UNSERE WELT
GRUPPE 2

MATHEMATIK

VON DER NATUR UND IHREN GESETZEN

DENKAUFGABEN MIT ZAHLENRIESEN

VON J. I. PERELMAN

dkv
der kinderbuchverlag
BERLIN / DRESDEN

J. I. PERELMAN

DENKAUFGABEN MIT ZAHLENRIESEN

ILLUSTRATIONEN VON WILMAR RIEGENRING

dkv der kinderbuchverlag · Berlin / Dresden

Entnommen dem Werk „Lebendige Mathematik" von J. I. Perelman. Aus dem Russischen übersetzt von Hermann Asemissen. Für die deutsche Ausgabe bearbeitet.

Alle Rechte vorbehalten. Veröffentlicht unter Lizenz-Nr. 334 (Volk und Wissen Verlag GmbH). Copyright 1950 by der kinderbuchverlag GmbH · Berlin/Dresden. Genehmigungs-Nr. 376/17/50
Satz und Druck der Offizin Haag-Drugulin VEB in Leipzig M 103.

PREIS: 0,60 DM

Bestell-Nr. 13502 · 1.–30. Tausend 1950 · Für Leser von etwa 12 Jahren an.

1. Ein vorteilhaftes Geschäft

Wo und wann sich diese Geschichte ereignet hat, lassen wir dahingestellt sein. Vielleicht, und sogar wahrscheinlich, hat sie sich überhaupt nicht ereignet. Aber wie dem auch sei, sie ist so unterhaltsam, daß es sich lohnt, sie anzuhören.

Nehmen wir jedenfalls einmal an, sie habe sich folgendermaßen zugetragen:

Ein holländischer Millionär, der seine Kaffeeplantagen in Niederländisch-Indien inspiziert hatte, kam in ungewöhnlich gedrückter Stimmung von seiner Reise zurück. Er konnte es nicht fassen, daß das indonesische Volk, die Arbeiter und Bauern, für ihre Freiheit kämpfen und nicht mehr für die Plantagenbesitzer, sondern für sich selbst arbeiten wollen.

Während der ganzen Schiffsreise machte er sich Gedanken, wie er es anstellen sollte, für seine bisherigen riesigen Gewinne, die er jetzt entschwinden sah, einen Ausgleich zu finden. Er trank, um besser nachdenken zu können, ungeheure Mengen Tee und viele Gläschen „Advokatje" (Eierkognak), aber davon wurde er auch nicht schlauer.

Als er in Holland an Land ging und in den Zug nach Amsterdam einstieg, kam ihm der Zufall zu Hilfe: er machte eine Bekanntschaft. Als er sein Haus betrat, hatten sich seine Sorgenfalten geglättet, und sein rosiges Gesicht glänzte vor Zufriedenheit.

„Es gibt doch glückliche Zufälle", erzählte er zu Hause. „Nicht umsonst heißt es, daß, wo viel ist, noch mehr hinzukommt. So geht es auch mit meinem Geld. Und ganz unerwartet! Da habe ich unterwegs einen Unbekannten getroffen; ganz unscheinbar sah er aus, und es wäre mir gar nicht eingefallen, mich mit ihm zu unterhalten. Aber er fing selbst an, als er merkte, daß ich wohlhabend bin. Und zu guter Letzt hat er mir ein Geschäftchen vorgeschlagen — so vorteilhaft, daß mir rein der Atem wegblieb.

‚Wollen wir', hat er gesagt, ‚so einen Vertrag machen. Ich bringe dir einen ganzen Monat lang jeden Tag hunderttausend Gulden. Nicht umsonst, natürlich, aber die Bezahlung macht nicht viel aus.' Am ersten Tag soll ich nach dem Vertrag — es ist lächerlich zu sagen — im ganzen einen Cent zahlen. Ich traute meinen Ohren nicht.

‚Einen Cent?' fragte ich zurück.
‚Einen Cent', antwortete er. ‚Für das zweite Hunderttausend wirst du 2 Cent zahlen.'
‚Nun, und weiter?' frage ich ungeduldig.
‚Weiter so: für das dritte Hunderttausend zahlst du 4 Cent, für das vierte 8, für das fünfte 16. Und so den ganzen Monat, jeden Tag zweimal mehr als am vorhergehenden.'
‚Und dann?' frage ich.
‚Das ist alles', sagt er. ‚Mehr verlange ich nicht. Aber der Vertrag muß genau erfüllt werden: jeden Morgen bringe ich dir hunderttausend Gulden, und du zahlst, was vereinbart ist. Vor einem Monat darfst du nicht aufhören.'
Hunderttausend Gulden gibt er für einen Cent her! Wenn das Geld nicht falsch ist, kann der Mann nicht ganz bei Verstand sein. Aber das Geschäft ist gut, man muß es ausnützen.
‚Gut', sage ich, ‚bring das Geld! Meinen Teil werde ich pünktlich zahlen. Paß aber selbst auf, daß alles in Ordnung ist: richtiges Geld mußt du bringen!'
‚Sei unbesorgt', sagt er. ‚Morgen früh komme ich.'
Ich bin nur bange, daß er nicht kommt. Wenn er nur nicht dahinterkommt, daß er sich in ein allzu schlechtes Geschäft eingelassen hat! Nun, bis morgen ist nicht mehr lange zu warten."

Der Tag verging. Am nächsten Morgen wurde ans Fenster des Millionärs geklopft: es war der Unbekannte, den er unterwegs getroffen hatte.
„Das Geld ist bereit", sagte er. „Meinen Teil habe ich gebracht."
Und in der Tat, nachdem er ins Zimmer getreten war, packte der merkwürdige Mann das Geld aus — richtiges Geld, kein Falschgeld. Er zählte genau hunderttausend Gulden ab und sprach:
„Hier hast du meine vertragliche Leistung. Jetzt bist du an der Reihe."
Der Millionär legte einen Cent auf den Tisch und beobachtete mit Bangen, ob der Gast die Münze nehmen oder sich eines anderen besinnen und sein Geld wieder einstecken würde. Der Fremde sah sich die Münze an, wog sie in der Hand und steckte sie in seinen Beutel.
„Morgen komme ich um dieselbe Zeit. Vergiß nicht, zwei Cent bereit zu halten", sagte er und ging davon.
Der Millionär traute seinem Glück nicht: hunderttausend Gulden wie vom Himmel gefallen! Er zählte das Geld noch einmal, prüfte es sorgfältig auf die Echtheit: alles war in Ordnung. Nun brachte er das Geld in Sicherheit und sah der nächsten Zahlung entgegen.
Nachts befielen ihn Zweifel. Sollte es sich etwa um einen Räuber handeln, der als Einfaltspinsel auftritt, um das Versteck des Geldes auszukundschaften und später mit seiner Bande einen Überfall auszuführen?
Der Millionär sicherte die Tür möglichst gut, hielt abends Ausschau aus dem Fenster und konnte lange nicht einschlafen. Morgens wiederum ein Klopfen

am Fenster: der Fremde war mit dem Gelde da. Er zählte hunderttausend Gulden ab, nahm seine zwei Cent in Empfang und sagte im Weggehen: „Denk daran, morgen vier Cent bereit zu haben!"

Wieder freut sich der Millionär; das zweite Hunderttausend ist ihm in den Schoß gefallen. Und nach einem Räuber sieht der Fremde nicht aus: er schaut sich nicht um, spioniert nicht, sondern will nur seine Cents haben. Ein komischer Kauz! Von dieser Art müßte es möglichst viele auf Erden geben, klugen Leuten ginge es dann gut.

Der Fremde stellte sich auch am dritten Tage ein, und der Millionär heimste für 4 Cent die dritten hunderttausend Gulden ein.

Ein weiterer Tag verging, und er erhielt auf dieselbe Weise das vierte Hunderttausend für 8 Cent.

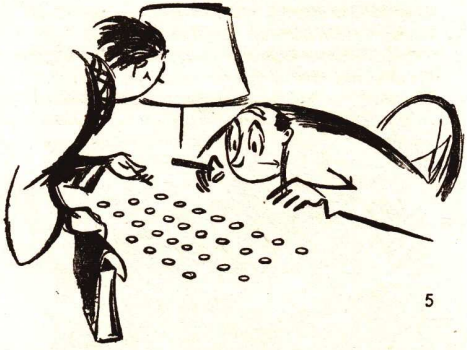
Das fünfte Hunderttausend folgte für 16 Cent, das sechste für 32 Cent.

Nachdem eine Woche seit Abschluß des Vertrages vergangen war, hatte unser Millionär bereits siebenhunderttausend Gulden eingeheimst, selbst dagegen nur eine Kleinigkeit gezahlt:

1 Cent + 2 Cent + 4 Cent + 8 Cent + 16 Cent + 32 Cent + 64 Cent = 127 Cent
oder 1 Gulden 27 Cent.

Unser habgieriger Millionär fand daran Gefallen und bedauerte schon, daß er diese Abrede nur für einen Monat getroffen hatte. Mehr als drei Millionen würde er nicht zusammenbekommen. Ob er es wohl versuchen sollte, den Tölpel zu einer Verlängerung der Frist, wenn auch nur für einen halben Monat, zu überreden? Doch das ist riskant: er könnte merken, daß er das Geld umsonst hergibt.

Der Fremde erschien pünktlich jeden Morgen mit seinen Hunderttausend. Am achten Tage erhielt er 1 Gulden 28 Cent, am neunten Tag 2 Gulden 56 Cent, am zehnten Tag 5 Gulden 12 Cent, am elften Tag 10 Gulden 24 Cent, am zwölften Tag 20 Gulden 48 Cent, am dreizehnten Tag 40 Gulden 96 Cent, am vierzehnten Tag 81 Gulden 92 Cent.



