
Die schönsten Aufgaben der Mathematik- Olympiade in Deutschland

Die Autoren sind Mathematiker mit langen Erfahrungen in mathematischen Wettbewerben bis hin zu den Internationalen Mathematik-Olympiaden (IMO). Sie sind vielfältig an Aktivitäten zur Förderung mathematisch begabter Talente beteiligt. Alle sind Gründungsmitglieder des MO e.V. – der Mathematik-Olympiaden e.V. ist Träger der Mathematik-Olympiaden in Deutschland.

ANDREAS FELGENHAUER (*1951), Prof. Dr. rer. nat. habil.

Professor für Numerische Mathematik und Informatik an der Hochschule Magdeburg-Stendal (bis 2018); Mitglied im Aufgabenausschuss (seit 1991).

HANS-DIETRICH GRONAU (*1951), BVK, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Professor für Diskrete Mathematik an der Universität Rostock (bis 2016); 1. Vorsitzender des MO e.V. (bis 2010); Leiter der deutschen IMO-Mannschaft (bis 2014).

ROGER LABAHN (*1959), Prof. Dr. rer. nat. habil.

Außerplanmäßiger Professor für Mathematik an der Universität Rostock.

WOLFGANG LUDWICKI (*1948), Dr. paed., Dipl.-Math.

Lehrer für Mathematik, Physik und Informatik am Winkelmann-Gymnasium Stendal (bis 2012); Mitglied im Aufgabenausschuss (seit 1990).

WOLFGANG MOLDENHAUER (1949 – 2015), Dr. rer. nat.

Fachrektor am Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien (bis 2014); Vorstandsmitglied des MO e.V. (1994 – 2015); Mitglied im Aufgabenausschuss (1974 – 2015).

JÜRGEN PRESTIN (*1960), Prof. Dr. rer. nat. habil.

Professor für Mathematik an der Universität zu Lübeck; 1. Vorsitzender des MO e.V. (seit 2010); Mitglied im Aufgabenausschuss (seit 1991); Leiter der deutschen IMO-Mannschaft (seit 2015).

MICHAEL RÜSING (*1955), StD

Lehrer für Mathematik, Physik und Informatik am Gymnasium Beatae Mariae Virginis Essen; 2. Vorsitzender des MO e.V. (seit 1996); Mitglied im Aufgabenausschuss (seit 1992).

ELIAS WEGERT (*1955), Prof. Dr. rer. nat. habil.

Professor für Nichtlineare Analysis an der TU Bergakademie Freiberg (bis 2021); Autor des Logos des MO e.V.; Mitglied im Aufgabenausschuss (seit 1984).

MARTIN WELK (*1970), Dr. rer. nat.

Außerordentlicher Professor auf dem Gebiet der Bildanalyse an der Privatuniversität UMIT TIROL, Hall in Tirol (seit 2011); Mitglied im Aufgabenausschuss (seit 1994).

Andreas Felgenhauer · Hans-Dietrich Gronau ·
Roger Labahn · Wolfgang Ludwicki ·
Wolfgang Moldenhauer · Jürgen Prestin ·
Michael Rüsing · Elias Wegert · Martin Welk

Die schönsten Aufgaben der Mathematik-Olympiade in Deutschland

300 ausgewählte Aufgaben und Lösungen
der Olympiadeklassen 11 bis 13

Andreas Felgenhauer
Magdeburg, Deutschland

Hans-Dietrich Gronau
Elmenhorst/Lichtenhagen, Deutschland

Roger Labahn
Rostock, Deutschland

Wolfgang Ludwicky
Tangermünde, Deutschland

Wolfgang Moldenhauer
Erfurt, Deutschland

Jürgen Prestin
Schönberg, Deutschland

Michael Rüsing
Essen, Deutschland

Elias Wegert
Chemnitz, Deutschland

Martin Welk
Hall in Tirol, Österreich

ISBN 978-3-662-63182-9 ISBN 978-3-662-63183-6 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-63183-6>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2021

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Logo der Mathematikolympiade, mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Jürgen Prestin, 1. Vorsitzender des MO e.V

Planung/Lektorat: Annika Denkert

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

gewidmet

*einem Vater der Mathematik-Olympiade
Prof. Dr. Wolfgang Engel (1928 – 2010)*

*einem Retter der Mathematik-Olympiade
Dr. Wolfgang Moldenhauer (1949 – 2015)*

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	xi
Einleitung	xv
Geschichte der Mathematik-Olympiade	xv
Der Aufgabenausschuss	xx
Erläuterungen zum Buch	xxii
1 Kombinatorik	1
1.1 Knobelaufgaben	2
1.2 Abzählprobleme	8
1.3 Existenzprobleme	34
1.4 Extremalprobleme	55
1.5 Graphen	61
2 Kombinatorische Geometrie	81
2.1 Punktpackungen	82
2.2 Kuss-Zahlen	91
2.3 Zerlegungen von Gebieten	94
2.4 Abschlüsse	100
2.5 Existenz von Unterstrukturen	103
2.6 Punkte und Geraden	106
2.7 Konvexität	122
3 Gleichungen	133
3.1 Lineare Gleichungen	134
3.2 Quadratische Gleichungen	136
3.3 Polynomgleichungen	138

3.4	Beträge und Wurzeln	149
3.5	Trigonometrische Gleichungen	154
3.6	Diophantische Gleichungen	161
3.7	Analytische Methoden	166
4	Ungleichungen	167
4.1	Positive und monotone Funktionen	169
4.2	Umordnungen von Skalarprodukten	190
4.3	Umordnungen in Multiskalarprodukten	197
4.4	Konvexe Funktionen	201
4.5	Extremwerte	216
4.6	Standardungleichungen	227
4.7	Bestimmungsungleichungen	251
4.8	Zahlen	256
5	Funktionen	267
5.1	Eigenschaften von Funktionen	268
5.2	Funktionalgleichungen	287
5.3	Polynome	316
6	Folgen	337
6.1	Rekursion	338
6.2	Periodizität	359
6.3	Summen und Produkte	366
7	Zahlentheorie	375
7.1	Teilbarkeit	375
7.2	Primzahlen	387
7.3	Kongruenzen	398
7.4	Positionssysteme	402
7.5	Teilbarkeitsregeln	409
7.6	Diophantische Gleichungen	421
8	Ebene Geometrie	433
8.1	Dreiecke	439
8.2	Vierecke	465
8.3	Polygone	476
8.4	Kreise	487

