Neue Stereometrie der Fässer,

besonders der in der Form am meisten geeigneten österreichischen, und Gebrauch der kubischen Visierrute.

Mit einer Ergänzung zur Stereometrie des Archimedes.

Von

Johannes Kepler,

Mathematiker Sr. kais. Majestät Mathias I. und der oberösterr. Stände.

Linz 1615

Druck von Johannes Plank.

Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben

von

R. Klug.

Mit 29 Figuren im Text.

Leipzig

Verlag von Wilhelm Engelmann

1908.

Erster Teil.

(Der erste Teil enthält nur die nachstehenden 17 Sätze, die als elementare Einleitung zum Hauptteil, dem zweiten, dienen.)

1) Das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser ist sehr nahe gleich dem der Zahlen 22 und 7.

2) Die Kreisfläche verhält sich zum Quadrat des Durchmessers nahezu wie 11 zu 14.

3) Der gerade Zylinder verhält sich zu dem ihm umgeschriebenen rechtwinkligen Parallelepiped wie der Grundkreis zu dem ihm umschriebenen Quadrat.

4) Das Prisma ist das Dreifache der Pyramide, der Zylinder das Dreifache des Kegels mit der gleichen Grundfläche und Höhe.

5) Die Mantelfläche eines geraden einer Halbkugel eingeschriebenen Kegels ist das $\sqrt{2}$-fache des Grundkreises und die Hälfte der Mantelfläche jenes Kegels, der derselben Halbkugel umschrieben ist.

6) Die Kugeloberfläche ist viermal so groß wie der größte Kugelkreis.

7) Die Oberfläche eines Kugelabschnitts ist einer Kreisfläche gleich, deren Radius der Abstand des Pols von einem Punkt des Grundkreises ist.

8) Die Kugeloberfläche und der Durchmesser werden durch eine zur Achse senkrechte Ebene im selben Verhältnis geschnitten.

9) Die Oberfläche eines geraden gleichseitigen Zylinders ist gleich der Oberfläche der eingeschriebenen Kugel.

10) Von der Kugeloberfläche und der Mantelfläche des der Kugel umgeschriebenen Zylinders werden durch eine zur Zylinderachse normale Ebene gleiche Teile abgeschnitten.

11) Der Zylinder verhält sich zur eingeschriebenen Kugel dem Inhalte nach wie 3 zu 2.

12) Das Verhältnis des Würfels zum Inhalt der eingeschriebenen Kugel ist sehr nahe 21 zu 11.

13) Der Kegel, dessen Grundfläche der größte Kugelkreis, und dessen Höhe dem Kugeldurchmesser gleich ist, ist halb so groß wie der Kugelinhalt.

14) Mit dem Kugelabschnitt ist ein Kegel über demselben Grundkreis inhaltsgleich, dessen Höhe die Höhe des Abschnitts um eine bestimmte Strecke übertrifft; diese Strecke verhält sich zum Kugelhalbmesser wie die Höhe des Segments zum Rest des Durchmessers.

15) Problem. Gesucht werden drei Flächen, die zueinander in demselben Verhältnis stehen wie die beiden Kugelabschnitte und die ganze Kugel.[1])

16) Ein Kegel kann geschnitten werden entweder durch eine durch den Scheitel gehende Ebene oder durch die Mantelfläche eines zweiten kleineren Kegels, der die Spitze mit dem ersten gemeinsam hat. In beiden Fällen verhalten sich die gleich hohen Kegelsegmente wie ihre Grundflächen. Geht die Schnittebene nicht durch den Scheitel, so sind die Abschnitte des Kegels nicht bestimmbar.

17) Wird ein gerader Zylinder durch eine zur Achse parallele Ebene geschnitten, so verhalten sich die Teile wie die Abschnitte des Grundkreises. Geht die Schnittebene schief durch die Achse, ohne die beiden Grundflächen zu treffen, so verhalten sich die Teile wie die Höhenabschnitte des Zylinders. Wenn im letzteren Falle die Schnittebene die eine Grundfläche berührt und die andere schneidet, so entsteht ein Huf. Solche Hufe über demselben Kreisabschnitt stehen im Verhältnis ihrer Höhen, d. h. der Höhen der zu ihnen gehörigen Zylinder. Schneidet man aus einem geraden Kegelstumpf den Zylinder über der kleineren Grundfläche heraus, so bleibt eine »Tunika« übrig. Die Ergänzung dieser »Tunika« zu einer vollständigen zylindrischen Röhre von derselben Höhe wird »Limbus« genannt. Für das Verhältnis der beiden Körper ergibt sich, wenn die Grundflächen des Rumpfes Kreise (R, r) sind: $\frac{R+2r}{3} : \frac{2R+r}{3}$.[2])

Ergänzung zu Archimedes.

Stereometrie der den Konoiden und Sphäroiden am nächsten stehenden Körper.

Soweit sind *Archimedes* und die alten Geometer gelangt bei der Untersuchung der Natur und der Abmessungen der gerad- und krummlinigen regelmäßigen Figuren und der von ihnen zunächst erzeugten Körper. Weil die Faßfigur von den regelmäßigen Figuren stärker abweicht, habe ich es für lohnend erachtet, die Entstehung der Faßfigur und verwandter Körper sowie die Schritte zu ihrer Erkenntnis mit den regulären Körpern gewissermaßen auf derselben Tafel darzustellen, zum Teil, um die folgenden Untersuchungen lichtvoller zu gestalten, dann auch, um den Eifer der jetzigen Geometer anzustacheln und nach Eröffnung eines weiten geometrischen Gebietes zu zeigen, was bis jetzt noch darauf zu bearbeiten und zu untersuchen bleibt.[3])

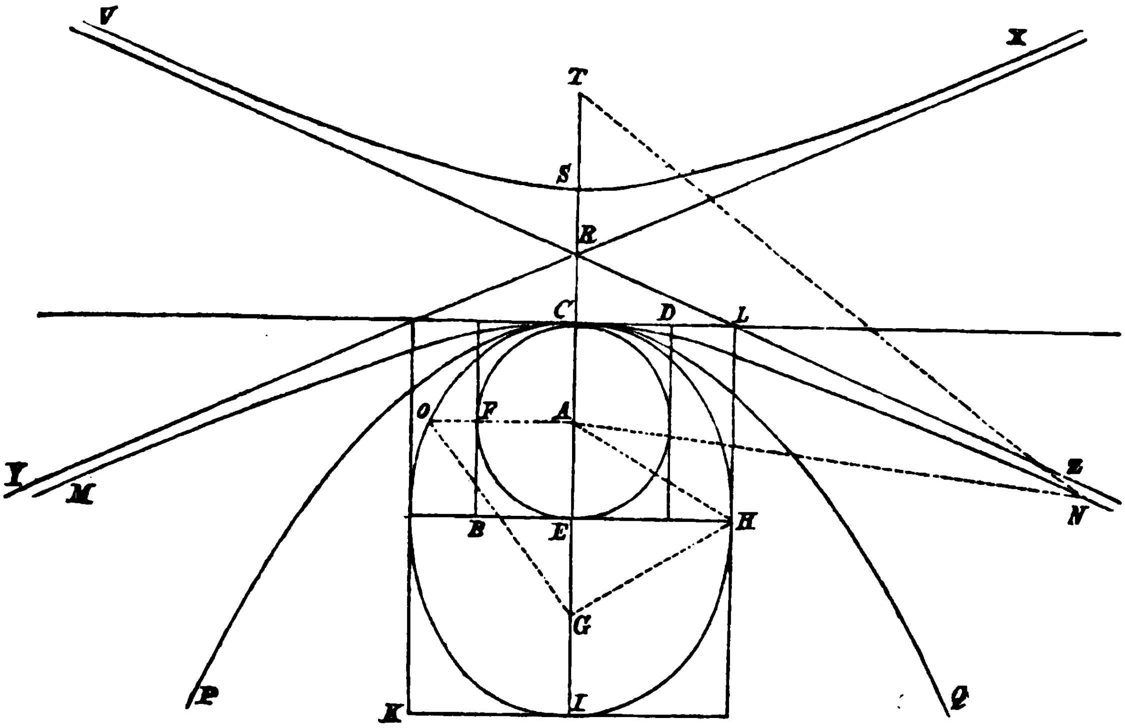
Die Kegelschnitte als Erzeugende von Körpern.

Es gibt vier Arten von krummlinigen Kegelschnitten, die die zu betrachtenden Körper erzeugen. In der Figur sind sie zur gegenseitigen Vergleichung dargestellt. Jeder Kegelschnitt ist entweder ein Kreis CFE, oder eine Parabel PCQ, oder eine Hyperbel MCN, oder endlich eine Ellipse CHI.

Der Einfachheit halber stellen wir folgende Ordnung auf: 1) Kreis, 2) Ellipse, 3) Parabel, 4) Hyperbel. Von diesen kehren zwei, Kreis und Ellipse, in sich zurück; die beiden andern stimmen darin überein, daß sie, ins Unendliche fortgesetzt, einen immer größer werdenden Zwischenraum umfassen, wobei sie sich einer Geraden unendlich nähern, ohne sie jemals zu erreichen. Sie unterscheiden sich darin voneinander, daß die Parabeläste CP, CQ zu einer Geraden CI und ferner auch zueinander immer mehr parallel werden, obgleich ein unendlich großer Zwischenraum zwischen ihnen liegt. Die Hyperbeläste schließen sich dagegen immer mehr dem Zuge zweier divergierender Geraden RY und RZ an, denen sie sich unendlich nähern, ohne sie jemals zu berühren, weshalb diese Geraden RY und RZ Asymptoten genannt werden.

In jeder dieser beiden Gruppen gibt es wieder eine Kurve, die ihre Klasse vollständig erfüllt, unter den geschlossenen ist dies der Kreis, unter den nicht geschlossenen die Parabel.

Fig. 1.



Denn es gibt so viele verschiedene Ellipsen, als es Formen der umgeschriebenen Rechtecke gibt, und so viele Arten von Hyperbeln, als Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden existieren. Wie nämlich der Kreis in einem Verhältnis steht zu dem umgeschriebenen Quadrat, von dem es nur eine Form gibt, und die Parabel zu ihrer Achse oder der einzigen Geraden, so besteht auch ein Verhältnis zwischen der Ellipse und dem umschriebenen Rechteck und der Hyperbel und den unendlich vielen Arten sich schneidender Geraden.

Wie ferner nach der Beschreibung der Figuren im Kreise alle Geraden AC, AF, AE untereinander gleich sind, so sind in der Ellipse je zwei Strecken AO, OG, die aber nicht vom Zentrum E, sondern von den Brennpunkten A, G aus gezogen werden, zusammen je zwei andern AH, GH oder AI, IG zusammen gleich. Wird in der Ebene der Parabel, deren Brennpunkt A ist, normal zur Achse CI eine Gerade KI gezogen, so sind wieder je zwei Gerade AC, CI zusammen so groß wie je zwei andere zusammen, z. B. AO, OK. Bei der

Hyperbel, bei welcher der eine Brennpunkt A innerhalb, der andere T außerhalb (des Kreises) liegt, welch letzteren die ähnliche Figur VSU umschließt, haben die beiden Strecken zwischen einem Punkt N und den beiden Brennpunkten A, T immer dieselbe Differenz, nämlich die Entfernung zwischen den beiden Scheiteln C und S.

Die Erzeugungsarten.

Durch die Rotation dieser vier ebenen Figuren — von andern soll fernerhin nicht die Rede sein — werden unzählige

Fig. 2I.

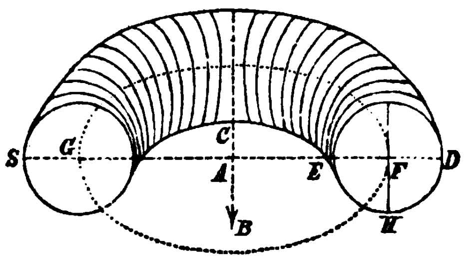


Fig. 2II.

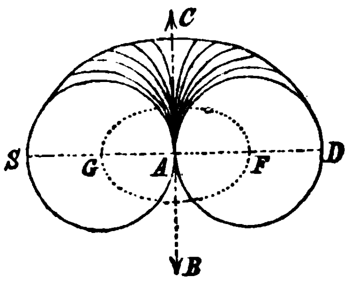


Fig. 2III.

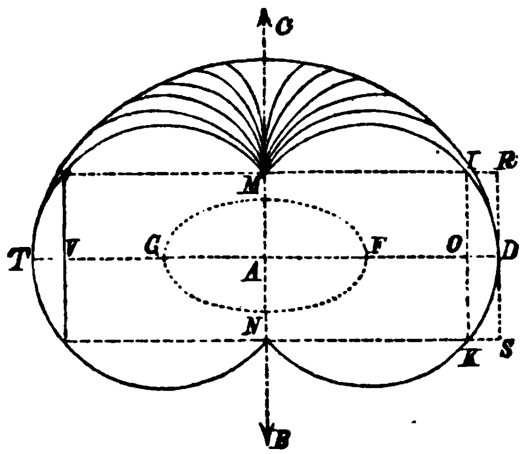


Fig. 2IV.

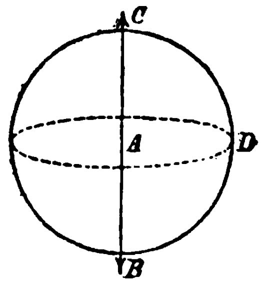
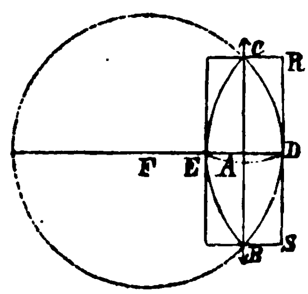


Fig. 2V.



Formen von Körpern erzeugt, deren Oberflächen nicht wie beim Kegel und Zylinder nach zwei Seiten hin gerade, sondern nach allen Richtungen gekrümmt sind, nach der einen mehr, nach der andern weniger. Im allgemeinen gibt es fünf Rotationsarten, die später, wenn wir auf kompliziertere Figuren übergehen, noch genauer in Unterabteilungen zerlegt werden sollen. In dem beigefügten Schema sind diese Arten dargestellt.

I. Wenn die Rotationsachse so weit vom Zentrum F der rotierenden Figur ED absteht, daß sie diese nicht schneidet, so entsteht durch den seiner Breite nach aufgerichteten Kreis bei der Bewegung auf dem Kreise FCG ein **Ring** (annulus), innerhalb dessen ein leerer Raum ist, mit dem Zentrum A.

II. Die Achse CB berührt die rotierende Figur AD. Es sei der Berührungspunkt A, und der ganze Kreis rotiere um CB, wobei der Punkt A des Kreisumfangs in Ruhe bleibt; es entsteht ein Körper, den man einen **geschlossenen Ring** (annulus strictus) nennen kann.

III. Die Rotationsachse schneide die rotierende Figur außerhalb der Mitte, so daß das größere Kreissegment MDN um die Schnittgerade MN gedreht werden kann, und das Zentrum (des Kreises) durch F und G hindurchgeht; es entsteht ein an beiden Polen bei M und N hohler Körper von der Form eines **Apfels** (malum).

IV. Die Achse geht durch das Zentrum, so daß der Halbkreis CDB um den ruhenden Durchmesser CAB rotieren kann; dann wird eine vollkommene **Kugel** (sphaera, globus) erzeugt.

V. Die Achse schneidet die rotierende Figur innerhalb der Mitte, so daß das kleinere Kreissegment CDB um die Schnittgerade CAB gedreht werden kann; dann entsteht ein an den beiden entgegengesetzten Seiten zugespitzter Körper, dem man die **Zitronenform** (malum citrium) zuschreiben könnte.

Die Zahl der Körper und ihre Unterschiede.

Wenn die drei übrigen Kegelschnitte so einfach wären, wie der bisher behandelte Kreis, so würden im ganzen durch diese 5 Rotationsarten 20 verschiedene Formen von Körpern erzeugt werden, nämlich von jedem Kegelschnitt ~~4~~. 5. Wegen der gemischten Eigenschaften der übrigen Figuren erhöht sich aber diese Zahl von 20 auf 92.

Da nämlich die drei eigentlichen Kegelschnitte nicht nach allen Seiten hin gleichartig sind, so treten bei ihnen verschiedene Gerade an die Stelle der einzigen als Rotationsachse möglichen Geraden beim Kreise, weil es bei diesem nur Punkte von einer Art, bei den übrigen Kurven aber solche von verschiedener Art gibt.

Beim Kreise ist der Scheitel eindeutig bestimmt, und jeder Punkt des Kreisumfangs kann als Scheitel genommen werden; bei den übrigen gilt als Hauptscheitel (vertex primarius) nur ein einziger Punkt, nämlich der Endpunkt der Achse des Kegelschnitts CI in den beiden folgenden Figuren, deren Scheitel bei C gelegen sind. Im weiteren Sinne gibt es aber ebensoviele Scheitel als Gerade in der Figur als Erzeugungsachsen oder zu ihr Parallele gezogen werden können; man könnte sie Positionsscheitel (vertex positionis) nennen, weil der höchste Punkt Scheitel der Figur wird, wenn man eine Gerade normal zum Perpendikel errichtet. So wird in Fig. 4, wenn man den Durchmesser OS als Erzeugungsachse annimmt, A der Positionsscheitel, wenn man dagegen die Tangente EF als Achse wählt, so gibt es entweder keinen Scheitel, bei stumpfwinkligen Hyperbeln nämlich und in einer gewissen Lage, oder es ist gewiß ein anderer als A, etwa O. Im Kreise fallen Zentrum und Brennpunkt in A zusammen; in der Parabel gibt es nur einen Brennpunkt A, aber kein Zentrum, wenn man nicht etwa annehmen will, daß das Zentrum in unendlicher Entfernung liegt, und der andere Brennpunkt in doppelt so große Entfernung auf CI vom Scheitel C weg hinausgerückt ist. Bei der Ellipse gibt es sowohl ein Zentrum A wie auch zwei Brennpunkte A, G, alle innerhalb der Kurve. Ebenso ist es bei der Hyperbel, aber der Mittelpunkt liegt außerhalb bei R. Der eine Brennpunkt ist innerhalb bei A gelegen, der andere außerhalb bei T, bezüglich des andern Hyperbelastes VSH aber innerhalb. Im Kreise sind alle Durchmesser auch Achsen, bei den übrigen Kegelschnitten gibt es oft andere Achsen und andere Diameter, wie die Art von der Gattung verschieden ist.

Bei der Parabel haben alle Diameter, wie CI, OS, einen sich stets gleichbleibenden Abstand voneinander, bei der Hyperbel und Ellipse gehen sie durch den Mittelpunkt der Kurven R, der bei der Ellipse innerhalb, bei der Hyperbel außerhalb liegt. Im Kreise sind alle gleich lang, in der Ellipse sind sie von verschiedener Länge, wie CI, OS, in der Parabel und Hyperbel haben sie keine endliche Länge. Im Kreise und in der Ellipse entspricht jeder Tangente ein ihr paralleler Durchmesser. In der Parabel und Hyperbel kann es keinen Durchmesser geben, der von einer beliebigen Tangente stets gleichen Abstand hat, wie LK von FE. Infolge der Verschiedenheit dieser Punkte und Linien entstehen durch die Umdrehung der einzelnen Figuren mannigfaltige Körper, die ihrer Natur nach immer, meist aber auch augenfällig verschiedene Formen aufweisen, deren Betrachtung im einzelnen uns nicht reuen wird; doch sollen die fünf Arten, wie sie sich beim Kreise ergeben haben, nicht mehr wiederholt werden, da jede einzelne eine ganze Familie der folgenden in sich schließt, und sie untereinander gemeinsame Beziehungen besitzen.

Beginnen wir mit jenen, bei denen *Archimedes* seine Untersuchungen abbricht. Es sei CJ in der folgenden Figur die Achse, um welche die Kurve PCQ rotiert, so daß der Punkt N um die feste Gerade CJ kreisend nach O gelangt, Q nach P. Es werden dann zwei Konoidflächen erzeugt, eine parabolische (1) und eine hyperbolische (2), und ein längliches Sphäroid von der Form eines Eies (3) mit den Scheiteln C und J; der größte Kreis wird ERA. Mit ihnen beschäftigt sich *Archimedes* in seinem Buche: De conoidibus et sphaeroidibus. Die Art der Erzeugung ist dieselbe wie bei der Kugel (2, IV). Nach der Zahl der Kurven gibt es drei Arten.

Als Rotationsachse nehmen wir jetzt nicht die Hauptachse selbst, sondern eine dazu parallele Gerade. Die Rotationsachse liegt entweder außerhalb der Kurve, wie DF, oder sie berührt dieselbe, wie LH, in einem Punkte E, welche zwei Fälle nur für die Ellipse zutreffen. Denn bei den übrigen Kegelschnitten schneidet jede zur Hauptachse parallele Gerade die fortgesetzte Kurve. Bewegt sich eine Ellipse $NOPQ$ um die feste Gerade DF im Abstand RG, so entsteht ein Ring, den man als einen hohen (annulus arduus) bezeichnen könnte (4), ähnlich den Blumengewinden der Landmädchen, da in der Mitte der Raum frei bleibt. Gerade so entsteht ein geschlossener Ring (5) (annulus strictus), ohne Zwischenraum, durch Rotation von $NOPQ$, wenn die Gerade LK und der Berührungspunkt E in Ruhe bleiben. Beide kann man sich nach Fig. 2, I und II vorstellen, wenn man an die Stelle der Schnittkreise aufrechtstehende Ellipsen setzt.

Dann kann die Rotationsachse auch durch den Kegelschnitt hindurchgehen, wie OP, und zwar diesseits der Achse der Figur CJ, so daß der größere Teil der Figur OCQ mit der Achse CJ um OP rotiert und der Scheitel C durch S, J durch V hindurchgeht, während O in Ruhe bleibt; durch die Parabel und Hyperbel entstehen dann, namentlich durch letztere, Körperformen, welche der des Ätna ähnlich sind durch die Aushöhlung am Gipfel, die von den Griechen als »Krater« bezeichnet wird, (6, 7), die Ellipse erzeugt auf diese Art einen Körper von der Form einer Quitte (8) (malum cotoneum), welche 2, III dargestellt wird, wenn man an die Stelle der zusammenhängenden Schnittkreise ebensolche aufgerichtete Ellipsen setzt. Die genannte Gerade OP kann auch auf der andern Seite parallel zur Hauptachse CJ gezogen sein, so daß der kleinere Teil der Figur, welcher die Achse nicht enthält, um OP rotiert. Die Parabel und Hyperbel erzeugen dann gewisse Formen von geraden Hörnern, (cornua recta), MOP, (9, 10), von denen die einen zugespitzt, die andern stumpf sind, wie beim Vieh, wenn es mit den Hörnern zu stoßen beginnt. Die Ellipse liefert einen Körper von der Form einer Olive, (oliva), oder Pflaume, (prunum), (11), ähnlich der Fig. 2, V.

Verlassen wir die Achse CJ, so kommt zunächst in derselben Ebene eine dazu Normale in Betracht TX, die vorerst außerhalb

Fig. 3I.

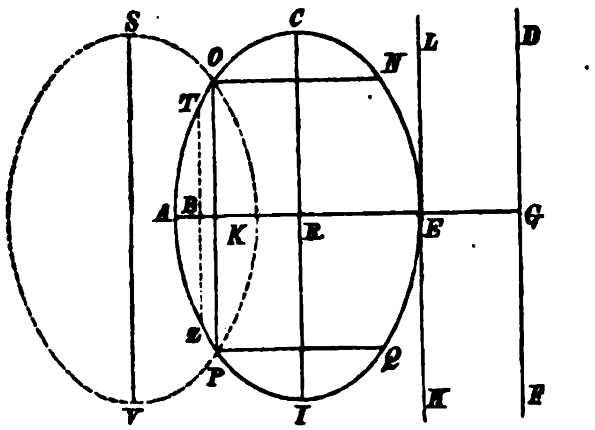


Fig. 3II.

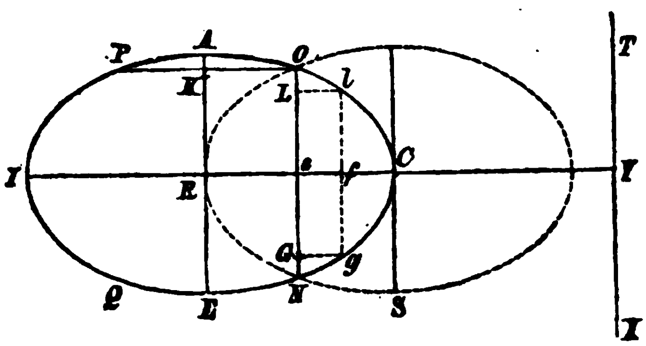
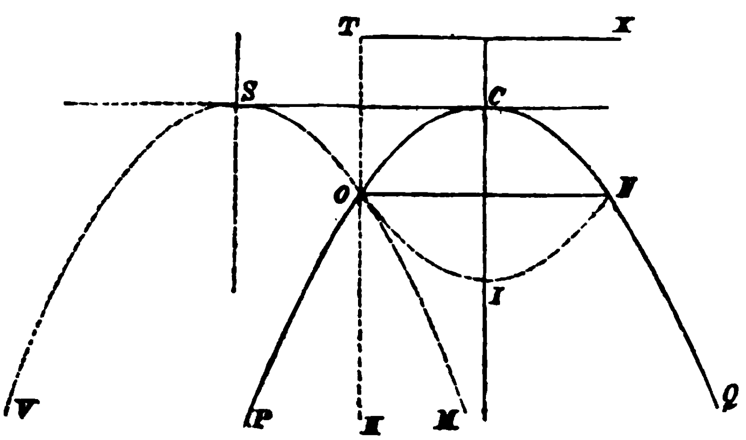
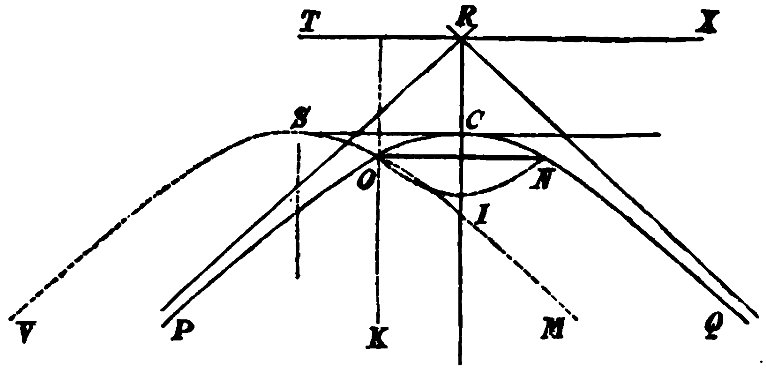


Fig. 3III.



der Figur gelegen sein soll. Bei der Rotation um TX entstehen ringförmige Körper, die bei der Parabel und Hyperbel nach außen hin unbegrenzt sind, weil ja die nach

Fig. 3 IV.



außen sich öffnenden Arme CP, CQ im Kreise gedreht werden (12, 13). Die Ellipse dagegen erzeugt bei der Rotation um eine solche zur Hauptachse CR normale, außerhalb der Figur gelegene Gerade TX einen flachen oder niedrigen Ring, (annulus supinus seu sessilis), ähnlich jenen auf den Kopf zu legenden Kränzen, wie sie zum Tragen von Gefäßen verwendet werden (14). Man kann sich diese Form wieder nach 2, III vorstellen, wenn man an die Stelle der Schnittkreise Ellipsen setzt, deren Scheitel von TX weggerichtet sind. Berührt die Achse CS den Kegelschnitt im Scheitel C, so entstehen durch Rotation drei Arten von geschlossenen Ringen, von denen zwei wie früher nach außen hin unbegrenzt sind (15, 16), während der von der Ellipse CJ erzeugte begrenzt ist (17), es ist dies ein flacher, niedriger oder gedrückter Ring, (annulus pressus). Man erhält ihn aus 2, II, wenn man statt der Schnittkreise Ellipsen setzt, die sich mit ihren Scheiteln berühren.

Endlich möge jene zur Hauptachse des Kegelschnitts normale Rotationsachse die Figur schneiden, wie ON. Die Figur wird so in zwei Teile zerlegt, die bei der Parabel und Hyperbel immer ungleich sind, weil der eine Teil $PONQ$ unendlich, der andre ONC endlich ist, so daß die Kegelschnitte drei Segmente ergeben, zwei unbegrenzte und ein begrenztes; in der Ellipse ist das eine, obwohl beide endlich begrenzt sind, doch meistens größer als das andere. Durch Rotation dieser sechs Segmente um ON entstehen ebensoviel neue Formen von Körpern, von denen zwei um die Mitte, nämlich bei O und N und nach außen ringsherum unbegrenzt sind, weil sie durch die ins Unendliche reichenden Linien $PONQ$ erzeugt werden (18, 19), das größere Ellipsensegment erzeugt einen linsenförmigen, oben und unten nabelförmig eingedrückten Körper (20). Diese Form besitzt eine gewisse Art von kleinen flachen Melonen, (melones sessiles), die ganz gegessen werden können, auch gibt es manche Pilze von dieser Gestalt. Man kann sich diese Form nach 2, III vorstellen, wenn man an Stelle der zusammenhängenden Schnittkreise ebensolche Ellipsen setzt wie in Fig. 3. Schließlich entstehen durch Rotation der kleineren Segmente ONC noch drei Körper, die dem Aussehen nach einander ähnlich, ihrer Natur nach aber verschieden sind: den elliptischen Körper $OCNR$ könnte man als eine dicke Pflaume, (prunum crassum) (21), die parabolischen und hyperbolischen Körper $OCNJ$ der Unterscheidung wegen nicht unpassend als »Spindeln«, (fusus), bezeichnen (22, 23). Und diese beiden Körper, besonders der durch eine sehr stumpfwinklige Hyperbel erzeugte, sind besonders bemerkenswert. Denn es entstehen mit Spitzen versehene Körper, die um den Bauch gewölbt sind, während sich der übrige Teil nach den Spitzen hin immer mehr der geraden Kegelform anschließt. In diesen werden wir, wenn die Scheitel O und N abgeschnitten sind, die natürliche Faßform zu suchen haben.

Wie erwähnt, sind aber die Ellipsensegmente bei dieser Art des Schnitts nicht immer ungleich. Wenn nämlich die zur Hauptachse Normale durch den Mittelpunkt N geht, in welcher Lage sie auch normaler oder kürzerer Durchmesser heißt, dann erzeugt die halbe Ellipse, wenn bei der Rotation von ECA der Scheitel C durch J hindurchgeht, eine andere Form eines breiten Sphäroids (24) mit den Scheiteln E und A und dem größten Kreis CRJ, über das schon *Archimedes* Untersuchungen angestellt hat.

Die Betrachtung und Unterscheidung dieser Formen würde für die Untersuchung der Faßform genügen; da ich mir aber vorgenommen habe, bei dieser Spekulation etwas über die Grenzen des Buches hinauszugehen, so mögen der Erkenntnis wegen auch die übrigen Körperarten angefügt werden.

