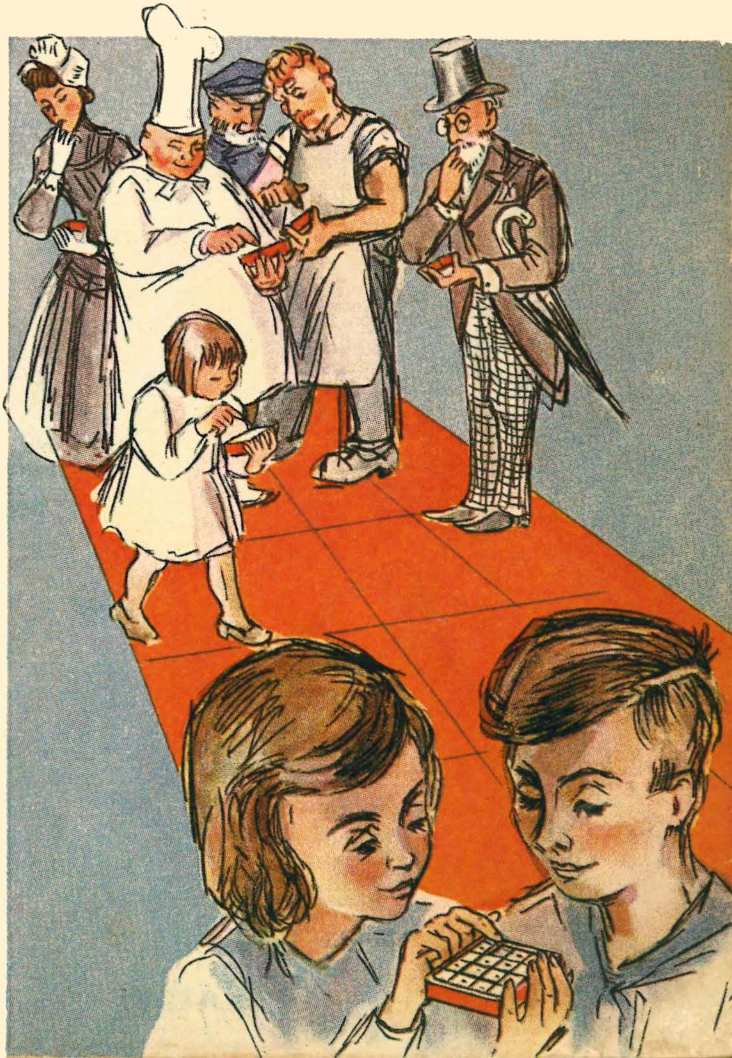
UNSERE WELT
GRUPPE 2

MATHEMATIK

VON DER NATUR UND
IHREN GESETZEN

MATHEMATIK IM SPIEL

VON J. I. PERELMAN



der kinderbuchverlag
BERLIN

13506 ● ●

J. I. PERELMAN

MATHEMATIK IM SPIEL

der kinderbuchverlag Berlin

Aus dem Russischen übersetzt von Hermann Asemissen
Für die deutsche Ausgabe bearbeitet
Entnommen dem Werk »Живая Математика« von Я. И. Перельман

Umschlagbild: Rudolf Meißner. Illustrationen: Frans Haacken und Edgar Leidreiter

 Genehmigungs-Nummer 376/53/50

Satz und Druck: (III/9/1) Sachsenverlag, Druckerei- und Verlags-Gesellschaft mbH, Dresden N 23, Riesaer Straße 32. 2670

Preis: 0,60 DM
Bestellnummer 13506. 1.—20. Tausend 1951. Für Leser von 12 Jahren an

Domino

Domino haben die meisten von euch wohl schon gespielt. Für diejenigen, die es nicht kennen, wollen wir es kurz erklären. Es besteht aus rechteckigen Steinen (ihr könnt euch solche Täfelchen selbst aus Pappe anfertigen), die durch einen Strich in zwei quadratische Hälften geteilt sind. Auf jeder Steinhälfte sind „Augen" (gewöhnlich von 0 bis 6). Ein „Satz" besteht aus 28 Steinen, von $\boxed{0 \mid 0}$, $\boxed{0 \mid 1}$ ...., bis $\boxed{6 \mid 6}$. Die Steine werden gleichmäßig unter die Mitspieler verteilt, oder man läßt eine Anzahl Steine in der Mitte verdeckt zum „Kaufen" liegen, wie beim Quartett. Aus den Steinen wird eine Kette von beliebiger Form gebildet, indem die Spieler der Reihe nach passende Steine so anlegen, daß die aneinanderstoßenden Hälften zweier Steine stets die gleiche Augenzahl aufweisen.
Heute wollen wir dieses Spiel einmal als Denkaufgabe betrachten.

1. Eine Kette aus 28 Steinen.

Wie ist es möglich, 28 Dominosteine unter Einhaltung der Spielregel zu einer ununterbrochenen Kette aneinanderzulegen?

2. Anfang und Ende der Kette.

Nachdem die 28 Dominosteine zu einer Kette ausgelegt waren, ergaben sich an dem einen Ende der Kette 5 Augen.
Wieviel Augen wies das andere Ende auf?

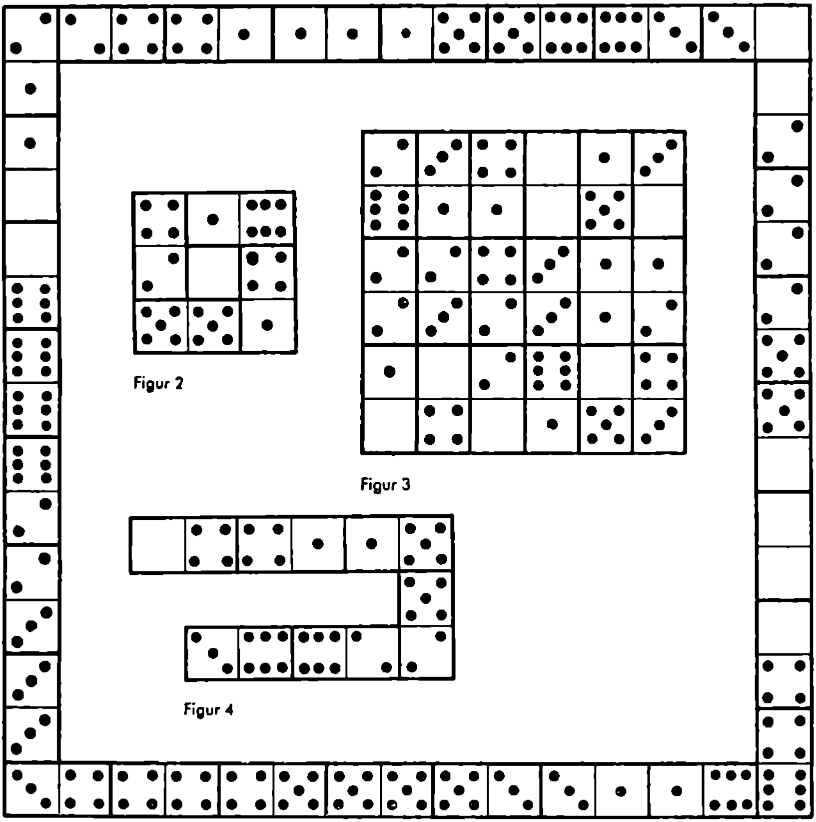
3. Ein Dominokunststück.

Ein Mitspieler nimmt einen der Steine und fordert euch auf, aus den übrigen 27 Steinen eine ununterbrochene Kette zu bilden. Er behauptet, daß dies in jedem Falle möglich sei, unabhängig davon, welcher Stein herausgenommen wird. Dann verläßt er das Zimmer, um nicht zu sehen, wie ihr die Kette zusammenstellt.

Ihr geht ans Werk und stellt fest, daß euer Mitspieler recht hat: Die 27 Steine ließen sich zu einer Kette zusammenlegen. Noch erstaunlicher ist es, daß er euch vom anderen Zimmer aus, also ohne die Kette zu sehen, zuruft, wieviel Augen sich an ihren Enden befinden.

Wie kann er das wissen? Und aus welchem Grunde ist er überzeugt, daß sich aus allen 27 Dominosteinen eine ununterbrochene Kette zusammenstellen läßt?

Figur 1



Figur 2

Figur 3

Figur 4

4. Der Rahmen.

Figur 1 stellt einen Rahmen dar, der unter Beachtung der Spielregel aus Dominosteinen gebildet ist. Die Seiten des Rahmens sind von gleicher Länge, enthalten aber nicht die gleiche Augensumme: Die obere und linke Seite weisen je 44 Augen auf, die beiden anderen Seiten 59 und 32 Augen.
Könnt ihr einen quadratischen Rahmen zusammenstellen, bei dem jede der Seiten die gleiche Summe von 44 Augen enthält?

5. Sieben Quadrate.

Man kann vier Dominosteine auswählen, die sich zu einem kleinen Quadrat mit der gleichen Augensumme auf jeder Seite zusammenstellen lassen. Eine entsprechende Darstellung seht ihr in Figur 2: Jede der Seiten weist 11 Augen auf.
Könnt ihr aus einem vollen Satz von Dominosteinen gleichzeitig sieben solcher Quadrate bilden? Es ist nicht erforderlich, daß die Augensumme einer Seite bei allen Quadraten dieselbe ist; zu beachten ist nur, daß bei jedem einzelnen Quadrat alle vier Seiten die gleiche Augensumme aufweisen müssen.