9	Räumliche Geometrie	507
9.1	Räumliche Konstruktionen	509
9.2	Reduktion auf ebene Probleme	519
9.3	Analytische Geometrie	559
10	Besonderes	563
10.1	Spiele	563
10.2	Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit	577
10.3	Analysis	583
	Nachwort	595
	Literaturverzeichnis	597
	Sachwortverzeichnis	601
	Lösungsstrategien	607
	Liste aller Aufgaben	611

Vorwort

Als 1961 die erste Mathematik-Olympiade auf deutschem Boden durchgeführt wurde, hat wohl niemand geahnt, welche Entwicklung dieser Wettbewerb nehmen würde. In seiner Geschichte gab es Höhen und Tiefen, und während einiger besonders kritischer Jahre war sein Fortbestehen ernsthaft gefährdet. Dem couragierten Handeln einiger besonders Aktiver und dem Einsatz vieler Engagierter aus allen Regionen Deutschlands ist es zu danken, dass wir jetzt auf eine 60-jährige erfolgreiche Geschichte zurückblicken können. In dieser Zeit haben sich etwa 10 Millionen Schülerinnen und Schüler am Wettbewerb beteiligt. Ein historischer Überblick über die Ursprünge der Olympiade und ihre Entwicklung wird im nachfolgenden Kapitel gegeben.

Heute ist die *Mathematik-Olympiade in Deutschland* neben dem *Bundeswettbewerb Mathematik* und dem *Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade* ein fester Bestandteil der *Bundesweiten Mathematik-Wettbewerbe* <https://www.mathe-wettbewerbe.de/>. Sie richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 3 bis 13 und wird jährlich in vier Runden durchgeführt. Der *Aufgabenausschuss* erarbeitet in mehreren Teams altersgerechte Aufgaben und Lösungen und stellt diese den Organisatoren zur Verfügung. Bei der *Schulrunde* legen die lokalen Veranstalter fest, ob die Aufgaben einzeln oder in Gruppen, im Unterricht oder zu Hause bearbeitet werden. Erfolgreiche Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Schulrunde werden zur *Regionalsrunde* eingeladen und schreiben eine Klausur. Die Besten der Regionalsrunde nehmen an der *Landesrunde* teil, je nach Bundesland ist dies ein ein- oder zweitägiger Klausurwettbewerb. Den Höhepunkt bildet schließlich die *Bundesrunde*, an der fast 200 Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 8 bis 13 teilnehmen. Sie findet jedes Jahr in wechselnden Bundesländern statt.

Obwohl alle Aufgaben der Mathematik-Olympiaden im Internet verfügbar sind (im Archiv des Mathematik-Olympiaden e.V. [46] und in den Sammlungen von MANUELA KUGEL [38] und von STEFFEN POLSTER [53]), schien es uns sinnvoll, einige besonders „schöne“ Probleme und deren Lösungen in Buchform zu veröffentlichen. Die erste derartige Sammlung [28] erschien bereits 1987, sie wurde von vier Autoren dieses Buches (H.-D. GRONAU, R. LABAHN, W. MOLDENHAUER und J. PRESTIN) sowie

M. KRÜPPEL erarbeitet und enthielt 100 Aufgaben und Lösungen der ersten 25 Olympiade-Jahrgänge.

Um 2003 kam der Gedanke auf, diese Aufgabensammlung zu erweitern und mit Erläuterungen zu versehen. Außer den vier oben bereits genannten Autoren wurden weitere Mitglieder des Aufgabenausschusses einbezogen, die mit den Aufgaben und den Lösungen mit ihren verschiedenen Varianten bestens vertraut sind. Acht dieser neun Autoren haben schon als Schüler erfolgreich an der Mathematik-Olympiade teilgenommen und fünf haben es sogar bis zur Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) geschafft. Nach der Schulzeit studierten sie alle Mathematik oder Mathematik auf Lehramt und sind seitdem eng mit der Mathematik-Olympiade verbunden.

Was sind die schönsten Aufgaben der Mathematik-Olympiade? Bei der Auswahl der Aufgaben haben wir uns zunächst aus pragmatischen Gründen entschieden, nur die 1144 Aufgaben einzubeziehen, die in den ersten 50 Jahren der Olympiade für die Klassen 11–13 gestellt wurden. „Schöne Aufgaben“ sollten attraktiv und ästhetisch sein, vielleicht einen überraschenden Sachverhalt beschreiben, zu originellen Ideen anregen und im besten Fall auch eine elegante Lösung besitzen. Wir 9 Autoren haben uns mit vielen Aufgaben weiterhin beschäftigt, z. B. im Training von Schülerinnen und Schülern, so dass unsere Einschätzungen der Aufgaben nicht spontan erfolgte, sondern das Ergebnis der Betrachtung vieler ihrer Facetten war. Wir haben aber auch darauf geachtet, einige „typische Olympiade-Aufgaben“ aufzunehmen, um an ihnen spezielle Lösungsmethoden zu demonstrieren. Nach einer langen und intensiven Diskussion haben wir schließlich über die aufzunehmenden Aufgaben abgestimmt. Weil unsere Arbeitsrichtungen und mathematischen Vorlieben unterschiedlich sind und ein großes Spektrum überdecken, hoffen wir trotz aller Subjektivität eine akzeptable Auswahl getroffen zu haben.

Die Aufgaben sind thematisch geordnet und mit einer vollständig (und teilweise neu) ausgearbeiteten Lösung versehen. In vielen Fällen bieten wir mehrere verschiedene Lösungsvarianten. Ergänzend stellen wir in jedem Abschnitt wichtige Hilfsmittel zusammen und erläutern typische Lösungsstrategien, die nicht nur für Mathematik-Olympiaden relevant sind. Wir hoffen, damit nicht nur Schülerinnen und Schülern ein vielseitiges Trainingsmaterial in die Hand zu geben, sondern auch Lehrende bei der Wahl von Themen für Arbeitsgemeinschaften oder einen vertiefenden Unterricht zu unterstützen.

Alle Aufgaben sind mit Mitteln lösbar, die aus dem Schulunterricht bekannt sind. Dem Vorbild der bei den IMOs gestellten Aufgaben folgend, wurden auch bei deutschen Mathematik-Olympiaden kaum Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung oder aus der Stochastik gestellt. Allerdings dürfen Teilnehmende auch solche Methoden einsetzen, wenn sie dazu schon in der Lage sind.