Der Millionär zahlte diese Beträge gern; er hatte ja schon eine Million vierhunderttausend Gulden erhalten, seinerseits aber dem Fremden im ganzen nur etwa hundertfünfzig Gulden gezahlt.

Die Freude des Millionärs währte indessen nicht lange. Er erkannte bald, daß der sonderbare Gast kein Einfaltspinsel und die Abrede mit ihm gar nicht so vorteilhaft war, wie es zuerst den Anschein hatte. Nach Verlauf von zwei Wochen war es nicht mehr mit Cents getan, sondern er mußte jedesmal für die Hunderttausend Hunderte von Gulden zahlen, und die Beträge wuchsen sehr schnell an. In der Tat, der Millionär zahlte nach Beginn der zweiten Monatshälfte folgende Summen:

für	das	15.	Hunderttausend	163	Gulden	84 Cent
„	„	16.	„	327	„	68 „
„	„	17.	„	655	„	36 „
„	„	18.	„	1310	„	72 „
„	„	19.	„	2621	„	44 „ .

Übrigens, benachteiligt fühlte sich der Millionär noch lange nicht. Er hatte zwar über 5000 Gulden gezahlt, dafür aber 1 900 000 Gulden erhalten.

Der Gewinn verminderte sich von Tag zu Tag, und zwar immer schneller und schneller. Hier die weiteren Zahlungen:

für	das	20.	Hunderttausend	5242	Gulden	88 Cent
„	„	21.	„	10485	„	76 „
„	„	22.	„	20971	„	52 „
„	„	23.	„	41943	„	04 „
„	„	24.	„	83886	„	08 „
„	„	25.	„	167772	„	16 „
„	„	26.	„	335544	„	32 „
„	„	27.	„	671088	„	64 „ .

Nun hatte er halb soviel gezahlt, als er bekommen hatte. Und ein Aufhören war nicht möglich. Der Vertrag mußte eingehalten werden.

Es wurde immer schlimmer. Zu spät erkannte der Millionär, daß der Fremde ihn arg überlistet hatte und viel mehr Geld erhalten als selbst zahlen würde. Vom 28. Tage an hatte der Millionär schon Millionenbeträge zu zahlen. Und die beiden letzten Tage ruinierten ihn vollends. Nachstehend diese Riesensumme:

für	das	28.	Hunderttausend	1342177	Gulden	28 Cent
„	„	29.	„	2684354	„	56 „
„	„	30.	„	5368709	„	12 „ .

Als der Gast ihn zum letztenmal verlassen hatte, rechnete sich der Millionär aus, wie teuer ihn die drei Millionen Gulden zu stehen gekommen waren, die er so billig zu erhalten gehofft hatte. Es stellte sich heraus, daß er dem Fremden

10737418 Gulden 23 Cent

gezahlt hatte.

Nahezu 11 Millionen! Und angefangen hatte es doch mit einem einzigen Cent! Der Fremde hätte selbst dreimalhunderttausend Gulden täglich bringen können und wäre doch nicht zu kurz gekommen.

Bevor wir diese Geschichte abschließen, will ich noch zeigen, wie sich die Berechnung der Verluste unseres Millionärs beschleunigen läßt; mit anderen Worten, wie man eine Reihe von Zahlen am schnellsten addiert:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 \text{ und so fort.}$$

Bei diesen Zahlen fällt folgende Eigentümlichkeit in die Augen:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 1 + 1 \\ 4 &= (1 + 2) + 1 \\ 8 &= (1 + 2 + 4) + 1 \\ 16 &= (1 + 2 + 4 + 8) + 1 \\ 32 &= (1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 1. \end{aligned}$$

Wir sehen, daß jede Zahl dieser Reihe der Summe aller vorangegangenen plus 1 entspricht. Wenn alle Zahlen einer solchen Reihe, zum Beispiel von 1 bis 32768, addiert werden sollen, fügen wir nur zu der letzten Zahl 32768 die Summe aller vorangegangenen hinzu; mit anderen Worten, wir addieren die letzte Zahl mit derselben Zahl minus 1, also mit 32768 — 1. Ergebnis: 65535.
Auf diese Weise lassen sich die Verluste unseres Millionärs sehr schnell errechnen, sobald man die Höhe des zuletzt gezahlten Betrages weiß. Seine letzte Zahlung betrug 5368709 Gulden 12 Cent.
Durch die Addition dieser Summe mit 5368709 Gulden 11 Cent erhalten wir daher sofort das gesuchte Resultat: 10737418 Gulden 23 Cent.
Nun überlegt euch mal: wieviel Geld mußte der Unbekannte selber besitzen, oder wie lange mußte er sich Geld leihen, um sich auf das Geschäft einlassen zu können?

2. Stadtgerüchte

Es ist erstaunlich, wie schnell sich Gerüchte in einer Stadt verbreiten! Es kommt vor, daß kaum zwei Stunden seit irgendeinem Vorfall verstrichen sind, den nur wenige Personen miterlebt haben — und schon hat die Kunde davon die ganze Stadt durchflogen: alle wissen davon, alle haben davon gehört. Diese außergewöhnliche Schnelligkeit erscheint uns verblüffend, geradezu rätselhaft.
Indessen, wenn man der Sache durch Berechnungen auf den Grund geht, erkennt man, daß durchaus nichts Verwunderliches dabei ist. Alles ist auf die Eigenschaft von Zahlenreihen und nicht auf irgendwelche geheimnisvolle Absonderlichkeiten der Gerüchte selbst zurückzuführen. Als Beispiel wollen wir einmal den folgenden Fall annehmen und untersuchen:

In einer Provinzstadt mit 50000 Einwohnern ist um acht Uhr morgens ein Reisender aus der Hauptstadt eingetroffen und hat eine interessante Neuigkeit mitgebracht. In dem Hause, in dem er abgestiegen ist, hat er die Neuigkeit nur drei Einheimischen mitgeteilt; das hat, nehmen wir an, eine Viertelstunde in Anspruch genommen.

Um 8^{15} Uhr war die Nachricht in der betreffenden Stadt somit erst vier Personen bekannt — dem Ankömmling und drei Einheimischen.

Nachdem die drei Einheimischen die Neuigkeit erfahren hatten, beeilte sich jeder von ihnen, sie drei anderen mitzuteilen. Das nahm wiederum eine Viertelstunde in Anspruch. Somit hatten eine halbe Stunde nach Eintreffen der Neuigkeit in der Stadt schon $4 + (3 \cdot 3) = 13$ Personen von ihr Kenntnis.

Jede der 9 Personen, die eben von der Neuigkeit unterrichtet wurden, teilte sie im Verlauf der nächsten Viertelstunde 3 weiteren Mitbürgern mit, so daß sie um 8^{45} Uhr

$$13 + (3 \cdot 9) = 40 \text{ Einwohnern}$$

bekannt war.

Wenn sich die Verbreitung des Gerüchts in der Stadt in dieser Weise fortsetzt, das heißt wenn jeder, der von der Neuigkeit Kenntnis erhalten hat, dazu kommt, sie in der nächsten Viertelstunde noch 3 Personen mitzuteilen, stellt sich ihr Bekanntwerden in der Stadt folgendermaßen dar:

Um 9^{00} Uhr wissen von der Neuigkeit $40 + (3 \cdot 27) = 121$ Personen,
„ 9^{15} „ „ „ „ „ $121 + (3 \cdot 81) = 364$ „ ,
„ 9^{30} „ „ „ „ „ $364 + (3 \cdot 243) = 1093$ „ .

Anderthalb Stunden nach dem ersten Auftauchen des Gerüchts in der Stadt werden also, wie wir sehen, im ganzen rund 1100 Personen von ihm gehört haben. Das scheint nicht viel zu sein bei einer Einwohnerzahl von 50000. Man könnte glauben, daß noch geraume Zeit verstreichen wird, bis sämtliche Ein-

wohner der Stadt unterrichtet sein werden. Untersuchen wir indessen den weiteren Gang der Verbreitung:

Um 9^{45} Uhr wissen von der Neuigkeit $1093 + (3 \cdot 729) = 3280$ Personen,
„ 10^{00} „ „ „ „ „ $3280 + (3 \cdot 2187) = 9841$ „ .

Nach einer weiteren Viertelstunde wird bereits mehr als die Hälfte der Stadt von der Neuigkeit erfahren haben:

$$9841 + (3 \cdot 6561) = 29\,524 \text{ Personen.}$$

Und noch vor 10^{30} Uhr werden samt und sonders alle Einwohner der großen Stadt die Neuigkeit wissen, die um 8 Uhr nur einer einzigen Person bekannt war.

Prüfen wir nun einmal nach, wie die vorhergehende Berechnung vorgenommen wurde. Sie lief im Grunde genommen darauf hinaus, daß wir nachstehende Reihe von Zahlen addiert haben:

$$1 + 3 + (3 \cdot 3) + (3 \cdot 3 \cdot 3) + (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) + \ldots .$$

Aber ist es nicht möglich, das Resultat auf irgendeine kürzere Art zu ermitteln, ähnlich derjenigen, in der wir zuvor die Summe der Zahlenreihe $1 + 2 + 4 + 8$ und so weiter festgestellt haben? Das ist möglich, wenn wir folgende Eigentümlichkeit der hier addierten Zahlen in Betracht ziehen:

$$1 = 1$$
$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$
$$9 = (1 + 3) \cdot 2 + 1$$
$$27 = (1 + 3 + 9) \cdot 2 + 1$$
$$81 = (1 + 3 + 9 + 27) \cdot 2 + 1 \text{ und so fort.}$$

Mit anderen Worten: jede Zahl dieser Reihe entspricht der verdoppelten Summe aller vorausgegangenen Zahlen plus 1.
Um die Summe aller Zahlen unserer Reihe von 1 bis zu einer beliebigen Zahl zu errechnen, genügt es demnach, wenn man der letzten Zahl ihre Hälfte hinzufügt (nachdem man von der letzten Zahl eine Eins abgezogen hat). Die Summe der Zahlen

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$$

ist demnach 729 plus der Hälfte von 728, also $729 + 364 = 1093$.