6. Magische Quadrate aus Dominosteinen.

Figur 3 stellt ein Quadrat aus 18 Dominosteinen dar, das dadurch bemerkenswert ist, daß jede waagerechte Reihe, jede senkrechte Reihe und jede diagonale Reihe die gleiche Augensumme, nämlich 13, ergibt. Derartige Quadrate hat man von jeher als „magische Quadrate" bezeichnet.
Versucht einmal, einige weitere aus 18 Steinen bestehende Quadrate dieser Art zusammenzustellen, aber mit einer anderen Augensumme. 13 ist die niedrigste, 23 die höchste Augensumme, die in den Reihen eines magischen Quadrats aus 18 Steinen möglich ist.

7. Arithmetische Reihe aus Dominosteinen.

Figur 4 zeigt 12 Steine, die nach der Spielregel aneinandergefügt sind und sich dadurch auszeichnen, daß die Summe der Augen (auf beiden Hälften des Steins) bei jedem folgenden Stein um 1 Auge wächst. Angefangen mit 4, besteht die Reihe aus folgenden Augenzahlen:

4; 5; 6; 7; 8; 9.

Eine solche Zahlenfolge, die stets um die gleiche Einerzahl ansteigt (oder absinkt), wird „arithmetische Reihe" genannt. In unserer Reihe steigert sich die Augenzahl jeweils um 1; aber auch jede beliebige andere Steigerung ist möglich.
Die Aufgabe besteht darin, noch einige andere arithmetische Reihen aus 6 Steinen zu bilden.

Das Fünfzehnerspiel

Das allgemein bekannte Kästchen mit den 15 numerierten quadratförmigen Steinen hat, was mancher Spieler gar nicht vermutet, eine interessante Geschichte. Wir berichten darüber nach dem Buch des deutschen Mathematikers W. Ahrens, „Mathematische Unterhaltungen und Spiele", einem Erforscher des Spiels.

Vor etwa einem halben Jahrhundert — Ende der siebziger Jahre — kam in den Vereinigten Staaten von Amerika das „Fünfzehnerspiel" (auch Kästchenspiel, im Russischen „Taken" genannt) auf; es fand schnell Verbreitung und wuchs sich dank der unzählbaren Menge eifriger Spieler zu einer förmlichen Volksleidenschaft aus. Dasselbe konnte man diesseits des Ozeans, in Europa, beobachten. Da sah man selbst in den Pferdebahnwagen die kleinen Kästchen mit den 15 Holzklötzchen und unruhige Hände, die darin hin und her schoben. Die Inhaber von Büros und Läden gerieten durch die Spielleidenschaft ihrer Angestellten schier in Verzweiflung und verboten durch Anschläge das Spielen während der Geschäftszeit aufs strengste. Besitzer von Vergnügungsstätten nutzten die Situation geschickt aus und veranstalteten große Spielturniere. Selbst in die feierlichen Säle des deutschen Reichstags drang das Spiel ein. „Ich sehe noch im Reichstag alte Herren vor mir, die starr auf das in der Hand gehaltene Viereck hinblicken", erinnert sich der bekannte Mathematiker und Geograph Siegmund Günther, der in jenen Jahren der Spielepidemie, nämlich 1878 bis 1884, Reichstagsabgeordneter war.
In Paris fand das Spiel auf den Boulevards unter freiem Himmel reißenden Absatz und verbreitete sich von der Hauptstadt aus schnell über das ganze Land. Bald war selbst in der Provinz kein noch so einsames Landhaus mehr, in dem nicht in irgendeinem Winkel sich das unvermeidliche „Taquin" (wie es französisch heißt) befand, wie eine Spinne der Opfer lauernd, die es in seine Netze verstricken könnte, schrieb ein französischer Schriftsteller.
Im Jahre 1880 hatte das Spielfieber offensichtlich seinen Höhepunkt erreicht. Doch bald darauf wurde dieser Dämon, der so viele Menschen gequält und tyrannisiert hatte, gestürzt; die Mathematik war es, die ihn überwunden hatte. Die mathematische Untersuchung des Spiels ergab, daß von den

vielen Aufgaben, die gestellt werden können, nur gerade die eine Hälfte lösbar ist, während die andere durch kein auch noch so anhaltendes Sinnen und Brüten bezwungen werden kann.

Jetzt war es offenbar, warum so manche Aufgabe auch den hartnäckigsten Bemühungen hatte trotzen können. Jetzt war es klar, warum die Veranstalter von Turnieren für die Lösung gewisser Aufgaben hohe Preise auszulosen hatten wagen dürfen, ohne daß auch nur einer der zahlreich herbeigeströmten Preisbewerber die Siegespalme zu erringen vermocht hatte. In dieser Beziehung schoß der Erfinder des Spiels den Vogel ab, indem er das Sonntagsblatt einer New Yorker Zeitung veranlaßte, einen Preis von 1000 Dollar für die Lösung einer bestimmten Puzzle-Aufgabe auszusetzen. Als der Verleger zauderte, erklärte sich der Erfinder ohne weiteres bereit, den genannten Betrag aus seiner Tasche zu hinterlegen. Die Aufgabe gehörte natürlich zu den unlösbaren, und der Preis fiel daher niemandem zu. Der Name des Erfinders ist Sam Loyd. Er ist in weitesten Kreisen als Verfasser geistreicher Denkaufgaben und zahlreicher Kunststücke bekannt geworden. Bemerkenswert ist, daß es ihm nicht gelang, in Amerika ein Patent auf das von ihm erfundene Spiel zu erhalten. Den Vorschriften gemäß war er verpflichtet, ein „Arbeitsmodell" für die Probepartie vorzulegen; er unterbreitete dem Beamten des Patentamtes eine Aufgabe, und als dieser sich erkundigte, ob sie lösbar sei, mußte der Erfinder zugeben, daß dies mathematisch nicht möglich ist. „In diesem Falle", lautete die Entgegnung, „kann von einem Arbeitsmodell nicht die Rede sein, und wenn kein Arbeitsmodell vorliegt, gibt es auch kein Patent." Loyd gab sich mit diesem Bescheid zufrieden, wäre aber wahrscheinlich hartnäckiger gewesen, wenn er den unerhörten Erfolg seiner Erfindung vorausgesehen hätte. (Diese Episode wurde von Mark Twain für seinen Roman „Der amerikanische Prätendent" benutzt.)

Hier sei ein eigener Bericht des Erfinders über einige Einzelheiten aus der Geschichte des Spiels mitgeteilt:

Die ältesten Leute, die im Reiche des Scharfsinns zu Hause sind, schreibt Loyd, erinnern sich noch, daß ich Anfang der siebziger Jahre die ganze Welt dazu brachte, sich über einem Kästchen mit verschiebbaren Steinen den Kopf zu zerbrechen, das unter dem Namen „Fünfzehnerspiel" bekannt geworden ist. In dem quadratischen Kästchen waren 15 Steine in der richtigen Reihenfolge untergebracht, bis auf die Steine 14 und 15, deren Plätze (wie aus der beiliegenden Abbildung ersichtlich) vertauscht waren (Figur 5 und 6). Die Aufgabe bestand darin, die Steine nacheinander zu verschieben und die normale Stellung herzustellen, in der auch die Steine 14 und 15 ihren richtigen Platz einnehmen.

Die für die erste richtige Lösung dieser Aufgabe ausgesetzte Prämie von 1000 Dollar hat niemand gewonnen, obwohl sich alle unermüdlich mit der Aufgabe beschäftigten. Man erzählte von Kaufleuten, die darüber das Öffnen ihrer Geschäfte vergaßen, von ehrbaren Beamten, die ganze Nächte unter einer Straßenlaterne standen und auf der Suche nach der richtigen Lösung waren. Niemand wollte seine Bemühungen aufgeben, denn jeder war davon überzeugt, daß ihm schließlich der Erfolg beschieden sein würde. Steuerleute, sagt man, die vom Spiel gebannt waren, ließen ihre Schiffe stranden, Zugführer fuhren mit den Zügen über die Stationen hinaus, Farmer ließen ihre Pflüge im Stich.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Figur 5

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Figur 6

Wir wollen den Leser jetzt mit der Theorie dieses Spiels bekannt machen. In ihrer Gesamtheit ist sie sehr kompliziert und hängt eng mit einem Gebiet der Algebra (der Theorie der Determinanten) zusammen. Wir beschränken uns auf einige von W. Ahrens entwickelte Gedanken.