Wir empfehlen, die Lösungsvorschläge erst dann anzuschauen, wenn man sich selbst lange genug an der Lösung versucht hat. Die eigene Arbeit am jeweiligen Problem führt zu einem tieferen Verständnis und Lösungsvorschläge können besser eingeordnet werden. Man sollte auch nicht verzweifeln, wenn es nicht gelingt, die eine oder andere Aufgabe selbst zu lösen. Auch wer sich beim schnellen Problemlösen nicht hervortut, kann durch beständiges Arbeiten tief in die Theorie eindringen und

neue Erkenntnisse gewinnen. Interessante Gedanken über die Wechselbeziehungen zwischen „Aufgaben vom Olympiadetyp“ und Problemen der mathematischen Forschung entwickelt STANISLAW SMIRNOW, ein Träger der Fields-Medaille, in seinem Essay „How do research problems compare with IMO problems“ in [29] Seiten 199–208.

Die Entwicklung eines Olympiade-Problems zu einem Problem der aktuellen mathematischen Forschung kann man in [63] nachvollziehen.

Wer nicht nur Spaß an mathematischen Herausforderungen hat, sondern sich ernsthaft mit Mathematik beschäftigen oder diese sogar als Beruf ergreifen will, sollte vor allem seine individuellen Stärken herausfinden und seinen eigenen Weg gehen. Möge das Buch dabei hilfreich sein!

Während der langen Erarbeitung dieses Buches ist WOLFGANG MOLDENHAUER verstorben. Seine hinterlassenen Manuskripte, vor allem zum Kapitel 4 „Ungleichungen“, sind in dieses Buch eingeflossen. Mit der Widmung dieses Buches würdigen wir seine lebenslange unermüdliche Arbeit für die Mathematik-Olympiaden.

Die Zusammenstellung der wesentlichen Akteure des Aufgabenausschusses in den ersten Jahren der Mathematik-Olympiade war eine schwierige Herausforderung. Für die Unterstützung dabei danken wir Prof. Dr. KONRAD ENGEL, Dr. MONIKA NOACK und OStR KARL-HEINZ UMLAUFT.

Wir danken Frau Dr. ANNIKA DENKERT und Frau AGNES HERRMANN für die Aufnahme und freundliche Begleitung dieses Buchprojektes in das Programm von Springer Spektrum.

Abschließend danken wir allen Förderern und Unterstützern der Mathematik-Olympiade, insbesondere dem Bundesministerium für Bildung und Forschung und den Kultusministerien der Bundesländer. Besonderer Dank gilt allen Kolleginnen und Kollegen, die den Wettbewerb auf Schul-, Regional-, Landes- und Bundesebene mit großem Engagement durchführen.

Einleitung

Prof. Dr. WOLFGANG ENGEL, einer der Väter der Mathematik-Olympiade, hat die Geschichte der Olympiade in der DDR, also bis 1990, ausführlich in einem Essay dargestellt, das in ähnlichen Versionen in [44] und [24] erschienen ist. Diese Veröffentlichungen waren für uns in gekürzter und teilweise ergänzter Form Basis für die ersten beiden Abschnitte dieser Einleitung. Hinzu kam die Geschichte der Olympiade nach 1990, die ebenfalls in [44] zu finden ist.

Geschichte der Mathematik-Olympiade

Mathematische Schülerwettbewerbe haben eine lange Tradition. So richtete Frankreich im Jahre 1747 erstmalig landesweit den *Concours General* [18] aus. Zu den berühmten Mathematikern, die Preisträger waren, zählen ÉVARISTE GALOIS, HENRI POINCARÉ und JEAN-PIERRE SERRE. Der Wettbewerb existiert bis heute und umfasst neben Mathematik verschiedene andere Wissenschaftsdisziplinen und Sprachen.

In Cambridge wurden im 19. Jahrhundert die *Mathematical Tripos* durchgeführt [42]. Einer der international bekanntesten Wettbewerbe ist der *Eötvös-Wettbewerb* (später *Kürschák-Wettbewerb*), der 1894 von der physikalisch-mathematischen Gesellschaft in Ungarn ins Leben gerufen wurde und seit dieser Zeit – mit Ausnahme der Jahre 1919–1921, 1944–1946 und 1956 – kontinuierlich ausgetragen wird. Die Aufgaben und Lösungen findet man in den *Hungarian Problem Books*. Diese Aktivitäten wurden seit 1894 begleitet von der Zeitschrift *Középiskolai Matematikai Lapok*, später *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*. In der Sowjetunion wurden 1934 in Leningrad und 1935 in Moskau die ersten mathematischen Olympiaden durchgeführt.

Auch in Deutschland gab es bereits im 18. Jahrhundert mathematische Wettbewerbe für Schüler. Diese fanden wahrscheinlich erstmalig an dem von JOHANN BERNHARD BASEDOW 1774 gegründeten und bis 1793 bestehenden *Philanthropinum* in Dessau

statt. Im Allgemeinen wurde jedoch bis 1945 dem Wettbewerbsgedanken in den wissenschaftlichen Schulfächern keine Bedeutung beigemessen. Erste Veröffentlichungen über mathematische Wettbewerbe finden sich in der Zeitschrift *Mathematik, Physik und Chemie in der Schule* aus der DDR in den Jahren 1952 und 1953. Im Jahre 1959 beteiligten sich acht Schüler aus der DDR an der 1. Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO). Die IMO löste in den Folgejahren nicht nur eine Vielzahl von Aktivitäten aus, sondern ist bis heute weltweit der Kern aller mathematischen Wettbewerbe für Schülerinnen und Schüler.