In unserem Falle hat jeder Einwohner die Neuigkeit, die er erfahren hat, nur drei Mitbürgern mitgeteilt. Wenn aber die Bewohner der Stadt noch gesprächiger wären und die von ihnen erfahrene Neuigkeit nicht drei, sondern beispielsweise fünf oder sogar zehn anderen mitteilten, würde sich die Kunde von ihr natürlich viel schneller ausbreiten. Bei einer Weitergabe der Neuigkeit an jeweils fünf andere würde sich von dem Bekanntwerden in der Stadt folgendes Bild ergeben:

Um	8^{00}	Uhr	1	Einwohner
„	8^{15}	„	$1 + 5 =$ 6	„
„	8^{30}	„	$6 + (5 \cdot 5) =$ 31	„
„	8^{45}	„	$31 + (25 \cdot 5) =$ 156	„
„	9^{00}	„	$156 + (125 \cdot 5) =$ 781	„
„	9^{15}	„	$781 + (625 \cdot 5) =$ 3906	„
„	9^{30}	„	$3906 + (3125 \cdot 5) =$ 19531	„

Noch vor 9^{45} Uhr hätte die gesamte fünfzigtausendköpfige Einwohnerschaft der Stadt die Neuigkeit erfahren.
Noch schneller würde sich die Neuigkeit verbreiten, wenn jeder einzelne sie zehn anderen mitteilte. Dann kämen wir zu der nachstehenden interessanten, schnell anwachsenden Zahlenreihe:

Um	8^{00}	Uhr	= 1
„	8^{15}	„	$1 + 10 =$ 11
„	8^{30}	„	$11 + 100 =$ 111
„	8^{45}	„	$111 + 1000 =$ 1111
„	9^{00}	„	$1111 + 10000 =$ 11111

Die nächste Zahl in dieser Reihe würde hiernach 111111 sein, woraus hervorgeht, daß die ganze Stadt kurz nach 9 Uhr die Neuigkeit erfahren hätte. Das Gerücht würde sich nahezu innerhalb einer Stunde verbreitet haben!

3. Eine Lawine billiger Fahrräder

In den kapitalistischen Ländern gibt es Unternehmer, die zu recht eigenartigen Methoden greifen, um ihre in der Regel nicht gerade erstklassige Ware abzusetzen. Sie fangen damit an, daß sie in vielgelesenen Zeitungen und Zeitschriften Inserate etwa folgenden Inhalts erscheinen lassen:

EIN FAHRRAD FÜR 10 DOLLAR

Jeder kann für nur 10 Dollar ein Fahrrad erwerben. Nutzen Sie die seltene Gelegenheit.

Statt 50 Dollar — 10 Dollar

Kaufbedingungen werden gratis zugesandt.

Nicht wenige Menschen lassen sich natürlich von dem verlockenden Inserat bestechen und bitten um Zusendung der Bedingungen für dieses ungewöhnliche Angebot. Als Antwort erhalten sie einen ausführlichen Prospekt, dem sie folgendes entnehmen:

Für die eingezahlten Dollars bekommt man zunächst nicht das Fahrrad selbst geliefert, sondern nur 4 Gutscheine, die man zu 10 Dollar das Stück an vier seiner Bekannten absetzen soll. Den auf diese Weise vereinnahmten Betrag muß man der Firma einsenden, und erst, wenn das geschehen ist, trifft das Fahrrad ein; es kostet für den Käufer also tatsächlich nur 10 Dollar, denn die weiteren 40 Dollar zahlt er ja nicht aus seiner Tasche. Gewiß, abgesehen von den 10 Dollar in bar, hat der Käufer auch noch einige Umstände mit dem Absatz der Gutscheine unter seinen Bekannten, aber diese kleine Mühe wird nicht in Ansatz gebracht.

Was stellen diese Gutscheine nun vor? Welche Güter des Lebens erwirbt sich ihr Käufer für die eingezahlten 10 Dollar? Er erhält das Recht, seinen Gutschein bei der Firma gegen 5 Gutscheine der gleichen Art einzutauschen. Mit anderen Worten, er verschafft sich die Möglichkeit, 50 Dollar zum Kauf eines Fahrrades zu sammeln, für das er dadurch selber nur 10 Dollar — den Preis eines Gutscheines — zahlt. Die neuen Besitzer des Billetts bekommen ihrerseits von der Firma 5 Gutscheine zum Weiterverkauf und so fort.

Auf den ersten Blick scheint die ganze Sache nichts Betrügerisches an sich zu haben. Das Versprechen des Inserats wird eingelöst: den Käufer kostet das Fahrrad wirklich nur 10 Dollar. Und auch die Firma kommt nicht zu kurz: sie erhält für ihre Ware den vollen Wert.

Und doch handelt es sich bei einem solchen Verfahren um eine ausgesprochene Gaunerei. Durch die „Lawine" oder das „Schneeballsystem", wie dieser Schwindel genannt wird, werden alle die zahlreichen Teilnehmer geschädigt, denen es nicht gelingt, die gekauften Gutscheine abzusetzen. Sie sind es, die der Firma die Differenz zwischen dem eigentlichen Preis von 50 Dollar und den für das Fahrrad gezahlten 10 Dollar entrichten. Früher oder später muß unweigerlich der Fall eintreten, daß die Besitzer der Gutscheine keine Käufer mehr finden können. Daß dies unausbleiblich ist, werdet ihr erkennen, wenn

ihr euch die Mühe macht, mit dem Bleistift in der Hand zu berechnen, wie steil die Anzahl der von der Lawine erfaßten Menschen ansteigt.
Die erste Käufergruppe, die ihre Gutscheine direkt von der Firma erhalten hat, wird sie in der Regel ohne besonders große Mühe absetzen können; jedes Mitglied dieser Gruppe versorgt vier weitere Teilnehmer mit Gutscheinen.
Diese vier Teilnehmer müssen ihre Gutscheine an $4 \cdot 5 = 20$ andere verkaufen, indem sie sie von den Vorteilen eines solchen Kaufs überzeugen. Nehmen wir an, daß dies gelungen wäre und 20 weitere Käufer gefunden seien.
Die Lawine rollt weiter. Die 20 neuen Besitzer von Gutscheinen müssen $20 \cdot 5 = 100$ andere mit ihnen ausstatten.
Bis jetzt hat jeder „Stammvater" der Lawine $1 + 4 + 20 + 100 = 125$ Menschen in sie verwickelt, von denen 25 je ein Fahrrad, die übrigen 100 aber nur die Hoffnung haben, ein solches zu bekommen und diese Hoffnung mit 10 Dollar bezahlten.
Jetzt tritt die Lawine aus dem engen Kreis miteinander bekannter Menschen hinaus und ergießt sich allmählich über die ganze Stadt, wobei es ihr aber immer schwerer und schwerer wird, neue Opfer zu finden. Die letzten 100 Besitzer von Gutscheinen müssen 500 Abnehmer werben, die ihrerseits 2500 weitere Kauflustige ausfindig zu machen haben. Die Stadt wird schnell von Gutscheinen überschwemmt, und es ist durchaus keine leichte Aufgabe, sie loszuwerden.
Wie ihr seht, steigt die Zahl der von der Lawine erfaßten Personen nach demselben Gesetz an, dem wir bei der vorhin erörterten Verbreitung von Gerüchten begegnet sind. Nachstehend die Zahlenpyramide, die sich im vorliegenden Falle ergibt:

1
4
20
100
500
2500
12500
62500

Wenn die Stadt groß ist und 62500 Einwohner als Käufer für ein Fahrrad in Betracht kommen, hat die Lawine jetzt, also nach der achten Runde, den Umfang erreicht, wo sie nicht mehr wachsen kann. Alle sind von ihr erfaßt worden. Im Besitz eines Fahrrades ist aber nur der fünfte Teil von ihnen, während die übrigen $^4/_5$ Gutscheine in Händen haben, die sie nicht absetzen können. Für Großstädte und selbst für Weltstädte nach heutigen Begriffen mit ihren Millionen von Einwohnern tritt der Moment der Übersättigung nur um wenige Runden später ein, weil die Lawine zahlenmäßig mit unglaublicher Schnelligkeit anwächst. Hier die nächsten Stufen unserer Zahlenpyramide:

312500
1562500
7812500
39062500

Nach der 12. Runde könnte die Lawine, wie ihr seht, die Bevölkerung eines ganzen Staates erfaßt haben. Und $^4/_5$ dieser Bevölkerung würden von den Veranstaltern der Lawine betrogen sein.
Überlegen wir, was die Firma letzten Endes mit der Veranstaltung erreicht. Sie zwingt $^4/_5$ der Bevölkerung, Ware zu bezahlen, die das restliche Fünftel der Bevölkerung erworben hat; mit anderen Worten, vier Personen werden in die Zwangslage gebracht, einer fünften einen Vorteil zu verschaffen. Völlig unentgeltlich gelangt die Firma nebenher zu einem Stab eifriger Werber für ihre Ware. Einer unserer Schriftsteller hat diesen Schwindel sehr zutreffend als eine „Lawine gegenseitiger Prellung" bezeichnet. Das Zahlenungeheuer, das sich hinter einem solchen Geschäftskniff verbirgt, bestraft diejenigen, die es nicht verstehen, sich durch ein Rechenexempel gegen Anschläge von Schwindlern zu schützen.