Die Aufgabe besteht gewöhnlich darin, daß die 15 Steine aus einer beliebigen Anfangsstellung durch aufeinanderfolgende Verschiebungen, die durch das Vorhandensein eines freien Feldes möglich sind, in die normale Stellung gebracht werden sollen, das heißt in eine solche, in der die Steine in der Reihenfolge ihrer Ziffern liegen: in der oberen linken Ecke 1, rechts davon 2, dann 3 und in der oberen rechten Ecke 4; in der nächsten Reihe von links nach rechts 5, 6, 7, 8 und so fort. Eine solche normale Stellung zeigt Figur 5.
Stellt euch eine Stellung vor, in der die Steine in buntem Durcheinander gesetzt sind. Durch eine Reihe von Verschiebungen ist es in jedem Falle möglich, den Stein 1 auf den Platz zu bringen, den er in der Abbildung einnimmt. Ebenso besteht die Möglichkeit, ohne den Stein 1 zu verschieben, den Stein 2 auf das Feld rechts daneben zu bringen. Dann kann man, ohne die Steine 1 und 2 zu verschieben, die Steine 3 und 4 auf ihre normalen Plätze bringen. Wenn sie sich zufällig nicht in den beiden letzten senkrechten Reihen befinden, so lassen sie sich leicht in diesen Bereich bringen, so daß man durch eine Reihe von Verschiebungen das gewünschte Ergebnis erreicht. Nun ist die obere Reihe 1, 2, 3, 4 in Ordnung gebracht, und bei den weiteren Verschiebungen der Steine lassen wir sie unberührt. Auf dieselbe Weise bemühen wir uns, auch die zweite Reihe 5, 6, 7, 8 in Ordnung zu bringen. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß dies in jedem Falle erreichbar ist.

Sodann ist es erforderlich, in den letzten beiden Reihen die Steine 9 und 13 in die richtige Stellung zu bringen; auch dies ist in jedem Falle möglich. Von den jetzt ordnungsmäßig gesetzten Steinen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 13 wird in der Folge keiner mehr verschoben. Es bleibt der kleine Abschnitt aus 6 Feldern übrig, von denen das eine frei ist und die anderen von den Steinen 10, 11, 12, 14 und 15 in willkürlicher Anordnung eingenommen werden. Innerhalb der Grenzen dieser sechs Felder lassen sich die Steine 10, 11, 12 stets auf die normalen Plätze bringen. Nachdem dies erreicht ist, werden die Steine 14 und 15 in der letzten Reihe entweder in der normalen oder in der umgekehrten Reihenfolge liegen (Figur 6). Auf diesem Wege, den ihr leicht in der Praxis nachprüfen könnt, gelangen wir zu folgendem Ergebnis:
Jede beliebige Anfangsstellung kann entweder in die Anordnung von Figur 5 (Stellung I) oder in diejenige der Zeichnung von Figur 6 (Stellung II) gebracht werden.
Wenn eine beliebige Stellung, die wir der Einfachheit halber mit dem Buchstaben S bezeichnen wollen, in die Stellung I umgewandelt werden kann, dann muß es umgekehrt auch möglich sein, die Stellung I in die Stellung S umzuwandeln. Alle Züge lassen sich ja rückgängig machen: wenn wir zum Beispiel in Stellung I den Stein 12 auf das freie Feld schieben können, so läßt sich dieser Zug sofort wieder durch eine umgekehrte Bewegung zurücknehmen.
Wir haben somit zwei Gruppen von Aufstellungen: die Stellungen der einen Gruppe, die sich in die normale Stellung I, und diejenigen der anderen Gruppe, die sich in die Stellung II umändern lassen. Umgekehrt kann man aus der normalen Stellung zu einer beliebigen Stellung der ersten Gruppe und aus der Stellung II zu einer beliebigen Stellung der zweiten Gruppe gelangen. Und endlich ist es möglich, zwei verschiedene Stellungen, die beide zu ein und derselben Gruppe gehören, ineinander umzuwandeln.
Kann man nicht noch weitergehen und die Stellungen I und II miteinander vereinigen? Es läßt sich exakt nachweisen (auf Einzelheiten wollen wir dabei nicht eingehen), daß sich diese Stellungen auch durch eine noch so große Zahl von Zügen nicht eine in die andere umwandeln lassen. Die ungeheure Anzahl verschiedenartiger Stellungen zerfällt daher in zwei unterschiedliche

1	2	3	4
5	6	7	9
8	10	14	12
13	11	15	

Figur 7

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Figur 8

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Figur 9

Gruppen: erstens in solche, die in die normale Stellung I verwandelt werden können und somit eine lösbare Aufgabe darstellen, und zweitens in solche, die in die Stellung II verwandelt werden können und sich folglich unter keinen Umständen in die normale Stellung bringen lassen. Um Stellungen der letzteren Art handelte es sich, wenn für die Lösung der Aufgabe riesenhafte Prämien ausgesetzt wurden.

Wie kann man feststellen, ob die jeweils vorliegende Stellung zu der ersten oder zweiten Gruppe gehört? Ein Beispiel wird dies erklären:
Untersuchen wir einmal die Stellung, die in Figur 7 dargestellt ist.
Die erste Reihe ist in Ordnung, und das gleiche trifft auch für die zweite Reihe bis auf den letzten Stein (9) zu. Dieser Stein nimmt das Feld ein, auf dem sich bei einer normalen Anordnung der Stein 8 zu befinden hat. Der Stein 9 steht also v o r dem Stein 8; eine solche Abweichung von der normalen Ordnung wird „Unregelmäßigkeit" genannt. Mit Bezug auf den Stein 9 sagen wir, daß hier die erste Unregelmäßigkeit vorliegt. Beim Durchsehen der weiteren Steine entdecken wir eine „Abweichung" beim Stein 14; er steht drei Felder vor dem Platz, auf den er normalerweise hingehört, und steht vor den Steinen 12, 13, 11. Hier haben wir drei Unregelmäßigkeiten (14 vor 12, 14 vor 13, 14 vor 11). Im ganzen haben wir nun schon 1+3=4 Unregelmäßigkeiten festgestellt. Weiter: Der Stein 12 liegt vor dem Stein 11 und der Stein 13 ebenfalls vor dem Stein 11. Das ergibt nochmals 2 Unregelmäßigkeiten. Somit liegen 6 Unregelmäßigkeiten vor. In ähnlicher Weise wird für jede Aufstellunng die Gesamtzahl der Unregelmäßigkeiten ermittelt, nachdem man vorher das letzte Feld in der unteren rechten Ecke freigemacht hat. Wenn es sich bei der Gesamtzahl der Unregelmäßigkeiten wie in dem eben untersuchten Fall um eine g e r a d e Zahl handelt, dann kann die vorliegende Aufstellung in die normale Stellung umgewandelt werden; mit anderen Worten, die Aufgabe gehört zu den lösbaren. Wenn hingegen eine u n g e r a d e Zahl von Unregelmäßigkeiten festgestellt wird, dann gehört die Stellung in die zweite Gruppe, das heißt zu den unlösbaren Aufgaben (null Unregelmäßigkeiten gelten als gerade Zahl).

Nachdem die Mathematik einmal Klarheit geschaffen hat, ist die damalige fieberhafte Leidenschaft für dieses Spiel ganz unvorstellbar. Die Mathematiker haben eine erschöpfende Theorie des Spiels aufgestellt, eine Theorie, die in keinem Punkt einen Zweifel hinterläßt. Der Ausgang des Spiels hängt nicht wie bei anderen Spielen von irgendwelchen Zufällen oder von der Erfindungsgabe der Spieler ab, sondern von rein mathematischen Gegebenheiten, die ihn mit unbedingter Genauigkeit vorausbestimmen.

Wir gehen nun zu den Denkaufgaben auf diesem Gebiet über. Nachstehend ein paar l ö s b a r e, vom Erfinder des Spiels erdachte Aufgaben.

8. Erste Aufgabe von Loyd.

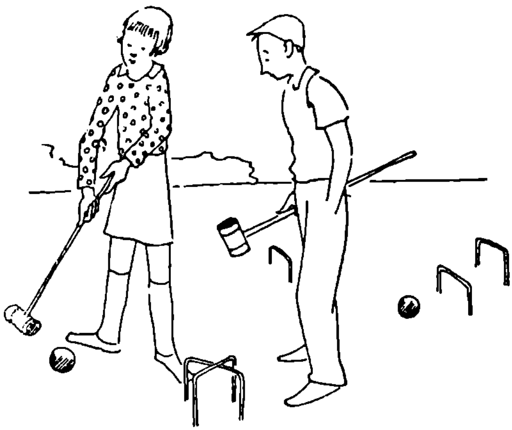
Ausgehend von der in Figur 5 gezeigten Stellung bringen wir die Steine in die richtige Reihenfolge, aber mit einem freien Felde in der linken oberen Ecke (Figur 8).

9. Zweite Aufgabe von Loyd.

Ausgehend von der Stellung in Figur 5 machen wir mit dem Kästchen eine Vierteldrehung und verschieben die Steine so lange, bis sie die Stellung von Figur 9 einnehmen.

10. Dritte Aufgabe von Loyd.

Wir verschieben die Steine nach den Regeln des Spiels so, daß aus ihnen ein „magisches Quadrat" gebildet wird, in dem die Summe der waagerechten, senkrechten und diagonalen Reihen gleich 30 ist.



