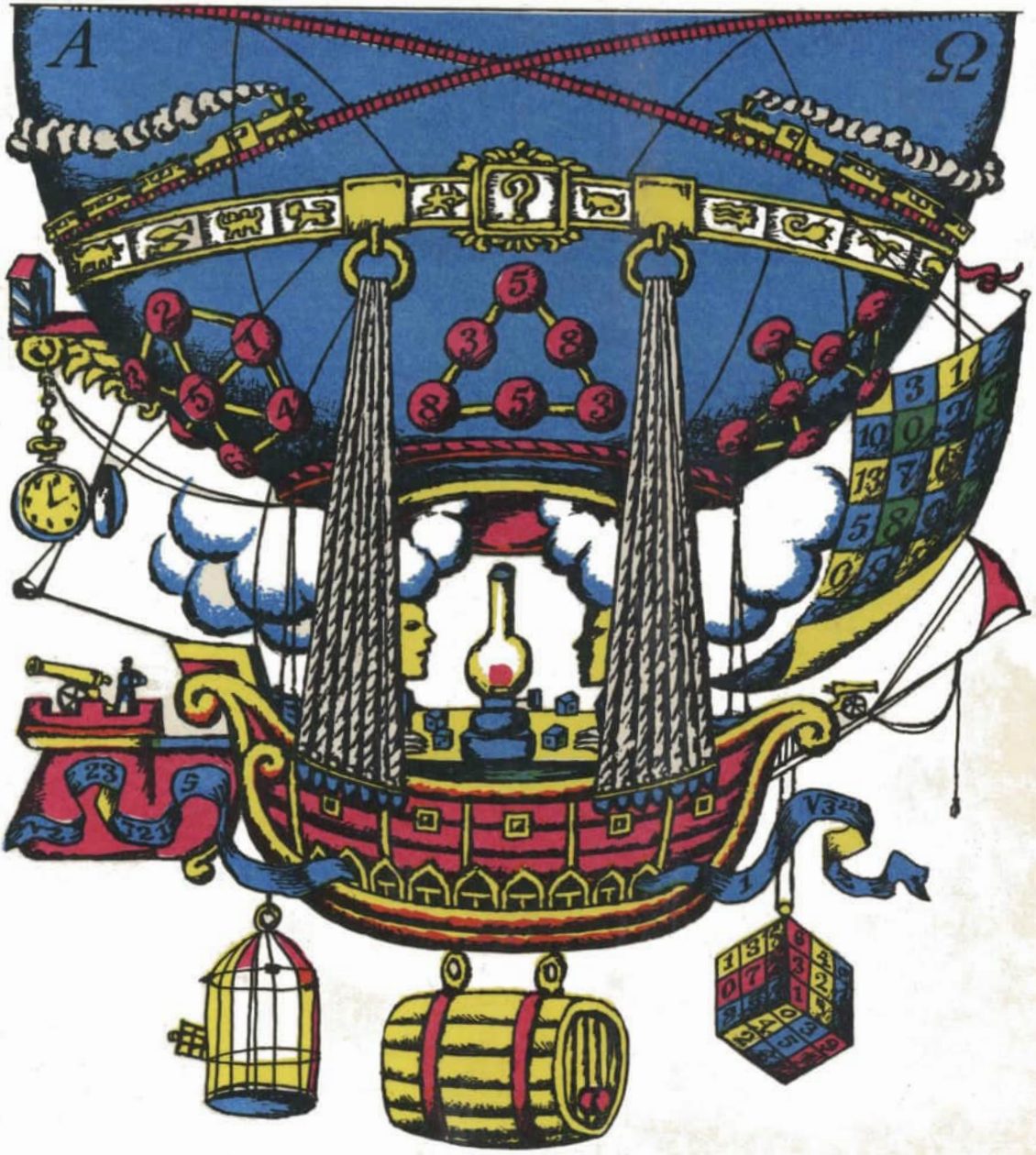
J. I. Perelman

Unterhaltsame Aufgaben und Versuche



VERLAG MIR MOSKAU


A


1


6


7


8


9

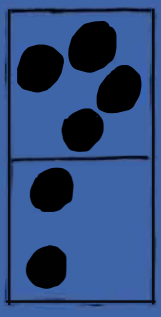

14

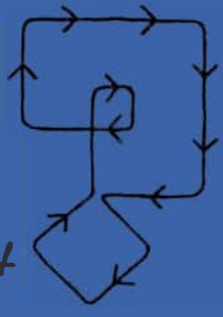

15


16


17


22


23


24


25


2


3


4

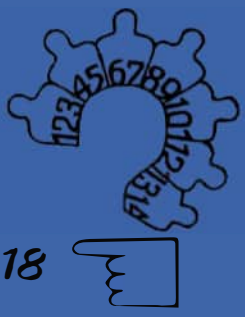

5


10


11


12


13


18


19


20

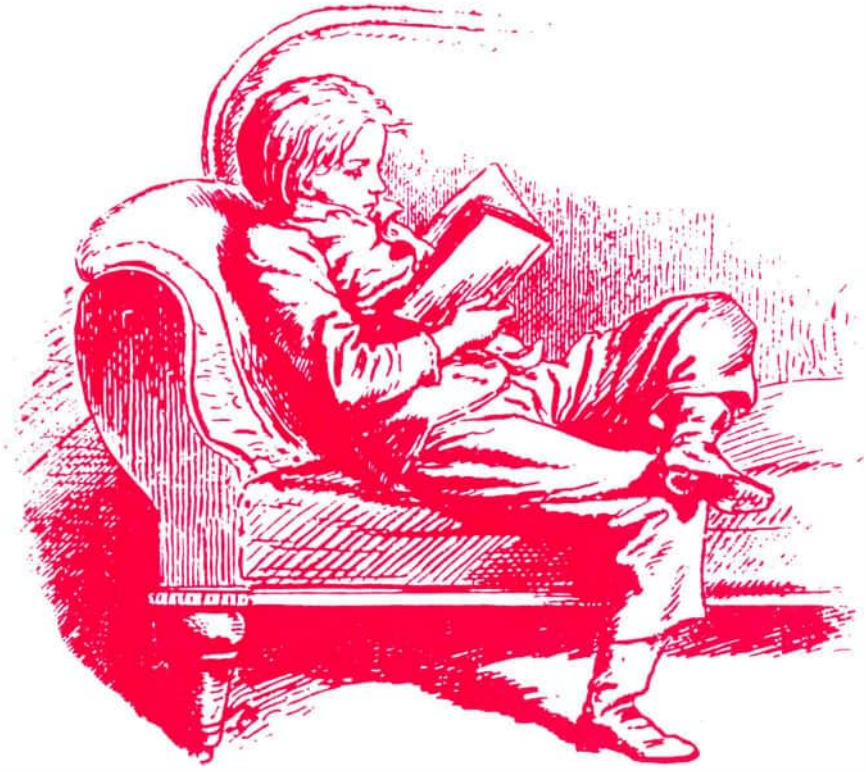

21


26


27

J. I. Perelman

Unterhaltsame Aufgaben und Versuche



ÜBER DEN AUTOR UND SEINE BÜCHER



J. I. Perelman

1913 erschien in den Regalen der Buchhandlungen das Buch des bekannten Pädagogen Jakow Issidorowitsch Perelman „Unterhaltsame Physik". Das Buch eroberte schnell die Herzen der Leser, besonders der Jugendlichen, die darin Antwort auf viele sie interessierende Fragen fanden.

Im Vorwort zur 11. Ausgabe schrieb J. I. Perelman: „Das Hauptziel der ‚Unterhaltsamen Physik' ist, das wissenschaftliche Denkvermögen anzuregen, den Leser zu befähigen, im Sinne der physikalischen Wissenschaft zu denken und in seinem Gedächtnis vielfältige Assoziationen zwischen den physikalischen Kenntnissen und den verschiedenartigsten Erscheinungen des Lebens, mit allem, womit er normalerweise in Berührung kommt, herbeizuführen". „Unterhaltsame Physik" wurde eines der populärsten Bücher.

J. I. Perelman wurde 1882 in Belostok geboren. 1909 absolvierte er das Petersburger Forstinstitut mit dem Diplom eines Forstwirtes.

Nach der „Unterhaltsamen Physik" schrieb J. I. Perelman auch andere Bücher, mit denen er sich als ausgezeichneter Popularisator der Wissenschaft auswies. Am bekanntesten sind die Bücher: „Unterhaltsame Arithmetik", „Unterhaltsame Mechanik", „Unterhaltsame Geometrie", „Unterhaltsame Astronomie", „Lebendige Mathematik", „Physik auf Schritt und Tritt", „Zaubereien und Unterhaltung", u. a. Heute sind diese Bücher jedem Lesekundigen bekannt.
Er schrieb auch einige Bücher, die die interplanetaren Flüge behandeln („Interplanetare Reisen", „Mit der Rakete zu den Sternen", „Weltweiten" u. a.).
Der große Gelehrte K. E. Ziolkowski schätzte Talent und Schaffen von J. I. Perelman hoch ein. Im Vorwort zu „Interplanetare Reisen" schrieb er über ihn: „Der Autor ist seit langem durch seine populären, geistreichen und durchaus wissenschaftlichen Arbeiten zur Physik, Astronomie und Mathematik bekannt, die gut geschrieben und dem Leser leicht verständlich sind".

J. I. Perelman ist Verfasser einer Reihe von Lehrbüchern und verschiedener Artikel in den Zeitschriften „Snanije-sila" (Wissen ist Macht), „Technika molodjoshi" (Technik für die Jugend) u. a.

J. I. Perelman starb am 16. März 1942 in Leningrad.

Viele Generationen lesen mit Interesse die unterhaltsamen Bücher Perelmans. Auch in Zukunft werden seine Bücher neue Generationen von Lesern begeistern. Dieses Buch enthält Auszüge aus verschiedenen Büchern, deren Verfasser oder Zusammensteller J. I. Perelman war. Kürzungen und redaktionelle Änderungen wurden vorgenommen.

Bei der deutschsprachigen Ausgabe des Buches wurden einige Besonderheiten der russischen Ausgabe beibehalten, so z. B. veraltete Bezeichnungen der Maßeinheiten, die den Gegebenheiten der damaligen Zeit entsprechen.

J. I. Perelman

Unterhaltsame Aufgaben und Versuche



VERLAG MIR
MOSKAU

Titel der Originalausgabe:

Я. И. Перельман

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ОПЫТЫ

Издательство

„Детская литература“, Москва

Zusammengestellt von I. I. Prussakow

In die deutsche Sprache übersetzt von Peter Graba



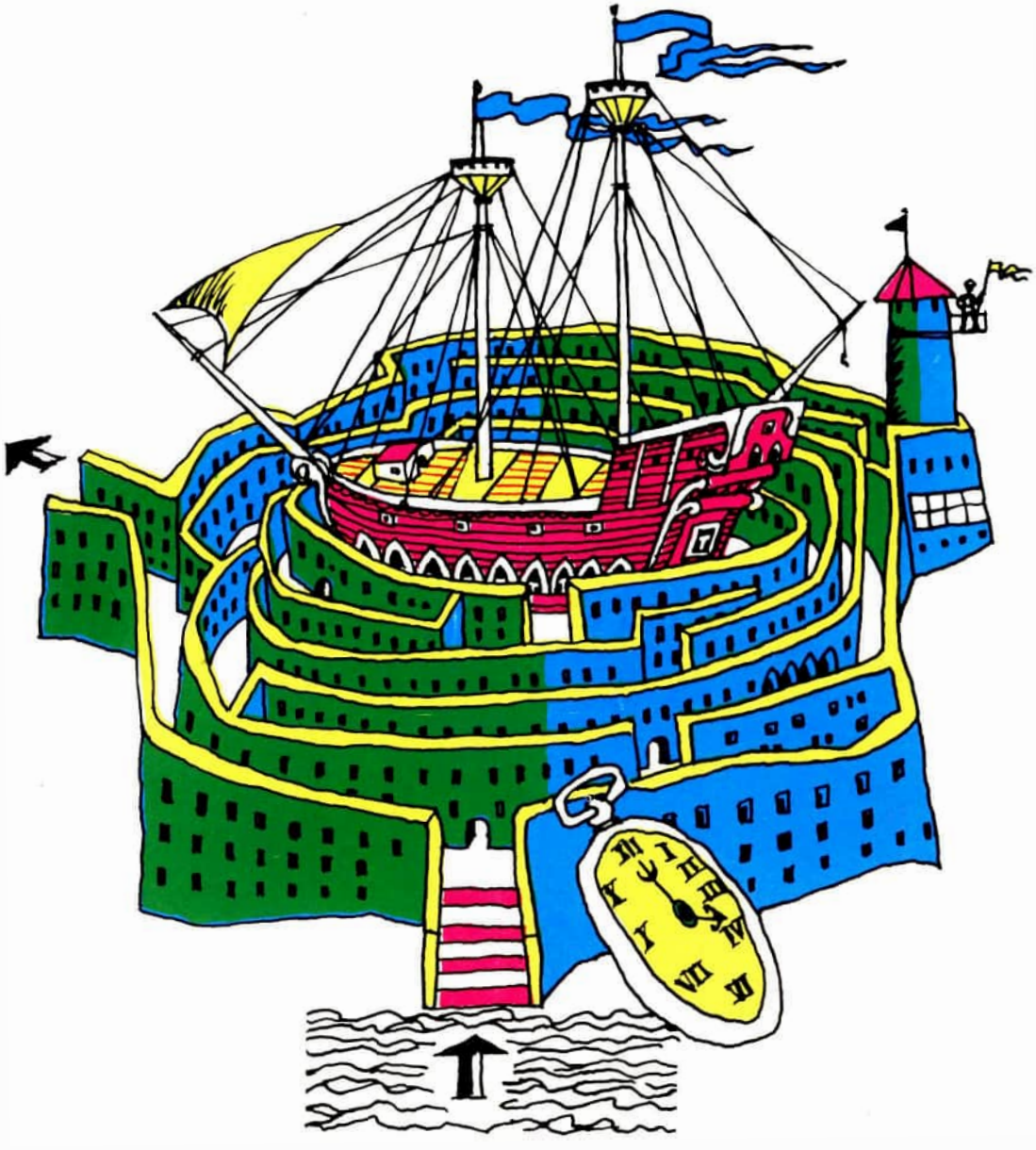
© 1977 Verlag MIR Moskau

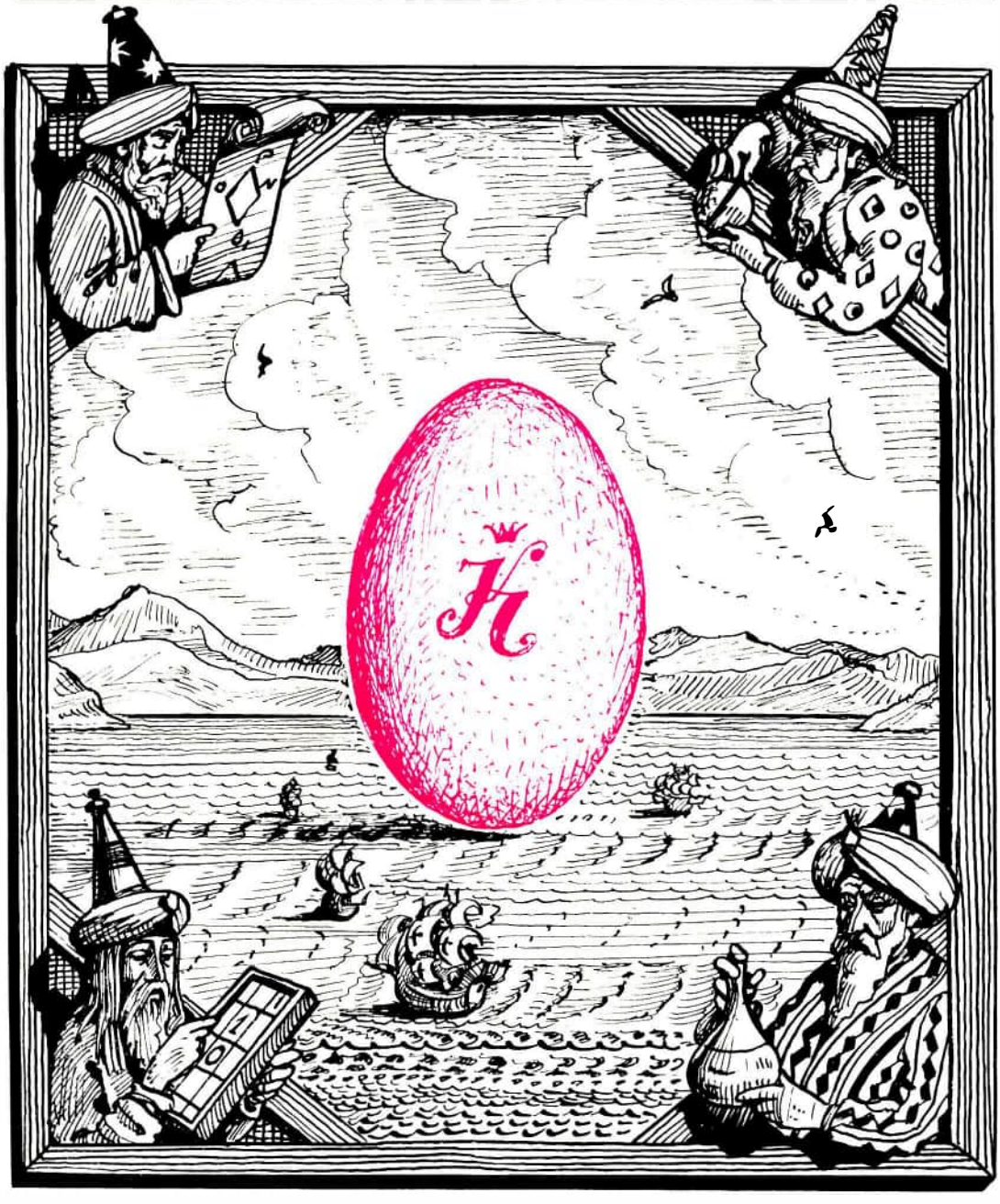
2. Auflage

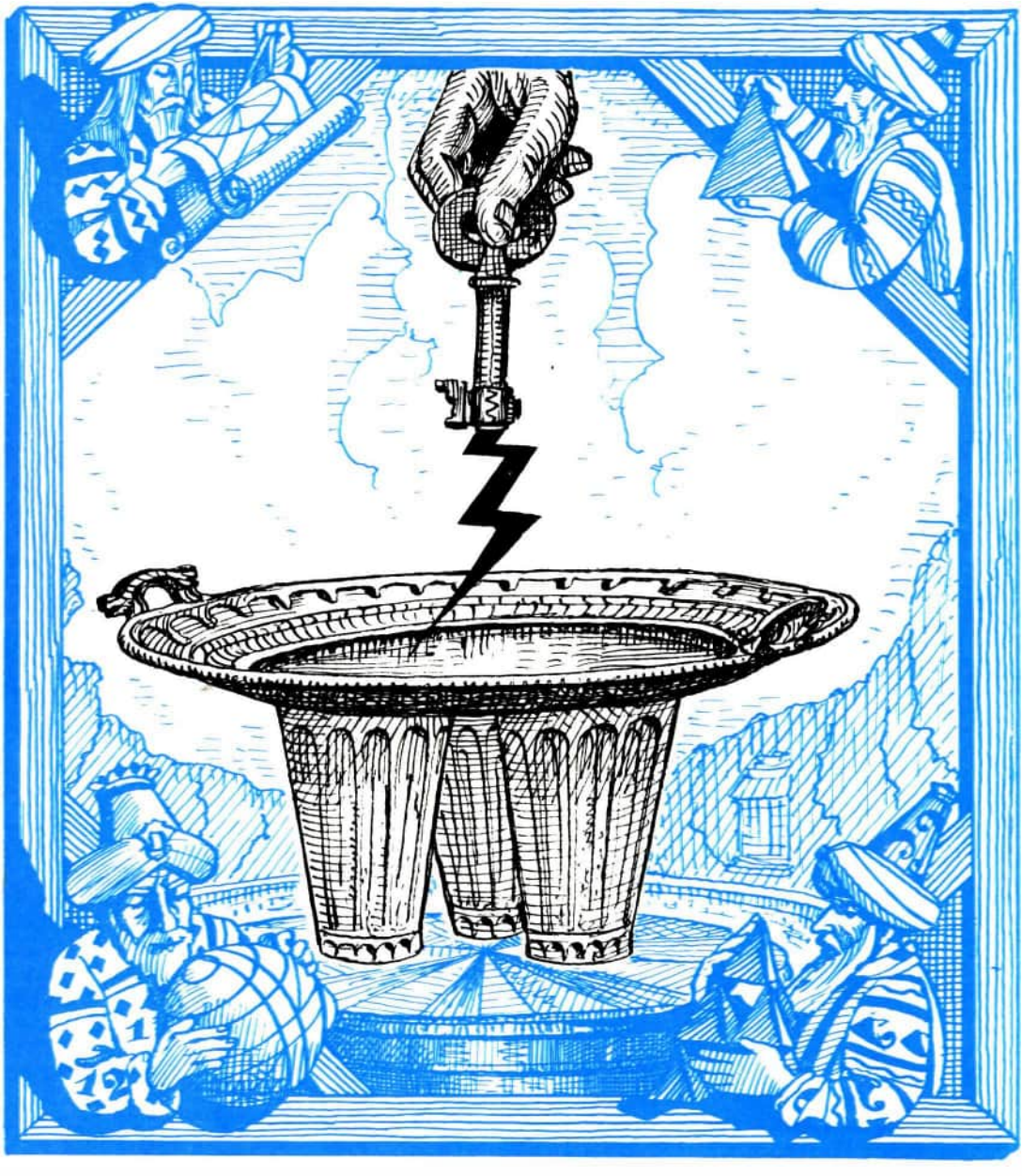
Einband: I. Krawzow, W. Stulikow, Moskau

Künstlerische Gestaltung: Kabakow I., Keidan W., Krawzow I., Lion D., Muchin S., Perewesenzew J., Saksonow L., Sokolow A., Stulikow W., Warschamow R., Wastschenko J.

Best.-Nr. 298 2364
EVP 14,60 M




H

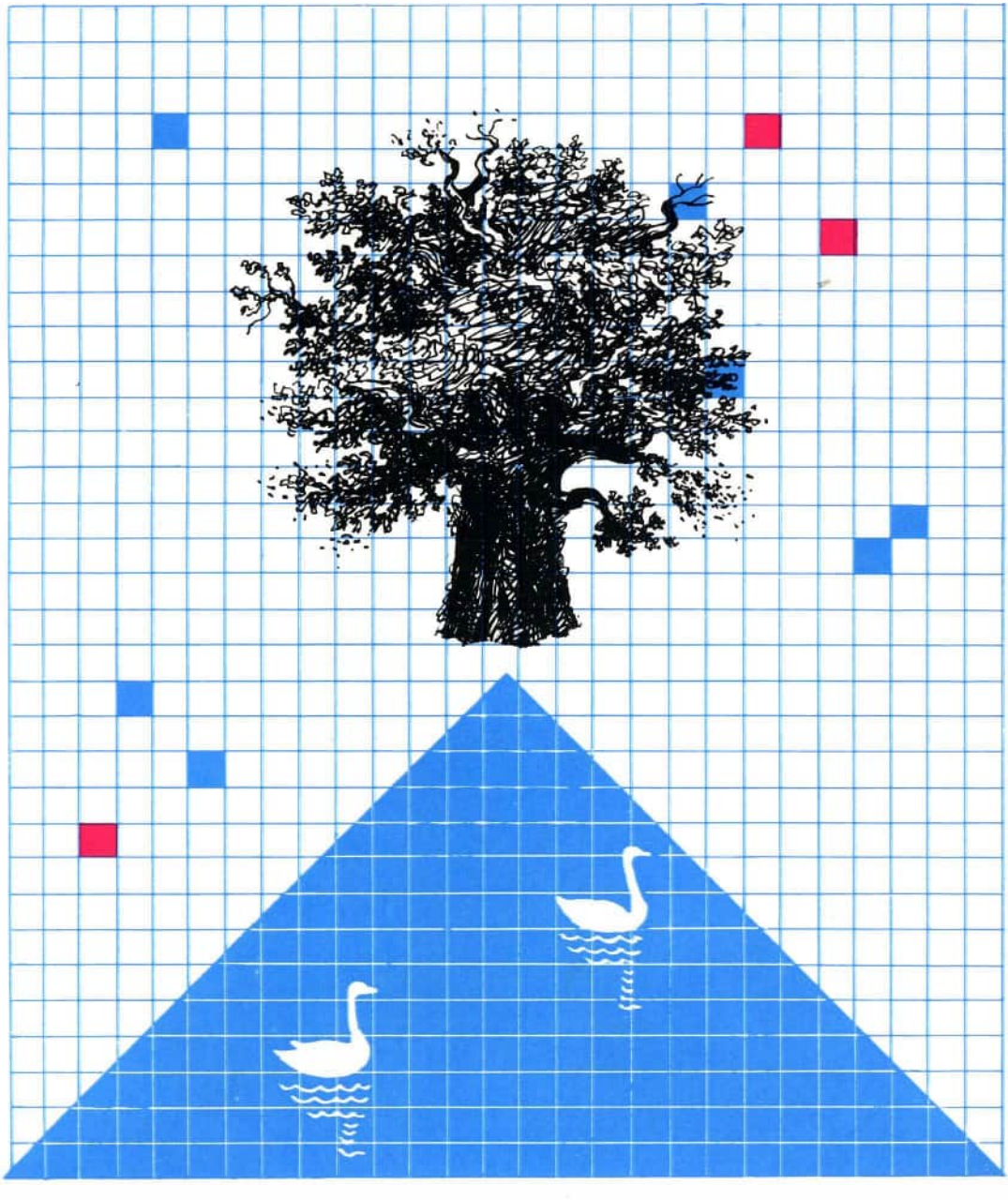


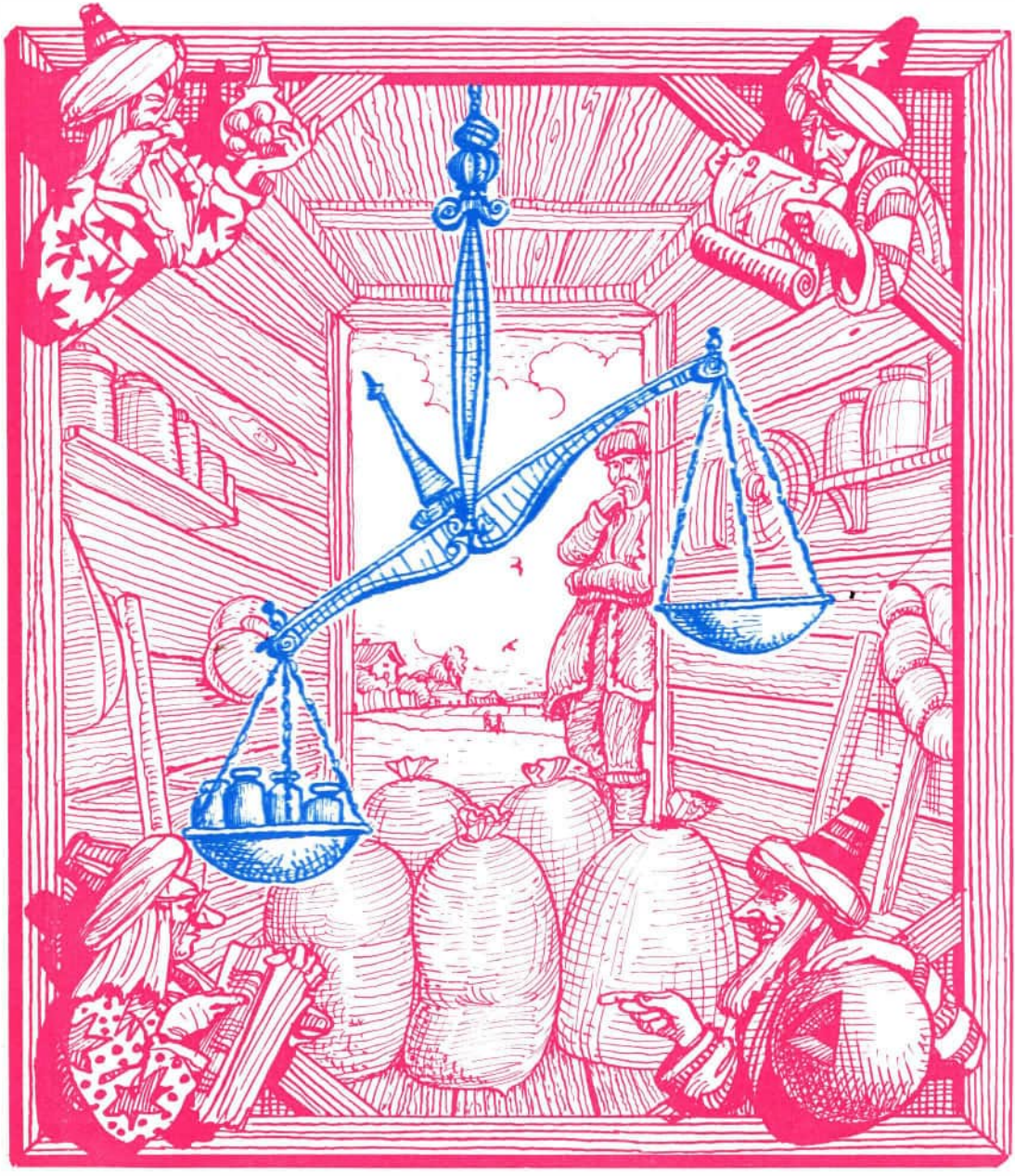

75

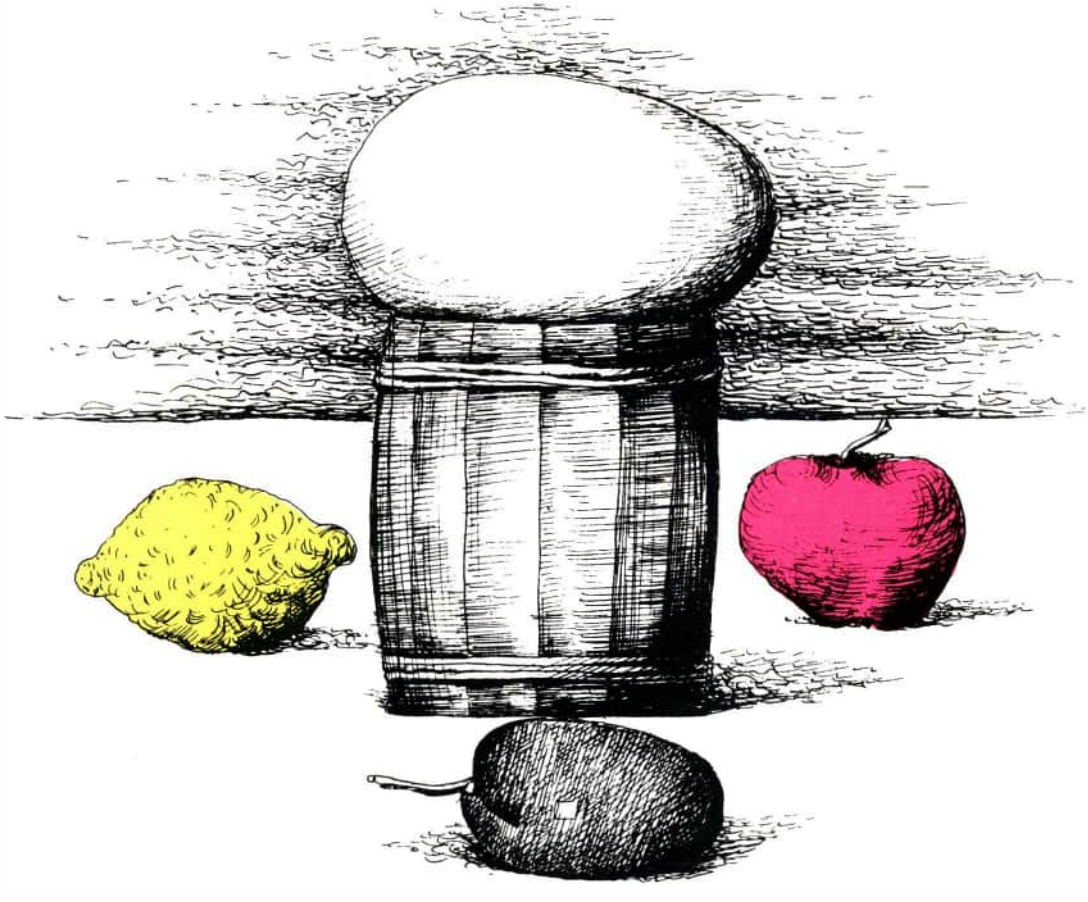


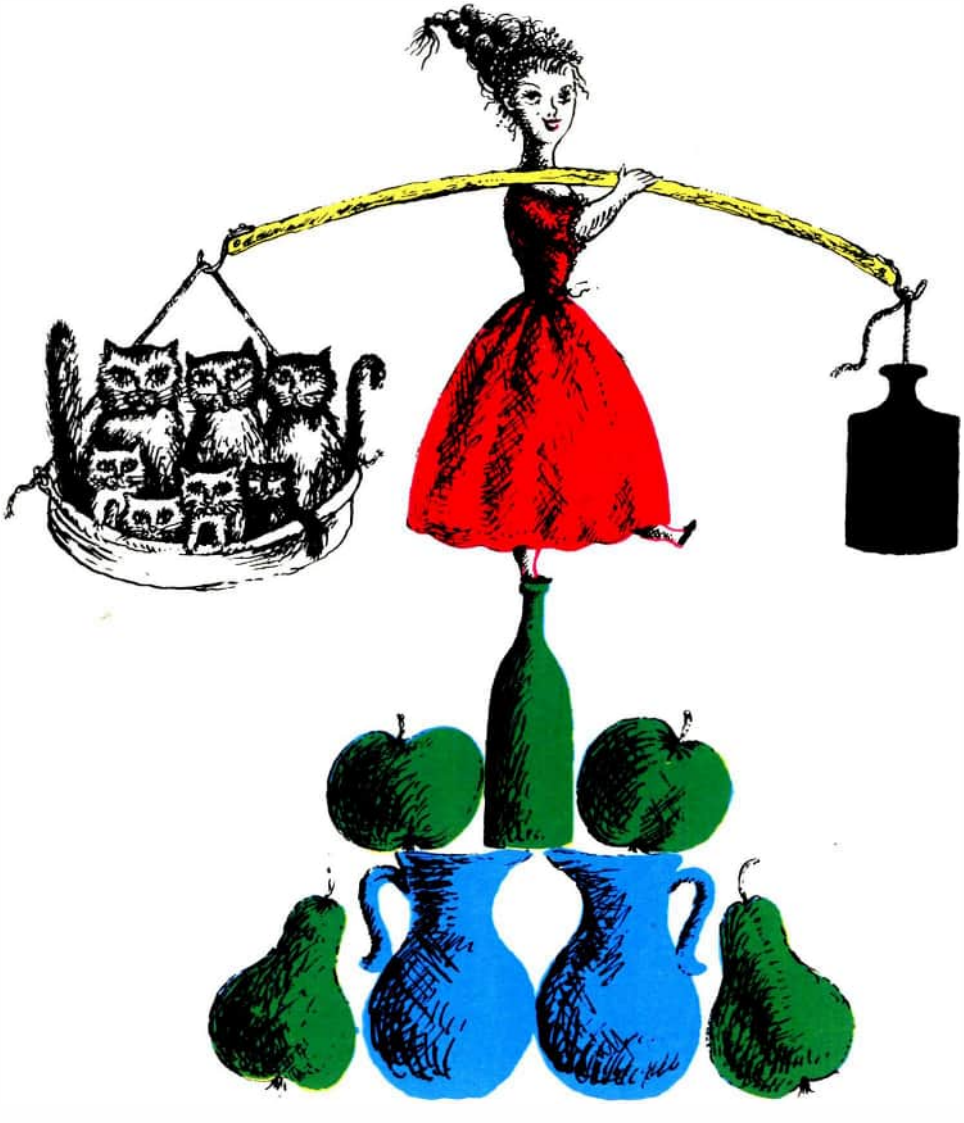


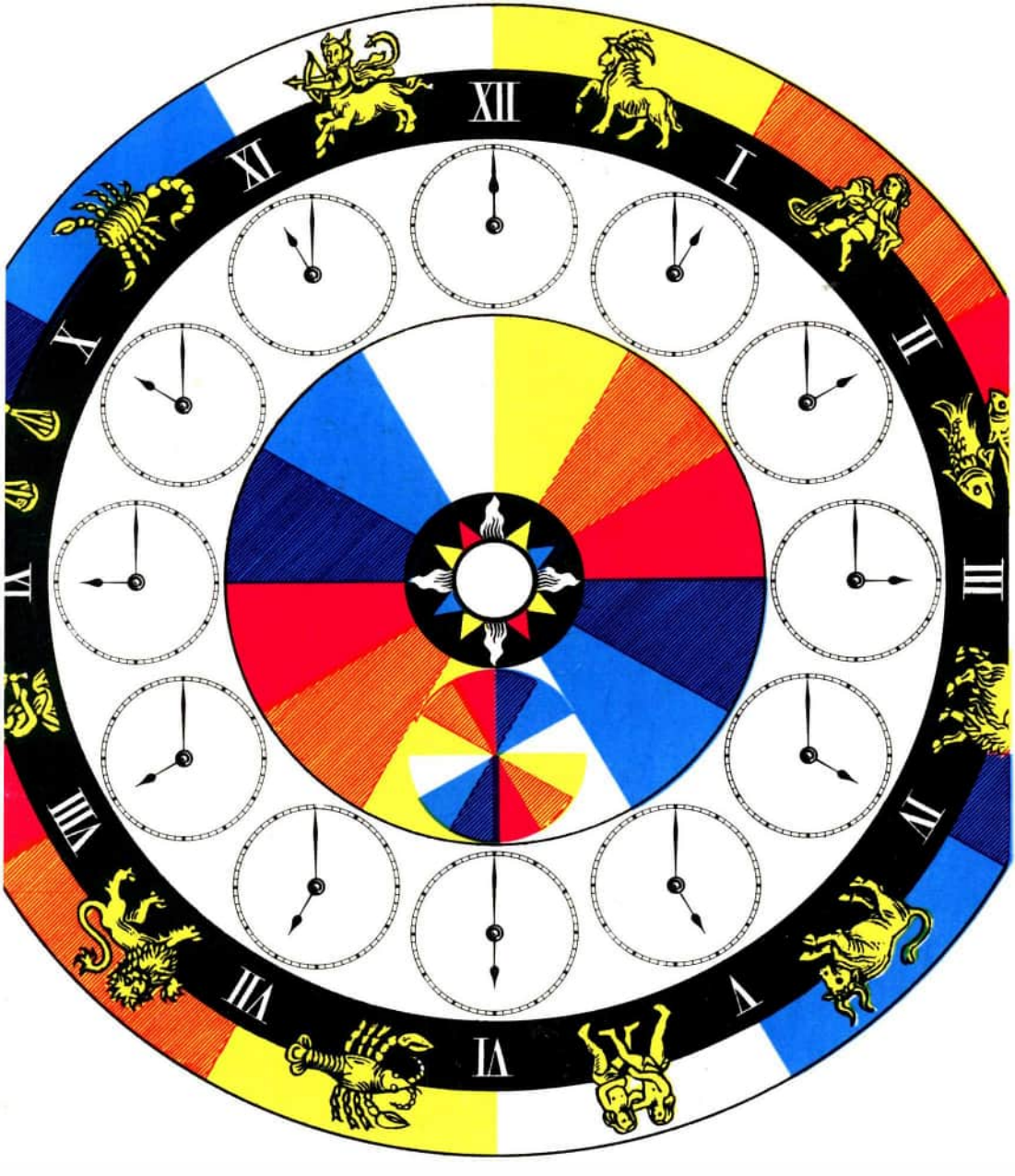


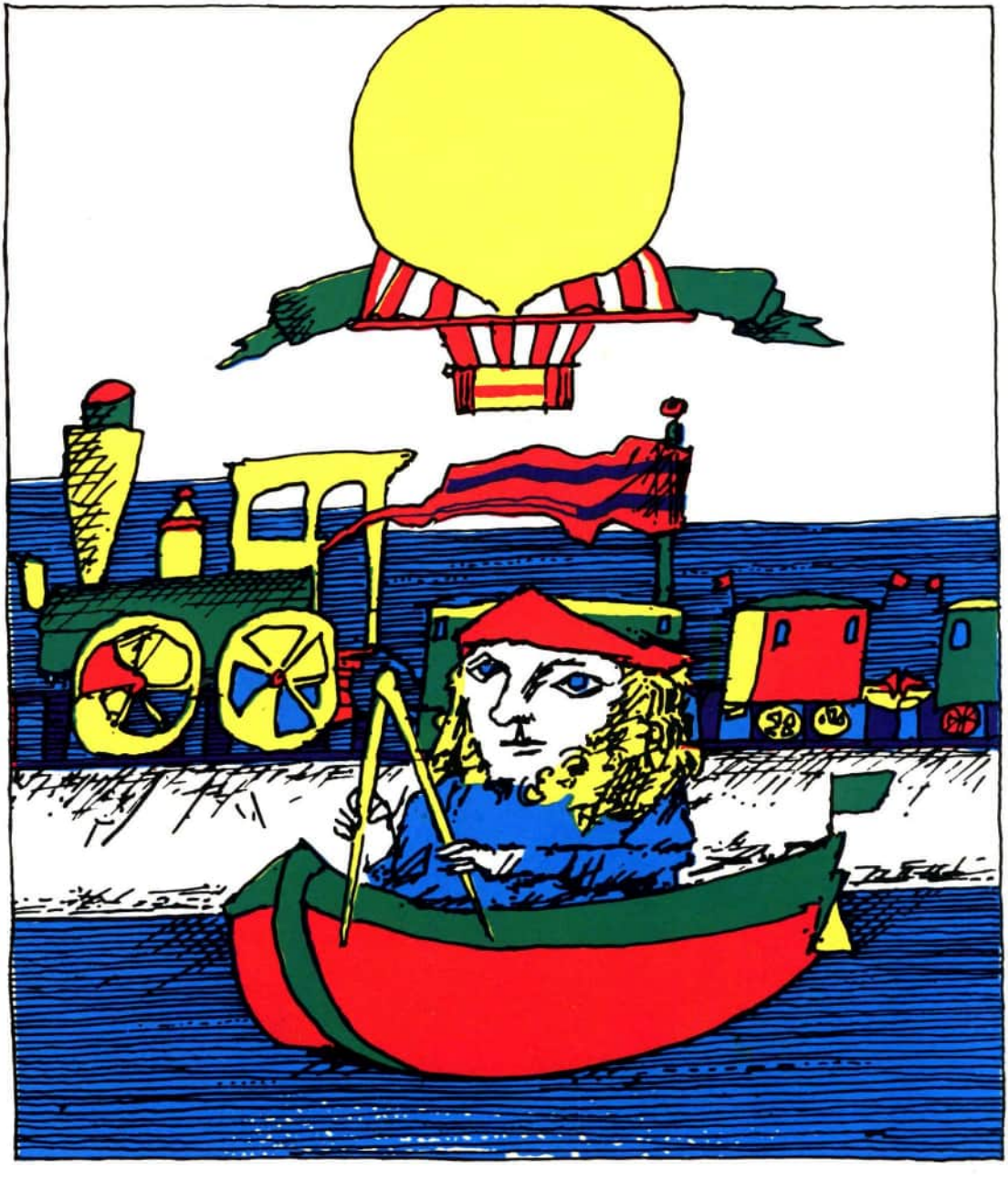


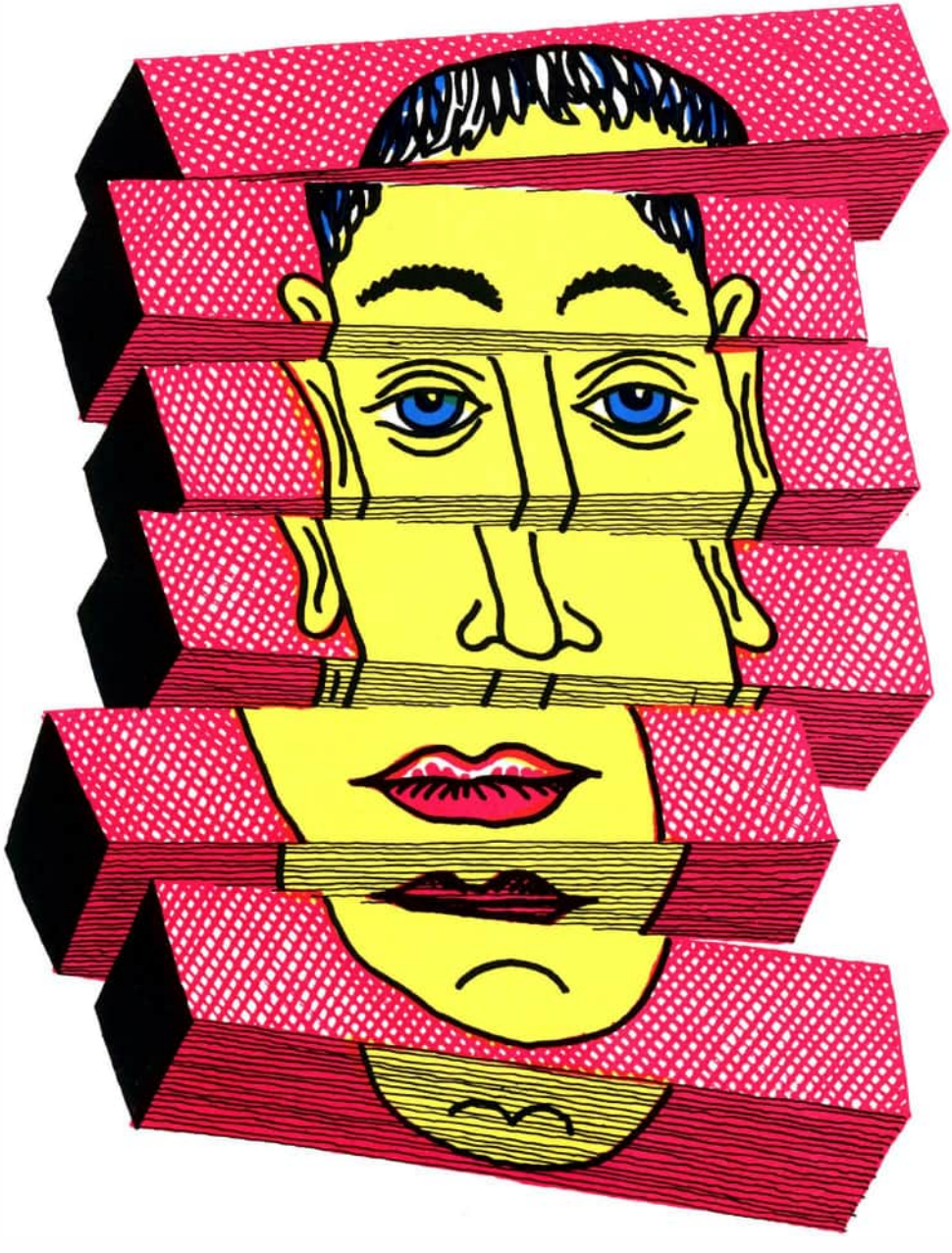


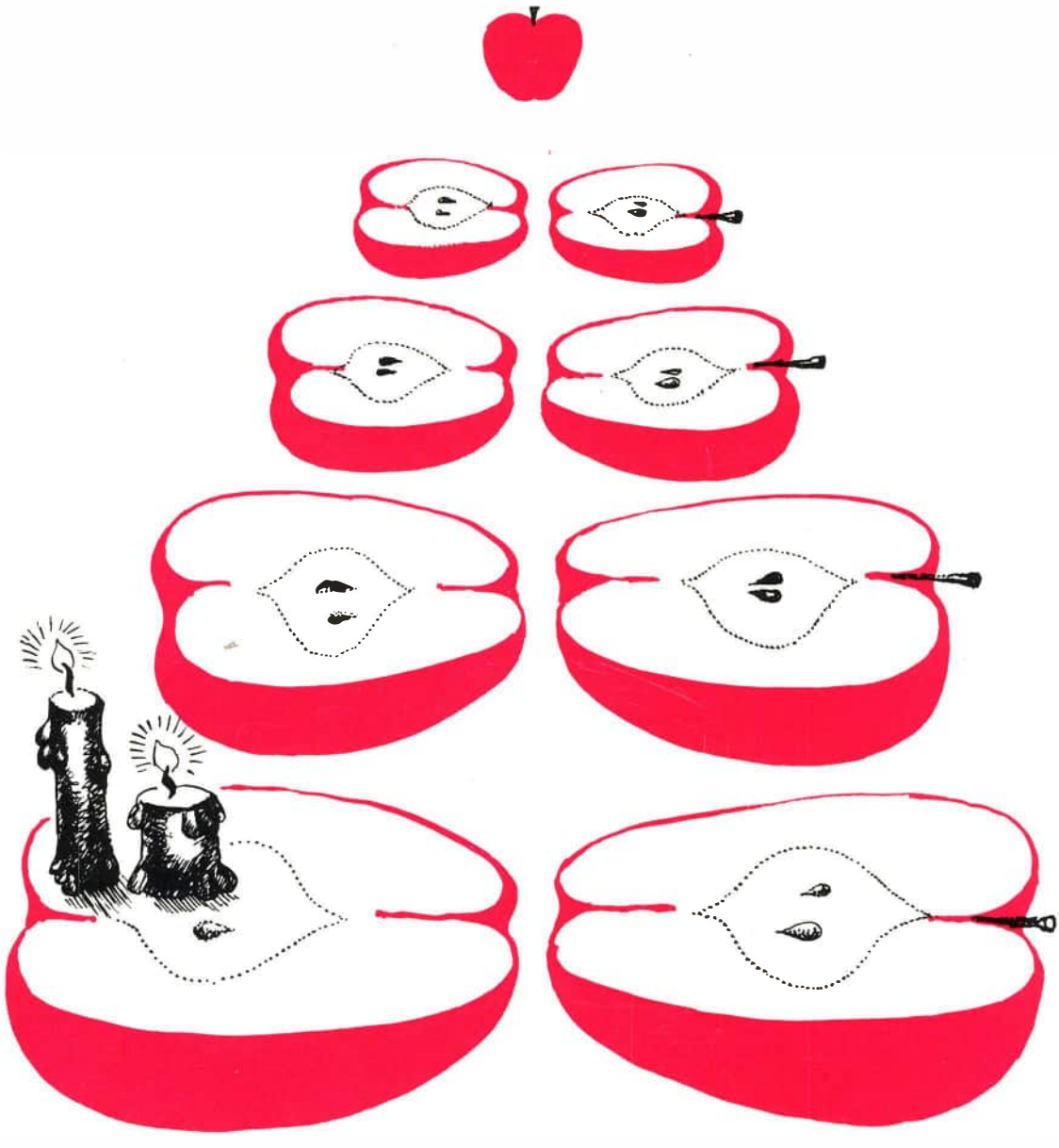




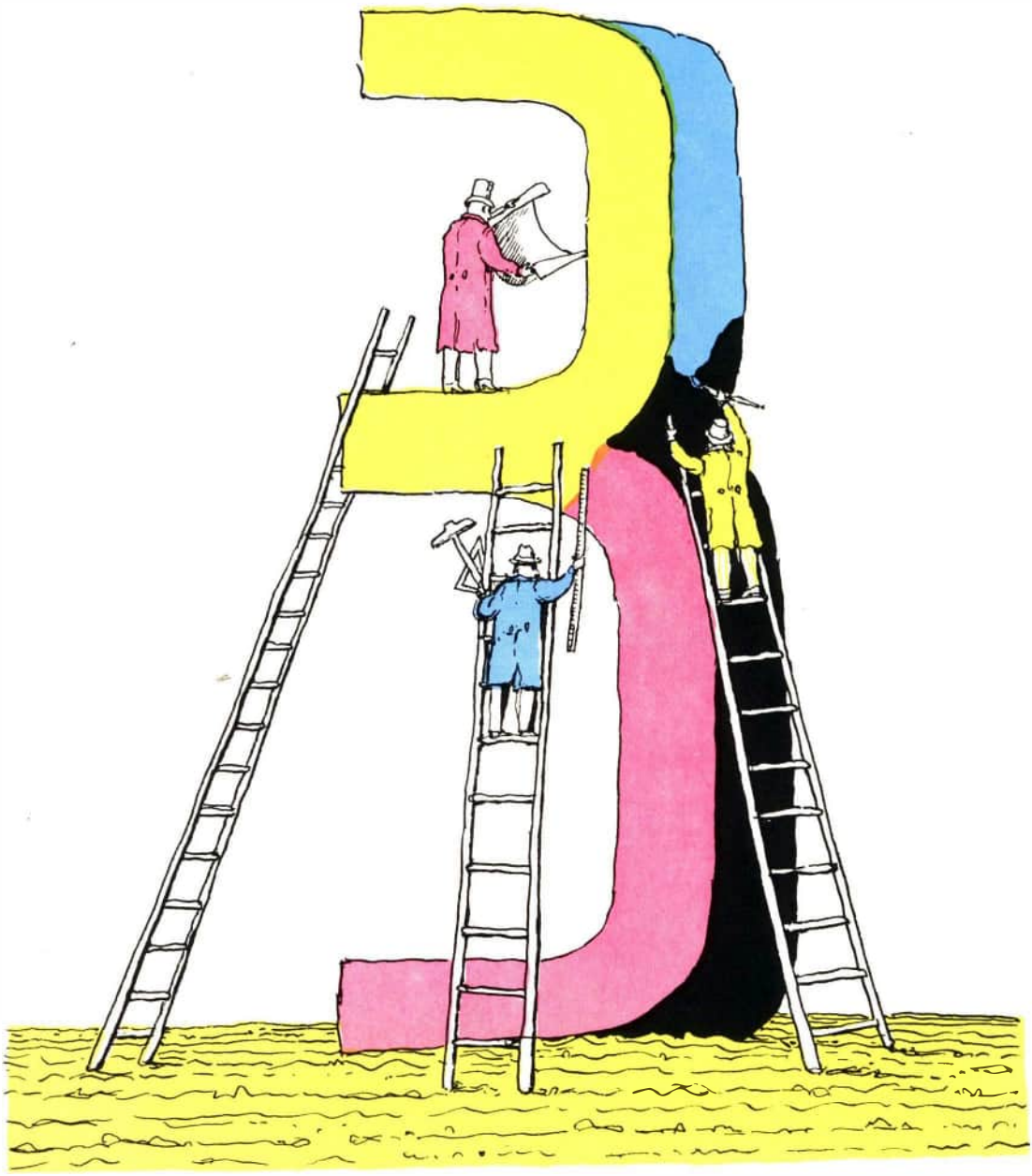

XII
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI

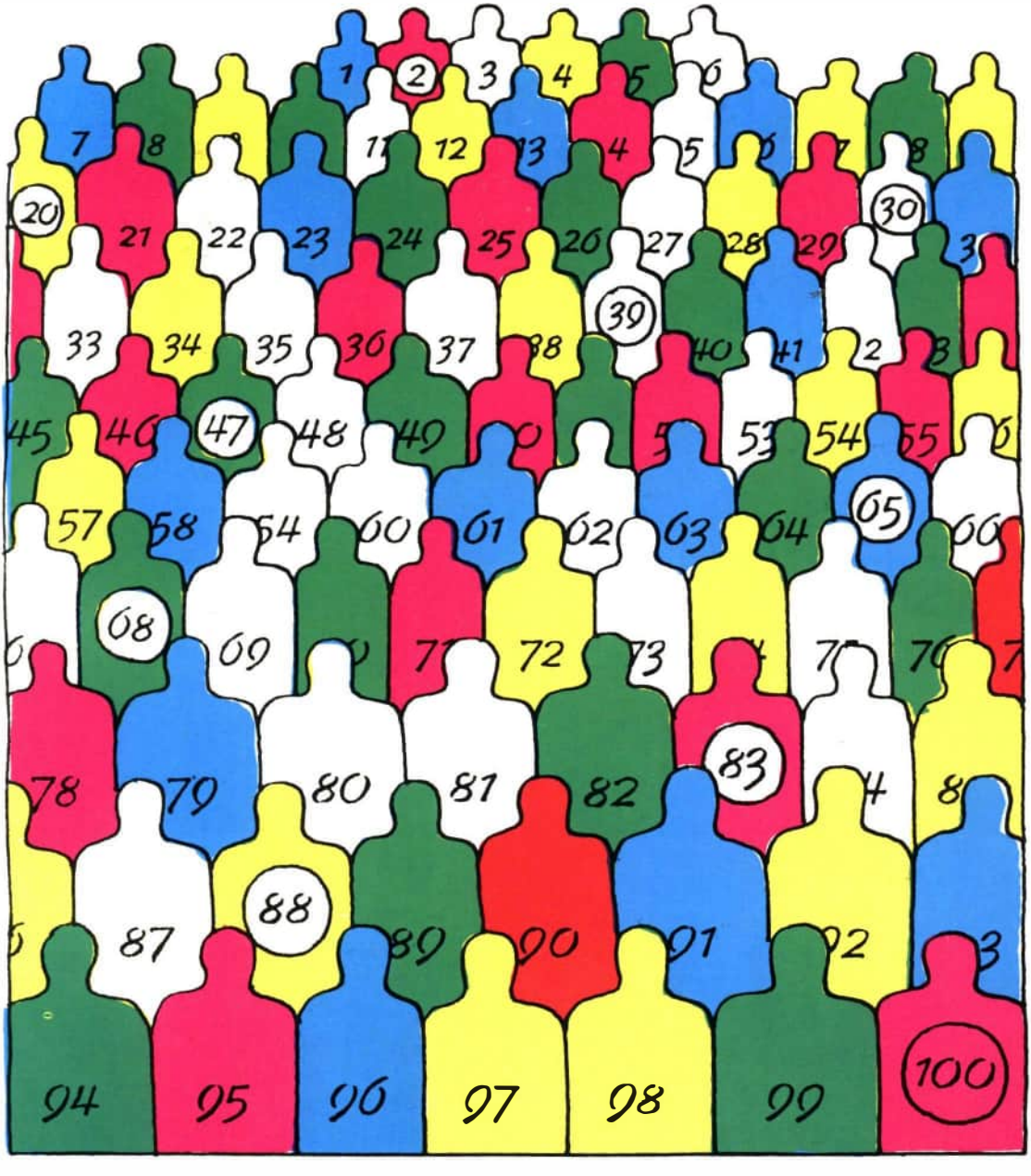








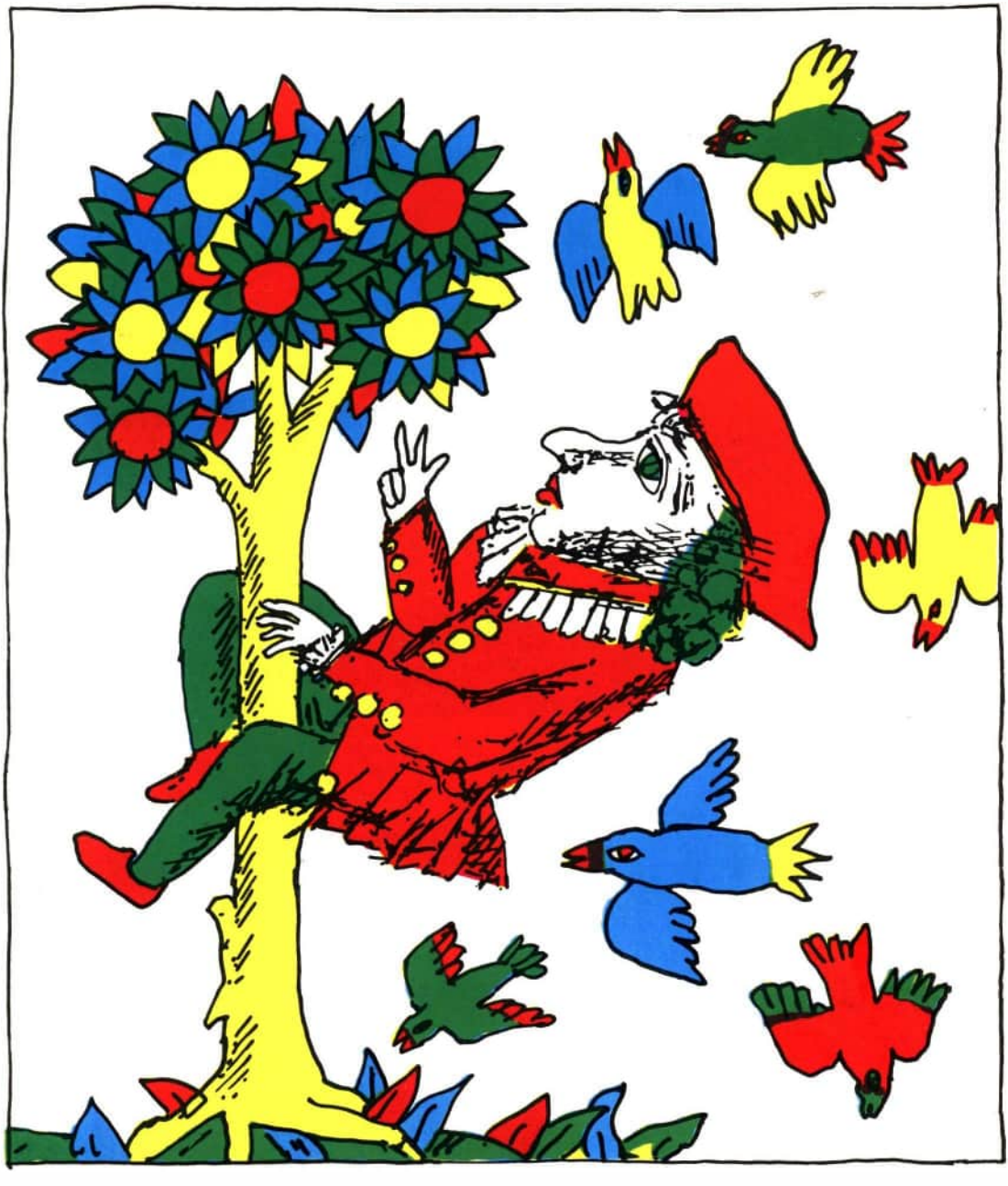


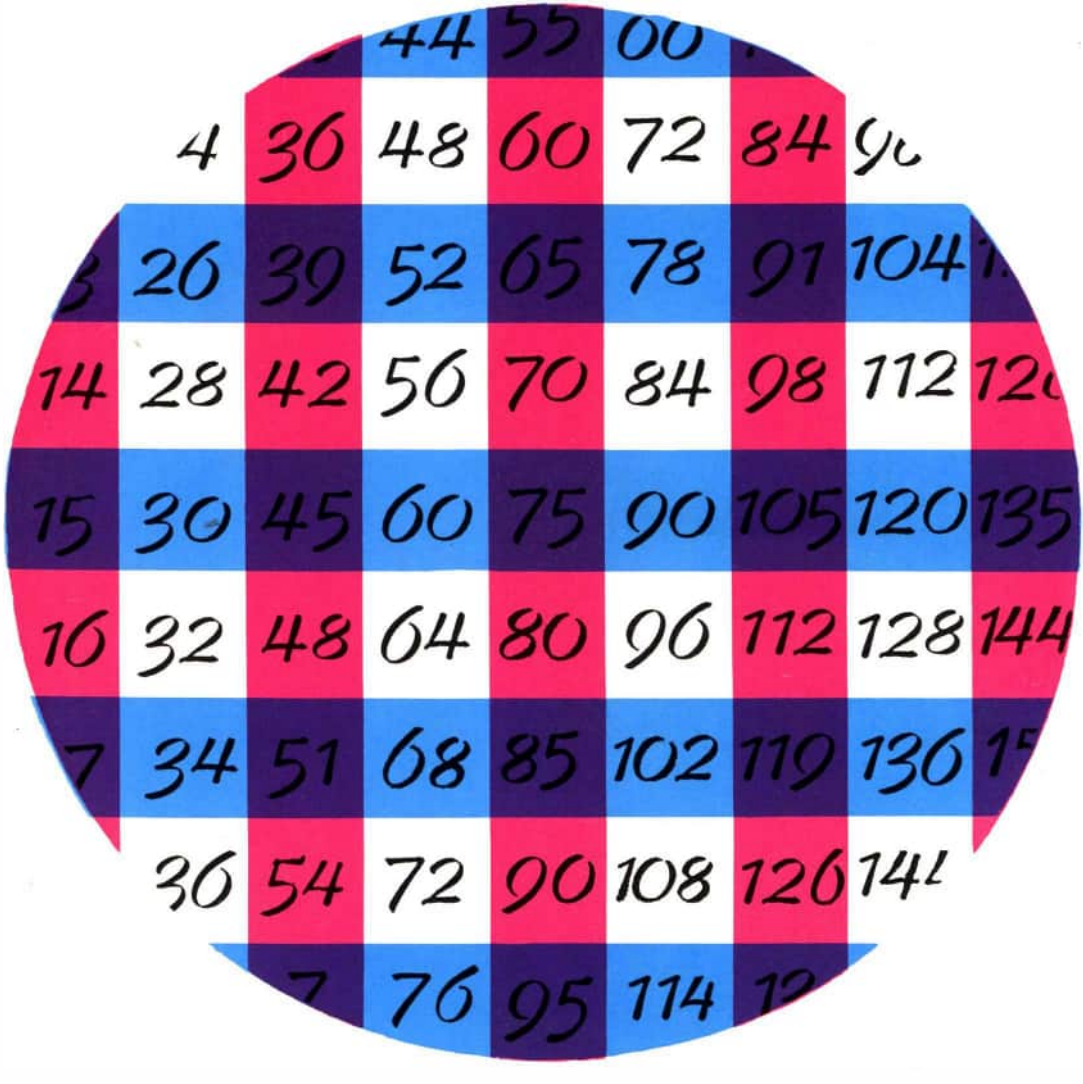

1
2
3
4
7
8
11
12
13
20
21
22
23
24
25
26
27
28
30
33
34
35
36
37
39
45
46
47
48
49
53
54
57
58
60
61
62
63
64
65
68
69
72
73
78
79
80
81
82
83
87
88
89
90
91
94
95
96
97
98
99
100

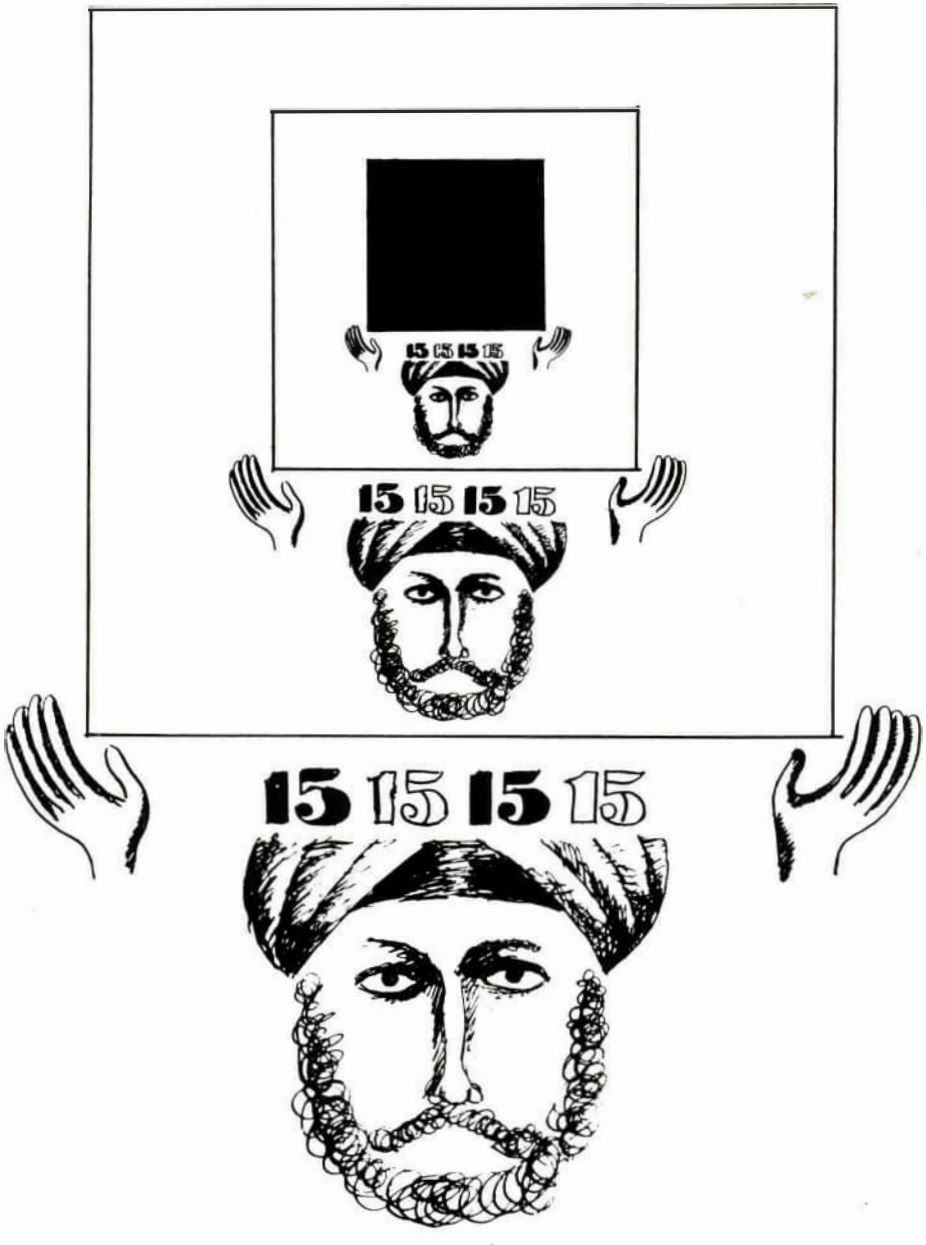




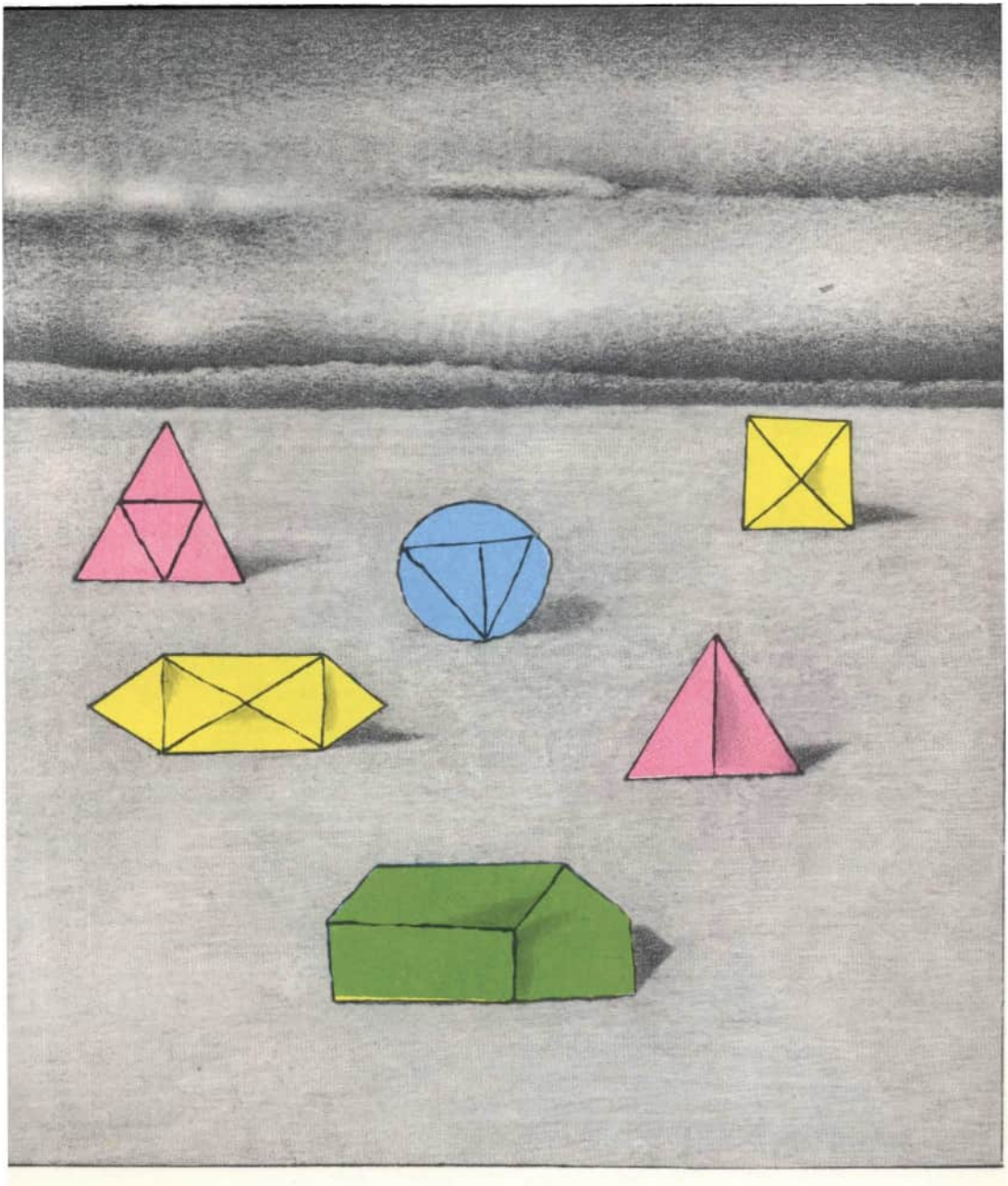
Könnt ihr zählen?



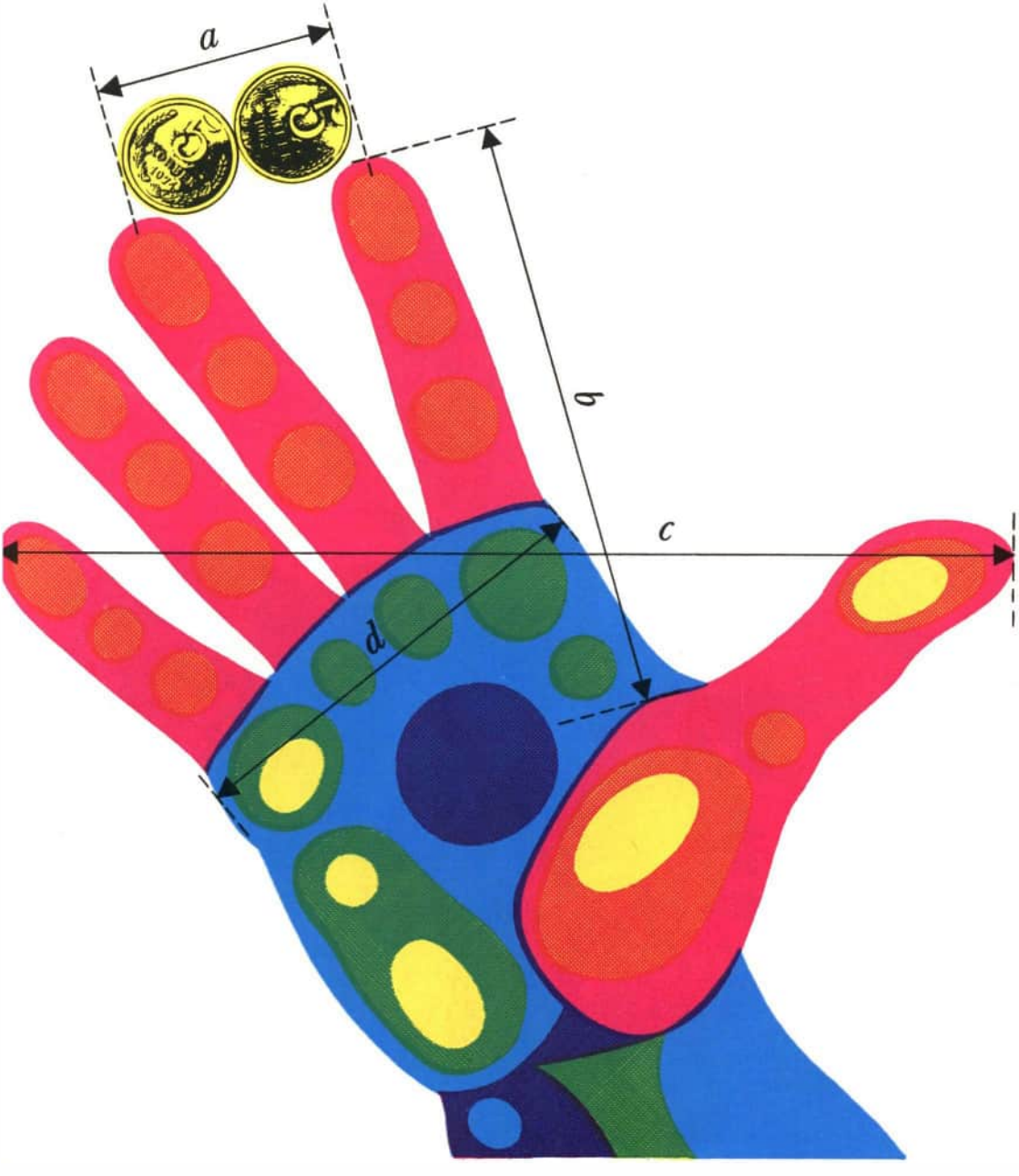

44 55 60
4 36 48 60 72 84 9
26 39 52 65 78 91 104
14 28 42 56 70 84 98 112
15 30 45 60 75 90 105 120 135
16 32 48 64 80 96 112 128 144
34 51 68 85 102 119 136
36 54 72 90 108 126
76 95 114

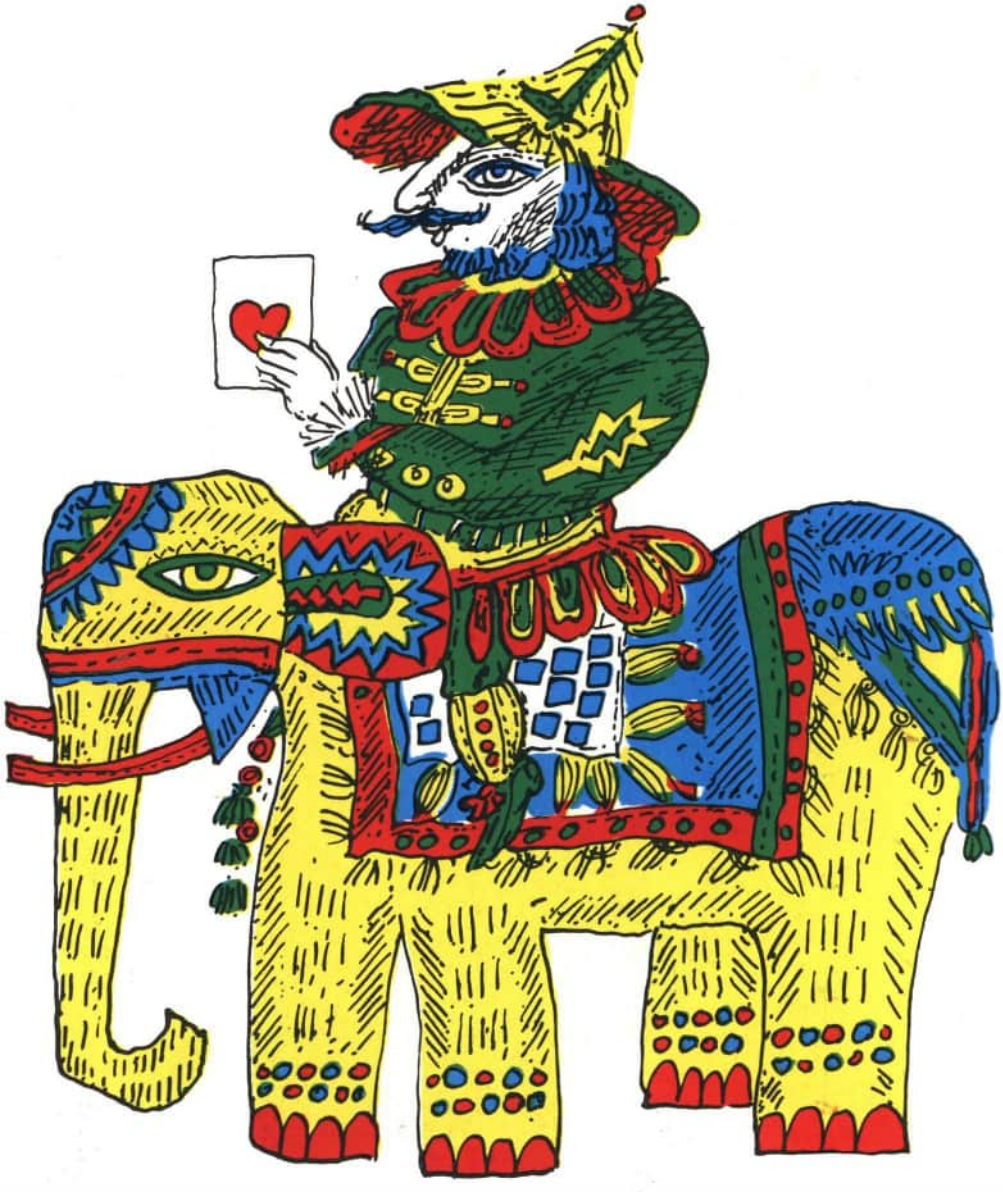

15 15 15 15
15 15 15 15
15 15 15 15








a
b
c
d



Beiläufiges

Schere und Papier

Mit einem Schnitt in drei Teile • Einen Streifen auf die Kante stellen • Verhexte Ringe • Verblüffende Ergebnisse beim Zerschneiden • Papierkette • Durch ein Papierblatt krauchen

Ihr glaubt natürlich — wie ich zu meiner Zeit auch —, daß es auf der Welt nutzlose Dinge gibt. Ihr irrt euch. Es gibt keinen solchen Plunder, der nicht für irgend etwas noch zu gebrauchen sein könnte. Was zu einem Zweck unnütz ist, kann zu dem anderen nützlich sein. Was keinen praktischen Nutzen hat, ist mindestens für einen Spaß noch zu gebrauchen.

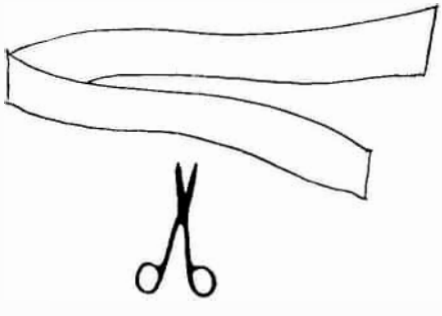
In der Ecke des renovierten Zimmers stieß ich auf einige alte Postkarten und ein Bündel schmaler Papierstreifen, die vor dem Tapezieren gewöhnlich vom Rand der Tapeten abgeschnitten werden. Gerümpel, das nur für den Ofen taugt, dachte ich. Aber es erwies sich, daß man sich selbst mit diesem Gerümpel sehr interessant die Zeit vertreiben kann. Mein älterer Bruder zeigte mir einige amüsante Geschicklichkeitsspiele, die man mit diesem Material machen kann.

Er begann mit den Papierstreifen. Er gab mir ein Stück, das drei Handflächen lang war, und sagte:

„Nimm die Schere und schneide den Streifen in drei Teile."

Ich wollte schon schneiden, da hielt mein Bruder mich zurück und fuhr fort:

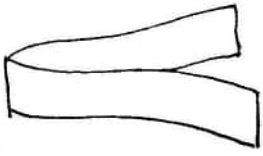
Abbildung 1



„Halt, ich bin noch nicht fertig, schneide ihn mit einem Schnitt in drei Teile!"

Das war schon schwieriger. Ich mühte mich redlich ab und konnte mich davon überzeugen, daß mein Bruder mir eine schwierige Aufgabe gestellt hatte. Schließlich glaubte ich, daß die Aufgabe unlösbar sei.

Abbildung 2



„Du willst mich wohl auf den Arm nehmen", sagte ich, „das geht ja gar nicht."

„Denke gut nach, vielleicht kommst du dahinter."

„Ich habe schon erraten, daß die Aufgabe nicht lösbar ist."

„Du hast schlecht geraten, gib her!"

Mein Bruder nahm mir den Streifen und die Schere ab, legte den Papierstreifen zusammen und schnitt ihn in der Mitte durch. Es entstanden drei Teile.

„Siehst du?"

„Ja, aber du hast den Streifen geknickt."

„Und warum hast du es nicht getan?"

„Es war ja nicht die Rede davon, daß man ihn falten kann."

„Aber auch nicht davon, daß er nicht geknickt werden darf. Gib zu, daß du es nicht erraten hast."

„Los, eine andere Aufgabe. Jetzt legst du mich nicht mehr rein."

„Hier ist noch ein Streifen. Leg ihn hochkant auf den Tisch."

„Soll er stehen oder umfallen?" fragte ich, eine Falle vermutend.

„Natürlich so, daß er steht. Wenn er umfällt, ist er ja hingelegt und nicht aufgestellt."

„Daß er auf der Kante steht ...", überlegte ich und plötzlich dachte ich daran, daß man den Streifen ja knicken kann. Ich kniffte ihn und stellte ihn auf den Tisch.

„Richtig."

„Weiter!"

„Bitte. Sieh her, ich habe die Enden von einigen Streifen zusammengeklebt und einen Papierring erhalten. Nimm einen Zweifarben-Stift und markiere die äußere Seite mit einem blauen durchgehenden Strich, die innere markiere ebenso mit einem roten."

„Und dann?"

„Das ist alles."

„Spielerei!"

Aber es gelang mir nicht. Als der blaue Strich geschlossen war, und ich mit dem roten beginnen wollte, stellte ich fest, daß ich aus Versehen beide Seiten des Rings mit einem blauen Strich versehen hatte.

„Gib mir einen anderen Ring", sagte ich ein wenig verwirrt. „Ich habe den ersten verdorben."

Aber auch mit dem zweiten Ring erlebte ich das gleiche Mißgeschick: Ich bemerkte gar nicht, wie ich beide Seiten markierte.

„So etwas Dummes. Wieder habe ich den Ring verdorben. Gib einen dritten Ring."

„Nimm, wir haben ja genug davon."

Was glaubt ihr wohl? Auch dieses Mal waren beide Seiten mit blauer Farbe versehen. Für den roten Stift blieb keine freie Seite übrig. Ich war verzweifelt.

„So etwas Einfaches kannst du nicht!" sagte mein Bruder lachend, „sieh her, bei mir klappt es sofort."

Er nahm einen Papierring, brachte schnell den blauen Strich auf der äußeren Seite an und auf der inneren den roten.

Mit einem neuen Ring versuchte ich so aufmerksam wie möglich, den Strich auf einer der Seiten anzubringen, und mit großem Bemühen, nicht auf die andere Seite zu geraten, schloß ich den Strich. Wieder Pech: Beide Seiten markiert! Dem Weinen nahe, blickte ich verwirrt meinen Bruder an — und da erst, an seinem verschmitzten Lächeln erriet ich, daß hier irgendwo eine Falle ist.

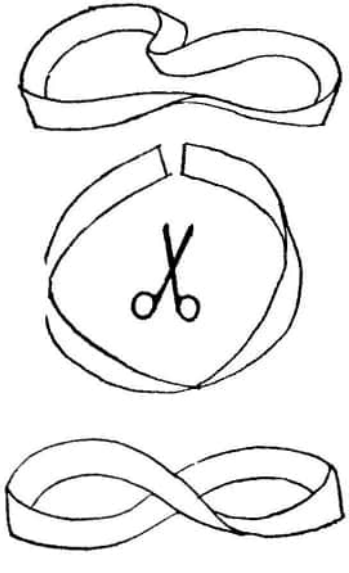
„He, du hast... Das ist Zauberei?" fragte ich.

„Die Ringe sind verhext", antwortete er. „Es sind keine einfachen Ringe."

„Was heißt ‚keine einfachen', Ring ist Ring. Aber du machst irgendwas daran."

„Versuche mit diesem Ring irgend etwas anderes zu machen. Kannst du zum Beispiel den Ring längst aufschneiden, so daß zwei schmale entstehen?"

Abbildung 3



„Kein Problem!"

Nachdem ich den Ring aufgeschnitten hatte und meinem Bruder das Paar schmaler Ringe zeigen wollte, bemerkte ich mit Verwunderung, daß ich nicht zwei, sondern einen langen Ring in den Händen hielt.

„Na, wo sind denn deine zwei Ringe?" fragte mein Bruder belustigt.

„Gib einen anderen her, ich versuche es nochmal."

„Zerschneide mal den, den du eben gemacht hast!"

Ich schnitt. Diesmal hatte ich tatsächlich zwei Ringe in den Händen. Doch als ich sie auseinandernehmen wollte, stellte ich fest, daß sie nicht zu entwirren sind, daß sie ineinander verschlungen waren. Mein Bruder hatte recht. Der Ring war tatsächlich verhext.

„Das Geheimnis der Hexerei ist sehr einfach", erklärte mein Bruder. „Du kannst auch selber solche ungewöhnlichen Ringe fabrizieren. Du mußt nur, bevor du die Enden der Papierstreifen zusammenklebst,

ein Ende verdrehen. Siehst du, so wie auf Abbildung 3."

„Und davon kommt alles?"

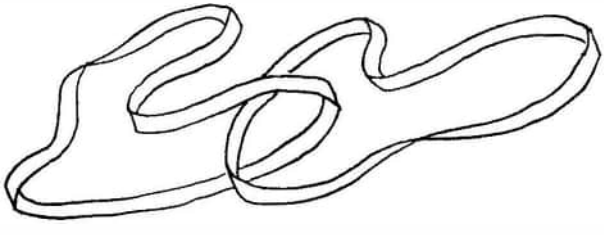
„Denk mal an! Natürlich habe ich mit dem Bleistift auf dem einfachen Ring gezeichnet. Noch interessanter wird es, wenn die Enden nicht nur ein-, sondern zweimal verdreht werden."

Mein Bruder fertigte vor meinen Augen einen Ring auf diese Weise an.

„Schneide ihn längs auf", sagte er. „Was wird daraus?"

Nach dem Schneiden hatte ich zwei Ringe, einer durch den anderen gesteckt. Wunderbar! Es war unmöglich, sie auseinanderzunehmen. Ich selbst habe noch drei solche Ringe gefertigt und erhielt drei Paar nicht voneinander trennbare Ringe.

Abbildung 4



„Und was würdest du tun", fragte mein Bruder, „wenn du alle vier Paar Ringe zu einer einzigen langen, nicht geschlossenen Kette vereinigen müßtest?"

„Na, das ist einfach: einen Ring von jedem Paar aufschneiden, durchfädeln und wieder verkleben."

„Das heißt also, mit der Schere würdest du", wandte mein Bruder ein, „drei Ringe zerschneiden?"

„Drei", antwortete ich.

„Und weniger als drei geht nicht?"

„Wir haben doch 4 Ring-Paare. Wie willst du sie vereinigen, wenn du nur 2 Ringe öffnest? Das ist unmöglich", sagte ich mit Überzeugung.

Anstelle einer Antwort nahm mir mein Bruder schweigend die Schere aus der Hand, zerschnitt zwei Ringe eines Paares und vereinigte mit ihnen die drei übrigen — es entstand eine Kette aus acht Ringen. Lächerlich einfach! Keinerlei Trick war dabei. Ich wunderte mich nur, wieso mir so eine einfache Lösung nicht eingefallen war.

„Nun haben wir uns genug mit Papierstreifen beschäftigt, du hast ja wohl auch noch alte Postkarten.

Wollen wir uns damit auch etwas ausdenken. Versuche zum Beispiel in die Karte ein möglichst großes Loch zu schneiden, so groß wie du nur kannst."

Nachdem ich mit der Schere die Karte durchstochen hatte, schnitt ich exakt eine viereckige Öffnung und ließ nur einen schmalen Papierrahmen übrig.

„Das ist das Loch der Löcher! Ein größeres schneidet keiner heraus!" sagte ich mit Befriedigung, als ich meinem Bruder das Ergebnis meiner Arbeit zeigte.

Er war allerdings anderer Meinung.

„Na, das Loch ist ziemlich klein. Da kommt ja die Hand nur mit Mühe durch."

„Du willst wohl, daß der Kopf durchpaßt?" antwortete ich spöttisch.

„Kopf und Rumpf. So, daß man ganz hindurchkrauchen kann, das wäre ein brauchbares Loch."

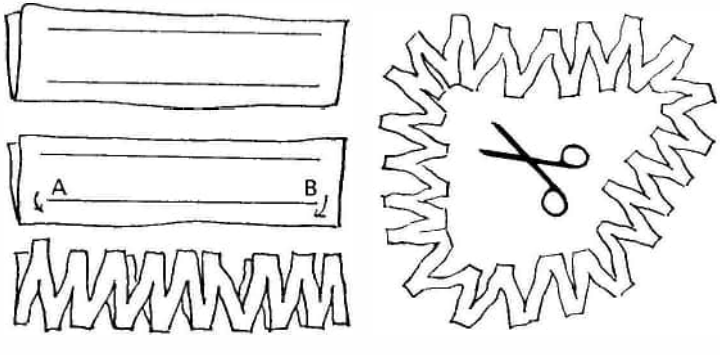
„Ha-ha! Ein Loch, größer als das Papier selbst ist, hineinschneiden, das möchtest du?"

„Genau. Um ein Vielfaches größer als das Papier."

„Da helfen keine Tricks, was nicht geht, geht eben nicht ..."

„Und was geht, das geht", sagte mein Bruder und begann zu schneiden. Überzeugt davon, daß er scherzt, schaute ich doch neugierig auf seine Hände. Er faltete die Postkarte in der Mitte, dann zog er an den langen Außenkanten je einen Strich und schnitt an den anderen Kanten das Papier ein.

Abbildung 5



Danach schnitt er den Kniff zwischen den Einschnitten von Punkt *A* und Punkt *B* auf und machte Einschnitte dicht nebeneinander (Abb. 5).

„Fertig", verkündete mein Bruder.

„Aber ich sehe keinerlei Loch."

„Sieh nur richtig her!"

Und da zog mein Bruder das Papier auseinander. Stellt euch vor, es verwandelte sich in eine lange Kette, die mein Bruder ohne Schwierigkeiten über meinen Kopf zog. Sie fiel mir zu Füßen und schloß mich mit ihren Zickzacken ein.

„Na, was ist, kann man durch so ein Loch krauchen?“

„Das reicht für zwei“, rief ich begeistert aus.

Damit beendete mein Bruder seine Experimente und Geschicklichkeitsspiele und versprach mir, ein andermal noch mehr zu zeigen — und zwar mit Münzen.

Zerstreuung mit Münzen

Die sichtbare und die unsichtbare Münze • Das Glas ohne Boden • Wo ist die Münze geblieben? • Aufgaben zur Verteilung von Münzen • In welcher Hand ist der Groschen? • Spiel mit dem Umsetzen von Münzen • Indische Legende • Lösung der Aufgaben

„Du hast mir gestern einen Zaubertrick mit Münzen versprochen“, erinnerte ich meinen Bruder beim Frühstück.

„Schon am Morgen Zaubereien? Na gut, schütte den Zahnputzbecher aus.“

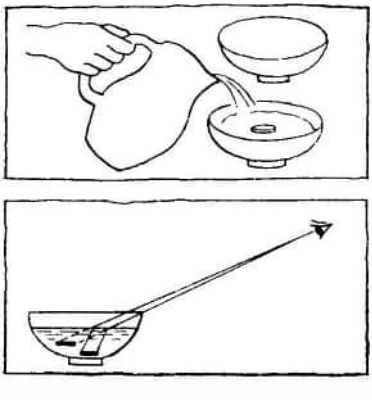
Auf den Boden des Bechers legte mein Bruder eine Silbermünze.

„Schau in den Becher, ohne dich zu bewegen und nach vorn zu beugen. Ist die Münze zu sehen?“

„Ja, ich sehe sie.“

Mein Bruder schob den Becher ein wenig von mir weg.

Abbildung 6



„Und jetzt?“

„Den Rand der Münze sehe ich. Das übrige ist verdeckt.“

Noch ein kleines Stück den Becher von mir wegziehend, erreichte mein Bruder, daß ich die Münze nicht mehr sehen konnte, da sie gänzlich vom Gefäßrand verdeckt wurde.

„Sitz still, beweg dich nicht. Ich gieße Wasser in den Becher. Was ist mit der Münze passiert?“

„Sie ist wieder vollständig zu sehen, als wäre sie mit dem Becherboden aufgestiegen. Wie kommt das?“

Mein Bruder nahm einen Bleistift und zeichnete eine Tasse mit der Münze auf Papier. Da wurde mir alles klar. Solange die Münze auf dem Boden des leeren Bechers lag, konnte kein Lichtstrahl von der

Münze aus mein Auge erreichen, denn das Licht bewegt sich in gerader Linie. Die undurchsichtigen Wände des Bechers versperren den Weg von der Münze zum Auge. Als jedoch Wasser hineingegossen wurde, veränderte sich die Lage. Beim Übergang vom Wasser zur Luft werden die Lichtstrahlen gebrochen, gleiten über den Rand des Bechers und treffen das Auge. Aber wir sind gewöhnt, die Dinge nur am Ausgangspunkt der *geradlinigen* Strahlen zu sehen, und deshalb erscheint uns die Münze nicht dort, wo sie liegt, sondern höher, in der Verlängerung des gebrochenen Strahls. Deshalb scheint es uns auch, als sei der Boden des Bechers mitsamt der Münze angehoben.

„Ich rate dir, dir diesen Versuch gut ins Gedächtnis einzuprägen", fügte mein Bruder hinzu. „Er wird dir beim Baden zugute kommen. Wenn du in flachen Gewässern badest, wo der Grund zu sehen ist, vergiß nie, daß du den Grund *höher* siehst, als er in Wirklichkeit ist. Und zwar beträchtlich höher, etwa ein Viertel der wirklichen Tiefe. Wo die Tiefe, sagen wir, einen Meter beträgt, erscheint sie dir nur 75 cm tief. Das hat bei badenden Kindern wiederholt zu Unglücken geführt, indem sie sich auf den trügerischen Schein verlassen haben, schätzten sie die Tiefe falsch ein."

„Mir ist aufgefallen, daß, wenn man mit dem Boot langsam an solchen Stellen, wo der Grund zu sehen ist, über das Wasser gleitet, die größte Tiefe unmittelbar unter dem Boot zu sein scheint. Drumherum ist es flacher. Dann kommt man aber an eine andere Stelle, und wieder ist es ringsherum flach, doch direkt unter dem Boot tief. So scheint die tiefe Stelle sich mit dem Boot fortzubewegen. Wie kommt das?"

„Das wird dir nunmehr nicht schwerfallen zu begreifen. Die Sache ist so: Jene Strahlen, die nahezu senkrecht aus dem Wasser austreten, verändern ihre Richtung weniger als die anderen. Deshalb erscheint der Grund an diesen Stellen auch weniger angehoben als dort, von wo aus unser Auge *gekrümmte* Strahlen treffen. Es ist ganz natürlich, daß uns der Grund unmittelbar unter dem Boot am tiefsten erscheint, obwohl er überall gleich tief ist. Doch jetzt machen wir einen ganz anderen Versuch."

Mein Bruder füllte ein Glas bis zum Rand mit Wasser.

„Was meinst du wird geschehen, wenn ich jetzt in das Glas ein 20-Pfennig-Stück werfe?"

„Es ist klar, das Wasser läuft über."

„Probieren wir es."

Vorsichtig, jede Erschütterung vermeidend, steckte mein Bruder die Münze in das randvolle Glas. Aber es lief nicht ein Tropfen über.

„Nun versuchen wir, noch einen Zwanziger hineinzugeben", sagte mein Bruder.

„Dann läuft es bestimmt über", warnte ich.

Aber ich irrte mich. In dem vollen Glas fand sich Platz für eine zweite Münze. Mein Bruder legte noch eine dritte und vierte Münze in das Glas.

„Was ist das für ein bodenloses Glas!" entfuhr es mir.

Mein Bruder schwieg und fuhr fort, Münze für Münze in das Glas zu stecken. Ein fünfter, ein sechster, ein siebenter Zwanziger fiel auf den Glasboden — das Wasser lief nicht über. Ich traute meinen Augen nicht. Ich konnte des Rätsels Lösung nicht länger abwarten.

Aber mein Bruder hatte es nicht eilig mit Erklärungen. Vorsichtig brachte er weitere Münzen ins Glas und hielt erst beim fünfzehnten Zwanziger ein.

„Na, das genügt vorläufig", sagte er schließlich. „Achte darauf, wie das Wasser am Glasrand aufgewölbt ist."

In der Tat. Das Wasser stand etwa um Streichholzbreite *über* den Rand des Glases, sich wölbend, wie in einem durchsichtigen Beutel.

„In dieser Wölbung liegt auch die ganze Lösung", fuhr mein Bruder fort. „Das ist das Wasser, das von den Münzen verdrängt wurde."

„15 Münzen haben so wenig Wasser verdrängt?" wunderte ich mich. „Eine Säule aus fünfzehn Zwanzigern ist doch ziemlich hoch. Und hier ist eine dünne Schicht, kaum stärker als ein 20-Pfennig-Stück."

„Berücksichtige nicht nur die Schichtstärke, sondern auch ihre Fläche. Mag die Stärke der Wasserschicht auch ein 20-Pfennig-Stück nicht überschreiten, so ist doch die Breite um wievielmal größer?"

Ich schätzte ab: Ein Wasserglas ist ungefähr viermal so breit wie ein 20-Pfennig-Stück.

„Viermal so breit und gleiche Stärke. Das heißt", so schloß ich, „die Schicht ist nur viermal so groß wie eine 20-Pfennig-Münze. Im Glas konnten also vier Münzen Platz finden. Aber du hast bereits 15 hineingegeben und willst, wie es scheint, noch mehr dazulegen. Woher kommt bloß der Platz dafür?"

„Deine Rechnung stimmt nicht. Wenn ein Kreis viermal so groß ist wie ein zweiter, so ist seine Fläche nicht viermal, sondern 16mal so groß."

„Sieh mal an?"

„Das müßtest du wissen. Wieviel Quadratzentimeter hat ein Quadratmeter? Etwa 100 ?"

„Nein, $100 \cdot 100 = 10\,000$."

„Na bitte. Für den Kreis gilt die gleiche Regel. Zweimal so breit gibt eine viermal so große Fläche, dreimal so breit — eine neunmal so große, viermal so breit — 16mal so große und so weiter. Das bedeutet, das Volumen der über den Glasrand aufgewölbten Wassermenge ist 16mal so groß wie das Volumen eines 20-Pfennig-Stücks. Verstehst du nun, woher der Platz im Glas kommt? Und es findet sich noch mehr, denn das Wasser kann sich über dem Glasrand in der zweifachen Stärke einer 20-Pfennig-Münze aufwölben."

„Dann könntest du wohl gar 20 Münzen in das Glas legen?"

„Sogar mehr, wenn man es vorsichtig, ohne Erschütterungen schafft."

„Nie hätte ich geglaubt, daß in einem mit Wasser randvoll gefüllten Glas sich noch Platz für so viel Münzen findet!"

Aber ich mußte es eben glauben, da ich mit eigenen Augen den Berg Münzen im Glas sah.

„Könntest du", sagte mein Bruder, „11 Münzen in 10 Untertassen so verteilen, daß in jeder Untertasse nur eine Münze liegt?"

„Untertassen mit Wasser?"

„Wenn du willst auch ohne, wie es dir paßt", lachte mein Bruder und stellte 10 Untertassen in einer Reihe auf.

„Ist das auch ein physikalischer Versuch?"

„Nein, ein psychologischer. Fang schon an."

„11 Münzen in zehn Untertassen, und in jede nur eine ... Nein, das kann ich nicht", gab ich gleich auf.

„Komm beginne, ich helfe dir. In die erste Untertasse legen wir die erste Münze und vorübergehend auch die 11. Münze."

Ich legte in die erste Schüssel zwei Münzen, und mit Zweifeln erfüllt erwartete ich, was weiter wird.

„Hast du zwei Münzen hineingelegt? Gut! Die dritte Münze lege in die zweite Untertasse. Die vierte in die dritte Untertasse, die fünfte in die vierte und so weiter."

Ich führte alles aus. Als ich die 10. Münze in die

neunte Untertasse legte, stellte ich mit Verwunderung fest, daß noch eine freie, 10. Untertasse vorhanden ist.

„Dahinein legen wir die noch verfügbare 11. Münze, die vorübergehend in der ersten Untertasse lag", sagte mein Bruder, nahm aus der ersten Untertasse die überzählige Münze und gab sie in die 10. Untertasse.

Jetzt lagen 11 Münzen in 10 Untertassen und in jeder nur eine... Zum Verrücktwerden!

Mein Bruder sammelte geschwind die Münzen wieder ein und wollte mir nicht erklären, wie das zusammenhängt.

„Du mußt es selbst erraten. Das ist für dich nützlicher und interessanter, als die fertige Lösung zu hören."

Und ohne meine Bitten zu beachten, schlug er mir eine neue Aufgabe vor:

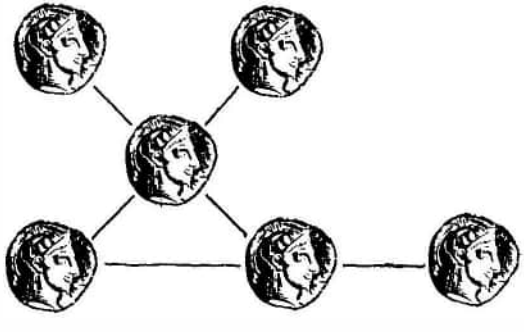
„Hier sind sechs Münzen. Verteile sie in drei Reihen so, daß in jeder Reihe drei Münzen liegen."

„Dazu sind neun Münzen nötig."

„Mit neun Münzen kann es jeder, nein, gerade mit sechs soll es sein."

„Also wieder so eine unbegreifliche Angelegenheit."

Abbildung 7



„Du gibst zu schnell auf. Sieh her, wie einfach das ist."

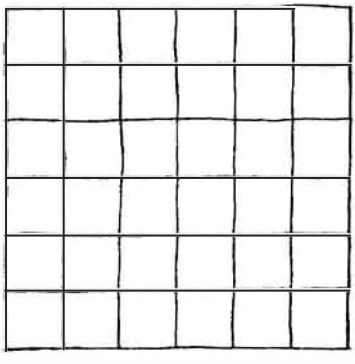
„Hier sind drei Reihen. In jeder drei Münzen", erläuterte er.

„Ja, aber die Reihen kreuzen sich doch."

„Na und? Hat einer gesagt, sie dürfen sich nicht kreuzen?"

„Wenn ich gewußt hätte, daß man das darf, hätte ich es auch selbst erraten."

Abbildung 8



„Na, dann errate, wie man die gleiche Aufgabe auf andere Weise lösen kann. Aber nicht gleich, denk nachher darüber nach, wenn du Muße hast. Hier hast du noch drei Aufgaben dieser Art: 1. Neun Münzen in 10 Reihen anordnen mit je drei Münzen pro Reihe. 2. 10 Münzen in fünf Reihen legen mit je vier. 3. Ich zeichne ein Quadrat mit 36 Flächen. Da sind 18 Münzen so zu verteilen, jeweils nur eine pro Feld, daß in jeder Längs- und Querreihe je drei Münzen liegen... Ach, mir fällt da noch ein Trick mit Münzen ein. Nimm in eine Hand einen Fünfzehner, in die andere einen Groschen. Sage und zeige mir nicht, in welcher Hand welche Münze ist. Ich errate es. Rechne im Kopf folgendes: nimm mal 2, was du in der rechten Hand hast, dann nimm mal 3, was du in der linken hast und addiere die Ergebnisse. Hast du es?“

„Fertig!“

„Ist eine gerade oder ungerade Zahl herausgekommen?“

„Ungerade.“

„Der Groschen ist in der rechten Hand, die fünfzehn Pfennig sind in der linken“, verkündete mein Bruder sogleich. Er hatte es erraten.

Wir machten das Ganze noch einmal. Jetzt kam eine gerade Zahl heraus, und mein Bruder stellte richtig fest, daß ich den Groschen in der linken Hand hatte.

„Denke auch über diese Aufgabe in Muße nach“, sagt er, „und zum Schluß zeige ich dir ein interessantes Spiel mit Münzen.“

Mein Bruder stellte drei Untertassen nebeneinander und stellte in die erste eine Säule von Münzen; zuunterst ein Markstück, darauf einen Fünfziger, darüber einen Zwanziger, dann einen Fünfzehner und zuletzt den Groschen.

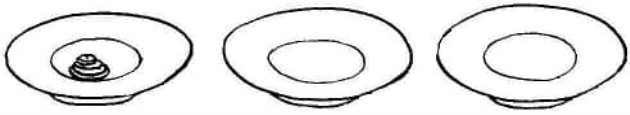
„Diesen ganzen Berg aus fünf Münzen muß man in die dritte Untertasse umsetzen und folgende Regel dabei beachten: Erstens: nur jeweils eine Münze bewegen; zweitens: niemals eine größere auf eine kleinere Münze legen; drittens: *zeitweilig* darf man Münzen auch in die mittlere Untertasse bei Beachtung der ersten beiden Regeln legen. Zum Schluß aber müssen alle Münzen in der dritten Untertasse in der ursprünglichen Anordnung liegen. Die Regeln sind, wie du siehst, unkompliziert. Nun mach dich ans Werk.“

Ich begann umzusetzen. Legte den Groschen in die

dritte Untertasse, den Fünfzehner in die mittlere und wußte nicht weiter. Wo soll ich das 20-Pfennig-Stück hintun? Es ist doch größer als der Groschen und auch die 15-Pfennig-Münze.

„Na, was ist?“ kam mir mein Bruder zu Hilfe. „Lege den Groschen in die mittlere Untertasse auf das 15-Pfennig-Stück, dann wird für das 20-Pfennig-Stück die dritte Untertasse frei.“

Abbildung 9



So habe ich's auch gemacht. Aber da gab es schon wieder Schwierigkeiten. Wohin mit dem Fünfziger? Übrigens kam ich bald dahinter: Setzte zunächst den Groschen in die erste Untertasse, das 15-Pfennig-Stück in die dritte, danach den Groschen auch in die dritte. Jetzt konnte ich den Fünfziger in die freie mittlere Untertasse legen. Dann, nach einer Kette von Umstapelungen, gelang es mir, auch das Markstück aus der ersten Untertasse umzusetzen und schließlich die ganze Münzensäule in der dritten Untertasse zu vereinen.

„Wieviel Umsetzungen hast du denn vorgenommen“, fragte mein Bruder, meine Arbeit begutachtend.

„Ich habe sie nicht gezählt.“

„Komm, laß sie uns zusammenzählen. Es ist doch interessant zu wissen, mit welcher Mindestzahl von Zügen man das Ziel erreichen kann. Würde die Säule nicht aus fünf, sondern nur aus zwei Münzen bestehen — einem 15-Pfennig-Stück und einem Groschen —, wären wieviel Züge nötig?“

„Drei. Der Groschen in die mittlere Untertasse, die 15-Pfennig-Münze in die dritte und danach der Groschen in die dritte.“

„Richtig. Nun legen wir noch eine Münze zu — das 20-Pfennig-Stück und rechnen zusammen, mit wieviel Zügen die Münzsäule umgesetzt werden kann. Gehen wir so vor: Anfangs setzen wir nacheinander die zwei kleineren Münzen um in die mittlere Untertasse. Dafür brauchen wir, wie uns schon bekannt ist, drei Züge. Danach legen wir das 20-Pfennig-Stück in die freie, dritte Untertasse, ein Zug. Und dann setzen wir beide Münzen von der mittleren Untertasse

auch in die dritte — noch einmal drei Züge. Insgesamt: $3 + 1 + 3 = 7$ Züge."

„Für vier Münzen laß mich selber die Zahl der Züge zusammenrechnen. Zu Beginn setze ich die drei kleineren Münzen in die mittlere Untertasse um — das sind sieben Züge, danach den Fünfziger in die dritte Untertasse — ein Zug, und dann wiederum die 3 kleineren in die dritte Untertasse — das sind nochmal sieben Züge. Insgesamt: $7 + 1 + 7 = 15$ Züge."

„Ausgezeichnet. Und für fünf Münzen?"

„$15 + 1 + 15 = 31$."

„Na bitte, jetzt hast du die Rechenmethode herausgefunden. Ich werde dir zeigen, wie man sie vereinfachen kann. Bedenke, daß die errechneten Zahlen 3, 7, 15, 31 alle Zweien darstellen, die mit sich ein oder mehrere Male vervielfacht sind, allerdings abzüglich eins. Sieh her!" Mein Bruder schrieb eine Tabelle:

$$3 = 2 \cdot 2 - 1,$$
$$7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1,$$
$$15 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1,$$
$$31 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1.$$

„Ich verstehe: Je nachdem, wieviel Münzen umzusetzen sind, so oft wird die Zwei als Multiplikator eingesetzt, und danach wird die Eins abgezogen. Jetzt könnte ich die Zahl der Züge für eine beliebige Menge Münzen ausrechnen. Zum Beispiel sieben Münzen:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 128 - 1 = 127.$$

„Na bitte, jetzt hast du auch das alte Spiel begriffen. Eine praktische Regel mußt du jedoch noch wissen: Wenn es eine ungerade Anzahl Münzen ist, so legt man die erste Münze in die dritte Untertasse. Ist es eine gerade Anzahl, dann in die mittlere."

„Du sagtest ‚altes Spiel'. Hast du dir das denn nicht selbst ausgedacht?"

„Nein, ich habe es nur auf Münzen angewendet. Das Spiel selbst ist uralt und wahrscheinlich in Indien entstanden. Dort gibt es eine mit diesem Spiel zusammenhängende hochinteressante Legende, die besagt: In der Stadt Benares gäbe es einen Tempel, in dem die indische Gottheit Brahma bei der Erschaffung der Welt drei diamantene Stäbe aufgestellt habe. Auf den einen steckte er 64 goldene Ringe, der größte zuunterst und jeder folgende kleiner als der vorhergehende. Die Priester des Tempels sind verpflichtet,

unermüdlich Tag und Nacht, diese Ringe von einem Stab auf den anderen umzustecken, wobei sie sich des dritten Stabes als Hilfsmittel bedienen können und dabei die Regeln unseres Spiels beachten, das heißt, jeweils nur einen Ring umstecken und nie einen größeren auf einen kleineren legen dürfen. Die Legende will wissen, daß der Weltuntergang beginnt, wenn alle 64 Ringe endgültig umgesetzt sind."

„Oh, das bedeutet, die Welt müßte schon längst untergegangen sein!"

„Du glaubst offenbar, daß die Umstapelung der 64 Ringe nicht viel Zeit in Anspruch nimmt?"

„Natürlich. Wenn man jede Sekunde einen Zug macht, kann man doch in der Stunde 3600 Umsetzungen vornehmen."

„Na und?"

„Und in einem Tage etwa 100 000. In 10 Tagen eine Million Züge. Mit einer Million Züge kann man aber sicher nicht nur 64 Ringe, sondern ganze tausend umsetzen."

„Du irrst dich. Um 64 Ringe umzustecken, benötigt man rund 500 Milliarden Jahre!"

„Wieso denn das? Die Zahl der Züge ist doch nur das Produkt von 64 Zweien und das sind ..."

„‚Nur' über 18 Trillionen, wenn man als Trillionen eine Million Millionen Millionen bezeichnet."

„Moment, ich werde gleichmal multiplizieren und überprüfen."

„Großartig. Doch während du multiplizierst, kann ich meine Arbeiten erledigen", sagte mein Bruder und ging.

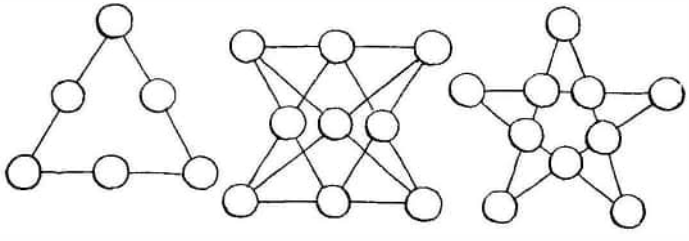
Ich errechnete zunächst das Produkt von 16 Zweien, danach multiplizierte ich dieses Ergebnis — 65 536 — mit sich selbst, und das, was herauskam, nochmal mit sich selbst. Eine langweilige Beschäftigung. Doch ich rüstete mich mit Ausdauer und führte alles zu Ende. So eine Zahl kam heraus:
18 446 744 073 709 551 616.

Mein Bruder hatte also recht.

Nachdem ich Mut gefaßt hatte, nahm ich mir die Aufgaben vor, die mein Bruder mir selbständig zu lösen vorgeschlagen hatte. Sie waren nicht so sehr schwer. Einige waren sogar kinderleicht. Die Sache mit den 11 Münzen in den 10 Untertassen war lächerlich einfach. Wir hatten in die erste Untertasse die erste und die elfte Münze gelegt; danach in die zweite Untertasse die *dritte* Münze, dann die vierte usw.

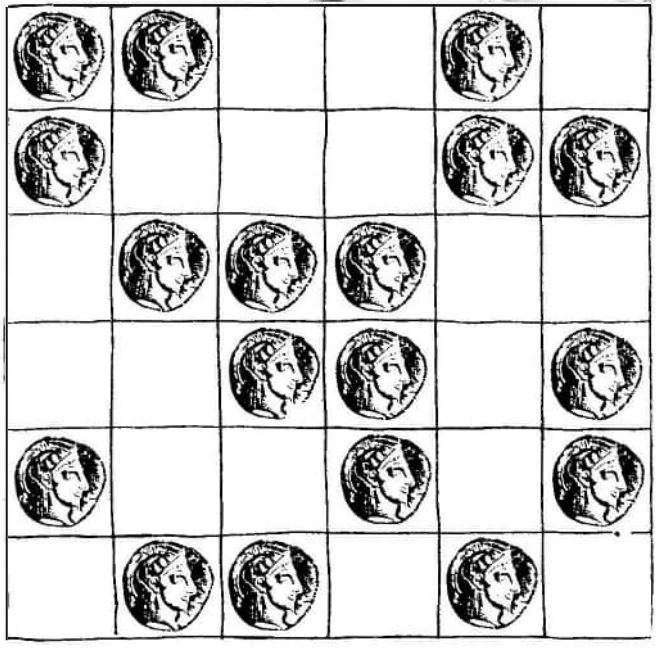
Aber wo war die *zweite* Münze? Sie wurde nirgends hineingelegt. Darin besteht auch das ganze Geheimnis. Ebenso einfach ist es zu erraten, in welcher Hand der Groschen ist. Denn fünfzehn Pfennige ergeben bei der Verdoppelung eine gerade Zahl, aber beim Verdreifachen eine ungerade. Der Groschen dagegen ergibt immer eine gerade Zahl. Deshalb bedeutet es,

Abbildung 10



sofern die Summe eine gerade Zahl ergibt, daß die 15 Pfennig verdoppelt wurden, d. h. sich in der *rechten* Hand befanden. Wenn aber die Summe eine ungerade Zahl ergibt, so ist klar, daß die 15 Pfennig verdreifacht wurden, d. h. sich in der linken Hand befanden. Die Lösung der Aufgaben mit einer bestimmten

Abbildung 11



Anordnung von Münzen geht aus den beigefügten Zeichnungen (Abb. 10) hervor.

Und schließlich die Aufgabe mit den Münzen in den Feldern wird so gelöst, wie in Abb. 11 angegeben. 18 Münzen sind in dem Quadrat mit 36 Feldern verteilt, und in jeder Reihe befinden sich drei Münzen.

Umherirren im Labyrinth

Umherirren im Labyrinth • Menschen und Ratten • Die Regel der rechten oder der linken Hand • Labyrinthe im Altertum • Tournefort in der Höhle • Lösung der Labyrinthaufgaben

„Was lachst du da beim Lesen? Ist das eine lustige Geschichte?" fragte mein Bruder.

„Mächtig. ‚Drei Mann in einem Boot ...' von Jerome."

„Ich erinnere mich, ein lustiges Buch. Wo bist du jetzt beim Lesen?"

„Da, wo eine Gruppe von Personen im Irrgarten umherstreift und nicht herausfinden kann."

„Eine interessante Stelle! Lies mal vor."

Ich las laut die Stelle über das Umherirren im Labyrinth von Anfang an:

„Harries fragte, ob ich mal im Hampton-Court-Labyrinth gewesen sei. Er selbst war einmal dort. Er studierte den Plan gründlich, und der Aufbau des Labyrinths erschien ihm lächerlich einfach, so daß es sich kaum lohnte, dafür Eintritt zu bezahlen. Harries führte einen seiner Verwandten dahin.

‚Wenn du willst, gehen wir hin', sagte er zu ihm. Allerdings ist das nichts von Interesse, Absurd, es Labyrinth zu nennen. Einige Male muß man nach rechts gehen, und schon ist man am Ausgang. Innerhalb von zehn Minuten sind wir hindurch.

Im Irrgarten begegneten sie einigen Personen, die dort schon eine Stunde umhergingen und froh gewesen wären, herauszukommen. Harries sagte, wenn es Ihnen angenehm sei, mögen Sie ihm folgen: Er sei gerade hereingekommen und mache nur eine Runde. Sie antworteten, daß sie sehr froh darüber seien und folgten ihm.

Unterwegs schlossen sich ihnen immer weitere Leute an, nahezu das ganze Publikum, was im Irrgarten weilte, sammelte sich um ihn. Leute, die schon jede Hoffnung aufgegeben hatten, jemals wieder herauszukommen und ihre Familie und Freunde wiederzu-

finden, schöpften neuen Mut, als sie Harries sahen und schlossen sich ihm, ihn vergötternd, an. Nach Harries' Worten kamen etwa zwanzig Personen zusammen, darunter eine Frau mit ihrem Kind, die bereits den ganzen Morgen im Labyrinth umherirrte und sich an ihn festklammerte, um ihn ja nicht zufällig wieder zu verlieren. Harries hielt sich immer rechts, aber der Weg war sehr lang und der Verwandte bemerkte, daß Labyrinth sei offenbar sehr groß.

‚Ja, eines der größten in Europa!' bestätigte Harries.

‚Wir sind wohl schon gut zwei Meilen gegangen', antwortete der Verwandte.

Harries begann sich etwas unsicher zu fühlen, aber ermutigte sich immer wieder, bis sie auf ein Stück Pfefferkuchen stießen, das auf dem Wege lag. Harries' Verwandter schwor, daß er dieses Stück bereits vor sieben Minuten gesehen habe.

‚Oh, das kann nicht sein!' wandte Harries ein. Aber die Frau mit dem Kind erklärte, im Gegenteil, das sei sehr wohl so, denn sie selbst habe es fallen lassen, noch bevor sie mit Harries zusammentraf. Sie fügte hinzu, sie wünschte ihm nie begegnet zu sein und äußerte die Vermutung, daß er ein Betrüger sei. Das versetzte ihn in Empörung. Er zog die Karte heraus und legte seine Theorie dar.

‚Die Karte wäre ja sehr nützlich', bemerkte einer der Begleiter, ‚wenn wir nur wüßten, wo wir uns befinden.'

Harries wußte es nicht und sagte, daß es seiner Meinung nach am besten sei, zum Ausgangspunkt zurückzugehen und von vorn anzufangen. Der letzte Teil seines Vorschlages rief keine besondere Begeisterung hervor, aber der erste Teil, die Rückkehr zum Ausgangspunkt betreffend, wurde einmütig unterstützt, und alle folgten ihm auf dem Weg zurück. Nach etwa zehn Minuten fand sich die Gesellschaft im Zentrum des Labyrinths wieder.

Harries hätte gern gesagt, daß er hierher auch wollte, aber die Stimmung der Gruppe schien ihm bedrohlich, und so tat er, als ob er zufällig hierher gelangt sei.

Auf jeden Fall, irgendwohin mußte man gehen. Jetzt wußten sie, wo sie waren und deshalb vertieften sie sich erneut in die Karte. Es schien, daß es jetzt leicht sei, herauszufinden, und so machten sie sich das dritte Mal auf den Weg.

Drei Minuten später gerieten sie wieder ins Zentrum des Irrgartens ...

Es gelang ihnen danach überhaupt nicht mehr, vom Zentrum wegzukommen. Wohin sie auch gingen, jedesmal kehrten sie zum Zentrum zurück. Das wiederholte sich so regelmäßig, daß einige beschlossen stehenzubleiben und zu warten, bis die anderen ihren Rundgang beendet hatten und wieder zurückkehrten. Harries hätte die Karte gern herausgeholt, aber der bloße Anblick brachte die Menschen zur Raserei.

Schließlich hatten sie sich völlig verirrt und begannen nach dem Aufseher zu rufen. Dieser erschien, stieg auf eine Leiter an der Außenwand und rief ihnen zu, wohin sie gehen sollten.

Aber sie waren schon alle so durcheinander, daß sie nichts davon begriffen. Da rief er ihnen zu, sie mögen stehenbleiben und auf ihn warten. Sie rückten eng zusammen und warteten. Er stieg von der Leiter und ging zu ihnen.

Er war ein junger, unerfahrener Aufseher. Ins Labyrinth geraten, konnte er sie nicht auffinden und versuchte vergeblich, sich zu ihnen durchzuschlagen. Zum Schluß verirrte er sich selbst. Von Zeit zu Zeit sahen sie ihn mal hier, mal dort jenseits der Einzäunung vorbeihuschen. Er seinerseits, sie von weitem erblickend, strebte zu ihnen. Doch eine Minute später befand er sich wieder auf dem gleichen Platz und fragte, wohin sie gelaufen seien.

So mußten sie warten, bis einer der alten Aufseher sie aus der Notlage befreite."

„Immerhin waren sie zu unbeholfen", sagte ich, als ich mit dem Lesen aufhörte, „den Plan in der Hand halten und den Weg nicht finden, da gehört schon was dazu!"

„Und du glaubst, du hättest dich gleich zurechtgefunden?"

„Und ob, nach Plan."

„Warte. Ich glaube, ich habe den Plan von diesem Labyrinth", sagte mein Bruder und wühlte in seinem Regal herum.

„Da gibt es diesen Irrgarten wohl tatsächlich?"

„Hampton-Court? Natürlich. In der Nähe von London. Bereits vor zweihundert Jahren wurde er angelegt. Jetzt hab ich ihn. Hier ist er: ‚Plan des Hampton-Court-Labyrinths'. Das Labyrinth ist, wie sich zeigt, gar nicht groß. Insgesamt nur 1000 Quadratmeter."

Mein Bruder schlug das Buch auf, in dem ein kleiner Plan dargestellt war.

„Stell dir vor, du befindest dich hier, auf dem zentralen Platz des Labyrinths, und willst hinausgelangen. Welchen Weg würdest du zum Ausgang einschlagen? Spitze ein Streichholz an und zeige damit den Weg."

Abbildung 12



Ich setzte mein Streichholz im Zentrum auf und führte es kühn längs der verschlungenen Wege des Planes. Doch die Aufgabe erwies sich komplizierter, als ich erwartete. Nachdem ich einige Zeit auf dem Plan umhergekurvt war, fand ich mich wieder auf dem zentralen Platz ein, genauso wie die von mir verlachten Helden Jeromes!

„Siehst du, auch der Plan hilft nicht. Doch die Ratten lösen diese Aufgabe ohne jeden Plan."

„Ratten? Was für Ratten?"

„Die, von denen in diesem Buch die Rede ist. Du denkst wohl, ich habe hier eine Arbeit über Gartenbaukunst. Nein. Das ist ein Buch über die geistigen Fähigkeiten von Tieren. Um die ‚Verständigkeit' der Ratten zu testen, formen die Wissenschaftler aus Gips kleine labyrinthähnliche Anlagen und setzen die zu testenden Tiere hinein. Hier, in dem Buch wird davon gesprochen, daß die Ratten den Weg aus dem Gips-Labyrinth von Hampton-Court in nur einer halben Stunde fanden, also schneller als die Menschen bei Jerome."

„Aber, nach dem Plan zu urteilen, scheint das Labyrinth einfach zu sein. Man glaubt nicht, daß es so tückisch ist ..."

„Es gibt eine sehr einfache Regel, kennt man sie, kann man kühn in jeden Irrgarten gehen, ohne Sorge, den Ausweg nicht daraus zu finden."

„Was für eine Regel?"

„Man muß im Labyrinth stets die rechte Hand an der Wand lang führen — oder die linke, das ist gleich — nur immer ein und dieselbe."

„Das ist alles?"

„Ja. Versuche diese Regel praktisch anzuwenden, indem du in Gedanken diesen Plan entlangläufst."

Ich setzte mein Streichholz in Marsch und ließ mich von der Regel leiten. Und tatsächlich. Ziemlich rasch gelangte ich vom Ausgang zum Zentrum des Labyrinths und von da wieder zum Ausgang.