4. Eine „fürstliche" Belohnung

Nachstehende Geschichte hat sich der Überlieferung zufolge vor vielen Jahrhunderten im alten Rom abgespielt. (Es handelt sich bei dieser Geschichte um eine freie Übertragung aus einer alten lateinischen Handschrift, die sich in einer der Privatbibliotheken Englands befindet.)

Der Feldherr Terentius hatte auf Befehl des Kaisers einen Feldzug unternommen und kehrte nach dessen siegreicher Beendigung mit reicher Beute nach Rom zurück. In der Hauptstadt angekommen, bat er um Zulaß zum Kaiser.
Der Kaiser empfing den Feldherrn huldvoll, dankte ihm herzlich für die dem Reich geleisteten Kriegstaten und versprach ihm als Belohnung eine hohe Stellung im Senat.
Doch was Terentius brauchte, war etwas anderes. Er entgegnete:
„Viele Siege, mein Kaiser, habe ich errungen, um deine Macht zu erhöhen und deinen Namen mit Ruhm zu bedecken. Ich fürchtete nicht den Tod, und hätte ich nicht nur ein, sondern viele Leben, ich würde sie alle für dich opfern. Aber ich bin des Krieges müde; die Jugend ist vorbei, und das Blut fließt langsam in meinen Adern. Die Zeit ist gekommen, im Hause meiner Ahnen auszuruhen und die Freuden des häuslichen Lebens zu genießen."
„Was wünschst du von mir zu erhalten, Terentius?" fragte der Kaiser.
„Hör mich gnädig an, mein Kaiser! Während der langen Kriegsjahre, in denen

ich mein Schwert tagein, tagaus mit Blut gefärbt habe, bin ich nicht dazu gekommen, mir Wohlstand zu erwerben. Ich bin arm, mein Kaiser ..."

„Rede weiter, tapferer Terentius."

„Wenn du deinen bescheidenen Diener belohnen willst", fuhr der ermutigte Feldherr fort, „möge deine Freigebigkeit mir dazu verhelfen, meinen Lebensabend friedlich und gesichert am häuslichen Herd zu verleben. Ich trachte nicht nach Ehren und einer hohen Stellung im allmächtigen Senat. Ich habe den Wunsch, mich von der Macht und aus dem öffentlichen Leben zurückzuziehen, um ungestört auszuruhen. Gib mir Geld, mein Kaiser, zur Sicherung meines Lebensabends."

Der Kaiser, so lautet die Überlieferung, zeichnete sich nicht durch besondere Freigebigkeit aus. Er liebte es, das Geld für sich anzuhäufen und geizte damit anderen gegenüber. Die Bitte des Feldherrn machte ihn nachdenklich.

„Welche Summe, Terentius, würdest du für dich als ausreichend ansehen?" fragte er.

„Eine Million Denar, mein Kaiser."

Abermals versank der Kaiser in Nachdenken. Der Feldherr wartete mit gesenktem Kopf. Endlich sprach der Kaiser:

„Ruhmreicher Terentius! Du bist ein großer Feldherr, und deine heldenmütigen Taten verdienen eine hohe Belohnung. Ich werde dich reich machen. Morgen mittag sollst du meinen Beschluß hören." Terentius verneigte sich und ging.

Am nächsten Tage erschien der Feldherr zur festgesetzten Stunde im kaiserlichen Palast.

„Ich grüße dich, tapferer Terentius!" sprach der Kaiser.

Terentius neigte demütig das Haupt.

„Ich bin gekommen, mein Kaiser, um deinen Beschluß anzuhören. Du hast gnädig versprochen, mich zu belohnen."

Der Kaiser entgegnete:
„Ich will nicht, daß ein so edler Krieger wie du für seine Heldentaten eine armselige Belohnung erhält. Hör mich also an. In meiner Schatzkammer liegen zehn Millionen Kupferasse[1]. Achte nun gut auf meine Worte. Du wirst in die Schatzkammer gehen, eine Münze in die Hand nehmen, mit ihr zurückkommen und sie mir zu Füßen legen. Am nächsten Tage wirst du wieder in die Schatzkammer gehen, wirst eine Münze im Werte von 2 As nehmen und sie hierher neben die erste legen. Am dritten Tage wirst du eine Münze im Werte von 4 As, am vierten Tage im Werte von 8 As, am fünften Tage im Werte von 16 As bringen und so fort, jedesmal mit verdoppeltem Wert der Münze. Ich werde Befehl geben, daß für dich täglich Münzen von entsprechendem Wert hergestellt werden. Und solange deine Kraft ausreicht, die Münzen aufzuheben, wirst du sie aus meiner Schatzkammer tragen. Niemand ist berechtigt, dir zu helfen; du darfst nur von deiner eigenen Kraft Gebrauch machen. Sobald du merkst, daß du nicht mehr imstande bist, die Münze zu heben, halte ein: unsere Abrede ist dann erfüllt. Aber alle Münzen, die du herausbringen konntest, sollen dein eigen und deine Belohnung sein."
Terentius nahm jedes Wort des Kaisers gierig in sich auf. Ihm schwebte eine Riesenmenge von Münzen vor, eine immer größer als die andere, die er aus der Schatzkammer holen würde.
„Ich bin befriedigt von deiner Gnade, mein Kaiser", antwortete er glückselig lächelnd. „Wahrhaft großmütig ist die Belohnung."
Die täglichen Besuche des Terentius in der Schatzkammer nahmen ihren Anfang. Diese war nicht weit von dem Empfangssaal des Kaisers gelegen, und zunächst bereitete Terentius das Holen der Münzen keinerlei Anstrengung.
Am ersten Tage brachte er aus der Schatzkammer nur ein As. Das ist eine kleine Münze. Nehmen wir einmal an, sie habe wie unser Zehnpfennigstück einen Durchmesser von 21 mm, und ihr Gewicht betrage 5 g.
Auch der zweite, dritte, vierte, fünfte und sechste Gang war nicht schwer, als der Feldherr Münzen von doppeltem, vierfachem, achtfachem, 16fachem und 32fachem Gewicht brachte.
Die siebente Münze hatte einen Durchmesser von $8^1/_2$ cm (genauer 84 mm) und wog 320 Gramm.
Beim Berechnen der weiteren Münzen müssen wir folgendes im Auge behalten: Verdoppeln wir den Durchmesser und die Dicke einer Münze, so erhöht sich der Rauminhalt und also auch das Gewicht auf das 8fache, da $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ist. Vervierfachen wir den Durchmesser und die Dicke, so erhöht sich das Gewicht auf das 64fache, da $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ ist. Verdoppeln wir aber das Gewicht, so beträgt der Durchmesser (und auch die Dicke) nur das 1,26fache, da $1{,}26 \cdot 1{,}26 \cdot 1{,}26 = 2$ ist.

1 Das As war bei den Römern eine Scheidemünze, die einen Kaufwert von ungefähr 5 Pfennigen hatte. 1 Denar enthielt 10, später 16 Asse. Wir haben mit 10 gerechnet.

Am achten Tage hatte Terentius aus der Schatzkammer eine Münze zu holen, die 128 einzelnen Münzen entsprach. Sie wog 640 g und hatte einen Durchmesser von rund $10\frac{1}{2}$ cm (denn $84 \cdot 1{,}26 = 105{,}8$ mm).

Die Münze, die Terentius am neunten Tage in den kaiserlichen Palast brachte, entsprach 256 einzelnen Münzen. Sie hatte einen Durchmesser von rund 13 cm und wog über $1\frac{1}{4}$ kg.

Am zwölften Tage erreichte die Münze einen Durchmesser von fast 27 cm und ein Gewicht von rund $10\frac{1}{4}$ kg.

Der Kaiser, der dem Feldherrn bis jetzt freundlich zugesehen hatte, machte nun aus seinem Triumph kein Hehl. Er sah, daß bereits 12 Gänge gemacht waren, im ganzen aber wenig mehr als der Wert von 4000 Kupfermünzen aus der Schatzkammer entfernt wurden.

Der dreizehnte Tag bescherte dem braven Terentius eine Münze, die 4096 einzelnen Münzen entsprach; sie hatte rund 34 cm im Durchmesser und ein Gewicht von $20\frac{1}{2}$ kg.

Am vierzehnten Tage hatte Terentius eine rund 41 kg schwere Münze mit einem Durchmesser von etwa 42 cm zu tragen.

„Überanstrengst du dich nicht, mein tapferer Terentius?" fragte der Kaiser, ein Lächeln unterdrückend.

„Nein, mein Kaiser", antwortete mürrisch Terentius, indem er sich den Schweiß aus der Stirn wischte.

Der fünfzehnte Tag war gekommen. Schwer war diesmal die Bürde des Terentius. Langsam schleppte er sich zum Kaiser mit der riesigen Münze, die aus 16384 Einzelmünzen hergestellt war. Sie erreichte einen Durchmesser von rund 53 cm und hatte ein Gewicht von über 80 kg — das Gewicht eines stattlichen Kriegers.

Der Feldherr war erschöpft und atmete schwer. Der Kaiser lächelte.