Krocket

Dieses Spiel werden nur wenige von euch kennen, aber das ist zur Lösung der folgenden Denkaufgaben auch gar nicht notwendig. Es genügt, wenn ihr wißt, daß Krocket ein Rasenspiel ist, bei dem es darauf ankommt, eine Holzkugel mit einem langstieligen Holzhammer so durch die in bestimmter Ordnung aufgestellten „Tore" zu schlagen, daß sie diese, ohne anzustoßen, mit einer möglichst geringen Anzahl von Schlägen durchläuft. Die Tore sind eckig oder rund gebogene Rundeisen (starker Draht), die in den Rasen gesteckt werden. In der Mitte des Spielfeldes sind zwei Tore über Kreuz aufgestellt, die „Glocke" genannt, die besonders schwierig zu passieren ist. Am Anfang und Ende des Spielfeldes steht je ein hölzerner Stab, der „Pfahl", den die Kugel berühren muß. Liegt die Kugel eines anderen Spielers an einer

Stelle des Spielfeldes, die für die eigene Kugel eine günstige Ausgangsposition für den nächsten Schlag bietet, so versucht man, diese Kugel zu treffen. Man kann dann die fremde Kugel wegschlagen und sich an ihre Stelle setzen. Das nennt man „krockieren".
Versucht nun, nachstehende fünf Aufgaben zu lösen.

11. Durchs Tor gehen oder krockieren?

Die Krockettore sind rechteckig. Sie sind doppelt so breit wie der Durchmesser der Kugel. Was ist unter diesen Umständen leichter: die Kugel von der günstigsten Stellung aus bequem und, ohne den Draht zu berühren, durchs Tor zu schlagen (der Krocketspieler nennt das „durchs Tor gehen") oder von derselben Entfernung aus eine Kugel zu krockieren?

12. Die Kugel und der Pfahl.

Der Pfahl hat unten eine Breite von 6 cm. Der Durchmesser der Kugel beträgt 10 cm. Um wievielmal leichter ist es, die Kugel zu treffen, als von derselben Entfernung aus den Pfahl zu treffen?

13. Durchs Tor oder an den Pfahl gehen?

Die Kugel ist halb so breit wie das rechteckige Tor und doppelt so breit wie der Pfahl. Was ist leichter: die Kugel von der günstigsten Stellung aus bequem durchs Tor zu schlagen oder aus derselben Entfernung den Pfahl zu treffen?

14. Durch die Glocke gehen oder krockieren?

Die Tore sind rechteckig und d r e i m a l so breit wie der Durchmesser der Kugel. Was ist leichter: die Kugel von der günstigsten Stellung aus bequem durch die Glocke zu schlagen oder aus derselben Entfernung eine Kugel zu krockieren?

15. Die unpassierbare Glocke.

Bei welchem Verhältnis zwischen der Breite rechteckiger Tore und dem Durchmesser der Kugel wird das Passieren der Glocke unmöglich?

Auflösungen der Denkaufgaben 1—15

1. Zur Vereinfachung der Aufgabe legen wir zunächst alle 7 Doppelsteine, 0-0, 1-1, 2-2 und so fort, beiseite. Es verbleiben nun 21 Steine, auf denen sich jede Augenzahl sechsmal wiederholt. Vier Augen (auf e i n e r Steinhälfte) befinden sich zum Beispiel auf folgenden 6 Steinen:

4-0, 4-1, 4-2, 4-3, 4-5, 4-6.

Jede Augenzahl wiederholt sich also, wie wir sehen, eine g e r a d e Anzahl Male. Es ist klar, daß man aus einem solchen Satz Steine mit gleicher Augenzahl so lange aneinanderfügen kann, bis der ganze Satz erschöpft ist. Sobald das getan ist und die 21 Steine in einer ununterbrochenen Reihe liegen, schieben wir zwischen die Fugen 0-0, 1-1, 2-2 und so weiter die beiseite gelegten 7 Doppelsteine ein. Somit erhalten wir eine Kette, die aus den 28 Dominosteinen unter Einhaltung der Spielregeln zusammengesetzt ist.

2. Es ist leicht nachzuweisen, daß eine aus 28 Dominosteinen gebildete Kette mit der gleichen Augenzahl enden muß, mit der sie angefangen hat. In der Tat: wenn es anders wäre, würden sich die Augenzahlen, die die Enden der Kette aufweisen, eine u n g e r a d e Anzahl Male wiederholen (im Innern der Kette liegen die Augenzahlen ja paarweise). Wir wissen jedoch, daß sich in einem kompletten Dominosatz jede Augenzahl achtmal wiederholt, also eine gerade Anzahl Male. Die in Betracht gezogene Möglichkeit, daß die Enden der Kette voneinander abweichende Augenzahlen aufweisen können, ist demnach hinfällig: die Augenzahl muß übereinstimmen. (Schlußfolgerungen solcher Art nennt man in der Mathematik „Beweise aus dem Gegenteil" oder „indirekte Beweise.")

Übrigens ergibt sich aus der soeben nachgewiesenen Eigenart der Kette folgende interessante Begleiterscheinung: eine Kette aus 28 Steinen läßt sich immer zu einem Ring zusammenschließen. Aus einem kompletten Dominosatz kann man also unter Einhaltung der Spielregeln nicht nur eine Kette mit freien Enden, sondern auch einen geschlossenen Ring bilden.

Vielleicht interessiert euch, auf wieviel verschiedene Arten eine solche Kette oder ein solcher Ring gebildet wird. Ohne auf ermüdende Einzelheiten der Berechnung einzugehen, sei hier nur gesagt, daß die Zahl der Arten, auf die eine Kette (oder ein Ring) aus 28 Steinen gebildet werden kann, riesig groß ist: über 7 Billionen. Hier die genaue Zahl:

$$7\,959\,229\,931\,520.$$

Sie stellt das Produkt nachstehender Multiplikationen dar:

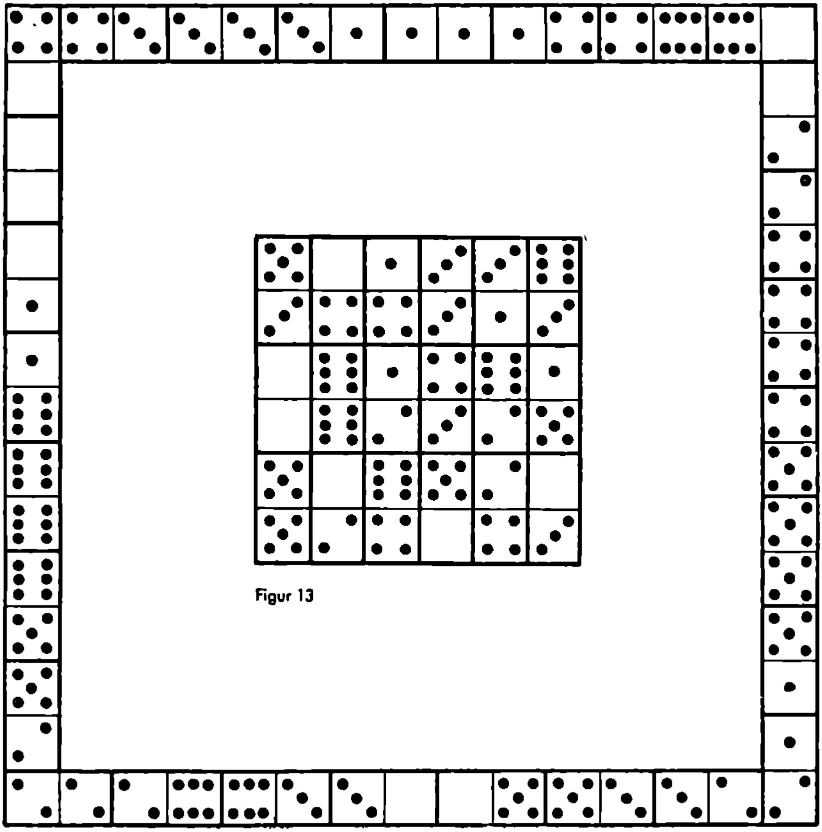
$$2^{13} \cdot 3^{8} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4231.$$

3. Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich aus dem soeben Gesagten. Wir wissen, daß sich aus 28 Steinen in jedem Falle ein geschlossener Ring bilden läßt. Wenn man also aus diesem Ring einen Stein entfernt, dann stellen erstens die restlichen 27 Steine eine ununterbrochene Kette mit freien Enden dar; zweitens wird die Augenzahl an den Enden der Kette die gleiche sein, die der herausgenommene Stein aufweist.

Wenn wir einen Dominostein wegnehmen, können wir im voraus sagen, welche Augenzahl die Enden einer aus den restlichen 27 Steinen gebildeten Kette aufweisen werden.

4. Die Summe aller Augen des gesuchten Quadrats muß $44 \cdot 4 = 176$, das heißt um 8 höher sein, als die Summe aller Augen eines kompletten Dominosatzes (168). Dies kommt natürlich daher, daß die Eckfelder des Quadrats doppelt gezählt werden. Aus dem Gesagten ergibt sich, wie groß die Summe der Augen an den Ecken ist, nämlich 8. Hierdurch wird das Herausfinden der gesuchten Stellung etwas erleichtert, obwohl es immer noch recht mühevoll ist. Die Lösung wird durch Figur 10 dargestellt.