„Eine ausgezeichnete Regel!"

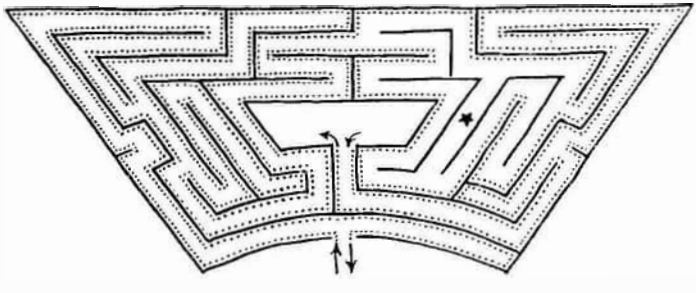
„Nicht ganz", wandte mein Bruder ein. „Die Regel ist gut, um sich nicht im Labyrinth zu verirren. Sie ist aber ungeeignet, um ausnahmslos alle seine Wege zu begehen."

„Aber ich war doch auf allen Alleen des Planes, ohne eine auszulassen."

„Du irrst dich. Würdest du den begangenen Weg mit einer punktierten Linie kennzeichnen, könntest du feststellen, daß eine Allee unbegangen blieb."

„Welche?"

Abbildung 13



„Ich kennzeichne sie mit einem Sternchen auf dem Plan (Abb. 13). Hier bist du nicht gewesen. In anderen Irrgärten führt diese Regel dich an großen Abschnitten vorüber, so daß du zwar wohlbehalten herausfindest, doch bei weitem nicht den ganzen Abschnitt siehst."

„Gibt es verschiedenartige Irrgärten?"

„Mehr als genug. Heutzutage legt man sie nur in Gärten und Parks an. Man irrt durch hohe Mauern von Hecken unter offenem Himmel. Doch im Alter-

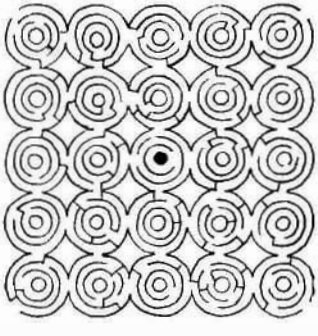
tum legte man Labirynthe innerhalb weitläufiger Gebäude oder unterirdischer Räume an. Das tat man zu dem brutalen Zweck, die dahingebrachten Leute zum hoffnungslosen Umherirren in diesem kniffligen Netz von Korridoren, Übergängen und Sälen zu verdammen und des Hungertodes sterben lassen. Solcher Art war zum Beispiel das legendäre Labyrinth auf der Insel Kreta, das, wie die Überlieferung besagt, auf Geheiß des Königs Minos gebaut wurde. Die Verbindungsgänge waren so verworren, daß selbst ihr Erbauer Dedalus keinen Ausweg daraus gefunden hätte. Der römische Dichter Ovid beschreibt das Gebäude so:

Ein Haus als Labyrinth mit stummen Wänden und
Dächern baute Dedalus —
Ein hervorragender Meister der Baukunst —
Ein Gebäude schuf er, ohne besondere Merkmale,
Eine lange Reihe verschlungener Korridore,
In verschiedenen Richtungen wie eine Kette sich streckend,
Den forschenden Blick nur verwirrend.

Weiter fügte er hinzu, daß

Dedalus Wege ohne Zahl in seinem Gebäude anlegte,
So daß er selbst Mühe hatte, zum Ausgang zu finden.

Abbildung 14



„Andere Irrgärten des Altertums", fuhr der Bruder fort, „hatten den Zweck, die Grabstätte des Herrschers zu bewahren, sie vor Räubern zu schützen. Das Grabmal befand sich im Zentrum des Labyrinths, so daß der gierige Sucher, wenn er die Grabschätze auch fand, den Ausweg doch nicht finden würde. Das Grab des Herrschers wurde auch sein Grab."

„Warum nutzten sie nicht die Regel des Begehens von Irrgärten, die du vorhin nanntest?"

„Erstens kannte im Altertum diese Regel offenbar niemand. Zweitens erklärte ich dir bereits, daß sie nicht immer geeignet ist, alle Winkel des Labyrinths zu begehen. Man kann ein Labyrinth so anlegen, daß derjenige, der sich von diesen Regeln leiten läßt, nicht an die Stelle, wo sich der verborgene Schatz befindet, gelangt."

„Kann ein solches Labyrinth gebaut werden, aus dem man überhaupt nicht mehr herausfindet? Gewiß, wer hineingeht und sich deiner Regel bedient, findet auch wieder heraus. Doch wenn man jemand hineinführt und ihn dann umherirren läßt?"

„Im Altertum glaubte man, daß es unmöglich ist herauszufinden, wenn die Wege des Labyrinths nur

gut genug verworren sind. Doch so ist es nicht. Mit mathematischer Sicherheit kann man nachweisen, daß es nicht möglich ist, ausweglose Labyrinthe zu bauen. Mehr noch: es gibt nicht nur aus jedem Labyrinth einen Ausweg, man kann sogar absolut alle Winkel begehen, ohne einen auszulassen, und dennoch wohlbehalten wieder herauskommen. Man muß sich nur streng an ein System halten und zwar unter Beachtung der bekannten Vorkehrungen. Vor 200 Jahren erkühnte sich der französische Botaniker Tournefort, eine Höhle auf der Insel Kreta zu untersuchen, von der es die Sage gab, sie sei infolge zahlloser Gänge ein ausweglos Labyrinth. Solche Höhlen gibt es mehrere auf der Insel Kreta, und möglicherweise ist darauf die Legende vom Labyrinth des Königs Minos zurückzuführen. Wie gelang es nun dem französischen Botaniker, sich nicht zu verirren? Hier ist, was sein Landsmann, der Mathematiker Lukas darüber berichtet."

Mein Bruder nahm vom Regal ein altes Buch mit der Aufschrift „Mathematische Zerstreuungen" und las folgendes laut vor, was ich später abschrieb:

„Nachdem wir mit unseren Begleitern einige Zeit durch ein ganzes Netz unterirdischer Korridore wandelten, gelangten wir zu einer langen, breiten Galerie, die in einen weiträumigen Saal in der Tiefe des Labyrinths führte. Wir gingen", berichtet Tournefort, „1460 Schritte in einer halben Stunde, ohne nach rechts oder links abzuweichen ... Zu beiden Seiten ziehen sich so viele Korridore hin, daß man sich unweigerlich darin verirrt, wenn man nicht die notwendige Vorsicht walten läßt. Da wir den großen Wunsch hatten, aus dem Labyrinth herauszufinden, sorgten wir auch dafür, uns den Rückweg zu sichern.

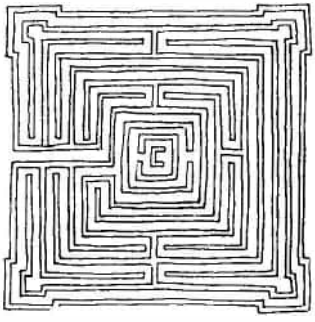
Erstens ließen wir einen unserer Begleiter am Höhleneingang zurück und beauftragten ihn, sofern wir bis zum Einbruch der Nacht nicht zurück sind, Leute aus dem benachbarten Dorf zu unserer Befreiung zu holen. Zweitens hatte jeder von uns eine brennende Fackel in der Hand. Drittens befestigten wir bei jeder Biegung, die uns schwierig wieder aufzufinden erschien, rechts an der Wand einen numerierten Zettel. Und viertens legte einer unserer Begleiter links vorbereitete Schlehdornbündel nieder und ein anderer streute gehäckseltes Stroh auf den Weg, das er in einem Sack ständig bei sich trug."

„Alle diese mühseligen Vorsichtsmaßnahmen", sagte mein Bruder, als er den Abschnitt vorgelesen hatte,

„sind nicht so notwendig, wie es dir vielleicht erscheinen mag. Zu Tourneforts Zeiten konnte man übrigens auch gar nicht anders vorgehen, da seinerzeit die ‚Labyrinth-Aufgabe' noch nicht gelöst war. Heute gibt es Regeln für das Begehen von Labyrinthen, weniger aufwendig und doch nicht weniger zuverlässig als die Vorkehrungen des französischen Botanikers."

„Kennst du diese Regeln?"

Abbildung 15



„Sie sind unkompliziert. Die erste Regel ist: Man geht nach Eintritt in das Labyrinth auf beliebigem Wege so lange, bis man in eine Sackgasse oder an eine Kreuzung gerät. Gerät man in eine Sackgasse, kehrt man um und legt man zwei Steinchen an ihren Ausgang. Diese zwei Steinchen zeigen künftig an, daß der Gang zweimal begangen wurde. Gerät man jedoch an eine Kreuzung, geht man einen beliebigen Gang weiter und markiert mit Steinchen jedes Mal den Gang, aus dem man gekommen ist und den Gang, den man weiter geht. Das ist die erste Regel. Die zweite lautet folgendermaßen: Gelangt man durch einen neuen Gang an eine Kreuzung, die man schon vorher betreten hat, (was an den Steinchen zu erkennen ist), geht man gleich wieder zurück und legt am Ende dieses Gangs zwei Steinchen hin. Und die dritte Regel fordert schließlich, daß, wenn man zu einer bereits begangenen Kreuzung gelangt durch einen Gang, den man gleichfalls schon einmal begangen hat, der Weg mit einem zweiten Steinchen zu markieren und durch einen der Gänge weiterzugehen ist, den man bisher nicht beschritten hat. Sofern kein solcher vorhanden ist, so wird ein Gang ausgewählt, an dessen Eingang nur ein Steinchen liegt (der also nur einmal begangen wurde). Hält man sich an diese drei Regeln, kann man alle Gänge zweimal begehen — also hin und zurück — ohne einen Winkel auszulassen und wohlbehalten wieder ans Freie gelangen. Ich habe einige Pläne von Labyrinthen, die ich aus Illustrierten ausgeschnitten habe (Abb. 14, 15 und 16). Wenn du Lust hast, kannst du versuchen, darin umherzuwandeln. Ich hoffe, daß dir keine Gefahr droht, dich darin zu verirren nach all dem, was du bereits weißt. Und wenn du die Geduld aufbringst, kannst du mit deinen Kameraden so ein Labyrinth — zum Beispiel das von Hampton-Court, worüber Jerome schrieb, aus Schnee bauen."

Abbildung 16



Für junge Physiker

Geschickter als Kolumbus

„Christoph Kolumbus war ein großer Mann", schrieb ein Schüler in einem Klassenaufsatz, „er entdeckte Amerika und brachte ein Ei zum Stehen." Beide Großtaten erschienen dem jungen Schüler gleichermaßen der Bewunderung wert. Demgegenüber sah der amerikanische Humorist Mark Twain nichts Verwunderliches darin, daß Kolumbus Amerika entdeckte: „Verwunderlich wäre es gewesen, hätte er es nicht vorgefunden."

Ich bin so kühn zu glauben, daß die zweite Großtat des großen Seefahrers nicht viel wert ist. Wißt ihr, wie Kolumbus das Ei zum Stehen brachte? Er drückte es auf den Tisch und zerbrach dabei die Schale im unteren Teil. Dabei hat er natürlich die Form des Eies verändert. Aber wie stellt man ein Ei hin, ohne seine Form zu ändern? Diese Aufgabe hat der kühne Seefahrer allerdings nicht gelöst.

Dabei ist das um vieles einfacher als Amerika oder gar eine ganz winzige Insel zu entdecken. Ich zeige euch drei Methoden: eine — für gekochte Eier, die zweite — für rohe, die dritte — für die einen wie die anderen.

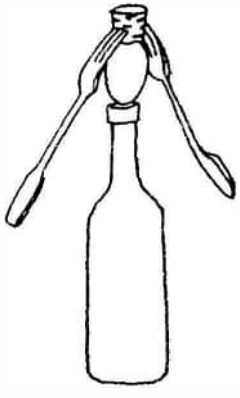
Um ein gekochtes Ei hinzustellen, braucht man es nur mit den Fingern einer Hand oder mittels der Handflächen wie einen Kreisel in Umdrehung zu versetzen. Das Ei dreht sich aufrecht stehend und behält diese Lage so lange bei, wie es sich dreht. Nach zwei, drei Versuchen gelingt das sehr leicht.

Ein rohes Ei kann auf diese Weise nicht zum Stehen gebracht werden. Rohe Eier drehen sich, wie ihr sicher schon selbst festgestellt habt, schlecht. Damit hat man übrigens eine unfehlbare Methode, um ein gekochtes von einem rohen Ei zu unterscheiden, ohne die Schale zu zerbrechen. Der flüssige Inhalt des rohen Eies läßt sich nicht in eine gleich schnelle Umdrehung versetzen wie die Schale und bremst somit gewissermaßen das ganze Ei.

Wir müssen also nach einer anderen Methode suchen, um das Ei zum Stehen zu bringen. So eine Methode gibt es. Man muß das Ei wiederholt kräftig schütteln. Dabei zerreißt die weiche Hülle, die das Eidotter umgibt, und das Eigelb verteilt sich im Inneren des Eies. Wenn ihr nun das Ei auf die stumpfe

Spitze stellt und es einige Zeit in dieser Stellung haltet, dann fließt das Eidotter, das schwerer ist als das Eiweiß, nach unten und sammelt sich dort. Infolgedessen verlagert sich der Schwerpunkt nach unten, und das Ei bekommt eine wesentlich größere Standfestigkeit als ohne diese Bearbeitung.

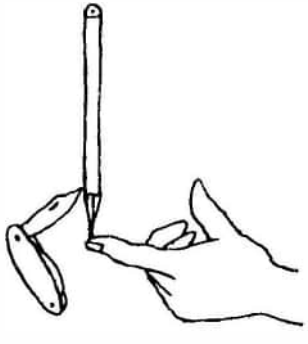
Abbildung 17



Schließlich gibt es eine dritte Methode, um ein Ei zum Stehen zu bringen. Das Ei wird beispielsweise auf den Korken einer verschlossenen Flasche gestellt, und auf das Ei wird ein Korken, in den zwei Gabeln gesteckt sind, gesetzt. Das ganze „System" (wie ein Physiker sagen würde) ist ziemlich stabil und wahrt das Gleichgewicht sogar bei vorsichtiger Neigung der Flasche. Aber warum fallen Ei und Korken nicht herab? Aus dem selben Grunde, aus dem ein Bleistift, der im Gleichgewicht auf die Fingerspitze gestellt ist, nicht herabfällt, wenn man ein Taschenmesser in ihn steckt. „Das Schwergewicht des Systems liegt niedriger als der Stützpunkt", würde ein Gelehrter erklären. Das heißt, daß der Punkt, auf dem das Gewicht des Systems ruht, tiefer liegt als der Punkt, auf den es sich stützt.

Fliehkraft

Abbildung 18



Öffnet einen Schirm, stoßt ihn mit der Spitze in den Boden, dreht ihn und werft gleichzeitig einen Ball, Knüllpapier, ein Taschentuch — kurz, irgendeinen leichten unzerbrechlichen Gegenstand hinein. Es geschieht etwas Unerwartetes. Der Schirm scheint das Geschenk nicht haben zu wollen. Der Ball oder das Papierknäuel kriecht von allein hinauf zum Rand des Schirmes und fliegt von da in gerader Linie weg.

Die Kraft, die bei diesem Versuch den Ball wegwirft, nennt man Zentrifugalkraft, obwohl es richtiger ist, sie Trägheit zu nennen. Sie ist stets anzutreffen, wenn sich ein Körper kreisförmig bewegt. Das ist nichts weiter als ein Fall des Sichtbarwerdens der Trägheit — des Bestrebens eines sich bewegenden Gegenstandes, die Richtung und Geschwindigkeit seiner Bewegung beizubehalten.

Der Zentrifugalkraft oder Fliehkraft begegnen wir viel häufiger, als wir es bemerken. Schleudert mal einen an der Schnur befestigten Stein mit dem Arm im Kreis herum. Ihr spürt, wie die Schnur sich dabei strafft und unter dem Einfluß der Fliehkraft zu zer-

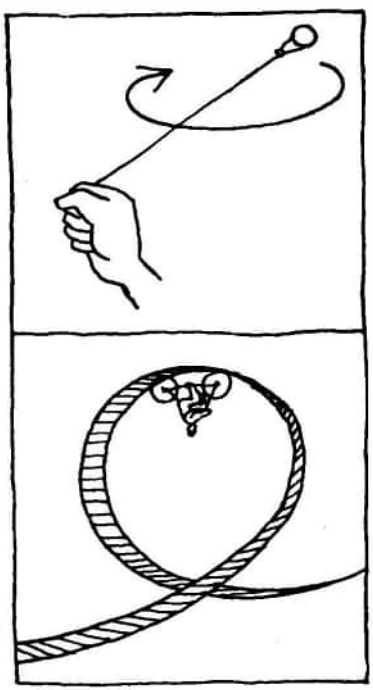
Abbildung 19



reißen droht. Eine alte Waffe, die Steinschleuder, arbeitet mit der gleichen Kraft. Die Fliehkraft zerreißt Mühlsteine, wenn sie zu schnell gedreht werden und nicht genügend Festigkeit haben. Wenn ihr geschickt seid, hilft euch die Fliehkraft bei einem Zauber mit einem Glas, aus dem das Wasser nicht herausfließt, obwohl es mit dem Boden nach oben steht. Dazu braucht man nur das Glas schnell kreisförmig über dem Kopf zu bewegen. Die Fliehkraft hilft dem Radfahrer im Zirkus die halsbrecherische „Todesschleife" zu vollführen. Sie trennt die Sahne von der Milch in den sogenannten zentrifugalen Separatoren; sie schleudert den Honig aus den Waben in der Zentrifuge, sie trocknet Wäsche, indem sie das Wasser in speziellen Trokkenschleudern herausschleudert usw.

Wenn der Straßenbahnwagen auf einem gekrümmten Gleisabschnitt fährt, zum Beispiel beim Einbiegen in eine andere Straße, verspüren die Fahrgäste unmittelbar an sich selbst die Fliehkraft, die sie in Richtung der Außenwand des Wagens drückt. Bei einer bestimmten Geschwindigkeit könnte der Wagen infolge dieser Kraft umkippen, wäre nicht die äußere Schiene der Biegung höher gelegt als die innere. Infolgedessen neigt sich der Wagen in der Kurve leicht nach innen. Es klingt recht seltsam, daß der Wagen, der leicht geneigt ist, standfester ist als ein gerade stehender!

Abbildung 20



Aber so ist es nun mal, und ein kleiner Versuch hilft, euch klarzumachen, wie das vor sich geht. Dreht ein Stück Pappe zu einem Trichter oder besser, ihr nehmt, wenn sich so etwas im Hause findet, eine Schüssel mit konisch geformten Wänden. Besonders eignet sich für unsere Zwecke ein konisch geformter Lampenschirm aus Glas oder Metall. Habt ihr euch mit einem solchen Gegenstand ausgestattet, laßt eine Münze, eine Metallscheibe oder ein Ringchen darauf rollen. Sie werden auf dem Boden des Gefäßes kreisen und sich dabei sichtbar nach innen neigen. In dem Maße, wie sich die Geschwindigkeit der Münze oder des Ringes verlangsamt, werden die Kreise immer enger und nähern sich mehr und mehr dem Zentrum des Gefäßes. Doch es bedarf nur einer leichten Drehung des Gefäßes, um die Münze erneut in schnellere Bewegung zu bringen — und schon entfernt sie sich vom Zentrum, immer größer werdende Kreise vollziehend. Wenn sie sich sehr schnell bewegt, kann sie ganz aus dem Gefäß herausrollen.

Für Radsportwettbewerbe werden besondere ovale Radrennbahnen gebaut. Und ihr könnt sehen, daß die Bahnen besonders dort, wo sie enge Kurven bilden, mit einer starken Neigung nach innen gebaut sind. Das Fahrrad fährt darauf in stark geneigter Lage — wie die Münze in der Schüssel — und fällt nicht um, sondern erreicht in dieser Lage besondere Stabilität. Im Zirkus beeindrucken Radfahrer das Publikum durch ihre Kreise auf stark geneigten Pisten. Ihr versteht jetzt, daß das gar nichts Ungewöhnliches ist. Im Gegenteil, es wäre eine schwierige Sache für den Radfahrer solche Kreise zu ziehen auf ebener, *horizontaler* Bahn. Aus dem gleichen Grunde neigen sich auch Pferd und Reiter in einer scharfen Kurve nach innen.

Von diesen kleinen Erscheinungen gehen wir jetzt zu einer größeren über. Die Erde, auf der wir leben, ist ein rotierendes Objekt, und auf ihr muß also die Zentrifugalkraft wirksam werden. Worin wird sie spürbar? Darin, daß alle Körper, die sich an der Erdoberfläche befinden, infolge der Erdumdrehung leichter werden. Je näher man zum Äquator ist, um so größer ist der Kreis, den die Dinge in 24 Stunden beschreiben, d. h. um so schneller bewegen sie sich und desto mehr verlieren sie an Gewicht. Wenn man ein Gewicht von 1 kg vom Pol zum Äquator bringt, und es dort auf einer Federwaage erneut wiegt, stellt man fest, daß ihm 5 g fehlen. Der Unterschied ist natürlich nicht groß. Aber je schwerer ein Ding ist, um so größer ist das Fehlgewicht. Eine Dampflokomotive, die aus Archangelsk in Odessa eintrifft, ist hier um 60 Kilo — das Gewicht eines erwachsenen Menschen — leichter. Und ein Ozean-Liner von 20 000 t, aus dem Weißen Meer kommend, ist im Schwarzen Meer nicht mehr und weniger als 80 t leichter. Das ist gut das Gewicht einer Dampflokomotive!

Woher kommt das? Daher, daß die Erdkugel sich um ihre Achse drehend, bestrebt ist, von ihrer Oberfläche alle Dinge wegzuschleudern, wie der Regenschirm in unserem Versuch den hineingeworfenen Gegenstand herauswirft. Die Erdkugel würde sie auch wegschleudern, doch dem wirkt die Erdanziehungskraft entgegen. Wir nennen diese Anziehung „Schwerkraft". Wegschleudern kann die Umdrehung die Dinge von der Erde nicht, doch ihr Gewicht vermindern, das kann sie. Deshalb werden alle Gegenstände ein wenig leichter infolge der Umdrehung der Erdkugel.

Je schneller die Umdrehung ist, um so spürbarer muß die Gewichtsverminderung werden. Die Wissenschaftler haben errechnet, daß die Gegenstände auf dem Äquator ihr Gewicht völlig verlieren würden, wenn die Erde sich 17mal schneller um ihre Achse drehen würde als jetzt. Sie würden schwerelos. Ja, würde die Erde sich noch schneller drehen und in einer Stunde eine Umdrehung vollziehen, würden die Gegenstände nicht nur direkt am Äquator ihr Gewicht völlig verlieren, sondern auch in allen Ländern und Meeren in Äquatornähe.

Stellt euch bloß mal vor, was das bedeutet: *Alle Dinge haben ihr Gewicht verloren!*

Das heißt ja, daß es keinen Gegenstand gäbe, den ihr nicht hochheben könntet: Lokomotiven, Felsbrocken, riesige Kanonen, ganze Kriegsschiffe mit allen Maschinen und Geschützen würdet ihr wie eine Feder heben. Und würden sie euch herunterfallen — keine Gefahr — sie tun niemand weh. Sie würden keinen zerquetschen, weil sie überhaupt nicht fallen würden, denn sie wiegen ja nichts. Sie würden dort in der Luft schweben, wo man sie aus der Hand läßt. Wenn ihr in der Gondel eines Luftballons sitzend Gegenstände über Bord werfen würdet, fielen sie nicht herunter, sondern würden in der Luft schweben. Das wäre eine wundersame Welt. Springen könntet ihr so hoch, wie ihr selbst im Traum nicht springt, höher als die höchsten Bauten und Berge. Aber vergeßt nicht: Hochspringen ist sehr einfach, aber landen ist unmöglich. Des Gewichts beraubt, kommt ihr von selbst nicht auf die Erde herab.

Abbildung 21



Es gäbe auch andere Unbequemlichkeiten in der Welt. Ihr könnt euch selbst denken, was für welche: Alle Dinge — große und kleine — würden sich, wenn sie nicht verankert wären, beim geringsten kaum spürbaren Wind erheben und durch die Luft segeln. Menschen, Tiere, Autos, Karren, Schiffe — alles würde wild durch die Luft wirbeln, zusammenstoßen, sich überschlagen und einander Schaden zufügen.

Das geschähe, wenn die Erde sich wesentlich schneller um ihre Achse drehen würde.

10 Kreisel

Auf den beigefügten Abbildungen seht ihr allerlei Kreisel, die auf 10 verschiedene Weisen gebastelt sind. Sie ermöglichen euch eine Vielzahl sehr lustiger und

lehrreicher Versuche. Ihre Herstellung erfordert keine besondere Kunstfertigkeit. Ihr könnt sie euch selbst bauen, ohne fremde Hilfe und irgendwelche Ausgaben.

Sehen wir uns an, wie diese Kreisel gebaut sind.

1. Wenn euch ein Hornknopf in die Hand fällt mit drei Löchern — so wie ihr ihn auf Abb. 21 (S. 60) seht, ist nichts leichter, als ihn in einen Kreisel zu verwandeln. Durch das zentrale Loch — das ist das einzige, was wir brauchen, — steckt ihr ein straff sitzendes Streichholz mit einer Spitze, und fertig ist der Kreisel. Er dreht sich nicht nur auf dem zugespitzten, sondern auch auf dem stumpfen Ende seiner Achse. Dazu muß man ihn nur in Drehung versetzen, wie üblich, die Achse mit 2 Fingern haltend und dann fix auf das stumpfe Ende fallen lassen. Er dreht sich lustig seitwärts schaukelnd.

2. Einen Korken hat man stets zur Hand. Schneidet eine Scheibe von ihm ab, steckt ein Streichholz durch, und schon habt ihr Kreisel Nummer 2 (Abb. 22).

Abbildung 22



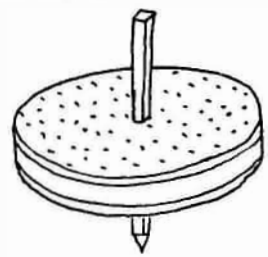
3. Die Abb. 23 zeigt euch einen recht ungewöhnlichen Triesel, eine Walnuß, die sich auf der Spitze dreht. Um eine geeignete Nuß in einen Kreisel zu verwandeln, braucht man nur ein Streichholz in das stumpfe Ende der Nuß zu bohren, und daran wird dann der Kreisel aufgezogen.

Abbildung 23



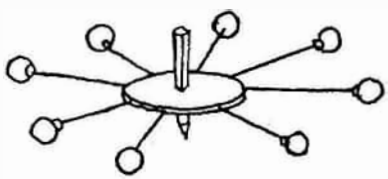
4. Noch besser ist es, einen flachen breiten Korken oder einen Plastedeckel von einem Marmeladenglas aufzutreiben. Macht einen Eisendraht oder eine Stricknadel glühend und bohrt ein Loch ins Zentrum für das Streichholz. Ein solcher Triesel dreht sich lange und stabil.

Abbildung 24



5. Ein eigenartiger Kreisel ist auf der nächsten Abbildung zu sehen. Es ist eine runde Pillenschachtel, die mit einem angespitzten Streichholz durchbohrt wurde. Damit die Dose fest auf ihrer Achse steht und nicht an ihr auf- und abrutscht, gießt man etwas Siegellack auf die Öffnung (Abb. 24).

Abbildung 25



6. Einen sehr interessanten Triesel findet ihr auf Abb. 25. Am Rand des Pappdeckels sind an dünnen Fäden Kugelknöpfe an den Ösen befestigt. Wenn sich der Triesel dreht, werden die Knöpfe radial weggeschleudert und die Fäden gestrafft. Anschaulich wird dadurch die uns schon bekannte Zentrifugalkraft demonstriert.

Abbildung 26

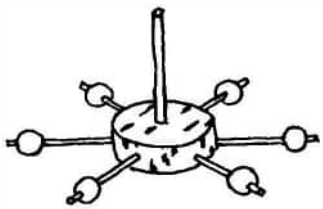
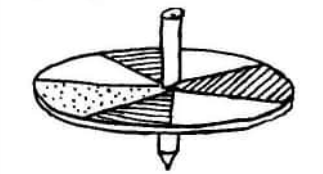


Abbildung 27



7. Das gleiche zeigt auf eine andere Art der Kreisel auf Abb. 26. In eine Korkscheibe werden Stecknadeln mit daraufgefädelten verschiedenfarbigen Glasperlen gesteckt, die sich frei auf der Nadel hin und her bewegen können. Versetzt man den Kreisel in Umdrehung, werden die Perlen durch die Zentrifugalkraft nach außen zu den Stecknadelknöpfen geschleudert. Ist der rotierende Triesel gut beleuchtet, so bilden die Nadelschäfte ein einheitliches silbernes Band, das umsäumt wird von dem bunten Rund der kreisenden Perlen. Um sich länger am Tanz des Triesels erfreuen zu können, muß man ihn auf einem flachen Teller andrehen.

8. Ein Farbkreisel (Abb. 27). Die Anfertigung ist mühevoll, doch der Arbeitsaufwand wird belohnt, indem man erstaunliche Eigenschaften feststellen kann. Aus einem Karton schneidet ihr einen Kreis aus. In der Mitte durchbohrt ihr ihn mit einer Nadel und steckt ein angespitztes Streichholz hindurch und klemmt die Scheibe zum besseren Halt mit zwei Korkplättchen fest. Nun teilt die Scheibe durch gerade Linien von der Mitte nach außen in gleiche Abschnitte, so wie man eine runde Torte schneidet. Die entstandenen Flächen — der Mathematiker würde „Sektoren" dazu sagen — malt ihr abwechselnd blau und gelb. Was seht ihr, wenn die Scheibe rotiert? Der Kreis erscheint dann weder blau noch gelb, sondern grün. Blau und gelb fließt für unser Auge zusammen zu grün.

Ihr könnt eure Farbmischversuche fortsetzen. Bereitet euch eine Scheibe vor, deren Sektoren abwechselnd hellblau und orange gefärbt sind. Jetzt zeigt die sich drehende Scheibe keine gelbe, sondern weiße Farbe (d. h. mehr hellgrau, und zwar um so heller, je sauberer eure Farben sind). In der Physik nennt man zwei Farben, die beim Mischen Weiß ergeben, „Komplementärfarben". Unser Kreisel zeigt uns also, daß hellblau und orange Komplementärfarben sind.

Wenn ihr einen guten Farbkasten habt, könnt ihr euch daranwagen, den Versuch zu wiederholen, der vor 200 Jahren von dem berühmten englischen Gelehrten Newton gemacht wurde. Und zwar müßt ihr die Sektoren mit den 7 Regenbogenfarben bemalen: violett, blau, hellblau, grün, gelb, orange und rot. Bei schnellen Drehbewegungen müssen alle Farben in Grau-Weiß zusammenfließen. Dieser Versuch hilft

euch zu verstehen, daß jeder weiße Sonnenstrahl aus vielen Farbstrahlen zusammengesetzt ist.

Eine Variante unserer Versuche mit dem Farbkreisel besteht in folgendem: Legt, wenn der Kreisel sich dreht, einen Papierring auf die Scheibe — sofort verändert sich die Farbe des Kreisels (Abb. 28).

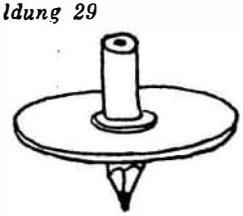
9. Der schreibende Kreisel (Abb. 29). Baut einen Kreisel, wie bereits erläutert. Doch die Achse soll kein Streichholz oder angespitztes Stäbchen, sondern ein spitzer weicher Bleistift sein. Nun setzt diesen Triesel auf einem Zeichenkarton in Umdrehung, der leicht geneigt liegt. Der Kreisel wird sich drehend abwärts bewegen und mit dem Bleistift Schnörkel aufzeichnen. Diese kann man leicht zählen, und da je eine Schleife bei einer Kreiselumdrehung entsteht, ist es mit einer Uhr in der Hand[1]) die Kreiselbewegung verfolgend nicht schwer, festzustellen, wie oft sich der Kreisel in einer Sekunde um seine eigene Achse dreht. Einfach mit dem Auge ist das natürlich nicht möglich.

Weiter unten ist noch eine Art des schreibenden Kreisels dargestellt. Um ihn herzustellen, braucht man ein kreisrundes Bleiplättchen, wie man sie früher an den Gardinen befestigte, damit sie glatt hängen. Im Zentrum der Scheibe wird ein Loch gebohrt (Blei ist weich und läßt sich leicht bohren), und rechts und links davon noch ein kleines Loch.

Abbildung 28



Abbildung 29



Durch das mittlere Loch wird ein angespitztes Stäbchen gesteckt und durch eines der seitlichen Löcher fädeln wir eine Perlon-Angelschnur oder eine Schweinsborste so, daß sie ein klein wenig länger als der untere Teil der Achse sind. In dieser Stellung befestigen wir die Schnur mit einem Stück Streichholz. Das dritte Loch bleibt ungenutzt. Wir haben es nur wegen des Gleichgewichts hineingebohrt. Andernfalls würde sich der Triesel nicht gleichmäßig drehen.

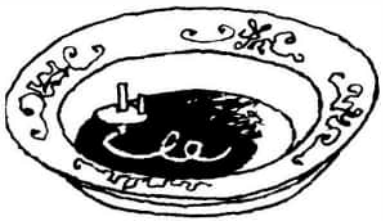
Nun ist der schreibende Kreisel fertig, aber für den Versuch brauchen wir noch einen berußten Teller.

---

[1]) Übrigens kann man die Sekunden auch ohne Uhr zählen, indem man einfach laut zählt. Aber dazu muß man vorher üben, die Worte „eins", „zwei", „und drei", „und vier", „und fünf" so auszusprechen, daß man für das Nennen exakt eine Sekunde benötigt. Glaubt nicht, daß das eine schwierige Sache ist — um es zu erlernen, benötigt man ca. 10 Minuten Übung, nicht mehr.



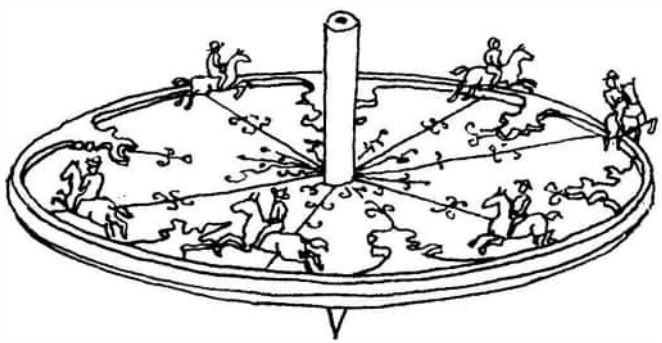
Abbildung 30



Wir halten den Tellerboden solange über eine Flamme (brennenden Holzspan oder Kerze), bis sich eine geschlossene Rußschicht gebildet hat. Dann setzten wir den Kreisel darauf in Bewegung. Er tanzt und gleichzeitig zeichnet das Ende der Perlonschnur weiß auf schwarz ein verworrenes, doch recht hübsches Muster (Abb. 30).

10. Die Krone aller Mühen ist der letzte Triesel — ein Karussell-Kreisel. Er ist übrigens viel leichter zu basteln, als es auf den ersten Blick scheint. Scheibe und Achse sind hier die gleichen wie bei dem uns bereits bekannten Farbkreisel. In die Scheibe pieken wir Stecknadeln mit Fähnchen daran, symmetrisch um die Achse gruppiert. Dann kleben wir lustige kleine Papierpferdchen mit Reitern darauf. Schon ist das kleine Karussell zum Spaß eurer kleinen Brüder oder Schwestern fertig (Abb. 31).

Abbildung 31



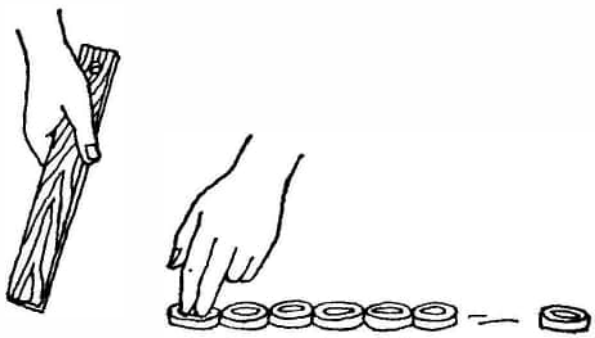
Der Stoß

Stoßen zwei Boote zusammen, zwei Straßenbahnwagen oder zwei Krocketkugel, ganz gleich, ob es sich um Unfälle handelt oder um einen Spielzug, die Physik bezeichnet diese Vorgänge mit dem kurzen Wort „Stoß". Der Zusammenprall dauert einen kurzen Augenblick. Doch wenn die aufeinandertreffenden Gegenstände elastisch sind, so kann während dieses Augenblicks sehr viel geschehen. Bei jedem elastischen Stoß unterscheidet die Physik drei Phasen. In der ersten Phase pressen die aufeinander prallenden Gegenstände sich an der Berührungsstelle zusammen. Die zweite Phase des Stoßes beginnt dann, wenn das gegenseitige Zusammenpressen die höchste Stufe er-

reicht hat. Der innere Widerstand, der als Reaktion auf das Zusammenpressen entsteht, verhindert ein weiteres Zusammenpressen, weil er die Druckkraft kompensiert. In der dritten Phase des Zusammenpralls stößt die Gegenkraft in dem Bestreben, die in der ersten Phase veränderte Form des Körpers wiederherzustellen, die Gegenstände in die entgegengesetzte Richtung: Der aufprallende Körper erhält seinen Schlag gewissermaßen zurück. Wir können feststellen, daß eine Krocketkugel, die auf eine andere in Ruhelage befindliche gleichen Gewichts trifft, als Ergebnis des Gegenschlages am Platz des Zusammenstoßes stehenbleibt, während die bisher unbewegliche mit der Geschwindigkeit der ersten Kugel davonrollt.

Es ist höchst interessant zu verfolgen, was geschieht, wenn eine Kugel auf eine Kette geradlinig hintereinandergereihter, sich gegenseitig berührender Bälle trifft. Der Stoß, den die erste Kugel erhält, wird

Abbildung 32



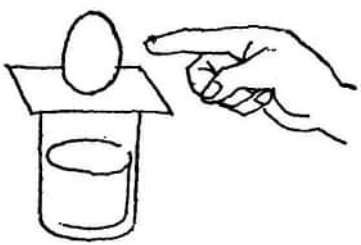
durch die ganze Kette weitergegeben, und die letzte, vom Stoß entfernteste Kugel, fliegt mit Schwung davon, denn sie hat keine Möglichkeit, den empfangenen Schlag weiterzugeben und ihn zurückzuerhalten.

Dieser Versuch läßt sich mit Krocketkugeln machen. Er gelingt aber auch recht gut mit Damesteinen oder Münzen. Legt die Damesteine in gerader Linie — sie kann sehr lang sein —, aber auf jeden Fall muß ein Stein den anderen berühren. Den ersten Damestein drückt ihr mit den Fingerspitzen leicht an und schlagt mit einem Holzlineal gegen seine Kante. Da könnt ihr sehen, wie am anderen Ende der letzte Damestein davonfliegt, während alle dazwischenliegenden ihren Platz beibehalten.

Das Ei im Glas

Die Clowns im Zirkus begeistern ihr Publikum manchmal damit, daß sie ein Tischtuch von einem eingedeckten Tisch ziehen. Das gesamte Geschirr — Teller, Gläser, Flaschen — bleibt jedoch unbeschädigt auf seinem Platz. Da ist keinerlei Wunder oder Betrug dabei. Das ist nur Geschicklichkeit, die durch ausdauerndes Üben erreicht wird.

Abbildung 33



Solche Behendigkeit können eure Hände natürlich nicht erreichen. Aber ein ähnlicher Versuch in kleinerer Form ist nicht schwierig (Abb. 33).

Stellt ein zur Hälfte mit Wasser gefülltes Glas auf den Tisch. Nehmt eine Postkarte (noch besser eine halbe). Weiterhin erbittet euch bei Erwachsenen einen großen Herren-Fingerring und besorgt euch ein hartgekochtes Ei.

Nun ordnet diese Gegenstände folgendermaßen an: Das Glas mit Wasser wird mit der Postkarte bedeckt, darauf wird der Ring gelegt und darauf das Ei aufgestellt. Kann man nun die Karte so hervorziehen, ohne daß das Ei vom Tisch fällt?

Auf den ersten Blick ist das so schwierig, wie die Tischdecke herunterzuziehen, ohne das daraufstehende Geschirr mit herunterzureißen. Doch ihr schafft diese komplizierte Sache mit einem geschickten Schnippen gegen die Kartenkante. Die Karte wird herausgestoßen und fliegt in das Zimmer. Und das Ei ... das Ei finden wir zusammen mit dem Ring unbeschädigt im Glas wieder — das Wasser dämpft den Aufschlag und verhindert das Zerbrechen der Eierschale.

Wenn man die erforderliche Geschicklichkeit erreicht hat, kann man diesen Trick auch mit einem rohen Ei versuchen.

Dieses kleine Wunder erklärt sich damit, daß infolge des kurzen Schlages das Ei von der herausfliegenden Karte keine spürbare Beschleunigung bekommt, während die Karte selbst durch den direkten Schlag wegrutscht.

Seiner Stütze beraubt, fällt das Ei senkrecht ins untergestellte Glas.

Wenn der Versuch nicht gleich gelingt, so übt euch erst in der Ausübung einer leichteren Variante. Legt auf die Handfläche eine Postkarte (besser eine halbe) und oben auf eine möglichst schwere Münze. Mit einem kurzen Schnippen wird die Karte unter der Münze herausgeschlagen. Das Papier rutscht weg,

die Münze bleibt in der Hand. Dieser Versuch klappt besonders gut, wenn man anstelle der Postkarte eine Eisenbahnfahrkarte verwendet.

Ein ungewöhnlicher Bruch

Abbildung 34

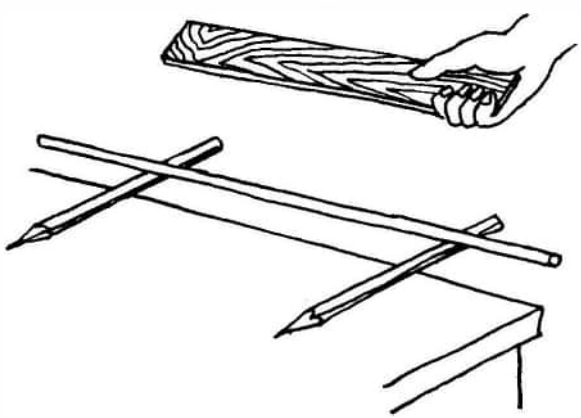


Auf der Bühne führen Zauberer oft einen schönen Trick vor, der wunderbar und ungewöhnlich aussieht, obwohl er sich sehr leicht erklären läßt (Abb. 34). An zwei Papierringen wird ein ziemlich langer Stab aufgehängt, wobei die Stabenden auf den Ringen ruhen. Diese wiederum sind, der eine über die Klinge eines Rasiermessers, der andere über eine leicht zerbrechliche Tabakspfeife gehängt. Der Magier nimmt einen zweiten Stab und schlägt mit voller Wucht auf den ersteren. Und was geschieht? Der erste Stab bricht, aber die Papierringe und die Tabakspfeife bleiben unversehrt.

Die Erklärung für diesen Trick ist die gleiche wie für den vorhergenannten. Der Schlag erfolgt so schnell, die Wirkung ist so kurzfristig, daß weder die Papierringe noch die Enden des Stabes zu einer Verlagerung gelangen. Es bewegt sich lediglich der Teil des Stabes, der dem Schlag unmittelbar ausgesetzt ist und davon zerbricht. Das Erfolgsgeheimnis besteht demzufolge darin, daß der Schlag sehr *schnell*, *abrupt* erfolgen muß. Ein langsamer Schlag zerbricht nicht den Stab, sondern zerreißt die Papierringe.

Große Könner unter den Magiers sind so raffiniert, daß sie es fertigbringen, einen Stab, der auf Rändern von zwei dünnen Gläsern ruht, zu zerbrechen, ohne dabei die Gläser zu beschädigen.

Abbildung 35



Ich erzähle das natürlich nicht, um euch zu ähnlichen Experimenten zu veranlassen. Ihr müßt euch mit bescheideneren Varianten solcher Versuche zufrieden geben (Abb. 35). Legt auf die Kante eines niedrigen Tisches oder einer Fußbank zwei Bleistifte so, daß ein Teil frei übersteht und darauf legt ihr ein langes dünnes Stäbchen. Ein kräftiger und schneller Schlag mit der Linealkante auf die Mitte des liegenden Stäbchens zerteilt es in zwei Hälften. Die Bleistifte jedoch, die den Stab tragen, verbleiben an ihrem Platz.

Nun wird euch verständlich, warum man eine Nuß nicht durch einen gleichmäßigen, wenn auch noch so starken Druck der Handflächen knacken kann. Aber mit einem heftigen Faustschlag ist sie leicht zu spalten. Im letzten Fall vermag der Stoß sich nicht auf die Fleischteile der Faust auszubreiten. Unsere weichen Muskeln, die der Nußschale nicht nachgeben, wirken auf sie wie ein fester Körper.

Aus dem gleichen Grund schlägt eine Gewehrkugel in das Fenster ein kleines Loch, während ein mit der Hand geworfenes Steinchen, das viel langsamer fliegt, die Scheibe in tausend Scherben zerbricht. Ein noch langsamerer Stoß kann das Fenster in den Angeln bewegen. Das vermag weder ein Stein noch eine Gewehrkugel.

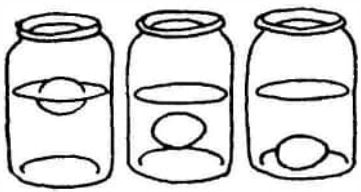
Schließlich ist das Abschlagen eines Halmes mit der Gerte ein weiteres Beispiel dieser Erscheinung. Handhabt ihr die Gerte langsam, wenn auch mit großer Kraft, könnt ihr den Halm nicht abschlagen, sondern nur biegen. Schlagt ihr jedoch mit Schwung, zerschneidet ihr ihn bestimmt. Natürlich nur dann, wenn der Halm nicht zu dick ist. Auch hier erreicht, wie in den vorangegangenen Fällen, die heftige Bewegung der Gerte, daß der Schlag nicht auf den ganzen Halm übertragen werden kann. Er konzentriert sich nur auf einen kleinen, den unmittelbar berührten Abschnitt, der die ganze Wucht des Schlages auf sich nimmt.

Wie ein Unterseeboot

Ein frisches Ei geht im Wasser unter — das weiß jede erfahrene Hausfrau. Wenn sie sich davon überzeugen möchte, ob ein Ei frisch ist, prüft sie es auf diese Weise. Geht das Ei unter, so ist es frisch. schwimmt es

an der Oberfläche, so ist es zum Essen ungeeignet. Der Physiker folgert aus dieser Beobachtung, daß ein frisches Ei mehr wiegt als das gleiche Volumen reinen Wassers. Ich sage „reinen" Wassers, weil unreines, z. B. salziges Wasser mehr wiegt.

Abbildung 36



Man kann eine solche starke Salzlösung bereiten, daß unser Ei leichter wird als das von ihm verdrängte Salzwasser. Dann wird in Übereinstimmung mit dem Gesetz vom Schwimmen, das Archimedes bereits im Altertum entdeckte, auch das frischeste Ei in solchem Wasser schwimmen.

Nutzt eure Erkenntnisse für folgenden lehrreichen Versuch: Ihr könnt ein Ei veranlassen, weder auf den Grund zu sinken noch an der Oberfläche zu schwimmen, sondern inmitten der Flüssigkeit zu stehen. Der Physiker würde das „Schwebezustand" nennen. Dazu ist es nötig, eine solche Salzlösung zu bereiten, von der ein Ei so viel verdrängt, wie es selbst wiegt. Die entsprechende Lösung erhält man erst nach einigem Probieren. Schwimmt das Ei oben, gibt man etwas Wasser hinzu. Geht das Ei unter, muß mehr Salz hinein. Mit etwas Geduld gelingt es euch schließlich, eine solche Salzlösung zu bereiten, in der das eingetauchte Ei weder schwimmt noch untergeht, sondern an dem Platze verbleibt, wo es hingebracht wurde.

In einem ähnlichen Zustand befindet sich das Unterseeboot. Es vermag sich unter der Wasseroberfläche nur zu halten, ohne auf den Grund zu sinken, wenn es exakt soviel wie das von ihm verdrängte Wasser wiegt. Um ihm ein solches Gewicht zu geben, lassen die Matrosen in besondere Behälter im Inneren des Bootes Wasser von außen hineinlaufen. Wenn aufgetaucht werden soll, wird das Wasser herausgepumpt.

Das Luftschiff — nicht das Flugzeug, sondern das Luftschiff — schwebt in der Luft aus dem gleichen Grunde. Ähnlich dem Ei im Salzwasser, verdrängt das Luftschiff exakt so viel Luft, wie es selbst wiegt.

Die schwimmende Nadel

Kann man eine Stahlnadel auf der Wasseroberfläche zum Schwimmen bringen, wie einen Strohhalm? Das scheint unmöglich. Ein Stück Eisen, wenn auch ein kleines, sollte doch unbedingt im Wasser untergehen.

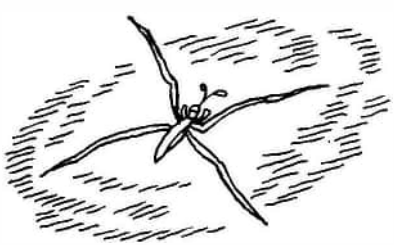
So denken viele, und wenn ihr zu den „vielen" gehört, dann sollte der folgende Versuch euch veranlassen, die Meinung zu ändern.

Nehmt eine gewöhnliche, nicht zu dicke Nähnadel. Benetzt sie leicht mit Öl oder Fett und legt sie sorgfältig auf die Wasseroberfläche in einer Schüssel. einem Eimer oder Glas. Zu eurem Erstaunen sinkt die Nadel nicht. Sie hält sich an der Oberfläche.

Aber warum geht sie nicht unter? Stahl ist doch immerhin schwerer als Wasser. Zweifellos, er ist sieben- bis achtmal schwerer und unter die Oberfläche gedrückt, könnte die Nadel nie von allein an die Oberfläche schwimmen, wie etwa ein Streichholz an die Oberfläche steigt. Doch unsere Nadel taucht nicht unter Wasser. Um den Grund zu finden, betrachtet die Wasseroberfläche entlang der schwimmenden Nadel. Ihr seht, daß sich in ihrer Nähe eine Wölbung ein kleines Tal bildet, auf dessen Grund die Nadel liegt.

Die Wasseroberfläche längs unserer Nadel verformt sich deshalb, weil die Nadel, mit einer dünnen Fettschicht versehen, sich nicht mit Wasser benetzt. Ihr habt wahrscheinlich schon bemerkt, daß, wenn ihr fettige Hände habt, darauf gegossenes Wasser die Haut nicht naß macht. Die Federn der Gänse und überhaupt aller Schwimmvögel sind ständig mit Fett bedeckt, das von einer besonderen Drüse ausgeschieden wird. Deshalb haftet das Wasser nicht daran, es perlt ab. Deshalb kann man ohne Seife, die das Fett löst und von der Haut entfernt, keine fettigen Hände sauber waschen, nicht einmal mit heißem Wasser. Die gefettete Nadel wird gleichfalls nicht vom Wasser benetzt und deshalb befindet sie sich auf dem Grund des kleinen Wassertals, getragen von einem Wasserfilm, der versucht, sich zu glätten. Und eben dieses Bestreben des Wassers, seine von der Nadel eingedrückte Oberfläche zu glätten, hebt die Nadel aus dem Wasser und läßt sie nicht untergehen.

Abbildung 37



Da unsere Hände immer ein wenig fettig sind, ist die Nadel auch ohne absichtliches Fetten bereits mit einer dünnen Schicht davon bedeckt. Deshalb kann man auch eine Nadel ohne vorheriges Einfetten zum Schwimmen bringen. Es muß nur gelingen, sie ganz vorsichtig auf das Wasser zu legen. Das kann man so machen: Die Nadel wird auf ein Stück Zigarettenpapier gelegt und danach wird allmählich mit Hilfe

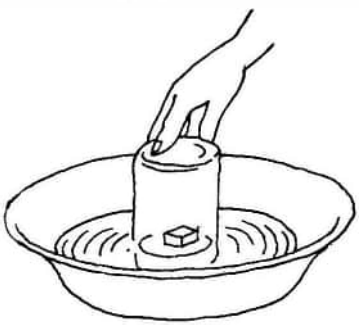
einer anderen Nadel das Papier unter Wasser gedrückt. Der Papierfetzen sinkt auf den Grund, und die Nadel bleibt an der Oberfläche.

Wenn ihr nun mal das Insekt „Wasserläufer" beobachten könnt, das über das Wasser schreitet, als wäre es auf dem Trockenen, so versetzt euch das schon nicht mehr in Ratlosigkeit. Ihr erratet, daß die Beine des Insekts mit Fett bedeckt sind, nicht vom Wasser benetzt werden und sich daher unter ihnen eine Einwölbung bildet, die in dem Bestreben, sich zu glätten, das Insekt von unten her hochdrückt.

Die Taucherglocke

Für diesen unkomplizierten Versuch ist eine einfache Waschschüssel geeignet. Wenn ihr ein tiefes, breites Konservenglas bekommen könnt, macht sich der Versuch bequemer. Außerdem brauchen wir noch ein hohes Glas oder einen großen Becher. Das wird eure Taucherglocke, und die Wasserschüssel voll Wasser ist das verkleinerte Meer bzw. der See.

Abbildung 38



Es gibt wohl kein einfacheres Experiment. Ihr haltet das Glas mit dem Boden nach oben, drückt es auf den Grund der Schüssel, aber nicht loslassen (damit das Wasser es nicht nach oben drückt). Dabei könnt ihr leicht feststellen, daß das Wasser kaum in das Glas eindringt. Die Luft hindert es daran. Das wird noch deutlicher, sofern sich unter eurer Glocke irgendein leichtdurchweichender Gegenstand, zum Beispiel ein Stück Zucker, befindet. Legt auf das Wasser ein Korkplättchen, darauf ein Stück Zucker und deckt das mit dem Glas ab. Nun drückt das Glas ins Wasser hinein. Der Würfelzucker gerät dabei unter die Wasseroberfläche und bleibt doch trocken, weil das Wasser nicht in das Glas eindringt.

Den gleichen Versuch kann man auch mit einem gläsernen Trichter machen, wenn man ihn mit der breiten Öffnung nach unten hält, die Rohröffnung mit dem Finger fest verschließt und unter Wasser drückt. Das Wasser dringt nun nicht in den Trichter ein. Aber man braucht nur den Finger loszulassen, so steigt das Wasser im Trichter schnell auf das Niveau des ihn umgebenden Wassers.

Ihr seht also, daß die Luft entgegen unserer gewohnten Annahme nicht ein „Nichts" ist. Sie nimmt

einen bestimmten Raum ein und gibt ihn nicht anderen Elementen frei, wenn sie nicht woanders hin ausweichen kann.

Diese Versuche sollen euch anschaulich klarmachen, wie die Menschen in einer Taucherglocke oder im Inneren der breiten Rohre, den Caissons (Senkkasten) unter Wasser leben und arbeiten können. Das Wasser dringt aus dem gleichen Grund nicht in die Taucherglocke bzw. Caissons, wie es nicht in das Glas bei unserem Versuch eindringt.

Warum läuft es nicht heraus?

Der nächste Versuch ist ganz leicht auszuführen. Es ist der erste physikalische Versuch, den ich in meiner Kindheit machte. Füllt ein Glas mit Wasser, bedeckt es mit einer Postkarte oder Papier und dreht das Glas, die Karte mit den Fingern leicht andrükkend, mit dem Boden nach oben. Jetzt könnt ihr die Finger wegnehmen. Das Papier fällt nicht ab, das Wasser läuft nicht heraus, falls das Papier völlig horizontal liegt.

In dieser Lage könnt ihr das Glas kühn von einer Stelle zur anderen tragen, sogar einfacher als unter gewöhnlichen Bedingungen. Das Wasser schwappt nicht heraus. Bei Gelegenheit könnt ihr eure Bekannten überraschen, indem ihr ihnen, wenn sie um etwas zu trinken bitten, Wasser im kopfstehenden Glas bringt.

Was hält die Karte davon ab, herunterzufallen bei gleichzeitiger Überwindung des auf ihn lastenden Wassergewichtes? Der Luftdruck ist es. Er wirkt auf die Karte von außen mit einer Kraft, die, wie man leicht errechnen kann, wesentlich größer ist als die 200 g Wassergewicht.

Derjenige, der mir erstmals dieses Experiment vorführte und erläuterte, lenkte meine Aufmerksamkeit auch darauf, daß für den Erfolg des Versuchs das Glas bis zum Rand mit Wasser gefüllt sein muß. Wenn das Glas nur teilweise mit Wasser gefüllt ist und der verbleibende Raum von Luft eingenommen wird, kann es passieren, daß der Versuch nicht gelingt. Die Luft im Inneren des Glases drückt auf das Papier, gleicht den Druck der äußeren Luft aus und infolgedessen fällt es ab.

Als ich das hörte, nahm ich mir gleich vor, einen

Abbildung 39



Versuch mit einem nicht randvollen Glas zu machen, um selbst zu sehen, wie das Papier abfällt. Stellt euch mein Erstaunen vor, als ich bemerkte, daß es doch nicht abfällt. Nachdem ich den Versuch mehrere Male wiederholt hatte, überzeugte ich mich davon, daß die Karte ebenso gut hält wie bei einem vollen Glas.

Das war für mich eine überzeugende Lehre dafür, wie man die Naturerscheinungen erforschen muß. Höchster Richter in der Naturwissenschaft muß das Experiment sein. Jede Theorie, wie wahrheitsgetreu sie unserer Vernunft auch erscheinen mag, muß durch das Experiment überprüft werden.

„Prüfen und nochmals prüfen" — das war das Hauptprinzip der ersten Naturforscher (der Florentiner Akademiker) im 17. Jahrhundert, das ist es auch für den Physiker des 20. Jahrhunderts. Und wenn sich bei der Prüfung einer Theorie herausstellt, daß das Experiment sie nicht bestätigt, muß man herausfinden, worin sie sich irrt.

In unserem Falle ist es nicht schwer, den Fehler in der Überlegung zu finden, die auf den ersten Blick so überzeugend schien. Biegen wir einmal vorsichtig eine Ecke des Papiers zurück, wenn es die Öffnung eines nicht ganz gefüllten Glases von unten verschließt. Wir sehen eine Luftblase durch das Wasser aufsteigen. Was besagt das? Natürlich, daß die Luft im Glas dünner ist als die es umgebende Luft. Andernfalls würde die Luft von außen nicht in den Raum über dem Wasser eindringen. Darin besteht das ganze Geheimnis. Im Glas verbleibt zwar Luft, aber dünnere als die äußere und infolgedessen mit geringerem Druck. Offensichtlich drängt das Wasser, wenn es beim Umdrehen des Glases nach unten sinkt, einen Teil der Luft heraus. Der verbleibende Teil, der den gleichen Raum wie vorher ausfüllt, verdünnt sich und drückt in geringerem Umfange.

Ihr seht, daß selbst die einfachsten physikalischen Versuche bei entsprechender Aufmerksamkeit zu ernsthaften Überlegungen veranlassen können. Das sind die kleinen Dinge, die Großes lehren.

Trocken aus dem Wasser

Soeben habt ihr euch davon überzeugt, daß die Luft, die uns von allen Seiten umgibt, mit großer Kraft

auf alles einen Druck ausübt, was mit ihr in Berührung kommt. Den Versuch, den wir jetzt beschreiben wollen, demonstriert noch anschaulicher die Existenz dessen, was die Physiker „atmosphärischen Druck“ nennen.

Legt auf einen flachen Teller eine Münze oder einen Metallknopf und gießt Wasser darüber. Die Münze befindet sich unter Wasser. Das Geldstück jetzt mit bloßen Händen herauszuholen, ohne die Finger naß zu machen oder ohne das Wasser vom Teller zu gießen, ist natürlich unmöglich, sagt ihr. Und ihr irrt euch, denn das ist durchaus möglich.

Abbildung 40



Seht her, wie man es machen muß. Verbrennt im Glasinneren ein Stück Papier und wenn sich die Luft erwärmt hat, stülpt das Glas neben der Münze auf den Teller, so daß die Münze nicht unter das Glas gerät. Nun beobachtet, was geschieht. Lange braucht man nicht zu warten. Die Flamme erlischt unter dem Glas natürlich gleich, und die Luft im Glas beginnt sich abzukühlen. Mit fortschreitender Abkühlung wird das Wasser vom Glas gewissermaßen angezogen und bald ist alles dort, der Tellerboden dagegen leer.

Wartet einen Augenblick, bis die Münze abgetrocknet ist, und nehmt sie auf, ohne die Finger naß gemacht zu haben.

Diese Erscheinung zu verstehen ist nicht schwer. Als sich die Luft im Glas erwärmte, dehnte sie sich aus wie alle erwärmten Körper. Der Teil, der über das bisherige Volumen hinausging, entwich aus dem Glas. Als nun die verbliebene Luft sich abzukühlen begann, war sie schon zu wenig, um im kalten Zustand den früheren Druck auszuüben, d. h. dem äußeren atmosphärischen Druck standzuhalten. Das Wasser im Glas ist nun auf jedem Quadratzentimeter seiner Oberfläche einem geringeren Druck ausgesetzt als auf dem offenen Teil des Tellers. Kein Wunder, daß es unter das Glas drängt, hineingequetscht von dem Überdruck der äußeren umgebenden Luft. Also wird das Wasser vom Glas nicht angezogen, nicht aufgesaugt, wie es auf den ersten Blick schien. Es wird von außen in das Glas hineingedrückt.

Nunmehr, da ihr die Ursachen für die vor sich gehenden Erscheinungen kennt, wird euch auch klar, daß keine Notwendigkeit besteht, für das Experiment brennendes Papier oder in Spiritus getränkte Watte (wie oft empfohlen wird), oder irgend etwas anderes

Brennendes zu verwenden. Es genügt, das Glas mit kochendem Wasser auszuspülen, und das Experiment gelingt ebenso gut. Es geht einfach darum, die Luft im Glas zu erhitzen. Auf welche Weise das geschieht, ist völlig gleichgültig.

Leicht ist es zum Beispiel, den Versuch in folgender Weise zu machen: Nachdem Tee getrunken wurde, wird das Glas, solange es noch heiß ist, auf eine Untertasse, in die bereits vorher ein wenig Tee gegossen wurde, damit er zum Zeitpunkt des Experiments abgekühlt ist, umgestülpt. Innerhalb von 2 Minuten ist der Tee unter dem Glas.

Der Fallschirm

Abbildung 41



Schneidet aus einem Blatt Zigarettenpapier einen mehrere Handflächen breiten Kreis. In der Mitte wird eine kreisrunde mehrere Finger breite Öffnung geschnitten. Durch den Rand des großen Kreises werden Fäden gezogen. Die Enden der Fäden, die gleichlang sein müssen, werden an irgendeine leichte Last geknüpft (Abb. 41). Das ist die ganze Konstruktion eines Fallschirms — ein verkleinertes Abbild jenes großen Schirmes, der das Leben eines Fliegers rettet, wenn er aus irgendeinem Grunde gezwungen ist, sein Flugzeug zu verlassen.

Um diesen Minifallschirm ordnungsgemäß zu überprüfen, werft ihn aus dem Fenster eines oberen Stockwerks mit der Last nach unten. Die Last strafft die Fäden. Der Papierkreis entfaltet sich, und der Fallschirm fliegt gleichmäßig abwärts und setzt weich auf dem Boden auf. So geht es bei windstillem Wetter vor sich. Bei Wind jedoch, auch bei schwachem, wird euer Fallschirm nach oben gerissen, vom Haus weggetragen, und irgendwo weit entfernt geht er nieder.

Je größer der Schirm, desto größer kann die angebundene Last sein (das Gewicht muß unbedingt sein, damit der Fallschirm nicht umgestülpt wird). Ein größerer Schirm fällt langsamer bei Windstille und wird vom Wind weiter getragen.

Aber warum hält sich der Fallschirm so lange in der Luft? Natürlich habt ihr bereits erraten, daß die Luft den Schirm daran hindert zu fallen. Wäre an die Last kein Blatt Papier gebunden, würde die Last geradewegs zu Boden fallen. Das Blatt Papier vergrößert die Oberfläche des fallenden Gegenstandes,

ohne spürbar das Gewicht zu erhöhen. Aber je größer die Oberfläche eines Gegenstandes, um so spürbarer behindert die Luft seine Bewegung.

Wenn ihr euch das klargemacht habt, versteht ihr, warum Staubteilchen in der Luft herumfliegen. Gewöhnlich sagt man, der Staub schwebt in der Luft, weil er leichter als Luft ist. Das ist überhaupt nicht wahr.

Was sind denn eigentlich Staubpartikeln? Kleinste Teilchen von Stein, Lehm, Metall, Holz, Kohle usw. Und alle diese Materialien sind hundert-, ja tausendmal so schwer wie die Luft. Stein — 1500mal, Eisen — 6000mal, Holz — 300mal usw. Das heißt, die Staubteilchen sind nicht leichter, sondern im Gegenteil viel *schwerer* als die Luft und können niemals wie Späne auf dem Wasser in ihr schwimmen.

Deshalb muß auch jedes Staubkörnchen eines festen oder flüssigen Körpers unvermeidlich in der Luft fallen, muß in ihr „hinabsinken". Das tut es auch, doch der Fall geht etwa so vor sich, wie das Sinken eines Fallschirmes. Bei den kleinsten Körnchen verringert sich die Oberfläche nämlich nicht so stark wie das Gewicht. Mit anderen Worten, die kleinen Partikelchen verfügen über eine zu große Oberfläche im Vergleich zu ihrem Gewicht. Wenn man ein Schrotstück mit einer Kugel vergleicht, die 1000mal so schwer ist wie es, so ist die Oberfläche des Schrotstückes nur 100mal kleiner als die der Kugel. Das bedeutet, daß die Oberfläche des Schrotstückes im Vergleich zum Gewicht 10mal größer als die der Kugel ist. Nun stellt euch vor, daß das Schrotstück sich immer mehr verkleinert, bis es 1 Million Mal so leicht wie die Kugel ist, d. h. sich in ein Bleistaubkörnchen verwandelt. Dieses kleine graue Staubkörnchen hat im Verhältnis zum Gewicht eine 10 000mal größere Oberfläche als die Kugel. Die Luft behindert seine Bewegung 10 000fach stärker als die der Kugel. Deshalb *schwebt* es in der Luft, d. h., es fällt kaum merkbar, und der leichteste Wind wirbelt es hoch.

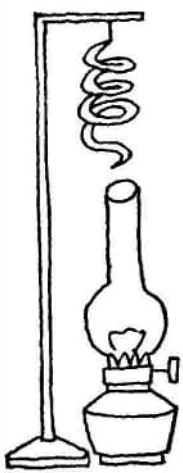
Die Schlange und der Schmetterling

Aus einer Postkarte schneidet ihr eine Kreisscheibe vom Durchmesser der Öffnung eines Wasserglases aus. Danach schneidet ihr mit der Schere den Kreis

Abbildung 42



Abbildung 43



spiralförmig auf, wie eine zusammengeringelte Schlange. Das Schwanzende legt ihr, nachdem durch leichtes Drücken dort eine Vertiefung entstanden ist, auf eine Stricknadelspitze, die in einem Korken befestigt ist. Die Windungen der Schlange neigen sich dabei herab, und es entsteht so eine Art Wendeltreppe.

Nun ist die Schlange fertig. Wir können beginnen, mit ihr zu experimentieren. Stellt sie in die Nähe einer warmen Kochplatte, und schon beginnt die Schlange, sich zu drehen und zwar um so geschwinder, je heißer die Platte ist. In der Nähe jedes heißen Gegenstandes — einer Lampe, eines Samowars — wird sich die Schlange mehr oder weniger schnell, ohne Ermüdung und Unterbrechung drehen, solange der Gegenstand heiß bleibt. Sehr rasch dreht sich die Schlange, wenn man sie über einer Petroleumlampe aufhängt, indem man einen Faden mit Knoten durch das Schwanzende zieht.

Was veranlaßt die Schlange, sich zu drehen? Das gleiche, was die Flügel der Windmühle bewegt — der Luftstrom. In der Nähe jedes erhitzten Gegenstandes ist eine Strömung warmer Luft, die nach oben steigt. Diese Strömung rührt daher, daß die Luft bei der Erwärmung (wie auch jeder andere Körper mit Ausnahme von Eiswasser) sich ausdehnt und dünner, d. h. leichter wird. Die umgebende Luft, die kälter und folglich auch dichter und schwerer ist, verdrängt sie, zwingt sie aufzusteigen, nimmt ihren Platz ein, und indem sie sich erwärmt, teilt sie ihr Schicksal und wird durch neue kältere Luft verdrängt. Auf diese Weise erzeugt jeder erhitzte Gegenstand über sich aufsteigende Luftströmungen, die so lange anhalten, wie der Gegenstand wärmer als die ihn umgebende Luft ist. Anders ausgedrückt: Von jedem erhitzten Gegenstand steigt ein unsichtbarer warmer Luftzug auf. Er ist es auch, der gegen die Windungen unserer Papierschlange stößt, sie zum Drehen bringt, wie der Wind die Mühlenflügel dreht.

Anstelle einer Schlange kann man auch Papier in anderer Form zum Drehen veranlassen, zum Beispiel in Gestalt eines Schmetterlings. Am besten schneidet man den Schmetterling aus Zigarettenpapier aus. Nachdem man ihn in der Mitte zusammengeschnürt hat, wird er an einem dünnen Faden oder Haar befestigt. Hängt solchen Schmetterling über die Lampe,

und er flattert wie ein lebendiger. Dabei wirft der Falter seinen Schatten an die Decke, der in vergrößerter Form alle Bewegungen des Papierschmetterlings wiedergibt. Wer nicht Bescheid weiß, glaubt, es sei ein großer schwarzer Falter ins Zimmer geflogen, der nun aufgeregt unter der Decke flattert.

Man kann es auch so machen: Eine Nadel in einen Korken stecken, auf die Spitze einen aus Papier ausgeschnittenen Schmetterling legen, u. zw. in dem Punkt auflegen, wo er das Gleichgewicht hält (diesen Punkt — den Schwerpunkt unseres Falters — muß man durch Probieren ermitteln). Der Schmetterling dreht sich schnell, wenn sich irgendein warmer Gegenstand in der Nähe befindet. Es genügt sogar, die Handfläche in die Nähe zu bringen, um eine ziemlich heftige Drehbewegung hervorzurufen.

Der Ausdehnung der Luft bei der Erhitzung und ihren aufsteigenden Wärmeströmungen begegnen wir auf Schritt und Tritt.

Alle wissen, daß in einem geheizten Zimmer die warme Luft sich unter der Decke sammelt und die kalte Luft am Boden steht. Daher empfinden wir auch oft, daß es an den Füßen zieht, wenn das Zimmer sich noch ungenügend erwärmt hat. Wenn man die Tür vom warmen zum kalten Zimmer öffnet, strömt die kalte Luft unten herein und die warme entweicht nach oben. Die Flamme der Kerze zeigt uns an der Tür die Strömungsrichtung. Wollt ihr die Wärme im geheizten Raum halten, dann müßt ihr dafür Sorge tragen, daß durch den Spalt unter der Tür die kalte Luft nicht eindringt. Dafür genügt es, den Spalt mit einem Läufer oder auch mit Zeitungspapier abzudichten. Dann entweicht die warme Luft nicht durch den oberen Spalt, weil sie nicht von unten durch Kaltluft verdrängt wird.

Ja, und was ist der Zug im Ofen oder dem Fabrikschornstein schon anderes als ein aufsteigender warmer Luftstrom?

Wir könnten noch über warme und kalte Strömungen in der Atmosphäre, über Passate, Monsune, Briesen und ähnliche Winde berichten, doch das würde uns zu weit vom Thema ablenken.

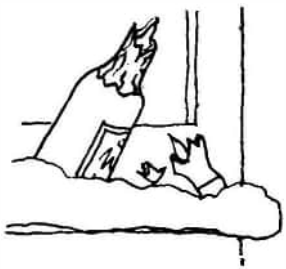
Eis in der Flasche

Ist es leicht, im Winter eine Flasche voll Eis zu bekommen? Es scheint, als wäre nichts leichter als

das, wenn es draußen friert. Man füllt Wasser in eine Flasche, stellt sie vor das Fenster und überläßt alles übrige dem Frost. Die Kälte läßt das Wasser erstarren, und wir haben eine Flasche voller Eis.

Führt ihr das Experiment durch, werdet ihr euch davon überzeugen, daß die Sache nicht so einfach ist. Es entsteht wohl Eis, aber die Flasche ist dahin. Sie platzt unter dem Druck des entstehenden Eises. Das liegt daran, daß Wasser, wenn es friert, recht spürbar sein Volumen vergrößert, etwa um ein Zehntel. Die Ausdehnung vollzieht sich mit solch unbändiger Kraft, daß nicht nur verkorkte Flaschen platzen. Auch bei offenen Flaschen wird der Hals von dem Druck des sich darunter ausdehnenden Eises abgesprengt. Das im Flaschenhals eingefrorene Wasser verwandelt sich in einen Eispfropfen, der die Flasche verschließt.

Abbildung 44



Die Ausdehnungskraft des erstarrenden Wassers kann sogar Metall zerreißen, wenn die Metallschicht nicht zu dick ist. Gefrierendes Wasser sprengt 5 Zentimeter dicke Wände einer eisernen Bombe. Es ist nicht verwunderlich, daß so oft Wasserleitungen platzen, wenn das Wasser in ihnen gefriert.

Durch die Ausdehnung des Wassers beim Gefrieren erklärt sich auch, daß Eis auf dem Wasser schwimmt und nicht auf den Grund sinkt. Wenn Wasser sich beim Erstarren zusammenziehen würde — wie nahezu alle anderen Flüssigkeiten — würde das Eis, was sich im Wasser bildet, nicht an der Oberfläche schwimmen, sondern untergehen. Und dann wären wir einiger Annehmlichkeiten beraubt, die uns jeder Winter beschert.

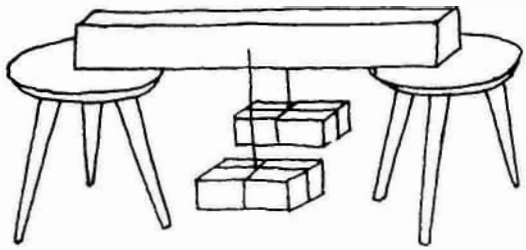
Eis durchtrennen, ohne es zu teilen

Ihr habt sicher gehört, daß Eisstücke unter Druck „zusammenfrieren". Das bedeutet nicht, daß die Eisstücke noch stärker frieren, wenn man Druck auf sie ausübt. Ganz im Gegenteil. Bei starkem Druck *taut* das Eis, doch sobald das sich dabei bildende kalte Wasser vom Druck befreit ist, gefriert es erneut (da seine Temperatur unter Null Grad liegt). Wenn wir Eisstücke aufeinanderpressen, geschieht folgendes: Die Spitzen, die sich berühren und dem stärksten Druck ausgesetzt sind, tauen, und es entsteht Wasser

mit einer Temperatur unter Null Grad. Das Wasser weicht dem Druck aus und dringt in die kleinen Hohlräume zwischen den Berührungsflächen. Dort, wo es dem erhöhten Druck nicht mehr ausgesetzt ist, gefriert es sofort. Auf diese Weise schweißt es die Stücke zu einem festen Block zusammen.

Das Gesagte könnt ihr mit einem schönen Experiment nachprüfen. Sucht euch eine Eisstange. Legt die Enden auf die Kanten zweier Hocker, Stühle oder ähnliches. Quer über die Stange legt ihr eine Schlinge aus einem halben Millimeter oder weniger starken, 80 cm langen Stahldraht. An jedes Drahtende hängt ihr ein altes eisernes Bügeleisen oder *etwas ähnliches* mit einem Gewicht von 10 kg. Unter diesem Gewicht schneidet sich der Draht ins Eis, durchdringt allmählich den ganzen Block, doch die Eisstange zerfällt nicht. Nehmt sie nur in die Hand, sie ist ein Stück, als wäre sie nicht durchgetrennt worden.

Abbildung 45



Denkt ihr an das, was bereits vorher über das Zusammenfrieren von Eis gesagt wurde, versteht ihr, wo des Rätsels Lösung für diese seltsame Erscheinung ist. Unter dem Druck des Drahtes taute das Eis, doch das Wasser über dem Draht wurde frei vom Druck und erstarrte sofort. Kurz, während der Draht die unteren Schichten zertrennte, froren die oberen wieder zusammen.

Eis ist das einzige Material in der Natur, mit dem man ein derartiges Experiment machen kann. Deshalb kann man auch auf dem Eis Schlitten fahren oder Schlittschuh laufen. Während der Schlittschuhläufer sein Körpergewicht auf die Schlittschuhkufe verlagert, taut das Eis unter diesem Druck (wenn der Frost nicht zu hart ist), und die Kufe gleitet. Dabei ruft sie an dem neuen Platz die gleiche Wirkung hervor. Wo der Schlittschuhläufer seinen Fuß auch

hinsetzt, überall verwandelt sich eine dünne Schicht Eis unter dem Kufenstahl in Wasser, das, vom Druck befreit, sofort wieder gefriert. Obwohl das Eis bei Frost trocken ist, entsteht unter dem Schlittschuh stets eine Gleitschicht aus Wasser. Deshalb ist es so glatt.

Die Schallübertragung

Habt ihr schon einmal jemanden aus der Ferne beobachtet, der einen Baum fällt? Oder vielleicht habt ihr schon einmal gesehen, wie in einiger Entfernung von euch ein Zimmermann arbeitet und Nägel einschlägt? Dabei kann man eine verwunderliche Feststellung machen. Den Aufschlag hört man nicht dann, wenn das Beil ins Holz dringt oder der Nagel vom Hammer getroffen wird, sondern später, wenn das Beil oder der Hammer schon zu neuem Schlag erhoben werden.

Wenn ihr so etwas noch mal beobachten könnt, dann geht noch weiter zurück oder geht vorwärts. Nach einigen Versuchen findet ihr den Platz, wo der Schall vom Aufschlag des Beils oder des Hammers bei euch genau zum Zeitpunkt des sichtbaren Aufschlags eintrifft. Kehrt danach zum früheren Standort zurück und — ein erneutes Mal bemerkt ihr das Nichtzusammentreffen des Schalls mit dem Aufschlag.

Nun fällt es euch schon leichter, die Ursache dieser rätselhaften Erscheinung zu erraten. Der Schall braucht einige Zeit, um vom Entstehungsort bis zum Ohr zu gelangen. Das Licht legt die Entfernung fast augenblicklich zurück, und es kann sein, daß Beil oder Hammer bereits zum neuen Schlag erhoben sind, ehe der Schall durch die Luft zum Ohr gedrungen ist. Dann sieht das Auge das, was das Ohr hört; man hat den Eindruck, als ob der Schall nicht mit dem Niederschlagen, sondern dem Aufheben des Werkzeuges zusammenfällt. Doch wenn ihr ein Stück rückwärts oder vorwärts auf eine solche Entfernung geht, die der Schall während einer Schlagbewegung des Beils durchläuft, so schlägt das Beil genau in dem Augenblick zu, da der Schall das Ohr erreicht. Ihr seht und hört jetzt den Schlag zur gleichen Zeit. Doch es sind *verschiedene* Schläge. Ihr *seht* den letzten Schlag, aber *hört* den vorangegangenen oder gar einen noch früheren.

Welche Strecke durchläuft der Schall in der Luft während einer Sekunde? Das ist exakt gemessen worden. Rund gerechnet 1/3 Kilometer. Für einen Kilometer braucht der Schall 3 Sekunden. Und wenn ein Holzfäller zweimal in der Sekunde zuschlägt, so genügt es für euch in einer Entfernung von 160 m zu stehen, damit der Schall des Aufschlages mit dem Anheben des Beiles zusammenfällt. Das Licht legt in jeder Sekunde eine fast millionenmal so große Entfernung zurück wie der Schall. Ihr versteht natürlich, daß wir für alle Entfernungen auf der Erde die Lichtgeschwindigkeit nicht berücksichtigen.

Der Schall wird nicht nur durch die Luft, sondern auch durch andere gasförmige, flüssige und feste Substanzen übertragen. Im Wasser setzt sich der Schall viermal so schnell fort wie in der Luft. Auch ist unter Wasser deutlich jedes Geräusch wahrzunehmen. Arbeiter in Unterwassercaissons (großen Absenkrohren) hören ausgezeichnet die Ufergeräusche. Fischer wissen auch zu berichten, daß Fische von dem geringsten verdächtigen Geräusch am Ufer davonjagen.

Noch besser und schneller leiten feste elastische Stoffe den Schall, solche wie z. B. Eisen, Holz, Knochen. Legt das Ohr an die Schnittfläche eines langen Rundholzes oder Baumstammes und bittet einen Kameraden mit dem Fingernagel oder einem Stäbchen an die gegenüberliegende Seite zu klopfen. Ihr hört den dumpfen Ton des Aufschlages, der über die ganze Länge des Stammes übertragen wird. Man kann sogar, wenn es rundherum ruhig genug ist und kein anderes Geräusch stört, das Ticken der Uhr vom anderen Ende des Baumstammes hören. Ebensogut wird der Schall von Eisenbahnschienen oder Eisenstangen, von gußeisernen Rohren und sogar dem Erdboden weitergeleitet. Das Ohr an die Erde gepreßt, kann man den Hufschlag eines Pferdes viel früher hören als durch die Luft. Einen Kanonenschuß kann man auf diese Weise von so entfernten Geschützen hören, von denen das Dröhnen durch die Luft überhaupt nicht zu uns gelangt.

Nur feste *elastische* Stoffe leiten den Schall so gut. Weiche Gewebe, poröse, unelastische Stoffe leiten den Schall sehr schlecht — sie „schlucken“ ihn. Deshalb hängt man dicke Vorhänge an die Türen, wenn man nicht möchte, daß die Geräusche das be-

nachbarte Zimmer erreichen. Teppiche, Polstermöbel, Kleider wirken in gleicher Weise schalldämpfend.

Die Glocke

Unter den Stoffen, die den Ton gut leiten, nannte ich im vorausgegangenen Abschnitt *Knochen*. Wollt ihr euch davon überzeugen, daß die Knochen eures eigenen Schädels über diese Eigenschaft verfügen? Faßt mit den Zähnen den Ring einer Taschenuhr und haltet die Ohren mit den Händen fest zu. Sehr deutlich hört ihr das Ticken. Es ist lauter als das Tikken, welches das Ohr über die Luft wahrnimmt. Diese Geräusche dringen über die Schädelknochen zum Ohr.

Abbildung 46



Noch ein lustiger Versuch, der die gute Schallübertragung durch die Schädelknochen demonstriert. Bindet in der Mitte eines Bindfadens einen Löffel an, so daß zwei lange Enden bleiben. Die Enden drückt mit den Fingern gegen die verschlossenen Ohren und mit vorgeneigtem Körper, so daß der Löffel pendeln kann, schlagt ihr ihn gegen einen festen Gegenstand. Ihr hört einen dumpfen Klang, so als läute dicht unmittelbar an euren Ohren eine Glocke.

Der Versuch klappt noch besser, wenn ihr statt eines Löffels einen noch schwereren Gegenstand nehmt.

Grusliger Schatten

„Möchtest du etwas Ungewöhnliches sehen?“ fragte mich eines Abends mein älterer Bruder. „Komm mit mir ins Nebenzimmer.“

Im Zimmer war es dunkel. Mein Bruder zündete eine Kerze an, und wir gingen los. Mutig ging ich voran, öffnete kühn die Tür und trat entschlossen als erster in das Zimmer. Doch plötzlich erschrak ich. Von der Wand blickte eine schreckliche Gestalt auf mich. Flach wie ein Schatten glotzte sie mich an.

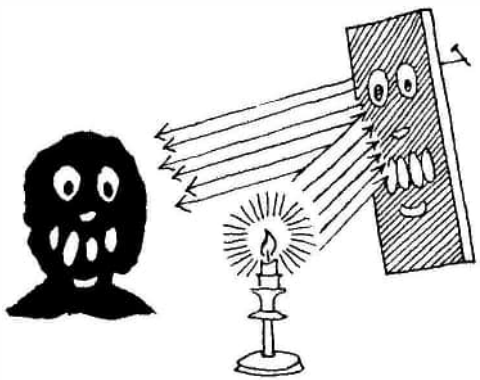
Ehrlich, ich hatte mächtige Angst. Und bestimmt wäre ich davongerannt, wenn nicht hinter mir das Gelächter meines Bruders laut geworden wäre.

Beim genauen Hinsehen begriff ich alles. Der an der Wand hängende Spiegel war vollständig mit einem Papierbogen verhängt. Nur Augen, Nase und Mund waren herausgeschnitten. Mein Bruder hatte das Ker-

zenlicht so auf den Spiegel gerichtet, daß die Reflexion dieser Ausschnitte direkt auf meinen Schatten fiel.

Das Ergebnis war große Verwirrung. Ich erschrak vor meinem eigenen Schatten.

Abbildung 47



Als ich dann versuchte, diesen Scherz mit meinen Kameraden zu wiederholen, überzeugte ich mich, daß es nicht einfach ist, den Spiegel richtig auszurichten. Ich mußte tüchtig üben, bis es mir gelang. Die Lichtstrahlen werden vom Spiegel nach bestimmten Gesetzen reflektiert und zwar so, daß der Einfallwinkel gleich dem Ausfallwinkel ist. Als ich dieses Gesetz kannte, war es für mich schon nicht mehr schwer zu ermitteln, wie die Kerze zum Spiegel stehen muß, damit die Lichtflecken genau auf die richtigen Stellen des Schattens fallen.

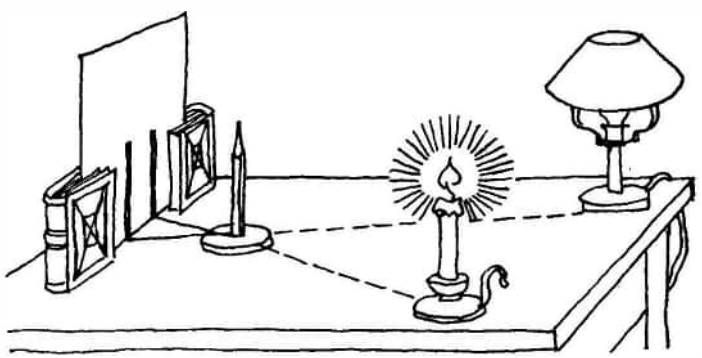
Wie man die Helligkeit des Lichtes mißt

Eine Kerze in doppelter Entfernung leuchtet verständlicherweise schwächer. Aber um wieviel schwächer? Um das Zweifache? Nein. Wenn ihr zwei Kerzen in doppelter Entfernung aufstellt, geben sie nicht das gleiche Licht wie vorher eine. Um die gleiche Beleuchtung zu erreichen, muß man nicht zwei, sondern 2 mal 2 Kerzen in doppelter Entfernung, also vier aufstellen! In dreifacher Entfernung genügen nicht drei, sondern 3 mal 3, d. h., neun Kerzen werden gebraucht usw. Das zeigt uns, daß in doppelter Entfernung die Leuchtkraft um das Vierfache schwächer wird, in dreifacher — um das Neunfache, in

vierfacher Entfernung — um das 16fache; in fünffacher — 5 mal 5, d. h. um das 25fache usw. So ist das Gesetz von der mit der Entfernung abnehmenden Leuchtkraft. Und ebenso ist das Gesetz, um es hier gleich mit zu erwähnen, von der Abschwächung des Lautes. Ein Laut schwächt sich in 6facher Entfernung nicht 6mal soviel, sondern 36mal soviel ab. [1]

Kennen wir dieses Gesetz, können wir es nutzen, um die Helligkeit zweier Lampen miteinander zu vergleichen, oder überhaupt zweier Lichtquellen verschiedener Leuchtkraft. Ihr wollt beispielsweise wissen, wievielmal heller eure Lampe als eine einfache Kerze brennt. Oder anders ausgedrückt, ihr wollt ermitteln, wie viele gewöhnliche Kerzen notwendig sind, um die gleiche Beleuchtung zu erreichen, die von der Lampe ausgeht.

Abbildung 48



Zu diesem Zweck stellt ihr Lampe und Kerze an einem Tischende auf. Am anderen Tischende wird ein Blatt weißes Zeichenpapier (zum Beispiel zwischen zwei Bücher eingeklemmt) senkrecht aufgestellt. Vor dem Blatt, in geringem Abstand, wird ebenfalls vertikal ein Stäbchen, zum Beispiel ein Bleistift, aufgestellt. Er wirft zwei Schatten auf das Zeichen-

[1] Damit erklärt sich, daß im Theater das Flüstern des Nachbarn die laute Stimme des Schauspielers, der auf der Bühne steht, übertönt. Wenn die Bühne von euch 10mal weiter entfernt ist als euer Nachbar, so verliert die Stimme des Schauspielers 100fach an Lautstärke im Vergleich zum Flüstern eures Nachbarn. Kein Wunder, daß er für euer Ohr leiser ist als ein Flüstern. Aus dem gleichen Grund ist es so wichtig, daß die Schüler in der Klasse sich ruhig verhalten, wenn der Lehrer etwas erklärt. Die Worte des Lehrers erreichen die Schüler (besonders die weit entfernt sitzenden) so abgeschwächt, daß selbst leises Tuscheln des Banknachbarn sie übertönt.

papier. Einen von der Lampe, den zweiten von der Kerze. Die Tiefe der beiden Schatten ist unterschiedlich, weil einer von der hellen Lampe, der andere von der trüben Kerze ausgeht. Durch Heranschieben der Kerze könnt ihr erreichen, daß beide Schatten gleich dunkel werden. Das bedeutet dann, daß die Leuchtkraft der Lampe gerade der Leuchtkraft der Kerze entspricht. Aber die Lampe ist weiter von dem sie beleuchtenden Zeichenpapier entfernt als die Kerze. Meßt nach, wievielmal weiter sie entfernt steht, und ihr könnt feststellen, um wievielmal *heller* die Lampe leuchtet als die Kerze. Ist zum Beispiel die Lampe dreimal so weit entfernt wie die Kerze, so ist ihre Helligkeit um 3 mal 3, also neunmal so groß wie die Kerze. Warum das so ist, versteht man leicht, wenn man sich das Gesetz von der Abnahme der Helligkeit in Erinnerung ruft.

Eine andere Methode, die Leuchtkraft zweier Lichtquellen zu vergleichen, ist folgende. Man verwendet einen Fettfleck auf dem Papier. Ein solcher Fleck erscheint hell, wenn er von hinten beleuchtet wird. Von vorn beleuchtet erscheint er dunkel. Man ordnet die Lichtquellen beiderseits des Papiers mit dem Fettfleck so an, daß er von beiden Seiten gleichermaßen beleuchtet erscheint. Nun braucht man nur noch die Entfernung der Lichtquellen zum Fettfleck abzumessen und die Rechnung durchzuführen, die wir im vorangegangenen Beispiel machten. Um aber gleichzeitig beide Seiten des Fleckes betrachten und vergleichen zu können, ist es gut, das Papier mit dem Fettfleck bei einem Spiegel aufzustellen. Da könnt ihr eine Seite direkt, die andere im Spiegel sehen. Wie man das macht, wißt ihr natürlich selbst.

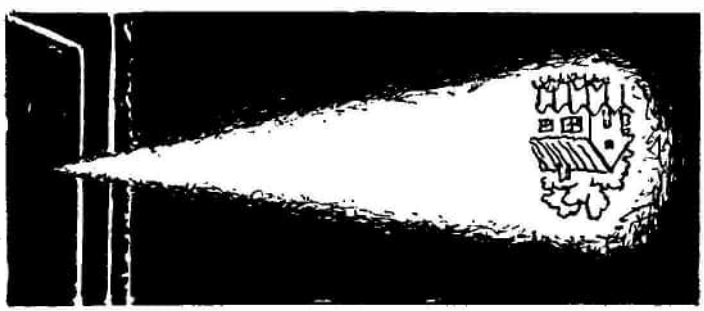
Mit dem Kopf nach unten

> Das Zimmer, in das Iwan Iwanowitsch eintrat, war völlig dunkel, weil die Fensterläden verschlossen waren, und der Sonnenstrahl, der durch ein in die Fensterläden geschnittenes Loch fiel, schillerte in allen Regenbogenfarben. Beim Auftreffen auf die gegenüberliegende Wand malte er ein buntes Bild aus Konturen von Dächern, Bäumen und auf dem Hofe trocknender Wäsche. Alles jedoch auf dem Kopf stehend.
>
> GOGOL. *„Wie es kam, daß Iwan Iwanowitsch und Iwan Nikiforowitsch sich entzweit hatten"*

Wenn sich in eurer Wohnung oder in der Wohnung eurer Bekannten ein Zimmer mit den Fenstern zur

Sonnenseite befindet, so könnt ihr sie leicht in ein physikalisches Gerät verwandeln, das die alte lateinische Bezeichnung „Camera obscura“ (deutsch: dunkles Zimmer) trägt. Dazu muß man die Fenster mit einer Platte aus Sperrholz oder Pappe, die mit dunklem Papier beklebt wird, abdecken. In die Platte bohren wir eine kleine Öffnung. An einem sonnigen Tag verschließen wir, damit es dunkel wird im Zimmer, Fenster und Türen. In einiger Entfernung von dem Loch in der Pappe befestigen wir ein großes Blatt Papier oder ein Laken. Das ist eure „Leinwand“. Darauf entsteht sofort eine verkleinerte Darstellung all dessen, was man sehen kann, wenn man durch das Loch nach draußen blickt. Häuser, Bäume, Tiere, Menschen erscheinen auf der Leinwand in natürlichen Farben, aber in umgekehrter Stellung. Die Häuser mit dem Dach nach unten, die Menschen auf dem Kopf stehend usw.

Abbildung 49



Was lehrt dieses Experiment? Daß das Licht sich in geraden Linien ausbreitet. Die Strahlen vom oberen Teil des Gegenstandes und die Strahlen vom unteren Teil kreuzen sich in der kleinen Öffnung und setzen sich so fort, daß die ersteren unten erscheinen und die letzteren oben. Wären die Lichtstrahlen nicht gerade, sondern gekrümmt oder gebrochen, entstände etwas völlig anderes.

Bemerkenswert ist, daß die Form des Loches in keiner Weise auf die entstehende Abbildung Einfluß hat. Ob ihr ein rundes Loch bohrt oder eine quadratische, dreieckige, sechseckige oder ähnliche Öffnung macht, die Abbildung auf der Leinwand bleibt gleich. Habt ihr auf dem Erdboden unter dichten Bäumen schon einmal ovale Lichtflecke beobachtet?

Das ist nichts anderes als die Abbildung der Sonne. Sie wird von den Strahlen hervorgerufen, die durch verschiedenartige Zwischenräume zwischen den Blättern hindurchdringen. Sie sind rund, weil die Sonne rund ist, und langgestreckt, weil sie schräg auf den Boden auftreffen. Haltet ein Blatt Papier im rechten Winkel zu den Sonnenstrahlen und ihr erhaltet kreisrunde Lichtflecke. Während der Sonnenfinsternis jedoch, wenn die dunkle Scheibe des Mondes sich vor die Sonne schiebt, sie teilweise bedeckt und in eine helle Sichel verwandelt, dann verwandeln sich die runden Flecken unter den Bäumen in kleine Sicheln.

Die Kamera des Fotografen ist im Prinzip nichts anderes wie eine solche Camera obscura. Nur in die Öffnung ist ein Objektiv gesetzt, damit die Abbildung scharf und deutlich wird. In die Rückwand einer solchen Kamera wird eine Mattscheibe geschoben, auf der die Abbildung erscheint, natürlich auf dem Kopf stehend. Der Fotograf kann sie nur betrachten, indem er die Kamera und sich mit einem dunklen Tuch bedeckt, damit von außen einfallendes Licht seine Augen nicht stört.

Ihr könnt euch so etwas Ähnliches wie eine Fotokamera selbst basteln. Beschafft euch einen länglichen geschlossenen Kasten und bohrt in die eine Wand ein Loch. Nehmt die gegenüberliegende Wand heraus und bringt anstelle dessen Fettpapier — als Ersatz für die Mattscheibe — an. Stellt ihr den Kasten in ein abgedunkeltes Zimmer und stellt das Loch vor die Öffnung des verdunkelten Fensters, so könnt ihr auf der Rückwand eine ziemlich deutliche Abbildung der Außenwelt sehen, natürlich wieder alles auf dem Kopf stehend.

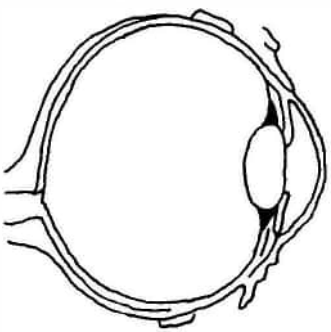
Der Vorteil eurer Kamera besteht darin, daß ihr kein dunkles Zimmer mehr benötigt. Ihr könnt sie mit ins Freie nehmen und an einem beliebigen Platz aufstellen. Nur müßt ihr den Kopf und die Kamera mit etwas Dunklem abdecken, damit das von außen einfallende Licht die Betrachtung der Abbildung auf dem gefetteten Papier nicht beeinträchtigt.

Die umgedrehte Stecknadel

Eben haben wir über die Camera obscura gesprochen, haben erklärt, wie man sie herrichtet, aber einen interessanten Punkt haben wir nicht erwähnt. Jeder

Mensch trägt stets mit sich zwei kleine „Camera obscura". Das sind unsere Augen. Stellt euch vor, das Auge ist ähnlich dem Kasten konstruiert, den ich euch zu basteln empfahl. Das, was man die Pupille des Auges nennt, ist nicht ein schwarzer Punkt auf dem Auge, sondern eine Öffnung, die in das dunkle Innere unseres Sehorgans führt. Diese Öffnung ist mit einer durchsichtigen Haut überzogen und von einer gallertartigen ebenfalls durchsichtigen Substanz bedeckt. Hinter dem Sehloch liegt die durchsichtige Linse. Sie hat die Form eines bikonkaven Glases. Das ganze Innere des Auges, von der Linse bis zum Augenhintergrund, wo die Abbildung der äußeren Gegenstände entsteht, ist angefüllt mit einer durchsichtigen Masse. Unser Auge ist im Schnitt in Abb. 50 dargestellt. Doch all das hindert das Auge nicht daran, eine Camera obscura zu bleiben, allerdings eine vollkommenere, denn im Auge entsteht eine viel schärfere und deutlichere Abbildung. Die Bilder auf dem Augenhintergrund sind sehr klein. Ein 8-Meter-Telefonmast zum Beispiel, den wir in 20 Meter Entfernung sehen, bildet sich auf dem Augenhintergrund als ganz dünner Strich von etwa 1/2 cm Länge ab.

Abbildung 50

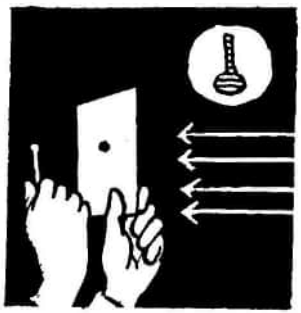


Aber das Interessanteste ist wohl, daß, obgleich alle Abbildungen im Auge wie in einer Camera obscura umgekehrt entstehen, wir dennoch alle Gegenstände richtig sehen. Diese Umkehrung vollzieht sich auf Grund langer Gewöhnung. Wir haben uns daran gewöhnt, unsere Augen so zu gebrauchen, daß wir jedes erhaltene Abbild in seine natürliche Position stellen.

Daß dieses in der Tat vor sich geht, könnt ihr selbst überprüfen. Wir wollen es so einrichten, daß auf dem Augenhintergrund nicht ein umgekehrtes, sondern ein direktes Abbild des Gegenstandes entsteht. Was sehen wir da? Da wir gewohnt sind, alle sichtbaren Gegenstände umzudrehen, drehen wir auch dieses Stück. Das heißt also, wir sehen diesmal nicht die direkte, sondern die umgekehrte, kopfstehende Abbildung. So ist es auch tatsächlich. Das folgende Experiment zeigt das sehr anschaulich.

Bohrt mit einer Stecknadel ein Loch in eine Postkarte und haltet sie gegen das Fenster oder eine Lampe in etwa 10 cm Entfernung vom rechten Auge. Vor der Karte haltet die Stecknadel so, daß ihr Kopf vor dem Loch steht. Bei dieser Anordnung seht ihr die Nadel, als wäre sie *hinter* dem Loch, doch was

Abbildung 51



am wichtigsten ist — *umgekehrt*. In Abb. 51 ist dieses ungewöhnliche Bild gezeigt. Bewegt die Stecknadel ein wenig nach rechts, eurem Auge erscheint es, als bewege sie sich nach *links*.

Die Ursache ist, daß die Stecknadel im vorliegenden Fall sich nicht umgekehrt abbildet, sondern direkt. Das Loch in der Postkarte wird hier zur Lichtquelle, die von der Nadel einen Schatten wirft. Der Schatten fällt auf die Pupille, und das Abbild ist nicht umgekehrt, weil es viel zu dicht am Sehloch steht. Auf dem Augenhintergrund entsteht ein heller kreisförmiger Fleck — das ist die Abbildung des Loches in der Postkarte. Und darauf werden die dunklen Umrisse der Stecknadel sichtbar — ihr Schatten in direkter Stellung. Uns scheint, wir sehen die Nadel durch das Postkartenloch, also dahinter (weil nur der Teil der Nadel sichtbar ist, der die Öffnung einnimmt) und zwar umgekehrt, weil wir aus alter Gewohnheit unbewußt alle erhaltenen Abbildungen umdrehen.

Feuer anzünden mit Eis

Als kleiner Junge machte es mir Spaß zu sehen, wie mein großer Bruder sich die Zigarette mit Hilfe eines Vergrößerungsglases anzündete. Er fängt mit dem Glas einen Sonnenstrahl, richtet den grellen Punkt auf das Ende der Zigarette, und sie beginnt mit einer bläulichen Rauchsäule zu brennen.

„Weißt du", sagte mein Bruder einmal im Winter, „man kann auch mit Eis eine Zigarette anzünden."

„Mit Eis?" wunderte ich mich.

„Natürlich schlägt nicht das Eis, sondern die Sonne Feuer, doch das Eis bündelt die Strahlen wie dieses Glas."

„Du willst also ein Brennglas aus Eis machen?"

„Aus Eis Glas, das kann ich nicht machen, das kann keiner. Aber eine optische Linse aus Eis, das schaffen wir."

„Was ist das: eine Linse?"

„Wir geben dem Eis eine linsenartige Form, rund, gewölbt, in der Mitte dick, am Rand dünn."

„Und sie wird zünden?"

„Sie wird Feuer anzünden."

„Aber sie ist doch kalt!"

„Das macht nichts, wenn du willst, probieren wir es."

Mein Bruder begann damit, daß er mich beauf-

tragte, eine Waschschüssel zu holen. Ich brachte sie, doch mein Bruder beanstandete sie.

„Sie taugt nicht. Siehst du, sie hat einen flachen Boden. Sie muß einen gewölbten Boden haben."

Als ich eine andere Schüssel brachte, goß mein Bruder Wasser hinein und setzte sie dem Frost aus.

„Wir lassen sie bis zum Boden gefrieren, dann haben wir eine Eislinse. Eine Seite flach, die andere gewölbt!"

„So eine große?"

„Je größer, desto besser. Um so mehr Sonnenstrahlen werden in einem Punkt konzentriert."

Am nächsten Tag frühmorgens lief ich, um nach unserer Schüssel zu sehen. Das Wasser war bis zum Boden gefroren.

„Das wird eine prima Linse", sagte mein Bruder und klopfte mit dem Finger auf das Eis. „Aber jetzt müssen wir sie herausnehmen."

Abbildung 52



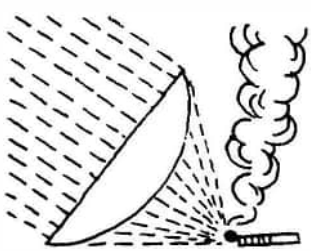
Das war eine einfache Sache. Mein Bruder setzte die Eisschüssel in eine andere, in die er heißes Wasser gefüllt hatte. Das Eis taute schnell an den Wänden. Wir brachten die Schüssel mit dem Eis auf den Hof und legten die Linse auf ein Brett.

„Das Wetter ist richtig!" sagte mein Bruder in die Sonne blinzelnd, „genau das richtige zum Feuermachen. Na los, halte die Zigarette!"

Ich hielt die Zigarette, und mein Bruder nahm die Linse in beide Hände, hielt sie so zur Sonne, daß er die Strahlen nicht selbst verdeckte. Lange dauerten die Bemühungen, bis es ihm gelang, den grellen Punkt von der Linse direkt auf die Zigarette zu richten. Als der Punkt meine Hände traf, fühlte ich, daß er brennt. Ich zweifelte schon nicht mehr, daß der Eisklumpen die Zigarette anzündet.

Und tatsächlich, als der grelle Fleck das Zigarettenende bedeckte und eine Minute darauf verweilte, begann sie zu glimmen und blauer Rauch stieg auf.

Abbildung 53



„Na bitte, wir haben mit Eis Feuer gemacht", sagte mein Bruder und steckte die brennende Zigarette zwischen die Lippen. „So kann man direkt am Pol ein Lagerfeuer ohne Streichhölzer entfachen, wenn nur Holz da ist!"

Die Magnetnadel

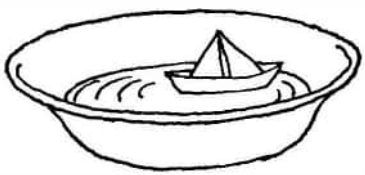
Ihr seid schon in der Lage, eine Nadel an der Wasseroberfläche schwimmen zu lassen. Nutzt jetzt eure

Fertigkeiten für einen neuen, noch interessanteren Versuch. Treibt einen Magnet auf, wenigstens einen kleinen Hufeisenmagnet. Wenn man ihn an eine Schüssel, in der eine Nadel schwimmt, hält, schwimmt die Nadel gehorsam zum entsprechenden Schüsselrand. Sie wird das noch geschwinder tun, wenn ihr, bevor ihr sie ins Wasser legt, mit dem Magnet einige Male darüberstreicht (dabei wird nur mit einem Ende vom Magnet und in einer Richtung darüber gestrichen, nicht hin und her).

Dadurch wird die Nadel selbst zum Magnet, wird magnetisiert und schwimmt deshalb zu jedem, nicht magnetischen eisernen Gegenstand.

Mit der magnetischen Nadel könnt ihr viele interessante Beobachtungen anstellen. Überlaßt sie sich selbst, ohne sie an den Schüsselrand durch Eisen oder einen Magnet anzuziehen. Sie nimmt im Wasser eine bestimmte Lage ein, nämlich von Nord nach Süd gerichtet, wie die Kompaßnadel. Dreht die Schüssel, die Nadel wird nach wie vor mit dem einen Ende nach Norden, mit dem anderen nach Süden zeigen. Nähert einen Pol des Magneten einem Nadelende und ihr seht, daß die Nadel durchaus nicht unbedingt von diesem Pol angezogen wird. Sie kann sich von ihm abwenden, um das entgegengesetzte Ende an den Pol heranzubringen. Wir haben es hier mit der *Wechselwirkung* zweier Magneten zu tun. Das Gesetz dieser Wechselwirkung besagt, daß die *entgegengesetzten* Pole (der Nordpol des einen Magneten und der Südpol des anderen) sich anziehen, die *gleichen* jedoch (beide Südpole und beide Nordpole) sich abstoßen.

Abbildung 54



Baut euch, nachdem ihr die Besonderheiten der magnetisierten Nadel erkannt habt, ein kleines Papierschiff. In der Kniffstelle verbergt eure Nadel. Nicht eingeweihte Freunde könnt ihr nun damit in Erstaunen versetzen, daß es euch möglich ist, das Schiffchen zu steuern, ohne es zu berühren: Es wird den Bewegungen eurer Hand folgen, wenn ihr darin den Magnet verborgen haltet, wovon die Zuschauer natürlich nichts wissen.

Magnetisches Theater

Genauer gesagt, nicht Theater, sondern Zirkus, weil dabei Seiltänzer auftreten, natürlich aus Papier geschnittene. Zuerst müssen wir uns aus Pappe das

eigentliche Zirkusgebäude bauen. Im unteren Teil wird ein Draht gezogen. Über der Bühne befestigt ihr einen Hufeisenmagnet.

Nun kommen die Artisten dran. Sie werden aus Papier geschnitten und bekommen verschiedene Stellungen, entsprechend ihrer Rolle. Allerdings müssen sie eine Bedingung erfüllen: Sie müssen so hoch wie eine Nadel sein, die längs der Figur hinten aufgeklebt wird. Das kann man mit zwei—drei Tropfen Siegellack machen.

Stellt ihr nun eine solche Figur auf das Seil, so fällt sie nicht herab, ja steht sogar aufrecht, angezogen von dem Magnet. Durch leichtes Berühren des

Abbildung 55



Drahtes bringt ihr Leben in die Seiltänzer. Sie bewegen sich und hüpfen, ohne das Gleichgewicht zu verlieren.

Der elektrisierte Kamm

Selbst wenn ihr noch nichts über die Lehre von der Elektrizität wißt, so seid ihr doch in der Lage, einige Versuche durchzuführen, die sehr interessant und auf jeden Fall nützlich für eure spätere Bekanntschaft mit dieser erstaunlichen Naturkraft sind.

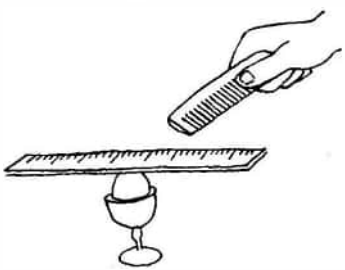
Die beste Zeit und der beste Ort für diese Versuche mit der Elektrizität ist ein gut geheiztes Zimmer im kalten Winter. Versuche dieser Art gelingen nur richtig bei trockener Luft. Und die erwärmte Luft ist im Winter wesentlich trockener als im Sommer bei gleicher Temperatur.

Beginnen wir zu experimentieren. Gewiß seid ihr schon mit einem einfachen Kamm durch trockenes

(*absolut* trockenes) Haar gefahren. Würdet ihr das im geheizten Zimmer und bei völliger Stille tun, könntet ihr ein leises Knistern hören, das vom Kamm beim Kämmen ausgeht. Euer Kamm hat sich durch das Reiben an den Haaren elektrisiert.

Ein gewöhnlicher Kamm läßt sich nicht nur durchs Kämmen elektrisch aufladen. Reibt man ihn mit einem trockenen Wolltuch (einem Stück Flanell), bekommt er auch elektrische Eigenschaften, sogar in noch stärkerem Maße. Diese Eigenschaften werden auf vielerlei Art und Weise sichtbar, vor allem durch das Anziehen leichter Körper. Bringt den durch Reibung elektrisch aufgeladenen Kamm an Papierschnipsel, Spreu, Kügelchen aus Holundermark und ähnliches — all diese Dinge werden angezogen und haften an dem Kamm. Faltet aus Papier winzige Schiffchen und setzt sie ins Wasser. Mit dem elektrisierten Kamm könnt ihr die Bewegung eurer Papierflotte lenken wie mit einem Zauberstab. Man kann das Experiment noch eindrucksvoller machen. Setzt ein Ei in einen trockenen Eierbecher. Darauf legt ein ziemlich langes Lineal in ausgewogener horizontaler Lage. Bei Annäherung des elektrisch geladenen Kammes zu einem Linealende beginnt es sich ziemlich geschwind zu drehen.

Abbildung 56



Es folgt gehorsam dem Kamm, nach der einen und der anderen Seite, sogar im Kreis.

Das gehorsame Ei

Mit solchen elektrischen Eigenschaften könnt ihr außer einem einfachen Kamm auch andere Gegenstände ausstatten. Eine Stange Siegellack an Flanell oder an den Ärmeln eurer Kleidung (wenn sie aus Wolle ist) gerieben, entwickelt die gleichen Eigen-

Abbildung 57



schaften. Auch ein Glasröhrchen oder -stäbchen läßt sich durch Reiben mit Seide elektrisieren. Mit dem Glas klappt der Versuch jedoch nur bei sehr trockener Luft, und wenn Seide und Glas ausreichend erwärmt und trocken sind.

Hier ist noch ein lustiges Experiment mit elektrischer Anziehungskraft. Blast ein Hühnerei aus. Dazu bohrt in die Eispitzen je ein kleines Loch. Blast ihr in das eine hinein, entweicht der Inhalt durch die andere, entgegengesetzte Öffnung. Die leere Eihülle (die Öffnungen werden mit weißem Wachs verschlossen) legt ihr auf einen glatten Tisch, eine Platte oder große Schüssel. Mittels eines elektrisierten Stäbchens bringt ihr das ausgeblasene Ei dazu, hinter dem Stab herzurollen. Auf den Zuschauer, der nicht weiß, daß das Ei leer ist, macht dieses Experiment (von dem berühmten Gelehrten Faraday erdacht) einen verblüffenden Eindruck. Ein Papierring oder ein Tischtennisball folgen dem Stäbchen ebenfalls.

Wechselwirkung

Die Mechanik lehrt, daß es einseitige Anziehung, ja überhaupt einseitige Einwirkung nicht geben kann. Jede Einwirkung ist Wechselwirkung. Das heißt also, daß, wenn der elektrisierte Stab verschiedene Gegenstände anzieht, er auch selbst von ihnen angezogen wird. Um sich vom Vorhandensein dieser Anziehungskraft zu überzeugen, braucht man dem Kamm oder dem Stäbchen nur Bewegungsfreiheit zu geben, indem wir ihn zum Beispiel an einer Fadenschlinge aufhängen (am besten an einem seidenen Faden).

Abbildung 58



Dann ist leicht festzustellen, daß jeder nicht elektrisch aufgeladene Gegenstand — sogar eure Hand — den Kamm anzieht, ihn in Drehung versetzt usw.

Das, wir wiederholen es noch einmal, ist ein allgemeines Naturgesetz. Es tritt immer und überall in Erscheinung. Jede Einwirkung ist Wechselwirkung zweier Körper, die aufeinander in entgegengesetzter Richtung einwirken. Einseitige Einwirkung, die nicht verbunden ist mit Gegenwirkung eines anderen Körpers, auf den die Einwirkung gerichtet ist, existiert nicht in der Natur.

Elektrisches Abstoßen

Kehren wir noch einmal zum Versuch mit dem elektrisierten Kamm zurück. Wir haben gesehen, daß er von jedem beliebigen nichtelektrisierten Körper angezogen wird. Wie wirkt nun aber ein elektrisierter

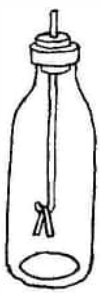
Gegenstand auf ihn? Der Versuch macht euch klar, daß die gegenseitige Einflußnahme zweier elektrisch aufgeladener Körper unterschiedlich sein kann. Bringt ihr an einen elektrisierten Kamm ein elektrisiertes Glasstäbchen heran, ziehen sich beide Gegenstände an. Nähert ihr jedoch dem Kamm eine elektrisierte Siegellackstange oder einen anderen Kamm, so zeigt sich die gegenseitige Einflußnahme im Abstoßen.

Das physikalische Gesetz, das diese Art von Erscheinungen erklärt, lautet: *Entgegengesetzte* Elektrizität zieht einander an, *gleiche* Elektrizität stößt einander ab. Gleich ist die Elektrizität von Plastmasse oder Siegellack (die sogenannte Harz- oder *negative* Elektrizität), verschieden ist die Elektrizität von Harz und Glas (*positive*). Die alten Bezeichnungen wie Elektrizität von Harz oder Glas werden heute nicht mehr angewendet. Sie wurden verdrängt durch die Bezeichnung negative oder positive elektrische Ladung.

Auf dem Abstoßen gleich geladener Gegenstände ist die Konstruktion eines einfachen Gerätes zur Feststellung von Elektrizität begründet, das sogenannte Elektroskop. Das Wort „skop" ist dem Griechischen entnommen und bedeutet „zeigen". Nach dem gleichen Prinzip sind die Worte „Teleskop", „Mikroskop" u. a. gebildet.

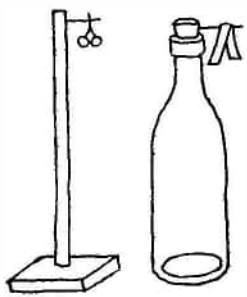
Ihr könnt dieses einfache Gerät selbst bauen. Steckt durch das Zentrum eines Pappdeckels oder eines Korkens, mit denen man eine Flaschenöffnung abdecken kann, einen Stift, von dem ein Stück oben herausragen muß. An dem unteren Ende des Stiftes befestigt mit Wachs zwei Streifen Aluminiumfolie oder Zigarettenpapier. Dann drückt den Korken oder den Pappdeckel in die Öffnung, dichtet den Rand mit flüssigem Siegellack ab — und das Elektroskop ist fertig zum Experimentieren. Berührt ihr nun das herausragende Stiftende mit einem elektrisch aufgeladenen Instrument, so wirkt die elektrische Ladung auch auf die beiden Streifen. Sie werden gleichzeitig elektrisch aufgeladen und stoßen sich demzufolge gegenseitig ab. Das Auseinanderstreben der Blättchen zeugt davon, daß der Gegenstand, mit dem der Stift des Elektroskops berührt wurde, elektrisiert war.

Abbildung 59



Wenn ihr kein Talent zum Basteln habt, könnt ihr euch ein einfacheres Elektroskop anfertigen. Es wird nicht so gut, nicht so empfindlich sein, aber es

Abbildung 60



ist brauchbar. An einem Holzstäbchen hängt ihr an dünnen Fäden zwei Holundermarkkügelchen so auf, daß sie sich berühren. Fertig ist das Elektroskop. Kommt ihr nun mit dem zu prüfenden Gegenstand an eines der Kügelchen, werdet ihr feststellen, daß das andere Kügelchen sich entfernt, wenn der Gegenstand elektrisch geladen war.

Schließlich zeigt euch die Zeichnung noch einen vereinfachten Elektroskoptyp. Über eine Stecknadel, die in einen Flaschenkorken gesteckt ist, wird ein gekniffter Foliestreifen gehängt. Berührt ihr nun die Nadel mit einem elektrisch geladenen Gegenstand, so veranlaßt ihr den Foliestreifen, sich zu spreizen.

Eine Besonderheit der Elektrizität

Mit Hilfe eines Gerätes, das sich leicht basteln läßt, könnt ihr euch vom Vorhandensein einer interessanten und äußerst wichtigen Besonderheit der Elektrizität überzeugen — nämlich, daß sie sich nur an der Oberfläche eines Gegenstandes sammelt, ja nur an den gewölbten, hervortretenden Stellen.

Abbildung 61



Klebt ein Streichholz mittels eines Siegellacktropfens aufrecht stehend an eine Streichholzschachtel. Zwei solche Ständer brauchen wir. Dann schneidet einen Papierstreifen etwa von der Höhe eines Streichholzes und annähernd dreimal solang wie ein Streichholz. Die Enden rollt ihr zu Röhren, so daß man sie auf die Streichhölzer stecken kann. Auf das Papierband kleben wir beiderseits drei—vier kleine Streifchen aus hauchdünnem Zigarettenpapier, und das ganze stecken wir auf die Streichholzständer.

Nun ist unser Gerät für die Versuche bereit. Wir straffen das Papierband und berühren es mit einer elektrisch geladenen Siegellackstange. Das Papierband und die Streifchen laden sich gleichzeitig auf. Das zeigt sich darin, daß sich die Streifen beiderseits abspreizen. Nun ordnet die Ständer so an, daß dieses Papierband einen Bogen bildet, und elektrisiert es. Die Streifen spreizen sich nur an der auswärts gewölbten Seite. An der gebogenen Innenseite hängen sie wie vorher herab. Was zeigt uns das? Die Elektrizität hat sich nur auf der gewölbten Seite gesammelt. Gebt dem Papierband eine S-Form, und ihr könnt euch erneut davon überzeugen, daß die Elektrizität sich nur an den auswärts gebogenen Stellen nachweisen läßt.



Ein Blatt Zeitungspapier

Was heißt „mit dem Kopf sehen"? •
Schwere Zeitung

„Die Sache ist entschieden!" verkündete mir mein großer Bruder, während er mit der flachen Hand auf die Kacheln des geheizten Ofens schlug. „Klarer Fall. Am Abend machen wir gemeinsam Elektrizitätsexperimente."

„Experimente? Neue Versuche!" stimmte ich begeistert zu.

„Wann? Jetzt gleich? Ich möchte gleich anfangen."

„Jedes Wollen braucht Geduld. Die Versuche machen wir abends. Ich muß jetzt weg."

„Wegen der Maschine?"

„Welcher Maschine?"

„Der Elektrisiermaschine. Für die Experimente braucht man doch eine Maschine."

„Die Maschine, die wir brauchen, ist schon da. Sie liegt in meiner Aktentasche. Aber laß dir nicht einfallen, in meiner Abwesenheit darin herumzuwühlen", erriet mein Bruder meine Gedanken.

„Du findest doch nichts und richtest nur Unordnung an", fügte er hinzu, als er sich den Mantel anzog.

„Aber die Maschine ist da drin?"

„Sie ist dort, sei ohne Sorge."

Er ging aus dem Haus und ließ die Aktentasche mit der Maschine sorglos auf dem kleinen Flurtischchen zurück.

Würde Eisen ein Gefühl haben, so würde es in der Nähe eines Magneten das gleiche empfinden wie ich, allein geblieben mit des Bruders Aktentasche. Sie zog mich an, nahm all mein Denken und Fühlen gefangen. Es war ausgeschlossen, an etwas anderes zu denken, und nutzlos, den Blick auf etwas anderes zu richten...

Seltsam, daß eine Elektrisiermaschine in einer Aktentasche Platz hat. Ich habe sie mir ganz und gar nicht so schmal vorgestellt. Die Aktentasche ist nicht verschlossen, und wenn ich vorsichtig hineinschaue... Irgend etwas ist in Papier eingewickelt. Eine Schachtel? Nein, Bücher, lauter Bücher. Weiter ist nichts in der Tasche. Daß ich es nicht gleich erraten habe, mein Bruder hat nur gescherzt. Als ob man eine Elektrisiermaschine in einer Aktentasche verstauen könnte!

Mein Bruder kam mit leeren Händen zurück und erkannte sofort an meinem enttäuschten Gesichtsausdruck den Grund meiner Traurigkeit.

„Mir scheint, es gab einen Besuch in der Aktentasche", meinte er.

„Wo ist die Maschine?" fragte ich ihn.

„In der Aktentasche. Hast du sie nicht gesehen?"

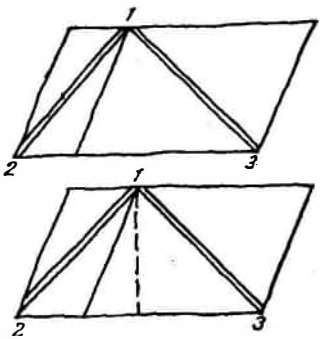
„Dort sind nur Bücher."

„Und die Maschine. Du hast schlecht nachgeschaut. Womit hast du geguckt?"

„Womit geguckt? Mit den Augen."

„Darum auch, man muß mit dem ganzen Kopf sehen. Es genügt nicht, nur hinzusehen. Man muß auch begreifen, was man sieht. Das nennt man ‚mit dem Kopf sehen'."

Abbildung 62



„Und wie sieht man mit dem Kopf, wie macht man das?"

„Wenn du willst, zeige ich dir den Unterschied zwischen dem Betrachten allein mit den Augen und dem Erfassen mit dem ganzen Kopf."

Mein Bruder zog einen Bleistift aus der Tasche und zeichnete eine Figur aufs Papier.

„Hier sind Doppellinien — Eisenbahngleise, und einfache — eine Straße. Sieh sie dir an und sage mir, welcher Eisenbahnstrang länger ist, der von *1* nach *2* oder der von *1* nach *3*?"

„Der von *1* nach *3* ist natürlich länger."

„Das sehen deine *Augen*. Aber nun betrachte die Figur mit dem ganzen Kopf."

„Ja, wie denn? Ich kann das nicht."

„Mit dem ganzen Kopf betrachten wir die Figur so. Stell dir eine Linie vor, die von *1* zur unteren Straße *2—3* führt, auf der sie im rechten Winkel steht." Mein Bruder zeichnete eine gestrichelte Linie ein. „Wie teilt meine Linie die Straße? In was für Teile?"

„In zwei Hälften."

„In zwei gleiche Teile. Das heißt also, daß alle Punkte auf der gestrichelten Linie von den Punkten *2* und *3* gleich entfernt sind. Was hast du nun zum Punkt *1* zu sagen. Ist er näher zu *2* oder zu *3*?"

„Jetzt sehe ich deutlich, daß er gleich weit von *2* und von *3* entfernt ist. Doch vorher erschien mir der rechte Schienenstrang länger als der linke."

„Vorher hast du nur mit den Augen geschaut, aber jetzt mit dem ganzen Kopf. Hast du jetzt den Unterschied begriffen?"

„Ja. Doch wo ist die Maschine?“

„Was für eine Maschine? Ach, die Elektrisiermaschine. In der Aktentasche. Sie liegt, wo sie lag. Du hast sie nicht gesehen, weil du nicht mit dem ganzen Kopf sehen konntest.“

Mein Bruder entnahm der Tasche ein Bücherpaket, öffnete es, zog ein großes Blatt Zeitungspapier hervor und reichte es mir:

„Hier ist unsere Elektrisiermaschine.“

Ich blickte verständnislos auf das Papier.

„Du denkst, das ist bloß Papier, weiter nichts?“ fuhr er fort. „Fürs Auge, ja. Doch wer seinen Kopf zu gebrauchen versteht, erkennt in dem Papier ein physikalisches Gerät.“

„Ein physikalisches Gerät? Um Versuche zu machen?“

„Ja, nimm die Zeitung in die Hand. Sehr leicht, nicht wahr? Und du glaubst gewiß, sie ohne Mühe zu jeder Zeit mit einem Finger heben zu können. Doch gleich wirst du sehen, daß diese gleiche Zeitung sich ganz schwer machen kann. Gib mir da dieses Zeichenlineal.“

„Das ist zackig und nicht mehr zu gebrauchen.“

„Um so besser, dann schadet es nichts, falls es zerbricht.“ Mein Bruder legte das Lineal auf den Tisch, so daß ein Stück über die Tischkante ragte.

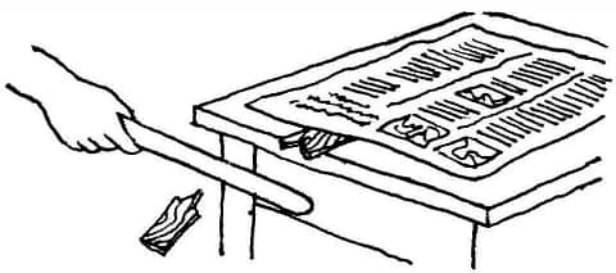
„Faß am überstehenden Ende an. Man kann es leicht hochdrücken, nicht wahr? Nun versuche es hochzudrücken, wenn ich die andere Hälfte mit dem Zeitungspapier abdecke.“

Er breitete die Zeitung auf dem Tisch aus, glättete sie sorgfältig und bedeckte damit das Lineal.

„Nimm einen Stock und schlage kurz auf den herausragenden Teil des Lineals. Schlage mit voller Wucht zu!“

Abbildung 63

„Ich schlage so zu, daß das Lineal die Zeitung



zerreißt und an die Decke fliegt!“ rief ich, weit ausholend.

„Schone deine Kräfte nicht.“

Das Ergebnis des Schlages war völlig unerwartet. Es knackte, das Lineal zerbrach, doch die Zeitung blieb auf dem Tisch liegen und verdeckte den Rest des unglückseligen Lineals.

„Die Zeitung ist doch schwerer, als du glaubtest?“ fragte mein Bruder listig.

Ich blickte verwirrt von dem angebrochenen Lineal auf die Zeitung.