An der 1. IMO nahmen 7 Staaten teil. Mangels besserer Kriterien wurde die Mannschaft der DDR anhand der Abiturnoten ausgewählt und belegte folgerichtig den letzten Platz in der inoffiziellen, aber immer wieder gern betrachteten, Länderwertung. Auch diese Erfahrung führte im Schuljahr 1960/1961 zur Organisation regionaler Mathematik-Wettbewerbe, u. a. in Berlin, Greifswald und Leipzig, an denen viele Schülerinnen und Schüler teilnahmen. Zu den Initiatoren gehörten die Lehrer HERBERT TITZE (Berlin) und JOHANNES LEHMANN (Leipzig). LEHMANN war auch der Begründer und langjährige Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*. Die *1. Olympiade Junger Mathematiker* wurde im Schuljahr 1961/62 bereits in ähnlicher Form wie die heutige *Mathematik-Olympiade in Deutschland* durchgeführt. Damit ist die Mathematik-Olympiade der älteste deutsche mathematische Wettbewerb für Schülerinnen und Schüler. Aus heutiger Sicht ist interessant, dass die eigentlich zentral geplante 4. Stufe (DDR-Olympiade) 1962 wegen einer Ruhr-Epidemie nur regional ausgerichtet werden konnte.

Im gleichen Jahr wurde auch das *Zentrale Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker* durch den Minister für Volksbildung und den Vorsitzenden der Mathematischen Gesellschaft der DDR gegründet. Die Vorsitzenden dieses Gremiums waren Prof. Dr. WOLFGANG ENGEL (Rostock) von der Gründung bis 1974, danach Prof. Dr. HELMUT BAUSCH (Berlin) bis 1986 und im Anschluss daran Prof. Dr. HANS-DIETRICH GRONAU (Rostock) bis 1990.

Eine im Verwaltungsbetrieb der DDR wertvolle Unterstützung bildete die Erwähnung der Mathematik-Olympiaden im *Mathematikbeschluss zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts* [13] vom 17. Dezember 1962.

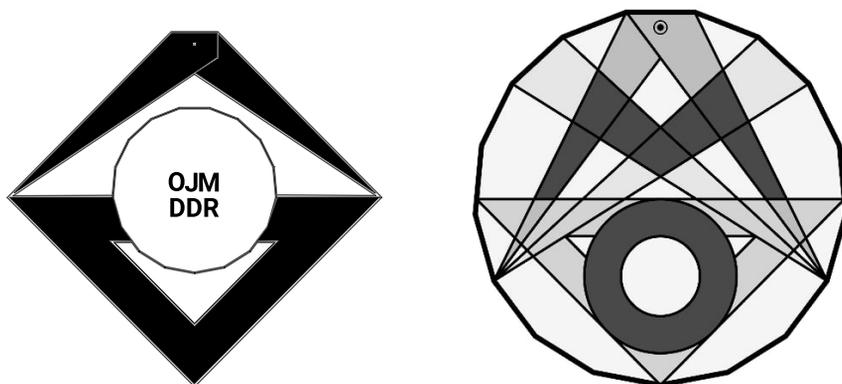
Von Anbeginn sollten die Mathematik-Olympiaden, an denen sich Schülerinnen und Schüler freiwillig beteiligen können,

- dazu beitragen, dass Schülerinnen und Schüler im Unterricht und außerhalb des Unterrichts ein solides Wissen und Können auf dem Gebiet der Mathematik erwerben, ihre Kenntnisse erweitern und zu mathematischem Denken befähigt werden,
- die wachsende Bedeutung der Mathematik für die weitere Gestaltung der Gesellschaft bewusst machen,
- Interesse oder sogar Begeisterung für das Fach Mathematik wecken, festigen und vertiefen,
- helfen, mathematische Begabungen zu entdecken und systematisch zu fördern,

- dem Lehrpersonal durch die Aufgabengestaltung Gelegenheit zur Fortbildung geben.

Diese Anliegen sind aktuell bis heute – auch das Bundesministerium für Bildung und Forschung betont den Wert von Wettbewerben für die Motivation und Förderung begabter Schülerinnen und Schüler [12, S. 69 und 99ff.].

Mit dem Beitritt der DDR in die Bundesrepublik Deutschland 1990 fiel schlagartig das Bildungsministerium als Hauptträger der Organisation weg. Die Integration der Mathematik-Olympiade in das bundesweite Schulsystem stieß zunächst auf erhebliche Schwierigkeiten. Durch das unermüdliche Wirken einiger Engagierter auf allen Ebenen gelang es letztendlich, die Olympiaden nicht nur am Leben zu erhalten, sondern Schritt für Schritt weitere Bundesländer für eine Teilnahme zu gewinnen. Eine ganz entscheidende Rolle in diesem Prozess spielte Dr. WOLFGANG MOLDENHAUER. Zunächst wurde ein Koordinierungskomitee ins Leben gerufen, das auch die Gründung des *Mathematik-Olympiaden e. V.* (MO e. V.), als Träger des Wettbewerbes, am 2. Mai 1994 in Magdeburg vorbereitete. Der gewählte 1. Vorsitzende des MO e. V. war von der Gründung bis 2010 Prof. Dr. HANS-DIETRICH GRONAU (Rostock) und ist seitdem Prof. Dr. JÜRGEN PRESTIN (Lübeck). Der eigentliche mathematische Wettbewerb wurde im Wesentlichen beibehalten, doch gab es zahlreiche Änderungen, die beispielsweise die Rolle der Bundesländer bei der Durchführung der ersten drei Runden und deren Teilnahme an der Bundesrunde betrafen. Heute besitzt jedes Bundesland eine Stimme in der Jury, dem entscheidenden Gremium der Bundesrunde. Schließlich wurde auch die Bezeichnung des Wettbewerbes geschlechtsneutral gestaltet.



Logos der Olympiaden Junger Mathematiker in der DDR (links) und des Mathematik-Olympiaden e. V. seit 1994 (rechts).

Um diese Änderungen sichtbar zu machen, hat sich der Verein auch ein neues Logo gegeben. Das Logo der Olympiaden Junger Mathematiker bestand aus einem 17-Eck, einem Zirkel und einem Lineal (in Form eines Zeichendreiecks). Die Symbole sollen an die grandiose Jugendleistung von CARL FRIEDRICH GAUSS in Bezug auf die Konstruierbarkeit regelmäßiger n -Ecke mit Zirkel und Lineal erinnern und Ansporn

für alle Teilnehmenden sein. Das Logo des Mathematik-Olympiaden e. V. enthält dieselben Elemente und zusätzlich die Buchstaben „M“ und „O“. Im Entwurf unseres Mitautors Prof. Dr. ELIAS WEGERT ist das 17-Eck dominant; die anderen laut Satzung enthaltenen Elemente leiten sich daraus ab.