Es trete in Fig. 4 an Stelle der Hauptachse CJ irgend ein Diameter OS als Rotationsachse. So wird die Ellipse in zwei ähnliche Hälften geteilt, deren jede bei der Drehung um OS einen Körper von der Form einer Birne, (pyrum) (25), erzeugt, die natürlich zu den Äpfeln, Quitten und Pflaumen gehört, damit der Nachtisch vollständig wird. Die beiden andern Kegelschnitte aber werden in zwei nicht ähnliche Teile zerlegt, die beide unendlich sind; bei der stumpfwinkligen Hyperbel gibt es nun zwei Fälle: entweder wird der stumpfe Winkel durch den gewählten Diameter in zwei spitze Winkel zerlegt, oder es ist nur der eine Winkel ein spitzer, der andere dagegen ein stumpfer oder rechter. Mit Ausnahme des letzten Falles werden die Figuren bei der Drehung Körper erzeugen (26, 27, 28, 29), welche sich beim Anblick in nichts von den Kratern und Hörnern unterscheiden, die früher mit 6, 7, 9, 10

Fig. 4 I.

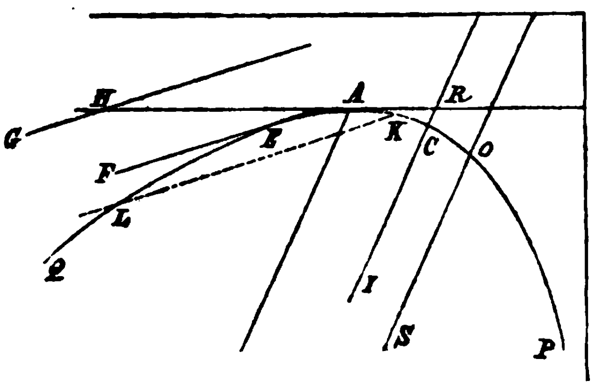


Fig. 4 III.

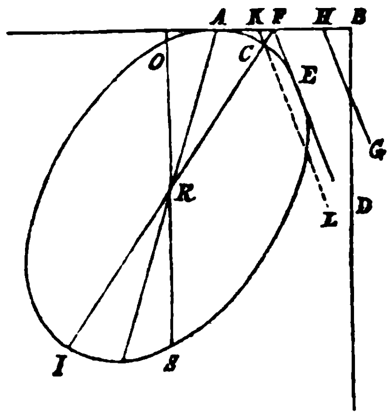
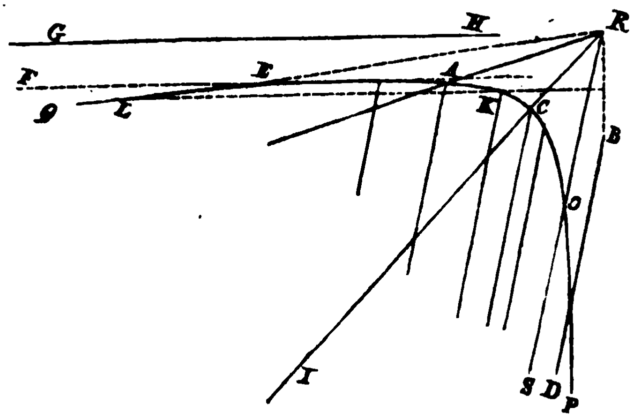


Fig. 4 II.



bezeichnet worden sind, obwohl sie ihrer Natur nach von ihnen abweichen, weil die Hauptachse CJ hier eine Kegelfläche, dort aber eine Zylinderfläche beschreibt, und weil der ganze erzeugende Teil der Figur geneigt ist.

Wenn der im stumpfen Winkel gelegene größere Teil der Hyperbel um einen solchen Durchmesser rotiert, so kommt eine Körperform hinzu, die eigentlich kein Körper mehr ist. Denn dieser Körper ist sowohl nach den Seiten wie nach unten hin unbegrenzt, außer man grenzt alle derartigen Körper durch eine konische oder zylindrische Fläche ab, die durch die Rotation einer Geraden entsteht, und er hat keinen Scheitel, an seine Stelle tritt vielmehr in der Mitte eine nabelförmige Vertiefung, während ringsherum die Oberfläche sanft ansteigt, aber ohne Ende (30).

An Stelle des Diameters *OS* trete jetzt eine dazu parallele Gerade *BD*, die aber für die Ellipse keine andere Bedeutung hat als eine zur Tangente parallele Linie, weil ja jedem Ellipsendurchmesser eine parallele Tangente entspricht. Wir haben also diese Parallele nur für die beiden andern Kegelschnitte in Betracht zu ziehen; sie wird entweder außerhalb oder innerhalb der Figur liegen. Außerhalb kann sie aber weder bei der Parabel, noch bei der Hyperbel sein, weil jede zu einem Durchmesser parallele Gerade den fortgesetzten Zug des Kegelschnitts schneidet. Sie wird folglich innerhalb beider Figuren liegen müssen. In der Parabel ist aber jede zu einem Durchmesser parallele Gerade selbst ein Durchmesser, dieser Fall bietet also nichts Neues. Nur für die Hyperbel hat dieser Fall eine eigentliche Bedeutung. Da der Durchmesser *OS* die Hyperbel in zwei nicht ähnliche Teile zerschneidet, so kann die zu *OS* parallele Gerade durch den größeren oder durch den kleineren Teil gezogen werden. Im letzteren Falle teilt die Achse *BD* die Figur in zwei stärker verschiedene Teile, von denen der größere entweder eine Kraterform wie 7 erzeugt (31) oder einen Körper von unbegrenzter Ausdehnung wie Nr. 30 (32), der kleinere aber einen Körper von der Form eines Hornes (33) ähnlich wie Nr. 11.

Wird die Rotationsachse im größeren Hyperbelteil parallel zum Durchmesser *OS* gezogen, so treten bei der spitzwinkligen Hyperbel fünf verschiedene Fälle auf. Entweder geht die Rotationsachse zwischen dem Durchmesser und dem Hyperbelscheitel, d. h. zwischen *C* und *O* hindurch, oder durch den Scheitel *C*, oder zwischen dem Scheitel *C* und dem Positionsscheitel *A*, oder sie liegt endlich jenseits des Positionsscheitels *A*. Bei stumpfwinkligen Hyperbeln gibt es aber keinen Positionsscheitel. Aber in jedem Falle wird die Hyperbel in zwei nicht ähnliche Teile zerlegt.

So entstehen 13 Körperformen: 4 sind kraterförmig (34—37), wie Nr. 7; 3 sind ausgehöhlt wie Nr. 30 (38—40), 4 sind, weil zugespitzt, von der Form eines Hornes wie Nr. 10 (41—44), die beiden letzten (45, 46) sind am Scheitel abgerundet wie das hyperbolische Konoid Nr. 2, und zwar ist der eine Körper, der von dem größeren Teil einer spitzwinkligen oder von dem durch den entsprechenden Diameter abgetrennten Teil einer stumpfwinkligen Hyperbel — es muß nämlich der Diameter den stumpfen Hyperbelwinkel in zwei spitze zerlegen — ähnlich einem abgestumpften Konoid, das andere, vom kleineren Teile erzeugte aber ähnlich einem zugespitzten Konoid.

Schließlich kann als Rotationsachse eine Tangente EF gewählt werden, welche aber nicht durch den Scheitel des Kegelschnitts gehen soll; durch die Parabel und Hyperbel entstehen dann zwei unbegrenzte Formen (47, 48), ähnlich wie Nr. 15 und 16, doch weniger aufgerichtet, da sie sich nach der Breite ins Unendliche erstrecken. Die Ellipse erzeugt bei der Drehung um EF einen geneigten geschlossenen Ring (49), der jenem Nr. 17 ähnlich ist, und den man nach 2, II erhält, wenn man an Stelle der Schnittkreise gegen den Berührungspunkt gleich geneigte Ellipsen setzt. Zu den Tangenten können auch die Asymptoten gerechnet werden, weil sie die Hyperbel in einem unendlich weit entfernten Punkt berühren; so entsteht eine neue Form (50), gewissermaßen eine Mittelform zwischen offenen und geschlossenen Ringen.

Nehmen wir nun an Stelle der Tangente eine zu ihr parallele Gerade als Rotationsachse, und zwar zunächst außerhalb der Figur. Es entstehen vier Arten von Ringen, die bei der Parabel und Hyperbel der Breite nach unbegrenzt sind; beim parabolischen Ring wird immer ein kreisförmiger hervorragender Rücken vorhanden sein (51), von den hyperbolischen weisen die einen einen solchen Rücken auf, die andern werden nach außen hin höher, als an ihrer engsten Stelle (52, 53), nicht viel abweichend von der Form Nr. 13. Eine um GH rotierende Ellipse erzeugt einen begrenzten geneigten Ring, (annulus finitus connivens) (54), der nach der einen Seite hin weiter wird und die Form einer Tiara oder eines Turbans mit abgeschnittener Spitze besitzt. Auch diese Form kann man sich nach dem ersten Umdrehungskörper vorstellen, wenn man die Schnittkreise durch gleichmäßig gegeneinander geneigte Ellipsen ersetzt.

Wenn die zu einer Tangente parallele Umdrehungsachse durch den Kegelschnitt hindurchgeht, so treten entsprechend den vielen Möglichkeiten auch viele Körperarten auf. Denn entweder schneidet die LK die Hauptachse nicht innerhalb der Figur, oder sie schneidet jene. Und wenn sie die Hauptachse schneidet, so geht sie entweder durch den Hauptscheitel

C, oder sie geht an ihm vorüber, indem sie den Positionsscheitel, der — falls es überhaupt einen gibt — nach Aufrichtung der Figur um EF bei O ist, rechts liegen läßt, denn bei der stumpfwinkligen Hyperbel gibt es keinen solchen Scheitel, wenn die LK oder EF mit der konträren Asymptote RB gegen den Kegelschnitt zu einen stumpfen Winkel bildet; oder die Rotationsachse geht durch den Positionsscheitel, oder sie läßt ihn auf dem abgeschnittenen Teil links liegen.

Es sind also bei jedem der drei Kegelschnitte fünf Fälle zu betrachten; daher erhalten wir 15 Schnitte und bei jeder Kurve je zwei Segmente. Bei der Hyperbel sind aber die drei größeren Segmente der ersten drei Fälle bezüglich ihrer Wirkung in doppelter Weise zu betrachten; denn entweder sind sie nach abwärts unbegrenzt wie bei der Parabel, oder nach aufwärts. Es gibt also hier 33 Arten von Körpern; von diesen sind 13 der Breite nach unbegrenzt, und unter diesen wieder sind 9 beiderseits nabelförmig vertieft; von diesen 9 sind 6 (55—60) mit einer kreisrunden vorspringenden Lippe versehen, wie die Krater Nr. 7, aber darin von ihnen verschieden, daß sie einem auch von unten ausgehöhlten Berge gleichen; die drei andern (61—63) haben keinen vorspringenden Rand, ihre Höhe ist unbegrenzt wie bei Nr. 19. Dann sind zwei Körper (64, 65) hornförmig zugespitzt wie Nr. 10, zwei haben einen abgerundeten Scheitel, sie sind Konoide (66, 67) wie Nr. 2; dies gilt für den Fall, daß die Achse durch den Positionsscheitel geht, wenn ein solcher vorhanden ist. Von den erwähnten 13 Körperformen sind 5 parabolisch und 8 hyperbolisch; die übrigen 20 sind endlich, nach der einen Seite hin breiter, nach der andern schmäler. Fünfzehn von ihnen, je fünf aus jeder Gruppe der Kegelschnitte, laufen in Spitzen aus, und zwar nach beiden Seiten hin (68—76), je drei aus jeder Gruppe, wir wollen sie Nüsse (nuclei) nennen; drei (77—79), je einer aus jeder Gruppe, sind an der breiteren Seite wohl abgerundet und gleichen darin stark dem breiten Sphäroid, wir könnten sie mit der Form der Erdbeere oder des Pinienkerns vergleichen. Drei endlich (80—82), und zwar wieder je eine aus jeder Gruppe, sind an der breiteren Stelle ausgehöhlt, an der schmäleren zugespitzt, nach Art der schlauchförmigen Blase (folliculus vesicarius), welche die Deutschen »Judenkirsche« nennen, wenn sie in versteckter Weise die Eichel des männlichen Gliedes mit der Vorhaut bezeichnen wollen. Die fünf letzten (83—87) haben die Form einer

Birne, sie werden von dem größeren Ellipsenabschnitt erzeugt auf Grund der genannten fünf Schnittarten, sie sind sämtlich hohl, drei auf beiden Seiten, zwei nur auf einer Seite; nach der schmalen Seite hin ist der eine Körper abgerundet wie ein Sphäroid, der andere ist spitz, beinahe von der Form einer Blase, welche vom kleineren Ellipsensegment erzeugt wird. Fügt man diesen 87 die 5 Kreiskörper gewissermaßen als Familienhäupter hinzu, so gibt dies 92 verschiedene Körperformen.

Soviel Körperformen entstehen also durch die Drehung der Kegelschnitte längs eines Kreises; dabei sind aber die Segmente, welche aus verschiedenen Teilen zusammengesetzt sind, nicht mitgezählt. So besteht z. B. ein Zinnteller meist aus drei Oberflächenteilen: einem Kugelsegment als Boden, einem parabolischen Krater als Seitenwand, und aus einem Rand (limbus), der der Oberfläche eines sehr stumpfwinkligen Kegels angehört oder auch der schiefen Zone einer Kugel. Und wenn man auch in der künstlichen Ausmessung bei mehreren auf dasselbe kommt, so muß man doch die so vielfältigen Unterschiede ihrer geometrischen Erzeugung kennen, damit man nicht bei der allgemeinen Betrachtung einzelner besonderer Fälle unvermutet in unentwirrbare Fallstricke gerät. Mit diesen einzelnen Fällen mögen sich die Geometer beschäftigen nach dem Beispiele des Archimedes, der von ihnen nur vier und einen fünften Fall, nämlich die Kugel betrachtet hat, nicht weil sie die nützlichsten oder gewöhnlichsten sind, (denn was hat das parabolische Konoid voraus vor einem Ring, einem Apfel, einer Birne, einer Pflaume, einer Nuß?), sondern weil sie sich als die einfachsten und der Kugel am nächsten stehenden darbieten. Wir werden jetzt nur jene betrachten, die auf die spindelförmigen Hyperboloide führen, deren mittlere Teile unsere heimischen Fässer sind; auf diese werde ich also die folgenden Lehrsätze anwenden.

Lehrsatz XVIII. Jeder Ring mit kreis- oder ellipsenförmigem Querschnitt ist gleich einem Zylinder, dessen Höhe gleich dem vom Mittelpunkt der Figur bei der Rotation beschriebenen Kreisumfang, und dessen Grundfläche der Querschnitt ist.[1]

p112 Gemeint ist hier ein Schnitt, der durch eine Ebene entsteht, die durch den Mittelpunkt des Zwischenraums geht und zur Ringoberfläche normal ist. Der Beweis gründet sich zum Teil auf Lehrsatz XVI und kann auf dieselben Elemente gestützt werden, mit denen Archimedes die Grundsätze der Stereometrie vorträgt.

Wenn man nämlich den Ring *GCD* Fig. 21 durch Schnitte aus dem Zentrum *A* in unendlich viele und sehr dünne Scheiben zerschneidet, so wird eine Stelle der Scheibe gegen den Mittelpunkt *A* hin um so viel schmäler sein, als diese Stelle, z. B. *E*, dem Mittelpunkt *A* näher liegt als *F* oder eine durch *F* in die Schnittebene zu *ED* gezogene Normale, und um soviel breiter in dem äußeren Punkte *D*. Danach wird, wenn man *D* u. *E* zugleich betrachtet, die Dicke an diesen beiden Stellen zusammen doppelt so groß sein wie in der Mitte der Scheiben. Diese Überlegung würde nicht gelten, wenn die Scheiben *ED* mit ihren Teilen diesseits und jenseits des Umfangs *FG* und der durch *F* und *G* gezogenen Normalen nicht gleich und gleich gelegen wären.

Folgesatz. Diese Art der Messung gilt ebenso für einen Ring mit kreisförmigem Querschnitt, wie für einen elliptischen hohen, niedrigen oder geneigten Ring, und ebenso für geschlossene wie für offene Ringe, ja überhaupt für alle Ringe, welcher Art auch ihr Querschnitt sein möge, sobald nur die Schnitte in der durch *AD* senkrecht zur Ringfläche gelegten Ebene diesseits und jenseits von *F* gleich und gleich gelegen sind. Wir wollen dies untersuchen, wenn der Querschnitt ein Quadrat ist. Es sei also der Ring von quadratischem Querschnitt, und man denke sich über *ED* ein Quadrat. Dieser Ring kann auch anders berechnet werden. Denn er ist der äußere Teil eines Zylinders, dessen Grundfläche ein Kreis mit dem Halbmesser *AD* und mit der Höhe *ED* ist, von welchem der Kern oder der Zylinder mit der Basis *AE* und der Höhe *ED* abzuziehen ist. Deshalb ist das Produkt von *ED* mit der Differenz der Kreisflächen *AD* und *AE* gleich dem Rauminhalt des Ringes mit quadratischem Querschnitt. Wird *ED* mit der Differenz der Quadrate von *AD* und *AE* multipliziert, so verhält sich der so entstandene Körper zum vierten Teil des Ringes, wie das Quadrat zum Kreise, also wie 14 zu 11.

Es sei *AE* gleich 2, $AD = 4$, das Quadrat davon also 16; das Quadrat von *AE* ist 4, die Differenz daher 12; mit der Höhe 2 multipliziert gibt dies einen Körper vom Inhalt 24, das Vierfache davon ist 96; wie sich also 14 zu 11 verhält, so auch 96 zu $75\frac{3}{7}$, dem Rauminhalt des quadratischen Ringes. Dies ist die Rechnung nach Lehrsatz XVI. Nach der obigen Methode wird *AF* 3, *FG* 6; wie sich 7 zu 22, so verhält sich 6 zu 19 weniger $\frac{1}{7}$; es wird demnach der Kreisumfang FG gleich der Höhe des Zylinders. Weil $ED = 2$, das Quadrat $= 4$ als Basis des Zylinders, so gibt das Produkt 4mal $19 - \frac{1}{7} = 76 - \frac{4}{7}$. Also auch auf diesem Wege sehen wir die Richtigkeit des Lehrsatzes ein.

Lehrsatz XIX und Analogie. Jeder geschlossene Ring ist gleich einem Zylinder, der den kreisförmigen Querschnitt als Basis und den Umfang des vom Mittelpunkt beschriebenen Kreises als Höhe hat.

Die frühere Methode gilt für jedes Verhältnis zwischen AE u. AF, also auch für den geschlossenen Ring, wo das Zentrum F des rotierenden Kreises ED einen Kreis FG beschreibt, der dem Kreis mit dem Halbmesser AD gleich ist. Denn es wird ein solcher Ring durch Schnitte aus A in Scheiben zerlegt, die in A die Breite Null haben, in D aber die doppelte Breite wie in F, weil ja der Kreis durch D den doppelten Umfang hat wie der durch F.

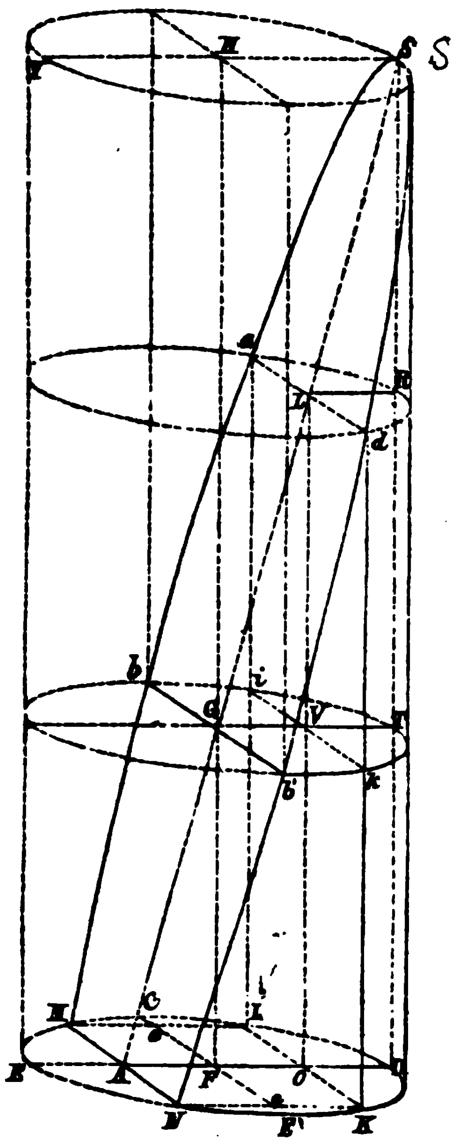
Folgesatz. Der zylindrazeische Körper, der in Fig. 2, III durch die Rotation der von geraden- und krummen Linien begrenzten vierseitigen Figur $MIKN$ erzeugt wird, ist auf Grund desselben Satzes gleich einer Säule, die diese vierseitige Figur als Basis und den Umfang des durch FG gehenden Kreises als Höhe hat. Für den äußeren Gürtel IKD, der den zylindrazeischen Körper umgibt wie ein Holzreifen ein Faß, gilt dieser Lehrsatz nicht, er muß nach andern Grundsätzen berechnet werden.[5]

Analogie. Dagegen gilt diese Berechnungsart auch wieder für alle zylindrazeischen Körper oder Segmente eines Apfels oder einer Quitte, die immer schmäler werden können, bis endlich IK u. MN zusammenfallen, was bei der Entstehung der Kugel (2, IV) stattfindet, wo an Stelle der beiden Geraden MN u. IK nur die eine BC vorhanden ist; daher versagt für diesen Körper zuerst die Richtigkeit und Anwendbarkeit dieses Satzes.

Folgesatz. Die Kugel verhält sich zu dem durch denselben Kreis erzeugten geschlossenen Ring wie 7 zu 33. Denn der dritte Teil des Halbmessers mal dem Vierfachen des größten Kreises oder zwei Drittel des Durchmessers mal der Fläche des größten Kreises ergeben einen Zylinder, welcher der Kugel gleich ist. Der dem geschlossenen Ring gleiche Zylinder hat zwar dieselbe Grundfläche, seine Höhe aber ist der Umfang des Kreises. Wie sich also der Umfang zu $\frac{8}{12}$ des Durchmessers, oder wie sich 33 zu 7 verhält, so verhält sich der geschlossene Ring zur Kugel.

Lehrsatz XX. Der Apfelwulst setzt sich zusammen aus einem Kugelwulst und dem Segment eines geraden Zylinders. Die Basis dieses Segments ist gleich dem fehlenden Abschnitt der Figur, durch deren Rotation der Apfel entsteht, und seine Höhe gleich dem Umfange desjenigen Kreises, welchen das Zentrum des größeren Figurensegments beschreibt.

Fig. 5a.



Beweis. Es soll der Körper des Apfels in derselben Weise in ein zylindrisches Segment verwandelt werden, wie *Archimedes* in Lehrsatz 2 die Kreisfläche in ein rechtwinkliges Dreieck überführt. Es sei AD der Halbmesser des größten Kreises des Apfels, in D werde eine Gerade normal errichtet DS, deren Länge dem Umfang des größten Kreises gleich ist, und welche der Mantelfläche eines Zylinders angehören soll. Dann ist die Gerade MN gewissermaßen die Kante, um welche alle ringförmigen Apfelsegmente angeordnet sind. Weil der Kreis in die Gerade DS ausgezogen wurde, so werden dabei auch alle diese ringförmigen Schnitte des Apfels mit Ausnahme des ersten MDN in Ebenen ausgebreitet, und es entsteht der von der Ellipse MSN begrenzte Körper. Klarer wird aber die Bedeutung dieser Umwandlung aus dem folgenden hervorgehen. Es soll die Fläche MND durch Gerade parallel zu MN in viele sehr kleine Teile, gleichsam in Linien zerlegt werden; wir ziehen die Gerade AS und errichten gegen die Gerade AS hin in den Schnittpunkten des Durchmessers AD und jener linienförmigen Flächenelemente die Normalen FG,

OL; ist F der Mittelpunkt, so schneidet die Normale in F die Gerade AS in G, durch diesen Punkt G legen wir eine zur Grundfläche FD parallele Ebene GF. Es sei ferner O der Halbierungspunkt der Geraden IK, OL die dazu Normale, welche AS in L schneidet, durch L ziehen wir die Parallele zu FD nämlich LR. Wenn die Figur um MN gedreht wird, so erzeugt das Flächenelement MN beinahe nichts, da es sich ja am wenigsten bewegt. Die durch F zu MN parallele Gerade bewegt sich längs eines Kreises von dem Umfang FG, die Gerade durch O auf einem vom Umfang OL und so auch alle übrigen; die Teile des zylindrazeischen Körpers, welche mit GF, OL bezeichnet sind, sind nach XVIII gleich jenen zylindrischen Teilen oder Tuniken des Apfels, welche von den zu MN parallelen Geraden bei der Rotation von MDN erzeugt werden. Es ist also das Prisma $MDSN$ des Zylinders, welches aus allen diesen in Rechtecke ausgezogenen Tuniken besteht, gleich dem ganzen Körper des Apfels, der sich aus den einzelnen Tuniken zusammensetzt.

Weiter ist der zylindrazeische Körper über $IMNK$ bis L, welchen man erhält, wenn man den Zylinder durch eine die Geraden OL und IK enthaltende Ebene schneidet, gleich dem zylinderähnlichen Teile des Apfels, von welchem der äußere Gürtel weggeschnitten ist. Es wird also der durch diese Ebene abgeschnittene Teil des Zylinders $LSDO$ gleich dem Wulst des Apfels. Da aber $GT = FD$ und der Radius einer Kugel mit dem größten Kreis $MNKI$ ist, und da ferner TS den Umfang dieses größten Kreises darstellt (weil $AD : DS = GT : TS$), so wird das Zylinderprisma GTS gleich dem zylinderähnlichen Körper der Kugel mit dem Halbmesser FD, welcher bei der Rotation der zu AD normalen Geraden IK entsteht. Deshalb ist der übrige Teil des Zylinders $LSTV$ gleich dem Wulst der Kugel, dessen Schnitt das Segment IKD ist.

Aber $ODSL$ setzt sich zusammen aus $VTSL$ u. $ODTV$, dem Zylindersegment mit der Basis IKD und der Höhe FG, welche gleich dem Umfang des Kreises ist, der vom Mittelpunkt F des größeren Kreisabschnitts beschrieben wird bei der Rotation der Figur um MN. Daraus folgt also, daß der Apfelwulst sich zusammensetzt aus dem Kugelwulst, der durch Rotation des Segments IDK entsteht, und aus dem genannten Segment des Zylinders. [6])

Folgesatz und stereometrische Anwendung. Die Ausmessung des Apfels führen wir folgendermaßen durch. Es muß gegeben sein die Länge *MN* des fehlenden Segments im Verhältnis zum Durchmesser oder Halbmesser *FD* des Kreises. Damit ist der Sektor *MFN* und *IFK* nach Lehrsatz II gegeben. Wenn man nämlich die Hälfte von *KI*, d. i. *IO* in Teilen ausdrückt, von denen 100000 auf *FD* gehen, so ist *IO* der sinus rectus des Bogens *ID*, damit ist auch *OF* als Sinus des Komplements und *OD*, die Höhe des fehlenden Segments, als »Pfeil« oder sinus versus in der Sinustafel bestimmt. Multipliziert man *OF* mit *IK*, so erhält man die Fläche des Dreiecks *IFK*, welches, vom Sektor *IFK* subtrahiert, das Segment *IKD* übrig läßt. Dieses mit dem Umfang des Kreises, dessen Halbmesser *AF* ist, multipliziert, ergibt nach dem eben bewiesenen Lehrsatz das Zylindersegment über den Kreisabschnitt mit der Höhe *FG*. Das ist der eine Teil des Apfels, nämlich ein Teil des Apfelwulstes.

Zieht man das doppelte Kreissegment von der Fläche des Kreises ab, so bleibt der Teil zwischen *MN* und *IK* übrig; multipliziert man diesen mit dem Umfang des Kreises *AF*, so erhält man den Apfelzylinder; das ist der zweite Teil.

Weil man *IK* kennt, so ist auch *IM* bekannt; ich suche also das Kugelsegment, dessen Basisdurchmesser *IM* ist, nach Lehrsatz XIV. Dieselbe Basis, mit der Höhe *MN* multipliziert, gibt den Zylinder über diesem Kugelsegment (Lehrs. 3); fügt man die beiden Kugelsegmente zu diesem Zylinder hinzu, so erhält man den Kugelzylinder zwischen *IK* und *MN*. Abgezogen vom bekannten Kugelkörper, ergibt sich der Kugelwulst, dessen Schnitt *KDI* ist, und dies ist der dritte Teil des Apfels, nämlich der zweite Teil des Apfelwulstes. Aus diesen drei Teilen setzt sich der ganze Apfelkörper zusammen.

Folgesatz 2. So besteht der Wulst einer Quitte und der eines niedrigen Kürbis aus dem Wulst eines verlängerten Sphäroids beim ersten und dem eines breiten Sphäroids beim zweiten und aus dem Abschnitt eines elliptischen Zylinders, der im ersten Falle mehr flach, im zweiten mehr breit ist. Die Grundflächen dieser Zylindersegmente sind Ellipsenabschnitte, und zwar die fehlenden derjenigen Figuren, die eine Quitte oder einen niedrigen Kürbis erzeugen. Die Höhen sind die Kreisumfänge, die von den Mittelpunkten der Figuren bei der Rotation beschrieben werden.

Lehrsatz XXI. Der Zitronenkörper ist gleich der Differenz zwischen dem Kugelwulst und dem genannten Zylindersegment.

Beweis. In derselben Art, wie früher (Fig. 2 V) *CDB* um *CAB* rotierte, rotiert hier *IDK* (Fig. 5a) um *IOK*. Das kleine Flächensegment, das mit *IOK* bezeichnet ist, erzeugt beinahe nichts, da es sich fast gar nicht bewegt, die weiter entfernten Teile bewegen sich schon auf den Umfängen ihrer Rotationskreise, bis endlich der letzte *D* oder der ihm entsprechende *R* sich auf einer Linie von der Länge *RS* bewegt, die gleich dem Umfang des größten Kreises des Zitronenkörpers ist. Daraus folgt, daß der Zitronenkörper (*CDBE* in Fig. 2 V) hier in Fig. 5 gleich dem Zylindersegment *LRS* ist. Nun ist aber *AO* doppelt so groß wie *FO* oder *GV*, es wird also *OL* doppelt so groß wie *VL*, oder der Körper *ODRL* ist zweimal so groß wie *VTRL*. Es ist mithin der Teil *ODTV* gleich *VTRL*. Es ist aber *RLS* gleich der Differenz von *LSTV* und *LRTV*, von welchen Körpern jener dem Kugelwulst, dieser dem Zylindersegment *ODTV* gleich ist. So ergibt sich also der obige Satz. [7])

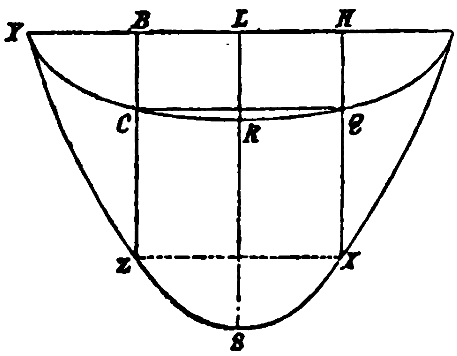
Folgesatz und Anwendung. Es muß gegeben sein die Länge der Achse der Zitrone und der Durchmesser des größten Kreises um die Mitte des Körpers. Multipliziert man die Achse zuerst mit sich selbst und dividiert dann das Produkt durch den Durchmesser, so erhält man etwas, was man zum Durchmesser der Zitrone hinzuzufügen hat. Wie sich nun dieses Aggregat zum Durchmesser des Kreises, der gleich 200000 angenommen werde, und wie die Achse zum Sinus des Segments, welches die Zitrone erzeugt, so verhält sich auch der Durchmesser der Zitrone zum sinus versus. Demnach ist die Rechnung ähnlich, aber um eine Operation kürzer als früher, denn wir brauchen dabei den Apfelzylinder nicht. Nachdem man aber zuerst das Segment *VTDO* (Fig. 4) und dann den Kugelwulst *LSTV* gefunden hat, braucht man nur jenes von diesem abzuziehen, um den Zitronenkörper *LSR* zu finden.