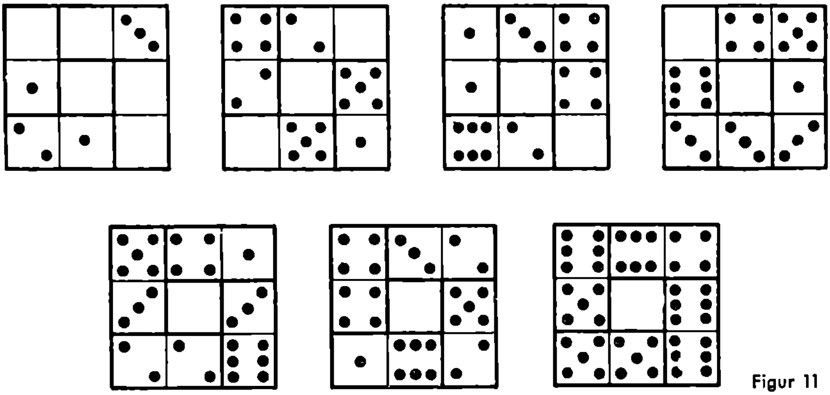
Figur 10



Figur 13

5. Aus der großen Anzahl der möglichen Lösungen führen wir hier zwei Beispiele an. Bei der ersten Lösung (Figur 11) haben wir:

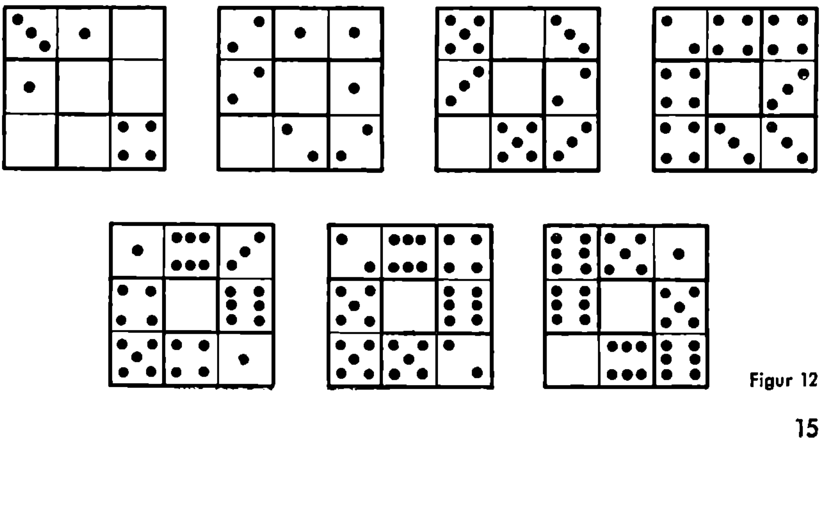
1 Quadrat mit der Augensumme 3 in jeder Reihe,
1 Quadrat mit der Augensumme 6 in jeder Reihe,
1 Quadrat mit der Augensumme 8 in jeder Reihe,
2 Quadrate mit der Augensumme 9 in jeder Reihe,
1 Quadrat mit der Augensumme 10 in jeder Reihe,
1 Quadrat mit der Augensumme 16 in jeder Reihe.



Figur 11

Bei der zweiten Lösung (Figur 12):

2 Quadrate mit der Augensumme 4,
1 Quadrat mit der Augensumme 8,
2 Quadrate mit der Augensumme 10,
2 Quadrate mit der Augensumme 12.



Figur 12

6. Figur 13 zeigt das Muster eines magischen Quadrats mit der Augensumme 18 in jeder Reihe.

7. Hier als Beispiel zwei arithmetische Reihen, bei denen die Steigerung 2 Punkte beträgt:

a) 0-0; 0-2; 0-4; 0-6; 4-4 (oder 3-5); 5-5 (oder 4-6).

b) 0-1; 0-3 (oder 1-2); 0-5 (oder 2-3); 1-6 (oder 3-4); 3-6 (oder 4-5); 5-6.

Im ganzen lassen sich aus 6 Steinen 23 verschiedene arithmetische Reihen bilden. Sie fangen mit den folgenden Steinen an.

a) Bei der Steigerung um 1 Punkt:
0-0, 0-1 (1-0), 0-2 (1-1, 2-0), 0-3 (1-2, 2-1, 3-0), 0-4 (1-3, 2-2, 3-1), 1-4 (2-3, 3-2), 2-4 (4-2...), 3-4 (4-3...), 3-5...

b) Bei der Steigerung um 2 Punkte:
0-0, 0-2...; 0-1, 0-3...

8. Die von der Aufgabe verlangte Anordnung kann von der Anfangsstellung aus durch folgende 44 Züge erreicht werden:

14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7,
4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9,
12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13,
9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14,
10, 6, 2, 1.

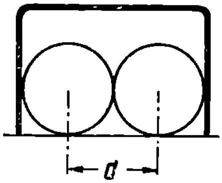
9. Die verlangte Stellung wird durch folgende 39 Züge erreicht:

14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10, 13, 9,
5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13,
9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 14,
13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12.

10. Ein magisches Quadrat mit der Augensumme 30 ergibt sich nach folgenden Zügen:

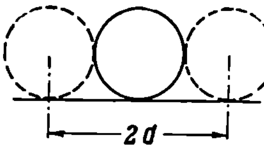
4, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15,
4, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 4, 12, 8,
4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6,
5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13,
14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.

Solange wir uns mit den Aufgaben befaßten, die sich auf das Domino- und Fünfzehnerspiel bezogen, hielten wir uns in den Grenzen der Arithmetik. Wenn wir jetzt zu den Aufgaben auf dem Krocketplatz übergehen, berühren wir zum Teil das Gebiet der Geometrie.



Figur 14

Figur 15



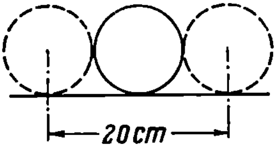
11. Selbst ein geübter Spieler wird vermutlich erklären, daß es unter den angegebenen Bedingungen leichter sei, durchs Tor zu gehen, als zu krokkieren, da ja das Tor doppelt so breit ist wie die Kugel. Diese Annahme ist jedoch irrig: Das Tor ist zwar breiter als der Durchmesser der Kugel, aber der glatte Durchgang durch das Tor ist für die Kugel halb so breit wie das Ziel für das Krockieren.

Betrachtet Figur 14, und das Gesagte wird euch einleuchten. Der Mittelpunkt der Kugel muß von dem Draht des Tors mindestens so weit entfernt sein, wie ihr Radius beträgt, da sie sonst den Draht berühren würde. Für den Mittelpunkt der Kugel bleibt folglich ein Ziel, das um zwei Radien geringer ist als die Breite des Tors. Ihr seht, zu den Bedingungen unserer Aufgabe gehört, daß die Breite des Ziels beim Passieren des Tors von der günstigsten Stellung aus gleich dem Durchmesser der Kugel ist.

Prüfen wir nun, welche Breite das Ziel für den Mittelpunkt der rollenden Kugel beim Krockieren hat. Die Kugel wird mit Sicherheit getroffen, wenn, wie in Figur 15, der Mittelpunkt der krockierenden Kugel von dem Mittelpunkt der Kugel, die man treffen (krockieren) will, um weniger als einen Kugelradius entfernt ist. Die Breite des Ziels entspricht also in diesem Falle dem doppelten Durchmesser der Kugel.

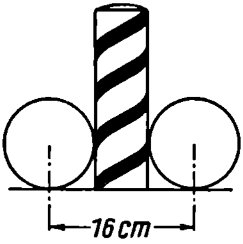
Im Gegensatz zu der Meinung der Spieler ist es demnach unter den gegebenen Umständen doppelt so leicht, die Kugel zu treffen, als von der günstigsten Stellung aus durchs Tor zu gehen.

12. Nach dem vorstehend Gesagten bedarf diese Aufgabe keiner weitläufigen Erläuterung. Man sieht ohne weiteres (Figur 16), daß die Breite des Ziels beim Krockieren dem doppelten Durchmesser der Kugel, das sind 20 cm, entspricht. Beim Zielen auf den Pfahl entspricht die Zielscheibe dagegen dem Durchmesser der Kugel plus demjenigen des Pfahls, das sind 16 cm (Figur 17). Das Krockieren ist also um 20:16 = 1¼mal (also um 25%) leichter als das Treffen des Pfahls. Von den Spielern wird jedoch die Chance beim Krokkieren im Vergleich zu derjenigen für das Treffen des Pfahls in der Regel sehr überschätzt.



Figur 16

Figur 17



13. Mancher Spieler wird so denken: Da das Tor doppelt so breit ist wie die Kugel, ist das Ziel für das glatte Durchlaufen des Tors viermal so breit als für das Treffen des Pfahls. Belehrt durch die vorangegangenen Aufgaben, werdet ihr einen solchen Fehler nicht machen. Ihr werdet euch sagen, daß das Ziel beim Angehen des Pfahls um $1\frac{1}{2}$ mal breiter ist als beim Passieren des Tors von der günstigsten Stellung aus. Das erkennt man deutlich an Figur 18 und 19. Wenn das Tor nicht rechteckig, sondern gewölbt wäre, würde der Durchgang für die Kugel noch schmäler sein. Ihr könnt euch beim Betrachten der Figur 20 leicht davon überzeugen.