„Ist das ein Experiment mit Elektrizität?“

„Ein Experiment ja, nur nicht mit Elektrizität. Dazu kommen wir noch. Ich wollte dir zeigen, daß eine Zeitung wirklich als Gerät für physikalische Versuche dienen kann.“

„Aber warum hat sie denn das Lineal nicht frei gegeben? Ich kann sie doch, bitte schön, ganz leicht vom Tisch hochnehmen.“

„Darin liegt ja gerade der Sinn des Experiments. Auf der Zeitung lastet die Luft und mit nicht geringem Gewicht: Auf jedem Quadratzentimeter lastet der Druck eines Kilogramms. Wenn man auf das herausragende Linealstück schlägt, so drückt das andere Ende von unten gegen die Zeitung. Die Zeitung muß sich heben. Geschieht das langsam, so gelangt unter die sich anhebende Zeitung Luft von außen und gleicht den Druck von oben aus. Dein Schlag war jedoch rasch, daß die Luft nicht unter die Zeitung gelangte. Die Zeitungsränder lagen noch auf dem Tisch auf, als ihre Mitte bereits hochgedrückt wurde. Du mußtest also nicht nur die Zeitung, sondern die Zeitung mitsamt der darauf lastenden Luft anheben. Oder kürzer ausgedrückt: Du mußtest mit dem Lineal ein Gewicht von etwa so viel Kilogramm, wie der angehobene Zeitungsteil Quadratzentimeter umfaßt, anheben. Wenn das eine Fläche von nur 16 cm^2 wäre, ein Quadrat von nur 4×4 cm, so würde der darauf lastende Luftdruck 16 kg entsprechen. Doch die angehobene Zeitungsfläche ist größer, d. h., es war ein stattliches Gewicht von, sagen wir, 50 kg anzuheben. Solche Last hat das Lineal nicht ausgehalten, deshalb zerbrach es. Glaubst du nun, daß man mit einer Zeitung experimentieren kann? Wenn es dunkel wird, beginnen wir mit den Elektrizitätsversuchen.“

Funken aus Fingern • Das gehorsame Stöckchen • Elektrizität in den Bergen

Mein Bruder nahm eine Kleiderbürste in die eine Hand, und mit der anderen hielt er an den geheizten Ofen ein Blatt Zeitungspapier. Mit der Bürste strich er über das Papier, wie ein Tapezierer, der an der Wand die Tapete glattstreicht, damit sie gut haftet.

„Sieh mal!“ sagte er und nahm beide Hände von der Zeitung weg.

Ich erwartete, daß das Papier zur Erde gleitet. Doch nichts dergleichen. Seltsamerweise hielt sich das Papier an den glatten Kacheln, als wäre es angeklebt.

„Wieso hält es sich?“ fragte ich. „Es ist doch nicht mit Leim bestrichen.“

„Die Zeitung wird durch die Elektrizität festgehalten! Sie ist elektrisch aufgeladen und wird vom Ofen angezogen.“

„Warum hast du mir nicht gesagt, daß die Zeitung in deiner Aktentasche elektrisiert war?“

„Vorher war sie nicht elektrisiert. Ich habe sie jetzt eben in deiner Gegenwart elektrisch aufgeladen, indem ich sie mit der Bürste gestrichen habe. Durch die Reibung wurde sie elektrisiert.“

„Das ist also schon ein richtiges Experiment mit Elektrizität?“

„Ja, wir beginnen gerade. Lösch das Licht!“

In der Dunkelheit zeichnete sich verschwommen die dunkle Gestalt des Bruders und ein grauer Fleck an der Stelle des weißen Ofens.

„Jetzt achte auf meine Hände.“

Ich ahnte mehr, als daß ich sah, was mein Bruder tat. Er löste die Zeitung vom Ofen ab, und sie mit einer Hand in der Schwebe haltend, näherte er die gespreizten Finger der anderen Hand.

Da, ich traute meinen Augen kaum, aus den Fingern sprühten Funken, lange bläulich-weiße Funken!

„Das waren elektrische Funken. Willst du es mal selbst probieren?“

Ich versteckte hastig meine Hände auf dem Rükken. Auf keinen Fall.

Mein Bruder legte die Zeitung wieder an den Ofen, strich mit der Bürste darüber und zog erneut aus seinen Fingerspitzen eine Garbe langer Funken. Ich konnte feststellen, daß er die Zeitung überhaupt nicht mit den Fingern berührte, sondern sie etwa zehn Zentimeter entfernt hielt.

Abbildung 64



„Na, probiere mal. Sei nicht feige. Es tut überhaupt nicht weh. Gib mir deine Hand."

Er faßte mich an die Hand und zog mich zum Ofen.

„Spreize die Finger!... So! Na, tut das weh?"

Ehe ich wußte, was geschah, fuhren aus meinen Fingern bläuliche Funken. In ihrem Licht sah ich, daß mein Bruder die Zeitung nur zur Hälfte vom Ofen abgelöst hatte. Der untere Teil des Blattes hing nach wie vor, als wäre er angeklebt. Gleichzeitig mit der Funkenbildung empfang ich ein leichtes Stechen, aber von Schmerz konnte nicht die Rede sein. Da gab es wahrlich keinen Grund zur Furcht.

„Noch einmal!" bat ich nunmehr.

Mein Bruder drückte die Zeitung an den Ofen und begann sie mit den Handflächen zu streichen.

„Was machst du? Hast du die Bürste vergessen?"

„Das macht nichts. Na, los!"

„Das wird nichts, du hast mit bloßen Händen, ohne Bürste gerieben."

„Das geht auch ohne Bürste, wenn die Hände trocken sind. Man muß nur reiben."

In der Tat. Auch diesmal sprangen Funken aus meinen Fingern, ebensolche wie vorher.

Nachdem ich mich an den Funken satt gesehen hatte, erklärte mein Bruder:

„Nun ist es genug. Jetzt zeige ich dir das Ausströmen der Elektrizität. Das gleiche, was Kolumbus und Magellan an den Mastspitzen ihrer Schiffe beobachteten. Gib mal eine Schere!"

Abbildung 65



Mein Bruder brachte in der Dunkelheit die Spitzen der geöffneten Schere an die Zeitung heran, die zur Hälfte vom Ofen abgelöst war. Ich erwartete Funken, doch ich sah etwas Neues. Die Scherenspitzen waren umkränzt von leuchtenden Büscheln kurzer blauroter Fäden. Gleichzeitig war ein leichtes gedehntes Sirren zu vernehmen.

„Solche Feuerbüschel, nur wesentlich größer, können die Seeleute öfter an den Enden der Masten und Stangen beobachten. Man nennt sie ‚Elmsfeuer'."

„Woher kommt das?"

„Du möchtest wissen, wer die elektrisierte Zeitung über die Masten hält? Natürlich ist da keine Zeitung, dafür sind dort tiefhängende elektrisch geladene Wolken. Sie ersetzen die Zeitung. Glaube nicht, daß ein solches elektrisches Leuchten spitzer Körper nur auf dem Meer auftritt. Auch auf dem Festland, vor allem im Gebirge, kann man es beobachten. Bereits

Julius Cäsar beschrieb, wie eines Nachts bei bedecktem Himmel die Speerspitzen seiner Krieger auf solche Weise leuchteten. Die Seeleute und Soldaten fürchten die Elmsfeuer nicht, sondern betrachten sie im Gegenteil als gutes Vorzeichen, allerdings ohne jeglichen vernünftigen Grund. Im Gebirge tritt dieses elektrische Leuchten sogar an Personen auf, an ihren Haaren, Mützen, Ohren, an allen herausragenden Teilen des Körpers. Dabei ist oftmals ein Sirren zu hören, ähnlich dem, was von unserer Schere ausging."

„Brennt das Feuer schmerzhaft?"

„Das brennt überhaupt nicht. Es ist doch kein Feuer, sondern ein Leuchten, ein kaltes Leuchten. Es ist so kalt und ungefährlich, daß sich davon nicht einmal ein Streichholz entzündet. Sieh her, statt der Schere nehme ich ein Streichholz und siehst du, der Kopf ist von elektrischem Leuchten umgeben, aber es entzündet sich nicht."

Abbildung 66



„Aber ich meine doch, daß es brennt. Die Flamme kommt direkt vom Streichholzkopf."

„Schalte das Licht ein. Betrachten wir das Streichholz im Lampenlicht."

Ich überzeugte mich davon, daß unser Streichholz nicht verkohlt war und nicht einmal der Kopf gebrannt hatte. Es war tatsächlich von kaltem Leuchten umgeben gewesen, nicht aber von Feuer.

„Lösche das Licht nicht. Das nächste Experiment machen wir bei Licht."

Mein Bruder zog einen Stuhl in die Zimmermitte und legte quer über die Lehne einen Krückstock. Nach einigem Probieren gelang es ihm, den Stock so auszubalancieren, daß er ohne herabzufallen auf der Lehne liegenblieb.

„Ich wußte nicht, daß ein Stock so liegen kann", sagte ich, „er ist doch lang!"

„Deshalb hält er sich auch, weil er lang ist. Ein kurzer würde nicht liegenbleiben, ein Bleistift zum Beispiel."

„Einen Bleistift kann man niemals so hinlegen", bestätigte ich.

„Nun zur Sache. Kannst du den Stock, ohne ihn zu berühren, veranlassen, sich zu dir hin zu drehen?"

Ich überlegte.

„Wenn man an ein Ende eine Schnur bindet", begann ich.

„Ohne jegliche Schnur, ohne ihn irgendwie zu berühren. Kannst du das?"

„Ah, ich weiß!“

Ich ging ganz dicht mit dem Gesicht an den Stock und fing an, Luft durch den Mund aufzusaugen, um ihm damit heranzuziehen. Doch der Stock bewegte sich nicht.

„Na, was ist?“

„Es klappt nicht, es ist unmöglich!“

„Unmöglich? Mal sehen.“

Abbildung 67



Und mein Bruder nahm die Zeitung vom Ofen, die während der ganzen Zeit wie angeklebt an den Kacheln hing, und führte sie langsam seitlich an den Stock heran. Bei etwa einem halben Meter Entfernung wirkte die Anziehungskraft der elektrisierten Zeitung auf den Stock, und gehorsam bewegte er sich auf sie zu. Durch Bewegen des Zeitungsblattes zog mein Bruder den Stock hinterher und veranlaßte ihn, sich auf der Stuhlkante erst nach der einen und dann nach der anderen Seite zu drehen.

„Die elektrisierte Zeitung zieht, wie du siehst, den Stock so stark an, daß er hinter dem Papier hergeht und zwar so lange, bis die Elektrizität von der Zeitung an die Luft übertragen ist.“

„Schade, daß man diese Versuche im Sommer nicht machen kann, denn da ist der Ofen kalt.“

„Der Ofen ist hierbei erforderlich, um das Papier zu trocknen. Diese Versuche gelingen nur mit völlig trockener Zeitung. Bestimmt hast du bemerkt, daß Zeitungspapier Luftfeuchtigkeit aufnimmt und deshalb immer etwas feucht ist — daher müssen wir die Zeitung trocknen. Nun mußt du aber nicht glauben, die Versuche wären im Sommer ganz gar nicht durchführbar. Das geht schon, doch sie gelingen nicht so gut wie im Winter. Im Winter ist die erwärmte Stubenluft trockener als im Sommer, das ist der Grund. Trockenheit ist für solche Versuche äußerst wichtig. Die Zeitung trocknet man im Sommer auf dem Küchenherd, nachdem er, wenn das Essenkochen beendet ist, soweit abkühlt, daß uns das Papier nicht verbrennt. Das gut getrocknete Papier bringen wir auf den trockenen Tisch und bürsten es kräftig. Es lädt sich elektrisch auf, allerdings nicht so stark wie am Kachelofen... So genug für heute, morgen experimentieren wir weiter.“

„Wieder mit Elektrizität?“

„Ja, und wieder mit unserer Elektrisiermaschine, mit der Zeitung. Inzwischen gebe ich dir eine interessante Beschreibung der Elmsfeuer im Gebirge zu

lesen, die von dem bekannten französischen Naturwissenschaftler Saussure hinterlassen wurde. 1867 befand er sich mit einigen Bergsteigern auf dem Gipfel des Sarley, über 3000 m hoch, und hier steht, was sie dort erlebten."

Mein Bruder nahm vom Bücherbord das Buch von Flammarion „Die Atmosphäre", blätterte darin und gab mir folgendes zu lesen:

„Die Bergsteiger lehnten gerade ihre eisenbeschlagenen Bergstöcke an den Fels, um sich zum Essen zu setzen, als Saussure an den Schultern und im Rücken einen Schmerz spürte, wie Stiche von langsam in den Körper dringenden Nadeln. ‚In der Annahme', sagt Saussure, ‚daß in meinen Umhang Stecknadeln geraten sind, werfe ich ihn ab, ohne jedoch Erleichterung zu verspüren. Der Schmerz verstärkt sich und erfaßte den ganzen Rücken von einer Schulter zur anderen. Er ist mit Jucken und schmerzhaftem Stechen verbunden, so, als liefe eine Wespe über die Haut und würde ständig stechen. Nachdem ich hastig den zweiten Mantel abgeworfen hatte, fand ich nichts, was mir eine solche Verletzung hätte beibringen können. Der Schmerz hielt an und glich einer Verbrennung. Ich hatte das Gefühl, als brenne meine Wolljacke. Ich war schon drauf und dran mich auszuziehen, als ein Geräusch meine Aufmerksamkeit erweckte, einem Sirren ähnlich. Das Geräusch kam von unseren Bergstöcken, die an dem Fels standen. Es klang wie das Singen erhitzten Wassers, das gerade zum Kochen übergeht. Das ganze dauerte etwa fünf Minuten.

Da begriff ich, daß die Schmerzempfindungen durch elektrische Entladungen verursacht wurden, die vom Gebirge ausgingen. Allerdings sah ich beim hellen Tageslicht keinerlei Leuchten an den Stöcken. Die Stöcke gaben einen gleichartigen grellen Ton von sich, ob wir sie senkrecht, mit der Eisenspitze nach oben oder unten oder auch horizontal hielten. Aus dem Gestein kam keinerlei Geräusch.

Einige Minuten später fühlte ich, daß mein Kopf- und Barthaar sich sträubte. Mir war, als führe jemand mit einer trockenen Klinge über meine Bartstoppeln. Mein junger Begleiter rief, die Enden seines Schnurrbartes würden sich aufstellen und von den Ohrenspitzen starke Ströme ausgehen. Ich hob die Arme und bemerkte, wie der Strom aus den Fingern floß. Mit einem Wort, die Elektrizität entwich aus den Stök-

ken, der Kleidung, den Ohren, Haaren — aus allen herausragenden Körperteilen.

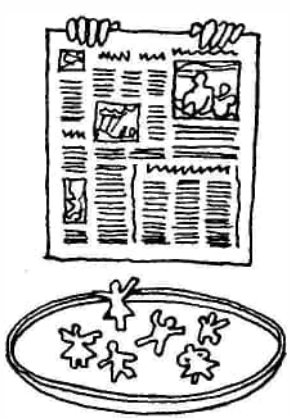
Hastig verließen wir den Gipfel. Wir stiegen etwa hundert Meter abwärts. Je weiter wir hinabstiegen, desto schwächer wurden die von unseren Stöcken ausgehenden Geräusche. Schließlich wurden die Töne so leise, daß man das Ohr ganz nahe an den Stock halten mußte, um sie zu hören.“

So schließt der Bericht Saussure. In dem gleichen Buch las ich auch die Beschreibung anderer Fälle von Elmsfeuererscheinungen.

„Das Ausströmen von elektrischer Ladung aus aufragenden Felsen ist oft zu beobachten, wenn der Himmel mit tiefhängenden Wolken bedeckt ist, die in geringer Entfernung über den Gipfeln dahinziehen.

Am 10. Juli 1863 stiegen Watson und einige andere Touristen zum Jungfrauenpaß (in den Schweizer Alpen) auf. Es war ein herrlicher Morgen. Als die Gruppe sich jedoch dem Paß näherte, geriet sie in heftigen Wind und Hagel. Ein schrecklicher Donnerschlag ertönte, und kurz darauf hörte Watson einen pfeifenden Ton, der vom Bergstock ausging. Der Ton war dem Geräusch einer kochendheißen Wärmflasche ähnlich. Die Wanderer blieben stehen und bemerkten, daß ihre Stäbe und Beile den gleichen Ton von sich gaben. Sie hörten auch dann nicht auf, Geräusche von sich zu geben, als sie mit einem Ende in die Erde gestoßen wurden. Einer der Begleiter, der den Hut abnahm, schrie auf, sein Kopf brenne. In der Tat, seine Haare standen wie elektrisiert zu Berge. Alle hatten Juckreizempfindungen im Gesicht und an anderen Körperteilen. Watsons Haare standen hoch zu Berge. An den Fingerspitzen — wenn man sie in der Luft bewegte — war ein elektrisches Pfeifen zu hören.“

Abbildung 68



Tanz der Papierpüppchen • Die Schlangen • Die Haare sträuben sich

Mein Bruder hielt sein Wort. Am nächsten Tag, als es dunkelte, begann er neue Versuche. Sofort „klebte“ er die Zeitung an den Ofen. Dann bat er mich, Schreibpapier zu holen, was fester ist als Zeitungspapier, und schnitt daraus lustige Figuren: Tänzer in verschiedenen Positionen.

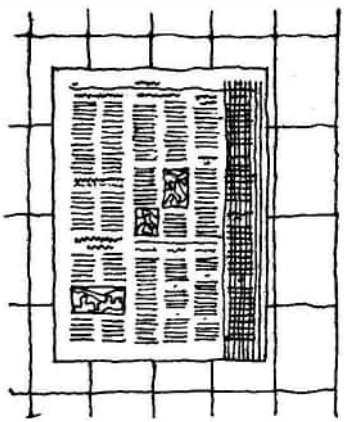
„Diese Papierpüppchen werden gleich für uns tanzen. Bringe ein paar Stecknadeln her.“

Schnell bekam jeder Tänzer durch das Bein eine Stecknadel gesteckt.

„Das machen wir, damit unsere Tänzer durch die Zeitung nicht weggerissen werden", erklärte mein Bruder, während er die Papierfiguren auf ein Tablett legte. „Die Vorstellung beginnt!"

Er löste die Zeitung vom Ofen und näherte sie, sie waagerecht mit den Händen vor sich haltend, von oben her dem Tablett mit den Figuren.

Abbildung 69

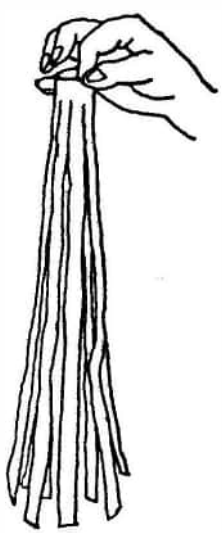


„Aufstehen!" befahl mein Bruder.

Und stellt euch vor: die Figuren erhoben sich gehorsam. Sie erhoben sich und streckten sich nach oben, bis er die Zeitung wieder entfernte — da legten sie sich wieder hin. Aber er gab ihnen keine lange Ruhepause. Durch Annähern und Entfernen der Zeitung veranlaßte er die Püppchen, sich mal zu erheben, mal wieder hinzulegen.

„Hätte ich sie nicht mit Nadeln beschwert, würden sie zur Zeitung fliegen und fest daran haften. Sieh her", mein Bruder zog die Nadeln aus einigen Figuren, „sie wurden von der Zeitung angezogen und fielen nicht mehr davon ab Das ist elektrische *Anziehungskraft.* Doch nun machen wir einen Versuch mit *Abstoßen.* Wo hast du die Schere hingelegt?"

Abbildung 70



Ich gab meinem Bruder die Schere, und er „klebte" die Zeitung an den Ofen und schnitt am Rande von unten nach oben einen langen schmalen Streifen ab. Oben trennte er den Streifen nicht völlig ab und schnitt daneben einen zweiten Streifen, dann einen dritten usw. Den sechsten oder siebenten Streifen schnitt er völlig ab. Es entstand ein Papierbart, der jedoch entgegen meinen Erwartungen nicht von den Kacheln herabglitt, sondern fest haftenblieb. Den oberen Teil mit der Hand festhaltend, strich mein Bruder noch einige Male mit der Bürste über die Streifen. Dann nahm er den „Bart" vom Ofen ab und hielt ihn oben mit der ausgestreckten Hand.

Statt frei herabzuhängen, wölbten sich die Streifen glockenförmig, sich merklich gegenseitig abstoßend.

„Sie stoßen sich deshalb gegenseitig ab", erklärte mein Bruder, „weil sie alle gleichartig elektrisiert sind. Von nicht elektrisierten Gegenständen werden sie angezogen. Steckt man die Hand von unten in die Glocke, werden die Streifen von der Hand angezogen."

Ich hockte mich hin und führte die Hand in den

Hohlraum, den die Streifen bildeten. Das heißt, *ich wollte* die Hand hineinbringen, doch es gelang nicht, denn die Streifen legten sich wie Schlangen um meine Hand.

„Hast du keine Angst vor den Schlangen?“ fragte mein Bruder.

„Nein, sie sind ja aus Papier.“

„Aber ich fürchte mich. Sieh her, wie ich mich fürchte.“

Der Bruder hielt das Zeitungsblatt über seinen Kopf, und ich konnte sehen, wie seine langen Haare sich sträubten.

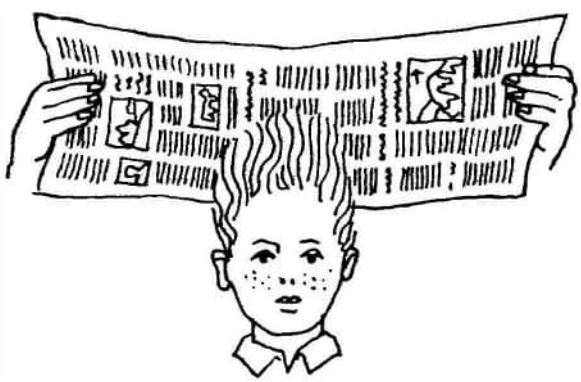
„Ist das ein Versuch? Sag mal, ist das auch ein Versuch?“

„Das ist genau der gleiche Versuch, wie wir ihn eben gemacht haben, nur in einer anderen Weise. Die Zeitung elektrisiert meine Haare, und diese werden von ihr angezogen und stoßen sich zugleich gegenseitig ab, wie die Streifen unseres Papierbartes. Nimm dir einen Spiegel, und ich zeige dir, wie deine Haare sich in der gleichen Weise sträuben.“

„Schmerzt es nicht?“

Abbildung 71

„Überhaupt nicht.“



Ich spürte wirklich nicht den geringsten Schmerz, nicht einmal ein Kitzeln und sah doch im Spiegel, wie meine Haare zum Zeitungsblatt hin aufrecht standen.

Wir wiederholten außerdem die Experimente vom Vorabend. Schließlich beendete mein Bruder die Sitzung, wie er unsere Beschäftigung nannte, mit der Zusicherung, am nächsten Tag weitere Versuche durchzuführen.

Ein kleiner Blitz • Experiment mit dem Wasserstrahl • Pusten der Riesen

Am folgenden Abend begann mein Bruder unsere Versuche mit recht seltsamen Vorbereitungen. Er nahm drei Gläser, erwärmte sie am Ofen, stellte sie danach auf den Tisch und deckte sie mit dem Tablett ab, welches er ebenfalls zuvor am Ofen erwärmt hatte.

„Was wird das?" fragte ich neugierig. „Man stellt doch die Gläser auf das Tablett und nicht das Tablett auf die Gläser."

„Warte ab, keine Hast. Wir experimentieren mit einem kleinen Blitz."

Mein Bruder setzte die „Elektrisiermaschine" in Gang, d. h., er rieb die Zeitung am Ofen, legte sie doppelt zusammen und rieb sie wieder. Nachdem er sie von den Kacheln abgelöst hatte, legte er sie rasch auf das Tablett:

„Faß mal das Tablett an. Ist es nicht zu kalt?"

Nichtsahnend faßte ich arglos mit der Hand zu, und hastig zog ich sie zurück: es kitzelte und stach schmerzhaft in den Fingern. Mein Bruder lachte.

„Na, wie ist es. Der Blitz hat dich getroffen. Hast du das Knistern gehört. Es war ein kleiner Donner."

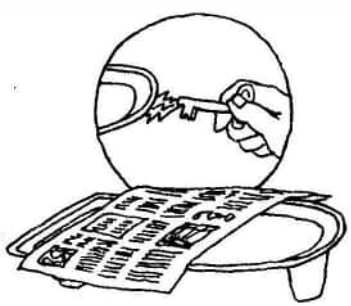
„Ich habe einen heftigen Stich empfunden, aber einen Blitz habe ich nicht gesehen."

„Du wirst ihn gleich sehen, wenn wir das Experiment im Dunkeln wiederholen."

„Ich werde aber nicht wieder das Tablett berühren!" verkündete ich entschlossen.

„Das ist auch nicht notwendig. Du kannst den Funken auch mit einem Zimmerschlüssel oder einem Teelöffel hervorrufen. Da spürst du gar nichts, und die Funken werden genauso lang. Die ersten Funken werde ich übrigens selbst überschlagen lassen, bis sich deine Augen an die Dunkelheit gewöhnt haben."

Abbildung 72



Mein Bruder löschte das Licht.

„Ruhe jetzt. Paß gut auf!" war im dunklen Zimmer zu vernehmen.

Ein Knistern — und gleichzeitig sprang ein heller weißlich-blauer Funke von der Länge eines halben Streichholzes zwischen Schlüssel und Tablettrand.

„Hast du den Blitz gesehen, den Donner gehört?" fragte mein Bruder.

„Doch die traten gleichzeitig auf. Richtiger Donner ist immer später als der Blitz."

„Das stimmt. Wir hören den Donner stets später, als wir den Blitz sehen. Und dennoch treten sie gleichzeitig auf, wie Funke und Knistern in unserem Versuch."

„Und warum ist der Donner später zu hören?"

„Das ist so, der Blitz ist Licht, und die Lichtstrahlen sind so schnell, daß sie Entfernungen auf der Erde nahezu im gleichen Augenblick zurücklegen. Der Donner, das ist eine Explosion. Der Knall dehnt sich in der Luft nicht so schnell aus. Er bleibt beträchtlich zurück hinter dem Lichtstrahl und erreicht uns später. Deshalb sehen wir den Blitz viel früher, als wir den ihn begleitenden Donner hören."

Mein Bruder übergab mir den Schlüssel, nahm die Zeitung weg, meine Augen hatten sich schon an die Dunkelheit gewöhnt, und forderte mich auf, einen Blitz aus dem Tablett herauszuholen.

„Kommt denn ohne Zeitung ein Funke?"

„Versuch es."

Ich hatte den Rand des Tabletts noch nicht mit dem Schlüssel berührt, als ich einen hellen langen Funken sah.

Wieder legte mein Bruder die Zeitung auf das Tablett, und ich ließ wieder einen Funken überspringen, allerdings schon etwas schwächer. Zehnmal bedeckte er das Tablett mit der Zeitung und entfernte sie wieder (ohne sie am Ofen zu streichen), und jedesmal lockte ich einen Funken heraus, von Mal zu Mal schwächer.

Abbildung 73



„Die Funken würden weiter entstehen, wenn ich die Zeitung nicht mit der Hand, sondern einer Seidenschnur oder einem seidenen Band bewegen würde. Wenn du Physik in der Schule bekommst, wirst

du verstehen, was eigentlich hier vor sich gegangen ist. Zunächst mußt du dich damit begnügen, was du mit den Augen erfassen konntest, aber nicht mit dem Kopf. Wir machen noch ein Experiment — mit dem Wasserstrahl. Wir führen es in der Küche am Wasserhahn durch. Die Zeitung kann inzwischen am Ofen bleiben."

Wir ließen einen ganz dünnen Wasserstrahl laufen, der plätschernd auf dem Beckenboden aufschlug.

„Jetzt bringe ich den Strahl, ohne ihn zu berühren, dazu, daß er anders fällt. Wohin möchtest du, daß er abweicht, nach rechts, nach links, nach vorn?"

„Nach links", sagte ich aufs Geratewohl.

„Gut, faß den Wasserhahn nicht an, ich hole die Zeitung", sagte mein Bruder.

Er kam mit der Zeitung, bestrebt, sie mit ausgebreiteten Händen soweit als möglich vom Körper weg zu halten, damit sie möglichst wenig elektrische Ladung verliert. Er brachte die Zeitung von links an den Strahl heran, und ich sah deutlich, wie der Wasserfaden sich nach links zog. Auf die andere Seite wechselnd, veranlaßte er den Strahl, nach rechts abzuweichen. Schließlich zog er den Strahl so weit nach vorn, daß das Wasser über den Rand des Bekkens spritzte.

„Siehst du, wie stark hier die Anziehungskraft der elektrischen Ladung wirkt. Diesen Versuch kann man übrigens sehr leicht ohne Ofen und Herdplatte machen, wenn man statt der Zeitung einen gewöhnlichen Kamm aus Kautschuk verwendet." Mein Bruder holte aus der Seitentasche einen Kamm und fuhr sich damit durch sein dichtes Haar.

„Auf diese Weise elektrisiere ich ihn."

„Deine Haare sind doch nicht elektrisch."

„Natürlich nicht. Es sind gewöhnliche Haare, wie deine oder jedermanns. Doch wenn man Kautschuk an den Haaren reibt, wird er elektrisiert, wie die Zeitung durch die Borsten der Kleiderbürste. Sieh her!"

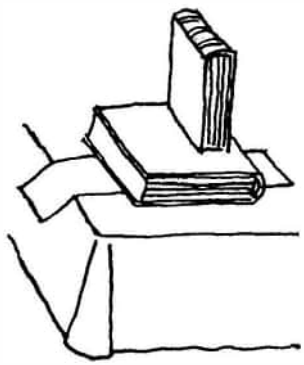
Der an den Strahl herangeführte Kamm lenkte das Wasser sichtbar seitwärts.

„Für die übrigen Experimente ist der Kamm nicht zu gebrauchen. Er gibt zu wenig Elektrizität. Bedeutend weniger als jene ‚Elektrisiermaschine', die man, wie du dich überzeugen konntest, leicht aus einem Blatt Zeitungspapier herstellen kann. Mit der Zeitung möchte ich noch ein letztes Experiment anstellen.

Diesmal kein elektrisches, sondern eins mit Luftdruck, so ähnlich wie mit dem unglückseligen Lineal."

Wir kehrten ins Zimmer zurück. Mein Bruder schnitt und klebte aus dem Zeitungspapier eine lange Papiertüte zurecht.

Abbildung 74



„Bis die Tüte trocknet, bringe mal ein paar dicke, schwere Bücher her."

Ich suchte vom Bücherbord drei gewichtige Bände eines medizinischen Atlas und legte sie auf den Tisch.

„Kannst du mit dem Mund die Tüte aufblasen?" fragte mein Bruder.

„Na klar", antwortete ich.

„Nichts einfacher als das, nicht wahr? Wenn wir nun aber den Beutel mit zwei solchen Büchern belasten?"

„Oh, da kannst du dich noch so bemühen, da bläst du ihn nicht auf!"

Ohne etwas zu sagen, legte mein Bruder den Papierbeutel an die Tischkante, packte ein Buch darauf, und darauf stellte er hochkant ein zweites.

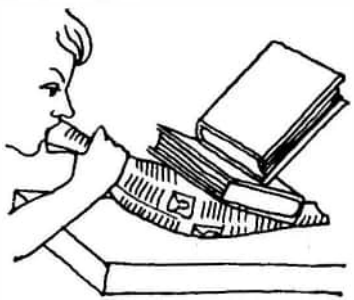
„Nun achte auf mich, ich werde pusten."

„Willst du die Bücher etwa wegblasen?" fragte ich lachend.

„Eben!"

Mein Bruder blies in die Tüte, und was glaubt ihr? Das untere Buch hob sich einseitig an unter dem Druck des sich aufblähenden Beutels, und das obere stürzte um. Und das, obgleich sie an die fünf Kilogramm wogen!

Abbildung 75



Ohne mich zur Besinnung kommen zu lassen, bereitete mein Bruder die Wiederholung des Versuches vor. Diesmal wurde die Tüte mit drei Bänden bepackt. Er blies — und was für eine Riesenpuste! — alle drei Bände fielen um.

Am erstaunlichsten war, daß an diesem ungewöhnlichen Experiment überhaupt nichts Geheimnisvolles war. Als ich mich selbst daran traute, gelang es mir ebenso leicht wie meinem Bruder, die Bücher umzustürzen. Man braucht dazu keine Elefantenlungen, keine Kraftsportmuskeln. Alles geht von selbst, nahezu ohne Anstrengung.

Später erklärte mir mein Bruder, wie sich das verhält. Wenn wir in die Papiertüte pusten, pressen wir Luft mit einem höheren Druck hinein als die uns umgebende. Andernfalls würde die Tüte sich nicht aufblähen. Der äußere Luftdruck entspricht

etwa 1000 g pro Quadratzentimeter. Überschlägt man, wieviel Quadratzentimeter unter den Büchern verdeckt sind, kommt man leicht zu dem Ergebnis, daß selbst, wenn der Überdruck nur ein Zehntel, d. h. ein Hundertstel Gramm pro Quadratzentimeter beträgt, der gesamte Luftdruck von innen her auf den belasteten Teil des Beutels beinahe 10 Kilogramm erreichen kann. Diese Kraft reicht natürlich völlig aus, um die Bücher herabzustürzen.

Hiermit beenden wir unsere physikalischen Übungen mit dem Zeitungspapier.



Weitere fünfundsiebzig physikalische Aufgaben und Experimente

Wie kann man mit ungenauen Waagen genau wiegen?

Was braucht man nötiger: exakte Waagen oder exakte Gewichte? Viele glauben, die Waage sei wichtiger, aber in Wirklichkeit sind richtige Gewichte nötiger. Ohne richtige Gewichte kann man niemals genau abwiegen. Wenn die Gewichte einwandfrei sind, kann man auch mit Waagen, die nicht richtig funktionieren, völlig zufriedenstellend abwiegen.

Habt ihr zum Beispiel eine Waage mit Wiegebalken und Wiegeschalen, und ihr zweifelt daran, daß sie richtig wiegt, so geht beim Abwiegen folgendermaßen vor: Legt den Gegenstand, den ihr abwiegen wollt, nicht sofort auf die Schale, sondern legt zunächst eine Last drauf, die schwerer ist als euer Gegenstand. Auf die andere Schale legt ihr so viele Gewichte, wie für das Gleichgewicht nötig sind.

Wenn das Gleichgewicht hergestellt ist, legt ihr euren Gegenstand in die Schale zu den Gewichten. Natürlich wird damit die Schale überlastet, und, um das Gleichgewicht wiederherzustellen, müßt ihr nun einige Gewichte wegnehmen. Diese abgenommenen Gewichte zeigen euch dann auch das richtige Gewicht eures Gegenstandes an. Es ist völlig klar wieso, denn euer Gegenstand lastet jetzt mit der gleichen Kraft auf die Waagschale wie vordem die Gewichte. Das heißt, ihr Gewicht stimmt genau überein.

Diese ausgezeichnete Methode auf nicht geeichten Waagen exakt zu wiegen, hat der berühmte russische Chemiker D. I. Mendelejew erdacht

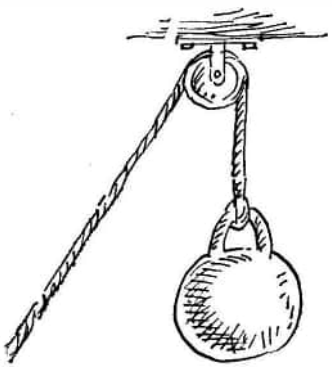
Auf der Wiegeplatte

Eine auf der Wiegeplatte einer Dezimalwaage stehende Person federt leicht. Wohin bewegt sich in diesem Augenblick die Wiegeplatte, aufwärts oder abwärts?

Die Wiegeplatte schwingt aufwärts. Warum? Deshalb, weil die Muskeln, die unseren Körper beim Federn herabziehen, die Beine nach oben ziehen. Dadurch verringert sich der Druck des Körpers auf die Platte, und sie schwingt aufwärts.

Die Last am Flaschenzug

Abbildung 76



Nehmen wir an, der Mensch kann ein Gewicht von 100 kg (Doppelzentner) vom Boden anheben. Um eine noch größere Last anzuheben, führt er ein an die Last gebundenes Seil über die Rolle eines Flaschenzuges, der fest in der Decke verankert ist (Abb. 76). Welche Last vermag er mit Hilfe dieser Vorrichtung anzuheben?

Mit Hilfe eines feststehenden Flaschenzuges kann man nicht mehr als direkt mit den Armen hochheben, eher weniger. Ziehe ich an dem Seil, das über die fest verankerte Rolle läuft, so kann ich nur ein Gewicht anheben, das geringer als mein eigenes Gewicht ist. Wiege ich weniger als 100 kg, so bin ich nicht imstande, ein solches Gewicht mit Hilfe eines gewöhnlichen Flaschenzuges anzuheben.

Zwei Eggen

Oft werden *Gewicht* und *Druck* gleichgesetzt. Dabei ist das absolut nicht ein und dasselbe. Ein Gegenstand kann ein großes Gewicht haben und dennoch auf seine Unterlage einen geringen Druck ausüben. Umgekehrt kann ein Gegenstand geringen Gewichts großen Druck auf die Auflagefläche ausüben.

An folgendem Beispiel könnt ihr euch den Unterschied zwischen Gewicht und Druck klarmachen, und gleichzeitig erkennt ihr, wie man den Druck ermitteln kann, den ein Gegenstand auf seine Unterlage ausübt.

Auf einem Feld arbeiten zwei Eggen gleicher Konstruktion, die eine mit 20 Fingern, die andere mit 60. Die erste wiegt mit Belastung 60 Kilogramm, die zweite 120.

Welche Egge arbeitet tiefer?

Es ist leicht zu bestimmen, daß die Finger der Egge, auf denen eine größere Last liegt, stärker in den Boden eindringen. Im ersten Falle ist die Gesamtlast von 60 Kilogramm auf 20 Finger verteilt, also kommt auf jeden ein Gewicht von 3 kg. Bei der zweiten Egge kommen auf jeden Finger $\frac{120}{60}$, also 2 kg. Das bedeutet, obgleich die zweite Egge ein größeres Gesamtgewicht hat, dringen ihre Finger weniger in das Erdreich ein. Der Druck auf jeden Finger ist bei der ersten Egge größer als bei der zweiten.

Sauerkohl

Betrachten wir noch eine einfache Berechnung des Druckes. Zwei Fässer mit Sauerkohl sind durch mit Steinen beschwerte Holzdeckel abgedeckt. Auf einem Faß liegt ein Deckel mit 24 cm Durchmesser und 10 kg Last darauf. Das zweite Faß hat einen Deckel von 32 cm Durchmesser und ist mit 16 kg belastet.

In welchem Faß unterliegt der Sauerkohl einem größeren Druck?

Offensichtlich ist der Druck bei dem Faß größer, wo auf jedem Quadratzentimeter Deckel ein größeres Gewicht entfällt. Im ersten Fall verteilt sich das Gewicht von 10 kg auf eine Fläche[1] von $3{,}14 \cdot 12 \cdot 12 = 452$ cm², und damit kommen auf 1 cm² $\frac{10\,000}{452}$ oder etwa 22 Gramm. Im zweiten Faß beträgt der Druck je 1 cm² $\frac{16\,000}{804}$ oder weniger als 20 Gramm. Demzufolge unterliegt der Sauerkohl in dem ersten Faß einem höheren Druck als in der zweiten.

Ahle und Meisel

Warum dringt die Ahle tiefer ein als der Meisel, wenn auf beide Werkzeuge der gleiche Druck ausgeübt wird?

Die Ursache ist, daß die Kraft bei der Ahle sich auf die kleine Fläche ihrer Spitze konzentriert. Beim Druck auf den Meisel verteilt sich die Kraft auf einer viel größeren Oberfläche. Nehmen wir an, die Ahle berührt das Material auf einer Fläche von 1 mm², dagegen der Meisel auf einer Fläche von 1 cm². Ist der Druck auf jedes Werkzeug gleich einem Kilogramm, so wird das Material vom Meisel mit 1 kg pro 1 cm² belastet, von der Ahle mit $1 : 0{,}001 = 100$, also 100 kg pro 1 cm² (denn 1 mm² = 0,01 cm²). Der Druck an der Spitze der Ahle ist 100mal so stark wie der Druck der Meiselschneide. Da ist wohl klar, warum die Ahle tiefer eindringt als der Meisel.

Ihr begreift nun, daß ihr einen sehr starken Druck ausübt, der nicht viel geringer als der Dampfdruck im Dampfkessel ist, wenn ihr beim Nähen mit dem Finger auf die Nähnadel drückt. Darin besteht auch das Geheimnis der Schneidwirkung des Rasiermessers. Ein

---

[1] Die Kreisfläche ist gleich 3,14 mal die Länge des Radius des Kreises und noch mal die Länge des Radius.



leichter Druck der Hand ergibt auf der dünnen Schnittfläche eine Belastung von Hunderten Kilogramm pro 1 cm^2, und das Haar wird abgeschnitten.

Pferd und Traktor

Ein schwerer Raupentraktor hält sich oft sehr gut auf solch weichem Boden, in dem die Füße von Mensch und Pferd einsinken. Das erscheint vielen unbegreiflich, denn der Traktor ist viel schwerer als ein Pferd und weit schwerer als ein Mensch. Warum nur sinken die Pferdehufe im weichen lockeren Boden ein, der Traktor aber nicht?

Um das zu verstehen, muß man sich erneut des Unterschiedes zwischen *Gewicht* und *Druck* erinnern.

Nicht der Gegenstand, der schwerer ist, muß tiefer einsinken, sondern jener, bei dem die Belastung auf jeden Quadratzentimeter der Unterlage höher ist. Das gewaltige Gewicht eines Raupenschleppers verteilt sich auf die große Oberfläche seiner Ketten. Deshalb kommen auf jeden Quadratzentimeter der Auflagefläche des Traktors nur an die 100 Gramm. Doch das Gewicht des Pferdes lastet auf einer kleinen Fläche unter seinen Hufen, und daher kommen auf 1 cm^2 über 1000 Gramm — 10mal soviel wie beim Traktor. Kein Wunder, daß die Pferdehufe sich in den Boden hineindrücken und tiefer einsinken als der schwere Raupenschlepper. Manche von euch haben vielleicht schon gesehen, daß man den Pferden bei Ritten über weiches, morastiges Gelände an die Hufe große „Pantoffeln" bindet, womit die Auflagefläche der Hufe vergrößert wird und das Pferd viel weniger in den Boden einsinkt.

Kriechend übers Eis

Ist das Eis auf den Flüssen und Seen noch nicht fest genug, bewegen sich erfahrene Leute darauf nicht gehend, sondern kriechend fort. Warum machen sie das?

Legt sich der Mensch hin, verändert sich sein Gewicht natürlich nicht, doch die Auflagefläche vergrößert sich, und die Belastung pro Quadratzentimeter wird geringer. Mit anderen Worten, der Druck auf die Unterlage wird kleiner.

Nun ist es klar, warum es ungefährlicher ist, sich auf dünnem Eis kriechend fortzubewegen — damit verringert sich der auf das Eis ausgeübte Druck. Man verwendet auch ein breites Brett, auf das man sich legt, um auf dünnem Eis vorwärts zu kommen.

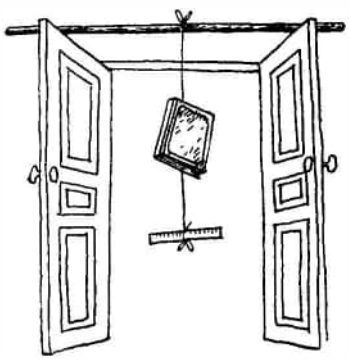
Welche Last vermag denn das Eis zu tragen, ohne zu brechen? Die Größe der Last hängt natürlich von der Dicke der Eisschicht ab. 4 cm starkes Eis trägt das Gewicht eines aufrecht gehenden Menschen.

Interessant zu wissen ist es, wie dick die Eisschicht sein muß, um eine Eisbahn auf dem See oder dem Fluß anzulegen. Dazu genügt eine Eisstärke von 10—12 cm.

An welcher Stelle reißt der Faden?

Baut euch eine Vorrichtung wie ihr sie auf Abb. 77 seht. Legt auf die geöffneten Türflügel einen Stock. Daran befestigt eine Schnur mit einem in der Mitte festgebundenen schweren Buch. Wenn man nun an das unten festgebundene Lineal zieht, wo zerreißt dann die Schnur? Oberhalb oder unterhalb des Buches?

Abbildung 77



Die Schnur kann sowohl oberhalb als auch unterhalb des Buches zerreißen, in Abhängigkeit davon, wie man zieht. Ihr könnt sowohl das eine wie auch das andere Ergebnis erreichen. Zieht man vorsichtig, reißt der *obere* Teil der Schnur. Zieht man jedoch heftig, zerreißt der *untere* Teil.

Wie kommt das? Bei vorsichtigem Ziehen reißt die Schnur oberhalb des Buches, weil neben der Armkraft noch das Gewicht des Buches auf die Schnur wirkt, während auf den unteren Teil nur die Armkraft einwirkt. Anders sieht die Sache bei einem schnellen Ruck aus. In dem kurzen Augenblick des Reißens wird dem Buch nicht genug Bewegung übertragen. Deshalb wird der obere Teil der Schnur nicht gestreckt, und die ganze Kraft wirkt auf den unteren Teil, wo die Schnur reißt, selbst wenn sie kräftiger ist als im oberen Abschnitt.

Der eingerissene Streifen

Ein Papierstreifen von der Länge der Handfläche und fingerbreit kann uns als Material für eine lustige Aufgabe dienen. Schneidet oder reißt den Strei-

fen an zwei Stellen ein (Abb. 78) und fragt einen Freund, was geschieht, wenn man an beiden Enden in entgegengesetzter Richtung zieht.

Abbildung 78



„Er zerreißt an den eingerissenen Stellen", wird er antworten.

„In wieviel Teile?" fragt ihr.

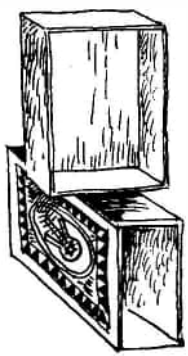
Meistens wird darauf geantwortet, daß er natürlich in drei Teile zerreißt. Bei so einer Antwort schlagt ihr dem Freunde vor, das ganze praktisch zu prüfen.

Erstaunt wird er sich von seiner Fehleinschätzung überzeugen. Der Streifen zerreißt nur in zwei Teile.

Man kann den Versuch beliebige Male wiederholen, kann Streifen verschiedenster Breite, Einschnitte unterschiedlicher Tiefe vornehmen. Nie gelingt es, mehr als zwei Teile zu erhalten. Der Streifen reißt, wo er am schwächsten ist, und bestätigt damit das russische Sprichwort: „Wo eine dünne Stelle ist, dort reißt es auch." Die Ursache ist, daß von 2 Einriß- oder Einschnittstellen, wie sehr man sich auch anstrengen mag, sie gleich zu machen, eine unvermeidlich tiefer als die andere ist — vielleicht sogar für das Auge nicht sichtbar und dennoch tiefer. Diese Stelle des Streifens beginnt als erste zu zerreißen, weil sie die schwächste ist. Und ist sie erst einmal angerissen, reißt sie auch zu Ende, denn sie wird immer schwächer.

Sicher seid ihr überrascht zu erfahren, daß ihr mit diesem unbedeutenden Versuch in eine ernsthafte und für die Technik wichtige Wissenschaft geraten seid, die sich mit der Widerstandsfähigkeit der Materialien (Materialfestigkeit) beschäftigt.

Abbildung 79



Die feste Streichholzschachtel

Was geschieht mit einer leeren Streichholzschachtel, wenn man mit der Faust heftig daraufschlägt?

Ich bin überzeugt, daß neun von 10 Lesern sagen, die Schachtel wird von dem Schlag zertrümmert. Der zehnte, der selbst dieses Experiment angestellt hat oder davon hörte, wird anderer Meinung sein. Die Schachtel bleibt unversehrt.

Den Versuch muß man folgendermaßen durchführen. Wir setzen die beiden Teile einer Schachtel aufeinander, wie in Abb. 79 dargestellt. Auf diese

Konstruktion schlagen wir mit heftigem kurzem Faustschlag. Was dabei vor sich geht, wird euch überraschen. Beide Teile fliegen zur Seite, doch wenn ihr sie aufhebt, stellt ihr fest, daß jeder Teil heil ist. Die Schachtel federt sehr stark. Das rettet sie. Sie biegt sich, aber zerbricht nicht.

Heranpusten

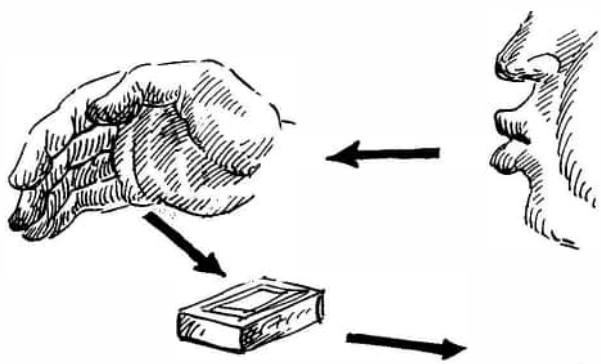
Legt eine leere Streichholzschachtel auf den Tisch und bittet jemand, sie durch Pusten von sich weg zu befördern. Das bereitet natürlich keine Anstrengung. Nun bittet, das ganze umzukehren, also durch Pusten die Schachtel zum Pustenden *hinzubefördern.* Dabei ist es nicht erlaubt, den Kopf soweit vorzubeugen, daß man gewissermaßen von hinten gegen die Schachtel bläst.

Nicht viele werden erraten, wie man das macht. Einige werden die Schachtel dadurch in Bewegung zu versetzen suchen, daß sie die Luft *einsaugen.* Natürlich ohne Erfolg. Dennoch ist es ein recht einfaches Geheimnis.

Wie also?

Bittet jemanden, seine Handfläche aufrecht hinter die Schachtel zu stellen. Blast gegen die Hand-

Abbildung 80



fläche. Der Luftstrahl, der von der Hand zurückgeworfen wird, drückt gegen die Schachtel und treibt sie auf euch zu (Abb. 80).

Der Versuch gelingt hundertprozentig. Man muß ihn nur auf einer glatten Tischplatte (sie muß nicht poliert sein) durchführen, natürlich ohne Tischdecke.

Pendeluhren

Die Wanduhr mit Pendel und einem Aufzugsgewicht geht nach. Was ist am Pendel zu regulieren, um ihren Gang zu korrigieren? Und was muß man tun, wenn die Wanduhr vorgeht?

Je kürzer das Pendel ist, um so schneller schlägt es hin und her. Davon kann man sich leicht überzeugen durch einen einfachen Versuch mit einem Gewicht an einer Schnur. Daraus leitet sich auch die Lösung unserer Aufgabe ab. *Geht* die Wanduhr *nach*, dreht man die Schraube am Pendelstab aufwärts und *verkürzt* ihn damit. Das Pendel schlägt dann etwas schneller. *Geht* die Uhr jedoch *vor*, ist der Pendelstab zu *verlängern.*

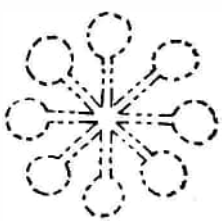
In welcher Lage bleibt der Stab stehen?

Abbildung 81



An den Enden eines Stabes sind Kugeln gleichen Gewichts befestigt (Abb. 81). Genau in der Mitte bohren wir ein Loch, durch das ein Stift gesteckt wird. Wenn man den Stab um den Stift in Drehung versetzt, dreht er sich mehrere Male herum und bleibt stehen.

Könnt ihr im voraus bestimmen, in welcher Stellung der Stab stehenbleibt?



Jene, die glauben, der Stab bleibt unbedingt in horizontaler Lage stehen, irren sich. Er kann in jeder Lage Gleichgewicht halten (s. Abb. 81) — horizontal, vertikal und schräg, weil er im Zentrum gelagert ist. Jeder Körper, der im Schwerpunkt gelagert oder aufgehängt ist, hält in jeder beliebigen Lage Gleichgewicht.

Deshalb ist es ausgeschlossen, mit Sicherheit vorherzusagen, wo der Stab sich zu drehen aufhört.

Der Sprung im Waggon

Der Zug fährt mit 36 km/h. Ihr befindet euch in einem Waggon des Zuges und springt hoch. Nehmen wir an, es gelingt euch, eine Sekunde in der Luft zu bleiben. (Das ist eine kühne Annahme, denn dazu müßte man höher als einen Meter springen.) Wenn ihr den Boden wieder berührt, wo befindet ihr euch da? Auf dem gleichen Platz, von dem ihr abgesprungen seid, oder nicht? Und wenn an einer anderen Stel-

le, dann näher zur vorderen oder hinteren Wand des Waggons?

Der Fahrgast kommt an der gleichen Stelle wieder auf, wo er abgesprungen ist. Man darf nicht glauben, daß in der Zeit, da er schwebte, der Fußboden unter ihm zusammen mit dem Waggon vorwärts gefahren ist und den Hochspringenden überholt hat. Natürlich ist der Waggon weitergerast. Doch die hochspringende Person wird durch die Trägheit (Inertion) mit gleicher Geschwindigkeit weiterbefördert. Die ganze Zeit befand er sich genau über der Stelle, von der er hochsprang.

Auf dem Schiff

Auf dem Deck eines fahrenden Schiffes spielen zwei Passagiere Ball (Abb. 82). Einer steht näher zum Heck, der andere näher zum Bug. Für wen ist es leichter, den Ball dem Partner zuzuwerfen, dem ersteren oder dem zweiten?

Wenn sich das Schiff mit gleicher Geschwindigkeit und in gerader Linie fortbewegt, so ist es beiden

Abbildung 82



Spielern gleich leicht, dem Partner den Ball zuzuwerfen — ebenso wie auf einem sich nicht fortbewegenden Schiff. Man darf nicht glauben, daß die dem Bug näher stehende Person sich vom geworfenen Ball entfernt und die näher zum Heck stehende sich auf den Ball zubewegt. Der Ball besitzt durch die Trägheit die gleiche Geschwindigkeit wie das Schiff. Die Fahrtgeschwindigkeit des Schiffes überträgt sich gleichermaßen auf die Spieler und den Ball. Deshalb gibt

die Fortbewegung des Schiffes (gleichförmig und geradlinig) keinem der Spieler einen Vorteil gegenüber dem anderen.

Wimpel

Ein Luftballon wird vom Wind in nördlicher Richtung weggetragen. In welche Richtung wehen in diesem Falle die Wimpel an seiner Gondel?

Der von der Luftströmung fortbewegte Ballon befindet sich im Verhältnis zur umgebenden Luft im Ruhezustand. Deshalb wehen die Wimpel nicht im Wind, sondern hängen herab wie bei Windstille.

Im Flugballon

Der Flugballon steht frei und unbeweglich in der Luft. Ein Mann klettert aus der Gondel und beginnt sich am Seil hochzuziehen.

Wohin bewegt sich der Flugballon auf- oder abwärts?

Der Flugballon muß sich *abwärts* bewegen, weil der Mann, während er sich am Seil hochzieht, das Seil mitsamt dem Ballon in die entgegengesetzte Richtung stößt. Hier geht das gleiche vor sich wie beim Gehen auf dem Boden eines Bootes. Das Boot bewegt sich dabei rückwärts.

Gehen und Lauf

Wodurch unterscheidet sich der Lauf vom Gehen? Ehe ihr auf die Frage antwortet, bedenkt, daß der Lauf langsamer als Gehen sein kann und daß es sogar Lauf auf der Stelle gibt.

Der Lauf unterscheidet sich vom Gehen nicht durch die Schnelligkeit der Bewegung. Beim Gehen berührt unser Körper stets mit irgendeinem Punkt des Fußes den Boden. Beim Lauf jedoch treten Zeitpunkte ein, da unser Körper vollständig von der Erde abgelöst ist und sie nicht in einem Punkte berührt.

Abbildung 83



Der sich selbst ausbalancierende Stock

Auf die Zeigefinger der in Abstand voneinander gehaltenen Hände legt einen glatten Stock (Abb. 83). Nun bewegt die Finger aufeinander zu, bis sie sich berühren. Seltsame Geschichte! Es zeigt sich, daß

in der Endstellung der Stock nicht wegkippt, sondern das Gleichgewicht hält. Ihr könnt den Versuch oft wiederholen und dabei die Ausgangsstellung der Finger verändern. Das Ergebnis bleibt gleich. Der Stock liegt ausbalanciert. Tauscht ihr den Stock mit einem Zeichenlineal, einem Spazierstock mit Knauf, einem Billardqueue, einem Schrubber — stets stellt ihr die gleiche Besonderheit fest.

Wie kommt dieses ungewöhnliche Ergebnis zustande?

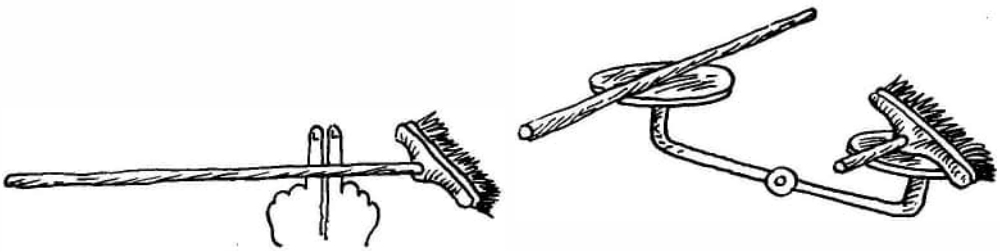
Zunächst einmal ist folgendes klar. Wenn der Stock auf den beieinanderliegenden Fingern im Gleichgewicht ist, so befinden sich die Finger unter dem Schwerpunkt des Stockes (ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn die lotrechte Linie vom Schwerpunkt aus sich innerhalb der Begrenzung der Auflage befindet).

Während die Finger voneinander entfernt sind, liegt die größere Last auf dem Finger, der dem Schwerpunkt am nächsten liegt. Mit dem Auflagedruck wächst auch die Reibung. Der Finger, der näher zum Schwerpunkt liegt, ist einer größeren Reibung ausgesetzt als der entferntere. Deshalb rutscht der näher zum Zentrum stehende nicht unter dem Stock. Es bewegt sich stets nur der Finger, der von diesem Punkt am weitesten entfernt ist. Sobald der sich bewegende Finger näher an den Schwerpunkt herangekommen ist, vertauschen die beiden Finger ihre Rollen. So ein Wechsel findet mehrere Male statt, bis die Finger dicht zusammengekommen sind. Und weil sich immer nur ein Finger bewegen kann, so ist es ganz natürlich, daß in der endgültigen Stellung beide Finger unter den Schwerpunkt des Stockes gelangen.

Ehe wir dieses Experiment abschließen, wiederholen wir es noch einmal mit einem Schrubber (Abb. 84 links) und denken über die folgende Frage nach: Wenn der Schrubberstiel an der Stelle, wo die Finger zusammentreffen, zersägt wird und beide Teile auf eine Waage gelegt werden (Abb. 84 rechts), welche Waagschale wird herabsinken, die mit dem Stock oder die mit der Bürste?

Man sollte meinen, da beide Teile auf den Fingern des Schrubbers im Gleichgewicht lagen, müßten sie auch das gleiche Gewicht auf die Waage bringen. Doch tatsächlich sinkt die Schale mit der Bürste tiefer herab. Der Grund ist nicht schwer zu erraten, wenn man berücksichtigt, daß beim Ausbalancieren des Schrub-

Abbildung 84



bers auf den Fingern die Gewichte der Teile auf unterschiedlich lange Hebelarme wirkten. Die Waage jedoch hat gleich lange Hebelarme.

Für den „Pavillon der unterhaltsamen Wissenschaft" im Leningrader Kulturpark hatte ich ein Sortiment von Stöcken mit unterschiedlichen Schwerpunkten anfertigen lassen, die genau im Schwerpunkt in zwei zumeist unterschiedlich lange Teile zerlegbar waren.

Die Besucher überzeugten sich, wenn sie die Teile auf die Waage legten mit Erstaunen davon, daß der kürzere Teil schwerer ist als der längere.

Der Ruderer auf dem Fluß

Auf dem Fluß treibt ein Ruderboot und neben ihm ein Holzstück. Was ist für den Ruderer einfacher, das Holzstück um 10 m zu überholen oder um die gleiche Entfernung zurückzubleiben?

Selbst Leute, die Wassersport treiben, geben oft eine falsche Antwort auf diese Frage. Sie glauben, gegen die Strömung sei schwerer zu rudern als mit der Strömung. Demzufolge, meinen sie, sei es leichter, das Holzscheit zu überholen, statt sich in umgekehrter Richtung zu entfernen.

Zweifellos stimmt es, daß es im Verhältnis zu einem beliebigen festen Punkt schwieriger ist, gegen die Strömung als mit der Strömung zu rudern. Wenn jedoch dieser Punkt sich mit euch wie das Holzscheit im Wasser bewegt, verändert sich die Lage grundsätzlich.

Man muß berücksichtigen, daß das Boot, welches sich von der Strömung treiben läßt, im Verhältnis zum Wasser, von dem es getragen wird, sich in *Ruhe* befindet. In einem solchen Boot sitzend,

arbeitet der Ruderer mit den Ruderblättern ebenso wie im stehenden Wasser eines Sees. Auf dem See ist es gleich leicht, in jeder beliebigen Richtung zu rudern. Die gleiche Situation herrscht im fließenden Wasser in unserem Fall.

Und daher muß der Ruderer die gleiche Kraft aufwenden, gleich, ob er das Holzstück überholen oder aber hinter ihm in der gleichen Entfernung zurückbleiben will.

Kreise auf dem Wasser

Ein in stehendes Wasser geworfener Stein erzeugt Wellen, die sich kreisförmig ausbreiten.

Welche Ausbreitungsform haben Wellen, die von einem in ein fließendes Gewässer geworfenen Stein ausgehen?

Wenn ihr nicht gleich den richtigen Ansatzpunkt zur Lösung dieser Aufgabe findet, werdet ihr euch leicht verwirren in den Überlegungen und zur Schlußfolgerung kommen, daß in fließendem Gewässer die Wellen sich etwa in der Form einer Ellipse ausbreiten. Doch beobachten wir aufmerksam die Wellen, die von einem in den Fluß geworfenen Stein ausgehen, so stellen wir keinerlei Abweichung von der Kreisform fest, wie schnell die Strömung auch sein mag.

Hierbei ist nichts Überraschendes. Eine einfache Überlegung führt uns zu dem Schluß, daß die von einem Steinwurf erzeugten Wellen kreisförmig sein müssen, sowohl im stehenden wie auch im fließenden Gewässer. Betrachten wir einmal die Bewegung der in Schwingung versetzten Teilchen des Wassers als aus zwei Bewegungen bestehend: die radiale — vom Schwingungszentrum weg und die portative — die in Strömungsrichtung wirkende. Der Körper, der an einigen Bewegungen beteiligt ist, verlagert sich letztlich dorthin, wo er sich befinden würde, wenn alle auf ihn wirkenden Bewegungen aufeinanderfolgend eine nach der anderen einwirkten.

Deshalb nehmen wir zunächst an, der Stein wird in stehendes Gewässer geworfen. In diesem Fall entstehen natürlich kreisförmige Wellen.

Nun gehen wir davon aus, daß sich das Wasser bewegt — gleichgültig mit welcher Geschwindigkeit, ohne Unterschied, ob es gleichmäßig oder ungleich-

mäßig strömt, wenn es sich nur vorwärts bewegt. Was geht mit den kreisförmigen Wellen vor sich? Sie bewegen sich durch parallele Verlagerung vorwärts, ohne die geringste Formveränderung zu erleiden, d. h., sie bleiben kreisförmig.

Das Ablenken der Kerzenflamme

Wenn wir im Zimmer eine brennende Kerze herumtragen, bemerken wir, daß zu Beginn die Flamme der Kerze sich entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung ablenkt. Wohin neigt sich die Flamme, wenn die Kerze in einer geschlossenen Laterne getragen wird?

Wohin neigt sich die Flamme in der geschlossenen Laterne, wenn man letztere gleichmäßig an der ausgestreckten Hand um sich herum dreht?

Wer glaubt, die Kerzenflamme würde sich in der geschlossenen Laterne bei Bewegung überhaupt nicht neigen, der irrt sich. Macht einen Versuch mit einem brennenden Streichholz, und ihr könnt euch davon überzeugen, daß bei seiner Fortbewegung, durch die Hand geschützt, die Flamme sich neigt und zwar gegen alle Erwartung nicht entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung, sondern gleichgesetzt. Die Ursache für diese Neigung nach vorn ist, daß die Flamme über eine geringere Dichte verfügt als die sie umgebende Luft. Ein und dieselbe Kraft überträgt auf einen Körper mit geringerer Masse eine größere Geschwindigkeit. Deshalb neigt sich die Flamme, die sich schneller als die Luft in der Laterne bewegt, nach vorn.

Die gleiche Ursache — nämlich die geringere Dichte der Flamme gegenüber der umgebenden Luft — erklärt auch das unerwartete Verhalten der Flamme bei der Kreisbewegung der Laterne. Sie neigt sich nach *innen* und nicht nach außen, wie wohl zu erwarten wäre. Diese Erscheinung wird begreiflich, wenn wir uns daran erinnern, wie sich Quecksilber und Wasser in einer Kugel verhalten, die in einer Zentrifuge geschleudert wird. Das Quecksilber entfernt sich weiter von der Drehachse als das Wasser. Letzteres schwimmt geradezu auf dem Quecksilber, wenn man als unten die Richtung von der Drehachse weg betrachtet (die Richtung, in der ein Körper unter dem Einfluß des Fliehkrafteffekts geschleudert wird). Die Kerzenflamme ist leichter als die sie umgebende Luft und deshalb „schwimmt" sie bei der Kreisbe-

wegung der Laterne auf der Luft oben auf, also in Richtung zur Drehachse.

Die durchhängende Leine

Mit welcher Kraft muß man eine Leine spannen, damit sie nicht durchhängt?

Wie straff man eine Leine auch zieht, sie wird stets durchhängen. Die Schwerkraft, die das Durchhängen verursacht, ist senkrecht gerichtet, wogegen die Spannung der Leine keine vertikale Richtung hat. Die zwei Kräfte können sich unter keinen Bedingungen gegenseitig aufheben, d. h., ihre Resultante kann nicht gleich Null sein. Ebendiese Resultante ruft das Durchhängen der Leine hervor.

Keine Kräfteanspannung, so groß sie auch ist, vermag die Leine exakt geradlinig zu spannen (außer dem Fall, da sie lotrecht hängt). Das Durchhängen ist unvermeidlich. Man kann die Größenordnung in gewissem Maße auf ein Minimum reduzieren, doch nie bis Null. Also jede nicht vertikal gespannte Leine, jeder Treibriemen muß durchhängen.

Aus diesem Grunde ist es auch unmöglich, eine Hängematte so aufzuhängen, daß ihre Trageleinen horizontal verlaufen. Eine straff gezogene Drahtmatratze hängt unter der Last der darauf liegenden Person durch. Eine Hängematte, deren Trageleinen wesentlich schwächer sind, verwandelt sich unter der Last der darin hängenden Person einfach in einen hängenden Sack.

Wohin muß man die Flasche werfen?

In welcher Richtung muß man aus einem fahrenden Zug eine Flasche werfen, damit die Gefahr des Zerschellens am Boden so gering als möglich ist?

Da es ungefährlicher ist, aus einem fahrenden Zug vorwärts, in Fahrtrichtung zu springen, mag es scheinen, daß die Flasche weniger hart auf den Boden aufschlägt, wenn man sie vorwärts schleudert. Doch das ist nicht richtig. Man muß Gegenstände entgegengesetzt zur Fahrtrichtung werfen, nach *hinten*. Damit *verringert* die mit dem Wurf der Flasche vermittelte Geschwindigkeit ihre Bewegung, die sie durch die Trägheit erhält. Infolgedessen schlägt die

Flasche mit geringerer Geschwindigkeit auf den Boden auf. Beim Werfen in Fahrtrichtung geschähe genau das entgegengesetzte. Die Geschwindigkeiten addierten sich, und das Aufschlagen wäre härter.

Daß es für den Menschen dennoch ungefährlicher ist, in Fahrtrichtung und nicht rückwärts abzuspringen, erklärt sich aus ganz anderen Gründen. Wenn wir nach vorn fallen, verletzen wir uns weniger, als wenn wir rückwärts stürzen.

Der Korken

In eine mit Wasser gefüllte Flasche ist ein Stück vom Korken geraten. Es ist klein genug, um durch den Hals zu kommen. Doch wie ihr auch die Flasche dreht und wendet, das herausfließende Wasser bringt den Korkenkrümel nicht mit heraus. Erst mit den letzten Wassertropfen verläßt der Krümel die Flasche. Wie kommt das?

Das Wasser befördert den Kork aus einem ganz einfachen Grunde nicht heraus. Kork ist leichter als Wasser und schwimmt daher stets an der Oberfläche. Nach unten, zur geneigten Öffnung der Flasche, kann das Korkstück nur dann geraten, wenn nahezu das ganze Wasser herausgeflossen ist. Deshalb kommt es erst mit dem letzten Wasserrest heraus.

Hochwasser

Beim Frühjahrshochwasser wölbt sich die Wasseroberfläche der Flüsse. Sie ist in der Mitte höher als am Ufer. Wenn auf einen solchen aufgewölbten Fluß

Abbildung 85



Holzstücken schwimmen, so gleiten sie zu den Ufern, während die Flußmitte frei bleibt (s. Abb. 85 links). Bei Niedrigwasser wölbt sich die Flußoberfläche nach innen, d. h., in der Flußmitte ist sie niedriger als an den Ufern — und schwimmendes Holz treibt in der Flußmitte (s. Abb. 85 rechts).

Wie erklärt sich das? Weshalb ist der Fluß bei Hochwasser aufgewölbt und bei Niedrigwasser in der Mitte nach innen gewölbt?

Die Ursache liegt darin, daß in der Flußmitte das Wasser stets schneller strömt als an den Ufern: Die Reibung des Wassers am Ufer verlangsamt seine Strömung. Bei Hochwasser vergrößert sich der Zufluß vom Oberlauf und zwar in der Flußmitte schneller als am Ufer, so daß die Strömung in der Mitte stärker ist. Es ist einleuchtend, daß der Fluß sich aufwölben muß, wenn dort mehr Wasser durchfließt. Anders ist das bei Niedrigwasser, wenn der Wasserstand sinkt. Wegen der stärkeren Strömung in der Flußmitte fließt das Wasser dort in größerer Menge weg als an denUfern, der Fluß wölbt sich nach innen.

Flüssigkeiten drücken ... nach oben!

Davon, daß Flüssigkeiten nach unten, auf den Gefäßboden und seitwärts auf die Gefäßwände einen Druck ausüben, weiß auch der, der sich nie mit Physik beschäftigt hat. Doch, daß sie auch *nach oben* drücken, kommt vielen gar nicht in den Sinn. Der Glaszylinder einer Petroleumlampe kann uns davon überzeugen, daß ein solcher Druck tatsächlich existiert. Schneidet aus fester Pappe einen Kreis, der die Öffnung des Glaszylinders abdeckt. Legt ihn an die Glaskante an und taucht ihn unter Wasser. Damit der Deckel beim Eintauchen nicht abfällt, kann man ihn mit einem Faden, der durch das Zentrum des Dekkels gezogen wird, oder einfach mit dem Finger festhalten. Ist der Zylinder tief genug eingetaucht, könnt ihr feststellen, daß der Deckel auch von allein, ohne durch ein Andrücken mit dem Finger oder durch Anziehen des Fadens gut hält. Er wird durch das Wasser gehalten, das von unten nach oben auf ihn drückt.

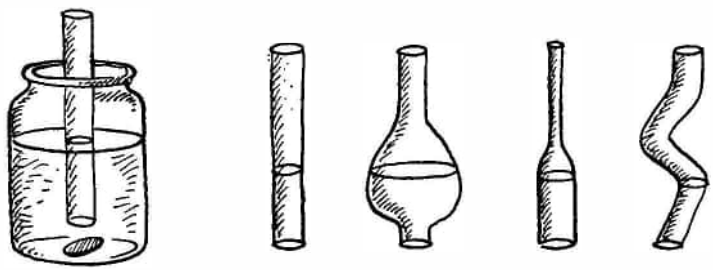
Die Größe dieses Druckes nach oben könnt ihr sogar messen. Gießt vorsichtig Wasser in ben Zylinder. Sobald sich der Wasserspiegel im Inneren dem Stand

im großen Gefäß nähert, fällt der Deckel ab. Das bedeutet, der Wasserdruck auf den Deckel von unten wird von dem Druck der Wassersäule von oben, die im Zylinder steht und der Höhe der Tauchtiefe des Pappdeckels entspricht, ausgeglichen. Das ist die Gesetzmäßigkeit des Flüssigkeitsdruckes auf einen eingetauchten Körper.

Daher resultiert übrigens auch der „Gewichtsverlust" in Flüssigkeiten, den uns das berühmte Gesetz des Archimedes lehrt.

Habt ihr einige Lampenzylinder verschiedener Form, aber mit gleichgroßer Öffnung, dann könnt ihr noch ein anderes Gesetz überprüfen, nach dem nämlich der Druck einer Flüssigkeit auf den Boden des

Abbildung 86

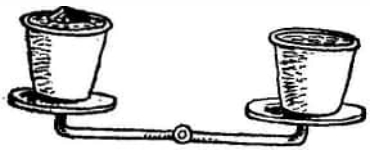


Gefäßes nur von der Bodenfläche und der Höhe der Flüssigkeitssäule abhängt, während die Form des Gefäßes keinerlei Einfluß hat. Die Überprüfung besteht darin, daß ihr das beschriebene Experiment jetzt mit verschiedenen Glaszylindern durchführt, die ihr in ein und dieselbe Tiefe eintaucht (zu diesem Zwecke müßt ihr vorher an das Glas auf gleicher Höhe Papierstreifen ankleben). Ihr werdet bemerken, daß der Deckel bei gleichem Stand der Wassersäule im Zylinder jedesmal abfällt (Abb. 86). Daraus folgt, daß der Druck der Wassersäulen unterschiedlicher Gestalt gleich ist, wenn ihre Höhe und Grundfläche gleich sind. Beachtet, daß hier die *Höhe* und nicht die *Länge* entscheidend ist, weil eine lange *geneigte* Säule ebenso stark lastet wie eine kurze vertikale Säule, die gleich *hoch* ist (bei gleichgroßer Grundfläche).

Was ist schwerer?

Auf der einen Wiegeschale steht ein mit Wasser randgefüllter Eimer. Auf der anderen Seite steht ein ebensolcher Eimer, ebenfalls mit Wasser *bis zum Rande*

Abbildung 87



gefüllt, aber auf dem Wasser schwimmt ein Holzstück (Abb. 87). Welcher Eimer wiegt mehr?

Ich habe diese Frage verschiedenen Personen gestellt und ganz unterschiedliche Antworten erhalten. Die einen sagten, der Eimer mit dem Holzstück wiege mehr, weil „außer dem Wasser im Eimer zusätzlich Holz" sei. Die anderen meinten, der erste Eimer sei schwerer, „weil Wasser schwerer als Holz sei".

Doch weder die einen noch die anderen haben recht. Beide Eimer haben das *gleiche Gewicht*. Zwar ist im zweiten Eimer weniger Wasser als im ersten, da das schwimmende Holzstück ein wenig davon verdrängt. Doch gemäß dem physikalischen Gesetz vom Schwimmen, verdrängt jeder Körper durch seinen eingetauchten Teil (gewichtsmäßig) *so viel Flüssigkeit, wie* der ganze Körper *wiegt*. Deshalb bleiben die Wiegeschalen auch im Gleichgewicht.

Und jetzt eine andere Aufgabe. Ich stelle ein Glas voll Wasser auf die Waagschale, und daneben lege ich ein Gewicht. Wenn die Waage ins *Gleichgewicht* mit den Gewichten gebracht ist, lasse ich ein kleines Gewicht ins Wasserglas fallen. Was geschieht mit der Waage?

Entsprechend dem Gesetz des Archimedes wird das Gewicht im Wasser leichter, als es außerhalb des Wassers war. Man könnte also erwarten, daß die Wiegeschale mit dem Wasserglas nach oben steigt. Doch in Wirklichkeit bleibt die Waage im Gleichgewicht. Wie erklärt sich das?

Das Gewicht im Glas verdrängte einen Teil des Wassers, wodurch der Wasserspiegel stieg. Infolgedessen erhöht sich der Druck auf den Glasboden, so daß auf ihn eine zusätzliche Kraft wirkt, die dem Gewichtsverlust gleich ist.

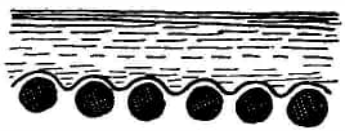
Wasser im Sieb

Man kann also Wasser nicht nur im Märchen mit dem Sieb schöpfen. Das physikalische Wissen hilft uns, diese klassisch unmögliche Aufgabe zu lösen. Dazu brauchen wir ein Drahtsieb von 15 cm Durchmesser mit nicht zu kleinen Löchern (etwa 1 mm), daß wir in flüssiges Kerzenwachs tauchen. Wir nehmen das Sieb aus dem Kerzenwachs heraus, und der Draht ist nun mit einer hauchdünnen, für das Auge kaum wahrnehmbaren Wachsschicht bedeckt.

Das Sieb ist ein Sieb geblieben — es sind Löcher darin, durch die bequem eine Stecknadel geht. Doch ihr könnt nunmehr, im wahrsten Sinne des Wortes, Wasser darin tragen. In solchem Sieb verbleibt eine ziemlich starke Wasserschicht, die nicht durch das Drahtgeflecht läuft, nur muß man das Wasser vorsichtig hineingießen und das Sieb vor eventuellen Stößen schützen.

Warum läuft das Wasser nicht hindurch? Weil es, das Kerzenwachs nicht benetzend, in den Durchlässen des Siebes einen dünnen Film mit Wölbungen nach unten bildet, die das Wasser zurückhalten (Abb. 88).

Abbildung 88



So ein Sieb kann man aufs Wasser legen, und es bleibt an der Oberfläche liegen. Man kann also nicht nur Wasser mit dem Sieb schöpfen, sondern auch darauf schwimmen.

Dieser paradoxe Versuch erklärt eine Reihe gewöhnlicher Erscheinungen, die uns so selbstverständlich geworden sind, daß wir über ihre Ursachen gar nicht mehr nachdenken. Das Teeren von Fässern und Booten, das Einreiben von Pfropfen und Buchsen mit Fett, das Streichen mit Ölfarbe und überhaupt das Behandeln aller Gegenstände, die wir wasserabweisend oder wasserundurchlässig machen wollen, mit öligen Mitteln, ja auch das Gummieren von Geweben — das alles ist nichts anderes als die Anfertigung eines Siebes in der beschriebenen Art. Das Wesen der Sache ist überall das gleiche, nur im Falle des Siebes tritt es uns in ungewöhnlicher Form entgegen.

Seifenblasen

Könnt ihr Seifenblasen machen? Das ist nicht so einfach, wie es scheint. Mir aber schien, daß man dazu keiner besonderen Fertigkeit bedarf, bevor ich mich in der Praxis davon überzeugte, daß es eine Kunst für sich ist, große und schöne Seifenblasen fliegen zu lassen, und daß dazu viel Übung nötig ist.

Aber lohnt es sich überhaupt, für solche unwichtigen Angelegenheiten wie das Aufpusten von Seifenblasen Zeit zu vergeuden?

Im Alltag erfreuen sie sich keines guten Rufes. Bestenfalls erinnert man sich ihrer in einem nicht besonders schmeichelhaften Vergleich. Der Physiker betrachtet die Sache mit anderen Augen. „Blasen Sie eine Seifenblase und schauen Sie auf sie“, schrieb

der große englische Wissenschaftler Lord Kelvin. „Sie können sich Ihr Leben lang mit ihrer Erforschung beschäftigen, und stets werden Sie neue physikalische Erkenntnisse gewinnen."

Die wundervollen Farbspiele auf der Oberfläche des hauchdünnen Seifenfilms ermöglichen dem Physiker, wirklich die Länge der Lichtwellen zu messen. Die Untersuchung der Spannung dieser zarten Häutchen trägt dazu bei, die Gesetze der Kräftewirkung zwischen den Teilchen zu erforschen, jener Haftkräfte, bei deren Nichtvorhandensein in der Welt nichts anderes als feinster Staub existieren würde.

Jene Experimente, die weiter beschrieben werden, haben nicht sehr bedeutende Aufgaben zum Gegenstand. Sie sind einfach interessanter Zeitvertreib und weihen euch in die Kunst des Seifenblasens ein. Der englische Physiker Ch. Boyse beschrieb in seinem Buch „Seifenblasen" ausführlich eine lange Reihe verschiedener Versuche mit ihnen. Wer sich dafür interessiert, dem empfehlen wir dieses ausgezeichnete Buch. Hier wollen wir nur die einfachsten Versuche beschreiben.

Man kann sie durchführen mit einer einfachen Schmierseifelösung[1]). Wir weisen noch auf die sogenannte Marseiller Seife hin und auch auf Seife aus reinem Olivenöl oder Mandelölseife, die besonders geeignet sind für schöne große Seifenblasen. Ein Stück Seife wird sorgfältig in sauberem, kaltem Wasser aufgelöst, so daß eine relativ satte Lösung entsteht. Am besten ist reines Regenwasser oder Schneewasser zu verwenden, und wenn das nicht vorhanden ist, abgekochtes und wieder abgekühltes Wasser. Damit die Seifenblasen lange halten, empfiehlt Plato, zur Seifenlösung 1/3 Glyzerin (Mengenverhältnis) hinzuzufügen. Von der Lösungsoberfläche werden mit einem Löffel Schaum und Bläschen entfernt, und dann wird ein dünnes Tonröhrchen in die Lösung getaucht, dessen Ende vorher von innen und außen mit Seife eingerieben wurde. Gute Ergebnisse erzielt man auch mit einem 10 cm langen Strohhalm, der am Ende kreuzförmig aufgespaltet wurde.

Seifenblasen macht man folgendermaßen: Nachdem das Röhrchen in die Lösung getaucht und senkrecht gehalten wurde, damit sich am Ende ein Flüssigkeitsfilm bilden kann, pustet man vorsichtig hin-

---

[1]) Toilettenseife ist für diese Zwecke weniger geeignet.

ein. Da sich die Blase dabei mit der warmen Luft aus unseren Lungen, die leichter ist als die uns umgebende Luft des Zimmers, füllt, steigt die aufgeblähte Blase sofort nach oben.

Wenn es gelingt, mit einem Mal eine Seifenblase von 10 cm Durchmesser zu blasen, dann ist die Lauge in Ordnung. Andernfalls ist der Flüssigkeit noch Seife zuzusetzen, bis es gelingt, eine Blase der genannten Größe zustande zu bringen. Doch diese Probe reicht noch nicht. Ist die Seifenblase gelungen, taucht man den Finger in die Lauge und versucht dann, die Blase zu durchbohren. Zerplatzt sie nicht, kann man mit den Experimenten beginnen. Hält die Seifenblase den Stoß nicht aus, muß der Lauge noch Seife zugesetzt werden.

Die Versuche muß man langsam, vorsichtig und ohne Hast durchführen. Die Beleuchtung sollte möglichst hell sein, sonst schillern die Seifenblasen nicht in all ihrer Farbenpracht.

Nun einige interessante Experimente mit den Seifenblasen.

Abbildung 89



Eine Blüte in der Seifenblase. Auf einen Teller oder einen Untersetzer gießt man soviel Seifenlauge, daß der Boden 2—3 mm hoch bedeckt ist. In die Mitte legt man eine Blüte oder kleine Vase und bedeckt sie mit einem gläsernen Trichter. Danach bläst man, den Trichter langsam anhebend, in das sich verjüngende Rohr. Eine Seifenblase entsteht. Ist sie groß genug, neigt man, wie es auf Abb. 89 dargestellt ist, den Trichter und läßt die Seifenblase frei heraustreten. Die Blüte liegt nun unter der durchsichtigen Halbkugel aus Seifenfilm, die in allen Regenbogenfarben schillert.

Anstelle der Blüte kann man eine kleine Nippfigur nehmen und ihren Kopf mit einer Seifenblase krönen. Dazu wird vorher der Kopf der Figur mit etwas Seifenlauge betröpfelt. Wenn die große Blase schon fertig ist, durchbohren wir sie mit dem Röhrchen und blasen darin noch eine kleine Seifenblase.

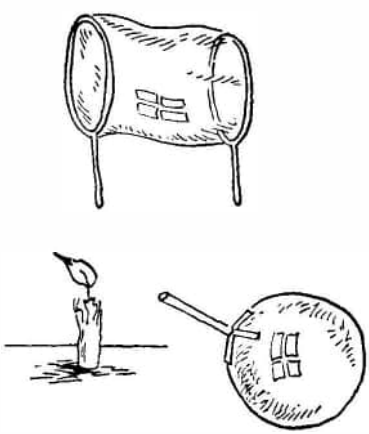
Mehrere Blasen ineinander. Mit dem Trichter, den wir eben benutzt haben, blasen wir eine große Seifenblase. Dann tauchen wir einen Strohhalm mit Ausnahme des kleinen Stückes, das wir in den Mund stecken müssen, ganz und gar in die Seifenlauge. Vorsichtig stecken wir den Halm durch die Wand der ersten Blase hindurch bis zum Zentrum. Langsam ziehen wir dann den Halm zurück. Doch ehe wir den

Rand wieder erreichen, blasen wir die nächste Halbkugel, eingeschlossen in der ersten. In dieser zweiten entsteht die dritte, dann die vierte usw.

Ein Zylinder aus Seifenfilm (Abb. 90) entsteht zwischen zwei Drahtringen. Dazu setzen wir auf den unteren Ring eine normale kugelförmige Blase. Darauf wird der mit Lauge benetzte zweite Ring gelegt, und indem wir ihn anheben, ziehen wir die Kugel in die Länge, bis sie eine zylindrische Form angenommen hat. Interessant dabei ist, daß sich der Zylinder, wenn seine Höhe den Umfang des Ringes übersteigt, in der einen Hälfte verengt, in der anderen erweitert und in zwei Blasen zerfällt.

Die Oberfläche der Seifenblase befindet sich ständig unter Spannung und drückt auf die eingeschlossene Luft. Richtet man die Blasöffnung des Röhrchens auf eine Kerzenflamme, kann man sich überzeugen, daß die Kraft des umschließenden Films nicht gering ist. Die Flamme neigt sich deutlich zur Seite (Abb. 90).

Abbildung 90



Es ist interessant zu beobachten, daß die Seifenblase, wenn sie aus einem warmen Raum in einen kalten gebracht wird, sichtbar ihren Umfang verringert und umgekehrt, beim Übergang vom kälteren zum wärmeren Raum, sich aufbläht. Die Ursache liegt natürlich im Zusammenziehen und Ausdehnen der Luft, die in der Blase eingeschlossen ist. Wenn zum Beispiel bei Frostgraden von —15 °C das Volumen der Seifenblase 1000 cm³ beträgt und sie aus dem Frost ins warme Zimmer kommt, wo +15 °C sind, dann vergrößert sich das Volumen etwa um $1000 \cdot 30 \cdot \frac{1}{273} =$ =rund 110 cm³.

Es wäre noch zu bemerken, daß die verbreitete Vorstellung von der Kurzlebigkeit einer Seifenblase nicht völlig gerechtfertigt ist. Bei entsprechender Behandlung ist es möglich, die Seifenblasen über ganze Dekaden hin aufzubewahren. Der englische Physiker Dewar (berühmt geworden durch seine Arbeiten zur Luftverdichtung) bewahrte Seifenblasen in speziellen Flaschen, die gut vor Staubteilchen, vor Austrocknung und Erschütterung der Luft geschützt waren, auf. Unter diesen Bedingungen gelang es ihm, einige Seifenblasen einen Monat und länger zu erhalten. Lorentz schaffte es in Amerika, Seifenblasen unter Glasglocken über Jahre zu erhalten.

Ein verbesserter Trichter

Wer schon einmal durch einen Trichter Flüssigkeit in Flaschen gefüllt hat, der weiß, daß es von Zeit zu Zeit erforderlich ist, den Trichter anzuheben, sonst läuft die Flüssigkeit nicht aus dem Trichter heraus. Die Luft in der Flasche hält, wenn sie keinen Ausweg findet, mit ihrem Druck die Flüssigkeit im Trichter zurück. Allerdings, etwas Flüssigkeit fließt hinab, so daß die Luft dann vom Wasserdruck zusammengepreßt wird. Die in dem kleineren Raum eingezwängte Luft bekommt eine größere Elastizität, die ausreicht, um mit ihrem Druck das Gewicht der im Trichter befindlichen Flüssigkeit auszugleichen. Es ist klar, daß wir der zusammengepreßten Luft einen Ausweg verschaffen, sobald wir den Trichter anheben. Schon läuft die Flüssigkeit weiter.

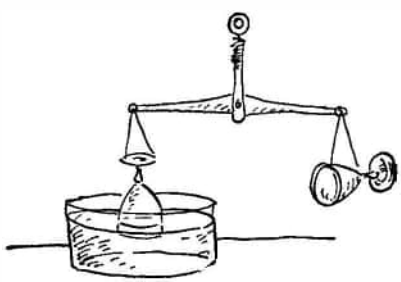
Deshalb wäre es äußerst praktisch, den sich verjüngenden Teil des Trichters mit einigen Kerben an der Außenseite zu versehen, durch die ein enges Verschließen des Flaschenhalses verhindert wird. Solche Trichter habe ich im allgemeinen Gebrauch nicht angetroffen. Nur in Laboratorien werden Filter solcher Art verwendet.

Wieviel wiegt das Wasser in einem umgestürzten Glas?

„Das wiegt natürlich gar nichts. In solcher Stellung hält sich kein Wasser im Glas, es fließt heraus", sagt ihr.

„Und wenn es nicht herausläuft?" frage ich, „was ist dann?"

Abbildung 91



Tatsächlich kann man in einem umgestürzten Glas das Wasser zurückhalten, ohne daß es ausläuft. Das ist in Abb. 91 dargestellt. Das Weinglas, mit dem Boden am Wägebalken befestigt, ist mit Wasser gefüllt. Es läuft nicht heraus, weil der Glasrand in ein mit Wasser gefülltes Gefäß getaucht wurde. An der anderen Seite des Wägebalkens ist ein gleiches, aber leeres Glas aufgehängt.

Welche Seite des Wägebalkens sinkt herab?

Die Seite sinkt herab, an der das wassergefüllte Weinglas befestigt ist. Auf diesem Glas lastet von oben der atmosphärische Druck, von unten der atmosphärische Druck, verringert um das im Glas be-

findliche Wasser. Damit die Waage Gleichgewicht hält, müßte auch das andere Glas mit Wasser gefüllt werden. Unter den genannten Bedingungen wiegt also das Wasser in den umgestürzten Glas ebensoviel wie in einem aufrecht stehenden Glas.

Wieviel wiegt Luft im Zimmer?

Könnt ihr annähernd das Gewicht der Luft bestimmen, die in einem mittelgroßen Zimmer enthalten ist? Sind es einige Gramm oder einige Kilogramm? Seid ihr imstande, diese Luft mit einem Finger zu heben, oder können eure Schultern sie nur mit Mühe tragen?

Heute trifft man keinen Menschen mehr, der meint, wie man früher annahm, Luft würde kein Gewicht haben. Doch wieviel sie wiegt, können auch heute viele nicht sagen.

Merkt euch, ein Liter warme sommerliche Luft wiegt in Erdbodennähe (nicht im Gebirge) 1 1/5 g. 1 m^3 umfaßt genau 1000 l, deshalb wiegt 1 m^3 Luft 1000mal mehr als 1 1/5 g, das sind 1 1/5 kg.

Nun bereitet es euch keine Mühe mehr, auszurechnen, wieviel die Luft in diesem oder jenem Zimmer wiegt. Dazu braucht man nur zu wissen, wieviel m^3 das Zimmer umfaßt. Ist die Fläche eines Wohnraumes 15 m^2, die Höhe 3 m, so ergeben sich $15 \cdot 3 = 45$ m^3 Luft. Diese Luftmasse wiegt 45 kg plus 1/5 von 45, das sind 9 kg, also insgesamt 54 kg. So eine Last hebt man nicht mit einem Finger, und selbst auf den Schultern trägt man sie nur mit Mühe.

Der ungehorsame Korken

Dieses Experiment zeigt euch deutlich, daß die zusammengepreßte Luft über Kraft verfügt, und zwar über recht beachtliche.

Für das Experiment brauchen wir nur eine Flasche und einen Korken, der ein wenig zu klein ist für die Flaschenöffnung.

Haltet die Flasche horizontal, legt den Korken in den Flaschenhals und bittet jemanden, den Korken in die Flasche hineinzupusten.

Es scheint nichts leichter als das. Aber probiert nur — blast recht kräftig gegen den Korken, und ihr werdet überrascht sein von der unerwarteten Wirkung.

Der Korken rutscht nicht in die Flasche hinein, sondern ... er fliegt euch ins Gesicht!

Je kräftiger ihr hineinblast, um so schneller fliegt der Korken heraus.

Um zu erreichen, daß der Korken in die Flasche rutscht, müßt ihr genau entgegengesetzt vorgehen, d. h., ihr müßt nicht pusten, sondern die Luft aus dem Spalt um den Korken herum aus der Flasche saugen.

Diese seltsamen Erscheinungen erklären sich so: Wenn ihr in den Flaschenhals hineinpustet, blast ihr in das Gefäß durch den Spalt zwischen Flaschenhals und Korken Luft. Dadurch wird der Luftdruck in der Flasche erhöht, und er schleudert den Korken mit Kraft heraus. Saugt ihr nun aber die Luft an, so verdünnt sich die Luft in der Flasche, und durch den äußeren Luftdruck wird der Korken hineingestoßen.

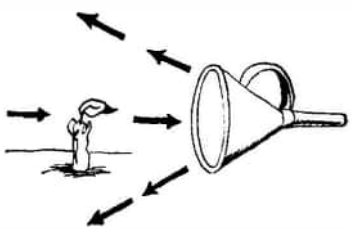
Das Experiment gelingt nur dann richtig, wenn der Flaschenhals völlig trocken ist. Ein feuchter Korken reibt sich an der Innenwand und bleibt stecken.

Das Schicksal des Kinderluftballons

Die einer Kinderhand entglittenen Luftballons fliegen davon. Wohin? Wie hoch können sie fliegen?

Ein Luftballon, der sich losgerissen hat, fliegt nicht bis in die oberen Schichten der Atmosphäre, sondern nur bis zu seiner „Grenze", d. h. bis in eine Höhe, wo infolge der abnehmenden Luftdichte das Ballongewicht dem Gewicht der verdrängten Luft gleich ist. Doch nicht immer erreicht er diese Grenze. Da sich der Ballon beim Aufsteigen ausdehnt (infolge der Verringerung des Außendruckes), kann er platzen, ehe er diese Grenze erreicht.

Abbildung 92



Wie pustet man eine Kerze aus?

Es scheint einfach zu sein, eine Kerze auszupusten, doch klappt es nicht immer. Versucht mal eine Kerze mit einem Trichter auszupusten. und ihr werdet euch davon überzeugen, daß dazu besonderes Geschick nötig ist.

Haltet den Trichter in Richtung Kerzenflamme und blast durch den Trichter, das dünne Rohr mit

dem Mund haltend. Die Flamme rührt sich überhaupt nicht, obgleich der aus der Trichteröffnung kommende Luftstrahl direkt auf die Kerze gerichtet zu sein scheint.

In der Annahme, daß der Trichter zu weit weg ist von der Flamme, geht ihr näher damit an die Kerze heran und beginnt erneut zu pusten. Das Resultat ist überraschend. Die Flamme weicht nicht zurück, sondern neigt sich euch zu, dem aus der Trichteröffnung kommenden Luftstrahl entgegen.

Was ist denn nun zu tun, wenn ihr die Kerze auslöschen wollt? Haltet den Trichter so, daß die Flamme sich nicht auf der verlängerten Trichterachse befindet, sondern in der Fortsetzung des kegelförmigen Randes. Blast ihr nun so in den Trichter, löscht ihr die Kerze ohne Mühe.

Das erklärt sich damit, daß der Luftstrahl, wenn er aus dem engen Rohr in die Trichteröffnung tritt, nicht in der Achsenrichtung weiterläuft, sondern längs des kegelförmigen Trichters strömt und dabei einen besonderen Luftwirbel erzeugt. Längs der Achse des Trichters aber entsteht ein Luftunterdruck, und infolgedessen entsteht ungefähr in seinem Zentrum eine entgegengesetzte Luftbewegung. Damit wird klar, warum die Flamme, wenn sie gegenüber der Trichtermitte steht, sich zu ihm neigt, sich dagegen aber wegneigt und verlöscht, sofern sie sich gegenüber dem Trichterrand befindet.

Der Autoreifen

Das Rad eines Autos rollt nach rechts. Sein Reifen dreht sich in Uhrzeigerrichtung. Die Frage lautet: In welcher Richtung bewegt sich dabei die Luft im Schlauch? Entgegen der Drehbewegung oder in der gleichen Richtung?

Die Luft im Schlauch bewegt sich vom Druckpunkt in beide Richtungen. Vorwärts und rückwärts.

Warum läßt man zwischen den Schienen einen Spielraum?

An den Stoßstellen der Schienen läßt man stets einen Zwischenraum — den Spielraum. Das geschieht absichtlich. Läßt man diesen Spielraum nicht und be-

festigt die Schienen dicht einander berührend, ist die Gleisanlage bald nicht mehr zu gebrauchen. Das hängt damit zusammen, daß sich alle Gegenstände bei Erwärmung in jeder Richtung ausdehnen. Auch die stählerne Schiene wird im Sommer länger, wenn sie von den Sonnenstrahlen erwärmt wird. Läßt man für die Ausdehnung keinen Platz, so verbiegen sich die Schienen, da sie mit großer Kraft gegeneinander drücken. Dabei reißen sie die Verankerung heraus und deformieren das Gleis.

Der Spielraum berücksichtigt auch die Winterzeit. Im Winter, wenn die Schienen sich infolge der Kälte zusammenziehen, werden sie kürzer. Die Zwischenräume vergrößern sich noch mehr. Deshalb werden sie unter Berücksichtigung der Klimabedingungen, wo die Eisenbahnlinie verläuft, angelegt.

Ein Beispiel für die praktische Anwendung der Eigenschaft von Körpern, sich beim Abkühlen zusammenzuziehen, ist die bekannte Methode, einen erhitzten Eisenreifen auf ein Wagenrad zu ziehen. Wenn der Reifen abkühlt, wird er enger und umschließt das Rad ganz straff.

Gläser für Tee und Kwaß

Sicher habt ihr schon bemerkt, daß Gläser für kalte Getränke oft mit einem dicken Boden hergestellt werden. Warum, ist klar. So ein Glas kippt nicht so leicht um. Warum werden solche Gläser nicht für den Tee verwendet? Es ist doch auch in diesem Fall gut, wenn die Gläser nicht so leicht umkippen können.

Gläser mit dickem Boden werden für heiße Getränke deshalb nicht verwendet, weil die Wände dieser Gefäße durch die heiße Flüssigkeit stärker erhitzt werden als der dicke Boden. Derartiges Geschirr ist ungeeignet für den Tee. Es platzt. Je dünner das Gefäß und je geringer der Unterschied zwischen Stärke der Seiten und des Bodens, um so gleichmäßiger ist die Erwärmung und desto besser ist das Glas gegen das Platzen geschützt.

Das Loch im Teekesseldeckel

Im Deckel eines Metallteekessels befindet sich ein kleines Loch. Wozu? Der Dampf braucht einen Aus-

weg, andernfalls hebt er den Deckel vom Topf. Beim Erwärmen dehnt sich der Deckel nach allen Seiten aus. Was geschieht da mit der kleinen Öffnung? Wird sie enger oder weiter?

Beim Erhitzen des Teekesseldeckels vergrößert sich das kleine Loch. Allgemein vergrößern sich Öffnungen und Hohlräume beim Erhitzen in gleichem Umfang wie sich ein entsprechend großes Stück des jeweiligen umgebenden Materials ausdehnt. Aus diesem Grunde vergrößert sich übrigens auch das Fassungsvermögen von Gefäßen beim Erhitzen und nicht umgekehrt wie manche glauben.

Rauch

Warum steigt bei Windstille der Rauch aus dem Schornstein steil auf? Der Rauch steigt deshalb aus dem Schornstein steil auf, weil ihn die heiße Luft, die sich beim Erhitzen ausdehnt und deshalb auch leichter ist als die den Schornstein umgebende, hochträgt. Wenn die mit Rauchpartikelchen angereicherte Luft abkühlt, sinkt der Rauch wieder und breitet sich am Boden aus.

Feuerfestes Papier

Man kann ein Experiment durchführen, bei dem ein Papierstreifen von der Kerzenflamme nicht in Brand gesetzt wird.

Dazu muß man einen Eisenstab mit einem schmalen dünnen Papierstreifen spiralförmig umwickeln. Wenn man den Stab mit dem Papierstreifen in die Flamme einer Kerze hält, brennt das Papier nicht. Das Feuer beleckt das Papier, berußt es, doch fängt es, solange der Eisenstab nicht heiß geworden ist, kein Feuer.

Wieso verbrennt das Papier nicht? Weil das Eisen wie jedes Metall die Wärme gut leitet. Es entzieht dem Papier sehr schnell die Wärme, die von der Flamme auf den Papierstreifen übertragen wird. Nehmt ihr anstelle des Metallstabes Holz, bringt ihr das Papier zum Brennen, weil Holz ein schlechter Wärmeleiter ist. Mit einem Kupferstab gelingt der Versuch besonders gut.

Wickelt ihr einen Faden straff auf einen Schlüssel, könnt ihr einen feuerfesten Faden vorführen.

Wie bereitet man Fensterrahmen für den Winter vor?

Ein gut schließender Fensterrahmen hält die Wärme zurück. Um jedoch den Rahmen gut abzudichten, muß man sich darüber Klarheit verschaffen, warum der zweite Rahmen das Zimmer „wärmt"!

Viele nehmen an, daß man Doppelfenster im Winter nur deshalb verwendet, weil zwei Fenster besser sind als eins. Das stimmt aber nicht. Es geht gar nicht um den zweiten Fensterrahmen, sondern um die Luft, die sich zwischen den Fensterrahmen befindet.

Luft leitet die Wärme sehr schlecht. Deshalb bewahrt gut abgeschlossene Luft, die nicht wegzieht und so Wärme mit sich nimmt, das Zimmer vor dem Auskühlen.

Deshalb muß die Luft dicht eingesperrt werden. Einige meinen, bei dem Dichtmachen der Fenster muß am äußeren Rahmen oben eine Spalte offen bleiben. Das ist ein großer Fehler. Macht man das, dann wird die Luft zwischen den Fenstern von der eindringenden kalten Luft verdrängt, und das Zimmer kühlt aus. Man muß also im Gegenteil beide Rahmen so gut wie möglich abdichten, ohne die geringsten Zuglöcher.

Hat man keinen Kitt zum Abdichten, kann man die Fensterrahmen auch mit schmalen Papierstreifen verkleben. Nur gut abgedichtete Fenster verringern den Verbrauch von Heizungsmaterial.

Warum zieht es vom geschlossenen Fenster?

Es scheint uns seltsam, daß es bei kaltem Wetter oftmals vom Fenster her zieht, obwohl es fest schließt, sorgfältig abgedichtet ist und keinerlei Spalten hat. Und dabei ist da gar nichts Verwunderliches.

Die Zimmerluft befindet sich fast nie im Ruhezustand. Im Raum geht eine ständige fürs Auge nicht wahrnehmbare Luftbewegung vor sich, die durch das Erwärmen und wieder Abkühlen hervorgerufen ist. Beim Erwärmen verdünnt sich die Luft, wird leichter. Vom Abkühlen dagegen wird die Luft dichter und somit schwerer. Die leichte in der Nähe einer Lichtquelle oder des heißen Ofens erwärmte Luft wird von der kalten nach oben zur Zimmerdecke verdrängt, denn die schwere Luft, die sich in der Nähe der Fen-

ster oder Außenwände abgekühlt hat, sinkt auf den Boden herab.

Die Luftbewegung im Zimmer kann man leicht mit einem Luftballon feststellen. Man muß ihn nur ein wenig belasten, damit er nicht zur Zimmerdecke steigt, sondern frei im Raum schwebt. Läßt man solch einen Ballon in Ofennähe los, wandert er durch das ganze Zimmer, von der unsichtbaren Luftströmung mitgerissen: Vom Ofen an der Decke entlang zum Fenster, dort sinkt er herab, treibt zum Ofen und beginnt erneut seinen Kreislauf im Zimmer.

Deshalb spüren wir, daß es vom Fenster her zieht, besonders unten am Boden, obgleich die Fenster ausreichend abgedichtet sind und keine kalte Außenluft durch irgendwelche Spalten dringen kann.

Wie kühlt man mit Eis?

Wenn ihr Kwaß mit Eis kühlen wollt, wo stellt ihr dann den Krug hin, auf das Eis, oder legt ihr das Eis darauf? Wir stellen, ohne zu überlegen, den Krug auf das Eis, wie man einen Kochtopf auf das Feuer stellt. Doch so kühlt man nicht. Erwärmen muß man tatsächlich von unten, doch abkühlen dagegen von oben her.

Versucht mal herauszubekommen, warum es vorteilhafter ist, von oben, statt von unten her zu kühlen. Ihr wißt, daß kalter Stoff dichter ist als warmer. Ein kaltes Getränk ist dichter als ein nicht gekühltes. Legt ihr das Eis oben auf den Kwaßkrug, kühlen sich die oberen Schichten des Getränkes (die sich dicht am Eis befinden) ab, werden dadurch schwerer und sinken hinab. Ihren Platz nehmen andere, noch nicht gekühlte Kwaßmengen ein. Das Eis kühlt sie ab, und sie sinken ebenfalls hinab. In kurzer Zeit ist der gesamte Kwaß in dem Krug in die Nachbarschaft des Eises geraten, und er wird kühl. Anders verhält es sich, wenn ihr den Krug auf das Eis stellt. Dann kühlt sich zunächst die untere Schicht des Getränkes ab. Sie wird dichter und bleibt am Boden, ohne den noch wärmeren Schichten Platz zu machen. Es geht in diesem Falle keinerlei Vermischung der Flüssigkeit vor sich, und daher kühlt sie sehr langsam ab.

Nicht nur Getränke kühlt man zweckmäßigerweise von oben her. Fleisch, Gemüse und Fisch sollte man zum Kühlen auch unter das Eis legen und nicht darauf.

Denn nicht in erster Linie das Eis, sondern die kalte Luft kühlt. Kalte Luft aber sinkt herab, nicht umgekehrt. Und wenn es nötig ist, mit Eis zum Beispiel das Zimmer, in dem ein Kranker liegt, zu kühlen, dann legt das Eis nicht unter die Liege, sondern irgendwo oben hin, auf ein Regal, oder hängt es unter die Zimmerdecke.

Die Farbe des Wasserdampfes

Habt ihr schon einmal Wasserdampf gesehen? Könnt ihr sagen, was für eine Farbe er hat?

Wasserdampf ist im wahrsten Sinne des Wortes völlig durchsichtig und farblos. Man kann ihn ebenso wenig sehen wie Luft. Der weiße Nebel, den man gewöhnlich als „Dampf" bezeichnet, ist eine Ansammlung kleinster Wassertröpfchen. Das ist fein gesprühtes Wasser, aber kein Dampf.

Warum „singt" der Samowar?

Wovon kommt der singende Ton, den der Samowar von sich gibt, kurz bevor das Wasser kocht? Das Wasser, das sich direkt am Heizrohr des Samowars befindet, verwandelt sich in Dampf, der im Wasser kleine Bläschen bildet. Da diese leichter sind, werden sie vom umgebenden Wasser nach oben gedrängt. Hier geraten sie in Wasser, dessen Temperatur unter 100 °C liegt. Der Dampf in den Bläschen kühlt ab, zieht sich zusammen, und die Wände der Bläschen zerplatzen unter dem äußeren Wasserdruck. Und so steigen vor Beginn des Kochens immer mehr Bläschen auf, kommen jedoch nicht bis zur Wasseroberfläche und zerplatzen unterwegs mit leichtem Knacken.Von diesem vielfachen Knistern kommt auch das Geräusch, das wir vor dem Sieden hören.

Wenn bereits das gesamte Wasser im Samowar oder Teekessel bis zur Siedetemperatur erhitzt ist, hören die Bläschen auf zu platzen, und der „Gesang" verstummt. Kühlt der Samowar jedoch etwas ab, entstehen erneut Bedingungen für das Geräusch, und erneut beginnt der „Gesang".

Das ist der Grund, warum die Samoware und Teekessel nur vor dem Sieden bzw. beim Abkühlen „singen". Der kochende Samowar gibt niemals diesen singenden Ton von sich.

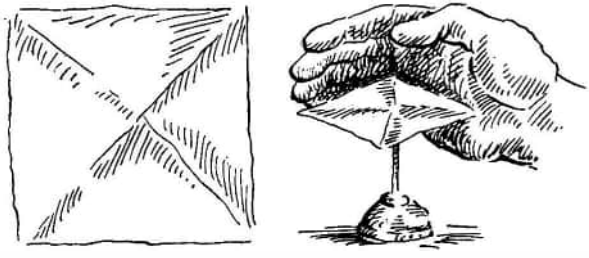
Die geheimnisvolle Mühle

Schneidet aus dünnem Zigarettenpapier ein Quadrat. Faltet es in den Diagonalen und schlagt es wieder auseinander. Jetzt wißt ihr, wo der Schwerpunkt des Quadrates liegt. Legt das Papier nunmehr so auf eine Nadelspitze, daß die Nadel das Quadrat genau im Zentrum stützt.

Das Papier befindet sich im Gleichgewicht. Vom geringsten Hauch beginnt es sich jedoch auf der Spitze zu drehen.

Bis jetzt ist an dem Gerät nichts Geheimnisvolles festzustellen. Doch bringt eure Hand vorsichtig in seine Nähe, wie auf Abb. 93 gezeigt, damit das Papier

Abbildung 93



nicht von dem Luftzug davongeweht wird. Ihr entdeckt eine seltsame Wirkung. Das Papier beginnt sich zu drehen, erst langsam, dann immer schneller. Zieht die Hand zurück — und das Drehen hört auf. Nähert die Hand — schon beginnt es wieder.

Dieses rätselhafte Drehen gab in den 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts einigen Veranlassung zu glauben, unser Körper verfüge über irgendwelche übernatürlichen Eigenschaften. Die Verehrer der Mystik fanden in diesem Experiment die Bestätigung ihrer verschwommenen Lehren von geheimen Kräften, die vom menschlichen Organismus ausgehen. Dabei ist die Ursache völlig natürlich und äußerst einfach: Die Luft, die unter eurer Handfläche erwärmt wurde, steigt hoch und veranlaßt das Quadrat, sich zu drehen, ähnlich wie bei der allen bekannten „Schlange" über der Lampe, denn beim Falten des Papiers habt ihr den Feldern eine leichte Neigung gegeben.

Der aufmerksame Beobachter wird feststellen, daß die beschriebene Mühle sich in bestimmter Richtung dreht — vom Ballen, längs der Handfläche zu den Fingern. Das erklärt sich durch die Temperaturunter-

schiede der einzelnen Teile der Hand. Die Fingerspitzen sind stets kälter als die Handfläche. Daher entsteht bei den Handflächen stets ein kräftigerer aufsteigender Luftstrom, der stärker auf das Papier wirkt als der Wärmestrom, der von den Fingern ausgeht.

Wärmt der Pelz?

Was würdet ihr sagen, wenn man euch weismachen wollte, daß ein Pelzmantel überhaupt *nicht wärmt*? Ihr würdet das für einen Scherz halten, nicht wahr? Und wenn man euch das mittels einiger Experimente beweisen würde? Führt zum Beispiel folgendes Experiment durch.

Merkt euch, welche Temperatur ein Thermometer anzeigt, und steckt es dann in einen Pelz. Nach einigen Stunden holt es heraus. Ihr werdet euch davon überzeugen, daß es nicht ein Viertel Grad mehr anzeigt. Da habt ihr den Beweis, daß der Pelz nicht wärmt. Ihr könnt den Pelz sogar verdächtigen, daß er *kühlt*. Nehmt zwei Kolben mit Eis. Den einen verbergt im Pelz, den anderen stellt ins Zimmer. Ist der letztere aufgetaut, öffnet den Pelz. Ihr werdet sehen, daß dort das Eis kaum begonnen hat zu tauen. Also hat der Pelz das Eis nicht nur nicht erwärmt, sondern eher gekühlt, sein Tauen verzögert.

Was kann man hier entgegnen. Wie kann man die Schlußfolgerungen verwerfen?

Überhaupt nicht. Pelzmäntel wärmen wirklich nicht, wenn man unter dem Wort „wärmen“ *Wärmeabgabe* versteht. Die Glühbirne wärmt, der Ofen wärmt, der menschliche Körper gibt Wärme ab, weil alle diese Dinge Wärmequellen sind. Doch der Pelzmantel wärmt in diesem Sinne nicht. *Er gibt keine Wärme ab, sondern hindert nur die Körperwärme zu entweichen.* Deshalb fühlt sich ein warmblütiges Lebewesen, dessen Körper eine Wärmequelle darstellt, im Pelz wärmer als ohne ihn. Doch das Thermometer erzeugt keine eigene Wärme, und deshalb ändert sich die Temperaturanzeige davon, daß wir es in den Pelz stecken, nicht. Das im Pelz verborgene Eis hält seine niedrige Temperatur länger, weil das Fell als schlechter Wärmeleiter den Wärmezustrom von außen, von der Zimmerluft, verhindert.

In diesem Sinne hält der Schnee die Erde wie ein

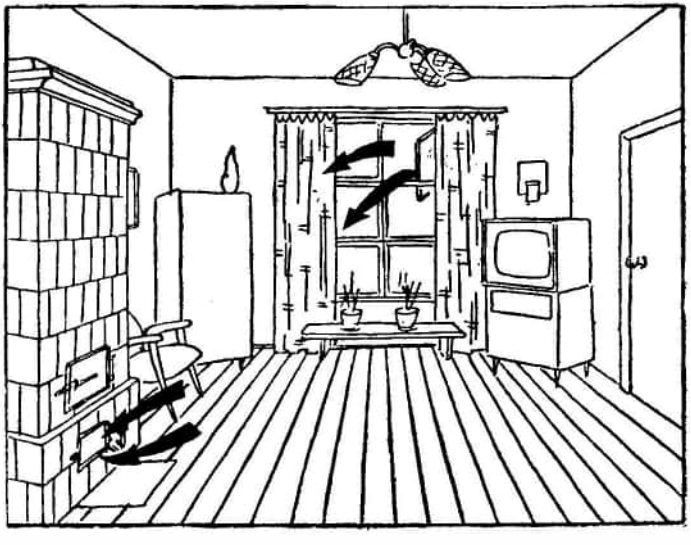
Pelz warm, weil er wie alle pulverförmigen Körper ein schlechter Wärmeleiter ist. Er verhindert die Wärmeabgabe von dem von ihm bedeckten Boden. Am Erdboden, der von Schnee bedeckt ist, zeigt das Thermometer nicht selten 10 °C mehr an als an Böden, die schneefrei sind. Diese Wärmewirkung der Schneedecke ist den Bauern gut bekannt.

Also müssen wir auf die Frage, ob der Pelz wärmt, antworten, daß er uns hilft, uns selbst warm zu halten. Richtiger wäre zu sagen, daß wir den Pelzmantel wärmen und nicht umgekehrt.

Wie lüftet man im Winter das Zimmer?

Die beste Methode, im Winter das Zimmer zu lüften, besteht darin, in der Zeit, da der Ofen geheizt wird, die Fensterklappe zu öffnen. Die kalte, frische Außenluft verdrängt dabei die warme, leichtere Zimmerluft in den Ofen, von wo sie durch den Schornstein nach außen dringt.

Abbildung 94

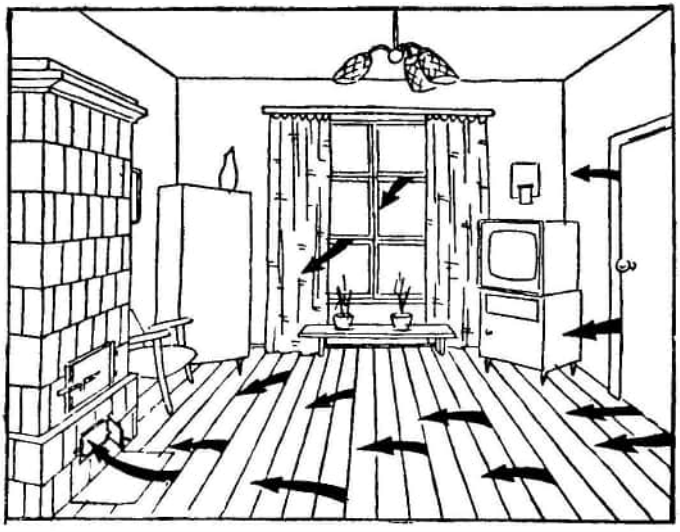


Man darf aber nicht glauben, daß dieser gleiche Vorgang bei geschlossener Fensterklappe vor sich geht. Die Außenluft dringt dann durch Wandritzen ein. Sie sickert ins Zimmer, doch nicht in ausreichen-

der Menge, um das Brennen im Ofen zu unterstützen. Deshalb dringt neben frischer Außenluft durch Spalten und Ritzen auch aus Nebenräumen Luft ein, die nicht sauber und frisch sein kann.

Der Unterschied zwischen dem Luftstrom in dem einen und dem anderen Fall wird deutlich auf unseren Abbildungen dargestellt. Die Luftströmungen werden durch Pfeile gekennzeichnet.

Abbildung 95



Wo muß sich die Fensterklappe befinden?

Wo soll man eine Fensterklappe anbringen, oben oder unten? Es gibt Wohnungen, wo die Fensterklappen unten sind. Das ist natürlich bequem. Um sie zu öffnen oder zu schließen, braucht man nicht auf den Stuhl zu steigen. Allerdings erfüllt die unten angeordnete Fensterklappe ihren Zweck schlecht — nämlich das Zimmer zu lüften, ohne das ganze Fenster öffnen zu müssen. Ja, wie kommt der Austausch durch die Fensterklappe zwischen Außen- und Zimmerluft eigentlich zustande? Dadurch, daß die Außenluft kälter als die Zimmerluft ist, und da sie schwerer ist, die letztere verdrängt. Doch diese erfaßt nur den Teil des Zimmers, der niedriger als die Fensterklappe liegt. All jene Luft, die sich im Zimmer oberhalb des Niveaus der Fensterklappe befindet, nimmt an dem Austausch nicht teil, sie wird nicht ventiliert.

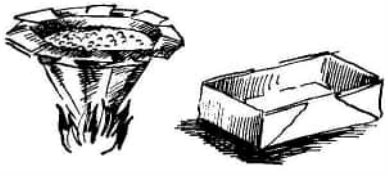
Ein Papiertopf

Schaut auf Abb. 96. Ein Ei kocht im Wasser, das in eine Papiertüte gefüllt wurde.

„Das Papier wird aber gleich verbrennen, und das Wasser läuft aus", sagt ihr.

Versucht dieses Experiment durchzuführen. Nehmt dafür festes Pergamentpapier und befestigt es ordentlich an einem Draht. Ihr werdet euch davon überzeugen, daß das Feuer dem Papier keinen Schaden zufügt. Ursache ist, das Wasser in einem offenen Gefäß nur bis zum Siedepunkt, also bis 100 °C erhitzt werden kann. Deshalb verhindert das Wasser, welches übrigens über eine hohe Wärmespeicherfähigkeit verfügt, eine Erhitzung des Papiers wesentlich über 100 °C, d. h. auf eine Temperatur, bei der es entflammt, indem es die überschüssige Wärme dem Papier entzieht. (Praktischer ist es, eine Papierschachtel zu verwenden, wie sie auf Abb. 96 rechts abgebildet ist.)

Abbildung 96



Zu dieser Art von Erscheinungen gehört auch das bedauerliche Experiment, das zerstreute Leute unfreiwillig veranstalten, wenn sie den Samowar ohne Wasser anheizen. Der Samowar schmilzt. Die Ursache ist klar. Die Lötstellen schmelzen leicht, und nur die enge Nachbarschaft mit dem Wasser rettet sie vor der gefährlichen Überhitzung. Auch gelötete Töpfe darf man in keinem Fall ohne Wasser erhitzen.

Weiter könnt ihr eine Bleiplombe in einer Schachtel aus fester Pappe zum Schmelzen bringen. Ihr müßt die Flamme nur direkt auf die Stelle richten, auf der das Blei liegt. Das Metall als relativ guter Wärmeleiter entzieht dem Papier sehr schnell die Wärme und verhindert damit eine Erwärmung, die wesentlich über dem Schmelzpunkt, das sind 335 °C (für Blei), liegt. Diese Temperatur reicht für die Entzündung von Papier nicht aus.

Wozu dient der Lampenzylinder?

Kaum jemand weiß, wie lange es gedauert hat, bis der Glaszylinder seine heutige Form erhielt. Viele Jahrtausende nutzten die Menschen die Flamme als Lichtquelle, ohne sich dabei des Glases zu bedienen. Das Genie eines Leonardo da Vinci (1452—1519) war

notwendig, um eine entscheidende Vervollkommnung der Lampe vorzunehmen. Doch Leonardo umgab die Flamme nicht mit einem Glas-, sondern einem Metallrohr. Noch weitere drei Jahrhunderte vergingen, bis der durchsichtige Glaszylinder das Metallrohr ablöste. Wie ihr seht, ist der Lampenzylinder eine Erfindung, an der ...zig Generationen arbeiteten.

Was hat er für eine Bedeutung?

Nicht jeder wird eine richtige Antwort auf diese so natürliche Frage parat haben.

Die Flamme vor dem Wind zu schützen, ist nur eine zweitrangige Aufgabe des Glases.

Die Hauptwirkung besteht in der Verstärkung der *Leuchtkraft* der Flamme, in der Beschleunigung des Verbrennungsprozesses. Die Rolle des Zylinders ist die gleiche wie die des Schornsteines oder des Ofenrohrs. Sie verstärkt den Luftzustrom zur Flamme, verstärkt den „Zug".

Machen wir uns das deutlich. Die Luftsäule, die sich im Zylinder befindet, wird von der Flamme weitaus schneller erhitzt als die Luft rings um die Lampe herum. Die erhitzte und dadurch leichter gewordene Luft wird danach durch die schwerere, nicht erwärmte Luft, die von unten durch die Öffnung im Brenner eintritt, verdrängt. Auf diese Weise entsteht ein ständiger Luftstrom von unten nach oben, eine Bewegung, die ununterbrochen die Verbrennungsprodukte wegträgt und frische Luft heranführt. Je höher das Zylinderglas, um so größer ist der Gewichtsunterschied zwischen der Säule erhitzter und der Säule nichterhitzter Luft. Gleichzeitig ist der Zustrom frischer Luft um so kraftvoller, und demzufolge wird die Verbrennung beschleunigt. Es geht hier das gleiche vor sich wie in hohen Fabrikschloten, weshalb sie auch so hoch gebaut werden.

Es ist interessant, daß bereits Leonardo eine klare Vorstellung von dieser Erscheinung hatte.

In seinen Handschriften können wir folgende Notiz finden: „Wo Feuer ist, da entsteht ringsherum eine Luftbewegung. Sie unterhält und verstärkt es."

Warum löscht die Flamme sich nicht selbst aus?

Wenn man gründlich über den Verbrennungsprozeß nachdenkt, drängt sich die Frage auf: Wie kommt es, daß die Flamme sich nicht selbst auslöscht? Sind doch

die Produkte der Verbrennung, Kohlenoxid und Wasserdampf, *nichtbrennbare* Stoffe, Stoffe, die nicht imstande sind, das Feuer zu unterhalten. Demzufolge müßte die Flamme vom ersten Moment des Brennens an von nichtbrennbaren Stoffen umgeben sein, die die Luftzufuhr verhindern. Ohne Luft kann die Verbrennung nicht vonstatten gehen, und die Flamme muß verlöschen.

Warum geschieht das jedoch nicht? Warum dauert die Verbrennung an, solange Brennstoff vorhanden ist? Nur deshalb, weil die Gase sich durch Erwärmung ausdehnen und damit *leichter werden*. Allein diesem Umstand ist es zu verdanken, daß die erhitzten Verbrennungsprodukte nicht am Ort ihrer Entstehung, in unmittelbarer Nachbarschaft mit der Flamme verbleiben, sondern unverzüglich durch die frische Luft nach oben abgedrängt werden. Wäre das Gesetz des Archimedes nicht für Gase gültig (oder wenn die Schwerkraft nicht wäre), würde jede Flamme nach kurzem Brennen sich selbst auslöschen.

Es ist sehr einfach, sich davon zu überzeugen, wie vernichtend die Verbrennungsprodukte auf die Flamme wirken. Ihr wendet diese Wirkung oft an, ohne es zu ahnen. Wenn ihr die Petroleumlampe auslöscht, wie macht ihr das? Ihr blast von oben in den Zylinder hinein, d. h., ihr drückt die Verbrennungsprodukte auf die Flamme hinunter, und sie erlöscht, weil sie keine Frischluft erhält.

Warum löscht Wasser das Feuer?

Auf diese einfache Frage werden nicht immer richtige Antworten gegeben.

Unsere Leser werden es uns wohl nicht verübeln, wenn wir kurz erklären, worin eigentlich die Wirkung des Wassers auf das Feuer besteht.

Erstens. Beim Zusammentreffen mit einem heißen Gegenstand verwandelt sich das Wasser in Dampf, wobei es dem heißen Körper viel Wasser entzieht. Um kochendes Wasser in Dampf zu verwandeln, ist reichlich fünfmal soviel Wärme nötig, wie gebraucht wird, um die gleiche Menge kaltes Wasser auf 100 °C zu erhitzen.

Zweitens. Der entstehende Dampf nimmt ein hundertmal so großes Volumen ein wie die Wassermenge, aus der er hervorgeht. Indem der Dampf den heißen

Körper einhüllt, hindert er den Luftzutritt. Doch ohne Luft gibt es keine Verbrennung.

Um die feuerlöschende Wirkung des Wassers zu erhöhen, mischt man manchmal ... Pulver darunter! Das mag seltsam erscheinen, doch es ist absolut vernünftig. Das Pulver verbrennt rasch und entwickelt eine große Masse nichtbrennender Gase, wodurch die Verbrennung behindert wird.

Aufwärmen mit Eis und heißem Wasser

Kann man mit einem Eisstück ein zweites erwärmen?

Kann man mit einem Stück Eis ein zweites abkühlen?

Kann man mit einer Portion kochendes Wasser eine zweite erhitzen?

Nähert man ein Eisstück, sagen wir von —20 °C, einem Eisstück von —5 °C, so erhöht sich die Temperatur des ersteren, und die des zweiten wird niedriger.

Deshalb ist es durchaus möglich, Eis mit Eis zu kühlen oder zu erwärmen.

Kochendes Wasser jedoch durch eine andere Menge kochendes Wasser aufzuheizen (bei gleichem Druck), ist jedoch unmöglich, da bei gegebenem Druck die Siedetemperatur stets gleich ist.

Kann man Wasser durch kochendes Wasser zum Sieden bringen?

Nehmt eine kleine Flasche (oder ein Marmeladenglas), gießt Wasser hinein und hängt sie an einem Draht in einen mit klarem Wasser gefüllten Topf, der auf dem Feuer steht so, daß sie den Topfboden nicht berührt. Wenn das Wasser im Topf anfängt zu kochen, so nimmt man an, daß kurz darauf auch das Wasser im Fläschchen zu sieden beginnen wird. Doch ihr könnt warten, so lange ihr wollt, ihr werdet das nicht erleben. Das Wasser in der kleinen Flasche wird heiß, sehr heiß, doch zum Kochen kommt es nicht. Das siedende Wasser erweist sich als nicht heiß genug, um anderes Wasser zum Kochen zu bringen.

Das Ergebnis scheint überraschend zu sein, und doch war es vorauszusehen. Um Wasser zum Sieden zu bringen, genügt es nicht, es auf 100 °C zu erwärmen. Ihm ist noch eine beträchtliche Menge sogenannter latenter Wärme hinzuzusetzen. Reines Wasser siedet

bei 100 °C. Unter normalen Bedingungen steigt seine Temperatur nicht höher, soviel wir es auch erwärmen. Das bedeutet, die Wärmequelle, mit der wir das Wasser im Fläschchen erhitzen, hat eine Temperatur von 100 °C. Sie kann das Wasser im Fläschchen auch nur auf 100 °C erwärmen. Wenn dieses Temperaturgleichgewicht eintritt, *erfolgt kein weiterer Wärmefluß vom Topfwasser zum Fläschchen*. Deshalb können wir bei solch einer Wärmeübertragungsmethode nicht den Überschuß latenter Wärme, der für den Übergang von Wasser in Dampf nötig ist, vermitteln (jedes auf 100 °C erhitzte Gramm Wasser benötigt noch 500 Kalorien[1]), um in Dampf überzugehen). Das ist der Grund, warum das Wasser in der Flasche, obgleich es sich erhitzt, nicht siedet.

