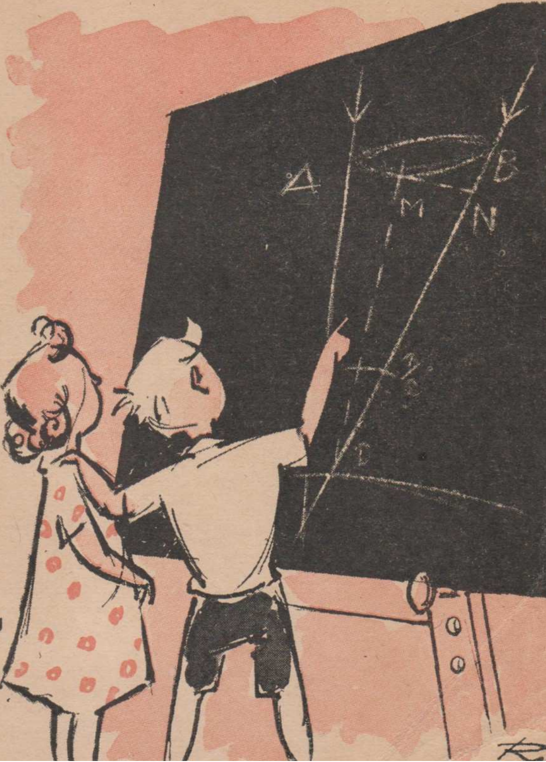
UNSERE WELT
GRUPPE II

MATHEMATIK

VON DER NATUR UND
IHREN GESETZEN

Ein Frühstück mit Denkaufgaben

VON J. I. PERELMAN



der kinderbuchverlag
Berlin/Dresden

J. I. PERELMAN

EIN FRÜHSTÜCK MIT DENKAUFGABEN

ILLUSTRATIONEN VON WILMAR RIEGENRING

dkv

der kinderbuchverlag · Berlin/Dresden

Entnommen dem Werk „Lebendige Mathematik" von J. I. Perelman. Aus dem Russischen übertragen von Hermann Asemissen. Für die deutsche Ausgabe bearbeitet.

Druck: (42) Express-Verlag. 2759. 2. 50.

Preis 0,60 DM Bestell-Nr. 13501 • 1.-50. Tausend – Für junge Leser von 11 Jahren an

Ein Frühstück mit Denkaufgaben

1. Das Eichhörnchen auf der Wiese

„Heute morgen habe ich mit einem Eichhörnchen Versteck gespielt", erzählte beim Frühstück im Erholungsheim einer der um den Tisch Versammelten. „Kennen Sie in unserem Walde die kleine runde Wiese mit einer einzelnen Birke in der Mitte? Hinter dieser Birke hatte sich das Eichhörnchen vor mir versteckt. Als ich aus dem Gehölz auf die Wiese trat, bemerkte ich gleich sein Schnäuzchen und die lebhaften Äuglein, mit denen es hinter dem Baumstamm zu mir herüberguckte. Vorsichtig, ohne mich zu nähern, ging ich am Rand der Wiese herum, um mir das Tierchen anzusehen. Viermal wohl habe ich so den Baum umkreist, aber der kleine Schelm zog sich immer auf die andere Seite des Baumstammes zurück und zeigte nach wie vor nur das Schnäuzchen. Und so ist es mir tatsächlich nicht gelungen, das Eichhörnchen zu umkreisen."

„Wie", warf jemand ein, „Sie sagen doch, daß Sie viermal um den Baum herumgegangen sind?"

„Um den Baum, aber nicht um das Eichhörnchen."

„Aber das Eichhörnchen war doch auf dem Baum?"

„Ja, und?"

„Nun, dann haben Sie eben auch das Eichhörnchen umkreist."

„Ein schönes Umkreisen, wenn ich nicht ein einziges Mal seinen Rücken zu Gesicht bekommen habe!"

„Was hat das mit dem Rücken zu tun? Das Eichhörnchen befindet sich in der Mitte, Sie gehen im Kreise herum — also umkreisen Sie das Eichhörnchen."

„Ganz und gar nicht. Stellen Sie sich vor, ich ginge im Kreise um Sie herum, indessen Sie sich mir dauernd mit dem Gesicht zuwendeten und den Rücken verdeckten. Würden Sie dann etwa sagen, daß ich Sie umkreist habe?"

„Gewiß würde ich das sagen. Wie denn sonst?"

„Ich hätte Sie umkreist, obwohl ich keinmal hinter Ihnen gewesen wäre, Ihren Rücken nicht zu Gesicht bekommen hätte?"

„Lassen wir doch den Rücken! Sie schließen um mich einen Kreis — darauf kommt es an, und nicht darauf, ob Sie den Rücken sehen."

„Erlauben Sie: was heißt es, etwas zu umkreisen? Meines Erachtens kann es nur dies heißen: den Standpunkt so zu wechseln, daß man den betreffenden Gegenstand nacheinander von allen Seiten zu sehen bekommt. Nicht wahr, Professor?" wandte sich der Sprechende an einen am Tisch sitzenden alten Mann.

„Bei Ihrem Streit handelt es sich im Grunde genommen um eine Wortfechterei", entgegnete der Gelehrte. „Und in solchen Fällen muß man zuvor stets die Frage klären, die Sie eben erst aufgeworfen haben: man muß sich über die Bedeutung der Worte einigen. Wie sind die Worte zu verstehen: ‚einen Gegenstand umkreisen'? Ihr Sinn kann zweifach sein. Erstens kann man darunter verstehen, daß ein Kreis geschlossen wird, innerhalb dessen sich der Gegenstand befindet. Das ist die eine Möglichkeit. Die andere: den Standpunkt im Verhältnis zum Gegenstand so zu wechseln, daß man ihn von allen Seiten zu sehen bekommt. Bei der ersteren Auslegung werden Sie zugeben müssen, daß Sie das Eichhörnchen viermal umkreist haben. Sofern Sie sich dagegen an die zweite Auslegung halten, ergibt sich, daß Sie es kein einziges Mal umkreist haben. Es kann hier also, wie Sie sehen, gar keine Meinungsverschiedenheit geben, wenn beide Parteien die gleiche Sprache sprechen und den Sinn der Worte in gleicher Weise auslegen."

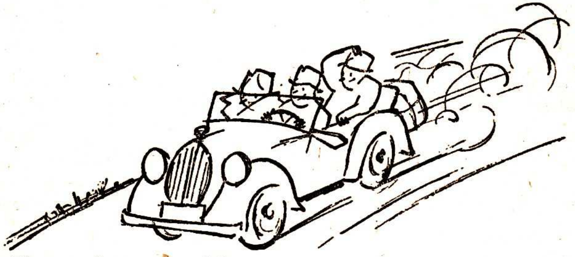
„Schön, es ist zweierlei Auslegung möglich. Aber welche ist dann richtiger?"

„So läßt sich die Frage nicht stellen. Einigen kann man sich über alles. Es fragt sich nur, was der landläufigen Auffassung mehr entspricht. Ich möchte sagen, daß die erste Auslegung mit dem Geist der Sprache besser in Einklang steht, und zwar aus folgendem Grunde. Die Sonne dreht sich bekanntlich in 26 Tagen einmal um ihre Achse . . ."

„Die Sonne dreht sich?"

„Natürlich, ebenso wie die Erde sich um ihre Achse dreht. Nehmen wir einmal an, daß die Sonne sich langsamer drehen und für eine volle Umdrehung nicht 26, sondern $365^1/_4$ Tage, das heißt ein Jahr, brauchen würde. Dann wäre die Sonne der Erde immer mit ein und derselben Seite zugekehrt, und die entgegengesetzte Seite, den ‚Rükken' der Sonne, könnten wir nie sehen. Aber kreist deswegen die Erde nicht um die Sonne?"

„Ja, nun ist es klar, daß ich das Eichhörnchen doch umkreist habe."
„Ein Vorschlag, Freunde!" sagte jemand von denen, die der Auseinandersetzung gefolgt waren. „Wir wollen beisammen bleiben! Da im Regen doch niemand spazierengehen kann und es anscheinend noch eine ganze Weile regnen wird, wollen wir uns hier die Zeit mit Denkaufgaben vertreiben. Der Anfang ist gemacht. Einer nach dem anderen soll irgendeine Denkaufgabe aufgeben. Und Sie, Professor, werden dabei den obersten Richter spielen."
„Wenn die Denkaufgaben mit Algebra oder Geometrie zu tun haben werden, kann ich mich nicht beteiligen", erklärte eine junge Frau.
„Und ich auch nicht", rief noch jemand.
„Nein, nein, teilnehmen müssen alle! Aber die Anwesenden werden gebeten, Algebra und Geometrie beiseite zu lassen oder höchstens in den allereinfachsten Grundzügen heranzuziehen. Einverstanden?"
„Dann bin ich einverstanden und bereit, als erste eine Denkaufgabe aufzugeben."
„Fein, wir bitten darum!" ertönte es von allen Seiten. „Lassen Sie hören!"



2. Die gemeinsame Autofahrt

„Meine Denkaufgabe hat sich aus der Praxis ergeben. Es ist ein alltägliches Exempel, kann man sagen.
Drei Buchhändler wollen zur Messe fahren, um für ihre Buchhandlungen Kinderbücher einzukaufen. Sie verabreden, gemeinsam ein Auto zu benutzen. Der eine von ihnen — der Anschaulichkeit halber wollen wir ihn Herr Dreyer nennen — hat drei Liter Benzin zur Verfügung, der zweite namens Fünfer bringt fünf Liter Benzin mit, während der dritte, Herr Benzinlos, wie Sie erraten werden, kein Benzin zur Verfügung hat. Zum Ausgleich der Unkosten zahlt er an die beiden Mitreisenden acht Mark. Wie müssen diese den Betrag unter sich teilen?"
„In die Hälfte", beeilte sich jemand zu erklären. „Herr Benzinlos hat das Benzin von beiden in gleicher Weise mitbenutzt."
„O nein", widersprach ein anderer, „man muß die Menge berücksichtigen, die jeder zu der Fahrt beigetragen hat. Derjenige, der drei Liter Benzin gegeben hat, muß drei Mark bekommen, dem anderen, der fünf Liter gegeben hat, stehen fünf Mark zu. So wäre es eine gerechte Teilung."

„Freunde", nahm derjenige das Wort, der das Spiel angeregt hatte und jetzt als Vorsitzender des Kreises galt. „Die endgültige Auflösung der Aufgaben wollen wir vorläufig noch zurückhalten. Jeder soll Zeit haben, darüber nachzudenken. Die richtigen Antworten wird uns der Richter beim Abendessen bekanntgeben. Nun der Nächste!"