14. Aus Figur 21 und 22 ist ersichtlich, daß unter den Bedingungen, die wir in der Aufgabe stellten, für den Durchgang des Mittelpunkts der Kugel nur ein recht schmaler Zwischenraum *(a)* übriggeblieben ist. Wer mit der Geometrie vertraut ist, weiß, daß die Diagonale *AC* eines Quadrats knapp anderthalbmal so lang ist wie die Seite *AB*. (Der genaue Wert ist $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$)

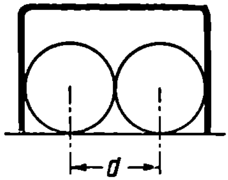
Wenn das Tor $3d$ breit ist (d = Durchmesser der Kugel), dann beträgt *AB* rund gerechnet

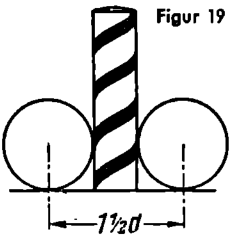
$$3d : 1{,}4 = 2{,}1\,d.$$

Der Zwischenraum *a* jedoch, der das Ziel für die Kugel bildet, die von der günstigsten Stellung aus durch die Glocke geht, ist noch schmäler. Er ist um einen ganzen Durchmesser schmäler, nämlich

$$2{,}1\,d - d = 1{,}1\,d.$$

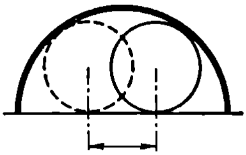
Figur 18





Figur 19

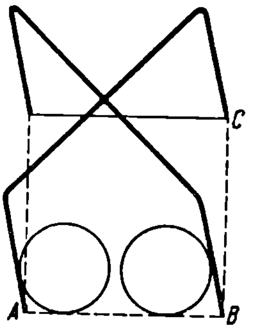
Figur 20



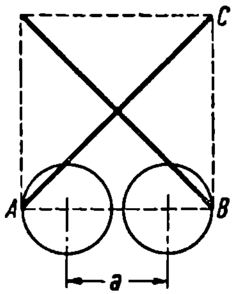
Für den Mittelpunkt der krockierenden Kugel ist das Ziel hingegen, wie wir wissen, gleich $2d$. Folglich ist das Krockieren unter den gegebenen Umständen doppelt so leicht wie das Passieren der Glocke.

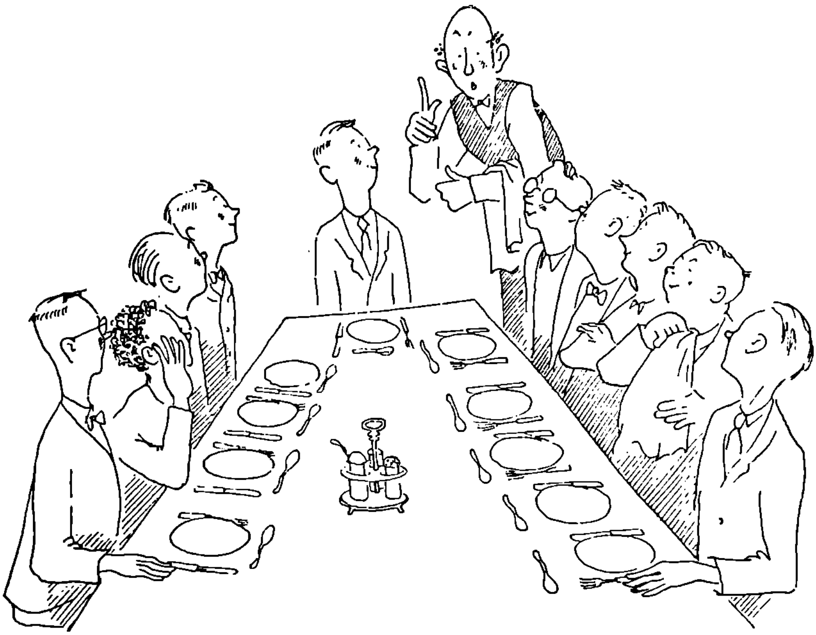
15. Das Passieren der Glocke wird unmöglich, sobald die Breite des Tores den Durchmesser der Kugel um weniger als 1,4mal übertrifft. Dies ergibt sich aus der in der vorigen Aufgabe gegebenen Erklärung. Sofern das Tor gewölbt ist, verschlechtern sich die Bedingungen für den Durchgang noch mehr.

Figur 21



Figur 22





Umgruppierungen (Permutationen)

16. Das kostenlose Mittagessen.

Zehn Freunde wollten den Abschluß der Schulzeit durch ein gemeinsames Essen im Restaurant feiern. Als sich alle eingefunden hatten und der erste Gang gebracht war, konnten sie sich über die Tischordnung nicht einigen. Der eine schlug eine Sitzordnung nach dem Alphabet vor, der andere nach dem Alter, ein dritter nach den Zeugnissen, ein vierter nach der Größe und so fort. Der Streit zog sich in die Länge, die Suppe wurde kalt, und niemand nahm Platz. Eine Einigung brachte der Kellner zustande, indem er sich mit folgender Ansprache an die jungen Leute wandte:
„Meine jungen Freunde, lassen Sie von Ihrem Streit ab. Setzen Sie sich so, wie es sich gerade ergibt, und hören Sie mich an."
Als alle Platz genommen hatten, fuhr der Kellner fort:
„Einer von Ihnen soll aufschreiben, in welcher Reihenfolge Sie jetzt sitzen. Morgen werden sie wieder zum Mittagessen hierherkommen und sich in anderer Reihenfolge setzen. Übermorgen werden Sie sich wieder anders setzen und so fortfahren, bis Sie jede mögliche Tischordnung ausprobiert haben. Und von dem Tage an, an dem sich Ihre heutige Reihenfolge wiederholt, will ich Sie täglich — das verspreche ich Ihnen feierlich — kostenlos mit den ausgesuchtesten Gerichten bewirten."

Der Vorschlag fand Anklang. Man kam überein, täglich in dem Restaurant zum Mittagessen zusammenzukommen und die Plätze jedesmal anders zu verteilen, um möglichst bald in den Genuß der kostenlosen Mittagessen zu gelangen.
Diesen Tag hat die Tischgesellschaft indessen nicht erlebt. Und das lag nicht etwa daran, weil der Kellner sein Versprechen nicht erfüllte, sondern daran, daß die Zahl der möglichen Reihenfolgen übermäßig groß ist. Sie beträgt nicht mehr und nicht weniger als 3 628 800. Eine solche Anzahl von Tagen entspricht, wie sich leicht errechnen läßt, nahezu 10 000 Jahren!

Ihr werdet es vielleicht für unwahrscheinlich halten, daß unter 10 Personen eine so große Zahl von Möglichkeiten in Frage kommen kann. Überzeugen wir uns durch eine Berechnung.
Vor allem muß man sich damit vertraut machen, die Zahl der Veränderungen in einer streng eingehaltenen Reihenfolge zu ermitteln. Der Einfachheit halber beginnen wir mit einer kleinen Anzahl — mit drei Gegenständen. Wir bezeichnen sie mit a, b und c (Figur 23).
Nun ist festzustellen, auf wieviel Arten sich die Plätze der Gegenstände untereinander auswechseln lassen. Wir sagen uns, daß, wenn wir den Gegenstand c zunächst beiseite legten, sich die beiden anderen Gegenstände nur auf zwei Arten zu Paaren zusammenstellen ließen.
Sodann fügen wir den Gegenstand c jedem dieser Paare hinzu. Wir können dies auf dreierlei Weise tun:

1. hinter dem Paar,
2. vor dem Paar,
3. zwischen den Gegenständen des Paares.

Außer diesen drei Möglichkeiten gibt es für den Gegenstand c keine andere Lage. Da wir aber zwei Paare, ab und ba, haben, beträgt die Zahl der Umstellungsmöglichkeiten also

$$2 \cdot 3 = 6.$$

Die verschiedenen Arten der Zusammenstellung sehen wir in Figur 24.
Wir gehen nun weiter und machen die Berechnung mit vier Gegenständen, die wir a, b, c und d nennen. Auch diesmal legen wir einen Gegenstand, etwa