Nun kann sich die Frage ergeben: Wodurch unterscheidet sich das Wasser in der Flasche von dem Wasser im Topf? Schließlich ist in der Flasche das gleiche Wasser, nur durch die Glaswand von der übrigen Wassermasse abgetrennt. Weshalb vollzieht sich mit ihm nicht das gleiche wie mit dem übrigen Wasser?

Weil die Trennwand das Wasser im Fläschchen daran hindert, an den Strömungen teilzuhaben, die das Wasser im Kochtopf bewegen. Jede Wasserpartikel im Kochtopf kann unmittelbar mit dem aufgeheizten Topfboden in Berührung kommen. Das Flaschenwasser hat jedoch nur mit dem Siedewasser Berührung.

So also ist es unmöglich, mit reinem kochendem Wasser Wasser zum Sieden zu bringen. Doch es genügt, in den Topf eine Handvoll Salz zu streuen, und die Sache sieht schon ganz anders aus. Salzwasser kocht nicht bei 100 °C, sondern bei höherer Temperatur. Deshalb kann es seinerseits das Wasser im Fläschchen zum Sieden bringen.

Kann man Wasser durch Schnee zum Sieden bringen?

„Wenn kochendes Wasser dazu nicht zu gebrauchen ist, wer wird da schon von Schnee reden!" mag mancher Leser antworten. Doch seid nicht voreilig mit der Antwort. Besser ist es, ein Experiment zu machen,

---

[1]) Kalorie — Einheit der Wärmemenge. Eine *kleine Kalorie* (Gramm-Kalorie) ist die Wärmemenge, die nötig ist, um die Temperatur von 1 g Wasser um 1 °C zu erhöhen.

möglicherweise mit dem gleichen Fläschchen, das wir eben benutzt haben.

Gießt es halb voll Wasser, und hängt es in *kochendes Salzwasser*. Wenn das Wasser in dem Glas kocht, nehmt es aus dem Topf heraus, verschließt die Flasche fest mit einem vorher bereitgelegten Korken. Jetzt stellt die Flasche kopf und wartet, bis das Sieden aufhört. Ist dieser Augenblick gekommen, übergießt das Fläschchen mit kochendem Wasser — das Flaschenwasser siedet nicht. Doch legt ihr auf den Flaschenboden etwas Schnee oder übergießt ihn einfach mit kaltem Wasser, wie auf Abb. 97 dargestellt, werdet ihr sehen, daß das Wasser siedet.

Abbildung 97



Der Schnee vollbrachte, was das kochende Wasser nicht vermochte.

Das ist um so rätselhafter, zumal die Flasche beim Anfassen als nicht sehr heiß empfunden wird, nur warm. Und doch habt ihr mit eigenen Augen gesehen, wie das Wasser kocht.

Des Rätsels Lösung ist, daß der Schnee die Glaswand abkühlte und der Dampf sich infolgedessen im Innern zu Wassertröpfchen verdichtet hat. Da aber die Luft aus der Flasche bereits während des Siedens vertrieben wurde, ist das Wasser jetzt einem viel geringeren Druck ausgesetzt. Bekanntlich siedet eine Flüssigkeit bei geringerem Druck bei niedrigerer Temperatur. Wir haben in unserer Flasche also zwar siedendes Wasser, aber kein *kochheißes*.

Sind die Glaswände aber dünn, so kann die plötzliche Verdichtung des Dampfes im Innern zu einer Implosion führen. Der äußere Luftdruck, der auf nicht genügend Widerstand aus dem Flascheninnern stößt, vermag das Glas zu zerdrücken. Es ist deshalb besser, ein rundes Glas zu verwenden (ein Kolben mit gewölbtem Boden), damit die Luft auf die Wölbung drückt.

Abbildung 98



Ungefährlicher ist es, einen derartigen Versuch mit einer Blechflasche (für Petroleum, Öl oder dgl.) zu machen. Nachdem ihr ein wenig Wasser zum Sieden gebracht habt, schraubt den Deckel fest zu und übergießt das Gefäß mit kaltem Wasser. Im gleichen Moment verformt sich die Blechflasche durch den Druck der Außenluft, weil sich der Dampf im Innern bei der Abkühlung in Wasser verwandelt.

Die Blechflasche wird durch den Luftdruck wie durch Schläge mit einem schweren Hammer verbeult (Abb. 98).

Das heiße Ei in der Hand

Warum verbrennt ein aus dem kochenden Wasser genommenes Ei die Hand nicht? Das aus dem sprudelnden Wasser geholte Ei ist feucht und heiß. Das auf der heißen Eioberfläche verdampfende Wasser kühlt die Schale ab, und die Hand empfindet deshalb die Hitze nicht. Doch das trifft nur für die ersten Augenblicke zu, solange das Ei nicht getrocknet ist. Danach wird seine hohe Temperatur recht spürbar.

Fleckenreinigen mit dem Bügeleisen

Wie kommt die Beseitigung von Fettflecken mit einem heißen Bügeleisen zustande?

Die Entfernung von Fettflecken aus Kleidungsstücken durch Erhitzen ist dadurch möglich, weil die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten sich durch Erhöhung der Temperatur verringert. „Ist die Temperatur an verschiedenen Stellen des Fettfleckens unterschiedlich, so strebt das Fett von den erhitzten zu den kalten Stellen. Legen wir an einer Seite des Gewebes das heiße Eisen, an der anderen ein Stück Baumwollstoff an, so geht das Fett in den Baumwollstoff über" (Maxwell „Wärmelehre"). Das Material, welches das Fett aufsaugt, muß also an die dem Bügeleisen entgegengesetzte Seite gebracht werden.

Wie weit kann man von Erhebungen blicken?

Befinden wir uns auf ebener Erde, sehen wir die Umgebung nur bis zu einer bestimmten Grenze. Diese Grenze des Rundblicks nennt man „Horizontlinie". Bäume, Häuser und andere hohe Objekte, die weiter entfernt sind als der Horizont, sind nicht vollständig, sondern nur in ihren oberen Teilen zu sehen. Die unteren Abschnitte sind durch die Erdkrümmung verdeckt, denn auch das ebene Festland und das glatte Meer, obwohl sie uns völlig flach erscheinen, sind in Wirklichkeit gekrümmt. Sie sind ein Abschnitt des gewölbten Erdballs.

Wie weit kann ein Mensch von mittlerem Wuchs sehen, wenn er auf dem Flachland steht?

Er kann die Umgebung in nur 5 km Entfernung überblicken. Um weiter sehen zu können, muß er sich

auf einen höher gelegenen Standplatz begeben. Ein Reiter kann in der Ebene 6 km übersehen. Ein Seemann auf einem 20 m hohen Schiffsmast (über dem Wasser) kann das Meer im Umkreis von 16 km überschauen. Von der Spitze eines Leuchtturmes, der 60 m über dem Meeresspiegel liegt, sieht man das Meer fast 30 km weit.

Am weitesten können Land und Meer natürlich die Flieger überblicken. Aus 1 km Höhe bietet sich ein Rundblick von nahezu 120 km, sofern Wolken und Nebel die Sicht nicht beeinträchtigen. In einer Höhe von 2 km kann der Flieger mit einem guten Fernglas 160 km weit sehen. Bei 10 km Höhe weitet sich die Sicht auf 380 km.

Für die sowjetischen Luftschiffahrer, die mit dem Luftschiff „Osoaviachim 1" in eine Höhe von 22 km aufstiegen, breitete sich die Erde nach allen Seiten 560 km weit aus.

Wo zirpt die Grille?

Setzt irgend jemand in die Zimmermitte mit verbundenen Augen und bittet ihn, still zu sitzen, nicht den Kopf zu drehen. Dann nehmt zwei Münzen und klimpert mit ihnen an verschiedenen Stellen im Zimmer, aber in etwa gleichem Abstand von den Ohren des Sitzenden. Er soll die Stelle ermitteln, wo die Münzen klirrten. Es gelingt ihm nicht. Der Ton entstand in einer Ecke des Zimmers, doch euer Freund zeigt in eine völlig entgegengesetzte.

Wenn ihr nicht den gleichen Abstand beibehaltet, werden die Fehleinschätzungen geringer. Jetzt ist der Ton von dem näherliegenden Ohr eures Gastes stärker wahrnehmbar, und dank dessen kann er feststellen, von wo der Laut kommt.

Dieses Experiment zeigt, warum es nicht gelingt, zu bestimmen, wo sich die zirpende Grille befindet. Der schrille Laut ertönt zwei Schritte rechts von euch. Ihr schaut dort hin, doch seht ihr nichts, der Ton kommt bereits eindeutig von links. Ihr dreht den Kopf dort hin, doch ehe ihr es getan habt, kommt der Laut von einer dritten Stelle. Die beeindruckende Flinkheit der Grille versetzt euch in Verwirrung. Je schneller ihr euch nach dem zirpenden Laut wendet, um so rascher vollziehen sich die Sprünge des unsichtbaren Musikanten. In Wirklichkeit jedoch sitzt das

Insekt ruhig am gleichen Ort, und seine Sprünge sind eine Täuschung des Gehörs. Euer Fehler besteht darin, den Kopf hin und her zu wenden und ihn dabei so zu halten, daß die Grille gleich weit von den Ohren entfernt sitzt. Unter dieser Bedingung (ihr wißt das schon von dem oben beschriebenen Versuch) kann man sich leicht irren. Das Zirpen ertönt vor euch, doch ihr meint irrtümlicherweise, er komme aus der entgegengesetzten Richtung.

Das heißt, wenn ihr bestimmen wollt, woher die Laute der Grille, das Rufen des Kuckucks und andere entfernte Geräusche kommen, dann müßt ihr die Augen nicht dem Ton zuwenden, sondern im Gegenteil, abwenden. Übrigens tun wir das auch, wenn wir, wie man sagt, angespannt „lauschen".

Das Echo

Wenn ein von uns ausgestoßener Laut von der Wand oder einem anderen Hindernis reflektiert, zurückkehrt und unser Ohr wieder erreicht, hören wir ein *Echo*. Es ist nur dann deutlich zu hören, wenn zwischen der Entstehung des Tones und seiner Wiederkehr eine nicht zu kurze Zeitspanne liegt. Andernfalls vereint sich der reflektierte Ton mit dem ursprünglichen und verstärkt diesen. Es entsteht ein „Hall", zum Beispiel in großen leeren Räumen.

Stellt euch vor, im Freien zu stehen, und direkt 33 m von euch entfernt steht eine Bauernhütte. Klatscht in die Hände. Der Schall durchläuft die 33 m, bricht sich an den Wänden und kehrt zurück. In welcher Zeit? Da er 33 m hin und wieder zurück, also 66 m zurücklegte, kehrt er nach $66 : 330 = 1/5$ Sekunde zurück. Unser abrupter Laut war so kurz, daß er weniger als 1/5 Sekunde andauerte, d. h. verstummte, ehe das Echo kam. Die beiden Laute vereinten sich nicht — sie waren voneinander getrennt zu hören. Jedes einsilbige Wort wie „ja", „nein" sprechen wir in 1/5 Sekunde aus. Daher hören wir *einsilbige* Wörter als Echo, wenn wir uns 33 m von einem reflektierenden Hindernis entfernt befinden. Das Echo eines *zweisilbigen* Wortes vereint sich bei der gleichen Entfernung mit den ursprünglichen Lauten, verstärkt sie und macht sie unklar. Getrennt hören wir sie nicht.

In welcher Entfernung muß das reflektierende Hindernis sein, damit man deutlich ein *zweisilbiges* Echo

von solchen Wörtern wie „hurra“ oder „oho“ hört? Das Aussprechen dieser Wörter dauert 2/5 Sekunden. In dieser Zeit muß der Schall das Hindernis erreichen und zurückkommen, also die doppelte Entfernung bis zum reflektierenden Objekt. In 2/5 Sekunden durcheilt der Schall $330 \cdot 2/5 =$ annähernd 132 m.

Die Hälfte — 66 m — ist die geringste Entfernung bis zum Hindernis, um das Echo eines zweisilbigen Wortes erklingen zu lassen.

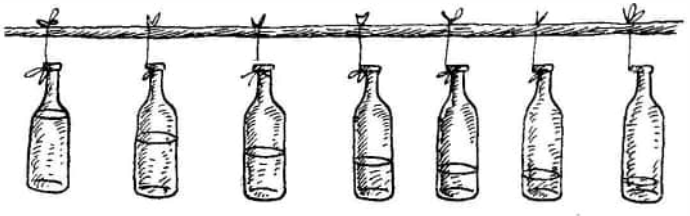
Nun könnt ihr euch selbst ausrechnen, daß für ein dreisilbiges Wort eine Entfernung von hundert Metern nötig ist.

Die musikalischen Flaschen

Wenn ihr ein musikalisches Gehör habt, wird es euch nicht schwerfallen, aus normalen Flaschen eine Art Musikinstrument anzufertigen, auf dem man einfache Melodien spielen kann.

Abbildung 99

Auf Abb. 99 ist zu sehen, wie das zu machen ist. An einer Stange, die horizontal an Stühlen befestigt



ist, werden 7 mit Wasser gefüllte Flaschen aufgehängt. Die erste Flasche ist fast bis oben hin gefüllt, in jeder folgenden ist etwas weniger Wasser als in der vorangehenden. Die letzte Flasche enthält nur ganz wenig Wasser.

Schlagt ihr nun mit einem trockenen Holzstock gegen die Flaschen, könnt ihr ihnen Töne verschiedener Höhe entlocken. Je weniger Wasser in der Flasche ist, um so höher wird der Ton. Deshalb könnt ihr durch Hinzugießen oder Abgießen eine Tonleiter herstellen. Da eine Oktave entsteht, kann man auf diesem Flascheninstrument einfache Melodien spielen.

Das Rauschen in der Muschel

Warum rauscht es in einer Tasse oder einer großen Muschel, die man ans Ohr hält?

Das Geräusch, das wir hören, wenn wir eine Tasse oder große Muschel ans Ohr halten, entsteht, weil die Muschel ein *Resonator* ist, der die Geräusche um uns herum, die wir wegen ihrer Geringfügigkeit gewöhnlich nicht wahrnehmen, verstärkt. Diese Geräuschmischung erinnert an das Rauschen der Meeresbrandung, wodurch auch die verschiedenen Legenden entstanden, die es über das Muschelrauschen gibt.

Durch die Handfläche sehen

Nehmt ein Rohr, das ihr aus Papier dreht, in die linke Hand. Haltet dieses Rohr an das linke Auge und blickt dadurch auf irgendeinen entfernten Gegenstand. Gleichzeitig haltet die rechte Handfläche so vor das rechte Auge, daß sie beinahe das Rohr berührt. Beide Hände sollen etwa 15—20 cm von den Augen entfernt sein. Und nun könnt ihr euch davon überzeugen, daß euer rechtes Auge ausgezeichnet durch die Handfläche blickt, als wäre in die Hand ein rundes Loch geschnitten.

Wie kommt diese Erscheinung zustande?

Die Ursache für diesen überraschenden Effekt ist, daß euer linkes Auge sich darauf vorbereitet hat, durch das Papierloch auf einen entfernten Gegenstand zu blicken. Die Linse hat sich auf die Betrachtung in der Ferne liegender Dinge eingerichtet (das Auge hat sich, wie man sagt, angepaßt). Die Augen sind so beschaffen, daß sie synchron arbeiten, sich gleichmäßig anpassen — das eine wie das andere.

In dem beschriebenen Experiment stellt sich das rechte Auge auch auf die Betrachtung entfernter Dinge ein, und deshalb ist die nahe Handfläche verschwommen. Kurz gesagt, das linke Auge sieht den entfernten Gegenstand scharf, das rechte Auge die Handfläche verschwommen. Und im Endeffekt scheint es, als würdet ihr den entfernten Gegenstand durch die den Blick verdeckende Hand sehen.

Durch das Fernglas

Ihr steht am Meeresstrand und beobachtet mit dem Fernglas ein Boot, das direkt auf das Ufer zuhält. Das Fernglas hat eine dreifache Vergrößerung. Um wieviel vergrößert sich für euch die Geschwindigkeit des Bootes?



Um die Aufgabe lösen zu können, nehmen wir an, das Boot, in einer Entfernung von 600 m entdeckt, bewegt sich auf den Beobachter mit einer Geschwindigkeit von 5 m pro Sekunde zu. Im Fernglas mit seiner dreifachen Vergrößerung erscheint das Boot in einer Größe, als wäre es nur 200 m entfernt. Während einer Minute nähert es sich um $5 \cdot 60 = 300$ m und befindet sich 300 m vom Beobachter entfernt. Im Glas erscheint das Boot, als befände es sich in 100 m Entfernung. Das heißt, für den Beobachter mit dem Fernglas legte das Boot $200 - 100 = 100$ m zurück, während es tatsächlich 300 m schaffte. Daraus wird deutlich, daß bei der Betrachtung durch das Fernglas die Geschwindigkeit des herannahenden Bootes sich nicht um das Dreifache erhöhte, sondern im Gegenteil dreimal langsamer wurde.

Der Leser kann sich davon überzeugen, daß ein gleiches Ergebnis auch bei anderen Größenangaben entsteht — bei anderer Ausgangsentfernung, anderer Bootsgeschwindigkeit und einem anderen Zeitraum.

Somit verringert sich die Näherungsgeschwindigkeit eines Bootes bei der Beobachtung mit dem Fernglas um so viel, wie das Glas die Gegenstände vergrößert.

Davor oder dahinter?

Es gibt zahllose Dinge im Hausgebrauch, mit denen viele Leute unzweckmäßig umgehen. Wir haben schon früher darauf verwiesen, daß einige nicht verstehen, Eis richtig für die Kühlung zu handhaben — sie stellen die zu kühlenden Getränke auf das Eis, anstatt das Eis *darauf* zu legen. Es zeigt sich, daß auch mit einem gewöhnlichen Spiegel viele nicht richtig umgehen können. Jedesmal, wenn sie sich gründlich im Spiegel betrachten wollen, stellen sie die Lampe *hinter* sich, um ihr „Spiegelbild zu beleuchten", statt sich selbst richtig ins Licht zu bringen.

99 von 100 Frauen machen das so. Unsere Leserin ist zweifellos die einhundertste: sie errät, daß man die Lampe vor sich anordnen muß.

Zeichnen vor dem Spiegel

Die Nichtübereinstimmung des Spiegelbildes mit dem Original tritt bei folgendem Experiment noch stärker in Erscheinung. Stellt senkrecht vor euch einen Spiegel

auf den Tisch. Legt ein Blatt weißes Papier davor und versucht, irgendeine Figur zu zeichnen, zum Beispiel ein Rechteck mit Diagonalen. Doch schaut dabei nicht direkt auf eure Hand, sondern verfolgt ausschließlich die Handbewegung, die sich im Spiegelbild zeigt.

Ihr werdet sehen, daß die auf den ersten Blick kinderleichte Aufgabe nahezu undurchführbar ist. Im Laufe vieler Jahre haben sich unsere Wahrnehmungen über das Auge und die Bewegungsempfindungen koordiniert. Der Spiegel zerstört diese Verbindung, denn er vermittelt unseren Augen die Bewegungen unserer Hände verdreht. Die Gewohnheiten widersetzen sich jeder eurer Bewegung. Ihr wollt den Strich nach rechts ziehen, doch die Hand strebt nach links usw.

Noch seltsamer wird das alles, wenn ihr statt einfacher Striche versucht, mit dem Blick in den Spiegel kompliziertere Figuren zu zeichnen oder gar zu schreiben. Es kommt ein lächerlicher Wirrwar zustande.

Die Abdrücke, die auf dem Löschpapier entstehen, sind auch symmetrische Abbildungen. Seht euch die Schriftzüge an, die eure Löschblätter bedecken, und versucht sie zu lesen. Ihr werdet nicht ein Wort entziffern können, nicht einmal ein ganz deutliches. Die Buchstaben haben eine ungewöhnliche Neigung nach links, und die Strichfolge ist vor allem nicht die, an welche ihr gewöhnt seid. Doch stellt ihr dazu im rechten Winkel einen Spiegel auf, erblickt ihr alle Buchstaben so geschrieben, wie ihr es gewohnt seid. Der Spiegel widerspiegelt das symmetrisch, was selbst eine symmetrische Abbildung einer normalen Schrift ist.

Schwarzer Samt und weißer Schnee

Was ist heller: schwarzer Samt im Sonnenschein oder weißer Schnee im Mondschein?

Nichts, so scheint es, ist schwärzer als schwarzer Samt und weißer als weißer Schnee. Jedoch diese nahezu klassischen Beispiele für schwarz und weiß, dunkel und hell sehen ganz anders aus, wenn man sie mit einem unvoreingenommenen physikalischen Gerät, dem Fotometer, betrachtet. Da zeigt sich, daß beispielsweise der schwärzeste Samt im Sonnenschein *heller* ist als der reinste Schnee im Mondschein.

Ursache ist, daß die schwarze Oberfläche, wie dunkel sie auch erscheinen mag, nicht vollständig die auftreffenden Strahlen des sichtbaren Lichtes verschluckt. Selbst Ruß und Platinpech, die schwärzesten Farben, die uns bekannt sind — reflektieren etwa 1—2% des auftreffenden Lichtes. Bleiben wir bei 1% und nehmen wir an, daß der Schnee 100% des einfallenden Lichtes streut (das ist zweifellos übertrieben).[1] Es ist bekannt, daß die Leuchtkraft der Sonne 400 000mal so groß ist als die des Mondes. Deshalb ist das 1% Sonnenlicht, das vom schwarzen Samt zurückgeworfen wird, Tausende Male so intensiv wie das 100%ig vom Schnee reflektierte Mondlicht. Mit anderen Worten ist schwarzer Samt bei Sonnenlicht um ein Vielfaches heller als Schnee im Mondschein.

Das Gesagte bezieht sich natürlich nicht nur auf Schnee, sondern auch auf die kräftigste weiße Ölfarbe (die hellste unter ihnen ist Litopon, sie reflektiert 91% des einfallenden Lichtes). Da es keine Oberfläche gibt, die, sofern sie nicht glüht, mehr Licht reflektiert, als sie empfängt, und der Mond 400 000mal weniger Licht ausstrahlt als die Sonne, ist keine Farbe denkbar, die beim Mondschein objektiv heller wäre als die schwärzeste Farbe im Sonnenlicht.

Warum ist der Schnee weiß?

Warum ist der Schnee weiß, obwohl er aus durchsichtigen Eiskristallen besteht?

Der Schnee ist aus dem gleichen Grunde weiß, aus dem kleine Glassplitter und überhaupt zermahlenes durchsichtiges Material weiß erscheinen. Zerreißt Eis im Mörser oder zerkratzt es mit dem Messer — und ihr erhaltet weißes Pulver. Die Farbe entsteht daher, weil die Lichtstrahlen beim Eindringen in kleinste Stücken durchsichtigen Eises nicht hindurchgehen, sondern sich an den Grenzen zwischen Eis und Luft nach innen brechen (innere Totalreflexion). Die Oberfläche, die unregelmäßig nach allen Seiten die auffallenden Strahlen reflektiert, erscheint dem Auge weiß.

Das heißt, Ursache für die weiße Farbe des Schnees ist seine Krümelstruktur. Füllt man die Hohlräume zwischen den Schneekristallen mit Wasser, verliert

[1] Frisch gefallener Schnee reflektiert nur etwa 80% des auf ihn treffenden Lichtes.

der Schnee seine Weißfärbung und wird durchsichtig. So einen Versuch könnt ihr ohne Mühe durchführen. Füllt ihr Schnee in ein Glas und gießt Wasser darauf, wird der Schnee für eure Augen farblos und undurchsichtig.

Der Glanz eines geputzten Stiefels

Warum glänzt der Stiefel nach dem Putzen?

Weder das schmierige schwarze Wachs noch die Bürste scheinen etwas an sich zu haben, was Glanz hervorrufen kann. Deshalb ist das Glänzen eines geputzten Stiefels für viele ein wenig rätselhaft.

Um dahinter zu kommen, muß man sich klarmachen, wodurch sich eine glänzende, polierte Oberfläche von einer matten unterscheidet. Gewöhnlich wird angenommen, daß eine polierte Oberfläche glatt ist, eine mattierte rauh. Das stimmt aber nicht. Rauh ist die eine wie die andere Oberfläche. Absolut glatte Oberflächen gibt es überhaupt nicht. Würden wir eine polierte Oberfläche mit dem Mikroskop betrachten, böte sich uns ein Bild ähnlich dem, das eine Rasierklinge unter dem Mikroskop bietet. Für eine 10millionenfach verkleinerte Person würde die Oberfläche einer glatt polierten Scheibe wie eine Hügellandschaft erscheinen. Unebenheiten, Vertiefungen, Kratzer gibt es auf jeder Oberfläche, ob mattiert oder poliert. Das Problem besteht in der *Größe* der Unebenheit. Ist sie kleiner als die Wellenlänge des auftreffenden Lichtes, dann werden die Strahlen richtig reflektiert, d. h., die gemeinsamen Einfallwinkel stimmen überein. So eine Oberfläche spiegelt, sie glänzt, und wir bezeichnen sie als poliert. Sind die Unebenheiten größer als die Wellenlänge des einfallenden Lichtes, so werden die Strahlen nicht gleichmäßig, ohne Beibehaltung des ursprünglichen gemeinsamen Einfallwinkels zurückgeworfen. So ein zerstreutes Licht gibt keine spiegelnde Oberfläche und keinen Lichterglanz, und wir bezeichnen die Oberfläche als mattiert, stumpf.

Daraus folgt übrigens, daß eine Oberfläche unter bestimmten Strahlen als poliert erscheint und bei anderem Licht mattiert. Bei Strahlen des sichtbaren Lichtes, deren durchschnittliche Wellenlänge ein halbes Mikrometer (0,5 μm) ist, erscheint eine Oberfläche mit Unebenheiten unterhalb der genannten Größenordnung poliert. Bei Bestrahlung mit infrarotem Licht, also längeren Wellen, erscheint sie natür-

lich auch poliert. Aber im ultravioletten Lichtstrahl, der kürzere Wellen hat, ist sie stumpf.

Kehren wir nun zum prosaischen Thema unserer Aufgabe zurück: Warum glänzt der geputzte Stiefel? Die nichtgewachste Oberfläche hat eine bucklige Struktur mit Unebenheiten, die größer sind als die Wellenlängen des sichtbaren Lichtes — sie ist stumpf. Die schmierige Wachssubstanz, die in dünner Schicht auf die rauhe Lederoberfläche aufgetragen wird, glättet die Oberfläche und legt die herausragenden Härchen an. Die Bürstenstriche, mit denen überschüssige Wachsmengen von den hervortretenden Stellen weggenommen und die Zwischenräume ausgefüllt werden, verringern die Unebenheiten weiter bis zu einem Maße, bei denen sie kleiner als die Wellenlänge des sichtbaren Lichtes werden. Und dabei verwandelt sich die stumpfe Oberfläche in eine glänzende.

Durch farbiges Glas

In welcher Farbe erscheinen rote Blüten, durch grünes Glas betrachtet? Und blaue durch das gleiche Glas?

Grünes Glas läßt nur grüne Lichtstrahlen hindurch und hält alle anderen zurück. Rote Blüten senden nur rotes Licht aus und fast kein anderes. Betrachtet man durch ein grünes Glas eine rote Blume, so erhalten wir von ihren Blütenblättern keinerlei Lichtstrahlen, denn die einzigen von ihr ausgestrahlten Lichtstrahlen hält das grüne Glas zurück. Daher erscheint eine rote Blume, durch grünes Licht betrachtet, *schwarz*.

Schwarze Farbe bekommt, wie leicht zu erraten ist, auch eine blaue Blume, durch grünes Glas betrachtet.

Prof. M. J. Piotrowski, Physiker, Kunstmaler und ein meisterhafter Beobachter der Natur, gibt in diesem Zusammenhang in seinem Buch „Physik in Sommerexkursionen“ eine Reihe interessanter Hinweise.

„Betrachten wir den Blumengarten durch *rotes* Glas, stellen wir ohne weiteres fest, daß völlig rote Blüten, wie zum Beispiel Geranien, uns ebenso leuchtend erscheinen wie rein weiße. Die grünen Blätter erscheinen uns völlig schwarz mit metallischem Glanz, blaue Blumen (Rittersporn) sind so schwarz, daß man sie auf dem schwarzen Hintergrund der Blätter kaum findet. Rosa, gelbe und fliederfarbene sind mehr oder weniger farblos.

Benutzen wir ein *grünes* Glas, so können wir die grünen Blätter ungewöhnlich leuchtendgrün wahrnehmen. Noch stärker leuchtend treten weiße Blüten hervor. Ein wenig blasser gelbe und hellblaue. Rote sind dunkelschwarz, flieder- und blaßrosafarbene farblos, grau, so daß beispielsweise die hellrosa Blütenblätter der Heckenrose dunkler erscheinen als die sattfarbenen Blätter.

Schließlich erscheinen uns durch *blaues* Glas die roten Blüten erneut schwarz, die weißen leuchtendhell, die gelben völlig schwarz, die hellblauen und dunkelblauen fast so leuchtend wie die weißen.

Daraus ist leicht zu erkennen, daß rote Blüten tatsächlich mehr rotes Licht aussenden als anderes; gelbe etwa die gleiche Menge rotes und grünes, aber sehr wenig blaues, rosa- und purpurfarbene viel rotes, viel blaues und wenig grünes usw."

Das rote Signal

Warum ist im Eisenbahnbetrieb für Haltesignale das rote Licht ausgewählt worden?

Rote Strahlen, also langwellige Strahlen, werden von Schwebeteilchen in der Luft weniger als andere Strahlen reflektiert. Daher haben die roten Lichtstrahlen eine größere Reichweite als beliebige andere. Die Wahrnehmung des Haltesignales auf möglichst weite Entfernung hat für den Transport erstrangige Bedeutung. Um den Zug zum Stehen zu bringen, muß der Zugführer in großer Entfernung vor dem Hindernis mit der Bremsung beginnen.

Auf die bessere Durchlässigkeit der Atmosphäre für langwellige Strahlen stützt sich übrigens auch der Gebrauch von Infrarotfiltern, wenn die Astronomen Planeten (insbesondere den Mars) fotografieren. Einzelheiten, die auf einem gewöhnlichen Foto nicht sichtbar sind, treten deutlich auf solchen Fotografien hervor, die durch ein Glas, das nur infrarote Strahlen durchläßt, aufgenommen wurden. So läßt sich die unmittelbare Oberfläche des Planeten aufnehmen, während auf einem normalen Foto nur die atmosphärische Hülle abgebildet wird.

Ein anderer Grund für die Auswahl des roten Lichtes als Haltesignal ist die größere Empfindlichkeit unseres Auges gegenüber dieser Farbe im Vergleich zu blau oder grün.



Trugbilder

Optische Täuschungen

Optische Täuschungen, denen dieses Kapitel gewidmet ist, sind keine zufälligen Begleiterscheinungen unseres Sehvermögens. Sie erscheinen unter ganz bestimmten Bedingungen mit der Beständigkeit einer Gesetzmäßigkeit und gelten für jedes normale menschliche Auge. Die Tatsache, daß der Mensch unter bestimmten Bedingungen optischen Täuschungen hinsichtlich des Objektes seiner optischen Sehwahrnehmungen verfällt, ist durchaus nicht als ein stets unerwünschter Fehler zu betrachten, dessen Ausmerzung für uns in jedem Hinblick wohltuend wäre. Ein Kunstmaler würde ein solches „unfehlbares" Sehen nicht akzeptieren. Für ihn ist unsere Fähigkeit, unter bestimmten Bedingungen nicht das zu sehen, was in Wirklichkeit ist, ein glücklicher Umstand, der die Ausdrucksmittel der Kunst wesentlich bereichert. „Vor allem die Kunstmaler vermögen diese allgemeine Trughaftigkeit nützlich zu handhaben", schrieb im 18. Jahrhundert der berühmte Mathematiker Euler und erläuterte weiter: „Auf dieser Trughaftigkeit ist die ganze Kunstmalerei begründet. Wenn wir gewöhnt wären, über die Dinge der Wahrheit gemäß zu urteilen, dann gäbe es die Kunst nicht, gleichsam als wenn wir blind wären. Vergebens würde der Künstler seine ganze Meisterschaft auf die Mischung von Farben konzentrieren. Wir würden sagen: Hier auf dieser Tafel ist ein roter Fleck, da ein hellblauer, hier ein schwarzer und da einige weiße Linien. Alles befindet sich in einer Ebene, keinerlei Unterschiede in der Entfernung sind sichtbar, und es wäre nicht möglich, auch nur einen Gegenstand darzustellen. Was auf dem Bild auch gemalt wäre, es erschiene uns wie Geschriebenes auf dem Papier, und vielleicht würden wir uns noch bemühen, die *Bedeutung* all der vielfarbigen Flecken zu enthüllen. *Bei aller Vollkommenheit wären wir doch bedauernswürdig, wären des Vergnügens beraubt, das uns täglich die so angenehme und nützliche Kunst bereitet!*"

Ungeachtet des lebhaften Interesses, das die optischen Täuschungen bei Kunstmalern, Physikern, Physiologen, Ärzten, Psychologen, Philosophen und letztendlich bei allen Wißbegierigen genießen, erschien bei uns bisher noch keine Publikation mit mehr oder

weniger erschöpfender Auswahl von Beispielen optischer Täuschungen.[1])

Das vorliegende Kapitel, das vor allem für den großen Kreis der Laien bestimmt ist, soll ein Versuch sein, die wesentlichsten Arten Täuschungen zu unterbreiten, die beim normalen Sehen, ohne irgendwelche Hilfsmittel wie Stereoskop, gelochte Karte u. a. m. beobachtet werden können.

Was die Ursachen anbelangt, die die eine oder andere pseudoskopische Erscheinung hervorrufen, so existiert nur für eine sehr geringe Anzahl optischer Täuschungen eine exakte, eindeutige Erklärung. Dazu gehören solche, die mit der Struktur des Auges verbunden sind: Irradiation, das Trugbild Mariottes (blinder Fleck), Sehtäuschungen, die mit dem Astigmatismus verbunden sind u. a. m. Hinsichtlich des größten Teils der übrigen Täuschungen des Sehvermögens könnte man sehr viel schreiben.

Als lehrreiches Beispiel betrachten wir das Trugbild in Abb. 141: Weiße Kreise, in bestimmter Form auf schwarzem Grund angeordnet, erscheinen aus der Ferne als Sechsecke. Offenbar wird allgemein als feststehend angenommen, daß dieses Trugbild vollständig bedingt ist durch die sogenannte Irradiation, die scheinbare Erweiterung der weißen Flächen (was physikalisch einfach und einwandfrei zu erklären ist). „Indem die weißen Kreise sich als Folge der Irradiation vergrößern, verringern sie die schwarzen Trennstriche zwischen ihnen", schreibt Prof. Paul Bert in seinen „Lektionen über Zoologie" und meint, „da jeder Kreis von sechs anderen umgeben ist, erscheint er, indem er sich ausdehnend auf die benachbarten stößt, als in ein Sechseck eingeschlossen."

Es genügt jedoch ein Blick auf die andere Darstellung (Abb. 141), wo die gleiche Erscheinung für die *schwarzen* Kreise auf *weißem* Hintergrund zu beobachten ist, um von dieser Erklärung abzurücken. Hier könnte der Irradiationseffekt zwar die Ausmaße der schwarzen Flächen vermindern, niemals aber ihre

---

[1]) Mir ist nur eine in Rußland herausgegebene Broschüre bekannt: *P. M. Olchin*, „Das Sehen und seine Täuschungen" (1911). Darin werden zwei Dutzend optische Täuschungen angeführt (*Anm. d. Autors*). Heute werden systematisch Bücher ausländischer und sowjetischer Autoren herausgegeben. Siehe *P. W. Makowezki*, „Schau auf den Grund", „Nauka", 1968; *S. Tolanski*, „Optische Täuschungen", „MIR", 1967 (*Anm. d. Red.*).

Kreisgestalt in Sechsecke verwandeln. Um beide Fälle in einem Prinzip zu erfassen, wäre eine solche Erklärung möglich: Bei der Betrachtung aus einer bestimmten Entfernung unterschreitet der Blickwinkel die Grenze, die eine Unterscheidung der schmalen Räume zwischen den Kreisen noch ermöglicht. Jeder der sechs einen Kreis umgebenden Zwischenräume muß dann als gerader Strich gleicher Stärke erscheinen, und demzufolge sind die Kreise von Sechsecken umrahmt. Mit dieser Erklärung stimmt auch die paradoxe Tatsache überein, wonach bei bestimmter Entfernung die weißen Flecken noch rund erscheinen, während der schwarze Rand darum herum bereits sechseckige Formen angenommen hat. Erst bei weiterer Vergrößerung der Entfernung geht die Sechseckform der Umrahmung auf die weißen Flecken über. Jedoch auch diese meine Erklärung ist nur eine glaubwürdige Annahme, von denen man wahrscheinlich noch mehrere ausdenken kann. Es bleibt noch zu beweisen, daß die *mögliche* Ursache im gegebenen Fall auch die *wahre* Ursache ist.

Einen gleichermaßen zweifelhaften unverbindlichen Charakter haben die meisten Versuche, eine Erklärung für die einzelnen pseudoskopischen Erscheinungen (mit Ausnahme einiger weniger, bereits früher genannter) zu finden. Für einige optische Täuschungen gibt es bisher überhaupt keine Erklärung. Für andere dagegen gibt es viel zuviele Begründungen, von denen jede einzelne ausreichend wäre, würde nicht daneben eine Reihe anderer existieren, durch die ihre Glaubwürdigkeit abgeschwächt wird. Denken wir an die berühmte, bereits zur Zeit Ptolemäus erörterte scheinbare Vergrößerung der Sonne und des Mondes in Horizontnähe. Dafür gibt es wohl mehr als sechs brauchbare Theorien, von denen jede nur den einen Nachteil hat, daß es fünf weitere ebenso gute Erklärungen gibt. Nahezu das gesamte Gebiet der pseudoskopischen Erscheinungen befindet sich offensichtlich noch im vorwissenschaftlichen Stadium seiner Erforschung und bedarf der Festlegung der grundlegenden methodischen Prinzipien seiner Untersuchung.

Angesichts eines solchen Mangels an Unerschütterlichem und Objektivem im Bereich der hierher gehörenden Theorien habe ich vorgezogen, mich auf die Demonstration unbestreitbaren Tatsachenmaterials zu beschränken, mich der Erläuterung ihrer Ursachen zu enthalten und mich allein darum bemüht, daß im

Buch alle hauptsächlichen Typen optischer Täuschungen vertreten sind.[1] Nur für Erscheinungen, die mit Porträts verbunden sind, wird am Schluß eine Erläuterung gegeben, weil sie in diesen Fällen ausreichend klar und unbestreitbar ist, so daß es möglich war, sie den abergläubischen Vorstellungen entgegenzustellen, die seit eh und je diese eigenartigen pseudoskopischen Erscheinungen umgeben.

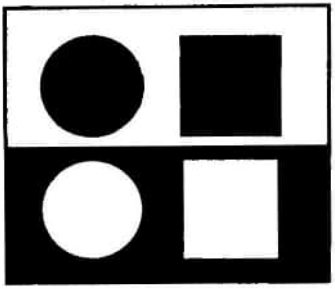
Die Serie der Illustrationen beginnt mit Beispielen der optischen Täuschungen, die in anatomischen und physiologischen Besonderheiten des Auges begründet sind. Das sind Täuschungen, die auf dem blinden Fleck beruhen, von der Irradiation, dem Astigmatismus, dem Nachwirken von Farbeindrücken und der Netzhautermüdung herrühren (s. Abb. 100—107). Bei dem Experiment mit dem sogenannten blinden Fleck kann man das Verschwinden eines Teils des Gesichtsfeldes übrigens auch auf andere Weise feststellen — und zwar so, wie es im 18. Jahrhundert Mariotte erstmalig tat. Der Effekt ist sogar noch beeindruckender. „Ich befestigte", berichtet Mariotte, „auf dunklem Grund etwa in Höhe meiner Augen einen kleinen Kreis aus weißem Papier, und gleichzeitig bat ich darum, einen weiteren Kreis seitlich rechts, in etwa 2 Fuß Entfernung, davon zu halten, jedoch etwas niedriger, so daß seine Abbildung auf den Sehnerv meines rechten Auges trifft, wenn ich das linke schließe. Ich blickte genau auf den ersten Kreis und entfernte mich allmählich, ständig das rechte Auge darauf gerichtet. Als ich mich auf etwa 9 Fuß entfernt hatte, *verschwand* der zweite Kreis, der etwa 4 Zoll im Durchmesser betrug, *vollständig* aus dem Gesichtsfeld.

Ich konnte das nicht seiner seitlichen Lage zuschreiben, denn andere Objekte, die noch weiter seitlich waren als der Kreis, konnte ich wahrnehmen. Ich hätte geglaubt, daß man ihn weggenommen hat, wenn ich ihn nicht bei der geringsten Bewegung des Auges wiedergefunden hätte ..."

Neben diesen „physiologischen" Sehtäuschungen gibt es eine weit größere Gruppe von Täuschungen, die durch psychologische Gründe, die zumeist noch

[1] Die Auswahl von Beispielen für die optischen Täuschungen ist im Ergebnis langjährigen Sammelns entstanden. Ich habe jedoch alle jene veröffentlichten Erscheinungen nicht einbezogen, deren Effekt nicht für jedes Auge Gültigkeit hat oder nicht ausreichend wahrnehmbar ist.

Abbildung 100

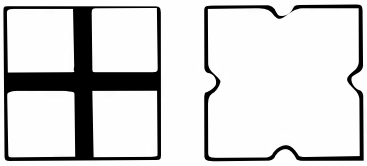


nicht ausreichend geklärt sind, hervorgerufen werden. Offenbar kann man als feststehend nur betrachten, daß Täuschungen dieser Art eine Folge voreingenommener, falscher, unwillkürlicher und unbewußter Beobachtung sind. Nicht das Gefühl, sondern der Intellekt ist hier der Ausgangspunkt für die Täuschung. Darauf ist eine treffende Bemerkung von Kant gerichtet:

„Nicht deshalb trügen uns unsere Gefühle nicht, weil sie immer richtig urteilen, sondern deshalb, weil sie überhaupt nicht urteilen."

Irradiation. Aus der Ferne erscheinen die weißen Figuren (unten) — Kreis und Quadrat — größer als die schwarzen, obwohl sie gleich sind. Je größer der Abstand, desto stärker die Täuschung. Diese Erscheinung bezeichnet man als *Irradiation* (siebe weiter).

Abbildung 101

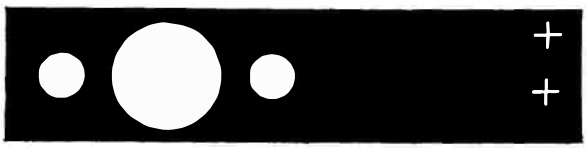


Irradiation. Betrachtet man aus der Ferne die linke Figur mit dem schwarzen Kreuz, so erscheinen als Folge der Irradiation die Seiten der Quadrate, wo die schwarzen Balken auftreffen, nach innen gedrückt, so wie es auf der rechts daneben abgebildeten Figur zu sehen ist.

Die Irradiation entsteht dadurch, daß jeder helle Punkt eines Gegenstandes auf der Netzhaut unseres Auges sich nicht als Punkt, sondern als kleiner Kreis abbildet (infolge der sogenannten sphärischen Aberration). Daher wird die helle Oberfläche auf der Netzhaut von einem hellen Saum umgeben, der zur *Vergrößerung* der Fläche führt. Die schwarze Oberfläche dagegen ergibt eine Abbildung, die um den hellen Saum des umgebenden Grundes *verringert* ist.

Das Experiment des Mariotte. Schließt das rechte Auge und schaut mit dem linken Auge aus 20—25 cm Entfernung auf das *obere* Kreuz. Jetzt werdet ihr be-

Abbildung 102

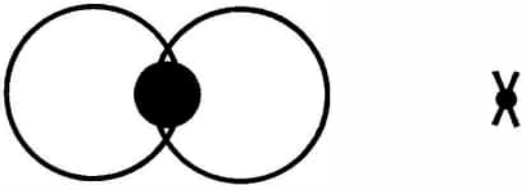


merken, daß der mittlere große Kreis vollständig verschwindet, obgleich die kleineren Kreise rechts und links davon gut zu sehen sind. Blickt man, ohne die Lage der Zeichnung zu verändern, auf das *untere*

Kreuz, verschwindet der große Kreis nur teilweise.

Diese Erscheinung wird dadurch hervorgerufen, daß bei der beschriebenen Stellung des Auges zur dargestellten Figur die Abbildung des Kreises auf den sogenannten *blinden Fleck* fällt — dem Eingang des Sehnerves, der gegenüber Lichterscheinungen unempfindlich ist.

Abbildung 103



Der blinde Fleck. Dieses Experiment ist eine Variante des vorangegangenen. Bei Betrachtung des Kreuzes im rechten Teil der Abbildung mit dem linken Auge sehen wir in einer bestimmten Entfernung den schwarzen Kreis überhaupt nicht, obwohl beide Ringe deutlich zu erkennen sind.

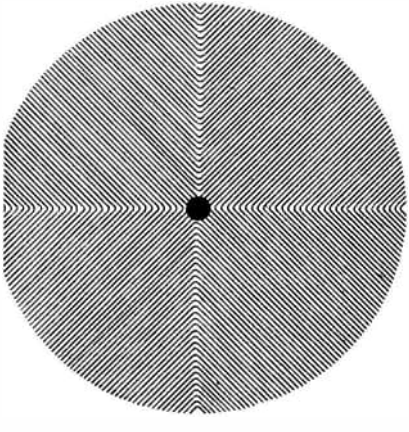
Abbildung 104



Astigmatismus. Schaut mit einem Auge auf die abgebildeten Schriftzeichen. Erscheinen alle Buchstaben gleich schwarz? Gewöhnlich erscheint einer der Buchstaben schwärzer als die anderen. Doch braucht man die Schriftzeichen nur um 45° oder 90° zu drehen, und schon erscheint ein anderer Buchstabe schwärzer.

Diese Erscheinung wird durch den sogenannten *Astigmatismus* bedingt, durch die nicht gleichförmige Wölbung der Hornhaut des Auges in den verschiedenen Richtungen (vertikal und horizontal). Selten ist ein Auge frei von dieser Unvollkommenheit.

Abbildung 105

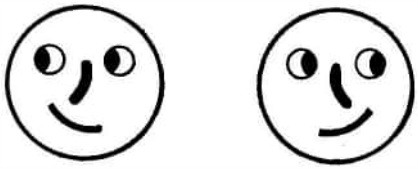


Astigmatismus. Die nebenstehende Abbildung 105 stellt eine andere Methode (vergleiche die vorhergehende Abbildung) zur Feststellung des Astigmatismus dar. Führt man sie an das zu untersuchende Auge heran (das andere wird geschlossen), bemerken wir in einem bestimmten, ziemlich kurzen Abstand, daß



Abbildung 106

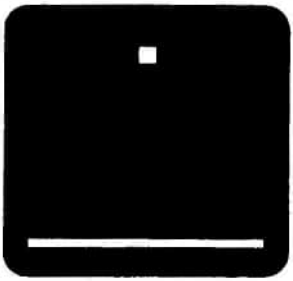
zwei der einander gegenüberliegenden Sektoren schwarz, die beiden anderen dagegen grau erscheinen.



Bewegt die Abbildung 106, wenn ihr darauf blickt, nach rechts und links. Es entsteht der Eindruck, als würden die Augen auf der Zeichnung von einer Seite zur anderen rollen.

Diese Täuschung erklärt sich aus der Eigenschaft des Auges, die Sehwahrnehmung nach dem Verschwinden des Objektes, von dem sie hervorgerufen wurde, für einen kurzen Zeitabschnitt beizubehalten (diese Erscheinung nutzt auch die Kinematographie aus).

Abbildung 107



Konzentriert ihr den Blick auf das weiße Quadrat oben, könnt ihr nach annähernd einer *halben* Minute feststellen, daß der weiße Streifen unten verschwindet (als Folge der Ermüdung der Netzhaut).

Die optische Täuschung nach Müller-Lier. Der Abschnitt *b—c* erscheint länger als *a—b*, obwohl beide in Wirklichkeit gleich lang sind.

Abbildung 108

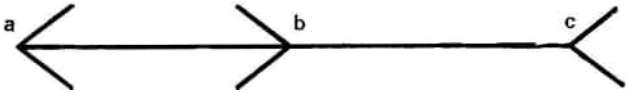
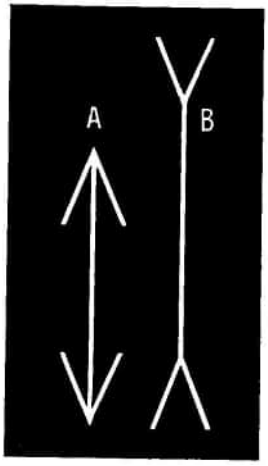
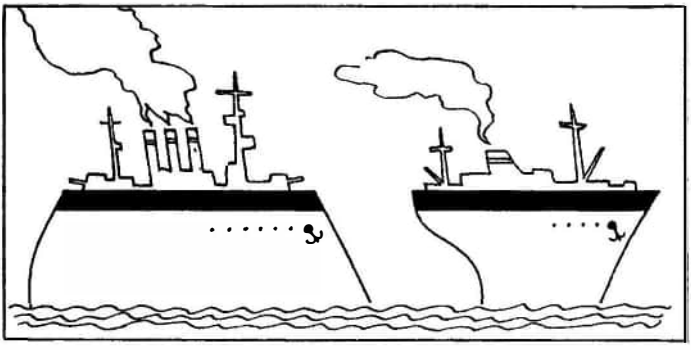


Abbildung 109



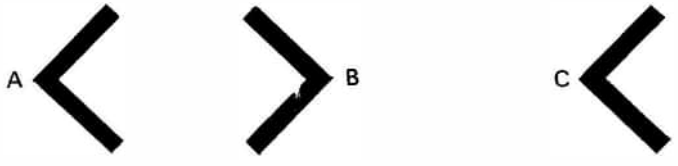
Eine Variante der vorangegangenen Täuschung: (Abb. 109) die senkrechte Linie *A* erscheint kürzer als die gleichlange *B*.

Abbildung 110



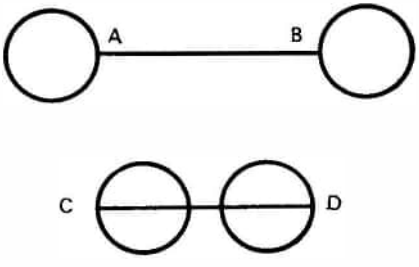
Das Deck des rechten Schiffes wirkt kürzer als das des linken. Dabei sind sie mit gleichlangen geraden Linien dargestellt.

Abbildung 111



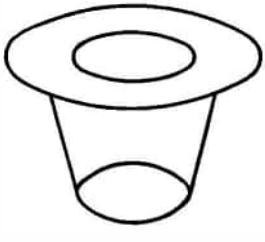
Die Entfernung $A—B$ erscheint wesentlich geringer als die gleichgroße $B—C$.

Abbildung 112



Die Strecke $A—B$ wirkt länger als die gleichlange Strecke $C—D$.

Abbildung 113



Das untere Oval (Abb. 113) scheint größer zu sein als das innere obere, obwohl sie gleich sind (Einfluß der Anordnung).



Abbildung 114

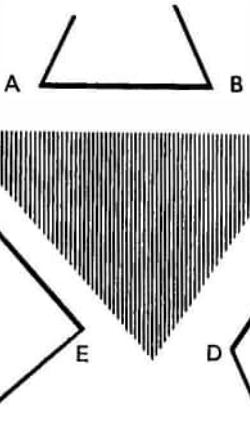


Abbildung 115

Die gleichgroßen Strecken $A—B$, $C—D$ und $E—F$ wirken ungleich (Einfluß der Anordnung).

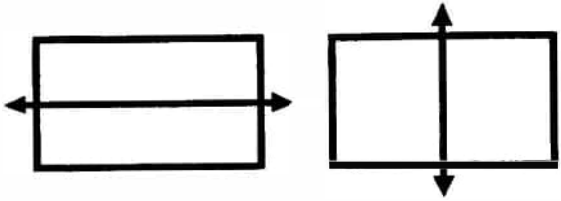


Abbildung 116

Das in Längsrichtung durchgestrichene Rechteck (links) erscheint länger und schmaler als das gleiche Rechteck, das quer durchgestrichen ist.

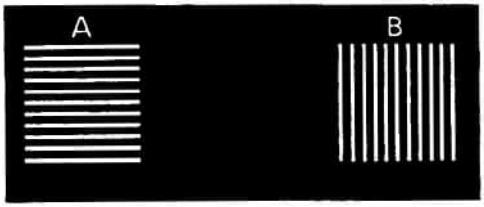


Abbildung 117

Die Figuren A und B sind gleiche Quadrate, obgleich das erstere höher und schmaler als das zweite wirkt.

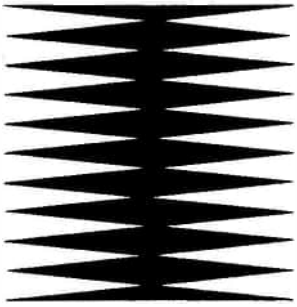


Abbildung 117 scheint höher als breit zu sein, obwohl die Höhe und Breite gleich groß sind.

Abbildung 118



Die Höhe des Zylinders wirkt größer als seine Breite, und dennoch sind sie gleich.

Abbildung 119

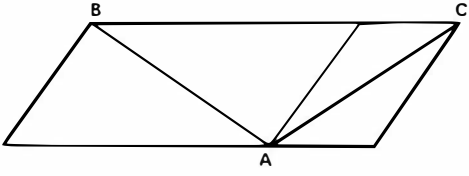


Abbildung 120

Die Strecken $A—B$ und $A—C$ sind gleich, wenn auch die erste länger zu sein scheint.

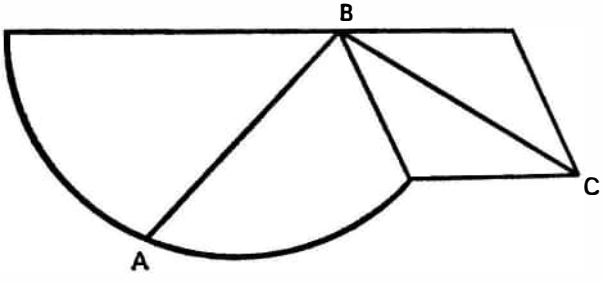
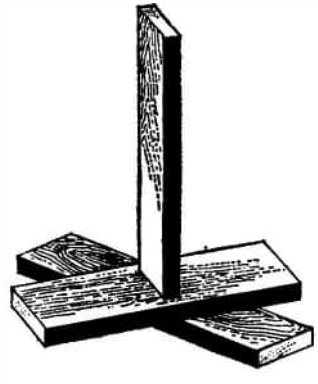


Abbildung 121

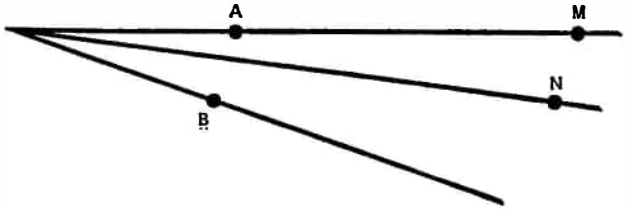


Die Strecken $B—A$ und $B—C$ sind gleich, obwohl die erste länger erscheint.

Die senkrechte schmale Leiste wirkt länger als die unter ihr liegenden breiten. In Wirklichkeit sind sie gleich.

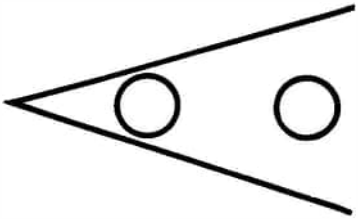


Abbildug 122



Der Abstand $M—N$ wirkt schmaler als der gleiche Abstand $A—B$.

Abbildung 123



Der rechte Kreis wirkt kleiner als der gleichgroße linke.

Die Entfernung $A—B$ (Abb. 124) scheint geringer zu sein als die gleiche Entfernung $C—D$. Die Täuschung verstärkt sich, betrachtet man die Figur von weitem.

Abbildung 124





Abbildung 125





Der Leerraum zwischen dem unteren Kreis und jedem der oberen Kreise (Abb. 125) wirkt größer als der Abstand zwischen den Außenkanten der oberen Kreise. Tatsächlich sind sie gleich.

Abbildung 126



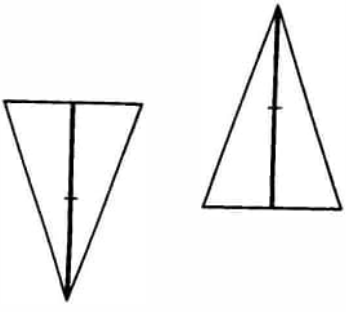
Die Täuschung „Tabakspfeife". Die rechten Striche der Figur erscheinen kürzer als die gleichlangen linken.

Abbildung 127

X38S

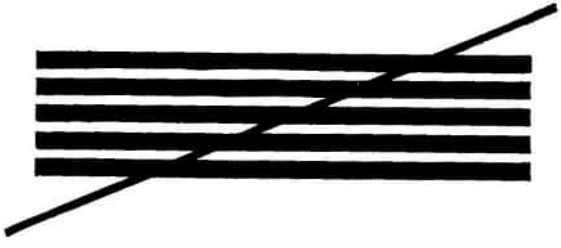
Die Schrifttäuschung. Die obere und untere Hälfte jeder der Lettern scheint gleich zu sein. Stellt man jedoch die Seite kopf, wird man feststellen, daß die obere Hälfte kleiner ist.

Abbildung 128



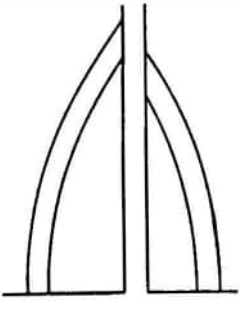
Die Höhen der Dreiecke (Abb. 128) sind halbiert, obgleich es aussieht, als wäre der zur Spitze führende Teil kürzer.

Abbildung 129



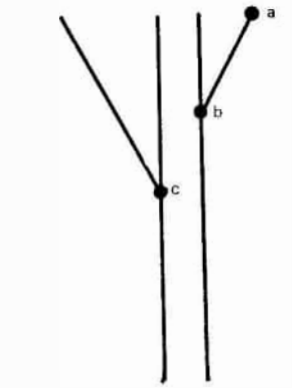
Das Poggendorfsche Trugbild. Eine schräge *Gerade*, die übereinanderliegende schwarze und weiße Streifen teilt, wirkt von weitem gebrochen.

Abbildung 130



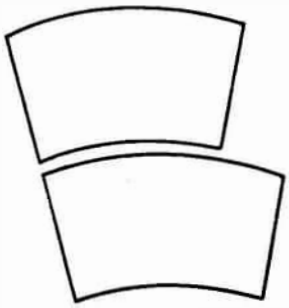
Führt man die beiden rechten Bogen (Abb. 130) weiter, treffen die Enden den linken Bogen, obgleich es scheint, daß sie darunter verlaufen.

Abbildung 131



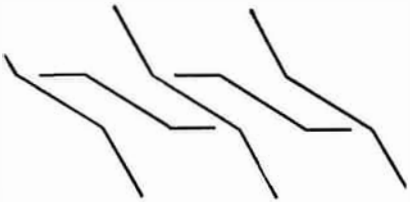
Der Punkt *c* (Abb. 131), der auf der Fortsetzung der Geraden *a—b* liegt, scheint tiefer zu liegen.

Abbildung 132

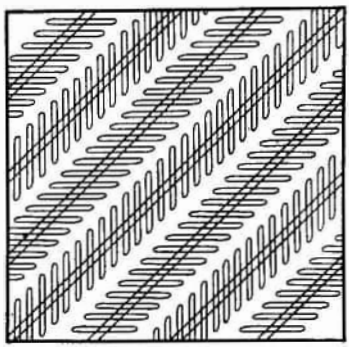


Beide Figuren sind völlig gleich, wenn auch die obere kürzer und breiter als die andere wirkt (Abb. 132).

bbildung 133



Die mittleren Abschnitte dieser Linien sind scheinbar nicht parallel, obwohl sie exakt parallel verlaufen.



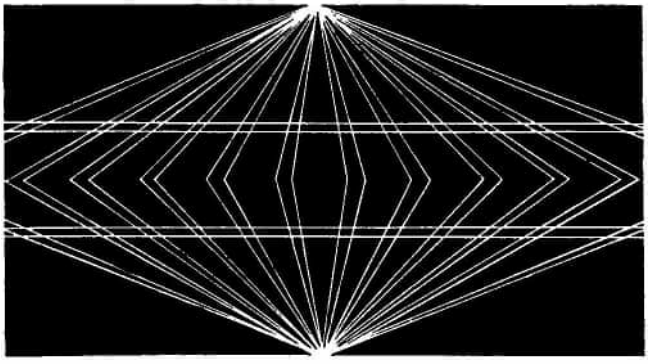
bbildung 134

Das Trugbild Zellners. Die langen schrägen Linien der Darstellung 134 laufen parallel, obwohl sie auseinanderzulaufen scheinen.

Das Heringsche Trugbild. Die beiden mittleren Linien, die von rechts nach links verlaufen, sind parallele Geraden, wenngleich sie als Bogen erscheinen, die zueinander gewölbt sind (Abb. 135).

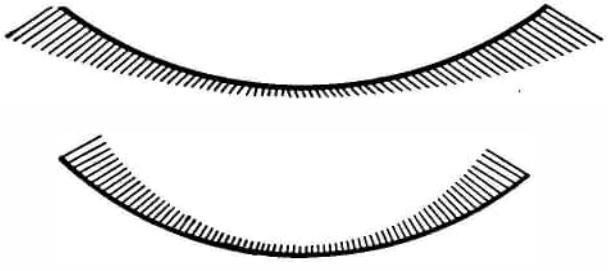
Die Täuschung verschwindet: 1. wenn man die Zeichnung in Augenhöhe haltend, so betrachtet, daß

Abbildung 135



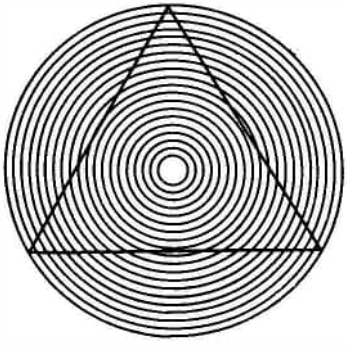
der Blick an den Linien entlanggleitet, 2. wenn man eine Bleistiftspitze auf einen beliebigen Punkt der Figur hält und den Blick auf diesen Punkt konzentriert.

Abbildung 136



Der untere Bogen wirkt stärker gewölbt und kürzer als der obere. Beide sind jedoch gleich.

Abbildung 137



Die Seiten des Dreiecks erscheinen einwärts gewölbt, obgleich sie in Wirklichkeit geradlinig sind.

Abbildung 138



Die Buchstaben dieser Aufschrift stehen gerade.

Abbildung 139

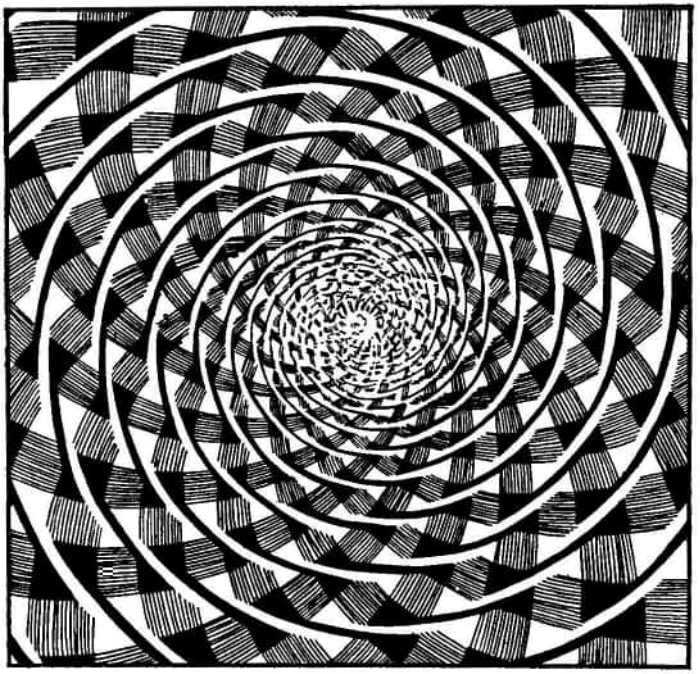
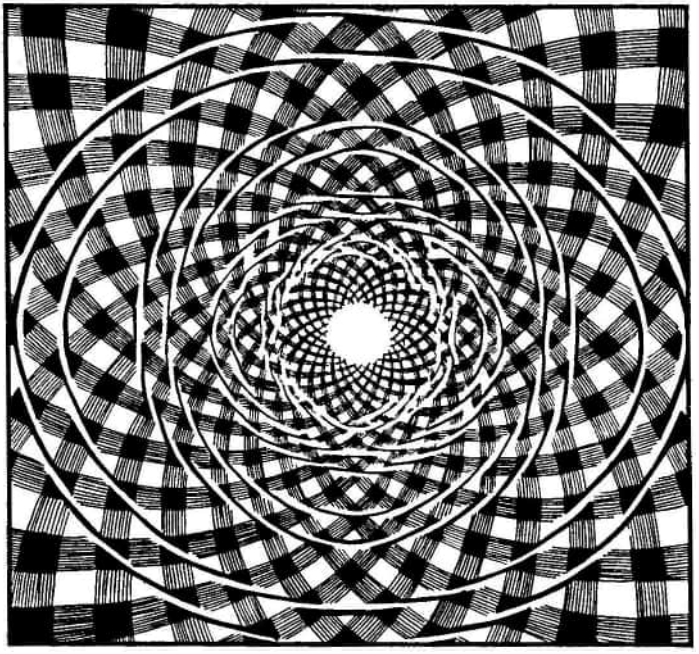


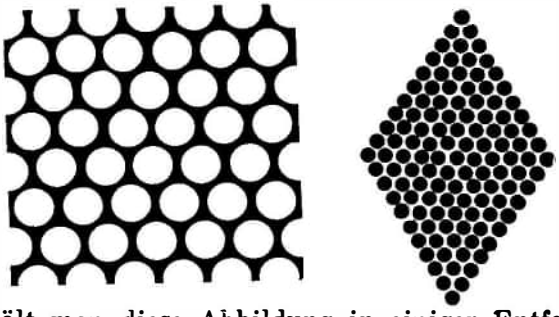
Abbildung 140



Die Kurvenlinien der Abb. 139 scheinen spiralförmig zu verlaufen. Dabei sind es Ringe, wovon man sich sehr leicht überzeugen kann, fährt man mit einem angespitzten Stäbchen die Linien entlang.

Die Kurvenlinien der Abb. 140 wirken oval. In Wirklichkeit sind es Kreislinien, was man mit dem Zirkel leicht nachprüfen kann.

Abbildung 141



Hält man diese Abbildung in einiger Entfernung von den Augen, so erscheinen die Kreise (sowohl die weißen als auch die schwarzen) als Sechsecke.

Das Trugbild einer Autotypie. Betrachtet man die Autotypie aus der Ferne, kann man leicht das Auge und einen Teil der Nase eines Frauenantlitzes unterscheiden.

Die Figur ist ein Autotypienausschnitt (eine gewöhnliche Buchillustration) mit zehnfacher Vergrößerung.

Abbildung 142

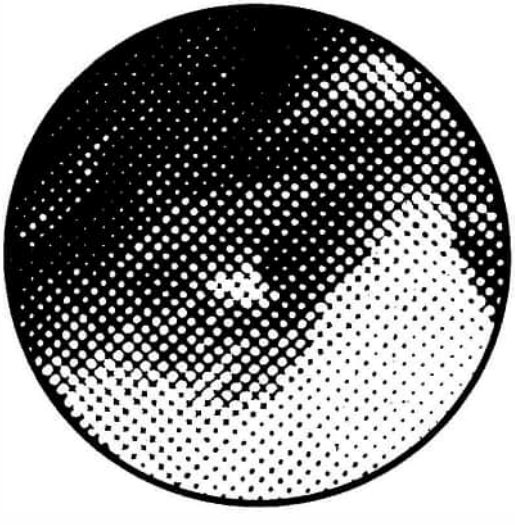
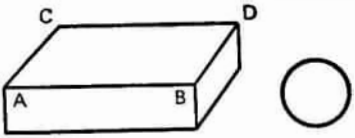


Abbildung 143



Die obere Silhouette wirkt länger als die untere, obwohl sie gleich lang sind.

Abbildung 144



Paßt der hier dargestellte Kreis zwischen die Geraden *A—B* und *C—D*? Dem Auge scheint er hineinzupassen. In Wirklichkeit ist der Kreis breiter als der Abstand zwischen den Geraden.

Die Entfernung *A—B* scheint größer zu sein als die gleichgroße Entfernung *A—C*.

Abbildung 145

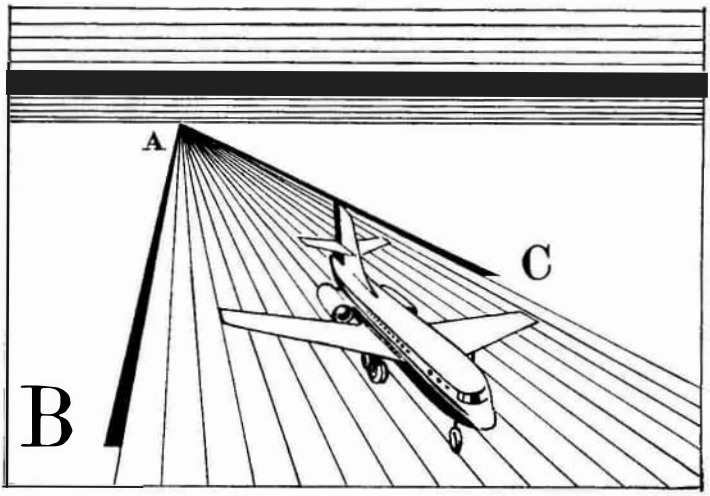


Abbildung 146

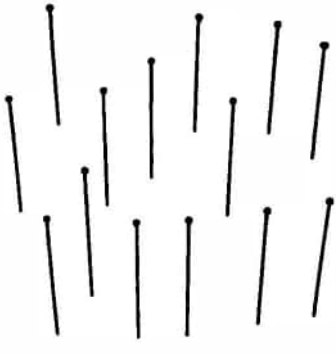




Hebt man Abbildung 146 in Augenhöhe und zwar so, daß der Blick in Längsrichtung entlanggleitet, sehen wir das rechts abgebildete Bild.

Richtet ein Auge (das andere ist geschlossen) etwa auf den Punkt, wo die Fortsetzung der Linien sich kreuzt (Abb. 147), dann seht ihr eine Anzahl Stecknadeln, die ins Papier gepiekt scheinen. Bei leichter Bewegung von rechts nach links und umgekehrt sieht es aus, als schwanken die Stecknadeln.

Abbildung 147



Bei anhaltendem Betrachten dieser Figur entsteht der Eindruck, daß abwechselnd oben zwei Würfel und unten zwei Würfel hervortreten. Ihr könnt auch willkürlich, durch verstärkte Vorstellungskraft, die eine oder die andere Erscheinung sehen.

Abbildung 148

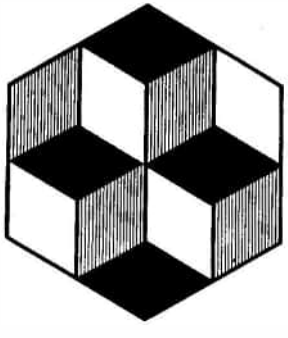
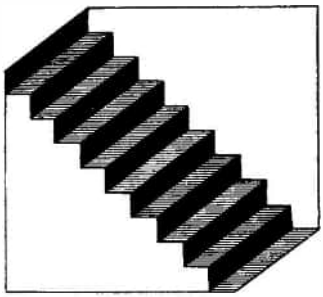
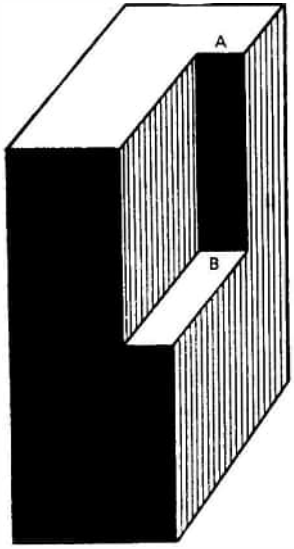


Abbildung 149



Die Schrödersche Treppe. Die Figur kann euch dreierlei Vorstellung vermitteln: 1. als Treppe, 2. als stufenförmige Nische und 3. als Papierstreifen, der zu einer Ziehharmonika gefaltet und auseinandergezogen wurde. Diese Vorstellungen können nacheinander unwillkürlich oder nach Wunsch auftreten.

Abbildung 150



Die Figur kann darstellen, unabhängig vom Betrachter, entweder ein Holzstück mit einer Aussparung (die Rückwand der Aussparung ist die Fläche $A-B$) oder einen Klotz mit einem hervortretenden Scheit (vordere Kante des Scheits — $A-B$), oder ein Teil eines unten offenen leeren Kastens mit einer innen an der Wand anliegenden kleinen Holzplatte.

An den Kreuzungspunkten der weißen Streifen dieser Figur tauchen — als würden sie auflodern — graue Pünktchen auf und verschwinden wieder. In Wirklichkeit sind die Streifen auf der ganzen Länge völlig weiß. Davon könnt ihr euch leicht überzeugen, wenn ihr die anliegenden Reihen schwarzer Quadrate abdeckt. Die Erscheinung ist eine Folge des Kontrastes.

Abbildung 151

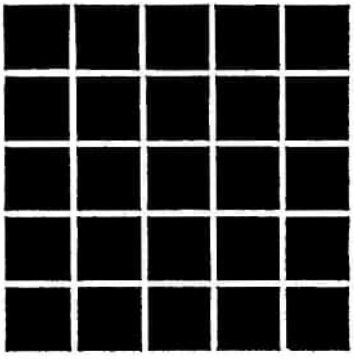


Abbildung 152

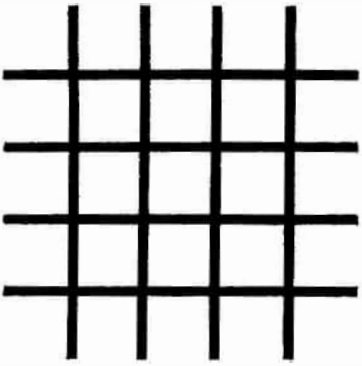
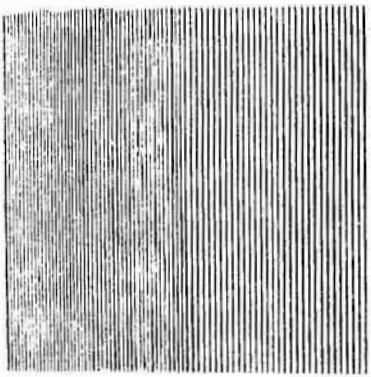


Abb. 152 ist eine Variante der Täuschung auf Abb. 151. Hier erscheinen weiße Punkte auf den Kreuzungsstellen der schwarzen Linien.

Bei der Betrachtung dieser Figur aus der Ferne erscheinen ihre vier Streifen als konkave Rinnen. Sie wirken an dem Rand, der an den benachbarten, dunkleren Streifen angrenzt, heller. Doch deckt man die Nachbarstreifen ab und verhindert damit die Kontrastwirkung, kann man sich davon überzeugen, daß jeder der Streifen gleichmäßig getönt ist.

Abbildung 153

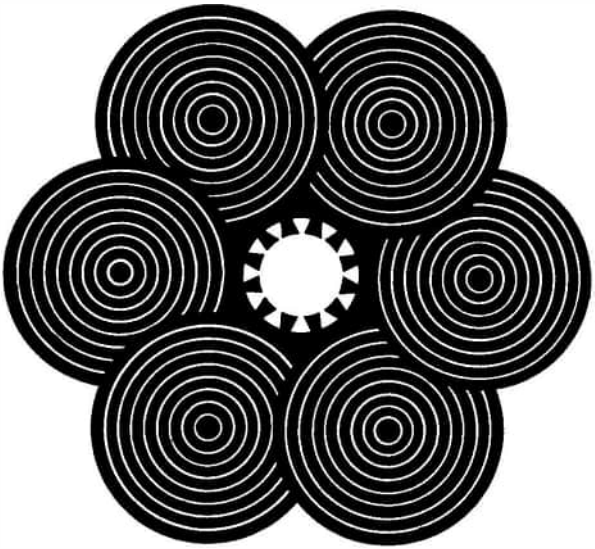


Blickt angespannt eine Minute lang auf einen beliebigen Punkt des „Negativ"-Porträts (von Newton), ohne die Augen zu bewegen. Dann wechselt rasch den Blick auf ein Blatt weißes Papier, auf den hellgrauen Grund einer Wand oder zur Decke. Für einen Augenblick seht ihr das gleiche Porträt, jedoch die schwarzen Flächen verwandeln sich in weiße und umgekehrt.

Abbildung 154

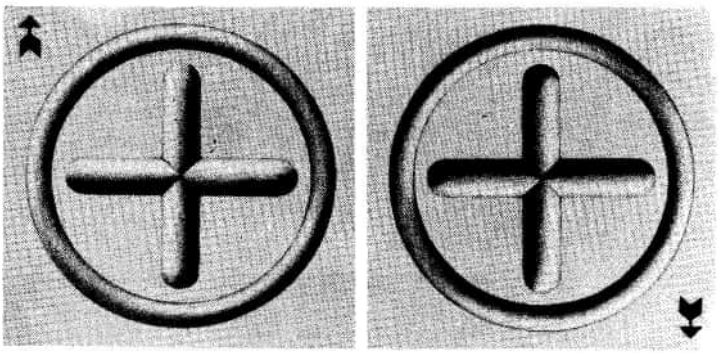


Abbildung 155



Das Trugbild Silvanus Thompsons. Versetzt man die Figur in Drehbewegung (durch Drehen des Buches), dann entsteht der Eindruck, als ob Kreise und das weiße Zahnrad sich drehen, jedes um sein Zentrum, in gleicher Richtung und mit gleicher Geschwindigkeit.

Abbildung 156



Links seht ihr ein nach außen, rechts ein nach innen gewölbtes Kreuz. Doch stellt die Zeichnung kopf, und die Kreuze tauschen ihre Plätze aus. In Wirklichkeit sind die Abbildungen völlig gleich, nur in der Position verändert.

Schaut auf diese Fotografie mit einem Auge, und zwar aus einer Entfernung von 14—16 cm auf das Zentrum der Aufnahme blickend.

Abbildung 157



Bei der genannten Stellung sieht das Auge die Abbildung aus dem gleichen Punkt, wie das Objektiv des Fotoapparates die Natur „sah". Die Landschaft erhält Tiefe und das Wasser Glanz.

Augen und Zeigefinger richten sich direkt auf euch und folgen euch, wenn ihr nach rechts oder links von der Zeichnung abweicht.

Seit langem ist die Besonderheit einiger Porträts bekannt, die mit den Augen dem Betrachter geradezu folgen und ihm sogar das ganze Gesicht zuwenden, von wo aus er es auch betrachten mag. Diese Besonderheit, die nervösen Personen unbehaglich ist, erscheint vielen irgendwie übernatürlich und hat auch eine ganze Anzahl abergläubischer Vorstellungen, Legenden und phantastischer Erzählungen entstehen lassen („Das Porträt" von N. W. Gogol). Dabei hat diese interessante Täuschung eine äußerst einfache Ursache.

Abbildung 158



Zunächst ist dieser Trug keine Besonderheit von Porträtbildern — sie ist auch anderen Bildern eigen. Eine Kanone, die so fotografiert oder gezeichnet wurde, daß sie auf den Zuschauer gerichtet ist[1]), wendet ihre Mündung in seine Richtung, wenn er

sich vom Bild nach rechts oder links abwendet. Einem Gefährt, das genau auf den Betrachter zufahrend gestaltet wurde, kann man auch nicht ausweichen.

Alle diese Erscheinungen haben eine gemeinsame, äußerst einfache Ursache. Sehen wir auf dem Bild die Mündung eines Geschützes, das so gemalt ist, daß es auf uns gerichtet ist, dann sehen wir es natürlich, wenn wir uns zur Seite bewegen, nach wie vor in derselben Stellung. Für die Darstellung in einer Ebene ist das völlig normal, anders kann es gar nicht sein. Doch für eine echte Kanone ist das nur möglich, wenn sie unserer Bewegung folgt. Doch da wir uns beim Betrachten des Bildes den dargestellten Gegenstand real vorstellen, erscheint es uns auch, als würde dieser Gegenstand seine Position verändern. Das gleiche gilt für Porträts. Ist das Gesicht uns zugewandt, und die Augen direkt auf uns gerichtet, wir aber zur Seite treten und erneut darauf schauen, so stellen wir fest, daß sich die Haltung des Gesichts uns gegenüber nicht verändert hat (wie sich überhaupt auf dem Bild nichts geändert hat). Mit anderen Worten, wir bemerken, daß sich das Gesicht gewissermaßen uns zugewandt hat — denn das Gesicht sieht, von der Seite betrachtet, ja anders aus und kann sein Aussehen nur beibehalten, wenn es sich uns zugewandt hat. Ist das Porträt gut ausgeführt, ist der entstehende Effekt beeindruckend.

Es ist klar, daß diese Eigenschaft des Porträts nichts Verwunderliches darstellt. Viel verwunderlicher wäre es, würde dieser Effekt nicht sein. In der Tat, wäre es nicht ein Wunder, wenn man die Seitenpartien des Gesichts sehen würde, falls man sich vom Porträt seitlich abwendet? Und eben das erwarten im Grunde doch alle jene, die das vermeintliche Zuwenden des Porträtgesichtes als etwas Übernatürliches betrachten.

---

[1]) So eine Fotografie entsteht, wenn beim Fotografieren die Mündung direkt aufs Objektiv gerichtet war. Und ebenso, wenn die zu fotografierende Person bei der Aufnahme direkt ins Objektiv schaute, dann sind auf dem Bild die Augen direkt auf den Betrachter gerichtet, von wo aus auch immer er die Fotografie betrachten mag.



Kopfzerbrechende Anordnungen und Umverteilungen

Abbildung 159



In sechs Reihen

Ihr kennt gewiß die lustige Geschichte von den neun Pferden, die in 10 Boxen so verteilt waren, daß in jeder Box ein Pferd stand. Unsere Aufgabe ist diesem bekannten Scherz sehr ähnlich, doch hat sie keine fingierte, sondern eine sehr reale Lösung.[1])

Sie lautet folgendermaßen: 24 Personen sind in sechs Reihen so aufzustellen, daß in jeder Reihe fünf Personen stehen.

In neun Kästchen

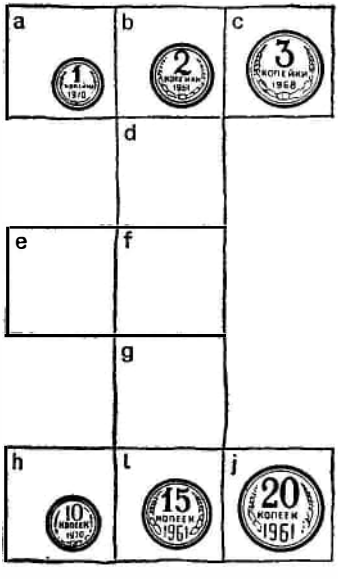
Das ist eine Scherzaufgabe — halb Aufgabe, halb Zauberei.

Bildet aus Streichhölzern ein Quadrat mit 9 Kästchen, legt in jedes eine Münze, so daß in jeder Quer- und Längsreihe 6 Kopeken liegen (Abb. 159).

Die Abbildung zeigt, wie die Münzen zu verteilen sind. Auf eine Münze legt ihr ein Streichholz.

Nun stellt euren Kameraden die Aufgabe, nämlich: Die Münze, auf der das Streichholz liegt, nicht zu berühren und die Anordnung der übrigen Münzen so zu verändern, daß wiederum in jeder Längs- und Querreihe 6 Kopeken liegen. Man wird euch sagen, das sei nicht möglich. Und doch vollführt ihr diese „unmögliche“ Sache mit einem kleinen Trick. Und zwar?

Abbildung 160



Wechsel der Münzen

Zeichnet eine große Figur, wie sie auf Abb. 160 dargestellt ist, und kennzeichnet jedes Feld oben links mit einem Buchstaben. In die 3 Felder der oberen Reihe legt Kupfermünzen: eine 1-Kopeken-, eine 2-Kopeken- und eine 3-Kopekenmünze. In die 3 Felder der untersten Reihe kommen 10 Kopeken, 15 Kopeken und 20 Kopeken. Die übrigen Kästchen bleiben frei.

Nun habt ihr die Aufgabe, durch Verschieben der Münzen auf die freien Felder zu erreichen, daß die kupfernen mit den silbernen Münzen die Plätze tauschen: die 1-Kopekenmünze mit der 10-Kopekenmün-

[1]) Die Lösungen der Aufgaben sind am Schluß jedes Abschnitts zu finden.

ze, die 2-Kopekenmünze mit der 15-Kopekenmünze, die 3-Kopekenmünze mit der 20-Kopekenmünze. Dabei kann jedes beliebige Feld zu Hilfe genommen werden. Jedoch zwei Münzen dürfen nicht zu gleicher Zeit in einem Feld sein. Auch darf ein besetztes Feld nicht übersprungen und die Begrenzung der Figur nicht überschritten werden. Zur Lösung der Aufgabe ist eine lange Kette von Zügen erforderlich. Wie müßt ihr vorgehen?

Neun Nullen

Neun Nullen sind folgendermaßen angeordnet:

0 0 0
0 0 0
0 0 0

Die Aufgabe besteht darin, alle Nullen mit nur vier geraden Strichen durchzustreichen.

Um das Auffinden des Lösungsweges zu erleichtern, füge ich noch hinzu, daß alle neun Nullen durchgestrichen werden, ohne den Bleistift einmal abzusetzen.

Sechsunddreißig Nullen

In den Feldern dieses Gitters sind 36 Nullen untergebracht.

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Es sind 12 Nullen zu streichen, so daß in jeder Längs- und Querreihe die gleiche Anzahl nicht gestrichener Nullen verbleibt.

Welche Nullen sind zu streichen?

Zwei Damesteine

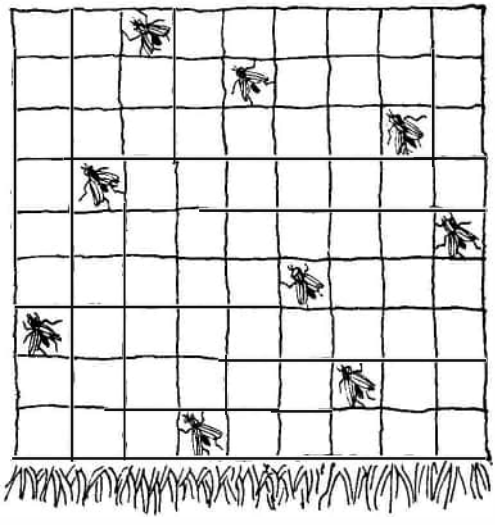
Auf ein leeres Damebrett sind zwei unterschiedliche Damesteine zu setzen. Wieviel verschiedene Positionen können sie auf dem Brett einnehmen?

Die Fliegen auf der Gardine

Auf der Fenstergardine, die ein quadratisches Muster hat, haben sich neun Fliegen niedergelassen. Zufällig haben sie sich so verteilt, daß keine zwei Fliegen auf einer Geraden oder Diagonalen sitzen (Abb. 161).

Nach einigen Minuten haben drei Fliegen ihre Position verändert und sind in benachbarte, freie Felder gekrochen. Die anderen sechs haben ihre Plätze beibehalten. Kurioserweise sind wiederum alle neun so verteilt, daß nicht ein Paar sich auf einer Geraden

Abbildung 161

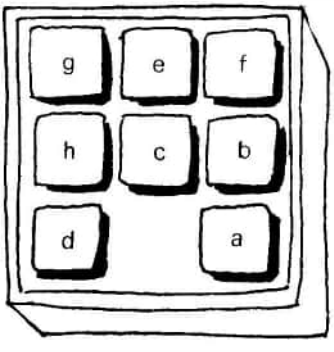


oder Diagonalen befindet, obgleich drei Fliegen ihren Platz gewechselt haben.

Könnt ihr sagen, welche drei Fliegen sich woanders niedergelassen und welche Felder sie dabei ausgewählt haben?

Acht Buchstaben

Abbildung 162

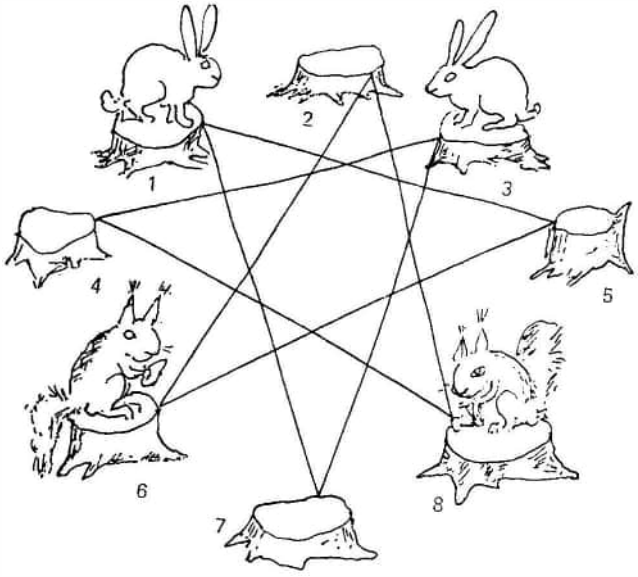


Die acht Buchstaben, die in den Feldern des auf Abb. 162 dargestellten Quadrats verteilt sind, sollen in alphabetischer Reihenfolge geordnet werden. Dabei ist das leere Feld zu Hilfe zu nehmen wie in den beiden vorhergehenden Aufgaben. Wenn die Zahl der auszuführenden Züge nicht begrenzt wird, ist das unschwer zu erreichen. Doch die Aufgabe lautet, die geforderte Anordnung mit der geringsten Zugzahl herbeizuführen. Wie viele das sind, soll der Leser selbst feststellen.

Eichhörnchen und Kaninchen

Ihr habt auf Abb. 163 acht numerierte Baumstümpfe vor euch. Auf den Stubben *1* und *3* sitzen Kaninchen, auf *6* und *8* Eichhörnchen. Doch sowohl Kaninchen als auch Eichhörnchen sind mit ihren Plätzen unzufrieden. Sie möchten ihre Baumstümpfe wechseln. Die Eichhörnchen möchten auf den Plätzen der Kaninchen sitzen, die Kaninchen auf den Plätzen der Eichhörnchen. Sie können das nur, von Stubben zu

Abbildung 163



Stubben springend, tun, aber nur in Richtung der Linien, die in der Abbildung angegeben sind.

Wie wechseln sie die Plätze?

Beachtet folgende Regeln:

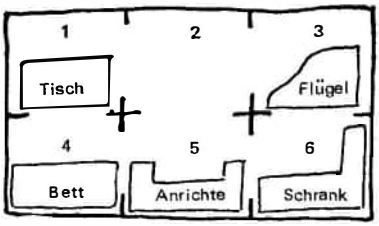
1) Von Stubben zu Stubben darf nur auf den in der Zeichnung vorgegebenen Linien gesprungen werden. Jedes Tier kann auch mehrere Male hintereinander springen.

2) Zwei Tiere dürfen nicht gleichzeitig auf einem Stubben sitzen. Deshalb darf nur auf freie Baumstümpfe gesprungen werden.

Berücksichtigt weiterhin, daß die Tiere mit der geringmöglichsten Sprungzahl ihre Plätze wechseln möchten. Allerdings mit weniger als 16 Sprüngen geht es nicht.

Datschenprobleme

Abbildung 164



Die beiliegende Skizze ist der Grundriß einer kleinen Datsche. In ihren Wohnräumen sind folgende Möbelstücke untergebracht: ein Schreibtisch, ein Flügel, ein Bett, eine Anrichte und ein Bücherschrank. Nur im Zimmer *2* stehen noch keine Möbel.

Der Datschenbewohner wollte den Flügel und den Bücherschrank gegeneinander auszutauschen. Das war keine leichte Aufgabe. Die Zimmer waren so klein, daß zwei der genannten Möbelstücke nicht gleich-

zeitig in einem Raum untergebracht werden konnten. Das Vorhandensein des von Möbeln freien Zimmers *2* war der Ausweg. Durch Hin- und Herräumen der Möbel von einem ins andere Zimmer gelang es schließlich, die gewünschte Umstellung herbeizuführen.

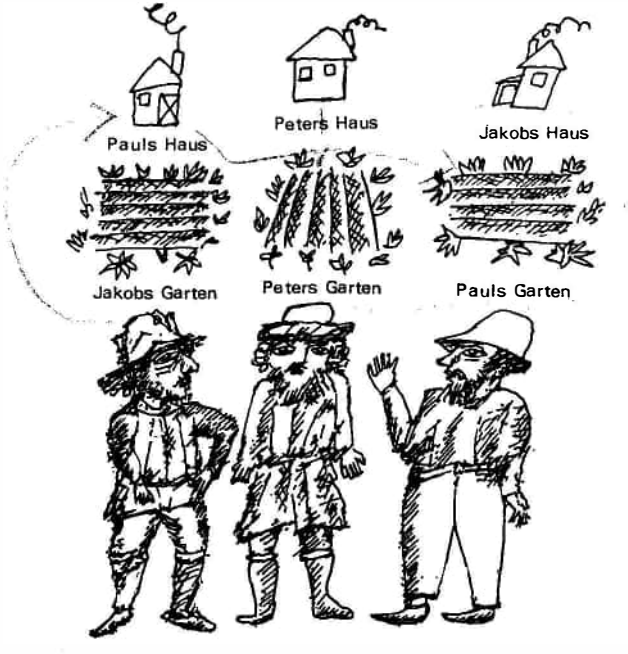
Wie kann man den Austausch mit der geringsten Anzahl von Umstellungen erreichen?

Drei Wege

Drei Brüder — Peter, Paul und Jakob — erhielten als Gartenland drei Grundstücke, die unweit von ihren Häusern nebeneinander lagen. Hier, auf der Abbildung 165 seht ihr die Lage der Häuser von Peter, Paul und Jakob und das dazugehörende Gartenland. Ihr werdet bemerken, daß sie nicht sehr günstig verteilt sind, doch die Brüder konnten sich über einen Austausch nicht einigen.

Jeder bebaute seinen Garten, doch die jeweils kürzesten Wege vom Haus zum Gartenland kreuzten sich. Bald entstand zwischen den Brüdern Zank und Streit. Um ein Zusammentreffen zu vermeiden, beschlossen sie, so einen Weg zu ihren Gärten zu wählen, bei dem es keine Kreuzung mehr gab. Nach langem

Abbildung 165



Suchen fanden sie drei solche Wege, und nun gehen sie täglich in ihre Gemüsegarten, ohne sich zu begegnen.

Könnt ihr die drei Wege zeigen?

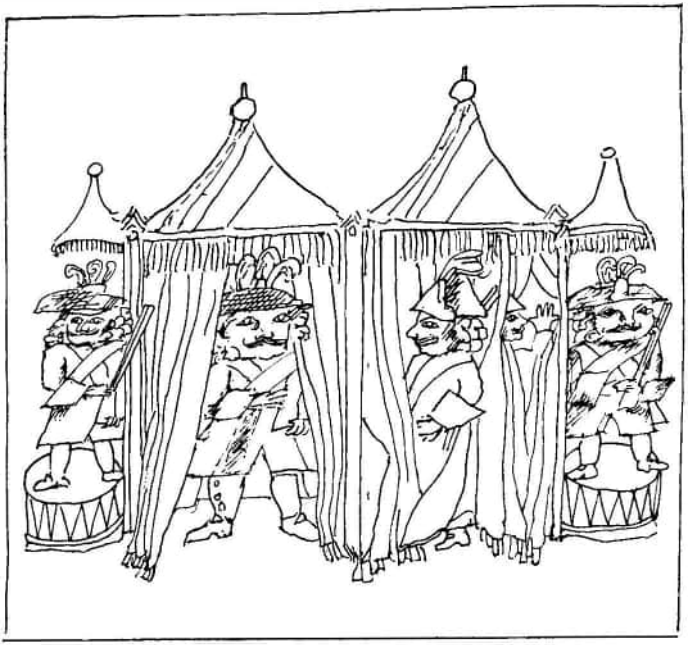
Es gibt dabei eine Bedingung. Die Wege dürfen nicht hinter Peters Haus vorbeiführen.

Die List der Wachsoldaten

Das ist eine alte Aufgabe, die es in vielen Varianten gibt. Wählen wir eine davon aus.

Das Zelt des Heerführers wird von den Soldaten, die in acht Zelten untergebracht sind, bewacht (Abb. 166). Anfangs befanden sich drei Wachsoldaten in jedem Zelt. Später durften sie sich gegenseitig besuchen, und der Wachkommandant sprach keine Strafen aus, wenn er beim Aufsuchen der Zelte in einem mehr als drei vorfand, in anderen weniger. Er prüfte nur die Zahl der Soldaten in *jeder Zeltreihe*. Wenn in drei Zelten in jeder Reihe neun Soldaten anwesend waren, meinte er, daß alle Wachsoldaten anwesend seien. Nachdem die Wachsoldaten das erfahren hatten, überlisteten sie ihren Vorgesetzten. Eines Abends entfernten sich vier Wächter, und

Abbildung 166



das blieb unbemerkt. Am folgenden Abend entfernten sich ungestraft sechs. Später luden die Wachsoldaten sogar Gäste ein. Einmal vier, ein zweites Mal acht und ein drittes Mal ein ganzes Dutzend. Doch alle diese Verstöße blieben unbemerkt, weil in drei Zelten einer Reihe der Kommandant jedesmal neun Soldaten zählte.

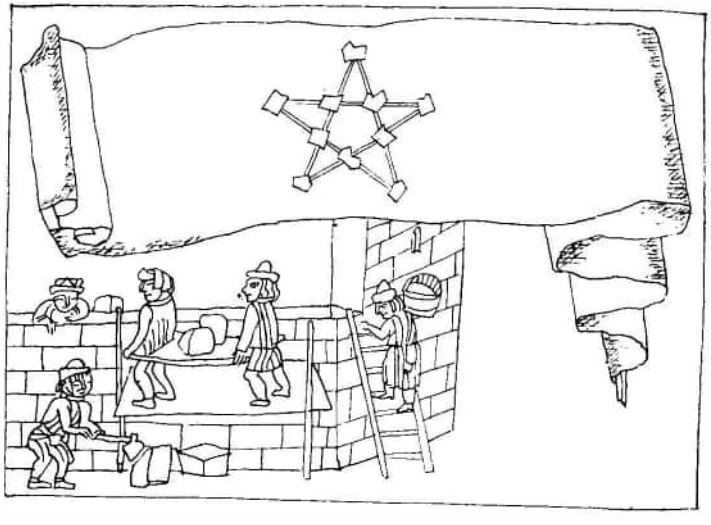
Wie gelang den Wachsoldaten dieser Trick?

Zehn Burgen

In alten Zeiten wollte ein Regent 10 Burgen bauen lassen, die durch Mauern miteinander verbunden wären. Die Mauern sollten als fünf gerade Linien verlaufen mit vier Burgen auf jeder Linie.

Der beauftragte Baumeister legte einen Plan vor, den ihr auf Abb. 167 seht.

Abbildung 167



Doch der Regent war mit dem Plan unzufrieden, denn bei dieser Anordnung war jede Burg von außen zugänglich. Er wollte jedoch, daß, wenn schon nicht alle, so doch wenigstens eine oder zwei der Burgen durch die Mauern gegen Eindringlinge von außen geschützt sind. Der Baumeister entgegnete, daß diese Bedingung unmöglich zu erfüllen sei, da ja die zehn Burgen zu je vier auf die fünf Mauern verteilt werden sollen. Aber der Regent blieb bei seiner Forderung.

Lange zerbrach sich der Baumeister den Kopf und löste schließlich die Aufgabe.

Vielleicht habt ihr auch so eine glückliche Hand, für die 10 Burgen und die fünf sie verbindenden Mauern eine solche Anordnung zu finden, damit die gestellte Bedingung erfüllt wird.

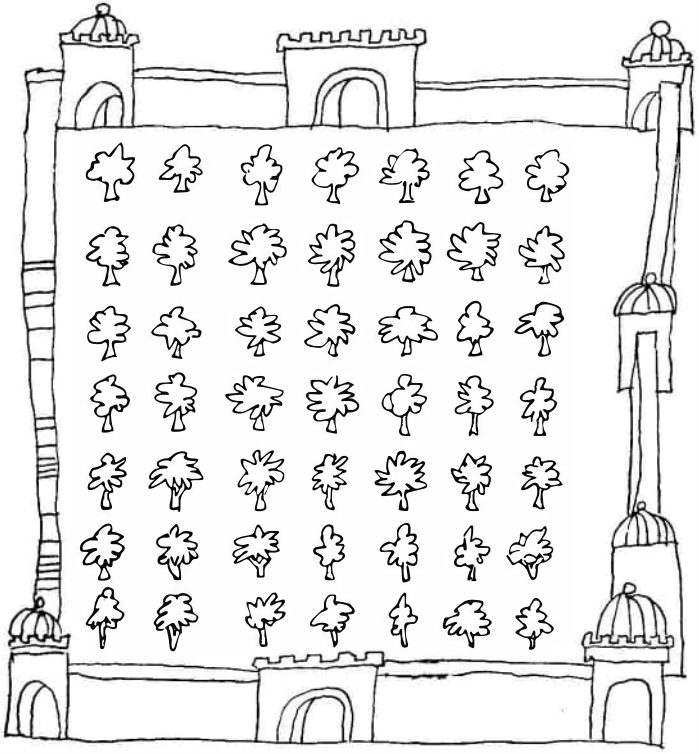
Der Obstgarten

In einem Garten wuchsen 49 Bäume. Ihr könnt auf Abb. 168 sehen, wie sie angeordnet waren. Der Gärtner meinte, daß es zu viel Bäume seien, und wünschte den Garten von überflüssigen Bäumen zu befreien, um besser Blumenbeete anlegen zu können. Dem herbeigerufenen Holzfäller gab er folgende Anweisung:

„Laß nur fünf Baumreihen stehen mit vier Bäumen je Reihe. Fälle die übrigen und nimm sie dir als Brennholz mit zum Lohn für die Arbeit."

Als der Einschlag beendet war, kam der Gärtner, um die Arbeit zu betrachten. Zu seinem Verdruß war der Garten fast völlig kahlgeschlagen. Statt 20 hatte der Holzfäller nur 10 Bäume stehenlassen und 39 gefällt.

Abbildung 168



„Warum hast du so viele Bäume geschlagen? Hab ich dir nicht gesagt, du sollst 20 stehen lassen!“ schimpfte der Gärtner.

„Nein, von 20 war nicht die Rede. Es sollten fünf Reihen mit je vier Bäumen stehen bleiben. So habe ich es auch gemacht. Schaut euch um.“

Und in der Tat, der Gärtner überzeugte sich mit Staunen davon, daß die verbliebenen zehn Bäume fünf Reihen mit je vier Bäumen bildeten. Sein Auftrag war exakt ausgeführt, und doch hatte der Arbeiter 39 statt 29 Bäume gefällt.

Wie hat er das fertiggebracht?

Die weiße Maus

Alle 13 die Katze umkreisenden Mäuse (Abb. 169) ereilt das Los, von ihr gefressen zu werden. Doch die Katze möchte sie in bestimmter Reihenfolge verspeisen, und zwar jedesmal zählt sie die 13. Maus ab in Blickrichtung der Mäuse und frißt sie.

Mit welcher Maus muß sie beginnen, damit die weiße Maus als letzte gefressen wird?

Abbildung 169



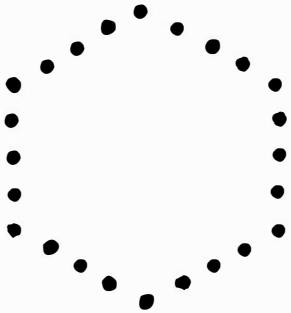


Antworten

In sechs Reihen

Der Forderung wird man leicht gerecht, stellt man die Personen in Form eines Sechseckes, wie in Abb. 170 dargestellt, auf.

Abbildung 170



In neun Kästchen

Die abgedeckte Münze rührt ihr nicht an. Jedoch die ganze untere Reihe verlagert ihr nach oben (Abb. 171). Die Anordnung ist verändert, und doch ist die Forderung, nämlich die Münze mit dem Streichholz nicht zu bewegen, erfüllt.

Abbildung 171



Wechsel der Münzen

Hier ist die Reihenfolge der Verschiebungen, die notwendig sind, um zum Ziel zu kommen. (Die Zahl kennzeichnet die Münze, der Buchstabe das Feld, auf das sie verlagert wird.)

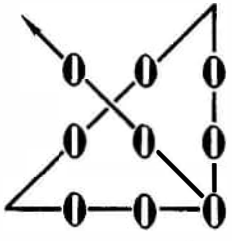
2—e	15—i	2—d	10—a
15—b	3—g	1—h	3—e
10—d	20—c	10—e	15—b
2—h	1—e	2—j	2—d
20—e	3—a	15—i	3—j
10—j	15—b	3—g	2—i

Mit weniger als 24 Zügen ist die Aufgabe nicht zu lösen.

Neun Nullen

Die Aufgabe wird, wie in Abb. 172 gezeigt, gelöst.

Abbildung 172



Sechsunddreißig Nullen

Da von 36 Nullen 12 zu streichen sind, bleiben 36—12=24, also vier Nullen in jeder Reihe. Die Verteilung der nicht gestrichenen Nullen ist folgendermaßen:

0		0	0	0	
		0	0	0	0
0	0	0			0
0	0		0		0
0	0			0	0
	0	0	0	0	

Zwei Damesteine

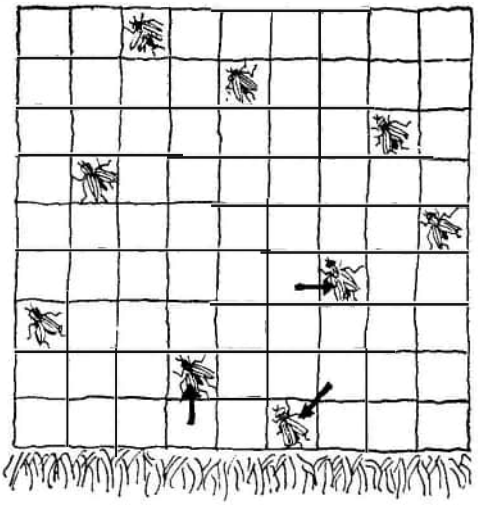
Den ersten Stein kann man auf ein beliebiges der 64 Felder stellen, d. h., man hat 64 Möglichkeiten. Nachdem der erste Stein gesetzt ist, kann man den zweiten auf einen beliebigen der verbliebenen 63 Felder setzen. Also kann man zu den 64 Möglichkeiten für den ersten Stein noch 63 für den zweiten ergänzen. Daraus ergibt sich die Gesamtzahl der verschiedenen Anordnung dieser zwei Steine auf dem Damebrett:

$$64 \cdot 63 = 4032.$$

Die Fliegen auf der Gardine

Die Pfeile auf Abb. 173 zeigen, welche Fliegen ihren Platz verändert haben und von welchen Feldern sie kommen.

Abbildung 173



Acht Buchstaben

Die geringste Zahl von Zügen ist 23. Hier ist die Reihenfolge:

A B F E C A B F E C A B D H G A B D H G D E F

Eichhörnchen und Kaninchen

Nachfolgend wird der kürzeste Wechsel genannt. Die Ziffern erläutern, von welchem Baumstumpf wohin zu springen ist (z. B. 1—5 besagt, daß ein Eichhörnchen vom ersten Stubben zum fünften springt). Insgesamt sind 16 Sprünge nötig, und zwar:

1—5; 3—7; 7—1; 5—6; 3—7; 6—2; 8—4; 7—1;
8—4; 4—3; 6—2; 2—8; 1—5; 5—6; 2—8; 4—3.

Datschenprobleme

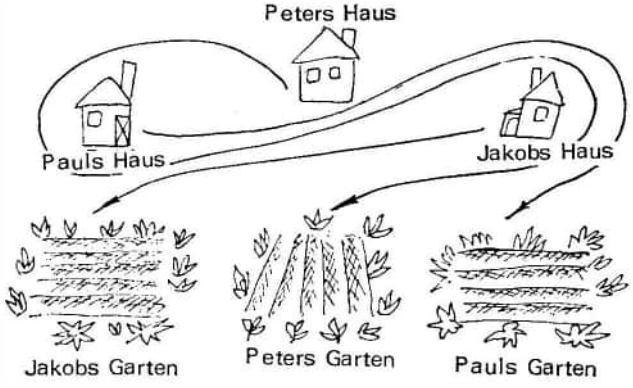
Das Umräumen erfordert mindestens 17 Möbelverschiebungen. Der Möbelaustausch geht folgendermaßen vor sich:

1. Flügel
2. Bücherschrank
3. Anrichte
4. Flügel
5. Schreibtisch
6. Bett
7. Flügel
8. Anrichte
9. Bücherschrank
10. Schreibtisch
11. Anrichte
12. Flügel
13. Bett
14. Anrichte
15. Schreibtisch
16. Bücherschrank
17. Flügel

Drei Wege

Drei sich nicht kreuzende Wege sind auf Abb. 174 dargestellt.

Abbildung 174

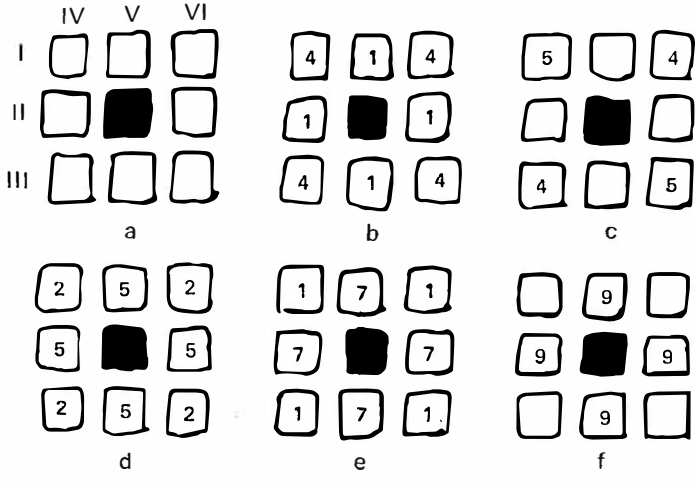


Peter und Paul müssen ziemlich große Umwege machen. Doch so können die Brüder die unerwünschten Begegnungen vermeiden.

Die List der Wachsoldaten

Auf die Lösung kommt man leicht bei folgender Überlegung: Damit vier Wachsoldaten sich unbemerkt entfernen können, müssen in den Reihen *I* und *III* (Abb. 175*a*) je neun Soldaten anwesend sein. Da ihre Gesamtzahl 24—4=20 beträgt, müssen in Reihe *II* 20—18=2 sein, also ein Soldat im linken Zelt dieser Reihe und einer im rechten. Auf die gleiche Weise ermitteln wir, daß im oberen Zelt der Reihe *V* ein Soldat sein muß und im unteren auch einer. Damit ist klar, daß in den Eckzelten

Abbildung 175



jeweils vier Wachsoldaten sein müssen. Folglich ist die gesuchte Aufteilung für das unbemerkte Verschwinden von vier Soldaten wie in Abb. 175*b*.

Auf ähnliche Weise ermitteln wir die notwendige Aufteilung für das Fernbleiben von sechs Soldaten (Abb. 175*c*).

Für vier Besucher (Abb. 175*d*).

Für acht Besucher (Abb. 175*e*).

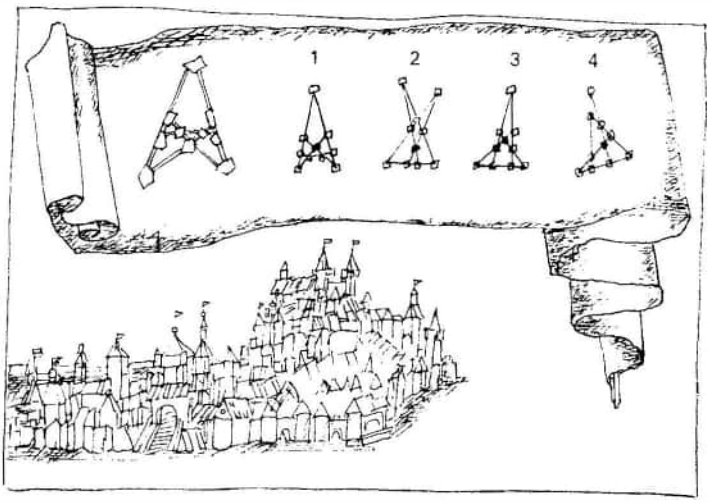
Und schließlich ist in Abb. 175*f* die Verteilung von 12 Besuchern aufgezeigt.

Es ist leicht zu erkennen, daß sich unter den genannten Bedingungen nicht mehr als sechs Wachsoldaten ungestraft entfernen können und nicht mehr als 12 Besucher aufgenommen werden dürfen.

Zehn Burgen

Abb. 176 (links) zeigt die Anordnung, bei der zwei Burgen vor einem Überfall von außen geschützt sind.

Abbildung 176

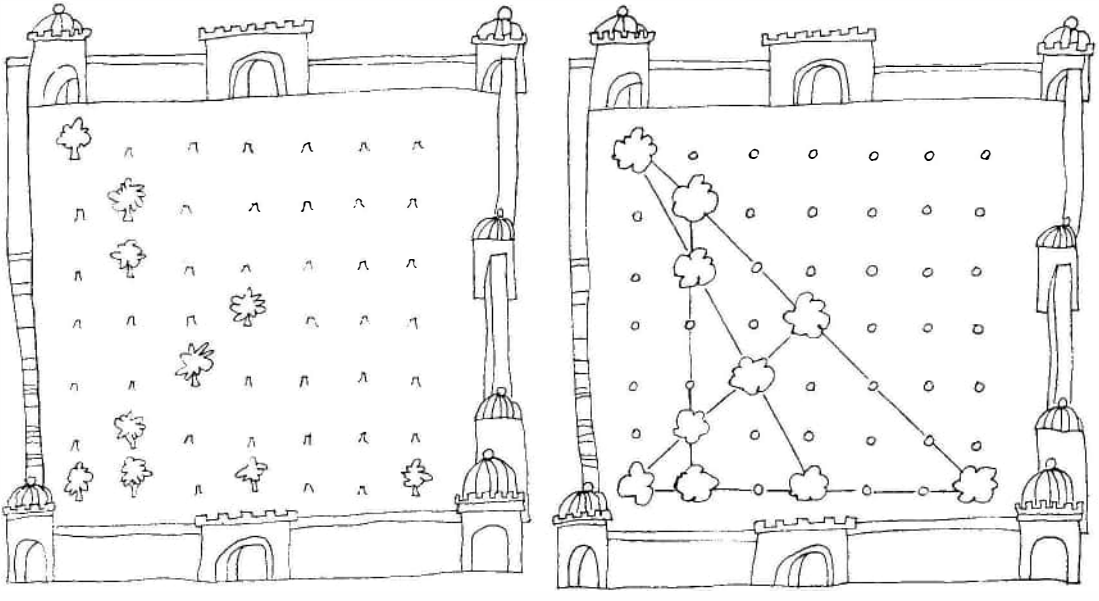


Ihr seht, daß die 10 Burgen so, wie es verlangt wurde, zu je vier auf fünf geraden Mauern angeordnet sind. Abb. 176 (rechts) zeigt noch vier weitere Lösungsmöglichkeiten für die gleiche Aufgabe.

Der Obstgarten

Die nichtgefällten Bäume standen so, wie auf Abb. 177 dargestellt. Sie bilden fünf gerade Reihen mit je vier Bäumen pro Reihe.

Abbildung 177



Die weiße Maus

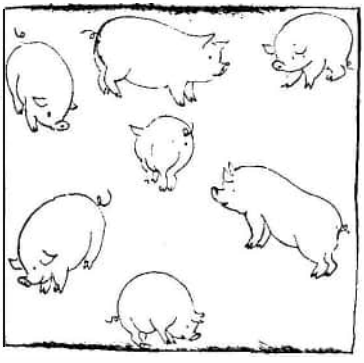
Die Katze muß zuerst die Maus fressen, auf die sie blickt, das heißt, die sechste von der weißen aus gezählt. Versucht, mit dieser Maus beginnend, das Abzählen, wobei ihr jede 13. Maus durchstreicht. Ihr werdet euch davon überzeugen, daß die weiße Maus als letzte drankommt.



Geschicklichkeit beim Zerschneiden und Zusammenfügen

Mit drei geraden Linien

Abbildung 178



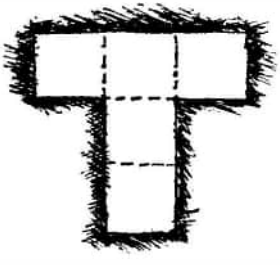
Die Abb. 178 ist mit drei geraden Linien so in sieben Teile zu trennen, daß sich in jedem Abschnitt ein ganzes Schwein befindet.

In vier Teile

Dieses Stück Land (Abb. 179) setzt sich aus fünf quadratischen Abschnitten gleicher Größe zusammen. Könnt ihr es so schneiden, daß es nicht aus fünf, sondern vier Abschnitten gleicher Größe besteht.

Zeichnet die Fläche auf ein Blatt Papier und sucht die richtige Lösung.

Abbildung 179

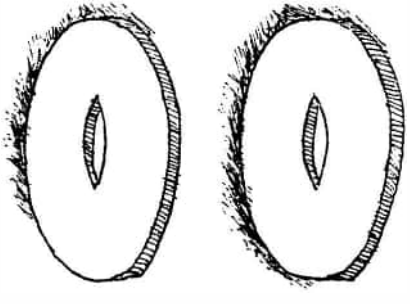


Einen Kreis daraus fertigen

Einem Tischler brachte man zwei Platten aus seltenem Holz mit einer Öffnung im Zentrum und beauftragte ihn, daraus eine vollkommen runde, geschlossene Tischplatte zu fertigen und zwar so, daß keine Stücken des wertvollen Holzes übrigblieben. Das gesamte Holz sollte bis zum letzten Stück dabei Verwendung finden.

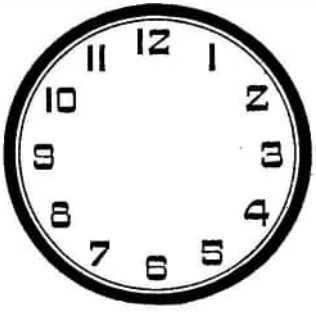
Der Tischler war ein Meister wie man ihn selten findet, doch auch der Auftrag war nicht einfach. Lange zerbrach sich der Meister den Kopf, überlegte, rechnete hin und her, und schließlich kam er darauf, wie der Auftrag auszuführen ist.

Abbildung 180



Vielleicht könnt ihr es auch erraten? Schneidet aus Papier zwei Figuren, die denen auf Abb. 180 genau entsprechen (nur etwas vergrößert), und mit ihrer Hilfe versucht dann, die Lösung zu finden.

Abbildung 181

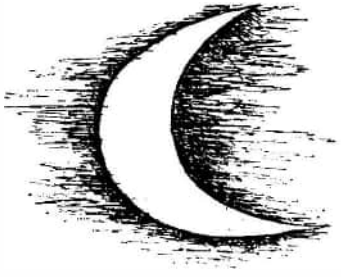


Das Zifferblatt

Dieses Zifferblatt (Abb. 181) ist in sechs Teile beliebiger Form zu schneiden, jedoch so, daß die Zahlensumme auf jedem Teil gleich ist.

Die Aufgabe zielt nicht so sehr auf eure Findigkeit als vielmehr auf eure Schnelligkeit beim Überlegen ab.

Abbildung 182



Die Mondsichel

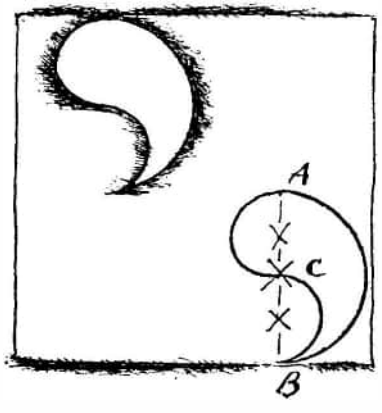
Diese Mondsichel (Abb. 182) ist in sechs Teile mit Hilfe von zwei geraden Schnitten zu teilen. Wie macht man das?

Abbildung 183

Die Teilung eines Kommas

Ihr seht auf Abb. 183 ein breites Komma. Es ist sehr einfach konstruiert. Auf der Geraden $A—B$ ist ein Halbkreis geschlagen und danach noch einmal auf jeder Hälfte der Linie $A—B$ ein Halbkreis nach rechts und einer nach links.

Die Aufgabe ist nun, mit einer Kurve die Figur in zwei völlig gleiche Teile zu trennen. Die Figur ist auch insofern interessant, weil man aus zwei solchen Figuren einen Kreis bilden kann. Wie?

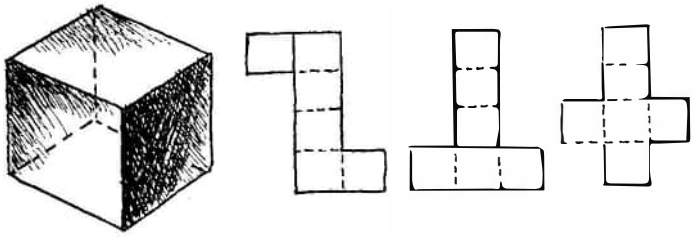


Einen Würfel auseinanderfalten

Schneidet ihr einen Papierwürfel längs der Kanten so, daß man ihn auseinanderfalten und mit allen sechs Quadraten auf den Tisch legen kann, dann

Abbildung 184

entstehen Figuren in den drei abgebildeten Formen (Abb. 184):



Es ist interessant zu ermitteln, wieviel *verschiedene* Figuren man auf diese Weise erhalten kann. Mit anderen Worten: wieviel Möglichkeiten gibt es, um einen Würfel in eine Fläche zu verwandeln?

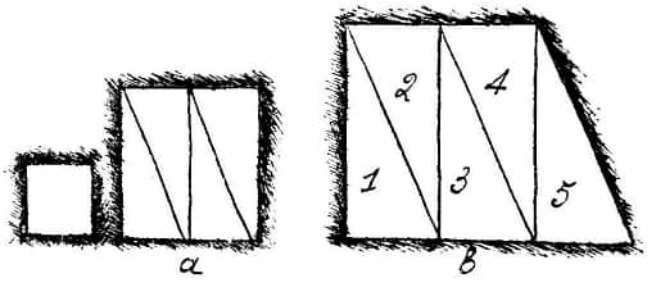
Ich mache den ungeduldigen Leser darauf aufmerksam, daß nicht weniger als 10 Figuren möglich sind.

Ein Quadrat zusammenfügen

Könnt ihr ein Quadrat aus fünf Papierstücken der abgebildeten Form herstellen (Abb. 185*a*)?

Wenn ihr erraten habt, wie man diese Aufgabe löst, dann versucht ein Quadrat aus fünf gleichen Dreiecken in der gleichen Gestalt wie ihr sie eben

Abbildung 185



verwendet habt (eine Kathete doppelt so lang wie die andere). Ein Dreieck könnt ihr in zwei Teile schneiden, doch die übrigen müssen ohne Zerschneiden verarbeitet werden (Abb. 185*b*).

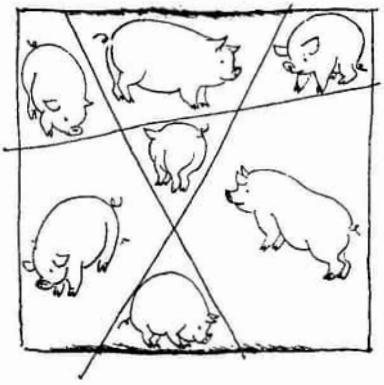


Antworten

Mit drei geraden Linien

Lösung der Aufgabe:

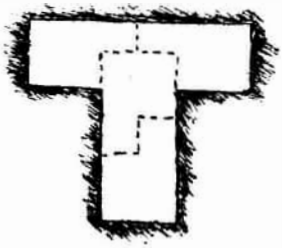
Abbildung 186



In vier Teile

Wie man das Stück Land aufteilt, zeigen die gestrichelten Linien (Abb. 187).

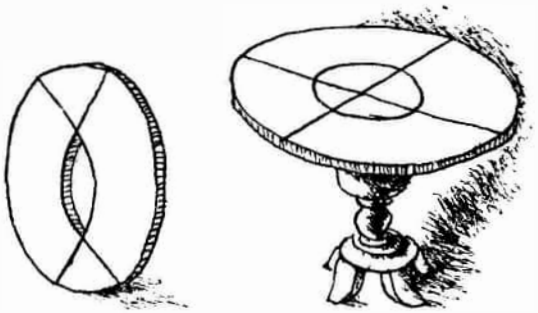
Abbildung 187



Einen Kreis daraus fertigen

Der Tischler zerschnitt jede der gebrachten Platten in vier Teile, so wie es auf Abb. 188 links zu sehen ist. Aus den vier kleineren Teilen setzte er einen Kreis.

Abbildung 188

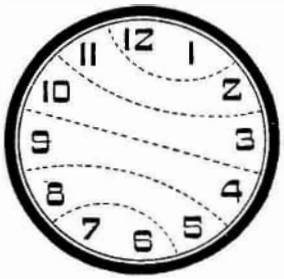


zusammen, an dessen Ränder er die übrigen vier Teile leimte. So bekam er eine ausgezeichnete Platte für einen runden Tisch.

Das Zifferblatt

Da die Zahlensumme des Zifferblattes gleich 78 ist, müssen die Zahlen auf jedem der sechs Abschnitte 78 : 6 = 13 ergeben. Das erleichtert die Lösungsfindung, die auf Abb. 189 gezeigt wird.

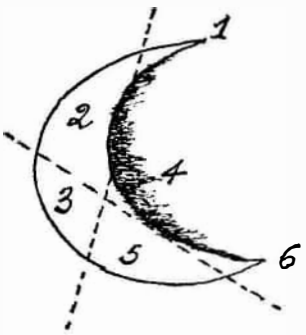
Abbildung 189



Die Mondsichel

Man muß es wie auf Abbildung 190 tun. Es entstehen sechs Teile, die der Übersichtlichkeit wegen numeriert sind.

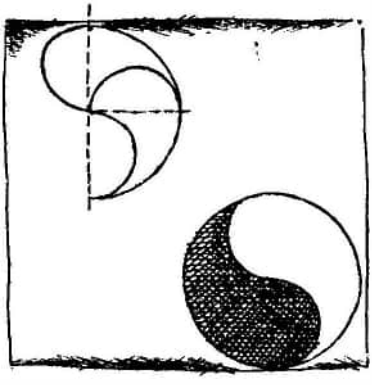
Abbildung 190



Die Teilung eines Kommas

Die Lösung wird in Abb. 191 gezeigt. Beide Teile des geteilten Kommas sind gleich, da sie aus gleichen Elementen bestehen. Die Abbildung zeigt weiterhin, wie ein Kreis aus zwei Kommata — dem weißen und dem schwarzen — entsteht.

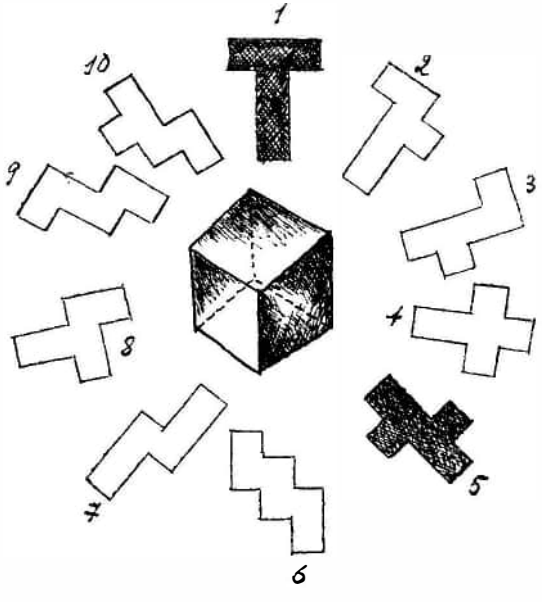
Abbildung 191



Einen Würfel auseinanderfalten

Hier seht ihr die zehn verschiedenen Möglichkeiten zum Auseinanderfalten eines Würfels (Abb. 192). Die Figuren *1* und *5* kann man umdrehen. Damit entstehen zwei weitere Formen, und die Gesamtzahl beträgt dann nicht 10, sondern 12.