3. Die Arbeit der Pioniergruppen

„In unserer Schule", begann der Pionier, „gibt es fünf Arbeitsgemeinschaften, eine für Biologie, eine für Modellbau, eine für Physik, eine für Geographie und eine für Elektrotechnik. Die Gruppe, die sich mit Biologie beschäftigt, kommt jeden zweiten Tag zusammen, diejenige, die sich mit Modellbau beschäftigt, jeden dritten Tag, die Physikgruppe jeden vierten Tag, die Gruppe für Geographie jeden fünften Tag und die Gruppe für Elektrotechnik jeden sechsten Tag. Am 1. Januar fingen alle fünf Gruppen an, und die Arbeitsgemeinschaften fanden dann ohne Abweichung an den planmäßig festgesetzten Tagen statt. Die Frage besteht darin, an wievielen Abenden im ersten Quartal die Gruppen wieder gleichzeitig in der Schule zusammengekommen sind."

„War es ein gewöhnliches Jahr oder ein Schaltjahr?" wurde der Pionier gefragt.

„Ein gewöhnliches."

„Das erste Quartal, aus Januar, Februar und März bestehend, ist also mit 90 Tagen anzusetzen?"

„Offenbar."

„Erlauben Sie, der Frage ihrer Denkaufgabe eine weitere Frage hinzuzufügen", sagte der Professor. „Und zwar: wieviel Abende gab es in dem betreffenden Quartal, an denen in der Schule überhaupt keine Gruppenabende stattfanden?"

„Aha, ich verstehe!" ertönte ein Ausruf. „Eine Aufgabe mit einer Falle! Es hat keinen Tag mit allen fünf Gruppen gleichzeitig gegeben und auch keinen Tag ganz ohne Gruppenabend. Das steht schon fest!"

„Warum?" fragte der Vorsitzende.

„Erklären kann ich es nicht, aber ich fühle, daß es sich um eine Falle handelt."

„Nun, das ist kein Beweis. Am Abend wird es sich zeigen, ob Ihr Gefühl richtig war. — Sie sind jetzt an der Reihe, Kollege!"

4. Wer zählte mehr?

„Zwei Menschen zählten eine Stunde lang alle Personen, die an ihnen auf dem Bürgersteig vorüberkamen. Der eine von ihnen hatte sich an der Haustür aufgestellt, während der andere auf dem Bürgersteig auf und ab ging. Welcher von ihnen hat mehr Passanten gezählt?"

„Beim Aufundabgehen kann man mehr zählen, das ist klar", ertönte es vom anderen Ende des Tisches.

„Beim Abendessen werden wir die Antwort hören", erklärte der Vorsitzende. „Der Nächste!"

5. Großvater und Enkel

„Das was ich Ihnen vortragen will, hat sich im Jahre 1932 abgespielt. Ich war damals genau so viele Jahre alt, wie es die beiden letzten Ziffern meines Geburtsjahres ausdrücken. Als ich von diesem Zusammentreffen meinem Großvater erzählte, überraschte er mich durch die Erklärung, daß dies auch bei seinem Lebensalter so sei. Ich hielt das für unmöglich . . ."
„Das ist natürlich unmöglich", rief einer der Zuhörenden.
„Stellen Sie sich vor, es ist durchaus möglich. Mein Großvater hat es mir bewiesen. Wie alt war demnach jeder von uns?"

6. Eisenbahnfahrkarten

„Ich bin Eisenbahnerin und sitze am Fahrkartenschalter", begann die nächste Spielteilnehmerin. „Viele halten das für eine sehr einfache Sache. Sie ahnen nicht, wie groß die Anzahl der Fahrkarten ist, mit der es der Fahrkartenverkäufer selbst auf einer kleinen Station zu tun hat. Die Reisenden müssen ja die Möglichkeit haben, von der betreffenden Station eine Fahrkarte bis zu jeder beliebigen Station derselben Strecke zu erhalten, und zwar in beiden Richtungen. Ich habe Dienst auf einer Strecke mit 25 Stationen. Was meinen Sie wohl, wieviele verschiedene Arten von Fahrkarten die Bahn für alle ihre Schalter in Vorbereitung hat?"
„Jetzt sind Sie an der Reihe", erklärte der Vorsitzende dem Nächstsitzenden.

7. Der Flug des Luftschiffs

„Ein Luftschiff stieg in Leningrad auf und flog direkt nach Norden. Nachdem es 500 km in nördlicher Richtung geflogen war, bog es nach Osten ab. Nachdem es wieder 500 km zurückgelegt hatte, machte das Luftschiff abermals eine Wendung — diesmal nach Süden, und flog in dieser Richtung ebenfalls 500 km. Dann schwenkte es nach Westen ein und landete, nachdem es auch in westlicher Richtung 500 km geflogen war. Die Frage lautet: wo befindet sich die Landungsstelle des Luftschiffs im Verhältnis zu Leningrad — westlich, östlich, nördlich oder südlich?"

„Sie spekulieren auf einen Einfaltspinsel", ließ sich jemand vernehmen. „500 Schritte nach vorn, 500 nach rechts, 500 zurück und 500 nach links — wohin kommen wir auf solche Weise? Dorthin, von wo wir ausgegangen sind!"

„Wo ist also Ihrer Ansicht nach das Luftschiff gelandet?"

„Doch auf demselben Leningrader Flugplatz, von dem es aufgestiegen ist?"

„Eben nicht."

„Dann kann ich nichts mehr verstehen!"

„Etwas stimmt hier wirklich nicht", mischte sich ein Nachbar ein. „Ist das Luftschiff denn nicht in Leningrad gelandet? Würden Sie wohl die Aufgabe noch einmal wiederholen?"

Der Kollege kam der Bitte bereitwillig nach. Die Teilnehmer hörten ihm aufmerksam zu und sahen sich ratlos an.

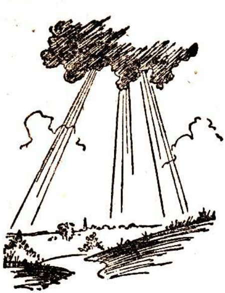
„Schön", sagte der Vorsitzende. „Bis zum Abendessen werden wir noch dazu kommen, über diese Aufgabe nachzudenken. Jetzt aber wollen wir fortfahren."

8. Der Schatten

„Erlauben Sie", sagte der Nächste, „daß ich dasselbe Luftschiff zum Gegenstand meiner Denkaufgabe nehme. Was ist länger — das Luftschiff oder sein Kernschatten?"

„Besteht hierin die ganze Denkaufgabe?"

„Jawohl."



„Der Schatten ist natürlich länger als das Luftschiff", hatte jemand sofort die Lösung gefunden. „Die Sonnenstrahlen fallen ja fächerartig auf die Erde."

„Ich würde sagen", bemerkte ein anderer, „daß die Sonnenstrahlen, im Gegenteil, parallel sind. Das Luftschiff und sein Schatten sind von gleicher Länge."

„Was sagen Sie da? Haben Sie nie die Strahlen beobachtet, die von der Sonne ausgehen, wenn sich diese hinter einer Wolke verborgen hat? Dann sieht man ganz deutlich, wie die Strahlen auseinandergehen. Der Schatten des Luftschiffs muß bedeutend länger sein als das Luftschiff, ebenso wie der Schatten von der Wolke größer ist als die Wolke selbst."

„Warum wird denn allgemein angenommen, daß die Sonnenstrahlen parallel sind? Die Seeleute, die Astronomen — alle sind dieser Ansicht."
Der Vorsitzende unterbrach den Streit und erteilte dem Nächsten das Wort.

9. Eine Aufgabe mit Streichhölzern

Der an die Reihe gekommene Teilnehmer schüttete eine ganze Streichholzschachtel auf dem Tisch aus und fing an, die Hölzchen in drei Häufchen zu teilen.
„Wollen Sie etwa ein Feuer anzünden?" scherzten die Zuhörer.
„Bei meiner Denkaufgabe handelt es sich um Streichhölzer", erklärte der Sprecher. „Hier sehen Sie drei ungleiche Häufchen. In allen dreien zusammen sind 48 Streichhölzer. Wieviele es in den einzelnen Häufchen sind, sage ich Ihnen nicht. Statt dessen beachten Sie bitte folgendes: wenn ich aus dem ersten Häufchen ebenso viele Hölzchen wegnehme und dem zweiten Häufchen hinzufüge, wie dort bereits vorhanden waren, wenn ich dann aus dem zweiten Häufchen ebenso viele Hölzchen dem dritten Häufchen hinzufüge, wie dort schon lagen, und wenn ich endlich aus dem dritten Häufchen zu dem ersten Häufchen so viele Hölzchen hinüberlege, wie das erste Häufchen in diesem Augenblick enthielt, — wenn ich alles dies ausgeführt habe, dann wird die Anzahl der Hölzchen in allen Häufchen die gleiche sein. Wieviele Hölzchen sind nun ursprünglich in jedem Häufchen gewesen?"

10. Der tückische Baumstumpf

„Meine Denkaufgabe", begann der Nachbar des letzten Sprechers, „erinnert an eine Aufgabe, die mir vor langer Zeit einmal von einem Dorfschullehrer aufgegeben wurde. Es war eine ganze und zudem recht spaßige Geschichte, die sich, wie er behauptete, im alten russischen Zarenreich (es kann auch in einem anderen Lande gewesen sein) zugetragen haben soll. Ein Bauer trifft im Walde einen ihm unbekannten alten Mann. Sie kommen ins Gespräch. Der Alte mustert aufmerksam den Bauern und sagte:
‚Ich weiß hier im Wäldchen ein Baumstümpfchen, ein sehr wunderliches. Es hilft sehr in der Not.'
‚Wie hilft es? Heilt es Krankheiten?'

‚Heilen, nein, heilen tut es nicht, aber Geld verdoppelt es. Man legt unter das Stümpfchen einen Beutel mit Geld, zählt bis hundert — und schon hat sich das Geld im Beutel verdoppelt. Solch eine Fähigkeit hat es. Ein wunderbares Baumstümpfchen!'
‚Das möchte ich ausprobieren', sagte nachdenklich der Bauer.
‚Warum nicht? Das läßt sich machen. Aber gezahlt muß dafür werden.'
‚Muß viel gezahlt werden? Und an wen?'
‚An den muß gezahlt werden, der den Weg zeigt. An mich also. Und wieviel, das ist eine andere Frage!'
Sie begannen zu handeln. Als der Alte erfuhr, daß der Bauer nur wenig Geld im Beutel hatte, erklärte er sich mit 1 Rubel 20 Kopeken nach jeder Verdoppelung einverstanden. Darauf einigten sie sich.
Der Alte führte den Bauern ins Innere des Waldes, irrte dort lange mit ihm umher und fand schließlich im Gebüsch einen alten, moosbedeckten Stumpf einer Tanne. Er nahm dem Bauern den Beutel ab und steckte ihn zwischen die Wurzeln des Stumpfes. Sie zählten bis hundert. Der Alte machte sich dann wieder am Stumpf zu schaffen, scharrte lange an den Wurzeln herum und zog endlich den Beutel hervor, den er nun dem Bauern übergab.
Der Bauer blickte in den Beutel, und siehe da — das Geld hatte sich tatsächlich verdoppelt! Er zählte dem Alten den ihm versprochenen Betrag von 1 Rubel und 20 Kopeken ab und bat ihn, den Beutel nochmals unter den wundertätigen Baumstumpf zu stecken.