Folgesatz II. So ist auch der Körper der Olive oder einer elliptischen Pflaume gleich der Differenz zwischen dem Wulst, dort eines verlängerten, hier eines abgeplatteten Sphäroids und dem genannten Segment eines elliptischen Zylinders.

Lehrsatz XXII. Der Gürtel einer Zitrone, von der beiderseits die Scheitel durch gleiche Kreise abgeschnitten sind, setzt sich zusammen aus dem Körper der kleineren Zitrone, die durch dasselbe Kreissegment wie der in Rede stehende Gürtel erzeugt wird, und aus dem Abschnitt jenes Zylinders, dessen Basis dasselbe kleinere Kreissegment, und dessen Höhe dem Umfang des Schnittkreises gleich ist.

Wir betrachten wieder Fig. 5b. Es sei darin LSR der dem größeren Zitronenkörper gleiche Zylinderabschnitt, der für sich allein so abgebildet werden soll, daß man seine Grundfläche sieht; diese Basis ist aber jener Kreisabschnitt, welcher die größere oder die in einen Stumpf zu verwandelnde Zitrone erzeugt hat. Dieses Kreissegment sieht man über der Geraden $YBLH$ unter dem Bogen $YCRQ$. Es sei diese Zitrone beiderseits abgestumpft (in der folgenden Figur 8 $EAHFSQCG$), so daß wir erkennen, daß sie nicht von dem

Fig. 5b.



vollständigen Segment, sondern von dem innern Teil $BCQH$ erzeugt wird, wenn der Bogen CRQ um die Gerade BH rotiert. Es stellen also die Geraden BC, HQ die Halbmesser der Schnittkreise dar, und die Grundfläche wird in folgende vier Teile zerlegt: 1) Die gemischtlinige dreiseitige Figur BCY auf der einen Seite, 2) die ihr ähnliche über HQ auf der andern Seite, 3) das rechtwinklige Parallelogramm $BHQC$ in der Mitte, 4) das kleinere Kreissegment rückwärts zwischen der Geraden CQ und dem Bogen CRQ.

Da nun dieser Körper der ganzen größeren Zitrone gleichkommt, so wird RS, die Höhe, gleich dem Umfang des Kreises um die Mitte dieser Zitrone sein. Und weil die Hypotenusen der rechten Winkel BCZ und LRS in die Ebene YSH fallen, so wird sich BC zu CZ verhalten wie LR zu RS. Dieses Verhältnis ist aber gleich dem des Halbmessers zum Kreisumfang, daher hat auch das von BC zu CZ denselben Wert. Da BC der Radius des Schnittkreises ist, so ist also CZ sein Umfang.

Auf den genannten vier Teilen der Grundfläche stehen ebensoviele Körper: 1) Über BCY steht der pyramidenförmige Körper $BYCZ$, der von geraden und krummen Flächen und

Linien begrenzt ist; 2) der ihm ähnliche HQX. Diese beiden sind gleich den beiden von der Zitrone abgeschnittenen Spitzen (in Fig. 8 GEI und FNH). 3) Über $BHQC$ steht ein Prisma oder Pentaeder $BCZXHQ$, weil es von den drei Vierecken $BCQH$, $CQXZ$, $XZBH$ und den beiden Dreiecken CZB, QXH begrenzt wird; seine Höhe ist CZ zwischen den parallelen Geraden QC, XZ. Dieser Körper ist gleich dem in der Mitte der abgestumpften Zitrone liegenden Zylinder, dessen Grundflächen die Schnittkreise sind. (Dieser Zylinder ist in Fig. 8 durch $EHFG$ bezeichnet und liegt vollständig innerhalb des Gürtels FCG, HAE.) 4) Endlich über dem kleinen Segment CQR steht der Körper $SRQCZSX$, der ähnlich ist jenem Körper, in welchen der Apfelwulst verwandelt wurde. Da aber der ganze Körper $HYSR$ dem ganzen Zitronenkörper gleich ist, und die drei betrachteten Teile ebenso den einzelnen Teile der Zitrone gleichkommen, so muß auch dieser restliche Teil des Zylinderabschnitts mit dem Rest der Zitrone gleichen Inhalt haben. Dieser Gürtel umgibt aber den früher genannten Zylinder in der abgestumpften Zitrone. Wie nun dieser Teil des Körpers mit dem früheren ähnlich ist, welcher dem Apfelgürtel gleich war, so besteht er auch wie jener aus zwei Teilen, die voneinander ganz verschieden sind; der eine ist ein gerader Zylinderabschnitt, Fig. 5b, eingeschlossen von vier Flächen, dem ebenen Parallelogramm $CQXZ$, der zylindrischen Fläche $XZCRQ$ und den beiden kleinen Kreissegmenten, von denen das eine QCR sichtbar, das andere bei XZ aber nicht sichtbar ist. Die Höhe CZ dieses Abschnitts ist, wie früher bewiesen wurde, dem Umfang des Schnittkreises gleich. Der zweite Teil des Gürtels ist das Prisma ZXS, welches über demselben kleinen Kreissegment bei XZ aufsteht.

Da sich aber nach dem obigen LR zu RS verhält wie der Halbmesser zum Kreisumfang, und da dies auch für das Verhältnis BC zu CZ gilt, so wird auch die Differenz von LR und BC zur Differenz von RS und CZ, welche die Höhe dieses zweiten Teils des Gürtels über ZX ist, im nämlichen Verhältnis stehen. Die Differenz von LR und BC ist aber die Breite oder der sinus versus des Abschnitts CQR (in Fig. 9 AP, welches der Halbmesser der kleineren Zitrone ist, die durch den Bogen HEA bei der Drehung um HE erzeugt wird). Folglich ist auch die Differenz von RS und CZ, d. h. die Höhe des Zylinderprismas gleich dem Umfang des Kreises um die Mitte des kleineren Zitronenkörpers. Nach dem vorhergehenden Lehrsatz ist aber dieses Zylinderprisma ZXS gleich der kleineren Zitrone, die von dem kleinen Segment CQR erzeugt wird (in Fig. 9 HAE). Es besteht also der Gürtel der abgestumpften Zitrone aus zwei solchen Teilen, wie es im Lehrsatz ausgesprochen ist, so daß er sich überhaupt aus drei Elementen zusammensetzt: aus dem Körper einer kleineren Zitrone, aus einem Zylinder und dem geraden Abschnitt eines Zylinders. [8])

Zusatz und Anwendung. Bei der Ausmessung einer beiderseits abgestumpften Zitrone verfahren wir folgendermaßen. Es muß gegeben sein die Länge der Durchmesser sowohl des größten Kreises um die Mitte des Körpers wie der der Schnittkreise, endlich muß auch der Abstand der Schnittkreise voneinander bekannt sein. Dann hat man den Durchmesser der Schnittkreise von jenem des größten Kreises abzuziehen, den Rest in das Quadrat des Abstands der Schnittkreise zu dividieren und zum Quotienten den Divisor hinzuzufügen. Wie sich aber diese Summe zum Divisor, so verhält sich 200000, das der Sinustafel zugrunde liegende Maß des Durchmessers, zum sinus versus jenes Segments, welches 1. die kleinere Zitrone, 2. den Gürtel der größeren Zitrone, 3. den Wulst der Kugel, und 4. den des Apfels erzeugt, welcher gleichzeitig mit der kleineren Zitrone durch das größere Kreissegment entsteht. So steht auch diese Zahl 200000 zu den Durchmessern und zum Abstand der Schnittkreise im nämlichen Verhältnis.

Nach dem Folgesatz zu XXI sucht man den Inhalt der kleinen Zitrone aus dem Wulst des Apfels und dem der Kugel; so erhält man den ersten Teil der abgeschnittenen Zitrone. Ferner berechnet man aus dem bekannten Durchmesser des Schnittkreises seinen Umfang und multipliziert diesen mit dem früher gefundenen Kreissegment; man erhält so den zweiten Teil, der, mit dem ersten vereinigt, den Gürtel der abgestumpften Zitrone ergibt. Drittens hat man den Schnittkreis mit dem Abstand beider Kreise zu multiplizieren, um den dritten Teil zu finden. Die Summe aller ist der Inhalt der ganzen abgestumpften Zitrone.

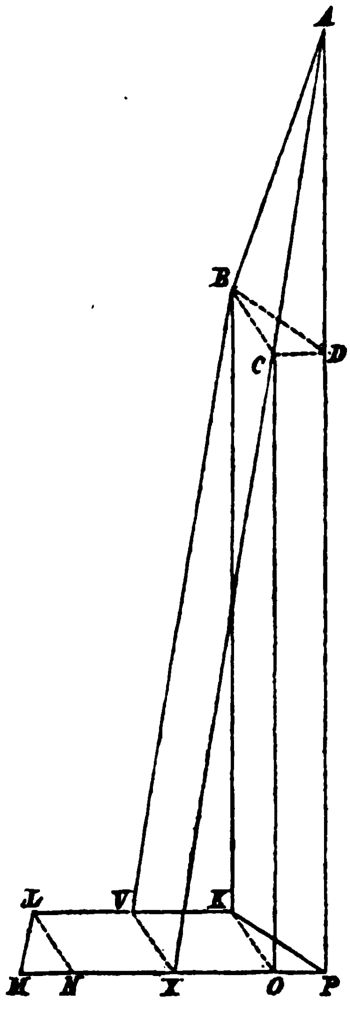
Folgesatz II. Der Gürtel einer abgestumpften Olive oder einer elliptischen Pflaume setzt sich in ähnlicher Weise zusammen aus einer Olive oder einer kleinen Pflaume, welche durch dasselbe Ellipsensegment erzeugt wird, und aus dem

Abschnitt eines gedrückten Zylinders, welcher über dem gleichen Ellipsensegment steht, und dessen Höhe dem Umfang des Schnittkreises gleich ist.

Zusatz. Ich habe den Beweis des Lehrsatzes XVI über die Tunika oder den Gürtel eines Kegelstumpfs, welcher den Zylinder umgibt, hierher verwiesen, weil er mit dem Beweise des hier besprochenen Satzes verwandt ist.

Es sei $KLMP$ der Achsenschnitt eines geraden Kegelstumpfes, PM der Durchmesser der Grundfläche, KL der des Schnittkreises, welcher den Kegel in einen Stumpf verwandelt; darauf stehen KO und LN normal, und zwar so, daß KL und NO gleich sind, und KOP mit LMN und die vierseitige Figur $KVXO$ mit $LVXN$ ähnlich ist. Es soll aber der Stumpf in einen geraden Körper nach denselben Vorschriften verwandelt werden, wie bisher Körper von jeder Art, die nach allen Seiten von gekrümmten Flächen begrenzt waren, ausgestreckt wurden. Da nun die Linie PK auf der Oberfläche des Kegels allenthalben eine Gerade ist, so wird die abgewickelte Oberfläche eine Ebene werden, nämlich $ABKP$, und PA wird der Umfang des Grundkreises PM, KB aber der des Schnittkreises KL; dem KB ist OC und ebenso PD gleich. Verbindet man die Punkte D, C, B, so entsteht ein mit POK gleiches Dreieck, die Seiten des einen sind denen des andern parallel und ebenso ihre Ebenen. Die beiden Pentaeder oder Prismen $BCVXOK$ und $KOPDBC$ sind gleich hoch, weil sie zwischen parallelen Ebenen stehen. Der Unterschied zwischen beiden liegt darin, daß, während das Parallelepiped über $XVKO$ mit der Höhe OC das Doppelte des Prismas $CBVXOK$ ist, das Prisma mit der Basis PKO und derselben Höhe selbst ein Ganzes und demnach das Dreifache der gleichhohen Pyramide $POKD$ ist. Endlich steht noch über DCB die Pyramide $DCBA$, deren Höhe DA die

Fig. 6.



Differenz der Kreisumfänge PM und KL ist, da die Basis DCB der Grundfläche der Pyramide $POKD$ gleich ist. Da aber Pyramiden mit gleichen Grundflächen sich wie ihre Höhen verhalten, so wird eine dritte Pyramide über POK, deren Höhe PA sich aus PD und DA zusammensetzt (deren Höhe also dem Umfang des Kreises PM gleichkommt), gleich sein den beiden Pyramiden $POKD$ und $DCBA$ zusammen.

Das Prisma mit derselben Grundfläche und Höhe wird das Dreifache davon sein; wenn aber die Höhe der dritte Teil von PA ist, so wird das Prisma gleich den beiden Pyramiden sein. Was aber von dem niedrigeren Prisma $KOPDBC$ übrig bleibt, nämlich $DOKBC$, kommt zwei Dritteln des Prismas gleich.

Man erhält also den Inhalt dieses restlichen Körpers, indem man $\frac{2}{3}$ der Höhe CO (oder den Umfang des Kreises KL oder ON) mit der Grundfläche POK multipliziert. Dies sind demnach die Teile des Körpers um den Stumpf, welchen wir Gürtel oder Tunika genannt haben. Der übrige Teil, nämlich der mittlere Zylinder, ist gleich dem Prisma $CBVXOK$, welches gewissermaßen das körperlich gewordene Dreieck COX ist mit der überall gleichen Breite OK, XV, CB. Daher kommt es, daß ebenso wie bei den Dreiecken das Produkt der Basis $KOXV$ und der halben Höhe CO (d. i. der halbe Umfang des Kreises KL oder ON) den Inhalt dieses Zylinders ergibt. Soviel über die Entstehung; das übrige, worauf sich unsere bequeme Berechnung stützt, soll der Kürze und Klarheit wegen in einer Übersicht dargestellt werden.

Nach dem Bewiesenen hat man also[9])

1) für die Tunika zu multiplizieren KOP oder mit gleichem Recht $\frac{1}{2}PO$ oder PO mit	2) für den Zylinder zu multiplizieren $KOXV$ oder OX oder das Doppelte davon ON mit
$\frac{1}{3}PA$ und $\frac{2}{3}OC$ oder m. gl. R. mit $\frac{1}{3}PM$ u. $\frac{2}{3}ON$ » » » » » PM und $2 \cdot ON$	$\frac{1}{2}OC$ $\frac{1}{2}ON$, d. i. OX in ON, NX, nämlich $3 \cdot OX$

Vertauscht man die einzelnen Größen, so hat man zu multiplizieren

PO oder $2 \cdot PO = 2MN$, d. h. die Differenz der Durchmesser KL, PM	ON, NX, oder das Doppelte davon, welches das Dreifache des kleineren Durchmessers ist,
mit PM und $2\,ON$	mit dem kleineren Durchmesser ON,

was zu beweisen war.

Man entnehme die bequeme Berechnungsart, wie sie sich als sehr erwünschtes Resultat aus dieser Demonstration ergibt, den Lehrsätzen XVI und XVII und schließe sie dieser Ergänzung zu *Archimedes* an, der sie zu besonderer Zierde gereicht.[10]

Über die Spindeln.

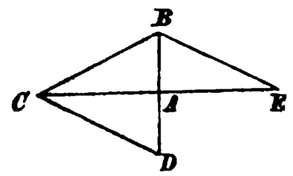
Bisher waren uns der Zylinder und die Kugel oder an ihrer Stelle das Sphäroid, welche in Zylinderabschnitte verwandelt wurden, behilflich bei der Auffindung der Inhalte der Äpfel, Zitronen, Quitten, der niedrigen Kürbisse, der Oliven und elliptischen Pflaumen. Denn da wir die Gesetze für alle diese Körper nicht aus ihrer Gestalt entwickeln konnten, fanden wir Maße für die Teile der Körper in den Teilen von Zylindern. Da aber für gewisse Teile des Zylinders eine sichere Berechnungsmethode vorliegt, so vermittelten die Kugel und die Sphäroide die Kenntnis oder die Gesetze der Raumbestimmung, Gesetze, die in ihnen entweder nicht enthalten oder bisher nicht ans Licht gebracht worden sind; diese Körper, welche vor den andern eine Berechnungsmethode voraus haben, ließen, in einen derartigen Zylinderteil transformiert, die Anwendung der nämlichen Rechenmethode auch auf den Zylinder zu. Es steht uns jetzt noch die etwas schwierigere Untersuchung der parabolischen und hyperbolischen Spindeln bevor, wobei uns die bisher angewendete Methode wiederum im Stich läßt. Denn wenn man auch die Spindel ebenso wie die Zitronen oder die Pflaumen in ein Zylinderprisma verwandelt, welches längs des Rückens die Krümmung der Kegelschnittslinien OCH, PCQ, oder MCN (Fig. 1) besitzt, so kann doch dieser Körper ebensowenig berechnet werden wie die Spindel selbst. Denn erstens gibt es überhaupt keinen vollständigen Körper, mit welchem das Prisma verglichen werden könnte, da ja die Säule wie der Kegelschnitt selbst bei PQ oder MN unendlich wird; dann fügt sich auch weder eine Kugel mit ihrem größten Kreise, noch auch ein Sphäroid einer solchen konischen Säule ein: denn entweder berührt der Kreis den Kegel von innen in einem einzigen Punkt, wenn er um den Brennpunkt als Zentrum durch den Scheitel *C* des Kegelschnitts gelegt wird, oder wenn ein etwas größerer Kreis durch *C* beschrieben wird, so berührt er zwar den Scheitel *C* von außen, schneidet aber den Kegelschnitt sogleich in zwei dem *C* sehr nahe gelegenen Punkten, während er im Innern von dem Kegelschnitt abweicht.

Es bleibt also nur übrig, daß wir, wie wir bei den durch Kreissegmente erzeugten Körpern unsere Zuflucht zur Kugel, bei den durch Ellipsenabschnitte erzeugten zu den Sphäroiden nahmen, so auch bei den durch hyperbolische und parabolische Segmente entstandenen auf die ihnen verwandten Konoide zurückgreifen; wenn aber unsere Bemühungen gänzlich ohne Erfolg bleiben, werden wir übrigens die Hilfe der Geometer anrufen.

Lehrsatz XXIII. Die beiden Kegel, die bei der Drehung eines ungleichseitigen rechtwinkligen Dreiecks um die beiden Katheten entstehen, verhalten sich wie die Seiten, welche die Grundflächen der Kegel beschreiben.

Ist *ABC* ein rechtwinkliges Dreieck, und wird die kleinere Kathete *AB* als Achse genommen, so erzeugt die Hypotenuse *BC* bei der Umdrehung um die Achse die konische Fläche *CBE* mit dem Scheitel *B* und der Grundfläche *CE*. Wird dagegen die längere Seite *AC* als Achse angenommen, und die Figur um *AC* gedreht, so erzeugt sie einen Kegel *BCD* mit dem Scheitel *C* und dem Grundkreis *BD*. Die Behauptung ist: Wie sich *BA* zu *AC*, so verhält sich der vom Kreise *CE* und der Kegelfläche *CEB* eingeschlossene Körper zum Kegel *BDC*.

Fig. 7.



Beweis. Nach den Ausführungen bei Lehrsatz XVII ist das Verhältnis des Kegels *EBC* zum Kegel *BCD* zusammengesetzt aus dem Verhältnis der Kreise *EC* und *BD* und aus dem der Höhen *AB* und *AC*. Das Verhältnis der Kreise *EC* und *BD* ist aber das Quadrat des Verhältnisses der Halbmesser *AC* und *AB*. Es setzt sich also das Verhältnis der Kegel *EBC* und *BCD* zusammen aus dem Verhältnisse *AC* zu *CB*, dann nochmals aus diesem und drittens aus dem von

AB zu AC. Aber das Verhältnis AC zu AB gibt mit dem andern AB zu AC zusammen das Verhältnis gleicher Glieder, welches das kleinste unter den Verhältnissen ist, d. h. der Endpunkt und die Gleichheit; dieses Verhältnis ändert an den übrigen nichts, wenn es dazu addiert oder davon subtrahiert wird. Es bleibt also von den drei Teilen des Verhältnisses der Kegel, weil die beiden letzten sich gegenseitig aufheben, nur der erste bestehen, und der Kegel EBC verhält sich zum Kegel BCD wie der Halbmesser AC des Kreises EC zum Halbmesser BD.

Lehrsatz XXIV. Ein längliches Sphäroid, das eingeschrieben ist einem breiten Sphäroid von der Art, daß beide dieselben Durchmesser haben, während ihre Achsen vertauscht sind, verhält sich zum breiten Sphäroid wie der kürzere Durchmesser zum längeren.

Es sei (Fig. 3) CEJ ein längliches Sphäroid mit den Scheiteln C, J, ferner (Fig. 3II) ACE ein breites Sphäroid mit den Scheiteln A, E, und es sei die Achse CJ der ersten gleich dem Durchmesser CJ des zweiten, und der Durchmesser AE des ersten gleich der Achse AE des zweiten: Ich behaupte, daß sich das längliche Ellipsoid oder das Ei zum breiten oder der Linse verhält wie der kürzere Durchmesser AE zum längeren CJ. Es möge nämlich in dem halben Ei ACE ein Kegel über der Kreisfläche AE mit dem Scheitel bei C beschrieben sein und in der halben Linse CAJ ein Kegel über CJ mit dem Scheitel bei A; nach dem Vorhergehenden verhält sich der Kegel ACE zum Kegel JAC wie der Halbmesser AR des Kreises EA zum Halbmesser RC des Kreises JC. Das halbe Sphäroid ist aber immer das Doppelte des ihm eingeschriebenen Kegels mit derselben Achse und über derselben Kreisfläche. Daher stehen die Hälften und folglich auch die ganzen Sphäroide im Verhältnis der Größen AR und RC, d. h. auch in dem der doppelten AE und CJ.

Lehrsatz XXV. Das Kugelsegment scheint sich zur Zitrone, die von demselben Kreisabschnitt erzeugt wird, zu verhalten wie der Halbmesser der Grundfläche des Segments zur Achse oder der Höhe des Segments.

Den rechtmäßigen Beweis mögen andere führen. Was ich nicht beweisen kann, darauf kann ich doch hinweisen, indem ich mich auf vier Gründe stütze.

1. Auf die Analogie. Was nämlich für die Halbkugel, die gewissermaßen das größte Segment und der Anfang aller Kugelabschnitte ist, und ebenso für das kleinste Segment, gewissermaßen das Endglied aller Abschnitte der Kugel oder des Sphäroids, gilt, das scheint auch für die zwischen diesen Grenzen gelegenen Abschnitte Geltung zu haben. Für die Halbkugel verhält sich die Sache so: Wie nämlich die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks im Kreisquadranten gleich sind, so ist auch der Körper, welcher durch Rotation des Quadranten um die Höhe entsteht, gleich jenem, der durch Drehung um die Grundlinie erzeugt wird. Für die kleinstmöglichen Abschnitte findet dieses Verhältnis in ähnlicher Weise statt, weil, je kleiner der Kugel- oder Zitronenabschnitt ist, die den Segmenten eingeschriebenen Kegelchen sich desto weniger von diesen unterscheiden; das Verhältnis dieser Kegel und deshalb auch das der umgeschriebenen Körper hat aber nach Lehrsatz XXIII den genannten Wert. Gleichwohl gestehe ich, daß von dem absolut Kleinsten auf das jenem Kleinsten Nächststehende nicht immer mit Sicherheit geschlossen werden kann.

2. Das genannte Verhältnis gilt für die Hälfte eines Sphäroids auch dann noch, wenn die Durchmesser nicht wie bei der Kugel gleich sind, und zwar für die unendlich vielen Sphäroide und die unendlich vielen Verhältnisse ihrer Durchmesser, wie im vorangehenden Lehrsatz bewiesen ist. Und wie ein längliches Sphäroid einem breiten eingeschrieben ist, so ist auch die ganze Zitrone dem doppelten Kugelabschnitt eingeschrieben, und die in beiden Fällen ähnliche Erzeugungsart liegt klar zutage; da also das genannte Verhältnis zwischen dem langen und dem breiten Sphäroid besteht, so wird es auch, wie es scheint, zwischen der ganzen Zitrone und dem doppelten Kugelsegment gelten.

3. An die Stelle eines vollständigen Beweises kann auch das treten, daß in Fig. 9 das schiefe Kreissegment zwischen der Geraden AE und dem Bogen AE, welches sowohl den Überschuß des Kugelabschnitts wie auch den der halben Zitrone über ihre entsprechende Kegel hervorbringt, oben bei A und unten bei E von gleicher Breite ist; daher stehen die Wege der Teile E bei der Rotation um PA zu den Wegen der Teile A bei der Drehung um PE im selben Verhältnis, wie PE und PA. Es kommt also der Rauminhalt der schiefen

Zonen, welche das Verhältnis der eingeschriebenen Kegel zueinander haben, zu den letzteren hinzu.

Zu dem Vorhergehenden tritt die Rechnung und das Zeugnis der Zahlen hinzu; mag diese Rechnung auch sehr umfangreich und genau auf Grund der Teilung des Durchmessers in 100 000 Teile ausgeführt werden, so sind die Zahlen doch noch nicht hinreichend, um das obige Verhältnis als unrichtig verwerfen zu lassen.

Anmerkung des Herausgebers. Ohne auf die Rechnung selbst einzugehen, seien hier *Keplers* Resultate kurz mitgeteilt. Es sei $PE = 9 \cdot PA$, $AL = 22$, $LK = 27$. Der Kugelabschnitt sollte also das 9fache der halben Zitrone sein, die durch APE erzeugt wird. Für den ersten Körper wird erhalten 1 825 848 331 848, der neunte Teil davon ist 205 872 036 872. Der Inhalt der halben Zitrone ist 183 463 877 474. Diese Zahl ist zwar kleiner als der neunte Teil und auch kleiner als der zehnte Teil des Segments, der Unterschied gibt aber bei diesen kleinen Zahlen nichts aus, weil es sich dabei nur um den 1000. Teil der Kugel handelt. Die Differenz rührt her von einem einzigen 100 000stel des Halbmessers. Nimmt man statt des früheren Wertes $PE = 21\,951$ an 21952, so ergibt sich für die halbe Zitrone 222 366 031 289, also zu viel. Aber 21952 ist größer als der richtige Wert. Diesen Zahlen gemäß läßt sich also gegen die Richtigkeit des in Rede stehenden Verhältnisses nichts einwenden. [11])

Lehrsatz XXVI. Wenn eine Gerade einen Kegelschnitt und das von ihm erzeugte Segment des Sphäroids oder Konoids in einem Punkt des Basisumfanges berührt und die Achse schneidet, so erzeugen diese Linien bei der Umdrehung um den Durchmesser der Basis Körper, und zwar die Tangente einen Kegel, die Kegelschnitte aber je nach ihrer Art eine Pflaume, eine Olive oder eine Spindel; ebenso erzeugt die Tangente bei der Umdrehung um die Achse einen andern Kegel: das Verhältnis der Hälfte der Pflaume und der Olive zum Segment des zugehörigen Sphäroids, der Spindel aber zum Konoid ist sehr nahe gleich dem Verhältnis des ersten Kegels zum zweiten.

Es sei Fig. 3 OCN eine Kegelschnittslinie (3 III eine Parabel, 3 IV eine Hyperbel, 3 II eine Ellipse) mit der Achse CI; rotiert die Hälfte CN des Schnittes OCN um ON als Achse, so daß N ruhig bleibt, während C durch I hindurchgeht, so entsteht offenbar die Hälfte CIN einer Pflaume, einer Olive oder einer Spindel $OCNI$; durch Drehung derselben Hälfte NC um CI, wobei C in Ruhe bleibt, und N durch O hindurchgeht, wird ein Segment eines Sphäroids oder Konoids OCN mit dem Scheitel C und dem Grundkreis ON erzeugt. Ich behaupte, daß, wenn eine Linie den Kegelschnitt oder den Körper in den äußersten Punkten N oder O berührt, durch die Rotation dieser Linien zwei Kegel von nahezu der Beschaffenheit erzeugt werden, wie sie früher erwähnt wurden, daß nämlich diese Kegel zueinander sich verhalten, wie die Hälfte der Pflaume, Olive oder Spindel CIN zum Segment des Sphäroids oder Konoids CON. Während uns bisher Fig. 2 zur Erklärung des Lehrsatzes diente, wird das Folgende aus Fig. 9 abgeleitet.

Es gilt nämlich dieser Lehrsatz sowohl für das Segment eines Sphäroids, wie auch für die beiden Konoide, das parabolische und das hyperbolische, und er enthält seinem Wesen nach drei Schlüsse; der erste und zweite ist gewiß, daß nämlich jenes Verhältnis kleiner ist als das des vorhergehenden Lehrsatzes, und zweitens, daß ein anderes als größer nachgewiesen wird. Der dritte Schluß ist aber noch nicht vollkommen sicher, daß es schlechthin jenes Verhältnis ist, welches in diesem Lehrsatz angesetzt wird. Da aber bei der Hyberbel alles klarer hervortritt, so sei in Fig. 9 der durch die punktierte Linie angedeutete Kegelschnitt FCG eine Hyperbel; es ist aber durch FCG auch ein Kreisbogen bestimmt, den die Hyperbel in F schneidet, von da an läuft die Kreislinie gegen S, die Hyperbel aber gegen R immer unterhalb des Kreises, bis sie endlich im Scheitel C den Kreis von unten berührt, wie es von Apollonius in seinem Buche über die Kegel IV, 25, 26 bewiesen ist. Es entstehe auch durch FCG ein Konoid mit dem Scheitel C und der Achse VCO und mit dem Grundkreis FG, dessen Halbmesser FO ist; es sei ferner V der Mittelpunkt des Kegelschnitts, VX und VZ seien die Asymptoten, deren Schnittpunkte mit der verlängerten FG seien X, Z. Weiters berühre die Hyperbel im Punkt F des Grundkreises die Gerade FY, welche die Achse zwischen dem Zentrum V und dem Scheitel C in Y schneide. Endlich sei dem Kegelschnitt das Dreieck FCG über der Grundlinie FG eingeschrieben. Nachdem im vorhergehenden Lehrsatz bewiesen wurde, daß sich der halbe Zitronenkörper, der von dem Kreisbogen FSC bei der Drehung um FO beschrieben wird, zum Kugelsegment FCG, das ebenfalls von FSC, aber bei der Drehung um CO erzeugt wird, sich verhält wie CO zu OF, behauptet dieser Lehrsatz, daß zwischen der halben Spindel, erzeugt von dem halben Hyperbelbogen FRC bei der Drehung um FO, und dem Konoid, welches ebenfalls von FRC, aber bei der Drehung um CO beschrieben wird, ein anderes Verhältnis besteht, nämlich das der Größen YO zu OF; denn dieses ist das Verhältnis, das von der Tangente FY bei der Rotation um OF beschriebenen Kegels zum Kegel, der von FY bei der Drehung um YO erzeugt wird. Es ist aber offenbar, daß das Verhältnis YO zu OF kleiner, d. h. der Einheit näher ist als das Verhältnis CO zu OF; und da VX und YF gegen X hin konvergieren, so ist wiederum das Verhältnis VO zu OX kleiner als das von YO zu OF.

Gleichwie das Verhältnis YO zu OF ein mittlerer Wert zwischen CO zu OF und VO zu OX ist, so kann auch bewiesen werden, daß das Verhältnis des halben spindelförmigen Körpers zum Konoid der Größe nach das mittlere Verhältnis zwischen CO und OF und OV zu OX ist.

