VOLK UND WISSEN
SAMMELBÜCHEREI
NATUR UND WISSEN

MATHEMATIK

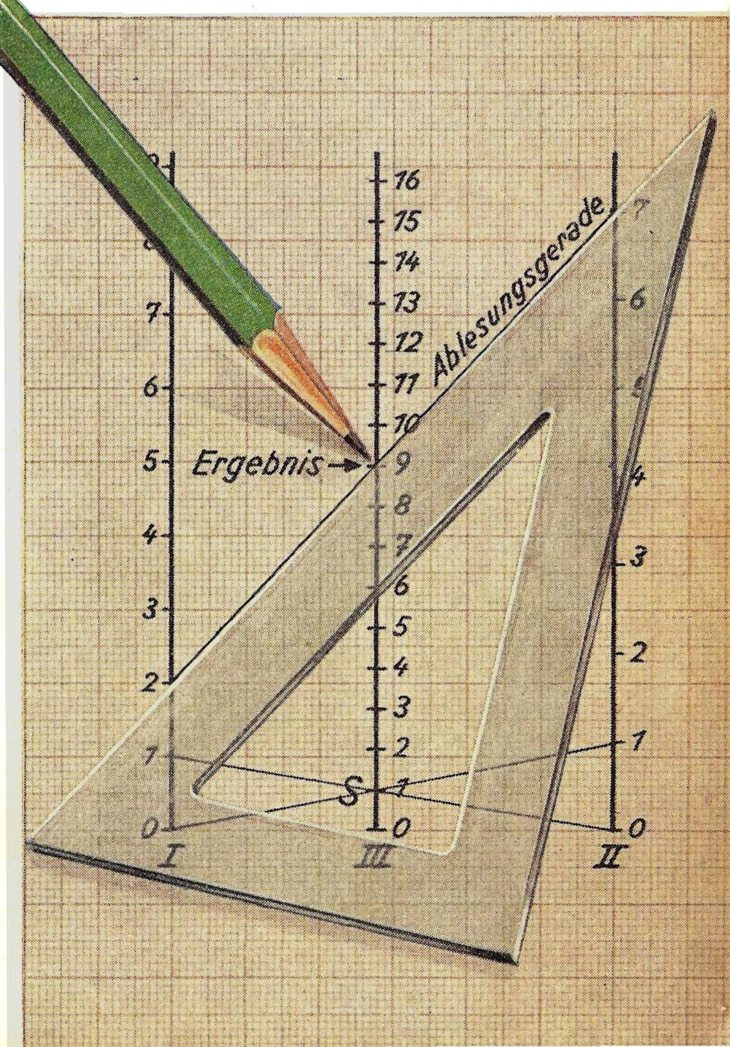
SERIE A • BAND 3
EINZELBAND 60 PF

* * * *

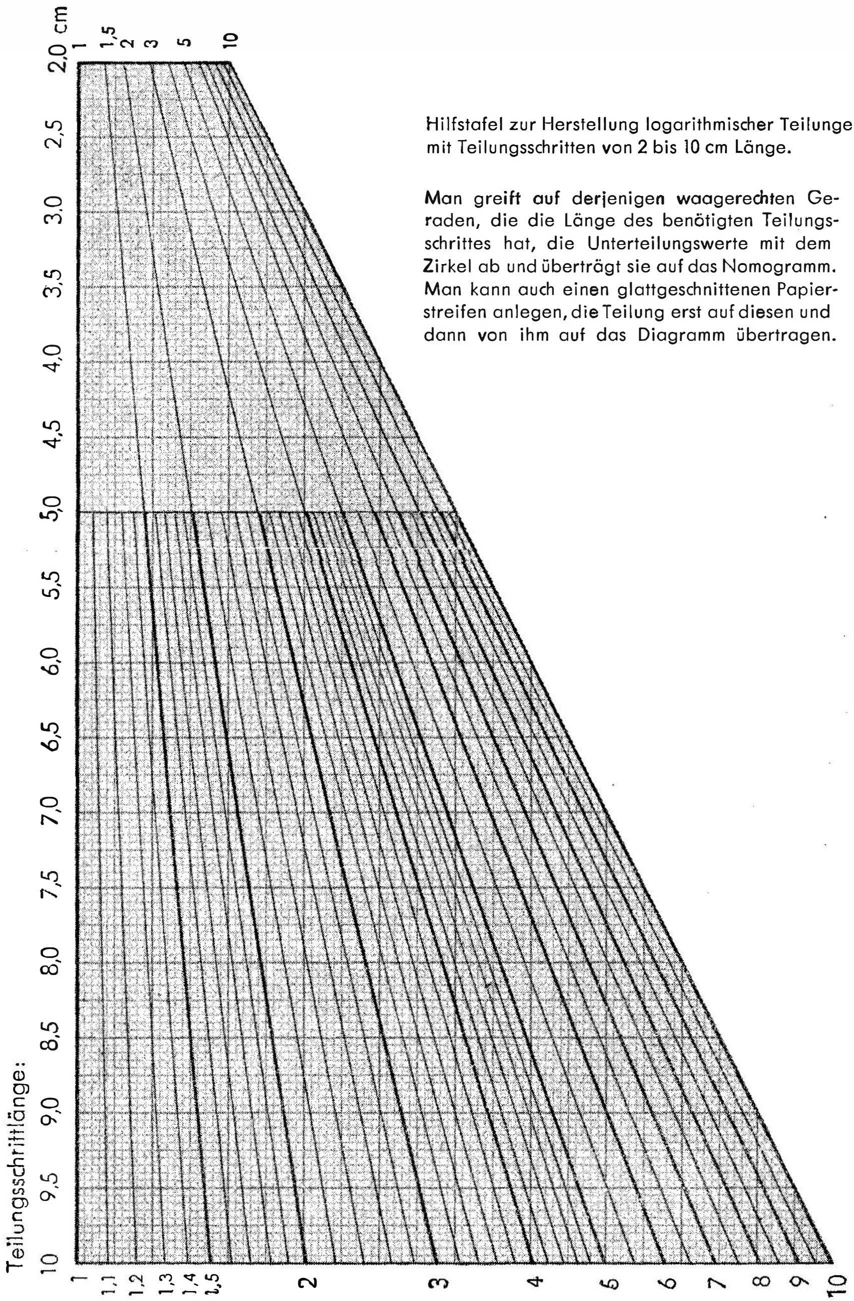
DER ZEICHENSTIFT RECHNET

EINFÜHRUNG IN DIE NOMOGRAPHIE

Ein Stück Zeichenpapier oder auch Millimeterpapier, ein Bleistift und ein Lineal genügen, selbst komplizierte Rechenaufgaben zeichnerisch zu lösen. Mit diesen Hilfsmitteln läßt sich nämlich eine Rechentafel herstellen, die jeweils einer bestimmten Aufgabe angepaßt ist.
Wegen ihrer einfachen Handhabung werden graphische Rechentafeln, Nomogramme, heute in Technik und Wissenschaft häufig verwendet.



VOLK UND WISSEN VERLAG
BERLIN / LEIPZIG



Hilfstafel zur Herstellung logarithmischer Teilungen mit Teilungsschritten von 2 bis 10 cm Länge.

Man greift auf derjenigen waagerechten Geraden, die die Länge des benötigten Teilungsschrittes hat, die Unterteilungswerte mit dem Zirkel ab und überträgt sie auf das Nomogramm. Man kann auch einen glattgeschnittenen Papierstreifen anlegen, die Teilung erst auf diesen und dann von ihm auf das Diagramm übertragen.

Dieser Band wurde von Dr. A. Erlenbach, Berlin, verfaßt. Den mathematischen Teil bearbeitete Werner Kimstedt. Nach Angaben und Unterlagen beider Verfasser führte Otto Berger, Leipzig, die Textzeichnungen und das Titelbild aus. – Die Abbildung auf der 4. Umschlagseite ist ein Ausschnitt aus einem graphischen Fahrplan der Deutschen Reichsbahn.

DER ZEICHENSTIFT RECHNET

EINFÜHRUNG IN DIE NOMOGRAPHIE

VOLK UND WISSEN SAMMELBÜCHEREI
NATUR UND WISSEN · SERIE A · BAND 3

VOLK UND WISSEN VERLAG
BERLIN / LEIPZIG

INHALT

PREIS 60 PFENNIG

Satz und Druck des Innenteils von Wilhelm Hoppe, Borsdorf-Leipzig (LG 16*), und des Umschlags von Gebr. Koch, Leipzig (M 150)

Bestell-Nr. 12575

Lizenz-Nr. 334 · 1000/49-I-75d · 1.—50. Tausend 1949

VORWORT

Rechnen und Mathematik sind nicht jedermanns Sache! Gewiß, aber es gibt so viele Gebiete, für deren Beherrschung die Mathematik eine notwendige Voraussetzung ist: Keine Handwerkerstube, keine Bauernwirtschaft, kein Büro und keine Fabrik sind heute ohne Rechnen denkbar. Somit ist eine große Anzahl von Berufen all denen verschlossen, die keine guten mathematischen Vorkenntnisse haben.

Für manchen wird es nun vielversprechend sein, wenn er hört, daß es möglich ist, mit dem Zeichenstift zu rechnen. Es hat sich herausgestellt, daß das genaue Zeichnen eine sehr wertvolle Hilfe des Rechnens werden kann, ja daß man graphisch unbekannte Größen leicht zu ermitteln vermag, deren Berechnung oft sehr schwierig ist. Vor allem ist es möglich, Aufgaben, die in gleicher Form wiederholt auftreten und in denen sich nur die Größen ändern, zeichnerisch für alle praktisch vorkommenden Zahlen zu lösen Man kann in solchen Fällen die Arbeit, die man sonst immer von neuem zu leisten hat, ein für allemal tun, indem man sich eine Tafel anfertigt, auf der das Ergebnis dann nur abgelesen zu werden braucht. Solche wiederholt vorkommenden Aufgaben stellen in der Praxis die Regel dar. Dieses graphische Lösungsverfahren, Nomographie oder Fluchtlinienkunst genannt, können auch mathematisch wenig Vorgebildete erlernen; sie werden auf diese Weise zu besseren Leistungen befähigt.

Im folgenden soll die mathematische Grundlegung und die praktische Durchführung des zeichnerischen Rechnens dargestellt werden. An vereinfachten Beispielen aus der Praxis werden dann die Anwendungsmöglichkeiten erläutert. Das Ziel des Heftes ist, jedem die Möglichkeit zu geben, selbst verständnisvoll mit dem Zeichenstift zu rechnen.

I. DIE NETZTAFEL

a) Die Netztafel allgemein

Wir zeichnen uns ein Koordinatensystem mit zwei aufeinander senkrechtstehenden Achsen, der x-Achse (Abszissenachse) und der y-Achse (Ordinatenachse), und tragen auf beiden eine gleiche Teilung auf (Abb. 1).

Um beispielsweise die Gleichung $y = 2x$ graphisch darzustellen, legen wir zunächst eine Tabelle an, die alle den x-Werten zugeordneten y-Werte enthält:

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

Auf den beiden Achsen des Koordinatensystems werden all diese Werte dann an den Teilungspunkten eingetragen. Den ersten Punkt (P_1) der graphisch darzustellenden Gleichung ermitteln wir, indem wir durch $x = 1$ die Parallele zur y-Achse und durch $y = 2$ die Parallele zur x-Achse zeichnen.

Nach Eintragung weiterer Punkte findet man, daß alle auf einer Geraden liegen, die durch den 0-Punkt des Koordinatensystems geht; dem Werte $x = 0$ ist $y = 0$ zugeordnet. — Mit dieser Darstellung können wir bereits zeichnerisch rechnen. Und zwar finden wir alle Produkte aus zwei Faktoren, von denen der eine Faktor 2 ist; z. B. $2 \cdot 2{,}5 = 5$. Wir suchen $x = 2{,}5$ und zeichnen die Parallele zur y-Achse, die die Gerade in P' schneidet. Die durch P' gelegte Parallele zur x-Achse schneidet die y-Achse beim Wert 5, dem Ergebnis. Da sich die Gleichung auch $x = y : 2$ schreiben läßt, können wir mit der Darstellung auch durch 2 teilen. Als Beispiel nehmen wir $3 : 2 = 1{,}5$. Die Parallele zur x-Achse durch $y = 3$ ergibt P'', die Parallele zur y-Achse durch P'' ergibt $x = 1{,}5$.