Abermals zählten sie bis hundert, abermals machte sich der Alte im Gebüsch am Baumstumpf zu schaffen, und abermals war das Wunder geschehen: das Geld hatte sich verdoppelt. Der Alte bekam wiederum den verabredeten Betrag von 1 Rubel 20 Kopeken.
Ein drittes Mal wurde der Beutel unter den Baumstumpf gesteckt. Auch diesmal hatte sich das Geld verdoppelt. Aber nachdem der Bauer dem Alten die versprochene Vergütung ausgezahlt hatte, war in dem Beutel keine einzige Kopeke mehr enthalten. Der arme Tropf hatte auf diese Weise sein ganzes Geld eingebüßt! Es gab nun nichts mehr zu verdoppeln, und der Bauer trottete traurig aus dem Walde.
Das Geheimnis der zauberhaften Geldverdoppelung ist Ihnen natürlich klar: nicht ohne Grund hat der Alte beim Herausziehen des Beutels so lange an den Wurzeln des Stumpfs herumhantiert. Können Sie aber auch auf die andere Frage antworten: wieviel Geld hatte der Bauer, bevor die unglückseligen Versuche mit dem tückischen Baumstumpf begannen?"

11. Eine Aufgabe über den Dezember

„Ich, Freunde, bin ein Sprachforscher, dem alle Mathematik fernliegt", begann ein älterer Mann, der jetzt an der Reihe war, eine Denkaufgabe zu stellen. „Erwarten Sie also keine Rechenaufgabe von mir. Ich kann nur eine Frage aus dem mir bekannten Gebiet aufwerfen. Erlauben Sie, daß ich eine Aufgabe aus dem Kalender stelle?"
„Bitte sehr!"
„Der zwölfte Monat des Jahres wird Dezember genannt. Wissen Sie aber auch, was das Wort Dezember eigentlich bedeutet? Es kommt vom lateinischen Wort ‚decem', das heißt zehn, und von diesem sind auch die Worte ‚Dezimeter' (das ist ein Zehntelmeter), ‚Dezimalsystem' und andere auf der Rechnung mit zehn beruhende Bezeichnungen abgeleitet. Es ergibt sich hieraus, daß der Dezember*) als zehnter Monat bezeichnet wird. Wie ist diese Unstimmigkeit zu erklären?"
„Nun steht uns nur noch eine Denkaufgabe bevor", verkündete der Vorsitzende.

*) Da das Buch in russischer Sprache geschrieben ist, steht hier natürlich die russische Bezeichnung „dekabrj". Das Wort ist vom griechischen Wort „deka" abgeleitet, das gleichfalls zehn bedeutet. Ihr kennt es zum Beispiel von „Dekade", das sind zehn Tage.

12. Ein Rechenkunststück

„Ich bin als letzter, als zwölfter an der Reihe. Zur Abwechslung will ich Ihnen ein Rechenkunststück vorführen, dessen Geheimnis ich Sie aufzuklären bitte. Möge einer — Sie zum Beispiel, Kollege Vorsitzender — auf einen Zettel, für mich nicht sichtbar, eine beliebige dreistellige Zahl schreiben."
„Darf die Zahl auch Nullen enthalten?"
„Ich mache keinerlei Einschränkungen. Eine beliebige dreistellige Zahl. Ganz nach Ihrem Gutdünken."
„Gemacht! Und weiter?"
„Schreiben Sie zu dieser Zahl die gleiche Zahl nochmals hin. Sie haben nunmehr eine sechsstellige Zahl vor sich."
„Ganz recht, eine sechsstellige Zahl."
„Geben Sie den Zettel jetzt einem Kollegen, der möglichst weit von mir weg sitzt. Dieser Kollege soll die sechsstellige Zahl durch sieben teilen."
„Leicht gesagt: durch sieben teilen! Vielleicht läßt sich die Zahl gar nicht durch 7 teilen."
„Keine Sorge! Es geht ohne Rest auf."
„Sie kennen die Zahl gar nicht und wollen sicher sein, daß sie sich teilen läßt."
„Teilen Sie erst, dann reden wir weiter."
„Zu Ihrem Glück ist es aufgegangen."
„Das Resultat wollen Sie nun, ohne es mir mitzuteilen, Ihrem Nachbarn übergeben. Er wird es durch 11 teilen."
„Sie meinen wohl, daß Sie wieder Glück haben werden, daß die Teilung aufgehen wird?"
„Teilen Sie nur, es geht ohne Rest auf."
„Tatsächlich, ohne Rest! Und nun?"
„Reichen Sie das Resultat weiter. Wir teilen es, sagen wir mal — durch 13."
„Das haben Sie nicht gut gewählt. Durch 13 lassen sich wenige Zahlen ohne Rest teilen ... Aber doch — es ist aufgegangen. Sie haben wirklich Glück!"
„Geben Sie mir den Zettel mit dem Resultat, aber falten Sie ihn so, daß ich die Zahl nicht sehen kann."
Ohne den Zettel auseinanderzufalten, überreichte der ‚Zauberkünstler' ihn dem Vorsitzenden.
„Auf dem Zettel finden Sie die von Ihnen erdachte Zahl. Stimmt sie?"
„Vollkommen!" antwortete der Vorsitzende verwundert, nachdem er einen Blick auf den Zettel geworfen hatte. „Genau diese Zahl habe ich mir gedacht ... Da das Verzeichnis der Aufgabensteller nun erschöpft ist, erlauben Sie, daß ich unsere Versammlung schließe, zumal auch der Regen aufgehört hat. Die Lösungen der Denkaufgaben werden noch heute nach dem Abendessen bekanntgemacht. Zettel mit den Lösungen können Sie mir übergeben."

Auflösungen der Denkaufgaben 1–12

1. Die Denkaufgabe mit dem Eichhörnchen auf der **Wiese ist bereits gründlich** aufgeklärt. Gehen wir zur nächsten über.

2. Man kann nicht, wie es viele tun, davon ausgehen, daß 8 Mark für 8 Liter Benzin, also 1 Mark für jedes Liter gezahlt wurden. Der Betrag wurde für den dritten Teil von 8 Litern gezahlt, da ja das Benzin von drei Personen in gleichem Ausmaß benutzt wurde. Hieraus ergibt sich, daß die 8 Liter Benzin zusammen mit 8·3, das heißt mit 24 Mark bewertet wurden und daß der Unkostenbeitrag je Liter 3 Mark ausmacht. (In dem Preis von 3 Mark sollen sämtliche Spesen, wie Öl, Abnutzung des Wagens, eventuelle Reparaturen enthalten sein).

Hiernach ist leicht zu errechnen, wieviel jedem zukommt. Herr Fünfer hat für seine 5 Liter 15 Mark zu bekommen; aber für 8 Mark hat er selbst Benzin verbraucht, und ihm sind daher 15 — 8, also 7 Mark auszuzahlen. Herr Dreyer hat für die von ihm gegebenen 3 Liter 9 Mark zu erhalten; wenn man aber die 8 Mark berücksichtigt, die ihm für die Benutzung des Autos anzurechnen sind, hat er nur Anspruch auf 9 — 8, also 1 Mark. Bei einer richtigen Teilung hat demnach Herr Fünfer 7 Mark und Herr Dreyer 1 Mark zu bekommen.

3. Die Frage, nach wieviel Tagen alle fünf Arbeitsgemeinschaften wieder gleichzeitig in der Schule zusammentreffen, ist leicht zu beantworten, wenn wir die kleinste Zahl finden, die sich ohne Rest durch 2, durch 3, durch 4, durch 5 und durch 6 teilen läßt. Es ist nicht schwer herauszubekommen, daß diese Zahl 60 ist. Am 61. Tage treffen also die fünf Gruppen erneut zusammen: die Biologiegruppe nach 30 zweitägigen, die Modellbaugruppe nach 20 dreitägigen, die Physikgruppe nach 15 viertägigen, die geographische nach 12 fünftägigen und die Gruppe für Elektrotechnik nach 10 sechstägigen Unterbrechungen. Früher als nach 60 Tagen ergibt sich ein solcher Abend nicht. Ein gleicher Abend wird sich nach abermals 60 Tagen, das heißt also erst im zweiten Quartal wiederholen. Im Laufe des ersten Quartals gibt es somit nur einen einzigen Abend, an dem alle fünf Gruppen wieder im Klub zu ihren Übungen zusammentreffen.

Mehr Mühe macht die Beantwortung der Frage, wieviel Abende es sind, an denen gar keine Gruppenabende stattgefunden haben. Um dies festzustellen, muß man der Reihe nach alle Zahlen von 1 bis 90 aufschreiben und die Abende der Biologiegruppe, also die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 und so weiter abstreichen. Hierauf streicht man die Abende der Modellbaugruppe ab, das heißt die Zahlen 4, 10 und so weiter (die 7 war bereits abgestrichen). Nachdem wir dann auch noch die Abende für Physik, Geographie und

Elektrotechnik abgestrichen haben, bleiben nur die Tage des ersten Quartals stehen, an denen keiner der Gruppenabende stattgefunden hat.
Wer sich dieser Arbeit unterwirft, wird feststellen, daß die Anzahl der freien Abende im ersten Quartal ziemlich groß war: 24. Im Januar waren es acht freie Abende, und zwar: am 2., 8., 12., 14., 18., 20., 24. und 30. Im Februar kommen wir auf sieben und im März auf neun freie Abende.
Wir haben dabei der Einfachheit halber angenommen, daß die Gruppenabende auch sonntags stattfinden. Ihr könnt aber jetzt leicht selber feststellen, wie die Rechnung ohne Sonntage aussieht, wenn wir annehmen, daß der 1. Januar ein Sonntag ist.

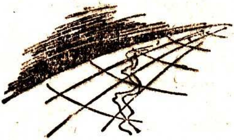
4. Beide haben die gleiche Anzahl Passanten gezählt. Derjenige, der an der Haustür stand, hat zwar die Vorüberkommenden in beiden Richtungen gezählt, aber dafür sind dem anderen, der auf und ab ging, alle diese Passanten begegnet.