Es soll zuerst das Verhältnis CO zu OF untersucht werden; der Beweis gilt dann auch für das parabolische Konoid. Offenbar ist die Spindel mit dem Bogen FRC kleiner als die Zitrone, deren Bogen FSC ist; so ist auch das Konoid $FRCG$ kleiner als das Kugelsegment $FSCG$. Da aber die ebene Figur zwischen dem Kreisbogen FSC und dem Hyperbelbogen FRC bei F und C von ungleicher Breite ist, denn sie ist an der Schnittstelle bei F breiter, an der Berührungsstelle bei C schmäler, so wird die Tunika, wit welcher der Kugelabschnitt das Konoid umgibt, gegen die Grundfläche FG hin breiter, gegen den Scheitel C aber schmäler. Dagegen ist die Tunika, mit welcher die Zitrone die Spindel umgibt, gegen die Basis C hin schmäler als gegen den Scheitel F. Dem Konoid und der Spindel fehlen also nicht proportionale Größen, sondern dem Konoid fehlt mehr, der Spindel weniger (zum vollständigen Kugelsegment). Denn wenn auch das Konoid um den Scheitel eine geringere Abweichung zeigt als die Spindel um ihren Scheitel F, so tritt doch keine gänzliche Ausgleichung ein, weil die Bewegung der Teile um den Scheitel sich auf einen kleinen Raum beschränkt, während die Teile an der Basis sich längs eines größeren Umkreises bewegen. Die Spindel steht daher dem Konoid näher als die Zitrone ihrem Kugelsegment oder als die Größe CO der Größe OF (nach dem vorstehenden Lehrsatz); ebenso ist auch YO dem OF näher als CO dem OF.

Hier haben wir den früheren Lehrsatz angewandt, der aber keine volle Beweiskraft besitzt. Es gilt diese Methode aber auch dann, wenn wir an Stelle des Segments $FSCG$ und der Zitrone die Kegel FCG setzen. Der Kegel, der von der Geraden CF bei der Drehung um OF erzeugt wird, verhält sich zu dem durch FC entstehenden Kegel mit der Achse CO wie CO zu OF. Die ebene Fläche zwischen der Hyperbel FRC und der Geraden FC, die den Überschuß des Konoids und der Spindel über die ihnen eingeschriebenen Kegel erzeugt, ist gegen C breiter, weil die Hyperbel hier stärker gekrümmt ist, gegen F hin, wo die Hyperbel allmählich in eine Gerade übergeht, aber schmäler. Daher kommen zu diesen Kegeln wiederum keine proportionalen Größen hinzu; denn zum Kegel der Spindel muß, damit eine Spindel entsteht, mehr hinzukommen als zum Kegel des Konoids zum Zwecke seiner Ergänzung. Es ist also der Inhalt der Spindel im Vergleich zum Konoid größer als CO im Vergleich mit OF, d. h. das Verhältnis des kleineren Körpers (der Spindel) zum größeren (dem Konoid) ist kleiner und der Einheit näher gelegen.

Es ist dann auch für das Verhältnis VO zu OX zu zeigen, daß es kleiner ist als das Verhältnis der Hälfte der Spindel zum Konoid. Der Beweis gilt jedoch nur für die Hyperbel, weil die Parabel keine Asymptoten besitzt. Ebenso wie früher ist die von den drei Geraden FX, XV, VC und der Hyperbel CRF eingeschlossene Fläche gegen V hin breiter als gegen X; es ist daher der Körper oder die Matrix, in welcher das Konoid steckt, am Scheitel V breiter als an der Basis XZ; die Matrix dagegen, in welcher die Spindel steckt, ist gegen den Scheitel FX schmäler als an der Basis VC; folglich kommt zum Kegel mit der Achse XV im Verhältnis mehr hinzu als zum Kegel, dessen Achse VO ist. Es ist demnach jener Kegel im Vergleich mit diesem größer als die Spindel im Vergleich zu OX, und das Verhältnis VO zu OX kleiner und der Gleichheit näher als das Verhältnis der Hälfte der Spindel zum Konoid.

Da aber zwischen den Verhältnissen CO zu OF und VO zu OX unendlich viele andere liegen und nicht allein das von OY zu OF, so ist dies zwar kein zwingender, aber wenigstens ein wahrscheinlicher Schluß nach der dritten Figur der Schlüsse, welcher eine Behauptung aus reinen Prämissen aufstellt.

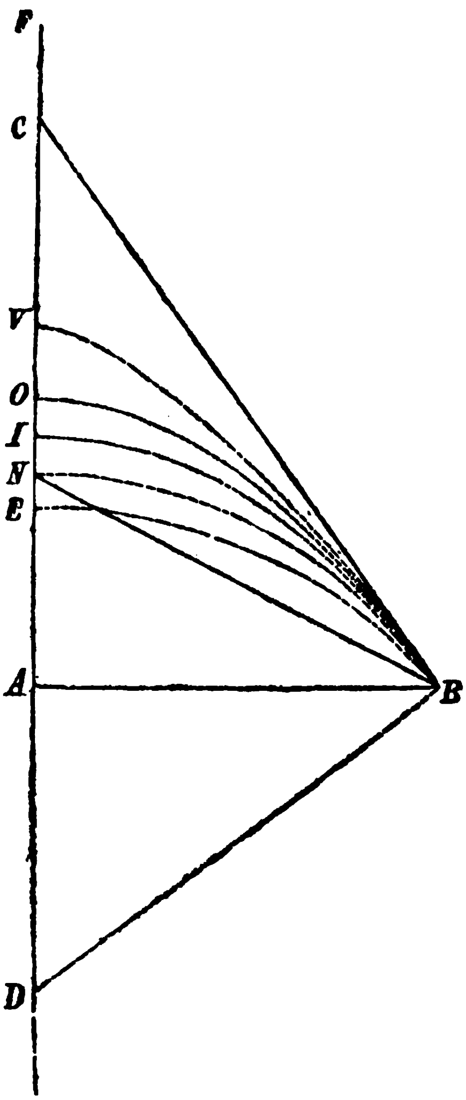
Analogie. Man bedenke, daß für Kugelsegmente zwar immer das Verhältnis der eingeschriebenen Kegel gilt, daß aber bei Sphäroiden jene Kegel, die zueinander das wirkliche Verhältnis der Körper, nämlich das der Pflaume zum Segment des breiten Sphäroids und das der Olive zum Abschnitt des langen Sphäroids besitzen, über den Scheitel der Ellipse herausragen, der eine mit seiner Spitze, der andere mit der Grundfläche; daß sie jedoch immer unterhalb der Tangente liegen. Beim parabolischen Konoid erzeugt die Tangente Kegel, die in dem gesuchten Verhältnis stehen, so daß die Höhe des einen Kegels genau das Doppelte der Höhe des Segments ist. Endlich beim hyperbolischen Konoid ragen der Scheidel und die Basis der Kegel über die Tangente gegen den Mittelpunkt hinaus. Es liegt zwar eine große und beinahe beweisende Kraft in dieser Analogie. Doch genügt sie nicht, um den Satz für bewiesen gelten zu lassen, es muß auch etwas über die Lage der Punkte zwischen der Tangente und dem Scheitel der Ellipse oder dem Mittelpunkt der Hyperbel ausgesagt werden.

Lehrsatz XXVII. Wird die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks halbiert und auch im Verhältnis der andern Dreiecksseiten geteilt, und gehen durch den Scheitel des ihr gegenüberliegenden Winkels verschiedene Kegelschnitte hindurch, derart, daß sie sich gegenseitig berühren und die Hypotenuse als Tangente haben, und daß ihre Hauptscheitel auf der geteilten Kathete liegen, so sind alle Kegelschnitte zwischen dem höchsten Punkt und dem Halbierungspunkt Hyperbeln; die Kurve, welche durch den Halbierungspunkt geht, ist eine Parabel; zwischen diesem und dem Punkt der proportionalen Teilung liegen aufrechte Ellipsen jeder Art; durch den Teilungspunkt geht ein Kreis; endlich die Kegelschnitte von hier ab bis zur andern Kathete sind liegende Ellipsen von jeder Art, bei welchen der Endpunkt der kleineren Achse abweichend vom gewöhnlichen Brauch als Scheitel bezeichnet wird.

Es sei BAC ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seite AC in O halbiert wird, es werde auch der Winkel CBA durch die Gerade NB halbiert, so daß sich AB zu BC verhält wie AN zu NC; es wird also AN kleiner als AO. Es liege ferner zwischen C und O der Punkt V, zwischen O und N der Punkt I, zwischen N und A der Punkt E. Weiters mögen einander und die Gerade BC verschiedene Kegelschnitte berühren, deren

Scheitel der Reihe nach V, O, I, N, E sein sollen. Ich behaupte, daß BV eine Hyperbel, BO eine Parabel, BI eine aufrechte Ellipse, BN ein Kreis und BE eine liegende Ellipse ist.

Fig. 8.



1. Beweis für BO. Den Kegelschnitt BO, dessen Achse oder Durchmesser CA und dessen Scheitel O ist, berührt in B die Gerade BC, welche die Achse außerhalb des Kegelschnitts in C schneidet; vom Berührungspunkt B ist auf den Durchmesser CA die Normale BA, das Perpendikel, gezogen, und CO ist gleich mit OA: deshalb ist BO eine Parabel zufolge der Umkehrung des Satzes des *Apollonius* I, 37.

2. Beweis für BC. Es bleibe alles übrige ungeändert, nur sei V der Scheitel und CV kleiner als die Hälfte von CA; dann werde das Doppelte von CV von CA abgezogen und CF außen so gewählt, daß sich der Rest zu CV verhält wie CV zu CF. Es ist also das Rechteck aus CF und dem genannten Rest gleich dem Quadrat von CV; addiert man zu beiden gleiches hinzu, das Quadrat von CF und die beiden Rechtecke VCF, so erhält man auf der einen Seite das Rechteck CFA, auf der andern das Quadrat von FV; da diese gleich sind, so ist zufolge der Umkehrung des Satzes des *Apollonius* I, 37 der Kegelschnitt BV eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt F.

3. Beweis für BI, BN und BE. Unter den gleichen Umständen seien I, N, E die Scheitel und IA, NA, EA kleiner als die Hälfte von CA; wird das Doppelte von IA usf. von CA abgezogen und die Beziehung aufgestellt, daß sich dieser Rest zu IA verhält, wie dieses zu dem unterhalb gelegenen AD, so läßt sich auf demselben Wege wie früher

zeigen, daß die Quadrate von *DI* usw. gleich den Rechtecken *ADC* sind; und deshalb werden nach *Apollonius* die Kegelschnitte *BI*, *BN*, *BE* endlich, ihre Mittelpunkte liegen innerhalb der Figur, d. h. die Kurven sind Ellipsen und Kreise.

4. Beweis für *BN* unter denselben Voraussetzungen, wie sie in 3 aufgestellt wurden; da sich außerdem *AN* zu *NC* verhält wie *AB* zu *BC*, welche Proportion in dem einen Dreieck nur einmal vorkommt, während für die Hyperbeln und Ellipsen verschiedene Proportionen gelten, für die Parabel allerdings nur eine, aber mit dem Werte 1, so könnte also *BN* kein anderer Kegelschnitt sein als ein Kreis. Und in der Tat ist es beim Kreise so. Es sei nämlich *BN* ein Kreis mit dem Mittelpunkt *D*, der mit dem Berührungspunkt *B* verbunden ist; es wird also *CBD* ein rechter Winkel, aber auch *CAB* war ein rechter, folglich verhält sich *DC* zu *DB* wie *DB* oder *DN* zu *DA*. Das Verhältnis *DN* zu *DA* ist aber gleich dem von *CB* zu *BA* und dem von *CN* zu *NA*. Demnach schneidet der Kreisbogen die Seite, auf deren Verlängerung sein Mittelpunkt liegt, im Verhältnis der Seiten *AB*,*BC*.[12])

Folgesatz und Analogie. In dem Dreieck können also unendlich viele Hyperbeln liegen, unter denen, um analog zu sprechen, die am meisten stumpfe *BC* ist, deren Scheitel *V* und deren Mittelpunkt *F* mit dem Scheitel *C* des Winkels der Asymptoten zusammenfallen. Der Kegelschnitt selbst geht in zwei Gerade über (wenn nämlich der Schnitt durch die Spitze des Kegels gelegt wird). Die spitzeste Hyperbel im Dreieck ist die Parabel, deren Scheitel *O* sich im Halbierungspunkte und deren Mittelpunkt in unendlicher Entfernung sich befindet. Wenn *CV* der dritte Teil von *CA* ist, werden *CF* und *CV* gleich; ist *CV* kleiner, so übertrifft *CV* die Größe *CF*, ist es größer, so übertrifft *CF* die Größe *CV*.

Ebenso gehen unendlich viele Ellipsen *BI* zwischen *O* und *N* hindurch, von denen die mit dem spitzesten Scheitel in gleicher Weise die Parabel *BO* ist, welche den Scheitel in *O*, den Mittelpunkt *D* in unendlicher Entfernung hat, die am Scheitel am meisten abgestumpfte Ellipse ist der Kreis *BN*, von da an kommen wieder die unendlich vielen transversal liegenden Ellipsen; unter diesen ist am Scheitel (uneigentlich gesprochen, weil es der Bauch ist) am meisten zugespitzt der Kreis, aus ihm gehen immer stumpfer werdende Ellipsen *BE* hervor, bis sie endlich in der Geraden *BA* verschwinden, welche den uneigentlichen Scheitel *E* und den Mittelpunkt *D* in A hat, den eigentlichen Scheitel aber in B, und die in A als bloße Gerade ganz abgeplattet ist. Wenn AE der dritte Teil von CA ist, so werden EA und AD gleich; ist aber EA kleiner, so übertrifft sie die AD, ist sie größer, so wird sie von der AD übertroffen.

Folgesatz II. Ohne Zweifel kann man aus den Tangenten einen Schluß ziehen auf die Art der Krümmung eines Stumpfes. Wenn nämlich die Tangenten des Stumpfes, die in den Punkten des Umfangs der Schnittkreise gezogen werden — in Fig. 9 sind dies die Geraden FY, GY in den Punkten F und G —, einen gemeinsamen Schnittpunkt Y haben derart, daß YC mit CO, der halben Differenz der Durchmesser des mittleren und des schneidenden Kreises, gleich ist, dann haben wir den Stumpf einer parabolischen Spindel; wenn CY kleiner ist, so gehört der Stumpf einer hyperbolischen Spindel an, ist CY größer, so ist der Stumpf erstens ein Teil einer Pflaume, dann einer Zitrone (wenn YF zu FO sich verhält wie YC zu CO), und endlich der einer Art von elliptischen Oliven, wenn CY das Doppelte von CO ist.

Lehrsatz XXVIII. Wenn die vier Kegelschnittsarten, ein Kreis, verschiedene Ellipsen, eine Parabel und verschiedene Hyperbeln sich sämtlich im gemeinsamen Scheitel berühren, und außerdem zwei vom Scheitel gleich weit entfernte Punkte gemeinsam haben, so wird jeder Kegelschnitt von allen andern in denselben zwei Punkten geschnitten, und der Kreisbogen zwischen den Schnittpunkten ist der äußerste; er umfaßt die Ellipsenbogen, diese den Parabelbogen; die innersten Bogen sind hyperbolisch, und zwar liegen unter ihnen diejenigen weiter im Innern, welche stumpfer und ihren Asymptoten näher sind.

Da nämlich Kegelschnitte von verschiedener Art und auch verschiedene derselben Art angenommen werden, so werden sie also keine gleichen Teile besitzen können; entweder berühren sie einander in einem einzigen Punkt, oder sie werden sich gegenseitig schneiden; die zwischen den Schnittpunkten liegenden Bogen werden aber alle voneinander gänzlich getrennt bleiben (*Apoll.* IV. 24). Weil vorausgesetzt wird, daß sie sich alle im Scheitel des Kegels gegenseitig berühren, daß sie aber auch in zwei andern Punkten zusammentreffen, so wird also kein einziger mit irgend einem der übrigen in mehreren andern Punkten zusammentreffen, mag man auch die Parabeln und Hyperbeln ins Unendliche fortsetzen (*Apoll.* IV. 26). Da aber drei Punkte als gemeinsam vorausgesetzt sind, so können sie sich nicht in zweien von diesen Punkten berühren. Denn würden sie sich in zweien berühren, dann könnten sie sich im dritten nicht treffen (*Apoll.* IV. 27). Daraus folgt also, daß die beiden andern gemeinsamen Punkte Schnittpunkte sind; denn jeder gemeinsame Punkt ist entweder ein Berührungs- oder ein Schnittpunkt. In den letzteren ändert sich aber die Reihenfolge. Nun sind drei Punkte des Kreises angenommen worden, es wird also nur ein einziger Kreis durch sie hindurchgehen nach dem Beweis des *Euklid* im 3. Buche. In ähnlicher Weise gibt es auch nur eine einzige Parabel. Nehmen wir verschiedene an: sollen sie sich im Scheitel des Kegels berühren, so werden sie, wenn sie verschieden sind und einander schneiden, im gemeinsamen Schnittpunkt auch verschiedene Tangenten haben; daher führt diese Annahme nach derselben Schlußweise, welche *Apollonius* IV. 28 zu dem Beweise anwendet, daß zwei Parabeln einander nicht in mehr als einem Punkt berühren können, auf Unmögliches, und das Ganze würde seinem Teil gleich. Es geht also nur eine einzige Parabel durch die drei Punkte hindurch. Da die Hyperbeln außerhalb der Schnittpunkte umso weiter auseinanderlaufen, je stumpfer sie sind, was von selbst einleuchtet, so müssen sie innerhalb umso näher sein. Und weil unter den ähnlichen Hyperbeln, nämlich unter jenen, deren Asymptoten denselben Winkel bilden, diejenige als größer angesehen wird, welche die größeren Achsen hat, so sind also die stumpfen Hyperbeln in ihrer Art kleiner als die spitzen, mit andern Worten, die innere hat näher gelegene Asymptoten, sowohl weil sie kleiner, als auch weil sie stumpfer ist als die ihr benachbarte; denn die stumpferen Hyperbeln nähern sich, wie im vorhergehenden Lehrsatz erwähnt, ihren Asymptoten immer mehr und mehr und fallen schließlich mit ihnen zusammen. Auch das ist im früheren Lehrsatz bewiesen, daß der Mittelpunkt bei der Reihe der stumpferen Hyperbeln der Tangente näher liegt, als diese dem Scheitel, während er bei den andern spitzeren weiter entfernt ist.

Dies kann auch vollkommen gezeigt werden nach *Apoll.* I. 37. Da die Hyperbeln außerhalb der Schnittpunkte die Parabel umfassen, so umfaßt umgekehrt die Parabel jene innerhalb; ebenso wie die Parabel außerhalb der Schnittpunkte die Ellipsen umfaßt, so schließen die Ellipsen den zwischen den Schnittpunkten liegenden Parabelbogen ein. Da nun der Kreis, welcher die Ellipsen im Scheitel berührt, sie in zwei andern Punkten schneiden soll, so werden durch den Kreis elliptische Monde abgeschnitten, die außerhalb des Kreises stehen; bevor sie sich schneiden, werden also die Ellipsenbogen innerhalb der Kreisbogen liegen.

Lehrsatz XXIX. Wenn die Zitrone, die Pflaumen, die parabolische Spindel, die hyperbolischen Spindeln und der Doppelkegel, die sämtlich abgestumpft sind, sowohl dieselben Schnittkreise wie auch denselben Kreis um die Mitte des Körpers haben, so ist die Zitrone der größte Körper, die übrigen folgen bezüglich der Größe in der angeführten Ordnung aufeinander.

Dies kann leicht auf Grund des Vorhergehenden bewiesen werden. Die Zitrone wird nämlich durch ein Kreissegment erzeugt, die Pflaume durch ein vertikales Ellipsensegment, die Spindel durch ein vertikales Parabel- oder Hyperbelsegment, der Doppelkegel durch ein gleichschenkliges Dreieck. Da aber vorausgesetzt ist, daß alle Körper dieselben Schnittkreise besitzen, so werden sich die Bogen aller Erzeugungslinien in zwei Punkten schneiden, durch welche die Schnittkreise hindurchgehen. Und da auch alle Körper um ihre Mitte denselben größten Kreis haben sollen, so werden sich die erzeugenden Linien sämtlich im gemeinsamen Scheitel berühren, welcher bei der Umdrehung irgend einer Figur jenen um die Mitte des Körpers laufenden Kreis beschreibt. Da sich aber die Kegelschnitte in der hier angeführten Reihenfolge gegenseitig umfassen, so werden sie einander auch in derselben Reihe an Rauminhalt übertreffen. Es wird also der doppelte Kegelstumpf (in Fig. 9 zwischen HAE, GCF) der kleinste Körper sein; ihn umgeben die verschiedenen Hyperbeln mit einzelnen Tuniken, so daß abgestumpfte hyperbolische Spindeln entstehen; durch die Parabel kommt nur ein einziger Mantel hinzu, so daß eine parabolische Spindel entsteht; dann fügen wieder die verschiedenen Ellipsen einzelne Tuniken hinzu, und es entstehen abgestumpfte elliptische Pflaumen. Schließlich umkleidet der Kreis durch den Bogen $FSQCG$ den Kegel mit einer Tunika und verwandelt ihn damit in eine abgestumpfte Zitrone.

Lehrsatz XXX. Ein Problem für die Geometer.

Den Inhalt desjenigen Teils einer Zitrone, Olive, Pflaume oder einer Spindel zu suchen, der durch eine zur Achse parallele Ebene abgeschnitten wird.

Die Brauchbarkeit dieses Problems kann leicht eingesehen werden, aber seine Erkenntnis steht aus. Bei der Entwicklung des Zitronenkörpers in einen geraden Körper, d. h. in den Teil eines Zylinderprismas, entspricht einem derartigen Zitronensegment ein Segment jenes Zylinderteils, das von einer Oberfläche begrenzt wird, die einer zylindrazeischen Fläche oder noch besser einem in bestimmter Weise eingerollten Blatt Papier ähnlich ist: denn nach der einen Richtung hin ist sie gerade und parallel einer Geraden in der Grundfläche des zylindrazeischen Teils; nach oben aber ist sie gekrümmt, doch weist sie sicherlich nicht die Krümmung eines Kreises und, soviel ich weiß, auch nicht die eines Kegelschnitts auf, obgleich sie unter den Kegelschnitten der Ellipse am nächsten kommt, weil die Krümmung oben stärker wird. Und wenn auch diese Krümmungslinie bekannt wäre, so würde sich daraus, so weit es wenigstens bis jetzt feststeht, doch noch nicht der Inhalt eines solchen Teils ergeben.

Schluß dieser Ergänzung.

Wohlan denn, *Snellius*, du Leuchte unter den Geometern unseres Jahrhunderts, erbringe uns einen rechtmäßigen Beweis für dieses Problem und andre hier erwünschte Lehrsätze; dir ist, wenn ich nicht irre, die Entdeckung vorbehalten, daß es einen Mäzenas gibt, der voll Hochachtung und Bewunderung deines glänzenden Namens dir ein eines solchen erfindungsreichen Geistes würdiges Geschenk darbringt, durch welches du nämlich auch eine bedeutende Vergrößerung deines Vermögens erfahren würdest, und dich für die Berechnung der Zitrone mit einem goldenen Apfel belohnt.

Zweiter Teil.

Stereometrie des österreichischen Fasses im besonderen.

Zu welcher Art der vorausgehenden Figuren das österreichische Faß gehört.

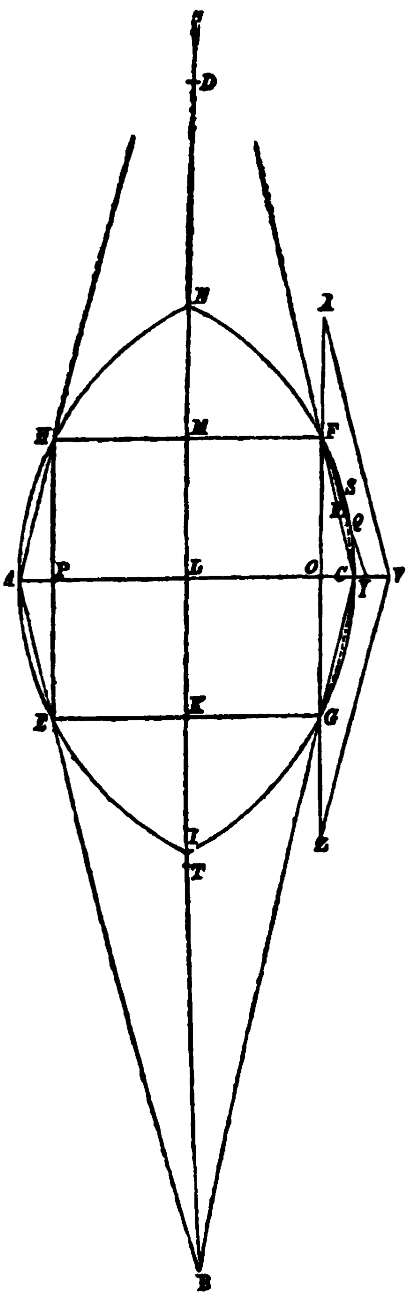
Nach den allgemeinen Betrachtungen dessen, was mir in der Stereometrie der regelmäßigen Körper sowohl nach *Archimedes* wie nach meinen eigenen Entdeckungen zur Erkenntnis nützlich schien, trete ich meinem Vorhaben näher und fasse vieles von *Archimedes* noch nicht berührte über die Körper in derselben Kugel, ihre Parallelepipede, Zylinder und Kegel, aber auch das, was sich allein auf die Form des österreichischen Fasses zu beziehen scheint, unter der Aufschrift »Stereometrie des österreichischen Fasses« zusammen und schließe es der vorangehenden Ergänzung zu *Archimedes* an. Das österreichische Faß hat nämlich die Form eines bauchigen Zylinders, oder, genauer gesprochen, man kann es sich zusammengesetzt denken aus zwei abgestumpften Kegeln, deren nach entgegengesetzten Richtungen weisende Scheitel durch die hölzernen Faßböden abgeschnitten sind, und deren gemeinsame Basis, die Trennungsfläche beider Kegel, der größte Kreis längs des Bauches des Fasses ist.

In der Fig. 9 ist $HEFG$ der Zylinder, ABC der eine Kegel, der andre gleiche erstreckt sich von AC nach ND, der eine abgeschnittene Scheitel ist EBG, der andre wird von HF abgeschnitten. Die abgestumpften Kegel sind $AEGC$ und $AHFC$, die gemeinsame Grundfläche AC.

Was von den Zylindern und abgestumpften Kegeln gilt, kann auch auf die Faßfigur angewendet werden, weil diese von der Zylinderform nur wenig und von der Form des abgestumpften Kegels noch weniger abweicht, sobald nur die Dauben, die hier durch die Gerade CRF dargestellt werden, nach außen schwach gekrümmt sind.

Vollkommen genau ist jedes Faß der mittlere Teil einer durch einen Kreisabschnitt erzeugten Zitrone oder einer durch ein vertikales Ellipsensegment erzeugten Pflaume oder einer parabolischen, meistens aber einer hyperbolischen Spindel mit beiderseits gleich abgeschnittenen Scheiteln. Der Grund, weshalb ich die hyperbolische Spindel anführe, ist der, daß die Fässer die Rundung vorzüglich in der Mitte haben, und daß sie sich gegen die Böden hin gewöhnlich einer Kegelfläche anschließen, damit die Reifen leichter angetrieben und dadurch fester angezogen werden können. Dies ist in der Tat bei der Hyperbel und bei dem durch sie erzeugten Konoid und der Spindel der Fall, indem ihre Äste von der Krümmung in der Mitte an allmählich in die Asymptotenrichtung übergehen. Dasselbe ist zum Teil auch bei der parabolischen Spindel und der elliptischen Pflaume der Fall, am deutlichsten ist es an der hyperbolischen Spindel, viel weniger aber an der elliptischen Pflaume, jedoch nicht an jeder, sondern nur an schlanken, von einem vertikalen Ellipsensegment erzeugten, dessen Achse nach der Abstumpfung nicht bis an den Brennpunkt heranreicht, welche Einschränkung auch für die parabolische Spindel Geltung hat. Bei der Olive, welche von einem zwischen den Scheiteln liegenden Ellipsensegment erzeugt wird, findet das Entgegengesetzte statt, denn sie krümmt sich nach den Enden hin stärker als in der Mitte und weicht dadurch von der Faßfigur ab. Gleichwohl will ich nicht in Abrede stellen, daß manchmal wegen des kaum merkbaren Unterschiedes jener Figuren ein Faß die Form einer ab-

Fig. 9.



gestumpften Olive hat, aber nicht nach der Absicht des Verfertigers, sondern infolge eines Fehlers in der Ausführung. Niemals aber ist, wie ich glaube, ein Faß entsprechend dem Bauche eines Archimedischen Sphäroids gebaut worden, welches *Clavius* (Geom. pract. V. 10) als der Wirklichkeit zunächst kommend annimmt (denn die andern Formen, deren Entstehung ich oben gelehrt habe, waren ihm noch nicht bekannt); »doch bin ich bereit«, sagt *Clavius*, »wenn jemand eine genauere Form findet, sie gern und dankbar anzunehmen.« Denn ein verlängertes Sphäroid, das in der Mitte die richtige der Faßform angepaßte Krümmung hat, besitzt gegen die abgestumpften Scheitel hin eine so starke Rundung, daß niemals ein Reifen längere Zeit darauf haften würde. Nimmt man aber den Bauch eines sehr schlanken Sphäroids, so vermindert man zwar diesen Nachteil der allzu starken Krümmung an den Enden, dann hat aber das Faß keinen Bauch, und man könnte es meiner Meinung nach gleich als reinen Zylinder konstruieren.

In der Fig. 9 sind HAE und FCG die Bogen eines Kreises mit dem Durchmesser BT, sie beschreiben eine abgestumpfte Zitrone, deren abgeschnittene Scheitel HNF und EIG sind. Die punktierte Linie zwischen der Geraden FRC und dem Bogen FSC bezeichnet eine hyperpolische Spindel, mit dem Hyperbelscheitel C, dem Zentrum V und den Asymptoten VX und VZ, deren Zug sich die Hyperbel CF gegen F hin mehr und mehr anschmiegt und hier von der Tangente FQY, welche den Bogen FSC in Q schneidet, kaum mehr zu unterscheiden ist.

Wie man die Visierrute als falsch erkennen kann, und wie man sich ihrer Richtigkeit versichert.

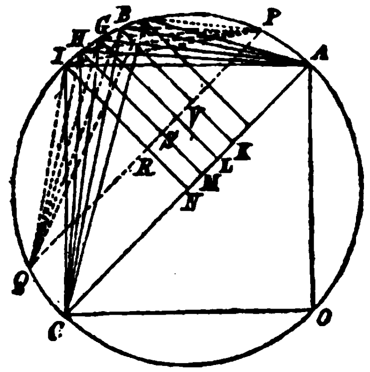
Um zum Ausgangspunkt meiner Untersuchungen zurückzukehren, so war meine erste Frage über die Visierrute die, wie dieselbe Länge AF verschiedenen Faßfiguren zukommen kann, die doch nicht gleichen Inhalt haben.