Als Terentius am nächsten Tage im Empfangssaal des Kaisers erschien, wurde er mit lautem Lachen empfangen. Er konnte seine Last jetzt nicht mehr tragen, sondern rollte sie vor sich her. Am nächsten Tag hatte die Münze einen

Durchmesser von rund 84 cm und wog fast 328 kg; sie entsprach dem Gewicht von 65536 Einzelmünzen.
Der achtzehnte Tag setzte der Bereicherung des Feldherrn ein Ende. Mit diesem Tage hörten seine Besuche in der Schatzkammer auf. Er hatte diesmal eine Münze zu befördern, die 131072 einzelnen Münzen entsprach. Sie hatte einen Durchmesser von über 1 m und wog rund 655 kg. Seinen Speer als Hebel benutzend, rollte Terentius sie unter Aufbietung seiner ganzen Kraft in den Saal. Die gigantische Münze fiel mit lautem Gepolter zu Füßen des Kaisers auf den Boden. Terentius war völlig erschöpft.
„Ich kann nicht mehr... Es ist genug", murmelte er.
Der Kaiser unterdrückte mit Mühe ein wohlgefälliges Lachen, als er den vollen Erfolg seiner List sah. Er befahl dem Schatzmeister, zu berechnen, wieviel Asse Terentius in den Palast gebracht hatte.
Der Schatzmeister führte den Befehl aus und sagte:
„Dank deiner Freigebigkeit, mein Kaiser, hat der siegreiche Feldherr Terentius 262143 As, das sind 26214 Denar, als Belohnung bekommen."
Der geizige Kaiser hat somit den Feldherrn, der eine Million Denar zu erhalten wünschte, mit etwa einem Vierzigstel dieser Summe abgespeist.

Überprüfen wir die Berechnung des Schatzmeisters und zugleich das Gewicht der Münzen. Terentius holte aus der Schatzkammer:

Am	1.	Tage	1	As		5 g
„	2.	„	2	Asse		10 „
„	3.	„	4	„		20 „
„	4.	„	8	„		40 „
„	5.	„	16	„		80 „
„	6.	„	32	„		160 „
„	7.	„	64	„		320 „
„	8.	„	128	„		640 „
„	9.	„	256	„	1 kg	280 „
„	10.	„	512	„	2 „	560 „
„	11.	„	1024	„	5 „	120 „
„	12.	„	2048	„	10 „	240 „
„	13.	„	4096	„	20 „	480 „
„	14.	„	8192	„	40 „	960 „
„	15.	„	16384	„	81 „	920 „
„	16.	„	32768	„	163 „	840 „
„	17.	„	65536	„	327 „	680 „
„	18.	„	131072	„	655 „	360 „

Wir wissen bereits, wie sich die Summe solcher Zahlen am einfachsten errechnen läßt; für die zweite Spalte beträgt sie 262143 — entsprechend den auf Seite 7 erwähnten Regeln. Terentius hatte sich vom Kaiser 1 Million Denar, das sind 10000000 As, erbeten. Tatsächlich erhielt er

10000000 : 262143, also rund 38mal weniger.

5. Die Legende vom Schachbrett

Das Schachspiel ist eines der allerältesten Spiele. Er existiert bereits seit vielen Jahrhunderten, und man braucht sich nicht zu wundern, wenn mit ihm sagenhafte Geschichten verknüpft sind, deren Glaubwürdigkeit sich heute nicht mehr nachprüfen läßt. Eine Geschichte dieser Art will ich hier erzählen. Um sie zu verstehen, braucht man gar nicht Schachspieler zu sein: es genügt zu wissen, daß Schach auf einem Brett gespielt wird, das in 64 Felder (abwechselnd weiße und schwarze) eingeteilt ist.

Das Schachspiel ist in Indien erfunden, und als der indische Herrscher Shehran es kennenlernte, war er von dem geistreichen Spiel und der Mannigfaltigkeit der in ihm möglichen Stellungen entzückt. Als der Herrscher erfuhr, daß das Spiel von einem seiner Untertanen erdacht sei, ließ er diesen zu sich rufen, um ihn persönlich für seine geistreiche Erfindung zu belohnen.
Der Erfinder — er hieß Sessa — erschien vor dem Thron des Gebieters. Es war

ein bescheiden gekleideter Gelehrter, der die Mittel zum Lebensunterhalt von seinen Schülern erhielt.

„Ich habe den Wunsch, dich gebührend für das schöne Spiel zu belohnen, Sessa, das du erfunden hast", sprach der Herrscher.

Der Weise verneigte sich.

„Ich bin reich genug, um deine kühnsten Wünsche zu erfüllen", fuhr der Herrscher fort. „Nenne mir die Belohnung, die dich befriedigen würde, und du sollst sie haben."

Sessa schwieg.

„Scheue dich nicht", ermutigte ihn der Herrscher. „Sage mir deinen Wunsch. Es soll mir nichts zuviel sein, um ihn zu erfüllen."

„Groß ist deine Güte, mein Gebieter. Aber laß mir einen Tag Zeit, die Antwort zu bedenken. Morgen, nach reiflicher Überlegung, werde ich dir meine Bitte vortragen."

Als Sessa am nächsten Tage erneut vor den Stufen des Throns erschien, setzte er den Herrscher durch die beispiellose Bescheidenheit seiner Bitte in Erstaunen.

„Mein Gebieter", sagte Sessa, „gib den Befehl, daß man mir für das erste Feld des Schachbretts ein Weizenkorn ausliefert."

„Ein einfaches Weizenkorn?" wunderte sich der Herrscher.

„Ja, mein Gebieter. Für das zweite Feld laß mir 2 Körner, für das dritte 4, für das vierte 8, für das fünfte 16, für das sechste 32..."

„Genug", unterbrach ihn ungeduldig der Herrscher. „Du sollst deine Körner für alle 64 Felder des Bretts deinem Wunsche gemäß erhalten: für jedes zweimal mehr als für das vorhergehende. Aber wisse, daß deine Bitte meiner Freigebigkeit nicht würdig ist. Indem du eine so geringfügige Belohnung erbittest, lässest du es an Ehrerbietung für meine Gnade fehlen. Fürwahr, als Lehrer hättest du ein besseres Beispiel dafür geben können, wie man die Güte seines Herrschers zu achten hat. Gehe! Meine Diener werden dir deinen Sack mit Weizen herausbringen."

Sessa lächelte, verließ den Saal und stellte sich abwartend ans Tor.

Beim Mittagessen erinnerte sich der Herrscher wieder des naiven Sessa, und er befahl nachzusehen, ob er seine klägliche Belohnung bereits weggetragen habe.

„Dein Befehl wird ausgeführt, Gebieter", lautete die Antwort. „Die Hofmathematiker sind dabei, die nötige Menge von Körnern auszurechnen."

Der Herrscher zog die Stirn kraus. Er war es nicht gewöhnt, daß seine Befehle so schleppend ausgeführt wurden.

Abends beim Schlafengehen erkundigte sich der Herrscher wiederum, ob Sessa mit seinem Sack Weizen schon lange die Mauern des Palastes verlassen habe.

„Gebieter", erhielt er zur Antwort, „deine Mathematiker sind unermüdlich bei der Arbeit und hoffen, bis zum Sonnenaufgang mit der Berechnung fertig zu sein."

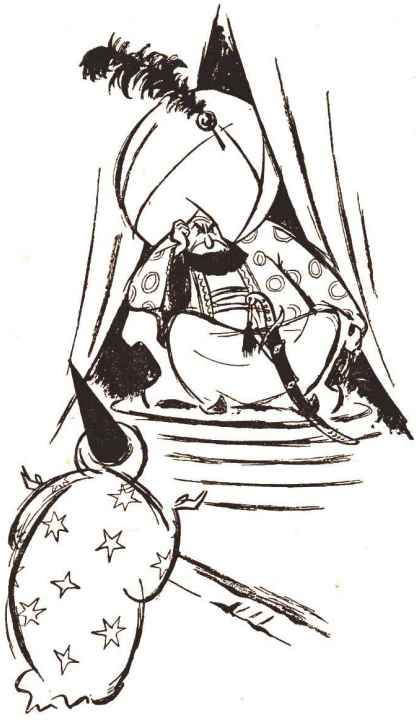
„Warum wird die Sache verzögert?" rief der Herrscher zornig aus. „Morgen, bevor ich erwache, soll alles bis aufs letzte Korn an Sessa abgeliefert sein. Ich befehle nicht zweimal!"

Am nächsten Morgen wurde dem Herrscher gemeldet, daß der Älteste der Hofmathematiker darum bitte, eine wichtige Mitteilung anzuhören.

Der Herrscher ließ ihn kommen.

„Bevor du mit deiner Angelegenheit anfängst", erklärte Shehran, „wünsche ich zu hören, ob Sessa endlich die unbedeutende Belohnung erhalten hat, die er sich selbst festsetzte."

„Gerade darum habe ich es gewagt, zu einer so frühen Stunde vor dir zu erscheinen", antwortete der Greis. „Wir haben gewissenhaft die ganze Menge von Körnern ausgerechnet, die Sessa zu erhalten wünscht. Diese Menge ist so groß..."



„Wie groß sie auch sein möge", fiel ihm der Herrscher anmaßend ins Wort, „meine Kornkammern werden dadurch nicht leer werden. Die Belohnung ist versprochen und muß ihm zuteil werden."

„Nicht in deiner Macht steht es, mein Gebieter, derartige Wünsche zu erfüllen. In allen deinen Speichern ist keine solch große Menge Getreide vorhanden, wie Sessa sie verlangt. Auch im ganzen Gebiete deines Reiches ist sie nicht vorhanden. Und auch auf der ganzen Erde wird sich eine solche Menge nicht finden. Wenn du die versprochene Belohnung unbedingt ausliefern willst, dann gib den Befehl, die Reiche der Erde in Äcker und Felder zu verwandeln, die Meere und Ozeane trockenzulegen, das Eis und den Schnee zu schmelzen, mit denen die fernen Wüsten des Nordens bedeckt sind. Alle diese Flächen

müßten zu Weizenfeldern werden. Und alles, was auf diesen Feldern geerntet wird, müßte an Sessa ausgeliefert werden. Aber selbst diese Menge würde noch nicht ausreichen."
Voller Erstaunen hörte der Herrscher den Greis an.
„Nenne mir diese ungeheuerliche Zahl", sagte er nachdenklich.
„Achtzehn Trillionen vierhundertsechsundvierzigtausendsiebenhundertvierundvierzig Billionen dreiundsiebzig Milliarden siebenhundertneun Millionen fünfhunderteinundfünfzig Tausend sechshundertfünfzehn, o mein Gebieter!"