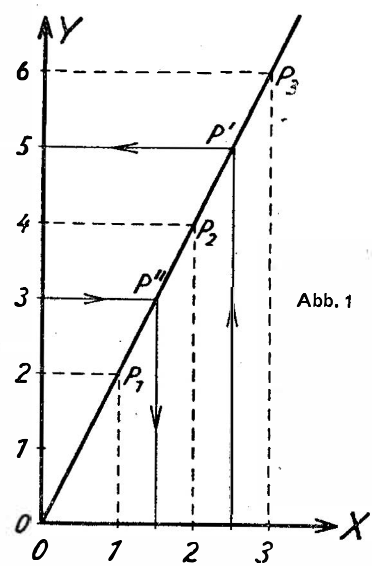


Abb. 1

Die Genauigkeit des Ergebnisses ist natürlich abhängig von der Genauigkeit der Zeichnung, von der Größe des Maßstabes und der Größe der Darstellung. Wenn wir für die Einheit auf den Achsen 1 cm wählen und zeichnen auf $^1/_{10}$ mm genau (das ist möglich), dann erhalten wir die Ergebnisse mit einer Genauigkeit der zweiten Stelle hinter dem Komma. Das reicht praktisch meist aus.

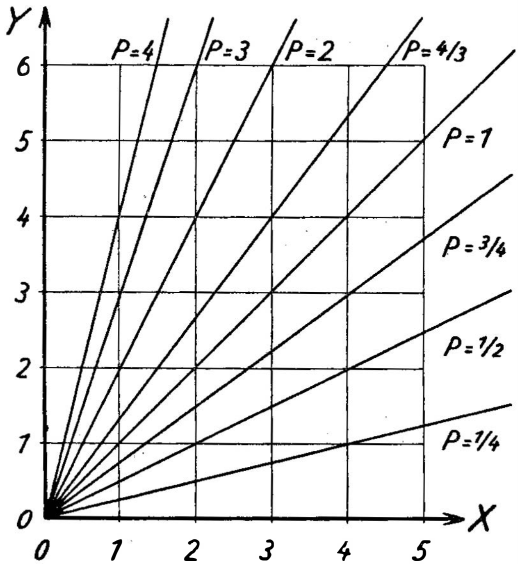


Abb. 2

Wir müssen uns bei jeder Aufgabe fragen: 1. Welche Genauigkeit wird verlangt? 2. Welche Werte treten auf? 3. Welche Größe darf die Tafel haben? Der endgültige Maßstab, auf den es vor allem ankommt, ist dann ein Kompromiß zwischen der verlangten Genauigkeit des Resultats und der Handlichkeit der Tafel.

Wenn wir noch weitere Geraden der Art $y = px$ in das Koordinatensystem eintragen, sehen wir, daß sie alle durch den 0-Punkt gehen (Abb. 2).
Mit dieser Netztafel (die gezeichneten Parallelen bilden ein Netz) kann man verschiedene Aufgaben lösen: Nach dem oben Gesagten lassen sich alle zweigliedrigen Produkte mit den gewählten Größen p als einem Faktor und alle Brüche berechnen, deren Nenner p ist.

b) Das Weg-Zeit-Diagramm mit den Geschwindigkeitsgeraden

Eine solche Netztafel ist besonders zur Darstellung von Bewegungen geeignet. Die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung — das ist eine Bewegung mit unveränderter Geschwindigkeit — kann aus dem in einer bestimmten Zeit zurückgelegten Weg berechnet werden: Geschwindigkeit $= \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$.
Wir sind übereingekommen, diese Geschwindigkeit in Kilometern je Stunde

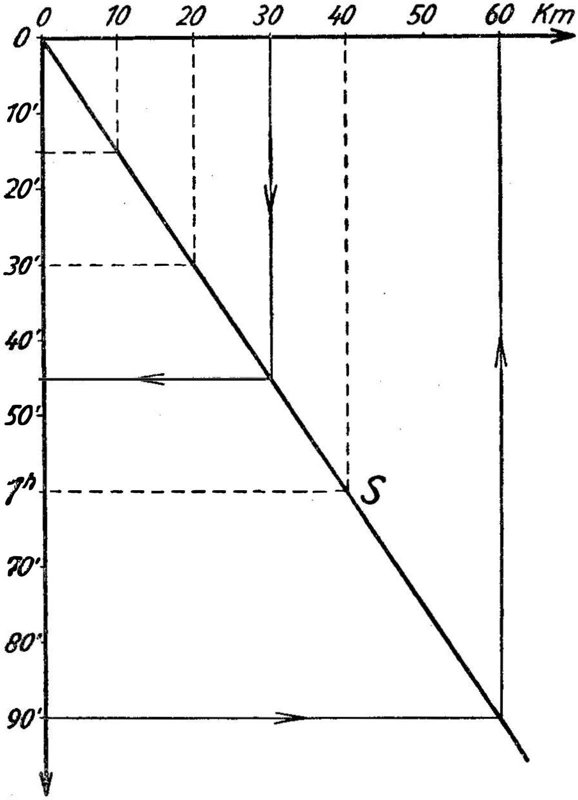


Abb. 3

(km/h) zu messen. Eine zeichnerische Darstellung der Zusammenhänge erhalten wir, wenn wir (Abb. 3) in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf der Horizontalen (Waagerechten) den Weg auftragen und auf der Vertikalen (Senkrechten) die zum Durchlaufen des Weges benötigte Zeit. Aus praktischen Gründen werden bei der Darstellung von Geschwindigkeiten die Ordinaten von der Abszissenachse aus nach unten abgetragen. Wir wählen als Maßstab für den Weg 1 cm für 10 km oder 1 mm für 1 km und für die Zeit 6 cm für eine Stunde (h) oder 1 mm für 1 Minute (min oder ′).

Hat ein Fahrzeug eine Geschwindigkeit von 40 km/h, so wird es nach einer Stunde den Weg von 40 km zurückgelegt haben, wobei wir stillschweigend voraussetzen, daß es bei der Fahrt diese Geschwindigkeit beibehält. Wir erhalten in unserem Koordinatensystem (Abb. 3) einen der Geschwindigkeit 40 km/h zugeordneten Wert im Schnittpunkt S, wenn wir durch »40 km« auf der Abszissenachse eine Senkrechte und durch »1 h« auf der Ordinatenachse eine Waagerechte ziehen. Die gleiche Geschwindigkeit liegt offenbar vor, wenn das Fahrzeug den Weg von 20 km in 0,5 h oder den Weg von 10 km in 0,25 h usf. zurücklegt. Der Bruch Weg durch Zeit, d. h. $40:1 = 20:0{,}5 = 10:0{,}25$, ist also in allen Fällen gleich. Tragen wir auch diese Werte in unser Koordinatensystem ein, so erhalten wir eine Reihe von Schnittpunkten, die zur Geschwindigkeit 40 km/h gehören. Die Punkte liegen auf einer Geraden, die die Bedingung erfüllt, daß alle sich auf ihr schneidenden Horizontalen und Vertikalen (oder Abszissen und Ordinaten) die der Geschwindigkeit 40 km/h zugeordneten Weg- und Zeitwerte liefern.

Wollen wir z. B. wissen, welchen Weg das Fahrzeug in 90 min zurückgelegt hat, so gehen wir von dem Punkt »90« der Ordinatenachse waagerecht bis zur »40 km/h«-Geraden und von da senkrecht zur Abszissenachse, wo wir den Wert »60« treffen. In 90 min legt also das Fahrzeug 60 km zurück. — Natürlich kann die Frage auch umgekehrt gestellt werden, etwa so: Welche Zeit benötigt ein sich mit 40 km/h bewegendes Fahrzeug, um den Weg von 30 km zurückzulegen? Dann gehen wir von dem Abszissenpunkt 30 km senkrecht bis zur Geschwindigkeitsgeraden und von da waagerecht zur Ordinatenachse, um dort zu erfahren, daß die zugehörige Zeit 45 min beträgt.

Die Zeichnung ersetzt also schon eine Menge Rechnungen. Ihre Verwendung ist allerdings noch beschränkt, da sich alle Betrachtungen auf die eine

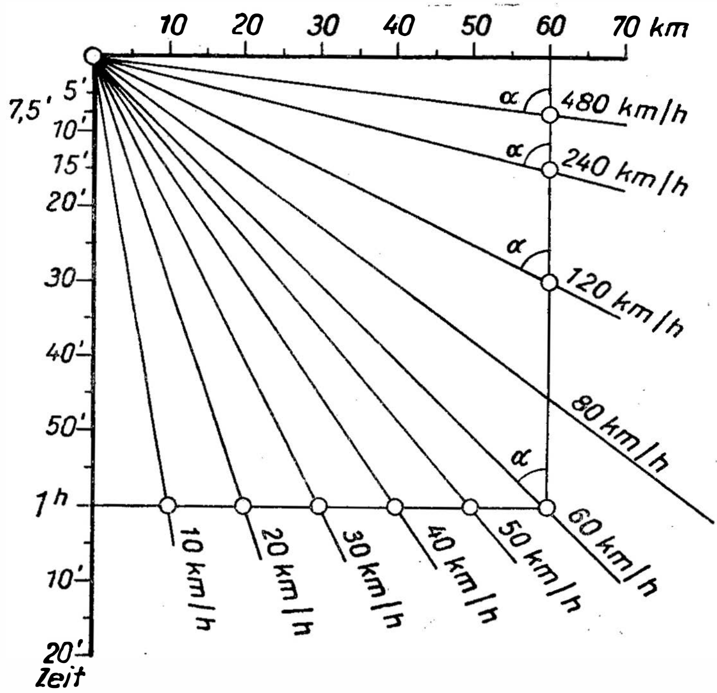


Abb. 4

Geschwindigkeit von 40 km/h beziehen. Dem können wir abhelfen, indem wir in unserem Koordinatensystem noch mehrere Geraden für andere Geschwindigkeiten einzeichnen (Abb. 4). Die Geraden gehen sämtlich durch den Schnittpunkt der Koordinatenachsen, da nach 0 Minuten, also am Beginn der Bewegung, noch kein Weg zurückgelegt ist. Wir brauchen nur einen Punkt für jede Geschwindigkeitsgerade zu bestimmen, z. B. für die Geschwindigkeit 60 km/h den Punkt, der 60 km und 1 h entspricht, und ihn mit dem 0-Punkt zu verbinden. Man sieht, daß steile Geraden geringe, flach verlaufende Geraden hohe Geschwindigkeiten bedeuten. — Eine solche Darstellung wird um so brauchbarer, je mehr Geschwindigkeitsgeraden wir einsetzen. Wird allerdings eine Aufgabe mit einer Geschwindigkeit gestellt, für die keine Gerade eingezeichnet ist, so ist sie gar nicht oder nur angenähert lösbar. Wir werden aber diesen Nachteil des zeichnerischen Rechnens überwinden und eine Darstellungsform kennenlernen, die alle Zwischenwerte abzulesen gestattet.

c) Der graphische Fahrplan

Wir alle kennen die dickleibigen Kursbücher mit ihren vielen Tausenden von Zahlen, die mit fast unfehlbarer Genauigkeit die Ankunfts- und Abfahrtszeiten der Züge festlegen. Mit wunderbarer Präzision sind die Anschlußzeiten beim Übergang von einer Strecke auf die andere aufeinander abgestimmt, werden an vorher festgelegten Orten die Personenzüge von den Schnellzügen überholt usw. Verwirrt stehen wir vor diesem Durcheinander von Zahlen, und unser Staunen wächst noch, wenn wir bedenken, daß alle Strecken auch noch von zahlreichen Güterzügen benutzt werden. Aber der Betrieb muß sich auf jeden Fall reibungslos abspielen, denn jede Störung kann die Sicherheit des Verkehrs aufs unangenehmste gefährden. Treten nun gar noch unvorhergesehene Forderungen hinzu, wie etwa die, einen Sonderzug einzulegen, so erscheint die Aufgabe, Ordnung in den Fahrplan zu bringen, geradezu unlösbar.

Hier hilft uns die zeichnerische Darstellung. Schon die Fahrpläne der ersten deutschen Eisenbahn, die auf der Strecke von Nürnberg nach Fürth im Jahre 1835 eröffnet wurde, waren auf Grund graphischer Tafeln angelegt. Da der Aufbau eines Fahrplans einen tiefen Einblick in das Rechnen mit dem Zeichenstift gewährt, wollen wir diesen Vorgang hier eingehend betrachten. Für den graphischen Fahrplan ist die oben besprochene Netztafel eine sehr zweckmäßige Grundlage (vgl. die Abbildung auf der 4. Umschlagseite).