Abbildung 192

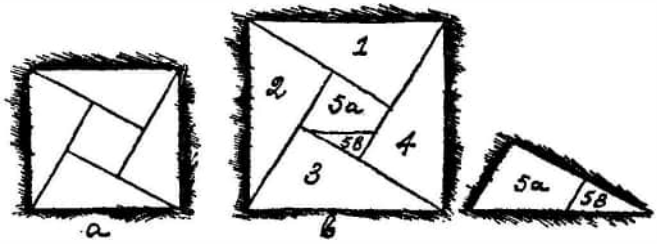


Ein Quadrat zusammenfügen

Die Lösung der ersten Aufgabe ist in Abb. 193*a* dargestellt. Und wie ein Quadrat

aus fünf Dreiecken gebildet wird, zeigt Abb. 193*b*. Eins davon wird vorher, wie auf der rechten Skizze dargestellt, zertrennt.

Abbildung 193



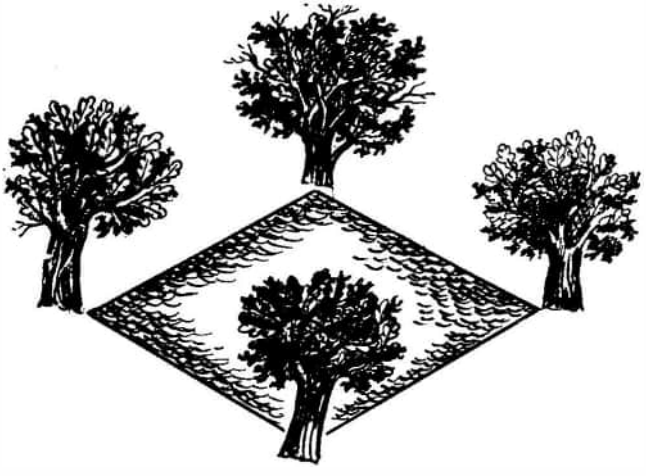
212-213

Aufgaben mit Quadraten

Der Teich

Stellen wir uns einen quadratischen Teich vor (Abb. 194). An seinen Ecken wachsen, direkt am Wasser, vier alte Eichen. Der Teich soll auf die doppelte Fläche unter Beibehaltung der quadratischen Form vergrößert werden. Die alten Eichen sollen

Abbildung 194



dabei erhalten bleiben. Kann man den Teich auf die geforderte Fläche so erweitern, daß die vier Eichen auf ihren Plätzen verbleiben, vom Wasser nicht überflutet werden und am Ufer des neuen Teiches stehen?

Der Parkettleger

Ein Parkettleger prüfte die von ihm aus Holz gesägten Quadrate folgendermaßen: Er verglich die Länge der Kanten, und wenn alle vier gleich waren, hielt er das Quadrat für richtig herausgesägt.

Ist eine solche Überprüfung zuverlässig?

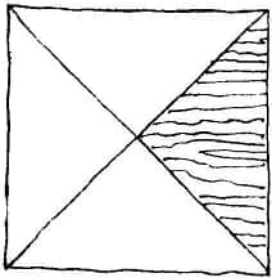
Ein anderer Parkettleger

Ein zweiter Parkettleger prüfte seine Arbeit auf andere Weise. Wenn beide Diagonalen gleich lang

waren, hielt er das Quadrat für richtig zugeschnitten.
Seid ihr mit ihm einer Meinung?

Ein dritter Parkettleger

Abbildung 195



Der dritte Parkettleger überzeugte sich beim Prüfen der Quadratform davon, ob alle vier Teile der sich kreuzenden Diagonalen (Abb. 195) untereinander gleich sind. Nach seiner Meinung ist das ein Beweis für die Quadratform des zugeschnittenen Vierecks.
Und was meint ihr?

Die Weißnäherin

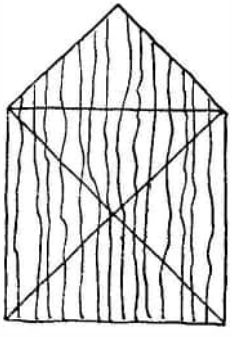
Eine Weißnäherin muß ein Stück Stoff in Form eines Quadrates abschneiden. Nachdem sie einige Stücken abgeschnitten hat, prüft sie ihre Arbeit, indem sie das viereckige Stück in der Diagonalen faltet und darauf achtet, ob die Kanten aufeinanderliegen. Trifft das zu, so folgert sie daraus, das zugeschnittene Stück sei ein exaktes Quadrat.
Stimmt das?

Noch eine Weißnäherin

Eine andere Weißnäherin gibt sich mit der Prüfung ihrer Kollegin nicht zufrieden. Sie legt das abgeschnittene Viereck zunächst in der Diagonalen zusammen, danach öffnet sie es wieder und faltet es in der anderen Diagonalen. Und erst dann, wenn die Kanten der Figur in beiden Fällen sich decken, hält sie das Quadrat für richtig zugeschnitten.
Was meint ihr zu dieser Probe?

Tischlersorgen

Abbildung 196



Ein junger Tischler hat eine fünfeckige Platte, wie sie in Abb. 196 dargestellt ist. Ihr seht, daß sie gewissermaßen aus einem Quadrat und einem angesetzten Dreieck besteht, das viermal kleiner als das Quadrat ist. Der Tischler muß nun, ohne etwas wegzulassen noch hinzuzufügen, diese Form in ein Quadrat verwandeln. Selbstverständlich muß er dazu die Platte zunächst in Teile zersägen. Das hat unser junger Tischler auch vor, doch er will die Platte nur durch zwei gerade Linien zertrennen.

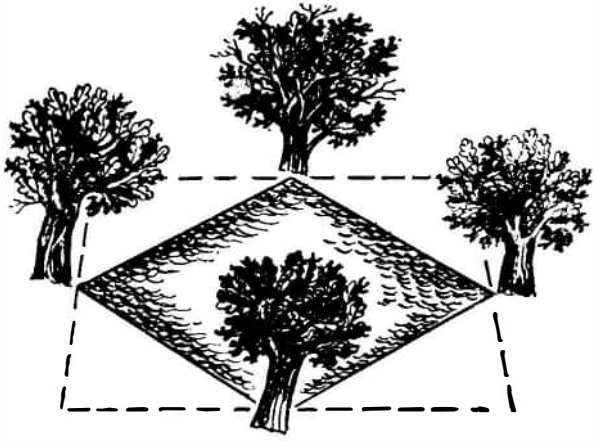
Kann man mit zwei Geraden unsere Figur so zerteilen, daß aus den Teilen ein Quadrat zusammengefügt werden kann? Wenn ja, wie macht man das?

Antworten

Der Teich

Es ist ohne weiteres möglich, die Teichfläche zu verdoppeln, die Quadratform beizubehalten und die Eichen unberührt zu lassen. Hier auf der Abbildung ist gezeigt, wie man das macht. Man muß so graben, daß die Eichen in die Mitte der Seiten des

Abbildung 197

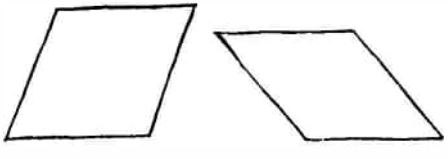


neuen Quadrates zu stehen kommen (Abb. 197). Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß die Teichfläche doppelt so groß geworden ist. Dazu braucht man nur die Diagonalen des alten Teiches zu ziehen und die dabei entstehenden Dreiecke zusammenzurechnen.

Der Parkettleger

Die Überprüfung ist nicht ausreichend. Das Viereck würde der Überprüfung standhalten, ohne ein Quadrat zu sein. Ihr seht in Abb. 198 Beispiele solcher Vierecke, bei denen alle Seiten gleich sind, doch die Ecken keinen rechten Winkel bilden (Rhomben).

Abbildung 198

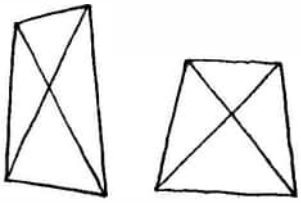


Ein anderer Parkettleger

Diese Überprüfung ist ebenso unzuverlässig wie die erste. Im Quadrat sind wohl die Diagonalen gleich lang, doch nicht jedes Viereck mit gleichen Diagonalen ist

ein Quadrat. Das ist sehr deutlich an den Figuren zu erkennen, die in Abb. 199 dargestellt sind.

Abbildung 199

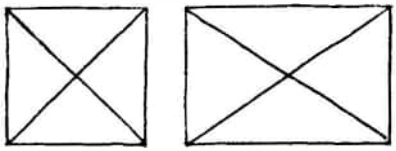


Die Parkettleger müßten für jedes zugeschnittene Viereck beide Proben zugleich durchführen, dann könnte man sicher sein, daß die Arbeit exakt ausgeführt ist. Jeder Rhombus, bei dem die Diagonalen gleich sind, ist ein Quadrat.

Ein dritter Parkettleger

Diese Kontrolle beweist, daß das geprüfte Viereck rechte Winkel hat, d. h. ein Rechteck ist. Doch ob alle Seiten gleich lang sind, kann damit nicht überprüft werden, wie auf Abb. 200 zu sehen ist.

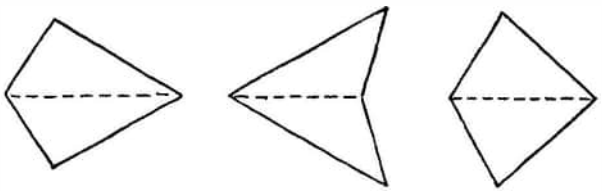
Abbildung 200



Die Weißnäherin

Die Probe ist absolut nicht ausreichend. Abb. 201 zeigt einige Vierecke, deren Kanten beim Falten in den Diagonalen zusammenfallen. Und doch sind es keine Quadrate.

Abbildung 201



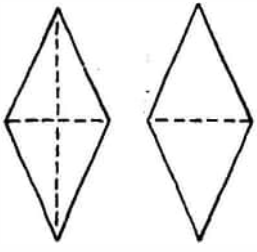
Ihr seht, wie stark ein Viereck von der Quadratform abweichen kann und doch der Prüfung standhält.

Wir können uns durch diese Probe nur davon überzeugen, daß die Figur symmetrisch ist.

Noch eine Weißnäherin

Diese Probe ist nicht besser als die vorangegangene. Ihr könnt aus Papier Vierecke soviel ihr wollt ausschneiden, die dieser Prüfung standhalten und doch keine Quadrate sind. Bei den Figuren in Abb. 202 sind alle Seiten gleich (es sind Rhomben), doch die Ecken sind nicht rechtwinklig — es sind also keine Quadrate. Um sich wirklich von der Quadratform des abgeschnittenen Stückes zu überzeugen, muß man außerdem prüfen, ob die Diagonalen gleich sind (oder die Winkel).

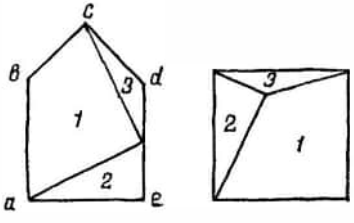
Abbildung 202



Tischlersorgen

Eine Schnittlinie muß von der Spitze *c* zur Mitte der Seite *de* führen. Die andere von der Mitte der Seite *de* zur Spitze *a*. Aus den entstandenen drei Abschnitten *1*, *2* und *3* wird das Quadrat gebildet, wie auf Abb. 203 dargestellt ist.

Abbildung 203



Aufgaben aus dem Arbeitsleben

Erdarbeiten

Fünf Erdarbeiter heben in 5 Stunden 5 m Graben aus. Wieviel Erdarbeiter heben in 100 Stunden 100 m Graben aus?

Holzsägen

Zwei Mann zersägen einen Baumstamm in Meterstücke. Der Stamm ist 5 m lang. Einmal den Stamm quer durchzusägen, dauert 1 1/2 Minuten. In wieviel Minuten haben sie den ganzen Stamm zersägt?

Tischler und Zimmerleute

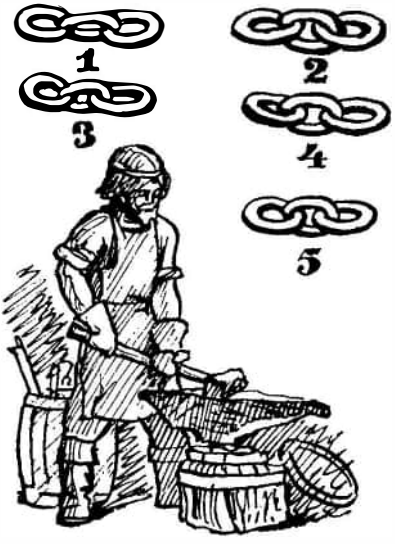
Eine Brigade aus sechs Zimmerleuten und einem Tischler führte eine Arbeit aus. Jeder Zimmermann verdiente dabei 20 Rubel, der Tischler 3 Rubel mehr, als jeder der sieben Brigademitglieder im Durchschnitt verdiente.

Wieviel bekam der Tischler für die Arbeit?

Fünf Kettenteile

Einem Schmied brachte man fünf Ketten mit je drei Gliedern — sie sind in Abb. 204 zu sehen — und beauftragte ihn, daraus eine Kette zu fertigen.

Abbildung 204



Bevor der Schmied die Arbeit begann, überlegte er, wie viele Glieder er dazu öffnen und wieder zuschmieden muß. Er kam zu dem Schluß, daß er vier Ringe zunächst öffnen und dann wieder zusammenschmieden muß.

Ist es nicht möglich, die gleiche Arbeit mit weniger geöffneten Kettengliedern durchzuführen?

Wieviel Fahrzeuge?

In einer Werkstatt wurden im Monat 40 Fahrzeuge — Autos und Motorräder — repariert. Insgesamt durchliefen genau 100 Räder die Reparatur.

Nun ist die Frage, wie viele von den reparierten Fahrzeugen waren Autos, wie viele Motorräder?

Kartoffelnschälen

Zwei Personen schälten 400 Kartoffeln. Eine schälte drei Stück pro Minute, die andere zwei. Die zweite Person arbeitete 25 Minuten länger als die erste.

Wie lange hat jede von den beiden gearbeitet?

Zwei Arbeiter

Zwei Arbeiter brauchen für die Ausführung eines bestimmten Auftrages sieben Tage. Bedingung ist, daß der zweite zwei Tage später mit der Arbeit beginnt. Wenn jeder diese Arbeit einzeln ausführen würde, benötigte der erste vier Tage mehr als der zweite.

In wieviel Tagen könnte jeder die Arbeit einzeln erledigen?

Die Aufgabe ist auf rein arithmetischem Wege lösbar, wobei keinerlei Bruchrechnung erforderlich ist.

Abschreiben eines Vortrages

Zwei Schreibkräfte wurden beauftragt, einen Vortrag abzuschreiben. Die erfahrenere der beiden könnte die Arbeit in 2 Stunden, die weniger erfahrene in 3 Stunden schaffen.

Wieviel Zeit brauchen sie für die Erledigung der Aufgabe, wenn die Arbeit so aufgeteilt wird, daß sie so schnell wie möglich ausgeführt werden kann?

Aufgaben dieser Art rechnet man gewöhnlich nach dem bekannten Beispiel von den Bassins aus. Und zwar folgendermaßen: In unserer Aufgabe errechnet

man, welchen Teil der genannten Arbeit jede Schreibkraft in einer Stunde ausführt, addiert beide Brüche und teilt die Eins durch diese Summe.

Könnt ihr nicht ein neues Verfahren zur Lösung solcher Aufgaben erfinden, das sich von der Schablone unterscheidet?

Das Abwiegen von Mehl

Ein Verkaufsstellenleiter wollte fünf Säcke Mehl abwiegen. Im Laden war zwar eine Waage, doch fehlten einige Gewichte, und es war nicht möglich, Mengen von 50 bis 100 kg abzuwiegen. Jeder Sack wog aber ca. 50—60 kg

Der Verkaufsstellenleiter ließ sich nicht irritieren und wog die Säcke paarweise. Fünf Säcke kann man zu 10 verschiedenen Paaren vereinigen, deshalb mußten 10 Wiegeoperationen durchgeführt werden. Es entstand folgende Zahlenreihe, die hier der Größe nach geordnet ist:

110 kg 112 kg, 113 kg, 114 kg, 115 kg,
116 kg, 117 kg, 118 kg, 120 kg, 121 kg.

Wieviel wiegt jeder Sack einzeln?



Antworten

Erdarbeiten

Bei dieser Aufgabe kann man leicht in die Falle geraten. Man könnte meinen, wenn fünf Erdarbeiter in 5 Stunden 5 m Graben ausheben, dann werden für das Ausheben von 100 m Graben in 100 Stunden 100 Arbeiter benötigt. Doch das ist eine völlig abwegige Überlegung. Es werden die gleichen fünf Arbeiter und nicht mehr benötigt.

In der Tat, fünf Erdarbeiter heben in 5 Stunden 5 m Graben aus. Das heißt, fünf Erdarbeiter würden in 1 Stunde 1 m Graben ausheben und in 100 Stunden 100 m.

Holzsägen

Oft wird geantwortet — in $1\,1/2 \cdot 5$, also in $7\,1/2$ Minuten. Dabei wird vergessen, daß der letzte Schnitt *zwei* Meterstücke ergibt. Daher muß man, um ein 5-Meter-Stamm in fünf Teile zu zersägen, nicht fünf-, sondern viermal trennen. Das sind demnach $1\,1/2 \cdot 4 = 6$ Minuten.

Tischler und Zimmerleute

Der durchschnittliche Arbeitslohn eines Brigademitgliedes ist leicht zu ermitteln. Es sind nur die 3 Rubel gleich aufzuteilen auf die sechs Zimmerleute. Zu den 20 Rubeln, die jeder erhält, kommen also weitere 50 Kopeken[1]), und wir haben den durchschnittlichen Arbeitslohn jedes Brigademitgliedes.

Auf diese Weise erfahren wir, daß der Arbeitslohn des Tischlers 20 Rubel und 50 Kopeken +3 Rubel, also 23,50 Rubel beträgt.

Fünf Kettenteile

Es genügt, nur *drei Ringe* eines Kettenteiles zu öffnen und mit den erhaltenen Ringen die Enden der übrigen vier Abschnitte zu vereinigen.

Wieviel Fahrzeuge?

Wären alle 40 Fahrzeuge Motorräder, würde die Gesamtzahl der Räder 80 sein, das sind 20 weniger, als es tatsächlich waren. Tauschen wir ein Motorrad gegen ein Auto, vergrößert sich die Zahl der Räder um 2, die Differenz reduziert sich um 2. Offenbar ist zehnmal ein solcher Austausch vorzunehmen, damit die Differenz auf Null sinkt. Dann waren es 10 Autos und 30 Motorräder.

Tatsächlich: $10 \cdot 4 + 30 \cdot 2 = 100$.

---

[1]) 1 Rubel = 100 Kopeken (*Anm. d. Red.*)



Kartoffelnschälen

In den zusätzlichen 25 Arbeitsminuten schälte die zweite Person $2 \cdot 25 = 50$ Stück. Ziehen wir diese 50 von 400 ab, stellen wir fest, daß in der gleichen Arbeitszeit beide 350 Stück schälen würden. Da sie in einer Minute zusammen $2+3=5$ Stück schälen, teilen wir nun 350 durch 5. So ermitteln wir, daß jeder von ihnen 70 Minuten arbeitete.

Das ist auch die wirkliche Arbeitsdauer der ersten Person. Die zweite arbeitete $70+25=95$ Minuten.

Das Ergebnis ist also: $3 \cdot 70 + 2 \cdot 95 = 400$.

Zwei Arbeiter

Würde jeder einzeln die Hälfte der Arbeit ausführen, so benötigte der erste zwei Tage mehr als der zweite (denn der Zeitunterschied bei der Erledigung der *gesamten* Arbeit beträgt vier Tage). Da jedoch zwei Arbeitstage Unterschied entstehen, wenn beide die Arbeit gemeinsam verrichten, so ist offensichtlich, daß der erste in sieben Tagen genau die Hälfte der Arbeit ausführt. Der zweite erledigt die andere Hälfte in fünf Tagen. Somit könnte der erste die gesamte Arbeit allein in 14 Tagen, der zweite in 10 Tagen erledigen.

Abschreiben eines Vortrages

Ein origineller Lösungsweg (nicht nach der üblichen Schablone) ist folgendermaßen: Zuerst stellen wir die Frage, wie die Schreibkräfte ihre Arbeit untereinander aufteilen müssen, um zu gleicher Zeit fertig zu sein. (Denn zweifellos wird nur unter dieser Bedingung, ohne das Auftreten von Wartezeiten, die Arbeit in kürzester Frist erledigt.) Da die erfahrenere Schreibkraft 1 1/2mal so schnell schreibt wie die weniger erfahrene, muß ihr Arbeitsanteil 1 1/2mal so groß sein, um ein gleichzeitiges Beenden der Arbeit zu gewährleisten. Daraus resultiert, daß erstere 3/5 und die zweite 2/5 des Vortrages zum Abschreiben übernehmen muß.

Damit ist die Aufgabe im Prinzip gelöst. Nur bleibt noch zu ermitteln, in welcher Zeit die erste Schreibkraft ihre 3/5 des Vortrages fertig schreibt. Die gesamte Arbeit schafft sie, wie wir wissen, in 2 Stunden. Das bedeutet, 3/5 der Arbeit werden in $2 \cdot 3/5 = 1\ 1/5$ Stunden erledigt. In der gleichen Zeit muß auch die zweite Schreibkraft ihre Arbeit schaffen.

Demzufolge ist die kürzeste Zeit für das Abschreiben des Vortrages 1 Stunde und 12 Minuten.

Das Abwiegen von Mehl

Zunächst addierte der Verkaufsstellenleiter alle zehn Zahlen. Die Summe daraus, 1156 kg, ist nichts anderes als das vierfache Gewicht der Säcke, denn das Gewicht jedes einzelnen Sackes geht viermal in die Gesamtsumme ein. Teilen wir diese Zahl durch vier, ermitteln wir, daß die fünf Säcke 289 kg wiegen.

Nun kennzeichnen wir der Zweckmäßigkeit wegen die Säcke in der Reihenfolge ihres Gewichtes. Der leichteste Sack bekommt die Nummer 1, der zweitleichteste

die Nummer 2 usw. Der schwerste Sack wird Nummer 5. Es ist nicht schwer, zu der Überlegung zu kommen, daß in der Zahlenreihe 110 kg, 112 kg, 113 kg, 114 kg, 115 kg, 116 kg, 117 kg, 118 kg, 120 kg, 121 kg die erste Zahl sich aus dem Gewicht der beiden leichtesten Säcke zusammensetzt, also Nr. 1 und Nr. 2, die zweite Zahl aus Nr. 1 und Nr. 3, die letzte Zahl (121) setzt sich aus dem Gewicht der schwersten Säcke Nr. 4 und Nr. 5 zusammen, die vorletzte aus Nr. 3 und Nr. 5. Also:

Nr. 1	und Nr. 2	wiegen	zusammen	110	kg
Nr. 1	und Nr. 3	„	„	112	„
Nr. 3	und Nr. 5	„	„	120	„
Nr. 4	und Nr. 5	„	„	121	„.

Die Summe des Gewichts von Nr. 1, Nr. 2, Nr. 4 und Nr. 5 ist demzufolge: 110 kg + 121 kg = 231 kg. Ziehen wir diese Zahl vom Gesamtgewicht aller Säcke (289 kg) ab, erhalten wir das Gewicht von Sack Nr. 3 — 58 kg.

Danach erhalten wir aus der Summe des Gewichtes von Sack Nr. 1 und Nr. 3, nämlich von 112 kg, durch Abziehen des uns bereits bekannten Gewichtes von Nr. 3 das Gewicht von Sack Nr. 1: 112 kg — 58 kg = 54 kg.

Ebenso ermitteln wir das Gewicht von Sack Nr. 2. Wir ziehen 54 kg von 110 kg, dem Gesamtgewicht von Sack Nr. 1 und Nr. 2, ab. Damit wissen wir, was Sack Nr. 2 wiegt: 110 kg — 54 kg = 56 kg.

Aus dem Gesamtgewicht von Sack Nr. 3 und Sack Nr. 5, d. h. 120 kg, ziehen wir die 58 kg ab, die Sack Nr. 3 wiegt, und wissen nun, daß Sack Nr. 5 120 kg — 58 kg = 62 kg wiegt.

Nun bleibt nur noch die Bestimmung des Gewichtes von Sack Nr. 4. Da wir das Gesamtgewicht von Sack Nr. 4 und Nr. 5 kennen, ziehen wir 62 kg von 121 kg ab und wissen jetzt, daß Sack Nr. 4 ein Gewicht von 59 kg hat.

Das Gewicht jedes einzelnen Sackes beträgt also:

54 kg, 56 kg, 58 kg, 59 kg, 62 kg.

Wir haben die Aufgabe also gelöst, ohne Gleichungen zu Hilfe zu nehmen.



Aufgaben an Einkäufen und Preisen

Was kosten die Zitronen?

Drei Dutzend Zitronen kosten ebensoviel Rubel, wie man Zitronen für 16 Rubel bekommt.

Wieviel kostet nun ein Dutzend Zitronen?

Regenmantel, Hut und Galoschen

Jemand kauft sich einen Hut, einen Regenmantel und ein Paar Galoschen und zahlt für alles 140 Rubel. Der Regenmantel kostet 90 Rubel mehr als der Hut. Hut und Regenmantel zusammen kosten 120 Rubel mehr als die Galoschen.

Was kostet jeder Artikel für sich?

Die Aufgabe soll mündlich, ohne Verwendung von Gleichungen gerechnet werden.

Einkäufe

Als ich einkaufen ging, hatte ich in der Geldbörse etwa 15 Rubel in Rubelstücken und 20-Kopeken-Münzen. Als ich zurückkehrte, verblieben mir so viele einzelne Rubel, wie ich anfangs 20-Kopeken-Stücke hatte, und so viele 20-Kopeken-Stücke, wie ich anfangs Rubel hatte. Insgesamt verblieb mir in der Geldbörse ein Drittel der Summe, mit der ich mich zum Einkaufen auf den Weg machte.

Was kosteten meine Einkäufe?

Obsteinkauf

Für fünf Rubel wurden 100 Früchte verschiedener Art eingekauft. Die Preise der Früchte waren folgendermaßen: Melonen — 50 Kopeken das Stück, Äpfel — 10 Kopeken das Stück, Pflaumen — 10 Kopeken für 10 Stück.

Wieviel Früchte von jeder Art wurden gekauft?

Verteuerung und Preissenkung

Eine Ware wurde um 10% teurer und später um 10% im Preis gesenkt.

Wann war der Preis niedriger — vor der Verteuerung oder nach der Preissenkung?

Fässer

Einem Laden wurden sechs Fässer Kwaß geliefert. Auf Abb. 205 ist gekennzeichnet, wieviel Liter in jedem Faß waren. Bereits am ersten Tag fanden sich

Abbildung 205



zwei Käufer. Einer kaufte zwei Fässer, der andere drei, wobei der erste zweimal weniger Kwaß kaufte als der zweite. Es war nicht einmal nötig, die Fässer zu öffnen. Von den Fässern verblieb nur eins am Lager. Welches?

Eierverkauf

Diese alte überlieferte Aufgabe erscheint auf den ersten Blick völlig unsinnig, weil dabei vom Verkauf eines halben Eies die Rede ist. Dennoch ist sie absolut lösbar.

Eine Bäuerin war auf den Markt gekommen, um Eier zu verkaufen. Die erste Käuferin nahm die Hälfte aller Eier und noch ein halbes dazu. Die zweite Käuferin nahm die Hälfte aller noch verbliebenen Eier und ein halbes dazu. Die dritte kaufte nur ein Ei. Danach hatte die Bäuerin nichts mehr.

Wieviel Eier hatte sie zum Markt gebracht?



Die Aufgabe Benediktows

Viele Kenner der russischen Literatur wissen nicht, daß W. G. Benediktow (1807—1873) Autor der ersten russischsprachigen Sammlung mathematischer Aufgaben, die einiges Kopfzerbrechen verlangen, ist. Das Buch wurde nicht veröffentlicht, es blieb als Manuskript liegen und wurde erst 1924 aufgefunden. Ich hatte die Möglichkeit, mich mit diesem Manuskript vertraut zu machen und konnte sogar anhand einer der Aufgaben feststellen, wann es geschrieben worden war — 1869 (auf dem Manuskript ist ein Datum nicht vermerkt). Die folgende Aufgabe, die ich aus dem Sammelband übernommen habe, ist von dem Dichter in belletristischer Form gestaltet. Sie lautet: „Listige Lösung einer kniffligen Aufgabe".

„Ein Weib, das mit Eiern handelte und 90 Eier zum Verkauf bereit hatte, schickte drei ihrer Töchter zum Markt und vertraute der ältesten und gescheitesten 10 Stück an, der zweiten gab sie 30 und der jüngsten 50 Stück. Dabei sagte sie ihnen:

‚Einigt euch vorher über den Preis, zu dem ihr verkaufen werdet, und weicht von dieser Übereinkunft nicht ab. Bleibt alle fest bei ein und demselben Preis, doch ich hoffe, daß meine älteste Tochter, dank ihrer Klugheit, selbst bei dieser zwischen euch vereinbarten Absprache über den Verkaufspreis, es versteht, für ihre 10 Stücke ebensoviel zu bekommen wie die zweite für 30 und daß sie obendrein die zweite Schwester lehrt, für ihre 30 soviel zu bekommen wie die jüngste für die 50 Stück. Dabei wünsche ich, daß ihr die Eier so verkauft, daß rund gerechnet nicht weniger als 10 Kopeken auf je 10 Stück kommen und für alle 90 nicht weniger als 90 Kopeken.'"

Hier beende ich zunächst die Geschichte Benediktows, um den Lesern die Möglichkeit zu geben, selbständig zu erraten, wie die Mädchen die ihnen übertragene Aufgabe gelöst haben.

226-227 Antworten



Was kosten die Zitronen?

Wir wissen, daß 36 Zitronen ebensoviel Rubel kosten, wie man für 16 Rubel Zitronen bekommt. Also 36 Stück kosten:

$$36 \cdot (\text{Preis pro Stück}).$$

Für 16 Rubel bekommt man:

$$\frac{16}{\text{Preis pro Stück}}.$$

Das heißt,

$$36 \cdot (\text{Preis pro Stück}) = \frac{16}{\text{Preis pro Stück}}.$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit dem Preis (pro Stück) und erhalten im zweiten Teil der Gleichung 16.

$$36 \cdot (\text{Preis pro Stück}) \cdot (\text{Preis pro Stück}) = 16.$$

Dann teilen wir beide Seiten durch 36 und erhalten

$$(\text{Preis pro Stück}) \cdot (\text{Preis pro Stück}) = \frac{16}{36}.$$

Es ist klar, daß der Stückpreis $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ Rubel beträgt, aber der Wert eines Dutzend Zitronen gleich $\frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ Rubel ist.

Regenmantel, Hut und Galoschen

Wären statt Regenmantel, Hut und Galoschen nur zwei Paar Galoschen gekauft worden, so hätten nicht 140 Rubel, sondern um soviel weniger bezahlt werden müssen, wie die Galoschen billiger sind als Hut und Mantel, also 120 Rubel. Auf diese Weise wissen wir also, daß zwei Paar Galoschen $140 - 120 = 20$ Rubel kosten und ein Paar dementsprechend 10 Rubel.

Jetzt wissen wir, daß Regenmantel und Hut zusammen $140 - 10 = 130$ Rubel kosten. Dabei ist der Regenmantel um 90 Rubel teurer als der Hut. Überlegen wir noch einmal: Anstelle Regenmantel und Hut kaufen wir 2 Hüte. Wir bezahlen nicht 130 Rubel, sondern 90 Rubel weniger. Das heißt, zwei Hüte kosten $130 - 90 = 40$ Rubel, woraus sich der Preis für einen Hut mit 20 Rubel ergibt.

Demzufolge kosten die Sachen: Galoschen — 10 Rubel, Hut — 20 Rubel, Regenmantel — 110 Rubel.

Einkäufe

Setzen wir für die anfängliche Zahl einzelner Rubel x und für die Zahl der 20-Kopeken-Münzen y, so hatte ich, als ich zum Einkauf losging,

$$(100x + 20y) \text{ Kopeken in der Geldbörse.}$$

Als ich zurückkehrte, hatte ich

$$(100y + 20x) \text{ Kopeken.}$$

Die letzte Summe war, wie wir wissen, um das Dreifache geringer als die erste, das ergibt:

$$3(100y + 20x) = 100x + 20y.$$

Vereinfachen wir die Gleichung, so erhalten wir:

$$x = 7y.$$

Wenn $y = 1$ ist, so ist $x = 7$. Unterstellen wir das, so hatte ich anfangs 7 Rubel und 20 Kopeken, was nicht mit der Bedingung der Aufgabe („etwa 15 Rubel") in Einklang steht.

Probieren wir $y = 2$, so ist $x = 14$. Die Anfangssumme betrug 14 Rubel und 40 Kopeken, was mit der erwähnten Bedingung gut übereinstimmt.

Die Annahme $y = 3$ ergibt eine zu hohe Summe — nämlich 21 Rubel und 60 Kopeken.

Also ist die einzig passende Antwort — 14 Rubel 40 Kopeken. Nach dem Einkaufen verblieben 2 einzelne Rubel und 14 20-Kopeken-Stücke, also $200 + 280 = 480$ Kopeken, das ist tatsächlich ein Drittel der anfänglichen Summe ($1440 : 3 = 480$).

Ausgegeben wurden $1440 - 480 = 960$. Das heißt, der Wert der Einkäufe beträgt 9 Rubel 60 Kopeken.

Obsteinkauf

Ungeachtet der scheinbaren Unbestimmtheit hat die Aufgabe nur eine Lösung. Hier ist sie:

	Stück	*Preis*
Melonen	1	50 Kopeken
Äpfel	39	3 Rubel 90 Kopeken
Pflaumen	60	60 Kopeken
Insgesamt	100	5 Rubel 00 Kopeken

Verteuerung und Preissenkung

Es ist falsch anzunehmen, daß der Preis in beiden Fällen gleich ist. Führen wir die Rechnung aus. Nach der Verteuerung kostet die Ware 110% oder 1,1 des ursprünglichen Preises. Nach der Preissenkung beträgt der Preis

$$1{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}99,$$

also 99% des ursprünglichen. Demzufolge war die Ware nach der Preissenkung um 1% billiger als vor der Verteuerung.

Fässer

Der erste Käufer kaufte ein 15-Liter- und 18-Liter-Faß. Der zweite ein 16-Liter-, ein 19-Liter- und ein 31-Liter-Faß. Es sind also

$$15 + 18 = 33$$
$$16 + 19 + 31 = 66,$$

d. h., der zweite Käufer kaufte doppelt soviel Kwaß wie der erste.

Übrig bleibt das 20-Liter-Faß.

Das ist die einzig mögliche Antwort. Andere Verbindungen ergeben nicht das erforderte Verhältnis.

Eierverkauf

Die Aufgabe löst man vom Ende her. Nachdem die zweite Käuferin die Hälfte der verbliebenen Eier und noch ein halbes dazu erworben hatte, blieb der Bäuerin nur noch ein Ei. Das heißt, 1 1/2 Ei ist die Hälfte dessen, was nach dem ersten Kauf verblieben ist. Es ist klar, daß der volle Rest 3 Eier beträgt. Fügen wir ein halbes Ei hinzu, erhalten wir die Hälfte dessen, was die Bäuerin am Anfang hatte. Danach hatte die Bäuerin 7 Eier zum Markt gebracht.

Prüfen wir nach:

$$7:2=3\frac{1}{2};\quad 3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=4;\quad 7-4=3;$$
$$3:2=1\frac{1}{2};\quad 1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2;\quad 3-2=1,$$

was vollständig mit den Bedingungen der Aufgabe übereinstimmt.

Die Aufgabe Benediktows

Hören wir uns zunächst die unterbrochene Erzählung Benediktows zu Ende an.

„Die Aufgabe war knifflig. Die Töchter begannen auf dem Weg zum Markt, untereinander zu beraten, wobei die zweite und dritte sich auf die Klugheit und den Rat der Ältesten verließen. Und jene sagte, nachdem sie alles überdacht hatte:

‚Wir werden, Schwestern, die Eier nicht wie bisher zu 10 Stück verkaufen, sondern für jeweils sieben Eier legen wir einen Preis fest, den wir alle fest beibehalten, wie Mutter gesagt hat. Abgemacht. Keine Kopeke wird nachgelassen! Für die ersten sieben 1 Altyn[1], einverstanden?‘

‚Das ist billig‘, sagte die zweite.

‚Na‘, entgegnete die Älteste, ‚dafür erhöhen wir den Preis für jene Eier, die nach dem Verkauf von jeweils sieben Stück in unserem Korb verbleiben. Ich habe mich schon davon überzeugt, daß außer uns keine Eierverkäufer auf dem Markt sein werden. Niemand kann den Preis unterbieten. Doch es ist noch immer so, daß der Preis steigt, wenn Nachfrage besteht und die Ware knapp wird. Mit den restlichen Eiern holen wir dann auf.‘

‚Aber zu welchem Preis wollen wir die restlichen verkaufen?‘ fragte die Jüngste.

‚Für 3 Altyn je Ei. Jawohl, nur so. Wer sie unbedingt braucht, wird das zahlen.‘

‚Das ist ein bißchen teuer‘, sagte erneut die zweite.

‚Ach was‘, fiel die Ältere ein, ‚dafür sind die ersten Eier, die zu sieben Stück verkauft werden, billig. Eins gleicht das andere aus.‘

Sie einigten sich.

Auf dem Markt angekommen, nahm jede der Schwestern ihren Platz für sich ein und verkaufte. Froh über den niedrigen Preis, bestürmten Käufer über Käufer die Jüngste, die 50 Stück zum Verkauf hatte, und im Nu waren die Eier ausverkauft. Siebenmal verkaufte sie je sieben Eier und nahm 7 Altyn dafür ein. Ein Ei verblieb

[1] 1 Altyn=3 Kopeken

ihr im Korb. Die zweite, die 30 Stück hatte, verkaufte vier Käuferinnen je sieben Eier und zwei Eier blieben im Korb. Sie nahm 4 Altyn ein. Bei der Ältesten wurden einmal sieben Eier gekauft, wofür sie 1 Altyn erhielt. Drei Eier blieben übrig.

Plötzlich kam eine Köchin, die von ihrer Herrin auf den Markt geschickt worden war, um nicht weniger als zehn Eier zu kaufen, was sie auch kosten mögen. Ihre Söhne waren nämlich kurz zu Besuch gekommen. die für ihr Leben gern Spiegeleier aßen. Die Köchin eilte von einer Ecke des Marktes zur anderen, Eier sind ausverkauft. Insgesamt sechs Eier gab es bei drei Händlerinnen auf dem Markt: Bei der einen ein Ei, bei der anderen zwei Eier, bei der dritten drei Eier.

Selbstverständlich ging die Köchin zuerst zu jener, die noch drei Eier zu verkaufen hatte. Das war die älteste Tochter, die für ein Altyn sieben Eier verkauft hatte. Die Köchin fragt:

‚Was verlangst du für drei Eier?‘

‚3 Altyn das Ei‘, antwortet die Händlerin.

‚Was? Du bist wohl von Sinnen!‘ spricht die Köchin.

Doch die älteste Tochter darauf:

‚Wie es Euch beliebt, billiger gebe ich sie nicht ab, es sind die letzten.‘

Die Köchin eilte zu der Händlerin, die noch zwei Eier im Korb hatte.

‚Was kosten die Eier?‘

‚3 Altyn das Stück. Das ist der festgelegte Preis. Alle sind weggegangen.‘

‚Und wieviel kostet dieses Eichen?‘ fragt die Köchin die Jüngste.

Sie antwortet: ‚3 Altyn.‘

Es war nichts zu machen. Sie mußte zu dem hohen Preis kaufen.

‚Na los, gebt alle Eier her.‘

Die Köchin gab der Ältesten für die drei Eier 9 Altyn, was zusammen mit denen, die sie schon eingenommen hatte, 10 machte. Der zweiten zahlte sie für zwei Eier 6 Altyn. Mit den für vier zu sieben Stück eingenommenen 4 Altyn machte das auch 10 Altyn. Die Jüngste erhielt für das eine Ei 3 Altyn von der Köchin und hatte in ihrer Kasse, wo sie die für sieben zu sieben Eiern eingenommenen 7 Altyn verwahrte, nun auch 10 Altyn.

Die Töchter kehrten nach Hause zurück, und während jede der Mutter 10 Altyn gab, erzählten sie, wie sie verkauft und durch Einhalten des vereinbarten Preises erreicht hatten, daß die Einnahmen für zehn Stück ebenso hoch waren, wie für 50 Stück.

Die Mutter war sehr zufrieden mit der exakten Erfüllung des Auftrages, den sie den Töchtern gegeben hatte, und mit der Klugheit der ältesten Tochter, auf deren Rat hin alles ausgeführt worden war. Noch mehr war sie jedoch darüber befriedigt, daß auch die Gesamteinnahme der Töchter — 30 Altyn oder 90 Kopeken — ihrem Wunsch entsprach.“

* * *

Den Leser interessiert vielleicht, was dieses unveröffentlichte Manuskript W. G. Benediktows, aus dem das eben wiedergegebene Kapitel entlehnt ist, darstellt. Die Arbeit Benediktows hat keine Überschrift. Doch über Charakter und Anliegen wird in der Einleitung zu dem Sammelband ausführlich gesprochen.

„Arithmetische Rechnungen können für verschiedene belustigende Beschäfti-

gungen, Spiele, Scherze usw. verwendet werden. Viele sogenannte *Tricks* (im Manuskript unterstrichen — *J. P.*) fußen auf dem geschickten Umgehen mit Zahlen, darunter auch beim Kartenspielen, bei dem entweder die Anzahl der Karten oder der Augen, oder das eine wie das andere eine Rolle spielen. Einige Aufgaben, deren Lösung die Anwendung außerordentlich großer Zahlen einschließt, sind äußerst interessant und vermitteln eine Vorstellung von diesen jegliche Vorstellungskraft übersteigenden Zahlen. Wir bringen sie in dem Ergänzungsteil zur Arithmetik. Einige Abschnitte ihrer Lösung verlangen besondere Geistesgewandheit und sind lösbar, obgleich sie auf den ersten Blick völlig unsinnig und dem gesunden Menschenverstand zu widersprechen scheinen, wie zum Beispiel die Aufgabe ‚Der kluge Eierverkauf'. Die praktisch angewandte Arithmetik erfordert manchmal nicht nur Kenntnis der Gesetze der reinen Arithmetik, sondern auch noch Findigkeit, die man sich durch die geistige Entwicklung beim Bekanntwerden mit den verschiedenen Seiten nicht nur wesentlicher Probleme, sondern auch Bagatellen aneignen kann, haben wir es nicht für überflüssig gehalten, auch diesen einen Platz einzuräumen."

Der Benediktowsche Sammelband ist in 20 kurze, nicht numerierte Kapitel gegliedert, von denen jedes eine besondere Überschrift hat. Die ersten Kapitel haben folgende Titel: „Die sogenannten magischen Quadrate", „Erraten einer gedachten Zahl zwischen 1 und 30", „Erraten von insgeheim aufgegliederten Summen", „Sich von allein offenbarende insgeheim gedachte Ziffer", „Erkennen einer durchgestrichenen Ziffer" u. a. m. Dem folgen einige arithmetische Kartentricks. Nach ihnen das interessante Kapitel: „Der Heerführer als Zauberer und die arithmetische Armee": Multiplikation mit Hilfe der Finger, dargebracht als Anekdote; weiter dann die von mir oben wiedergegebene Aufgabe des Eierverkaufs. Das vorletzte Kapitel „Die fehlenden Getreidekörner für die 64 Felder des Schachbrettes" erzählt die bekannte alte Legende über den Erfinder des Schachspiels.

Schließlich im 20. Kapitel „Die Riesenzahl der Erdbewohner" der Versuch, die Gesamtzahl der Bevölkerung der Erde für die Zeitspanne der Existenz der Menschheit zu errechnen (eine ausführliche Beschreibung der Rechnung Benediktows habe ich in meinem Buch „Unterhaltsame Algebra" vorgenommen).

Die Gewichte und das Abwiegen

Eine Million Erzeugnisse

Ein Erzeugnis wiegt 89,4 g. Überrechnet im Kopf, wieviel Tonnen eine Million Stück solcher Erzeugnisse wiegen.

Honig und Petroleum

Ein Glas voll Honig wiegt 500 g. Das gleiche Glas voll Petroleum wiegt 350 g. Das Petroleum ist halb so schwer wie der Honig.

Wieviel wiegt das leere Glas?

Das Gewicht eines Balkens

Ein Rundholzbalken wiegt 30 kg.

Wieviel würde er wiegen, wenn er doppelt so dick, aber halb so lang wäre?

Unter Wasser

Auf einer gewöhnlichen Waage liegen: in einer Wiegeschale — ein Pflasterstein von genau 2 kg, in der anderen Wiegeschale — ein 2-kg-Eisengewicht. Vorsichtig setze ich die Waage ins Wasser.

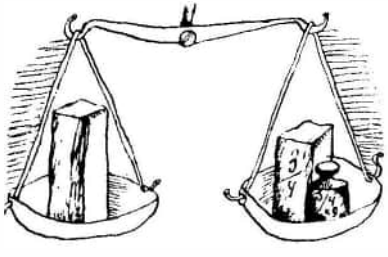
Bleibt die Waage im Gleichgewicht?

Die Dezimalwaage

100 kg Eisennägel sind auf einer Dezimalwaage mit Eisengewichten ausgewogen. Die Waage wird von Wasser überflutet.

Hat sie das Gleichgewicht unter Wasser beibehalten?

Abbildung 206



Ein Stück Seife

Auf einer Wiegeschale liegt ein Stück Seife. Auf der anderen 3/4 eines solchen Stückes und noch ein 3/4 kg. Die Waage ist im Gleichgewicht.

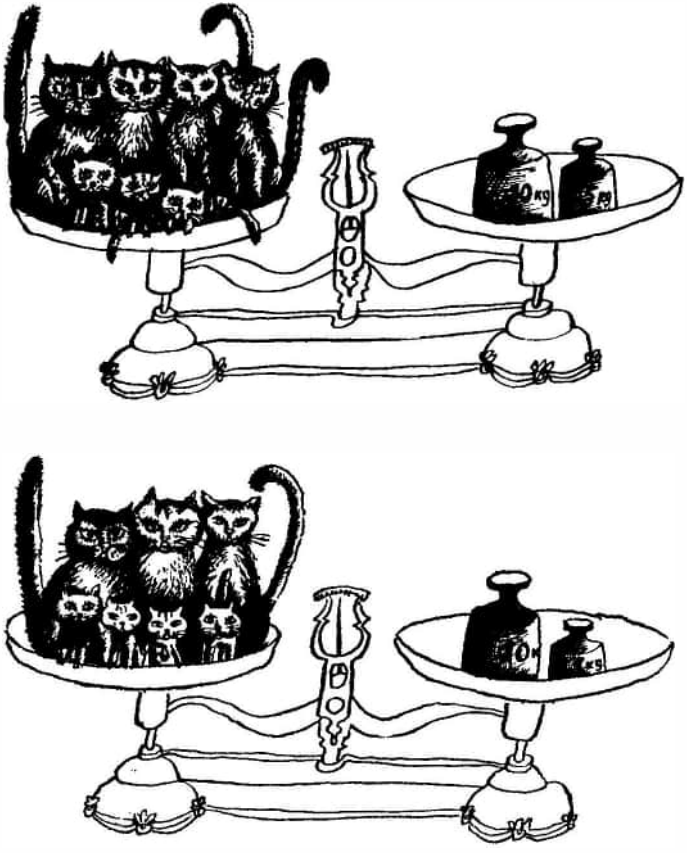
Wieviel wiegt das ganze Stück Seife?

Bemüht euch, diese leichte Aufgabe im Kopf, ohne Bleistift und Papier, zu lösen.

Katzen und Katzenjungen

Aus Abb. 207 ist ersichtlich, daß vier Katzen und drei Katzenjungen 15 kg wiegen, während drei Katzen und vier Katzenjungen 13 kg wiegen.

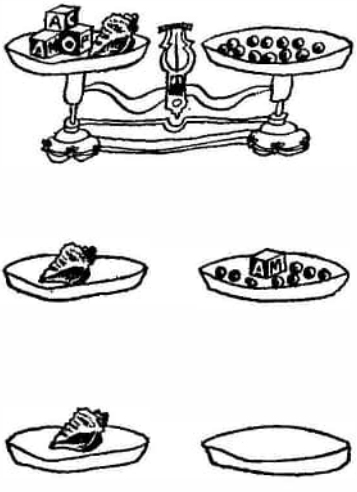
Abbildung 207



Wieviel wiegt nun jede Katze und jedes Katzenjunge einzeln? Wir setzen voraus, daß alle Katzen gleich schwer sind und die Katzenjungen auch gleiches Gewicht haben.

Versucht auch diese Aufgabe im Kopf zu lösen.

Abbildung 208



Muschel und Glasperlen

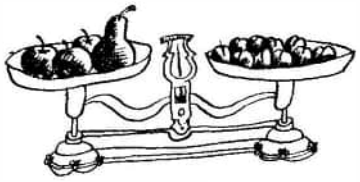
Abb. 208 zeigt euch, daß drei Spielzeugwürfel und eine Muschel ebenso schwer sind wie 12 Perlen und daß weiterhin eine Muschel so schwer ist wie ein Würfel und acht Perlen.

Wieviel Perlen muß man auf die freie Wiegeschale legen, um sie mit der Muschel in der anderen Schale auszuwiegen?

Das Gewicht der Früchte

Noch eine Aufgabe dieser Art. Abb. 209 zeigt, daß drei Äpfel und eine Birne soviel wie 10 Pfirsiche

Abbildung 209



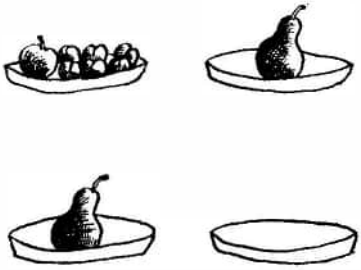
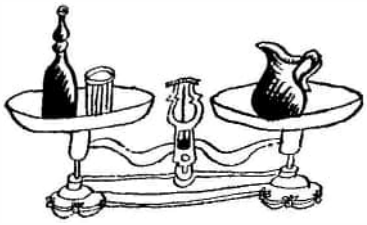
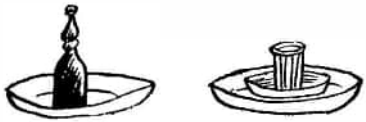


Abbildung 210





wiegen. Sechs Pfirsiche und ein Apfel wiegen soviel wie eine Birne.

Wie viele Pfirsiche sind nötig, um sie mit einer Birne auszuwiegen?

Wieviel Gläser?



Auf Abb. 210 seht ihr, daß Flasche und Glas das gleiche Gewicht wie der Krug haben. Die Flasche wiegt soviel wie das Glas und ein Teller. Zwei Krüge sind so schwer wie drei Teller.

Nun ist die Frage, wieviel Gläser auf die Wiegeschale zu stellen sind, um die Flasche auszuwiegen?

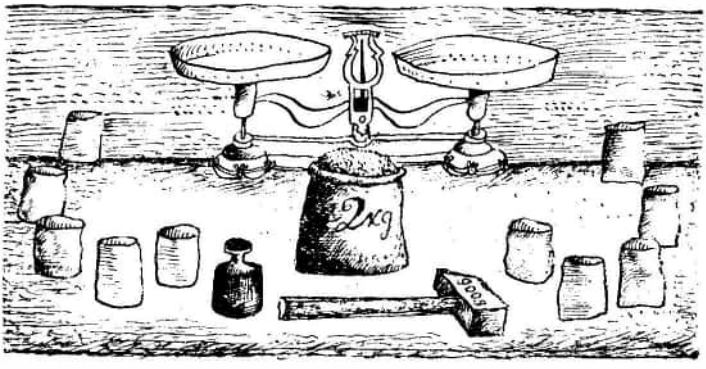
Mit Gewicht und Hammer



Es sind 2 kg Streuzucker in 200-Gramm-Tüten abzuwiegen. Doch sind nur ein 500-Gramm-Gewicht und ein Hammer, der 900 g wiegt, vorhanden.

Abbildung 211

Wie macht man es, alle 10 Tüten zu 200 g unter Verwendung dieses Gewichtes und des Hammers abzuwiegen?



Die Aufgabe des Archimedes

Das Rätsel, welches Hieron, der Beherrscher des alten Syrakus, dem berühmten Mathematiker Archimedes aufgab, ist in bezug auf das Abwiegen zweifellos das älteste.

Die Überlieferung besagt, daß Hieron einen Meister beauftragte, eine Krone für eine Statue anzufertigen, und befahl, diesem die erforderliche Menge Gold und Silber auszuhändigen. Als die Krone abgeliefert wurde, ergab sich beim Wiegen, daß sie ebenso schwer ist wie das ausgehändigte Gold und Silber zusammen. Aber Hieron wurde hinterbracht, der Meister habe einen Teil des Goldes veruntreut und ihn durch Silber ersetzt, worauf er Archimedes rufen ließ und ihn bat zu bestimmen, wieviel Gold und wieviel Silber die vom Meister gefertigte Krone enthält.

Archimedes löste die Aufgabe davon ausgehend, daß reines Gold in Wasser ein Zwanzigstel seines Gewichtes verliert, Silber dagegen ein Zehntel.

Wenn ihr eure Kräfte an einer entsprechenden Aufgabe erproben wollt, dann geht davon aus, daß dem Meister 8 kg Gold und 2 kg Silber ausgehändigt wurden, und als Archimedes die Krone unter Wasser wog, betrug ihr Gewicht nicht 10 kg, sondern 9 1/4 kg. Versucht mit diesen Angaben zu bestimmen, wieviel Gold der Meister veruntreute. Die Krone, das setzen wir voraus, ist ganz und gar aus Metall, ohne Hohlräume.



Antworten

Eine Million Erzeugnisse

Diese Art Rechnungen führt man im Kopfe folgendermaßen aus: 89,4 g sind mit einer Million zu multiplizieren, also mit tausend Tausendern.

Wir multiplizieren in zwei Etappen. 89,4 g · 1000 = 89,4 kg, denn ein Kilogramm ist tausendmal soviel wie ein Gramm. Weiter: 89,4 kg · 1000 = 89,4 t, denn eine Tonne ist 1000mal soviel wie ein Kilogramm.

Also beträgt das gesuchte Gewicht 89,4 t.

Honig und Petroleum

Da Honig doppelt so schwer ist wie Petroleum, ist die Differenz 500—350, also 150 g das Gewicht des Petroleums in dem Glas (ein Glas mit Honig wiegt so viel, wie ein Glas mit der doppelten Menge Petroleum wiegen würde). Daraus bestimmen wir das Taragewicht des Glases: 350 — 150 = 200 g. In der Tat: 500—200=300 g, d. h., der Honig wiegt doppelt soviel wie das gleiche Volumen Petroleum.

Das Gewicht eines Balkens

Gewöhnlich wird geantwortet, daß ein Balken, der doppelt so stark, aber halb so lang ist, eigentlich sein Gewicht nicht verändert. Doch das ist nicht richtig. Mit der Vergrößerung des Durchmessers um das Doppelte erhöht sich das Volumen des runden Stammes *4fach*. Die Verkürzung auf die Hälfte verringert das Volumen insgesamt *2fach*. Deshalb muß der dicke, kurze Balken 2mal schwerer sein als der längere dünnere. Er wiegt also 60 kg.

Unter Wasser

Jeder Körper wird leichter, wenn man ihn ins Wasser eintaucht. Er verliert so viel von seinem Gewicht, wie das durch ihn verdrängte Wasser wiegt. Kennen wir dieses Gesetz (das Archimedes entdeckt hat), können wir ohne Schwierigkeit auf die Fragestellung der Aufgabe antworten.

Ein Pflasterstein von 2 kg Gewicht nimmt ein größeres Volumen ein als ein 2-kg-Eisengewicht, da das Material des Steines (Granit) leichter als Eisen ist.

Das heißt also, der Pflasterstein verdrängt ein größeres Wasservolumen als das Gewicht und verliert im Wasser, nach dem Gesetz des Archimedes, mehr an Gewicht als das Eisengewicht. Somit neigt sich die Waage unter Wasser zum Eisengewicht hin.

Die Dezimalwaage

Beim Eintauchen in Wasser verliert ein eiserner Gegenstand 1/8 seines Gewichtes.[1] Daher haben die Gewichte unter Wasser 7/8 ihres früheren Gewichtes verloren. Die

[1] Diese Größe ist in den Bedingungen der Aufgabe nicht genannt, weil die Größe des Gewichtsverlustes — 1/8, 1/10 oder 1/20 — für die Lösung der Aufgabe ohne Bedeutung ist.

Gewichte, die 10mal leichter waren als die Nägel, sind auch unter Wasser 10mal leichter. Demzufolge bleibt die Dezimalwaage auch unter Wasser im Gleichgewicht.

Ein Stück Seife

3/4 eines Stückes Seife + 3/4 kg wiegen ebensoviel wie ein ganzes Stück. Ein ganzes Stück besteht aber aus einem 3/4 Stück + 1/4 Stück. Also 1/4 Stück wiegt 3/4 kg und demzufolge das ganze Stück 4mal soviel wie 3/4 kg, das sind 3 kg.

Katzen und Katzenjungen

Vergleicht man beide Wägungen, so ist leicht zu erkennen, daß beim Austausch einer Katze gegen ein Katzenjunges die Last sich um 2 kg verringert hat. Daraus ist zu ersehen, daß die Katze um 2 kg schwerer ist als das Katzenjunge. Da wir das wissen, tauschen wir in der ersten Wägung alle 4 Katzen durch Katzenjungen aus. Wir haben dann alle $4 + 3 = 7$ Katzenjungen. Sie wiegen zusammen nicht 15 kg, sondern $2 \cdot 4$, also 8 kg weniger. Das bedeutet, 7 Katzenjungen wiegen $15 - 8 = 7$ kg.

Daraus ergibt sich, daß ein Katzenjunges 1 kg wiegt, eine ausgeachsene Katze dagegen $1 + 2 = 3$ kg.

Muschel und Glasperlen

Vergleicht die erste und die zweite Wägung. Ihr seht, daß wir die Muschel zuerst durch 1 Würfel und 8 Perlen austauschen können, denn das eine wie das andere haben gleiches Gewicht. Wir hätten dann auf der linken Wiegeschale 4 Würfel und 8 Perlen und das entspräche 12 Perlen. Wenn wir jetzt von jeder Seite 8 Perlen nehmen, stören wir das Gleichgewicht nicht. Es verbleiben uns in der linken Schale 4 Würfel, in der rechten — 4 Perlen. Ein Würfel und eine Perle wiegen also gleichviel.

Jetzt ist klar, wie viele Perlen eine Muschel aufwiegen. Ersetzen wir (zweite Wägung) einen Würfel in der rechten Schale durch eine Perle, so erkennen wir, daß das Gewicht einer Muschel dem Gewicht von 9 Perlen entspricht.

Das Ergebnis kann man leicht prüfen.

Ersetzt bei der ersten Wägung die Würfel und die Muschel der linken Schale durch die entsprechende Anzahl Perlen. Ihr erhaltet $3 + 9 = 12$, so muß es auch sein.

Das Gewicht der Früchte

Wir tauschen bei der ersten Wägung 1 Birne durch 6 Pfirsiche und 1 Apfel aus; wir sind berechtigt, das zu tun, weil ja 1 Birne soviel wie 6 Pfirsiche und 1 Apfel wiegt. In der linken Schale haben wir dann 4 Äpfel und 6 Pfirsiche, in der rechten 10 Pfirsiche. Wenn wir aus jeder Schale 6 Pfirsiche entnehmen, ersehen wir, daß 4 Äpfel genausoviel wie 4 Pfirsiche wiegen. Daraus folgt: 1 Pfirsich wiegt soviel wie 1 Apfel.

Jetzt ist leicht zu ermitteln, daß 1 Birne soviel wie 7 Pfirsiche wiegt.

Wieviel Gläser?

Die Aufgabe kann man auf verschiedene Weise lösen. Hier ist eine Methode von vielen.

Wir ersetzen bei der dritten Wägung jeden Krug durch eine Flasche und ein Glas (aus der ersten Wägung wissen wir, daß dabei die Waage im Gleichgewicht steht). Wir erfahren nun, daß zwei Flaschen und zwei Gläser drei Teller auswiegen. Jede Flasche können wir gemäß der zweiten Wägung durch ein Glas und einen Teller austauschen. Damit zeigt sich, daß vier Gläser und zwei Teller drei Teller auswiegen.

Wenn wir von jeder Wiegeschale zwei Teller wegnehmen, erkennen wir, daß vier Gläser so schwer wie ein Teller sind.

Demnach ist eine Flasche so schwer wie fünf Gläser (vgl. die zweite Wägung).

Mit Gewicht und Hammer

Die Wägung erfolgt so: Zuerst legt man auf die eine Schale den Hammer, auf die zweite das Gewicht und gibt so viel Zucker dazu, bis die Schalen im Gleichgewicht sind. Es ist eindeutig, daß der auf diese Schale geschüttete Zucker $900-500=400$ g wiegt. Die gleiche Handlung wird noch dreimal ausgeführt. Der übrigbleibende Zucker wiegt $2000-(4\cdot 400)=400$ g.

Nun ist nur noch jede der fünf 400-Gramm-Tüten in zwei Tüten gleichen Gewichts aufzuteilen. Das geht ohne Gewichte sehr einfach. Man schüttet den Inhalt einer 400-Gramm-Tüte in zwei Tüten, von der jede auf einer der beiden Wiegeschalen liegt, bis die Waage im Gleichgewicht steht.

Die Aufgabe des Archimedes

Wäre die bestellte Krone vollständig aus reinem Gold gefertigt worden, würde sie außerhalb des Wassers 10 kg wiegen, unter Wasser aber ein Zwanzigstel ihres Gewichtes, also 1/2 kg, verlieren. In Wirklichkeit verliert die Krone, wie wir wissen, im Wasser nicht 1/2 kg, sondern $10-9\,1/4=3/4$ kg. Das kommt daher, weil sie Silber enthält — ein Metall, das im Wasser nicht ein Zwanzigstel, sondern ein Zehntel seines Gewichtes verliert. Silber muß so viel in der Krone sein, daß diese im Wasser nicht 1/2 kg, sondern 3/4 kg verliert, d. h. 1/4 kg mehr. Wenn wir bei unserer Krone in Gedanken 1 kg Gold durch Silber ersetzen, dann verliert die Krone im Wasser um $1/10-1/20=1/20$ kg mehr als vorher. Folglich ist es, um den geforderten höheren Gewichtsverlust von 1/4 kg zu erreichen, notwendig, soviel kg Gold durch Silber zu ersetzen, wie viele Male 1/20 kg in 1/4 kg enthalten ist. $1/4:1/20=5$. Somit waren in der Krone 5 kg Silber und 5 kg Gold enthalten, anstelle der ausgehändigten 2 kg Silber und 8 kg Gold. 3 kg Gold wurden veruntreut und durch Silber ersetzt.

238-239  **Aufgaben mit der Uhr**

12

Die Ziffer Sechs

Fragt mal einen eurer Bekannten, der nicht mehr der jüngste ist, wie lange er schon eine Taschenuhr besitzt. Nehmen wir an, er hat sie bereits 15 Jahre lang. Dann setzt das Gespräch etwa in folgender Weise fort:

„Wie oft am Tag schauen Sie auf die Uhr?"

„An die 20mal höchstuahrscheinlich", folgt die Antwort.

„Also schauen Sie im Verlauf eines Jahres nicht weniger als 6000mal auf Ihre Uhr, und im Verlaufe von 15 Jahren haben Sie das Zifferblatt 6000 · 15, das sind nahezu 100 000mal betrachtet. Einen Gegenstand, den Sie 100 000mal gesehen haben, müssen Sie natürlich ausgezeichnet kennen und im Gedächtnis haben."

„Na selbstverständlich!"

„Ihnen muß deshalb das Zifferblatt Ihrer Taschenuhr bestens bekannt sein, und es wird Ihnen keine Mühe bereiten, aus dem Gedächtnis aufzuzeichnen, wie die Ziffer Sechs darauf aussieht."

Und nun gebt ihr eurem Gesprächspartner Papier und Bleistift.

Er kommt eurer Bitte nach, doch in der Mehrzahl der Fälle zeichnet er die Ziffer sechs nicht so, wie sie auf dem Zifferblatt seiner Uhr dargestellt ist.

Warum?

Antwortet auf diese Frage, *ohne auf die Taschenuhr zu blicken*. Zeigt, wie euer Gesprächspartner die Ziffer Sechs schreibt, und wie sie richtig dargestellt werden muß.

Drei Uhren

Im Hause waren drei Uhren. Am 1. Januar zeigten sie alle die genaue Zeit an. Doch richtig ging nur die erste Uhr, die zweite blieb 1 Minute am Tag zurück, die dritte ging 1 Minute am Tag vor. In welcher Zeit werden alle drei Uhren, wenn sie so weitergehen, erneut die richtige Zeit anzeigen?

Zwei Uhren

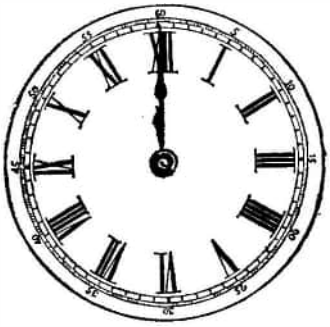
Gestern kontrollierte ich meine Wanduhr und den Wecker und stellte die Zeiger richtig. Die Wanduhr

bleibt 2 Minuten pro Stunde zurück, der Wecker geht 1 Minute pro Stunde vor.

Heute blieben die Uhren stehen, das Uhrwerk ist abgelaufen. Die Zeiger der Wanduhr stehen auf 7 Uhr, die des Weckers auf 8 Uhr.

Um wieviel Uhr habe ich die Uhren gestern geprüft?

Abbildung 212



Wie spät ist es?

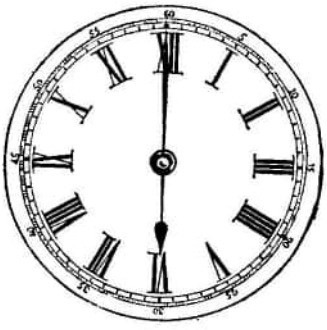
„Wohin eilen Sie?"

„Zum 6-Uhr-Zug. Wieviel Minuten sind noch bis zur Abfahrt?"

„Vor 50 Minuten waren es viermal soviel Minuten als nach drei Uhr."

Was hat diese seltsame Antwort zu bedeuten? Wie spät war es?

Abbildung 213

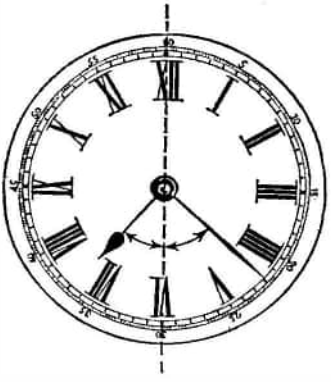


Wann treffen sich die Zeiger?

Um 12 Uhr verdeckt ein Zeiger den anderen. Doch ihr habt sicher schon bemerkt, daß dies nicht der einzige Augenblick ist, wo sich die Uhrzeiger begegnen. Im Laufe des Tages holen sie sich einander viele Male ein.

Könnt ihr alle die Zeitpunkte aufzählen, zu denen das geschieht?

Abbildung 214



Wann stehen die Zeiger entgegengesetzt?

Um sechs Uhr sind, im Gegensatz zur vorhergehenden Aufgabe, die Zeiger in entgegengesetzter Richtung angeordnet. Doch ist das nur um sechs Uhr so, oder gibt es auch noch andere Momente, wo die Zeiger derartig stehen?

Beiderseits der Sechs

Ich schaute auf die Uhr und bemerkte, daß beide Zeiger von der Sechs gleich weit entfernt stehen. Um wieviel Uhr war das?

Um wieviel Uhr?

Zu welcher Uhrzeit eilt der Minutenzeiger dem Stundenzeiger um soviel voraus, wie der Stundenzeiger auf dem Zifferblatt vor der 12 steht? Gibt es am Tage viele solcher Zeitpunkte oder überhaupt keinen?

Umgekehrt

Wenn ihr aufmerksam die Uhr beobachtet, so habt ihr vielleicht schon einmal die genau entgegengesetzte Stellung, gegenüber der gerade beschriebenen, festgestellt. Der Stundenzeiger eilt dem Minutenzeiger um soviel voraus, wie sich der Minutenzeiger von der Ziffer 12 entfernt hat.

Wann tritt das ein?

Drei und sieben

Die Uhr schlägt drei. Und während sie schlägt, vergehen 3 Sekunden. Wieviel Zeit braucht die Uhr, um sieben zu schlagen?

Für alle Fälle weise ich darauf hin, daß das keine Scherzaufgabe ist und sie keinerlei Falle enthält.

Das Ticken der Uhr

Führt zum Schluß ein kleines Experiment durch. Legt eine Taschenuhr auf den Tisch, entfernt euch drei oder vier Schritte und lauscht ihrem Ticken. Ist es im Zimmer still genug, hört ihr, daß eure Uhr gewissermaßen mit Unterbrechungen geht. Sie tickt einige Zeit, dann verstummt sie für einige Sekunden, um erneut mit dem Ticken zu beginnen usw.

Womit erklärt sich dieser unregelmäßige Gang?



Antworten

Die Ziffer Sechs

Die meisten nichtsahnenden Leute zeichnen als Antwort 6 oder VI.

Das beweist, daß man einen Gegenstand 100 000mal sehen kann und ihn doch nicht genau kennt. Die Sache ist die, daß gewöhnlich auf dem Zifferblatt (bei Herrenuhren) eine Sechs überhaupt nicht existiert, da sich an dieser Stelle der Sekundenzeiger befindet.

Drei Uhren

Nach 720 Tagen. Während dieser Zeit bleibt die zweite Uhr 720 Minuten zurück, d. h. 12 Stunden. Die dritte Uhr geht die gleiche Zeit vor. Dann zeigen alle drei Uhren das gleiche wie am 1. Januar, nämlich die genaue Zeit.

Zwei Uhren

Der Wecker geht im Vergleich zur Wanduhr je Stunde 3 Minuten vor. Um 1 Stunde, also 60 Minuten, geht er nach 20 Stunden vor. Doch im Verhältnis zur genauen Zeit ging der Wecker während dieser 20 Stunden 20 Minuten vor. Also wurden die Uhrzeiger vor 19 Stunden 20 Minuten richtig eingestellt, das war um 11.40 Uhr.

Wie spät ist es?

Zwischen 3 und 6 Uhr liegen 180 Minuten. Es ist nicht schwer zu begreifen, daß die Anzahl der Minuten, die bis 6 Uhr verbleiben, gefunden wird, wenn wir 180—50, also 130 in zwei solche Teile zerlegen, von denen einer viermal größer als der andere ist. Das heißt, der fünfte Teil von 130 ist zu ermitteln. Es war also 26 Minuten vor 6 Uhr.

In der Tat, vor 50 Minuten verblieben bis 6 Uhr $26 + 50 = 76$ Minuten, und das bedeutet, seit 3 Uhr vergingen $180 - 76 = 104$ Minuten. Das sind viermal so viele Minuten wie jetzt noch bis 6 Uhr verbleiben.

Wann treffen sich die Zeiger?

Beginnen wir mit der Beobachtung der Zeigerbewegung um 12 Uhr. In diesem Augenblick verdecken sich beide Zeiger. Da der Stundenzeiger sich 12mal langsamer bewegt als der Minutenzeiger (er beschreibt in 12 Stunden einen vollen Kreis, der Minutenzeiger jedoch in einer Stunde), können sich die Zeiger im Ablauf der nächsten Stunde natürlich nicht begegnen. Ist jedoch eine Stunde vergangen, steht der Stundenzeiger auf der Ziffer 1, nachdem er 1/12 volle Umdrehung zurückgelegt hat. Der Minutenzeiger hat eine volle Umdrehung vollzogen und steht erneut auf der 12 — um 1/12 des Kreisbogens hinter dem Stundenzeiger. Jetzt sind die Wettstreitbedingungen anders als vorher: Der Stundenzeiger bewegt sich langsamer als der Minutenzeiger, doch er ist voraus und der Minutenzeiger muß ihn einholen. Würde der Wettlauf eine ganze Stunde dauern, so beschriebe der Minutenzeiger in dieser

Zeit einen vollen Kreis und der Stundenzeiger 1/12 des Kreises. Der Minutenzeiger würde also 11/12 des Kreises mehr zurücklegen. Um den Stundenzeiger einzuholen, muß der Minutenzeiger aber nur dieses 1/12 des Kreises mehr als der Stundenzeiger zurücklegen, was sie voneinander trennt. Dafür ist nicht eine volle Stunde nötig, sondern soviel weniger als 1/12 weniger als 11/12 sind, also 11mal. Das bedeutet, daß die Zeiger sich nach einer 1/11 Stunde treffen, also nach 60/11 = 5 5/11 Minuten.

Die Zeiger treffen sich also nach 5 5/11 Minuten nach einer Stunde, d. h. um 1 Uhr 5 5/11 Minuten.

Wann findet die nächste Begegnung statt?

Es ist nicht schwer zu ermitteln, daß dies nach 1 Stunde und 5 5/11 Minuten geschieht, also um 2 Uhr 10 10/11 Minuten. Die folgende — noch einmal 1 Stunde und 5 5/11 Minuten später, also um 3 Uhr 16 4/11 Minuten usw. Insgesamt finden, wie leicht zu errechnen ist, 11 Begegnungen statt. Die 11. findet 1 1/11 · 11 = 12 Stunden nach der ersten statt, also um 12 Uhr. Anders ausgedrückt, fällt sie mit der ersten Zeigerbegegnung zusammen, und die folgenden Begegnungen wiederholen sich in der vorangegangenen Folge. Hier sind alle Zeitpunkte der Begegnungen:

1.	Begegnung	1	Uhr	5	5/11	Minuten
2.	"	2	"	10	10/11	"
3.	"	3	"	16	4/11	"
4.	"	4	"	21	9/11	"
5.	"	5	"	27	3/11	"
6.	"	6	"	32	8/11	"
7.	"	7	"	38	2/11	"
8.	"	8	"	43	7/11	"
9.	"	9	"	49	1/11	"
10.	"	10	"	54	6/11	"
11.	"	12	"			

Wann stehen die Zeiger entgegengesetzt?

Diese Aufgabe löst man in weitgehender Übereinstimmung mit der vorangegangenen. Beginnen wir wieder mit 12 Uhr, wenn beide Zeiger übereinanderstehen. Es ist jetzt auszurechnen, wieviel Zeit notwendig ist, damit der Minutenzeiger den Stundenzeiger um exakt einen halben Kreis überholt. Dann stehen beide Zeiger in entgegengesetzter Richtung. Wir wissen bereits (vgl. die vorangegangene Aufgabe), daß der Minutenzeiger im Verlauf einer Stunde dem Stundenzeiger um 11/12 eines vollen Kreises vorausläuft. Damit er nur die Hälfte des Kreises vorausläuft, ist weniger als eine ganze Stunde erforderlich, nämlich um so viel weniger, wie 1/2 weniger als 11/12 ist. Also werden 6/11 einer Stunde benötigt. Das heißt, nach 12 Uhr stehen die Zeiger erstmalig nach 6/11 Stunden oder 32 8/11 Minuten entgegengesetzt zueinander. Schaut 32 8/11 Minuten nach zwölf auf das Zifferblatt, und ihr könnt euch davon überzeugen, daß die Zeiger in entgegengesetzter Richtung stehen.

Ist das der einzige Moment, wo die Zeiger so angeordnet sind? Natürlich nicht. Solche Stellung nehmen die Zeiger jeweils 32 8/11 Minuten *nach jeder Begegnung* ein. Doch wir wissen bereits, daß es 11 Begegnungen innerhalb 12 Stunden gibt.



Also stehen die Zeiger auch 11mal in 12 Stunden entgegengesetzt zueinander. Diese Zeitpunkte zu finden ist nicht schwer:

12 Uhr + 32 8/11 Minuten = 12 Uhr 32 8/11 Minuten,
1 Uhr 5 5/11 Minuten + 32 8/11 Minuten = 1 Uhr 38 2/11 Minuten,
2 Uhr 10 10/11 Minuten + 32 8/11 Minuten = 2 Uhr 43 7/11 Minuten,
3 Uhr 16 4/11 Minuten + 32 8/11 Minuten = 3 Uhr 49 1/11 Minuten, usw.

Das Errechnen der übrigen Zeitpunkte überlasse ich euch selbst.

Beiderseits der Sechs

Die Aufgabe wird ebenso wie die vorhergehende gelöst. Wir stellen uns vor, daß beide Zeiger auf der 12 standen. Dann entfernte sich der Stundenzeiger von der 12 auf einen gewissen Teil der vollen Umdrehung, den wir mit dem Buchstaben x bezeichnen. Der Minutenzeiger schaffte es, sich in der gleichen Zeit auf $12 \cdot x$ zu drehen. Wenn nicht mehr als eine Stunde vergangen ist, so ist es, um den Erfordernissen unserer Aufgabe zu entsprechen, notwendig, daß der Minutenzeiger vom Schlußpunkt eines vollen Kreises ebenso weit entfernt ist, wie der Stundenzeiger sich vom Anfangspunkt zu entfernen vermochte. Mit anderen Worten:

$$1 - 12 \cdot x = x.$$

Daraus folgt: $1 = 13 \cdot x$, weil $(13 \cdot x - 12 \cdot x = x)$ ist. Folglich ist $x = 1/13$ einer vollen Umdrehung. Diesen Teil des Kreises legt der Stundenzeiger in 12/13 Srunden zurück, d. h., er zeigt 12 Uhr 55 5/13 Minuten. Der Minutenzeiger hat in dieser Zeit 12mal mehr Weg zurückgelegt, also 12/13 der vollen Umdrehung. Beide Zeiger stehen, wie ihr seht, von der 12 gleich weit entfernt, und folglich stehen sie auch in gleichem Abstand von der 6 nach beiden Seiten.

Wir haben eine Zeigerstellung gefunden und zwar jene, die im Verlauf der *ersten* Stunde entsteht. In der *zweiten* Stunde entsteht erneut eine entsprechende Stellung. Wir finden sie, indem wir wie im ersten Falle vorgehen mit der Gleichung

$$1 - (12x - 1) = x, \text{ oder } 2 - 12x = x,$$

woraus resultiert $2 = 13x$ (weil $13x - 12x = x$), und folglich ist $x = 2/13$ einer vollen Umdrehung. In dieser Stellung sind die Zeiger in 1 11/13 Stunden, also um 1 Uhr 50 10/13 Minuten.

Ein drittes Mal nehmen die Zeiger die erforderliche Stellung ein, wenn der Stundenzeiger von der 12 um 3/13 des vollen Kreises abweicht. Das ist nach 2 10/13 Stunden usw. Insgesamt gibt es 11 Zeitpunkte, wobei die Zeiger nach 6 Stunden die Positionen wechseln: Der Stundenzeiger nimmt den Platz ein, den vorher der Minutenzeiger innehatte, und der Minutenzeiger steht am Platz des Sekundenzeigers.

Um wieviel Uhr?

Wenn wir die Beobachtung der Zeigerbewegung exakt um 12 Uhr beginnen, dann finden wir die gesuchte Stellung während der ersten Stunde nicht. Warum? Weil

der Stundenzeiger 1/12 des Weges zurücklegt, den der Minutenzeiger vollzieht, und demzufolge wesentlich mehr zurückbleibt, als die gesuchte Stellung erfordert. Wie groß auch der Winkel sein mag, der den Minutenzeiger von der 12 trennt, der Stundenzeiger legt 1/12 dieses Winkels zurück, nicht aber 1/2, wie wir es brauchen. Doch nun ist eine Stunde vergangen. Der Minutenzeiger steht jetzt auf der 12, der Stundenzeiger auf der 1 und ist dem Minutenzeiger um 1/12 Umdrehung voraus. Sehen wir uns mal an, ob nicht so eine Stellung der Zeiger während der zweiten Stunde eintritt. Nehmen wir an, der Zeitpunkt ist dann eingetreten, wenn der Stundenzeiger von der Ziffer 12 aus einen solchen Teil der Gesamtumdrehung zurückgelegt hat, den wir mit x bezeichnen wollen. Der Minutenzeiger schaffte in der gleichen Zeit einen 12mal so großen Weg, also $12x$. Wenn wir davon eine volle Umdrehung abziehen, so muß der Rest $12x - 1$, doppelt so groß, d. h. $2x$ sein. Wir sehen also, daß $12x - 1 = 2x$ ist, woraus folgt, daß eine Umdrehung gleich $10x$ ist ($12x - 10x = 2x$). Doch wenn $10x$ einer Umdrehung gleich ist, so ist $1x = \frac{1}{10}$ einer Umdrehung. Und damit haben wir die Lösung der Aufgabe: Der Stundenzeiger hat sich von der 12 um 1/10 einer Umdrehung wegbewegt, wozu 12/10 Stunden oder 1 Stunde und 12 Minuten notwendig sind. Der Minutenzeiger ist dabei doppelt so weit von der 12 weggerückt, was 1/5 der Umdrehung ist und $60/5 = 12$ Minuten entspricht. So muß es auch sein.

Eine Lösung der Aufgabe haben wir gefunden. Doch es gibt noch andere. Die Zeiger sind im Verlaufe von 12 Stunden nicht nur einmal, sondern mehrfach auf die gleiche Weise angeordnet. Versuchen wir die weiteren Lösungen zu finden.

Zu diesem Zweck warten wir 2 Uhr ab. Der Minutenzeiger steht auf der 12, der Stundenzeiger auf der 2. Gehen wir wie oben vor, erhalten wir die Gleichung

$$12x - 2 = 2x,$$

woraus sich ergibt, daß zwei volle Umdrehungen $= 10x$ sind, und somit $x = 1/5$ einer vollen Umdrehung ist. Das entspricht dem Zeitpunkt $12/5 = 2$ Stunden 24 Minuten.

Die weiteren Zeitpunkte errechnet ihr leicht selbst. Ihr findet dann heraus, daß sich die Zeiger in der geforderten Stellung zu folgenden 10 Zeitpunkten befinden:

um	1	Uhr	12	Minuten	um	7	Uhr	12	Minuten
"	2	"	24	"	"	8	"	24	"
"	3	"	36	"	"	9	"	36	"
"	4	"	48	"	"	10	"	48	"
"	6	"		"	"	12	"		

Die Antworten „um 6 Uhr“ und „um 12 Uhr“ mögen als nicht richtig erscheinen, jedoch nur auf den ersten Blick. Tatsächlich steht um 6 Uhr der Stundenzeiger auf 6, der Minutenzeiger dagegen auf 12, also genau doppelt so weit entfernt. Um 12 Uhr ist der Stundenzeiger von der 12 „um Null“ entfernt, der Minutenzeiger, wenn ihr wollt, um „zwei Nullen“ (weil eine zweifache Null das gleiche wie Null ist). Das bedeutet, daß auch dieser Fall im Grunde genommen den Bedingungen der Aufgabe entspricht.



Umgekehrt

Nach den vorangegangenen Erläuterungen ist es gar nicht mehr schwer, diese Aufgabe zu lösen. Man kann sich leicht vorstellen, wenn man wie bisher an die Lösung herangeht, daß zum ersten Male die geforderte Zeigerstellung in dem Augenblick eintritt, der durch die Gleichung

$$12x - 1 = \frac{x}{2}$$

bestimmt wird. Daraus ergibt sich $1 = 11\ 1/2x$ oder $x = 2/23$ einer ganzen Umdrehung, das ergibt 1 1/23 Stunden nach 12 Uhr. Also, um 1 Uhr 21 4/23 Minuten sind die Zeiger in der geforderten Stellung. In der Tat, der Minutenzeiger muß in der Mitte zwischen 12 und 1 1/23 Stunden stehen, das sind 12/23 Stunden, was genau 1/23 der vollen Umdrehung ausmacht (der Stundenzeiger legt 2/23 der ganzen Umdrehung zurück.

Das zweite Mal stehen die Zeiger in der erforderlichen Stellung in dem Zeitpunkt, der sich aus der Gleichung

$$12x - 2 = \frac{x}{2}$$

ergibt.

Daraus geht hervor $2 = 11\ 1/2x$ und $x = 4/23$, der gesuchte Zeitpunkt — 2 Uhr 5 5/23 Minuten.

Der dritte gesuchte Moment — 3 Uhr 7 19/23 Minuten, usw.

Drei und sieben

Gewöhnlich wird geantwortet: „7 Sekunden“. Aber diese Antwort ist, wie wir gleich sehen werden, nicht richtig.

Wenn die Uhr drei schlägt, können wir zwei Pausen feststellen:

1) zwischen dem ersten und dem zweiten Gong;
2) zwischen dem zweiten und dem dritten Gong.

Beide Pausen dauern 3 Sekunden, also jede Pause dauert die Hälfte — nämlich 1 1/2 Sekunden.

Schlägt die Uhr jedoch sieben, haben wir sechs solche Pausen. Sechs mal 1 1/2 Sekunden macht 9 Sekunden. Folglich schlägt die Uhr sieben (d. h. gibt sieben Gongs) in 9 Sekunden.

Das Ticken der Uhr

Die rätselhaften Pausen des Uhrentickens rühren einfach von der Ermüdung des Gehörs her.

Unser Gehör, ermüdend, versagt für einige Sekunden — und in diesen Zeitabständen hören wir das Ticken nicht. Einige Zeit später vergeht die Ermüdung, und das gute Gehör ist wiederhergestellt, worauf erneut eine Ermüdung eintritt, usw.



Aufgaben aus dem Bereich des Transports

Der Flug

Ein Flugzeug legt die Entfernung zwischen der Stadt A und der Stadt B in 1 Stunde 20 Minuten zurück. Jedoch den Rückflug vollführt es in 80 Minuten.

Wie kommt das?

Zwei Dampflokomotiven

Ihr habt vielleicht schon einmal gesehen, daß ein Zug von zwei Dampflokomotiven jeweils gezogen und geschoben wird. Doch habt ihr darüber nachgedacht, was dabei mit den Kupplungen der Waggons und den Puffern vor sich geht? Die vordere Lokomotive zieht die Waggons nur dann hinter sich her, wenn deren Kupplungen gespannt sind. Doch dabei berühren sich die Puffer nicht, und die Lokomotive am Ende kann nicht schieben. Umgekehrt, wenn die hintere Lokomotive den Zug schiebt, drücken die Puffer gegeneinander, die Kupplungen dagegen sind nicht gespannt, und deshalb ist die Arbeit der vorderen Lokomotive nutzlos.

Daraus ergibt sich, daß beide Lokomotiven den Zug nicht zugleich fortbewegen können. Mit Nutzen arbeitet entweder die eine oder die andere Lokomotive.

Warum werden dann aber zwei Lokomotiven angehängt?

Die Zuggeschwindigkeit

Ihr sitzt im Eisenbahnwaggon und möchtet wissen, mit welcher Geschwindigkeit er dahinsaust.

Könnt ihr das mit Hilfe der Stöße der Räder feststellen?

Zwei Züge

Zwei Züge fuhren zur gleichen Zeit von zwei verschiedenen Stationen los und bewegten sich aufeinander zu. Der erste erreichte den Bestimmungsbahnhof eine Stunde nach ihrer Begegnung, der zweite 2 Stunden 15 Minuten nach der Begegnung.

Wievielmal größer ist die Geschwindigkeit des einen Zuges als die des anderen?

Die Aufgabe ist im **Kopf** lösbar.

Wie fährt der Zug an?

Ihr habt gewiß bemerkt, daß der Lokführer, bevor sich der Zug vorwärts bewegt, nicht selten zuerst rückwärts stößt.

Warum wird das gemacht?

Wettfahrt

Zwei Segelboote nehmen an einer Wettfahrt teil. Es wird gefordert, 24 km *hin* und *zurück* in kürzester Zeit zu segeln. Das erste Boot durchfuhr die gesamte Strecke mit einer gleichmäßigen Geschwindigkeit von 20 km pro Stunde. Das zweite bewegte sich *hin* mit einer Geschwindigkeit von 16 km/h und *zurück* mit 24 km/h.

Es siegte in der Wettfahrt das erste Boot, obwohl, wie es scheint, das zweite in einer Richtung soviel zurückblieb, wie es auf dem Rückwege schneller war. Folglich hatte es zugleich mit dem ersten eintreffen müssen.

Warum verspätete es sich?

Von Ensk nach Ixograd

Stromabwärts schafft ein Dampfer 20 km/h. Gegen die Strömung nur 15 km/h. Um von der Anlegestelle der Stadt Ensk zur Anlegestelle in Ixograd zu gelangen, braucht er 5 Stunden weniger als für den Rückweg. Wie groß ist die Entfernung zwischen diesen Städten?

Antworten

Der Flug

Bei dieser Aufgabe gibt es nichts zu erklären: Das Flugzeug fliegt in beiden Richtungen die gleiche Zeit, denn 80 Minuten = 1 Stunde 20 Minuten.

Die Aufgabe hofft auf die Unaufmerksamkeit des Lesers, der denken könnte, daß ein Unterschied besteht zwischen 1 Stunde 20 Minuten und 80 Minuten. Wie seltsam es auch ist, doch viele Leute stolpern über diese Falle, dabei mehr von denen, die gewohnt sind zu rechnen, als von denen, die im Rechnen unerfahren sind. Die Ursache liegt in der Gewöhnung an das Dezimalsystem der Maße und Geldeinheiten. Wenn wir die Bezeichnung „1 Stunde 20 Minuten" und daneben „80 Minuten" sehen, bewerten wir unwillkürlich die Differenz wie den Unterschied zwischen 1 Rubel 20 Kopeken und 80 Kopeken. Auf diesen Denkfehler ist die Aufgabe aufgebaut.

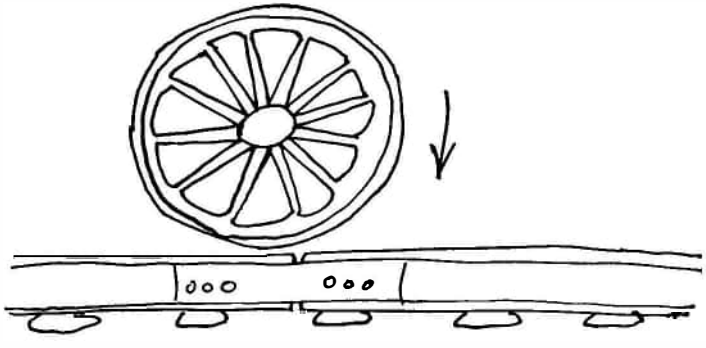
Zwei Dampflokomotiven

Die schwierige Aufgabe ist ganz einfach zu lösen. Die vordere Lokomotive zieht nicht den ganzen Zug, sondern nur einen Teil, etwa die Hälfte der Waggons. Die restlichen Waggons werden von der Lokomotive am Schluß des Zuges geschoben. Im ersten Teil des Zuges sind die Kupplungen straff gespannt, beim übrigen Teil sind sie locker, und die Waggons berühren sich mit den Puffern.

Die Zuggeschwindigkeit

Ihr habt natürlich bemerkt, daß man während der Fahrt im Eisenbahnwagen ständig regelmäßige Stöße spürt. Keine Feder kann sie vollständig dämpfen. Die Stöße kommen daher, daß die Räder an den Verbindungsstellen zweier Schienen leicht einschlagen (Abb. 215) und dieser Stoß sich auf den ganzen Waggon überträgt.

Abbildung 215



Diese unangenehmen Erschütterungen, die sich ziemlich schädigend auf Waggons und Gleise auswirken, kann man zur Bestimmung der Reisegeschwindigkeit des Zuges ausnutzen. Man braucht nur zu zählen, wieviel Stöße der Waggon innerhalb einer Minute erleidet, um zu erfahren, wieviel Schienenweg der Zug befahren hat.

Nun braucht ihr nur noch diese Zahl mit der Länge der Schiene zu multiplizieren und erhaltet die Entfernung, die der Zug in einer Minute zurückgelegt hat.

Die übliche Länge einer Schiene ist etwa 15 m[1]. Habt ihr mit der Uhr in der Hand die Stöße pro Minute gezählt, so multipliziert die Zahl mit 15, danach mit 60 und dividiert durch 1000. Das ergibt die Kilometerzahl, die der Zug in einer Stunde zurücklegt:

$$\frac{(\text{Zahl der Stöße}) \cdot 15 \cdot 60}{1000} = \text{Kilometer pro Stunde.}$$

Zwei Züge

Der schnellste Zug legte bis zum Punkt der Begegnung einen so viele Male längeren Weg gegenüber dem langsameren zurück, wie die Geschwindigkeit des schnelleren die des langsameren übersteigt. Nach der Begegnung verblieb dem schnelleren Zug bis zum Bestimmungsbahnhof der Weg, den der langsamere Zug bis zur Begegnung zurückgelegt hatte, und umgekehrt. Mit anderen Worten, der schnelle Zug durchfuhr nach der Begegnung einen um sovielmal kürzeren Weg, wie seine Geschwindigkeit größer war. Wenn wir das Verhältnis der Geschwindigkeiten mit x berechnen, so benötigte der schnellere Zug zur Bewältigung der Strecke von der Begegnung bis zum Zielbahnhof um x^2 weniger Zeit als der langsamere. Daraus folgt $x^2 = 2\,1/4$ und $x = 1\,1/2$. Also ist die Geschwindigkeit des einen Zuges eineinhalbmal so groß wie die Geschwindigkeit des anderen.

Wie fährt der Zug an?

Wenn der Zug beim Eintreffen auf dem Bahnhof stehenbleibt, sind die Kupplungen der Waggons gestrafft. Zieht die Dampflokomotive den Zug in dieser Stellung an, muß sie alle Waggons *mit einem Male* in Bewegung setzen. Wenn die Anhängelast sehr groß ist, schafft sie das nicht. Anders verhält es sich, wenn die Lokomotive zunächst zurückstößt. Die Kupplungen sind dann locker, und es wird *ein Waggon nach dem anderen* in Bewegung gesetzt, was wesentlich leichter ist.

Kurz, der Lokführer macht das gleiche wie der Kutscher einer sehr schweren Fuhre, der erst während der Fahrt, wenn der Wagen schon in Gang gekommen ist, aufspringt. Andernfalls müßten die Pferde eine zu große Last von der Stelle bewegen.

Wettfahrt

Das zweite Boot kam deshalb später an, weil es sich eine *kürzere* Zeit mit 24 km/h Geschwindigkeit bewegte als mit 16 km/h Geschwindigkeit. Mit 24 km/h Geschwindigkeit bewegte es sich 24/24, also 1 Stunde und mit 16 km/h 24/16, also 1 1/2 Stunden. Deshalb hat es auf dem *Hinweg* auch mehr Zeit verloren, als es auf dem Rückweg wieder gutmachen konnte.

---

[1] Wenn ihr auf dem Bahnhof aus dem Zug steigt, könnt ihr, die Schienen mit Schritten abmessend, ihre Länge feststellen, 7 Schritte sind ungefähr 5 m.

Von Ensk nach Ixograd

Mit der Strömung schafft der Dampfer 1 km in 3 Minuten. Gegen die Strömung — 1 km in 4 Minuten. Auf jedem Kilometer gewinnt der Dampfer im ersten Fall 1 Minute und, da er für die gesamte Strecke 5 Stunden Zeit gewinnt oder 300 Minuten, so sind es folglich von Ensk nach Ixograd 300 km.

Tatsächlich:

$$\frac{300}{15} - \frac{300}{20} = 20 - 15 = 5.$$

Unerwartete Berechnungen

Ein Glas voll Erbsen

Viele Male habt ihr Erbsen gesehen, und oft habt ihr Trinkgläser in den Händen gehalten. Die Maße der einen wie der anderen sollten euch gewiß gut bekannt sein. Stellt euch ein Trinkglas bis zum Rand mit trockenen Erbsen gefüllt vor. Fädeln wir alle Erbsen wie Perlen auf einen Faden.

Welche Länge wird die Erbsenkette ungefähr erreichen, wenn man sie langstreckt?

Wasser und Wein

In einer Flasche ist ein Liter Wein, in einer anderen ein Liter Wasser. Aus der ersten wurde ein Löffel Wein in die zweite umgefüllt und danach aus der zweiten in die erste ein Löffel des entstandenen Gemisches zurückgegossen.

Ist jetzt mehr Wasser in der ersten Flasche oder mehr Wein in der zweiten?

Ein Spielwürfel

Abbildung 216



Hier ist ein Spielwürfel (Abb. 216), ein Würfel mit 1 bis 6 Punkten auf den Flächen.

Peter wettet, daß bei viermaligem Würfeln ein Wurf von den vieren die 1 zeigt.

Wladimir dagegen behauptet, daß die 1 entweder überhaupt nicht fällt bei vier Würfen oder aber öfter als einmal.

Wer hat die größere Chance zu gewinnen?

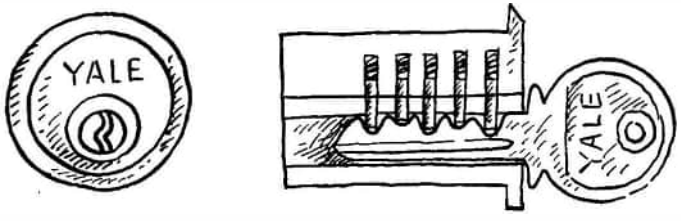
Das französische Schloß

Obgleich das französische Schloß seit langem bekannt ist (es wurde bereits 1865 erfunden), wissen nur wenige, wie es konstruiert ist. Deshalb hört man oft Zweifel daran, daß es eine große Anzahl von Schloßvarianten und Schlüsseln dazu geben kann. Es genügt jedoch, sich mit dem scharfsinnigen Mechanismus dieses Schlosses bekannt zu machen, um sich von der Möglichkeit zu überzeugen, daß sie ausreichend vielfältig gestaltet werden können.

Abb. 217 zeigt links die Vorderansicht des französischen Schlosses. Übrigens ist die Bezeichnung „fran-

zösisch“ absolut unrichtig, weil die Heimat dieser Schlösser Amerika ist und ihr Erfinder der Amerikaner Yale. Deshalb befindet sich auf diesen Schlössern und den Schlüsseln die Aufschrift „YALE“. Ihr seht rund um das Schlüsselloch einen kleinen Kreis. Das ist die Stirnseite des Zylinders, der durch das ganze Schloß geht. Die Aufgabe beim Öffnen besteht darin, den Zylinder zu drehen. Doch hier liegt die ganze Problematik. Der Zylinder wird in einer bestimmten Lage durch fünf kurze Stahlstifte gehalten (Abb. 217, rechts). Jeder Stift ist in zwei Teile zer-

Abbildung 217



sägt, und nur wenn die Stifte so angeordnet sind, daß ihre Schnitte sich an dem Zylinderrand befinden, kann man ihn drehen.

Diese erforderliche Stellung erhalten die Stifte durch den Schlüssel mit entsprechenden Zacken längs der Kante. Es genügt ihn hineinzustecken, damit die Stifte die für das Öffnen einzig mögliche Stellung einnehmen.

Es ist nunmehr leicht zu verstehen, daß die Zahl der unterschiedlichen Schlösser dieses Typs wirklich sehr groß sein kann. Sie hängt davon ab, wie viele verschiedene Möglichkeiten zur Trennung jedes Stiftes in zwei Teile gegeben sind. Selbstverständlich ist diese Zahl nicht unendlich, jedoch sehr hoch.

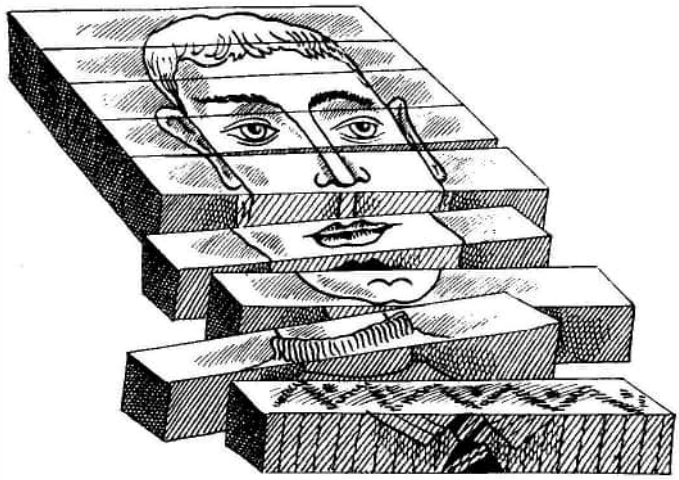
Nehmt einmal an, daß es 10 verschiedene Möglichkeiten gibt, jeden Stift in zwei Teile zu schneiden, und versucht auszurechnen, wie viele unterschiedliche französische Schlösser auf diese Weise hergestellt werden können.

Wie viele Porträts?

Zeichnet ein Porträt auf einen Karton und schneidet es dann in Streifen. Nehmen wir an, in neun Streifen. Wenn ihr ein bißchen zu zeichnen versteht, wird es euch nicht schwerfallen, noch mehr solcher Streifen mit der Darstellung verschiedener Gesichtspartien anzufertigen: Allerdings so, daß die zwei benachbarten

Streifen, wenn sie auch zu verschiedenen Porträts gehören, aneinandergepaßt werden können, ohne Unterbrechung der Kontinuität der Linien. Wenn ihr für jeden Teil des Gesichts beispielsweise vier Streifen vorbereitet[1]), erhaltet ihr 36 Streifen, aus denen ihr,

Abbildung 218



wenn jeweils neun zusammengefügt werden, verschiedene Porträts fertigen könnt.

In Läden, wo einstmals komplette Sätze solcher Streifen (oder Klötzer) zur Zusammenstellung von Porträts (Abb. 218) erhältlich waren, versicherten die Verkäufer den Kunden, daß man aus 36 Streifen *tausend* verschiedene Gesichter legen kann.

Stimmt das?

Mit dem Rechenbrett

Zweifellos könnt ihr mit Rechenbrettern umgehen und wißt, daß es eine sehr leichte Aufgabe ist, 25 Rubel darauf abzuzählen.

Doch die Aufgabe wird anspruchsvoller, wenn euch die Bedingung gestellt wird, es so zu machen, daß nicht sieben Kugeln wie gewöhnlich, sondern 25 bewegt werden.

Versucht wirklich einmal, auf dem Rechenbrett die Summe von 25 Rubeln darzustellen und dabei 25 Kugeln zu verschieben.

---

[1]) Es ist am praktischsten, sie auf die vier Seiten eines quadratischen Holzklotzes zu kleben.

Natürlich wird das praktisch nie gemacht, doch die Aufgabe ist dennoch lösbar, und das Ergebnis ist recht interessant.

Baumblätter

Würde man von irgendeinem alten Baum — zum Beispiel einer Linde — alle Blätter abreißen und sie ohne Zwischenraum aneinanderreihen, was für eine ungefähre Länge würde wohl die Reihe erreichen? Ob es möglich wäre, damit ein großes Haus einzukreisen?

Eine Million Schritte

Ihr wißt natürlich sehr gut, was eine Million ist, und ebenso gut habt ihr eine Vorstellung davon, wie lang euer Schritt ist. Und da ihr beides wißt, wird es euch nicht schwerfallen, auf die Frage zu antworten: Wie weit würdet ihr mit einer Million Schritte gehen? Mehr als 10 km oder weniger?

Ein Kubikmeter

Im Unterricht stellte ein Lehrer die Frage: Welche Höhe würde eine Säule erreichen, wenn wir alle Millimeterwürfel aufeinanderstellen würden, die ein Kubikmeter enthält?

„Das wäre höher als der Eiffelturm (300 m)!“ rief ein Schüler.

„Sogar höher als der Montblanc (5000 m)!“ antwortete ein anderer.

Wer von beiden hatte sich mehr geirrt?

Wer zählte mehr?

Zwei Personen zählten im Verlaufe einer Stunde alle, die auf dem Fußweg an ihnen vorbeigingen. Einer von ihnen stand am Eingang eines Hauses, der andere ging auf dem Fußweg auf und ab.

Wer zählte mehr Vorübergehende?

Antworten

Ein Glas voll Erbsen

Lösen wir die Aufgabe nach Augenmaß, dann irren wir uns sicher, und zwar beträchtlich. Man muß wenigstens eine Überschlagsrechnung vornehmen.

Der Durchmesser einer getrockneten Erbse ist etwa 1/2 cm. In einem Kubikzentimeter finden nicht weniger als $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Erbsen Platz (bei dichter Schichtung einige mehr). In ein Trinkglas mit 250 cm^3 Rauminhalt gehen nicht weniger als $8 \cdot 250 = 2000$ Erbsen. Auf einen Faden gezogen, würden sie $1/2 \cdot 2000 = 1000$ cm ergeben, das sind 10 m.

Wasser und Wein

Bei der Lösung dieser Aufgabe kann man sich leicht verwirren, wenn man nicht berücksichtigt, daß die Flüssigkeitsmenge in den Flaschen nach dem Umfüllen die gleiche ist wie ursprünglich — 1 Liter. Überlegen wir weiter so. Mögen nach der Umfüllung in der zweiten Flasche n cm^3 Wein und dementsprechend $(1000 - n)$ cm^3 Wasser sein. Wo sind die fehlenden n cm^3 Wasser? Sie müssen offensichtlich in der ersten Flasche sein. Also nach der Umfüllung ist im Wein so viel Wasser, wie im Wasser Wein ist.

Ein Spielwürfel

Bei vier Würfen ist die Anzahl aller möglichen Stellungen des Würfels $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$. Nehmen wir an, der erste Wurf ist bereits vollzogen und hat die 1 gebracht. Dann ist bei den drei folgenden Würfen die Anzahl aller möglichen Stellungen, die für Peter günstig sind, nämlich jede beliebige Zahl außer $1, 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Ebenso gibt es für Peter 125 günstige Möglichkeiten, wenn die 1 nur beim zweiten oder nur beim dritten oder nur beim vierten Wurf fällt. Somit bestehen $125 + 125 + 125 + 125 = 500$ verschiedene Möglichkeiten, daß die 1 bei vier Würfen nur einmal, das einzige Mal, auftritt. Ungünstige Möglichkeiten bestehen dagegen $1296 - 500 = 796$, weil alle anderen Fälle ungünstig sind. Wir sehen, daß Wladimir größere Gewinnchancen hat als Peter: 796 zu 500.

Das französische Schloß

Es ist nicht schwer auszurechnen, daß die Zahl der unterschiedlichen Schlösser $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$ ist.

Jedes der 100 000 Schlösser hat seinen Schlüssel, mit dem einzig und allein das Schloß geöffnet werden kann. Die Existenz von 100 000 verschiedenen Schlössern und Schlüsseln stellt den Schloßeigentümer natürlich völlig sicher, weil jemand der unbefugt in die Räume mit einem dazugehörenden Schlüssel eindringen will, nur eine von 100 000 Chancen hat, den richtigen Schlüssel zu erwischen.

Unsere Rechnung ist nur beispielhaft. Sie setzt voraus, daß jeder Stift nur in 10 verschiedenen Varianten in zwei Teile getrennt werden kann. In Wirklichkeit gibt es bestimmt mehrere Varianten dazu, was die Zahl der unterschiedlichen Schlösser beträchtlich erhöht. Hieraus wird der Vorteil des französischen Schlosses (wenn es gut angefertigt ist) gegenüber dem gewöhnlichen klar ersichtlich. Bei letzteren kommen auf jedes Dutzend ein bis zwei gleiche.

Wie viele Porträts?

Die Zahl der Porträts übersteigt wesentlich die Tausend. Auf folgende Weise kann man sie errechnen. Wir bezeichnen die neun Teile der Porträts mit römischen Ziffern: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX. Für jeden Teil gibt es vier Streifen, denen wir die arabischen Ziffern 1, 2, 3 und 4 geben.

Nehmen wir Streifen I, 1. Die Streifen II, 1; II, 2; II, 3 und II, 4 können wir damit kombinieren.

Insgesamt sind also hier vier Kombinationen möglich. Doch da der Teil I des Kopfes durch vier Streifen dargestellt werden kann (I,1; I,2; I,3; I,4) und jeder einzelne mit Teil II in vier verschiedenen Kombinationen zusammengefügt werden kann, so können die zwei oberen Teile I und II des Kopfes $4 \cdot 4 = 16$ Variationen kombiniert werden.

Zu jeder dieser 16 Anordnungen kann Teil III in vier Kombinationen hinzugefügt werden (III,1; III,2; III,3; III,4). Demzufolge können die ersten drei Teile des Gesichtes in $16 \cdot 4 = 64$ verschiedenen Formen zusammengestellt werden.

Auf diese gleiche Weise erfahren wir, daß die Teile I, II, III, IV in $64 \cdot 4 = 256$ Variationen angeordnet werden können; die Teile I, II, III, IV, V in 1024 Formen; die Teile I, II, III, IV, V, VI in 4096 usw. Schließlich kann man alle neun Teile des Porträts auf $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$, d. h. 262 144 verschiedene Weise zusammenstellen.

Somit ist es möglich, aus unseren neun Blöcken nicht 1000, sondern über 250 000 verschiedener Porträts zusammenzustellen.

Die Aufgabe ist sehr lehrreich. Sie erklärt uns, weshalb man so selten zwei gleiche menschliche Gesichter antrifft. Bereits in der „Lehre" Monomachs[1]) wird Verwunderung darüber ausgedrückt, daß bei der gewaltigen Anzahl von Menschen auf der Erde jeder sein eigenes Antlitz hat. Wir haben uns soeben davon überzeugt, daß 260 000 verschiedene Gesichtsformen existieren würden, wäre das menschliche Antlitz nur durch neun Züge charakterisiert, die vier Varianten zulassen. In Wirklichkeit hat das menschliche Antlitz mehr als neun charakteristische Züge und variiert in mehr als vier Formen. So erhalten wir bei 20 Gesichtszügen, von denen jeder in 10 Arten variiert $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots$ (20 Multiplikatoren), das sind 10^{20} oder 100 000 000 000 000 000 000 Möglichkeiten.

Das ist um ein Vielfaches mehr, als Menschen auf der Erde leben.

---

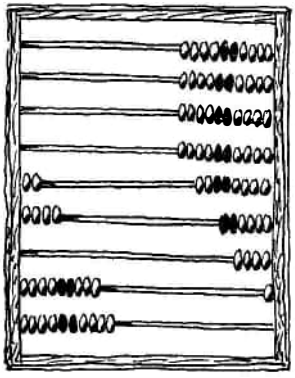
[1]) Wladimir Wsewolodowitsch Monomach (1053—1125), Großfürst von Kiew (*Anm. d. Red.*)

?

Antworten

Mit dem Rechenbrett

Abbildung 219



25 Rubel kann man auf dem Rechenbrett mit 25 Kugeln folgendermaßen darstellen:

In der Tat, hier sind verschoben: 20 Rubel + 4 Rubel + 90 Kopeken + 10 Kopeken = 25 Rubel. Die Zahl der Kugeln: 2 + 4 + 9 + 10 = 25.

Baumblätter

Nicht nur ein Haus, sondern manche kleine Stadt könnte man mit den in einer Reihe aneinandergelegten Blättern eines Baumes einkreisen, denn solche Kette würde sich auf etwa 12 km erstrecken! An einem alten Baum sind wahrhaftig nicht weniger als 200 000 — 300 000 Blätter. Selbst wenn wir bei der Zahl 250 000 bleiben und für jedes Blatt eine Breite von 5 cm rechnen, so entsteht eine Strecke von 1 250 000 cm, das sind 12 500 m oder 12 1/2 km.

Eine Million Schritte

Eine Million Schritte sind weit mehr als 10 km, mehr sogar als 100 km. Wenn die Schrittlänge etwa 3/4 m beträgt, so sind 1 000 000 Schritte = 750 km. Da es von Moskau nach Leningrad ganze 640 km sind, würdet ihr von Moskau aus eine Million Schritte gehend, weiter als bis nach Leningrad kommen.

Ein Kubikmeter

Beide Antworten sind weit von der Wahrheit entfernt, denn die Säule wäre hundertmal höher als der höchste Berg auf Erden. Tatsächlich sind in einem Kubikmeter 1000 · 1000 · 1000 = 1 Milliarde Kubikmillimeter enthalten. Aufeinandergetürmt ergäbe das eine Säule von 1 000 000 000 mm oder 1 000 000 m oder 1000 km.

Wer zählte mehr?

Beide zählten die gleiche Anzahl Vorübergehende. Obgleich jener, der am Tor stand, die in beiden Richtungen Vorübergehenden zählte. Dafür sah derjenige, der lief, zweimal soviel entgegenkommende Personen.



Schwierige Situationen

Lehrer und Schüler

Das, worüber weiter berichtet wird, hat sich bekanntlich im alten Griechenland zugetragen. Der Sophist Protagoras, Lehrer der Weisheit, nahm sich eines jungen Schülers an, um ihn in allen Feinheiten der Advokatenkunst zu unterweisen. Zwischen dem Lehrer und dem Schüler war eine Vereinbarung getroffen worden, wonach der Schüler sich verpflichtete, seinem Lehrer sofort nach seinen ersten Erfolgen, d. h. nach seinem ersten gewonnenen Prozeß, das Honorar für die Unterweisung zu zahlen.

Der Schüler hatte bereits den gesamten Ausbildungskurs absolviert, und Protagoras erwartete die Bezahlung. Doch der Schüler machte keine Anstalten, im Gericht aufzutreten. Was tun? Der Lehrer klagte vor Gericht gegen ihn, um die Schulden seines Schülers einzufordern. Er dachte sich das so: Gewinnt der Kläger den Prozeß, muß das Geld auf Grund der Gerichtsentscheidung gezahlt werden; verliert der Kläger den Prozeß und gewinnt demzufolge der Angeklagte, so muß der Schüler dennoch zahlen, nämlich auf Grund der Vereinbarung, nach dem ersten von ihm gewonnenen Prozeß das Honorar zu erstatten.

Der Schüler betrachtete die Klage Protagoras als völlig aussichtslos. Er hatte, wie wir sehen, tatsächlich bei seinem Lehrer etwas gelernt und dachte so: Verurteilt man ihn zur Zahlung, braucht er gemäß der Vereinbarung nichts zu zahlen, denn er hat ja dann seinen ersten Prozeß verloren. Wenn zugunsten des Angeklagten entschieden wird, dann braucht er — auf Grund des Gerichtsentscheids nichts zu zahlen.

Der Gerichtstag kam heran. Der Richter war in großen Schwierigkeiten. Jedoch nach reiflicher Überlegung fand er einen Ausweg und verkündete eine Entscheidung, welche die Bedingungen der Absprache zwischen Lehrer und Schüler nicht verletzte und dem Lehrer die Möglichkeit gab, sein Honorar zu erhalten.

Wie lautete das Urteil des Richters?

Die Erbschaft

Hier ist noch eine uralte Aufgabe, die sich die Gesetzeshüter des alten Rom gern gegenseitig stellten.

Eine Witwe ist verpflichtet, die Hinterlassenschaft ihres Mannes in Höhe von 3500 Rubel mit dem Kind, das sie erwartete, zu teilen. Wird es ein Sohn, so erhält die Mutter nach den römischen Gesetzen die Hälfte des Anteils des Sohnes, wird eine Tochter geboren, so erhält die Mutter den doppelten Anteil der Tochter. Nun wurden jedoch Zwillinge geboren — ein Sohn und eine Tochter.

Wie ist die Erbschaft so aufzuteilen, daß allen Forderungen des Gesetzes entsprochen wird?

Umfüllen

Vor euch steht ein Krug mit 4 l Milch. Ihr sollt diese 4 l gleichmäßig unter zwei Freunden aufteilen, doch ihr habt zum Aufteilen nur zwei leere Krüge, von denen einer 2 1/2 l und der andere 1 1/2 l faßt.

Wie soll man allein mit diesen drei Gefäßen 4 l Milch in zwei Hälften aufteilen?

Natürlich muß man die Milch mehrere Male von einem Gefäß ins andere gießen.

Aber wie?

Wie unterbringen?

In einer äußerst schwierigen Lage befand sich einst der Empfangschef eines Hotels. Es trafen gleichzeitig 11 Gäste zur Übernachtung ein, die jeder ein Einzelzimmer wünschten. Im Hotel waren nur 10 freie Zimmer. Die Angereisten waren sehr hartnäckig. Und es blieb nichts anderes übrig, als 11 Personen in 10 Zimmern so unterzubringen, daß in jedem nur eine Person ist. Das ist, wie es scheint, völlig unmöglich. Dem Empfangschef gelang es jedoch, eine Lösung dieser schwierigen Aufgabe zu finden. Hier ist, was er sich ausdachte. Im ersten Zimmer brachte er den ersten Gast unter und bat um seine Zustimmung, vorübergehend — für etwa 5 Minuten — den 11. Gast auch dort unterzubringen. Als diese zwei Gäste untergebracht waren, bat er

den	3. Gast	ins	2. Zimmer
den	4. "	ins	3. "
den	5. "	ins	4. "
den	6. "	ins	5. "
den	7. "	ins	6. "
den	8. "	ins	7. "
den	9. "	ins	8. "
den	10. "	ins	9 "

Es blieb, wie ihr seht, das 10. Zimmer frei. Dort brachte er dann auch den 11. Gast, der sich vorübergehend im ersten Zimmer mit aufhielt, unter — zur großen Zufriedenheit der ganzen Gesellschaft und wahrscheinlich auch zur nicht geringen Verwunderung vieler Leser dieses Buches.

Wo liegt das Geheimnis des Tricks?

Zwei Kerzen

Plötzlich ging das elektrische Licht in der Wohnung aus. Die Sicherung war durchgebrannt. Ich steckte zwei Kerzen an, die vorsorglich vorbereitet auf dem Schreibtisch standen, und arbeitete bei ihrem Licht solange, bis der Schaden am Stromnetz behoben war.

Am folgenden Tag ergab sich die Notwendigkeit festzustellen, wie lange die Wohnung ohne Strom war. Ich hatte nicht darauf geachtet, wann die Beleuchtung versagte und wann sie wieder begann. Auch wußte ich nicht, welche Länge die Kerzen ursprünglich hatten. Ich erinnerte mich nur daran, daß die Kerzen gleich lang gewesen waren, aber unterschiedlich dick. Die dicke brennt in 5 Stunden nieder, die dünne in 4. Beide Kerzen benutzte ich erstmals. Kerzenreste fand ich nicht, jemand von meinen Familienangehörigen hatte sie weggeworfen.

„Die Stummel waren klein, es lohnte sich nicht, sie aufzuheben", sagte man mir.

„Erinnert ihr euch nicht wenigstens, wie lang sie waren?"

„Ungleich. Der eine war viermal länger als der andere." Mehr konnte ich nicht in Erfahrung bringen. Ich mußte mich mit den genannten Fakten begnügen und auf ihrer Grundlage die Brennzeit der Kerzen bestimmen.

Wie wäret ihr aus dieser kniffligen Lage herausgekommen?

Drei Kundschafter

In einer nicht weniger schwierigen Lage befand sich ein 3-Mann-Spähtrupp, der über den Fluß setzen sollte, ohne daß eine Brücke vorhanden war. Es fuhren zwar zwei kleine Jungens, die bereit waren, den Soldaten zu helfen, in einem Kahn auf dem Fluß, doch der Kahn war so klein, daß er nur das Gewicht eines Soldaten zu tragen vermochte. Selbst ein Soldat und ein

Junge konnten nicht gleichzeitig im Kahn sitzen, ohne Gefahr zu laufen, daß er unterging. Schwimmen konnten die Soldaten nicht.

Es schien so, als könnte unter diesen Bedingungen nur ein Soldat übersetzen. Jedoch alle drei Kundschafter fanden sich bald am gegenüberliegenden Ufer wieder und gaben den Knaben das Boot zurück. Wie haben sie das gemacht?

Eine Herde Kühe

Hier ist eine Variante einer alten, sehr interessanten Aufgabe. Jemand verteilte unter seinen Söhnen eine Herde Kühe. Dem Ältesten gab er eine Kuh und 1/7 aller übrigen. Dem zweiten — zwei Kühe und 1/7 aller übrigen; dem dritten — drei Kühe und 1/7 aller übrigen, dem vierten — vier Kühe und 1/7 aller übrigen usw. So wurde die Herde zwischen den Söhnen ohne Rest aufgeteilt.

Wieviel Söhne waren es, und wieviel Kühe zählte die Herde?

Ein Quadratmeter

Als Aljoscha zum erstenmal erfuhr, daß ein Quadratmeter eine Million Quadratmillimeter enthält, wollte er das nicht glauben.

„Wo kommen denn so viele her?“ wunderte er sich.

„Hier habe ich ein Blatt Millimeterpapier, das genau einen Meter lang und breit ist. Sind denn wirklich in diesem Quadrat eine Million millimetergroße Kästchen? Das glaube ich auf keinen Fall!“

„Zähle doch“, riet man ihm.

Aljoscha nahm sich das auch vor, alle Kästchen zu zählen. Er stand frühzeitig auf und begann zu zählen, exakt jedes gezählte Kästchen abhakend.

Für die Registrierung eines Quadrates brauchte er eine Sekunde, und er kam rasch voran.

Aljoscha arbeitete, ohne aufzusehen. Und dennoch, was meint ihr, konnte er sich an diesem Tag davon überzeugen, daß ein Quadratmeter eine Million Quadratmillimeter enthält?

Hundert Nüsse

Hundert Nüsse sind unter 25 Personen so aufzuteilen, daß keiner eine gerade Zahl von Nüssen bekommt.

Könnt ihr das?

Wie teilen?

Zwei Freunde kochten Grütze. Der eine schüttete 200 g Graupen in den Topf, der andere 300 g. Als die Grütze fertig war, und die Freunde ans Essen gingen, gesellte sich ein Vorübergehender zu ihnen und aß mit ihnen. Als er ging, gab er ihnen dafür 50 Kopeken.

Wie sollen die Freunde das erhaltene Geld unter sich aufteilen?

Aufteilen von Äpfeln

Neun Äpfel sind zu gleichen Teilen unter 12 Pioniere aufzuteilen.

Dabei ist es wünschenswert, die Aufteilung so vorzunehmen, daß kein Apfel in mehr als vier Teile geschnitten wird.

Die Aufgabe scheint auf den ersten Blick nicht durchführbar, doch wer sich in der Bruchrechnung auskennt, der löst sie natürlich ohne große Mühe.

Ist die Lösung gefunden, wird es nicht schwer sein, auch mit einer anderen Aufgabe gleicher Art zurechtzukommen: Sieben Äpfel sind unter 12 Kinder so aufzuteilen, daß keiner in mehr als vier Teile geschnitten wird.

Wie die Äpfel teilen?

Zu Mischa kommen fünf Freunde. Mischas Vater wollte alle sechs Knaben mit Äpfeln bewirten. Doch es waren nur fünf Stück da. Was tun? Keiner sollte benachteiligt werden. So blieb natürlich nichts anderes übrig, als die Äpfel zu zerschneiden. Doch in zu kleine Teile schneiden ist nicht angebracht. Der Vater wollte keinen Apfel in mehr als drei Teile schneiden. Und so stand die Aufgabe: Fünf Äpfel unter sechs Jungens so aufzuteilen, daß kein Apfel in mehr als drei Teile zerschnitten werden muß. Wie hat Mischas Vater die Aufgabe gelöst?

Ein Boot für drei

Drei Wassersportler besitzen ein einziges Boot. Sie möchten es so einrichten, daß jeder das Boot zu beliebiger Zeit benutzen, aber kein Unbefugter es entwenden kann. Zu diesem Zwecke legen sie es an eine Kette, die mit drei Schlössern gesichert ist. Jeder hat

nur einen Schlüssel. Und dennoch kann er den Verschluß mit seinem einzigen Schlüssel öffnen, ohne abzuwarten, bis seine Kameraden mit ihren Schlüsseln kommen.

Wie haben sie das eingerichtet, daß es bei ihnen so gut klappt?

In Erwartung der Straßenbahn

Drei Brüder, die vom Theaterbesuch nach Hause zurückkehrten, gingen zur Straßenbahnhaltestelle, bereit in den ersten Waggon, der angefahren kommt, zu springen. Die Straßenbahn kam aber nicht, und der älteste Bruder schlug vor, zu warten.

„Wozu hier stehen und warten", antwortete der mittlere Bruder, „gehen wir lieber los. Wenn die Bahn uns einholt, springen wir auf und währenddessen haben wir schon einen Teil des Weges hinter uns. Um so eher kommen wir nach Hause."

„Wenn wir schon gehen", entgegnete der jüngste Bruder, „dann gehen wir nicht in Fahrtrichtung, sondern der Bahn entgegen, denn dann begegnen wir der Bahn eher und kommen auch schneller nach Hause."

Da die Brüder sich gegenseitig nicht überzeugen konnten, handelte jeder für sich: Der älteste Bruder blieb, um die Bahn an der Haltestelle zu erwarten, der mittlere ging in Fahrtrichtung, der jüngste entgegengesetzt.

Wer von den drei Brüdern kam früher nach Hause? Wer von ihnen handelte vernünftiger?



Lehrer und Schüler

Das Urteil lautete: Die Klage des Lehrers wird abgewiesen, jedoch hat er das Recht, zum zweiten Mal auf einer neuen Grundlage zu klagen, nämlich, daß der Schüler seinen ersten Prozeß gewonnen hat. Dieser zweite Prozeß muß zweifelsohne zu Gunsten des Lehrers entschieden werden.

Die Erbschaft

Die Witwe hat 1000 Rubel zu bekommen, der Sohn 2000 Rubel, die Tochter 500 Rubel. Dann wird der Wille des Erblassers erfüllt, da die Witwe halb soviel wie der Sohn und doppelt soviel wie die Tochter erhält.

Umfüllen

Es sind sieben Umfüllungen vorzunehmen, die übersichtlich in der folgenden Tabelle dargestellt sind:

	4 l	1 1/2 l	2 1/2 l
1. Umfüllung	1 1/2	—	2 1/2
2. "	1 1/2	1 1/2	1
3. "	3	—	1
4. "	3	1	—
5. "	1/2	1	2 1/2
6. "	1/2	1 1/2	2
7. "	2	—	2

Wie unterbringen?

Das Geheimnis besteht darin, daß der zweite Übernachtungsgast kein Zimmer erhalten hat. Nach dem ersten und elften Gast wurde gleich zum dritten übergegangen und der zweite vergessen. Daher „gelang" eine derartige unmögliche Unterbringung.

Zwei Kerzen

Für die Lösung dieser Aufgabe muß eine einfache Gleichung aufgestellt werden. Wir kennzeichnen die Brennstunden der Kerzen mit x. In jeder Stunde brannte 1/5 der Länge der dicken und 1/4 der dünnen Kerze nieder. Das bedeutet: Die Länge des Kerzenstummels der dicken Kerze wird ausgedrückt (in Teilen der Länge der vollständigen Kerze) als $1 - \frac{x}{5}$ und der dünnen als $1 - \frac{x}{4}$. Wir wissen, daß die Kerzen

gleich lang waren und daß die vierfache Länge des dicken Kerzenstummels $4(1-\frac{x}{5})$ der Länge $1-\frac{x}{4}$ des dünnen Stummels entsprach:

$$4(1-\frac{x}{5})=1-\frac{x}{4}.$$

Lösen wir die Gleichung, erfahren wir, daß $x=3\ 3/4$ Stunden ist.
Die Kerzen brannten 3 Stunden und 45 Minuten.

Drei Kundschafter

Es mußten die sechs folgenden Fahrten durchgeführt werden:

1. Fahrt: Beide Knaben fahren zum gegenüberliegenden Ufer. Einer bringt das Boot zu den Kundschaftern zurück, der andere verbleibt am jenseitigen Ufer.

2. Fahrt. Der Junge, der das Boot zurückbrachte, bleibt am diesseitigen Ufer. Der erste Soldat steigt ins Boot und setzt zum anderen Ufer über. Das Boot kehrt mit dem anderen Jungen zurück.

3. Fahrt: Beide Buben setzen über den Fluß, und einer kehrt mit dem Boot zurück.

4. Fahrt: Der zweite Soldat setzt zum gegenüberliegenden Ufer über. Mit dem Jungen kehrt das Boot zurück.

5. Fahrt: Wiederholung der dritten.

6. Fahrt: Der dritte Soldat setzt über. Das Boot kehrt mit dem Jungen zurück. Nun setzen die Jungen ihre unterbrochene Kahnfahrt fort.

Alle drei Soldaten befinden sich jetzt am anderen Ufer.