Um dies in der Ebene zu zeigen, empfiehlt es sich, statt des Zylinders das Parallelogramm zu betrachten, in welchem der Zylinder durch einen Achsenschnitt getroffen wird. Denn was für den Zylinder richtig ist, das kann auch als gültig angesehen werden für den abgestumpften Kegel $AHFC$ und seinen Achsenschnitt, nämlich das Trapez $AHFC$, in das auch die Visierrute hineinfällt. Diese ebene Fläche schien mir mit mit dem Zylinderinhalt größer und kleiner zu werden.

Mit diesem Gegenstande soll sich der Lehrsatz I beschäftigen: Die Achsenschnitte gerader Zylinder, die gleiche Diagonalen haben, sind von ungleichem Flächeninhalt, außer wenn bei ihnen das Verhältnis des Durchmessers zur Höhe dasselbe oder das umgekehrte ist; unter ihnen ist der Schnitt jenes Zylinders am größten, dessen Höhe dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist.

Es sei CI der Durchmesser der Grundfläche eines Zylinders, IA seine Höhe, die dem Durchmesser gleich ist und die halbe Faßlänge vorstellt. Der Schnitt des Zylinders sei das Rechteck $AIOC$, das hier ein Quadrat ist, AC die Diagonale, welche die quer vom Spundloch A bis zum Rand des Bodens IC reichende Visierrute darstellt. Weil der Zylinder als gerade vorausgesetzt ist, so wird der Winkel CIA ein rechter sein. Es werde AC in N halbiert und um N mit dem Halbmesser NA ein Halbkreis beschrieben, welcher durch I gehen muß, weil AIC ein rechter Winkel ist. Weil die Geraden AI und IC gleich sind, so sind die Bogen AI und IC Quadranten des Kreises, die Winkel INA und INC sind rechte, und IN ist die Senkrechte auf AC.

Fig. 10.



Verbindet man irgendwelche Punkte eines Quadranten, z. B. H und B durch die Linien HA, HC, BA, BC mit den Endpunkten A und C des Durchmessers, so verwandelt sich bei unverändert bleibender Diagonale AC das Quadrat $AICO$ oder seine Hälfte, das Dreieck AIC, in eine Figur AHC, ABC, wobei der rechte Winkel I bei H und B auftritt, weil ja alle demselben Halbkreis angehören: so sind AHC, ABC die Hälften eines geraden Zylinderschnitts mit den Durchmessern CH und CB und den Höhen HA, BA.

Ich behaupte, daß die Fläche AIC am größten, daß AHC kleiner und ABC noch kleiner ist, weil B vom Punkt I weiter entfernt liegt. Fällen wir von den Punkten B und H auf den Durchmesser AC die Normalen HM und BK. Nach den Lehrsätzen des *Euklid* ist jedes Dreieck flächengleich mit einem Rechteck über der halben Grundlinie AC und mit der Dreieckshöhe NI, MH, KB als Seite. Deshalb verhält sich IN zu HM und BK wie die Fläche AIC zu AHC und ABC. In dem Quadranten AI sind aber alle zum Halbmesser IN parallelen Geraden, wie HM, BK, kleiner als der Halbmesser IN, und die entfernter liegende Gerade BK kleiner als die näher gelegene HM. Es ist mithin die Fläche AHC kleiner als AIC, und ABC wiederum kleiner als AHC. In derselben Reihenfolge sind also die Rechtecke, das Doppelte der Dreiecke, kleiner.

Ich behaupte auch, daß die Zylinder, bei denen das Verhältnis der Höhen zu den Durchmessern der Grundflächen das Umgekehrte ist, gleich große Schnittflächen haben. Ist nämlich AB der Durchmesser der Grundfläche und BC die Höhe eines Zylinders, so ist klar, daß das Dreieck ABC, die Hälfte des Achsenschnitts, denselben Inhalt wie früher hat, wenn BC der Durchmesser und AB die Höhe ist, wenn also das Verhältnis dieser Linien umgekehrt wird.[13])

Ich will den Fehler nicht verhehlen, in den mich am ersten Tage die flüchtige Betrachtung dieses Satzes verfallen ließ. Denn diese Erwähnung wird dem Leser eine Mahnung sein, sich vor ähnlichen Fehlern auch sonst zu hüten. Ich habe irrtümlich so geschlossen: wenn ähnliche Flächen im quadratischen, ähnliche Körper im kubischen Verhältnisse der Seiten stehen, so wird auch bei nicht ähnlichen Körpern, sobald sie nur dieselbe Diagonale AC besitzen, das Verhältnis der Inhalte immer analog sein dem Verhältnis der Flächen und Linien. Dies ist aber falsch; und wenn ich den Bindern den Rat gegeben hätte, den Durchmesser des Faßbodens halb so groß wie die Länge der Dauben zu wählen (wie es die oberflächliche Betrachtung der auszumessenden Fläche verlangt, und wenn diese Nachlässigkeit auch auf die auszumessenden Körper Anwendung gefunden hätte), so hätte ich ihrer Kunst außerordentlich geschadet und sie weit von ihrem Ziele weggeführt. Denn nicht der Zylinder, der den größten Achsenschnitt hat, hat auch den größten Rauminhalt. Dies wird auch aus dem Späteren hervorgehen, jetzt aber will ich das für den geraden Zylinder Gesagte auch auf den Kegelstumpf ausdehnen.

Lehrsatz II. Für abgestumpfte Kegel bleibt alles ungeändert, außer dem einen, daß sich für die dem ersten Stumpf zunächst stehenden, dessen Seite dem Durchmesser der (kleineren) Basis gleich ist, das Verhältnis der Schnittflächen rascher, für die weiter entfernten aber langsamer ändert als für die Zylinder, die an die Stelle der Kegelstumpfe treten können.

Weil der Winkel zwischen der Seite des Stumpfes und dem Durchmesser der kleineren Grundfläche größer als ein rechter ist, so gehört er nicht zu einem Halbkreis, sondern zu einem Bogen, der kleiner ist als der Halbkreis. Es sei PQ eine zu AC parallele Gerade, die den Halbkreis in den Punkten PQ schneidet, es seien ferner IN, HM, BK die Normalen in den Punkten R, S, V, und es mögen die Punkte I, H, B mit den Punkten P und Q durch Gerade verbunden sein. Dann stellt PQ die Visierrute, QI, QH, QB den Durchmesser der Grundfläche des abgestumpften Kegels vor. IP, HP, BP sind die Seiten der Stumpfe und gleich den halben Daubenlängen. Die stumpfen Winkel QIC, QHP, QBP sind untereinander gleich, weil sie in demselben Segment PIQ liegen, und sie bilden eben die Grundlagen für diejenige Veränderung durch alle diese Formen hindurch, welche ich hier erklären will.

Es verhält sich wieder die Fläche PIQ zu PHQ und PBQ wie IR zu HS und BV; da nun von den ungleichen Strecken IN und HM die gleichen Teile RN und SM abgezogen sind, so ist das Verhältnis der Reste IR und HS größer (als das von IN und HM). Es ist daher der Unterschied der Dreiecke PIQ und PQH bedeutender als der von AIC und AHC. Das Wachstum der Perpendikel ist am stärksten bei A und daher bei P geringer. Bei P verschwinden die Höhen der Stumpfe, bei A aber die Höhen der Zylinder; daher nehmen die Flächen PBQ in der Nähe des Endpunktes P langsamer ab als die Dreiecke ABC bei A. Nach dem früheren nehmen aber vom Anfangspunkt I die Flächen PHQ rascher ab als die Dreiecke AHC. Dieser Lehrsatz ist sehr bemerkenswert in Hinsicht auf eine andere weitläufigere Spielerei (hallucinatio), betreffend die Vergleichung von abgestumpften Kegeln untereinander, deren später Erwähnung getan werden wird.

Die Untersuchung dieser genannten Spielerei enthält der folgende Lehrsatz.

Lehrsatz III. Die Inhalte gerader Zylinder, deren Achsenschnitte gleiche Diagonalen haben, verhalten sich nicht wie ihre Schnittflächen; und nicht derjenige Zylinder hat den größten Inhalt, dessen Achsenschnitt am größten ist.[14]

Wenn in der letzten Figur AIC die Hälfte der Fläche IO, des Achsenschnitts eines Zylinders ist, und IO den Durchmesser der Grundfläche bedeutet, so entsteht dadurch, daß die Fläche $AIOC$ längs des Durchmessers IC verschoben wird, ein rechtwinkliges Parallelepiped, das den Zylinder berührt. Nach Lehrsatz 3 der vorausgehenden Stereometrie der regelmäßigen Körper verhält es sich zum Inhalt des zugehörigen Zylindes wie 14 zu 11. Daher ist unter allen Parallelepipeden, welche dieselbe Diagonale AC im Achsenschnitt haben, dasjenige das größte, welches zum größten Zylinder gehört. Aber zur Figur, deren Hälfte AIC ist, gehört nicht das größte Parallelepiped, obgleich die Schnittfläche $AICO$ die größte ist. Ich will dies in folgender Art beweisen.

Es sei in dem Quadranten IA der dem Punkt I, dem Ende des Quadranten, nächstgelegene der Punkt H. Weil AHC eine andere Figur ist als AIC, und weil sie beide dieselbe Diagonale AC haben, so verhalten sich die Flächen AIC und AHC zueinander wie ihre Perpendikel IN und HM; sie werden also am Ende des Quadranten in der kleinsten Proportion stehen und nahezu gleich sein, weil auch die durch einen gewissen Zwischenraum getrennten Geraden IN und HM in dem kleinsten Verhältnis zueinander stehen: dieses Verhältnis wird um so größer, je mehr sie sich dem Anfang des Quadranten A bei gleichbleibender Entfernung nähern. Damit ein Körper erhalten wird, müssen die Flächen AIC und AHC mit IC und CH multipliziert werden, und es verhält sich per aequepollentiam der parallelepipedische Körper $AICI$ zu $AHCH$ wie das Rechteck $NI \times IC$ zu $MH \times AC$; das Verhältnis CH zu IC ist aber größer als das von IN zu HM: denn die Sehne CI gehört zum vierten Teil des Kreises, CH aber zu einem etwas größeren Teil, und ihre Hälften sind die Perpendikel des halben Quadranten und eines etwas größeren Kreissektors; jene stehen aber nicht im kleinsten Verhältnis, weil ja dieses in der Mitte des Quadranten größer ist als am Ende, wiederum denselben Zwischenraum zwischen den Perpendikeln vorausgesetzt.

Wenn also die Perpendikel denselben Abstand haben, z. B. die Hälfte des Bogens HI, so stehen sie beim Ende des Quadranten I in kleinerem Verhältnis als die Hälften von CI und HI in der Mitte des Quadranten, welche Hälften ebenfalls den Abstand von der Größe des halben Bogens HI haben. Weil zwischen den Hälften von CI und HI ein größerer Unterschied besteht, als zwischen den Perpendikeln bei I, welche um den halben Bogen HI voneinander abstehen, so wird auch die Differenz der ganzen Strecken CI und CH als das Doppelte der früheren größer sein als das der Perpendikel IN und HM, die um den ganzen Bogen

HI voneinander abstehen. So findet man also, daß die Differenz zwischen *IC* und *CH* größer ist als jene von *HM* und *IN*. Obgleich das *HM* des zweiten Dreiecks nur um weniges kleiner ist als das *IN* des ersten, so ist doch anderseits das *CH* des zweiten Dreiecks um vieles größer als das *CI* des ersten. Es ist daher das Rechteck *MHC* größer als *NIC*, und ebenso ist der Zylinder und sein Parallelepiped *AHCH* größer als *AICI*, während im Gegensatz dazu die Schnittfläche *AHC* des Zylinders *AHCH* früher kleiner als *AIC* gefunden wurde. Das Verhältnis der Körper *AICI* und *AHCH* ist also nicht analog dem der Flächen *AIC*, *AHC*. Und *AIC* ist zwar die größte unter allen Flächen über derselben Diagonale, der Körper *AICI* dagegen ist nicht der größte, sondern *AHCH* ist größer.[14])

Anwendung und daraus folgendes Resultat. Da die Körper von *I* an gegen *H* zu wachsen, habe ich durch Rechnung (logistice) untersucht, welches der größte Körper ist, denn der Körper wächst nicht beständig bis nach *A*, sondern in der Nähe von *A* wird er wieder kleiner und wird endlich mit der Fläche *ABC* im Punkte *A* vollständig verschwinden, weil die Höhe des Zylinders, analog gesprochen, ein Punkt wird, nämlich *A*, und der Durchmesser der Grundfläche *AC* mit der Diagonale zusammenfällt.

Der Vorgang war folgender: den Sinus der Bogen *AH*, *AB* multiplizierte ich mit dem Sinus der Hälfte des Bogens *HC*, *BC* der Reihe nach für alle Grade des Quadranten. Da aber die Multiplikation der Sinus sehr verdrießlich ist, gebe ich einen kürzeren Weg an: es sei die Diagonale 20, ihr Quadrat 400, die Höhe *AG* sei 1, das Quadrat davon ist ebenfalls 1; dies von 400 subtrahiert, läßt das Quadrat von *GC* übrig 399; mit der Höhe multipliziert, kommt für den Inhalt dieser Säule 399 heraus im Vergleich zu den übrigen. Bei dem früheren Vorgang achtete ich darauf, wo zuerst die Zuwächse der Quotienten oder der Körperinhalte verschwanden, und von welchem Betrage an sie wieder abnahmen, und notierte diese Sinus. Als ich die Rechnung nach dem Verlauf einer Nacht wieder ansah, fand ich, daß der Punkt *G* des Kreisumfangs, für welchen der Körper den größten Inhalt bekommt, mit *AC* verbunden die Seite *AG* des der Kugel *AIC* eingeschriebenen Würfels und die Diagonale *GC* der Seitenfläche des Würfels oder die Seite des eingeschriebenen Tetraeders ergibt.

Das wird denn auch in den folgenden Lehrsätzen bewiesen werden. Merke deshalb, was in diesen Sätzen vorgenommen wird.

Lehrsatz IV. Unter allen Parallelepipeden oder Säulen, die einer und derselben Kugel eingeschrieben sind und auf zwei quadratischen, einander entgegengesetzten Grundflächen stehen, ist der Würfel am größten.

Ein Beweis dieses Theorems wird an dieser Stelle geführt, obgleich es aus einem Analogieschluß klar hervorgeht. Die Kreisfläche ist unter allen ebenen Flächen von gleichem Umfang die umfassendste, wie *Pappus* im 5. Buche seines Werkes beweist. Unter den ebenen Flächen, welche von gleichvielen Seiten begrenzt sind und gleichen Umfang haben, sind diejenigen die größeren, welche dem Kreise ähnlicher sind. Unter den Segmenten verschiedener Kreise mit gleichen Umfängen ist wieder das halbkreisförmige das umfassendste. In derselben Art hat der Würfel unter allen regelmäßigen Körpern, welche von mit der Würfeloberfläche gleichen Flächen umschlossen werden, den größten Inhalt. Und die isoperimetrischen Polyeder sind umso inhaltsreicher, je mehr sie sich in der Gestalt und der Zahl der Seiten der Kugel nähern; das Ikosaeder ist der größte regelmäßige Körper, weil es von den meisten Flächen umschlossen ist, wie der Kreis von unendlich vielen gewissermaßen geraden Linien. Dies ist alles bei *Pappus* im 5. Buche enthalten.

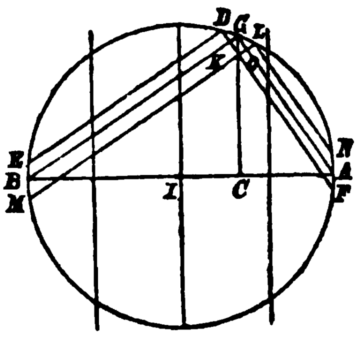
Tafel der bei der Verfertigung der österreichischen Fässer verwendeten Verhältnisse.

Höhe	Basisdurchmesser	Inhalt der Säule
1	20 —	399
2	20 —	792
3	20 —	1173
4	20 —	1536
5	19 +	1875
6	19 +	2184
7	19 —	2457
8	18 +	2688
9	18 —	2871
10	17 +	3000
11	17 —	3069
Subsemiduples Verhältnis		3080
12	16	3072
13	15 +	3003
14	14 +	2856
Einander gleich		2828
15	13 +	2625
16	12	2364
17	11 —	1887
18	8 +	1368
19	6 +	741
20	0	0

Archimedes hat bewiesen, daß unter allen oberflächen-gleichen Segmenten verschiedener Kugeln jene Halbkugel am größten ist, welche von der gleichen Oberfläche begrenzt wird. So hat die Kreis- und Kugelform den Vorzug vor den übrigen Formen, mit denen sie oberflächengleich ist. Wenn aber die Bedingung der Oberflächengleichheit aufgehoben wird, und wenn dafür den Polyedern dieselbe Kugel umgeschrieben ist, so tritt bei einigen das Gegenteil ein, daß nämlich das Dodekaeder größer ist als das Ikosaeder, welchen Beweis *Apollonius* und *Hypsikles* zu den Sätzen des *Euklid* hinzugefügt haben; dies rührt aber her von eben demselben Wesen der Kugel und von der Ähnlichkeit des Körpers mit ihr, welche hier die erste Rolle spielt. Denn früher, als die Oberflächen gleich waren, bestand die Ähnlichkeit mit der Kugel in der Menge der Flächen. Hier, wo die gleiche Kugel die Ecken der verschiedenen Körperformen enthält und die Anordnung auf ihr bestimmt ist, besteht die Ähnlichkeit in der Zahl der Ecken, die beim Dodekaeder größer ist als beim Ikosaeder.

Weil sich dies so verhält, so ist leicht ersichtlich, daß auch unter den Körpern, welche von der gleichen Zahl von Flächen in der Kugel begrenzt werden, derjenige der größere ist, der der Kugel ähnlicher ist; hier besteht die Ähnlichkeit in der Gleichheit und Ähnlichkeit der Oberflächen und der Anordnung der Ecken. Diese Eigenschaften kommen dem Würfel in höherem Grade zu als den übrigen Parallelepipeden in der Kugel, und deshalb ist der Würfel größer. Dieser Schluß ist nur ein solcher ex analogia; ich will jetzt den vollständigen Beweis führen, der allerdings einige Schwierigkeiten bietet deshalb, weil man sich in der Figur sehr kleine Körperschnitte zu denken hat.

Fig. 11.



In der nächsten beigesetzten Figur sei AGB der größte Kugelkreis, AB der Durchmesser und die Achse der Kugel, ferner sei AG die Seite des der Kugel eingeschriebenen Würfels und GB die Diagonale einer quadratischen Seitenfläche des Würfels. Die derselben Kugel eingeschriebenen Säulen mit je zwei quadratischen Grundflächen sind entweder höher als der Würfel und haben kleinere Grundflächen als die Seitenfläche des Würfels, oder sie sind niedriger mit einer größeren Basis.

Es sei zunächst die Säule höher als der Würfel. Wir ziehen zur Höhe AG des Würfels die etwas längere Parallele DF im Kreise, welche GB in K schneidet, und ähnlich legen wir parallel zur Diagonale GB der Seitenfläche des Würfels durch den Endpunkt D der Höhe der Säule die Gerade DE: ich behaupte, daß der Inhalt der Säule FDE kleiner ist als der des Würfels AGB. Denn es verhält sich DK zu BK wie GK zu FK, und anderseits GK zu KD wie FK zu KB; AG ist aber kleiner als FK, und GB ist größer als KB: folglich ist das Verhältnis AG zu GB größer als FK zu KB. AG und GB verhalten sich aber wie 1 zu $\sqrt{2}$, das Verhältnis GK zu KD ist daher kleiner als 1 zu $\sqrt{2}$, und GK kann entweder größer sein als die Hälfte von KD, oder es ist gleich mit KD, oder es ist länger als dieses.

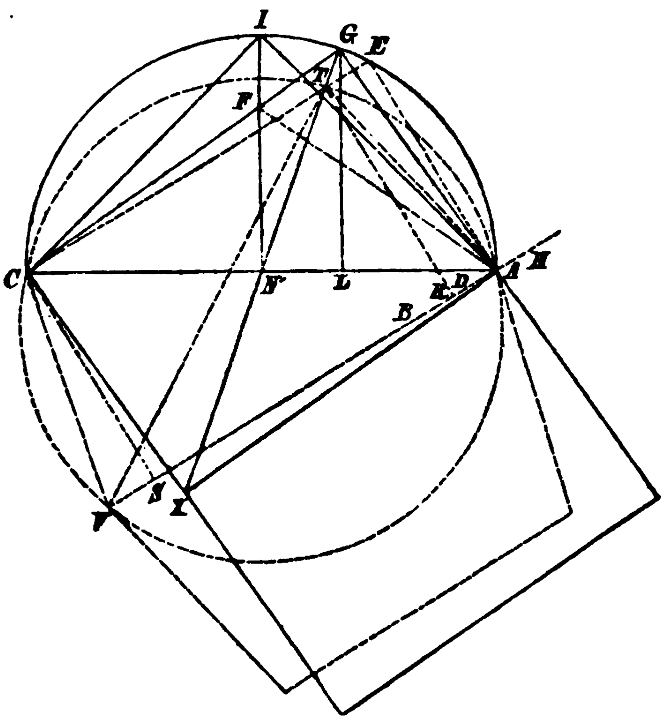
Tatsächlich hat eine Vergrößerung nach der Höhenausdehnung des Würfels durch das Ansetzen der Körper mit den Säulenquadraten als Grundflächen und dem Teil KD als Höhe auf beiden Seiten stattgefunden. Dagegen findet eine Verminderung der Dicke des Würfels durch die vier gleichen quadratischen Platten rings um die Säule statt von der Größe des Unterschieds zwischen der halben Seite des Würfelquadrats und der halben Seite des Quadrats der Säule; die Größe dieser Abnahme verhält sich zu GK, der Abnahme der halben Diagonale, wie AG zu GB, also wie 1 zu $\sqrt{2}$. Damit ist aber noch nicht die ganze Verminderung ausgedrückt, weil diese vier Platten von quadratischem Querschnitt, welcher kleiner ist als ein Seitenquadrat des Würfels, noch von zwölf Säulchen umgeben sind, welche ebenfalls von der Dicke des Würfels abgezogen sind. Weil die vier Platten um die Säulen, welche vom Würfel wegkommen, zusammengenommen größer sind als die beiden oben und unten aufgesetzten Platten zusammen, so wird die gesamte Verkleinerung des Würfels die Vergrößerung nach der Höhe übertreffen. Es sind aber auch die vier Seitenplatten größer als die beiden nach der Höhe aufgesetzten, was ich in folgender Art beweise. Es verhält sich nämlich jede Seitenplatte zur oberen Platte wie die Abnahme der Würfelseite zur Zunahme der Höhe, deren Hälfte KD ist. Dieses Verhältnis ist aber zusammengesetzt aus dem Verhältnis AG zu GB und dem andern GK zu KD. Denn wie sich die Abnahme der halben Seite zur Abnahme der halben Diagonale GK verhält, so verhält sich AG zu GB, das ist der erste Teil des Verhältnisses; der andre Teil ist das Verhältnis GK zu KD. Diese beiden miteinander vereinigt geben einen etwas kleineren Wert als $\frac{1}{2}$. Denn AG zu GB ist $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und GK zu KD ist kleiner als $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Hälfte und etwas weniger als die Hälfte ergeben aber zusammen weniger als das Ganze. Wenn also das Verhältnis einer Seitenplatte zu oberen kleiner ist als das subsemiduple, so wird die obere Platte nicht ganz das Doppelte der Seitenplatte sein, und die eine obere Platte ist nicht vollständig gleich zwei Seitenplatten sondern etwas kleiner als diese, folglich sind die beiden Höhenplatten kleiner als die vier Seitenplatten, und die Vermehrung in der Höhe ist kleiner als die Verminderung an den Seitenflächen des Würfels. Die Säule in der Kugel, welche höher ist als der Würfel, hat also einen kleineren Inhalt als der Würfel.[15])

Zweitens sei die Säule niedriger als der Würfel, und es werde parallel zur Höhe GA des Würfels im Kreise die kleinere Strecke LN als Höhe der Säule, und parallel zur Diagonale GB des Würfelquadrats aus L die Gerade ML als Diagonale der quadratischen Grundfläche der Säule gezogen, welche die GA in O schneidet. So wie früher verhält sich MO zu OA, wie GO, die Verminderung der Höhe auf der einen Seite, zu OL, der Zunahme der halben Diagonale. BG ist aber kleiner als MO, und GA größer als OA: daher ist das Verhältnis BG zu GA, welches im Würfel $\sqrt{2}$ zu 1 ist, kleiner als GO zu OL. Daher ist dieses Verhältnis größer als $\sqrt{2}$. Das Verhältnis des Zuwachses OL der halben Diagonale und jenem der halben Quadratseite ist aber $\sqrt{2}$. Setzt man das semiduple Verhältnis mit dem andern zusammen, welches größer ist als $\sqrt{2}$, so erhält man das Verhältnis von OG, der Verminderung der halben Höhe zum Wachstum der halben Seite mit einem Werte größer als 2. Durch Multiplikation der beiden Würfelquadrate mit OG erhält man zwei Platten, um die der Würfel nach der Höhe vermindert wird. Dagegen erhält man vier Platten über den Würfelquadraten von der Höhe des Zuwachses der halben Seite, die größer sind als der den Würfel umgebende Gürtel. Denn wenn man diese vier Platten ansetzt, so ist die Säule noch nicht vollständig, weil an den vier aufrecht stehenden Seiten vier kleine Säulchen fehlen, anderseits aber ragen diese vier Platten über die Höhe der Säule mit acht andern Säulchen hinaus, welche mit den fehlenden gleich hoch aber doch dicker sind als jene. Die Dicke ist bei diesen OG, bei jenen verhält sie sich zu OL wie AG zu GB, sie ist kleiner als OL und um vieles kleiner als OG. Kurz gesagt, es sind die acht hervorragenden dicken Säulchen größer als die vier fehlenden dünnen. Deshalb sind die vier genannten Platten größer als der den Würfel umgebende Gürtel. Wenn der Zuwachs der halben Seite genau gleich der Hälfte von OG wäre, dann wäre das Produkt von OG in die beiden Quadrate gleich dem Produkt gebildet aus dem Zuwachs der halben Seite und jenen vier Quadraten. Wie bewiesen wurde, ist aber der Zuwachs der halben Seite kleiner als die Hälfte von OG, deshalb sind auch die vier Platten kleiner als die zwei Platten oben und unten, was also an den Seiten des Würfels hinzukommt, ist um vieles kleiner als das, was in der Höhe weggenommen wird. Es ist daher die Säule in der Kugel, welche niedriger ist als der eingeschriebene Würfel, kleiner als dieser. Früher wurde die höhere Säule als kleiner erkannt; es erreicht also keine Säule in der Kugel mit quadratischen Grundflächen und rechteckigen Seitenflächen den Inhalt des derselben Kugel eingeschriebenen Würfels, was zu beweisen war. [16])

Lehrsatz V. Unter allen Zylindern mit gleichen Diagonalen ist derjenige der größte, dessen Basisdurchmesser sich zur Höhe verhält wie $\sqrt{2}$ zu 1, oder wie die Seite des Tetraeders oder die Diagonale des Seitenquadrats zur Seite des derselben Kugel eingeschriebenen Würfels.

Wir wiederholen die zum ersten Lehrsatz gehörige Figur S. 48. Es sei AC die Diagonale des rechteckigen Achsenschnitts des Zylinders, die hier die Meßrute vorstellt, über AC werde der Halbkreis AGC errichtet und AC in drei gleiche Teile geteilt; es seien AL der eine Teil, LC die beiden andern. Zu Punkt L sei die Normale LG errichtet, welche den Kreis in G schneidet; G werde mit A und C verbunden. Weil CL das Doppelte von LA ist, wird CA das Dreifache von LA. Wie sich CA zu AG, so verhält sich auch AG zu AL. Wenn aber drei Größen eine stetige Proportion bilden, so verhält sich das erste Glied zum dritten, wie das Quadrat des ersten zum Quadrat des zweiten; weil also das erste Glied CA das Dreifache des dritten Gliedes LA ist, so wird auch das Quadrat über dem Durchmesser CA das Dreifache des Quadrats über der zweiten Proportionale AG. Und weil das Quadrat über AC gleich der Summe der beiden Quadrate über AG und GC, von denen AG^2 der dritte Teil von AC^2 ist, so wird das Quadrat über GC gleich $\frac{2}{3}$ des Quadrats über AC, und mithin das Quadrat GC das Doppelte des Quadrats AC. Es ist demnach AG die Seite des der Kugel AGC eingeschriebenen Würfels und GC die Diagonale des Seitenquadrats des Würfels oder die Seite des derselben Kugel eingeschriebenen Tetraeders. Ich behaupte, daß der Zylinder mit dem Basisdurchmesser GC und der Höhe GA unter allen Zylindern, welche dieselbe Diagonale AC haben, der umfassendste oder von größtem Inhalt ist. Weil G und C Punkte der Kugeloberfläche sind, und die Gerade GC der Durchmesser der einen Grundfläche ist, so wird der ganze Umfang dieser Grundfläche auf der Kugeloberfläche liegen, ebenso wie die andre Grundfläche, von der A ein Punkt ist. Und wenn AG die Seite des Würfels und GC die Diagonale einer Seitenfläche des Würfels ist, so wird notwendigerweise das Würfelquadrat dessen entgegengesetzte Ecken bei G und C liegen, dem Kreise GC und damit auch der Kugel eingeschrieben sein, ebenso wie die andre durch A gehende kreisförmige Grundfläche. Demnach ist dem so bestimmten Zylinder ein Würfel von gleicher Höhe eingeschrieben, dessen Eckpunkte sämtlich auf der Kugeloberfläche liegen.

Fig. 12.



In ganz gleicher Weise kann man sich in irgend einen Kugelkreis, z. B. in den mit dem Durchmesser IC, die quadratische Grundfläche einer Säule von der Höhe AI eingeschrieben denken, von welcher das eine Paar der einander gegenüberliegenden Ecken bei I und C, das andere bei A und X gelegen ist; so ist dem Zylinder AIC eine gleich hohe Säule eingeschrieben. Das Verhältnis aller Säulen zu den ihnen umgeschriebenen gleich hohen Zylindern ist aber dasselbe; unter allen diesen Säulen in der Kugel ist aber der Würfel der größte Körper, daher ist auch der dem Würfel umgeschriebene Zylinder AGC der größte unter allen andern Säulen wie AIC.