Stellen wir einmal den Zugverkehr zwischen den Orten Memmingen und Karlsdorf graphisch dar. Die Entfernung zwischen beiden Orten beträgt 60 km Bahnstrecke (nicht Luftlinie). Auf der Karte finden wir folgende Zwischenstationen mit den zugehörigen Entfernungen von Memmingen angegeben:

Memmingen	0	Kilometer	Neudorf	38	Kilometer
Lindenau	7	„	Wieblingen	45	„
Schwetzingen	15	„	Eggenstein	55	„
Hochheim	20	„	Karlsdorf	60	„
Waghausen	30	„			

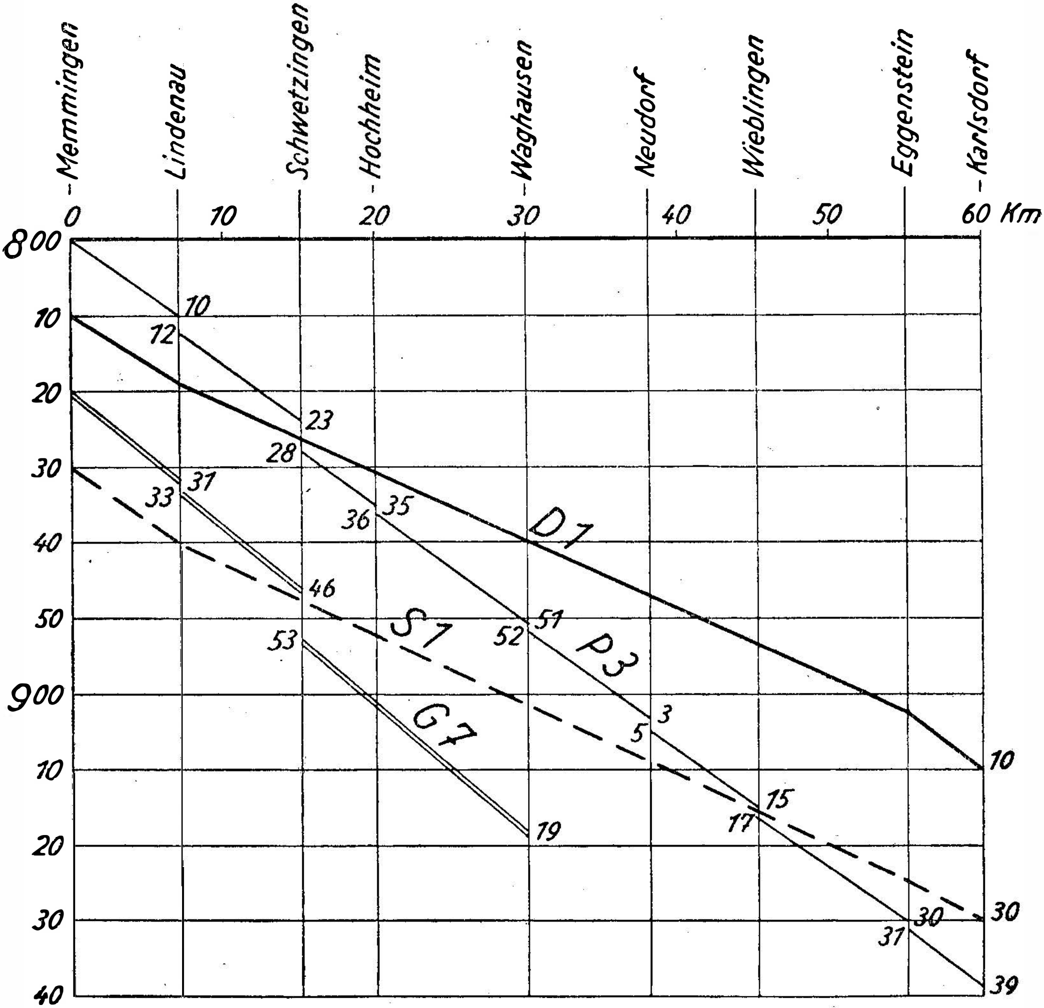


Abb.5

Wir zeichnen den Weg auf einer waagerechten Geraden auf (Abb. 5) und wählen hierzu den Maßstab 2 mm/km. Auf einer Senkrechten zu dieser Geraden tragen wir die Uhrzeiten auf; 1 mm entspricht dabei 1 Minute. Schließlich zeichnen wir das ganze Netz und erhalten so die Grunddarstellung.

Nun tragen wir den Schnellzug D 1 ein, der 8^{10} in Memmingen abfährt und 9^{10} in Karlsdorf eintrifft. Da er für die Strecke von 60 km gerade eine Stunde benötigt, hat er also eine Reisegeschwindigkeit von 60 km/h. 8^{19} passiert er Lindenau und 9^{02} Eggenstein.

Dabei fällt uns auf, daß zwischen Memmingen und Lindenau sowie zwischen Eggenstein und Karlsdorf die Gerade nicht so flach verläuft wie zwischen Lindenau und Eggenstein, die Geschwindigkeit zwischen den zuletzt genannten Orten also größer ist. Dies erscheint einleuchtend, denn am Anfang muß der Zug beschleunigt und am Ende seine Geschwindigkeit herabgesetzt werden, wenn er bei Eggenstein in das Bahnhofsgebiet von Karlsdorf einläuft.

Bei allen Eintragungen handelt es sich um mittlere Geschwindigkeiten. Für langsam fahrende Züge sind die dadurch entstehenden Ungenauigkeiten so gering, daß sie unberücksichtigt bleiben können. Für Schnellzüge trägt man zwei mittlere Geschwindigkeiten ein, eine kleine und eine große, die als Strecken verschiedener Steilheit erscheinen.

Jetzt verfolgen wir den Personenzug P 3, der um 8^{00} Memmingen verläßt und 9^{39} in Karlsdorf eintrifft. An jedem Orte, an dem er hält, ist die Ankunfts- und Abfahrtszeit eingetragen. Bemerkenswert ist, daß er in Schwetzingen 8^{25} von dem Schnellzug D 1 überholt wird. Er muß also dort auf ein Nebengleis geführt werden.

Auch über den Lauf des Güterzuges G 7 erhalten wir ein anschauliches Bild. Er fährt 8^{20} in Memmingen ab und trifft nach zwei Aufenthalten 9^{19} in Waghausen ein.

Besonders eindringlich tritt der Vorteil der zeichnerischen Darstellung hervor, wenn ein Sonderzug eingelegt werden soll. Ist z. B. ein Sonderzug S 1 angefordert, der 8^{30} in Memmingen abfahren und 9^{30} in Karlsdorf eintreffen soll, so legen wir, da es sich um die gleiche Geschwindigkeit wie die des D 1 handelt, zu diesem von 8^{30} ausgehend parallele Geraden. Wir erkennen, daß der auf der Strecke liegende Güterzug G 7 in Schwetzingen 8^{47} überholt wird. Er ist also hier auf einen Seitenstrang zu leiten. Ebenso ist die Station Wieblingen telegraphisch anzuweisen, den Personenzug P 3, der fahrplanmäßig 9^{15} eintrifft, so lange aufzuhalten, bis ihn der Sonderzug, der etwa um die gleiche Zeit dort durchläuft, überholt hat. Dem Lok-Führer des Sonderzuges kann andererseits gesagt werden, daß zwischen Neudorf und Wieblingen der Personenzug P 3 vor ihm auf der Strecke liegt und daß er also hier mit Haltsignalen zu rechnen hat.

So haben wir zunächst gezeigt, wie wir mittels des Zeichenstiftes die verwickeltsten Zusammenhänge darstellen und selbst schwierige Aufgaben meistern können.

II. DIE LEITERTAFEL

a) Zusammenzählen und Abziehen

Als wir eine Rechentafel für verschiedene Geschwindigkeiten aufstellten, fiel uns der Umstand unangenehm auf, daß wir in der Netztafeldarstellung von der Anzahl der für die verschiedenen Geschwindigkeiten eingetragenen Geraden abhängig waren.

Diese Nachteile vermeidet die Leitertafel, die ihren Namen daher hat, daß die aufgetragenen Skalen wie Leitern aussehen.

Wollen wir zwei Zahlen zusammenzählen, so legen wir zwei Maßstäbe mit **gleicher** Teilung aneinander (Abb. 6). Man erhält z. B. die Summe $5 + 7 = 12$, indem man an die Zahl 5 des Maßstabes I den Punkt 0 des Maßstabes II anlegt und bei der Zahl 7 auf dem I. Maßstab das Ergebnis 12 abliest.

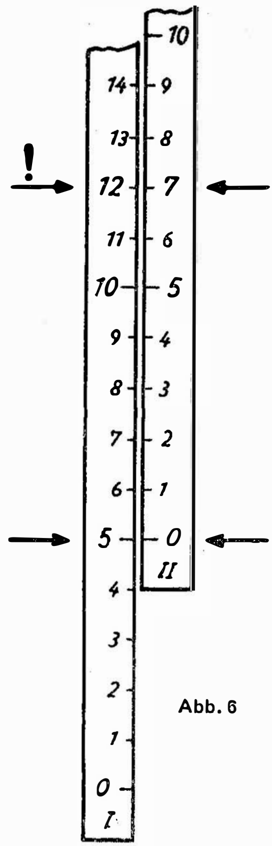


Abb. 6

Umgekehrt können wir natürlich auch abziehen. Haben wir z. B. $11 - 6 = 5$ zu rechnen, so geschieht dies dadurch, daß wir bei der Zahl 11 des Maßstabes I die Zahl 6 des Maßstabes II anlegen und an dessen Punkt 0 das Ergebnis 5 auf dem Maßstab I feststellen.

Anstatt die Maßstäbe gegeneinander zu verschieben, kann man die Teilungen auch auf zwei parallelen Geraden von beliebigem Abstand aufzeichnen (Abb. 7), wobei wir auf den Geraden verschieden große Teilungsschritte wählen.

Das Ergebnis wird jetzt auf einer dritten Leiter, der Ergebnisleiter, abgelesen, die zwischen den Leitern I und II liegt und mit diesen parallel läuft. Ihre Lage kann man festlegen, indem man die Ablesungsgeraden $1 + 0 = 1$ und $0 + 1 = 1$ zieht, von denen jede den Lösungspunkt 1 enthält. Da dieser beiden Geraden gemeinsam sein muß, kann es offenbar nur der Schnittpunkt S sein, der gleichzeitig ein Punkt der Ergebnisleiter ist. Durch ihn ist also deren Lage bestimmt. Wir legen durch S die Ergebnisleiter (Leiter III) parallel zu den Leitern I und II.

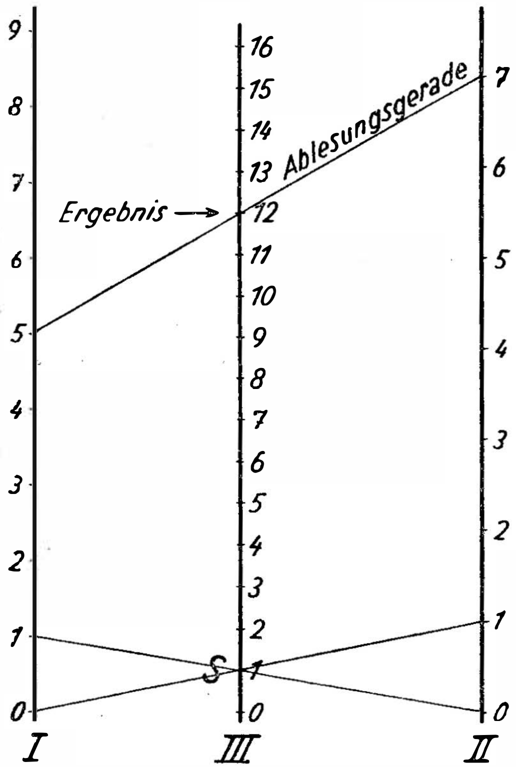


Abb. 7

Indem wir die Ablesungsgerade $0 + 0 = 0$ ziehen, die auf der Leiter III den Nullpunkt einschneidet, finden wir den Teilungsschritt der Leiter III. Er ist nämlich dann gleich der Länge des Stückes von 0 bis 1. Diesen Teilungsschritt tragen wir beliebig oft nach oben ab, oder aber wir ziehen nacheinander die Ablesungsgeraden

$$1 + 1 = 2, \quad 2 + 1 = 3, \quad 3 + 1 = 4 \text{ usf.,}$$

die auf der Leiter III die entsprechenden Lösungspunkte einschneiden.

Um das Verfahren zu verstehen, müssen wir uns an den zweiten Teil des ersten Strahlensatzes erinnern: Werden die Schenkel eines Winkels von zwei parallelen Geraden geschnitten, so stehen die Abschnitte auf den Parallelen im gleichen Verhältnis zueinander wie die zugehörigen vom Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf einem Schenkel; $a : b = c : d$ (Abb. 8).

Dieser Satz läßt sich erweitern: Verbinden wir einen Punkt P mit den Punkten eines Maßstabs m (Einheitsstrecke e), so schneiden die Verbindungsgeraden auf einer zu m parallelen Geraden g gleiche Abschnitte ab (Abb. 9).