Eine Herde Kühe

Wenn man die Aufgabe arithmetisch lösen will, also ohne Gleichungen zu Hilfe zu nehmen, muß man dann vom Ende her vorgehen.

Der jüngste Sohn erhielt soviel Kühe, wie es Söhne waren. 1/7 der verbliebenen Herde konnte er nicht zusätzlich bekommen, weil nach ihm keinerlei Rest mehr übrigblieb.

Weiter: Der vorhergehende Sohn erhielt eine Kuh weniger, als es insgesamt Söhne waren und 1/7 der verbleibenden Herde. Das heißt, was dem jüngsten Sohn zugeteilt wurde, sind 6/7 dieses Restes.

Daraus folgt, daß die Zahl der Kühe, die der jüngste Sohn erhält, durch sechs ohne Rest teilbar sein muß.

Versuchen wir davon auszugehen, daß der jüngste Sohn sechs Kühe erhielt, und prüfen, ob diese Annahme aufgeht. Wenn der jüngste Sohn sechs Kühe erhielt, heißt das, er war der sechste Sohn, und es waren insgesamt sechs Söhne. Der fünfte Sohn bekam fünf Kühe und zusätzlich 1/7 von sieben, also zusammen sechs Kühe. Wir stellen fest, daß die beiden letzten Söhne $6+6=12$ Kühe bekamen, die 6/7 der Zahl, der nach der Verteilung an den vierten Sohn übrigblieb, ausmachen. Der vollständige Rest ist $12:\frac{6}{7}=14$ Kühe, demzufolge erhielt der vierte Sohn $4+\frac{14}{7}=6$.

Errechnen wir den Restbestand der Herde nach der Aufteilung an den dritten

Sohn. $6 + 6 + 6$, also 18, sind gleich 6/7 dieses Restes, deshalb ist der volle Restbestand $18 : \frac{6}{7} = 21$. Der dritte Sohn bekam $3 + \frac{21}{7} = 6$.

Auf genau die gleiche Weise ermitteln wir, daß der zweite und erste Sohn ebenfalls jeder 6 Kühe erhielten.

Unsere Annahme erwies sich als wahrheitsgemäß. Es waren insgesamt 6 Söhne und die Herde zählte 36 Kühe.

Gibt es nicht doch noch andere Lösungen? Nehmen wir an, es waren nicht sechs, sondern zwölf Söhne. Es erweist sich, daß eine solche Annahme unbrauchbar ist. Auch die Zahl 18 paßt nicht. Weiter lohnt es sich nicht zu probieren: 24 und mehr Söhne konnten es nicht sein.

Ein Quadratmeter

An diesem Tag konnte Aljoscha sich nicht davon überzeugen. Selbst wenn er den ganzen Tag ohne Unterbrechung gezählt hätte, so hätte er doch nur 86 400 Kästchen zusammengezählt. Denn 24 Stunden haben nur 86 400 Sekunden. Er hätte pausenlos 12 Tage, und bei 8 Stunden täglich - einen ganzen Monat zählen müssen, um bis zur Million zu kommen.

Hundert Nüsse

Viele beginnen sofort mit dem Suchen und Erproben aller möglichen Kombinationen, doch ihr Mühen führt zu nichts. Dabei genügt es, ein wenig nachzudenken, um die Nutzlosigkeit aller Versuche zu erkennen. Die Aufgabe ist nicht lösbar.

Wenn die Zahl 100 in 25 ungerade Summanden aufteilbar wäre, ergäbe sich daraus, daß es eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen in der Summe 100 gibt — eine gerade Zahl. Das ist natürlich unmöglich.

In der Tat: Wir haben 12 Paar ungerade Zahlen und dazu noch eine ungerade, jedes Paar ungerade Zahlen ergibt in der Summe eine gerade — die Summierung von 12 geraden Zahlen muß eine gerade Zahl ergeben. Fügen wir jedoch noch eine ungerade Zahl hinzu, erhalten wir ein ungerades Resultat. Die Zahl 100 kann man niemals aus solchen Summanden zusammenfügen.

Wie teilen?

Die meisten, die an dieser Aufgabe knobeln, antworten, daß derjenige, der 200 g hineinschüttete, 20 Kopeken und der andere, welcher 300 g hinzugab, 30 Kopeken bekommen soll. Diese Aufteilung ist völlig unbegründet.

Man muß so herangehen: 50 Kopeken wurden für den Anteil eines Essers bezahlt. Da es drei Esser waren, entspricht der Wert der gesamten Grütze (500 g) 1 Rubel 50 Kopeken. Jener, welcher 200 g beisteuerte, brachte in Geld ausgedrückt 60 Kopeken ein (weil 100 g 150 : 5 = 30 Kopeken kosten). Für 50 Kopeken hat er gegessen, also hat er noch 60 — 50 = 10 Kopeken zu bekommen.

Der 300 g zur Grütze gab (in Geld ausgedrückt 90 Kopeken), hat noch 90 — 50 = = 40 Kopeken zu bekommen.

Somit erhält von den 50 Kopeken der eine 10, der andere 40.

Aufteilen von Äpfeln

Neun Äpfel zu gleichen Teilen unter 12 Pioniere aufzuteilen, ohne dabei einen Apfel in mehr als vier Teile zu schneiden, ist durchaus möglich. Man muß so herangehen:

Sechs Äpfel werden jeder in 2 Hälften geteilt, wir erhalten 12 Hälften. Jeder der restlichen drei Äpfel wird in vier gleiche Teile geschnitten — wir erhalten 12 Viertelstücke. Nun geben wir jedem Pionier einen halben und einen viertel Apfel: $1/2 + 1/4 = 3/4$.

Jeder Pionier erhält 3/4 eines Apfels, was auch gefordert war, denn $9 : 12 = 3/4$.

Analog kann man auch sieben Äpfel unter 12 Pioniere so aufteilen, daß alle einen gleichen Anteil bekommen und daß kein Apfel in mehr als vier Teile zerschnitten wird. In diesem Falle muß jeder 7/12 eines Apfels erhalten. Wir wissen, daß $7/12 = 3/4 + 4/12 = 1/4 + 1/3$ sind.

Deshalb teilen wir drei Äpfel in jeweils vier Teile; die restlichen vier Äpfel in je drei Teile. Wir erhalten 12 Viertelstücke und 12 Drittelstücke.

Folglich kann jedem ein Viertel und ein Drittel gegeben werden, oder anders ausgedrückt 7/12.

Wie die Äpfel teilen?

Die Äpfel wurden folgendermaßen verteilt: Drei Äpfel wurden halbiert; es entstanden sechs Hälften, die an die Kinder verteilt wurden. Die übrigen zwei Äpfel wurden jeder in drei Teile zerschnitten. Es entstanden sechs Drittelstücke, die ebenfalls an die Kinder verteilt wurden.

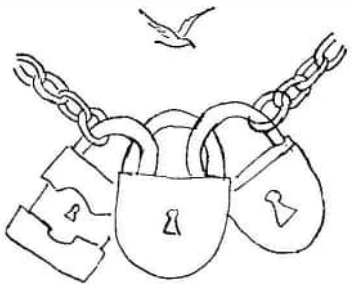
Jedem Jungen wurde also ein halber und ein drittel Apfel gegeben, d. h., alle Jungens erhielten gleich viel.

Wie ihr seht, wurde kein Apfel in mehr als drei Teile zerschnitten.

Ein Boot für drei

Die Schlösser müssen eins ins andere verhakt sein, wie es auf Abb. 220 dargestellt ist. Es ist leicht zu erkennen, daß diese Kette aus drei Schlössern jeder Eigentümer öffnen und mit seinem Schlüssel wieder schließen kann.

Abbildung 220



In Erwartung der Straßenbahn

Der jüngste Bruder, der entgegengesetzt der Fahrtrichtung ging, sah die entgegenkommende Bahn und sprang auf. Als die Bahn die Stelle erreichte, wo der älteste Bruder wartete, stieg dieser zu. Ein wenig später holte die Bahn den in Fahrtrichtung vorausgegangenen mittleren Bruder ein und nahm ihn auf. Alle drei Brüder befanden sich in der gleichen Bahn und kamen natürlich zur gleichen Zeit nach Hause.

Doch am vernünftigsten verhielt sich der älteste Bruder: Indem er die Bahn an der Haltestelle ruhig erwartete, war er weniger ermüdet als die anderen.



Aufgaben aus „Gullivers Reisen“

Die erstaunlichsten Seiten in „Gullivers Reisen“ sind zweifellos jene, wo seine ungewöhnlichen Abenteuer im Lande der winzigen Liliputaner und im Lande der Riesen beschrieben werden. Im Lande Liliput waren die Ausmaße — Höhe, Breite, Dicke — aller Personen, Tiere, Gewächse und Gegenstände 12fach kleiner als bei uns. Im Lande der Riesen dagegen, 12mal größer. Warum der Autor der „Reisen“ ausgerechnet die Zahl 12 wählte, ist leicht zu verstehen, wenn man sich daran erinnert, daß dies eben das Verhältnis von Fuß zu Zoll im englischen Maßsystem ist (der Engländer Swift ist der Autor der „Reisen“). 12fach kleiner oder 12mal größer — das mag als nicht sehr wesentliche Verkleinerung oder Vergrößerung erscheinen. Jedoch der Unterschied in der Natur und den Lebensverhältnissen in diesen Phantasie-Ländern gegenüber denen, an die wir gewöhnt sind, erwies sich als verblüffend. Oftmals sind diese Unterschiede so unerwartet und verwunderlich, daß es Stoff gibt für Denkaufgaben. Zehn derartige Rätsel möchten wir dem Leser hier auch aufgeben.

Die Tiere im Lande Liliput

„Anderthalbtausend der größten Pferde waren herbeigebracht worden, um mich in die Hauptstadt zu transportieren“, berichtet Gulliver über das Liliputaner-Land.

Meint ihr nicht, daß 1500 Pferde übermäßig viel sind für diesen Zweck. Selbst, wenn man die Größenunterschiede zwischen Gulliver und den Liliputaner-Pferden berücksichtigt.

Über die Kühe, Stiere und Schafe der Liliputaner erzählt Gulliver die nicht weniger erstaunliche Geschichte, daß er sie, als er abreiste, „einfach in seine Taschen steckte“.

Ist das möglich?

Hartes Lager

Darüber, wie die Liliputaner ihrem Riesen-Gast ein Bett bereiten, lesen wir in „Gullivers Reisen“ folgendes: „Sechshundert Matratzen normaler liliputanischer Größe wurden auf Fuhrwerken in mein Haus

gebracht, wo Schneider sich an die Arbeit machten. Aus einhundertfünfzig dieser Matratzen, die zusammengenäht wurden, entstand eine, auf die ich mich nach Länge und Breite richtig hinlegen konnte. Vier solcher Matratzen legten sie übereinander. Doch selbst auf diesem Bett schlief ich so hart, wie auf dem Steinboden.“

Wieso war es Gulliver denn so hart auf diesem Bett? Und ist die hier angestellte Berechnung richtig?

Gullivers Boot

Gulliver verließ das Land der Liliputaner mit einem Boot, das zufällig an das Ufer kam. Dieses Boot erschien den Liliputanern als ein Ungeheuer von Schiff, das die Ausmaße der größten Schiffe ihrer Flotte übertraf.

Könnt ihr nicht annähernd errechnen, wieviel liliputanische Tonnen Wasserverdrängung[1] dieses Boot hatte, wenn man zugrunde legt, daß es eine Fracht von 300 kg aufnehmen konnte.

Faß und Eimer der Liliputaner

„Nachdem ich gegessen hatte“, erzählt Gulliver weiter, „machte ich mit Zeichen deutlich, daß ich trinken möchte. Die Liliputaner hielten mit großem Geschick an Seilen ein Weinfaß größten Ausmaßes bis zur Höhe meines Körpers, rollten es bis zu meiner Hand und brachen den Deckel heraus. Ich trank alles in einem Zug. Sie rollten mir ein weiteres Faß zu, ich leerte es mit einem Schluck wie auch das erste und bat um mehr. Doch sie hatten nicht mehr.“

Abbildung 221



An anderer Stelle erzählt Gulliver über die Eimer der Liliputaner, daß sie „nicht größer als ein großer Fingerhut“ sind.

Könnte es solche winzigen Fässer und Eimer in einem Lande geben, wo alle Gegenstände nur 12mal kleiner als normale sind?

Verpflegungssatz und Mittagessen Gullivers

Die Liliputaner, so lesen wir in den „Reisen“, legten für Gulliver folgende Norm von Nahrungsmitteln fest:

---

[1] Die Wasserverdrängung eines Schiffes entspricht der maximalen Last, die es tragen kann (einschließlich des Eigengewichtes des Schiffes). Eine Tonne ist gleich 1000 kg.

Abbildung 222



Abbildung 223



„Er erhält täglich eine Ration von Speisen und Getränken, die ausreicht für 1728 Liliputaner.“

„Dreihundert Köche“, berichtet Gulliver an anderer Stelle, „bereiteten mein Essen. Rings um mein Haus waren Zelte aufgestellt, wo die Zubereitung erfolgte, und die Köche mit ihren Familien wohnten. Wenn die Mittagszeit herankam, nahm ich zwanzig Diener in die Hand und stellte sie auf den Tisch. Etwa weitere einhundert bedienten mich vom Fußboden her. Die einen brachten das Essen, die anderen trugen Fässer mit Wein und anderen Getränken auf Stangen, die sie über die Schultern gelegt hatten. Die oben stehenden zogen mit Stricken und Flaschenzügen alles nacheinander auf den Tisch.“

Auf welcher Berechnungsgrundlage legten die Liliputaner einen solch gewaltigen Verflegungssatz fest? Und wozu war so viel Bedienungspersonal zur Versorgung eines einzigen Menschen nötig? Er war doch nur ein dutzendmal größer als die Liliputaner. Steht die Ration und so ein Appetit Gullivers im richtigen Verhältnis zur Größe der Liliputaner?

Dreihundert Schneider

„Mir waren 300 Liliputaner-Schneider zugewiesen mit dem Auftrag, einen Anzug nach der Mode dieses Landes zu nähen.“

Ist denn wirklich eine solche Armee von Schneidern erforderlich, um einen Anzug für einen Menschen zu nähen, der alles in allem nur 12mal größer ist als die Liliputaner?

Riesige Äpfel und Nüsse

„Eines Tages“, so lesen wir in „Gullivers Reisen zu den Riesen“, „ging der Hofnarr mit mir in den Garten. Einen Augenblick abwartend, da ich mich gerade unter einem Baum befand, erfaßte er einen Ast und schüttelte ihn über meinem Kopf. Ein Hagel von Äpfeln, groß wie ein Faß, fiel dröhnend auf die Erde. Ein Apfel landete auf meinem Rücken und warf mich um...“

Ein andermal „warf irgendein boshafter Schuljunge mit einer Nuß nach meinem Kopf und verfehlte mich nur knapp. Die Nuß war mit einer solchen Kraft geworfen, daß sie mir unweigerlich den Schädel zermalmt hätte, denn sie war nur wenig kleiner als unsere kleinen Kürbisse.“

Wieviel könnten wohl eurer Meinung nach so ein Apfel und eine Nuß der Riesen wiegen?

Der Ring der Riesen

Unter den Gegenständen, die Gulliver aus dem Land der Riesen mitgenommen hatte, war, wie er sagt, „ein goldener Ring, den mir die Königin selbst schenkte, indem sie ihn huldvoll vom Finger zog und mir über den Kopf stülpte und wie eine Kette um den Hals legte“.

Ist es möglich, daß ein Ring vom kleinen Finger, wenn auch einer Riesin, für Gulliver als Halsschmuck paßte? Und wieviel hätte so ein Ring etwa gewogen?

Die Bücher der Riesen

Über die Bücher im Lande der Riesen teilt Gulliver solche Einzelheiten mit:

„Mir war es erlaubt, aus der Bibliothek Bücher zum Lesen zu nehmen. Doch damit ich sie lesen konnte, mußte eine ganze Vorrichtung angefertigt werden. Der Tischler baute für mich eine hölzerne Leiter, die man fortbewegen konnte. Sie war 25 Fuß hoch, und die Länge jeder Stufe betrug 50 Fuß. Wenn ich den Wunsch äußerte zu lesen, stellte man meine Leiter etwa 10 Fuß von der Wand entfernt auf, die Stufen der Wand zugekehrt. Das aufgeschlagene Buch wurde auf den Boden gestellt und gegen die Wand gelehnt. Ich kletterte auf die oberste Stufe und begann die oberste Zeile zu lesen, von links nach rechts und wieder zurück acht oder zehn Schritte gehend, je nach Länge der Zeilen. Je nachdem, wie ich mit dem Lesen vorankam und die Zeilen immer tiefer unter dem Niveau meiner Augen lagen, stieg ich allmählich auf die zweite Stufe, die dritte usw. Nachdem ich die Seite zu Ende gelesen hatte, stieg ich wieder nach oben und begann mit der neuen Seite auf die gleiche Weise. Die Seiten blätterte ich mit beiden Händen um. Das war nicht schwer, da das Papier, auf dem man bei ihnen Bücher druckt, nicht stärker als unsere Pappe ist, die größten ihrer Folianten sind nicht mehr als 18—20 Fuß lang.“

Ist das alles maßstabgerecht?



Die Hemdkragen der Riesen

Zum Schluß noch eine Angabe dieser Art, die nicht direkt aus der Beschreibung von Gullivers Abenteuern entnommen ist.

Ihr wußtet vielleicht nicht, daß die Kragengröße nichts anderes ist als der Halsumfang in Zentimetern. Wenn euer Halsumfang 38 cm beträgt, so paßt euch nur ein Kragen der Größe 38. Ein Kragen, der eine Nummer kleiner ist, wird zu eng, eine Nummer größer aber — zu weit. Der Halsumfang eines Erwachsenen ist durchschnittlich etwa 40 cm.

Hätte Gulliver den Wunsch gehabt, in London für die Bewohner des Landes der Riesen eine Lieferung Hemdkragen zu bestellen, welche Nummer hätte er wohl bestellen müssen?



Antworten

Die Tiere im Lande Liliput

In der Antwort zum „Verpflegungssatz und Mittagessen Gullivers“ (S. 276) ist ausgerechnet, daß Gulliver nach Körpervolumen 1728mal so groß wie ein Liliputaner war. Verständlicherweise war er auch um so viele Male schwerer. Seinen Körper fortzubewegen, war genauso schwierig wie der Transport von 1728 Liliputanern. Daraus wird verständlich, weshalb für das Fuhrwerk, auf dem Gulliver befördert wurde, eine solche Menge Liliputanerpferde eingespannt werden mußte.

Abbildung 224



Die Tiere im Lande Liliput waren auch 1728mal kleiner im Volumen und somit auch um sovielmal leichter als unsere.

Eine unserer Kühe ist eineinhalb Meter hoch und wiegt, sagen wir, 400 kg. Eine Kuh der Liliputaner war 12 cm hoch und wog $\frac{400}{1728}$ kg, also weniger als $\frac{1}{4}$ kg. Es ist begreiflich, daß man so eine kleine Kuh, wenn man will, in der Jackentasche unterbringen kann.

„Die größten ihrer Pferde und Stiere“, berichtet völlig wahrheitsgemäß Gulliver, „waren nicht höher als 4—5 Zoll, die Schafe etwa 1 1/2 Zoll, die Gänse — so groß wie unsere Spatzen usw. bis zu den kleinsten Tieren. Ihre Kleintiere waren für mein Auge kaum wahrnehmbar. Ich sah, wie ein Koch eine Lerche von der Größe unserer gewöhnlichen Fliege, wenn nicht noch kleiner, rupfte. Ein andermal fädelte ein junges Mädchen einen für mich nicht sichtbaren Faden in das Öhr einer unsichtbaren Nadel.“

Hartes Lager

Die Berechnung ist völlig in Ordnung. Wenn die Matratze der Liliputaner 12mal kürzer und natürlich auch 12mal schmaler ist als eine normale Matratze, so war ihre Oberfläche um 12·12 kleiner als die Oberfläche unserer Matratzen. Um sich darauf



zu legen, brauchte Gulliver also 144 (rund gerechnet 150) Liliputaner-Matratzen. Doch so eine Matratze war sehr dünn — um das 12fache dünner als unsere. Jetzt wird klar, daß selbst vier Schichten dieser Matratzen kein ausreichend weiches Lager boten, war es doch dreimal dünner als unsere Matratze üblicherweise.

Gullivers Boot

Aus der Beschreibung ist bekannt, daß Gullivers Boot 300 kg zu tragen vermochte. Das ist eine Wasserverdrängung von etwa 1/3 Tonnen. Eine Tonne — ist das Gewicht eines Kubikmeters Wasser, d. h., das Boot verdrängte 1/3 m^3. Doch alle linearen Maße sind 12mal kleiner als unsere, die Kubikmaße demzufolge — 1728mal kleiner. Man kann sich leicht begreiflich machen, daß 1/3 unseres Kubikmeters etwa 575 Kubikmeter der Liliputaner ausmachte und das Boot Gullivers eine Wasserverdrängung von 575 Tonnen oder so in etwa hatte, denn die Ausgangsgröße von 300 kg haben wir wirklich angenommen.

Heutzutage, da Zehntausendtonner die Ozeane durchqueren, beeindruckt ein Schiff mit solchen Ausmaßen niemand. Doch man muß berücksichtigen, daß zu der Zeit, als „Gullivers Reisen" geschrieben wurden (Beginn des 18. Jahrhunderts), Schiffe von 500—600 Tonnen noch selten waren.

Faß und Eimer der Liliputaner

Die Fässer und Eimer der Liliputaner mußten, wenn sie die gleiche Form wie unsere hatten, nicht nur 12mal kleiner in der Höhe, sondern auch in Breite und Länge sein und folglich dem Inhalt nach $12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$mal kleiner sein. Das bedeutet, wenn wir auf einen Eimer von uns 60 Gläser rechnen, können wir leicht ermitteln, daß ein Eimer der Liliputaner insgesamt nur $\frac{60}{1728}$ oder rund gerechnet 1/30 Glas faßte. Das ist nicht viel mehr als ein Teelöffel und übertrifft in der Tat das Fassungsvermögen eines großen Fingerhutes nicht.

Wenn das Fassungsvermögen eines Liliputanereimers einem Teelöffel gleich ist, so übertraf der Inhalt eines Weinfassers, wenn es ein 10-Eimer-Faß war, nicht ein halbes Wasserglas. Was ist da schon verwunderlich, daß Gulliver selbst mit 2 Fässern seinen Durst nicht stillen konnte.

Verpflegungssatz und Mittagessen Gullivers

Die Kalkulation ist völlig exakt durchgeführt. Man darf nicht vergessen, daß die Liliputaner ein genaues, wenn auch verkleinertes Ebenbild des Menschen mit normalen Proportionen der Körperteile darstellten. Deshalb waren sie nicht nur zwölfmal kleiner, sondern auch zwölfmal schmaler, zwölfmal dünner als Gulliver. Ihr Körpervolumen war daher nicht nur 12mal, sondern $12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$mal kleiner. Und natürlich ist zum Lebensunterhalt Gullivers entsprechend mehr Nahrung erforderlich. Deshalb errechneten die Liliputaner, daß Gulliver eine Ration benötigt, die zur Ernährung von 1728 Liliputanern ausgereicht hätte.

Nun ist klar, weshalb auch soviel Köche notwendig waren. Um 1728 Mittagessen

zu bereiten, braucht man nicht weniger als 300 Köche, ausgehend davon, daß ein Liliputaner-Koch ein halbes Dutzend Liliputaner-Essen kochen kann. Eine entsprechend größere Personenzahl wurde natürlich auch benötigt, um diese Last auf Gullivers Tisch zu hieven, der, wie man leicht ausrechnen kann, die Höhe eines 3-Etagenhauses der Liliputaner hatte.

Dreihundert Schneider

Die Oberfläche von Gullivers Körper war nicht 12mal so groß wie die Körperoberfläche der Liliputaner, sondern 12 · 12, also 144mal. Das wird deutlich, wenn wir uns vorstellen, daß jedem Quadratzoll der Körperoberfläche eines Liliputaners ein Quadratfuß der Körperoberfläche Gullivers entspricht. Ein Quadratfuß umfaßt 144 Quadratzoll. Wenn das so ist, dann mußte für einen Anzug Gullivers 144mal mehr Tuch verwendet werden als für einen Liliputaneranzug und dementsprechend mehr Arbeitszeit. Wenn ein Schneider einen Anzug in zwei Tagen nähen kann — so bedurfte es, um an einem Tag 144 Anzüge (oder einen für Gulliver) zu schneidern, ungefähr 300 Schneider.

Riesige Äpfel und Nüsse

Es ist leicht zu errechnen, daß ein Apfel, der bei uns etwa 100 g wiegt, im Lande der Riesen, entsprechend seinem Umfang 1728mal mehr wiegt, also 173 kg.[1] Fällt solch ein Apfel vom Baum und einem Menschen auf den Rücken, so bleibt er kaum am Leben. Gulliver ist gut davongekommen.

Abbildung 225



Eine Nuß des Riesen-Landes muß 3—4 kg gewogen haben, wenn man voraussetzt, daß eine Nuß bei uns etwa 2 g wiegt. Solch eine Riesennuß könnte einen Durchmes-

[1] Ein Antonowka-Apfel von einem halben Kilogramm Gewicht (solche Äpfel gibt es) müßte im Lande der Riesen 864 kg wiegen!

ser von 10 cm haben. Ein 3 kg schwerer Gegenstand mit der Geschwindigkeit einer Nuß geworfen, würde unzweifelhaft den Kopf eines Menschen normaler Größe zerschmettern. Und wenn Gulliver erzählt, daß gewöhnlicher Hagel im Lande der Riesen ihn augenblicklich zur Erde geworfen hat, und die Hagelkörner ihm arg den Rükken, die Seiten und den ganzen Körper schlugen wie große Holzkugeln, mit denen man Krockett spielt, so ist das völlig wahrheitsgetreu, weil jedes Hagelkorn im Lande der Riesen nicht weniger als 1 kg wiegen muß.

Der Ring der Riesen

Der Durchmesser eines menschlichen kleinen Fingers beträgt etwa 1 1/2 cm. Multipliziert man mit zwölf, haben wir als Durchmesser eines Riesen-Ringes 1 1/2·12-=18 cm. Ein Ring mit dieser Öffnung hat einen Umfang von 18·3 1/7 = rund 56 cm.

Das reicht aus, um einen Kopf normaler Größe hindurchzustecken (wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man mit einer Schnur den Schädelumfang an der breitesten Stelle mißt).

Abbildung 226



Was das Gewicht eines derartigen Ringes betrifft, so muß diese Art Ring des Landes der Riesen, wenn ein gewöhnlicher Ring, sagen wir, 5 g wiegt, 8 1/2 kg schwer sein!

Die Bücher der Riesen

Geht man von den Maßen eines modernen Buches normalen Formats aus (25 cm hoch und 12 cm breit), so erscheint das von Gulliver beschriebene etwas übertrieben groß. Um ein Buch von weniger als 3 m Höhe und 1 1/2 m Breite zu lesen, braucht man keine Leiter und muß nicht 8—10 Schritte nach links und rechts gehen. Doch zu Lebzeiten Swifts, zu Beginn des 18. Jahrhunderts, war das übliche Format von Büchern (Folianten) wesentlich größer als jetzt. Der Foliant „Arithmetik“ von Magnizki, der unter Peter I. erschien, war etwa 30 cm hoch und 20 cm breit. 12fach vergrößert, erhalten wir für die Bücher der Riesen beeindruckendere Ausmaße: 360 cm (fast 4 m) hoch und 240 cm breit (2,4 m). Ein 4 m hohes Buch ohne Stehleiter zu lesen ist nicht möglich. Allerdings ist das noch kein richtiges Foliant, der die Ausmaße eines großen Zeitungsblattes erreicht.

Aber auch ein derartig bescheidenes Foliant müßte bei den Riesen 1728mal schwe-

rer sein als bei uns, das sind etwa 3 Tonnen. Rechnet man, daß er 500 Seiten umfaßt, ergibt sich für jede Seite des Riesen-Buches ein Gewicht von rund 6 kg. Eine Last, die für die Hand wirklich keine Kleinigkeit ist.

Abbildung 227



Die Hemdkragen der Riesen

Der Halsumfang der Riesen übertraf den Halsumfang eines normalen Menschen um sovielmal, wievielmal sein Durchmesser größer war, das ist 12mal. Und wenn ein normaler Mensch Kragengröße 40 braucht, so müßte der Riese $40 \cdot 12 = 480$ haben.

Wir sehen, daß bei Swift die, wie es scheinen mag, so wundersamen Gestalten seiner Fantasie gründlich berechnet sind. Puschkin bemerkte auf einige Vorwürfe der Kritiker des „Eugen Onegin", daß in seinem Roman „die Zeit nach dem Kalender berechnet ist". Mit dem gleichen Recht könnte Swift über „Gulliver" sagen, daß alle seine Figuren gewissenhaft nach den Regeln der Geometrie[1] berechnet sind.

---

[1] Doch nicht nach den Regeln der Mechanik, in dieser Hinsicht kann man Swift wesentliche Vorwürfe machen (siehe meine „Unterhaltsame Mechanik").



Geschichten von Riesenzahlen

Die Belohnung

Hört, was nach der Überlieferung vor vielen Jahrhunderten im alten Rom vor sich ging.[1]

I. Der Heerführer Terentius führte auf Befehl des Imperators einen siegreichen Feldzug und kehrte mit Kriegsbeute nach Rom zurück. Als er in der Hauptstadt eintraf, bat er um Audienz beim Kaiser.

Der Kaiser empfing den Feldherrn gütig, dankte ihm herzlich für seine Kriegsdienste gegenüber dem Reich und versprach als Belohnung einen hohen Posten im Senat.

Doch nicht das wollte Terentius. Er entgegnete:

„Viele Siege habe ich erfochten, um Deine Macht zu vergrößern, Herrscher, und Deinen Namen mit Ruhm zu krönen. Ich fürchtete den Tod nicht, und hätte ich nicht eines, sondern viele Leben, alle würde ich sie Dir opfern. Doch ich bin des Kämpfens müde. Die Jugend ist dahin. Das Blut fließt langsamer in meinen Adern. Es ist an der Zeit, mich im Hause meiner Vorfahren auszuruhen und mich an den Freuden des häuslichen Lebens zu erquicken."

„Was wünschst Du von mir, Terentius?" fragte der Kaiser.

„Schenke mir mit Nachsicht Gehör, Herrscher! In den langen Kriegsjahren, tagaus, tagein mit dem Schwert in der Hand, schaffte ich es nicht, mich finanziell sicher zu stellen. Ich bin arm, Herrscher..."

„Fahre fort, tapferer Terentius".

„Willst Du Deinem bescheidenen Diener Belohnung schenken", fuhr der ermunterte Heerführer fort, „so möge Deine Freigebigkeit mir helfen, friedlich in Wohlstand am häuslichen Herde weiterzuleben. Ich suche keine Ehren und keinen hohen Posten im allmächtigen Senat. Ich möchte mich zurückziehen von der Macht und dem öffentlichen Leben, um mich in Ruhe zu erholen. Herrscher, gib mir Geld für einen gesicherten Lebensabend."

Der Imperator — so besagt die Überlieferung — zeichnete sich nicht durch besondere Freigebigkeit

---

[1] Die Erzählung ist in freier Übertragung einer alten lateinischen Handschrift entnommen, die sich in einer Privatbibliothek in England befindet.

aus. Er liebte es, Geld für sich anzuhäufen, und gab es ungern für andere aus. Die Bitte des Feldherrn veranlaßte ihn nachzudenken.

„Welche Summe, Terentius, würdest Du als ausreichend für Dich ansehen?“ fragte er.

„Eine Million Dinar, Herrscher.“

Erneut überlegte der Imperator. Der Feldherr wartete, den Kopf gesenkt.

Schließlich verkündete der Kaiser:

„Heldenhafter Terentius, Du bist ein großer Kämpfer und Deine ruhmvollen Siege verdienen eine großzügige Belohnung. Ich werde Dir Reichtum geben. Morgen, in der Mittagszeit erfährst Du meine Entscheidung.“

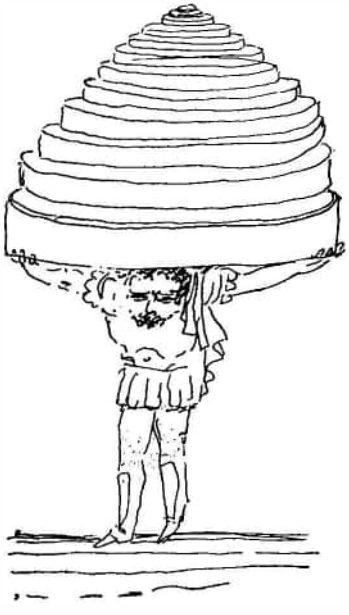
Terentius verbeugte sich und ging.

II. Am folgenden Tage zur festgelegten Stunde erschien der Feldherr im Palast des Imperators.

„Sei gegrüßt, kühner Terentius!“ sagte der Kaiser. Terentius neigte ergeben das Haupt.

„Ich bin gekommen, Herrscher, um Deine Entscheidung zu hören. Du hast mir wohlwollend eine Belohnung versprochen.“

Abbildung 228



Der Kaiser antwortete:

„Ich möchte nicht, daß ein so edler Krieger wie Du für seine Heldentaten einen kärglichen Lohn erhält. Höre mich an. In meiner Staatskasse liegen 10 Millionen Kupfer-Asse.[1] Jetzt achte auf meine Worte. Du gehst in die Schatzkammer, nimmst eine Münze in die Hand, kehrst hierher zurück und legst sie zu meinen Füßen. Am nächsten Tag gehst Du wieder dorthin, nimmst eine Münze im Wert von 2 Assen und legst sie hier neben die erste. Am dritten Tag bringst Du eine Münze im Wert von 4 Assen, am vierten — im Wert von 8 Assen, am fünften 16 und so weiter, ständig den Wert der Münze verdoppelnd. Ich befehle, täglich für Dich Münzen des entsprechenden Wertes zu fertigen. Und solange Deine Kräfte reichen, die Münzen zu tragen, wirst Du sie aus meiner Kasse herbeiholen. Niemand darf Dir dabei helfen. Du darfst nur Deine eigene Kraft einsetzen, und wenn Du bemerkst, daß Du keine Münze mehr zu tragen vermagst, dann höre auf. Unsere Vereinbarung ist damit beendet. Doch alle Münzen, die Du wegzu-

[1] As, Münze mit einem Wert von $\frac{1}{10}$ eines Dinars

tragen vermochtest, gehören Dir und bleiben Dir als Belohnung."

Begierig nahm Terentius jedes Wort des Kaisers auf. Er träumte von einer ungeheuren Menge Münzen, eine größer als die andere, die er aus der Schatzkammer heraustragen wird.

„Deine Gnade stellt mich zufrieden, Herrscher!" antwortete er mit frohem Lächeln. „Deine Belohnung ist wahrhaftig freigebig!"

III. Nun begannen die täglichen Besuche Terentius' in der Schatzkammer. Sie war nicht weit vom Audienzsaal des Kaisers entfernt. Und die ersten Gänge mit den Münzen bereiteten Terentius keine Mühe.

Am ersten Tag trug er aus der Kasse nur 1 As weg. Das ist eine kleine Münze, 21 mm im Durchmesser und 5 g schwer.[1]

Leicht waren auch die zweiten, dritten, vierten, fünften und sechsten Gänge, als der Feldherr Münzen des doppelten, 4fachen, 8fachen, 16fachen und 32fachen Gewichtes trug.

Die siebente Münze wog nach unseren Maßen 320 g und hatte einen Durchmesser von 8 1/2 cm (genauer 84 mm).[2]

Am achten Tag mußte Terentius aus der Kasse eine Münze heraustragen, die 128 Einzelmünzen entsprach. Sie wog 640 g und war etwa 10 1/2 cm breit.

Am neunten Tag brachte Terentius in den Saal des Kaisers eine Münze, im Wert von 256 Einzelmünzen. Sie war 13 cm breit und wog mehr als 1 1/4 kg.

Am zwölften Tage erreichte die Münze einen Durchmesser von fast 27 cm und wog 10 1/4 kg.

Der Kaiser, der bisher sehr leutselig den Feldherrn betrachtet hatte, verbarg nun seinen Triumph nicht mehr. Er sah, daß bereits zwölf Gänge gemacht, aber aus der Kasse insgesamt nur etwas über 2000 Kupfermünzen weggetragen worden waren.

Am 13. Tag brachte der tapfere Terentius eine Münze, die 4096 Einzelmünzen gleich kam. Sie war etwa 34 cm breit und wog 20 1/2 kg.

Am 14. Tag schleppte Terentius eine Münze — 41 kg schwer und etwa 42 cm breit.

---

[1] Das Gewicht einer 5-Kopeken-Münze heutiger Prägung

[2] Ist eine Münze 64mal größer als eine übliche, so ist sie vierfach breiter und dicker, weil $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ ist. Das muß man beachten bei der weiteren Berechnung der Münzen, von denen in der Erzählung die Rede ist.

„Bist Du nicht erschöpft, mein tapferer Terentius?“ fragte ihn der Kaiser, ein Lächeln unterdrückend.
„Nein, mein Herrscher“, antwortete der Feldherr finster, den Schweiß von der Stirn wischend.

Es kam der 15. Tag. Schwer war diesmal die Last für Terentius. Langsam schleppte er sich zum Kaiser hin, eine gewaltige Münze tragend, zusammengesetzt aus 16 384 einzelnen Münzen. Sie erreichte 53 cm Breite und wog 80 kg — das Gewicht eines erwachsenen Kriegers.

Am 16. Tag wankte der Heerführer unter der Last, die auf seinem Rücken lag. Es war eine Münze, die 32 768 Einzelmünzen entsprach und 164 kg wog. Der Durchmesser erreichte 67 cm.

Der Heerführer war entkräftet und keuchte. Der Kaiser lächelte...

Als Terentius am folgenden Tag in dem Empfangssaal des Kaisers erschien, wurde er mit lautem Gelächter empfangen. Er konnte die Last schon nicht mehr mit den Armen tragen und rollte sie vor sich her. Die Münze hatte einen Querschnitt von 84 cm und wog 328 kg. Sie entsprach dem Gewicht von 65 536 Einzelmünzen.

Der 18. war Terentius' letzter Tag der Bereicherung. An diesem Tag endeten seine Besuche in der Kasse und seine Wanderungen mit der Last zum Saal des Kaisers. Er mußte diesmal eine Münze schleppen, die 131 072 Einzelmünzen gleichkam. Sie maß über einen Meter im Querschnitt und wog 655 kg. Seinen Speer als Hebel nutzend, rollte Terentius sie unter Aufbietung aller Kräfte mit Mühe in den Saal. Mit Getöse fiel die Riesenmünze dem Kaiser zu Füßen.

Terentius war völlig erschöpft.

„Ich kann nicht mehr, es ist genug“, hauchte er.

Der Kaiser unterdrückte mit Mühe ein Gelächter der Zufriedenheit, als er sich vom vollen Erfolg seiner List überzeugte. Er befahl dem Schatzmeister auszurechnen, wieviel Asse Terentius insgesamt in den Saal getragen hatte.

Der Schatzmeister führte das Geheiß aus und sagte:

„Herrscher, dank Deiner Freigebigkeit erhielt der siegreiche Kriegsherr Terentius eine Belohnung von 262 143 Assen.“

Damit gab der geizige Kaiser dem Heerführer etwa den vierzigsten Teil der Million Dinar, die Terentius von ihm erbeten hatte.

* * *

Prüfen wir die Rechnung des Schatzmeisters und zugleich das Gewicht der Münzen. Terentius trug folgende Münzen weg:

am	1.	Tag	1	Münze mit einem Gewicht von	5g
am	2.	Tag	2	Münzen	10"
am	3.	Tag	4	"	20"
am	4.	Tag	8	"	40"
am	5.	Tag	16	"	80"
am	6.	Tag	32	"	160"
am	7.	Tag	64	"	320"
am	8.	Tag	128	"	640"
am	9.	Tag	256	"	1 kg 280"
am	10.	Tag	512	"	2 " 560"
am	11.	Tag	1 024	"	5 " 120"
am	12.	Tag	2 048	"	10 " 240"
am	13.	Tag	4 096	"	20 " 480"
am	14.	Tag	8 192	"	40 " 960"
am	15.	Tag	16 384	"	81 " 920"
am	16.	Tag	32 768	"	163 " 840"
am	17.	Tag	65 536	"	327 " 680"
am	18.	Tag	131 072	"	655 " 360"

Ich erkläre euch, wie einfach man die Summe aller dieser Reihen bilden kann: Für die zweite Spalte ist sie in Übereinstimmung mit den Regeln[1] gleich 262 143. Terentius hatte den Kaiser um eine Million Dinar gebeten, das sind 10 Millionen Asse. Also erhielt er 10 000 000 : 262 143 = 38mal weniger als die erbetene Summe.

Die Legende vom Schachbrett

I. Schach ist eines der ältesten Spiele. Es existiert bereits viele Jahrhunderte, und so ist es nicht verwunderlich, daß mit ihm Legenden verbunden sind, deren Wahrheitsgehalt infolge der verstrichenen Zeit nicht mehr überprüft werden kann. Eine solche Legende will ich erzählen. Um sie zu verstehen, braucht man überhaupt kein Schachspieler zu sein. Es genügt zu wissen, daß dieses Spiel auf einem Brett gespielt wird, das in 64 (abwechselnd schwarz und weiß) Felder aufgeteilt ist.

---

[1] Jede Zahl dieser Reihe ist gleich allen vorangehenden zusammengenommen plus eins. Wenn es deshalb erforderlich ist, alle Zahlen dieser Reihe zu addieren, zum Beispiel 1 bis 32 768, so fügen wir zur letzten Zahl (32 768) nur die Summe aller vorausgegangenen hinzu, anders gesagt — wir addieren die gleiche Zahl weniger eins (32 768 — 1). Wir erhalten 65 535.

Das Schachspiel wurde in Indien erfunden, und als der indische Kaiser Sheram sich damit vertraut machte, war er begeistert von seiner Scharfsinnigkeit und der Vielfalt der möglichen Situationen. Als er hörte, daß das Spiel von einem seiner Untertanen er-

Abbildung 229



dacht wurde, befahl der Kaiser ihn zu rufen, um ihn persönlich für die gute Idee zu belohnen. Der Erfinder, man nannte ihn Zeta, erschien am Thron des Gebieters. Er war ein bescheiden gekleideter Gelehrter, der die Mittel für seinen Lebensunterhalt von seinen Schülern erhielt.

„Ich wünsche Dich, Zeta, für das ausgezeichnete Spiel, das Du Dir ausgedacht hast, würdig zu belohnen", sprach der Kaiser.

Der Weise verneigte sich.

„Ich bin reich genug, um den kühnsten Deiner Wünsche zu erfüllen", fuhr der Kaiser fort. „Nenne eine Belohnung, die Dich befriedigen kann, und Du erhältst sie".

Zeta schwieg.

„Nur Mut", ermunterte ihn der Kaiser. „Äußere Deinen Wunsch. Ich werde mit nichts geizen, um ihn zu erfüllen".

„Groß ist Deine Güte, Gebieter. Doch gib mir Zeit, die Antwort zu bedenken. Morgen, nach reiflichem Überlegen, teile ich Dir meine Bitte mit."

Als am anderen Tage Zeta erneut vor dem Thron erschien, überraschte er den Kaiser mit der beispiellosen Bescheidenheit seiner Bitte.

„Gebieter", sagte Zeta, „befiehl, mir für das erste Feld des Schachbrettes ein Weizenkorn auszuhändigen."

„Ein einfaches Weizenkorn?" wunderte sich der Kaiser. „Ja, Gebieter. Für das zweite Feld befiehl, zwei Körner zu liefern, für das dritte — vier, für das vierte — acht, für das fünfte — 16, für das sechste — 32 ..."

„Genug, unterbrach ihn der Kaiser gereizt. Du bekommst Deine Körner für alle 64 Felder des Bretts, gemäß Deinem Wunsch, für jedes zweimal soviel wie für das vorhergehende. Doch wisse, daß Deine Bitte meiner Großmut unwürdig ist. Indem Du solche lächerliche Belohnung erbittest, mißachtest Du unehrerbietig meine Gnade. Fürwahr, als Lehrer hättest Du ein besseres Beispiel der Achtung der Güte Deines Herrschers zeigen können. Geh! Meine Diener bringen Dir den Sack mit Weizen."

Zeta lächelte, verließ den Saal und wartete am Tor des Palastes.

II. Während des Mittagsmahls erinnerte sich der Kaiser an den Erfinder des Schachspiels und schickte zu erkunden, ob der unvernünftige Zeta seine klägliche Belohnung schon weggetragen habe.

„Gebieter", war die Antwort, „Dein Befehl wird ausgeführt. Die Hofmathematiker errechnen die Zahl der Körner".

Der Kaiser schaute ärgerlich drein. Er war nicht gewohnt, daß seine Anordnungen so schleppend ausgeführt wurden.

Abends, als er sich zum Schlaf begab, erkundigte er sich noch einmal, ob Zeta mit seinem Sack Weizen schon die Mauer des Palastes verlassen habe.

„Gebieter", antwortete man ihm, „Deine Mathematiker arbeiten unermüdlich und hoffen, bis zum Morgengrauen die Berechnung abzuschließen".

„Warum verzögert man diese Angelegenheit?!"

rief der Kaiser wütend. „Morgen, ehe ich erwache, soll alles bis zum letzten Körnchen Zeta übergeben sein. Ein zweites Mal befehle ich nicht!“

Morgens erstattete man dem Kaiser Bericht, der Oberhofmathematiker bitte darum, eine wichtige Mitteilung anzuhören.

Der Kaiser gebot ihn hereinzuführen.

„Bevor Du über Deine Angelegenheit sprichst“, erklärte Sheram, „wünsche ich zu hören, ob dem Zeta nun endlich seine winzige Belohnung, die er selbst bestimmt hat, übergeben wurde.“

„Ebendeshalb war ich so kühn, vor Dir zu so früher Stunde zu erscheinen“, antwortete der Alte.

„Wir haben gewissenhaft die gesamte Menge Körner errechnet, die Zeta zu haben wünscht. Die Zahl ist derartig groß ...“

„Wie groß sie auch mag“, unterbrach ihn der Kaiser hochmütig, „meine Speicher werden davon nicht leer! Die Belohnung ist versprochen und muß ausgehändigt werden ...“

„Es ist nicht in Deiner Macht, Gebieter, einen derartigen Wunsch zu erfüllen. In all Deinen Speichern ist die Anzahl von Körnern, die Zeta fordert, nicht vorhanden. Sie ist auch nicht in den Kornkammern des gesamten Reiches. Diese Anzahl Körner findet man nicht auf der ganzen weiten Erde. Und wenn Du unbedingt die zugesagte Belohnung aushändigen willst, so gebiete, das Erdreich in Ackerflächen zu verwandeln, gebiete, Meere und Ozeane trocken zu legen, befiehl, das Eis und den Schnee, womit die fernen, nördlichen Gebiete bedeckt sind, abzutauen. Mögen alle ihre Flächen mit Weizen bebaut werden. Und all das, was auf diesen Feldern gedeiht, gebiete, Zeta zu geben. Dann erhält er seine Belohnung.“

Überrascht lauschte der Kaiser den Worten des Alten.

„Nenne mir die ungeheuerliche Zahl“, sagte Sheram nachdenklich.

„Achtzehn Quintillionen vierhundertsechsundvierzig Quadrillionen siebenhundertvierundvierzig Trillionen dreiundsiebzig Billionen siebenhundertneun Millionen fünfhunderteinundfünfzigtausend sechshundertfünfzehn — oh, Gebieter!“

III. Das ist die Legende. Ob das wirklich gewesen ist, was hier erzählt wurde, ist unbekannt. Doch, daß die Belohnung, von der die Sage spricht, sich in eben dieser Zahl ausdrücken müßte, davon könnt ihr euch durch

geduldiges Rechnen selbst überzeugen. Beginnend mit der Eins muß man die Zahlen 1, 2, 4, 8 usw. zusammenzählen. Das Ergebnis der 63. Verdoppelung zeigt, wieviel dem Erfinder für das 64. Feld des Schachbrettes zustand.

Gehen wir so, wie auf Seite 284 erläutert wird, vor, finden wir ohne Mühe die Gesamtsumme der zu erhaltenden Körner, wenn wir die letzte Zahl verdoppeln und die Eins abziehen. Also, die Rechnung läuft nur auf die Multiplikation von 64 Zweien hinaus. $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ — usw. 64mal.

Zur Erleichterung der Berechnungen teilen wir die Multiplikatoren in sechs Gruppen zu 10 Zweien und eine letzte Gruppe mit vier Zweien. Das Produkt der 10 Zweien ist — wie man sich leicht überzeugen kann — gleich 1024, und das der vier Zweien — 16. Also, das gesuchte Ergebnis ist gleich $1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot \ldots \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 16$.

Multiplizieren wir $1024 \cdot 1024$, erhalten wir 1 048 576.

Jetzt bleibt $1\,048\,576 \cdot 1\,048\,576 \cdot 1\,048\,576 \cdot 16$ zu ermitteln, vom Ergebnis Eins abzuziehen, und schon kennen wir die gesuchte Zahl: 18 446 744 073 709 551 615.

Wenn ihr euch einen Begriff von der kollosalen Größe dieser Riesenzahl machen wollt, dann rechnet aus, welche Ausmaße ein Speicher haben müßte, um diese Menge von Körnern aufzunehmen. Es ist bekannt, daß ein Kubikmeter Weizen etwa 15 Millionen Körner umfaßt.

Also müßte die Belohnung für den Schachspielerfinder ein Volumen von etwa 12 000 000 000 000 m^3 oder 12 000 km^3 einnehmen. Bei einer Speicherhöhe von 4 m und einer Breite von 10 m würde sich seine Länge auf 300 000 000 km erstrecken. Das ist doppelt soweit, wie die Entfernung Erde—Sonne!

Der indische Kaiser war außerstande, eine derartige Belohnung zu erteilen. Doch wäre er in der Mathematik beschlagen gewesen, hätte er sich leicht von so einer lästigen Schuld freimachen können. Dazu hätte er Zeta nur zu empfehlen brauchen, sich selbst, Korn für Korn, den gesamten ihm zustehenden Weizen abzuzählen.

In der Tat, würde Zeta diese Zählung Tag und Nacht ausführen müssen. Ein Korn pro Sekunde zählend, hätte er am ersten Tag insgesamt 86 400 Körner abgezählt. Um eine Million Körner zu zählen, wären

nicht weniger als 10 Tage (und Nächte) unaufhaltsamen Zählens notwendig. Für einen Kubikmeter Weizen brauchte er etwa ein halbes Jahr: das würde ihm insgesamt 5 Tschetwert[1]) bringen. Pausenlos, 10 Jahre lang zählend, würde er sich nicht mehr als 100 Tschetwert abzählen. Ihr seht, daß Zeta, selbst wenn er sein ganzes weiteres Leben dem Abzählen widmen würde, nur einen kärglichen Teil der von ihm geforderten Belohnung erhielte.

Rasche Vermehrung

Eine reife Mohnkapsel ist voll von winzigen Körnchen. Aus jedem kann eine vollständige Pflanze wachsen. Wieviel Mohnkapseln ergibt es, wenn bis aufs letzte Körnchen alle aufwachsen? Um das zu ermitteln, muß man die Körnchen in der geschlossenen Kapsel zählen. Eine langweilige Beschäftigung, doch das Ergebnis ist so interessant, daß es sich lohnt, Geduld zu üben und die Zählung bis zu Ende zu führen. Es zeigt sich, daß eine Mohnkapsel (rund gerechnet) 3000 Körner enthält.

Was folgt daraus? Daß, wenn rund um unsere Mohnpflanze genügend Fläche geeigneten Bodens wäre, und jedes herausfallende Körnchen keimen würde, im nächsten Jahr auf dieser Fläche bereits 3000 Mohnpflanzen wüchsen. Ein ganzes Mohnfeld von einer Kapsel.

Sehen wir, was weiter geschieht. Jede der 3000 Stauden bringt nicht weniger als eine Kapsel (öfter mehrere), die 3000 Körnchen enthält. Der Samen jeder Kapsel ergibt keimend 3000 neue Pflanzen, und demzufolge haben wir im zweiten Jahr nicht weniger als

$3000 \cdot 3000 = 9\,000\,000$ Pflanzen.

Man kann errechnen, daß die Zahl der Nachkommen unserer einzelnen Mohnstaude im dritten Jahr schon

$9\,000\,000 \cdot 3000 = 27\,000\,000\,000$ erreicht.

Und im vierten Jahr

$27\,000\,000\,000 \cdot 3000 = 81\,000\,000\,000\,000.$

Im fünften Jahr wird es zu eng für den Mohn auf

[1]) Tschetwert (Viertel) ist ein altes russisches Maß zum Abmessen von Schüttgütern. Ein Tschetwert Weizen sind 163,8 kg.

dem Erdball, denn die Anzahl der Pflanzen beträgt

$$81\,000\,000\,000\,000 \cdot 3000 = 243\,000\,000\,000\,000\,000.$$

Die Oberfläche des Festlandes, das heißt aller Kontinente und Inseln des Erdballs, beläuft sich auf nur 135 Millionen km² — 135 000 000 000 000 m² — etwa 2000mal weniger als Mohnpflanzen gewachsen wären.

Ihr seht, wenn alle Mohnkörnchen anwüchsen, daß die Nachkommenschaft einer Pflanze bereits in fünf Jahren das gesamte Festland des Erdballs mit einem dichten Bewuchs von 2000 Pflanzen je Quadratmeter bedecken könnte. Was für ein zahlenmäßiger Riese sich doch in einem winzigen Mohnkörnchen verbirgt!

Stellten wir eine entsprechende Rechnung, nicht für den Mohn, sondern für eine beliebige andere Pflanze an, die weniger Samen bringt, kämen wir zu dem gleichen Resultat. Nur würden die Nachkommen die ganze Erde nicht in fünf Jahren, sondern in einem etwas längeren Zeitabschnitt bedecken. Nehmen wir die Pusteblume, den Löwenzahn, der jedes Jahr ca. 100 Samenkörnchen [1] bringt.

Würden sie alle anwachsen, hätten wir:

im	1.	Jahr	1 Pflanze
"	2.	"	100 Pflanzen
"	3.	"	10 000 "
"	4.	"	1 000 000 "
"	5.	"	100 000 000 "
"	6.	"	10 000 000 000 "
"	7.	"	1 000 000 000 000 "
"	8.	"	100 000 000 000 000 "
"	9.	"	10 000 000 000 000 000 "

Das sind 70mal mehr, als es Quadratmeter auf dem Festland gibt.

Folglich wären im neunten Jahr die Kontinente der Erde mit Pusteblumen übersät, 70 auf jedem Quadratmeter.

Warum eigentlich begegnen wir in Wirklichkeit einer derartig ungeheuer schnellen Vermehrung nicht? Weil eine große Anzahl der Samen umkommt, ohne Keimlinge zu bilden. Entweder fallen sie nicht auf geeigneten Boden und wachsen überhaupt nicht an, oder sie beginnen anzuwachsen, werden aber von den anderen Pflanzen erdrückt, oder werden von Tieren vertilgt. Würde diese Massenvernichtung von Samen

[1] In einer Löwenzahnblüte wurden sogar bis zu 200 Samenkörnchen gezählt.

und Keimlingen nicht vor sich gehen, bedeckte jede Pflanze in kurzer Zeit unseren Planeten dicht.

Das gilt nicht nur für Pflanzen, sondern ebenso für Tiere. Gäbe es keinen Tod, würde die Nachkommenschaft eines beliebigen Tierpaares früher oder später die ganze Erde überfüllen. Heuschreckenschwärme, die riesige Gebiete dicht bedecken, können eine gewisse Vorstellung davon geben, was wäre, würde der Tod die Vermehrung der Lebewesen nicht eindämmen. In zwei—drei Jahrzehnten wären die Kontinente von undurchdringlichen Wäldern und Steppen verwuchert, wo es von Millionen Tieren wimmeln würde, die sich gegenseitig den Platz streitig machten. Der Ozean wäre von Fischen so angefüllt, daß die Schiffahrt unmöglich wäre. Und die Luft wäre wohl kaum noch durchsichtig wegen der Masse von Vögeln und Insekten.

Abschließend führen wir einige wahre Fälle ungewöhnlich schneller Vermehrung von Tieren an, denen günstige Lebensbedingungen geschaffen wurden.

In Amerika gab es ursprünglich keine *Spatzen*. Dieser in der Sowjetunion so verbreitete Vogel wurde in die Vereinigten Staaten absichtlich mit dem Ziel eingeführt, dort Schädlingsinsekten zu vernichten. Der Sperling vertilgt bekanntlich in großen Mengen gefräßige Raupen und andere Insekten, die Gärten und Gemüsekulturen großen Schaden zufügen. Die neuen Bedingungen gefielen den Spatzen. In Amerika gab es keine Raubtiere, die diesem Vogel nachstellen, und deshalb vermehrte sich der Sperling schnell. Die Anzahl der Schädlingsinsekten ging spürbar zurück, doch bald vermehrten sich die Sperlinge derartig, daß sie sich aus Mangel an lebender Nahrung den Pflanzen zuwandten und die Saaten[1]) vernichteten. Man mußte den Kampf gegen den Sperling aufnehmen. Die Bekämpfung kam die Amerikaner so teuer zu stehen, daß für die Zukunft ein Gesetz verabschiedet wurde, das die Einfuhr beliebiger Tiere in die USA verbot.

Ein zweites Beispiel. In Australien gab es keine *Kaninchen*, als die Europäer den Kontinent entdeckten. Das Kaninchen wurde Ende des 18. Jahrhunderts dort hingebracht. Da dort die Raubtiere, die sich von Kaninchen ernähren, fehlen, ging die Vermehrung

---

[1]) Auf den Hawaii-Inseln verdrängte er vollständig alle anderen kleinen Vögel.

dieser Nagetiere in ungewöhnlich schnellem Tempo vonstatten. Bald überzogen Scharen von Kaninchen ganz Australien, fügten der Landwirtschaft einen gewaltigen Schaden zu und führten zur Katastrophe. Für den Kampf mit dieser Plage der Landwirtschaft wurden gewaltige Mittel eingesetzt, und nur dank den energischen Maßnahmen gelang es, mit diesem Übel fertig zu werden. Etwa das gleiche wiederholte sich später mit den Kaninchen in Kalifornien.

Die dritte lehrreiche Geschichte vollzog sich auf Jamaika. Hier lebten Giftschlangen in Hülle und Fülle. Um sie los zu werden, wurde beschlossen, den *Vogel Sekretär*, einen eifrigen Giftschlangen-Jäger, auf die Insel zu bringen. Die Zahl der Schlangen ging tatsächlich spürbar zurück. Dafür vermehrten sich ungewöhnlich stark die Feldratten, die früher von den Schlangen gefressen wurden. Die Ratten fügten den Zuckerrohrplantagen solchen Schaden zu, daß man sich ernsthaft um ihre Bekämpfung Gedanken machen mußte. Es ist bekannt, daß die indische *Manguste* ein Feind der Ratten ist. Man beschloß, vier Paare dieser Tiere auf die Insel zu bringen und sich frei vermehren zu lassen. Die Mangusten lebten sich in ihrer neuen Heimat gut ein und besiedelten rasch die ganze Insel. Es vergingen keine 10 Jahre, und sie hatten die Ratten fast ausgerottet. Doch nachdem sie die Ratten vernichtet hatten, begannen sie zu fressen, was ihnen in den Weg kam, und wurden Allesfresser: Sie fielen über Hundejunge, junge Ziegen, Ferkel, Hausvögel und deren Eier her. Sich weiter vermehrend, befielen sie Obstgärten, Kornfelder, Plantagen. Die Bewohner gingen an die Vernichtung ihrer ehemaligen Verbündeten. Jedoch konnten sie nur bis zu einem bestimmten Umfang den angerichteten Schaden einschränken.

Kostenloses Mittagessen

10 junge Leute beschlossen, den Abschluß der Oberschule mit einem kameradschaftlichen Mittagessen im Restaurant zu feiern. Als sich alle versammelt hatten und das erste Gericht aufgetragen war, gerieten sie über die Sitzordnung in Streit. Die einen schlugen vor, sich in alphabetischer Reihenfolge zu plazieren, die anderen — nach dem Alter, wieder andere — nach den erreichten Leistungen und noch andere — nach der Größe usw.

Der Streit zog sich hin, die Suppe wurde kalt, und keiner setzte sich an den Tisch.

Der Kellner brachte sie zur Ruhe, indem er sich mit folgenden Worten an sie wandte:

„Meine jungen Freunde, laßt euren Zank. Setzt euch an den Tisch, und hört mir zu."

Alle setzten sich wahllos hin. Der Kellner fuhr fort:

„Einer von euch mag aufschreiben, in welcher Anordnung ihr jetzt hier sitzt. Morgen kommt ihr wieder hierher zum Mittagstisch und setzt euch in anderer Reihenfolge. Übermorgen setzt ihr euch wieder in anderer Reihenfolge und so fort, solange ihr nicht alle möglichen Sitzordnungen durchprobiert habt. Kommt die Reihe daran, wieder so zu sitzen, wie ihr heute sitzt, dann, verspreche ich feierlich, beginne ich euch täglich kostenlos mit den ausgewähltesten Gerichten zu bewirten."

Der Vorschlag gefiel. Es wurde vereinbart, sich täglich in diesem Restaurant zu treffen und alle möglichen Sitzordnungen durchzuprobieren, um so bald als möglich die kostenlosen Mahlzeiten nutzen zu können.

Doch sie konnten diesen Tag nicht erleben. Und nicht etwa, weil der Kellner das Versprechen nicht hielt, sondern weil die Anzahl der möglichen Platzverteilungen überaus groß ist. Es gibt nicht mehr und nicht weniger als 3 628 800 Möglichkeiten. Diese Anzahl von Tagen ergibt, wie unschwer zu errechnen ist, fast 10 000 Jahre!

Es mag euch unwahrscheinlich vorkommen, daß sich 10 Personen in einer solchen großen Anzahl von verschiedenen Anordnungen plazieren können. Prüft die Rechnung selbst.

Vor allem gilt es zu lernen, wie die Zahl der Umstellungen bestimmt wird. Der Einfachheit halber beginnen wir die Rechnung mit einer geringen Zahl von Gegenständen — mit drei. Nennen wir sie A, B und C. Wir möchten wissen, wie oft man sie gegenseitig vertauschen kann. Gehen wir so heran. Wenn wir zunächst den Gegenstand C beiseite lassen, so kann man die übrigen zwei nur in zwei Anordnungen aufstellen.

Nun fügen wir C zu jedem dieser Paare hinzu. Wir können das auf dreierlei Art tun:

1. C *hinter* das Paar stellen;
2. C *vor* das Paar stellen;
3. C *zwischen* den beiden Gegenständen anordnen.

Andere Positionen für C, außer diesen drei, gibt es offensichtlich nicht. Doch da wir *zwei* Paare haben, AB und BA, so ergeben sich zusammen $2 \cdot 3 = 6$ Anordnungen.

Gehen wir weiter. Machen wir die Rechnung für vier Gegenstände, A, B, C, D. Wiederum lassen wir zunächst einen Gegenstand, sagen wir D, beiseite. Doch mit den übrigen drei nehmen wir alle möglichen Umstellungen vor. Wir wissen bereits, daß ihre Anzahl sechs ist. In wie vielen Anordnungen kann man den vierten Gegenstand D zu jeder der sechs Positionen der drei Gegenstände hinzufügen? Offenbar kann man:

1. D *hinter* die drei stellen;
2. D *vor* die drei stellen;
3. D *zwischen* den ersten und den zweiten Gegenstand stellen;
4. D zwischen den zweiten und dritten Gegenstand stellen.

Insgesamt erhalten wir folglich $6 \cdot 4 = 24$ Positionen. Da $6 = 2 \cdot 3$ ist, und $2 = 1 \cdot 2$, so kann man die Anzahl aller Anordnungen als Produkt von $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ darstellen.

Gehen wir gleichermaßen im Falle von fünf Gegenständen vor, erkennen wir, daß für sie die Anzahl der Anordnungen gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ ist.

Für sechs Gegenstände $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ usw.

Wenden wir uns nun dem Fall mit den 10 Mittagessern zu.

Die Zahl der hier möglichen Anordnungen ergibt sich, wenn wir uns die Mühe machen, das Produkt aus $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ zu errechnen.

Dann erhalten wir die oben genannte Zahl — 3 628 800.

Die Rechnung wäre komplizierter, wenn unter den 10 Speisegästen fünf Mädchen wären und sie es wünschen würden, stets zwischen zwei jungen Herren am Tisch zu sitzen. Obgleich die Anzahl der Anordnungen wesentlich geringer wird, ist das Ausrechnen ein wenig schwieriger.

Mag sich — gleichgültig wohin — ein junger Mann an den Tisch setzen. Die vier anderen können sich, so daß zwischen ihnen stets ein Platz für die Mädchen frei bleibt, in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ verschiedenen Anordnungen setzen. Da es insgesamt 10 Stühle sind, kann sich der erste junge Mann in 10 Anordnungen plazie-

ren. Also ist die Zahl aller möglichen Anordnungen für die jungen Männer $10 \cdot 24 = 240$.

In wieviel verschiedenen Anordnungen können sich nun auf die freien Stühle zwischen den jungen Herren die 5 Mädchen setzen? Offensichtlich $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ Varianten. Vereinigen wir jede der 240 Sitzanordnungen der jungen Männer mit jeder der 120 Sitzanordnungen der Mädchen, erhalten wir die Zahl der möglichen Platzverteilung: $240 \cdot 120 = 28\,800$.

Diese Zahl ist um ein Vielfaches geringer als die vorhergehende und würde nicht ganz 79 Jahre erfordern. Würden die jungen Restaurantgäste 100 Jahre alt werden, könnten sie ein kostenloses Mittagessen erleben. Wenn nicht von dem gleichen Kellner, dann von seinem Nachfolger.

Da wir nun Permutationen berechnen können, können wir auch bestimmen, wieviel unterschiedliche Anordnungen die Spielsteine im „Spiel mit 15“[1] möglich sind. Mit anderen Worten, wir können die Zahl aller Aufgaben, die uns das Spiel zu stellen vermag, berechnen. Es ist leicht zu verstehen, daß die Berechnung auf die Bestimmung der Permutationszahl von 15 Gegenständen hinausläuft. Wir wissen schon, daß dazu multipliziert werden muß:

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots$usw. $\ldots \cdot 14 \cdot 15$.

Die Ausrechnung ergibt: 1 307 674 365 000, das ist mehr als eine Billion.

Die Hälfte dieser gewaltigen Zahl von Aufgaben ist nicht lösbar. Es gibt also, über 600 Milliarden unlösbare Stellungen in diesem Spiel. Daraus erklärt sich teilweise die Begeisterungsepidemie für das „Spiel mit 15“, von der die Menschen erfaßt wurden, ohne zu vermuten, daß eine solche riesige Zahl nicht lösbarer Fälle existiert.

Bemerken wir noch dazu, daß, wenn es denkbar wäre, den Spielsteinen jede Sekunde eine neue Stellung zu geben, so wären bei pausenloser Bestätigung während des ganzen Tages über 40 000 Jahre nötig.

Beenden wir unsere Unterhaltung über die Permutationsanzahl mit einer Aufgabe aus dem Schulleben.

In der Klasse sind 25 Schüler. In wieviel verschiedenen Anordnungen können sie auf den Bänken sitzen?

---

[1] Hierbei muß das freie Feld stets im rechten unteren Eck verbleiben.

Der Lösungsweg für diese Aufgabe (für jene, die sich alles schon Gesagte zu eigen gemacht haben) ist ganz unkompliziert. Man muß 25 Zahlen: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25$ multiplizieren.

Die Mathematik kennt Methoden, viele Rechenoperationen zu verkürzen, doch Berechnungen in der Art wie eben angeführt, vermag sie nicht zu erleichtern. Es existiert kein anderer Weg, um diese Rechenoperation *genau* durchzuführen, als gewissenhaft alle diese Zahlen zu multiplizieren. Nur die geschickte Gruppierung der Multiplikatoren ermöglicht eine geringe Verkürzung der Rechenzeit. Das Ergebnis ist enorm, aus 26 Ziffern bestehend. Das ist eine Zahl, deren Größe unser Vorstellungsvermögen übersteigt.

Hier ist sie: 15 511 210 043 330 985 984 000 000.

Von allen Zahlen, denen wir bisher begegnet sind, ist das natürlich die größte und ihr gebührt mehr als allen anderen das Recht, „Riesenzahl“ genannt zu werden. Die Zahl der kleinsten Tropfen in allen Ozeanen und Meeren des Erdballs ist bescheiden im Vergeich zu dieser riesenhaften Zahl.



Knobelei mit Zahlen

Aus sieben Ziffern

Schreibt sieben aufeinanderfolgende Ziffern von 1 bis 7 auf:

1 2 3 4 5 6 7.

Es ist ganz leicht, sie mit Plus- und Minuszeichen so zu verbinden, daß 40 herauskommt:

$12 + 34 - 5 + 6 - 7 = 40.$

Probiert eine andere Kombination dieser Ziffern, welche nicht 40, sondern 55 ergibt.

Neun Ziffern

Schreibt in der Reihenfolge 9 Ziffern: 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Ohne ihre Reihenfolge zu verändern, könnt ihr, durch Setzen von Plus- oder Minuszeichen, genau 100 erhalten.

Es ist zum Beispiel nicht schwer, wenn man sechsmal plus und minus setzt, die 100 auf folgende Weise zu bekommen:

$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100.$

Wollt ihr nur viermal plus oder minus setzen, könnt ihr auch 100 erhalten:

$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100.$

Versucht jedoch auf 100 zu kommen, mit nur drei Plus- oder Minuszeichen.

Das ist viel schwieriger und dennoch durchaus möglich — man muß nur geduldig suchen.

Mit zehn Ziffern

Drückt die Zahl 100 unter Verwendung aller 10 Ziffern aus.

In wieviel verschiedenen Anordnungen könnt ihr das? Es gibt nicht weniger als vier Möglichkeiten.

Die Eins

Stellt die Eins unter Anwendung aller zehn Ziffern dar.



Mit fünf Zweien

Ihr habt fünf Zweien zur Verfügung und beliebige mathematische Operationszeichen. Unter Verwendung ausschließlich dieses Ziffernmaterials sollt ihr, indem ihr es voll ausnutzt und die mathematischen Operationszeichen anwendet, folgende Zahlen darstellen: 15, 11, 12, 321.

Noch einmal mit fünf Zweien

Kann man mit fünf Zweien die Zahl 28 ausdrücken?

Mit vier Zweien

Diese Aufgabe ist komplizierter als die vorhergehenden. Mit vier Zweien ist die Zahl 111 zu bilden. Ist das möglich?

Mit fünf Dreien

Ihr wißt natürlich, daß man mit fünf Dreien und den Operationszeichen die Zahl 100 so schreiben kann:

$33 \cdot 3 + 3/3 = 100.$

Aber kann man mit fünf Dreien 10 schreiben? Was denkt ihr?

Die Zahl 37

Schreibt in ähnlicher Weise die Zahl 37 unter ausschließlicher Verwendung von fünf Dreien und den Operationszeichen.

In vier verschiedenen Varianten

Stellt die Zahl 100 durch fünf gleichartige Ziffern in vier verschiedenen Varianten dar.

Mit vier Dreien

Es ist ganz leicht, mit vier Dreien die Zahl 12 auszudrücken:

$12 = 3 + 3 + 3 + 3.$

Ein wenig verzwickter ist es, in entsprechender Weise aus vier Dreien die Zahlen 15 und 18 zu bilden:

$15 = (3 + 3) + (3 \cdot 3)$;
$18 = (3 \cdot 3) + (3 \cdot 3)$.

Doch wenn es erforderlich wäre, auf die gleiche Weise mit vier Dreien die Zahl 5 darzustellen, würdet ihr gewiß nicht gleich erraten, daß $5 = \frac{3+3}{3} + 3$ ist.

Versucht nun selbst Methoden aufzufinden, um mit vier Dreien die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 — kurz, alle Zahlen von 1—10 (wie die Zahl 5 zu schreiben ist, wurde schon gezeigt) auszudrücken.

Mit vier Vieren

Wenn ihr mit der vorangegangenen Aufgabe zurechtgekommen seid und euch solche Knobeleien Spaß machen, dann versucht, alle Zahlen von 1—10 durch vier Vieren zu bilden. Das ist nicht schwieriger als die Zusammenstellung dieser Zahlen durch Dreien.

Mit vier Fünfen

Es ist die Zahl 16 mit vier Fünfen, die durch Operationszeichen verbunden sind, auszudrücken.

Wie macht man das?

Mit fünf Neunen

Drückt die Zahl 10 durch fünf Neunen aus. Bringt mindestens zwei Varianten.

Vierundzwanzig

Es ist ganz einfach, die Zahl 24 mit drei Achten auszudrücken: $8+8+8$. Doch könnt ihr das gleiche tun und dabei nicht Achten, sondern drei andere gleiche Ziffern verwenden. Die Aufgabe hat nicht nur eine Lösung.

Dreißig

Die Zahl 30 ist leicht aus drei Fünfen zu bilden: $5 \cdot 5 + 5$. Schwieriger ist es, dies mit drei anderen gleichen Zahlen zu tun. Versucht es. Vielleicht gelingt es euch, mehrere Lösungen zu finden.

Tausend

Könnt ihr die Zahl 1000 mit acht gleichen Ziffern ausdrücken? Es ist erlaubt, außer Ziffern auch Operationszeichen zu verwenden.

Wie erhält man zwanzig?

Ihr seht hier drei Zahlen, die untereinander geschrieben sind:
111
777
999.

Es sind sechs Ziffern so zu streichen, daß die verbleibenden Zahlen zusammen 20 ergeben. Könnt ihr das?

Neun Ziffern streichen

Die folgende fünfzeilige Ziffernspalte enthält 15 ungerade Ziffern:

1 1 1
3 3 3
5 5 5
7 7 7
9 9 9.

Die Aufgabe besteht darin, neun Ziffern zu streichen. Sie sind so auszuwählen, daß beim Addieren der restlichen sechs Ziffernsäulen die Summe von 1111 herauskommt.

Im Spiegel

Welches Jahr des vergangenen Jahrhunderts vergrößert sich auf das 4 1/2fache, wenn man es im Spiegel betrachtet?

Welches Jahr?

Gibt es in diesem Jahrhundert ein Jahr, das sich nicht verändert, wenn man es auf den Kopf stellt?

Welche Zahlen?

Welche zwei ganzen Zahlen ergeben, wenn man sie multipliziert, 7? Vergeßt nicht, daß beide Zahlen *ganze* sein müssen. Solche Antworten wie $3\ 1/2 \cdot 2$ oder $2\ 1/3 \cdot 3$ passen nicht.

Addieren und Multiplizieren

Welche zwei ganzen Zahlen ergeben, wenn wir sie addieren, mehr, als wenn wir sie multiplizieren?

Ebensoviel

Welche zwei Zahlen ergeben beim Addieren ebensoviel wie beim Multiplizieren?

Eine gerade Primzahl

Ihr wißt natürlich, welche Zahlen man Primzahlen nennt: jene, die ohne Rest, nur durch sich selbst und durch 1 teilbar sind. Die anderen Zahlen nennt man zusammengesetzte.

Was meint ihr, sind alle geraden Zahlen zusammengesetzte oder gibt es gerade Primzahlen?

Drei Zahlen

Welche drei ganzen Zahlen ergeben beim Multiplizieren ebensoviel wie beim Addieren?

Addition und Multiplikation

Zweifellos ist euch bereits die interessante Besonderheit der Gleichungen

$2 + 2 = 4,$
$2 \cdot 2 = 4$

aufgefallen.

Das ist das einzige Beispiel, wo Summe und Produkt zweier ganzer Zahlen (und zwar gleicher) das gleiche Ergebnis haben.

Ihr wißt aber vielleicht nicht, daß auch ungleiche Zahlen existieren, die über die gleiche Eigenschaft verfügen, gleiche Summen und Produkte zu bilden.

Versucht Beispiele dieser Zahlen ausfindig zu machen. Damit ihr nicht glaubt, das Suchen sei vergeblich, sage ich euch: Es gibt sehr viele solche Zahlen, doch nicht alle sind gerade Zahlen.

Multiplikation und Division

Welche zwei ganzen Zahlen ergeben, wenn man die größere von ihnen durch die kleinere teilt, ebensoviel wie ihre Multiplikation ergibt?



Eine zweistellige Zahl

Teilt man eine bestimmte zweistellige Zahl durch ihre Quersumme, so erhält man als Ergebnis erneut die Summe der Ziffern des Dividenden. Sucht die Zahl.

Zehnmal mehr

Die Zahlen 12 und 60 haben eine interessante Eigenschaft. Multipliziert man sie, erhält man genau 10mal soviel, als wenn man sie addiert.

$12 \cdot 60 = 720, \quad 12 + 60 = 72.$

Versucht, noch so ein Zahlenpaar zu finden. Vielleicht habt ihr das Glück, sogar mehrere Zahlen mit diesen Eigenschaften zu finden?

Mit zwei Ziffern

Welche kleinste ganze Zahl könnt ihr mit zwei Ziffern schreiben?

Die größte Zahl

Welches ist die größte Zahl, die ihr mit vier Einsen schreiben könnt?

Ungewöhnliche Brüche

Achtet auf den Bruch $\frac{6729}{13\,458}$. In ihm sind alle neun Grundziffern verwendet. Dieser Bruch ist, wie man leicht feststellen kann, gleich $\frac{1}{2}$.

Könnt ihr nach diesem Muster aus neun Ziffern folgende Brüche bilden:

$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$?

Womit hat er multipliziert?

Ein Schüler multiplizierte. Dann wischte er von der Schultafel einen großen Teil der Ziffern weg, so daß nur die erste Ziffernreihe und zwei Ziffern der letzten Reihe erhalten blieben. Von den anderen blieben

nur Spuren übrig. Die Aufzeichnung hatte folgendes Aussehen:

```
   235
 ·  **
 ----
  ****
+ ****
 -----
 **56*
```

Könnt ihr wiederherstellen, mit welcher Zahl der Schüler multiplizierte?

Fehlende Ziffern

In diesem Multiplikationsbeispiel sind über die Hälfte der Ziffern mit Sternchen gekennzeichnet:

```
   *1*
 · 3*2
 -----
  *3*
+3*2*
 *2*5
------
1*8*30
```

Könnt ihr die fehlenden Ziffern einsetzen?

Was für Zahlen?

Und noch so eine Aufgabe. Gesucht ist, welche Zahlen in dem Beispiel multipliziert wurden:

```
   **5
 · 1**
 -----
  2**5
+13*0
 ***
-----
 4*77*
```

Seltsame Multiplikationen

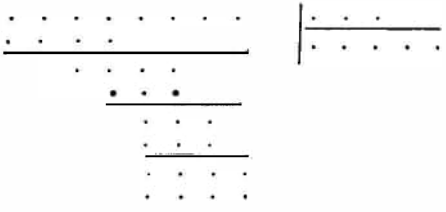
Seht euch diese Multiplikation zweier Zahlen an: $48 \cdot 159 = 7632$.

Das Bemerkenswerte ist, daß daran alle neun Grundziffern auf einmal beteiligt sind.

Könnt ihr noch mehr solche Beispiele ausfindig machen? Wie viele gibt es, wenn es sie überhaupt gibt?

Rätselhafte Division

Das hier Abgebildete ist nichts anderes als ein Beispiel der Division mehrstelliger Zahlen, in dem alle Ziffern durch Punkte ersetzt sind:



Ihr kennt weder eine Ziffer des Dividenden noch des Divisors. Bekannt ist nur, daß die *vorletzte* Ziffer des Quotienten eine 7 ist. Gesucht wird das Ergebnis dieser Division.

Alle Zahlen, das möchten wir auf jeden Fall bemerken, sind nach dem Dezimalsystem geschrieben.

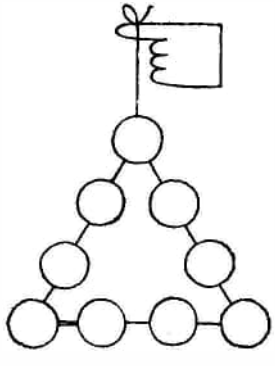
Es gibt nur eine Antwort auf die Fragestellung der Aufgabe.

Was wurde geteilt?

Setzt die fehlenden Ziffern in das Divisionsbeispiel ein:

```
*2*5*   | 325
***     | 1**
----
*0**
*9**
----
 *5*
 *5*
```

Abbildung 230



Durch 11 teilen

Schreibt irgendeine neunstellige Zahl auf, in der sich keine Ziffern wiederholen (alle Ziffern müssen unterschiedlich sein) und die ohne Rest durch 11 teilbar ist.

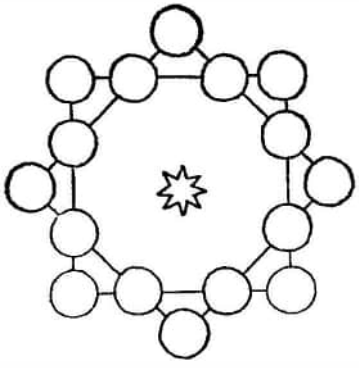
Schreibt die größte dieser Zahlen auf.

Schreibt die kleinste dieser Zahlen auf.

Zahlendreieck

In die Kreise dieses Dreiecks (Abb. 230) setzt die neun Grundziffern (1 bis 9) so ein, daß jede Seite die Summe 20 ergibt.

Abbildung 231



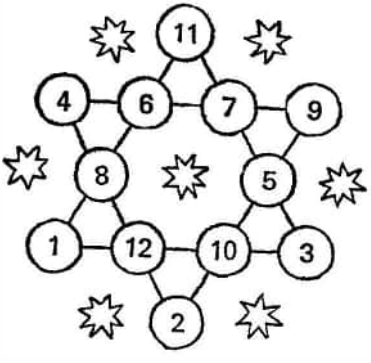
Noch ein Zahlendreieck

Die Grundzahlen (1 bis 9) sind so in die Kreise des Dreiecks (Abb. 230) einzusetzen, daß jede Seite die Summe 17 ergibt.

Achtzackiger Stern

Die Zahlen von 1 bis 16 sind so in die Kreuzungspunkte der Linien der Figur einzusetzen, die auf Abb. 231 dargestellt ist, daß die Summe der Zahlen der Seiten jedes Quadrates 34 ergibt, und die Summe der Zahlen an den Spitzen jedes Quadrates ebenfalls 34 ergibt.

Abbildung 232



Magischer Stern

Der sechszackige Zahlenstern, der auf Abb. 232 dargestellt ist, besitzt „magische" Eigenschaften. Alle sechs Zahlenreihen ergeben ein und dieselbe Summe.

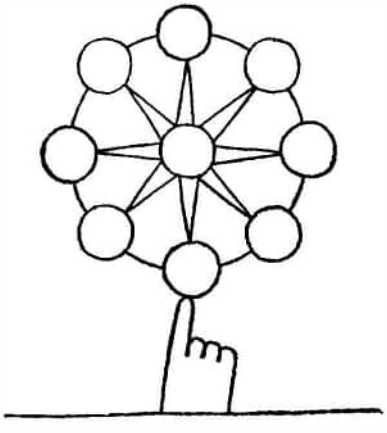
$4+6+7+9=26$, $\quad 11+6+8+1=26$,
$4+8+12+2=26$, $\quad 11+7+5+3=26$,
$9+5+10+2=26$, $\quad 1+12+10+3=26$.

Doch die Summe aller Zahlen in den Sternspitzen ist anders:

$4+11+9+3+2+1=30$.

Ob es euch wohl gelingt, den Stern durch Verteilung der Zahlen in den Kreisen so zu vervollkommnen, daß nicht nur die geraden Reihen eine gleiche Summe (26) ergeben, sondern die gleiche Summe (26) auch von den Zahlen in den Sternspitzen gebildet wird?

Abbildung 233

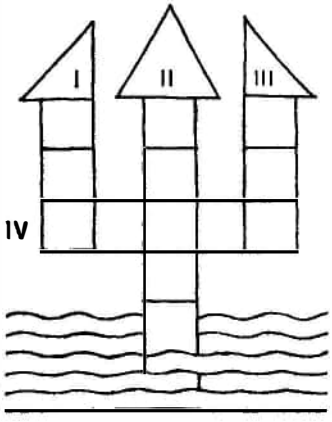


Zahlenrad

Die Ziffern von 1 bis 9 müssen so in der Figur der Abb. 233 untergebracht werden, daß sich eine Ziffer im Zentrum des Kreises befindet, die anderen am Ende jedes Diameters, und die Summe der drei Ziffern jeder Reihe 15 ergibt.

Dreispitz

Abbildung 234



In die Felder des hier abgebildeten Dreispitzes (Abb. 234) sind die Zahlen 1—13 so einzusetzen, daß die Summen der Ziffern jeder der drei vertikalen Reihen (*I*,*II*,*III*) und der einen horizontalen (*IV*) gleich sind.

Versucht es mal.



Antworten

Aus sieben Ziffern

Die Aufgabe hat nicht eine, sondern drei verschiedene Lösungen. Hier sind sie:

$$123 + 4 - 5 - 67 = 55;$$
$$1 - 2 - 3 - 4 + 56 + 7 = 55;$$
$$12 - 3 + 45 - 6 + 7 = 55.$$

Neun Ziffern

Das ist die Methode, wie ihr die Zahl 100 aus einer Reihe der neun Ziffern mit drei Plus- und Minuszeichen erhaltet:

$$123 - 45 - 67 + 89 = 100.$$

Dies ist die einzige Lösung. Keine andere Kombination der neun Ziffern mit *dreimaligem* Gebrauch von Plus- bzw. Minuszeichen ergibt 100.

Das gleiche Ergebnis mit geringerer Anwendung der Additions- und Subtraktionszeichen zu erreichen, ist nicht möglich.

Mit zehn Ziffern

Hier sind 2 Lösungen:

$$70 + 24\frac{9}{18} + 5\frac{3}{6} = 100;$$
$$80\frac{27}{54} + 19\frac{3}{6} = 100;$$
$$87 + 9\,\frac{4}{5} + 3\frac{12}{60} = 100;$$
$$50\frac{1}{2} + 49\frac{38}{76} = 100.$$

Die Eins

Man muß die Eins als Summe zweier Brüche darstellen:

$$\frac{148}{296} + \frac{35}{70} = 1.$$

Wer Algebra kann, ist imstande, noch andere Antworten zu geben: $123\,456\,789^0$; $234\,567^{9-8-1}$ usw., da eine Zahl mit der Potenz 0 gleich eins ist.

Mit fünf Zweien

Die Zahl 15 kann man so schreiben:

$$(2+2)^2 - \frac{2}{2} = 15; \quad \frac{22}{2} + 2 \cdot 2 = 15;$$
$$(2 \cdot 2)^2 - \frac{2}{2} = 15; \quad \frac{22}{2} + 2^2 = 15;$$
$$2^{(2+2)} - \frac{2}{2} = 15; \quad \frac{22}{2} + 2 + 2 = 15.$$



Die Zahl 11:

$$\frac{22}{2} + 2 - 2 = 11.$$

Die Zahl 12 321. Auf den ersten Blick scheint es unmöglich, eine solche fünfstellige Zahl mit fünf gleichen Zahlen zu schreiben. Doch die Aufgabe ist erfüllbar. Hier ist die Lösung:

$$\left(\frac{222^2}{2}\right) = 111^2 = 111 \cdot 111 = 12\ 321.$$

Noch einmal mit fünf Zweien

$$22 + 2 + 2 + 2 = 28.$$

Mit vier Zweien

$$\frac{222}{2} = 111.$$

Mit fünf Dreien

Hier ist die Lösung:

$$\frac{33}{3} - \frac{3}{3} = 10.$$

Es ist eindrucksvoll, daß sich die Aufgabe genauso lösen ließe, wenn die Zahl 10 nicht durch fünf Dreien, sondern fünf Einsen, fünf Vieren, sieben Neunen, überhaupt fünf x-beliebigen gleichen Ziffern ausgedrückt würde.
Tatsächlich ist:

$$\frac{11}{1} - \frac{1}{1} = \frac{22}{2} - \frac{2}{2} = \frac{44}{4} - \frac{4}{4} = \frac{99}{9} - \frac{9}{9} \text{ usw.}$$

Es gibt auch andere Lösungswege der gleichen Aufgabe:

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 + 3}{3} = 10,$$

$$\frac{3^3}{3} + \frac{3}{3} = 10.$$

Die Zahl 37

Es gibt zwei Lösungen:

$$33 + 3 + \frac{3}{3} = 37;$$

$$\frac{333}{3 \cdot 3} = 37.$$

In vier verschiedenen Varianten

Die Zahl 100 kann man durch fünf gleiche Ziffern ausdrücken, wenn man dazu die Eins, die Drei und — am einfachsten — die Fünf verwendet:

$$111 - 11 = 100;$$
$$33 \cdot 3 + \frac{3}{3} = 1\ ;$$
$$5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 100;$$
$$(5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5 = 100.$$

Mit vier Dreien

$1 = \frac{33}{33}$ (Es gibt noch andere Möglichkeiten);

$2 = \frac{3}{3} + \frac{3}{3}$;

$3 = \frac{3+3+3}{3}$;

$4 = \frac{3 \cdot 3 + 3}{3}$;

$6 = (3+3) \cdot \frac{3}{3}$.

Wir bringen hier die Lösungen nur bis zur Sechs. Die übrigen denkt euch selber aus. Auch die angeführten Lösungen können mit anderen Dreier-Kombinationen ausgedrückt werden.

Mit vier Vieren

$1 = \frac{44}{44}$ oder $\frac{4+4}{4+4}$, oder $\frac{4}{4} \cdot \frac{4}{4}$ usw.;

$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$ oder $\frac{4 \cdot 4}{4+4}$;

$3 = \frac{4+4+4}{4}$ oder $\frac{4 \cdot 4 - 4}{4}$;

$4 = 4 + 4 \cdot (4 - 4)$;

$5 = \frac{4 \cdot 4 + 4}{4}$;

$6 = \frac{4+4}{4} + 4$;

$7 = 4 + 4 - \frac{4}{4}$ oder $\frac{44}{4} - 4$;

$8 = 4 + 4 + 4 - 4$ oder $4 \cdot 4 - 4 - 4$;

$9 = 4 + 4 + \frac{4}{4}$;

$10 = \frac{44-4}{4}$.



Mit vier Fünfen

Es gibt nur eine Möglichkeit:

$$\frac{55}{5} + 5 = 16.$$

Mit fünf Neunen

Zwei folgende Möglichkeiten:

$$9 + \frac{99}{99} = 10,$$
$$\frac{99}{9} - \frac{9}{9} = 10.$$

Wer Algebra kann, fügt bestimmt noch einige Lösungen hinzu:

$$\left(9\ \frac{9}{9}\right)^{\frac{9}{9}} = 10,$$
$$9 + 99^{9-9} = 10.$$

Vierundzwanzig

Hier sind zwei Lösungen:

$$22 + 2 = 24; \qquad 3^3 - 3 = 24.$$

Dreißig

Drei Lösungen führen wir an:

$$6 \cdot 6 - 6 = 30; \qquad 3^3 + 3 = 30; \qquad 33 - 3 = 30.$$

Tausend

$$888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000.$$

Wie erhält man zwanzig?

So muß man es machen (die ausgestrichenen Ziffern sind durch Nullen ersetzt):

011
000
009.

Wirklich, $11 + 9 = 20$.

Neun Ziffern streichen

Die Aufgabe läßt mehrere Lösungen zu, wir führen vier Beispiele an, wobei die weggestrichenen Ziffern durch Nullen ersetzt sind:

100	111	011	101
000	030	330	303
005	000	000	000
007	070	770	707
999	900	000	000
1111	1111	1111	1111

Im Spiegel

Die einzigen Zahlen, die im Spiegel nicht entstellt werden, sind 1, 0 und 8. Das gesuchte Jahr kann also nur diese Ziffern enthalten. Außerdem wissen wir, daß es ein Jahr des 19. Jahrhunderts ist, die ersten beiden Ziffern also 18 sind.

Nunmehr kann man sich leicht denken, was für ein Jahr das ist, nämlich 1818. Im Spiegel verwandelt sich 1818 in 8181, das ist genau 4 1/2mal mehr als 1818.

$$1818 \cdot 4\frac{1}{2} = 8181.$$

Andere Lösungen hat die Aufgabe nicht.

Welches Jahr?

Im 20. Jahrhundert gibt es nur ein solches Jahr: 1961.

Welche Zahlen?

Die Antwort ist einfach: 1 und 7. Andere solche Zahlen gibt es nicht.

Addieren und Multiplizieren

Solche Zahlen gibt es soviel ihr wollt:

$$3 \cdot 1 = 3; \qquad 3 + 1 = 4;$$
$$10 \cdot 1 = 10; \qquad 10 + 1 = 11.$$

Und überhaupt, jedes Zahlenpaar, von denen eine Zahl die Eins ist.

Das ist so, weil durch das Hinzufügen der Eins die Zahl sich erhöht, doch beim Multiplizieren mit eins bleibt sie unverändert.

Ebensoviel

Diese Zahlen sind 2 und 2. Andere ganze Zahlen mit diesen Eigenschaften gibt es nicht.

Eine gerade Primzahl

Es gibt nur eine gerade Primzahl — die Zahl 2. Sie ist nur durch sich selbst und durch 1 teilbar.

Drei Zahlen

1, 2 und 3 ergeben bei der Multiplikation und bei der Addition ein und dasselbe:

$$1 + 2 + 3 = 6; \qquad 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$



Addition und Multiplikation

Es existiert eine unbegrenzte Anzahl solcher Zahlenpaare. Hier einige Beispiele:

$$3+1\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}, \qquad 11+1{,}1=12{,}1,$$
$$5+1\frac{1}{4}=6\frac{1}{4}, \qquad 21+1\frac{1}{20}=22\frac{1}{20},$$
$$9+1\frac{1}{8}=10\frac{1}{8}, \qquad 101+1{,}01=102{,}01,$$
$$3\cdot 1\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}, \qquad 11\cdot 1{,}1=12{,}1,$$
$$5\cdot 1\frac{1}{4}=6\frac{1}{4}, \qquad 21\cdot 1\frac{1}{20}=22\frac{1}{20},$$
$$9\cdot 1\frac{1}{8}=10\frac{1}{8}, \qquad 101\cdot 1{,}01=102{,}01 \text{ usw.}$$

Multiplikation und Division

Es gibt sehr viele solche Zahlen. Zum Beispiel:

$$2:1=2, \qquad 2\cdot 1=2,$$
$$7:1=7, \qquad 7\cdot 1=7,$$
$$43:1=43, \qquad 43\cdot 1=43.$$

Eine zweistellige Zahl

Die gesuchte Zahl muß offensichtlich eine genaue Quadratzahl sein. Da es unter den zweistelligen Zahlen nur sechs Quadratzahlen gibt, finden wir durch Probieren leicht die einzige Lösung — nämlich 81:

$$\frac{81}{8+1}=8+1.$$

Zehnmal mehr

Hier sind noch vier solche Zahlenpaare:

11 und 110; 14 und 35; 15 und 30; 20 und 20.
In der Tat:

$$11\cdot 110=1210; \qquad 11+110=121;$$
$$14\cdot 35=490; \qquad 14+35=49;$$
$$15\cdot 30=450; \qquad 15+30=45;$$
$$20\cdot 20=400; \qquad 20+20=40.$$

Andere Lösungen hat die Aufgabe nicht. Es ist ziemlich mühsam, die Lösung „blind“ zu suchen. Algebraisches Grundwissen erleichtert die Angelegenheit entscheidend und ermöglicht, nicht nur alle Lösungen aufzufinden, sondern bestätigt, daß mehr als fünf Lösungen nicht existieren.

Mit zwei Ziffern

Die kleinste ganze Zahl, die mit zwei Ziffern geschrieben werden kann, ist nicht 10, wie wahrscheinlich einige Leser denken, sondern 1, folgendermaßen ausgedrückt:

$$\frac{1}{1},\quad \frac{2}{2},\quad \frac{3}{3},\quad \frac{4}{4} \text{ usw. bis } \frac{9}{9}.$$

Mit der Algebra Vertraute fügen diesen Ausdrücken noch andere Zeichnen hinzu:

$$1^0,\ 2^0,\ 3^0,\ 4^0, \text{ usw. bis } 9^0,$$

weil jede Zahl mit Null-Potenz gleich 1 ist. Jedoch falsch wären die Lösungen $\frac{0}{0}$ oder 0^0. Diese Ausdrücke haben überhaupt keinen Sinn.

Die größte Zahl

Gewöhnlich wird mit 1111 geantwortet, doch ist das weitaus nicht die größte Zahl. Viel größer — um 250millionenmal — ist die Zahl 11^{11}.

Obwohl sie nur aus vier Einsen besteht, ergibt sie nach Ausrechnung über 285 Milliarden Einsen!

Ungewöhnliche Brüche

Die Aufgabe hat mehrere Lösungen. Hier ist jeweils eine davon:

$$\frac{1}{3}=\frac{5823}{17\,469};\quad \frac{1}{4}=\frac{3942}{15\,768};$$
$$\frac{1}{5}=\frac{2697}{13\,485};\quad \frac{1}{6}=\frac{2943}{17\,658};$$
$$\frac{1}{7}=\frac{2394}{16\,758};\quad \frac{1}{8}=\frac{3187}{25\,496};$$
$$\frac{1}{9}=\frac{6381}{57\,429}.$$

Es existieren viele Varianten; besonders vielfältig kann der Bruch $\frac{1}{8}$ auf mehr als 40 Weisen dargestellt werden!

Womit hat er multipliziert?

Gehen wir so heran. Die Ziffer 6 entstand bei der Addition einer Spalte von zwei Zahlen, deren untere entweder 0 oder 5 sein kann. Ist die untere 0, so ist die obere 6. Kann denn die obere Ziffer 6 sein? Probieren wir. Es zeigt sich, was für eine Zahl die zweite Ziffer des Multiplikators auch sein mag, in keinem Falle ergibt sich eine 6 als vorletzte Stelle des ersten Zwischenergebnisses. Also muß die untere Ziffer der vorletzten Spalte eine 5 sein, dann steht darüber eine 1.

Jetzt ist es leicht, einen Teil der ausgestrichenen Ziffern wiedereinzusetzen:

$$\begin{array}{r} 235 \\ \cdot\ ** \\ \hline **1* \\ +\ ***5 \\ \hline **56* \end{array}$$



Die letzte Ziffer des Multiplikators muß größer als 4 sein, andernfalls besteht das erste Zwischenergebnis nicht aus vier Ziffern. Die Ziffer 5 kann es nicht sein (es entsteht keine 1 an vorletzter Stelle). Probieren wir mit 6, das paßt. Wir haben:

```
  235
 ·  *6
------
 1410
+***5
------
 **560
```

Gehen wir weiter auf diese Weise vor, stellen wir fest, daß der Multiplikator 96 ist.

Fehlende Ziffern

Die fehlenden Ziffern werden eine nach der anderen wieder aufgefunden, geht man folgendermaßen dabei vor.

Zweckmäßigerweise numerieren wir die Zeilen:

```
   *1*    I
 · 3*2    II
 ----
  *3*     III
 3*2*     IV
+*2*5     V
-------
1*8*30    VI
```

Es ist leicht zu erkennen, daß das letzte Sternchen in der Zeile III die Ziffer 0 ist. Das wird daraus klar, daß 0 am Ende der Zeile VI steht.

Jetzt wird die Bedeutung des letzten Sternchens der Zeile I bestimmt. Das ist eine Ziffer, die bei der Multiplikation mit 2 eine auf 0 endende Zahl ergibt und beim Multiplizieren mit 3 — eine Zahl, die auf 5 endet (Reihe V). Es gibt nur eine solche Ziffer — die 5.

Unschwer ist zu erraten, was sich hinter dem Sternchen der Zeile II verbirgt — die 8, weil nur beim Multiplizieren mit 8 die Zahl 15 ein Ergebnis bringt, das mit 20 endet (Zeile IV).

Schließlich wird die Bedeutung des ersten Sternchens auf Zeile I klar. Das ist die Ziffer 4, weil nur die 4 mit 8 multipliziert ein Ergebnis bringt, das mit 3 beginnt (Zeile IV).

Die übrigen unbekannten Zahlen zu erkennen, macht nun keine Schwierigkeiten mehr. Es genügt, die Zahlen der ersten beiden Reihen zu multiplizieren, die ja bereits vollständig bestimmt sind.

Im Endergebnis erhalten wir dieses Multiplikationsbeispiel:

```
  415
  382
 ----
  830
+3320
 1245
------
158530
```

Was für Zahlen?

Ähnlich dem soeben angewendeten Lösungswege entschlüsseln wir auch in diesem Falle die Bedeutung der Sternchen. Wir erhalten:

$$\begin{array}{r} \cdot\,325 \\ \cdot\,147 \\ \hline 2275 \\ +\,1300 \\ \,325 \\ \hline 47775 \end{array}$$

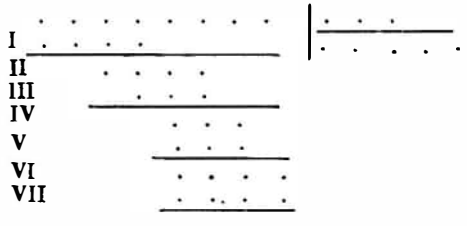
Seltsame Multiplikationen

Der geduldige Leser kann neun Multiplikationsvarianten finden, u. zw.:

$$\begin{aligned} 12 \cdot 483 &= 5796, \\ 42 \cdot 138 &= 5796, \\ 18 \cdot 297 &= 5346, \\ 27 \cdot 198 &= 5346, \\ 39 \cdot 186 &= 7254, \\ 48 \cdot 159 &= 7632, \\ 28 \cdot 157 &= 4396, \\ 4 \cdot 1738 &= 6952, \\ 4 \cdot 1963 &= 7852. \end{aligned}$$

Rätselhafte Division

Zur besseren Übersicht numerieren wir die Reihen der Punkte.



Betrachten wir die Reihe II, kommen wir zu dem Schluß, daß die zweite Ziffer des Quotienten eine 0 ist, weil es notwendig war, zwei Ziffern des Dividenden herunterzuziehen. Bezeichnen wir den ganzen Divisor mit x. Die Reihen IV und V zeigen, daß die Zahl $7x$ (Produkt der vorletzten Ziffer des Quotienten zum Divisor), wenn sie von einer Zahl, die 999 nicht übersteigt, abgezogen wird, eine Differenz, nicht geringer als 100, ergab. Es ist klar, daß $7x$ 999—100 nicht übersteigen kann, also 899, woraus resultiert, daß x nicht größer als 128 ist. Weiter sehen wir, daß die Zahl in Reihe III größer als 900 ist. Andernfalls würde sie nicht einen zweistelligen Rest beim Abziehen von einer vierstelligen Zahl ergeben. Doch dann muß die dritte Ziffer des Quotienten 900 : 128, also größer als 7,03 sein. Das heißt, sie muß entweder 8 oder 9 sein. Da die Zahlen der Reihen I und VII vierstellig sind, ist offensichtlich, daß die dritte Ziffer des Quotienten 8 und die letzte 9 ist.



Damit ist eigentlich die Lösung der Aufgabe abgeschlossen, weil das gesuchte Ergebnis der Teilung (der Quotient) gefunden ist: 90 879.

Es besteht keine Notwendigkeit weiterzugehen und Dividenden und Divisor zu suchen. Die Fragestellung der Aufgabe bestand im Auffinden des *Ergebnisses* der Division, also des Quotienten. Die Aufgabe verlangt nicht die ganze Notiz zu entziffern. Hinzu kommt, daß nicht eine, sondern 11 Zahlenpaare existieren, die bei der Division der gegebenen Punkteanordnung entsprechen und an vierter Stelle des Quotienten eine 7 ergeben:

$$\left.\begin{array}{l} 10\,360206 : 114 \\ 10\,451085 : 115 \\ 10\,541964 : 116 \\ 10\,632843 : 117 \\ 10\,723722 : 118 \\ 10\,814601 : 119 \\ 10\,905480 : 120 \\ 10\,996359 : 121 \\ 11\,087238 : 122 \\ 11\,178117 : 123 \\ 11\,268996 : 124 \end{array}\right\} = 90\,879.$$

Was wurde geteilt?

Seht hier das gesuchte Divisionsbeispiel:

$$\begin{array}{r|l} -\,52650 & 325 \\ \underline{-\,325} & \overline{162} \\ -\,2015 & \\ \underline{-\,1950} & \\ -\,650 & \\ \underline{-\,650} & \end{array}$$

Durch 11 teilen

Um diese Aufgabe lösen zu können, muß man das Merkmal der Teilbarkeit durch 11 kennen. Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die Differenz zwischen der Summe der Ziffern, die an gerader Stelle, und der Summe der Ziffern, die an ungerader Stelle stehen, durch 11 teilbar oder gleich 0 ist.

Probieren wir als Beispiel die Zahl 23 658 904.

Die Summe der an geraden Stellen stehenden Ziffern ist

$$3 + 5 + 9 + 4 = 21;$$

die Summe der an ungeraden Stellen stehenden Ziffern ist

$$2 + 6 + 8 + 0 = 16.$$

Die Differenz (man muß die kleinere von der größeren abziehen) ist gleich

$$21 - 16 = 5.$$

Diese Differenz (5) ist nicht durch 11 teilbar, also ist auch die ausgewählte Zahl nicht ohne Rest durch 11 teilbar.

Probieren wir eine andere Zahl 7 344 535:

$$3 + 4 + 3 = 10;$$
$$7 + 4 + 5 + 5 = 21;$$
$$21 - 10 = 11.$$

Da 11 durch 11 teilbar ist, läßt sich auch die ausprobierte Zahl durch 11 teilen.

Jetzt ist es leicht zu verstehen, in welcher Reihenfolge neun Ziffern zu schreiben sind, damit eine durch 11 teilbare Zahl entsteht, mit der die Forderung der Aufgabe erfüllt wird.

Zum Beispiel: 352 049 786.

Probieren wir:

$$3 + 2 + 4 + 7 + 6 = 22;$$
$$5 + 0 + 9 + 8 = 22.$$

Die Differenz 22—22=0, das bedeutet, die von uns aufgeschriebene Zahl ist durch 11 teilbar.

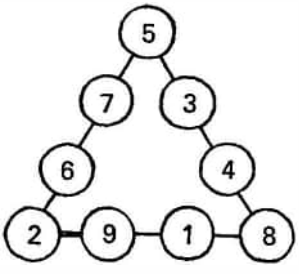
Die größtmögliche dieser Zahlen ist: 987 652 413.

Die kleinste ist: 102 347 586.

Zahlendreieck

Die Lösung zeigt Abb. 235. Die mittleren Ziffern jeder Reihe kann man umstellen und somit noch eine Reihe von Lösungen bekommen.

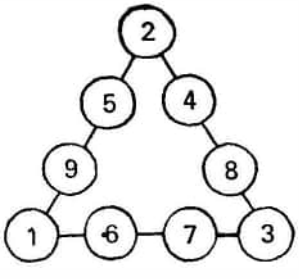
Abbildung 235



Noch ein Zahlendreieck

Die Lösung ist in Abb. 236 dargestellt. Die mittleren Ziffern jeder Reihe kann man austauschen und noch eine Reihe von Lösungen erhalten.

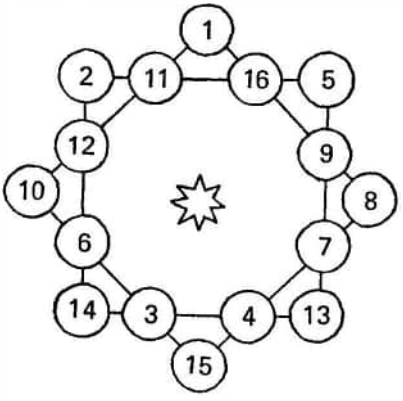
Abbildung 236



Achtzackiger Stern

Die Lösung wird in Abb. 237 gezeigt.

Abbildung 237



Magischer Stern

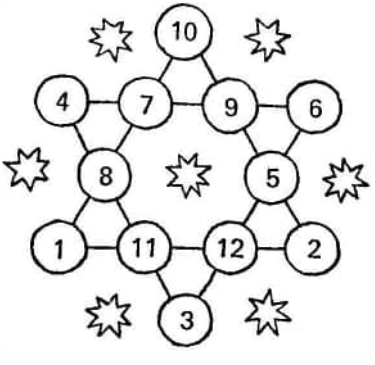
Um uns die Auffindung der geforderten Anordnung zu erleichtern, lassen wir uns von folgenden Überlegungen leiten.

Die Summe aller an den Spitzen des gesuchten Sterns ist gleich 26. Die Summen aller Zahlen des Sterns ist gleich 78. Das heißt, die Summe aller Zahlen des inneren Sechseckes ist gleich $78 - 26 = 52$.

Betrachten wir nunmehr eines der großen Dreiecke. Die Summe der Zahlen jeder seiner Seiten ist gleich 26. Addieren wir die Zahlen aller drei Seiten, so erhalten wir $26 \cdot 3 = 78$, wobei jede Zahl, die an der Spitze steht, zweimal gezählt wird. Da aber die Summe der drei inneren Zahlenpaare (also des inneren Sechseckes), wie wir wissen, gleich 52 sein muß, so ist die doppelte Summe der Zahlen an den Spitzen jedes Dreieckes gleich $78 - 52 = 26$. Die einfache Summe ist gleich 13.

Das Suchfeld ist nun wesentlich enger geworden. Wir wissen zum Beispiel, daß weder 12 noch 11 die Sternspitzen belegen können (warum?) Also können wir das Erproben mit 10 beginnen. Wobei gleichzeitig festgelegt wird, welche zwei Zahlen die übrigen Spitzen des Dreiecks einnehmen müssen: 1 und 2.

Abbildung 238

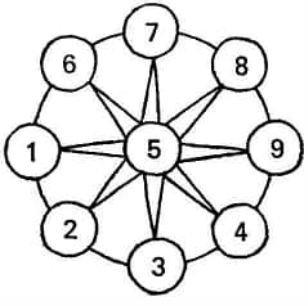


Wenn wir uns so weiter herantasten, finden wir schließlich die geforderte Anordnung heraus. Sie ist in Abb. 238 aufgezeigt.

Zahlenrad

Die Auflösung ist Abb. 239 zu entnehmen.

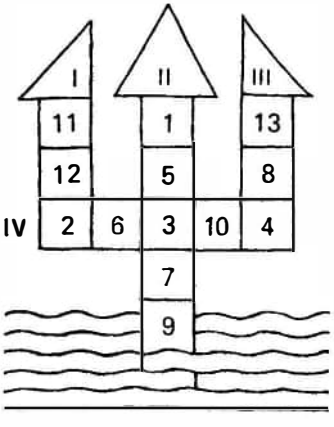
Abbildung 239



Dreispitz

Hier ist die geforderte Anordnung der Zahlen (Abb. 240). Die Summe der Zahlen in jeder der vier Reihen ist gleich 25.

Abbildung 240





Lustige Arithmetik

Einfaches Malnehmen

Wenn ihr die Multiplikationstabelle nicht im Kopf habt und beim Malnehmen mit der 9 steckenbleibt, dann können euch die eigenen Finger weiterhelfen.

Legt beide Hände auf den Tisch — die 10 Finger dienen euch als Rechenmaschine.

Nehmen wir an, es ist die 4 mit der 9 zu multiplizieren.

Der *vierte* Finger gibt euch die Antwort. Links von ihm sind drei Finger, rechts davon sechs, ihr lest: 36. Also $4 \cdot 9 = 36$.

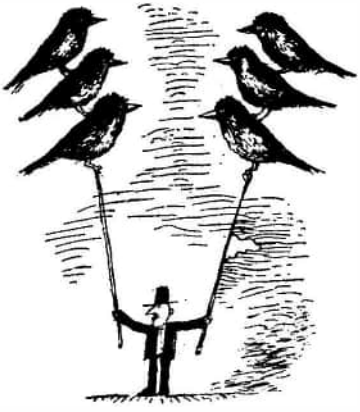
Noch einige Beispiele: Wieviel ist $7 \cdot 9$?

Der *siebente* Finger hat links von sich sechs Finger, rechts drei. Die Antwort: 63.

Wieviel ist $9 \cdot 9$? Der *neunte* Finger hat zur Linken acht Finger, zur Rechten einen. Die Antwort: 81.

Diese lebendige Rechenmaschine hilft euch, sich fest einzuprägen, wieviel $6 \cdot 9$ ist, und nicht, wie andere, 54 und 56 zu verwechseln. Der *sechste* Finger hat nach links 5 Finger, nach rechts vier, also $6 \cdot 9 = 54$.

Abbildung 241



Die Dohlen und die Bohlen

(Volkstümliche Aufgabe)

Geflogen kamen Dohlen
und setzten sich auf die Bohlen.
Wenn auf jede Bohle
setzt sich eine Dohle,
so bleibt für eine Dohle
leider keine Bohle.
Wenn jedoch auf jede Bohle
setzen sich zwei Dohlen,
so bleibt eine Bohle
ohne Dohlen.
Wieviel waren es Dohlen?
Wieviel waren es Bohlen?

Abbildung 242



Schwestern und Brüder

Ich habe gleichviel Schwestern und Brüder. Doch meine Schwester hat halb soviel Schwestern wie Brüder. Wie viele sind wir?

Wieviel Kinder?

Ich habe sechs Söhne. Jeder Sohn hat eine leibliche Schwester. Wieviel Kinder habe ich?

Frühstück

Zwei Väter und zwei Söhne aßen zum Frühstück drei Eier, wobei jeder von ihnen ein ganzes Ei aß. Wie erklärt ihr das?

Drei Viertel eines Menschen

Ein Feldbaubrigadier wurde gefragt, wieviel Personen zu seiner Brigade gehören. Er antwortete ziemlich verworren:

„Es sind nicht viel Leute: drei Viertel sind wir und noch eine dreiviertel Person — das sind alle unsere Leute."

Könnt ihr enträtseln, wieviel Mitglieder diese Brigade hatte?

Wie alt sind sie?

„Sag mal, Großvater, wie alt ist dein Sohn?"
„Er ist soviel Wochen alt, wie der Enkel Tage alt ist."
„Und wie alt ist der Enkel?"
„Er ist soviel Monate alt, wie ich an Jahren bin."
„Ja, wie alt bist du denn?"
„Zu dritt sind wir genau 100 Jahre alt, nun rechne aus, wie alt jeder von uns ist."

Abbildung 243



Wer ist älter?

In zwei Jahren wird mein Junge doppelt so alt sein, wie er vor zwei Jahren war. Und meine Tochter wird in drei Jahren dreimal so alt sein wie vor drei Jahren.

Wer ist älter, der Junge oder das Mädchen?

Das Alter meines Sohnes

Jetzt ist mein Sohn dreimal jünger als ich. Doch vor fünf Jahren war er viermal jünger als ich.

Wie alt ist er?

Wie alt?

Einen Knobelfreund fragte man, wie alt er sei. Die Antwort war kompliziert:

„Nehmt mein Alter in drei Jahren dreifach und zieht mein Alter vor drei Jahren dreifach ab, dann wißt ihr ganz genau, wie alt ich bin."

Wie alt ist er denn jetzt?

Drei Töchter und zwei Söhne

Ein Onkel kam seine zwei Neffen und drei Nichten besuchen, die er lange nicht gesehen hatte. Als erster lief ihm der kleine Wolodja mit dem Schwesterchen Shenja entgegen, und stolz erklärte das Bübchen dem Onkel, daß er zweimal so alt wie die Schwester sei. Danach kam Nadja angerannt, und der Vater sagte zu dem Gast, daß beide Mädchen doppelt so alt wie der Junge seien.

Als Aljoscha aus der Schule kam, erklärte der Vater, daß beide Jungen doppelt so alt seien wie die beiden Mädchen zusammen.

Später als alle kam Lida und verkündete — zur Verwunderung des Gastes — fröhlich:

„Onkel, du bist gerade zu meinem Geburtstag gekommen. Ich bin heute 21 Jahre alt geworden."

„Und weißt du, was noch", ergänzte der Vater, „mir ist gerade klargeworden, daß meine drei Töchter zusammen doppelt so alt sind wie meine Söhne."

Wie alt war jeder Sohn und jede Tochter?

Gewerkschaftsmitglieder

In einem Abteil hörte ich folgendes Gespräch zwischen zwei Fahrgästen:

„Dann bist du doppelt so lange in der Gewerkschaft wie ich?"

„Ja, genau doppelt."

„Doch ich erinnere mich, du hast früher einmal gesagt, dreimal so lange."

„Vor zwei Jahren? Damals war es auch dreimal, doch jetzt ist es nur noch zweimal so lange."

Wieviel Jahre ist jeder der beiden Gewerkschaftsmitglied?

Abbildung 244



Wieviel Partien?

Dreie spielten Dame. Drei Partien wurden insgesamt gespielt. Wieviel Partien spielte jeder?

Die Schnecke

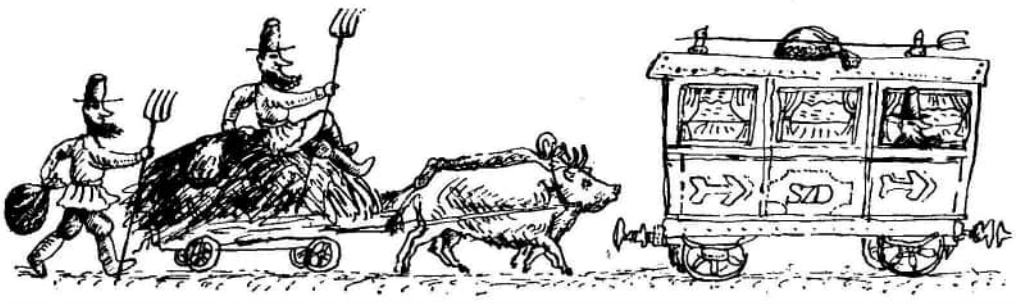
Eine Schnecke wollte auf einen 15 m hohen Baum kriechen. Jeden Tag schaffte sie 5 m, doch jede Nacht rutschte sie, während sie schlief, 4 m abwärts.

In wieviel Tagen erreicht sie die Baumspitze?

In die Stadt

Ein Kolchosbauer fuhr in die Stadt. Die erste Hälfte des Weges fuhr er mit der Eisenbahn — 15mal schneller, als wenn er gelaufen wäre. Jedoch die zweite Weghälfte mußte er mit dem Ochsengespann zurücklegen — halb so schnell, als wenn er zu Fuß gegangen wäre.

Abbildung 245



Wieviel Zeit hat er trotzdem gewonnen gegenüber dem Fußmarsch?

Zur Kolchose

Von der Fabrik bis zur Kolchose führt ein unebener Weg. Erst geht er 8 km bergauf, dann 24 km bergab. Michailow fuhr mit dem Fahrrad dorthin und fuhr ununterbrochen 2 Stunden und 50 Minuten. Zurück fuhr er auch mit dem Rad, hielt unterwegs nirgends an und benötigte 4 Stunden 30 Minuten.

Könnt ihr sagen, mit welcher Geschwindigkeit Michailow bergauf und wie schnell er bergab fuhr?

Zwei Schüler

„Gib mir einen Apfel, dann habe ich doppelt soviel wie du", sagte ein Schüler zum anderen.

„Das ist ungerecht. Gib du mir lieber einen Apfel, dann haben wir beide gleichviel", antwortete sein Freund.

Könnt ihr sagen, wieviel Äpfel jeder Schüler hatte?

Der Preis des Einbandes

Hier haben wir, wie es scheint, eine einfache Aufgabe, die aber viele nicht richtig lösen. Ein eingebundenes

Buch kostet 2 Rubel 50 Kopeken. Das Buch ist 2 Rubel teurer als der Einband.

Wieviel kostet der Einband?

Der Preis der Schnalle

Ein Gürtel mit Schnalle kostet 68 Kopeken. Der Gürtel ist um 60 Kopeken teurer als die Schnalle.

Wieviel kostet die Schnalle?

Abbildung 246



Honigfässer

Auf Lager waren noch sieben volle Honigfässer, sieben zur Hälfte mit Honig gefüllte Fässer und sieben leere Fässer. Das alles wurde von drei Genossenschaften gekauft, die anschließend die leeren Fässer und den Honig zu gleichen Teilen aufteilen mußten.

Die Frage ist: wie die Teilung vornehmen, ohne Honig von einem Faß ins andere zu schütten?

Wenn ihr meint, daß dies auf verschiedene Weise möglich ist, dann nennt alle Methoden, die ihr euch ausgedacht habt.

Mischas Kätzchen

Sieht Mischa irgendwo ein ausgesetztes Kätzchen, so nimmt er es gleich zu sich. Stets zieht er gleichzeitig mehrere Kätzchen auf, doch er mochte zu seinen Ka-

meraden nicht darüber sprechen, wie viele es sind, damit sie sich nicht über ihn lustig machen. Wenn sie ihn fragten:

„Wieviel Katzen hast du jetzt insgesamt?“ antwortete er:

„Nicht viel. Drei Viertel ihrer Anzahl und noch drei Viertel von einem Kätzchen, das sind alle Katzen, die ich habe.“

Die Kameraden glaubten, daß er nur scherzt. Doch dabei gab ihnen Mischa eine Aufgabe, die nicht schwierig zu lösen ist.

Versucht es!

Briefmarken

Ein Mann kaufte für 5 Rubel dreierlei Briefmarken: zu 50 Kopeken, zu 10 Kopeken und zu 1 Kopeke — insgesamt 100 Stück.

Könnt ihr sagen, wieviel Marken zu den verschiedenen Preisen er kaufte?

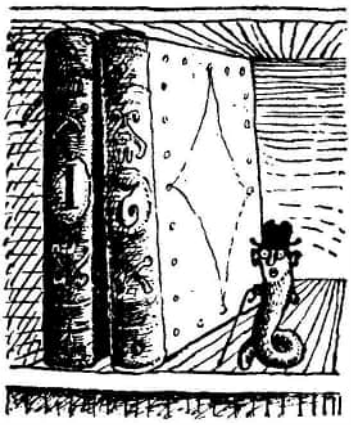
Wieviel Münzen?

Ein Mann bekam beim Einkauf 4 Rubel 65 Kopeken in Rubeln, Zehnkopekenstücken und Kopeken herausgegeben. Insgesamt erhielt er 42 Münzen.

Wieviel Münzen der verschiedenen Werte erhielt er?

Wie viele Lösungen hat die Aufgabe?

Abbildung 247



Socken und Handschuhe

In einer Schublade liegen 10 Paar braune und 10 Paar schwarze Socken, in einer anderen — 10 Paar braune und ebensoviel schwarze Handschuhe. Wie viele Sokken und Handschuhe genügt es, aus jeder Schublade herauszuholen, um daraus ein (beliebiges) Paar Socken und Handschuhe auszuwählen?

Der „Bücherwurm“

Es gibt Insekten, die Bücher zernagen. Sie fressen sich durch ein Blatt nach dem anderen und bahnen sich so einen Weg durch das Buch. Ein solcher „Bücherwurm“ bohrte sich einen Gang von der ersten Seite des ersten Bandes bis zur letzten Seite des zweiten Bandes, die nebeneinander standen wie in Abb. 247.

Jeder Band hatte 800 Seiten.

Insgesamt wieviel Seiten hat der „Wurm“ durchfressen?

Die Aufgabe ist nicht schwer, aber auch nicht so leicht, wie ihr vielleicht denkt.

Spinnen und Käfer

Ein Pionier sammelte in einer Schachtel Spinnen und Käfer — insgesamt acht Stück. Wenn man die Beine in der Schachtel zählt, so ergeben sich 54.

Wieviel Spinnen und wieviel Käfer sind nun in der Schachtel?

Sieben Freunde

Ein Mann hatte sieben Freunde. Der erste besuchte ihn jeden Abend, der zweite jeden zweiten Abend,

Abbildung 248



der dritte jeden dritten Abend, der vierte jeden vierten Abend usw. bis zum siebenten Freund, der jeden siebenten Abend erschien.

Kam es oft vor, daß alle sieben Freunde sich bei dem Gastgeber am gleichen Abend versammelten?

Fortsetzung der vorangegangenen Aufgabe

An diesen Abenden, da sich die sieben Freunde gemeinsam versammelten, bewirtete der Gastgeber sie mit Wein, und alle stießen paarweise miteinander an.

Wieviel Mal erklangen dabei die Gläser beim Anstoßen?



Antworten

Die Dohlen und die Bohlen

Diese alte volkstümliche Aufgabe wird folgendermaßen gelöst. Wir fragen uns: Wieviel waren beim zweiten Mal zum Belegen der Plätze auf den Bohlen mehr Dohlen nötig, als beim ersten Mal? Das ist leicht zu ermitteln. Im ersten Falle reichte der Platz für eine Dohle nicht aus, wogegen im zweiten alle Dohlen saßen und noch zwei fehlten. Also, um alle Bohlen zu besetzen, wären im zweiten Falle $1 + 2$, das sind drei Dohlen mehr als im ersten nötig. Auf jedem Stock sitzt doch ein Vogel mehr. Klar, daß es insgesamt drei Bohlen waren. Setzen wir auf jede Bohle eine Dohle und fügen noch eine dazu, erhalten wir die Anzahl der Vögel: vier.

Somit ist die Antwort auf die Fragestellung der Aufgabe: Vier Dohlen, drei Bohlen.

Schwestern und Brüder

Insgesamt sind es sieben: vier Brüder und drei Schwestern. Jeder Bruder hat drei Brüder und drei Schwestern. Jede Schwester hat vier Brüder und zwei Schwestern.

Wieviel Kinder?

Es sind zusammen sieben: sechs Söhne und eine Tochter. (Gewöhnlich wird jedoch geantwortet, es seien zwölf Kinder. Doch dann hätte jeder Sohn sechs Schwestern und nicht eine.)

Frühstück

Die Sache erklärt sich ganz einfach. Am Tisch saßen nicht vier, sondern drei Personen: der Großvater, sein Sohn und der Enkel. Großvater und Sohn sind Väter. Sohn und Enkel sind Söhne.

Drei Viertel eines Menschen

Wir wissen, daß drei Viertel der Brigade und eine Person die ganze Brigade bilden. Das heißt, diese drei Viertel einer Person sind das fehlende Viertel der Brigade. Weiter kann man sich nun leicht denken, daß die vollständige Brigade viermal größer als drei Viertel einer Person ist. Doch drei Viertel einer Person viermal genommen, ergeben drei. Somit besteht die Brigade aus drei Personen

Wie alt sind sie?

Es ist nicht schwer auszurechnen, wie alt jeder ist. Eindeutig ist, daß der Sohn 7mal älter als der Enkel ist und der Großvater 12mal. Wäre der Enkel ein Jahr alt, wäre der Sohn 7 Jahre, der Großvater 12 Jahre und alle drei zusammen 20 Jahre alt. Das ist genau 5mal weniger als in Wirklichkeit. Das bedeutet, der Enkel ist tatsächlich 5 Jahre, der Sohn 35 und der Großvater 60 Jahre alt.

Prüfen wir: $5 + 35 + 60 = 100$.



Wer ist älter?

Keiner ist älter. Es sind Zwillinge und jedes Kind ist zur Zeit sechs Jahre alt.

Das Alter läßt sich auf einfache Weise ermitteln: In zwei Jahren ist der Junge vier Jahre älter als vor zwei Jahren und dabei doppelt so alt. Also, vier Jahre — das war sein Alter vor 2 Jahren, und demzufolge ist er jetzt $4 + 2 = 6$ Jahre.

So alt ist auch die Schwester.

Das Alter meines Sohnes

Ist der Sohn jetzt dreimal jünger als der Vater, so ist der Vater zweimal so alt wie der Sohn. Vor fünf Jahren war der Vater natürlich auch um das Doppelte älter als der Sohn *jetzt*. Andererseits, da der Vater damals viermal so alt wie der Sohn war, war er um das Dreifache seines *damaligen* Alters älter. Folglich ist das doppelte jetzige Alter des Sohnes gleich dem dreifachen damaligen Alter oder — was das gleiche ist — der Sohn ist jetzt 1 1/2mal älter, als er vor fünf Jahren war. Daraus ist leicht abzuleiten, daß fünf Jahre die Hälfte des früheren Alters des Sohnes sind und somit der Sohn vor fünf Jahren 10 Jahre alt war, jetzt aber 15 ist.

Also ist der Sohn jetzt 15 Jahre alt, der Vater 45. Und wirklich, vor 5 Jahren war der Vater 40, der Sohn jedoch 10, also viermal jünger.

Wie alt?