5. Auf den ersten Blick könnte man wirklich meinen, daß an der Aufgabe etwas nicht stimmt: es hat den Anschein, als ob der Großvater und der Enkel gleichaltrig seien. Indessen, die Bedingungen der Aufgabe lassen sich, wie wir gleich sehen werden, leicht in Einklang bringen.
Der Enkel ist offenbar im 20. Jahrhundert geboren. Die ersten beiden Ziffern seines Geburtsjahres sind demnach 19. Die durch die restlichen Ziffern ausgedrückte Zahl muß, wenn man sie zweimal nimmt, 32 ergeben. Es ist also die Zahl 16. Der Enkel ist demnach im Jahre 1916 geboren und im Jahre 1932 16 Jahre alt gewesen.
Vom Großvater müssen wir annehmen, daß er im 19. Jahrhundert geboren ist. Die ersten beiden Ziffern seines Geburtsjahres sind demnach 18. Verdoppelt muß die durch die restlichen Ziffern ausgedrückte Zahl 132 ausmachen. Die in Frage kommende Zahl entspricht also der Hälfte von 132, das ist 66. Der Großvater ist im Jahre 1866 geboren und war im Jahre 1932 66 Jahre alt. Somit entsprach das Alter sowohl des Großvaters als auch des Enkels im Jahre 1932 der Zahl, die durch die beiden letzten Ziffern ihres Geburtsjahres ausgedrückt wird.

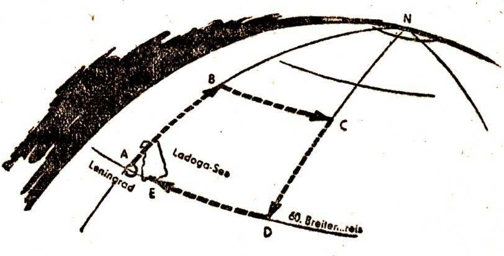
6. Auf jeder der 25 Stationen können die Reisenden nach einer beliebigen Station, das heißt nach 24 Orten gelangen. Es müssen infolgedessen $25 \cdot 24 = 600$ verschiedene Fahrkarten gedruckt werden.

7. Diese Aufgabe birgt keinerlei Widersprüche. Man darf nicht annehmen, daß das Luftschiff nach dem Schema eines Quadrats geflogen ist, sondern muß die Kugelgestalt der Erde berücksichtigen. Nach Norden zu nähern sich die Meridiane einander (siehe Zeichnung). Nachdem das Luftschiff auf einem

Breitenkreis, der sich 500 km nördlich der Breite von Leningrad erstreckt, 500 km geflogen war, hatte es sich infolgedessen nach Osten um mehr Längengrade entfernt, als es nachher beim abermaligen Erreichen der Breite von Leningrad in umgekehrter Richtung geflogen war. Im Resultat befand sich das Luftschiff am Ende seines Fluges an einem Punkt, der östlich von Leningrad liegt.



Um wie weit östlicher? Das läßt sich errechnen. Auf der Zeichnung seht ihr die Flugstrecke des Luftschiffes: *A B C D E*. Der Punkt *N* bezeichnet den Nordpol. An diesem Punkt vereinigen sich die Meridiane *A B* und *D C*. Das Luftschiff ist zuerst 500 km nach Norden, das heißt längs dem Meridian *AN* geflogen. Da ein Grad des Meridians 111 km lang ist, enthält ein Meridianbogen von 500 km den 111. Teil, also 4,5 Grad. Leningrad liegt auf dem 60. Breitenkreis; der Punkt *B* befindet sich also auf 60 Grad + 4,5 Grad = 64,5 Grad. Dann flog das Luftschiff nach Osten, das heißt längs dem Breitenkreis *B C*, und legte auf dieser Strecke 500 km zurück. Die Länge eines Bogengrades auf diesem Breitenkreis kann man errechnen oder aus Tabellen ersehen; sie entspricht 48 km. Hiernach ist leicht festzustellen, um wieviel Bogengrade das Luftschiff nach Osten geflogen ist, nämlich 500 : 48, also 10,4 Grad. Anschließend ist das Luftschiff in südlicher Richtung, das heißt längs dem Meridian *C D* geflogen, worauf es sich nach einem Fluge über 500 km abermals auf dem Breitenkreis von Leningrad befinden mußte. Nun führt der Weg nach Westen, das heißt die Linie *A D* entlang. Diese Linie ist offensichtlich länger als 500 km. Sie enthält ebenso viel Bogengrade wie die Linie *B C*, nämlich 10,4 Grad. Aber die Länge eines Bogengrades auf dem 60. Breitenkreis beträgt 55,5 km. Demnach beträgt die Entfernung zwischen den Punkten *A* und *D* 55,5·10,4 = 577 km. Wir sehen, daß das Luftschiff nicht in Leningrad landen konnte, es hat die übriggebliebene Strecke von 77 km nicht überflogen, sondern ist noch vor Leningrad auf dem Ladogasee niedergegangen.

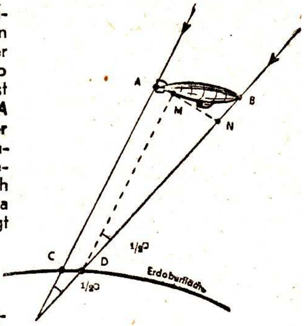


8. Bei der Besprechung dieser Aufgabe ist den Teilnehmern eine Reihe von Fehlern unterlaufen. Es trifft nicht zu, daß die auf die Erde niederfallenden Sonnenstrahlen merkbar auseinandergehen. Die Erde ist im Verhältnis zu ihrer Entfernung von der Sonne so klein, daß die Sonnenstrahlen, die irgendeinen Teil ihrer Oberfläche treffen, nur in einem unmerklich kleinen Winkel auseinandergehen; praktisch kann man die Sonnenstrahlen als parallel ansehen. Wenn uns die hinter einer Wolke herausbrechenden Sonnenstrahlen (siehe Zeichnung Seite 8) fächerartig erscheinen, so liegt dies lediglich an der Perspektive.
In der Perspektive sieht es aus, als ob parallele Linien sich vereinigen; man denke nur an die sich in der Ferne verlaufenden Eisenbahnschienen oder an den Anblick einer langen Allee.

Daraus aber, daß die Sonnenstrahlen auf die Erde parallel niederfallen, ergibt sich durchaus nicht, daß der Kernschatten des Luftschiffes von der gleichen Länge sein muß wie das Luftschiff selbst. Wenn ihr die Zeichnung anseht, werdet ihr erkennen, daß sich der auf die Erde niederfallende Schatten des Luftschiffes im Raum verengt und daher kürzer sein muß als das Luftschiff selbst: *C D* ist kürzer als *A B*.
Falls die Höhe des Luftschiffes bekannt ist, läßt sich auch feststellen, wie groß der Unterschied ist. Nehmen wir an, das Luftschiff befände sich in einer Höhe von 1000 Metern über der Erdoberfläche. Der Winkel, der von den Geraden *A C* und *B D* gebildet wird, entspricht dem Winkel, unter dem man die Sonne von der Erde aus sieht; dieser Winkel ist bekannt: etwa $1/2$ Grad. Andererseits weiß man, daß jeder Gegenstand, den man unter einem Winkel von $1/2$ Grad sieht, sich vom Auge in einer Entfernung be-

findet, die das 115fache seines Durchmessers beträgt. Der Ausschnitt *M N* (diesen Ausschnitt sieht man von der Erde aus unter dem Winkel von ½ Grad) entspricht also dem 115. Teil von *A C*. Die Linie *A C* ist länger als eine solche, die vom Punkt **A** senkrecht zur Erde führen würde. Wenn der Winkel zwischen der Richtung der Sonnenstrahlen und der Erdoberfläche 45 Grad beträgt, ist die Länge der Linie *A C* (falls sich das Luftschiff in 1000 m Höhe befindet) etwa 1400 m, und der Ausschnitt *M N* beträgt dann

$$\frac{1400}{115}, \text{ also } 12 \text{ m.}$$



Aber das Stück, um das die Länge des Luftschiffes diejenige des Schattens übertrifft, nämlich der Ausschnitt *M B*, ist größer als der Ausschnitt *M N*, und zwar 1,4 mal größer, weil der Winkel *M B D* fast genau 45 Grad ausmacht. *M B* ist demnach gleich $12 \cdot 1{,}4$; das ergibt nahezu 17 m.
Alles hier Gesagte bezieht sich auf den K e r n schatten des Luftschiffes, einen dunklen und scharfen Schatten, und hat nichts mit dem sogenannten H a l b s c h a t t e n zu tun, der schwach und verschwommen erscheint.
Unsere Berechnung zeigt übrigens, daß, wenn sich an Stelle des Luftschiffes ein kleiner Luftballon mit einem Durchmesser von weniger als 17 m befände, dieser überhaupt keinen vollen Schatten werfen würde: man sähe nur seinen unklaren Halbschatten.

9. Bei der Lösung dieser Aufgabe beginnt man vom Ende. Wir gehen davon aus, daß nach den Umgruppierungen die Anzahl der Streichhölzer in allen Häufchen die gleiche war. Da sich die Gesamtzahl der Hölzchen, nämlich 48, durch die Umgruppierung nicht verändert hat, enthielt also jedes der drei Häufchen zum Schluß 16 Hölzchen.
Es ergibt sich demnach folgendes Bild:

1. Häufchen	2. Häufchen	3. Häufchen
16	16	16

Unmittelbar vorher sind dem 1. Häufchen soviele Hölzchen hinzugefügt worden, wie es bereits enthielt; mit anderen Worten, die Anzahl seiner Hölzchen wurde verdoppelt. Bis zur letzten Umgruppierung enthielt das 1. Häufchen nicht 16, sondern 8 Hölzchen. Im 3. Häufchen dagegen, dem 8 Hölzchen entnommen wurden, haben sich zuvor $16 + 8 = 24$ Hölzchen befunden.
Nunmehr ergibt sich folgende Verteilung:

1. Häufchen	2. Häufchen	3. Häufchen
8	16	24

Weiter: Wir haben gehört, daß vorher aus dem 2. Häufchen soviele Hölzchen zu dem 3. Häufchen hinübergelegt wurden, wie dort bereits vorhanden waren. Demnach ist 24 die verdoppelte Anzahl der Hölzchen, die sich vor der Umgruppierung im 3. Häufchen befunden haben. Hieraus ergibt sich die Verteilung der Hölzchen nach der ersten Umgruppierung:

1. Häufchen	2. Häufchen	3. Häufchen
8	16 + 12 = 28	12

Hiernach ist leicht festzustellen, daß vor der ersten Umgruppierung (das heißt bevor aus dem 1. Häufchen soviele Hölzchen ins 2. Häufchen gelegt wurden, wie es bereits enthielt) die Verteilung der Hölzchen folgendermaßen aussah:

1. Häufchen	2. Häufchen	3. Häufchen
22	14	12

Diese Zahlen entsprechen der Anzahl der Streichhölzer, die sich ursprünglich in den einzelnen Häufchen befunden haben.