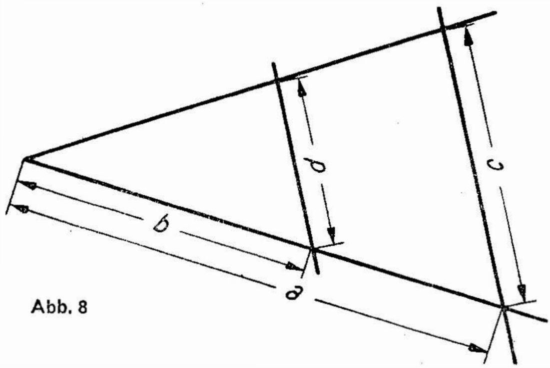


Abb. 8

Man nennt P das Zentrum eines Strahlenbüschels, das durch sämtliche von P ausgehenden Geraden gebildet wird. Wenn man vom Schenkel P-A-0 ausgehend die Winkel α, β, γ, δ der Reihe nach als Winkel einer Strahlensatzfigur auffaßt, findet man:

$$(\alpha)\ \frac{a}{b} = \frac{e}{AB}; \quad (\beta)\ \frac{a}{b} = \frac{2e}{AC}; \quad (\gamma)\ \frac{a}{b} = \frac{3e}{AD}; \quad (\delta)\ \frac{a}{b} = \frac{4e}{AE}$$

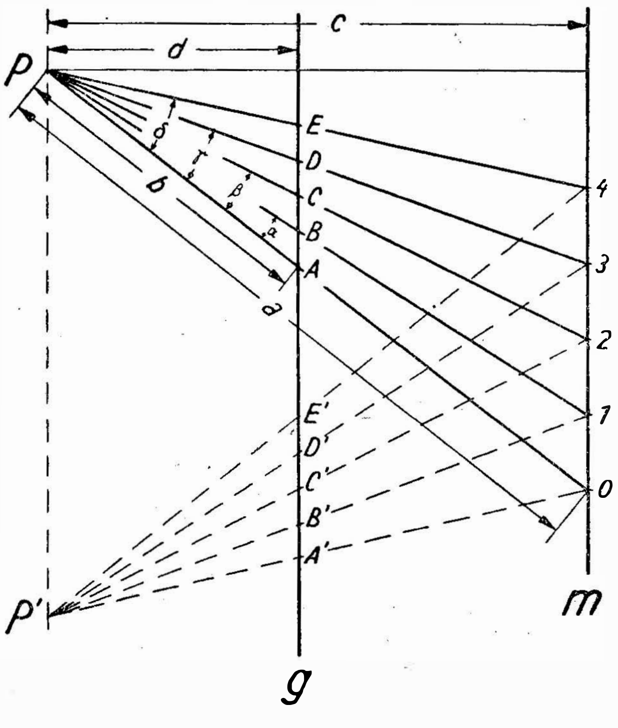


Abb. 9

oder, da die linken Seiten der Gleichungen übereinstimmen:

$$\frac{e}{AB} = \frac{2e}{AC} = \frac{3e}{AD} = \frac{4e}{AE}.$$

Diese Beziehung ist nur richtig, wenn AC = 2 AB, AD = 3 AB, AE = 4 AB sind, d. h., wenn auf der Geraden g gleiche Stücke abgeteilt werden.

Fällt man von P auf den Maßstab das Lot, das somit auch auf g senkrecht steht, und bedeuten c und d die Abstände des Punktes P von den Geraden m und g, so ergibt der erste Teil des Strahlensatzes: a : b = c : d, oder, da a : b = e : AB, auch c : d = e : AB. Dafür schreibt man $AB = \frac{e\,d}{c}$. Die Größe AB wird also durch die Abstände c und d und durch die Einheit e bestimmt. AB ändert demnach seine Größe auch nicht, wenn sich P im Abstand c parallel zum Maßstab m bei fester Lage der Geraden g verschiebt. (Auf Abb. 9 ist gestrichelt angedeutet AB = A'B', AC = A'C' usw.) — Wird bei festem P die Gerade g parallel zu sich selbst verschoben, so verkleinern sich die Abschnitte (AB, AC, ...) bei Annäherung an P oder vergrößern sich bei Annäherung an den Maßstab.

Wenn man zwei parallele Geraden mit verschiedenen Teilungen zeichnet (siehe Abb.7 und Abb.10), so kann man jeden Punkt der einen als Zentrum eines Strahlenbüschels wählen, dessen Strahlen durch die Punkte 0, 1, 2, 3, . . .

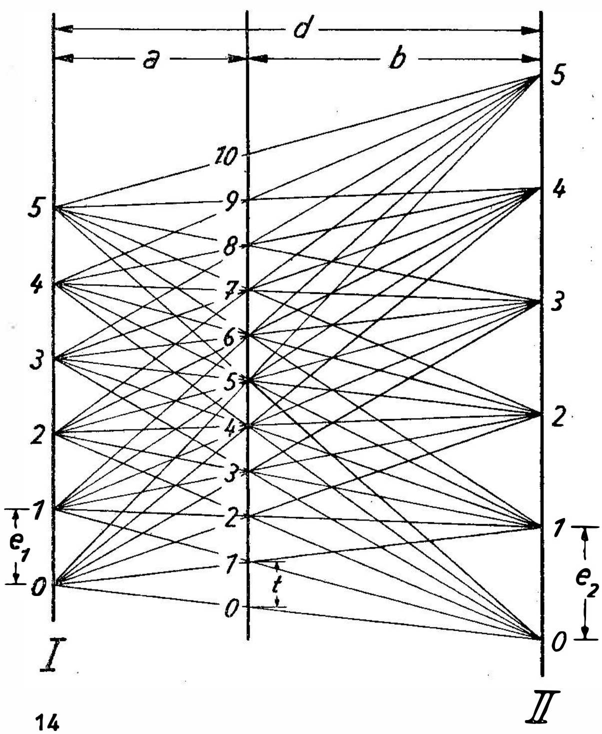


Abb. 10

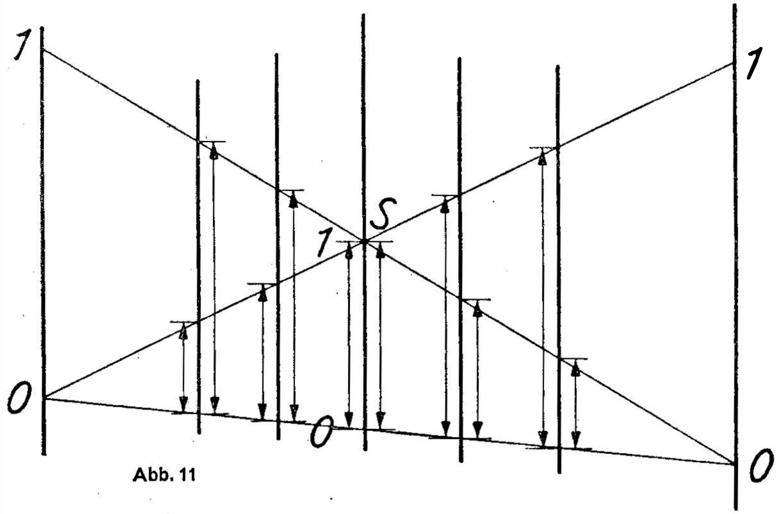


Abb. 11

der anderen Geraden laufen. Alle Strahlenbüschel, die ihre Zentren auf der Leiter I haben, schneiden auf einer festen parallelen Geraden gleich große Strecken ab, wie soeben bewiesen wurde. Ebenso teilen alle Strahlenbüschel mit den Zentren auf der Leiter II eine feste parallele Gerade in gleichgroße Stücke. Die Ergebnisleiter ist nun die zu I und II parallele Gerade, auf der die Strahlenbüschel von beiden Seiten gleich große Stücke ausschneiden. In einer vergrößerten Darstellung (Abb. 11) sieht man, daß die ersten Abschnitte der ersten beiden Strahlenbüschel von den 0-Punkten aus auf der Parallelen durch S gleich groß, aber auf den anderen Parallelen zu I und II verschieden groß sind. Da aber sämtliche Abschnitte auf der Parallelen durch S gleich groß sind (s. o.), müssen alle Strahlen mit gleichen Ergebnissummen (z. B. 2 + 0, 1 + 1, 0 + 2 durch 2 oder 0 + 4, 1 + 3, 2 + 2, 3 + 1, 4 + 0 durch 4) durch den gleichen Punkt der Ergebnisleiter gehen.

Für den Teilungsschritt t der Ergebnisleiter gilt (s. S. 14) $t = \frac{e_1 b}{d}$ und $t = \frac{e_2 a}{d}$ (Bezeichnungen der Abb. 10). Danach ist $e_1 \cdot b = e_2 \cdot a$, und es ergibt sich $a : b = e_1 : e_2$. Die Abstände der Ergebnisleiter von den Leitern I und II stehen im Verhältnis der gewählten Einheiten: sind diese gleich, so liegt die Ergebnisleiter in der Mitte. Damit ist die in Abb. 7 gegebene Konstruktion erklärt.

Da der Punkt S die Ergebnisleiter festlegt, muß er besonders genau bestimmt werden. Man wählt für ihn Ablesungsgeraden, die sich möglichst senkrecht schneiden. Nach genauer Konstruktion der Parallelen durch S (sie kann auch durch weitere Punkte S gefunden werden), lassen sich die Ergebnispunkte am besten durch Zeichnen von Ablesungsgeraden finden, die mit der Ergebnisleiter nahezu rechte Winkel bilden.

Wir haben es nun in der Hand, die Genauigkeit und den Umfang unserer Rechnung durch die Wahl der Teilungsschritte selbst zu bestimmen, und können auf der fertigen Tafel zusammenzählen und abziehen. Als Ablesungshilfe benutzen wir am besten ein Lineal aus durchsichtigem Werkstoff, mit dem wir immer drei zusammengehörige Werte erfassen. Zum Beispiel gehören die Werte 2, 7 und 9 zusammen (siehe Abb. auf der vorderen Umschlagseite!). Dabei ist es gleichgültig, ob wir die 2 und die 7 der Außenleitern zu der 9 der Innenleiter zusammenzählen oder ob wir von der 9 der Innenleiter die 7 oder die 2 einer Außenleiter abziehen. Beim Abziehen steht das Ergebnis dann auf der gegenüberliegenden Außenleiter.

b) Vervielfachen und Teilen

Nun wollen wir lernen, wie wir auf die gleiche Weise vervielfachen (multiplizieren) und teilen (dividieren) können.

Wir kommen sehr schnell zum Ziel, wenn wir uns damit begnügen, das Ergebnis als Fläche darzustellen. Wollen wir beispielsweise aus den Gliedern (Faktoren) 3 und 4 das Vielfache (Produkt) 12 bilden, so zeichnen wir in einem beliebigen Maßstab die Strecken 3 und 4 auf und stellen mit ihnen eine Fläche dar, wie sie Abb. 12 zeigt. Der Inhalt dieser Fläche hat dann die Größe 12.

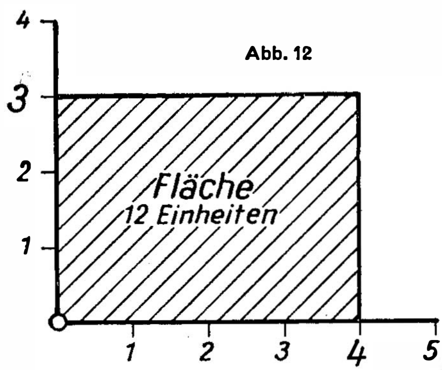
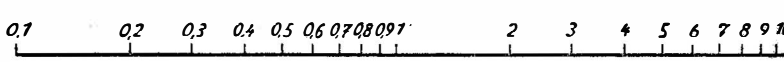


Abb. 12

Die Maßzahl eines Produktes als Fläche darzustellen, ist in manchen Fällen recht angebracht. Bei statistischen Aufstellungen erhält man ein anschauliches Bild der Größen, besonders wenn die Flächen einander ähnlich oder leicht vergleichbar sind, z.B. bei der Darstellung als Sektoren mit gleichem Radius. Für die Rechenpraxis ist diese Darstellung aber unbrauchbar.

Eine Multiplikation oder Division mit der Leitertafel wäre nur dann möglich, wenn wir ein Produkt ebenso wie eine Summe durch ein einfaches Aneinanderlegen der Faktoren bilden könnten. Das ist nun tatsächlich möglich. Nur dürfen wir keine gleichmäßigen (linearen) Teilungen benutzen, sondern müssen die sogenannten logarithmischen Teilungen zu Hilfe nehmen.

Wir verwenden hier die dekadischen oder (nach ihrem Entdecker) BRIGGSschen Logarithmen, die in jeder Logarithmentafel zu finden sind. Die Potenz 10^x kommt jedem positiven Wert beliebig nahe, wenn für x geeignete ganze Zahlen oder Brüche gewählt werden. Für die Praxis kann man sagen: 10^x durchläuft sämtliche positiven Werte, wenn x alle positiven und negativen Werte annimmt. Für ganzzahlige Werte findet man:



x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
10^x	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000	10000

Für gebrochene Werte ergeben sich Größen, die zwischen diesen liegen:

z. B. $x = \frac{1}{2}$ zwischen 0 und 1; $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}17$ zwischen 1 und 10;

$x = \frac{5}{3}$ zwischen 1 und 2; $10^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{10^5} = 46{,}3$ zwischen 10 und 100;

$x = -\frac{3}{2}$ zwischen -2 und -1; $10^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10^3}} = \sqrt{0{,}001} = 0{,}0317$ zwischen $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{10}$ usw.

