lösung der Funktionalgleichung

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y \quad (1)$$

erfolgt mit Hilfe der aufeinanderfolgenden Substitution:

$$1. x = 0, y = t \quad 2. x = \frac{\pi}{2} + t, y = \frac{\pi}{2} \quad 3. x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} + t$$

Man erhält folgende Gleichungen:

$$(1.1) \quad f(t) + f(-t) = 2f(0)\cos t$$

$$(1.2) \quad f(\pi+t) + f(t) = 0$$

$$(1.3) \quad f(\pi+t) + f(-t) = 2f(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2} + t) = -2f(\frac{\pi}{2})\sin t$$

Aus (1.2) und (1.3) folgt:

$$f(t) - f(-t) = 2f(\frac{\pi}{2})\sin t \quad (2)$$

Aus (1.1) und (2) erhält man

$$f(t) = f(\frac{\pi}{2})\sin t + f(0)\cos t$$

Setzt man $f(\frac{\pi}{2}) = a$ und $f(0) = b$, so lautet die Lösung der FGL (1):

$$f(x) = a\sin x + b\cos x \quad (3)$$

Durch Einsetzen in (1) überzeugt man sich leicht, daß (3) eine allgemeine Lösung von (1) ist.

(A55): Man suche eine natürliche Zahl n so, daß das Gleichungssystem

$$nx - y = 5 \quad (I)$$

$$2x + 3ny = 7 \quad (II)$$

eine Lösung besitzt, bei der x positiv und y negativ ist.

Aus Gleichung (I) ergibt sich: $y = nx - 5 \quad (I)'$

Durch Einsetzen von (I)' in (II) erhält man:

$$x = \frac{7 + 15n}{2 + 3n^2} \quad (III)$$

Mit Gleichung (III) ergibt sich:

$$y = n\left(\frac{7 + 15n}{2 + 3n^2}\right) - 5$$

Da y negativ sein soll, muß man fordern:

$$n\left(\frac{7 + 15n}{2 + 3n^2}\right) < 5$$

das heißt: $n \cdot x < 5$ wobei $x > 0$ gilt (nach Forderung)

Für $n = 1$ ergibt sich: $x = \frac{22}{5}, y = -\frac{4}{5}$

Bei $n = 2$ erfüllt die Lösung nicht die Forderung x positiv und y negativ.

Für $n > 2$ läßt sich dann Gleiches wie für $n = 2$ feststellen. Wir erhalten also folgendes Ergebnis:
Das Gleichungssystem besitzt nur für $n = 1$ eine Lösung, bei der x positiv und y negativ ist.

(A30): Es sei $z_1 = 100a + 10b + c$ z_1, z_2, z_3 natürliche Zahlen,
 $z_2 = 100b + 10c + a$
 $z_3 = 100c + 10a + b$ $z_1, z_2, z_3 < 10$

$$\begin{aligned} \text{a) } z_1 + z_2 + z_3 &= 111(a + b + c) = \\ &= 5 \cdot 22(a + b + c) + (a + b + c), \end{aligned}$$

$$\text{also } z_1 + z_2 + z_3 \equiv a + b + c \pmod{5}$$

Folglich ist $(z_1 + z_2 + z_3)$ dann, und nur dann durch 5 teilbar, wenn $a + b + c$ durch 5 teilbar ist.

$$\text{b) Es gilt: } z_i = 9(11a + b) + a + b + c \quad i = 1, 2, 3$$

$$\text{Daraus folgt: } z_i \equiv a + b + c \pmod{9}$$

$$\text{Es ist also stets } z_i - z_j \equiv 0 \pmod{9} \quad i, j = 1, 2, 3$$

($a \equiv b \pmod{n}$) bedeutet:

a läßt bei Division durch n den gleichen Rest wie b)

$$\begin{aligned} \text{(A56): } \sum_{k=1}^n (k(k+1)) &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Beweis durch vollständige Induktion.

(A58): Angenommen, die Zahl $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sei rational, d.h. es gilt

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{m}{n} \quad (1)$$

(m, n natürliche Zahlen).

$$\text{Aus } (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$$

folgt mit Gleichung (1):

$$\frac{m}{n} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1, \quad \sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

$\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ist demnach ebenfalls rational.

Wie man leicht beweisen kann, ist die Summe zweier rationaler Zahlen eine rationale Zahl. Es ist aber

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{3} \text{ keine rationale Zahl,}$$

womit man einen Widerspruch zur Voraussetzung erhält.

(A59): Man bestimme aus den Teilverhältnissen die zu den Bogenstücken gehörigen Zentriwinkel. Die Sehnen und die Radien bilden gleichschenklige Dreiecke. Aus der Summe bzw. Differenz der Basiswinkel dieser Dreiecke ergibt sich der gesuchte Winkel $\angle MAN$.

Lage von M, A und N beachten! Fallunterscheidung!

(A61): Für jedes ungleichseitige Dreieck gilt

$$a + b > c \quad (1)$$

$$a \neq b, b \neq c, c \neq a \quad (2)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, g verlaufe durch C und D und D teile

c in c_1 und c_2 .