Nachdem sich bereits Anfang der 1990er Jahre immer mehr Bundesländer an den Bundesrunden beteiligten, sind seit der Olympiade 1996 in Hamburg alle 16 Länder präsent. Ein weiterer wichtiger Meilenstein wurde 2012 in Hessen erreicht: nunmehr waren alle 16 Bundesländer mindestens einmal Austragende der Bundesrunde. Durch die Übernahme der Finanzierung des Aufgabenausschusses durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung ab 2007 und die Verankerung der Mathematik-Olympiaden als Bestandteil der *Bundesweiten Mathematik-Wettbewerbe* (<https://www.mathe-wettbewerbe.de/>) wurde die Existenz der Mathematik-Olympiaden auch langfristig gesichert.

Im Schuljahr 2010/2011 konnten die Mathematik-Olympiaden dann auf ihr 50-jähriges Bestehen zurückblicken. Zur Bundesrunde gab es aus diesem Anlass eine Feier. Es erschien eine umfangreiche Festschrift [44], in der versucht wurde, alle Aspekte dieser 50-jährigen Geschichte darzustellen.

An dieser Stelle soll noch ein Blick auf die Entwicklung der IMO geworfen werden. Die IMO war der erste internationale Schülerwettbewerb auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiet. Es folgten Physik 1967, Chemie 1968, Informatik 1989 und Biologie 1990. Initiator der IMO und Ausrichter der 1. IMO war 1959 Rumänien. Die Teilnehmer kamen aus Rumänien, Ungarn, der ČSSR, Bulgarien, Polen, der UdSSR und der DDR. Seitdem hat sich der Teilnehmerkreis immer weiter vergrößert. So war Finnland 1965 das erste nicht-sozialistische Land, und 1967 gehörten schon England, Frankreich, Italien und Schweden zu den Teilnehmerländern. An der 16. IMO 1974 in Erfurt nahmen die USA und Vietnam erstmalig teil. Die Bundesrepublik Deutschland beteiligte sich ab 1977.

Inzwischen hat die Olympiade-Idee fast die gesamte Erde erreicht. Lienz (Österreich) war 1976 der erste westeuropäische Austragungsort. 1981 fand die IMO in Washington, DC (USA) und damit erstmalig außerhalb Europas statt. Mit der IMO 1988 in Canberra wurde der australische Kontinent Austragungsort, 1990 fand der Wettbewerb in der chinesischen Hauptstadt Beijing und damit zum ersten Male auf asiatischem Boden statt. Zur IMO 1997 im argentinischen Mar del Plata führte der Weg zum ersten Mal nach Lateinamerika. Mit Südafrika 2014 kam auch ein erstes afrikanisches Land hinzu. 2009 fand die 50. Internationale Mathematik-Olympiade in Deutschland statt. Damals nahmen erstmals mehr als 100 Staaten teil. Zu dieser Olympiade und zur Geschichte der IMO empfehlen wir das Buch [29]. Umfassende weitere Informationen zur IMO finden sich auf der offiziellen Webseite <https://www.imo-official.org>.

Die Idee der Mathematik-Olympiaden fand schon in den sechziger Jahren vielfältige Unterstützung, die sich auch in verschiedenen Publikationen niederschlug.

So gab am 13. Dezember 1962 die *Leipziger Volkszeitung* (LVZ) die 16-seitige *Mathe-LVZ* als Sonderausgabe heraus. Spätere Ausgaben enthielten pro Klassenstufe (beginnend mit Klasse 2) eine Seite mit altersgerechten Aufgaben und deren Lösungen

sowie ein Preisausschreiben. Zielgruppe war ein Publikum mit Interesse an mathematischen Knobelaufgaben. Die Materialien waren auch für die außerunterrichtliche Arbeit im Fach Mathematik geeignet. Ab 1964 hatten alle Schulen und Institutionen pädagogischer Fachrichtung die Möglichkeit, diese LVZ-Sonderausgaben zu beziehen. Am 1. Januar 1967 erblickte die erste Ausgabe der Zeitschrift *Die Wurzel* das Licht der Welt. Hauptsächliches Anliegen war und bleibt es, ein möglichst großes Publikum mit der Begeisterung für die Mathematik anzustecken, mathematisch interessierte Jugendliche zu fördern, ihre Kreativität zu wecken und Fähigkeiten zum Problemlösen zu entwickeln.

In den mehr als 300 Ausgaben der *Wurzel* [65] sind Artikel zu verschiedensten Teilgebieten der Mathematik enthalten. Am 20. Februar 1967 erschien die erste Ausgabe der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*, siehe hierzu auch die Webseite von STEFFEN POLSTER [53]. Die Materialien der 6 Hefte jedes Jahrgangs richteten sich vorrangig an Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 5 bis 10 und prägten viele Generationen von mathematischen Nachwuchstalenten.

Mehrere große Fachbuchverlage begannen 1967 gemeinsam mit der Edition der Reihe *Mathematische Schülerbücherei*, in der Buchtitel zur Förderung mathematischer Nachwuchstalente aufgelegt wurden. An dieser Reihe waren vor allem der Teubner-Verlag, der Verlag Volk und Wissen Berlin, der Urania-Verlag Leipzig, der Deutsche Verlag der Wissenschaften Berlin und in geringerem Umfang der Kinderbuchverlag Berlin sowie der Fachbuchverlag Leipzig beteiligt.

Am 1. Juni 1981 erschien *Monoid*, das *Mathematikblatt für Mitdenker*, eine regelmäßig publizierte Schülerzeitschrift für Mathematik, die von MARTIN METTLER (Frankenthal, Rheinland-Pfalz) begründet wurde. Sie wird seit 2001 vom Fachbereich Mathematik der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz herausgegeben. Darin findet man für Schüler und Lehrer aufbereitete Artikel über Probleme und Lösungen aus der Mathematik sowie interessante Aufgaben, deren Lösungen die Schüler einsenden können. Die Zeitschrift kann über das Internet bestellt, ältere Ausgaben können als PDF-Dokumente heruntergeladen werden [48].