Man kann nun umgekehrt sagen, daß sich zu jeder beliebigen positiven Zahl y eine Größe x finden läßt, die so beschaffen ist, daß die Potenz 10^x den Wert y besitzt. Man nennt dieses x den Logarithmus (hier dekadischen oder BRIGGSschen) zu y und schreibt $x = \log y$, gelesen x ist Logarithmus y. y heißt der Numerus. Der Logarithmus einer Zahl a ist also der Exponent einer Potenz mit der Basis 10, die den Wert dieser Zahl a hat, d. h.

$$\boxed{10^{\log a} = a}$$

Man hat in mühevoller Arbeit mit komplizierten mathematischen Methoden für alle Zahlen die Logarithmen bis zu einer gewissen Stellenzahl berechnet. Diese sind in den Logarithmentafeln niedergelegt. Einige Logarithmen können wir uns selbst überlegen: Da $10 = 10^1$ ist, so muß der Logarithmus 10 gleich 1 sein; oder $100 = 10^2$, $\log 100 = 2$; $1 = 10^0$, $\log 1 = 0$; $0{,}1 = 10^{-1}$, $\log 0{,}1 = -1$ usf. Wir stellen zusammen:

y	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$	1	10	100	1000
$\log y$	-3	-2	-1	0	1	2	3

(Vergl. die Tabelle für 10^x am Kopf dieser Seite.)

Wesentlich ist, daß der Logarithmus um eine Einheit zunimmt, wenn der Numerus um den Faktor 10 (Dekade!) vergrößert wird.

Mit Hilfe der Logarithmen läßt sich nun das Multiplizieren auf das Addieren zurückführen. Das ist es gerade, was wir für unsere Leitertafel brauchen.

Es sollen a und b miteinander multipliziert werden, das Ergebnis sei c. Die Größen a, b, c kann man mit Hilfe der Logarithmen darstellen als $a = 10^{\log a}$, $b = 10^{\log b}$, $c = 10^{\log c}$. Für die Gleichung $a \cdot b = c$ läßt sich dann schreiben $10^{\log a} \cdot 10^{\log b} = 10^{\log c}$. Nach den Regeln der Potenzrechnung wird daraus: $10^{\log a + \log b} = 10^{\log c}$, und so ergibt sich $\log a + \log b = \log c$. Statt zwei Zahlen zu multiplizieren, kann man also ihre Logarithmen addieren. Man erhält den Logarithmus des Ergebnisses. Das Ergebnis selbst findet man, indem man zu dem Logarithmus den Numerus sucht.

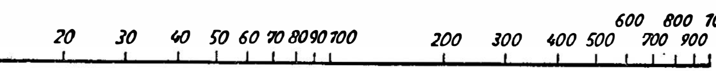
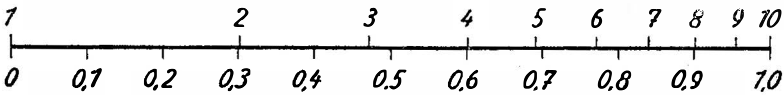


Abb. 14

Abb.13



Wir können nun mit unserer Leitertafel multiplizieren, wenn wir statt der Zahlen ihre Logarithmen verwenden, die wir ja nur zu addieren brauchen. Das Addieren beherrschen wir aber mit der Leitertafel. Wir finden allerdings auf der Ergebnisleiter auch nur den Logarithmus des Ergebnisses. Dieses Verfahren läßt sich jedoch durch Verwendung logarithmischer Teilungen wesentlich vereinfachen.

Die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 10 heißen:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
log	0	0,301	0,477	0,602	0,698	0,778	0,845	0,903	0,954	1

Wir teilen eine Einheitsstrecke (100mm) in 10 gleiche Teile, die wir mit 0; 0,1; 0,2, . . . 1 bezeichnen (Abb. 13). Diese Zahlen sollen Logarithmen bedeuten. Auf der anderen Seite tragen wir die Numeri an den Stellen auf, an denen ihre Logarithmen stehen. Die obere Zahlenreihe stellt dann eine logarithmische Teilung (oder Skala) dar. Es werden oft Teilungen gebraucht, die über 10 hinausgehen oder andere Bereiche umfassen, z. B. 100 bis 10000. Dazu muß man sich klar machen, daß z. B. $30 = 3 \cdot 10$ ist: d. h. $\log 30 = \log 3 + \log 10$ ($3 \cdot 10$!) oder $300 = 3 \cdot 100$; $\log 300 = \log 3 + \log 100$. Da $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$ ist, so ergibt sich folgende Übersicht:

N	3	30	300	3000
log	0,477	1,477	2,477	3,477

Dieser Zusammenhang gilt für alle Zahlen, die sich um die Faktoren 10, 100, 1000, . . . unterscheiden. Man findet die Logarithmen der Zahlen 10, 20, 30, . . . aus den Logarithmen der Zahlen 1, 2, 3, indem man statt 0, . . . 1, . . . schreibt.

N	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
log	1,000	1,301	1,477	1,602	1,698	1,778	1,845	1,903	1,954	2,000

N	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
log	2,000	2,301	2,477	2,602	2,698	2,778	2,845	2,903	2,954	3,000

Eine erweiterte logarithmische Teilung enthält also ebenso wie die in Abb. 13 gezeigte gleichmäßig unterteilte Teilungsschritte, die entsprechend den benötigten Numeri bezeichnet sind. Das gleiche gilt für die Dekaden unter 1: 1 bis 0,1, 0,1 bis 0,01, 0,01 bis 0,001 usw. Abb. 14 auf S. 16/17 gibt eine logarithmische Teilung des Bereiches 0,1 bis 1000 mit vier Teilungsschritten. Man sieht, daß die 0 auf einer logarithmischen Teilung niemals vorkommen kann. Jede logarithmische Teilung ist dadurch gekennzeichnet, daß die Abstände zwischen den Zahlen bei den höheren Werten geringer sind als bei den niedrigen.

Mit zwei gegeneinander verschiebbaren logarithmischen Skalen gleicher Größe kann man leicht multiplizieren (Abb. 15). Legt man im Punkt 2 der ersten Skala den Punkt 1 der zweiten an und liest an der Stelle 3 der zweiten auf der ersten ab, so findet man 6 als Ergebnis: $2 \cdot 3 = 6$. Man legt hier die 1 an (eine 0 gibt es ja nicht), da $\log 1 = 0$ ist und die Länge der Skala von der 1 aus gemessen der Größe der Logarithmen der angeschriebenen Numeri gleich ist ($\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$; $0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778 = \log 6$). Auf diesem Prinzip beruht der Rechenschieber.

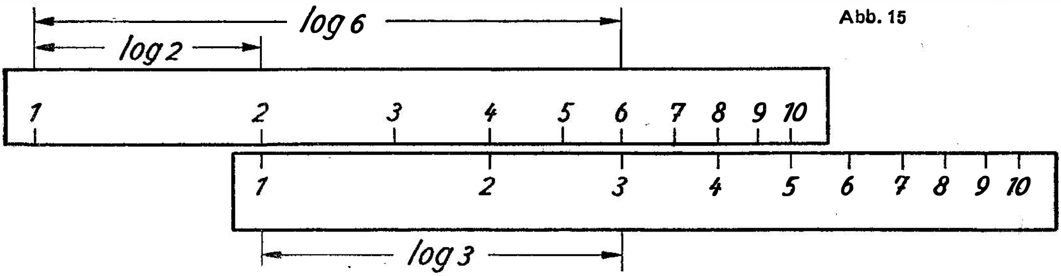


Abb. 15

Ebenso wie wir beim Addieren (und Subtrahieren) von beweglichen auf parallele feste Teilungen übergegangen sind, übertragen wir nun auch die logarithmischen Teilungen auf feste parallele Leitern. Da wir die Logarithmen addieren wollen, gilt das auf Seite 11—15 Gesagte über die Konstruktion der Ergebnisleiter, einschließlich aller Beweise, uneingeschränkt. Durch den Kunstgriff der logarithmischen Teilung können wir auf den Leitern unmittelbar Numeri, d. h. die wahren Ergebnisse ablesen, während wir in Wirklichkeit mit Logarithmen arbeiten.

Zur Vorbereitung der praktischen Durchführung fertigen wir uns auf einem Streifen Zeichenkarton eine logarithmische Teilung an, wie sie Abb. 13 zeigt. Dazu wählen wir den Teilungsschritt 100 mm. Wir beschriften die fertige Teilung mit 1, 2, 3 . . . 10 oder, je nach dem Verwendungszweck, mit 10, 20, 30 . . . 100 oder mit 100, 200, 300 . . . 1000 oder auch mit 0,1; 0,2; 0,3 . . . 1 usf., je nach Bedarf. Wir können unsere Teilungsschritte feiner unterteilen, wenn wir die Logarithmen auf der 3. Umschlagseite zu Hilfe nehmen. Diese sind so ausgesucht, daß die Teilung möglichst regelmäßig ist.

Anmerkungen: 1. Eine logarithmische Teilung der genannten Abmessung finden wir auch auf der 4. Umschlagseite fertig aufgedruckt. Hier können wir sie ausschneiden.

2. Will man in das Wesen des Verfahrens eindringen, so ist zu empfehlen, alle Aufgaben selbst mit Zeichenstift und Lineal auszuführen.

Natürlich können wir auch einen anderen Teilungsschritt wählen. Dann müssen wir die Werte in dem neuen Verhältnis verkleinern oder vergrößern. Doch auch das können wir mitdem Zeichenstift erledigen, wie wir bald sehen werden.

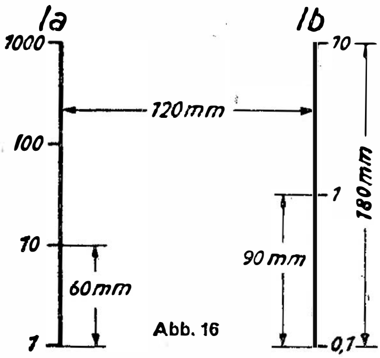


Abb. 16

Wollen wir das Produkt $a \cdot b = c$ darstellen, so zeichnen wir in einem beliebigen Abstand, z. B. 120 mm, die beiden Leitern l_a und l_b parallel zueinander Ihre Länge wählen wir zu etwa 200 mm, um für die Tafel eine handliche Größe zu erhalten (Abb. 16).

Nunmehr bestimmen wir die Größe des Teilungsschrittes, der sich nach dem Zahlenumfang richtet, der auf der Leiter unterzubringen ist. Soll beispielsweise die a-Leiter den Bereich der Zahlen von 1 bis 1000 und die b-Leiter denjenigen von 0,1 bis 10 umfassen, so müssen wir auf der a-Leiter drei Teilungsschritte unterbringen, nämlich die von 1 bis 10, von 10 bis 100 und von 100 bis 1000, und auf der b-Leiter zwei Teilungsschritte, nämlich die von 0,1 bis 1 und von 1 bis 10.

Damit ist auch die Größe der Teilungsschritte festgelegt. Da wir die Leitern keineswegs länger als 200 mm machen wollen, können wir als Teilungsschritte wählen:

für l a: Teilungsschritt 60 mm,
für l b: Teilungsschritt 90 mm,

womit die Länge der Leitern auf 180 mm beschränkt wird.

Der Teilungsschritt unseres soeben angefertigten Maßstabes muß also auf 60 bzw. 90 mm verkleinert werden, was wir dadurch erreichen, daß wir den Anfangspunkt unseres log-Maßstabes an dem Anfangspunkt der a-Leiter so anlegen, daß er mit der a-Leiter einen beliebigen, nicht zu kleinen Winkel bildet (Abb. 17). Mit zwei Reißstiften halten wir diese Lage fest.

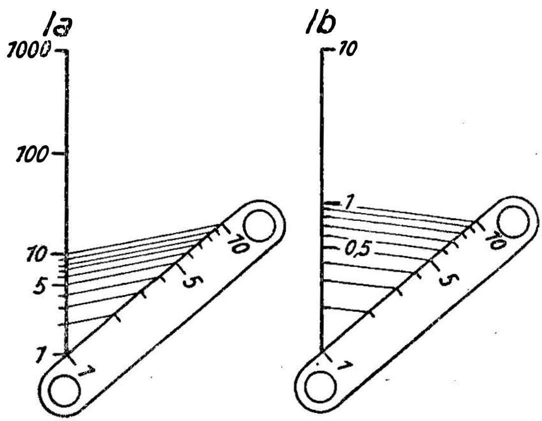


Abb. 17

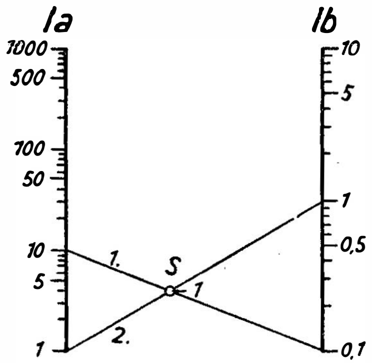


Abb. 18

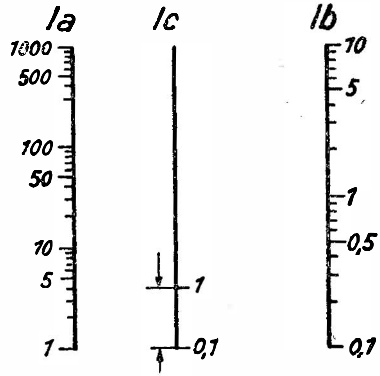


Abb. 19

Nunmehr verbinden wir den Endpunkt des ersten Teilungsschrittes auf der a-Leiter mit dem Endpunkt des angelegten log-Maßstabes und übertragen die Teilung des log-Maßstabes, indem wir parallel zu der ersten Geraden von der Teilung des angelegten Maßstabes ausgehen. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit der a-Leiter markieren wir.