Soweit die Legende. Ob sich wirklich alles so zugetragen hat, wie es hier überliefert wird, ist ungewiß; aber daß die Belohnung, von der in der Geschichte die Rede ist, sich tatsächlich durch die angeführte Zahl ausdrücken läßt, davon könnt ihr euch selbst überzeugen, wenn ihr die Geduld zu einer entsprechenden Berechnung aufbringt.
Angefangen mit eins müssen die Zahlen 1, 2, 4, 8 und so fort addiert werden. Das Resultat einer 63fachen Verdoppelung ergibt die Anzahl Körner, die der Erfinder des Spiels für das 64. Feld des Bretts zu erhalten hatte. Indem wir nach der auf Seite 7 erläuterten Methode verfahren, ermitteln wir leicht, welche Gesamtzahl von Körnern in Frage kam, wenn wir die letzte Zahl verdoppeln und eine Eins abziehen. Die Berechnung läuft also nur auf eine Multiplikation von 64 Zweien hinaus:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \text{ und so fort, insgesamt 64 mal.}$$

Um die Berechnung zu erleichtern, teilen wir diese 64 Faktoren in 6 Gruppen mit je 10 Zweien und eine Gruppe mit 4 Zweien ein. Das Produkt von 10 Zweien ist, wie sich leicht nachrechnen läßt, 1024, und das Produkt von 4 Zweien ist 16. Folglich ist das gesuchte Resultat:

$$1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 16.$$

Die Multiplikation $1024 \cdot 1024$ ergibt 1 048 576.
Nachdem wir nun noch

$$1\,048\,576 \cdot 1\,048\,576 \cdot 1\,048\,576 \cdot 16$$

ausrechnen und von dem Resultat eine Eins abziehen, kommen wir auf die gesuchte Körnerzahl:

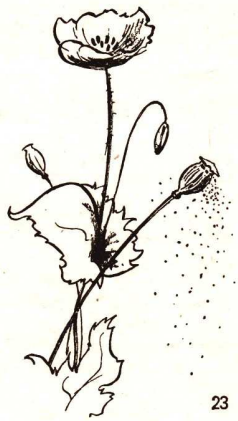
$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Um uns diesen Zahlenriesen in seiner ganzen Größe zu veranschaulichen, überlegen wir einmal, wie groß ein Speicher sein müßte, der diese Getreidemenge aufnehmen sollte. Man weiß, daß ein Kubikmeter Weizen etwa 15 Millionen Körner enthält. Die dem Erfinder des Schachspiels als Belohnung zugesagte Menge würde also einen Raum von 1 200 000 000 000 Kubikmeter oder 1200 Kubikkilometer füllen. Ein 4 m hoher und 10 m breiter Speicher müßte demnach 30 000 000 km lang sein, um diese Weizenmenge zu fassen. Er würde 750 mal um den Äquator reichen!

Der indische Herrscher war nicht in der Lage, eine solche Belohnung zu geben. Aber wenn er in der Mathematik beschlagen gewesen wäre, hätte er sich leicht aus der Klemme ziehen können. Er brauchte Sessa nur zu veranlassen, sich selbst Korn für Korn der ihm zukommenden Menge abzuzählen.
In der Tat, wenn Sessa Tag und Nacht ununterbrochen je ein Korn in der Sekunde abzählen würde, hätte er nach Ablauf der ersten 24 Stunden im ganzen nur 86400 Körner beisammen. Für eine Million Körner wäre ein mindestens zehntägiges ununterbrochenes Abzählen erforderlich. Zum Abzählen eines Kubikmeters Weizen würde er ungefähr ein halbes Jahr brauchen. Im Laufe von 10 Jahren würde er bei ununterbrochenem Zählen nicht mehr als 20 Kubikmeter abgezählt haben, das sind 150 dz oder 200 Sack. Wir sehen also, daß Sessa, selbst wenn er den ganzen Rest seines Lebens mit Abzählen zubringen wollte, nur zu einem winzigen Teil der von ihm verlangten Belohnung gelangen würde.

6. Schnelle Vermehrung

Eine reife Mohnkapsel ist mit winzigen Körnchen angefüllt: aus jedem von ihnen kann eine Pflanze heranwachsen. Wieviel Pflanzen würde es ergeben, wenn aus jedem Körnchen ohne Ausnahme eine neue Pflanze heranwüchse? Um dies festzustellen, müssen die Körnchen einer Kapsel gezählt werden. Ein mühseliges Unternehmen; aber das Resultat ist so interessant, daß sich die aufgebrachte Geduld lohnt. Es stellt sich heraus, daß eine Mohnkapsel rund gerechnet 3000 Körnchen enthält.



Was ergibt sich hieraus? Es ergibt sich folgendes: wenn unsere Mohnpflanze von einem genügend großen und geeigneten Stück Land umgeben wäre, würde jedes zur Erde gefallene Körnchen keimen, und im nächsten Sommer würden auf dieser Fläche bereits 3000 Mohnpflanzen heranwachsen. Ein ganzes Mohnfeld aus einer einzigen Kapsel!
Doch sehen wir zu, was sich weiter ergibt. Aus jeder der 3000 Pflanzen geht mindestens eine Kapsel hervor (meist sind es mehrere), die 3000 Körnchen enthält. Herangereift, ergibt der Samen jeder Kapsel 3000 neue Pflanzen, so daß wir im zweiten Jahr bereits auf nicht weniger als

$$3000 \cdot 3000 = 9000000 \text{ Pflanzen}$$

kommen.

Im dritten Jahr beläuft sich die Zahl der Nachkommen unserer Mohnpflanze schon auf

$$9\,000\,000 \cdot 3000 = 27\,000\,000\,000$$

und im vierten Jahr auf

$$27\,000\,000\,000 \cdot 3000 = 81\,000\,000\,000\,000.$$

Nach Anbruch des fünften Jahres würde es dem Mohn auf unserer Erdkugel zu eng werden, denn die Zahl der Pflanzen wächst nun auf

$$81\,000\,000\,000\,000 \cdot 3000 = 243\,000\,000\,000\,000\,000$$

Stück an. Die ganze Landfläche der Erde, das heißt die Fläche aller Erdteile und Inseln, umfaßt dagegen nur rund 150 Millionen Quadratkilometer oder

150 000 000 000 000 Quadratmeter.

Diese Zahl beträgt nur etwa $^1/_{1600}$ der Zahl der Mohnpflanzen, das heißt: auf jeden Quadratmeter würden etwa 1600 Mohnpflanzen entfallen.

Wenn aus jedem Mohnkörnchen eine Pflanze heranwüchse, könnte, wie wir sehen, die Nachkommenschaft einer einzigen Pflanze innerhalb von fünf Jahren die ganze Landfläche der Erdkugel mit einem Dickicht von sechzehnhundert Pflanzen auf jedem Quadratmeter bedecken. Ein solcher Zahlenriese verbirgt sich in dem winzigen Mohnkörnchen!

Wenn wir eine gleiche Berechnung statt mit dem Mohn mit einer anderen, nicht so samenreichen Pflanze anstellen würden, kämen wir zu einem ähnlichen Ergebnis, nur mit dem Unterschied, daß die Nachkommenschaft einer solchen Pflanze nicht in fünf Jahren, sondern erst nach einer etwas längeren Frist die ganze Erde bedecken würde. Nehmen wir zum Beispiel den Löwenzahn, der jährlich etwa 100 Samenkörnchen hervorbringt. (Man hat sogar 200 Samenkörnchen bei einer Blüte festgestellt.) Wenn sie alle zum Keimen kämen, hätten wir:

nach	1	Jahr	1 Pflanze
„	2	Jahren	100 Pflanzen
„	3	„	10 000 „
„	4	„	1 000 000 „
„	5	„	100 000 000 „
„	6	„	10 000 000 000 „
„	7	„	1 000 000 000 000 „
„	8	„	100 000 000 000 000 „
„	9	„	10 000 000 000 000 000 „

Das sind fast 70 mal soviel, wie die Landfläche der Erde Quadratmeter enthält.

Nach neun Jahren wären bei 70 Pflanzen auf einem Quadratmeter folglich alle Erdteile mit Löwenzahn bedeckt.

Wie kommt es, daß wir in Wirklichkeit keine so unglaublich schnelle Vermehrung beobachten? Das liegt daran, daß die Mehrzahl der Samenkörner umkommt: entweder geraten sie auf ungeeigneten Boden und keimen überhaupt nicht, oder sie beginnen wohl zu keimen, werden dann aber von anderen Pflanzen erstickt, oder endlich, sie werden durch Witterungseinflüsse oder durch Tiere zugrunde gehen. Wenn das nicht der Fall wäre, würde jede Pflanze innerhalb kurzer Zeit die ganze Erdkugel überwuchern.