Derselbe Beweis kann an der Figur 10 S. 48 auch in folgender Art geführt werden. Es mögen die Punkte H, G, B drei Zylindern mit derselben Diagonale AC angehören, ihre Grundflächen seien CH, CG, CB, ihre Höhen HA, GA, BA. Es sei aber auch das Quadrat über CG doppelt so groß wie jenes über GA, und es sei CH kürzer, CB länger als CG. Auf CA sind die Normalen HM, GL, BK gefällt. Weil CGA ein rechter Winkel ist, so wird sich das Quadrat von CG zum Quadrat von AG verhalten wie CL zu LA, CL wird also doppelt so groß wie dieses (LA); und wie sich das Quadrat von CH zu dem von HA, so verhält sich auch CM zu MA, und das Quadrat CB zum Quadrat BA wie CK zu KA. Wie sich aber die Quadrate von CH, CG, CB, so verhalten sich auch die Grundkreise der Zylinder zueinander. Daher verhalten sich die Grundkreise auch wie CM, CL, CK. Das Verhältnis von Zylindern setzt sich aber zusammen aus dem der Grundflächen und dem der Höhen. Mithin stehen die drei Rechtecke mit den Höhen HA, GA, BA über CM, CL, CK, welche sich wie die Grundflächen der Zylinder verhalten, im Verhältnis der Zylinder. Andererseits verhalten sich aber die Größen AM, AL, AK zueinander wie die Quadrate der Höhen AH, AG, AB. Es kommt nun dieselbe Größe LM zu LA dazu und von LC weg und ebenso die gleiche Größe LK von LA weg und zu LC dazu. Da nun CL das Doppelte von LA ist, so ist das Verhältnis der kürzeren Strecke CM zur längeren CL größer als das halbe Verhältnis der um ebensoviel längeren MA zur kürzeren LA. Wenn CL 20 und LA gleich 10 ist, ferner CM 19, MA 11, so ist das Verhältnis 20 zu 19 größer als das halbe Verhältnis 11 zu 10 oder 22 zu 20. Denn das Verhältnis 22 zu 20 besteht aus zwei Elementen 22 zu 21, und 21 zu 20, von denen jedes kleiner ist als 20 zu 19. Es ist daher das Verhältnis MA zu LA und ebenso das der Quadrate von HA und GA

kleiner als das doppelte Verhältnis CL zu CM. Das Verhältnis der Geraden HA und GA ist aber das halbe Verhältnis der Quadrate, und das Doppelte des halben Verhältnisses ist das einfache Verhältnis. Also ist das Verhältnis der Höhen HA und GA kleiner als das von LC und MC, das Verhältnis der Grundflächen. Das Rechteck mit den Seiten HA und CM, das den Zylinder CHA darstellt, ist mithin kleiner als das aus GA und CL gebildete, welches den Zylinder CGA darstellt, weil CM in seinem Verhältnis kleiner, HA aber größer ist.

Dasselbe kann auch versis argumentis für den Zylinder CBA bewiesen werden. Denn das Verhältnis der längeren Strecke CK zur kürzeren CL ist kleiner als die Hälfte des umgekehrten Verhältnisses der kürzeren AK zur längeren AL. Wenn $LC = 20$, $LA = 10$, $CK = 21$, $KA = 9$ genommen wird, so ist das Verhältnis 20 zu 21 kleiner als das halbe Verhältnis von 9 zu 10 oder 18 zu 20. Die beiden Elemente des Verhältnisses 18 zu 20, nämlich 18 zu 19 und 19 zu 20, sind einzeln größer als 20 zu 21. Daher ist das Verhältnis von LA zu AK oder das der Quadrate von GA und AB größer als das doppelte Verhältnis KC zu CL; ebenso ist das der Linien GA und AB größer als das von KC zu CL; doch ist BA nicht um ebensoviel kürzer als GA, als andererseits CK länger ist als CL. Das Rechteck mit den Seiten BA und CK ist kleiner als das Rechteck $GA \times CL$; daher ist der Zylinder CBA kleiner als der Zylinder CGA, und nur der Zylinder CGA ist unter allen am größten. [17]).

Folgesatz 1. Zylindrische Fässer ohne Bauch, die entweder höher oder niedriger sind als die österreichischen Fässer, fassen weniger als diese.

Folgesatz 2. Daraus geht hervor, daß ein gewisser praktischer geometrischer Sinn in der Regel liegt, nach der die österreichischen Böttcher die Fässer bauen, wenn sie den dritten Teil der Länge der Dauben als Halbmesser des Bodens annehmen. Dadurch wird nämlich erreicht, daß der Zylinder, den man sich zwischen den beiden Böden denken kann, zwei Bedingungen möglichst erfüllt, daß er nämlich mit der Regel des Lehrsatzes V übereinstimmt und den möglichst größten Inhalt besitzt, obgleich er von der vollständigen Erfüllung der Regel etwas abweicht. Andere Gestaltungen, welche bis zu den Punkten sehr nahe bei G diesseits und jenseits sich erstrecken, ändern nur wenig an dem Rauminhalt, weil dieser für AGC der größtmögliche ist: das einem größten Wert auf beiden Seiten Benachbarte zeigt nämlich am Anfang nur unmerkliche Abnahme.[18])

In Fig. 12 verhält sich CG zu AG wie $\sqrt{2}$ zu 1 oder wie 100000 zu 70711; verdoppelt man AG, so erhält man 141422. Statt dessen nehmen die Böttcher 150000, das Anderthalbfache der Basis, als Länge der Dauben, also etwas mehr als 141422. Dies bewirkt eine größere Annäherung an die größtmögliche Form. Die Dauben sind nämlich gekrümmt und ragen beiderseits über die Einkerbungen etwas hervor, in denen die Böden festgehalten werden. Was also an der Daubenlänge, die das Anderthalbfache des Basisdurchmessers ist, zu viel genommen wurde, das wird für die Ränder (margines, Frösche) in Rechnung gebracht, auf die bei der Prüfung der Figur nach der Regel des Lehrsatzes V keine Rücksicht genommen wurde.

Wer wollte in Abrede stellen, daß die Natur mit Hilfe eines dunklen Gefühls auch ohne Vernunftschlüsse die Menschen Geometrie lehrt, da die Böttcher nur nach dem Augenmaß und aus Schönheitsrücksichten in der Faßhälfte die größtmögliche Figur herzustellen gelernt haben? Es trete ein Geometer auf und lehre eine leichtere Methode, ein Faß zu konstruieren, das in seiner Hälfte dem Zylinder vom größten Inhalt näher kommt, als es diejenige ist, die die österreichischen Binder von altersher anwenden, nämlich die Methode der »proportio sesquialtera«, und er gebe eine zur bequemen Messung geeignetere Form an als die in Österreich gebräuchliche.

Ich möchte fast glauben, daß einst in Österreich ein sehr hervorragender Geometer gelebt hat, der die Böttcher jenes lehrte, wenn mich nicht der Umstand davon abbringen würde, daß Spuren dieses sehr schönen Satzes sich nirgends in geometrischen Büchern finden, und daß diese Art der Konstruktion eines Fasses, soviel ich weiß, am Rhein und in andern weinbautreibenden Ländern nicht gebräuchlich ist; dort werden nämlich nur längere Fässer gebaut. Denn wenn die Methode nicht allgemein bekannt ist, wer könnte es für wahrscheinlich halten, daß sie nur von einem einzigen Volke nach Büchern oder der Anweisung der Geometer aufgenommen worden ist?

Ermahnung.

Welcher scharfsinnige und weitblickende Mann wird, nachdem er sich durch jenen Irrtum durchgerungen hat, nach welchem unter den Zylindern von gleicher Diagonale jenem der größte Inhalt zukommt, der den größten Achsenschnitt besitzt, und nachdem er gelernt hat, daß der Zylinder der größte ist, bei dem der Durchmesser der Grundfläche das semiduple der Höhe ist (nach Lehrsatz V), und, daß der Achsenschnitt jenes Zylinders am größten ist, bei dem diese beiden Linien gleich sind nach Lehrsatz I, und weiter, daß dasselbe Verhältnis auch bezüglich der Schnittflächen der Kegelstumpfe besteht, nach Lehrsatz II, — welcher Mann, frage ich, wird nach dieser Erkenntnis nicht dasselbe wie für den Zylinder auch für den Inhalt eines abgestumpften Kegels annehmen, daß nämlich auch jener Kegelstumpf den größten Inhalt hat, bei dem der Durchmesser der kleineren Grundfläche das Doppelte der schiefen Seite ist? Auch ich habe dies während der anderthalb Jahre geglaubt und habe mein Augenmerk darauf gerichtet, und ich war schon geneigt, auf diesen Grundsatz gestützt, die Fässer der Rheinländer gemeinsam mit allen andern ohne Rücksicht auf ihre Ausbauchung bezüglich ihres Fassungsvermögens den österreichischen Fässern nachzustellen; damit hätte ich zwar jenen kein Unrecht getan, aber sie doch nicht nach gleichem Recht behandelt. So habe ich es der Lässigkeit des jetzigen Druckers zu verdanken, daß die Geometrie hier den Herausgeber am Ohr zupfte und mir gewissermaßen zur Vermehrung des Anhangs zu *Archimedes* die folgenden Lehrsätze darbot; aus diesen geht eine zweite noch merkwürdigere Eigenschaft des österreichischen Fasses hervor.

Definition. Ein Zylinder und ein abgestumpfter Kegel sollen konjugiert (gesellt, conjugati) genannt werden, wenn die Achsenschnitte beider dieselben oder gleiche Diagonalen haben, und wenn sich der Durchmesser der Zylinderbasis zu seiner Höhe verhält, wie der Durchmesser der kleineren Grundfläche des abgestumpften Kegels zu seiner schiefen Seite. [19])

Lehrsatz VI. Problem. Wenn ein Zylinder und von einem konjugierten Kegelstumpf die Seite oder der Durchmesser der kleineren Grundfläche gegeben ist, die übrigen Stücke des konjugierten Kegelstumpfs zu finden. Es muss aber das Verhältnis der Seite oder der Basis des Zylinders zur gegebenen Seite oder zur Basis des Kegelstumpfs kleiner sein als das Verhältnis der Summe des Durchmessers und der Höhe des Zylinders zur Diagonale. [20])

Gegeben sei der Zylinder $AGCX$ Figur 12 mit dem Durchmesser CG und der Höhe GA und der Diagonale AC, ferner der Durchmesser der Grundfläche des Stumpfes CT; es sei weiter das Verhältnis von CG zu CT kleiner als das der Summe von CG und GA zu CA. Gesucht wird die Seite des Stumpfes und der Durchmesser der größeren Grundfläche. Es möge sich CG zu GA verhalten wie CT zu einer gewissen Strecke, beispielsweise TA, und es werde über CA mit den Seiten CT und AT ein Dreieck errichtet. Weil nun das Verhältnis der Summe von CG und GA zu CA größer ist als das von CG zu CT, so ist es auch größer als GA zu AT, und wenn man die Glieder addiert, so wird das Verhältnis der Summe von CG und AG zu CA größer als das der Summen von CG und AG zu der von CT und AT. Da also CT und AT zusammen größer sind als CA, so wird man aus CT und AT über CA ein Dreieck bilden können. Legt man aber durch die Punkte C, T, A einen Kreis, und zieht man von C aus die mit TA gleiche Sehne CV, so behaupte ich, daß TA und CV die Seiten des konjugierten Stumpfes und AV der Durchmesser seiner größeren Grundfläche ist.

Verbindet man die Punkte T und V, so werden, da TA und CV gleich sind und zu dem gemeinsamen Bogen TC die Bogen TA und CV hinzukommen, auch die Bogen AC und TV und daher auch die ihnen unterspannten Sehnen AC und TV gleich, und der Winkel ATC ist so groß wie der Winkel VCT; die vierseitige Figur $ATCV$ ist dem Kreise eingeschrieben und regelmäßig, die Diagonale AC oder TV ist mit der des Parallelogramms $AGCX$ gleich, und CT verhält sich zu TA, wie GC zu GA. Daher sind der Stumpf mit dem Schnitt $ATCV$ und der Zylinder mit dem Schnitt $AGCX$ konjugiert.

Lehrsatz VII. Wenn ein Zylinder und ein Kegelstumpf konjugiert sind, und wenn die Differenz der Durchmesser des Stumpfes im Verhältnis der Quadrate des Durchmessers und der Höhe des Zylinders geteilt wird, so ist das Quadrat des Zylinderdurchmessers gleich dem Rechteck aus dem kleineren Durchmesser des Stumpfes und einer Strecke, die sich aus dem Durchmesser der kleineren Basis und dem dem Zylinderdurchmesser entsprechenden Teil der Differenz zusammensetzt.

Es sei $AGCX$ Figur 12 ein Schnitt des Zylinders mit der

Diagonale AC; diese werde durch das Perpendikel von G in die Teile CL und LA zerlegt, so daß CL dem CG entspricht. Es werde auch der Schnitt des Stumpfes $ACTV$ über derselben Diagonale nach den Voraussetzungen des Lehrsatzes VI gebildet mit dem kleineren Durchmesser CT und dem größeren AV; nachdem man von AV die mit CT gleiche Strecke VB; subtrahiert hat, bleibe der Rest BA übrig. Weil das Viereck $ATCV$ einem Kreise eingeschrieben ist, so wird das Quadrat von ACgleich der Summe zweier Rechtecke, und zwar dem über CT und AV, und dem zweiten über TA, CV, welches das Quadrat über TA oder CV ist. Zieht man also das Quadrat über AT von jenem über AC ab, so bleibt ein Rechteck über TC, AV oder über BV, VA. Ebenso bleibt, wenn man das Quadrat von AG, welches größer ist als das von AT, von demselben Quadrat AC abzieht, ein Rechteck GC, AX, das ist das Quadrat GC, welches also kleiner ist als das Rechteck BVA.

Es wird also ein gewisses Rechteck, das kleiner ist als BVA, dem Quadrat GC gleich sein, z. B. das Rechteck BVD; daher wird der Rest über DA, BV jenes Rechteck sein, um welches das Rechteck BVA das Quadrat GC übertrifft. Weil nun das Rechteck BVD dem Quadrat GC gleich gesetzt wurde, und das Rechteck DBV der Überschuß des Rechtecks BVD über das Quadrat BV oder CT ist, so ist demnach DBV auch der Überschuß des Quadrats GC über das Quadrat TC. Fassen wir also zusammen: da das Quadrat AG zum Quadrat GC sich verhält, wie das Quadrat AT zum Quadrat TC, so wird sich auch das Quadrat AG zum Quadrat CG, oder AL zu CL verhalten, wie der Überschuß des Quadrats AG über AT oder das Rechteck DA, BV, zum Überschuß des Quadrats GC über TC, das ist das Rechteck DBV. Wie sich folglich AL zu LC, so verhält sich auch das Rechteck AD, DV zum Rechteck DBV; weil die Rechtecke dieselbe Länge BV haben, so werden sie sich auch verhalten wie AL zu LC und wie die Breiten AD zu DB. Wenn also AB im Punkte D so geteilt wird, daß sich BD zu DA verhält wie CL zu LA, d. h. wie das Quadrat CG zum Quadrat GA, so wird das Rechteck BVD gleich dem Quadrat von GC, was zu beweisen war[21]).

Folgesatz I und Anwendung. Wenn die Quadrate der Höhe und des Basisdurchmessers des Zylinders samt dem kleineren Durchmesser des Stumpfes gegeben sind, so dividiere man das Quadrat der Basis durch den gegebenen Durchmesser des

Stumpfes, von dem Quotienten ziehe den letzteren Durchmesser ab, den Rest multipliziere mit der Summe der Quadrate, das Produkt dividiere durch das Quadrat der Basis, so erhältst du die Differenz der Durchmesser, die zum kleineren hinzugefügt, den größeren Durchmesser des Stumpfes gibt.

Beispiel. Es sei das Quadrat von AG 20000, das Quadrat von CG ebenfalls 20000, und es sei TC 120.

Quotient	167	Summe der Quadrate	40000	93 + Quotient AB
Divisor	120	Produkt	18666667	120 TC
AB Differenz	47		20000	213 + AV

Folgesatz II. Wenn dagegen nur das Verhältnis des Quadrats der Höhe zum Quadrat des Durchmessers und jeder der beiden Durchmesser des Stumpfes gegeben ist, so wird der Durchmesser des Zylinders in folgender Art gefunden. Addiere die Verhältniszahlen der Quadrate und multipliziere die Differenz der Durchmesser des Stumpfes mit der Zahl des größeren Quadrats und dividiere dieses Produkt durch die obige Summe, den Quotienten multipliziere mit dem kleineren Durchmesser des Stumpfes, so kommt das Quadrat des Durchmessers des Zylinders heraus.[22])

Es verhalte sich CG zu GA wie 3 zu 2.	Produkt 234	
Daher die Quadrate 9 zu 4.	Summe 13	18 Quotient
Ist $CT = 130$, VA 156, Differenz 26.		130 CT
Produkt 234.		Produkt 2340 als Quadrat von CG.

Oder, was dasselbe ist: multipliziere die Zahl des größeren Quadrats mit dem Durchmesser und bilde die Proportion: Summe der Quadrate zur Differenz der Durchmesser des Stumpfes, wie das Produkt zu einem vierten Gliede, welches das Quadrat von CG sein wird.

Folgesatz III. Wenn das Quadrat AG zum Quadrat AC sich wie 1 zu 2 verhält, so ist DV das größere der beiden arithmetischen Mittel zwischen TC, AV. Diese Anwendung ist noch kürzer.[23])

Durchmesser 19. 20. 21. 22.
19
399 Quadrat von GC.

Folgesatz IV. Sowie sich die kleinere Grundfläche des Stumpfes zu der Basis des Zylinders, oder wie sich das Quadrat der Seite des Stumpfes zum Quadrat der Höhe des Zylinders, so verhält sich auch der Durchmesser der kleineren Basis zur zusammengesetzten Strecke *DV*.

Lehrsatz VIII. Das Verhältnis der Höhen eines Kegelstumpfes und des konjugierten Zylinders setzt sich zusammen aus dem Verhältnis des kleineren Durchmessers des Stumpfes und dem Durchmesser des Zylinders und aus dem Verhältnis des Perpendikels zur Seite des Stumpfes.[24])

In Fig. 12 S. 58 seien die konjugierten Körper *CGAX* und *CTAV*, die Durchmesser der Zylindergrundflächen seien *CG*, *XA*, der kleinere Durchmesser des Stumpfes *CT*, der größere *VA*, endlich sei *TR* die Höhe des Stumpfes, *TA* seine Seite. Ich behaupte, daß sich das Verhältnis der Zylinderhöhe *GA* zur Höhe des Stumpfes zusammensetzt aus dem Verhältnis *GC* zu *CT* und dem andern *AT* zu *TR*. Der Beweis ist einfach, nichtsdestoweniger soll er getrennt angeführt werden wegen der Folgesätze und der bemerkenswerten Analogie. Da sich nämlich *CG* zu *GA* wie *CT* zu *TA* verhält, gilt auch das Verhältnis mit vertauschten Gliedern: *GC* zu *TC* wie *GA* zu *AT*. Das Verhältnis *GA* zu *TR* setzt sich aber zusammen aus *GA* zu *AT* und aus *AT* zu *TR*, daher auch aus *GC* zu *CT* und aus *AT* zu *TR*.

Folgesatz und Anwendung bei der Aufsuchung der Höhe. Sind *CT* und *VA* den Voraussetzungen gemäß bestimmt, so ist auch das Quadrat von *CG* gegeben. Ist auch das Verhältnis des Quadrates von *CG* zu dem von *GA* bekannt, so sind auch die Quadrate *GA* und *TA* bestimmt. Aber auch die Differenz von *CT* und *VA* ist bekannt, nämlich *BA*. Das Quadrat von *BA* ist um den vierten Teil des Quadrates *BA* größer als das Quadrat *TR* in jeder Konjugation. Die Winkel bei *C* und *T* sind nämlich gleich und *CT* und *BV* gleich lang nach der Voraussetzung, sie sind aber auch parallel; verbindet man daher *B* und *T*, so wird *BT* mit *CV* gleich; dieses ist aber nach der Voraussetzung gleich *TA*, daher ist *BTA* ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe *TR*; *RB* und *RA* sind also gleich, und das Quadrat *BA* ist das Vierfache des Quadrates *RA*. Zieht man demnach ein Viertel des Quadrates *BA* von dem Quadrat *TA* ab, so erhält man das Quadrat der Höhe des Stumpfes, welches mit dem Quadrat *GA* verglichen die gesuchte Proportion liefert.

Folgesatz und Analogie. Im Falle der Gleichheit gibt es bei den konjugierten Körpern eine schöne Reihe für die Verhältnisse zwischen den Quadraten der Höhen, nämlich:

Wenn sich CT zu AV verhält	so ist $TR^2 : GA^2 =$
wie 1 : 2	1 : 2
2 : 3	3 : 4
3 : 4	5 : 6
4 : 5	7 : 8
5 : 6	9 : 10
6 : 7	11 : 12
7 : 8	13 : 14
8 : 9	15 : 16
9 : 10	17 : 18

Die Punkte D und R fallen zusammen.

Wenn $CG^2 : GA^2 = 1 : 2$ und

$CT : AV$	so ist $TR^2 =$				1. Diff.	2. Diff.
wie 1 : 2	3 = Diff.	von	7 und	10		
					22	
2 : 3	21		11	32		12
					34	
3 : 4	51		15	66		12
					46	
4 : 5	93		19	112		12
					58	
5 : 6	147		23	170		12
					70	
6 : 7	213		27	240		12
					82	
7 : 8	291		31	322		12
					94	
8 : 9	381		35	416		
					106	
9 : 10	483		39	522		

Ähnliches gilt in jeder beliebigen Konjugation.[25])

Lehrsatz IX. Wenn man die Differenz der Durchmesser eines Kegelstumpfes im Verhältnis der Seiten des konjugierten Zylinders teilt und den dem Zylinderdurchmesser entsprechenden Teil zum kleineren Durchmesser des Stumpfes addiert, und wenn man dann Rechtecke bildet 1. aus dem kleineren und dem größeren Durchmesser und 2. aus dem kleineren Durchmesser des Stumpfes und der so zusammengesetzten Strecke, so gibt das Verhältnis des ersten Rechtecks vermehrt um den dritten Teil des Quadrates der Differenz der Durchmesser des Stumpfes zum zweiten Rechteck, zusammengesetzt mit dem Verhältnis der

Höhe des Zylinders zur Höhe des Stumpfes das Verhältnis des Stumpfes zum Inhalt des konjugierten Zylinders.

In der Fig. 12 soll alles so bleiben wie früher, und die Differenz BA im Punkte D so geteilt sein, daß sich das Quadrat von AG zum Quadrat GC verhält wie AD zu DB. Ich behaupte, daß das Verhältnis des Rechtecks CT, AV, vermehrt um den dritten Teil des Quadrats BA, zum Rechteck CT, VD, wenn es mit dem Verhältnis GA zu TR zusammengesetzt wird, das Verhältnis des Kegelstumpfes zum Inhalt des konjugierten Zylinders ergibt. Nach dem Lehrsatz XVII des ersten Teils verhält sich die Summe aus dem Rechteck CT, VA, und dem dritten Teil des Quadrats BA zum Quadrat CT, wie der Kegelstumpf $CTAV$ zum Inhalt des gleichhohen, eingeschriebenen Zylinders über der Grundfläche CT. Wie sich aber das Quadrat CT zum Quadrat CG, so verhält sich auch der Zylinder über CT zu dem gleichhohen Zylinder über CG nach III und XVI des ersten Teils. Wie sich also die Summe aus dem Rechteck CT, VA, und aus dem dritten Teil des Quadrats BA zum Quadrat CG, oder nach VI zum flächengleichen Rechteck CT, VD, so verhält sich der Kegelstumpf über CT, AV zum Inhalt des gleichhohen Zylinders. Wenn also der Stumpf die Höhe GA des konjugierten Zylinders hätte, würde die genannte Proportion allein genügen. Wie sich aber die Zylinderhöhe GA zu der kleineren Höhe RT verhält, so verhält sich auch der konjugierte Zylinder zum Zylinder mit der Höhe des Stumpfes bei gleichen Grundflächen nach XVII, und ebenso auch der Stumpf mit der Höhe GA zum konjugierten Stumpf, dessen Höhe TR ist. Dieses ist also der zweite Teil des zusammengesetzten Verhältnisses.[26])

Folgesatz 1. In der Konjugation mit dem Werte 2 ergibt sich, wenn[27])

das Verhältnis der Durchmesser =	für das Verhältnis des Zylinders u. des Stumpfes
1 : 2	15 : 11 +
2 : 3	48 : 46 +
3 : 4	99 : $97\frac{1}{2}$
4 : 5	168 : 167 —
5 : 6	255 : 254 —
6 : 7	360 : 359 —
7 : 8	483 : 482 —

das Verhältnis der Durchmesser =	für das Verhältnis des Zylinders u. des Stumpfes		
8 : 9	624	:	623 +
9 : 10	783	:	782 +
. .	. .		. .
19 : 20	3363	:	3362 +

Folgesatz 2. Ist der Konjugationswert = 1

1 : 2	54	:	60
2 : 3	180	:	197 +
3 : 4	378	:	405 +
4 : 5	648	:	685 —
5 : 6	990	:	1036 —
6 : 7	1404	:	1456 +
7 : 8	1890	:	1846 —
8 : 9	2448	:	2521
9 : 10	3078	:	3160 +
. .	. .		. .
19 : 20	13328	:	13468 +

Eine analoge Betrachtung.

Bisher standen einige Theorien in Behandlung, deren sich die Rechnung bedient bei der Aufsuchung des Verhältnisses eines Kegelstumpfes und des ihm konjugierten Zylinders. Bei dieser Rechnung ergeben sich mancherlei beachtenswerte Resultate. Zunächst erhellt aus den Folgesätzen 1 und 2 und der Vergleichung der verschiedenen Ergebnisse, daß das Verhältnis des Stumpfes zum Zylinder in irgendeiner Konjugation nicht immer das nämliche ist, sondern daß es sich mit dem Verhältnis der Durchmesser des Stumpfes ändert. In Folgesatz 1 findet sich auch, daß der Stumpf abnimmt, während der Zylinder ungeändert bleibt; in Folgesatz 2 wächst dagegen der Stumpf bei konstant bleibendem Zylinder. Es übertraf nämlich der Stumpf den Zylinder um einen Teil, der auf der untersten Zeile kleiner als $^1/_{100}$, etwas höher kleiner als $^1/_{38}$ und dann $^1/_{33}$ ist, der so immer größer wird, bis er auf der ersten Zeile überhaupt $^1/_{10}$ beträgt. Es muß aber, wenn die Rechnung weiter fortgesetzt wird, der Stumpf endlich doch wieder kleiner werden als der Zylinder in derselben Konjugation. Daraus ergibt sich die Frage, welcher Stumpf in einer beliebigen Konjugation der größte ist, und welcher dem konjugierten Zylinder gleich wird. Zweitens wurde aus den drei Folgesätzen und der beigefügten Rechnung klar, daß zwischen den Konjugationen mit einem größeren Verhältniswert als 2 und jenen mit einem kleineren Wert ein gewisser Unterschied vorhanden ist. In der Konjugation mit dem Wert 2 tritt nämlich zuerst der Fall ein, daß jeder Stumpf, wenn auch unmerklich, kleiner zu scheint als der Zylinder, so daß dieser, der gleichsam der erste unter ihnen ist, und ebenso das Verhältnis der Durchmesser dieses Stumpfes, das den Wert 1 hat, am größten unter allen Stumpfen und mit sich selbst gleich ist. In einer Konjugation mit einem größeren Wert als 2 werden alle Stumpfe, selbst die dem Zylinder ganz nahestehenden, merklich kleiner als der konjugierte Zylinder. Dürfen wir daraus schließen, daß in Konjugationen mit einem kleineren Wert als 2 die Stumpfe zunächst bis zu einer gewissen Grenze größer werden als der Zylinder, daß sie dann wieder abnehmen und endlich mit ihrem Zylinder gleich sind, und daß sie dann kleiner werden, bis sie endlich vollständig verschwinden, während der Zylinder der Konjugation sich nicht ändert? Drittens, da die Zylinder aller andern Konjugationen kleiner sind als der Zylinder mit dem Konjugationswert 2, werden wohl die Stumpfe anderer Konjugationen über ihre konjugierten Zylinder hinaus wachsen? Es fragt sich, ob dieser Überschuß so groß ist, daß der Stumpf dem größten Zylinder gleich ist oder ihn noch übertrifft, und wenn dies der Fall ist, welches ist das Verhältnis der Durchmesser, für das der Stumpf dem größten Zylinder gleich wird? Alles dieses will ich, soweit es mir bei meinen Kenntnissen möglich ist, in einigen der folgenden Lehrsätze untersuchen, weil es für die Berechnung und Vergleichung der Fässer besonders notwendig ist.

Lehrsatz X. In jeder Konjugation werden bei einer Vergrößerung des Verhältnisses der Durchmesser die abgestumpften Kegel schließlich kleiner als irgendeine vorgegebene feste Zahl.

Es sei irgendeine Konjugation gegeben mit dem Verhältnis CG zu GA (Fig. 12); ich behaupte, daß es in derselben Konjugation einen Kegelstumpf wie CTA gibt, bei welchem sich CT zu TA verhält wie CG zu GA, und welcher kleiner ist als eine beliebig vorgegebene feste Zahl. Das ist leicht zu zeigen. Denn die Seiten CT und TA können bei gleichbleibendem Verhältniswert so weit vermindert werden, daß sie zusammen der Diagonale CA gleich werden; weil dann die drei

Seiten VC, CT, TA zusammen die vierte VA geben, so ist dieses Verhältnis der Durchmesser CT und VA das größtmögliche dieser Konjugation, und in diesem Fall steht der Kegelstumpf ganz auf dem Kreise VA. Der Stumpf ist also kleiner als jede beliebig vorgegebene Größe.[28])

Lehrsatz XI. Die Grundfläche eines Zylinders, der mit einem gleichhohen Kegelstumpf inhaltsgleich ist, setzt sich zusammen aus den Dritteln der beiden Grundflächen des Stumpfes und dem dritten Teil ihrer mittleren geometrischen Proportionale.

Das Rechteck aus den beiden Durchmessern des Stumpfes ist nämlich gleich dem Quadrat der mittleren geometrischen Proportionale zwischen den beiden Durchmessern nach *Euklid* VI, 17, und zwei solche Rechtecke ergeben zusammen mit dem Quadrat der Differenz die Summe der Quadrate der Durchmesser nach *Euklid* II, 7. Drei solche Rechtecke sind also gleich den drei Quadraten über den beiden Durchmessern und der Proportionale. Ein Rechteck und der dritte Teil des Quadrates der Differenz zusammen sind also gleich dem dritten Teil des Quadrates der Proportionale. Wie sich aber die Summe des Rechtecks und des genannten Drittels zu den Quadraten der beiden Durchmesser des Stumpfes verhalten, so verhält sich auch der Stumpf zu den Inhalten der beiden gleich hohen Zylinder über den beiden Grundflächen nach XVII des ersten Teils. Wie sich also die Summe der genannten drei Drittel zu den Quadraten der Grundflächen verhält, so verhält sich auch der Inhalt des Stumpfes (und auch der des inhaltsgleichen Zylinders) zu den Zylindern über den beiden Grundflächen, welche mit dem Stumpf gleiche Höhe besitzen. Da nun die Flächen selbst im Verhältnis der Körperinhalte stehen, so wird auch das Verhältnis der Basis des mit dem Stumpf inhaltsgleichen Zylinders zu den beiden Grundflächen des Stumpfes das nämliche sein: also wird jene Basis aus den Dritteln dieser Grundflächen und dem Drittel der geometrischen Proportionale bestehen [29]).

Clavius benutzt im 5. Buche seiner Geometria practica (Kap. 3) diesen Satz in etwas anderer Form, wie ich oben erwähnt habe, aber die Grundzüge seines Beweises sind verwickelter und hängen nicht so klar mit den meinigen zusammen, so daß ich zur Aufklärung die von mir angewandten Prinzipien darstellen wollte.