10. Auch diese Denkaufgabe ist am einfachsten vom Ende aus zu lösen. Wir wissen, daß sich nach der dritten Verdoppelung 1 Rubel 20 Kopeken im Beutel befanden (diesen Betrag erhielt der Alte beim letzten Mal). Wieviel Geld war es also vor dieser Verdoppelung? Selbstverständlich 60 Kopeken. Diese 60 Kopeken waren übriggeblieben, nachdem dem Alten zum zweitenmal 1 Rubel 20 Kopeken ausgezahlt waren, so daß vor der Auszahlung 1 Rubel 20 Kopeken + 60 Kopeken = 1 Rubel 80 Kopeken im Beutel waren.
Weiter: 1 Rubel 80 Kopeken befanden sich im Beutel nach der zweiten Verdoppelung; vorher waren es im ganzen 90 Kopeken, die übriggeblieben waren, nachdem der Alte erstmalig 1 Rubel 20 Kopeken erhalten hatte. Vor der Auszahlung an den Alten befanden sich folglich 90 Kopeken + 1 Rubel 20 Kopeken = 2 Rubel 10 Kopeken im Beutel. Dies ist der Betrag, der nach der ersten Verdoppelung vorhanden war, während sich vorher um die Hälfte weniger, das heißt 1 Rubel 5 Kopeken im Beutel befanden. Und eben mit diesem Betrag hat der Bauer seine mißglückte Finanzoperation begonnen.
Machen wir die Gegenprobe:

	Inhalt des Beutels:
Nach der 1. Verdoppelung	1 Rubel 5 Kopeken · 2 = 2 Rubel 10 Kopeken
" " 1. Zahlung	2 Rubel 10 Kopeken — 1 Rubel 20 Kopeken = 90 Kopeken
" " 2. Verdoppelung	90 Kopeken · 2 = 1 Rubel 80 Kopeken
" " 2. Zahlung	1 Rubel 80 Kopeken — 1 Rubel 20 Kopeken = 60 Kopeken
" " 3. Verdoppelung	60 Kopeken · 2 = 1 Rubel 20 Kopeken
" " 3. Zahlung	1 Rubel 20 Kopeken — 1 Rubel 20 Kopeken = 0

11. Unser Kalender ist aus dem Kalender der alten Römer hervorgegangen. Die alten Römer aber begannen das Jahr (bis zu Julius Cäsar) nicht mit dem 1. Januar, sondern mit dem 1. März. Infolgedessen war der Dezember damals der zehnte Monat. Nach der Vorverlegung des Jahresbeginns auf den 1. Januar im Jahre 46 vor unserer Zeitrechnung wurden die Monatsnamen unverändert beibehalten. Hierauf ist es zurückzuführen, daß bei einigen Monaten eine Unstimmigkeit zwischen ihren Namen und ihrer Stellung im Jahresablauf besteht, wie es aus der nachstehenden Tabelle hervorgeht:

	Name des Monats		Bedeutung
9. Monat	September	Сентябрь	siebenter
10. Monat	Oktober	Октябрь	achter
11. Monat	November	Ноябрь	neunter
12. Monat	Dezember	Декабрь	zehnter

12. Wiederholen wir, was mit der gedachten Zahl vorgenommen wurde. Gleich zu Anfang wurde zu dieser dreistelligen Zahl dieselbe Zahl nochmals hinzugefügt. Das ist dasselbe, als ob man hinter die Zahl drei Nullen setzt und dann die ursprüngliche Zahl hinzuzählt; zum Beispiel:

$$872\,872 = 872\,000 + 872.$$

Nun sehen wir, was eigentlich mit der Zahl vorgenommen wurde: man hat sie mit 1000 multipliziert und sie dann ein weiteres Mal hinzugefügt; kürzer gesagt, man hat sie mit 1001 multipliziert.

Und was wurde mit dem Ergebnis weiter gemacht? Man teilte es der Reihe nach durch 7, durch 11 und durch 13. Das läuft im Endeffekt darauf hinaus, daß man es durch $7 \cdot 11 \cdot 13$, das heißt durch 1001 geteilt hat.

Die fragliche Zahl wurde also zuerst mit 1001 multipliziert und anschließend durch 1001 geteilt. Ist es da verwunderlich, daß als Resultat die ursprüngliche Zahl herauskam?

Drei Rechenkunststücke

Nachdem wir das Kapitel über die im Erholungsheim vorgebrachten Denkaufgaben abgeschlossen haben, wollen wir auch noch drei Rechenkunststücke mitteilen, mit denen ihr euren Freunden die Zeit vertreiben könnt. Zwei bestehen im Erraten von Zahlen, beim dritten sind die Eigentümer von Gegenständen ausfindig zu machen.

Es handelt sich um alte, euch vielleicht sogar bekannte Rechenkunststücke, aber wahrscheinlich sind sich nicht alle darüber im klaren, worauf sie beruhen. Ohne die theoretische Grundlage eines Rechenkunststückes zu kennen, kann man es aber nicht bewußt und sicher durchführen. Die Ergründung der ersten beiden Kunststücke erfordert einen sehr bescheidenen und durchaus nicht anstrengenden Ausflug in das Gebiet der Anfangsgründe der Algebra.

13. Die durchgestrichene Ziffer

Fordere einen deiner Freunde auf, sich irgendeine mehrstellige Zahl zu denken. Nehmen wir an, er habe die Zahl 847 gewählt. Von dieser Zahl soll er jetzt die Quersumme ($8 + 4 + 7 = 19$) ermitteln und sie von der gedachten Zahl abziehen. Er kommt dann auf

$$847 - 19 = 828.$$

Von der so ermittelten Zahl soll dein Freund jetzt eine beliebige Ziffer durchstreichen und dir alle übrigen Ziffern mitteilen. Du bist dann in der Lage, ihm sofort die fehlende Ziffer zu nennen, obwohl du die gedachte

Zahl nicht kennst und nicht gesehen hast, was mit ihr vorgenommen wurde. Auf welche Weise ist dir das möglich, und wie ist dieses Rätsel zu erklären? Die Sache ist sehr einfach. Du findest die Ziffer heraus, die zusammen mit der Summe der dir mitgeteilten Ziffern die nächste Zahl ergibt, die sich ohne Rest durch 9 teilen läßt. Wenn zum Beispiel an der Zahl 828 die erste Ziffer (8) durchgestrichen wurde und dir die Ziffern 2 und 8 genannt sind, ermittelst du, daß nach einer Addition der Ziffern $(2 + 8 = 10)$ die nächste Zahl, die sich durch 9 teilen läßt, 18 ist, und daß zu dieser Zahl 8 fehlen. Und 8 ist zugleich die durchgestrichene Ziffer.

Warum sich das so ergibt? Aus folgendem Grunde: wenn man von einer beliebigen Zahl ihre Quersumme abzieht, muß eine Zahl übrigbleiben, die sich durch 9 teilen läßt, mit anderen Worten eine solche, deren Ziffern in ihrer Quersumme eine durch 9 teilbare Zahl ergeben. Und in der Tat: bezeichnen wir einmal bei der gedachten Zahl die Ziffer der Hunderter mit a, die Ziffer der Zehner mit b und die Ziffer der Einer mit c. Die Anzahl der Einer in dieser Zahl ist also

$$100\,a + 10\,b + c.$$

Nun wird von dieser Zahl die Summe ihrer Ziffern $a + b + c$ abgezogen:

$$100\,a + 10\,b + c - (a + b + c) = 99\,a + 9\,b = 9\,(11\,a + b).$$

Aber $9\,(11\,a + b)$ läßt sich natürlich durch 9 teilen. Wenn von einer Zahl die Summe ihrer Ziffern abgezogen wird, muß sich daher stets ein Rest ergeben, der sich durch 9 teilen läßt.

Es kann bei diesem Rechenkunststück vorkommen, daß auch schon die Summe der dir mitgeteilten Ziffern durch 9 teilbar ist (zum Beispiel 4 und 5). In einem solchen Falle handelt es sich bei der durchstrichenen Ziffer entweder um eine 0 oder um eine 9. Deine Antwort muß daher lauten: 0 oder 9.

Hier noch einmal dasselbe Rechenkunststück in abgeänderter Form. Anstatt von der gedachten Zahl die Summe ihrer Ziffern abzuziehen, kann man eine Zahl zum Abzug bringen, die sich aus einer beliebigen Umstellung der Ziffern ergibt. Aus der Zahl 8247 zum Beispiel kann man durch Umstellung der Ziffern die Zahl 2748 bilden und diese von der ursprünglichen Zahl abziehen. (Wenn die neugebildete Zahl größer als die ursprüngliche ist, wird die kleinere von der größeren abgezogen.) Weiter verfährt man in gleicher Weise wie bei dem ersten Beispiel: $8247 - 2748 = 5499$. Wenn die Ziffer 4 durchgestrichen wurde und dir die Ziffern 5, 9, 9 genannt sind, stellst du fest, daß die Summe dieser Ziffern 23 beträgt und daß die nächste durch 9 teilbare Zahl 27 ist. Die durchgestrichene Zahl ist also $27 - 23 = 4$.

14. Das Erraten einer Zahl

Veranlasse deinen Freund, sich eine dreistellige Zahl zu denken, deren erste und dritte Ziffer nicht Nullen sind und sich um mindestens zwei Ziffern unterscheiden, und dazu eine zweite Zahl zu bilden, die die gleichen Ziffern, nur in umgekehrter Reihenfolge enthält. Nun soll er die kleinere Zahl von der größeren abziehen. Dann ist die sich ergebende Restzahl mit der Zahl in umgekehrter Ziffernfolge zu addieren. Ohne deinem Kameraden irgendeine Frage zu stellen, teilst du ihm dann das Endresultat mit.