Da $\overline{CD} \equiv \overline{CD}$, gilt nach dem 1. Kongruenzsatz:

$$(c_2 = c_1 \text{ und } a = b) \quad (3)$$

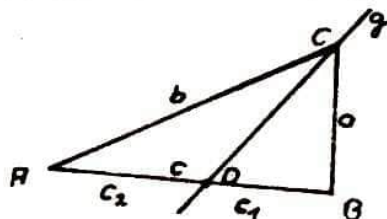
$$\text{oder } (c_1 = b \text{ und } c_2 = a, \text{ also } c_1 + c_2 = c = a + b) \quad (4)$$

(3) steht im Widerspruch zu (2) und

(4) steht im Widerspruch zu (1).

Hieraus folgt:

Man kann kein ungleichseitiges Dreieck durch einen Schnitt in zwei kongruente Dreiecke zerlegen.



(A65): Die 17. Potenz einer geraden Zahl ist wieder eine gerade Zahl, d.h. sie endet nicht auf 3. Weiter gilt nun:

$$1^{17} \equiv 1 \pmod{10}$$

$$3^{17} \equiv 3 \cdot (3^4)^4 \equiv 3 \cdot 81^4 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$5^{17} \equiv 5 \pmod{10}$$

$$7^{17} \equiv 7 \cdot (7^4)^4 \equiv 7 \cdot 2401^4 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$9^{17} \equiv 9 \cdot (9^2)^8 \equiv 9 \cdot 81^8 \equiv 9 \pmod{10}$$

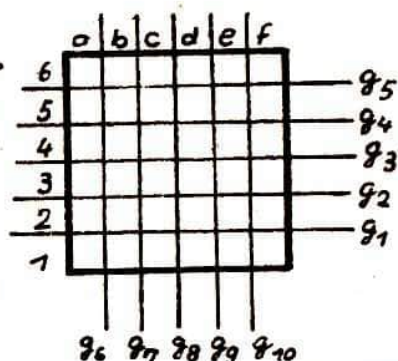
Das bedeutet aber, die gesuchte letzte Ziffer ist eine 3.

(A66): Der Beweis erfolgt indirekt.

Annahme: Jede der Geraden $g_1, \dots, g_{10}$ (siehe Skizze) schneidet einen Stein.

Jede der Geraden $g_1, \dots, g_5$ wird von mindestens einem Stein bedeckt, der senkrecht liegt. Da nun in Reihe 1

noch fünf Felder abzudecken sind, muß ein weiterer Stein senkrecht liegen, so daß g_1 von zwei Steinen bedeckt wird. Man überlege sich, daß daraufhin auch die Geraden g_2, g_3, g_4, g_5 von zwei Steinen bedeckt sein müssen. Man benötigt also zum Abdecken von $g_1, \dots, g_5$ $2 \cdot 5 = 10$ senkrecht liegende Steine. Zum Abdecken von $g_6, \dots, g_{10}$ werden ebensoviel waagrecht liegende Steine benötigt.



Hieraus folgt: Man benötigt 20 Dominosteine zum Abdecken sämtlicher Linien. Da aber nur 18 Steine zur Verfügung stehen, ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme. Es gibt somit immer eine Gerade, die keinen Dominostein schneidet.

(A71): (Lösung von M.Gulbins; TH Karl-Marx-Stadt, Spezialkl. 11)

Im Sehnenviereck gilt folgende Beziehung:

Die gegenüberliegenden Winkel ergänzen sich zu 180° , d.h.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

Ich betrachte nun das Viereck in 2 Dreiecke zerlegt, so daß e bei beiden Seitenkante wird. Es gilt der Kosinussatz:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - e^2}{2ad}$$

$$\cos \gamma = \frac{b^2 + c^2 - e^2}{2bc}$$

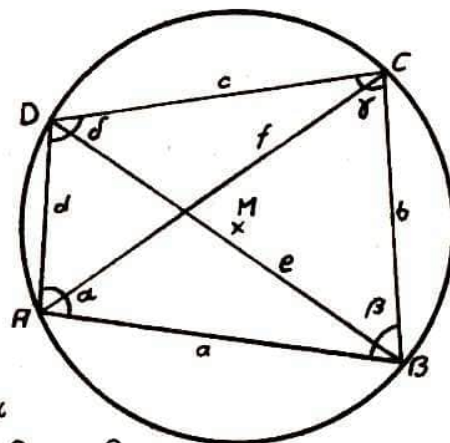
$$\cos \gamma = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$-\frac{a^2 + d^2 - e^2}{2ad} = \frac{b^2 + c^2 - e^2}{2bc}$$

$$-a^2bc - d^2bc + e^2bc = b^2ad + c^2ad - e^2ad$$

$$e^2(ad + bc) = a^2bc + d^2bc + b^2ad + c^2ad$$

$$e = \frac{a^2bc + ab^2d + ac^2d + bed^2}{ad + bc}$$



Analog zerlege ich das Viereck in die Dreiecke $\triangle ACD$ und $\triangle ABC$ und erhalte:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - f^2}{2ab}$$