Lehrsatz XII. **Der Zylinder, welcher mit einem geraden Kegelstumpf die gleiche Höhe und Diagonale besitzt, hat als Basisdurchmesser das arithmetische Mittel der beiden Durchmesser des Stumpfes.**

Es sei (Fig. 12) $CEAS$ ein Zylinder mit der Diagonale AC, und $CTAV$ ein Kegelstumpf mit derselben Diagonale und der Höhe TR, welche der Zylinderhöhe AE oder CS gleich ist. Der Durchmesser CE der Zylinderbasis soll dann das arithmetische Mittel zwischen den Durchmessern CT und AV des Stumpfes sein. Weil der Stumpf gerade und die Seiten CV, TA gleich sind, und ebenso auch EA und CS, und weil die Winkel bei C und S rechte sind, so sind auch die Seiten VS und TE der Dreiecke VSC und TEA gleich. Es ist aber EC mit SA gleich; um wieviel also CE größer ist als CT, nämlich um die Strecke TE, um ebensoviel übertrifft auch AV die Strecken AS oder CE, nämlich um VS. Es ist also CE das arithmetische Mittel zwischen CT und VA.

Lehrsatz XIII. **Die Differenz zwischen einem Kegelstumpf und dem Zylinder mit derselben Höhe und der gleichen Diagonale verhält sich zu diesem Zylinder, wie der zwölfte Teil des Quadrates der Differenz der Durchmesser des Stumpfes zum Quadrat des Zylinderdurchmessers.**

Betrachten wir einen Zylinder über der Grundfläche CT von der Höhe TR des Kegelstumpfes $CTAV$, so ist das Verhältnis dieses Zylinders zu dem gleich hohen Zylinder über CE gleich dem der Quadrate CT und CE; und wie sich diese Quadrate zu ihrer Differenz, so verhalten sich auch die Zylinder zu dem Limbus oder Mantel zwischen dem größeren Zylinder CE und dem kleineren CT. Die Differenz der Quadrate ist aber gleich dem doppelten Rechteck CT, TE vermehrt um das Quadrat von TE, welche Strecke die Hälfte der Differenz der Durchmesser CT und AV, also die Hälfte von AB oder die Strecke AR ist. Anderseits ist der Zylinder CT von der Tunika des Stumpfes $CTAV$ umgeben, deren Verhältnis zu dem eingeschriebenen Zylinder CT gleich ist dem Verhältnis der Summe aus dem Rechteck AB, BV (oder TC) und dem dritten Teil des Quadrates von AB zum Quadrat CT. Das Rechteck AB, CT ist aber gleich dem doppelten Rechteck ET, TC, weil AB das Zweifache von ET ist. Läßt man in beiden Verhältnissen das gleiche weg, so fügt in dem ersten das Quadrat der größeren Strecke CE zum

Quadrat CT das Quadrat AR hinzu, das ist der vierte Teil des Quadrates AB; im zweiten Verhältnisse kommt aber der dritte Teil des gleichen Quadrates AD dazu. Das Drittel ist aber um ein Zwölftel größer als ein Viertel; im zweiten Verhältnisse kommt also um ein Zwölftel des Quadrates AB mehr zu dem übrigen hinzu als im ersten Verhältnisse; um ebensoviel ist also die Tunika des Stumpfes größer als der Mantel des Zylinders CE. Fügt man zu beiden den Zylinder CT hinzu, so ist der Stumpf $CTAV$ um den genannten Teil größer als der Zylinder $CEAS$. [30])

Folgesatz und Analogie. Vergrößert man die Differenz der Durchmesser des Stumpfes, während die Höhe und der gleich hohe Zylinder mit derselben Diagonale ungeändert bleiben, so wächst auch dieser Überschuß des Stumpfes. Man kann aber die Differenz AB so groß machen, daß sie dem arithmetischen Mittel der beiden Durchmesser gleich wird; wenn nämlich CT in einem Punkte verschwindet, so ist VA tatsächlich das Doppelte des Durchmessers CE in der Zylindergrundfläche. Dann kommt man aber zum Schluß aller Kegelstumpfe, nämlich zum Kegel, dessen Diagonale mit der Seite zusammenfällt, die die Kegelfläche erzeugt.

Ein solcher Kegel, der mit dem Zylinder CE gleiche Höhe hat, und dessen Durchmesser das Doppelte des Zylinderdurchmessers ist, verhält sich aber zu jenem Zylinder wie 3 zu 4. Da nämlich die Durchmesser im Verhältnis 1 zu 2 stehen, verhalten sich ihre Kreise wie 1 zu 4 und deshalb auch die gleich hohen Zylinder über denselben Grundflächen, wenn ein Zylinder über der Grundfläche des Kegels steht (nach Lehrs. III und XVII des ersten Teils). Der Kegel ist aber nach IV der dritte Teil eines Zylinders mit der gleichen Grundfläche und Höhe.

Dies ist also der Grenzwert, welchen kein Kegelstumpf erreicht. Kein Kegelstumpf, behaupte ich, fügt zu dem gleich hohen Zylinder, dessen Basisdurchmesser das arithmetische Mittel ist, den dritten Teil seines Inhalts hinzu.

Lehrsatz XIV. Ein Zylinder, der mit einem Kegelstumpf gleiche Höhe und gleichen Inhalt besitzt, hat eine größere Diagonale als der Stumpf.

Nach dem Vorhergehenden ist ein Zylinder, der mit einem Stumpf dieselbe oder eine gleich große Diagonale hat, kleiner als der Stumpf, wenn beide gleich hoch sind; daher wird ein größerer Kegel, nämlich der mit dem gleich hohen Stumpf inhaltsgleiche, auch eine größere Diagonale haben.

Lehrsatz XV. Alle Verhältnisse der Durchmesser der Kegelstumpfe, die in einer Konjugation mit einem bestimmten Verhältniswert gelten, gelten auch in einer Konjugation mit einem größeren Verhältniswert.

Weil nämlich CT, TA in irgendeiner Konjugation von der Gleichheit an vermindert werden können, bis sie zusammen mit CA gleich werden, und weil anderseits AV so vergrößert werden kann, bis es der Summe von AC, CV oder von AT, TC, CV gleich wird, so ist also das Verhältnis AT zu TC kleiner als diese Konjugationen, nämlich AT größer als TC; auch kann das Verhältnis der Durchmesser CT, AV stärker variiert werden als jene. Daher gilt jede Änderung des Verhältnisses, die für ein kleines AT gültig ist, auch dann, wenn AT größer ist; aber hier, wo AT größer ist, gelten mehr Wertänderungen des Verhältnisses. Wegen dieses Zusammentreffens der verschiedenen Konjugationen in denselben Verhältniswerten der Durchmesser findet die folgende Vergleichung statt.[31])

Lehrsatz XVI. Zu jedem Zylinder, der höher ist als der größte mit derselben Diagonale, gehört unter denjenigen, die niedriger sind als der größte, ein mit ihm inhaltsgleicher Genosse (socius), den wir als »subkonträren Zylinder« bezeichnen wollen.

Wenn das Verhältnis der Grundflächen das Umgekehrte des Verhältnisses der Höhen ist, dann sind die Zylinder gleich. Betrachten wir wieder Fig. 10, S. 46 in welcher CGA der größte Zylinder ist mit der Grundfläche CG und der Höhe GA. Nehmen wir den höheren Zylinder CHA, so behaupte ich, daß es einen niederen, z. B. CBA gibt, dessen Höhe BA sich zur Höhe des früheren verhält, wie die Grundfläche oder das Quadrat von CH zum Quadrat von CB. Denn wo es ein größeres und ein kleineres gibt, da ist auch ein gleiches vorhanden. Das Quadrat von CH wächst vom Werte Null gleichmäßig mit den Linien CQ, CI, CH, CG, CB, CP bis zum Quadrat des Durchmessers CA, und es entstehen so Verhältnisse von jeder Art. Dagegen nimmt die Höhe, die anfangs mit dem Durchmesser AC gleich lang war, mit den Linien AQ, AI, AH, AG, AB, AP durch alle diese Werte ab, so daß ein Verhältnis entsteht, das größer ist als irgendein anderes, bis die Höhe schließlich im Punkt A verschwindet. Wo daher die Dekremente der Höhen AB durch alle Verhältniswerte hindurcheilen, indem die Zunahme der Verhältnisse ins Unbegrenzte wächst, da nehmen die Inkremente der Quadrate *CB* mehr und mehr ab, und die Inkremente der Verhältnisse werden kleiner. Da es auch einen niedrigeren Zylinder als *CHA* gibt, und dieser, z. B. *CGA*, größer ist als jener Zylinder *CHA*, da also das Verhältnis *HA* zu *GA* kleiner ist als das der Quadrate von *CG* und *CH*, so wird man beim Herabsteigen gegen *B* durch einen bestimmten Punkt kommen, wo das früher kleinere Verhältnis *BA* zu *HA*, weil es stärker wächst, dem Verhältnis der Quadrate von *BA* und *HA* gleich wird, weil dieses — früher das größere — langsamer zunimmt.[32])

Lehrsatz XVII. In jeder Konjugation, in der das Quadrat des Durchmessers kleiner ist als das Doppelte des Quadrates der Höhe, werden alle dem Zylinder zunächststehenden Kegelstumpfe allmählich größer als der konjugierte Zylinder, obwohl ihre Höhen abnehmen, dann aber werden sie wieder kleiner, sie bleiben jedoch so lange größer als der konjugierte Zylinder, als sie eine größere Höhe haben als der zum konjugierten Zylinder subkonträre Zylinder.

Es sei in Fig. 10 eine Konjugation mit dem Zylinder *CHA*, in welcher das Quadrat des Durchmessers *HC* kleiner ist als das Doppelte des Quadrates *HA*; jenem Zylinder aber sei zugesellt, d. h. mit ihm inhaltsgleich, ein anderer *CBA*, der einer andern Konjugation angehört, und dessen Basis *CB*, dessen Höhe *AB* ist. Ich behaupte zunächst: Alle Stumpfe der Konjugation *CHA*, deren Höhen zwischen *HA* und *BA* liegen, sind größer als der Zylinder *CHA* oder *CBA*. Denn zwischen den gesellten gleichen Zylindern liegt der größte Zylinder *CGA*, bei welchem das Quadrat von *CG* das Doppelte des Quadrates *GA* ist. Es sind also alle Zylinder *CGA* zwischen *CHA* und *CBA* größer als die äußersten durch *H* und *B* begrenzten nach V dieses Abschnitts. Auch liegen ihre Höhen zwischen *HA* und *BA* ebenso wie jene der Stumpfe. Nach XIII sind aber die Stumpfe, welche mit den Zylindern über derselben Diagonale *AC* gleiche Höhe haben, größer als diese. Deshalb sind sie um so mehr größer als die kleineren Zylinder, deren Endlagen durch *H* und *B* bestimmt sind [33])

Lehrsatz XVIII. In der Konjugation mit einem kleineren Verhältniswert als 2 hat der mit dem konjugierten Zylinder inhaltsgleiche Stumpf eine kleinere Höhe als derjenige Zylinder, der der Genosse des konjugierten und mit diesem inhaltsgleich ist, der jedoch einer andern Konjugation angehört.

Der Stumpf, welcher gleiche Höhe besitzt mit einem derartigen gesellten Zylinder von gleichem Inhalt wie der konjugierte, ist größer als jener nach XIII. Er ist also auch größer als sein konjugierter Zylinder. Daher hat derjenige Stumpf, der mit dem konjugierten Zylinder inhaltsgleich ist, nicht dieselbe Höhe wie jener (Zylinder CBA), er ist entweder höher oder niedriger. Höher kann er aber nach XVII nicht sein. Folglich ist er niedriger. Von da an werden die Stumpfe nach X kleiner als der konjugierte Zylinder, bis sie endlich ganz verschwinden.[34])

Folgesatz. Unter der Annahme, daß die Fässer aus jenen einfachen Kegelstumpfen bestehen, haben die länglichen Fässer mit mäßiger Ausbauchung einen größeren Inhalt als zylindrische ohne Bauch von derselben Visierlänge; niemals aber kommt es vor, daß sie so ungeheuerliche Bäuche besäßen, daß sie dadurch weniger fassen würden als zylindrische Fässer von derselben Länge.

Lehrsatz XIX. In allen Konjugationen von Kegelstumpfen und Zylindern, bei denen der kleinere Basisdurchmesser kleiner ist als das $\sqrt{2}$-fache der Seite, gibt es zwei verschiedene Verhältnisse der Durchmesser des Stumpfes, für die der Stumpf dem größten Zylinder unter allen Konjugationen gleich wird.

Es sei (in diesem Lehrsatze) das Verhältnis des Durchmessers GC der Zylindergrundfläche zur Höhe kleiner als $\sqrt{2}$ zu 1. Ich behaupte, daß in dieser Konjugation zwei verschiedene Verhältnisse der Durchmesser CT, AV auftreten, für welche der Stumpf dem größten Zylinder gleich wird, dessen Basisdurchmesser das semiduple der Höhe ist. Wenn nämlich GC kleiner ist als das $\sqrt{2}$-fache von GA, so ist GA größer als $CA : \sqrt{3}$; es kann daher eine kleinere Größe als AG, z. B. AT angenommen und zu TC ins selbe Verhältnis gesetzt werden wie AG zu CG, derart, daß das von T gefällte Perpendikel TR gleich $CA : \sqrt{3}$ ist. Der Stumpf $CTAV$ wird so mit dem größten Zylinder gleich hoch, dessen Durchmesser das $\sqrt{2}$-fache der Höhe ist. Ein solcher Stumpf wird also noch größer als der größte Zylinder nach XIII. Weil nach XIV der dem Stumpf gleichkommende Zylinder, wenn er mit ihm gleiche Höhe hat, eine größere Diagonale besitzt, so muß dem Zylinder, der eine kleinere Diagonale, nämlich die des erst zu suchenden gleichen Stumpfes hat, eine größere Höhe als die des Stumpfes zukommen, so daß der Verlust durch die Verkürzung der Diagonale ausgeglichen wird durch die Vergrößerung der Höhe, d. h. der erst zu suchende mit dem Zylinder gleiche Stumpf muß kleiner sein als jener, welcher mit dem größten Zylinder über derselben Diagonale die gleiche Höhe besitzt. Dies kann aber in doppelter Weise geschehen. Weil der Zylinder in jeder beliebigen Konjugation der Ausgangspunkt aller Stumpfe ist, und weil in den hier betrachteten Konjugationen der Zylinder kleiner ist als der größte Zylinder, so werden auch diejenigen Stumpfe, die ihrem konjugierten Zylinder zunächst stehen und höher sind als dieser, kleiner sein als der größte Zylinder. Von da an wachsen sie aber bei der Vergrößerung der Differenz AB der Durchmesser CT, AV, bis sie endlich, wie früher bewiesen wurde, größer werden als der größte Zylinder. Bei diesem Anwachsen von AB tritt, solange TR kleiner ist als die Höhe GA des konjugierten Zylinders, aber größer als die Höhe des größten Zylinders, einmal der Fall ein, daß der Stumpf mit dem größten Zylinder inhaltsgleich wird. Die Stumpfe derselben Konjugation wachsen aber mit zunehmendem AB nicht ins Unendliche, sondern sie nehmen nach X und XVIII wiederum ab, und in dieser Änderung tritt zum zweitenmal der Fall ein, daß der Stumpf dem größten Zylinder gleich wird. Und weil der Stumpf, der mit dem größten Zylinder gleiche Höhe hatte (dessen TR gleich $AC : \sqrt{3}$ war), größer war als dieser Zylinder, so wird der Stumpf mit einer kleineren Höhe als die des größten Zylinders wiederum einmal jenem gleich werden. Bis zu diesem Werte ist also TA weiter zu verkleinern. Wenn sich aber TA und damit entsprechend der Proportion TC vermindert, so vermindert sich auch das Quadrat von TA; dagegen bleibt das Quadrat von CA unverändert, die Differenz beider, das Rechteck aus TC und AV wird also größer, aber seine Breite TC wird, wie gesagt, kleiner; mit andern Worten, die Länge des Rechtecks AV wird größer: deshalb gibt es ein bestimmtes Verhältnis TC zu AV, für das der Stumpf zum zweitenmal dem größten Zylinder gleich wird, was zu beweisen war.[35])

L e h r s a t z XX. Die verschiedenen Konjugationen angehörigen Stumpfe, bei denen das Verhältnis der

Durchmesser dasselbe ist, sind um so größer, je mehr sie mit ihrer Höhe die Höhe des größten Zylinders über derselben Diagonale erreichen; je höher sie sind, um so kleiner ist ihr Inhalt.

Auch diesen Satz würde man nicht vermuten. Wer würde nicht behaupten, daß der Stumpf mit der Höhe IA größer ist als ein anderer mit der Höhe GA, wenn beide dieselbe Diagonale CA und dasselbe Verhältnis zwischen der kleineren und der größeren Grundfläche besitzen? Aber gerade das Gegenteil ist richtig. Betrachten wir den größten Zylinder, dessen Basisdurchmesser CG sich nach V zur Höhe GA verhält wie $\sqrt{2}$ zu 1; und einen Stumpf, dessen kleinerer Durchmesser auf GC, dessen größerer auf der verlängerten AX liegt: zwischen den letzteren bestehe irgendwie ein Verhältnis, und es sei, entsprechend Lehrs. XII, GC das arithmetische Mittel beider Durchmesser. Da für die verschiedenen Stumpfe das Verhältnis der beiden Grundflächen den gleichen Wert haben soll, so wird auch für alle Stumpfe das Verhältnis der Differenz der Grundflächen zum arithmetischen Mittel dasselbe sein. Weil aber jeder solche Stumpf den gleich hohen Zylinder im Verhältnis von einem Zwölftel des Quadrates der Differenz der Durchmesser des Stumpfes zum Quadrat ihres arithmetischen Mittels übertrifft (nach XIII), so wird der Überschuß des Stumpfes da größer sein, wo der Zylinder größer ist. Der Zylinder CGA ist aber unter allen über derselben Diagonale errichteten der größte; deshalb wird der Überschuß dieses Stumpfes, d. h. das genannte Zwölftel, unter allen Beträgen für die übrigen Stumpfe, die dasselbe Verhältnis der Durchmesser besitzen, am größten sein. Wenn auch die Höhe des Stumpfes größer ist als GA, so wird dennoch, weil der Zylinder von derselben Höhe kleiner ist, auch der Stumpf kleiner sein.[36)]

Es werde z. B. für das Verhältnis der Durchmesser des Stumpfes der größte Wert, das ist eine unendlich große Zahl, angenommen, oder es werde statt des Stumpfes der Kegel gesetzt, der dem Endwerte aller Stumpfe entspricht. Nehmen wir als Höhe des Kegels die Strecke IA, deren Quadrat die Hälfte des Quadrates AC ist; als Basisdurchmesser des gleich hohen Zylinders CIA setzen wir die Linie CI, die der Höhe gleich ist. Weil CI das arithmetische Mittel der beiden Durchmesser des Stumpfes, der eine Durchmesser aber gleich Null ist, so wird der andere, nämlich der Basisdurchmesser des

Kegels, das Doppelte von CI sein. Um den Inhalt dieses Kegels zu finden, hat man den dritten Teil von AI zu multiplizieren mit dem Quadrat des zweifachen CI, d. i. das Vierfache des Quadrates CI, also das Doppelte des Quadrates CA.

Nimmt man statt des Stumpfes mit demselben Verhältniswert einen andern Kegel mit der Höhe GA, deren Quadrat der dritte Teil des Quadrats von CA ist, so wird der Basisdurchmesser wieder das Doppelte von CG, das Quadrat dieser Strecke also das Vierfache sein. Es ist aber das Quadrat von CG $\frac{8}{12}$ des Quadrats von AC; einmal genommen, gibt dies $\frac{8}{3}$, welcher Betrag das Doppelte oder $\frac{6}{3}$ des früheren Kegels um $\frac{2}{3}$ übertrifft, während das Quadrat der Höhe des ersten Kegels, d. i. die Hälfte des Quadrats von CA, das Quadrat der Höhe des zweiten Kegels, das ist der dritte Teil des Quadrats von CA, nur um $\frac{1}{6}$ des Quadrats CA übertrifft. Doch ist nicht dieser ganze Unterschied in Rechnung zu ziehen, weil nicht die Quadrate, sondern die einfachen Höhen in die Grundflächen zu multiplizieren sind, und auch nicht die ganzen Höhen, sondern nur ihre Drittel. Es ist daher der Zuwachs des Kegels bei einer Vergrößerung der Basis CG größer, als die Abnahme bei einer Verkürzung der Höhe GA.

Lehrsatz XXI. Unter allen derselben Konjugation angehörigen Stumpfen ist derjenige der größte, der die Höhe des größten Zylinders oder das $\frac{1}{\sqrt{3}}$fache (subsemitriple) der Diagonale als Höhe hat. Zu beiden Seiten dieses größten Wertes sind alle übrigen Stumpfe, sowohl die höheren wie die niedrigeren kleiner.

Den rechtmäßigen Beweis für die Richtigkeit dieses Satzes mögen, falls es nötig ist, die beiden *Apollonius* Belgiens, *Snellius* und *Adrianus Romanus*, führen. Es ist dies zwar ein für den Endzweck des Buches nebensächlicher Zusatz, doch habe ich ihn wegen der Verwandtschaft mit dem vorhergehenden Lehrsatz hier angeführt, dessen Ähnlichkeit mit dem eben zu besprechenden mich zunächst auf die Annahme seiner Richtigkeit brachte, obwohl die Stumpfe des früheren Satzes nicht in dem Sinne konjugiert sind, in dem wir bisher dieses Wort gebrauchten; doch sind sie über derselben Diagonale beschrieben, und sie besitzen dasselbe Verhältnis zwischen den Grundflächen, so wie die konjugierten dasselbe Verhältnis zwischen dem Durchmesser der kleineren Grundfläche und der Seite des Stumpfes aufweisen.

Anderseits stützt sich der behauptete Lehrsatz auf die Eigenschaft des größten Zylinders in der Konjugation, und auf das früher Bewiesene, daß sich für den konjugierten Stumpf eine größere und eine andere kleinere Höhe als die des größten Zylinders finden läßt, für die die Stumpfe dem größten Zylinder gleich werden, daß jener Stumpf, der mit dem größten Zylinder die gleiche Höhe hat, einen größeren Inhalt besitzt, und daß nach beiden Seiten sowohl gegen den konjugierten Zylinder wie auch gegen die niedrigsten Stumpfe hin die Stumpfe abnehmen. Nirgends ist aber ein Grund vorhanden, daß sonstwo in der Nachbarschaft eine Übergangsstelle für die Änderungen des Körperinhalts bestehen sollte als an jener einzigen Stelle.

Anm. Kepler begnügt sich mit diesen Schlüssen nicht, er führt auch die Berechnung eines gleichseitigen Zylinders und des ihm konjugierten gleichhohen Stumpfes durch und findet seinen Satz bestätigt. »Was aber in einer beliebigen Konjugation richtig ist, gilt auch für alle andern«.

Lehrsatz XXII. In den Konjugationen, in denen das Quadrat des Zylinderdurchmessers das Doppelte des Quadrats der Höhe oder größer ist, sind alle Stumpfe kleiner als der größte, das ist der konjugierte Zylinder, und zwar umsomehr, je weiter der Verhältniswert von jener Größe entfernt ist.[37]

Es sei in Fig. 10 CGA die Konjugation, in der das Quadrat von GC das Doppelte des Quadrats von AG ist, ferner sei CHA eine Konjugation mit einem kleineren Wert und den subkonträren Zylindern H und B: es sind also alle Zylinder zwischen H und B und daher auch alle mit ihnen gleichhohe Stumpfe größer als der Zylinder H oder B, unterhalb von B gegen A hin sind jedoch die Stumpfe kleiner als der Zylinder H oder B nach XV und XVI. Je näher aber H gegen G rückt, desto näher kommt auch B an G, und der Bogen HB, in dem die größeren Stumpfe liegen, wird ebenfalls kleiner; es ist also der Zylinder CGA zu sich selbst subkonträr, indem er sich auf H und B stützt. Sowie demnach alle Zylinder hinter B kleiner sind als der Zylinder I und ebenso alle Stumpfe etwas unterhalb von B, so werden hier auch alle Zylinder hinter G und die mit ihnen gleich hohen Stumpfe kleiner sein als der ihnen konjugierte Zylinder CGA.

Daß früher die Stumpfe nicht in B selbst, sondern erst etwas unterhalb von B kleiner zu werden beginnen, hat seinen Grund darin, daß es im Punkt B selbst einen mit dem Zylinder gleichhohen Stumpf gibt, der der Konjugation CIA angehört. Aber hier bei G gibt es keinen mit dem Zylinder gleich hohen Stumpf der Konjugation CGA. Denn schon die ersten dem Zylinder CGA benachbarten Stumpfe haben eine kleinere Höhe als GA, und sie verlieren der Höhe nach mehr als sie durch das Wachstum des Drittels $\left[\frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2\right]$ an Inhalt gewinnen.

Die Analogie wird auch folgendermaßen klar. Es sind alle Stumpfe dieser Konjugation vom Zylinder angefangen niedriger als der Zylinder, der gleichsam das Haupt der Konjugation bildet. Weil der Zylinder selbst den Maximalwert hat, so werden alle ihm konjugierten Stumpfe nach XXI in derjenigen Ordnung kleiner, in der sie sich der Höhe nach von jenem entfernen; der größte unter ihnen ist also der Zylinder, weil er ja allein unter den Stumpfen mit sich selbst gleiche Höhe besitzt.

Dies ist ein unwiderleglicher Beweis per analogiam, weil aber die Geometer an Analogien weniger gewöhnt sind, so will ich einen mühevolleren und rein geometrischen Beweis versuchen. Rufen wir uns Fig. 12 ins Gedächtnis zurück, wo $CTAV$ ein zur Konjugation CGA gehöriger Stumpf ist; wir verlängern CT bis zum Durchschnittspunkt E mit dem Kreise und verbinden hierauf E und A. Es wird also der Zylinder CEA kleiner sein als der Zylinder CGA nach V. Mit ihm ist aber gleich hoch der Stumpf $CTAV$ gemäß der Konstruktion, weil EA und TR gleich sind. Der Stumpf ist um $\frac{1}{3}$ des Quadrats von AR größer als der Zylinder CEA nach XIII. Zu beweisen ist, daß das Verhältnis GA zu EA größer ist als das Verhältnis der Summe aus dem Quadrat von CE und dem dritten Teil des Quadrats von AR oder ET zum Quadrat von CG, so daß der Zylinder CEA durch eine Verkleinerung von EA mehr verliert, als er durch das Größerwerden des dritten Teils des Quadrats von ET gewinnt.

Zunächst ist das Quadrat von RT oder AE um das ganze Quadrat von AR kleiner als das Quadrat von TA. Und das

Quadrat von CE ist um den dritten Teil des Quadrats von AR kleiner als die Summe aus dem Quadrat von CE und dem dritten Teil des Quadrats von AR. Zwischen den beiden Gliedern im ersten Fall besteht ein Unterschied, der dreimal so groß ist wie die Differenz im zweiten Fall. Außerdem sind hier die Glieder größer als das Doppelte jener Glieder. Weil nämlich das Quadrat von CG das Doppelte des Quadrats von AG ist, so ist hier das Quadrat von CE größer als das Quadrat von CG, und das Quadrat über AE kleiner als das über AG. Wenn aber zwischen zwei Zahlen (z. B. 25 und 26) irgend ein Unterschied besteht (hier 1), und wenn der dreifache Unterschied zwischen zwei andern Zahlen vorhanden ist, von denen entweder jede kleiner ist als die Hälfte der früheren Zahlen, oder bei denen wenigstens die zweite gleich ist der Hälfte der früheren zweiten Zahl (z. B. 10 und 13), so ist das Verhältnis der kleineren Glieder größer als das Sechsfache des Verhältnisses der größeren Zahlen. So bilden die Zahlen 10 und 13 oder 20 und 26 ein größeres Verhältnis als das Sechsfache des Verhältnisses 25 zu 26, und das erste Verhältnis wäre noch um vieles größer, wenn auch das zweite Glied (13) kleiner als die Hälfte des andern zweiten Gliedes (26) gewesen wäre. Denn bei gleichbleibender Differenz wird ein Verhältnis um so größer, je kleiner seine Glieder werden. Es ist also das Verhältnis des Quadrats von AT zum Quadrat von TR oder EA größer als das Sechsfache des Verhältnisses der Summe aus dem Quadrat von EC und dem dritten Teil des Quadrats über AR zum Quadrat von CE. Das Verhältnis der Strecken TA und TR oder EC ist folglich größer als das dreifache des Verhältnisses des Quadrats über CE vermehrt um $\frac{1}{3}$ des Quadrats über AR zum Quadrat über CE.

Ebenso können wir auch beweisen, daß das Verhältnis der Quadrate von CE und CG kleiner ist als das der Geraden GA und AT. Das Quadrat von CG ist gleich dem Rechteck BVD, wenn BA in D so geteilt ist, daß AD die Hälfte von BD ist, sowie das Quadrat von AG die Hälfte des Quadrats über GC ist nach VII. Es ist aber CE nach XII das arithmetische Mittel aus VB und VA. Daher ist das Quadrat von CE gleich dem Rechteck BVA vermehrt um das Quadrat von AR; wenn also mit BV oder CT ein dem Quadrat von AR gleiches Parallelogramm konstruiert werden soll, so kommt zu VA die Breite des Parallelogramms hinzu, und diese sei AH. Es wird demnach das Quadrat von CE

gleich dem Rechteck BVH. Es war aber das Quadrat von CG gleich dem Rechteck BVD, es verhält sich also HV zu VD, wie das Quadrat von EC zu jenem über CG. Ich behaupte, das Verhältnis HV zu VD sei kleiner als das von DV und VB.

Es ist BD das Doppelte von DA, und BA das Doppelte von AR; daher ist auch AD das Doppelte von DR. Selbst wenn AH mit AD und ebenso HD mit DB gleich wäre, wäre das Verhältnis HV zu VD kleiner als DV zu VB; es ist aber AH kleiner als AD und daher auch kleiner als DR. Das Quadrat von CT oder VB ist nämlich immer größer als das Doppelte des Quadrats von BA nach X. Denn wenn es gleich dem Doppelten wäre, so wäre die Höhe des Stumpfes und sein Inhalt gleich Null; daher ist das Quadrat von VB größer als das Achtfache des Quadrats über AR. Da nun die Größen VB, AR, AH eine stetige Proportion bilden, so wird die Gerade VB immer größer sein als das Achtfache von AH, und AR ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen $AH = 1$ und $BV = 8 +$. Die Wurzel AR von $8 +$ ist in Teilen von AH ausgedrückt. Diese Wurzel liegt aber zwischen 2 und 3, wenn die Höhe des Stumpfes und sein Inhalt gleich Null ist, und selbst bei einer sehr kleinen Höhe des Stumpfes wird sehr bald aus $8 +$ die Zahl 9, deren Wurzel 3 ist, und bei noch größeren Höhen wird AR immer mehr wachsen. Es liegt daher AH selbst mit seinem größten Wert zwischen der Hälfte und dem dritten Teil von AR, und es wird bei einer Vergrößerung der Höhe der konjugierten Stumpfe kleiner als ein bestimmter Teil von AR, so daß es schließlich mit verschwindendem AB, wenn der Stumpf in den Zylinder übergeht, ein unendlich kleiner Teil von AR ist. Wenn nun aber AH weggelassen würde, so wäre das Verhältnis AV zu VD kleiner als das Verhältnis der Wurzeln von DV und VB, weil AD die Hälfte von DB ist; da sich DV zu VB verhält wie das Quadrat von GC zu dem von CT oder wie das Quadrat von GA zu dem von AT, so wäre, wenn man von AH absieht, das Verhältnis AV zu VD und damit auch das der Quadrate von EC und CG immer kleiner als das der Geraden GA und AT.