Die arithmetische Lösung ist ziemlich verworren, doch die Aufgabe löst sich leicht, wenn man sich der Algebra bedient und eine Gleichung aufstellt. Die gesuchte Zahl der Jahre bezeichnen wir mit dem Buchstaben x. Das Alter nach 3 Jahren muß dann mit $x + 3$ bezeichnet werden und das Alter vor drei Jahren mit $x - 3$. Wir haben die Gleichung:

$$3(x + 3) - 3(x - 3) = x,$$

die, wenn wir sie auflösen, $x=18$ ergibt. Der Knobelfreund ist jetzt 18 Jahre alt.

Prüfen wir nach: In drei Jahren ist er 21, vor drei Jahren war er 15. Die Differenz:

$$3 \cdot 21 - 3 \cdot 15 = 63 - 45 = 18,$$

was dem derzeitigen Alter des Knobelfreundes entspricht.

Drei Töchter und zwei Söhne

Wir wissen, daß Wolodja zwei Jahre älter als Shenja ist und Nadja und Shenja zusammen doppelt so alt wie Wolodja sind. Das heißt, Nadjas und Shenjas Alter zusammen ist viermal so groß wie Shenjas Alter. Daraus folgt direkt, daß *Nadja dreimal so alt wie Shenja ist.*

Weiterhin wissen wir, daß die Summe der Altersjahre von Aljoscha und Wolodja doppelt so groß ist wie die Summe des Alters von Nadja und Shenja. Doch das Alter Wolodjas ist das doppelte Alter Shenjas, und Nadjas und Shenjas Alter zusammen sind das Vierfache von Shenjas Alter. Folglich ist Aljoschas Alter plus das dop-

pelte Alter Shenjas das achtfache Alter Shenjas. Das heißt, *Aljoscha ist sechsmal so alt wie Shenja.*

Schließlich wissen wir, daß Lidas, Nadjas und Shenjas Alter zusammen dem gemeinsamen Alter von Wolodja und Aljoscha gleich sind.

Halten wir uns die Tabelle vor Augen:

Lida — 21 Jahre,
Nadja — 3mal älter als Shenja,
Wolodja — doppelt so alt wie Shenja,
Aljoscha — 6mal älter als Shenja,

so können wir sagen, daß 21 Jahre plus das 3fache Alter Shenjas plus Shenjas Alter gleich dem 4fachen Alter Shenjas plus dem 12fachen Alter Shenjas sind.

Oder: 21 Jahre plus das 4fache Alter Shenjas sind gleich dem 16fachen Alter Shenjas.

Das heißt, 21 Jahre sind gleichzusetzen dem 12fachen Alter Shenjas und demzufolge ist Shenja 21/12=1 3/4 Jahre.

Nun ist es leicht festzustellen, daß Wolodja 3 1/2 Jahre alt ist, Nadja 5 1/4 und Aljoscha 10 1/2.

Gewerkschaftsmitglieder

Der eine ist 8 Jahre Gewerkschaftsmitglied, der andere 4 Jahre. Vor zwei Jahren betrug das Mitgliedsalter des ersten 6 Jahre, des zweiten 2 Jahre, also dreimal weniger (die Aufgabe ist leicht mit einer Gleichung zu lösen).

Wieviel Partien?

Meistens wird geantwortet, jeder hätte eine Partie gespielt, ohne dabei zu überlegen, daß drei (und überhaupt eine ungerade Zahl) Spieler niemals jeder nur einmal spielen können: mit wem hat denn dann der dritte Spieler gespielt? An jeder Partie müssen doch zwei Spieler beteiligt sein. Wenn *A*, *B* und *C* spielten und insgesamt drei Partien gespielt wurden, so heißt das, es spielten

A mit *B*;
A mit *C*;
B mit *C*.

Leicht ist zu erkennen, daß jeder nicht einmal, sondern zweimal spielte:

A spielte mit *B* und mit *C*;
B spielte mit *A*, und mit *C*;
C spielte mit *A* und mit *B*.

Somit ist die richtige Antwort auf diese Aufgabe: Jeder spielte zweimal, obgleich insgesamt drei Partien gespielt wurden.

Die Schnecke

In 10 Tagen und einem halben Tag erreicht sie die Baumspitze. In den ersten 10 Tagen kriecht die Schnecke 10 m aufwärts, jeden Tag einen Meter. Am darauffolgenden Tag kriecht sie noch 5 m und erreicht die Baumspitze. (Üblicherweise wird nicht richtig geantwortet: „Nach 15 Tagen".)



In die Stadt

Der Kolchosbauer hat nichts gewonnen, sondern verloren. Für die zweite Weghälfte brauchte er soviel Zeit, wie er für die gesamte Strecke zu Fuß benötigt hätte. Also kann er nichts an Zeit einsparen, sondern muß verlieren.

Er verlor 1/15 der Zeit, die notwendig ist, um die Hälfte der Strecke zu Fuß zu gehen.

Zur Kolchose

Die Lösung der Aufgabe wird bei folgenden Rechnungen klar deutlich:

24 km bergauf und 8 km bergab — 4 Stunden 30 Minuten,
8 km bergauf und 24 km bergab — 2 Stunden 50 Minuten.

Multiplizieren wir die zweite Zeile mit drei, bekommen wir:

24 km bergauf und 72 km bergab — 8 Stunden 30 Minuten.

Daraus wird klar, daß 72 km minus 8 km, also 64 km bergab, von dem Radfahrer in 8 Stunden 30 Minuten weniger 4 Stunden 30 Minuten, also in 4 Stunden gefahren werden. Folglich fuhr er bergab 64 : 4 = 16 km in der Stunde.

Auf analoge Weise finden wir heraus, daß er bergauf 6 km pro Stunde fuhr. Mit einer Probe kann man sich leicht von der Richtigkeit der Antwort überzeugen.

Zwei Schüler

Daraus, daß die Abgabe eines Apfels ihre Anzahl bei beiden Schülern ausgleicht, geht hervor, daß einer zwei Äpfel mehr hatte als der andere. Wenn von der geringeren Anzahl ein Apfel weggenommen und der größeren Anzahl hinzugefügt wird, vergrößert sich die Differenz nochmals um zwei, also auf vier. Wir wissen, daß dann die größere Zahl gleich doppelt so groß wie die kleinere wird. Das heißt, die kleinere Menge wird dann gleich 4, die größere gleich 8.

Vor der Übergabe des einen Apfels hatte der eine Schüler $8 - 1 = 7$, der andere $4 + 1 = 5$.

Prüfen wir nach, ob die Zahl gleich wird, wenn von der größeren 1 Apfel weggenommen und der kleineren hinzugefügt wird:

$$7 - 1 = 6; \qquad 5 + 1 = 6.$$

Also der eine Schüler hatte sieben Äpfel, der andere fünf.

Der Preis des Einbandes

Gewöhnlich wird, ohne zu überlegen, geantwortet: Der Einband kostet 50 Kopeken.

Doch dann würde das Buch 2 Rubel kosten; es wäre somit 1 Rubel 50 teurer als der Einband.

Die richtige Antwort ist: Der Preis des Einbandes beträgt 25 Kopeken, der Buchpreis 2 Rubel 25 Kopeken. Dann ist das Buch genau 2 Rubel teurer als der Einband.

Der Preis der Schnalle

Habt ihr herausbekommen, daß die Schnalle 8 Kopeken kostet? Wenn ja, habt ihr euch geirrt. Denn dann wäre ja der Gürtel nicht um 60 Kopeken teurer als die Schnalle, sondern um 52 Kopeken.

Die richtige Antwort ist: Der Preis der Schnalle beträgt 4 Kopeken, dann kostet der Gürtel 68 — 4 = 64 Kopeken und ist um 50 Kopeken teurer als die Schnalle.

Honigfässer

Die Aufgabe ist ziemlich einfach zu lösen, wenn man davon ausgeht, daß in den 21 gekauften Fässern 7 + 3 1/2, also 10 1/2 Fässer Honig war.

Das bedeutet, jede Genossenschaft muß 3 1/2 Fässer Honig und sieben leere Fässer bekommen.

Die Teilung kann man auf zweierlei Weise vornehmen. In einem Falle erhalten die Genossenschaften:

1. Genossenschaft { 3 volle, 1 halbvolles, 3 leere } Insgesamt 3 1/2 Faß Honig
2. Genossenschaft { 2 volle, 3 halbvolle, 2 leere } Insgesamt 3 1/2 Faß Honig
3. Genossenschaft { 2 volle, 3 halbvolle, 2 leere } Insgesamt 3 1/2 Faß Honig

Nach der anderen Methode erhalten die Genossenschaften:

1. Genossenschaft { 3 volle, 1 halbvolles, 3 leere } Insgesamt 3 1/2 Faß Honig
2. Genossenschaft { 3 volle, 1 halbvolles, 3 leere } Insgesamt 3 1/2 Faß Honig
3. Genossenschaft { 1 volles, 5 halbvolle, 1 leeres } Insgesamt 3 1/2 Faß Honig

Mischas Kätzchen

Es ist unschwer zu begreifen, daß 3/4 Kätzchen ein Viertel aller Katzen ist.

Das heißt, alle Katzen zusammen waren viermal mehr als 3/4, also drei. Wirklich, 3/4 von 3 sind 2 1/4, und es bleibt 3/4 Kätzchen übrig.

Briefmarken

Die Aufgabe hat nur eine Lösung. Der Mann kaufte:

50-Kopeken-Marken	1	Stück
10-Kopeken-Marken	39	„
1-Kopeken-Marken	60	„

Wahrhaftig, alle Marken zusammen $1 + 39 + 60 = 100$ Stück. Und sie kosten $50 + 390 + 60 = 500$ Kopeken.

Wieviel Münzen?

Die Aufgabe hat vier Lösungen. Hier sind sie:

	I	II	III	IV
Rubel	1	2	3	4
10-Kopeken-Stücke	36	25	14	3
1-Kopeken-Stücke	5	15	25	35
Summe der Münzen	42	42	42	42

Socken und Handschuhe

Es genügen drei Socken, da zwei davon stets die gleiche Farbe haben. Doch nicht so einfach ist es mit den Handschuhen, die sich voneinander nicht nur in der Farbe, sondern zusätzlich dadurch unterscheiden, daß die Hälfte der Handschuhe linke, die andere Hälfte rechte sind. Hier genügen 21 Handschuhe. Wenn man eine geringere Zahl herausholt, zum Beispiel 20, kann es geschehen, daß alle 20 für die gleiche Hand sind (10 braune linke und 10 schwarze linke).

Der „Bücherwurm"

Gewöhnlich wird geantwortet, der Wurm habe $800 + 800$ Seiten und zusätzlich zwei Einbanddeckel durchgefressen. Doch das ist nicht so. Stellt zwei Bücher nebeneinander: das erste links, das zweite rechts, wie es die Zeichnung auf S. 324 darstellt. Und dann schaut euch an, wieviel Seiten zwischen der ersten Seite des ersten Buches und der letzten Seite des zweiten Buches sind.

Ihr werdet euch davon überzeugen, daß zwischen ihnen *gar nichts*, außer zwei Einbanddeckeln ist. Der „Bücherwurm" hat also nur die Bucheinbände verdorben, ohne die Blätter zu berühren.

Spinnen und Käfer

Um diese Aufgabe zu lösen, muß man sich vor allem an den Biologieunterricht erinnern, um zu wissen, wieviel Beine der Käfer und wieviel die Spinne hat. Der Käfer hat sechs Beine, die Spinne acht.

Wissen wir das, wollen wir annehmen, daß in der Schachtel nur Käfer waren, acht Stück an der Zahl. Dann müßten es $6 \cdot 8 = 48$ Beine sein, sechs weniger als die Aufgabe nennt. Versuchen wir jetzt einen Käfer durch eine Spinne zu ersetzen. Davon erhöht sich die Anzahl der Beine um zwei, weil ja die Spinne nicht sechs, sondern acht Beine hat.

Es ist klar, da wir nach dreimaligem Austausch die Zahl der Beine in der Schachtel auf die geforderten 54 bringen. Doch dann sind anstatt acht Käfer nur noch fünf in der Schachtel, der Rest sind Spinnen.

Somit waren fünf Käfer und drei Spinnen in der Schachtel.

Prüfen wir es nach: Fünf Käfer haben 30 Beine, drei Spinnen 24, insgesamt $30 + 24 = 54$, wie es die Bedingungen der Aufgabe vorschreiben.

Man kann die Aufgabe auch anders lösen. Und zwar: Man kann davon ausgehen, daß in der Schachtel nur Spinnen waren — acht Stück. Dann wären es $8 \cdot 8 = 64$ Beine, 10 Beine mehr als die Bedingung besagt. Ersetzen wir eine Spinne durch einen Käfer, reduzieren wir die Anzahl der Beine um zwei. Fünfmal muß man einen solchen Austausch vornehmen, um die Anzahl der Beine auf die geforderten 54 zu bringen. Anders ausgedrückt, von den acht Spinnen dürfen nur drei übrigbleiben, alle anderen sind durch Käfer zu ersetzen.

Sieben Freunde

Es ist nicht schwer zu erraten, daß alle sieben Freunde sich nur nach einer solchen Zahl von Tagen treffen können, die durch 2, durch 3, durch 4, durch 5, durch 6 und durch 7 teilbar ist. Die kleinste solche Zahl ist die 420.

Folglich kommen alle Freunde nur einmal in 420 Tagen zusammen.

Fortsetzung der vorangegangenen Aufgabe

Jeder der acht Anwesenden (der Gastgeber und sieben Freunde) stößt mit den sieben anderen an: Also, insgesamt zählen wir $8 \cdot 7 = 56$ Zusammenstöße zweier Gläser. Doch dabei ist jedes Paar doppelt gezählt (zum Beispiel der dritte Gast mit dem fünften und der fünfte mit dem dritten wurden als verschiedene Paare gerechnet). Folglich erklangen die Gläser $\frac{56}{2} = 28$mal.



Könnt ihr zählen?

Könnt ihr zählen?

Das ist ja eine geradezu beleidigende Frage für einen über drei Jahre alten Menschen. Wer kann nicht zählen? Um nacheinander „eins“ „zwei“ „drei“ auszusprechen, bedarf es keiner besonderen Kunst. Und dennoch bin ich sicher, daß ihr nicht immer mit dieser scheinbar einfachen Sache ohne weiteres fertig werdet. Alles hängt davon ab, was zu zählen ist. Es ist nicht schwer, die Nägel in einer Kiste zu zählen. Doch wenn darin nicht nur Nägel liegen, sondern Nägel und Schrauben durcheinander, und ihr nun feststellen sollt, wieviel von den einen und wieviel von den anderen vorhanden sind. Wie geht ihr dann vor? Sortiert ihr den Haufen getrennt nach Nägeln und Schrauben und zählt sie dann erst?

Solche Aufgabe steht auch vor der Hausfrau, wenn sie die Wäschestücke für die Wäscherei zählen muß. Sie legt die Wäsche nach Sorten: Hemden auf einen Haufen, Handtücher auf einen anderen, Kissenbezüge auf einen dritten usw. Und erst nachdem sie sich mit dieser ziemlich ermüdenden Arbeit abgeplagt hat, beginnt sie mit dem Zählen der Wäschestücke jedes Häufchens.

Eben das nennt man nicht zählen können! Weil die Methode des Zählens verschiedenartiger Gegenstände recht unzweckmäßig, mühselig und oftmals überhaupt nicht durchführbar ist. Ein Glück, wenn ihr Nägel oder Wäschestücke zählen müßt. Sie sind leicht in Haufen zu verteilen. Doch versetzt euch in die Lage eines Försters, der zählen muß, wieviel Kiefern auf einem Hektar wachsen, und wieviel auf dem gleichen Gelände Tannen, Birken und Erlen stehen. Die Bäume kann man nicht vorher aussortieren und nach Arten gruppieren. Ja wie dann, werdet ihr zuerst nur die Kiefern zählen, dann die Tannen, danach die Birken und schließlich die Erlen? Viermal werdet ihr das Waldstück durchgehen?

Gibt es keine Methode, das einfacher zu machen, mit einer Begehung des Geländes? Ja, so eine Methode gibt es, und Förster wenden sie seit langem an. Am Beispiel der Nägel und Schrauben zeige ich euch, worin sie besteht.

Um mit einem Male zu zählen, wieviel Nägel und wieviel Schrauben in einem Kasten sind, ohne sie

vorher auseinanderzusortieren, rüstet euch mit einem Bleistift und einem Blatt Papier, das nach diesem Muster gestaltet ist:

Nägel	Schrauben

Danach beginnt ihr zu zählen. Nehmt aus dem Kasten, was euch zuerst unter die Finger gerät. Ist es ein Nagel, so macht ihr auf dem Blatt Papier in der Spalte Nägel einen Strich; ist es eine Schraube — dann vermerkt sie durch einen Strich in der Spalte Schrauben. Nehmt den nächsten Gegenstand und verfahrt ebenso. Nehmt einen dritten usw., bis der ganze Kasten leer ist. Am Schluß der Zählung sind auf dem Papier in der Spalte Nägel so viele Striche wie Nägel in dem Kasten waren, und in der Spalte Schrauben — so viele Striche, wie es Schrauben waren. Bleibt nur noch übrig, die Striche auf dem Papier zusammenzuzählen.

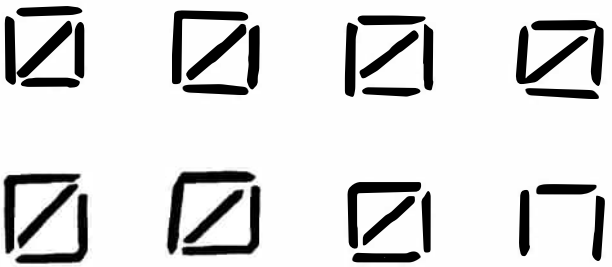
Abbildung 249



Das Zählen der Striche kann man vereinfachen und beschleunigen, wenn man sie nicht einfach hintereinanderreiht, sondern sie zu fünft zusammenstellt in beispielsweise solchen Figuren, wie auf Abb. 249 zu sehen ist.

Die kleineren Quadrate gruppiert man am besten paarweise, so daß nach den ersten 10 Strichen der 11. in eine neue Spalte kommt. Sind in der zweiten Spalte

Abbildung 250



zwei Quadrate entstanden, beginnt man das folgende Quadrat in der dritten Spalte usw. Die Striche sind dann etwa so angeordnet, wie das auf Abb. 250 dargestellt ist.

Derartig angeordnete Striche lassen sich leicht zählen. Ihr seht sofort, daß hier drei volle Zehner, ein Fünfer und noch drei Striche sind, also insgesamt $30 + 5 + 3 = 38$.

Man kann Figuren anderer Gestalt verwenden. Oft werden sólche Zeichen angewendet, wo jedes volle Quadrat 10 bedeutet (Abb. 251).

Abbildung 251



Auf genau die gleiche Weise müßt ihr beim Zählen von verschiedenen Bäumen vorgehen. Doch auf dem Papierblatt habt ihr nun statt zwei Spalten vier.

Zweckmäßiger ist es hier, die Spalten nicht vertikal, sondern horizontal anzuordnen. Das Blatt Papier sieht dann folgendermaßen aus:

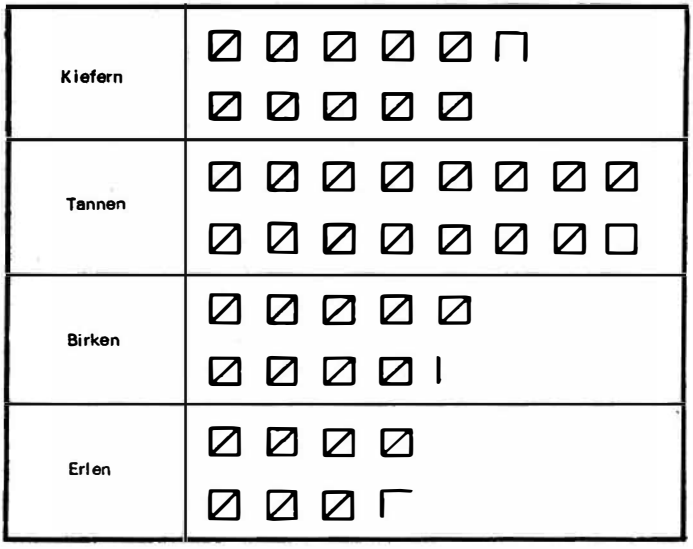
Kiefern	
Tannen	
Birken	
Erlen	

Nach der Zählung sieht das Blatt etwa wie auf Abb. 252 aus.

Das Ergebnis ist hier ganz einfach zu ermitteln:

Kiefern 53
Tannen 79
Birken 46
Erlen 37.

Abbildung 252



Die gleiche Methode wendet auch der Mediziner an, wenn er unter dem Mikroskop zählt, wieviel rote und wieviel weiße Blutkörperchen in der entnommenen Blutprobe enthalten sind.

Wenn ihr zum Beispiel mal zählen müßt, was für Pflanzen und in welcher Anzahl auf einem kleinen Wiesenfleck wachsen, so wißt ihr bereits, wie man diese Aufgabe in möglichst kurzer Zeit erledigen kann. Auf einem Blatt Papier schreibt ihr vorher die Namen der festgestellten Pflanzen, für jede eine besondere Spalte lassend, auf und laßt einige Spalten frei als Reserve für jene Pflanzen, auf die ihr eventuell noch trefft. Ihr beginnt die Zählung beispielsweise so, wie es auf Abb. 252 gezeigt wird.

Weiter geht ihr eben so vor, wie beim Zählen in dem Forstrevier.

Wozu denn die Bäume im Wald **zählen?** Wozu müssen eigentlich die Bäume im Wald **gezählt** werden? Den Städtern erscheint das ohnehin als eine unmögliche Aufgabe. In dem Roman „Anna Karenina" von L. N. Tolstoi fragt der Landwirtschaftsexperte Lewin seinen in dieser Sache unbeschlagenen Verwandten, der Wald verkaufen will:

„Hast Du die Bäume gezählt?"

„Wie sollte man denn die Bäume **zählen?**" antwortet dieser verwundert. „Des Sandes Körner und

der Sterne Strahlen vermag vielleicht ein hoher Geist zu zählen."

„Schön, aber der Geist Rjabinins (der Käufer — *J. P.*) ist hoch genug, sie zu zählen. Und nicht ein Bauer würde kaufen, ohne gezählt zu haben."

Die Bäume im Wald zählt man, um festzustellen, wieviel Kubikmeter Holz er enthält. Man zählt nicht die Bäume des gesamten Waldes, sondern eines bestimmten Abschnittes — einen viertel oder einen halben Hektar —, der so ausgewählt ist, daß er hinsichtlich Dichte und Bestand, Stärke und Höhe seiner Bäume einen Mittelwert für den gegebenen Wald darstellt. Für die richtige Auswahl einer solchen repräsentativen Fläche braucht man natürlich ein erfahrenes Auge. Bei der Zählung genügt nicht, die Anzahl der Bäume jeder einzelnen Art zu bestimmen. Man muß außerdem wissen, wieviel Stämme jeder Stärke vorhanden sind: Wie viele 25 Zentimeter starke, 30 Zentimeter starke, 35 Zentimeter starke usw. In den Rechnungslisten sind deshalb nicht nur vier Spalten, wie in unserem vereinfachten Beispiel, sondern wesentlich mehr enthalten. Ihr könnt euch jetzt vorstellen, wie viele Male man durch den Wald gehen müßte, wollte man die Bäume nicht so, wie hier erläutert, zählen.

Wie ihr seht, ist das Zählen nur dann eine einfache und leichte Angelegenheit, wenn gleichartige Gegenstände gezählt werden. Ist die Anzahl verschiedenartiger Gegenstände zu ermitteln, wird es nötig, sich besonderer soeben erklärter Methoden zu bedienen, von deren Existenz viele gar nichts ahnen.

338-339



Schnellrechnen

(Einfache Methoden des Kopfrechnens)

Hier sind einfache und leichtverständliche Methoden des schnellen Kopfrechnens zusammengetragen. Wenn man diese Methoden anwendet, muß man daran denken, daß ihre erfolgreiche Beherrschung einen nicht mechanischen, sondern voll bewußten Gebrauch und außerdem ein mehr oder weniger ausdauerndes Training voraussetzt. Dafür kann man, sobald man sich die empfohlenen Methoden zu eigen gemacht hat, schnelle Berechnungen im Kopfe mit gleicher Exaktheit ausführen wie beim schriftlichen Rechnen.

Multiplizieren mit einer einstelligen Zahl

§ 1. Um im Kopf eine Zahl mit einem einstelligen Multiplikator malzunehmen (zum Beispiel $27 \cdot 8$), beginnt man nicht mit der Multiplikation der Einer, wie bei der schriftlichen Multiplikation, sondern anders: Man nimmt zuerst die Zehner des Multiplikanden mal ($20 \cdot 8 = 160$), danach die Einer ($7 \cdot 8 = 56$) und addiert beide Ergebnisse ($160 + 56 = 216$).

Weitere Beispiele:

$34 \cdot 7 = 30 \cdot 7 + 4 \cdot 7 = 210 + 28 = 238$,
$47 \cdot 6 = 40 \cdot 6 + 7 \cdot 6 = 240 + 42 = 282$.

§ 2. Es ist von Nutzen, sich die Multiplikationstabelle bis $19 \cdot 9$ einzuprägen:

	2	3	4	5	6	7	8	9
11	22	33	44	55	66	77	88	99
12	24	36	48	60	72	84	96	108
13	26	39	52	65	78	91	104	117
14	28	42	56	70	84	98	112	126
15	30	45	60	75	90	105	120	135
16	32	48	64	80	96	112	128	144
17	34	51	68	85	102	119	136	153
18	36	54	72	90	108	126	144	162
19	38	57	76	95	114	133	152	171



Kennt man diese Tabelle, kann man zum Beispiel 147 · 8 im Kopf so multiplizieren:

$147 \cdot 8 = 140 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = 1120 + 56 = 1176.$

§ 3. Wenn eine der malzunehmenden Zahlen in einstellige Multiplikatoren zerlegbar ist, so ist es vorteilhaft, nacheinander mit diesen Multiplikatoren zu multiplizieren, zum Beispiel:

$225 \cdot 6 = 225 \cdot 2 \cdot 3 = 450 \cdot 3 = 1350.$

Multiplizieren mit einer zweistelligen Zahl

§ 4. Das Multiplizieren mit einer zweistelligen Zahl bemühen wir uns für das Kopfrechnen zu erleichtern, indem wir diese Operation in die gewohnte Form der Multiplikation mit einer einstelligen Zahl umwandeln.

Wenn der Multiplikand einstellig ist, stellen wir in Gedanken den Multiplikator um und führen die Operation so aus, wie in § 1 festgelegt ist. Zum Beispiel:

$6 \cdot 28 = 28 \cdot 6 = 120 + 48 = 168.$

§ 5. Sind beide Multiplikatoren zweistellig, so zerlegt man in Gedanken einen davon in Zehner und Einer. Zum Beispiel:

$29 \cdot 12 = 29 \cdot 10 + 29 \cdot 2 = 290 + 58 = 348.$
$41 \cdot 16 = 41 \cdot 10 + 41 \cdot 6 = 410 + 246 = 656$
(oder $41 \cdot 16 = 16 \cdot 41 = 16 \cdot 40 + 16 = 640 + 16 = 656$).

Vorteilhafter ist es, den Multiplikanden in Zehner und Einer zu zerlegen, bei dem sie in kleineren Zahlen ausgedrückt sind.

§ 6. Wenn Multiplikator oder Multiplikand leicht im Kopfe in einstellige Ziffern zerlegt werden können (beispielsweise $14 = 2 \cdot 7$), so nutzt man das aus, um einen der Multiplikatoren zu verkleinern, indem man den anderen um das gleiche vergrößert (vgl. § 3). Zum Beispiel:

$45 \cdot 14 = 90 \cdot 7 = 630.$

Multiplikation und Division mit der 4 und der 8

§ 7. Um im Kopf eine Zahl mit 4 malzunehmen, verdoppelt man sie. Zum Beispiel:

$112 \cdot 4 = 224 \cdot 2 = 448.$ $\quad$ $335 \cdot 4 = 670 \cdot 2 = 1340.$

§ 8. Um im Kopf eine Zahl mit 8 malzunehmen, verdoppelt man sie dreifach. Beispiel:

$217 \cdot 8 = 434 \cdot 4 = 868 \cdot 2 = 1736.$

Eine andere Methode des Malnehmens mit 8 im Kopfe besteht darin, daß man zum Multiplikanden eine Null hinzufügt und den zweifachen Multiplikanden davon abzieht (d. h., man multipliziert im Grunde mit $10 - 2$):

$217 \cdot 8 = 2170 - 434 = 1736.$

Noch einfacher:

$217 \cdot 8 = 200 \cdot 8 + 17 \cdot 8 = 1600 + 136 = 1736.$

§ 9. Um im Kopf eine Zahl durch 4 zu teilen, wird sie zweimal halbiert. Beispiel:

$76 : 4 = 38 : 2 = 19,$
$236 : 4 = 118 : 2 = 59.$

§ 10. Um im Kopf eine Zahl durch 8 zu teilen, halbiert man sie dreimal. Beispiel:

$464 : 8 = 232 : 4 = 116 : 2 = 58,$
$516 : 8 = 258 : 4 = 129 : 2 = 64\ 1/2.$

Multiplikation mit 5 und 25

§ 11. Um im Kopf eine Zahl mit 5 zu multiplizieren, nimmt man sie mit $\frac{10}{2}$mal, d. h., hängt an die Zahl eine Null an und teilt durch 2. Beispiel:

$74 \cdot 5 = 740 : 2 = 370.$
$243 \cdot 5 = 2430 : 2 = 1215.$

Beim Multiplizieren mit 5 ist es praktischer, gerade Zahlen erst durch 2 zu teilen und zum Ergebnis die Null hinzuzufügen. Beispiel:

$74 \cdot 5 = \frac{74}{2} \cdot 10 = 370.$

§ 12. Um im Kopf eine Zahl mit 25 zu multiplizieren, nimmt man sie mit $\frac{100}{4}$ mal, d. h., ist die Zahl durch 4 teilbar, teilt man sie durch 4 und fügt dann zwei Nullen hinzu. Zum Beispiel:

$72 \cdot 25 = \frac{72}{4} \cdot 100 = 1800.$



Ergibt die Zahl beim Dividieren durch 4 einen Rest, dann fügt man

bei	Rest	1	zum Quotienten	
"	"	"	25	
"	"	2	50	
"	"	3	75	hinzu.

Die Grundlage für diese Methode besteht darin, daß 100 : 4=25; 200 : 4=50; 300 : 4=75 ist.

Multiplizieren mit 1 1/2, 1 1/4, 2 1/2 und 3/4

§ 13. Um im Kopf eine Zahl mit 1 1/2 malzunehmen, fügt man zum Multiplikanden seine Hälfte hinzu. Zum Beispiel:

$34 \cdot 1\,1/2 = 34 + 17 = 51.$
$23 \cdot 1\,1/2 = 23 + 11\ 1/2 = 34\ 1/2$ (oder 34,5).

§ 14. Um im Kopf eine Zahl mit 1 1/4 malzunehmen, fügt man zum Multiplikanden seinen vierten Teil hinzu. Zum Beispiel:

$48 \cdot 1\ 1/4 = 48 + 12 = 60.$
$58 \cdot 1\ 1/4 \cdot 58 + 14\,1/2 = 72\ 1/2$ (oder 72,5).

§ 15. Um im Kopf eine Zahl mit 2 1/2 malzunehmen, fügt man zur verdoppelten Zahl die Hälfte des Multiplikanden hinzu. Beispiel:

$18 \cdot 2\,1/2 = 36 + 9 = 45.$
$39 \cdot 2\,1/2 = 78 + 19\,1/2 = 97\ 1/2$ (oder 97,5).

Eine andere Methode besteht in der Multiplikation mit 5 und der anschließenden Division durch 2:

$18 \cdot 2\,1/2 = 90 : 2 = 45.$

§ 16. Um im Kopf eine Zahl mit 3/4 zu multiplizieren (das heißt, um 3/4 dieser Zahl zu bekommen), nimmt man die Zahl mit 1 1/2 mal und teilt danach durch 2. Beispiel:

$$30 \cdot \frac{3}{4} = \frac{30+15}{2} = 22\ 1/2 \text{ (oder 22,5).}$$

Eine Variante davon besteht darin, daß vom Multiplikanden sein vierter Teil abgezogen wird oder der Hälfte des Multiplikanden die Hälfte dieser Hälfte hinzugefügt wird.

Multiplikation mit 15, 125 und 75

§ 17. Das Multiplizieren mit 15 wird ersetzt durch das Malnehmen mit 10 und mit 1 1/2 (weil $10 \cdot 1\,1/2 = 15$ ist). Beispiel:

$18 \cdot 15 = 18 \cdot 1\,1/2 \cdot 10 = 270.$
$45 \cdot 15 = 450 + 225 = 675.$

§ 18. Die Multiplikation mit 125 wird ersetzt durch das Malnehmen mit 100 und 1 1/4 (weil $100 \cdot 1\,1/4 = 125$ ist). Beispiel:

$26 \cdot 125 = 26 \cdot 100 \cdot 1\,1/4 = 2600 + 650 = 3250.$

$47 \cdot 125 = 47 \cdot 100 \cdot 1\,1/4 = 4700 + \frac{4700}{4} =$

$= 4700 + 1175 = 5875.$

§ 19. Die Multiplikation mit 75 ersetzt man durch Multiplizieren mit 100 und 3/4 (weil $100 \cdot 3/4 = 75$ ist). Zum Beispiel:

$$18 \cdot 75 = 18 \cdot 100 \cdot 3/4 = 1800 \cdot 3/4 = \frac{1800 + 900}{2} = 1350.$$

Anmerkung: Einige der angeführten Beispiele lassen sich auch bequem mit der Methode des § 6 ausführen:

$18 \cdot 15 = 90 \cdot 3 = 270.$
$26 \cdot 125 = 130 \cdot 25 = 3250.$

Multiplizieren mit 9 und 11

§ 20. Um im Kopf eine Zahl mit 9 zu multiplizieren, fügt man eine Null hinzu und zieht den Multiplikanden ab. Beispiel:

$62 \cdot 9 = 620 - 62 = 600 - 42 = 558.$
$73 \cdot 9 = 730 - 73 = 700 - 43 = 657.$

§ 21. Um im Kopf eine Zahl mit 11 zu multiplizieren, hängt man eine Null an und fügt den Multiplikanden dazu. Beispiel:

$87 \cdot 11 = 870 + 87 = 957.$

Dividieren durch 5, 1 1/2 und 15

§ 22. Um im Kopf eine Zahl durch fünf zu dividieren, teilt man mit dem Komma die letzte Ziffer der verdoppelten Zahl ab. Beispiel:

$68 : 5 = \frac{136}{10} = 13{,}6.$

$237 : 5 = \frac{474}{10} = 47{,}4.$



§ 23. Um im Kopf eine Zahl durch 1 1/2 zu dividieren, teilt man die verdoppelte Zahl durch 3. Beispiel:

$36 : 1\,1/2 = 72 : 3 = 24.$
$53 : 1\,1/2 = 106 : 3 = 35\,1/3.$

§ 24. Um im Kopf eine Zahl durch 15 zu teilen, wird die verdoppelte Zahl mit 30 dividiert. Beispiel:

$240 : 15 = 480 : 30 = 48 : 3 = 16.$
$462 : 15 = 924 : 30 = 30\,24/30 = 30\,4/5 = 30{,}8$

(oder $924 : 30 = 308 : 10 = 30{,}8$).

Ins Quadrat setzen

§ 25. Um eine Zahl, die mit der Ziffer 5 endet, ins Quadrat zu setzen (zum Beispiel 85) multipliziert man die Zahl der Zehner (8) mit sich, plus eins ($8 \cdot 9 = 72$) und hängt eine 25 an (in unserem Beispiel erhalten wir 7225). Weitere Beispiele:

25^2; $2 \cdot 3 = 6$; 625.
45^2; $4 \cdot 5 = 20$; 2025.
145^2; $14 \cdot 15 = 210$; 21 025.

Das Verfahren resultiert aus der Formel

$$(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100x(x + 1) + 25.$$

§ 26. Das eben genannte Verfahren wenden wir auch auf die Dezimalbrüche an, die mit der Ziffer 5 enden:

$8{,}5^2 = 72{,}25$; $14{,}5^2 = 210{,}25$;
$0{,}35 = 0{,}1225$; usw.

§ 27. Da $0{,}5 = 1/2$ und $0{,}25 = 1/4$ ist, so kann die Methode des § 25 auch angewendet werden, um Zahlen ins Quadrat zu setzen, die mit dem Bruch 1/2 enden:

$(8\,1/2)^2 = 72\,1/4.$
$(14\,1/2)^2 = 210\,1/4$ usw.

§ 28. Beim mündlichen Insquadratsetzen ist es oftmals zweckmäßig, sich der Formel $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm \pm 2ab$ zu bedienen.
Beispiel:

$41^2 = 40^2 + 1 + 2 \cdot 40 = 1601 + 80 = 1681.$
$69^2 = 70^2 + 1 - 2 \cdot 70 = 4901 - 140 = 4761.$
$36^2 = (35 + 1)^2 = 1225 + 1 + 2 \cdot 35 = 1296.$

Diese Methode ist auch geeignet für Zahlen, die auf 1, 4, 6 und 9 enden.

Rechnen nach der Formel $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

§ 29. Nehmen wir an, es ist im Kopf die Multiplikation $52 \cdot 48$ vorzunehmen. In Gedanken stellen wir uns die Multiplikatoren in der Form $(50 + 2) \cdot (50 - 2)$ vor und wenden die in der Überschrift angeführte Formel an:

$(50 + 2) \cdot (50 - 2) = 50^2 - 2^2 = 2496.$

In entsprechender Weise handelt man in allen Fällen, wenn es möglich ist, den einen Multiplikator als Summe zweier Zahlen, den anderen als Differenz der gleichen Zahlen darzustellen:

$69 \cdot 71 = (70 - 1) \cdot (70 + 1) = 4899.$
$33 \cdot 27 = (30 + 3) \cdot (30 - 3) = 891.$
$53 \cdot 57 = (55 - 2) \cdot (55 + 2) = 3021.$
$84 \cdot 86 = (85 - 1) \cdot (85 + 1) = 7224.$

§ 30. Das gerade erwähnte Verfahren ist auch gut anzuwenden für Rechnungen folgender Art:

$7\,1/2 \cdot 6\,1/2 = (7 + 1/2) \cdot (7 - 1/2) = 48\,3/4.$
$11\,3/4 \cdot 12\,1/4 = (12 - 1/4) \cdot (12 + 1/4) = 143\,15/16.$

Vorteilhaft, sich einzuprägen $37 \cdot 3 = 111$

Prägt man sich das ein, so ist die Multiplikation im Kopf der Zahl 37 mit 6, 9, 12 usw. leicht auszuführen:

$37 \cdot 6 = 37 \cdot 3 \cdot 2 = 222.$
$37 \cdot 9 = 37 \cdot 3 \cdot 3 = 333.$
$37 \cdot 12 = 37 \cdot 3 \cdot 4 = 444.$
$37 \cdot 15 = 37 \cdot 3 \cdot 5 = 555$ usw.
$7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001.$

Merkt man sich das, fällt es leicht, Multiplikationen folgender Art im Kopf vorzunehmen:

$77 \cdot 13 = 1001.$	$91 \cdot 11 = 1001.$	$143 \cdot 7 = 1001.$
$77 \cdot 26 = 2002.$	$91 \cdot 22 = 2002.$	$143 \cdot 14 = 2002.$
$77 \cdot 39 = 3303.$	$91 \cdot 33 = 3003$ usw.	$143 \cdot 21 = 3003$ usw.

Hier sind nur die einfachsten, am meisten gebrauchten Methoden der Multiplikation, Division und Quadratbildung im Kopf genannt. In der Praxis wird sich der nachdenkliche Leser noch eine Reihe weiterer Methoden erarbeiten, die ihm die Rechenarbeit erleichtern.



Magische Quadrate

Das kleinste magische Quadrat

Die Zusammenstellung von magischen oder Zauberquadraten ist eine alte und noch heute sehr verbreitete Form der mathematischen Zerstreuung. Die Aufgabe besteht im Herausfinden einer solchen Anordnung aufeinanderfolgender Zahlen (mit 1 beginnend) in den Feldern eines Quadrates, daß die Summe der Zahlen aller Zeilen, Reihen und der beiden Diagonalen des Quadrates gleich sind.

Das kleinste magische Quadrat ist das mit 9 Feldern. Leicht kann man sich durch Probieren davon überzeugen, daß es ein magisches Quadrat aus 4 Feldern nicht geben kann. Hier ist ein Muster eines magischen Quadrates aus 9 Feldern:

Abbildung 253

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Addieren wir in diesem Quadrat die Zahlen $4+3+8$, oder $2+7+6$, oder $3+5+7$, oder $4+5+6$ oder eine beliebige andere Reihe dieser drei Zahlen, stets erhalten wir die gleiche Summe, 15. Das Ergebnis kann man voraussehen, noch ehe das Quadrat selbst zusammengestellt ist. Die drei Zeilen des Quadrates — die obere, die mittlere und die untere — müssen alle seine neun Zahlen umfassen, die die Summe bilden:

$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$

Andererseits muß die Summe offensichtlich dem dreifachen Ergebnis einer Zeile gleich sein. Daher resultiert für jede das Ergebnis:

$45:3=15.$

Auf entsprechende Weise kann man im voraus die Summe der Zahlen einer Zeile oder Reihe jedes beliebigen magischen Quadrates bestimmen, aus welcher Anzahl von Feldern es auch immer besteht. Man muß dazu die Summe aller Zahlen des Quadrates durch die Anzahl seiner Zeilen teilen.

Drehungen und Spiegelbilder

Hat man ein magisches Quadrat gebildet, kann man leicht Varianten davon schaffen, also eine Reihe neuer magischer Quadrate finden. Haben wir zum Beispiel ein magisches Quadrat zusammengestellt (Abb. 254), so erhalten wir, wenn wir es in Gedanken um ein Viertel einer vollen Umdrehung (90°) drehen, ein anderes magisches Quadrat (Abb. 255):

Abbildung 254

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Abbildung 255

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Weitere Drehungen — um 180° (die Hälfte einer vollen Umdrehung) und um 270° (drei Viertel der vollen Umdrehung) — ergeben noch zwei Varianten des ursprünglichen Quadrates.

Jedes der neu gebildeten magischen Quadrate kann man seinerseits variieren, wenn man sich gewissermaßen das Spiegelbild vorstellt. Die Abbildung 256 zeigt das ursprüngliche Quadrat und eines seiner Spiegelbilder.

Abbildung 256

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	9	4
7	5	3
6	8	1

Führen wir mit einem 9-Felder-Quadrat alle Drehungen und Spiegelungen durch, erhalten wir von ihm folgende Varianten (Abb. 257):

Abbildung 257 (1—3)

6	1	8
7	5	3
2	9	4

1

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

3

Abbildung 257 (4—8)

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

5

2	9	4
7	5	3
6	1	8

6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

7

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8

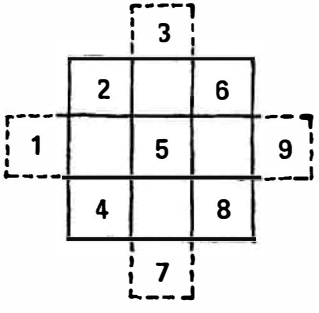
Das ist die vollständige Sammlung aller magischen Quadrate, die überhaupt aus den ersten neun Zahlen gebildet werden können.

Die Methode Bachets

Machen wir uns mit einer alten Methode zur Bildung *ungerader* magischer Quadrate bekannt, Quadrate mit einer beliebigen ungeraden Anzahl von Feldern: $3 \cdot 3$, $5 \cdot 5$, $7 \cdot 7$ usw. Diese Methode wurde im 17. Jahrhundert von dem französischen Mathematiker Bachet unterbreitet. Da sich die Methode Bachets übrigens auch für 9-Felder-Quadrate eignet, ist es am besten, die Beschreibung dieses Verfahrens mit diesem einfachen Beispiel zu beginnen. Nun, fangen wir an mit der Zusammenstellung eines magischen 9-Felder-Quadrates nach der Methode von Bachet.

Haben wir ein in 9 Felder unterteiltes Quadrat aufgezeichnet, schreiben wir in der Reihenfolge die Zahlen von 1—9 in schrägen Reihen, drei pro Reihe, wie es in Abbildung 258 gezeigt ist.

Abbildung 258



Die außerhalb des Quadrates befindlichen Zahlen tragen wir so in das Quadrat ein, daß sie sich in den gegenüberliegenden Seiten des Quadrates einfügen (in den gleichen Zeilen bzw. Spalten verbleibend wie vordem).

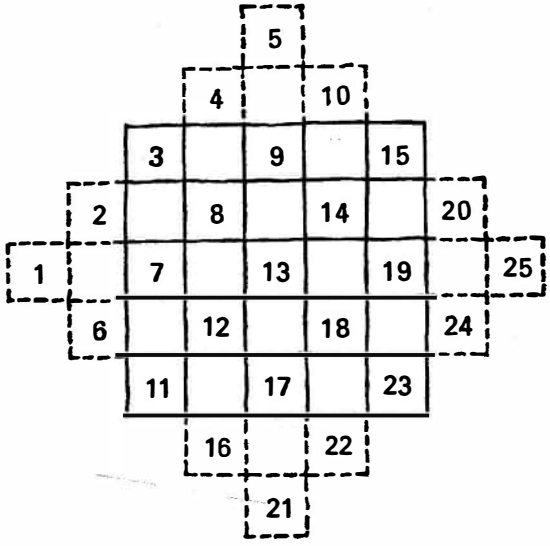
Abbildung 259

Im Ergebnis entsteht das Quadrat:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Wenden wir die Regel Bachets zur Zusammenstellung eines Quadrates aus 5 · 5 Feldern an. Beginnen wir mit der Anordnung der Zahlen:

Abbildung 260



Nun sind nur noch die außerhalb der Linien des Quadrates verbliebenen Zahlen hereinzubringen. Dazu müssen die Figuren, die von den außerhalb des Quadrates stehenden Zahlen gebildet werden („Terassen"), sinngemäß so in das Quadrat eingefügt werden, daß diese Figuren sich in die *gegenüberliegenden* Seiten des Quadrates einpassen. Es entsteht ein magisches 25-Felder-Quadrat (Abb. 261).



Abbildung 261

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Die Begründung für dieses einfache Verfahren ist ziemlich kompliziert. Der Leser kann sich in der Praxis davon überzeugen, daß die Methode richtig ist.

Nachdem ein magisches Quadrat aus 25 Feldern zusammengestellt ist, könnt ihr durch Drehungen und Spiegelungen seine Varianten herbeiführen.

Die indische Methode

Die Methode Bachets oder, wie sie auch genannt wird, die „Terassenmethode" ist nicht die einzige zur Bildung von Quadraten mit einer ungeraden Zahl von Feldern. Unter den vorhandenen Verfahren ist eine sehr alte Methode relativ unkompliziert, die, wie man annimmt, in Indien noch vor unserer Zeitrechnung erfunden wurde. Sie kann kurz in sechs Regeln dargelegt werden. Lest aufmerksam alle Regeln und verfolgt dann ihre Anwendung am Beispiel des magischen Quadrates mit 49 Feldern (Abb. 262).

Abbildung 262

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

1. In die Mitte der obersten Zeile schreibt man die 1 und ganz unten in die danebenliegende Spalte — die 2.

2. Die folgenden Zahlen werden in der Reihenfolge diagonal nach rechts oben eingesetzt.

3. Am rechten Rand des Quadrates angekommen, wechselt man zum äußersten linken Feld der darüberliegenden Zeile über.

4. Am oberen Rand des Quadrates angelangt, geht man zum untersten Feld der rechts danebenliegenden Spalte.

Anmerkung: Gelangt man in das rechte obere Eckfeld, wechselt man zum linken unteren über.

5. Trifft man auf ein bereits belegtes Feld, wechselt man zu dem Feld über, das direkt unter dem zuletzt ausgefüllten Feld liegt.

6. Befindet sich das zuletzt ausgefüllte Feld in der untersten Zeile des Quadrates, wechselt man zum obersten Feld der gleichen Spalte über.

Läßt man sich von diesen Regeln leiten, kann man rasch magische Quadrate mit beliebiger ungerader Zahl von Feldern zusammenstellen.

Ist die Zahl der Felder *nicht* durch 3 *teilbar*, kann man die Ausfüllung des magischen Quadrates statt mit Regel 1 mit einer anderen beginnen.

Die 1 kann man in ein beliebiges Feld einer Diagonale, die vom mittleren Feld der äußersten linken Säule zum mittleren Feld der obersten Zeile des Quadrates verläuft, schreiben. Alle folgenden Zahlen werden nach den Regeln 2—5 eingetragen.

Das ermöglicht, nach der indischen Methode nicht nur ein, sondern mehrere Quadrate aufzustellen. Als Beispiel bringen wir das folgende magische Quadrat mit 49 Feldern (Abb. 263).

Abbildung 263

32	41	43	3	12	21	23
40	49	2	11	20	22	31
48	1	10	19	28	30	39
7	9	18	27	29	38	47
8	17	26	35	37	46	6
16	25	34	36	45	5	14
24	33	42	44	4	13	15

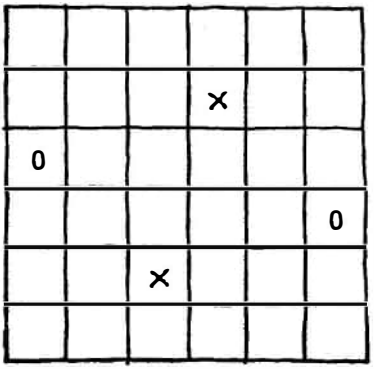
Übungsaufgabe: Stellt nach der indischen Methode mehrere magische Quadrate aus 25 und 49 Feldern zusammen. Aus den entstandenen Quadraten bildet durch Drehungen und Spiegelungen noch einige weitere.

Quadrate mit einer geraden Felderzahl

Für die Zusammenstellung von magischen Quadraten mit einer geraden Felderzahl wurde noch keine allgemeine und geeignete Regel gefunden. Eine relativ einfache Methode gibt es nur für Quadrate, deren Felderzahl ohne Rest durch 16 teilbar ist. Die Zahl der Felder dieser Quadrate ist durch 4 teilbar, d. h., die Seiten zählen 4, 8, 12 usw. Felder.

Einigen wir uns, welche Felder wir als „einander entgegengesetzt" bezeichnen. Auf der Abb. 264 sind als Beispiel zwei entgegengesetzte Felderpaare abgebildet. Das eine Paar ist mit Kreuzen gekennzeichnet, das andere mit Kreisen.

Abbildung 264



Wir sehen also, wenn sich das Feld in der zweiten Reihe von oben auf der von links aus vierten Stelle befindet, so ist das ihm entgegengesetzte Feld in der zweiten Reihe von *unten* auf der von *rechts* aus vierten Stelle. (Für den Leser ist es nützlich, sich zu üben in der Anordnung noch einiger entgegengesetzter Felderpaare.) Wir stellen fest, daß für Felder einer Diagonale sich entgegengesetzte Anordnungen auf der gleichen Diagonale befinden.

Die Methode der Zusammenstellung von Quadraten mit der genannten Felderzahl erklären wir am Beispiel eines $8 \cdot 8$ Felder-Quadrates. Man beginnt damit, daß in die Felder alle Zahlen von 1 bis 64 in der Reihenfolge eingetragen werden (Abb. 265).

Abbildung 265

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

In dem erhaltenen Quadrat ergeben die Diagonalen gleiche Summen — 260, genau die, welche im magischen Quadrat aus 8×8 Feldern auch sein müssen. Prüft es nach! Doch die Zeilen und Spalten dieses Quadrates haben andere Summen. So ergibt die erste oberste Zeile nur insgesamt 36, also um 224 weniger als gefordert ist (260 — 36). Die achte, die unterste Zeile, ergibt 484, also 224 mehr als erforderlich (484 — 260). Indem wir feststellen, daß jede Zahl der achten Zeile um 56 größer ist als die darüber, sich in der ersten Reihe befindenden Zahl und weiter, daß diese $224 = 4 \cdot 56$ ist, ziehen wir die Schlußfolgerung, daß man die Summen dieser Zeilen ausgleichen kann, wenn man die Hälfte der Zahlen aus der ersten Reihe mit den darunterliegenden Zahlen der achten Zeile austauscht. Zum Beispiel die Zahlen 1, 2, 3, 4 wechseln die Plätze mit den Zahlen 57, 58, 59, 60.

Was über die erste und achte Zeile gesagt wurde, gilt auch für die zweite und siebente, dritte und sechste, überhaupt für jedes gleichweit vom oberen bzw. unteren Rand entfernte Zeilenpaar. Nachdem der Zahlenaustausch in allen Zeilen durchgeführt ist, haben wir ein Quadrat mit gleichen Summen der Zeilen.

Es ist jedoch notwendig, daß auch die Spalten diese gleiche Summe aufweisen. Bei der ursprünglichen Zahlenanordnung könnten wir das mit ebensolchem Zahlenaustausch erreichen, wie wir ihn gerade mit den Zahlen der Zeilen vollzogen haben. Doch nunmehr, nach der Umstellung in den Zeilen, ist die

Sache komplizierter geworden. Um schnell die Zahlen herauszufinden, die ausgetauscht werden müssen, gibt es folgendes Verfahren, das von Anfang an angewendet werden kann: Anstelle der zweifachen Umstellung — in den Zeilen und Spalten — tauscht man die Zahlen gegeneinander aus, die entgegengesetzt stehen (welche Zahlen entgegengesetzt sind, wurde auf S.352 erklärt). Diese eine Regel ist jedoch noch ungenügend — haben wir doch festgestellt, daß nicht alle Zahlen einer Reihe, sondern nur *die Hälfte* auszutauschen ist, während die restlichen Zahlen an ihren Plätzen verbleiben. Welche der entgegengesetzt angeordneten Zahlen müssen denn nun ausgewechselt werden?

Auf diese Frage antworten folgende 4 Regeln:

1. Das magische Quadrat ist in vier quadratische Flächen zu untergliedern, wie es die beiliegende Figur (Abb. 266) darstellt.

Abbildung 266

1 ×	2	3	4 ×	5 ×	6	7	8 ×
9 ×	10 ×	11	12	13	14	15 ×	16 ×
17	18 ×	19 ×	20	21	22 ×	23 ×	24
25	26	27 ×	28 ×	29 ×	30 ×	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

2. Im linken oberen Quadrat wird die Hälfte aller Felder mit Kreuzen versehen, und zwar so, daß in jeder Spalte und jeder Zeile dieses Quadrates genau die Hälfte aller darin enthaltenen Felder gekennzeichnet ist. Das kann man auf verschiedene Weise tun, zum Beispiel so, wie es auf Abb. 266 angeführt ist.

3. Im rechten oberen Quadrat werden die Felder mit Kreuzen versehen, die *symmetrisch* zu den im linken oberen Quadrat gekennzeichneten liegen.

4. Nunmehr brauchen die Zahlen in den angekreuzten Feldern ihre Plätze mit den entgegengesetzt liegenden Zahlen nur zu vertauschen.

Im Ergebnis aller durchgeführten Umstellungen entsteht ein magisches Quadrat aus 64 Feldern, das hier dargestellt ist (Abb. 267).

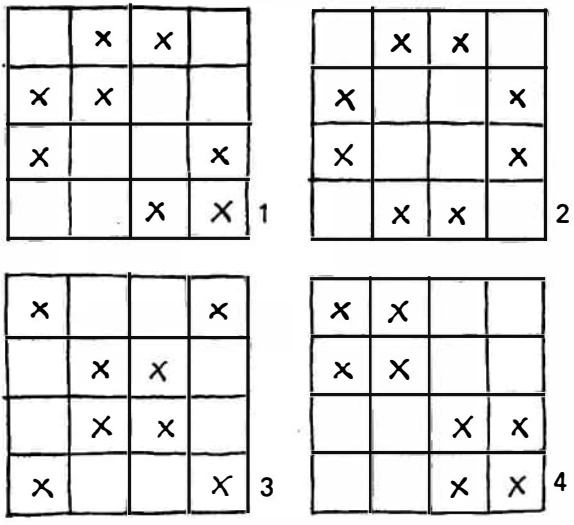
Abbildung 267

64	2	3	61	60	6	7	57
56	55	11	12	13	14	50	49
17	47	46	20	21	43	42	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	30	29	28	27	39	40
41	23	22	44	45	19	18	48
16	15	51	52	53	54	10	9
8	58	59	5	4	62	63	1

Wir könnten jedoch auch mit vielen anderen Methoden die Felder im linken oberen Quadrat kennzeichnen, wobei Regel 2 beibehalten bliebe. Man kann es zum Beispiel so, wie auf Abb. 268 wiedergegeben, tun.

Der Leser findet zweifellos selbst noch viele Mög-

Abbildung 268



lichkeiten zur Verteilung der Kreuzchen auf die Felder des linken oberen Quadrates.

Mit der darauffolgenden Anwendung der Regeln 3 und 4 kann man noch mehrere magische Quadrate mit 64 Feldern zusammenstellen.

Auf die gleiche Weise kann man magische Quadrate bauen, die aus 12×12, 16×16 usw. Feldern bestehen.

Wir schlagen dem Leser vor, das selbständig zu tun.

Wie sind die magischen Quadrate zu ihrer Bezeichnung gekommen?

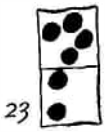
Die erste Erwähnung der magischen Quadrate ist in einem Buch des Orients aus der Zeit um 4000 bis 5000 v. u. Z. zu finden.

Im alten Indien war man mehr vertraut mit den magischen Quadraten. Aus Indien gelangte die Beschäftigung mit den magischen Quadraten zu den Arabern, die diesen Zahlenkombinationen geheime Kräfte zuschrieben.

Im mittelalterlichen Westeuropa waren die magischen Quadrate ein Instrument der Pseudowissenschaften Alchimie und Astrologie. Von den veralteten, abergläubischen Vorstellungen erhielten diese Zahlenquadrate auch ihre für die Mathematik ungewöhnliche Bezeichnung „magische", also Zauber- oder Hexenquadrate. Astrologen und Alchimisten glaubten, daß ein Täfelchen mit darauf abgebildetem magischem Quadrat fähig ist, Unheil von Menschen abzuwenden, indem dieser Talisman es auf sich nimmt.

Die Zusammenstellung magischer Quadrate ist nicht nur ein Spaß. Die Theorie dieser Zahlenkombinationen wurde von vielen hervorragenden Mathematikern ausgearbeitet.

Sie findet in einigen wichtigen mathematischen Problemen Anwendung. So gibt es beispielsweise eine Methode zur Lösung eines Systems von Gleichungen mit mehreren Unbekannten, die sich der Schlußfolgerungen aus der Theorie von den magischen Quadraten bedient.



Arithmetische Spiele und Tricks

Das Dominospiel

Eine Kette aus 28 Steinen

Warum kann man 28 Dominosteine unter Beachtung der Spielregeln zu einer ununterbrochenen Kette auslegen?

Anfang und Ende der Kette

Nachdem 28 Dominosteine in einer Kette ausgelegt sind, befinden sich an einem Ende 5 Punkte.

Wieviel Punkte liegen am anderen Ende?

Hokuspokus mit Dominosteinen

Ein Spielkamerad nimmt einen Dominostein an sich und empfiehlt euch, mit der Versicherung, daß dies stets möglich sei, gleich, welcher Stein entnommen wird, aus den restlichen 27 eine ununterbrochene Kette zu legen. Er selbst begibt sich in das Nebenzimmer, um eure Kette nicht zu sehen.

Ihr beginnt mit der Arbeit und überzeugt euch davon, daß euer Spielkamerad recht hat: Die 27 Steine ließen sich in eine Kette legen. Noch erstaunlicher ist, daß der im Nebenzimmer verbleibende Partner, ohne eure Kette zu sehen, von dort aus verkündet, welche Punktzahl an ihren Enden ist. Wie kann er das wissen? Und weshalb ist er sicher, daß aus beliebigen 27 Dominosteinen eine ununterbrochene Kette zu legen geht?

Ein Rahmen

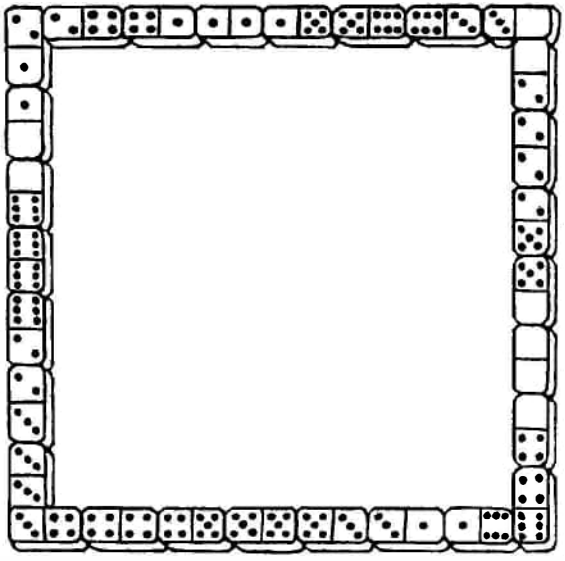
Die Abb. 269 gibt einen quadratischen Rahmen wieder, der unter Beachtung der Spielregeln aus Dominosteinen gelegt ist.

Die Seiten sind gleichlang, doch ungleich hinsichtlich der Punktzahl. Die obere und linke Reihe enthalten jeweils 44 Punkte, die restlichen zwei Reihen — 59 und 32.

Könnt ihr einen solchen quadratischen Rahmen auslegen, bei dem alle Seiten die gleiche Punktzahl — nämlich 44 — aufweisen?



Abbildung 269



Sieben Quadrate

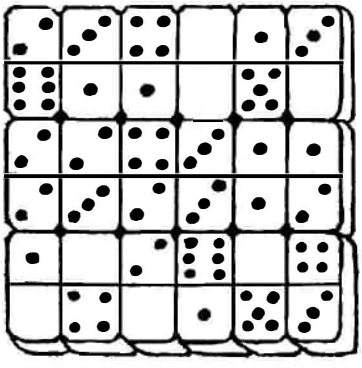
Abbildung 270



Vier Dominosteine kann man so auswählen, daß aus ihnen ein kleines Quadrat mit gleicher Punktzahl an jeder Seite entsteht. Ein Muster seht ihr auf Abb. 270. Zählt ihr die Punkte jeder Quadratseite zusammen, erhaltet ihr in jedem Falle 11.

Könnt ihr aus einem vollständigen Dominospiel gleichzeitig *sieben* solcher Quadrate legen? Es ist nicht erforderlich, daß die Punktzahl einer Seite bei allen Quadraten dieselbe ist. Notwendig ist nur, daß jedes Quadrat an seinen vier Seiten gleiche Punktzahl hat.

Abbildung 271

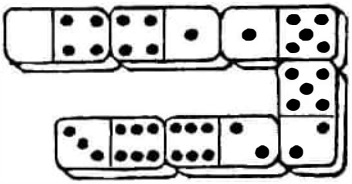


Magische Quadrate aus Dominosteinen

Abb. 271 stellt ein Quadrat dar aus 18 Dominosteinen, das sich dadurch auszeichnet, daß die Summe der Punkte in jeder seiner Reihen vertikal, horizontal oder diagonal — ein und dieselbe ist: 13. Derartige Quadrate nennt man seit altersher magische.

Ich empfehle euch, einige solcher 18steiniger magischer Quadrate zusammenzustellen, jedoch mit anderer Augenzahl je Reihe. 13 ist die geringste Summe in den Reihen des magischen Quadrates, das aus 18 Steinen zusammengesetzt ist. Die höchste Summe ist 23.

Abbildung 272



Eine mathematische Reihe aus Dominosteinen

Ihr seht auf Abb. 272 sechs Dominosteine, die nach den Spielregeln ausgelegt sind und sich dadurch auszeichnen, daß die Punktzahl auf den Steinen auf beiden Hälften jedes Steines um 1 anwächst. Beginnend mit der 4 besteht die Reihe aus folgenden Augenzahlen: 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Solche Zahlenreihe, die um ein und dieselbe Größe anwächst (oder absteigt), nennt man „arithmetische Reihe". In unserer Reihe ist jede folgende Zahl um 1 größer, doch in der arithmetischen Reihe kann auch jede andere Differenz erscheinen. Die Aufgabe besteht darin, noch einige arithmetische Reihen aus sechs Steinen zu legen.

„Spiel mit 15" oder „taquin"

Das allgemein bekannte Schiebebrettchen mit 15 numerierten quadratischen Steinen hat eine interessante Geschichte, von der wenige der Spieler wissen. Berichten wir darüber mit den Worten des deutschen Mathematikers W. Arens, eines Spiele-Forschers.

„Vor einem halben Jahrhundert — Ende der 70er Jahre — tauchte in den Vereinigten Staaten das, Spiel mit 15' auf." Es verbreitete sich schnell und dank der unübersehbaren Zahl der eifrigen Spieler, die es gefangen nahm, verwandelte es sich in eine wahre nationale Katastrophe.

Das gleiche war auf dieser Seite des Ozeans, in Europa, zu beobachten. Hier konnte man selbst in Droschken Passagiere — das Kästchen mit den 15 Steinen in der Hand — sehen. In den Kontoren und Läden gerieten die Chefs in Verzweiflung angesichts der Leidenschaft ihrer Angestellten und mußten das Spiel während der Arbeits- und Geschäftszeit verbieten. Die Besitzer von Vergnügungseinrichtungen nutzten die Manie geschickt aus und organisierten große Spiel-Turniere. Das Spiel drang selbst in die würdevollen Räume des deutschen Reichstages. „Wie heute, sehe ich weißhaarige Leute im Reichstag vor mir, die wie gefesselt auf ein quadratisches Kästchen in ihrer Hand starren", erinnert sich der bekannte Geograph und Mathematiker S. Günther, Abgeordneter in den Jahren der Spiel-Epidemie.

In Paris fand das Spiel Zuflucht auf den Boulevards, unter freiem Himmel, und schnell verbreitete



es sich von der Hauptstadt aus auch in die Provinz. „Es gab kein noch so einsames Landhaus, wo diese Spinne nicht saß und ihre Opfer belauerte, bereit, es in ihren Netzen zu verstricken", schrieb ein französischer Autor.

1880 erreichte das Spielfieber offenbar seinen Höhepunkt. Doch kurze Zeit später wurde der Tyrann mit den Waffen der Mathematik besiegt. Die mathematische Spieltheorie stellte fest, daß von den vielfältigen Aufgaben, die gestellt werden können, nur die Hälfte lösbar ist. Die andere Hälfte ist weder mit List noch Tricks zu lösen.

Es wurde klar, warum bestimmte Aufgaben sich mit allergrößter Anstrengung nicht packen ließen und weshalb die Turnierveranstalter sich erkühnten, ungeheure Prämien für die Lösung solcher Aufgaben auszusetzen. In dieser Hinsicht übertraf der Erfinder des Spiels alle. Er schlug dem Herausgeber einer New-Yorker Zeitung für die Sonntagsbeilage vor, eine unlösbare Aufgabe mit einer Prämie von 1000 Dollar bei Auflösung zu dotieren. Da der Herausgeber unentschlossen war, erklärte der Erfinder seine volle Bereitschaft, die genannte Summe aus eigener Tasche zu bestreiten. Der Erfinder hieß Samuel (Sam) Lloyd. Er erlangte große Berühmtheit als Erfinder scharfsinniger Aufgaben und vieler Knobeleien. Interessant ist, daß es ihm nicht gelang, in Amerika ein Patent für das von ihm erdachte Spiel zu erhalten. Nach der Vorschrift mußte er ein „Funktionsmodell" zur Durchführung einer Probepartie vorweisen. Er unterbreitete dem Beamten des Patentbüros eine Aufgabe und, als dieser sich erkundigte, ob sie lösbar ist, mußte dieser antworten: „Nein, das ist mathematisch unmöglich." „In diesem Falle", erfolgte die Erwiderung, „kann es auch kein Funktionsmodell geben, und ohne Modell gibt es kein Patent." Lloyd gab sich mit dieser Entscheidung zufrieden, doch wäre er sicher hartnäckiger gewesen, hätte er den unerhörten Erfolg seiner Erfindung vorausgesehen.[1])

Lassen wir den Erfinder des Spiels über einige Fakten seiner Entwicklung selbst sprechen:

„Die alten Bewohner des Reiches des Verstandes", schreibt Lloyd, „erinnern sich, wie ich Anfang der 70er Jahre die gesamte Welt veranlaßte, sich den Kopf

[1]) Diese Episode hat Mark Twain in seinem Roman „Der amerikanische Bewerber" verwendet.

über eine Schachtel mit verschiebbaren Spielsteinen zu zerbrechen, die bekannt wurde als ‚Spiel mit 15'. 15 Spielsteine waren in einem quadratischen Kästchen in richtiger Reihenfolge untergebracht, nur die Steine 14 und 15 waren vertauscht, wie es die beiliegende Abbildung (Abb. 274) zeigt. Die Aufgabe bestand darin, durch aufeinanderfolgendes Verschieben die Steine in die normale Stellung zu bringen, wobei jedoch die Stellung der Steine 14 und 15 korrigiert werden muß.

Abbildung 273
Normale Anordnung der Steine (Position I)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Abbildung 274
Unlösbarer Fall (Position II)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Die Prämie zu 1000 Dollar, die für die erste richtige Lösung ausgesetzt war, hat sich keiner verdient, obgleich alle unermüdlich über der Lösung saßen. Es wurden heitere Geschichten erzählt über Händler, die darüber ihre Läden zu öffnen vergaßen, über ehrbare Beamte, die ganze Nächte hindurch unter der Straßenlaterne standen und die Lösung suchten, weil alle überzeugt waren von ihrem Erfolg. Steuermänner, sagt man, setzten wegen des Spiels ihre Schiffe auf Grund, Lokomotivfahrer vergaßen auf Bahnhöfen zu halten, Bauern ließen ihre Pflüge liegen."

* * *

Machen wir unsere Leser mit den Grundzügen der Theorie dieses Spiels bekannt. Insgesamt ist sie äußerst kompliziert und eng verknüpft mit einem Abschnitt der höheren Algebra (Determinantenlehre). Wir beschränken uns auf einige Überlegungen, die von W. Arens dargelegt wurden.

Die Spielaufgabe besteht gewöhnlich darin, mittels folgerichtiger Verschiebungen, die ein vorhandenes freies Feld ermöglicht, eine beliebige Ausgangsposi-



tion der 15 Zahlensteine in die normale umzusetzen. Das heißt, daß die Steine in der Reihenfolge ihrer Zahlen stehen: In der oberen linken Ecke 1, nach rechts anschließend 2, danach 3 und in der rechten oberen Ecke 4, in der nächsten Reihe von links nach rechts 5, 6, 7, 8 usw. Eine solche normale Endposition ist auf Abb. 273 wiedergegeben.

Stellt euch jetzt eine Anordnung vor, bei der die 15 Steine in buntem Durcheinander liegen. Mit einer Reihe von Verschiebungen kann man stets den Stein 1 auf den Platz bringen, den er auf der Abbildung inne hat.

Genauso ist es möglich, ohne Stein 1 zu berühren, den Stein 2 auf den benachbarten Platz, rechts daneben, zu bringen. Danach kann man, ohne die Steine 1 und 2 zu bewegen, die Steine 3 und 4 an ihre Plätze bringen. Wenn sie sich nicht zufällig in den beiden letzten vertikalen Reihen befinden, so ist es leicht, sie in diesen Bereich zu verlagern, und dann mit einigen Verschiebungen das gewünschte Ergebnis zu erzielen. Jetzt ist die oberste Zeile mit 1, 2, 3 und 4 in Ordnung gebracht, und bei den weiteren Hin- und Herbewegungen der Steine werden wir diese Reihe nicht mehr antasten. Auf die gleiche Weise bemühen wir uns, auch die zweite Reihe zu ordnen: 5, 6, 7, 8. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß das immer zu schaffen ist. Weiter, im Bereich der letzten zwei Reihen sind die 9 und die 13 in die Normalposition zu bringen. Das ist auch stets möglich. Alle die geordneten Steine 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 13 werden nun nicht mehr verschoben. Es verbleibt eine kleine Fläche von 6 Feldern, wovon eins frei ist, die übrigen fünf jedoch, von den Steinen 10, 11, 12, 14 und 15 in willkürlicher Anordnung besetzt sind. In den Grenzen dieses Abschnittes von sechs Feldern gelingt es stets, die Steine 10, 11 und 12 auf die richtigen Plätze zu bringen. Ist das erreicht, dann befinden sich in der letzten Reihe die Steine 14 und 15 entweder in der richtigen oder der umgekehrten Folge (Abb. 274). Auf diesem Wege, den der Leser leicht praktisch überprüfen kann, kommen wir zu folgendem Ergebnis:

Jede Ausgangsposition kann entweder zur Anordnung wie auf Abb. 273, Position *I*, oder wie auf Abb. 274, Position *II*, führen.

Wenn irgendeine Anordnung, die wir der Kürze halber mit *S* bezeichnen, in die Position *I* umgewandelt

werden kann, so ist offensichtlich auch das umgekehrte möglich, nämlich die Position *I* in die Position *S* umzuwandeln, sind doch alle Züge der Steine umkehrbar. Wenn wir beispielsweise im Schema *I* den Stein 12 auf das freie Feld verschieben können, so kann der Zug auch sofort, durch die entgegengesetzte Bewegung, zurückgenommen werden.

Somit haben wir zwei Serien von Anordnungen, wobei die Ausgangspositionen der einen Serie in die Normalposition *I* gebracht werden können, die der anderen Serie dagegen — in Position *II* und umgekehrt. Aus der normalen richtigen Anordnung der Steine kann man jede Stellung der ersten Serie herbeiführen, und aus der Position *II* — jede Stellung der zweiten Serie. Und schließlich können zwei beliebige Stellungen, die zur gleichen Serie gehören, ineinander verwandelt werden.

Kann man nicht noch weitergehen und die beiden Positionen *I* und *II* vereinigen? Man kann exakt nachweisen (wir werden nicht auf Einzelheiten eingehen), daß diese Positionen sich mit auch noch so vielen Zügen nicht ineinander umwandeln können. Deshalb zerfällt die ungeheure Zahl der verschiedenen Steinstellungen in zwei getrennte Serien: 1. in jene, die in die Normalposition *I* umgewandelt werden können — das sind die lösbaren Aufgaben; 2. in jene, die in die Position *II* umgewandelt werden können und folglich unter keinen Umständen in die normale Anordnung gebracht werden können — das sind die Ausgangspositionen, für deren Lösung die riesenhaften Prämien ausgesetzt wurden.

Wie kann man feststellen, ob die gegebene Position zur ersten oder zweiten Serie gehört? Das Beispiel macht es deutlich.

Betrachten wir die Anordnung, die auf Abb. 275 dargestellt ist.

Abbildung 275

1	2	3	4
5	6	7	9
8	10	14	12
13	11	15	

Die erste Steinreihe steht in der richtigen Reihenfolge wie auch die zweite, mit Ausnahme des letzten



Steines (9). Dieser Stein nimmt den Platz ein, auf dem bei richtiger Anordnung die 8 steht. Stein 9 steht also *vor* Stein 8. Eine solche Störung der richtigen Reihenfolge nennt man „Ordnungsverstoß". Zur Stellung des Steines 9 sagen wir: Hier liegt ein Verstoß gegen die Ordnung vor. Betrachten wir uns die nächsten Steine, so stellen wir eine Vorziehung des Steines 14 fest, er steht nun drei Plätze (Steine 12, 13, 11) vor seiner normalen Position. Wir haben hier drei Verstöße gegen die Ordnung (14 vor 12, 14 vor 13, 14 vor 11). Insgesamt haben wir schon $1 + 3 = 4$ Verstöße gegen die Ordnung. Weiter. Stein 12 befindet sich vor Stein 11 und ebenso Stein 13 vor 11. Das sind noch zwei Verstöße. Also haben wir sechs Verstöße gegen die Ordnung. In entsprechender Weise wird für jede Anordnung die Gesamtzahl der Verstöße bestimmt, unter Beachtung dessen, daß in der rechten unteren Ecke ein Feld frei bleibt. Ist die Gesamtzahl der Verstöße, wie im behandelten Beispiel *gerade*, so kann die gegebene Anordnung zu einer normalen Endposition geführt werden. Mit anderen Worten — sie ist lösbar. Ist die Anzahl der Verstöße jedoch *ungerade*, so gehört die Anordnung zur zweiten Serie, also der unlösbaren (Null Verstöße gelten als gerade Zahl).

Dank der Klarheit, die von der Mathematik in dieses Spiel gebracht wurde, ist die frühere fieberhafte Leidenschaft für dieses Spiel heute völlig undenkbar. Die Mathematik hat eine erschöpfende Spieltheorie geschaffen, eine Theorie, die keinen einzigen Zweifel offen läßt. Der Spielausgang hängt nicht von irgendwelchen Zufälligkeiten ab, nicht von der Findigkeit, wie in anderen Spielen, sondern von rein mathematischen Faktoren, die ihn mit absoluter Sicherheit vorausbestimmen.

Wenden wir uns nun den einiges Kopfzerbrechen bereitenden Knobeleien auf diesem Gebiet zu.

Hier sind *lösbare* Aufgaben, die vom Erfinder des Spiels Lloyd ausgedacht wurden.

Erste Aufgabe

Ausgehend von der Anordnung, die auf Abb. 274 gegeben ist, sind die Steine in die richtige Ordnung zu bringen, jedoch mit dem freien Feld in der linken oberen Ecke (Abb. 276).

Abbildung 276

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Zweite Aufgabe

Dreht, ausgehend von der Anordnung in Abb. 274, das Kästchen um eine viertel Wendung nach rechts und verschiebt die Steine, bis sie die Stellung wie in Abb. 277 einnehmen.

Abbildung 277

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Dritte Aufgabe

Verwandelt durch Verschieben der Steine gemäß Spielregeln das Kästchen in ein magisches Quadrat, und zwar so, daß die Summe der Zahlen in allen Richtungen 30 ergibt.

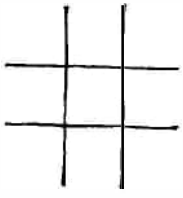
„Spiel mit 11"

An diesem Spiel nehmen zwei Personen teil. Man legt 11 Streichhölzer auf den Tisch (oder andere kleine Gegenstände). Der erste Spieler nimmt eins, zwei oder drei — wieviel er möchte — auf. Danach nimmt der zweite Spieler ebenfalls ein, zwei oder drei Hölzchen, ganz nach Wunsch. Danach nimmt wieder der erste usw. Mehr als drei Hölzchen auf einmal dürfen nicht genommen werden. Wer das letzte Hölzchen nimmt, verliert.

Wie müßt ihr spielen, um sicher zu gewinnen?

„Spiel mit 15"

Das ist nicht jenes „Spiel mit 15", bei dem quadratische numerierte Steine in einem Kästchen zu verschieben sind. Unser Spiel ist ganz anderer Art und dem allgemein bekannten Spiel mit Null und Eins ähnlicher. Zwei Personen spielen abwechselnd. Der erste Teilnehmer schreibt irgendeine Ziffer von 1—9 in eines der Felder des abgebildeten Gitters.



Der zweite schreibt eine andere Zahl, das Feld so auswählend, damit der erste Spieler mit dem folgenden Zug nicht in der Lage ist, eine Reihe aus drei Ziffern, deren Summe 15 ist, zu vollenden (die Reihe kann quer oder diagonal verlaufen).

Wer mit einem Zug eine Reihe mit der Summe 15 beendet oder aber das letzte Kästchen des gesamten Gitters ausfüllt, gewinnt.

Was glaubt ihr: Gibt es eine Methode, mit Sicherheit das Spiel zu gewinnen?

„Spiel mit 32"

Man spielt zu zweit. Auf den Tisch werden 32 Streichhölzer gelegt. Wer mit dem Spiel beginnt, nimmt ein, zwei, drei oder vier Hölzchen. Danach nimmt der zweite Spieler eine beliebige Anzahl, doch auch nicht mehr als vier. Dann nimmt der erste wieder nicht mehr als vier Hölzchen. Und so weiter. Wer das letzte Hölzchen nimmt, gewinnt.

Das Spiel ist, wie ihr seht, sehr einfach. Doch es ist insofern interessant, als der Beginnende stets gewinnen kann, wenn er nur richtig berechnet, wieviel Hölzchen er nehmen muß.

Könnt ihr sagen, wie man spielen muß, um zu gewinnen?

Das gleiche, umgekehrt

Man kann „Spiel mit 32" variieren, indem derjenige, der das letzte Hölzchen nimmt, nicht gewinnt, sondern verliert.

Wie muß man jetzt spielen, um sicher zu gewinnen?

„Spiel mit 27“

Dieses Spiel ist dem orangegangenen ähnlich. Es wird ebenfalls von zwei Partnern gespielt, und beide nehmen abwechselnd bis zu vier Hölzchen. Doch das Spielende ist anders. Gewinner ist, wer am Ende eine gerade Zahl Streichhölzer hat.

Auch hier hat der Beginnende den Vorteil. Er kann seine Züge so berechnen, daß er sicher gewinnt. Worin besteht das Geheimnis erfolgreichen Spielens?

Auf andere Art

Bei dem „Spiel mit 27“ kann man auch umgekehrte Bedingungen vereinbaren, so daß als Gewinner gilt, wer am Spielende eine ungerade Zahl Streichhölzer hat.

Wie ist hier die Spielmethode, um nicht zu verlieren?

Arithmetische Reise

An diesem Spiel können mehrere Personen teilnehmen. Ihr müßt dafür vorbereiten:

1. Ein Spielfeld (aus Pappe);
2. Einen Würfel (aus Holz);
3. Einige Spielmarken entsprechend der Anzahl der Spieler.

Das Spielfeld wird als Quadrat aus Pappe geschnitten, möglichst groß. Das Quadrat wird in 10×10 Felder gegliedert. In die Felder werden die Zahlen 1 bis 100, wie auf unserer verkleinerten Abb. 278 angegeben, eingetragen.

Den 1 cm hohen Würfel sägt man aus einer quadratischen Leiste. Die Flächen glättet man mit Schmiergelpapier und kennzeichnet sie mit den Ziffern 1 bis 6 (besser ist es, sie mit Punkten zu versehen wie beim Dominospiel).

Als Spielmarken können verschiedenfarbige Kreise, Plättchen oder irgend etwas anderes dienen.

Das Spiel beginnt damit, daß die Teilnehmer, jeder mit einer Spielmarke ausgestattet, nacheinander würfeln. Wer eine 6 wirft, beginnt seine Wanderung über die Felder der Spielfläche, indem er seine Spielmarke auf die 6 setzt. Beim nächsten Wurf bewegt er seine Spielmarke um so viele Felder weiter, wie er Augen geworfen hat. Gerät er auf ein Feld, von wo



Abbildung 278

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

ein Pfeil ausgeht, so muß die Spielmarke in Pfeilrichtung bis zu dem Feld, wo der Pfeil hinzeigt, gehen — mal vorwärts, mal rückwärts. Wer als erster das Feld mit der 100 erreicht, hat gewonnen.

Denkt euch eine Zahl

Führt aufmerksam alle Rechenoperationen, von denen im folgenden die Rede ist, mit der gedachten (gemerkten) Zahl durch, und ich errate das Ergebnis eurer Berechnungen. Ist das Resultat ein anderes, dann überprüft eure Rechnung, und ihr werdet sehen, daß nicht ich mich, sondern ihr euch geirrt habt.

Nr. 1

Denkt euch eine Zahl kleiner als 10 (außer 0)

Nehmt sie mit 3 mal.
Zum Ergebnis addiert 2.
Das Resultat multipliziert mit 3.
Zum Ergebnis addiert die gedachte Zahl.
Die erste Ziffer streicht weg.
Zum Rest addiert 2.
Was herauskommt, teilt durch 4.

Zum Ergebnis addiert 19.



Nr. 2

Denkt euch eine Zahl kleiner als 10 (außer 0)

Multipliziert sie mit 5.
Das Ergebnis verdoppelt.
Zum Resultat addiert 14.
Von der Summe zieht 8 ab.
Die erste Ziffer des Resultats streicht weg.
Den Rest teilt durch 3.
Zum Ergebnis addiert 10.



Nr. 3

Denkt euch eine Zahl kleiner als 10 (außer 0)

Addiert 29 dazu.
Die letzte Ziffer des Ergebnisses laßt wegfallen.
Den Rest nehmt mal 10.
Zum Resultat addiert 4.
Das Ergebnis multipliziert mit 3.
Vom Resultat zieht 2 ab.



Nr. 4

Denkt euch eine Zahl kleiner als 10 (außer 0)

Nehmt sie mal 5.
Das Ergebnis verdoppelt.
Vom Resultat zieht die gedachte Zahl ab.
Bildet die Quersumme.
Zum Ergebnis zählt 2 dazu.
Setzt die Summe ins Quadrat.
Von der erhaltenen Zahl zieht 10 ab.
Den Rest teilt durch 3.



Nr. 5

Denkt euch eine Zahl kleiner als 10 (außer 0)

Multipliziert sie mit 25.
Fügt 3 hinzu.
Das Ergebnis nehmt mit 4 mal.
Streicht die erste Ziffer des Resultats.
Die Restzahl setzt ins Quadrat.
Bildet vom Ergebnis die Quersumme.
Addiert 7 dazu.



Nr. 6

Denkt euch eine Zahl aus zwei Ziffern

Fügt 7 dazu.
Zieht die Summe von 110 ab.
Addiert 15 dazu.
Zählt die gedachte Zahl zum Resultat.
Die entstandene Zahl teilt durch 2.



Vom Resultat zieht 9 ab.
Den Rest nehmt mit 3 mal.

Ihr habt jetzt 150

Nr. 7

Denkt euch eine Zahl kleiner als 100

Fügt 12 dazu.
Die Summe zieht von 130 ab.
Zur Differenz addiert 5.
Zum Ergebnis zählt die gedachte Zahl hinzu.
Von der Summe zieht 120 ab.
Multipliziert mit 7.
Zieht 1 ab.
Den Rest teilt durch 2.
Addiert 30 hinzu.

Ihr habt jetzt 40

Nr. 8

Denkt euch eine beliebige Zahl (außer 0)

Nehmt sie mal 2.
Zum Ergebnis addiert 1.
Das neue Ergebnis nehmt mit 5 mal.
Laßt alle Ziffern, außer der letzten, weg.
Die Restziffer multipliziert mit sich selbst.
Bildet die Quersumme des Resultats.

Ihr habt jetzt 7

Nr. 9

Denkt euch eine Zahl kleiner als 100

Fügt 20 dazu.
Die erhaltene Zahl zieht von 170 ab.
Vom Rest zieht 6 ab.
Fügt die gedachte Zahl dazu.
Vom Resultat bildet die Quersumme.
Multipliziert die Quersumme mit sich selbst.
Vom Resultat zieht 1 ab.
Das Ergebnis teilt durch 2.
Fügt 8 hinzu.

Ihr habt jetzt 48

Nr. 10

Denkt euch eine dreistellige Zahl

Schreibt rechts daneben die gleiche Zahl.
Die Gesamtzahl teilt durch 7.
Das Ergebnis teilt durch die gedachte Zahl.
Was herauskommt, teilt durch 11.
Das Resultat nehmt mal 2.
Vom Ergebnis bildet die Quersumme.

Ihr habt jetzt 8

Laßt uns raten

Wir veranstalten jetzt mit euch, liebe Leser, ein Ratespiel.

Ihr denkt euch eine Zahl aus, und ich werde raten. Es macht nichts, daß ihr viele Tausende seid und mit dem Buch irgendwo einige tausend Kilometer von mir entfernt sitzt — ich errate trotzdem, welche Zahl ihr euch ausgedacht habt.

Fangen wir an.

Denkt euch irgendeine Ziffer aus. Bringt die Worte „Ziffer" und „Zahl" nicht durcheinander. Ziffern gibt es nur 10 — von 0 bis 9. Zahlen dagegen gibt es unendlich viele. Also merkt euch eine beliebige *Ziffer*. Habt ihr eine? Nehmt sie mal 5, aber macht keine Fehler, sonst klappt es nicht mit uns.

Habt ihr mit 5 mal genommen?... Gut. Was herausgekommen ist, nehmt mit 2 mal. Fertig?... Fügt 7 hinzu.

Jetzt nehmt ihr die erste Ziffer der Zahl, die ihr errechnet habt, weg und behaltet nur die letzte.

Fertig? Zu dem Rest zählt 4 dazu. Zieht 3 ab. Zählt 9 dazu.

Habt Ihr alles getan, wie ich es sagte?... Na, dann sage ich jetzt, was für eine Zahl ihr habt.

Ihr habt die 17 erhalten.

Stimmt es vielleicht nicht? Wollt ihr noch einmal? Na, dann los!

Habt ihr eine Ziffer?... Verdreifacht sie. Das Ergebnis noch einmal verdreifachen. Jetzt fügt ihr die Ziffer, die ihr euch gedacht habt, hinzu.

Erledigt?... Zum Ergebnis addiert 5. Streicht von der jetzt errechneten Zahl alle Ziffern, bis auf die letzte, weg. Weggestrichen?... Zählt 7 dazu. Zieht 3 ab. Addiert 6 hinzu.

Soll ich sagen, welche Zahl ihr jetzt im Kopfe habt?

Die 15.

Hab ich es erraten? Wenn nicht, dann ist es eure Schuld. Irgendwo habt ihr euch da verrechnet.

Wollt ihr ein drittes Mal probieren? Bitte.

Habt ihr eine Ziffer ausgedacht?... Verdoppelt sie. Das Resultat verdoppelt noch einmal. Und noch einmal das Ergebnis verdoppeln. Fügt eure gedachte Zahl hinzu. Noch einmal die gedachte Zahl hinzuzählen. Zählt 8 hinzu. Streicht bis auf die letzte alle Ziffern weg. Von der verbliebenen Ziffer zieht 3 ab und fügt 7 dazu.



Ihr habt jetzt 12.

Ich könnte so oft ihr wollt raten und jedesmal richtig.

Wie aber mache ich das?

Ihr müßt daran denken, daß ich alles hier abgedruckte einige Monate vor dem Erscheinen des Buches aufgeschrieben habe, also lange bevor ihr euch Zahlen ausgedacht habt. Das beweist, daß die Zahl, die ich errate, überhaupt nicht von der Zahl abhängt, die ihr euch ausdenkt.

Ja, aber worin liegt des Rätsels Lösung?

Eine dreistellige Zahl erraten

Denkt euch eine Zahl aus drei Ziffern, verdoppelt, ohne mir die Zahl zu zeigen, die erste Ziffer. Die übrigen laßt zunächst weg. Zum Ergebnis fügt 5 hinzu. Was herauskommt, nehmt mal 5. Zählt die zweite Ziffer der gedachten Zahl hinzu und multipliziert das Ergebnis mit 10. Zum neuen Resultat zählt die dritte Ziffer hinzu und sagt mir, was ihr herausbekommen habt.

Ich sage euch gleich, welche Zahl ihr euch gedacht hattet.

Nehmen wir ein Beispiel: Sagen wir, ihr habt euch die 387 gedacht.

Folgende Rechenoperationen führt ihr mit ihr durch:

Ihr verdoppelt die erste Ziffer: $3 \cdot 2 = 6$.

Fügt 5 hinzu. $6 + 5 = 11$.

Multipliziert mit 5. $11 \cdot 5 = 55$.

Zählt die zweite Ziffer hinzu: $55 + 8 = 63$.

Nehmt mit 10 mal. $63 \cdot 10 = 630$.

Zählt die dritte Ziffer hinzu. $630 + 7 = 637$.

Die Zahl 637 nennt ihr mir, und ich sage euch, welche Zahl ihr euch gemerkt habt.

Wie errate ich sie?

Zahlenzauberei

Denkt euch eine Zahl.

Fügt 1 dazu.

Nehmt mit 3 mal.

Zählt nochmal 1 dazu.

Zählt die gedachte Zahl hinzu.

Sagt, was für ein Ergebnis ihr habt.

Wenn ihr mir das Endergebnis aller Rechenoperationen nennt, ziehe ich 4 ab, den Rest teile ich durch 4 und erhalte, was ihr euch gedacht habt.

Ihr habt euch zum Beispiel die Zahl 12 gedacht.
1 dazugezählt — ergibt 13.
Mit 3 multipliziert — ergibt 39.
1 hinzugezählt — jetzt habt ihr 40.
Die gedachte Zahl addiert: $40 + 12 = 52$.

Wenn ihr die Zahl 52 nennt, ziehe ich 4 ab und die restlichen 48 teile ich durch 4. Ergibt 12 — die Zahl, welche ihr euch gedacht habt.

Warum klappt das immer?

Wie errät man eine weggestrichene Ziffer?

Bittet einen Freund, sich irgendeine mehrstellige Zahl zu denken und folgendes zu tun:
Die gedachte Zahl aufschreiben,
die Ziffern in beliebiger Folge umstellen;
die kleinere Zahl von der größeren abziehen;
eine der Ziffern aus der erhaltenen Differenz streichen (aber nicht die Null),
die restlichen Ziffern euch in freier Folge nennen.

Als Antwort darauf nennt ihr dem Freund die von ihm weggestrichene Ziffer.

Beispiel: Euer Freund dachte sich die Zahl 3857. Dann tat er folgendes:

3857,
8735,
$8735 - 3857 = 4878$.

Er streicht die 7 weg und nennt euch die restlichen Ziffern z. B. in dieser Reihenfolge:
8, 4, 8.

Aus diesen Ziffern könnt ihr die weggestrichene bestimmen.

Was müßt ihr dazu tun?

Wie errät man den Geburtstag?

Schlagt eurem Freund vor, auf ein Blatt Papier zu schreiben, am wievielten Tag eines Monats er geboren ist, und folgende Rechnung durchzuführen:
Die geschriebene Zahl mit 2 malnehmen,
das Ergebnis mit 10 multiplizieren,
zum Resultat 73 zuzählen,
die Summe mit 5 malnehmen,



zum Ergebnis die Ordnungszahl des Geburtsmonats addieren.

Das Endergebnis aller Rechenoperationen nennt er euch, und ihr sagt ihm Tag und Monat seiner Geburt.

Beispiel: Euer Freund wurde am 17. August, also am 17. Tag des 8. Monats geboren. Er führt folgendes aus:

$$\begin{aligned} 17 \cdot 2 &= 34, \\ 34 \cdot 10 &= 340, \\ 340 + 73 &= 413, \\ 413 \cdot 5 &= 2065, \\ 2065 + 8 &= 2073. \end{aligned}$$

Die Zahl 2073 nennt er euch, und ihr sagt ihm sein Geburtsdatum.

Wie ist euch das möglich?

Wie alt ist der Gesprächspartner?

Ihr könnt das Alter eures Gesprächspartners erraten, wenn ihr ihn bittet, folgendes zu tun:

Zwei Ziffern nebeneinander schreiben, die zueinander eine Differenz größer als 1 haben,

dazwischen eine beliebige dritte Ziffer schreiben,

die Ziffern der entstandenen dreistelligen Zahl in umgekehrter Reihenfolge schreiben,

die kleinere Zahl von der größeren abziehen,

die Ziffern der erhaltenen Differenz in umgekehrter Reihenfolge schreiben,

die erhaltene Zahl mit der vorangegangenen Differenz addieren,

zur Summe das Alter hinzuzählen

Das Endergebnis aller Berechnungen teilt euch euer Gesprächspartner mit, und ihr nennt ihm sein Alter.

Beispiel: Euer Gesprächspartner ist 23 Jahre alt. Er führt folgendes aus:

$$\begin{aligned} &25, \\ &275, \\ &572, \\ 572 - 275 &= 297, \\ 297 + 792 &= 1089, \\ 1089 + 23 &= 1112. \end{aligned}$$

Die Zahl 1112 nennt euch der Gesprächspartner, und ihr bestimmt daraus das gesuchte Alter.

Wie könnt ihr das tun?

Wie kann man die Zusammensetzung einer Familie erraten?

Ihr könnt erraten, wieviel Brüder und wieviel Schwestern euer Freund hat, wenn ihr ihn bittet, folgendes zu tun:

Zur Zahl der Brüder 3 addieren,
das Ergebnis mit 5 multiplizieren,
zum Resultat 20 hinzuzählen,
die Summe mal 2 nehmen,
zum Ergebnis die Anzahl der Schwestern addieren,
zur Summe 5 hinzuzählen.

Das Endergebnis der Rechenoperationen sagt euch dann euer Freund, und ihr nennt ihm die Anzahl der Brüder und Schwestern.

Beispiel: Der Freund hat vier Brüder und sieben Schwestern. Er führt folgende Rechnungen aus:

$$\begin{aligned} 4 + 3 &= 7, \\ 7 \cdot 5 &= 35, \\ 35 + 20 &= 55, \\ 55 \cdot 2 &= 110, \\ 110 + 7 &= 117, \\ 117 + 5 &= 122. \end{aligned}$$

Er nennt euch die Zahl 122, und ihr bestimmt, wieviel Brüder und wieviel Schwestern er hat.

Wie könnt ihr das zustande bringen?

Der Trick mit dem Telefonbuch

Dieser nicht weniger eindrucksvolle Trick wird so ausgeführt.

Ihr schlagt eurem Freund vor, eine beliebige Zahl aus drei verschiedenen Ziffern aufzuschreiben. Nehmen wir an, er schrieb 648. Laßt ihn dann die Ziffern der gewählten Zahl in umgekehrter Reihenfolge aufschreiben und die kleinere von der größeren Zahl abziehen.[1] Er schreibt folgendes auf:

$$\begin{array}{r} 846 \\ -\,648 \\ \hline 198 \end{array}$$

Bittet ihn, von der entstandenen Differenz ebenfalls die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge aufzu-

[1] Wenn die Differenz eine zweistellige Zahl ist (99), so schreiben wir eine Null davor (099).



schreiben und beide Zahlen zu addieren. Euer Freund schreibt:

$$\begin{array}{r} 198 \\ +891 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Alle diese Operationen führt er so aus, daß sie euch verborgen bleiben, so daß ihr nach seiner Meinung das Endergebnis nicht kennt.

Dann gebt ihr dem Freund das Telefonbuch in die Hand und fordert ihn auf, die Seite aufzuschlagen, die den ersten drei Ziffern des Ergebnisses entspricht. Er schlägt die Seite 108 auf und wartet auf weitere Anweisungen. Ihr bittet ihn, auf dieser Seite soviel Teilnehmer von oben (oder von unten) abzuzählen, wie es der letzten Ziffer des Endergebnisses (der Zahl 1089) entspricht. Er findet den neunten Teilnehmer, und ihr nennt ihm den Namen des Teilnehmers und seine Telefonnummer!

Eure Informiertheit überrascht den Freund selbstverständlich. Schließlich hatte er ja die erste beste ihm eingefallene Zahl notiert und ihr habt den Namen und die Nummer des Teilnehmers richtig genannt.

Wo liegt das Geheimnis dieses Tricks?

Wie errät man einen Dominostein?

Das ist ein arithmetischer, auf Berechnung beruhender Trick.

Euer Freund mag irgendeinen Dominostein in seine Tasche verstecken. Ihr nehmt es auf euch zu erraten, welcher Stein das ist. Vorausgesetzt, er führt einige leichte Rechenoperationen richtig aus. Nehmen wir beispielsweise an, er hat den Stein 6—3 genommen.

Veranlaßt euren Freund, eine der Zahlen mal 2 zu nehmen (sagen wir — 6):

$6 \cdot 2 = 12.$

Zur verdoppelten Zahl 7 hinzuzählen:

$12 + 7 = 19.$

Mag er dann die entstandene Zahl mit 5 multiplizieren:

$19 \cdot 5 = 95.$

Zu dem Ergebnis soll er die andere Augenzahl des Dominosteins addieren (also 3):

$95 + 3 = 98.$

Dieses Endergebnis nennt er euch, und ihr zieht im Kopf 35 ab und wißt, welchen Dominostein er hat: $98 - 35 = 63$, also den Stein $6 - 3$.

Wieso ergibt sich das so, und warum muß man immer 35 abziehen?

Erstaunliches Gedächtnis

Die „Zauberer" überraschen das Publikum manchmal mit ungewöhnlichen Gedächtnisleistungen: Sie merken sich lange Wort- oder Zahlenreihen u. a. m. Jeder von euch vermag seine Freunde mit einem gleichen Kunststück in Erstaunen zu versetzen. Hört zu, wie ihr das anstellen müßt.

Bereitet 50 Kärtchen aus Papier vor, auf die ihr Zahlen und Buchstaben, wie auf den Seiten 377 unten und 378 **oben** dargestellt, schreibt.

Auf jedes Kärtchen wird auf diese Weise eine lange Zahl und in die linke Ecke ein Zeichen aus einem lateinischen Buchstaben oder einem Buchstaben mit einer Ziffer geschrieben. Die Kärtchen verteilt ihr an die Freunde und erklärt ihnen, daß ihr euch genau erinnert, auf welchem Kärtchen welche Zahl steht. Es genügt, euch nur das Zeichen auf dem Kärtchen zu nennen und sofort sagt ihr, was für eine Zahl dort geschrieben steht. Man nennt euch beispielsweise „E4" und sogleich antwortet ihr:

„Die Zahl 10 128 224."

Da die Zahlen sehr lang und es insgesamt 50 Stück sind, muß eure Kunst natürlich die Anwesenden verblüffen. Dabei habt ihr gar keine 50 langen Zahlen auswendig gelernt. Die Sache ist viel einfacher. Worin besteht der Trick?

A 24 020	B 36 030	C 48 040	D 510 050	E 612 060
A1 34 212	B1 46 223	C1 58 234	D1 610 245	E1 712 256
A2 44 404	B2 56 416	C2 68 428	D2 7 104 310	E2 3 124 412
A3 54 616	B3 66 609	C3 786 112	D3 8 106 215	E3 9 126 318



A4 64 828	B4 768 112	C4 888 016	D4 9 108 120	E4 10 128 224
A5 750 310	B5 870 215	C5 990 120	D5 10 110 025	E5 11 130 130
A6 852 412	B6 972 318	C6 1 092 224	D6 11 112 130	E6 12 132 036
A7 954 514	B7 1 074 421	C7 1 194 328	D7 12 114 235	E7 13 134 142
A8 1 056 616	B8 1 176 524	C8 1 296 432	D8 13 116 340	E8 14 136 248
A9 1 158 718	B9 1 278 627	C9 1 398 536	D9 14 118 445	E9 15 138 354

Ungewöhnliches Gedächtnis

Nachdem ihr auf ein Blatt Papier eine lange Ziffernreihe geschrieben habt — so 20 bis 25 — erklärt ihr, fehlerfrei die ganze Reihe Ziffer für Ziffer wiederholen zu können. Und wirklich, großartig macht ihr das, ungeachtet dessen, daß in der Ziffernfolge keine Gesetzmäßigkeit zu erkennen ist. Wie könnt ihr das zustande bringen?

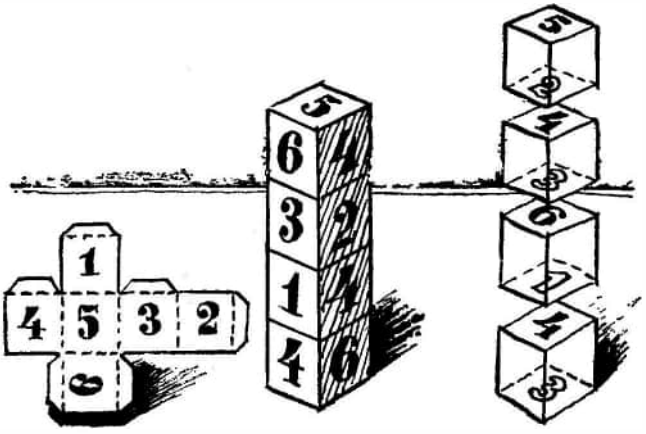
Geheimnisvolle Würfel

Bereitet aus Papier einige Würfel vor (zum Beispiel vier) und markiert ihre Flächen mit Ziffern in der Anordnung, wie es Abb. 279 zeigt. Mit diesen Würfeln könnt ihr euren Freunden einen interessanten arithmetischen Trick vorführen.

Bittet einen Freund, in eurer Abwesenheit die Würfel in beliebiger Lage aufeinander zu türmen. Wenn ihr ins Zimmer tretet, bestimmt ihr mit einem Blick auf die Säule, welche Summe die Ziffern auf den verdeckten Würfelflächen ergeben. Zum Beispiel nennt

ihr in dem auf der Abbildung gezeigten Fall die Summe 23. Leicht kann man sich davon überzeugen, daß sie richtig genannt wurde.

Abbildung 279



Kartentrick

Bereitet sieben solche Kärtchen (Abb. 280) vor. Schreibt die Zahlen darauf und schneidet in exakter Übereinstimmung mit den Mustern Öffnungen hinein. Ein Kärtchen bleibt unbeschrieben, es hat aber auch Fensterchen.

Beim Übertragen der Zahlen auf die Kärtchen seid sehr aufmerksam und macht keine Fehler.

Ist das erledigt, übergebt eurem Freund sechs Kärtchen mit Zahlen und bittet ihn, sich eine der Zahlen zu merken. Dann soll er euch alle Karten, auf denen die gemerkte Zahl ist, zurückgeben.

Ihr ordnet die zurückerhaltenen Kärtchen, deckt sie mit dem unbeschriebenen Kärtchen ab und addiert im Kopf die Zahlen, die in den Fensterchen zu sehen sind. Das, was herauskommt, ist die gemerkte Zahl.

Ihr werdet wohl kaum das Geheimnis des Tricks enträtseln. Es beruht auf der besonderen Zahlenauswahl, die auf den Kärtchen vermerkt sind. Das System der Zahlenzusammenstellung ist ziemlich kompliziert, und ich werde nicht darauf eingehen. In einem anderen meiner Bücher („Unterhaltsame Aufgaben"), das für Leser bestimmt ist, die mehr mathematische

39	63	54	38	45	61	49	33
53	□	57	46	43	41	□	62
34	40	□	55	42	51	59	35
60	32	44	59	□	58	□	58
36	48	50	56	52	47	42	37

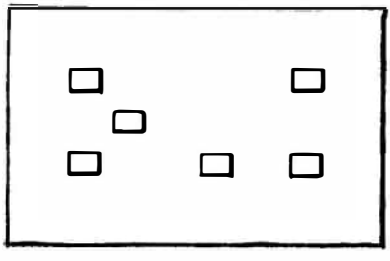
45	63	27	10	58	9	61	42
29	8	11	57	30	59	□	62
13	24	□	60	40	47	14	56
46	□	12	44	□	25	□	27
43	15	41	31	26	62	12	28

33	49	27	17	21	55	61	39
3	□	31	51	63	43	□	13
15	7	1	19	15	23	59	41
57	□	29	9	□	35	□	51
53	5	47	25	45	33	11	37

54	23	18	58	63	31	26	51
29	□	61	50	20	27	□	62
56	28	□	17	59	48	21	60
31	□	19	55	□	30	16	53
63	49	24	57	22	52	27	25

5	47	28	53	61	13	20	52
37	□	44	30	46	55	4	7
22	63	□	12	62	14	60	31
23	□	29	54	□	15	□	6
46	36	39	21	45	28	63	38

11	38	62	51	43	26	55	15
10	□	63	35	31	19	□	46
14	3	□	59	27	7	58	18
26	□	6	47	2	39	□	22
54	23	50	30	35	42	11	34



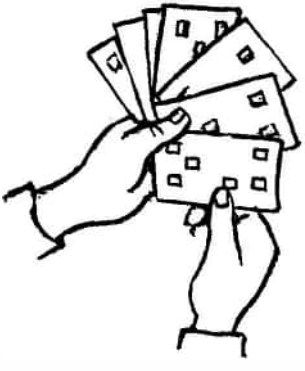


Abbildung 280

Kenntnisse haben, könnt ihr eine ausführliche Erläuterung dieses Tricks und seine interessanten Varianten finden.

Wie erät man die Summe nichtaufgeschriebener Zahlen?

Ihr nehmt euch vor, die Summe dreier Zahlen zu erraten, von denen zunächst nur eine aufgeschrieben ist. Das Kunststück wird so ausgeführt: Ihr bittet einen Freund, irgendeine mehrstellige Zahl aufzuschreiben. Das ist der erste Summand.

Sagen wir, er schrieb die Zahl 84 706. Dann schreibt ihr, Platz für den zweiten und dritten Summand lassend, im voraus die Summe aller drei Zahlen auf:

1.	Summand	⟷	84 706
2.	"	⟷	
3.	"	⟷	
	Summe		184 705

Danach schreibt euer Freund den zweiten Summand (er muß aus ebensoviel Ziffern wie der erste bestehen) auf, und den dritten Summand schreibt ihr selbst dazu:

1.	Summand	⟷	84 706
2.	"	⟷	30 485
3.	"	⟷	69 514
	Summe		184 705

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die vorausgesagte Summe richtig war. Wie ist die Lösung dieses Kniffs?

Eine Summe im voraus erraten

Zahlenaberglaube war im vorrevolutionären Rußland nicht weniger verbreitet als Vorurteile anderer Art und natürlich ebenso unbegründet. Zu was die Vorliebe für Zahlenaberglaube führen kann, zeigt das Beispiel Ilja Teglows, des Helden der Erzählung von I. S. Turgenew „Poch!... Poch!... Poch!...“ Auf Grund zufälliger Zahlenübereinstimmung hielt er sich für einen unerkannten Napoleon. Nach seinem Selbstmord fand man in seiner Tasche ein Blatt mit folgenden Rechnungen:



Napoleon geb. am 15. August 1769	Ilja Teglow geb. am 7. Januar 1811
1769	1811
15	7
8 (August — 8. Monat)	1 (Januar — 1. Monat)
Insgesamt 1792	Insgesamt 1819
1	1
7	8
9	1
2	9
Insgesamt 19!	Insgesamt 19!

Napoleon starb am 5. Mai 1825	Ilja Teglow starb am 21. Juli 1834
1825	1834
5	21
5 (Mai — 5. Monat)	7 (Juli — 7. Monat)
Insgesamt 1835	Insgesamt 1862
1	1
8	8
3	6
5	2
Insgesamt 17!	Insgesamt 17!

Eine ähnliche Zahlenweissagung fand weite Verbreitung zu Beginn des ersten Weltkrieges, als man mit ihrer Hilfe seinen Ausgang vorauszusehen hoffte. 1916 weihten Schweizer Zeitungen ihre Leser in das „Geheimnis" folgender Offenbarung des Schicksals der Kaiser von Deutschland und Österreich-Ungarn ein:

	Wilhelm II.	Franz-Joseph
Geburtsjahr	1859	1830
Krönungsjahr	1888	1848
Alter	57	86
Herrschaftsjahre	28	68
Insgesamt	3832	3832

Die Summen sind, wie ihr seht, gleich, und jede für sich ist das doppelte Jahr 1916. Daraus schloß man, daß dieses Jahr — verhängnisvoll für beide Kaiser — ihren Sturz prophezeit.

Diesmal haben wir es nicht mit zufälliger Übereinstimmung, sondern einfach mit menschlicher Dumm-

heit zu tun. Blind vor Aberglauben, haben die Leute nicht bemerkt, daß es genügt, die Zeilen in der Rechnung leicht zu verändern — und ihr geheimnisvoller Charakter verweht ohne Spur.

Ordnet die Zeilen folgendermaßen an:
Geburtsjahr,
Alter,
Krönungsjahr,
Zahl der Herrschaftsjahre.

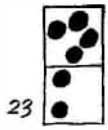
Jetzt denkt mal nach: Welches Jahr muß herauskommen, wenn man zum Geburtsjahr eines Menschen sein Alter hinzuzählt? Selbstverständlich ergibt es das Jahr, in dem die Rechnung angestellt wird. Das gleiche Jahr muß herauskommen, wenn man zum Krönungsjahr die Herrschaftsjahre hinzuzählt. Darum ist leicht zu begreifen, wieso die Addition der vier Daten (Zahlen) für beide Kaiser zum gleichen Resultat führte — dem zweifachen Jahr 1916. Etwas anderes war auch gar nicht zu erwarten.

Das oben Erwähnte können wir für einen lustigen Zahlentrick verwenden. Schlagt einem Freund, der in das unkomplizierte Geheimnis noch nicht eingeweiht ist, vor, auf Papier folgende vier Daten zu schreiben, so daß ihr es nicht sehen könnt:

Geburtsjahr,
Jahr des Schuleintritts (oder Arbeitsbeginns),
Alter,
Schuljahre (oder Arbeitsjahre).

Obwohl ihr keine dieser Zahlen kennt, macht es euch nichts aus, die Summe zu erraten. Dazu braucht man nur das Jahr, in dem man diesen Zaubertrick vollführt, mal 2 zu nehmen.

Bei einer Wiederholung des Tricks kann das Geheimnis leicht ans Tageslicht kommen. Um die Aufdeckung zu erschweren, fügt zu den vier Summanden noch einige zusätzliche euch bekannte Daten ein. Wenn ihr klug handelt, kommt jedesmal eine andere Summe heraus, und es wird schwieriger, das Geheimnis zu erraten.



Antworten

Das Dominospiel

Eine Kette aus 28 Steinen

Zur Vereinfachung der Aufgabe legen wir zunächst alle Doppelsteine: 0—0, 1—1, 2—2 usw. beiseite. Es verbleiben 21 Steine, auf denen sich jede Augenzahl 6mal wiederholt. Zum Beispiel, vier Augen (auf einem Feld) haben folgende sechs Steine:

4—0, 4—1, 4—2, 4—3, 4—5, 4—6.

Somit wiederholt sich jede Augenzahl, wie wir sehen, in einer *geraden* Zahl. Es ist klar, daß man die Steine eines solchen Satzes mit gleichen Augen aneinanderreihen kann, bis sie alle sind. Und wenn das erledigt ist, wenn unsere 21 Steine in einer zusammenhängenden Kette liegen, dann fügen wir an den Verbindungsstellen 0—0, 1—1, 2—2 usw. die beiseite gelegten Doppelsteine ein. Ist das getan, liegen alle 28 Dominosteine unter Beachtung der Spielregeln in einer langen Kette.

Anfang und Ende der Kette

Es ist leicht zu zeigen, daß eine Kette von 28 Dominosteinen mit derselben Augenzahl enden muß, mit der sie beginnt. In der Tat, wäre das nicht so, würde die Augenzahl am Ende der Kette sich in *ungerader* Anzahl wiederholen (denn innerhalb der Kette liegen die Steine paarweise). Wir wissen jedoch, daß in einem vollständigen Satz von Dominosteinen sich jede Augenzahl achtmal wiederholt, also in gerader Anzahl. Folglich ist unsere Annahme von der ungleichen Augenzahl am Anfang und am Ende falsch. Die Augenzahl muß gleich sein. (In der Mathematik wird eine solche Beweisführung „indirekter Beweis" genannt.)

Übrigens resultiert aus der eben nachgewiesenen Eigenschaft folgender interessanter Umstand: Eine Kette aus 28 Steinen kann man stets durch Zusammenfügen der Enden in einen Kreis verwandeln. Ein vollständiger Dominosatz kann also unter Beachtung der Spielregeln nicht nur als eine Kette mit freien Enden, sondern auch als geschlossener Kreis ausgelegt werden.

Den Leser mag die Frage bewegen: In wieviel Varianten läßt sich eine solche Kette bzw. solch ein Kreis legen? Ohne auf ermüdende Einzelheiten solcher Berechnung einzugehen, sei hier gesagt, daß die Anzahl der verschiedenen Methoden eine Kette (oder Kreis) aus 28 Steinen auszulegen, gewaltig ist: über 7 Billionen. Hier ist die genaue Zahl:

7 959 229 931 520

(sie ist das Produkt folgender Multiplikatoren: $2^{13} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4231$).

Zauberei mit Dominosteinen

Die Lösung dieses Rätsels ergibt sich aus dem eben Gesagten. 28 Dominosteine lassen sich, wie wir wissen, stets als geschlossener Kreis auslegen. Nimmt man aus diesem Kreis einen Stein heraus, so folgt, daß:

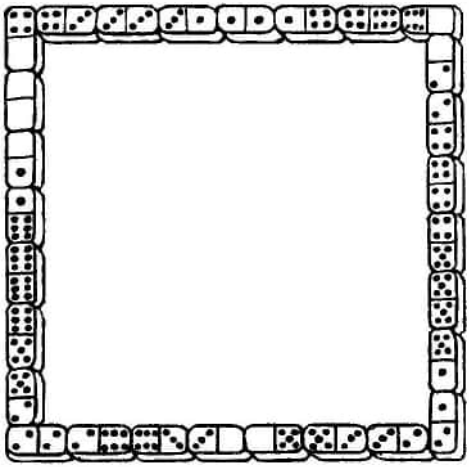
1. die restlichen 27 Steine eine zusammenhängende Kette mit nicht schließenden Enden ergeben;
2. die Augenzahlen an den Enden der Kette die gleichen sind wie aus dem herausgenommenen Stein.

Deshalb können wir, wenn wir einen Dominostein wegnehmen, von vornherein sagen, welche Augen an den Enden der Kette liegen, die aus den anderen Steinen gelegt wird.

Ein Rahmen

Die Augenzahl aller Seiten des gesuchten Quadrates ist gleich $44 \cdot 4 = 176$, das ist um 8 mehr als die Summe eines vollen Dominosatzes (168). Das kommt natürlich

Abbildung 281



daher, daß die Augen an den Eckpunkten des Quadrates zweimal gezählt werden. Daraus ergibt sich, welche Augensumme in den Quadratecken stehen muß, nämlich 8. Das erleichtert ein wenig das Auffinden der geforderten Anordnung, obgleich die Suche dennoch recht mühevoll ist. Die Lösung ist in Abb. 281 dargestellt.

Sieben Quadrate

Wir führen zwei aus der Zahl der möglichen Lösungen an. In der ersten Lösung (Abb. 282, oben) haben wir:

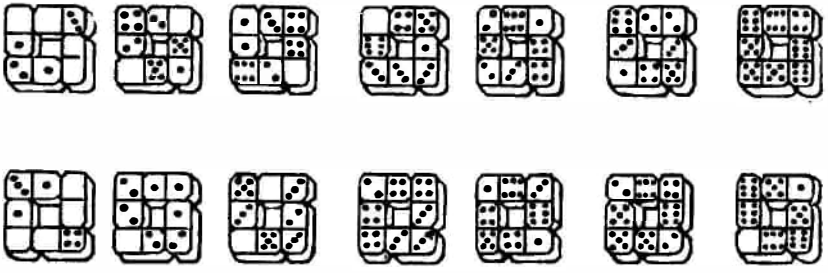
1 Quadrat mit der Summe 3, 2 Quadrate mit der Summe 9,
1 " " " " 6, 1 Quadrat " " " 10,
1 " " " " 8, 1 " " " " 16.

In der zweiten Lösung (Abb. 282, unten):

2 Quadrate mit der Summe 4, 2 Quadrate mit der Summe 10,
1 Quadrat " " " 8, 2 " " " " 12.



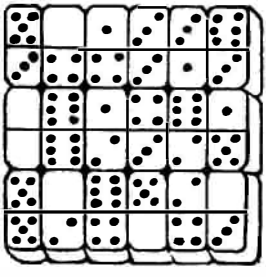
Abbildung 282



Magische Quadrate aus Dominosteinen

Abb. 283 gibt ein Muster für ein magisches Quadrat mit der Augensumme 18 je Reihe.

Abbildung 283



Eine mathematische Reihe aus Dominosteinen

Hier sind als Beispiel zwei Reihen mit der Differenz von 2:

a) 0—0; 0—2; 0—4; 0—6; 4—4 (oder 3—5); 5—5 (oder 4—6).

b) 0—1; 0—3 (oder 1—2); 0—5 (oder 2—3); 1—6 (oder 3—4); 3—6 (oder 4—5); 5—6.

Insgesamt kann man 23 sechssteinige Reihen legen. Die Anfangssteine sind folgende:

a) für mathematische Reihen mit der Differenz 1:

0—0,	1—1,	2—1,
0—1,	2—0,	3—0,
1—0,	0—3,	0—4,
0—2,	1—2,	1—3,
2—2,	3—2,	
3—1,	2—4,	
1—4,	3—5,	
2—3,	3—4.	

b) für mathematische Reihen mit der Differenz 2:

0—0, 0—2, 0—1

„Spiel mit 15" oder „taquin"

Erste Aufgabe

Die in der Aufgabe geforderte Anordnung kann aus der Ausgangsposition mit folgenden 44 Zügen erreicht werden:

14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7,
4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9,
12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13,
9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14,
10, 6, 2, 1.

Zweite Aufgabe

Die Anordnung der Aufgabenstellung wird mit folgenden 39 Zügen erreicht:

14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10, 13, 9,
5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13,
9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 14,
13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12.

Dritte Aufgabe

Das magische Quadrat mit der Summe 30 wird mit einer Reihe von Zügen erreicht:

12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15,
14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8,
4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6,
5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13,
14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.

„Spiel mit 11"

Habt ihr den ersten Zug, so müßt ihr zwei Streichhölzer nehmen, es verbleiben neun. Wieviel auch der zweite Spieler aufnimmt, im folgenden Zug nehmt ihr soviel, daß nur 5 Hölzchen auf dem Tisch zurückbleiben. Es ist leicht zu begreifen, daß ihr das stets könnt. Wieviel nun euer Gegner nehmen mag, stets hinterlaßt ihr ihm ein Streichholz und gewinnt.

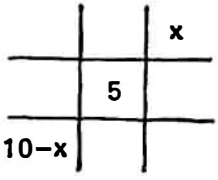
Wenn nicht ihr mit dem Spiel beginnt, hängt euer Erfolg davon ab, ob der Gegner das Geheimnis des erfolgbringenden Spielens kennt oder nicht.

„Spiel mit 15"

Um mit Sicherheit zu gewinnen, muß man mit der Ziffer 5 beginnen. In welches Feld ist sie einzutragen? Betrachten wir nacheinander die drei hier möglichen Fälle:

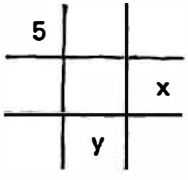
1. 5 wurde ins mittlere Feld eingetragen. Ganz gleich, welches Feld der Partner wählt, könnt ihr danach in ein freies Feld der gleichen Reihe schreiben.



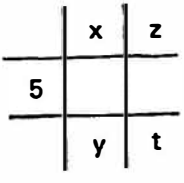


$15-5-x$ (wo x steht — ist die Ziffer des Gegners eingetragen). Die Zahl $15-5-x$, also $10-x$, ist natürlich kleiner als 9.

2. 5 steht in einem der Eckfelder. Der Partner wählt entweder Feld x oder Feld y. Schreibt er die Ziffer x, müßt ihr schreiben $y = 10-x$. Schreibt er y, antwortet ihr mit der Ziffer $x = 10-y$. Ihr gewinnt in beiden Fällen.



3. 5 steht in der Mitte der äußeren Reihe. Der Partner kann eins der vier Felder x, y, z oder t belegen.



Auf Ziffer x antwortet ihr mit $y = 10-z$; auf y als Antwort $x = 10-y$; auf z antwortet mit Ziffer $t = 10-z$; auf t setzt ein $z = 10-t$. In allen Fällen ist euer Erfolg gewährleistet.

„Spiel mit 32"

Es ist ziemlich leicht, hinter das einfache Geheimnis zu kommen, wie man spielen muß, ohne zu verlieren, sofern man versucht, die Partei vom Ende her durchzuspielen. Unschwer ist zu erkennen, daß der Sieg garantiert ist, wenn ihr mit eurem vorletzten Zug dem Partner 5 Hölzchen auf dem Tisch hinterlaßt. Der Partner darf nicht mehr als vier Streichhölzer aufnehmen, und folglich könnt ihr nach ihm alle verbleibenden wegnehmen. Doch, wie richtet man es ein, daß ihr mit Sicherheit nach dem vorletzten Zug fünf Hölzchen auf dem Tisch liegen laßt? Dazu müssen mit dem vorhergehenden Zug dem Gegner 10 Hölzchen überlassen werden. Dann läßt er nämlich, wieviel er auch aufhebt, nicht weniger als sechs liegen, und ihr könnt

ihm immer fünf überlassen. Weiter. Wie erreicht man, daß der Partner von 10 Streichhölzern wegnehmen muß? Dazu müssen im vorhergehenden Zug 15 Streichhölzer auf dem Tisch liegenbleiben.

So stellen wir fest, indem wir konsequent jeweils fünf abzählen, daß vorher 20 Hölzchen auf dem Tisch bleiben müssen, noch davor — 25 und schließlich, beim ersten Mal — 30 Streichhölzer, so daß man das Spiel mit dem Aufnehmen von 2 Hölzchen beginnt.

Da haben wir das ganze Geheimnis, um das Spiel nicht zu verlieren: Anfangs nehmt 2 Streichhölzchen; später, nachdem der Partner einige Hölzchen aufgenommen hat, nehmt soviel, daß 25 auf dem Tisch verbleiben; das nächste Mal laßt 20 übrig, danach 10 und schließlich 5. Das letzte Streichholz wird stets euch gehören.

Das gleiche, umgekehrt

Sind die Spielbedingungen umgekehrt, d. h., daß derjenige *verliert*, der das letzte Streichholz bekommt, so müßt ihr bei eurem vorletzten Zug sechs Hölzchen auf dem Tisch liegenlassen. Euer Partner muß dann, gleich wieviel er nimmt, für euch nicht weniger als zwei und nicht mehr als fünf hinterlassen. Also mit dem folgenden Zug könnt ihr auf jeden Fall das letzte Streichholz für ihn übriglassen. Zu diesem Zweck sind mit dem vorangehenden Zug 11 Streichhölzer übrigzulassen, mit denen davorliegenden Zügen — 16, 21, 26 und 31 Streichhölzer.

Also beginnt ihr damit, nur ein Streichholz aufzunehmen und mit den weiteren Zügen überlaßt ihr dem Partner jeweils 26, 21, 16, 11 und 6 Streichhölzer. Das letzte Hölzchen bleibt unvermeidlich für den Gegner übrig.

„Spiel mit 27"

Hier ist es schwieriger als beim „Spiel mit 32", die Methode herauszufinden, mit der man das Spiel nicht verlieren kann. Man muß von folgenden zwei Überlegungen ausgehen:

1. Habt ihr vor Spielende eine *ungerade* Anzahl Streichhölzer, so müßt ihr dem Gegner fünf Hölzchen überlassen, und euch ist der Sieg gesichert. Tatsächlich muß der Gegner mit dem nächsten Zug vier, drei, zwei oder ein Streichholz liegenlassen. Sind es vier, so nehmt ihr drei und gewinnt; sind es drei, nehmt ihr sie und gewinnt; sind es zwei, nehmt ihr eins und gewinnt.

2. Habt ihr jedoch vor Spielende eine *gerade* Anzahl Streichhölzer, dann müßt ihr dem Gegner sechs oder sieben überlassen. Verfolgen wir, wie das Spiel weitergeht. Läßt der Gegner mit dem folgenden Zug sechs liegen, nehmt ihr eins, und da ihr nun bereits eine gerade Zahl Streichhölzer habt, könnt ihr dem Gegner getrost fünf überlassen, mit denen er unvermeidlich verlieren muß. Läßt er nicht sechs, sondern fünf Hölzchen liegen, nehmt ihr vier und gewinnt. Läßt er vier übrig, nehmt ihr sie und gewinnt. Hinterläßt er drei, nehmt ihr zwei und gewinnt. Und schließlich, wenn er zwei liegen läßt, gewinnt ihr. Weniger als zwei kann er nicht zurücklassen.

Nun ist es schon nicht mehr schwer, die Methode herauszufinden, mit der man das Spiel nicht verlieren kann. Sie besteht darin, daß, wenn ihr eine ungerade An-



zahl Streichhölzer bei euch habt, ihr dem Gegner auf dem Tisch so viele liegenlaßt, daß sich eine durch 6 teilbare Zahl minus 1 ergibt, also 5, 11, 17 oder 23. Habt ihr jedoch eine gerade Zahl, so müßt ihr dem Gegner auf dem Tisch eine durch 6 teilbare oder um eins größere Zahl zurücklassen, also 6 oder 7, 12 oder 13, 18 oder 19, 24 oder 25. Die Null ist als gerade Zahl zu betrachten. Daher müßt ihr, wenn ihr das Spiel beginnt, von 27 Streichhölzchen 2 oder 3 nehmen, im weiteren jedoch in Übereinstimmung mit dem vorher Gesagten vorgehen.

Bei dieser Spielführung gewinnt ihr unbedingt. Ihr dürft euch vom Gegner nur den Spielfaden nicht nehmen lassen.