Wenn sich dein Freund zum Beispiel die Zahl 467 gedacht hätte, müßte er folgende Rechnung ausführen:

$$467;\ 764;\ 764 - 467 = 297;\ 297 + 792 = 1089.$$

Dieses Endresultat hast du deinem Kameraden auch mitgeteilt. Wie ließ es sich ermitteln?
Betrachten wir die Aufgabe in allgemeiner Form. Wir nehmen eine Zahl mit den Ziffern a, b, c. Sie wird sich folgendermaßen darstellen:

$$100\,a + 10\,b + c.$$

Mit umgekehrter Reihenfolge der Ziffern sieht die Zahl so aus:

$$100\,c + 10\,b + a.$$

Die Differenz zwischen der ersten und zweiten Zahl ist

$$99\,a - 99\,c.$$

Wir nehmen nun folgende Umgestaltungen vor:

$$\begin{aligned} 99\,a - 99\,c = 99\,(a-c) &= 100\,(a-c) - (a-c) \\ &= 100\,(a-c) - 100 + 100 - 10 + 10 - a \pm c \\ &= 100\,(a-c-1) + 90 + (10 - a + c). \end{aligned}$$

Die Differenz besteht demnach aus folgenden drei Ziffern:

Ziffer der	Hunderter:	$a - c - 1$
" "	Zehner:	9
" "	Einer:	$10 + c - a$.

Mit umgekehrter Reihenfolge der Ziffern stellt sich die Zahl folgendermaßen dar:

$$100\,(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1).$$

Die Addition beider Formeln

$$\begin{array}{r} 100\,(a-c-1) + 90 + (10 + c - a) \\ + \ 100\,(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1) \end{array}$$

ergibt

$$100 \cdot 9 + 180 + 9 = 1089.$$

Wie immer die Ziffern a, b, c lauten mögen, das Endergebnis ist jedesmal das gleiche: 1089. Somit ist es nicht schwer, das Resultat der Ausrechnungen zu erraten: du weißt es im voraus.

Begreiflicherweise läßt sich dieses Rechenkunststück nicht zweimal im selben Kreise vorführen; das Geheimnis würde entdeckt werden.

15. Wer hat was genommen?

Zur Vorführung dieses geistreichen Kunststücks muß man drei kleine Gegenstände zur Hand haben, die sich bequem in die Tasche stecken lassen — zum Beispiel einen Bleistift, einen Schlüssel und ein Taschenmesser. Außerdem wird ein Teller mit 24 Nüssen auf den Tisch gestellt; wenn Nüsse nicht vorhanden sind, kann man statt ihrer auch Dominosteine, Zündhölzchen oder dergleichen nehmen.

Du forderst drei Freunde auf, während deiner Abwesenheit aus dem Zimmer je einen der vorgenannten Gegenstände in ihrer Tasche zu verbergen, und erbietest dich zu erraten, wer welchen Gegenstand genommen hat.

Das weitere spielt sich folgendermaßen ab: Nachdem deine Freunde die Gegenstände in die Tasche gesteckt haben und du ins Zimmer zurückgekehrt bist, beginnst du zunächst damit, daß du ihnen einige Nüsse aus dem Teller zur Aufbewahrung aushändigst. Dem ersten gibst du eine Nuß, dem zweiten zwei und dem dritten drei Nüsse. Dann verläßt du erneut das Zimmer, nachdem du deinen Freunden zuvor folgende Anweisung gegeben hast: Jeder von ihnen soll sich vom Teller weitere Nüsse nehmen, und zwar in folgender Anzahl: der Inhaber des Bleistifts nimmt genau soviel Nüsse, wie ihm ausgehändigt wurden; der Inhaber des Schlüssels nimmt die d o p p e l t e Anzahl der ihm ausgehändigten Nüsse und der Inhaber des Taschenmessers die v i e r fache Anzahl der ihm übergebenen Nüsse.

Die restlichen Nüsse bleiben auf dem Teller.

Sobald alles dies ausgeführt ist und du zur Rückkehr aufgefordert wurdest, wirfst du beim Eintritt ins Zimmer einen Blick auf den Teller und sagst dann jedem der Freunde, welchen Gegenstand er in der Tasche verborgen hat.

Dieses Kunststück ist um so verblüffender, als es ohne jede heimliche Mithilfe ausgeführt wird und niemand da ist, der dir etwa verabredete Zeichen geben könnte. Es enthält keinerlei Vortäuschung, sondern beruht ausschließlich auf mathematischer Berechnung. Du ermittelst den Inhaber jedes einzelnen Gegenstandes einzig und allein auf Grund der Anzahl der auf dem Teller zurückgebliebenen Nüsse. Diese Anzahl ist nicht groß (zwischen 1 und 7) und kann auf den ersten Blick festgestellt werden.

Aber wie ist es möglich, auf Grund der restlichen Nüsse zu ermitteln, wer welchen Gegenstand genommen hat?
Sehr einfach: je nachdem, wie die Gegenstände auf die Freunde verteilt sind, ergibt sich eine unterschiedliche Anzahl restlicher Nüsse. Wir werden uns hiervon gleich überzeugen.
Nehmen wir an, deine Freunde hießen Dieter, Georg und Klaus. Wir bezeichnen sie mit den Anfangsbuchstaben der Namen: *D*, *G*, *K*. Die Gegenstände bezeichnen wir ebenfalls durch Buchstaben: den Bleistift mit *a*, den Schlüssel mit *b*, das Messer mit *c*. Wie können die Gegenstände unter drei Personen verteilt sein? Auf sechs Arten:

D	G	K
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

Andere Möglichkeiten gibt es nicht. Die vorstehende Tabelle erschöpft alle Umstellungsmöglichkeiten.
Wir untersuchen nun, welche Restzahlen jeder einzelnen dieser sechs Möglichkeiten entsprechen.

D	G	K	Anzahl der genommenen Nüsse	Summe	Rest
a	b	c	$1+1=2;\ 2+4=6;\ 3+12=15$	23	1
a	c	b	$1+1=2;\ 2+8=10;\ 3+6=9$	21	3
b	a	c	$1+2=3;\ 2+2=4;\ 3+12=15$	22	2
b	c	a	$1+2=3;\ 2+8=10;\ 3+3=6$	19	5
c	a	b	$1+4=5;\ 2+2=4;\ 3+6=9$	18	6
c	b	a	$1+4=5;\ 2+4=6;\ 3+3=6$	17	7

Du siehst, daß die Restzahl jedesmal anders ist. Sobald du dich von der Restzahl überzeugt hast, kannst du infolgedessen leicht feststellen, wie die Gegenstände unter deinen Kameraden verteilt sind. Du gehst nochmals, zum drittenmal, aus dem Zimmer und blickst in dein Notizbuch, in dem die vorstehend aufgeführte Tabelle enthalten ist (eigentlich brauchst du nur die erste und letzte Rubrik). Sie im Gedächtnis zu behalten, ist schwer und auch nicht erforderlich. Aus der Tabelle ersiehst du, wer welchen Gegenstand in der Tasche hat. Wenn sich zum Beispiel auf dem Teller 5 restliche Nüsse befinden, so besagt dies (der Fall *b*, *c*, *a*), daß sich

der Schlüssel bei Dieter,
das Messer bei Georg,
der Bleistift bei Klaus befinden.

Damit das Kunststück gelingt, mußt du dir genau merken, wieviel Nüsse du jedem der Kameraden gegeben hast. Es empfiehlt sich daher, die Verteilung nach dem Alphabet vorzunehmen, wie wir es auch in vorliegendem Falle getan haben.

Noch ein paar Denkaufgaben

16. Der Bindfaden

(Diese Aufgabe stammt von dem englischen Erzähler Barry Paine.)

„Schon wieder Bindfaden?" fragte die Mutter und zog die Hände aus dem Wäschekübel. „Man könnte meinen, ich bestünde aus Bindfaden. Dauernd dasselbe: Bindfaden und nochmals Bindfaden. Ich habe dir doch gestern ein tüchtiges Knäuel gegeben. Wozu brauchst du eine solche Unmenge? Was hast du damit gemacht?"

„Was ich damit gemacht habe?" entgegnete der Junge. „Erstens hast du die Hälfte selbst wieder zurückgenommen."

„Ja, was meinst du denn, womit ich die Wäschepakete verschnüren sollte?"

„Und die Hälfte von dem, was übriggeblieben ist, hat Tom genommen, weil er im Tümpel Stichlinge angeln wollte."

„Seinem älteren Bruder darf man nichts abschlagen."

„Ich hab's auch nicht getan. Es war ganz wenig übriggeblieben, und auch davon hat noch die Hälfte der Vater genommen, um seine Hosenträger zu reparieren, die ihm gerissen sind, als er so über die Panne mit dem Auto lachte. Und dann brauchte die Schwester vom Rest noch zwei Fünftel, um den Haarknoten zusammenzubinden."

„Und was hast du mit dem Rest gemacht?"

„Mit dem Rest? Übriggeblieben waren ja nur noch 30 cm! Und aus solch einem Endchen soll man eine Telefonleitung machen . . . ."

Wie lang war der Bindfaden ursprünglich?

17. Socken und Handschuhe

In einem Textilgeschäft liegen in einer Schublade 10 Paar braune und 10 Paar schwarze Socken, in der anderen 10 Paar braune und ebensoviel Paar schwarze Handschuhe. Wieviel Socken und Handschuhe müssen aus jeder Schublade genommen werden, um je ein Paar Socken und Handschuhe (gleich welcher Farbe) zusammenzustellen?

18. Die Lebensdauer des Haars

Wieviel Haare hat der Mensch durchschnittlich auf dem Kopf? Man hat das berechnet: etwa 150 000. Mancher wird sich vielleicht wundern, daß man das feststellen konnte; sollten wirklich alle Haare eins nach dem anderen gezählt sein? Nein, das nicht; man hat nur gezählt, wieviel Haare sich auf einem Quadratzentimeter der Kopffläche befinden. Wenn man dies weiß und außerdem die mit Haaren bedeckte Fläche kennt, ist es nicht schwer, die Durchschnittszahl der Haare auf dem Kopf festzustellen. Kurz gesagt, die Zahl der Haare ist von den Anatomen mit derselben Methode berechnet worden, die bei der Forstkultur zum Zählen der Bäume angewandt wird. Festgestellt ist auch, wieviel Haare durchschnittlich im Monat ausfallen: etwa 3000.

Auf welche Weise kann man an Hand dieser Unterlagen berechnen, wielange sich jedes Haar — im Durchschnitt natürlich — auf dem Kopf hält?

19. Der Monatsverdienst

Als Anfängerin habe ich im vergangenen Monat einschließlich der Überstunden 250 Mark verdient. Das Grundgehalt macht 200 Mark mehr aus als die Überstunden. Wie hoch ist mein Verdienst ohne Überstunden?