Die so erhaltene Teilung übertragen wir dreimal nach oben. Eine andere Möglichkeit, logarithmische Teilungen zu verkleinern, ist durch die Hilfstafel auf der zweiten Umschlagseite gegeben.

In der gleichen Weise übertragen wir die 90-mm-Teilung auf die b-Leiter und können nun die Lage der c-Leiter bestimmen. Wir gehen dabei wie oben vor, indem wir uns überlegen, daß sowohl $10 \cdot 0{,}1 = 1$ ist, wie auch $1 \cdot 1 = 1$. Ziehen wir die entsprechenden Ablesungsgeraden (Abb. 18), so wird durch deren Schnittpunkt $S = 1$ die Lage der c-Leiter eindeutig bestimmt.

Wir ziehen durch S die c-Leiter parallel zu den Leitern a und b und legen nun die Größe des Teilungsschrittes auf dieser Leiter fest, indem wir die Ablesungsgerade $1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$ ziehen, die auf der c-Leiter den Punkt 0,1 einschneidet, womit durch die Strecke 0,1 bis 1 der Teilungsschritt der c-Leiter bestimmt ist (vgl. Abb. 19), denn der Teilungsschritt ist hier der Abstand von zwei Zahlen, die sich um den Faktor 10 unterscheiden. Auf die c-Leiter übertragen wir den Maßstab, indem wir wie bei den Außenleitern verfahren (Abb. 20).

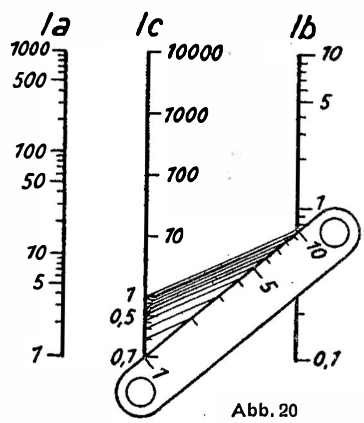


Abb. 20

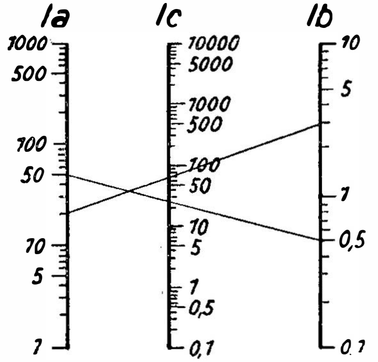


Abb. 21

Damit haben wir unsere Aufgabe gelöst. — Abb. 21 zeigt die fertige Leitertafel.

Falls der Leser die behandelten Aufgaben selbst mitgezeichnet hat (was zur Erlangung einer genügenden Fertigkeit dringend empfohlen wird), so wird er gemerkt haben, daß die Hauptschwierigkeit darin besteht, saubere logarithmische Teilungen herzustellen und die Ergebnisleiter genau im richtigen Abstand von den Seitenleitern zu konstruieren. Auf Seite 21 bzw. 19 wurde bereits die Verwendung der Hilfstafel auf der zweiten Umschlagseite und der Logarithmentafel auf der dritten Umschlagseite zur leichteren Herstellung logarithmischer Maßstäbe vorgeschlagen. Es hat sich auch bewährt, die Rechentafel selbst auf einem großen Bogen Millimeterpapier anzulegen oder aber auf durchsichtigem Papier zu zeichnen, das auf einen Millimeterbogen aufgezweckt ist. Dabei werden die Teilungsschritte und die Abstände der Leitern von der Ergebnisleiter zweckmäßig so gewählt, daß sie ganzzahlig sind. (Die Abstände können nach den Angaben auf Seite 15 errechnet werden.) Diese braucht dann nicht konstruiert zu werden, sondern kann mit Hilfe der Millimeterteilung übertragen werden.

Wir können mit unserer Tafel auch dividieren, wenn wir von der mittleren Leiter ausgehen und uns vergegenwärtigen, daß wir $a \cdot b = c$ auch schreiben können $b = c : a$ oder $a = c : b$. Wenn man für $a = 10^{\log a}$, für $b = 10^{\log b}$ und für $c = 10^{\log c}$ schreibt, so wird aus der Gleichung $a = c : b$ die Gleichung $10^{\log a} = \frac{10^{\log c}}{10^{\log b}}$. Nach den Rechenregeln für Potenzen wird daraus $10^{\log a} = 10^{\log c - \log b}$ oder $\log a = \log c - \log b$. Statt demnach zwei Zahlen zu dividieren kann man ihre Logarithmen subtrahieren. Das Subtrahieren war mit der Leitertafel möglich: Wenn man von der mittleren Leiter eine Seitenleiter abzog, fand man das Ergebnis auf der anderen Seitenleiter (siehe Seite 16). Dann ist mit den logarithmischen Teilungen das Dividieren ebenfalls möglich, denn man kann ganz entsprechend die Logarithmen voneinander abziehen.

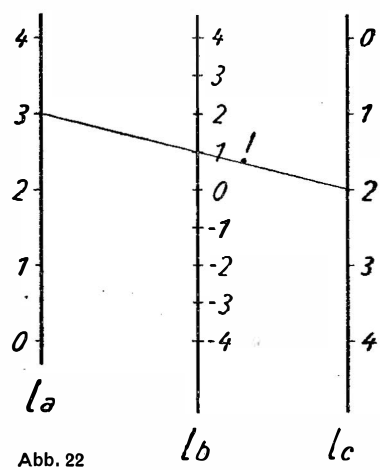


Abb. 22

Man kann die Leitertafel aber auch so einrichten, daß man beim Subtrahieren und Dividieren ebenfalls an der mittleren Leiter ablesen kann. Es genügt dann, auf einer der Außenleitern den Maßstab gegenläufig aufzutragen; sonst verfährt man genau wie vorher. Abb. 22 zeigt ein einfaches Beispiel für $a - c = b$. Entsprechend kann auch dividiert werden.

c) Eine Leitertafel zur Berechnung von Weg, Zeit und Geschwindigkeit

Die praktische Verwendung einer solchen Leitertafel zeigen wir an dem Beispiel, das wir schon mit der Netztafel gelöst haben (siehe Seite 5 f.).

Wir haben dort gesehen, daß

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$$

ist, was wir auch so schreiben können:

$$\text{Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit}.$$

Um nicht immer die Worte ausschreiben zu müssen, bezeichnen wir den Weg mit s, die Geschwindigkeit mit v und die Zeit mit t und schreiben demnach in vereinfachter Form:

$$s = v \cdot t.$$

Da wir es mit einer Multiplikation zu tun haben, sind die drei Leitern gleichlaufend beziffert. Die Leitern v und t sind Außenleitern, während die s-Leiter als Ergebnisleiter in der Mitte steht.

Der Vorgang gleicht dem, den wir soeben besprochen haben. Also:

1. Wir wählen den Leiterabstand (120 mm) und die Leiterlänge (200 mm).
2. Die Wahl des aufzutragenden Zahlenbereiches richtet sich nach dem Verwendungszweck. Hier wurde das Gebiet hoher Geschwindigkeiten, nämlich von
   $v = 100$ bis 1000 km/h,
   gewählt und für die Zeiten die Spanne von
   $t = 0{,}1$ bis 10 Stunden
   aufgezeichnet.
3. Die Zahl der Teilungsschritte ergibt sich somit für v zu 1 Teilungsschritt, nämlich
   100 bis 1000,
   und für t zu zwei Teilungsschritten, nämlich
   0,1 bis 1 und 1 bis 10.

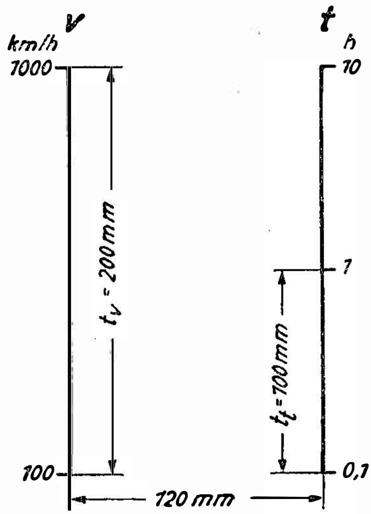


Abb. 23

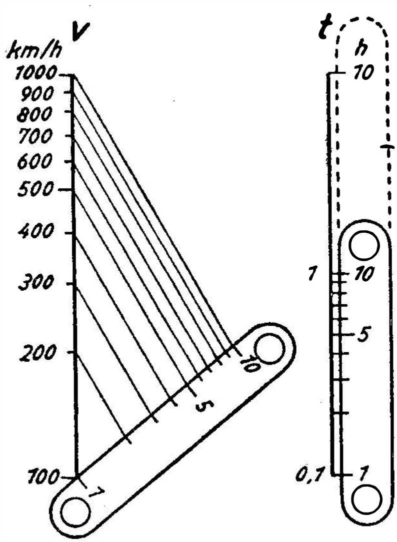


Abb. 24

4. Die Größe der Teilungsschritte ergibt sich aus der Wahl der Leiterlänge für *v* zu 200 mm und für *t* zu 100 mm (Abb. 23).

5. Wir tragen unseren Maßstab jetzt wieder wie vorhin auf, nur mit dem Unterschied, daß wir ihn dieses Mal auf der *v*-Leiter vergrößern müssen (Abb. 24),

6. ... während wir ihn auf der *t*-Leiter direkt auftragen können, da der Teilungsschritt der *t*-Leiter demjenigen des Maßstabes entspricht. Wir tragen ihn zweimal auf ... (Abb. 24),

7. ... und bestimmen die Lage der *s*-Leiter in der üblichen Weise, indem wir die gekreuzten Ablesegeraden ziehen ($1000 \cdot 0{,}1 = 100$ und $100 \cdot 1 = 100$) (Abb. 25).

8. Verbinden wir den Punkt 100 der *v*-Leiter mit dem Punkt 0,1 der *t*-Leiter, so erhalten wir auf der *s*-Leiter den Punkt 10 und somit die Größe des Teilungsschrittes auf der *s*-Leiter, nämlich des Stückes von 10 bis 100, also wieder zwei Größen, die sich um den Faktor 10 unterscheiden (Abb. 25).

9. Auf der *s*-Leiter tragen wir unseren verkleinerten Maßstab auf und wiederholen diese Auftragung nach oben (Abb. 26).

Damit ist unsere Aufgabe im wesentlichen gelöst. Aber wir wollen noch einige Verfeinerungen anbringen. So ist es zweckmäßig, auf der *v*-Teilung die Teilung km/h noch durch eine solche von m/sec zu ergänzen, denn große Ge-

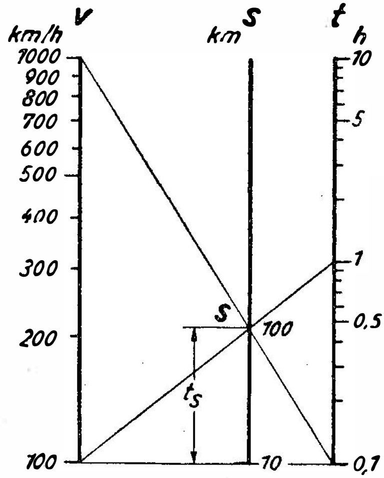


Abb. 25

schwindigkeiten werden oft in m/sec gemessen. Das ist sehr leicht möglich, denn wir wissen, daß 360 km/h = 100 m/sec sind; denn 360 km/h = $\frac{360 \cdot 1000}{60 \cdot 60}$ m/sec = 100 m/sec.

Wir suchen also auf der v-Leiter den Punkt 360 auf und markieren ihn auf der freien Seite mit 100 m/sec. Damit haben wir den Anfangspunkt der Teilung für m/sec, die den gleichen Teilungsschritt hat wie die Teilung für km/h (Abb. 27). 360 km/h entsprechen 100 m/sec. 3600 km/h entsprechen 1000 m/sec. Der Abstand 360 km/h bis 3600 km/h ist aber ein Teilungsschritt der ersten Teilung und dieser gleich dem Teilungsschritt 100 m/sec bis 1000 m/sec.

Zur Erleichterung der Arbeit übertragen wir die Teilung für km/h auf einen Papierstreifen. Diesen legen wir einmal mit dem Anfangspunkt (1) an dem soeben festgelegten Punkt 100 an und übertragen die Teilung nach oben; sodann legen wir den Endpunkt (10) an, tragen aber dieses Mal die Teilung nach unten ab. Die Abbildung 28a/b zeigt das Verfahren.