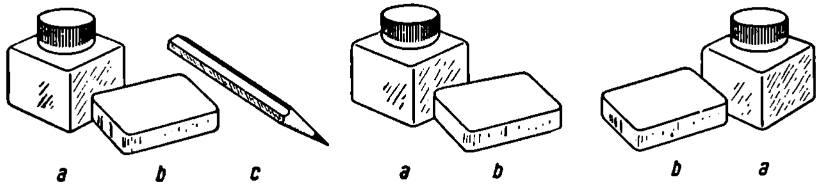


Fig. 23

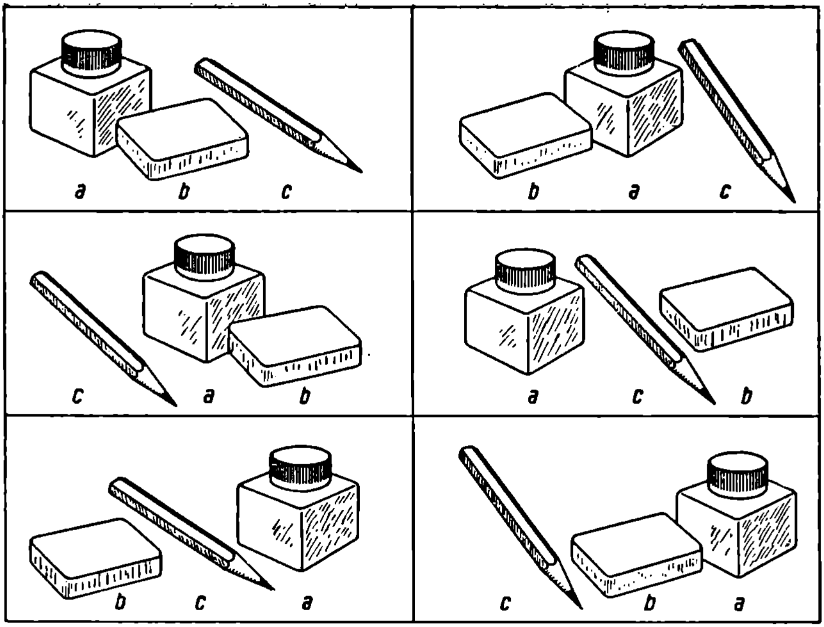


Fig. 24

den mit d bezeichneten, zunächst beiseite und versuchen die verschiedenen Stellungen mit den drei anderen. Wir wissen bereits, daß für diese 6 Gruppierungsmöglichkeiten bestehen. Auf wieviel Arten läßt sich nun der Gegenstand d jeder dieser 6 Gruppierungen hinzufügen? Offenbar auf 4 Arten:

1. d hinter den 3 anderen Gegenständen,
2. d vor den 3 anderen Gegenständen,
3. d zwischen dem 1. und 2. Gegenstand,
4. d zwischen dem 2. und 3. Gegenstand.

Im ganzen sind es demnach

$$6 \cdot 4 = 24 \text{ Arten;}$$

und da $6 = 2 \cdot 3$ und $2 = 1 \cdot 2$ ist, läßt sich die Zahl aller Arten durch nachstehende Formel darstellen:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Wenn wir von denselben Erwägungen bei 5 Gegenständen ausgehen, ist für diese die Zahl der Gruppierungsmöglichkeiten gleich

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Bei 6 Gegenständen:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720,$$ und so fort.

Kehren wir nun zu den 10 Mittagsgästen zurück. Die Zahl der Gruppierungsmöglichkeiten ergibt sich in diesem Falle aus dem Produkt von

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10,$$

und wenn wir uns die Mühe machen, die Ausrechnung vorzunehmen, kommen wir auf die schon erwähnte Zahl

$$3\,628\,800.$$

Die Berechnung wäre umständlicher, wenn es sich bei 5 unter den 10 Mittagsgästen um Mädchen handelte und diese mit den Jungen am Tisch unbedingt eine bunte Reihe bilden sollten. Die Zahl der Gruppierungsmöglichkeiten ist dann zwar bedeutend geringer, ihre Errechnung aber trotzdem etwas schwieriger.

Nehmen wir an, einer der Jungen habe sich auf einen beliebigen Platz an den Tisch gesetzt. Die vier anderen können sich dann, falls sie jeden zweiten Stuhl für ein Mädchen frei lassen, auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ verschiedene Arten hinsetzen. Da es im ganzen 10 Stühle sind, kann sich der erste Junge auf 10 verschiedene Arten setzen; die Zahl der Sitzarten für alle Jungen ist folglich $10 \cdot 24 = 240$.

Auf wieviel Arten können sich hierauf die 5 Mädchen auf die freien Stühle zwischen den Jungen setzen? Offenbar auch auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ verschiedene Arten. Und wenn wir nun jede der 240 für die Jungen in Frage kommenden Sitzarten mit jeder der 120 Sitzarten der Mädchen kombinieren, kommen wir auf

$$240 \cdot 120 = 28\,800 \text{ mögliche Arten.}$$

Diese Zahl ist um ein Vielfaches geringer als die vorige und würde im ganzen etwas weniger als 79 Jahre in Anspruch nehmen.

Sofern unsere jungen Mittagsgäste ein Alter von 100 Jahren erreichen würden, könnten sie es in diesem Falle dazu bringen, daß ihnen ein kostenloses Mittagessen aufgetragen wird — wenn nicht durch den jetzigen Kellner, dann von einem seiner Nachfolger.

Nachdem wir die Berechnung der Permutation (Veränderungen in der Anordnung) kennengelernt haben, vermögen wir auch zu ermitteln, wieviel verschiedene Stellungen der Steine beim „Fünfzehnerspiel" möglich sind. Dabei muß immer das Feld in der unteren rechten Ecke frei bleiben. Mit anderen Worten, wir können die Zahl der Aufgaben errechnen, die uns dieses Spiel stellen kann. Diese Berechnung läuft auf eine Feststellung der Permutationszahl bei 15 Gegenständen hinaus. Wie wir schon wissen, ist hierzu folgende Multiplikation erforderlich: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 14 \cdot 15$.

Das Resultat ergibt

$$1\,307\,674\,365\,000,$$

das ist mehr als eine Billion.

Die Hälfte dieser riesigen Zahl von Aufgaben läßt sich nicht lösen. Es gibt also in dem genannten Spiel über 600 Milliarden unlösbarer Stellungen.

Dadurch, daß die Menschen von dieser großen Zahl der unlösbaren Aufgaben keine Ahnung hatten, mag sich zum Teil die Leidenschaft erklären, mit der sie sich dem Fünfzehnerspiel hingaben.
Bemerkt sei noch folgendes: Wenn es möglich wäre, den Steinen in jeder Sekunde eine andere Stellung zu geben und sich ununterbrochen Tag und Nacht damit zu beschäftigen, würde das Ausprobieren aller möglichen Stellungen mehr als 40 000 Jahre in Anspruch nehmen.

17. Eine Aufgabe aus dem Schulleben.

Eine Klasse hat 25 Schüler. Auf wieviel verschiedene Arten können die Sitzplätze verteilt werden?
Die Lösung ist für diejenigen, die sich das Vorhergesagte zu eigen gemacht haben, durchaus nicht schwierig. Man multipliziert:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots\cdots\cdots\cdots 23 \cdot 24 \cdot 25.$$

Die Mathematik weist viele Mittel auf, durch die sich eine Berechnung vereinfachen läßt, aber eine Aufgabe in der Art der vorstehenden vermag sie nicht zu erleichtern (falls man das Resultat bis auf die letzte Stelle genau ausrechnen will). Es gibt keine andere Möglichkeit, als diese Zahlen gewissenhaft zu multiplizieren. Nur eine günstige Gruppierung der Multiplikatoren kann die Zeit der Ausrechnung etwas abkürzen. Das Resultat ist ungeheuerlich; es besteht aus 26 Ziffern und stellt eine Zahl dar, die jedes Vorstellungsvermögen übersteigt:

$$15\,511\,210\,043\,330\,985\,984\,000\,000.$$

Von allen Zahlen, denen wir bisher begegnet sind, ist diese die größte, und mehr als allen anderen gebührt ihr die Bezeichnung „Zahlenriese". Die Anzahl aller kleinsten Tropfen in sämtlichen Meeren und Ozeanen der Erdkugel ist bescheiden im Vergleich zu dieser gigantischen Zahl.

18. Das Umlegen von Münzen.

Aus meiner Kindheit, erzählt der Verfasser dieses Büchleins, erinnere ich mich eines unterhaltsamen Spiels mit Münzen, das mir mein älterer Bruder zeigte. Er stellte drei Untertassen nebeneinander und baute auf der ersten von ihnen ein aus 5 Münzen bestehendes Türmchen auf: Unten lag ein Rubelstück und über ihm, der Reihe nach aufgeschichtet, Münzen zu 50, 20, 15 und 10 Kopeken. Die Münzen sollten auf die dritte Untertasse übertragen werden, wobei drei Vorschriften zu befolgen waren. Erstens: Es darf auf einmal jeweils nur eine Münze umgelegt werden. Zweitens: Eine größere Münze darf niemals auf eine kleinere gelegt werden. Drittens: Vorübergehend können unter Einhaltung der ersten beiden Vorschriften Münzen auch auf die mittlere Untertasse gelegt werden, aber zum Schluß sollen alle Münzen in der ursprünglichen Reihenfolge auf der dritten Untertasse liegen. Die Vorschriften waren, wie man sieht, nicht kompliziert. Nun hieß es, ans Werk zu gehen.