20. Der Schilauf

Ein Schiläufer hat berechnet, daß er, wenn er 10 km in der Stunde laufen würde, eine Stunde n a c h 12 Uhr mittags am Bestimmungsort ankäme; bei einer Geschwindigkeit von 15 km in der Stunde würde er hingegen eine Stunde v o r 12 Uhr mittags eintreffen.
Mit welcher Geschwindigkeit muß er laufen, um genau um 12 Uhr mittags einzutreffen?

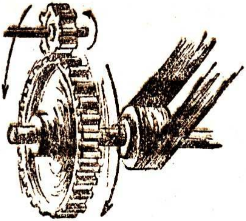
21. Zwei Arbeiter

Zwei Arbeiter, ein alter und ein junger, wohnen im selben Hause und arbeiten in derselben Fabrik. Der junge Arbeiter braucht für den Weg vom Hause bis zur Fabrik 20, der alte 30 Minuten. In wieviel Minuten holt der junge den alten ein, wenn letzterer 5 Minuten eher aus dem Hause gegangen ist?

22. Das Abtippen des Berichts

Zwei Maschinenschreiberinnen wurde das Abtippen eines Berichts übertragen. Die geübtere von ihnen könnte die ganze Arbeit in zwei Stunden, die weniger geübte in drei Stunden ausführen.
Wieviel Zeit benötigen sie für das Abschreiben des Berichts, wenn sie die Arbeit so verteilen, daß sie sich innerhalb der kürzesten Frist ausführen läßt? Aufgaben dieser Art werden in der Regel nach dem Muster der bekannten Aufgabe von der Badewanne und den beiden Wasserhähnen gelöst. Man würde also in diesem Falle feststellen, welchen Teil der ganzen Arbeit jede der Maschinenschreiberinnen in einer Stunde erledigt, würde beide Bruchzahlen addieren und eine Eins durch ihre Summe teilen. Könnt ihr vielleicht für die Lösung derartiger Aufgaben eine andere, von dem üblichen Schema abweichende Methode finden?

23. Die beiden Zahnräder



Ein Zahnrad mit 8 Zähnen ist mit einem Rad verbunden, das 24 Zähne hat (siehe Zeichnung). Wenn das große Rad sich dreht, wird es von dem kleinen Zahnrädchen umkreist.
Die Frage ist, wie oft sich das Zahnrädchen um seine eigene Achse dreht, bis es einmal um das große Zahnrad herumkommt.

24. Wie alt?

Ein Freund von Denkaufgaben wurde gefragt, wie alt er sei. Die Antwort war verwickelt:
Multiplizieren Sie mein Alter nach drei Jahren mit drei und ziehen Sie davon mein mit drei multipliziertes Alter von vor drei Jahren ab, — dann haben Sie gerade mein jetziges Alter. Wie alt ist er?

25. Vater und Tochter

„Wie alt ist eigentlich Herr Schulze?"
„Wir wollen einmal überlegen. Vor achtzehn Jahren, als ich ihn kennenlernte, war er, wie ich mich erinnere, genau dreimal so alt wie seine Tochter."
„Wie ist das möglich? Soviel ich weiß, ist er jetzt gerade doppelt so alt wie seine Tochter. Hat er vielleicht noch eine zweite Tochter?"
„Nein, er hat nur die eine, — und es ist daher auch nicht schwer festzustellen, wie alt Vater und Tochter sind."
Nun, wie alt sind sie wohl?

26. Einkäufe

Als ich, so erzählt der Verfasser dieses Heftes, neulich einkaufen ging, hatte ich ungefähr 15 Rubel in der Geldtasche, und zwar in Rubelstücken und in Zwanzigkopekenstücken. Als ich zurückkam, enthielt die Geldtasche soviel Rubelstücke, wie sie ursprünglich Zwanzigkopekenstücke enthalten hatte, und soviel Zwanzigkopekenstücke, wie es vorher Rubelstücke gewesen sind. Der ganze Rest in der Geldtasche aber machte ein Drittel der Summe aus, die ich mitgenommen hatte.

Wieviel habe ich für die Einkäufe ausgegeben?

Auflösungen der Denkaufgaben 16–26

16. Nachdem die Mutter die Hälfte zurückgenommen hatte, war nur noch die Hälfte da; nach der Abgabe an den älteren Bruder war noch $^1/_4$, nach der Abgabe an den Vater $^1/_8$ und an die Schwester $^1/_8 \cdot {}^3/_5 = {}^3/_{40}$ vorhanden. Wenn 30 cm $^3/_{40}$ der ursprünglichen Länge ausmachen, so betrug diese $30 : {}^3/_{40} = 400$ cm oder 4 m.

17. Es genügen 3 Socken, da 2 von ihnen in jedem Falle von der gleichen Farbe sein werden. Nicht ganz so einfach ist es mit den Handschuhen, weil sich diese nicht nur durch die Farbe unterscheiden, sondern auch dadurch, daß es sich zur Hälfte um rechte und zur Hälfte um linke handelt. Es müssen mindestens 21 Handschuhe sein. Nimmt man eine kleinere Anzahl, zum Beispiel 20 Stück, heraus, so könnte es vorkommen, daß alle für dieselbe Hand sind (10 braune und 10 schwarze für die linke Hand).

18. Zuletzt fällt naturgemäß das Haar aus, das heute am jüngsten von allen, nämlich einen Tag alt ist.

Untersuchen wir nun, nach welcher Zeit es zum Ausfallen an die Reihe kommt. Von den 150 000 Haaren, die sich heute auf dem Kopf befinden, fallen im ersten Monat 3000, in zwei Monaten 6000, in einem Jahr $3000 \cdot 12 = 36\,000$ aus. Es werden folglich etwas mehr als vier Jahre vergehen, bis das letzte Haar ausfällt. Damit haben wir das Durchschnittsalter des menschlichen Haares ermittelt: etwas über 4 Jahre.

19. Mancher wird, ohne zu überlegen, die Antwort zur Hand haben: 200 Mark. Aber das stimmt nicht: denn dann würde das Grundgehalt ja nur um 150 Mark und nicht um 200 Mark größer sein als der Betrag für die Überstunden.

Die Aufgabe ist folgendermaßen zu lösen: Wir wissen, daß wir, wenn wir zu dem Betrag für Überstunden 200 Mark hinzufügen, auf das Grundgehalt kommen. Wenn wir zu 250 Mark 200 Mark hinzufügen, kommen wir also auf den Betrag, der zwei Grundgehältern entspricht. Das verdoppelte Grundgehalt macht demnach 450 Mark aus. Hieraus ergibt sich, daß das Grundgehalt für einen Monat 225 Mark beträgt und daß der Rest der 250 Mark, nämlich 25 Mark, den für Überstunden erhaltenen Betrag darstellt.

Prüfen wir nach: das Grundgehalt von 225 Mark übersteigt den für Überstunden erhaltenen Betrag von 25 Mark um 200 Mark — wie es in der Aufgabe verlangt ist.

20. Diese Aufgabe ist in zweifacher Hinsicht interessant.
Erstens kann sie leicht zu dem Gedanken verleiten, daß die gesuchte Zahl in der Mitte zwischen 10 und 15 km liegt, also $12\,^1/_2$ km in der Stunde entspricht. Wir können uns aber leicht davon überzeugen, daß diese Annahme nicht richtig ist. Angenommen, daß die Strecke a km lang sei: dann wäre der Läufer bei einer Stundengeschwindigkeit von 15 km $\frac{a}{15}$ Stunden, bei einer Stundengeschwindigkeit von 10 km $\frac{a}{10}$ Stunden und bei einer Stundengeschwindigkeit von $12^1/_2$ km $\frac{a}{12^1/_2}$ oder $\frac{2a}{25}$ Stunden unterwegs. Aber dann gilt die Gleichung:

$$\frac{2a}{25}-\frac{a}{15}=\frac{a}{10}-\frac{2a}{25},$$

denn jede dieser Differenzen entspricht einer Stunde. Kürzen wir durch a, so erhalten wir:

$$\frac{2}{25}-\frac{1}{15}=\frac{1}{10}-\frac{2}{25}$$

oder umgestellt:

$$\frac{4}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10},$$

also eine falsche Gleichung, denn: $\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}$, das heißt $\frac{4}{24}$ und nicht $\frac{4}{25}$.

Die zweite Eigenart der Aufgabe besteht nämlich darin, daß sie sich nicht nur ohne Gleichungen, sondern sogar einfach im Kopf lösen läßt.

Wir folgern so: wenn der Schiläufer bei einer Stundengeschwindigkeit von 15 km zwei Stunden länger (das heißt so lange wie bei einer 10-km-Geschwindigkeit) unterwegs wäre, würde er 30 km mehr zurücklegen, als er es tatsächlich getan hat. In einer Stunde legt er, wie wir wissen, 5 km mehr zurück; er würde also 30 : 5 = 6 Stunden unterwegs sein. Hieraus ergibt sich die Dauer des Laufs bei einer 15-km-Geschwindigkeit, nämlich

$6 - 2 = 4$ Stunden. Zugleich steht auch die Länge der zurückgelegten Strecke fest: $15 \cdot 4 = 60$ km.
Nun kann man leicht ermitteln, mit welcher Stundengeschwindigkeit der Schiläufer laufen muß, um den Bestimmungsort genau um 12 Uhr mittags zu erreichen beziehungsweise um die Strecke in 5 Stunden zurückzulegen:

$$60 : 5 = 12 \text{ km.}$$

Durch eine Nachprüfung kann man sich leicht davon überzeugen, daß die Rechnung stimmt.

21. Diese Aufgabe läßt sich gleichfalls ohne Gleichungen und obendrein auf verschiedene Arten lösen.
Zunächst die eine Art: Der junge Arbeiter legt in 5 Minuten $^1/_4$, der alte $^1/_6$ des Weges zurück, nämlich weniger als der junge.

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

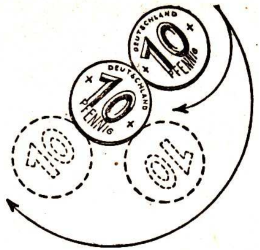
Da der alte Arbeiter $^1/_6$ des Weges voraus hat, wird er von dem jungen in

$$\frac{1}{6} : \frac{1}{12} = 2,$$

das heißt in zwei fünfminütigen Zeitspannen, also in 10 Minuten eingeholt.
Eine andere Art ist einfacher: Für den ganzen Weg braucht der alte Arbeiter 10 Minuten mehr als der junge. Wenn der alte 10 Minuten früher als der junge aus dem Hause gehen würde, kämen beide gleichzeitig in der Fabrik an. Wenn er aber nur 5 Minuten früher weggeht, holt ihn der junge gerade auf der Mitte des Weges, das heißt nach 10 Minuten, ein. Denn den ganzen Weg legt der junge in 20 Minuten zurück.
Es sind auch noch einige weitere Lösungsarten möglich.