Dies trifft nicht nur für Pflanzen, sondern auch für Tiere zu. Wenn es keinen Tod gäbe, würde die Nachkommenschaft eines einzigen Pärchens jeder beliebigen Tiergattung innerhalb einer kürzeren oder längeren Frist die ganze Erde ausfüllen. Die Heuschrecken, die in dichten Schwärmen riesig große Räume bedecken, können uns eine ungefähre Vorstellung davon geben, wie es auf der Erde aussähe, wenn der Tod nicht die Vermehrung der Lebewesen hemmen würde. In kaum zwei bis drei Jahrzehnten wären die Erdteile von undurchdringbaren Wäldern und Steppen bedeckt, in denen es von Millionen von Tieren wimmeln würde, die sich gegenseitig den Platz streitig machten. Die Ozeane würden sich so dicht mit Fischen füllen, daß eine Schiffahrt unmöglich wäre. Und die Luft wäre nahezu undurchsichtig vor lauter Vögeln und Insekten.

Untersuchen wir beispielsweise, wie schnell sich die uns allen bekannte Zimmerfliege vermehrt. Jede Fliege legt schätzungsweise 120 Eier. Im Laufe des Sommers folgen einander 7 Generationen von Fliegen, die zur Hälfte aus Weibchen bestehen. Nehmen wir an, daß die Ablage von Eiern am 15. April begonnen hat und daß jedes Weibchen in 20 Tagen so weit heranwächst, daß es selbst Eier legt. Die Vermehrung stellt sich dann folgendermaßen dar:

Am 15. April hat das Weibchen 120 Eier gelegt; Anfang Mai haben sich 120 Fliegen entpuppt, von denen die Hälfte Weibchen sind.

Am 5. Mai legt jedes Weibchen 120 Eier; Mitte Mai entpuppen sich $60 \cdot 120 = 7200$ Fliegen, von denen 3600 Weibchen sind.

Am 25. Mai legt jedes dieser 3600 Weibchen 120 Eier; Anfang Juni entpuppen sich $3600 \cdot 120 = 432000$ Fliegen, von denen 216000 Weibchen sind.

Am 14. Juni legt jedes der 216000 Weibchen 120 Eier; Ende Juni entpuppen sich 25920000 Fliegen, darunter 12960000 Weibchen.

Am 5. Juli legen 12960000 Weibchen je 120 Eier; Mitte Juli entpuppen sich 1555200000 Fliegen, darunter 777600000 Weibchen.

Am 25. Juli entpuppen sich 93312000000 Fliegen, darunter 46656000000 Weibchen.

Am 13. August entpuppen sich 5598720000000 Fliegen, darunter 2799360000000 Weibchen.

Am 1. September entpuppen sich 335923200000000 Fliegen.

Um uns diese gewaltige Menge von Fliegen zu veranschaulichen, die bei einer ungehinderten Vermehrung im Laufe eines Sommers aus einem einzigen Fliegenpaar hervorgehen kann, stellen wir uns einmal vor, daß sie in einer ge-

raden Linie aneinandergereiht wären. Da eine Fliege etwa 7 mm lang ist, würde sich diese Fliegenkette über 2350 Millionen Kilometer erstrecken — das ist etwa 18mal soviel wie die Entfernung zwischen der Erde und der Sonne.
Zum Abschluß seien einige Fälle außergewöhnlich schneller Vermehrung von Tieren angeführt, für die günstige Voraussetzungen gegeben waren und die sich tatsächlich ereignet haben.
In Amerika gab es ursprünglich keine Sperlinge. Dieser bei uns so verbreitete Vogel wurde absichtlich in die Vereinigten Staaten eingeführt, damit er dort schädliche Insekten vertilge. Der Sperling verzehrt bekanntlich in großer Menge gefräßige Raupen und andere für Gärten und Gemüsezucht schädliche Insekten. Die neue Umgebung sagte den Sperlingen zu: in Amerika gab es keine Raubvögel, die die Sperlinge verfolgten, und die letzteren begannen, sich schnell zu vermehren. Die Menge der schädlichen Insekten nahm zusehends ab, aber bald vermehrten sich die Sperlinge in einem solchen Maße, daß sie in Ermangelung ausreichender tierischer Nahrung über die Saaten herfielen und sie vernichteten. Auf den Hawaiischen Inseln haben sie alle kleinen Vögel völlig verdrängt. Man sah sich zu einer Bekämpfung der Sperlinge gezwungen; diese Bekämpfung stellte sich für die Amerikaner so teuer, daß die Einfuhr irgendwelcher Tiere nach Amerika für die Zukunft gesetzlich verboten wurde.
Ein zweites Beispiel. Als Australien von den Europäern entdeckt wurde, gab es in diesem Erdteile keine Kaninchen. Das Kaninchen wurde Ende des 18. Jahrhunderts in Australien eingeführt; und da dort keine Raubtiere vorhanden sind,

die Kaninchen fressen, vermehrten sich diese Nagetiere außerordentlich schnell. Bald wurde Australien von ganzen Herden von Kaninchen überschwemmt, die der Landwirtschaft ungeheuren Schaden zufügten und sich zu einer förmlichen Landplage auswuchsen. Die Landwirtschaft hat für ihre Bekämpfung ungeheure Mittel aufgeboten und ist nur dank der energisch durchgeführten Maßnahmen damit fertig geworden. Ungefähr dasselbe hat sich später mit Kaninchen in Kalifornien wiederholt.

Der dritte lehrreiche Fall hat sich auf der Insel Jamaika abgespielt. Dort hausten in großen Mengen giftige Schlangen. Um sich von ihnen zu befreien, beschloß man, Stelzengeier einzuführen, die als grimmige Schlangenvertilger bekannt sind. Die Menge der Schlangen verringerte sich tatsächlich sehr bald, aber statt ihrer vermehrten sich die Feldratten außerordentlich stark, von denen sich bis dahin die Schlangen ernährt hatten. Als Feind der Ratten kennt man den indischen Mungo. Man entschloß sich, vier Pärchen auf die Insel zu bringen und es ihnen zu überlassen, sich nach Belieben zu vermehren. Die Mungos paßten sich ihrer neuen Heimat gut an und breiteten sich schnell über die ganze Insel aus. Es waren kaum zehn Jahre vergangen, da hatten sie fast alle Ratten auf der Insel vertilgt. Aber, o weh! Nachdem die Mungos die Ratten ausgerottet hatten, blieb ihnen nichts anderes übrig, als sich von allem, dessen sie habhaft werden konnten, zu ernähren. Sie wurden zu Allesfressern und fielen über Kälber, Lämmer, Ferkel, Hausgeflügel und dessen Eier her. Und bei weiter zunehmender Vermehrung drangen sie in die Obstgärten, Plantagen und Getreidefelder ein. Die Bevölkerung nahm nun die Vernichtung ihrer bisherigen Verbündeten auf, es gelang ihr aber nur bis zu einem gewissen Grade, den von den Mungos angerichteten Schaden einzudämmen.

7. Zahlenriesen um und in uns

Man braucht nicht nach außergewöhnlichen Umständen zu suchen, um auf Zahlenriesen zu stoßen. Sie umgeben uns allenthalben und sind sogar in uns selber enthalten — man muß sie nur zu finden verstehen. Der Himmel über uns, der Sand unter unseren Füßen, die Luft um uns, das Blut in unserem Körper — alles birgt in sich unsichtbare Riesen aus dem Reiche der Zahlen.

Die gigantischen Zahlen, die sich auf den Weltraum beziehen, stellen für die Mehrzahl der Menschen nichts Überraschendes dar. Ob nun die Rede auf die Zahl der Sterne kommt oder auf ihre Entfernung von uns und untereinander, auf ihre Größe, ihre Masse, ihr Alter — in allen diesen Fällen sind wir es gewohnt, Zahlen zu begegnen, deren ungeheure Größe jedes Vorstellungsvermögen übersteigt. Nicht ohne Grund ist der Ausdruck „astronomische Zahl" zu einem geflügelten Wort geworden. Viele indessen wissen nicht, daß selbst

diejenigen Himmelskörper, die von den Astronomen häufig als „kleine" bezeichnet werden, sich als wahre Giganten herausstellen, wenn man auf sie den im täglichen Leben üblichen Maßstab anwendet. Innerhalb unseres Sonnensystems gibt es Planeten, die die Astronomen im Hinblick auf ihre verhältnismäßig geringe Größe als „kleine Planeten" bezeichnen. Unter ihnen gibt es auch solche, deren Durchmesser einige Kilometer beträgt. In den Augen des Astronomen, der an gigantische Maßstäbe gewöhnt ist, sind sie so klein, daß er sie, wenn er sie erwähnt, voller Geringschätzung „winzig" nennt. Aber „winzig" sind sie nur im Vergleich mit anderen, noch gigantischeren Himmelskörpern: mit dem gewöhnlichen menschlichen Maßstab gemessen, stellen sie durchaus keine Miniaturen dar. Die Oberfläche des kleinsten unter ihnen könnte die gesamte Bevölkerung der Sowjetunion aufnehmen. Nehmen wir einen „winzigen" Planeten mit einem Durchmesser von 3 km: ein solcher Planet ist kürzlich entdeckt worden. Nach den Regeln der Geometrie läßt es sich leicht berechnen, daß die Oberfläche eines solchen Körpers rund 28 Quadrakilometer oder 28 000 000 Qudratmeter umfaßt. Auf einem Quadratmeter können 7 Menschen stehen. Auf 28 Millionen Quadratmetern haben also 196 Millionen Menschen, das ist etwa die ganze Bevölkerung der Sowjetunion, Platz.

Der Sand, auf den wir treten, führt uns ebenfalls in das Reich der Zahlengiganten. Jede Handvoll feinen Sandes enthält nicht weniger einzelner Sandkörnchen, als die ganze Sowjetunion Einwohner zählt. Nicht umsonst hat sich seit uralten Zeiten für eine große Menge der Ausdruck „wie Sand am Meer" eingebürgert. Die Alten haben übrigens den Sand hinsichtlich seiner Menge unterschätzt, indem sie die Zahl der Sandkörnchen derjenigen der Sterne gleichsetzten. Im Altertum gab es keine Fernrohre, und mit dem bloßen Auge

sehen wir am Himmel im ganzen etwa 3500 Sterne (von einer Halbkugel). Der Sand am Meeresstrande ist um Millionen Male zahlreicher, als es die Sterne sind, die wir ohne Fernrohr sehen können.