Auf andere Art

Sind die Spielregeln umgekehrt und als Sieger gilt, wer eine *ungerade* Anzahl Hölzchen hat, dann müßt ihr folgendermaßen vorgehen: Habt ihr eine *gerade* Anzahl Streichhölzer, so überlaßt dem Gegner um eins weniger als eine durch 6 teilbare Zahl. Habt ihr dagegen eine ungerade, dann überlaßt ihm eine durch 6 teilbare Anzahl oder um ein Hölzchen mehr. Das muß zwangsläufig zu eurem Sieg führen. Bei Spielbeginn habt ihr 0 Hölzchen (also gewissermaßen eine gerade Zahl), deshalb nehmt mit dem ersten Zug vier und laßt dem Gegner 23 zurück.

Denkt euch eine Zahl

Nr. 1. Ist die gedachte Zahl a, so sind die durchgeführten Rechenoperationen zunächst so:

$$(3a + 2) \cdot 3 + a = 10a + 6.$$

Das ergibt ein zweistelliges Resultat, dessen erste Ziffer die gedachte Zahl ist und die zweite 6.

Mit dem Wegstreichen der ersten Ziffer verschwindet die gedachte Zahl.

Das andere versteht sich von selbst.

Das Erraten der Nr. 2, Nr. 3, Nr. 5 und Nr. 8 sind verschiedene Varianten des soeben beschriebenen.

Auf andere Weise wird die gedachte Zahl in den Fällen Nr. 4, Nr. 6, Nr. 7 und Nr. 9 ausgeschlossen.

Zum Beispiel sind in Nr. 9 die durchgeführten Rechenoperationen zunächst folgende:

$$170 - (a + 20) - 6 + a = 144.$$

Alles Weitere versteht sich von selbst.

Eine besondere Methode wird beim Erraten von Nr. 10 angewendet. Zu einer dreistelligen Zahl rechts daneben die gleiche Zahl zu schreiben, das ist dasselbe, wie eine Zahl mit 1001 zu multiplizieren (z. B. $356 \cdot 1001 = 356\,356$). Doch $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Deshalb sind, wenn die gedachte Zahl a ist, die anfangs durchgeführten Rechenoperationen:

$$\frac{a \cdot 1001}{7 \cdot a \cdot 11} = 13$$

Das Weitere ist klar.

Wie ihr seht, fußt das Erraten in allen Fällen darauf, daß die gedachte Zahl beim Rechnen ausgeschlossen ist. Versucht selbst, da ihr das nun wißt, auf einige neue Beispiele des Erratens zu kommen.

Laßt uns raten

Verfolgt, welche Rechenoperationen ich euch mit den gedachten Ziffern ausführen lasse, damit ihr versteht, wie das Erraten in diesen Fällen erfolgt.

Im ersten Beispiel habt ihr zunächst mit 5 multipliziert. Danach das, was herauskam mit 2 malgenommen. Das bedeutet, ihr habt sie mit 2 mal 5, also mit 10, multipliziert. Doch jegliche Zahl, die mit 10 malgenommen wird, hat ein Ergebnis, das auf 0 endet. Jetzt bitte ich euch, 7 dazuzuzählen. Jetzt weiß ich, daß ihr eine Zahl aus zwei Ziffern im Kopfe habt. Die erste kenne ich nicht, die zweite ist mir bekannt, es ist eine 7. Die mir unbekannte erste Ziffer bitte ich wegzustreichen. Was habt ihr jetzt im Kopf? Die 7 natürlich. Ich könnte euch die Zahl schon nennen, doch ich bin schlau. Um die Spuren zu vertuschen, veranlasse ich euch, verschiedene Zahlen zu der 7 hinzuzuzählen und wieder wegzunehmen, und für mich mache ich das alles mit. Am Ende erkläre ich euch, daß ihr 17 herausbekommen habt. Diese Zahl muß sich unbedingt bei euch ergeben, was für eine Ziffer ihr euch auch gedacht habt.

Beim zweiten Mal gehe ich bereits einen anderen Weg, sonst kommt ihr schnell hinter das Geheimnis. Ich bat euch, die gedachte Ziffer zunächst mit 3 malzunehmen, dann noch einmal mit drei zu multiplizieren und zum Ergebnis die gedachte Zahl hinzuzuzählen. Was muß am Ende bei euch herauskommen? Das ist leicht zu begreifen, weil es das gleiche ist, wie eine gedachte Ziffer mit $3 \cdot 3 + 1$ zu multiplizieren, also mit 10. Wiederum weiß ich, daß bei euch am Ende eine 0 steht. Na, und weiter geht es auf die alte Weise: Es wird irgendeine Ziffer hinzugefügt, die erste unbekannte wird weggestrichen und mit der verbleibenden, die ich kenne, werden zum Verwischen der Spuren verschiedene Rechnungen ausgeführt.

Der dritte Fall. Auch hier ist es das gleiche, nur auf andere Weise. Ich bitte euch, die gedachte Zahl zu verdoppeln, das Resultat noch einmal zu verdoppeln und nochmal zu verzweifachen sowie zum Ergebnis zweimal die gedachte Zahl hinzuzufügen. Was ergibt das alles? Das ergibt eure Ziffer multipliziert mit $2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 + 1$, also 10. Das übrige versteht sich von selbst. Sogar wenn ihr euch Ziffer 1 oder 0 gedacht habt, klappt der Trick fehlerfrei.

Jetzt könnt ihr nicht schlechter als ich solche Experimente mit denen von euren Freunden veranstalten, die dieses Buch nicht gelesen haben. Vielleicht denkt ihr euch auch eigene Methoden des Erratens aus. Die Sache ist gar nicht so kompliziert.

Eine dreistellige Zahl erraten

Schauen wir uns wiederum an, welche Rechenoperationen mit jeder Ziffer vorgenommen wurden. Die erste Ziffer wurde zunächst mit 2 malgenommen, dann mit 5, danach mit 10; im Ergebnis also mit $2 \cdot 5 \cdot 10$ oder mit 100. Die zweite Ziffer wurde mit 10 multipliziert, die dritte wurde ohne Veränderungen hinzugefügt. Außerdem wurde zu allem $5 \cdot 5 \cdot 10$, also 250 addiert.



Das heißt, wenn wir 250 von der erhaltenen Zahl abziehen, bleibt: Die erste Ziffer, multipliziert mit 100, plus die zweite, multipliziert mit 10, plus die dritte Ziffer. Kurz gesagt, verbleibt genau die gedachte Zahl. Daraus wird klar, wie die gedachte Zahl zu erraten ist. Man muß vom Ergebnis aller Rechnungen 250 abziehen. Heraus kommt, was gedacht war.

Zahlenzauberei

Verfolgt man die Rechenoperationen aufmerksam, bemerkt man ganz leicht, daß sich beim Erraten die vierfache gedachte Zahl ergeben muß und noch 4 dazu. Das heißt, nimmt man die 4 weg und teilt den Rest durch 4, so ergibt sich die gedachte Zahl.

Wie errät man eine weggestrichene Ziffer?

Wer die Grundsätze für die Teilbarkeit durch 9 kennt, weiß, daß die Summe der Ziffern jeder beliebigen Zahl beim Teilen durch 9 den gleichen Rest ergibt wie die Zahl selbst. Zwei Zahlen, die aus ein und denselben Ziffern zusammengesetzt sind, jedoch in anderer Folge, müssen daher im Ergebnis der Division durch 9 gleiche Reste ergeben. Das heißt, wenn man die eine von der anderen abzieht, so läßt sich die Differenz ohne Rest durch 9 teilen (gleiche Reste ergeben beim Subtrahieren 0).

Auf Grund des Gesagten könnt ihr erkennen, daß euer Freund als Ergebnis der Subtraktion eine Zahl erhielt, deren Quersumme durch 9 teilbar ist. Da die euch mitgeteilten Ziffern 8, 4, 8, in der Summe 20 ergeben, war die weggestrichene Zahl offensichtlich die Ziffer 7, die mit 20 addiert durch 9 teilbar ist.

Wie errät man den Geburtstag?

Um das gesuchte Datum zu finden, sind vom Endergebnis 365 abzuziehen. Die letzten zwei Ziffern der Differenz bezeichnen dann die Monatszahl und die voranstehenden — die Tageszahl im Monat. In unserem Beispiel

$$2073 - 365 = 1708.$$

Aus der Zahl 17—08 stellen wir das Datum fest: 17.8. Warum das so ist, wird klar, wenn man die Tage des Monats mit K bezeichnet, die Monatszahl mit N und die erforderlichen Rechnungen ausführt.

Wir erhalten $(2K \cdot 10 + 73) \cdot 5 + N = 100K + N + 365$.

Es ist klar, daß wir, wenn wir 365 abziehen, eine Zahl bekommen müssen, die K Hunderter und N Einer enthält.

Wie alt ist der Gesprächspartner?

Führt man die Rechenoperationen mehrere Male aus, stellt man ohne weiteres fest, daß stets das Alter zu ein und derselben Zahl addiert wird, nämlich zu 1089. Deshalb muß, wenn von dem euch genannten Ergebnis die Zahl 1089 abgezogen wird, das gesuchte Alter herauskommen.

Führt man den Trick wiederholt vor, kann (um die Aufdeckung des Geheimnisses zu verhindern) die letzte Rechenoperation variiert werden, indem man beispielsweise die Zahl 1089 durch 9 teilen läßt und zum Quotienten das Alter hinzuzählt.

Wie kann man die Zusammensetzung einer Familie erraten?

Um die Familienzusammensetzung zu erraten, ist von Endresultat 75 abzuziehen. In unserem Beispiel

$$122 - 75 = 47.$$

Die erste Ziffer der Differenz ergibt die Zahl der Brüder, die zweite die Anzahl der Schwestern.

Tatsächlich, wenn die Zahl der Brüder a, die der Schwestern b ist, so ergeben die Rechenoperationen

$$[(a + 3) \cdot (5 + 20)] \cdot 2 + b + 5 = 10a + b + 75,$$

und im Endergebnis müssen eine zweistellige Zahl a und b Einer entstehen.

Den Trick darf man nur anwenden, wenn man sicher ist, daß nicht mehr als 9 Schwestern vorhanden sind.

Der Trick mit dem Telefonbuch

Das Geheimnis des Tricks besteht einfach darin, daß euch das Endergebnis der Rechnerei eures Freundes schon vorher bekannt war. Mit welcher dreistelligen Zahl die aufgezählten Rechenoperationen auch durchgeführt werden — das Ergebnis ist immer das gleiche: 1089. Durch eine Probe kann man sich leicht davon überzeugen. Zuvor ins Telefonbuch zu sehen und sich einzuprägen, welcher Teilnehmer in der neunten Zeile von oben oder unten auf Seite 108 steht — ist eine Spielerei.

Wie errät man einen Dominostein?

Betrachten wir, was wir mit der ersten Zahl gemacht haben. Zunächst multiplizierten wir sie mit 2 und dann noch mit 5. Insgesamt mit 10. Außerdem addierten wir 7 hinzu, die wir danach mal 5 nahmen. Anders ausgedrückt, addierten wir $7 \cdot 5 = 35$.

Ziehen wir also vom Resultat 35 ab, so bleiben so viel Zehner, wieviel Augen auf einer Dominosteinhälfte sind. Die Addition der Augen der zweiten Hälfte ergibt die zweite Ziffer des Resultats.

Jetzt ist klar, weshalb die Ziffern des Ergebnisses sofort die Augenzahl ergeben.

Erstaunliches Gedächtnis

Das Geheimnis dieses Tricks ist, daß das Zeichen auf den Kärtchen — Buchstabe und Ziffer — euch sagt, welche Zahl darauf geschrieben steht. Ihr müßt euch vor allem merken, daß Buchstabe A 20 bedeutet, B — 30, C — 40, D — 50, E — 60.



Deshalb stehen Buchstabe und die danebenstehende Ziffer für eine bestimmte Zahl. Zum Beispiel:

*A*1 — 21, *C*3 — 43, *E*5 — 65.

Aus dieser Zahl stellt ihr nach bestimmter Regel die lange Zahl, die auf dem Kärtchen steht, zusammen. Wie das gemacht wird, zeigen wir an einem Beispiel.

Man hat euch *E*4 genannt, also 64. Mit dieser Zahl vollführt ihr folgendes:

Erstens, addiert die Ziffern:

$$6 + 4 = 10.$$

Zweitens, multipliziert sie mit 2:

$$64 \cdot 2 = 128.$$

Drittens, zieht von der größeren Ziffer die kleinere ab:

$$6 - 4 = 2.$$

Viertens, multipliziert beide Ziffern miteinander:

$$6 \cdot 4 = 24.$$

Alle Resultate schreibt hintereinander:

10 128 224.

Das ist die Zahl, die auf dem Kärtchen steht.

Die durchzuführenden Rechenoperationen können kurz so bezeichnet werden:

$$|+, 2, -, \cdot,|$$

also, Addition, Verdoppelung, Subtraktion, Multiplikation.

Noch ein paar Beispiele:

Kärtchen *D*3.

Welche Zahl steht darauf?

$$\begin{aligned} D3 &= 53, \\ 5 + 3 &= 8, \\ 53 \cdot 2 &= 106, \\ 5 - 3 &= 2, \\ 5 \cdot 3 &= 15. \end{aligned}$$

Die Zahl heißt: 8 106 215.

Kärtchen *B*8.

Welche Zahl steht darauf?

$$\begin{aligned} B8 &= 38, \\ 3 + 8 &= 11, \\ 38 \cdot 2 &= 76, \\ 8 - 3 &= 5, \\ 8 \cdot 3 &= 24. \end{aligned}$$

Die Zahl heißt 1 176 524.

Um das Gedächtnis nicht zu überanstrengen, könnt ihr die Zahlen so wiedergeben, wie ihr sie errechnet, oder auch langsam mit Kreide an die Tafel schreiben.

Es ist nicht leicht, den Kniff, den ihr anwendet, zu erraten. Deshalb versetzt der Trick die Zuschauer gewöhnlich in großes Erstaunen.

Ungewöhnliches Gedächtnis

Die Lösung ist lächerlich einfach: Schreibt hintereinander einige Telefonnummern von euren Bekannten.

Geheimnisvolle Würfel

Die Lösung liegt in der Anordnung der Ziffern auf den Flächen jedes Würfels: Sie sind so verteilt, daß die Summe der Ziffern der jeweils gegenüberliegenden Seiten in jedem Falle $= 7$ ist (prüft es auf der Abb. 279 nach). Daher ist die Zahlensumme aller oberen und unteren Flächen der vier Würfel, die aufeinander getürmt sind, gleich $7 \cdot 4 = 28$. Zieht man von 28 die Zahl ab, die auf der oberen Fläche des obenaufliegenden Würfels steht, so könnt ihr fehlerlos die Summe der Zahlen von allen sieben verdeckten Flächen des Würfels bestimmen.

Wie errät man die Summe nichtaufgeschriebener Zahlen?

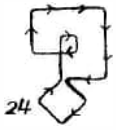
Addiert man zu einer fünfstelligen Zahl 99 999, also $100\,000 - 1$, so erscheint vor der Zahl eine 1 und die letzte Ziffer verringert sich um 1. Darauf basiert auch der Trick. Indem ihr in Gedanken zum ersten Summanden 99 999 addiert

$$+\ \begin{array}{r} 84\,706 \\ 99\,999, \end{array}$$

schreibt ihr die zukünftige Summe der drei Summanden: 184 705. Ihr habt jetzt nur darauf zu achten, daß der zweite und dritte Summand die Zahl 99 999 ergeben. Dazu zieht ihr im Kopf beim Schreiben des dritten Summanden jede Ziffer des zweiten Summanden von 9 ab. In unserem Beispiel ist der zweite Summand 30 485, deshalb schreibt ihr 69 514. Weil

$$\begin{array}{r} +\ 30\,485 \\ 69\,514 \\ \hline 99\,999 \end{array}$$

sind, muß sich das Resultat, das zuvor aufgeschrieben war, bestätigen.



Mit einem Zug

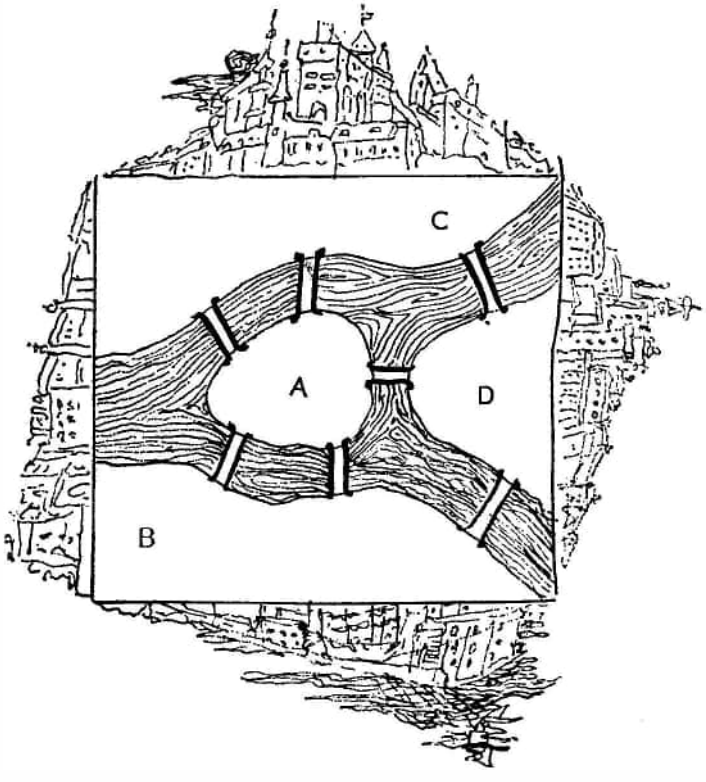
(Zeichnen von Figuren in ununterbrochener Linienführung)

Die Aufgabe mit den Königsberger Brücken

Eine besondere Aufgabe zog einmal die Aufmerksamkeit des genialen Mathematikers Euler auf sich. Er formulierte sie so:

Abbildung 284

„In Königsberg[1]) befindet sich eine Insel, der so-



genannte Kneiphof. Der Fluß teilt sich dort in zwei Arme, über die sieben Brücken führen. Ist es möglich, jede Brücke genau einmal zu passieren?

Einige behaupten, das sei möglich. Andere hingegen halten das für undurchführbar."

Liebe Leser, wie ist ihre Meinung?

---

[1]) Heute Kaliningrad

Was ist Topologie?

Euler widmete der Aufgabe mit den Königsberger Brücken eine umfassende mathematische Untersuchung, die 1736 der Petersburger Akademie der Wissenschaften unterbreitet wurde. Die Arbeit beginnt mit folgenden Sätzen, in denen definiert wird, zu welchem Gebiet der Mathematik derartige Fragen gehören:

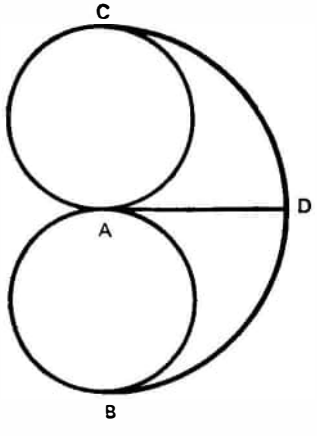
„Neben dem Gebiet der Geometrie, das die Größen und Methoden des Messens zum Gegenstand hat und bereits im Altertum breit entwickelt wurde, wies Leibniz erstmals auf ein anderes Gebiet hin, das von ihm „Geometrie der Lage" genannt wurde. Dieses Gebiet der Geometrie behandelt ausschließlich die Anordnung von Teilen einer Figur zueinander, ohne Beachtung ihrer Ausmaße.[1])

Unlängst hörte ich von einer Aufgabe, die zur Geometrie der Lage zu rechnen ist, und habe mich entschlossen, hier als Beispiel meine Lösungsmethode für diese Aufgabe zu unterbreiten."

Euler meint die Aufgabe mit den Königsberger Brücken.

Die Überlegungen des großen Mathematikers werden wir hier nicht wiedergeben, sondern wir beschränken uns auf kurze Darlegungen, die seine Schlußfolgerung bestätigen, wonach die von der Aufgabe geforderte Begehung undurchführbar ist.

Abbildung 285



Analyse der Aufgabe

Der Anschaulichkeit halber ersetzen wir die Skizze mit der Anordnung der Brücken durch ein vereinfachtes Schema (Abb. 285). In der vorliegenden Aufgabe hat die Größe der Insel und die Länge der Brücken keinerlei Bedeutung. (Das ist, wie wir wissen, eine Besonderheit aller topologischen Aufgaben: sie sind unabhängig von den relativen Ausmaßen der Figur.)

Deshalb können wir die Flächen A, B, C, D (Abb. 284) im Schema durch Punkte mit der entsprechenden Bezeichnung ersetzen, in denen sich die Wege treffen. Die Aufgabe besteht jetzt, wie wir sehen, darin, die

[1]) Heute wird dieses Gebiet der höheren Geometrie als Topologie bezeichnet, die sich zu einer breiten mathematischen Disziplin entwickelt hat. Die Aufgaben dieses Kapitels gehören zu einem nur kleinen Teilabschnitt der Topologie.

Figuren der Abb. 285 in einem Strich zu zeichnen, ohne die Feder vom Papier zu lösen und ohne eine Linie doppelt zu ziehen.

Zeigen wir nun, daß die Figur nicht in einem Zug gezeichnet werden kann. Man muß in der Tat zu jedem der Knotenpunkte *A*, *B*, *C*, *D* auf einem der Wege kommen und den Punkt dann auf anderem Wege verlassen. Eine Ausnahme stellen nur der Ausgangs- und Endpunkt dar. Zum ersteren braucht man von nirgendwoher zu kommen, beim zweiten ist keine Notwendigkeit, ihn zu verlassen. Also, die Möglichkeit des Begehens unserer Figur ohne Unterbrechung erfordert, daß in allen Knotenpunkten, außer zweien, entweder zwei oder vier — auf alle Fälle eine gerade Anzahl Wege — zusammentreffen. In unserer Figur trifft sich jedoch in jedem der Punkte *A*, *B*, *C*, *D* eine ungerade Anzahl Linien. Deshalb kann man sie nicht in einem Zug zeichnen. Folglich ist es auch nicht möglich, in der geforderten Weise über die Königsberger Brücken zu gehen.

Sieben Aufgaben

Versucht mit einem Strich jede der folgenden sieben Figuren zu zeichnen. Denkt an die Forderung: Alle Linien der gegebenen Figur sind ohne abzusetzen, ohne zusätzliche Striche und ohne Wiederholung bereits gezeichneter Linien zu ziehen.

Ein wenig Theorie

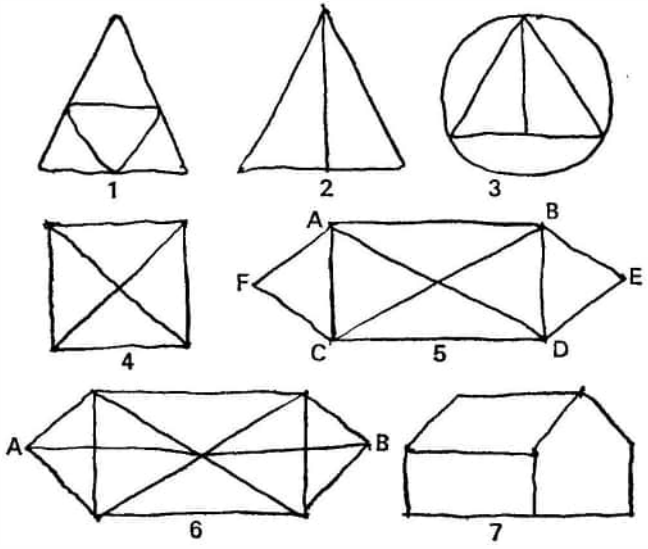
Die Versuche, in ununterbrochener Linie die Figuren *1*—*7* (Abb. 286) zu zeichnen, führen zu unterschiedlichen Ergebnissen. Einige Figuren lassen sich zeichnen, von welchem Punkt man auch mit der Linienführung beginnt. Andere kann man mit einem Strich zeichnen, sofern man an einem bestimmten Punkt anfängt. Die dritten schließlich lassen sich überhaupt nicht mit einer durchgehenden Linie zeichnen. Woraus resultiert ein solcher Unterschied? Gibt es Merkmale, die schon von vornherein sichtbar machen, ob eine gegebene Figur mit einem Strich gezeichnet werden kann und wenn ja, von welchen Punkten auszugehen ist?

Die Theorie gibt auf die Fragen erschöpfende Ant-

worten, und wir machen uns jetzt mit einigen Grundsätzen dieser Theorie vertraut.

Einigen wir uns darauf, die Punkte der Figur, in der sich eine *gerade* Anzahl von Linien trifft, als „gerade" zu bezeichnen, im Unterschied von den „ungeraden" Punkten, in denen sich eine *ungerade* Zahl von Linien trifft.

Abbildung 286



Es läßt sich beweisen (wir verzichten auf die Beweisführung), daß eine Figur, gleich, welche Gestalt sie haben mag, entweder überhaupt keine ungeraden Punkte oder aber zwei, vier, sechs — immer eine gerade Anzahl hat.

Hat die Figur *keine* ungeraden Punkte, dann läßt sie sich stets mit einem Zug zeichnen, ganz gleich, wo man mit dem Zeichnen beginnt. Solcher Art sind die Figuren *1* und *5* (Abb. 286).

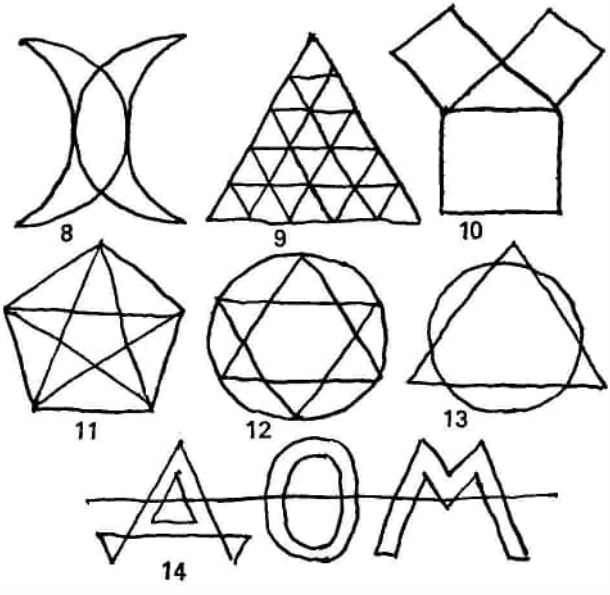
Hat die Figur ein einziges Paar ungerade Punkte, so kann man sie mit einer durchgehenden Strichführung zeichnen, sofern in einem ungeraden Punkte begonnen wird (gleichgültig in welchem). Es ist leicht zu ersehen, daß die Strichführung im zweiten ungeraden Punkt enden muß. *2*, *3* und *6* sind solche Figuren. Bei Figur *6* zum Beispiel ist die Linienführung entweder im Punkt *A* oder Punkt *B* zu beginnen.



Verfügt die Figur über mehr als ein einziges Paar ungerade Punkte, läßt sie sich nicht mit einem Zug zeichnen. Das trifft auf die Figuren *4* und *7* zu, die je zwei Paare ungerade Punkte aufweisen.

Das Gesagte ist ausreichend, um fehlerfrei zu bestimmen, welche Figuren nicht mit einem Strich gezeichnet werden können, bei welchen es geht und in welchem Punkt anzufangen ist. Prof. W. Arens

Abbildung 287



empfiehlt sich weiterhin von der Regel leiten zu lassen: „Alle bereits gezeichneten Linien der gegebenen Figur sind als nicht vorhanden zu betrachten und bei der Auswahl der folgenden Linien ist darauf zu achten, daß die Figur ihre Einheit bewahrt (nicht zerfällt), wenn auch diese Linie aus der Zeichnung herausgenommen wird."

Nehmen wir an als Beispiel, das Zeichnen der Figur *5* wurde auf folgendem Weg begonnen: *ABCD*. Zieht man jetzt die Linie *DA*, so bleiben zwei Figuren nicht gezeichnet — *ACF* und *BDE*, die miteinander *nicht verbunden* sind (die Figur *5* ist zerfallen). Wenn wir die Figur *ACF* beendet haben, können wir nicht zu der Figur *BDE* überwechseln, weil keine sie verbindenden Linien existieren. Deshalb darf auf *ABCD*

nicht *DA* folgen, sondern ist zunächst *DBED* zu zeichnen und dann über die übriggebliebene Linie *DA* zur Figur *AFC* überzugehen.

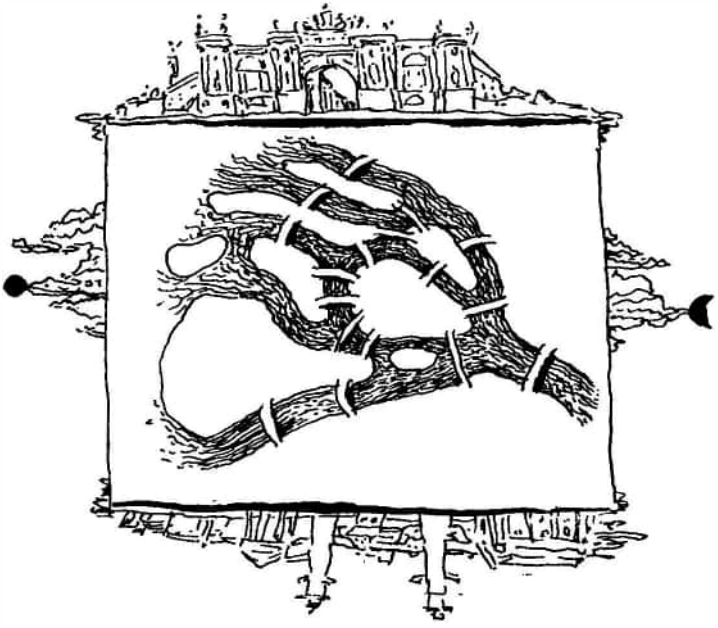
Noch weitere sieben Aufgaben

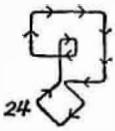
Zeichnet mit einer durchgehenden Linie die Figuren, die auf Abb. 287 dargestellt sind.

Die Leningrader Brücken

Zum Abschluß unterbreiten wir eine Aufgabe, die Sujet eines Exponats im Mathematiksaal des Hauses der unterhaltsamen Wissenschaft ist. Die Aufgabe besteht darin, über 17 Brücken, die das abgebildete Territorium der Stadt Leningrad miteinander verbinden, nur einmal zu gehen. Im Unterschied zur Königsberger Aufgabe ist die geforderte Begehung diesmal möglich, und unser Leser ist genügend theoretisch gerüstet, um selbständig mit der Aufgabe fertig zu werden.

Abbildung 288





Antworten

Die Abbildungen 289 und 290 zeigen die Lösungen des Kapitels „Mit einem Zug".

Abbildung 289

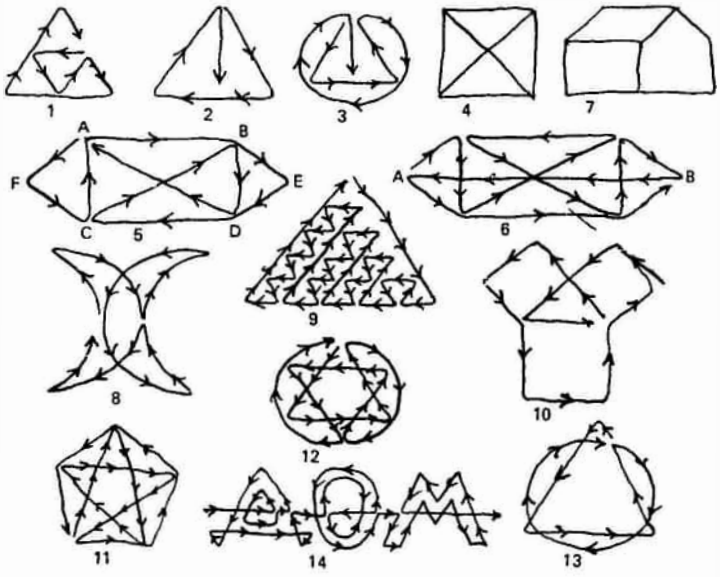
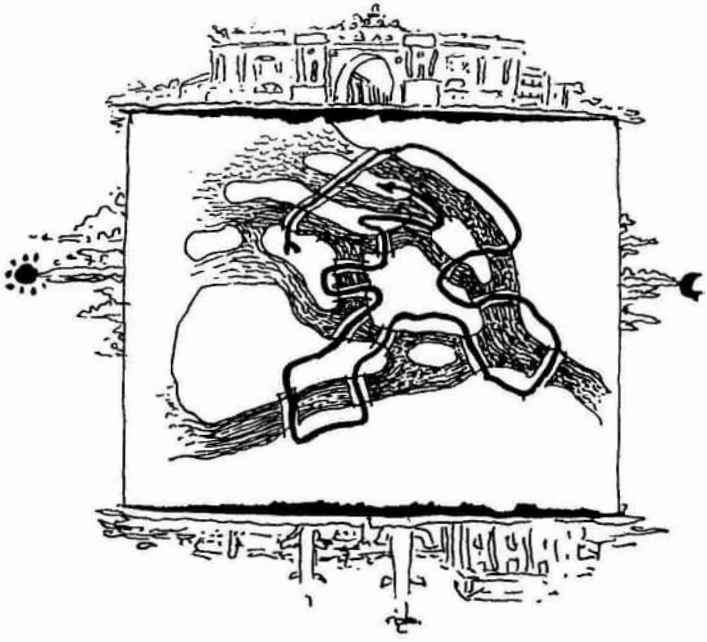


Abbildung 290





Geometrische Knobeleien

Der Leiterwagen

Warum nutzt sich die Vorderachse eines Leiterwagens stärker ab und wird öfter heiß als die hintere?

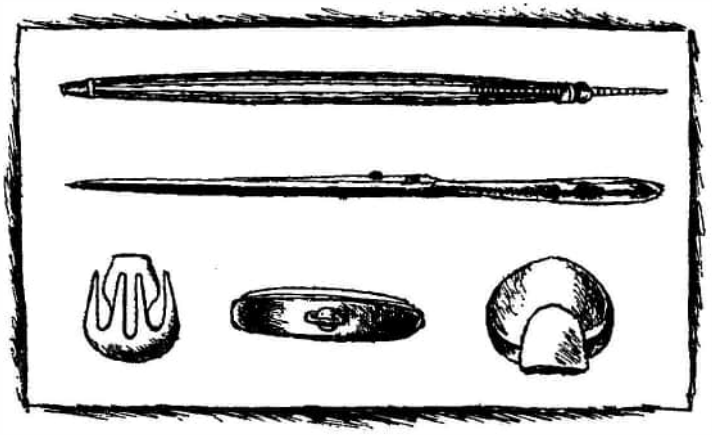
Wieviel Kanten?

Hier eine Frage, die ganz bestimmt vielen als sehr naiv erscheint oder, im Gegenteil, überaus listig:
Wieviel Kanten hat ein sechsflächiger Bleistift? Denkt sorgfältig über die Aufgabe nach, bevor ihr nach der Antwort schaut.

Was ist hier dargestellt?

Versucht zu bestimmen, was auf Abb. 291 dargestellt ist.

Abbildung 291

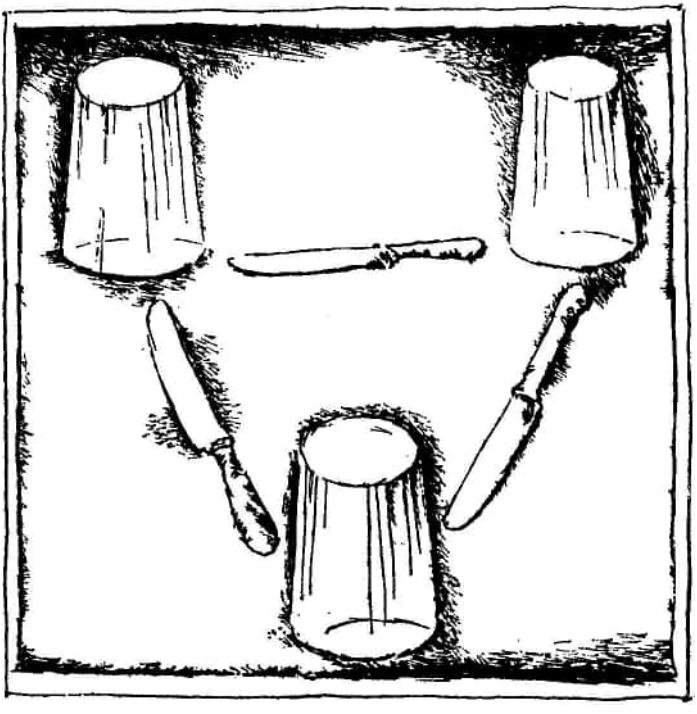


Die ungewöhnliche Blickrichtung gibt den dargestellten Gegenständen ein seltsames Aussehen. Bemüht euch jedoch herauszubekommen, was der Zeichner abgebildet hat. Es sind alles euch gut vertraute Gegenstände des täglichen Gebrauchs.

Gläser und Messer

Abbildung 292

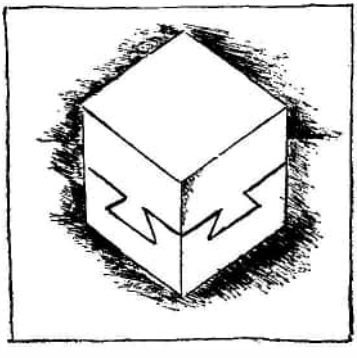
Drei Saftgläser sind so auf dem Tisch verteilt, daß der Abstand zwischen ihnen größer als die Länge jedes



dazwischenliegenden Messers ist (Abb. 292). Dennoch ist erforderlich, aus den drei Messern Brücken zu bauen, die alle drei Gläser miteinander verbinden. Selbstverständlich ist es nicht gestattet, die Gläser näher aneinander zu rücken. Auch darf außer den Messern und Gläsern nichts anderes zu Hilfe genommen werden.

Bringt ihr das zustande?

Abbildung 293

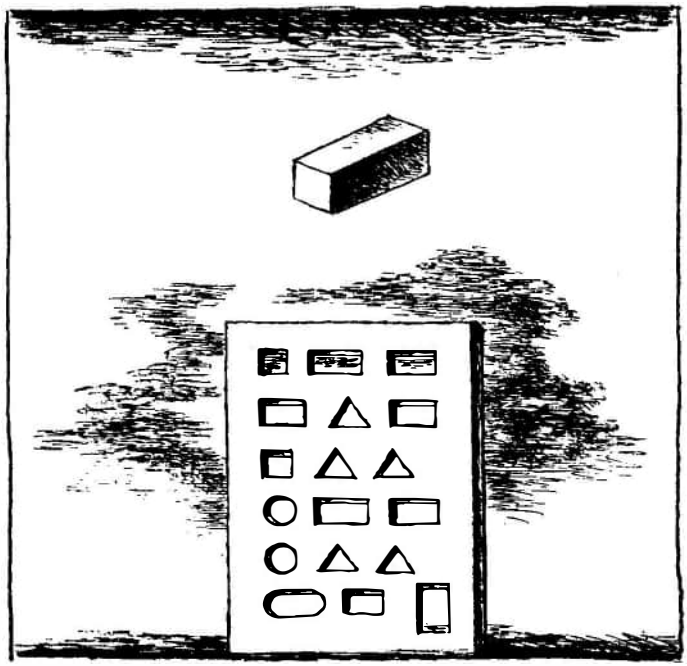


Wie ist das gemacht?

Ihr seht hier (Abb. 293) einen Holzwürfel, der aus zwei Holzstücken zusammengefügt ist. Die obere Hälfte hat Vorsprünge (Spund), die in die Aussparun-

gen (Fasen) des unteren Teils greifen. Doch achtet auf die Form und Anordnung der Verspundung und erklärt, wie es dem Tischler gelang, beide Teile zusammenzufügen. Ist doch jede Hälfte aus einem ganzen Holzstück gefertigt?

Abbildung 294



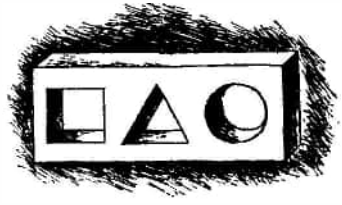
Ein Spund für drei Öffnungen

In die Platte (Abb. 294) sind sechs Reihen mit je drei Löchern geschnitten. Aus beliebigem Material ist *ein* Verschluß zu schneiden, mit dem alle drei Öffnungen in der Reihe verschlossen werden können.

Für die erste Reihe ist das überhaupt (Abb. 294) nicht schwer. Es ist eindeutig, daß als Verschluß das auf der Zeichnung abgebildete Holzstück geeignet ist.

Sich eine passende Spundform für die verbleibenden fünf Reihen einfallen zu lassen, ist schon schwieriger. Übrigens wird mit diesen Aufgaben jeder fertig werden, der sich schon mal mit technischen Zeichnungen beschäftigt hat. Im wesentlichen geht es darum, ein Detail auf Grund seiner drei Projektionen anzufertigen.

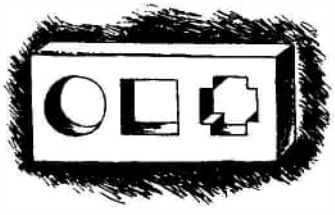
Abbildung 295



Ein Paßstück finden

Vor euch ist ein Brett mit drei Durchbrüchen: Quadrat, Dreieck und Kreis (Abb. 295). Kann es ein Paßstück in solcher Form geben, mit dem alle drei Öffnungen verschließbar sind?

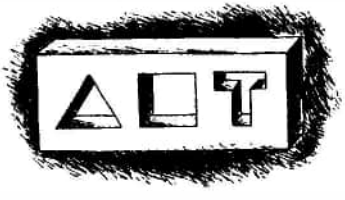
Abbildung 296



Ein zweites Paßstück

Wenn ihr die vorangehende Aufgabe gelöst habt, so gelingt es euch vielleicht auch, einen Verschluß für die Öffnungen zu finden, die auf Abb. 296 gezeigt werden?

Abbildung 297



Ein drittes Paßstück

Zum Schluß noch eine derartige Aufgabe: Gibt es ein Paßstück für alle drei Öffnungen, wie sie Abbildung 297 zeigt?

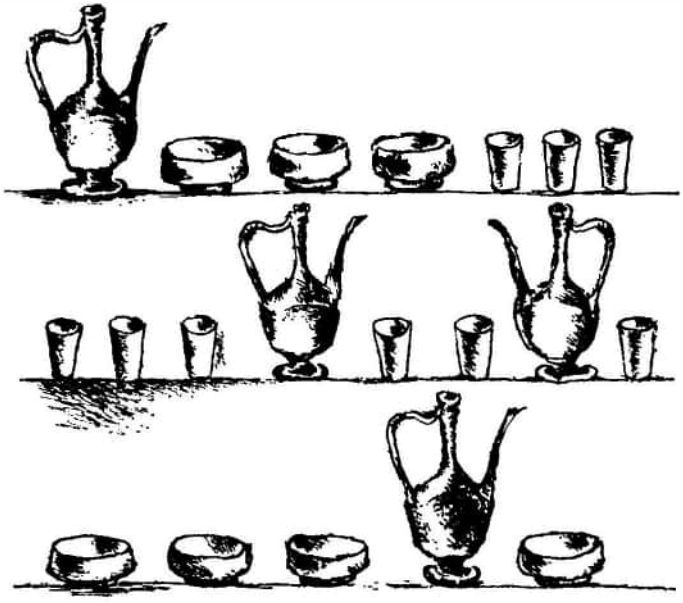
Zwei Henkeltöpfe

Ein Henkeltopf ist doppelt so hoch wie der andere, dafür ist der letztere 1 1/2mal breiter (Abb. 298). Welcher von beiden hat ein größeres Fassungsvermögen?

Abbildung 298



Abbildung 299

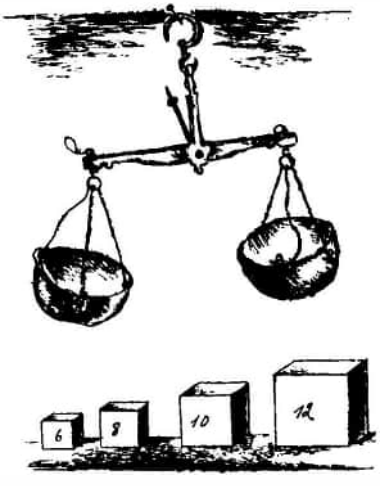


Wieviel Gläser?

Auf diesem Regal (Abb. 299) sind Gefäße von drei verschiedenen Größen so aufgestellt, daß sich für jede Reihe das gleiche Fassungsvermögen ergibt. Das kleinste Gefäß faßt den Inhalt eines Glases.

Wie ist das Fassungsvermögen der anderen zwei Gefäße?

Abbildung 300



Zwei Kochtöpfe

Zwei kupferne Kochtöpfe haben die gleiche Form und die gleiche Wandstärke. Der erste faßt achtmal mehr als der zweite.

Wievielmal so schwer ist er?

Vier Würfel

Vier volle Würfel unterschiedlicher Größe wurden aus gleichem Material angefertigt (Abb. 300), und zwar mit 6 cm, 8 cm, 10 cm und 12 cm Höhe. Sie sind auf der Waage so unterzubringen, daß sie im Gleichgewicht steht.

Welche Würfel oder welchen legt ihr auf die eine Wiegeschale und welche (oder welchen) auf die andere?

Zur Hälfte

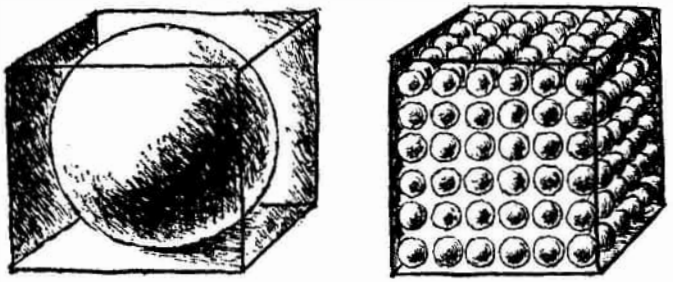
In ein offenes Faß ist Wasser gefüllt worden. Es sieht aus, als wäre es halbvoll. Doch ihr möchtet genau wissen, ist es halbvoll oder ist weniger oder mehr Wasser drin. Ihr habt keinen Stab zur Hand und überhaupt kein Instrument, um nachzumessen.

Auf welche Weise könnt ihr euch davon überzeugen, ob das Faß genau halbvoll gefüllt ist?

Was ist schwerer?

Abbildung 301

Wir haben zwei würfelförmige Kästen (Abb. 301).

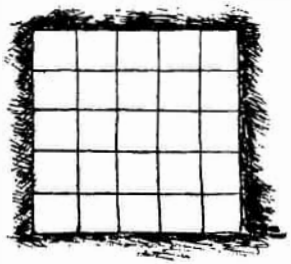


Im linken liegt eine große Eisenkugel mit einem Durchmesser gleich der Kastenhöhe. Der rechte ist mit kleinen Eisenkugeln angefüllt, die, wie aus der Abbildung ersichtlich ist, gestapelt sind.

Welcher Kasten ist schwerer?

Ein dreibeiniger Tisch

Abbildung 302



Es gibt die Meinung, daß ein Tisch mit drei Beinen niemals wackelt, selbst dann nicht, wenn die Beine ungleich lang sind.

Stimmt das?

Wieviel Rechtecke?

Wieviel Rechtecke könnt ihr in dieser Figur zählen (Abb. 302)?

Übereilt euch nicht mit der Antwort. Achtet darauf, daß nicht die Zahl der *Quadrate*, sondern die Gesamtzahl der Rechtecke gefragt ist — kleine und große — welche man hier zählen kann.

Das Schachbrett

Wieviel verschieden angeordnete Quadrate könnt ihr auf einem Schachbrett zählen?

Ein kleiner Ziegelstein

Ein normaler Ziegelstein wiegt 4 kg.

Wieviel wiegt ein Spielzeugziegelstein aus dem gleichen Material, dessen Maße viermal kleiner sind?

Riese und Zwerg

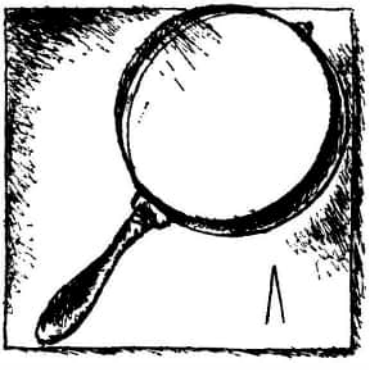
Wievielmal so schwer wie ein Zwerg von 1 m Größe ist ein Riese von 2 m Größe?

Den Äquator entlang

Wenn ihr den Erdball am Äquator umlaufen könntet, würde der Scheitel unseres Kopfes einen größeren Kreis beschreiben als unsere Füße.

Um wieviel würde die Kreisbahn des Kopfes länger sein?

Abbildung 303



Unter dem Vergrößerungsglas

Ein Winkel von 1 1/2° wird durch eine vierfach vergrößernde Lupe betrachtet.

In welcher Größe zeigt sich der Winkel (Abb. 303)?

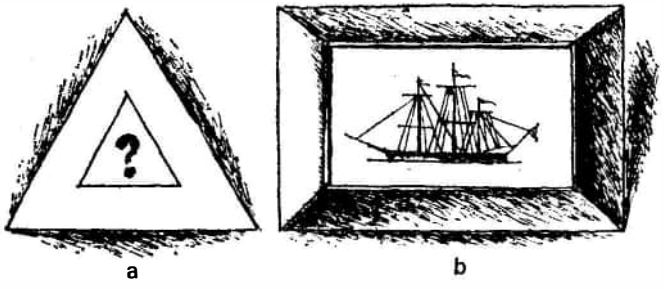
Ähnliche Figuren

Die Aufgabe ist für die Leser bestimmt, die Bescheid wissen, worin die geometrische Ähnlichkeit besteht. Es ist auf folgende zwei Fragen zu antworten:

1. Stimmen in der Figur des Dreiecks (Abb. 304*a*) das äußere und innere Dreieck überein?

2. Stimmen an dem Rahmen (Abb. 304*b*) das äußere und das innere Rechteck überein?

Abbildung 304



Die Höhe des Turmes

In eurer Stadt befindet sich eine Sehenswürdigkeit — ein hoher Turm, dessen Höhe ihr aber nicht kennt. Ihr habt auch ein Foto von diesem Turm auf einer Postkarte.

Wie kann diese Fotografie euch helfen, die Turmhöhe zu bestimmen?

Wie lang?

Überlegt einmal, auf welche Länge sich ein Streifen erstrecken würde, der aus allen Millimeterquadraten 1 m^2 dicht aneinandergereiht zusammengefügt wird?

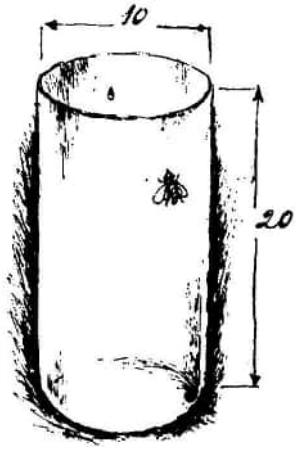
Auf die gleiche Art

Denkt mal nach: Wie viele Kilometer wäre eine Säule hoch, die aus allen Millimeterwürfeln 1 m^3, die aufeinandergetürmt werden, gebaut wird?

Zucker

Was ist schwerer — ein Glas voll Streuzucker oder das gleiche Glas voll Würfelzucker?

Abbildung 305



Der Weg der Fliege

An der Innenwand eines zylinderförmigen Konservenglases ist 3 cm vom oberen Rand des Gefäßes ein Honigtropfen zu sehen. Und an der Außenwand, diametral entgegengesetzt, sitzt eine Fliege (Abb. 305).

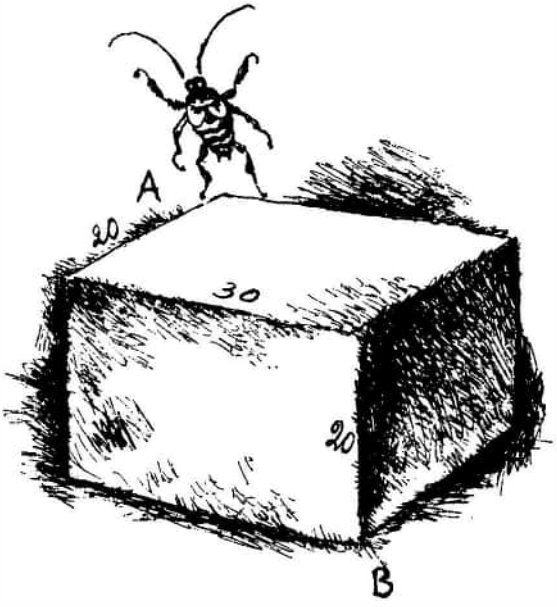
Zeigt der Fliege den kürzesten Weg, auf dem sie zum Honigtropfen gelangen kann.

Die Höhe des Glases ist 20 cm, der Durchmesser 10 cm. Verlaßt euch nicht darauf, daß die Fliege selbst den kürzesten Weg findet und euch damit die Lösung erleichtert. Dazu müßte sie über Geometriekenntnisse verfügen, die zu umfangreich für einen Fliegenkopf sind.

Der Weg des Käfers

Auf der Straße liegt ein behauener Granitstein von 30 cm Länge, 20 cm Höhe und gleicher Breite (Abb. 306). Am Punkt *A* befindet sich ein Käfer, der auf dem kürzesten Weg zum Punkt *B* möchte.

Abbildung 306



Wie verläuft dieser kürzeste Weg, und welche Länge hat er?

Die Hummel-Reise

Eine Hummel geht auf weite Reise. Aus dem heimatlichen Nest fliegt sie genau nach Süden, überquert einen Bach und läßt sich schließlich, nach einer Stunde Flug, an einem Berghang nieder, der von duftendem Klee bedeckt ist. Hier verbleibt sie, von Blüte zu Blüte fliegend, eine halbe Stunde.

Nun muß der Garten aufgesucht werden, wo die Hummel gestern blühende Stachelbeersträucher entdeckt hat. Der Garten liegt westlich vom Abhang, und die Hummel eilt geradewegs dahin. Nach einer 3/4 Stunde erreicht sie bereits den Garten. Die Stachelbeeren blühen über und über, um alle Büsche aufzusuchen, brauchte die Hummel 1 1/2 Stunde.

Und danach flog die Hummel, ohne nach rechts oder links abzuweichen, auf kürzestem Wege nach Hause, ins heimatliche Nest. Wie lange war die Hummel abwesend?

Die Gründung Karthagos

Über die Gründung der alten Stadt Karthago gibt es folgende Sage:
Dido, die Tochter des syrischen Königs von Tyros, floh, nachdem sie durch die Mörderhand ihres Bruders ihren Mann verloren hatte, nach Afrika und ließ sich mit vielen Bewohnern Tyros an der Nordküste nieder. Sie kaufte dem numidischen König soviel Land ab, „wie auf eine Ochsenhaut geht". Nachdem der Handel gemacht war, schnitt sie die Ochsenhaut in dünne Riemen, und dank dieser List erwarb sie ein Stück Land, groß genug für eine Festung. So soll die Festung Karthago entstanden sein, wo später eine Stadt errichtet wurde.

Versucht zu errechnen, welche Fläche eingenommen wurde, wenn man davon ausgeht, daß eine Ochsenhaut eine Oberfläche von 4 m^2 hat und die Breite der Riemen, in die Dido dieses Fell zerschnitt, 1 mm betrug.



Antworten

Der Leiterwagen

Auf den ersten Blick scheint diese Aufgabe gar nichts mit Geometrie zu tun zu haben. Doch darin besteht eben die Beherrschung dieser Wissenschaftsdisziplin, die geometrische Grundlage einer Aufgabe dort aufzuspüren, wo sie durch nebensächliche Einzelheiten versteckt ist. Unsere Aufgabe ist im Grunde zweifellos eine geometrische. Ohne Geometriekenntnisse kann man sie nicht lösen.

Also, warum unterliegt nun die Vorderachse eines Leiterwagens einem größeren Verschleiß? Alle wissen, daß die Vorderräder kleiner sind als die Hinterräder. Auf gleicher Strecke macht ein kleiner Kreis mehr Umdrehungen als ein größerer. Bei einem kleineren Kreis ist der Kreisumfang kleiner — deshalb rollt er auf der gegebenen Länge um ein Mehrfaches ab. Jetzt wird klar, daß bei allen Fahrten des Wagens seine Vorderräder mehr Umdrehungen vollführen als die Hinterräder. Und eine größere Umdrehungszahl nutzt natürlich die Achse stärker ab.

Wieviel Kanten?

Dies ist durchaus keine Scherzfrage und verbirgt die Fehlerhaftigkeit des üblichen Wortgebrauchs in sich. Ein sechskantiger Bleistift hat keine sechs Kanten, wie wahrscheinlich die meisten meinen. Insgesamt hat er, sofern er nicht angespitzt ist, acht Kanten. Sechs Seitenkanten und zwei kleine „Stirn"kanten. Hätte er wirklich sechs Kanten, so hätte er eine ganz andere Form — ein Balken mit viereckigem Querschnitt.

Die Gewohnheit, beim Prisma nur die Seitenkanten zu zählen und die Grundflächen zu vergessen, ist sehr verbreitet. Viele sprechen von einem *Drei-Kanten*-Prisma, *Vier-Kanten*-Prisma usw., während diese Prismen Dreieck-, Viereck-Prisma usw. nach der Form der Basis zu nennen sind. Ein dreikantiges Prisma, das heißt ein Prisma mit drei Kanten, existiert überhaupt nicht.

Deshalb wird der Bleistift, von dem in der Aufgabe die Rede ist, richtig als „sechseckig" und nicht „sechskantig" bezeichnet.

Was ist hier dargestellt?

Aufgezeichnet sind — in ungewöhnlicher Blickrichtung — folgende Gegenstände: ein Rasiermesser, eine Schere, eine Gabel, eine Taschenuhr und ein Löffel. Bei der Betrachtung eines beliebigen Gegenstandes sehen wir im Grunde genommen seine Projektion auf eine Ebene, senkrecht zur Blickrichtung. Im vorliegenden Fall wurde nicht die Projektion gezeigt, an die ihr gewöhnt seid, und das genügt schon, damit der Gegenstand fast nicht wiederzuerkennen ist.

Gläser und Messer

Das ist ohne weiteres möglich, wenn man die Messer so legt, wie Abb. 307 es darstellt. Jedes Messer liegt mit einem Ende auf dem Glas und mit dem entgegengesetzten — auf einem anderen Messer, das sich seinerseits wiederum auf ein Messer stützt. Die Messer halten sich gegenseitig fest.

Abbildung 307

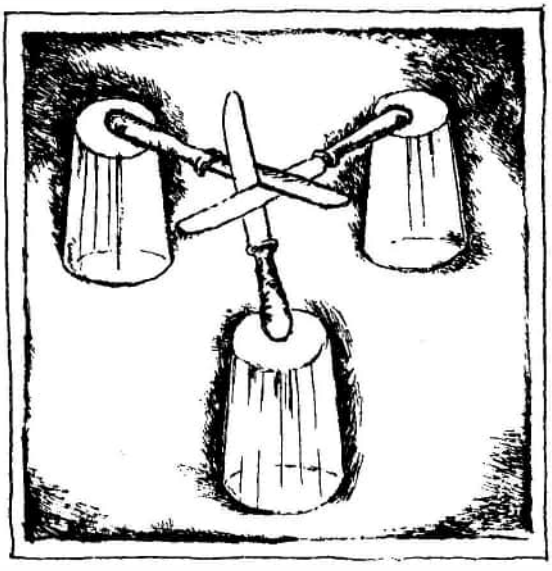
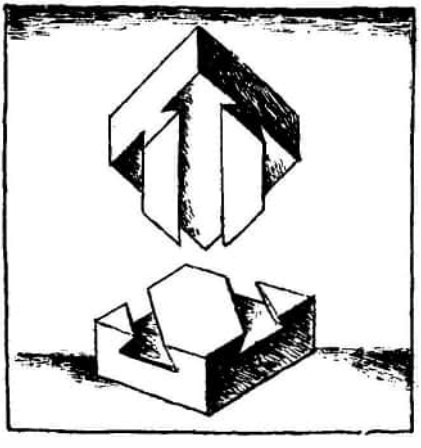


Abbildung 308



Wie ist das gemacht?

Das Geheimnis ist ganz einfach, wie man aus Abb. 308 entnehmen kann. Der ganze Trick besteht darin, daß die Vorsprünge und Aussparungen (Spund und Fase) nicht kreuzförmig, wie man beim Betrachten des fertigen Körpers unwillkürlich annimmt,

Abbildung 309

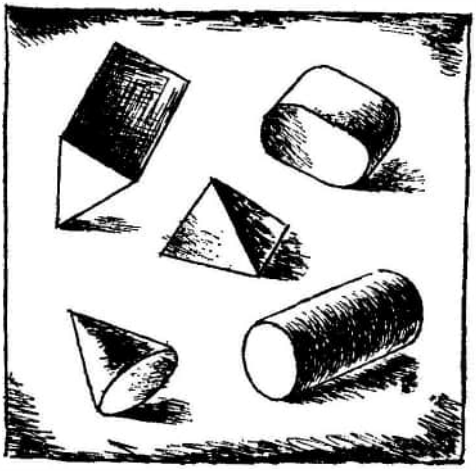
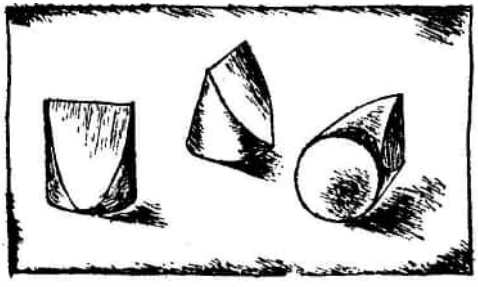


Abbildung 310



sondern parallel zueinander in schräger Richtung verlaufen. Diese Spunde sind ganz leicht von der Seite in die entsprechenden Aussparungen zu schieben.

Ein Spund für drei Öffnungen

Die für den geforderten Zweck geeigneten Spunde zeigt Abb. 309.

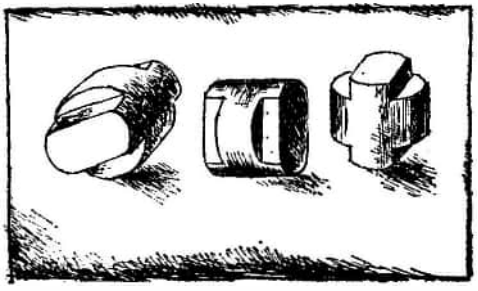
Ein Paßstück finden

Das im vorliegenden Fall benötigte Paßstück gibt es. Es hat die in Abb. 310 dargestellte Form. Es ist leicht zu erkennen, daß ein solches Paßstück tatsächlich sowohl eine quadratische als auch dreieckige und eine runde (kreisförmige) Öffnung verschließen kann.

Ein zweites Paßstück

Auch für die runde, quadratische und kreuzförmige Öffnung gibt es ein Paßstück. Es ist auf Abb. 311 zu sehen.

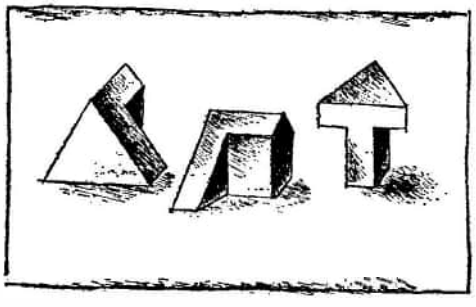
Abbildung 311



Ein drittes Paßstück

Auch solch ein Paßstück existiert. Ihr könnt es von drei Seiten auf Abb. 312 sehen.

Abbildung 312



Aufgaben, wie wir sie eben behandelt haben, müssen nicht selten von technischen Zeichnern gelöst werden, wenn es gilt, die Form eines Maschinenteils auf Grund dreier Projektionen zu bestimmen.

Zwei Henkeltöpfe

Der Henkeltopf, der 1 1/2mal breiter ist, hätte bei gleicher Höhe ein um $(1\ 1/2)^2$ größeres Fassungsvermögen, d. h. das 2 1/4fache. Obgleich er nur halb so hoch ist, hat er letztendlich doch ein größeres Fassungsvermögen als der höhere Henkeltopf.

Wieviel Gläser?

Vergleichen wir die erste und die dritte Reihe, so stellen wir fest, daß sie sich voneinander durch folgendes unterscheiden: Auf dem dritten Brett ist ein Gefäß mittlerer Größe mehr, dafür fehlen drei kleine Gefäße. Da aber das Fassungsvermögen der Gefäße jeder Reihe gleich ist, entspricht das Fassungsvermögen eines mittelgroßen Gefäßes offensichtlich dem von drei kleinen. Also faßt das mittelgroße Gefäß drei Gläser. Nun bleibt das Fassungsvermögen eines großen Gefäßes zu bestimmen. Tauschen wir auf der ersten Reihe die mittelgroßen Gefäße mit der entsprechenden Anzahl Gläser aus, haben wir ein großes Gefäß von 12 Gläsern Fassungsvermögen.

Beim Vergleich mit der zweiten Reihe erkennen wir, daß ein großes Gefäß sechs Gläser faßt.

Zwei Kochtöpfe

Beide Töpfe sind Körper, die geometrisch ähnlich sind. Hat der größere Kochtopf ein achtmal so großes Fassungsvermögen, so sind alle seine linearen Maße zweimal so groß: Er ist zweimal so hoch und zweimal so breit. Doch ist er doppelt so hoch und doppelt so breit, so ist seine Oberfläche um 2×2, also viermal größer, da die Oberflächen derartiger Körper sich zueinander wie das Quadrat der Linearmaße verhalten. Bei gleicher Wandstärke hängt das Gewicht des Kochtopfes von der Oberflächengröße ab. Daraus folgt die Antwort auf die Fragestellung: Der große Kochtopf ist *viermal* so schwer wie der kleine.

Vier Würfel

Auf die eine Wiegeschale sind die drei kleinen Würfel zu legen und auf die andere — der eine große. Es ist nicht schwer zu ermitteln, daß die Waage im Gleichgewicht bleiben muß. Weisen wir dazu nach, daß die Summe der Volumen der drei kleineren Würfel dem Volumen des größten gleich ist. Das geht aus der Gleichung

$$6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3,$$

also

$$216 + 512 + 1000 = 1728$$

hervor.

Zur Hälfte

Die einfachste Methode ist, die Fässer so zu kippen, daß das Wasser den Rand erreicht (Abb. 313). Ist dabei, wenn auch nur etwas, der Boden des Fasses zu sehen, war es weniger als halbvoll Wasser.

Abbildung 313





Befindet sich der Boden jedoch unterhalb des Wasserspiegels, so heißt das, es war mehr Wasser als halbvoll eingefüllt worden. Und wenn schließlich der obere Rand des Bodens exakt am Wasserspiegel abschließt, so war das Faß genau halbvoll mit Wasser gefüllt.

Was ist schwerer?

Den rechten Würfel stellen wir uns aus kleinen Würfeln bestehend vor. In jedem davon befindet sich eine Kugel. Ohne weiteres ist zu sehen, daß die große Kugel den gleichen Teil des großen Würfels einnimmt, den jede kleine Kugel im kleinen Würfel ausfüllt. Die Zahl aller kleinen Kugeln und Würfel ist unschwer zu ermitteln: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. 216 Kugeln haben volumenmäßig den gleichen Anteil an 216 Würfeln wie eine Kugel an einem Würfel, also den gleichen, wie die große Kugel am großen Würfel. Daraus wird deutlich, daß sich in beiden Kästen die gleiche Menge Metall befindet, und folglich muß ihr Gewicht ein und dasselbe sein.

Ein dreibeiniger Tisch

Ein dreibeiniger Tisch kann stets mit seinen Fußenden den Boden berühren, weil durch jeden der drei Punkte des Raumes eine und nur eine Ebene gehen kann. Das ist die Ursache dafür, daß ein Tisch auf drei Beinen nicht wackelt. Sie ist, wie ihr seht, rein geometrisch und nicht physikalisch.

Darum ist es so zweckmäßig für Landvermessungsinstrumente und Fotoapparate dreibeinige Stative zu verwenden. Ein viertes Bein würde die Standfestigkeit des Stativs nicht erhöhen, im Gegenteil, man müßte stets dafür Sorge tragen, daß es nicht wackelt.

Wieviel Rechtecke?

225 verschieden angeordnete Rechtecke lassen sich in dieser Figur zählen.

Ein Schachbrett

Auf einem Schachbrett sind nicht nur 64, sondern bedeutend mehr Quadrate abgebildet, denn neben den kleinen schwarzen und weißen Quadraten gibt es da noch bunte Quadrate, die aus 4, 9, 16, 25, 36, 49 und aus 64 Einzelquadraten bestehen. Sie alle muß man mitzählen:

einzelne	kleine	Quadrate			64
aus 4	kleinen	zusammengesetzte		Quadrate	49
" 9	"	"		"	36
" 16	"	"		"	25
" 25	"	"		"	16
" 36	"	"		"	9
" 49	"	"		"	4
" 64	"	"		"	1
Insgesamt					204

Somit umfaßt ein Schachbrett 204 verschieden angeordnete Quadrate unterschiedlicher Größe.

Ein kleiner Ziegelstein

Die Antwort, daß ein Spielzeugziegelstein 1 kg, also viermal weniger wiegt, ist völlig falsch. Der kleine Ziegelstein ist ja nicht nur viermal *kürzer* als ein normaler, sondern auch viermal *schmaler* und auch viermal *flacher*. Deshalb sind sein Volumen und sein Gewicht $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$mal kleiner.

Die richtige Antwort ist folgendermaßen: Der Spielzeugziegelstein wiegt $4000 : : 64 = 62{,}5$ g.

Riese und Zwerg

Ihr seid nun schon auf die richtige Lösung dieser Aufgabe vorbereitet. Da die Formen des menschlichen Körpers annähernd übereinstimmend sind, hat ein Mensch von doppelter Größe nicht das zwei-, sondern das achtfache Volumen. Demzufolge wiegt unser Riese annähernd achtmal mehr als der Zwerg.

Der größte Riese, über den Informationen vorliegen, war ein Elsäßer von 275 cm Wuchs — das ist ein ganzer Meter mehr als die durchschnittliche Größe eines Menschen. Der kleinste Zwerg war weniger als 40 cm groß, d. h. war rund gerechnet siebenmal kleiner als der Riesen-Elsäßer. Deshalb wären zum Aufwiegen des Elsäßer Riesen $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ Zwerge notwendig gewesen.

Den Äquator entlang

Legen wir die Größe des Menschen mit 175 cm fest und bezeichnen den Erdradius mit R, erhalten wir: $2 \cdot 3{,}14 \cdot (R + 175) - 2 \cdot 3{,}14 \cdot R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 175 = 1100$ cm, also 11 Meter. Beeindruckend ist hierbei, daß das Ergebnis völlig unabhängig vom Radius der Kugel ist und daher gleich ist bei der riesenhaften Sonne und einer kleinen Kugel.

Unter dem Vergrößerungsglas

Wenn ihr angenommen habt, daß unser Winkel unter der Lupe in der Größe $1\,1/2 \cdot 4 = 6°$ erscheint, dann habt ihr daneben getroffen. Die Winkelgröße vergrößert sich nicht. Wohl vergrößert sich der Bogen, der den Winkel mißt, doch in dem gleichen Maße vergrößert sich der Radius dieses Bogens, so daß die Größe des Zentralwinkels unverändert bleibt. Abb. 314 macht das deutlich.

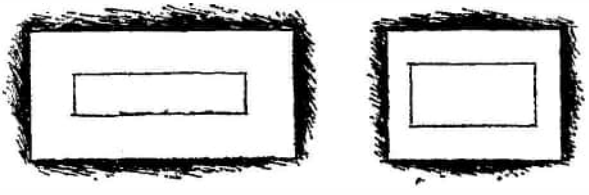
Abbildung 314



Ähnliche Figuren

Oft wird auf beide Fragen, die in der Aufgabe gestellt sind, mit ja geantwortet. In Wirklichkeit sind nur die Dreiecke ähnlich. Das äußere und das innere Rechteck des Rahmens dagegen sind allgemein gesagt nicht ähnlich. Für die Ähnlichkeit der Dreiecke genügt die Winkelgleichheit. Da die Seiten des inneren Dreiecks parallel sind zu den Seiten des äußeren, sind die Figuren ähnlich. Doch für die Ähnlichkeit anderer Mehrecke genügt allein die Gleichheit der Winkel nicht (oder was das gleiche ist — die Parallelität der Seiten). Es ist weiterhin notwendig, daß die *Seiten* der Mehrecke *proportional* sind. Für das äußere und das innere Rechteck eines Rahmens trifft das nur für Quadrate (und im allgemeinen für Rhomben) zu. In allen anderen Fällen sind die Seiten des äußeren Vierecks den Seiten des inneren nicht proportional, und folglich sind die Figuren nicht ähnlich. Das Fehlen der Ähnlichkeit wird offensichtlich bei rechtwinkligen breiten Rahmen wie auf Abb. 315. Beim linken Rahmen verhalten sich die Außenseiten zueinander wie 2 : 1, die Innenseiten wie 4 : 1. Am rechten Rahmen — die Außenseiten wie 4 : 3 und die Innenseiten wie 2 : 1.

Abbildung 315



Die Höhe des Turmes

Um anhand einer Fotografie die natürliche Höhe des Turmes zu bestimmen, muß man vor allem so exakt wie möglich, die Höhe des Turmes und seine Basislänge auf dem Foto messen. Angenommen, die Höhe beträgt auf dem Foto 95 mm und die Basislänge 19 mm. Dann meßt ihr die Basislänge in Wirklichkeit, nehmen wir an, sie ist gleich 14 m.

Ist das getan, stellt ihr folgende Überlegung an:

Die Fotografie des Turmes und seine echte Gestalt sind geometrisch ähnlich. Folglich ist die Höhe des Turmes in Wirklichkeit sovielmal größer als die Basislänge, wievielmal die auf der Abbildung gegebene Höhe größer als die abgebildete Basislänge ist. Die Relation ist 95 : 19, also 5. Daraus könnt ihr schließen, daß die Turmhöhe 5mal so groß wie die Basislänge ist und in Wirklichkeit damit $14 \cdot 5 = 70$ m beträgt.

Man muß jedoch hinzufügen, daß für die fotografische Bestimmung der Turmhöhe nicht jedes Foto geeignet ist, sondern nur so eins, auf dem die Proportionen nicht, wie das bei unerfahrenen Fotografen vorkommt, verzerrt sind.

Wie lang?

Auf einen Quadratmeter kommen $1000 \cdot 1000$ Quadratmillimeter. Jedes Tausend aneinandergereihte Millimeterquadrate ergeben 1 m. $1000 \cdot 1000$ davon ergeben 1000 m, also 1 km. Der Streifen streckt sich einen Kilometer lang.

Auf die gleiche Art

Die Lösung ist verblüffend: Die Säule würde 1000 km hoch ragen.

Führen wir eine Rechnung im Kopf durch: In 1 m^3 sind $1000 \cdot 1000 \cdot 1000$ mm^3 enthalten. Je 1000 übereinandergetürmte Millimeterwürfel geben eine Säule von 1 m. 1000 m = 1 km. Da wir aber noch eintausendmal mehr solche Würfel haben, ergeben sich 1000 km.

Zucker

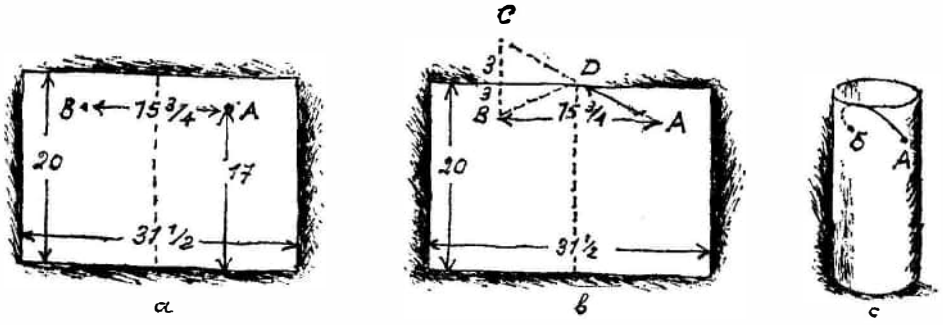
Mit Hilfe einiger Vorstellungskraft läßt sich die sehr kompliziert erschienene Frage recht leicht lösen. Setzen wir der Einfachheit halber voraus, daß die Zuckerstücken im Durchmesser 100mal größer als ein Zuckerkorn sind. Stellen wir uns jetzt vor, die Zuckerkörner würden sich jetzt mitsamt dem Glas, in dem der Zucker ist, 100fach vergrößern. Das Fassungsvermögen des Glases vergrößert sich um $100 \cdot 100 \cdot 100$, d. h. millionenfach. Um ebensoviel vergrößert sich auch das Gewicht des Zuckers im Glas. Füllen wir nun in Gedanken ein normales Glas dieses vergrößerten feinen Zuckers, also den millionsten Teil vom Inhalt des Riesenglases ab. Die abgefüllte Zuckermenge wird natürlich genausoviel wiegen wie ein normales Glas mit gewöhnlichem Zucker. Was aber stellt der von uns abgefüllte vergrößerte Zucker dar? Nichts anderes wie Würfelzucker. Das bedeutet, im Glas befindet sich gewichtsmäßig genausoviel Würfelzucker wie Streuzucker.

Würden wir statt der 100fachen Vergrößerung eine 60fache oder beliebige andere wählen, erführe die Sache keine Veränderung. Der Kern der Überlegung besteht nur darin, daß die groben Zuckerstücken als dem Zuckerkorn geometrisch ähnliche Körper betrachtet werden und dabei in ähnlicher Weise angeordnet liegen. Diese Unterstellung ist natürlich nicht ganz exakt, doch sie kommt der Wirklichkeit ausreichend nahe (wenn es sich nur um Stückenzucker, nicht aber um gesägten Zucker handelt).

Der Weg der Fliege

Für die Lösung rollen wir die Zylinderwand zu einer flachen Figur auseinander. Wir erhalten ein Rechteck (Abb. 316*a*), dessen Höhe 20 cm beträgt und dessen Basis dem Kreisumfang des Konservenglases entspricht, also $10 \cdot 3\ 1/7 = 31\ 1/2$ cm (knapp). Vermerken wir auf diesem Rechteck die Position der Fliege und des Honigtropfens. Die Fliege befindet sich am Punkt *A*, 17 cm von der Basis entfernt. Der

Abbildung 316



Tropfen befindet sich im Punkt B, in gleicher Höhe und einen halben Kreisbogen des Glases von A, also 15 3/4 cm entfernt.

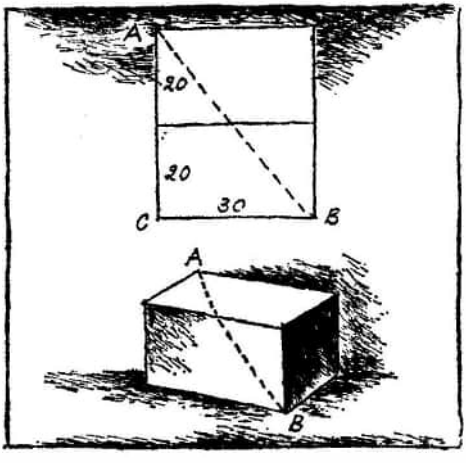
Um nun den Punkt zu finden, wo die Fliege über den Glasrand kriechen muß, gehen wir folgendermaßen vor. Vom Punkt B (Abb. 316*b*) ziehen wir eine Gerade im rechten Winkel zur Oberkante des Rechteckes und verlängern sie in gleichem Abstand darüber hinaus. Wir erhalten Punkt C. Diesen Punkt verbinden wir durch eine gerade Linie mit A. Punkt D ist die Stelle, wo die Fliege über den Glasrand zur anderen Glasseite laufen muß. Die Strecke ADB erweist sich als der kürzeste Weg.

Nachdem wir den kürzesten Weg auf dem entstandenen Rechteck gefunden haben, verwandeln wir es wieder in einen Zylinder und sehen, wie die Fliege laufen muß, um so schnell wie möglich zum Honigtropfen zu gelangen (Abb. 316*c*).

Der Weg des Käfers

Der kürzeste Weg ist zu bestimmen, wenn wir in Gedanken die Oberkante des Steines so umklappen, daß sie sich in einer Ebene mit der Vorderfläche befindet (Abb. 317).

Abbildung 317



Dann wird offensichtlich, daß der kürzeste Weg die gerade Linie zwischen A und B ist. Wie lang ist diese Strecke? Wir haben ein rechtwinkliges Dreieck ABC, in dem $AC = 40$ cm, $CB = 30$ cm sind. Nach Pythagoras muß die dritte Seite AB gleich 50 cm sein, weil $30^2+40^2=50^2$ sind.

Also ist der kürzeste Weg 50 cm lang.

Die Hummel-Reise

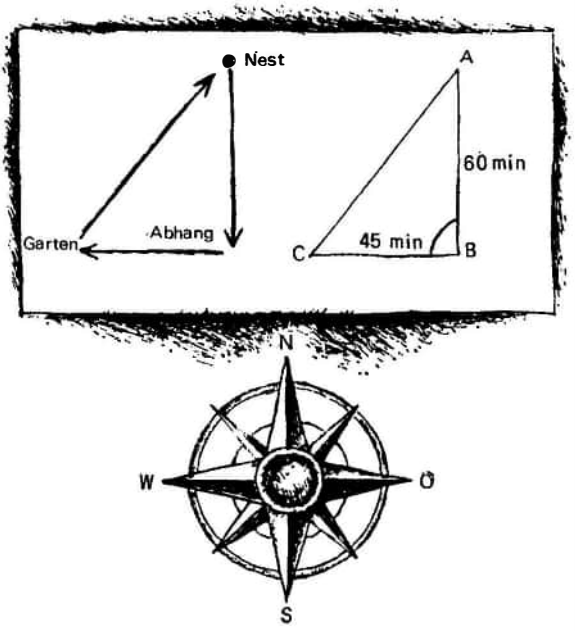
Die Aufgabe wäre ganz leicht zu lösen, wenn bekannt wäre, wieviel Zeit die Hummel für den Flug aus dem Garten zum Nest brauchte. Darüber sagt die Aufgabe nichts, doch die Geometrie hilft uns, sie selbst zu ermitteln.

Zeichnen wir den Weg der Hummel auf. Wir wissen, daß die Hummel anfangs 60 Minuten lang „genau nach Süden" flog. Danach flog sie 45 Minuten „nach Westen", d. h. im rechten Winkel zur bisherigen Strecke. Von da aus auf kürzestem

Wege, also in gerader Linie, zum Nest zurück. Wir haben nun ein rechtwinkliges Dreieck ABC, in dem beide Katheten AB und BC bekannt sind. Zu bestimmen ist die dritte Seite, die Hypotenuse AC.

Die Geometrie lehrt: Ist eine beliebige Größe in einer Kathete dreimal, in der anderen viermal enthalten, so muß in der dritten Seite, der Hypotenuse, diese Größe fünfmal enthalten sein.

Abbildung 318



Sind zum Beispiel die Katheten des Dreiecks gleich 3 und 4 m, so ist die Hypotenuse gleich 5 m. Sind die Katheten 9 und 12 km, so ist die dritte Seite 15 km usw. In unserem Fall ist eine Kathete $3 \cdot 15$ Minuten, die andere $4 \cdot 15$ Minuten Weg. Also ist die Hypotenuse $AC = 5 \cdot 15$ Minuten Wegstrecke. Somit haben wir erfahren, daß die Hummel vom Garten zum Nest 75 Minuten flog oder 1 1/4 Stunden.

Nun ist leicht zusammenzurechnen, wie lange die Hummel abwesend war. Für den Flug brauchte sie:

1 Stunde + 3/4 Stunden + 1 1/4 Stunden = 3 Stunden.

Für das Verweilen benötigte sie:

1/2 Stunde + 1 1/2 Stunden = 2 Stunden.

Insgesamt: 3 Stunden + 2 Stunden = 5 Stunden

Die Gründung Karthagos

Beträgt die Fläche einer Ochsenhaut 4 m² oder 4 Millionen mm², die Riemenbreite jedoch 1 mm, so ist die Gesamtlänge des Riemens (man muß annehmen, daß Dido ihn spiralförmig schnitt) 4 Millionen mm oder 4000 m, also 4 km. Mit solch einem Riemen kann man eine quadratische Fläche von 1 km² einfassen und ein kreisförmiges Landstück von 1,3 km².



Ohne Metermaß

Den Weg mit Schritten messen

Ein Metermaß oder Bandmaß hat man nicht immer bei sich, deshalb muß man sich auch ohne diese Instrumente behelfen können, zwar kann man so nur annähernde Messungen durchführen.

Mehr oder weniger große Entfernungen mißt man zum Beispiel während eines Ausfluges am einfachsten mit Schritten ab. Dazu gehört, die eigene Schrittlänge zu wissen und Schritte abzählen zu können. Natürlich sind sie nicht immer gleich. Wir können kleine Schritte machen und wenn nötig auch weit ausschreiten. Aber trotz alledem machen wir beim normalen Gehen annähernd gleichlange Schritte. Kennen wir die durchschnittliche Schrittlänge, können wir ohne große Fehler die Entfernung mit Schritten abmessen.

Um seine durchschnittliche Schrittlänge zu ermitteln, ist die Länge vieler Schritte zusammen zu messen und daraus die Länge eines einzelnen zu berechnen. Selbstverständlich kommt man hierbei ohne Bandmaß oder Schnur nicht zurecht.

Meßt auf ebener Fläche eine Entfernung von 20 m mit dem Bandmaß ab. Kennzeichnet diese Linie auf dem Boden und nehmt das Meßband weg. Jetzt geht ihr auf der Linie mit normalen Schritten entlang und zählt die Schrittzahl. Es kann sein, daß die Schritte nicht exakt mit der abgemessenen Linie abschließen. Ist der Rest kürzer als ein halber Schritt, läßt man ihn einfach weg. Ist es jedoch mehr als ein halber Schritt, dann zählen wir den Rest als ganzen Schritt. Teilen wir die Gesamtlänge von 20 m durch die Schrittzahl, dann erhalten wir die durchschnittliche Länge eines Schrittes. Diese Zahl müssen wir uns einprägen, um sie nötigenfalls zum Abmessen zu gebrauchen.

Damit man sich — besonders bei langen Strecken — nicht verzählt, kann man die Schritte folgendermaßen zählen: Es wird immer nur bis 10 gezählt. Sind wir bei 10 angelangt, biegen wir einen Finger der linken Hand ein. Sind alle Finger der linken Hand eingebogen, also 50 Schritte zurückgelegt, wird ein Finger der rechten Hand eingebogen. So kann man bis 250 zählen. Danach fängt alles von vorne an, wobei man sich merkt, wie viele Male alle Finger der rechten Hand eingekrümmt waren. Habt ihr nach dem Ab-

schreiten einer bestimmten Entfernung zweimal alle Finger der rechten eingebogen und am Ende der Strecke an der rechten Hand drei Finger eingebogen sowie vier an der linken, dann habt ihr

$2 \cdot 250 + 3 \cdot 50 + 4 \cdot 10 = 690$ Schritte zurückgelegt.

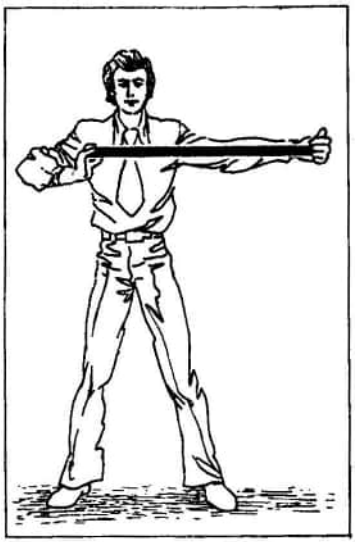
Hinzu ist noch die Schrittzahl zu fügen, die nach dem letzten Einbiegen eines Fingers der linken Hand gegangen wurde.

Erinnern wir uns in diesem Zusammenhang an folgende alte Faustregel: Die durchschnittliche Schrittlänge eines Erwachsenen entspricht der halben Entfernung vom Boden bis zur Augenhöhe.

Eine andere praktische Regel bezieht sich auf die Fußgänger*geschwindigkeit*. Sie besagt, ein Mensch legt in einer Stunde soviel Kilometer zurück, wie er Schritte in drei Sekunden tut. Es ist leicht nachzuweisen, daß diese Faustregel nur für eine bestimmte Schrittlänge zutrifft und zwar für ziemlich lange Schritte. Nehmen wir eine Schrittlänge von x m, die Zahl der Schritte in 3 Sekunden n, dann schafft der Fußgänger in drei Sekunden nx m, und in einer Stunde (3600 Sekunden) — $1200nx$ m oder $1{,}2nx$ km. Damit dieser Weg der Schrittzahl gleich ist, die in drei Sekunden vollführt wird, muß die Gleichung gültig sein:

$1{,}2nx = n$ oder $1{,}2x = 1$.
Daraus folgt: $x = 0{,}83$ m.

Abbildung 319



Stimmt die vorhergehende Faustregel hinsichtlich der Abhängigkeit der Schrittlänge von der Körpergröße, dann trifft die zweite, eben analysierte Regel nur für Personen einer mittleren Körperhöhe von 175 cm zu.

Ein lebender Maßstab

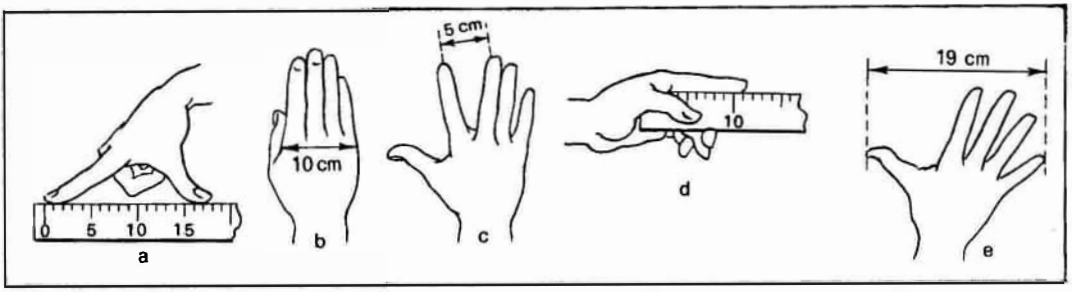
Hat man weder Metermaß noch Maßstab bei sich, kann man auf folgende Weise Gegenstände mittlerer Größe messen: Man mißt mit einer Schnur oder einem Stab die Strecke von der Spitze des seitwärts gestreckten Armes bis zur gegenüberliegenden Schulter (Abb. 319). Das ist bei einem erwachsenen Mann etwa 1 Meter. Eine andere Methode, ungefähr 1 Meter abzumessen, besteht darin, auf einer Geraden sechsmal den Abstand zwischen Daumen und Zeigefinger, weit auseinandergespreizt abzustecken. (Abb. 320*a*).

Der letzte Hinweis lehrt uns die Kunst, mit „bloßen Händen“ zu messen. Dazu ist nur erforderlich,

vorher die Handfläche abzumessen und sich die Ergebnisse gut einzuprägen.

Was muß man an seiner Hand messen? Vor allem die Breite der Hand, wie auf Abb. 320*b* dargestellt

Abbildung 320



ist. Beim Erwachsenen ist sie etwa 10 cm breit, bei euch wird sie schmaler sein, und ihr müßt wissen, um wieviel. Dann müßt ihr nachmessen, wie groß der Abstand zwischen Zeige- und Mittelfinger ist, wenn man sie möglichst weit spreizt (Abb. 320*c*). Weiter ist es vorteilhaft, die Länge des Zeigefingers zu wissen, gemessen vom Ansatz des Daumens, wie es in Abb. 320*d* gezeigt wird. Und schließlich meßt ihr den Abstand der Fingerspitzen vom Daumen bis zum kleinen Finger, wenn sie weit gespreizt sind, wie es Abb. 320*e* zeigt.

Mit diesem „lebenden Maßstab" könnt ihr kleinere Gegenstände ungefähr messen.

Abmessen mit Münzen[1]

Einen guten Dienst können auch unsere Kupfer-(Bronze)-Münzen neuer Prägung erweisen. Nicht alle wissen, daß der Durchmesser einer 1-Kopeken-Münze 1/2 cm beträgt und einer 5-Kopeken-Münze 2 1/2 cm, so daß die nebeneinandergelegten Münzen 4 cm ergeben (Abb. 321). Das bedeutet, ihr könnt ziemlich genau folgende Längen messen, falls ihr natürlich einige Kupfermünzen bei euch habt:

Kopeke	1 1/2 cm
Fünfer	2 1/2 cm
Zwei 1-Kopeken-Münzen	3 cm
Fünfer und Kopeke	4 cm
2 Fünfer	5 cm usw.

[1]) Hier sind die Durchmesser der sowjetischen Münzen angegeben (*Anm. d. Red.*).

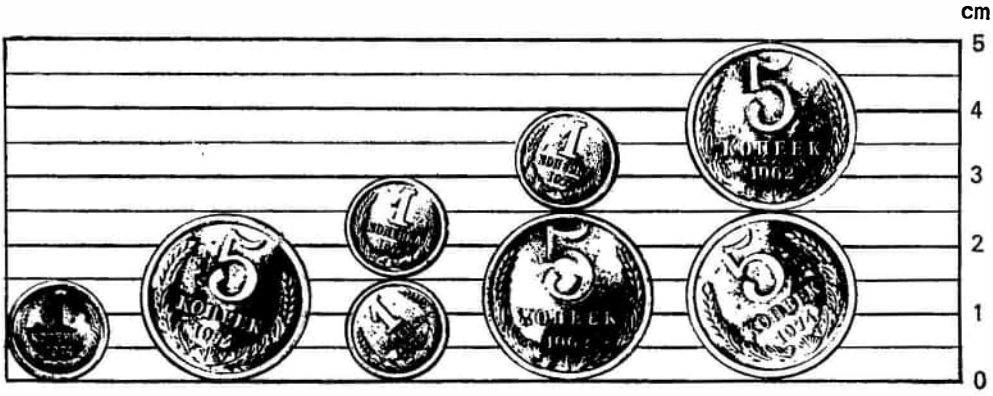
426-427

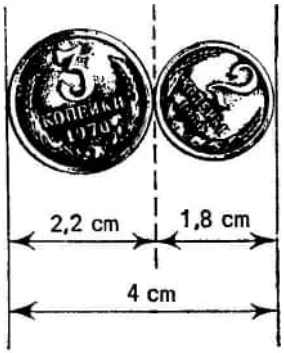
Ohne Metermaß

Zieht man von der Breite eines Fünfers die Breite der 1-Kopeken-Münze ab, erhält man exakt 1 cm.

Habt ihr keinen Fünfer und keine Kopeke bei euch, sondern nur eine 2-Kopeken-Münze und eine 3-Kopeken-Münze, so können auch sie euch ein Stück weiterhelfen, wenn ihr euch fest einprägt, daß beide Münzen nebeneinander gelegt 4 cm ergeben. Knifft ihr einen 4-cm-Papierstreifen in der Mitte und dann noch einmal, erhaltet ihr einen Maßstab von 4 Zentimeter.[1]

Abbildung 321





Ihr seht, daß bei entsprechender Vorbereitung und Findigkeit auch ohne Zentimetermaß ein praktisch brauchbares Messen möglich ist.

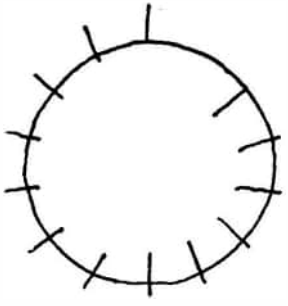
Dazu muß noch hinzugefügt werden, daß unsere Kupfer-(Bronze)-Münzen im Notfall nicht nur als Maßstab dienen können, sondern auch als geeignetes Gewicht beim Abwiegen von Mengen. Neue nichtabgenutzte Münzen moderner Prägung wiegen soviel in Gramm, wie sie als Kopeken darstellen. Die Kopeke — 1 g, die 2-Kopeken-Münze — 2 g usw. Das Gewicht von Münzen, die im Umlauf waren, weicht geringfügig von diesen Normen ab. Da im täglichen Gebrauch oftmals kleine Gewichte von 1—10 Gramm nicht zur Hand sind, kann die Kenntnis der eben erwähnten Relationen recht nützlich sein.

[1] Der Durchmesser einer 15-Kopeken-Münze ist etwa 2 mm, jedoch nur annähernd. Der genaue Durchmesser ist 1,956 mm. Übrigens sind die angeführten Maße der Kupfermünzen ganz genau. Wer einen Stangenzirkel hat, kann sich leicht davon überzeugen.

Einfache Tricks für den Zeitvertreib

Das verschwindende Stäbchen

Abbildung 322



Zeichnet die auf Abb. 322 gezeigte Figur exakt nach. Schneidet den Kreis mit der Schere aus und dreht den Kreis entgegen der Uhrzeigerbewegung so weit, daß der abgeschnittene Teil jedes Stäbchens den Rest des benachbarten berührt. Es vollzieht sich eine rätselhafte Metamorphose. Anstelle der 13 Stäbchen sind nur noch 12 auf der Abbildung. Ein Stäbchen ist plötzlich verschwunden. Wohin?

Bei der entgegengesetzten Drehung erscheint das verschwundene Stäbchen wieder. Woher?

Geheimnisvoller Knoten

Gehen wir nun von Zaubereien mit Zahlen zu Zaubereien mit Gegenständen über. Hier ist ein interessanter Trick, mit dem ihr eure Freunde gehörig in Erstaunen versetzen könnt.

Nehmt eine Schnur, von etwa 30 cm Länge (Abb. 323) und macht einen lockeren Knoten, wie es auf der

Abbildung 323

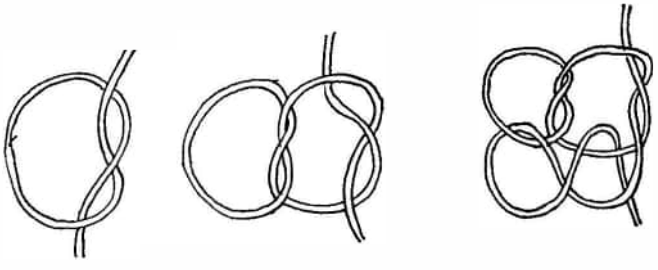


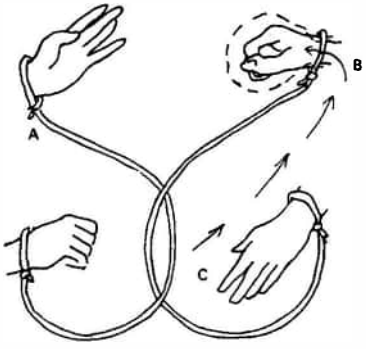
Abbildung links zu sehen ist. Fügt diesem Knoten einen zweiten hinzu (siehe die Abbildung rechts daneben). Ihr erwartet natürlich, daß, wenn die Schnur jetzt straff gezogen wird, ein fester doppelter Knoten entsteht. Doch wartet noch. Wir komplizieren den Knoten noch dadurch, daß wir ein Ende durch beide Knoten ziehen, wie es in der Abbildung ganz rechts dargestellt ist.

Nun sind die Vorbereitungen beendet, wir können zum Hauptteil des Kunststückes kommen. Ein Ende des Seils haltet ihr in der Hand und bittet einen Freund, am anderen Ende zu ziehen. Nun kommt,

was weder ihr noch er erwartet habt. Anstelle eines verschlungenen Knotens entsteht ein glattes Seil! Der Knoten verschwindet spurlos.

Dieser interessante Trick gelingt euch nur dann, wenn ihr den dritten Knoten exakt so knüpft, wie es auf unserer Abbildung dargestellt ist. Nur dann lösen sich alle Knoten beim Straffziehen der Schnur von allein. Schaut euch die Skizze aufmerksam an, wenn ihr wollt, daß der Trick klappt.

Abbildung 324



Entfesselung

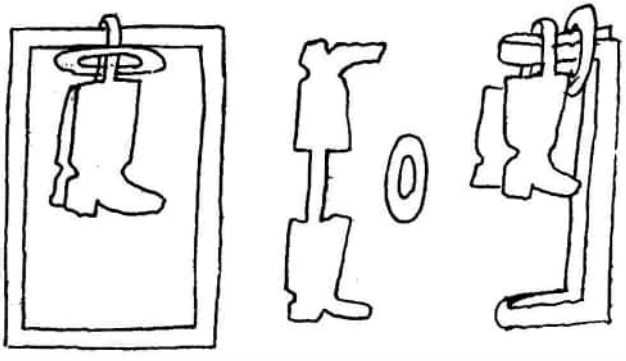
Bindet zwei eurer Freunde — *A* und *B* so, wie es Abb. 324 darstellt, aneinander: Die Schnüre umschlingen die Handgelenke der beiden und kreuzen sich so, daß keine Möglichkeit besteht, auseinanderzukommen. Jedoch das scheint nur so. Es gibt eine Methode, die Gefangenen zu entfesseln, ohne die Schnüre zu zerschneiden. Worin besteht sie?

Bitte, hier ist sie. Die Schnur, mit der die Hände von *A* gebunden sind, ergreift man in dem Punkt, der mit *C* in der Abbildung gekennzeichnet ist und schiebt sie durch den Ring, der die Hand *B* umschlingt, in der mit dem Pfeil angezeigten Richtung. Ist ein ausreichendes Stück Schnur hindurchgesteckt, führt man die Hand *B* in die entstandene Schlinge und zieht an Schnur *A*. Die Partner lösen sich.

Ein Paar Stiefel

Schneidet aus festem Papier einen Rahmen, ein Stiefelpaar und einen ovalen Ring, in der Form und den Größenverhältnissen, wie sie Abb. 325 darstellt. Die

Abbildung 325



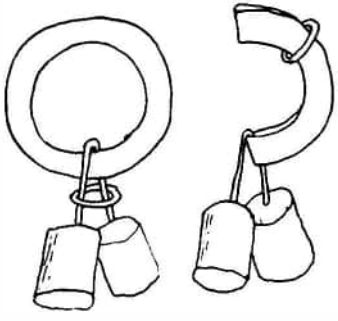
Öffnung des ovalen Ringes hat die gleiche Abmessung wie die Rahmenbreite, ist aber enger als die Stiefelschäfte. Gewiß haltet ihr es für eine völlig undurchführbare Angelegenheit, wenn man euch bittet, die Stiefel auf den Rahmen zu fädeln, damit sie so, wie auf der Abbildung dargestellt, hängen.

Jedoch das ist durchaus möglich, wenn man nur weiß, wie man an die Sache herangehen muß.

Hier ist die Auflösung. Den Rahmen knickt man längs so, daß eine Hälfte die andere abdeckt. Die gefalteten Enden führt man durch den ovalen Ring. Danach steckt man durch die zusammengelegten Enden die auseinandergefaltete Stiefelfigur, biegt sie wieder um, schiebt sie zum Knick des Rahmens und schiebt den Ring darauf, wie es die Aufgabe verlangt.

Nun braucht der Rahmen nur wieder aufgeklappt zu werden, und die Aufgabe ist erfüllt.

Abbildung 326



Korken an einem Ring

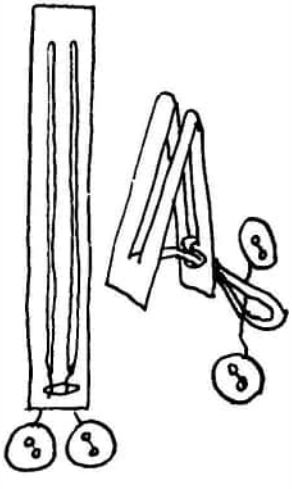
An einem Ring aus festem Papier hängen, mit kurzen Fäden befestigt, zwei Korken. Auf die Fäden ist ein kleiner Drahtring gefädelt (Abb. 326).

Verlangt wird, die Korken von dem Papierring abzunehmen. Wie macht man das?

Das scheint eine sehr verzwickte Sache zu sein, doch wenn ihr mit der vorhergehenden Aufgabe zurechtgekommen seid, dann bewältigt ihr auch diese ohne Mühe.

Die Lösung ist so: Man muß den Ring kniffen, den Drahtring abstreifen, indem man ihn zum freien Ende hinschiebt. Danach ist die Entfernung der Korken schon kein Problem mehr.

Abbildung 327



Zwei Knöpfe

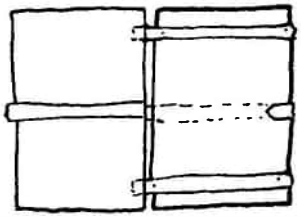
In ein Blatt festes Papier schneidet man nebeneinander zwei lange Schlitze, wie auf Abb. 327 dargestellt. Unterhalb bringt man eine runde Öffnung an, die ein wenig breiter ist als der Abstand zwischen den Einschnitten. Zieht durch die Schlitze und das Loch einen Faden, an dessen Ende man je einen Knopf von der Größe befestigt, daß sie nicht durch das Loch passen.

Könnt ihr die Knöpfe von dem Papierstreifen befreien (natürlich ohne den Faden aufzuknüpfen)?

Die Lösung besteht in folgendem: Knickt den Papierstreifen so zusammen, daß das obere und untere Ende des schmalen Streifens zwischen den Einschnitten genau aufeinanderliegen. Dann steckt ihr den schmalen mittleren Papierstreifen durch die runde Öffnung und zieht die Knöpfe durch die entstandene Schlaufe. Damit ist die Sache erledigt. Glättet ihr das Papier wieder, habt ihr es getrennt von den beiden Knöpfen.

Zauberbrieftasche

Abbildung 328



Schneidet aus fester Pappe zwei Rechtecke in der Größe eines Notizbuches, so etwa 7 cm lang und 5 cm breit. Rüstet euch danach mit drei Bandstücken (im Notfall kann man Papierstreifen verwenden) aus. Zwei davon sollen 1 cm länger sein als das Rechteck breit und das dritte einen Zentimeter länger als die doppelte Breite des Rechteckes. Alle Bänder klebt so, wie es Abb. 328 zeigt, an dem Pappumschlag fest. Dabei biegt ihr jeweils ein Ende der kurzen Bänder unter die rechte Pappe und klebt es dort fest, die anderen Enden jedoch werden an die Rückseite des linken Rechteckes angeklebt. Ein Ende des langen Bandes klebt ihr außen, am Rand an das rechte Rechteck, führt das Band darunter durch über das linke Rechteck, biegt es um die Kante, und klebt es von hinten an.

Die Vorbereitungen sind nun abgeschlossen. Die Zauberbrieftasche ist fertig. Mit ihr könnt ihr einen erstaunlichen Trick vorführen, der die Bezeichnung „lebender Zettel“ oder so ähnlich verdient. Nehmt ein Stück Papier, auf das ein Zuschauer seine Unterschrift setzt, so, daß ihr anstelle des Zettels keinen anderen nehmen könnt. Den Zettel steckt ihr unter beide Bänder. Schließt die Brieftasche nun und öffnet sie wieder. Was ist das? Der Zettel ist von allein unter beiden Bändern hervorgekrochen und auf völlig unerklärliche Weise — für den Nichteingeweihten — unter das einzelne Band auf der anderen Seite geraten.

Das ganze Geheimnis besteht darin, daß ihr die Brieftasche nach dem Zuklappen von der entgegengesetzten Seite her geöffnet habt. Ganz einfach, doch das ist für eine nichteingeweihte Person schwer zu erraten.

Streichhölzer erraten

In meiner Kindheit hat mich ein Zaubertrick, den mir mein großer Bruder vorführte, stark beeindruckt. Während ich mich in meinem Zimmer beschäftigte, hörte ich aus dem Nebenraum lautes Gelächter, was meine Neugier auf sich zog. Ich warf einen Blick hinein. Mein Bruder und sein Freund, ein Student, schütteten sich dort vor Lachen aus.

„Na, komm mal her Bübchen! Wir führen dir einen interessanten Trick vor."

Darauf wartete ich nur. Mein Bruder war ein großer Spaßvogel.

„Sieh her", sagte mein Bruder, während er auf dem Tisch ungeordnet Streichhölzer auslegte. „So wie sie kommen, lege ich 10 Streichhölzchen auf den Tisch. Gleich danach gehe ich in die Küche, und in der Zeit wähle du dir in Gedanken eines von den Streichhölzchen aus. Wenn du fertig bist, rufe mich. Ich schaue auf die Streichhölzer und sage dir sofort, welches du ausgewählt hast."

„Und dann sagt er, daß es das nicht war", mischte sich der Gast ein. „Nein, da muß eine Kontrolle sein. Ohne die geht es nicht!"

„Na, meinetwegen. Machen wir es so: Wenn der Kleine ein Streichholz ausgewählt hat, zeigt er es dir. Du bist Zeuge."

„So ist das eine andere Sache. Fangen wir an."

Mein Bruder ging hinaus. Ich überzeugte mich, ob er wirklich in der Küche ist, und es nicht möglich ist, durchs Schlüsselloch zu gucken. Ich wählte ein Hölzchen aus, zeigte es — ohne es zu berühren — dem Studenten und rief meinem Bruder zu:

„Fertig!"

Ich war nicht sehr überzeugt davon, daß mein Bruder das Streichholz errät, denn ich hatte es ja nicht einmal berührt. Alle Hölzchen lagen an ihrem Platz wie vordem. Wie will man da etwas erraten?

Doch er erriet es! Er ging an den Tisch heran und zeigte sofort auf das ausgewählte Hölzchen. Absichtlich bemühte ich mich, nicht darauf zu schauen, um mich nicht mit Blicken zu verraten. Aber mein Bruder sah überhaupt nicht auf mich und erriet es dennoch ... Zum Verrücktwerden!

„Willst Du noch einmal?"

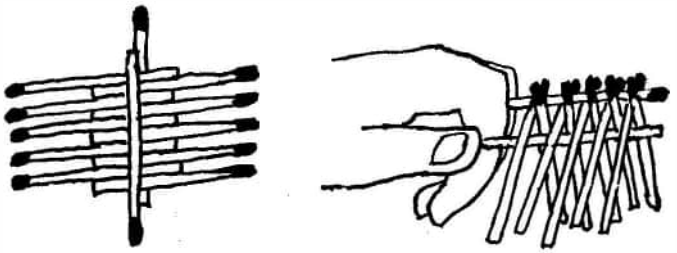
„Na klar!"

Wir wiederholten alles. Wieder erriet er es. An die zehnmal veranstalteten wir das Experiment, und jedesmal zeigte mein Bruder, ohne zu irren, direkt auf das Streichholz, das ich ausgewählt hatte. Mir waren die Tränen nahe. Ich konnte kaum erwarten zu hören, wie das zugeht. Schließlich enthüllten meine Peiniger, sich meiner erbarmend, das Geheimnis. Was glaubt ihr, worin das Geheimnis besteht?

Elf Streichhölzchen auf einem

Abbildung 329

Legt aus einem Dutzend Streichhölzer ein Gebilde, wie es auf Abb. 329 gezeigt ist und bemüht euch dann,



das ganze Häufchen mit dem herausragenden Ende des zuunterst liegenden Hölzchens hochzuheben. Wenn ihr geschickt genug seid, gelingt es. Da könnt ihr sehen, wie man mit bestimmter Fingerfertigkeit und Findigkeit mit einem Streichholz elf hochheben kann. Möglicherweise klappt es nicht sofort. Man muß sich mit Geduld wappnen und den Versuch einige Male wiederholen.

Abbildung 330



Ist das leicht zu machen?

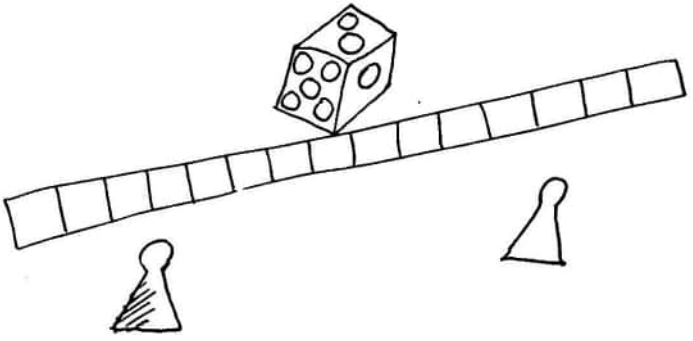
Was meint ihr, ist das leicht zu machen, was auf der Abb. 330 dargestellt ist, nämlich mit zwei Streichhölzern ein drittes am Ende hochzuheben?

Es sieht so leicht aus, nicht wahr? Doch versucht es mal selbst, und ihr werdet euch überzeugen, daß dafür viel Fingerfertigkeit und Geduld notwendig ist. Bei der geringsten Muskelbewegung wird euch das Hölzchen umkippen.

Auf schmalem Pfad

Abbildung 331

Auf ein Blatt Papier zeichnet eine schmale Straße aus 15 Quadraten (Abb. 331).



Für das Spiel benötigt ihr noch zwei Spielwürfel (mit 1—6 Augen auf den Würfelflächen). Und schließlich werden zwei Spielsteine (man kann auch zwei Münzen oder zwei Knöpfe nehmen) benötigt.

Die Spielregeln sind unkompliziert. Es spielen zwei Personen. Jeder setzt seine Figur auf das äußerste Feld der Straße. Dann wird nacheinander gewürfelt. Wer die meisten Punkte hat, beginnt. Jeder Teilnehmer setzt seinen Stein soweit vorwärts, wie er Punkte würfelt. Doch darf er das Feld nicht überspringen, das vom Gegner besetzt ist. Sind mehr Augen gewürfelt als noch Felder vorhanden sind, muß der Spieler um die überzählige Augenzahl rückwärts schreiten.

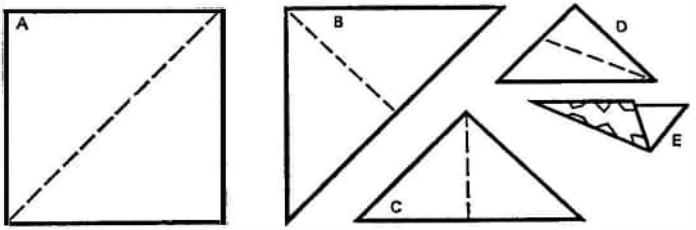
Auf diese Weise befinden sich die Spielsteine mal in der Spielmitte, mal an den Enden. Das Spiel ist beendet, wenn einer der Teilnehmer gezwungen ist, die Straße zu verlassen. Wer übrigbleibt, hat gewonnen.

Papiersterne

Vielleicht wissen nicht alle, daß man einfach mit der Schere ohne jegliches Zeichengerät aus Papier schöne und verschiedene Ornamente ausschneiden kann.

Nehmt ein Blatt weißes Papier und faltet es in der

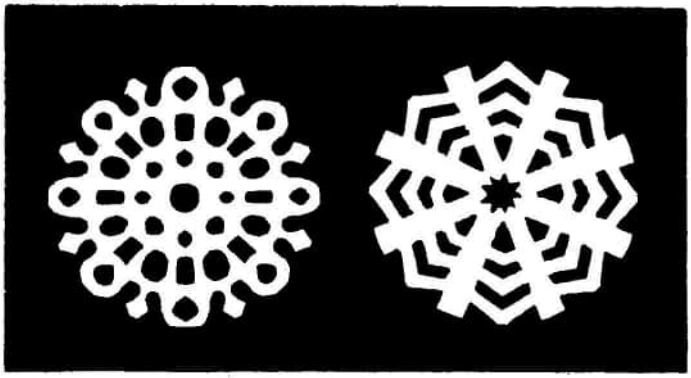
Abbildung 332



Reihenfolge, wie es mit *A*, *B*, *C*, *D*, *E* auf Abb. 332 gezeigt wird. Seid ihr bei Figur *E* angelangt, so beschneidet das gefaltete Papier in verschnörkelten Linien, so etwa, wie es auf der Abbildung angedeutet ist.

Faltet ihr danach das Papier auseinander und glättet es, habt ihr vor euch ein hübsches Ornament, das noch besser wirkt, wenn ihr es auf dunkles Papier klebt (Abb. 333).

Abbildung 333



Ein fünfzackiger Stern

Könnt ihr aus Papier einen richtigen fünfzackigen Stern schneiden? Das ist nicht einfach. Wer keine geübten Hände hat, erhält einen Stern mit unterschiedlich langen Zacken.

Es gibt zwei Methoden, wohlgeformte schöne Sterne auszuschneiden.

Im ersten Fall beginnt man damit, auf einem Blatt Papier mit dem Zirkel oder mit einem Kuchenteller, oder einer umgestülpten Tasse einen Kreis zu zeichnen. Man schneidet ihn aus, knifft ihn zu einem Halb-

kreis, der danach viermal gefaltet wird, so wie auf Abb. 334 *A* dargestellt.

Das ist die schwierigste Arbeit. Da braucht man Augenmaß, weil der Halbkreis in fünf gleiche Teile gelegt werden muß (Abb. 334).

Abbildung 334

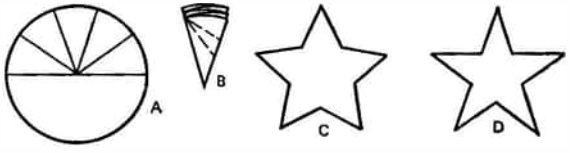
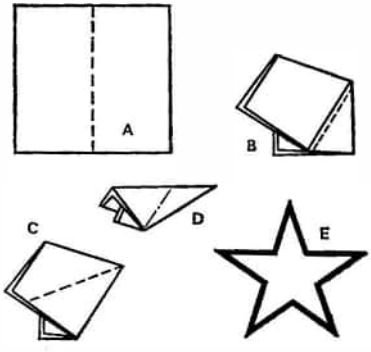


Abbildung 335



Ist der Kreis richtig zusammengefaltet, schneiden wir am dicken Ende mit der Schere längs der gestrichelten Linien, wie sie in 334 *B* gekennzeichnet sind. Falten wir das Papier auseinander, haben wir einen regelmäßigen fünfzackigen Stern mit mehr oder weniger tiefen Einschnitten (Abb. 334 *C* und *D*). Das hängt davon ab, wie schräg der Schnitt geführt wird.

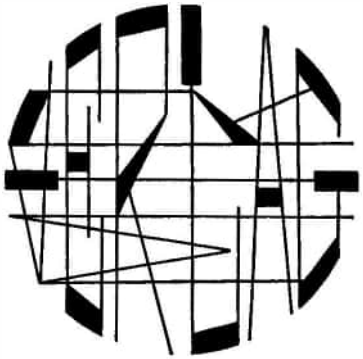
Die zweite Methode ist einfacher, weil hierbei nicht vom Kreis, sondern vom Quadrat ausgegangen wird. Man beginnt damit, das quadratische Blatt Papier in der Mitte zu falten (Abb. 335 *A*). Danach faltet man noch dreimal, nach dem Muster von 335 *B*, *C* und *D*. Die gestrichelte Linie bei 335 *D* gibt die Schnittlinie an.

Den dabei entstehenden Stern zeigt uns Abb. 335 *E*.

Unterhaltsame Abbildungen

Was steht hier geschrieben?

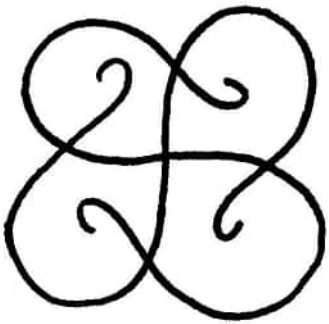
Abbildung 336



In diesem Kreis (Abb. 336) steht etwas geschrieben. Blickt ihr von oben darauf, könnt ihr natürlich nichts entziffern. Doch versteht ihr, richtig auf den Kreis zu schauen, könnt ihr zwei Worte lesen. Welche?

Alles wäre einfach

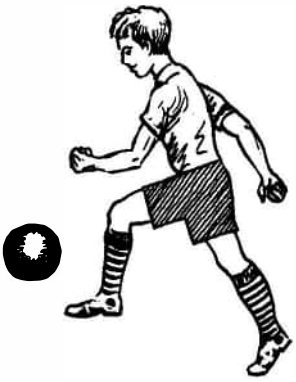
Abbildung 337



Seht euch dieses Ornament (Abb. 337) aufmerksam an, bemüht euch, es euch gut ins Gedächtnis einzuprägen und es dann aus dem Gedächtnis aufzuzeichnen. Zuerst die vier Endpunkte, an die sich die Enden der geschwungenen Linien anpassen müssen. Die erste gekrümmte Linie zeichnet ihr sicher sehr eifrig. Ausgezeichnet! Jetzt zieht die zweite. Na, da habt ihr euch aber verrechnet, die widerspenstige Linie wird einfach nicht richtig. Die einfache Sache ist viel schwieriger als es auf den ersten Blick schien.

Auf welchem Bein?

Abbildung 338



Auf welchem Bein steht der Fußballspieler — auf dem linken oder rechten Bein?

Es scheint, als ob er auf dem rechten Bein steht, doch mit gleicher Überzeugtheit kann man behaupten, er stehe auf dem linken. Wie viele Male ihr auch auf die Abbildung blickt, ihr löst die Frage nicht. Der Grafiker hat so geschickt die Spuren verwischt, daß ihr unter keinen Umständen feststellen könnt, welches Bein der Fußballer anhebt, und auf welchem er steht.

Ihr fragt: „Na, welches denn nun?“ Ich weiß es selbst nicht. Und der Grafiker weiß es nicht — er hat es vergessen. So bleibt es ein ewig ungelöstes Geheimnis.

Sind es viele Fische?

Schaut aufmerksam auf Abbildung 339. Der Angler scheint noch nichts gefangen zu haben. Doch, schaut man gründlich auf die Linien der Abbildung, kann man sich davon überzeugen, daß der Fang ziemlich

Abbildung 339



Abbildung 340



reichlich ist. Drei große Fische sind schon herausgeangelt.
Wo sind sie denn?

Wo ist der Dompteur?

Wo ist der Dompteur dieses Tigers (Abb. 340)? Sein Porträt ist auf der Abbildung wiedergegeben. Sucht es.

Sonnenuntergang

Schaut euch das Bild an (Abb. 341) — der Sonnenuntergang — und sagt, ob es richtig gezeichnet ist.

Das Bild enthält eine Ungereimtheit, die ihr aufdecken sollt.

Abbildung 341

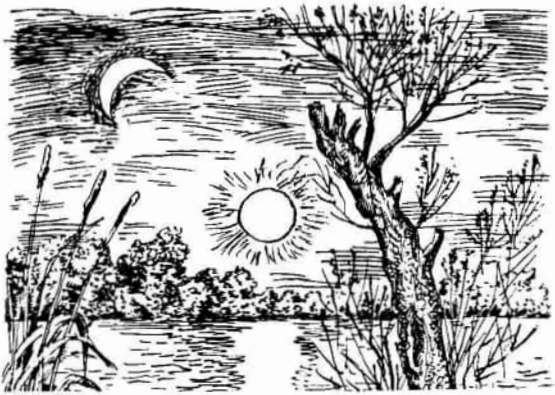


Abbildung 342



Monduntergang

Ihr seht auf Abb. 342 eine Tropenlandschaft mit einer seltsamen Darstellung der Mondsichel am Horizont. Ist das Bild richtig gezeichnet? Ist da nicht irgend etwas falsch?



Antworten

Das verschwindende Stäbchen

Um zu erklären, worauf dieser Trick beruht, betrachten wir ihn uns zunächst in vereinfachter Form. Auf Abb. 343 seht ihr einen Pappstreifen mit 13 Stäbchen darauf. Das Blatt ist diagonal durchgetrennt. Bewegt man die beiden Teile (das obere nach links, das untere nach rechts), so wie es auf der Abbildung unten dargestellt ist, haben wir statt 13 Stäbchen nur 12: Eins verschwindet. Es ist nicht schwer zu erraten, wohin es verschwunden ist. Jedes der neuen 12 Stäbchen ist ein klein wenig länger als vorher, nämlich um 1/12. Beim Schieben (längs der Diagonalen) hat sich ein Stäbchen in 12 Teile geteilt, um die jedes der übrigen verlängert wurde. Die Rückwärtsbewegung der Pappstreifen bringt das verschwundene Stäbchen wieder zum Vorschein bei gleichzeitiger Verkürzung der anderen.

Die im Kreis angeordneten Stäbchen (vgl. Abb. 322) haben die gleiche Eigenschaft: Bei Drehung des Kreises um einen kleinen Winkel verschwindet eines der Stäbchen. Es teilt sich gleichmäßig auf die 12 übrigen auf.

Streichhölzer erraten

Das Geheimnis war, daß sie mich einfach verkohlt haben. Der Student, der angeblich das Erraten kontrollierte, machte mit meinem Bruder gemeinsame Sache und gab ihm Signale. Aber wie? Hierin liegt der ganze Trick. Es zeigt sich, daß die Streichhölzchen durchaus nicht willkürlich lagen. Mein Bruder legte sie so (Abb. 344), daß

Abbildung 343

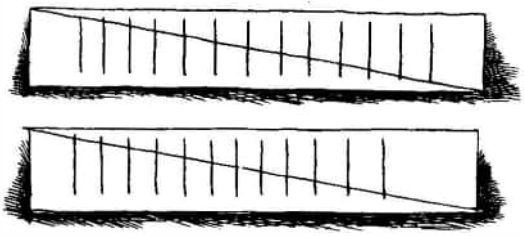


Abbildung 344



man darin Teile des menschlichen Antlitzes wiederfinden konnte. Das obere Streichholz stellte die Haare dar, das darunter liegende — die Stirn. Weiter folgten die Augen, Nase, Mund, Kinn und Hals und seitlich die Ohren. Wenn mein Bruder ins Zimmer trat, warf er zuerst einen Blick auf den vermeintlichen Kontrolleur. Dieser aber führte die Hand mal zur Nase, mal zum Hals, mal zum rechten Auge oder zum linken Ohr und gab ihm, unmerklich für mich, zu verstehen, welches Streichholz ich mir gemerkt hatte.

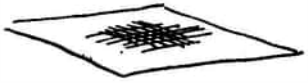
Was steht hier geschrieben?

Haltet den Kreis in Augenhöhe so, wie es die Abb. 345 zeigt. Anfangs könnt ihr deutlich das Wort „Verlag“ lesen und wenn ihr den Kreis dreht, erkennt ihr das andere Wort „MIR“.



Abbildung 345





Die Buchstaben sind stark verlängert, deshalb sind sie schwer in der Draufsicht zu lesen. Doch wenn euer Blick an den Buchstaben von unten nach oben entlanggleitet, verkürzt sich deren Länge, während die Breite gleich bleibt. Dadurch gewinnen die Buchstaben die gewohnte Gestalt, und die Schrift ist mühelos lesbar.

Sind es viele Fische?

Ich werde dem Leser helfen, die Beute des Anglers aufzufinden. Ein Fisch ruht mit dem Kopf nach unten auf dem Rücken des Anglers. Der zweite befindet sich zwischen seinem Kopf und den Armen. Der dritte ist unter seinen Füßen angeordnet.

Wo ist der Dompteur?

Das Auge des Tigers ist zugleich Auge des Dompteurs, dessen Gesicht jedoch in die entgegengesetzte Richtung gewandt ist.

Sonnenuntergang

Die Ungereimtheit dieses Bildes ist, daß die Mondsichel mit ihrer gewölbten Seite der Sonne nicht zugewandt, sondern von ihr abgewandt ist. Der Mond wird aber doch von der Sonne beleuchtet , d. h., er kann niemals der Sonne seine unbeleuchtete Seite zuwenden ...

„Die Mehrzahl der Maler", bemerkt dazu der französische Astronom Flammarion, „weiß das noch nicht, denn es vergeht kein Jahr, wo im Pariser Kunstsalon (Ausstellungssaal) nicht eine große Zahl von Monden in umgekehrter Stellung auftaucht."

Monduntergang

Wie seltsam es auch sein mag, doch die Mondsichel ist auf Abb. 342 völlig exakt dargestellt. Das ist eine *Tropen*landschaft, und in den Tropen unterscheidet sich die Lage der Mondsichel von der Lage in unseren Breiten. Bei uns ist der zunehmende Mond mit dem Buckel nach rechts gerichtet und die Sichel des abnehmenden — nach links. In den tropischen Ländern hängt die Mondsichel horizontal am Himmel.

Woher kommt das? In unseren Ländern wandern Sonne und Mond (überhaupt alle Gestirne) bei ihrer täglichen Himmelsbewegung auf geneigten Kreisbahnen. Deshalb befindet sich die Sonne abends, wenn sie den Mond beleuchtet, in *schräger Richtung* — sie bescheint den Mond von rechts oder von links. Am Äquator jedoch bewegt sich die Sonne in vertikalem Bogen. Die Sonne ist, wenn sie den Mond erleuchtet, nicht rechts oder links von ihm hinter dem Horizont, sondern *unterhalb*. Der Mond wird von unten her beleuchtet, und ebendeshalb hat die Mondsichel die Form einer Gondel, wie es auf der Abbildung dargestellt ist.



Ende



J. I. Perelman

Unterhaltsame Aufgaben und Versuche