22. Eine von der Schablone abweichende Lösung der Aufgabe ist folgende: Zunächst legen wir uns die Frage vor, wie die Maschinenschreiberinnen die Arbeit unter sich verteilen müssen, um gleichzeitig mit ihr fertig zu werden. (Selbstverständlich kann die Arbeit innerhalb der kürzesten Frist nur dann erledigt werden, wenn sie keine Unterbrechung erleidet.) Da die geübtere von beiden $1\frac{1}{2}$ mal schneller schreibt als die weniger geübte, muß der Anteil der ersteren natürlich $1^1/_2$ mal größer sein als der Anteil der anderen, damit beide gleichzeitig fertig werden. Hieraus ergibt sich, daß die erste Maschinenschreiberin $^3/_5$ und die zweite $^2/_5$ des Berichts zum Abschreiben zu übernehmen hat.
Damit ist die Aufgabe beinahe schon gelöst. Zu ermitteln bleibt nur noch, in welcher Zeit die erste Maschinenschreiberin mit den $^3/_5$ des Berichts fertig wird. Die ganze Arbeit könnte sie, wie wir wissen, in 2 Stunden ausführen; für $^3/_5$ der Arbeit braucht sie demnach $2 \cdot {}^3/_5 = 1^1/_5$ Stunden. In der gleichen Zeit muß auch die zweite mit ihrem Anteil an der Arbeit fertig werden. Die kürzeste Frist, innerhalb welcher der Bericht von den beiden Maschinenschreiberinnen abgetippt werden kann, ist also 1 Stunde 12 Minuten.

23. Wenn ihr etwa meinen solltet, daß sich das Zahnrädchen dreimal um seine Achse dreht, so irrt ihr euch: es macht nicht drei, sondern vier Umdrehungen.



Um sich deutlich vor Augen zu führen, wie das zusammenhängt, lege man auf ein glattes Stück Papier zwei gleichartige Münzen, etwa zwei Zehnpfennigstücke, wie auf der Zeichnung. Indem man die untere Münze mit dem Finger festhält, läßt man die obere Münze um den Rand der ersteren rollen. Dabei zeigt sich eine überraschende Tatsache. Sobald die obere Münze die untere zur Hälfte umrollt hat und an deren unteren Rand angelangt ist, hat sie bereits eine volle Drehung um ihre Achse ausgeführt, was an der Stellung der Ziffern erkennbar ist. Und wenn sie ganz um die festliegende Münze herumgekommen ist, hat sie sich nicht einmal, sondern zweimal um ihre Achse gedreht.

Überhaupt, wenn ein Körper kreist und sich zugleich um seine Achse dreht, führt er eine Umdrehung mehr aus, als man unmittelbar errechnet. Deshalb dreht sich auch unsere Erde, während sie einmal die Sonne umkreist, nicht $365^1/_4$ mal, sondern $366^1/_4$ mal um ihre eigene Achse, wenn man die Drehungen nicht in bezug auf die Sonne, sondern in bezug auf die Sterne zählt. Ihr werdet nun begreifen, warum ein Sternentag kürzer ist als ein Sonnentag.

24. Die Lösung scheint zuerst ziemlich verwickelt zu sein, aber die Aufgabe läßt sich sehr einfach lösen, wenn man sich der Algebra bedient und eine Gleichung aufstellt. Die gesuchte Zahl bezeichnen wir mit dem Buchstaben x. Das Alter nach drei Jahren ist dann $x + 3$, und das Alter vor drei Jahren $x - 3$. Wir kommen zu der Gleichung

$$3\,(x + 3) - 3\,(x - 3) = x$$

und zu dem Resultat $x = 18$. Er ist also 18 Jahre alt.
Nehmen wir eine Nachprüfung vor. Nach drei Jahren ist er 21 Jahre alt, vor drei Jahren war er 15 Jahre alt. Die Differenz

$$3 \cdot 21 - 3 \cdot 15 = 63 - 45 = 18$$

entspricht dem jetzigen Alter des Betreffenden.

25. So wie die vorige, läßt sich auch diese Aufgabe unter Anwendung einer recht einfachen Gleichung lösen. Wenn die Tochter jetzt x Jahre alt ist, so ist das Alter des Vaters 2 x. Vor achtzehn Jahren war jeder von ihnen um 18 Jahre jünger: der Vater war $2x - 18$, die Tochter $x - 18$ Jahre alt. Dabei wissen wir, daß der Vater damals dreimal so alt war wie die Tochter:

$$3\,(x - 18) = 2x - 18.$$

Als Resultat dieser Gleichung erhalten wir $x = 36$; die Tochter ist jetzt 36 Jahre, der Vater 72 Jahre alt.

26. Wir bezeichnen die ursprüngliche Zahl von Rubelstücken mit x und diejenige der Zwanzigkopekenstücke mit y.
Als ich aus dem Hause ging, um Einkäufe zu machen, hatte ich also

$$100\,x + 20\,y \text{ Kopeken,}$$

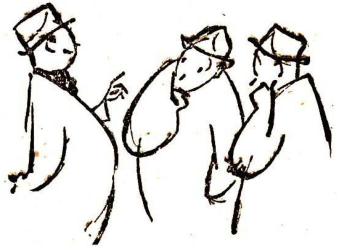
und als ich zurückkehrte,

$$100\,y + 20\,x \text{ Kopeken.}$$

Da letztere Summe, wie wir wissen, dreimal so klein wie die erstere ist, ergibt sich:

$$3\,(100\,y + 20\,x) = 100\,x + 20\,y.$$

Vereinfachen wir diese Gleichung, so erhalten wir $x = 7\,y$.
Wenn wir y mit 1 annehmen, so ist $x = 7$. Das heißt, ich hätte ursprünglich 7 Rubel 20 Kopeken gehabt, das steht nicht in Einklang mit den Bedingungen der Aufgabe („etwa 15 Rubel").
$y = 3$ ergibt eine zu hohe Summe, nämlich 21 Rubel 60 Kopeken. Also ist $y = 2$. Die einzig zutreffende Antwort lautet folglich: 14 Rubel 40 Kopeken. Nach Beendigung der Einkäufe hatte ich 2 Rubelstücke und 14 Zwanzigkopekenstücke, das heißt $200 + 280 = 480$ Kopeken, was wirklich ein Drittel des ursprünglichen Betrages ausmacht; denn $1440 : 3 = 480$. Ich hatte somit $1440 - 480 = 960$ Kopeken ausgegeben. Die Einkäufe kosteten also 9 Rubel 60 Kopeken.



Ein Frühstück mit Denkaufgaben

Seite

1. Das Eichhörnchen auf der Wiese ... 3
2. Die gemeinsame Autofahrt ... 5
3. Die Arbeit der Pioniergruppen ... 6
4. Wer zählte mehr? ... 6
5. Großvater und Enkel ... 7
6. Eisenbahnfahrkarten ... 7
7. Der Flug des Luftschiffs ... 8
8. Der Schatten ... 8
9. Eine Aufgabe mit Streichhölzern ... 9
10. Der tückische Baumstumpf ... 9
11. Eine Aufgabe über den Dezember ... 11
12. Ein Rechenkunststück ... 12

Auflösungen der Aufgaben 1—12 ... 13

Drei Rechenkunststücke

13. Die durchgestrichene Ziffer ... 19
14. Das Erraten einer Zahl ... 21
15. Wer hat was genommen? ... 22

Noch ein paar Denkaufgaben

16. Der Bindfaden ... 24
17. Socken und Handschuhe ... 24
18. Die Lebensdauer des Haars ... 25
19. Der Monatsverdienst ... 25
20. Der Schilauf ... 25
21. Zwei Arbeiter ... 25
22. Das Abtippen des Berichts ... 26
23. Die beiden Zahnräder ... 26
24. Wie alt? ... 26
25. Vater und Tochter ... 26
26. Einkäufe ... 27

Auflösungen der Aufgaben 16—26 ... 27

Dieses Bändchen enthält den ersten Teil des Buches „Lebendige Mathematik (Mathematische Geschichten und Denkaufgaben)" von J. I. Perelman, — einem sowjetischen Schriftsteller, der eine ganze Anzahl solcher Bücher geschrieben hat. Vier weitere Hefte, die dem gleichen Werk entnommen sind, sollen folgen:

„Denkaufgaben mit Zahlenriesen"

„Mathematik in Spielen"

„Geometrische Denkaufgaben" und

„Versteht ihr zu zählen?"

Zum Teil sind es ganz neue Denkaufgaben, die Perelman uns bringt, zum Beispiel die Krokett-Aufgaben in „Mathematik in Spielen".

Um diese Bücher zu verstehen, braucht man kein großer Mathematiker zu sein. Sicher kommt ihr mit dem aus, was ihr in der Schule gelernt habt, nämlich mit den Regeln der Arithmetik und den allgemeinen Grundzügen der Geometrie. Nur ein kleiner Teil der Aufgaben erfordert die Aufstellung und Lösung einfacher Gleichungen. Trotzdem geben sie manche Nuß zu knacken.

Wir hoffen, daß ihr viel Spaß an dem Heft hattet. Schreibt uns einmal, welche Aufgaben euch besonders gefallen haben. Weiter möchten wir gern wissen:

1. Welche Aufgaben sind euch nicht klar geworden?
2. Welche Aufgaben habt ihr anders gelöst?
3. Wer stellt die Aufgabe 14 so, daß auch Nullen vorkommen können?

Bitte, gebt unbedingt Alter und Schulklasse an. Die Einsender, die die besten und ausführlichsten Antworten schicken, erhalten Buchprämien.

Anschrift:
Der Kinderbuchverlag GmbH
Berlin C 2, Monbijouplatz 4

Unsere Welt

Gruppe I

- Märchen und Geschichten
- Fahrten und Abenteuer
- Menschen und Tiere
- Singen und Musizieren
- Aus fernen Ländern
- Dichtung und Wahrheit
- Unsere Schule
- Bilder und Bauten
- Wir diskutieren
- Für die gerechte Sache
- Zeitgenossen erzählen
- Der Vorhang geht auf
- Spiel und Sport
- Unsere Heimat

Gruppe II

- Mathematik
- Physik und Geophysik
- Chemie
- Biologie
- Geographie und Geologie
- Astronomie und Astrophysik
- Aus der Geschichte der Naturwissenschaften

Gruppe III

- Wie wir uns nähren und kleiden
- In Werkstatt und Betrieb
- Mit Werkzeug und Maschine
- Wir bauen Häuser, Dörfer, Städte
- Auf Wegen, Straßen und Brücken
- Wie der Mensch die Erde verändert
- Aus der Geschichte der Arbeit und Technik