Ein ungeheurer Zahlengigant verbirgt sich in der Luft, die wir atmen. Jeder Kubikmeter Luft, jeder Fingerhut enthält etwa 27 Trillionen (das ist eine 27 mit 18 Nullen) winziger Teilchen, die man „Moleküle" nennt.

Es ist unmöglich, sich auch nur vorzustellen, wie große diese Zahl ist. Wenn es ebenso viele Menschen gäbe, würde der Platz auf unserem Planeten für sie buchstäblich nicht ausreichen. In der Tat: die Oberfläche der Erdkugel umfaßt unter Einbezug aller Erdteile und Ozeane rund 500 Millionen Qudratkilometer oder

500 000 000 000 000 Quadratmeter.

Wenn wir 27 Trillionen durch diese Zahl dividieren, kommen wir auf 54000. Dies bedeutet, daß auf jeden Quadratmeter der Erdoberfläche mehr als 50000 Menschen kommen würden!

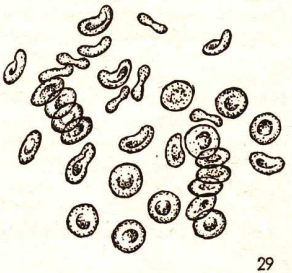
Und macht ihr euch eine Vorstellung davon, welchen Raum eine solche Menschenmenge ausfüllen würde? Da ein menschlicher Körper im Durchschnitt etwa 50 Liter verdrängt, das heißt einen Raum von $^1/_{20}$ Kubikmeter ausfüllt, würden 27 Trillionen Menschen einen Raum von nicht weniger als 1350 Millionen Kubikkilometer in Anspruch nehmen.

Vergleichen wir ihn mit dem Rauminhalt aller Ozeane. Ihre Oberfläche beträgt rund 360 Millionen Quadratkilometer. Die mittlere Tiefe beträgt etwa 4 km; demnach füllen die Ozeane einen Raum aus, der

$360\,000\,000 \cdot 4 = 1440$ Millionen Kubikkilometer

umfaßt und annähernd dem Raum entspricht, den 27 Trillionen menschlicher Körper beanspruchen würden. Eine Bevölkerung von dieser Zahl könnte folglich die Tiefen sämtlicher Ozeane und Meere der Erdkugel bis obenhin ausfüllen. Der gesamte Rauminhalt der 2000 Millionen (2 Milliarden) Menschen, die tatsächlich zur Zeit auf der Erde leben, ist dagegen wirklich bescheiden, nämlich 0,1 Kubikkilometer.

Wie wir bereits erwähnt haben, gibt es Zahlenriesen auch im menschlichen Körper. Als Beispiel mag unser Blut dienen. Wenn wir einen Blutstropfen unter dem Mikroskop betrachten, entdecken wir, daß er aus einer Unmenge winziger roter Körperchen besteht, die dem Blut auch seine Farbe geben. Jedes dieser „roten Blutkörperchen" hat die Form eines winzigen, in der Mitte eingedrückten Kissens (siehe Zeichnung). Beim Menschen haben sie alle ungefähr die gleiche



Größe: etwa 0,007 mm im Durchmesser und 0,002 mm Dicke. Dafür ist ihre Anzahl riesig groß. 5 Millionen von ihnen sind in einem winzigen Blutstropfen von einem Kubikmillimeter enthalten. Wie viele solcher Blutkörperchen enthält unser Körper im ganzen? Die Literzahl der im menschlichen Körper enthaltenen Blutmenge ist etwa vierzehnmal kleiner als sein Gewicht in Kilogramm ausmacht. Wenn du 40 kg wiegst, beträgt die Blutmenge in deinem Körper rund 3 Liter oder 3000000 Kubikmillimeter. Da jeder Kubikmillimeter bis zu 5 Millionen roter Blutkörperchen enthält, beläuft sich deren Gesamtzahl in deinem Blut auf

$$5000000 \cdot 3000000 = 15000000000000.$$

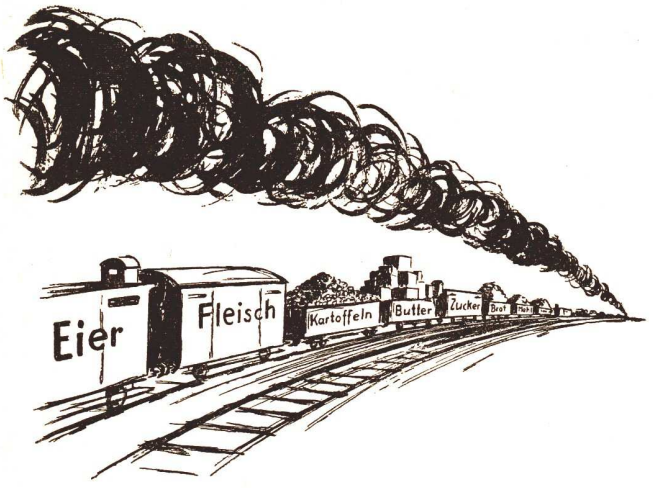
15 Billionen Blutkörperchen! Über welch eine Entfernung würden sich diese winzig kleinen Körperchen erstrecken, wenn man sie in einer Reihe aneinanderfügen wollte? Es läßt sich leicht errechnen, daß eine solche Reihe 105000 km lang wäre. Über mehr als hunderttausend Kilometer würde sich ein Faden aus roten Körperchen deines Blutes hinziehen. Mit ihm könnte man die Erdkugel am Äquator

$$100000 : 40000 = 2{,}5 \text{ mal}$$

umspannen; mit einem Faden aus den Blutkörperchen eines erwachsenen Menschen wäre es dreimal möglich.

Wir wollen uns darüber klarwerden, welche Bedeutung eine derartige Kleinheit der Blutkörperchen auf unseren Organismus hat. Diese Körperchen sind dazu bestimmt, unseren ganzen Körper mit Sauerstoff zu durchsetzen. Sie nehmen den Sauerstoff auf, wenn sie die Lungen passieren, und stoßen ihn wieder ab, wenn sie durch die Zirkulation des Blutes in die Gewebe unseres Körpers bis zu den von den Lungen entferntesten Winkeln getragen werden. Gerade die Winzigkeit der Blutkörperchen erleichtert ihnen diese Aufgabe; denn je kleiner sie sind, um so mehr vergrößert sich ihre Oberfläche, und nur mit dieser sind sie imstande, den Sauerstoff aufzunehmen und abzustoßen. Eine Berechnung ergibt, daß die gesamte Oberfläche der Blutkörperchen die Oberfläche des menschlichen Körpers um ein Mehrfaches übersteigt und 1200 Quadratmeter beträgt. Das entspricht der Fläche eines großen Gemüsegartens von 40 m Länge und 30 m Breite. Nun werdet ihr begreifen, welch große Bedeutung es für das Leben des Organismus hat, daß die Blutkörperchen in so viele kleine Teilchen zerlegt sind: sie sind dadurch imstande, den aufgenommenen Sauerstoff über Flächen abzustoßen, die tausendmal größer sind als die Oberfläche unseres Körpers.

Ein Zahlenriese wäre gerechterweise auch das Resultat zu nennen, auf das wir kommen würden, wenn wir die Menge der verschiedenen Nahrungsmittel errechnen wollten, die der Mensch durchschnittlich im Laufe eines siebzigjährigen Lebens zu sich nimmt und verdaut. Ein ganzer Eisenbahnzug wäre erforderlich, um all die Tonnen Wasser, Brot, Fleisch, Kartoffeln, Gemüse und Obst, Tausende von Eiern, Tausende Liter Milch zu transportieren, die der Mensch wäh-



rend seines Lebens aufißt und austrinkt. Die Zeichnung veranschaulicht diese Mengen, deren Gewicht dasjenige des menschlichen Körpers tausendfach übertrifft. Beim Anblick dieses Bildes vermag man kaum zu glauben, daß der Mensch einen solchen Giganten bewältigen kann, indem er, wenn auch nicht auf einmal, buchstäblich die Fracht eines langen Güterzuges verschluckt.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Ein vorteilhaftes Geschäft 3

2. Stadtgerüchte 7

3. Eine Lawine billiger Fahrräder 10

4. Eine „fürstliche" Belohnung 13

5. Die Legende vom Schachbrett 18

6. Schnelle Vermehrung 23

7. Zahlenriesen um und in uns 27

UNSERE WELT

GRUPPE 1

- Märchen und Geschichten
- Fahrten und Abenteuer
- Menschen und Tiere
- Singen und Musizieren
- Aus fernen Ländern
- Dichtung und Wahrheit
- Unsere Schule
- Bilder und Bauten
- Wir diskutieren
- Für die gerechte Sache
- Zeitgenossen erzählen
- Der Vorhang geht auf
- Spiel und Sport
- Unsere Heimat

GRUPPE 2

- Mathematik
- Physik und Geophysik
- Chemie
- Biologie
- Geographie und Geologie
- Astronomie und Astrophysik
- Aus der Geschichte der Naturwissenschaften

GRUPPE 3

- Wie wir uns nähren und kleiden
- In Werkstatt und Betrieb
- Mit Werkzeug und Maschine
- Wir bauen Häuser, Dörfer, Städte
- Auf Wegen, Straßen, Brücken
- Wie der Mensch die Erde verändert
- Aus der Geschichte der Arbeit und Technik