Darüber hinaus gab und gibt es eine Vielzahl von regional angebotenen Wettbewerben, z. B. den Mathematik-Wettbewerb des Landes Hessen: *Im Jahre 1969 wird im Lande Hessen zum ersten Male ein Mathematik-Wettbewerb in den allgemeinbildenden Schulen durchgeführt, um Freude und Interesse am Mathematikunterricht zu fördern. Dieser Wettbewerb gibt allen Schülern Gelegenheit, ihre Fähigkeiten und Kenntnisse in einem größeren Rahmen zu vergleichen.* Mit diesen Sätzen beginnt der Erlass, der die erstmalige Ausrichtung eines Landeswettbewerbs im Schuljahr 1968/1969 in Hessen ermöglichte.

Schließlich findet seit 1995 der *Känguru-Wettbewerb* statt. Er begann an drei Berliner Gymnasien mit 184 Teilnehmern und hat sich mit 968 000 Teilnehmern im Jahr 2019 zum zahlenmäßig größten Mathematik-Wettbewerb in Deutschland entwickelt [35]. Die freiwillige Teilnahme ist für alle Schülerinnen und Schüler der Klassen 3 bis 13 möglich. Jede Klassenstufe erhält altersgerechte Aufgaben, die am Kängurutag (traditionell der dritte Donnerstag im März) in 75 Minuten zu bearbeiten sind.

Von der Vielzahl der Publikationen zur Mathematik-Olympiade sind besonders die Jahressbände ab der 35. Olympiade zu erwähnen, die von 1996 bis 2017 vom HEREUS Verlag Hamburg [43] und seither von adiant Druck Rostock [45] vertrieben wurden. Sie enthalten die Aufgaben und Lösungen aller vier Stufen. Ferner wird die jeweilige Bundesrunde mit einem Bericht, Kommentaren und den Ergebnissen dokumentiert. Viele weiterführende Informationen findet man dazu im Internet, z. B. unter www.mathematik-olympiaden.de.

In den 50 Jahren der Mathematik-Olympiaden von 1961 bis 2011 haben etwa 10 Millionen Schülerinnen und Schüler an diesem Wettstreit teilgenommen. In dieser Zeit wurden in den Klassenstufen 5 bis 13 insgesamt mehr als 5500 Aufgaben gestellt, von denen wir für Sie 300 der schönsten Aufgaben der Olympiadeklasse 11–13 ausgewählt haben.

Der Aufgabenausschuss

Der wesentliche Zweck des Mathematik-Olympiaden e. V. ist laut seiner Satzung die Bereitstellung der Aufgaben nebst Lösungstexten für alle Runden des Wettbewerbs und alle Klassenstufen sowie die Durchführung der Bundesrunde. Dabei ist die Tätigkeit des Aufgabenausschusses von zentraler Bedeutung – er ist das größte und wichtigste Gremium des Vereins. Der Arbeitsumfang wird ersichtlich, wenn man bedenkt, dass in jedem Jahr etwa 150 Aufgaben zu finden, zu formulieren und mit ansprechenden Lösungsvorschlägen zu versehen sind. Diese Aufgaben sollen altersgerecht, interessant und anregend sein. Hinzu kommt, dass es infolge der Landeshoheit im Bildungssystem in Deutschland verschiedene Lehrpläne gibt. Aufgaben zu entwerfen, die allen Forderungen genügen, ist mitunter eine echte Herausforderung.

Der Aufgabenausschuss besteht aus seinem Vorsitzenden und fünf Aufgabengruppen, die jeweils für zwei Klassenstufen zuständig sind, und zwar für die Klassen 3 und 4, 5 und 6, 7 und 8, 9 und 10 sowie 11 bis 13. Für jede Aufgabengruppe ist ein Leiter zuständig. Dazu kommen Gutachter für die verschiedenen Klassenstufen und ein Redakteur, der die Endfassungen redigiert.

Die einzelnen Aufgabengruppen sind nach verschiedenen Gesichtspunkten zusammengesetzt. In allen Teams sind Lehrerinnen oder Lehrer vertreten, und zwar in der Aufgabengruppe für die jüngeren Schülerinnen und Schüler vorrangig. In den höheren Klassenstufen nimmt der Anteil von Hochschulmitarbeitern und Studierenden zu. Die meisten Mitglieder des Aufgabenausschusses haben selbst Erfahrungen als Teilnehmer von Mathematik-Olympiaden gesammelt, einige sind sogar IMO-Preisträger.

Über die Anfänge der Aufgabenerstellung hat Prof. Dr. WOLFGANG ENGEL in seinem Beitrag [44] berichtet. Die Aufgaben der 3. und 4. Olympiade hat er gemeinsam mit HERBERT TITZE ausgearbeitet. 1964 wurde dann der Aufgabenausschuss gegründet.

Dessen Leiter waren:

- Prof. Dr. HERBERT KARL (Potsdam), 1964–1972,
- Prof. Dr. UDO PIRL (Berlin), 1965–1986 (bis 1972 gemeinsam),
- Doz. Dr. LUDWIG STAMMLER (Halle), 1986–2001,
- Prof. Dr. NORBERT GRÜNWARD (Wismar), 2001–2011,
- Prof. Dr. KONRAD ENGEL (Rostock), seit 2011.

Seit 1994, dem Gründungsjahr des MO e. V., wurde auch ein stellvertretender Leiter des Aufgabenausschusses eingesetzt. Dieses waren:

- Prof. Dr. NORBERT GRÜNWARD (Wismar), 1994-2001,
- Prof. Dr. JÜRGEN PRESTIN (Lübeck), 2001-2010,
- Prof. Dr. KONRAD ENGEL (Rostock), 2010-2011,
- Prof. Dr. NORBERT GRÜNWARD (Wismar), 2011-2014,
- Dr. KARSTEN ROESELER (Göttingen), 2012-2018,
- Prof. Dr. MICHAEL DREHER (Rostock), seit 2018.

Die Zusammensetzung des Aufgabenausschusses und der Aufgabengruppen hat sich natürlich im Laufe der Zeit verändert. Eine vollständige Übersicht ist nicht mehr vorhanden, aber einige Daten sind bekannt. Zum Beispiel wurden die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufe 11/12 der 23. Olympiade in völliger Abgeschlossenheit im Motel Grünau von den Herren Dr. HEINRICH BODE (Weimar), Dr. ROLF LÜDERS (Berlin), Dr. WOLFGANG MOLDENHAUER (Erfurt), BERND NOACK (Berlin) und Dr. MANFRED REHM (Berlin) erstellt.