Auch die t-Leiter wollen wir vervollkommnen, indem wir eine Minutenteilung aufbringen. Hier haben wir es einfacher, weil die Teilung mit derjenigen des beigelegten log-Maßstabes übereinstimmt. Um einen Punkt der neuen Teilung zu finden, gehen wir davon aus, daß 0,1 h = 6 min sind. Wir legen den log-Maßstab also so an die freie Seite der t-Leiter, daß deren Zahl 6 am Anfangs-

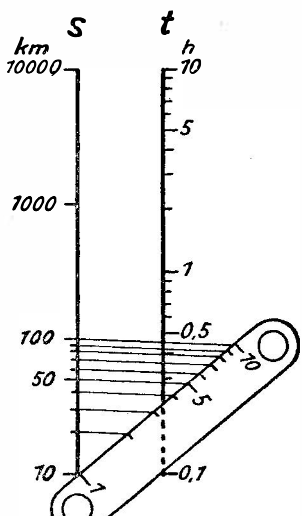


Abb 26

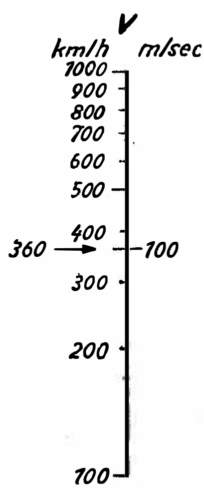
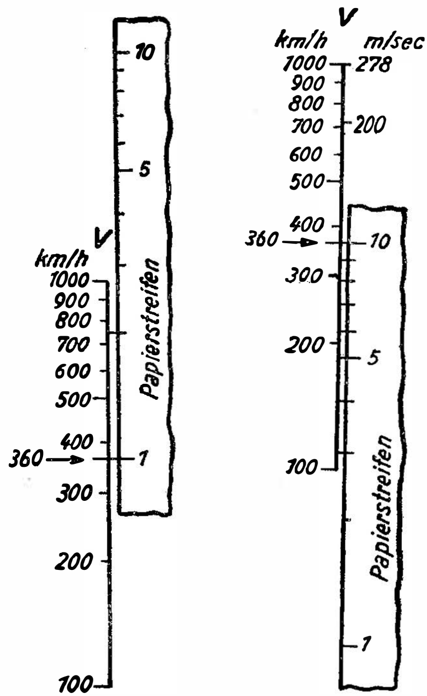
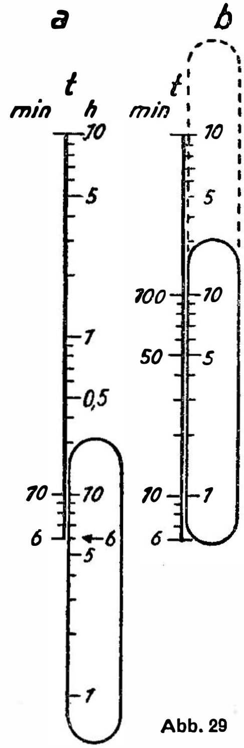


Abb. 27



a Abb. 28 b



punkt steht, und tragen von da aus die Teilung nach oben ab (Abb. 29a und b).

Damit hat unsere Leitertafel die endgültige Form gefunden (Abb. 30). Natürlich ist es jedem überlassen, der Rechentafel einen anderen Zahlenumfang zu geben. So kann man sie ohne weiteres statt mit $v = 100$ bis 1000 km/h auch mit 10 bis 100 km/h beschriften. Damit ändert sich gar nichts. Wir müssen uns nur merken, daß wir dann auf der s-Leiter auch nur die Werte von $s = 1$ bis 1000 km eintragen dürfen. Mit anderen Worten: Wir können die Tafel sinngemäß für die verschiedensten Aufgaben verwenden. Von den drei Größen, die sie umfaßt, müssen immer zwei bekannt sein. Die dritte ist dann stets abzulesen.

Sind also z. B. Geschwindigkeit und Zeit gegeben, so wird der Weg gefunden. Ebenso ergibt sich aus Weg und Zeit die Geschwindigkeit und aus Weg und Geschwindigkeit die Zeit.

Die Genauigkeit in der Ablesung der Zwischenwerte ist nur von der Wahl der Darstellungsgröße abhängig und von der Sorgfalt, mit der die Zeichnung

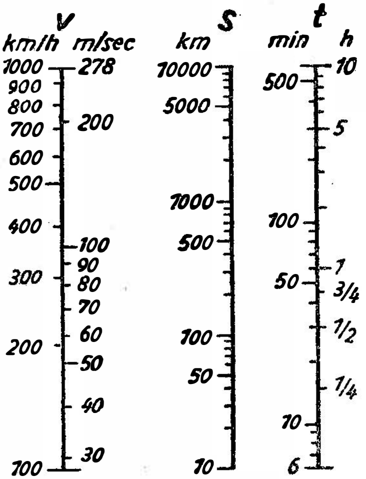


Abb. 30

ausgeführt wird. Maßgebend ist letzten Endes die Handlichkeit der Tafel. Eine Tafel, die nur auf dem Konstruktionstisch oder auf dem Zeichenbrett benutzt wird, kann natürlich in ihren Abmessungen größer sein und somit eine feinere Teilung aufweisen als eine Tafel, die man in die Tasche stecken und in der Werkstatt oder auf dem Bauplatz gebrauchen will.

d) Eine Leitertafel mit vier Leitern zur Lösung elektrotechnischer Aufgaben

Bei Tafeln mit drei Leitern braucht man nicht stehenzubleiben. Man kann auch mehr Zahlengrößen miteinander verknüpfen, wie das folgende Beispiel zeigt, das in seiner Gesamtheit ein ganzes Tabellenwerk zu ersetzen imstande ist.

Jeder, der mit Elektrotechnik zu tun hat, kennt das Gesetz von OHM, demzufolge sich die Stromstärke in einem Leiter mit der angelegten Spannung verhältnisgleich ändert, dagegen mit dem Widerstand des Leiters umgekehrt verhältnisgleich.

Diese durch den Versuch erhärtete Erfahrungstatsache läßt sich in mathematischer Schreibweise so darstellen: $U = J \cdot R$, wobei man mit U die Spannung in Volt, mit J die Stromstärke in Ampere, und mit R den Widerstand in Ohm bezeichnet.

Die Leistung eines Gleichstromes, die in Watt gemessen wird, stellt man durch das Produkt aus Spannung und Stromstärke dar:

$L = U \cdot J$ (Für die Einheiten gilt: 1 Watt = 1 Volt · 1 Ampere).

Die vier Größen: Leistung (Watt), Spannung (Volt), Stromstärke (Ampere) und Widerstand (Ohm) stehen in engster Wechselbeziehung, und es ist die Aufgabe, sie derartig in einer Leitertafel darzustellen, daß der Zusammenhang der vier Größen durch eine Ablesungsgerade überblickt werden kann. Diese Aufgabe wurde mit der in Abb. 31 wiedergegebenen Rechentafel gelöst.

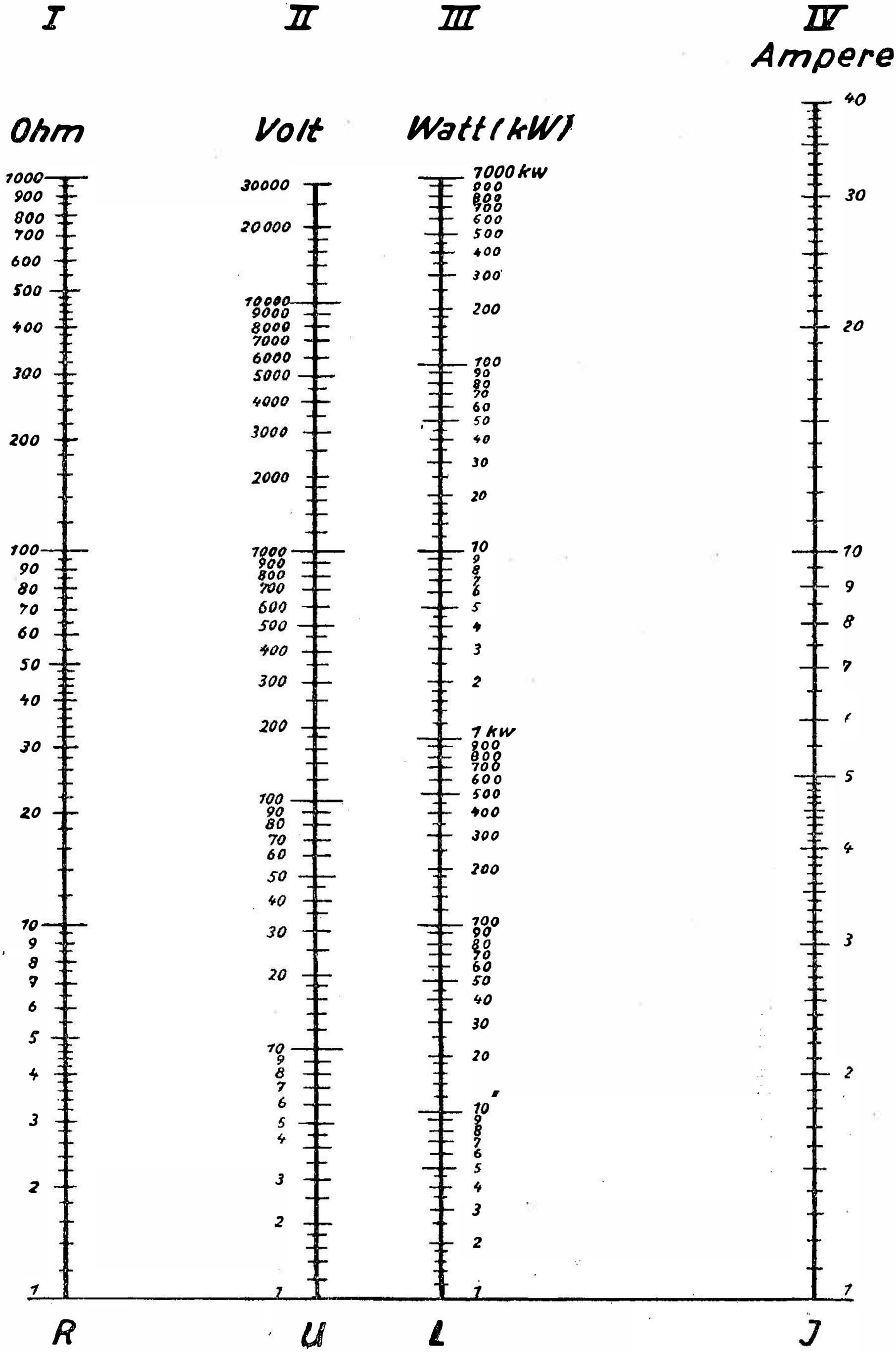


Abb. 31

Wir betrachten zunächst die Leitern I, II und IV mit ihren Teilungen in Ohm, Volt und Ampere. Diese Leitern stellen das OHMsche Gesetz U (II) = J (IV) · R (I) dar. Von I und IV mit den in der Starkstromtechnik vorkommenden Bereichen 1 bis 1000 Ω (drei Teilungsschritte) bzw. 1 bis 40 A (anderthalb Teilungsschritte) ausgehend, ist die Leiter II in bekannter Weise konstruiert: Durch die Verbindung 1 Ω - 1 A erhalten wir den Anfangspunkt, durch die Ablesungsgeraden 1 Ω · 10 A = 10 V und 10 Ω · 1 A = 10 V den Punkt 10 V der Ergebnisleiter II. Damit ist deren Teilungsschritt bestimmt. Mit diesen Leitern sind alle Aufgaben lösbar, die auf dem OHMschen Gesetz fußen.

Die Leitern II und IV, Spannung und Stromstärke, bilden die Grundlage für die Konstruktion der Leiter III, die als Produkt von Spannung und Stromstärke die Leistung darstellt: L (III) = U (II) · J (IV). Das bisher verwendete Verfahren gibt die Teilung in Watt: 1 Volt · 1 Ampere = 1 Watt. Mit II, III und IV kann man Aufgaben lösen, denen die Gleichstromleistungsformel zugrunde liegt.

Aus dem OHMschen Gesetz $U = J \cdot R$ und der Leistungsformel $L = U \cdot J$ kann man für die Leistung (durch Einsetzen des OHMschen Gesetzes) folgern:

$$L = J^2 \cdot R$$

Dieser Zusammenhang wird durch die drei Leitern I, IV und III (als Ergebnisleiter) dargestellt. Man sieht, daß mit Nomogrammen sogar Aufgaben lösbar sind, in denen quadratische Größen (oder auch höhere Potenzen) auftreten.