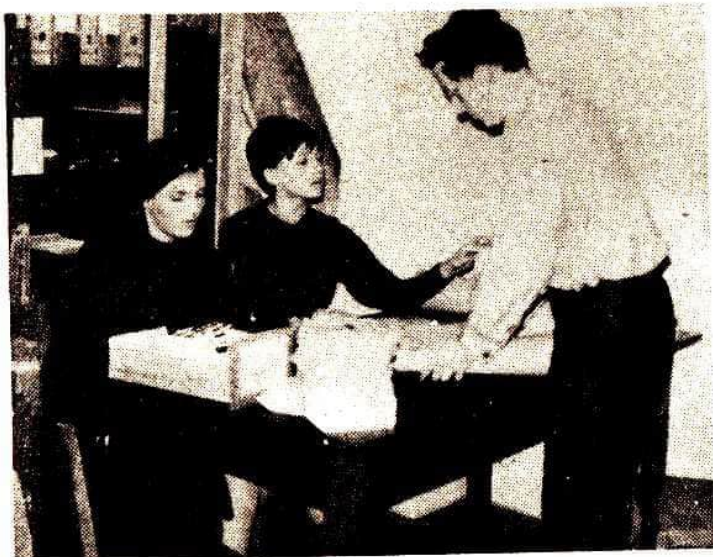
$$-\cos \beta = \frac{c^2 + d^2 - f^2}{2cd}$$

$$-a^2cd - b^2cd + cdf^2 = abc^2 + abd^2 - abf^2$$

$$f = \frac{a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2}{ab + cd}$$

In eigener Sache

Wir wollen unsere Leser näher mit dem Kollektiv, welches die Schülerzeitschrift "Wurzel" herausgibt, bekannt machen. Zu diesem Zwecke werden wir in den nächsten Ausgaben der "Wurzel" Studenten



der einzelnen Arbeitsbereiche vorstellen und kurz über ihre Arbeit berichten.

Für das Verpacken und Verschicken der "Wurzel" ist die Abteilung Versand verantwortlich. In dieser Abteilung arbeiten fünf Studenten. Auf unserem Bild sehen Sie (v.l.n.r.) Inge Zenner, Elke Taubald (2.Studien-

jahr Mathematik-Diplom) und Norbert Kuse (4.Studienjahr Mathematik-Diplom, Abteilung Kybernetik). Entsprechend den Bestellungen werden die "Wurzeln" abgezählt und verpackt. Zu diesem Arbeitsbereich gehört es auch, die eingehende Bestellerpost zu bearbeiten und die Bestellerkartei auf dem laufenden zu halten.

Zum Titelbild

Am 28.11.1969 fand an unserer Sektion der Mathematiker-Ball 1969 statt. Unser Titelbild zeigt die aus diesem Anlaß herausgegebene Ballzeitung.

Die Vorbereitung und Durchführung des jährlich stattfindenden Mathematiker-Balles liegt jeweils in den Händen des 4.Studienjahres der Diplom-Mathematiker.

Inhaltsverzeichnis der Wurzel Nr. 1/69 bis 12/69

	Seite
Aus der mathematischen Kybernetik II	2
Drehungen eines Würfels I	6
Aus der mathematischen Kybernetik III	14
Drehungen eines Würfels II	17
Aus der mathematischen Kybernetik IV	26
Funktionalgleichungen I	29
Funktionalgleichungen II	38
Unser Mathematiklager	44
Eine Methode der statistischen Qualitätskontrolle I	50
Einführung in die Gruppentheorie I	53
Eine Methode der statistischen Qualitätskontrolle II	62
Einführung in die Gruppentheorie II	65
Aus der Arbeit des wissenschaftlichen Studentenzirkels	
"Rationelle Lehrmethoden"	74
Einführung in die Gruppentheorie III	79
Komplexe Zahlen I	96
Unser Mathematiklager	99
Aus der Entwicklung der Sektion Mathematik	111
Über den gesellschaftlichen Auftrag der Sektion Mathematik .	117
Komplexe Zahlen II	122
Studienprogramm für das Grundstudium Mathematik (Teil 1) ...	124
Einführung in die Spieltheorie I	133
Einiges über Folgen und Reihen I	138
Einführung in die Spieltheorie II	143
Studienprogramm für das Grundstudium Mathematik (Teil 2) ...	147
Einiges über Folgen und Reihen II	154
Numerische Mathematik I	158
Neue Lehrmethoden an der Sektion Mathematik der FSU Jena ...	161

Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS und SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Wolfgang Ulbrich, Rainer Wackernagel
Mitarbeiter: R.Großmann, W.Kiefer, N.Kuse, R.Lorenz,
S.Müller, L.Staiger, E.Taubald, I.Zenner

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena, Helmholtzweg 1
"Wurzel"-Redaktion

V-14-6 7 4730 M 175-69