Seit 1965 existiert die Aufgabengruppe für die Klassenstufen 11/12 bzw. 11–13. Die Leiter dieser Gruppe waren

- OStR Dr. ROLF LÜDERS (Berlin), ab 1965,
- Dr. MANFRED REHM (Berlin), danach bis 1993,
- Prof. Dr. ELIAS WEGERT (Freiberg), 1993–2007,
- Dr. MARTIN WELK (Hall in Tirol), seit 2007.

In der Gruppe mitgearbeitet haben (in alphabetischer Reihenfolge und nicht nach der Zeit der Mitgliedschaft):

- OStD Prof. HANS-DIETER BAUMGÄRTNER (Winnenden),
- Dr. HEINRICH BODE (Weimar),
- Prof. Dr. ANDREAS FELGENHAUER (Magdeburg),
- Dr. ROLAND GIRGENSOHN (Freising),
- JÜRGEN HEIN (Köthen),
- MATTHIAS JACH (Walsrode),
- Prof. Dr. JÖRG JAHNEL (Siegen),

- Prof. Dr. HERBERT KARL (Potsdam),
- BEN LIESE (Heidelberg),
- Dr. ROLF LÜDERS (Berlin),
- Dr. WOLFGANG LUDWICKI (Tangermünde),
- Dr. WOLFGANG MOLDENHAUER (Erfurt),
- BERND NOACK (Berlin),
- Prof. Dr. JÜRGEN PRESTIN (Lübeck),
- Dr. MANFRED REHM (Berlin),
- Dr. CHRISTIAN REIHER (Hamburg),
- StD MICHAEL RÜSING (Essen),
- Prof. Dr. PETER SCHOLZE (Bonn),
- GEORG SCHRÖTER (Dresden),
- Dr. MIKHAIL TYOMKYN (Prag),
- Prof. Dr. ELIAS WEGERT (Freiberg),
- Dr. MARTIN WELK (Hall in Tirol).

Wer im Einzelfall der Autor einer bestimmten Aufgabe war, lässt sich heute oft nicht mehr mit Sicherheit feststellen. Hinzu kommt, dass eine Vielzahl von ähnlichen Aufgaben in der internationalen Wettbewerbsszene und in der Wettbewerbsliteratur gestellt wurden und werden, die eine genaue Quellenermittlung nicht zulassen. Auch Ideen von Kollegen, wie z. B. Prof. Dr. HARALD ENGLISCH (Leipzig), Prof. Dr. HANS-DIETRICH GRONAU (Rostock), Dr. KLAUS HENNING (Hamburg), Prof. Dr. MANFRED KRÜPPEL (Rostock), Dr. MONIKA NOACK (Berlin) und Doz. Dr. LUDWIG STAMMLER (Halle) wurden ebenso benutzt, wie nicht publizierte Aufgabenvorschläge in der Rubrik „Unsere Mathematikaufgabe“ der Zeitschrift *Wissenschaft und Fortschritt* und Aufgaben aus russischsprachigen Quellen. Auch Vorschläge, die von der Aufgabengruppe 9/10 mitgeteilt wurden, konnten in Einzelfällen verwendet werden, wie auch umgekehrt manche Aufgabenvorschläge an andere Aufgabengruppen abgegeben wurden.

Als Gutachter waren in diesem Zeitraum in den Klassenstufen 11–13 OStD Prof. HANS-DIETER BAUMGÄRTNER (Winnenden), Dr. WOLFGANG BURMEISTER (Dresden), Dr. CHRISTIAN HERCHER (Flensburg), Dr. WOLFGANG LUDWICKI (Tangermünde) und Dr. KARSTEN ROESELER (Göttingen) tätig.

Erläuterungen zum Buch

Auswahl der Aufgaben. Für dieses Buch haben wir die Aufgaben der Klassenstufen 11–13 von der 1. Olympiade in den Jahren 1961 und 1962 bis zur 50. Olympiade in 2010 und 2011 betrachtet. In der Regel wurden pro Jahr 20 Aufgaben gestellt (je 4 in der 1. und 2. Runde und je 6 in der 3. und 4. Runde), es gab jedoch zahlreiche kleine Abweichungen, insbesondere durch Wahlaufgaben. Von der 10.

bis zur 38. Olympiade wurden diese fast immer in der 3. und 4. Runde gestellt. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer waren dann aufgefordert, genau eine der zwei Wahlaufgaben auszuwählen und zu lösen. Für Klasse 11 wurden in der Regel dieselben Aufgaben wie in Klasse 12/13 gestellt, in einigen Fällen gab es aber Ausnahmen. Eine vollständige Übersicht findet man in der folgenden Tabelle.

Olympiade	Klasse 12				Klasse 11			
	Runde				Runde			
	1	2	3	4	1	2	3	4
01	5	4	5	5	5	4	4	-
02	6	5	6	6	6	5	6	-
03	6	5	6	6	6	5	-	-
04	5	6	6	6	6	-	-	-
05	4	6	6	6	-	-	-	-
06	4	6	6	6	-	-	-	-
07	4	6	6	6	-	-	-	-
08	4	6	6	6	-	-	-	-
09	4	4	6	6	-	-	-	-
10	4	4	6	7	-	-	-	-
11 ... 38	4	4	7	7	-	-	-	-
39	4	4	7	6	-	-	-	1
40	4	4	6	6	-	-	-	1
41	4	4	6	6	-	-	-	2
42	4	4	6	6	-	-	-	1
43	4	4	6	6	-	-	-	1
44	4	4	6	6	-	-	2	2
45	4	4	6	6	-	-	1	-
46	4	4	6	6	-	-	1	1
47	4	4	6	6	-	-	-	-
48	4	4	6	6	-	1	2	2
49	4	4	6	6	-	-	1	2
50	4	4	6	6	-	-	-	2

Die n -te Olympiade $n \in \{1, 2, \dots, 50\}$ fand im Schuljahr $1960+n/1961+n$ statt. Die nächsten vier Spalten geben die genaue Anzahl der Aufgaben in der Olympiadeklasse 12/13 an. Die letzten vier Spalten enthalten die Anzahl der Aufgaben, die in der Olympiadeklasse 11 abweichend von denen in Klasse 12/13 gestellt wurden. Somit bestand unsere Basis aus genau 1144 Aufgaben. In diesem Zusammenhang möchten wir nochmals auf die Aufgabensammlung des Mathematik-Olympiaden e.V. [46] sowie die Sammlungen von MANUELA KUGEL [38] und von STEFFEN POLSTER [53] hinweisen. Hier findet man sogar Scans einiger originaler Aufgabenblätter, so wie sie die Teilnehmenden der Olympiaden erhielten.