Durch Kombination der verschiedenen Leitern lassen sich mit der Tafel folgende Grundaufgaben lösen:

a) Welche Stärke hat der Strom in einem Gerät mit R Ohm Widerstand bei einer angelegten Spannung von U Volt? I, II ⟶ IV

b) Welche Spannung liegt an einem Leiter mit R Ohm Widerstand, wenn ein Strom von J Ampere fließt? I, IV ⟶ II

c) Welchen Widerstand hat ein Leiter, in dem bei angelegter Spannung U Volt ein Strom von J Ampere fließt? II, IV ⟶ I

d) Wie groß ist die Leistung eines Gerätes, das bei U Volt Spannung J Ampere Strom führt? II, IV ⟶ III

e) Welche Spannung braucht ein Gerät, das bei einem Strom von J Ampere L Watt Leistung haben soll. IV, III ⟶ II

f) Welche Stärke hat der Strom in einem Gerät, das, an eine Spannung von U Volt angelegt, eine Leistung von L Watt vollbringt? II, III ⟶ IV

g) Wie groß ist die Leistung eines Gerätes, das einen Widerstand von R Ohm hat und für U Volt Spannung bestimmt ist? I, II ⟶ III

h) Welchen Widerstand hat ein Gerät, an das U Volt Spannung angelegt werden und das die Leistung L Watt hervorbringt? II, III ⟶ I

i) Welche Spannung muß an ein Gerät angelegt werden, das bei einem Widerstand von R Ohm eine Leistung von L Watt erzeugen soll? I, III ⟶ II

k) Welche Leistung hat ein Gerät, wenn es einen Widerstand von R Ohm hat und einen Strom von J Ampere führt? I, IV ⟶ III

l) Welche Stromstärke führt ein Gerät, wenn es R Ohm Widerstand besitzt und L Watt Leistung hervorbringt? I, III ⟶ IV

m) Welchen Widerstand hat ein Gerät, das bei J Ampere Stromstärke L Watt Leistung erzeugt? III, IV ⟶ I

Diese 12 Aufgaben können nach den vier Gleichungen:

(1) $U = J \cdot R$ OHMsches Gesetz

(2) $L = U \cdot J$ Stromleistungsformel

(3) $L = J^2 \cdot R$ aus (1) und (2)

(4) $L = \frac{U^2}{R}$ aus (1) und (3)

mit der Rechentafel Abb. 31 gelöst werden. Auch Kombinationen obenstehender Aufgaben sind mit einer solchen Rechentafel leicht lösbar.

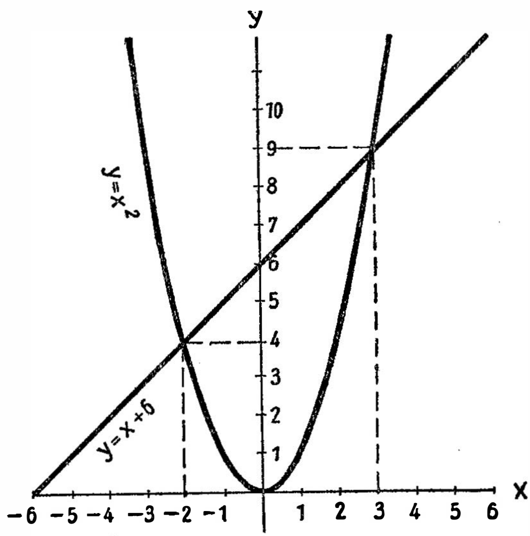


Abb. 32

NACHWORT

Der Inhalt dieses Heftes umfaßt lediglich die Anwendung der Nomographie auf die vier Grundrechnungsarten. Es sei nun zum Schluß noch darauf verwiesen, daß das zeichnerische Rechnen in wesentlich größerem Umfang verwendbar ist. Als Beispiel soll die Lösung von Gleichungen angeführt werden. Diese häufig vorkommende Aufgabe legt die Entwicklung einer graphischen Methode nahe. Für quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ ist neben der algebraischen Lösung vor allem das Parabelverfahren bekannt:

Man zeichnet in ein gemeinsames Koordinatensystem die Parabel $y = x^2$ und die Gerade $y = - px - q$. Dann sind die Abszissen der Schnittpunkte beider Figuren die Lösungen der Gleichung (Abb. 32).

In dem Beispiel $x^2 - x - 6 = 0$ hat die zur Lösung notwendige Gerade die Gleichung $y = x + 6$. Durch Einsetzen von Werten werden 2 Punkte dieser Geraden bestimmt: $x=0, y=6; x=-6, y=0$. Die Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel $y = x^2$ geben die Lösungen $x_1 = - 2, x_2 = 3$. Ähnlich können alle Gleichungen der Form $x^n + px + q = 0$ gelöst werden. Es sind also graphische Lösungen für $n > 3$ möglich, die algebraisch im allgemeinen unlösbar sind. Hier zeigt sich eine besondere Stärke der Nomographie.

LITERATUR

1. Krauß — »Nomographie oder Fluchtlinienkunst«, Verlag Springer, Berlin 1922, gibt einen sehr anschaulichen, gedrängten Überblick und setzt keine großen mathematischen Kenntnisse voraus.

2. Werkmeister — »Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln«, Verlag Springer, Berlin 1923, wendet sich in erster Linie an den Praktiker.

3. Lackmann — »Herstellung gezeichneter Rechentafeln«, Verlag Springer, Berlin 1923, bietet eine ausführliche Gliederung nach Funktionstypen und zahlreiche Beispiele.

4. Schwerdt — »Lehrbuch der Nomographie«, Verlag Springer, Berlin 1924, bringt die mathematischen Ableitungen der Nomographie und ist für den Geübteren ein wertvolles Hilfsmittel.

5. Erlenbach — Veröffentlichungen in folgenden Zeitschriften: »Schweizerische technische Zeitschrift«, »Die Werkzeugmaschine«, »Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure«.

Maurice d'Ocagne — »Calcule graphique«.
»Traité de Nomographie«.
»Principes usuels de Nomographie«.

N	log	N	log	N	log	N	log	N	log	N	log	N	log	N	log
1,00	0,000	**1,50**	0,176	**2,00**	0,301	**3,00**	0,477	**4,00**	0,602	**5,0**	0,699	**7,0**	0,845	**9,0**	0,954
1,02	009	1,52	182	2,05	312	3,05	484	4,05	608	5,1	708	7,1	851	9,1	959
1,04	017	1,54	187	2,10	322	3,10	491	4,10	613	5,2	716	7,2	857	9,2	964
1,06	025	1,56	193	2,15	332	3,15	498	4,15	618	5,3	724	7,3	863	9,3	968
1,08	033	1,58	199	**2,20**	342	**3,20**	505	**4,20**	623	5,4	732	7,4	869	9,4	973
1,10	041	**1,60**	204	2,25	352	3,25	512	4,25	628	**5,5**	740	**7,5**	875	**9,5**	978
1,12	049	1,62	210	2,30	362	3,30	519	4,30	634	5,6	748	7,6	881	9,6	982
1,14	057	1,64	215	2,35	371	3,35	525	4,35	639	5,7	756	7,7	887	9,7	987
1,16	065	1,66	220	**2,40**	380	**3,40**	531	**4,40**	644	5,8	763	7,8	892	9,8	991
1,18	072	1,68	225	2,45	389	3,45	538	4,45	648	5,9	771	7,9	898	9,9	996
1,20	079	**1,70**	230	2,50	398	3,50	544	4,50	653	**6,0**	778	**8,0**	903	**10,0**	1,000
1,22	086	1,72	236	2,55	407	3,55	550	4,55	658	6,1	785	8,1	909		
1,24	093	1,74	241	**2,60**	415	**3,60**	556	**4,60**	663	6,2	792	8,2	914		
1,26	100	1,76	246	2,65	423	3,65	562	4,65	668	6,3	799	8,3	919		
1,28	107	1,78	250	2,70	431	3,70	568	4,70	672	6,4	806	8,4	924		
1,30	114	**1,80**	255	2,75	439	3,75	574	4,75	677	**6,5**	813	**8,5**	929		
1,32	121	1,82	260	**2,80**	447	**3,80**	580	**4,80**	681	6,6	820	8,6	935		
1,34	127	1,84	265	2,85	455	3,85	586	4,85	686	6,7	826	8,7	940		
1,36	134	1,86	270	2,90	462	3,90	591	4,90	690	6,8	833	8,8	945		
1,38	140	1,88	274	2,95	470	3,95	597	4,95	695	6,9	839	8,9	949		
1,40	146	**1,90**	279	**3,00**	477	**4,00**	602	**5,00**	699	**7,0**	845	**9,0**	954		
1,42	152	1,92	283												
1,44	158	1,94	288												
1,46	164	1,96	292												
1,48	170	1,98	297												
1,50	176	**2,00**	301												

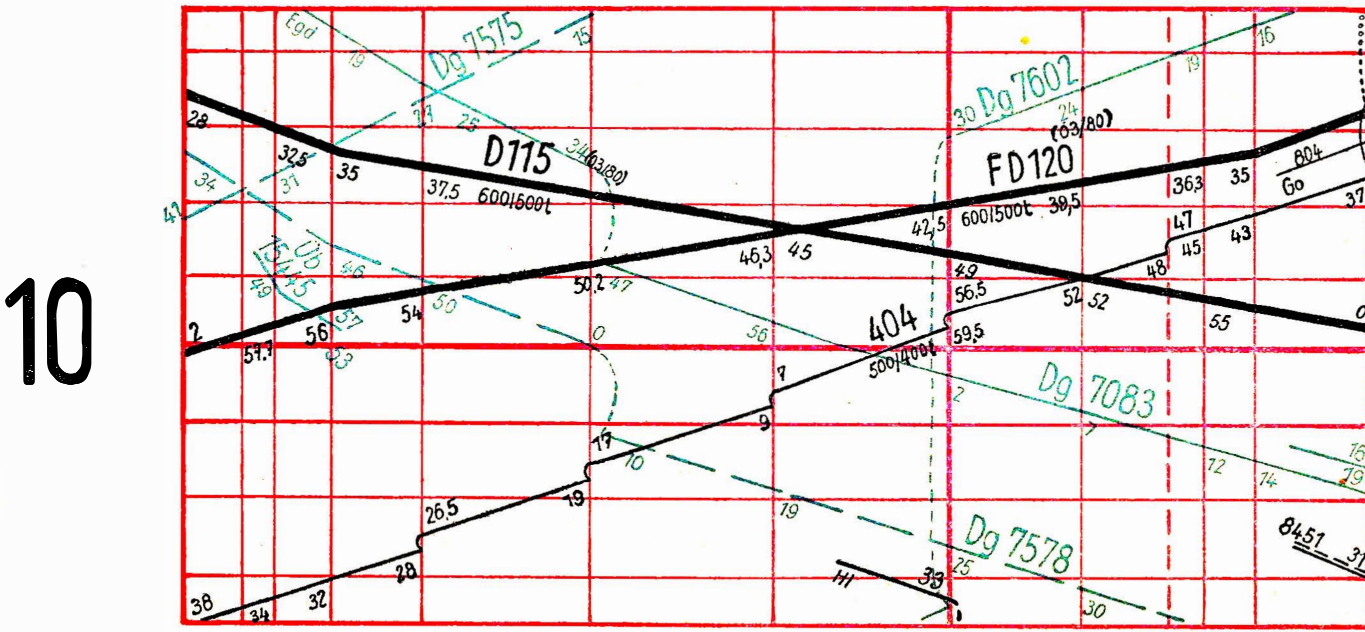
Logarithmen zur Herstellung logarithmischer Teilungen. Es sind 160 Werte als mögliche Unterteilungen eines beliebigen Schrittes angegeben. Die fett gedruckten Werte ergeben die Unterteilung eines Schrittes in 35 Teile, wie sie unser Meßstreifen auf der 4. Umschlagseite aufweist.

VOLK UND WISSEN SAMMELBÜCHEREI
GRUPPE II / NATUR UND WISSEN
REDAKTION: DR. G. BARTHOLOMÄUS

DIE GRUPPE II UMFASST FOLGENDE SERIEN:

A MATHEMATIK

Die Deutsche Reichsbahn verwendet als Grundlage für ihren gesamten Fahrbetrieb den „Graphischen Fahrplan". Einen Ausschnitt davon zeigt unsere Abbildung. Die große Zahl links gibt die Stundenzeit an, die kleineren Ziffern entlang der Zugkurven bezeichnen die Minuten. Die Zugnummer ohne Beschriftung bezieht sich auf einen Personenzug, die Abkürzungen D auf einen D-Zug, FD auf einen Fern-D-Zug, Dg auf Durchgangsgüterzüge und Üb auf einen Übergangszug für kleinere Strecken zwischen benachbarten Stationen. Daneben finden sich noch Angaben von Bahnhöfen (Egd = Engelsdorf, Go = Gohlis) und über Zuglasten.



12575

Beilage zu Bestell-Nr. 12575 »Der Zeichenstift rechnet«

Der Maßstab auf der 4. Umschlagseite ist ungenau. Wir bitten, den unten abgebildeten Meßstreifen zur Benutzung an der vorgezeichneten Linie abzutrennen.

M 103