Ich begann mit dem Umlegen. Das Zehnkopekenstück legte ich auf die dritte, das Fünfzehnkopekenstück auf die mittlere Untertasse — und zauderte. Wohin sollte ich das Zwanzigkopekenstück legen? Es ist ja größer als die beiden zuerst umgelegten Münzen.
„Nun, was denn?" kam mir mein Bruder zu Hilfe. „Lege das Zehnkopekenstück auf die mittlere Untertasse über das Fünfzehnkopekenstück. Dann hast du für das Zwanzigkopekenstück die dritte Untertasse frei."
Das tat ich. Aber schon stand ich vor einer neuen Schwierigkeit. Wohin mit dem Fünfzigkopekenstück? Doch fand ich bald einen Ausweg: Ich übertrug das Zehnkopekenstück zunächst auf die erste Untertasse, das Fünfzehnkopekenstück auf die dritte und dann auch das Zehnkopekenstück auf die dritte. Jetzt konnte ich das Fünfzigkopekenstück auf die freie mittlere Untertasse legen. Nach einer langen Reihe von Umgruppierungen gelang es mir, auch das Rubelstück von der ersten Untertasse umzulegen und schließlich das ganze Häufchen Münzen auf der dritten Untertasse zusammenzubekommen.

Der Bruder lobte meine Arbeit und fragte, wieviel Umstellungen ich im ganzen ausgeführt hätte.
„Ich habe nicht gezählt."
„Wir wollen einmal nachzählen. Es ist doch interessant zu erfahren, wie man mit der geringsten Zahl von Umstellungen das Ziel erreichen kann. Wenn das Häufchen nicht aus 5, sondern nur aus 2 Münzen, einem Zehn- und einem Fünfzehnkopekenstück bestände — wieviel Züge müßte man dann machen?"
„Drei: die 10 Kopeken auf die mittlere Untertasse, die 15 Kopeken auf die dritte und dann auch die 10 Kopeken auf die dritte."
„Richtig. Nun wollen wir noch das Zwanzigkopekenstück hinzunehmen und sehen, wieviel Umstellungen dann nötig sind. Wir machen es so: zuerst übertragen wir die beiden kleineren Münzen nacheinander auf die mittlere Untertasse. Dazu brauchen wir, wie wir schon wissen, 3 Züge. Dann legen wir das Zwanzigkopekenstück auf die freie dritte Untertasse — 1 Zug. Und anschließend übertragen wir die beiden Münzen von der mittleren Untertasse ebenfalls auf die dritte — 3 weitere Züge. Im ganzen waren es also $3 + 1 + 3 = 7$ Züge."
„Mit 4 Münzen laß' mich die Sache einmal selbst untersuchen. Zuerst übertrage ich die drei kleineren Münzen auf die mittlere Untertasse, das sind 7 Züge; dann das Fünfzigkopekenstück auf die dritte Untertasse — 1 Zug; und hierauf auch die drei kleineren Münzen auf die dritte Untertasse — nochmals 7 Züge. Zusammen: $7 + 1 + 7 = 15$ Züge."
„Ausgezeichnet. Und bei 5 Münzen?"
„$15 + 1 + 15 = 31$", hatte ich sofort herausgefunden.
„Nun siehst du, du hast die Art der Berechnung schon begriffen. Aber ich will dir zeigen, wie man sie noch vereinfachen kann. Merke dir, daß die

Zahlen 3, 7, 15, 31, auf die wir gekommen sind, alle eine 2 darstellen, die ein oder mehrere Male mit sich selbst multipliziert ist, aber unter Abzug einer 1. Sieh her!"

Und mein Bruder schrieb folgende Tabelle hin:

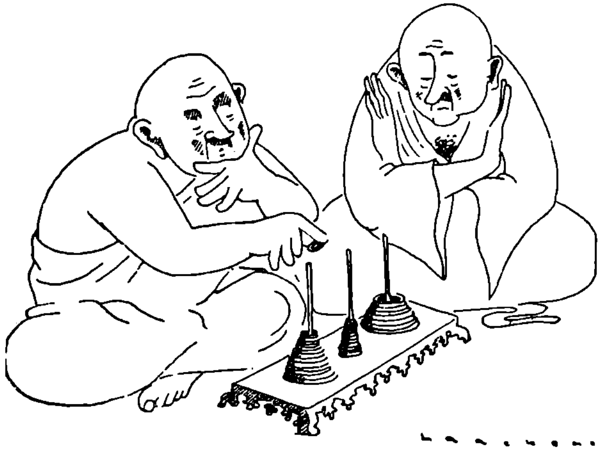
$$3 = 2 \cdot 2 - 1$$
$$7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1$$
$$15 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1$$
$$31 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1\,.$$

„Ich verstehe: soviele Münzen umzulegen sind, soviele Male multipliziert man die 2 mit sich selbst und zieht zum Schluß eine 1 ab. Ich könnte jetzt die Züge für jede beliebige Zahl von Münzen ausrechnen, zum Beispiel für 7 Münzen:

$$2\,.\,2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 128 - 1 = 127."$$

„Ja, nun hast du dir dieses alte Spiel gut zu eigen gemacht. Nur noch eine praktische Regel mußt du dir merken: wenn die Zahl der Münzen eine gerade ist, muß man die erste Münze auf die dritte, wenn es eine ungerade Zahl ist, auf die mittlere Untertasse legen."

„Du sagtest — ein altes Spiel. Hast du es denn nicht selbst ausgedacht?"
„Nein, ich habe es nur auf Münzen angewandt. Das Spiel ist sehr alten Ursprungs und soll, wie es heißt, in Indien entstanden sein. Es gibt eine alte Legende, die mit diesem Spiel zusammenhängt. Nach dieser Legende soll es in der Stadt Benares einen Tempel geben, in dem der indische Gott Brahma bei der Schöpfung der Welt drei diamantene Stäbchen aufgestellt und auf einen von ihnen 64 goldene Ringe aufgeschichtet hat. Der größte Ring liegt



unten, und jeder folgende Ring ist kleiner als der vorhergehende. Die Priester des Tempels sind verpflichtet, diese Ringe Tag und Nacht ununterbrochen von einem Stäbchen auf ein anderes zu übertragen, wobei sie das dritte als Hilfsstäbchen benutzen können und im übrigen die Regeln unseres Spiels einhalten müssen: jeden Ring einzeln zu übertragen und keinen größeren auf einen kleineren zu legen. In der Legende heißt es, daß, sobald alle 64 Ringe übertragen sein werden, das Ende der Welt gekommen ist."

„Dann müßte die Welt ja längst untergegangen sein, wenn diese Legende recht hätte!"

„Du scheinst zu glauben, daß die Übertragung der 64 Ringe nicht allzuviel Zeit in Anspruch nehmen kann?"

„Natürlich nicht. Wenn man in einer Sekunde einen Zug macht, sind es ja in einer Stunde 3600 Züge."

„Nun, und?"

„Und in 24 Stunden fast 100 000. In zehn Tagen sind es eine Million Züge. Mit einer Million Zügen könnte man, will ich meinen, selbst 1000 Ringe übertragen."

„Du irrst dich. Um nur 64 Ringe umzuschichten, sind, rund gerechnet, 500 Milliarden Jahre erforderlich."

„Wieso denn? Die Zahl der Züge ist doch gleich dem Produkt von 64 Zweien nach Abzug einer Eins, und das beträgt ... Warte, ich werde es gleich ausrechnen!"

„Sehr schön. Und während du rechnest, werde ich Zeit haben, meine Besorgungen zu erledigen."

Der Bruder ging und ließ mich, vertieft in meine Rechenaufgabe, allein. Ich fand zuerst das Produkt von 16 Zweien, multiplizierte diese Zahl 65 536 mit derselben Zahl und das Resultat dieser Multiplikation wiederum mit sich selbst. Zum Schluß vergaß ich nicht, eine Eins abzuziehen.

Ich kam auf nachstehende Zahl:

18 446 744 073 709 551 615.

Mein Bruder hatte also recht.

Übrigens kennt ihr diese Zahl bereits aus dem Heft „Denkaufgaben mit Zahlenriesen": nämlich als die Anzahl von Weizenkörnern, die der Erfinder des Schachspiels als Belohnung verlangt hatte.

Ihr werdet euch in diesem Zusammenhang vielleicht dafür interessieren, welche Zahlen tatsächlich für das Alter der Sonne und der Erde in Frage kommen. Die Gelehrten verfügen auf diesem Gebiet über einige, natürlich nur ungefähre Unterlagen. Nach neuesten Ermittlungen existieren:

die Sonne seit ungefähr	5 Milliarden Jahren,
die Erde seit ungefähr	3 Milliarden Jahren,
Lebewesen auf der Erde seit ungefähr	500 Millionen Jahren.

INHALTSVERZEICHNIS

UNSERE WELT

GRUPPE 1

Märchen und Geschichten

Fahrten und Abenteuer

Menschen und Tiere

Singen und Musizieren

Aus fernen Ländern

Dichtung und Wahrheit

Unsere Schule

Bilder und Bauten

Wir diskutieren

Für die gerechte Sache

Zeitgenossen erzählen

Der Vorhang geht auf

Spiel und Sport

Unsere Heimat

GRUPPE 2

Mathematik

Physik und Geophysik

Chemie

Biologie

Geographie und Geologie

Astronomie und Astrophysik

Aus der Geschichte der Naturwissenschaften

GRUPPE 3

Wie wir uns nähren und kleiden

In Werkstatt und Betrieb

Mit Werkzeug und Maschine

Wir bauen Häuser, Dörfer, Städte

Auf Wegen, Straßen, Brücken

Wie der Mensch die Erde verändert

Aus der Geschichte der Arbeit und Technik