In einem mehrstufigen Auswahlverfahren unter Beteiligung aller Autoren wurden die nach unserem Verständnis 300 schönsten Aufgaben ausgewählt und in die 10 Gebiete eingeordnet, die die Kapitel bilden. Alle Aufgaben wurden, wie bei den Olympiaden

üblich, in der Form $aabbc$ durchnummeriert. Dabei steht aa für die Nummer der Olympiade von 01 bis 50 und bb gibt die Klassenstufe an. Seit es Bundesländer gibt, die auch Teilnehmende aus Klasse 13 haben, waren die Aufgaben für 12 und 13 identisch. Oft hatten auch 11 und 12/13 dieselben Aufgaben. In diesen Fällen bezeichnet bb die höchste Klassenstufe. Die Zahl c gibt die Runde an, also 1,2,3,4, wobei eine 4 heute die Bundesrunde bezeichnet. Schließlich ist d eine fortlaufende Nummer. Bei Wahlaufgaben werden am Ende die Buchstaben „A“ und „B“ angefügt. Wer sich eingehender mit der Historie der Olympiaden beschäftigt, wird feststellen, dass es Anfang der 1990er Jahre einen Paradigmenwechsel gegeben hat. Während bis dahin auch Aufgaben gestellt wurden, die wesentlich auf Begriffe und Methoden der Analysis zurückgreifen (insbesondere Grenzwerte und Differentialrechnung), wurden später solche Aufgaben nicht mehr in Betracht gezogen. Die Aufgabenkommission folgte damit der internationalen Gepflogenheit, bei Schülerolympiaden nur Probleme zu stellen, die prinzipiell mit „elementaren“ Mitteln zu lösen sind. Diese Entscheidung erfolgte außerdem mit Rücksicht auf die unterschiedlichen Lehrpläne der Bundesländer. Um auch die historische Entwicklung zu demonstrieren, haben wir einige dieser Aufgaben trotzdem aufgenommen.

Texttreue. Die Aufgabentexte wurden möglichst im Wortlaut übernommen, wobei die veränderte Orthographie berücksichtigt wurde. Um das Verständnis zu erhöhen und den Stil zu vereinheitlichen, gab es in wenigen Fällen leichte redaktionelle Überarbeitungen; der mathematische Sachverhalt blieb aber unverändert. Außerdem wurden Begriffserläuterungen weggelassen, die sich in diesem Buch aus dem Zusammenhang ergeben, beziehungsweise an anderer Stelle erklärt werden. Bei den Lösungen haben wir uns mehr Freiheiten erlaubt und uns nicht zwingend an den Musterlösungen orientiert. Oft fanden wir mehrere Lösungswege und manchmal auch schönere.

Zusatzmaterial. Damit dieses Buch nicht nur eine Sammlung der schönsten Aufgaben aus deutschen Mathematik-Olympiaden bleibt, beginnt jeder Abschnitt mit einem einführenden Text, in dem relevantes Material und typische Strategien zur Lösung der Aufgaben zusammengestellt werden. Teilweise werden auch Zusammenhänge mit weiterführenden Konzepten der Mathematik hergestellt, die Ausgangspunkte für eine intensivere Beschäftigung mit diesen Themen sein können. Anhand von Lösungsvarianten werden unterschiedliche Herangehensweisen erläutert und die Handhabung mathematischer Werkzeuge demonstriert. Die bewusste Anwendung heuristischer Methoden dient der Entwicklung allgemeiner Fertigkeiten zum Problemlösen. In einem Anhang werden deshalb die nach unserer Ansicht wichtigsten Prinzipien und Lösungsstrategien zusammengestellt. Um diese zielgerichtet trainieren zu können, gibt es zu jedem Thema eine Übersicht relevanter Aufgaben. Auch die Verweise im Sachwortverzeichnis können genutzt werden, um gezielt Aufgaben mit bestimmten Inhalten auszuwählen.

Das Buch stellt damit strukturiertes Trainingsmaterial zur Verfügung, das geeignet ist, sich selbst oder andere aktiv auf mathematische Wettbewerbe vorzubereiten.

Wir denken dabei nicht nur an Mathematik-Olympiaden, sondern auch an den Bundeswettbewerb Mathematik, den Känguru-Wettbewerb und andere mehr.

Zahlenbereiche. In diesem Buch benutzen wir die in der Mathematik üblichen Symbole für Zahlenbereiche:

- \mathbb{N} bezeichnet die Menge der *natürlichen Zahlen* inklusive der Null. Der Gebrauch dieses Begriffs war und ist in den Schullehrplänen unterschiedlich geregelt: meist wird die Null eingeschlossen, manchmal aber auch nicht. Um allen Zweifeln aus dem Wege zu gehen, hat der Aufgabenausschuss in neuerer Zeit vorzugsweise die Begriffe „positive ganze Zahlen“ und „nichtnegative ganze Zahlen“ verwendet.
- \mathbb{Z} bezeichnet die Menge der ganzen Zahlen.
- \mathbb{Q} bezeichnet die Menge der rationalen Zahlen.
- \mathbb{R} bezeichnet die Menge der reellen Zahlen.

Ist \mathbb{X} einer der obigen Zahlenbereiche, so bezeichnet \mathbb{X}^+ die Menge der positiven Elemente aus \mathbb{X} .

Abkürzungen und Symbole. Außer den aus dem Unterricht bekannten mathematischen Notationen verwenden wir die folgenden Abkürzungen und Symbole:

- Das Kürzel *o. B. d. A.* steht für *ohne Beschränkung der Allgemeinheit*. Diese Abkürzung wird benutzt, wenn eigentlich mehrere Fälle zu diskutieren sind, diese sich aber strukturell nicht unterscheiden.
- Das Ende eines Beweises kennzeichnen wir mit dem Symbol \square
Weitere gebräuchliche Versionen dafür sind *w. z. b. w.* für *was zu beweisen war* oder *q. e. d.* für *quod erat demonstrandum*.
- Das Ende der Lösung einer Aufgabe markieren wir mit dem Symbol \diamond