Da aber für die verschiedenen Stumpfe zwischen AR und AH Verhältnisse von jeder Art bestehen, so wird irgendwo, nämlich bei den mit dem Zylinder sehr nahe gleichhohen Stumpfen, der Fall eintreten, daß AH nicht soviel (zu VA)

hinzufügt, daß das Verhältnis HV zu VD dem Verhältnis GA zu AT gleich wird; dann ist der oben ausgesprochene Satz jedenfalls richtig, denn die beiden Elemente des Verhältnisses GA zu AE, das eine AT zu AE oder TR und das andere GA zu AT sind einzeln größer als die beiden Elemente des Verhältnisses: Quadrat von CE vermehrt um den dritten Teil des Quadrats von AR zum Quadrat von GC. In den Stumpfen, die dem konjugierten Zylinder zunächst stehen, nahm also die Höhe rascher ab, als die Basis des mit dem Stumpf gleichen Zylinders zunahm. Das war aber vor allem zu beweisen, denn nachdem von Anfang an die Stumpfe kleiner waren als der Zylinder, nehmen ihre Inhalte weiterhin beständig ab, bis sie endlich Null werden. Die überflüssiger Weise noch folgenden Fälle lassen den Beweis in noch größerer Klarheit erscheinen. Entweder wird das Verhältnis HV zu VD bei den niedrigeren Stumpfen dem Verhältnis GA zu AT gleich, es sind also die zweiten Elemente der genannten Verhältnisse gleich, die ersten aber noch immer ungleich, und das Verhältnis des Überschusses von AT über TR zu TR ist mehr als dreimal größer als das Verhältnis des dritten Teils des Quadrats von AR zum Quadrat von CE, und zwar sine compensatione.

Daher ist das vollständige Verhältnis der Höhen noch immer größer als das der Grundflächen. Oder endlich es übertrifft das Verhältnis HV zu VB das andere GA zu AT, dies aber nur bei Stumpfen von noch geringerer Höhe, wenn CE groß, TR dagegen klein wird; dann wird das Quadrat von AR mehr und mehr dem Quadrat TR gleich und schließlich größer als dieses, wobei das Verhältnis von TA zu TR einen großen Wert erreicht; dieses Verhältnis ist unstreitig von allem Anfang an und immer größer als das Dreifache des Verhältnisses: Quadrat von CE vermehrt um den dritten Teil des Quadrats von AR zum Quadrat von CE allein, da gerade der dritte Teil des Quadrats von RA das Quadrat von CE verhältnismäßig nicht so stark vermehrt, weil das letztere ja selbst wächst. Da nun das erste Element der Proportion, die die Höhen enthält, d. i. das Verhältnis AT zu TR rasch größer wird als der dritte Teil des Verhältnisses GA zu AT, so wird demnach immer der Fall eintreten, daß dieses Element beim Größerwerden das zweite Element, das das Verhältnis der Grundflächen darstellt, nicht nur kompensiert, sondern auch mehr und mehr übertrifft. Denn hier vermehrt das ganze Quadrat von AR beim Wachsen das Verhältnis der kleineren und abnehmenden Glieder, dort aber vermehrt nur ein Drittel einer gleichfalls wachsenden Größe das Verhältnis größerer und zunehmender Glieder. Der dritte Teil der Zunahme gibt also hier mehr aus als dort die ganze Zunahme.

Das Vorhergehende war der Nachweis für jene Konjugation, in der das Quadrat von CG das Doppelte des Quadrats von GA war. Wenn das Quadrat von CG größer ist als das Doppelte von jenem von GA, so gilt das Bewiesene umsomehr. Was nämlich die Analogie anlangt, so sind die mit solchen Stumpfen gleich hohen Zylinder CBA subkonträr zu den gleichen, aber höheren Zylindern CHA; von dem subkonträren Zylinder wurde in XVIII bewiesen, daß von ihnen angefangen die Stumpfe kleiner zu werden beginnen, auch diejenigen Stumpfe, die hohe Zylinder CHA zu konjugierten haben, umsomehr aber jene, die derselben Konjugation angehören, wie diese subkonträren Zylinder CBA, und die gerade hier von allem Anfang an niedriger sind als der konjugierte Zylinder CBA.

Was den restlichen Teil des Beweises betrifft, so wird, da in Fig. 12 die Zylinder, die Häupter der Konjugationen, niedriger als die Zylinder CGA vorausgesetzt wurden, in ihnen CG wachsen, aber mit abnehmenden Inkrementen, GA aber wird abnehmen, doch mit wachsenden Dekrementen. Wenn auch GA und demgemäß auch TA abnimmt, so wird die Differenz AB der Durchmesser, mögen diese auch wachsen, zunehmen, jedoch mit abnehmenden Inkrementen nach X. Es wird also die Verminderung des Inhalts des konjugierten Zylinders bei einer Verkleinerung von TR groß, sowohl wegen der großen Basis CG wie auch wegen der um so größeren Differenz zwischen TR und AG; die zum Inhalt des konjugierten Zylinders hinzutretende Vergrößerung um ein Drittel des Quadrats von AR und die Vermehrung des Quadrats CE um BA werden aber klein und von geringerer Bedeutung. Es möge der, dem es gefällt, alle Grundzüge des vorstehenden Beweises auch auf diesen Fall anwenden, er wird bezüglich der Richtigkeit dieses Satzes nicht weniger Klarheit finden, als sie früher im Lehrsatz IX dieses Teils aus der Rechnung hervorleuchtete.

Folgesatz. Gesetzt, die Weinfässer beständen aus zwei reinen Kegelstumpfen, so wird in jenen, die kurz sind, der Bauch jedesmal den Inhalt vermindern; bei den österreichischen Fässern trifft dies in der Tat meistenteils zu, mögen sie einen Bauch haben oder sich mehr der Zylinderform nähern, weil es niemals vorkommt, daß der Bauch derartig groß wird, daß die Spundtiefe das Doppelte des Faßbodens erreicht; in diesem Falle würde es wirklich nach dem Folgesatz zu IX mehr als ein Viertel verlieren. Die Spundtiefe erreicht aber auch niemals das Anderthalbfache des Bodendurchmessers, in welchem Fall durch den Bauch ungefähr $\frac{1}{30}$ des Inhalts verloren geht. Wenn jedoch das Verhältnis den ungewöhnlich großen Wert von $\frac{4}{3}$ erreicht, dann vermindert sich der Verlust auf den 70. Teil.

Das ist aber die andere und noch bemerkenswertere Eigenschaft des österreichischen Fasses. Wie nämlich nach V eine kleine fehlerhafte Abänderung der Faßform durch den Verfertiger keinen Einfluß hat, weil der Böttcher nach Vorschrift und Gewohnheit die Form vom möglichst größten Inhalt zu erreichen suchte und bei einer Abweichung auf die der größten Form zunächststehenden Figuren hingeleitet wird, bei denen anfangs ein Fehler nach den Gesetzen des Kreises nicht merkbar ist, so ändert auch hier bei diesem Fasse ein weiter oder ein enger Bauch am Inhalt beinahe nichts, eine Sache, die für den Binder sehr schätzenswert ist, weil sich die Weite des Bauches nicht so leicht nach Belieben gestalten läßt wie das Verhältnis der Daubenlänge zum Bodendurchmesser, und weil er nicht genau darauf zu achten hat, wie weit der Bauch ausfallen wird, und wie viel er enger gemacht werden müßte, wenn durch das Gesetz eine bestimmte Weite vorgeschrieben wäre. Deshalb ist ein derartiges lästiges Gesetz nicht notwendig, und dies ist dem besonders geschickten Verhältnis der Daubenlänge zum Bodendurchmesser, wie es in Österreich gebräuchlich ist, zu verdanken.

Lehrsatz XXIII. Ein geometrisches Problem. Wenn das Verhältnis der Durchmesser eines Stumpfes gegeben ist, jene Konjugation zu finden, in der ein solcher Stumpf dem Zylinder der größten Konjugation gleich ist.

Zunächst ist in der Konjugation, der der größte Zylinder angehört, jeder Stumpf und somit auch jener, für den das Verhältnis der Durchmesser gegeben ist, kleiner als der größte Zylinder nach XXI. Es rückt also die gesuchte Konjugation über G, die Konjugation des größten Zylinders, hinaus gegen die Konjugation eines mit dem größten Zylinder gleich hohen

Stumpfes, der das vorgegebene Verhältnis der Durchmesser besitzt. Wenn z. B. CFA ein mit dem größten Zylinder CGA gleich hoher Stumpf und CIA der ihm konjugierte Zylinder ist, wenn ferner in der Konjugation CGA der Stumpf CTA vorkommt, und CF sich zu dem ihm auf AX gegenüberliegenden parallelen Durchmesser verhält wie CT zu AV, so wird der der Konjugation G angehörige Stumpf CTA kleiner sein als der größte Zylinder CGA. Die gesuchte Konjugation fällt deshalb über G hinaus gegen I hin, und der gesuchte Stumpf wird eine Höhe haben, die größer ist als GA. Und der Durchmesser der Grundfläche des gleich hohen Zylinders, der das arithmetische Mittel aus den beiden Durchmessern des gesuchten Stumpfes ist, wird kleiner sein als CG. Ich behaupte, daß die gesuchte Konjugation auch jenseits von I liegt, und die Höhe des gesuchten Stumpfes größer als AI ist, was verwunderlich erscheint. Weil nämlich das Verhältnis der Durchmesser des Stumpfes gegeben ist, so ist immer auch ihr Verhältnis zu ihrem arithmetischen Mittel gegeben. Wie sich CF zu CG, so wird sich auch der kleinere Durchmesser des gesuchten Stumpfes zum Durchmesser des mit ihm gleichhohen Zylinders verhalten. Dieser letztere Durchmesser ist jedoch kleiner als CG und von A weiter entfernt, daher ist auch jener Durchmesser kleiner als CF und von A entfernter, also das Verhältnis CF zu FA oder CI zu IA kleiner als das des Durchmessers des gesuchten Stumpfes zu seiner Seite, d. h. des Durchmessers des konjugierten Zylinders zu seiner Höhe. Daher ist die Höhe in der gesuchten Konjugation größer als AI, der Durchmesser kleiner als IC. Soweit geht mein Beweis, den Rest überlasse ich zur Bearbeitung dem *Adrianus Romanus* und, falls es ein anderer ist, dem, der sich mit Geber beschäftigt.

Da jeder Stumpf größer ist als der mit ihm gleichhohe Zylinder, und zwar im Verhältnis von $\frac{1}{12}$ des Quadrats der Differenz der Durchmesser zum Quadrat des Durchmessers des gleichhohen Zylinders, so muß das Quadrat von CA so geteilt werden, daß der eine Teil vermehrt um das Verhältnis, das durch die Differenz der Durchmesser gegeben ist, und multipliziert mit der Seite des andern Teils gleich wird dem Quadrat von CG mal der Geraden GA. Zieht man diesbezüglich *Geber* zu Rate, so erhält man in seiner Cossa den Aufschluß, daß man eine so große Höhe zu suchen hat, daß, wenn es nach ihr drei stetige Proportionalen gibt, in dem

Verhältnis, wie sie selbst zu CA sich verhält, ein gewisses Vielfaches der ersten gleich wird einer absoluten Zahl vermehrt um ein Vielfaches der dritten; die Cossisten suchen noch eine geometrische Darstellung einer derartigen Gleichung, meines Erachtens werden sie sie aber niemals finden[38].

Lehrsatz XXIV. Ein geometrisches Problem. Wenn eine Konjugation gegeben ist, in der das Quadrat des Durchmessers der Zylindergrundfläche kleiner ist als das Doppelte des Quadrats der Höhe, jene beiden Verhältnisse der Durchmesser zu finden, für die die Stumpfe dieser Konjugation dem größten Zylinder gleich werden.

Gegeben sei die Konjugation CIA, in der das Quadrat von CI kleiner ist als das doppelte Quadrat IA; es sollen die Durchmesser derjenigen konjugierten Stumpfe gefunden werden, die dem größten Zylinder CGA gleich sind. Die Höhe des einen Stumpfs wird größer, die des andern kleiner sein müssen als die Höhe GA des größten Zylinders nach XXI. Folglich wird bei dem ersten Stumpf das Verhältnis der Durchmesser kleiner sein als das der Durchmesser des mit dem größten Zylinder CGA gleichhohen Stumpfes, bei dem zweiten aber größer, jeder der beiden Stumpfe wird seinen gleich hohen Zylinder besitzen, die selbst nicht subkonträr sind, wohl aber den subkonträren Zylindern sehr nahe stehen werden; denn wenn sie subkonträr wären, so wären sie einander gleich nach XVI. Da aber die zu jenen Zylindern gehörigen Stumpfe ungleiche Verhältnisse der Durchmesser besitzen, zumal sie in derselben Konjugation verschiedene Höhen haben, so würden durch sie zu den Differenzen [Stumpf — Zylinder] ungleiche Zwölftel der Quadrate hinzukommen nach XIII, die Stumpfe würden also ungleich. Wir aber suchen gleiche Stumpfe, von denen ja jeder dem einen Zylinder CGA gleich sein soll.

Soweit geht mein Beweis, das übrige mögen die Cossisten vollenden. Ist das gesuchte CF bekannt, so ist auch FA nach der Konjugation, sein Quadrat und das Rechteck der Durchmesser gegeben. Dieses, durch den kleineren Durchmesser CF geteilt, liefert den größeren Durchmesser; dadurch ist auch ihre Differenz und das Viertel und Zwölftel ihres Quadrats bekannt. Zieht man das Viertel vom Quadrat von AF ab, so bleibt das Quadrat der Höhe, das mit dem Quadrat von GA verglichen, den einen Teil des Verhältnisses der

Körperinhalte liefert. Wenn jeder der beiden Durchmesser bekannt ist, so ist auch für den Zylinder, der die Höhe des Stumpfes *CFA* besitzt, der Durchmesser der Basis, bzw. sein Quadrat nach XII bestimmt. Dieses Quadrat, mit dem früher gefundenen Zwölftel vereinigt, liefert, mit dem Quadrat von *CG* verglichen, den zweiten Teil des Verhältnisses der Körperinhalte. Es müssen aber diese Elemente des Verhältnisses subkonträr gleich (subcontrarie aequales) sein, wenn sie mit einander vereinigt ein Verhältnis mit dem Werte 1 geben sollen.[39])

Ihr Cossisten, nehmet dieses eurem Scharfsinn auferlegte Kreuz auf euch und folget mir: ihr werdet, wenn mir nicht die ein wenig gewogene Minerva einen freundlichen Blick geschenkt hat, finden, daß die erste, zweite und fünfte mehrerer stetigen Proportionalen gleich ist der Summe aus einer reinen Zahl und den mit gewissen Zahlen multiplizierten dritten und vierten Proportionalen. Daher ist die Gleichung keine geometrische, sondern eine stochastische wie bei *Nic. Raimarus Ursus* oder eine mechanische wie bei *Justus Byrgi*; und das Problem ist nicht eines von jenen, die *Pappus* nach der Art der alten Geometer als *plana* bezeichnete, d. h. rein geometrisch, sondern es ist kubisch (solidum) und geometrisch cum conditione, indem nämlich zwei mittlere geometrische Proportionale gegeben sind, was eine geometrische Deutung nicht zuläßt. Außerdem gibt es aber nicht nur eine einzige Lösung dieser Gleichung, denn es ist bewiesen worden, daß zwei Stumpfe dieser Art vorhanden sind.

Lehrsatz XXV. Wenn die Stumpfe verschiedener Konjugationen dasselbe Verhältnis der Durchmesser und dieselbe Diagonale besitzen, so setzt sich das Verhältnis ihrer Inhalte aus drei Elementen zusammen, nämlich aus dem Verhältnis der Zylinder der Konjugationen, und aus den Verhältnissen jedes Zylinders zu seinem konjugierten Stumpf, wobei das Verhältnis des ersten Zylinders indirekt, das des zweiten aber direkt ist.

Es sei über derselben Diagonale *CFA* ein Stumpf der Konjugation *CIA*, dann *CTA* ein solcher der Konjugation *CGA*; ferner verhalte sich *CF* zum größeren Durchmesser auf der verlängerten *AX* wie *CT* zu *AV*. Ich behaupte, daß sich das Verhältnis des Körpers *CFA* zum Inhalt von *CIA* zusammensetzt aus den drei Verhältnissen: 1. *CIA* zu *CGA*; 2. *CFA* zu *CIA*; 3. *CGA* zu *CTA*.

Die Zurückführung auf den sehr bekannten Satz ist einfach, daß, wenn vier Größen in eine Reihe gestellt sind, das Verhältnis der ersten zur vierten sich aus den Verhältnissen der dazwischen gelegenen Größen zusammensetzt. In der Zusammenstellung dieser Reihe ist aber eine gewisse Vorsicht nötig; weil wir es nämlich mit dem Verhältnis der Stumpfe zu tun haben, so muß der eine Stumpf an die vierte Stelle, der andere an die erste gesetzt werden, die Zylinder aber kommen in die Mitte, und zwar jeder seinem konjugierten Stumpf zunächst. Nach dem Folgesatz zu III ist das Verhältnis der Säulen und somit auch das der Zylinder *CIA* und *CGA* gegeben. Lehrsatz IX ergibt das indirekte (eversa) Verhältnis *CIA* zu *CFA* und das direkte *CGA* zu *CTA*; aus dieser Zusammenstellung folgt dann der genannte Satz.

Folgesatz 1. In den Konjugationen mit den Werten 1 und 2 ist das Verhältnis der Inhalte für die verschiedenen Verhältnisse der Durchmesser das folgende:

Verh. d. Durchm.	Der Stumpf mit dem Konjugationswert 1:
1 : 2	übertrifft den andern um mehr als $\frac{1}{3}$
2 : 3	» » » » $\frac{1}{19}$
3 : 4	die Stumpfe sind gleich
4 : 5	ist kleiner um $\frac{1}{42}$
5 : 6	» » » $\frac{1}{26}$
6 : 7	» » » $\frac{1}{23}$
7 : 8	» » » $\frac{1}{20}$
8 : 9	» » » $\frac{1}{18}$
9 : 10	» » » $\frac{1}{17}$

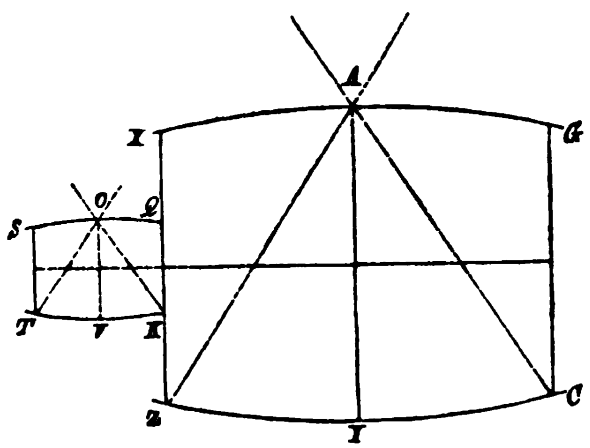
Folgesatz 2. Gesetzt, die Fässer beständen aus zwei reinen Kegelstumpfen, so wird, wenn zwei Fässer dasselbe Verhältnis der Durchmesser haben, das Faß von der österreichischen Form, bei dem sich der Durchmesser des Faßbodens zur halben Daubenlänge wie 2 zu 3 verhält, meistens einen größeren Inhalt besitzen als das rheinische Faß, bei dem diese beiden Größen gleich sind. Nur sehr selten und vielleicht niemals werden sie inhaltsgleich sein, weil kaum jemals das Verhältnis der Tiefe am Bauch zum Durchmesser des Faßbodens den Wert $\frac{4}{3}$ erreicht.

Über die kubische Visierrute und ihre Verläßlichkeit.

Lehrsatz XXVI. **Bei Fässern von ähnlicher Form ist das Verhältnis der Inhalte gleich dem kubischen Verhältnis ihrer Längen, diese gemessen vom oberen Spundloche bis zum untersten Rand jedes Faßbodens.**

Es seien $SQKT$ und $XGCZ$ zwei Fässer von verschiedener Größe aber gleicher Gestalt, mit den Spundlöchern O und A und mit den Durchmessern ST, QK, XZ, GC der Faßböden, deren tiefste Punkte T, K, Z, C sind; die Längen OT und OK und ebenso AZ und AC seien gleich. Ich behaupte, daß die Faßinhalte im kubischen Verhältnisse der Längen OK und AC stehen. Wir ziehen durch O und A parallel zu den Böden die Geraden OV und AY, dann sind die beiden Kegelstumpfe SV und VQ ähnlich mit XG und YG. Was aber für die Hälften der Fässer gilt, ist auch für die ganzen richtig. Betrachten wir also die Figuren $OVKQ$ und $AYCG$ als Kegelstumpfe, deren Durchmesser OV, QK, AY, GC sind; die Achsenschnitte $OQVK$ und $AYCG$ sind ähnlich und ihre Diagonalen OK und AC.

Fig. 13.



Da ähnliche Körper im kubischen Verhältnis der analogen Seiten stehen, so wird das Verhältnis des Inhalts von GY zu QV gleich der dritten Potenz des Verhältnisses der Seite AG zu OQ oder des Durchmessers GC zu QK sein. In den ebenen ähnlichen Dreiecken AGC und OQV verhält sich aber GC zur analogen Seite QK entweder wie AG zu OQ oder wie die Diagonale AC zur analogen Diagonale OK. Deshalb ist auch das Verhältnis der Inhalte gleich dem kubischen Verhältnis der Diagonalen; in demselben Verhältnis stehen auch die ganzen Fässer GZ und QT.

Folgesatz 1. Konstruktion einer Visierrute. Es ist klar, daß, wenn die Meßrute so große gleiche Teile enthält, daß der erste unterste die Länge OK eines Fäßchens von 1 Eimer Inhalt darstellt, zu den andern Teilen Zahlen zu setzen sind, die untereinander im kubischen Verhältnis der gleichmäßigen Teilung stehen, ohne Zweifel gehört zum Teil 1 die Zahl 1, zu 2 die Zahl 8, zu 3 . . 27 usw. Die übrigen Zahlen zwischen diesen Kubikzahlen sind derart in die Zwischenräume einzuteilen, daß der zweite Teil in 7 nicht gleiche, aber proportionale Stücke zerfällt, denen die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7 entsprechen. Die Zahl auf der richtig eingeführten Rute, die der innere Rand der Faßdaube bei O und A markiert, zeigt die Zahl der Eimer an oder das Verhältnis des Faßinhalts zum Inhalt eines Fasses mit 1 Eimer Fassungsraum.

Folgesatz 2. Es kommt auf dasselbe hinaus, wenn manche Mensoren im Dreieck AGC statt der Seite AC die Summe der Seiten AG und GC messen, indem sie statt der Meßrute einen zusammengerollten Lederstreifen benutzen, auf dem die Zahl der Eimer nach demselben Gesetze verzeichnet ist. Der Anfang wird beim Rande C angelegt, und der Streifen von C nach G und hierauf nach A gespannt, die Zahl bei A gibt dann den Inhalt an. Die Länge des bei G vorspringenden Randes und die Dicke der Reifen, der Dauben und der Faßböden, die sie beim Umlegen des Streifens umspannen, nehmen sie nämlich von vornherein bei allen Fässern als ähnlich an.

Lehrsatz XXVII. Wenn die beiden Hälften eines österreichischen Fasses nicht vollständig ähnlich sind, sondern der eine Faßboden um weniges kleiner und enger ist als der andere, so ist, sofern nur die Visierlänge die nämliche ist, die Differenz der Inhalte beider Hälften unmerklich.

Im Folgesatz zu Lehrsatz V dieses Teiles wurde gesagt, daß sich die österreichische Faßform in der Nähe des größtmöglichen Fassungsraumes bewegt, und daß bei einer Abweichung hiervon nach beiden Seiten alle Fässer, sowohl die längeren wie auch die kürzeren als das österreichische, weniger Inhalt haben. In jenen Punkten, in denen nach einem gewissen Kreisgesetz eine Änderung vom Kleineren zum Größten und hier auch wieder zum Kleineren eintritt, ist aber jene Differenz immer unmerklich.

Was also für die ganzen Fässer über derselben Diagonale gilt, das wird auch richtig sein für die beiden Stumpfe eines Fasses, wie AYX und AYG, so daß, wenn auch der eine Boden XZ kleiner ist als der andere GC, sobald nur AC

und CZ gleich sind, die beiden Inhalte mit ausreichender Annäherung gleich werden.

Lehrsatz XXVIII. Wenn die Visierlängen für die beiden Stumpfe nicht gleich sind, was vorkommt, so kann das arithmetische Mittel aus beiden ohne Fehler als Maß des Inhalts genommen werden.

Die kleinere Länge gibt das Doppelte des Inhalts des betreffenden Stumpfes, ebenso die größere. Beide zusammen ergeben also das Doppelte des ganzen Inhalts. Das Mittel beider daher den einfachen Inhalt.

Lehrsatz XXIX. Die Krümmung der Faßdauben ändert beim österreichischen Faß die Angaben der Meßrute nicht, bei länglichen Fässern vermehrt sie, bei kurzen vermindert sie unter gleichen Umständen den von der Rute angezeigten Inhalt.

Wenn auch nach XXIX des ersten Teils ein Faß von der Form einer abgestumpften Zitrone, Pflaume, Olive, einer parabolischen oder hyperbolischen Spindel an Inhalt ein zylindrisches oder ein aus zwei Kegelstumpfen bestehendes in der angeführten Ordnung übertrifft, so ist doch jene Abweichung an und für sich sehr klein, wie aus XXII des 1. Teils hervorgeht, und soweit sie merkbar ist, schon in den Zahlen der Meßrute eingeschlossen. Denn das erste Faß, dessen Inhalt an der Rute als ein Eimer angegeben ist, hat eine ähnliche Krümmung wie alle übrigen: die Rute mißt Fässer, die alle ähnliche Krümmung haben. Diese ist zwar nicht bei allen Fässern gleich, doch ist sie bei allen in gewissem Maße vorhanden, und dadurch wird der durch sie verursachte Fehler kleiner. Wenn die Fässer länger sind als die österreichischen, so ist auch der gekrümmte Teil der Faßdauben länger, daher ihr Inhalt größer, auch wenn die Krümmung der beiden ähnlich ist; ebenso ist bei kürzeren Fässern der gekrümmte Teil kürzer. Allerdings berücksichtigt die Rute eine mäßige Krümmung, wie sie beim österreichischen Faß vorkommt; sie wird der Krümmung aber nicht gerecht bei einem länglichen Faß, die Krümmung hat einen zu großen Einfluß bei einem kürzeren.

Dritter Teil.

Anwendung der in der Stereometrie aufgestellten Regeln.

Inhaltsangabe der vier ersten Kapitel.

Wenn ein Faß entsprechend den in Österreich gebräuchlichen Regeln gebaut ist, so kann man sich auf die Angaben der kubischen Visierrute vollkommen verlassen. Diese Methode der Ausmessung ist zugleich die einfachste, weil durch sie tatsächlich der Hohlraum des Fasses gefunden wird, und sie ist deshalb auch jener Methode vorzuziehen, die von *Joh. Hartmann Bayer* 1603 begründet wurde, und die sich auf den Gebrauch einer planimetrischen Visierrute stützt. Will man den Inhalt eines Fasses durch Rechnung bestimmen, so bietet das vorausgehende Buch die dafür anzuwendenden Regeln. Der Durchmesser des Faßbodens wie auch der des Bauches sind durch eine auf der Visierrute angebrachte Teilung leicht mit Sicherheit zu bestimmen. Die innere oder »technische« Höhe läßt sich aus der Visierlänge und dem Unterschiede der beiden Durchmesser berechnen. Für die Bestimmung der Krümmungsverhältnisse der Faßdauben wird von *Kepler* folgender Vorgang vorgeschlagen. Man teilt einen Metallstab in die Hälfte und ordnet auf jeder Seite symmetrisch zum Halbierungspunkt drei Schrauben an, deren Achsen auf dem Metallstab senkrecht stehen. Den Stab legt man mit seiner Mitte an den Bauch des Fasses an und dreht dann die Schrauben so lange, bis sie die Daube berühren. So erhält man 7 Punkte der Krümmungslinie, die man bequem auf eine Ebene übertragen kann. Um die Krümmung der inneren Fläche zu erhalten, hat man bloß die Dicke der Dauben am Spundloch und an den vorspringenden Rändern des Fasses, den »Fröschen« (margines), abzuziehen.

Die äußersten Punkte F und G verbindet man durch eine Gerade, vom mittleren Punkt C (Fig. 5, S. 21) fällt man darauf die Senkrechte CO. Ist S der dem Punkt F zunächst gelegene

Punkt, so kann man, weil die Krümmungsradien stets sehr groß sein werden, FS als Tangente der Kurve betrachten, die die verlängerte CO in Y schneidet. Die entsprechende Tangente auf der andern Seite G muß ebenfalls durch Y gehen. Geht die Halbierungslinie des Winkels OGY durch C, so ist die Kurve ein Kreis, sind OC und CY gleich, so ist sie eine Parabel. Wenn CO kleiner ist als CY, so hat man es mit einer Ellipse zu tun, die nach Lehrsatz XXVII aufrecht steht, wenn $CO : CY$ größer ist als $OG : GY$. Der Fall, daß das erstere Verhältnis kleiner ist als das zweite, besonders daß das Faß durch Rotation eines Ellipsensegments um eine zur kleinen Achse parallele Linie entsteht, wird fast niemals vorkommen. In allen diesen Fällen ist aber das Segment FGC leicht zu berechnen.

Methode, das Verhältnis des geleerten Teils zum Rest zu bestimmen, wenn das Faß liegt und die Durchmesser des Bauches und der Böden lotrecht stehen.

Soweit mir bekannt, ist diese Untersuchung bisher noch ausständig, die doch auch für Familienväter zur Entdeckung und Verhütung von Diebstählen nötig ist, wenn schon Bacchus seine Schätze aus dem Bereich der Thetis brachte und ihr den Zutritt dazu verbot; diese Göttin pflegte nämlich die Übeltaten ihres Lustigmachers (verna), wenn er sich heimlich einen Teil beiseite geschafft hatte, dadurch zu verbergen, daß sie den Rest ausschüttete. Die Methode des *Coignet* und anderer besteht, insofern sie zuverlässig ist, in der Verwendung der Enge (angusti), sie kann jedoch, wie ihre Entdecker wohl zugeben werden, auf Fässer jeder beliebigen Art ohne schwerwiegende Fehler nicht angewendet werden. Er teilt allerdings, wenn das Faß die Figur eines Zylinders hat oder von ihr nur wenig abweicht, die ebene Flüssigkeitsoberfläche der Kreise an den Böden und am Bauche in je zwei Kreissegmente; deshalb stehen die beiden Teile des zylindrischen Fasses, der volle und der leere, im Verhältnis dieser Abschnitte. Das Faß ist aber gewissermaßen aus zwei Kegelstumpfen zusammengesetzt, deren Höhe (altitudo technica) berechnet wird, d. h. die Länge zwischen dem Kreise am Bauch und dem Faßboden. Jeder Stumpf besteht wieder aus einem mittleren Zylinder über der kleineren Grundfläche und einer um ihn laufenden Tunika. So nenne ich nämlich die Hervorragung des Bauches (protuberantia) über den Zylinder in der Mitte der Faßhälfte. Betrachtet man das ganze Faß in seiner wirklichen Form, so hat man die ganze von mir früher als Gürtel (zona) bezeichnete Hervorragung zu nehmen, die sich aus zwei aufeinander stehenden Tuniken zusammensetzt. Es ist also zu beachten, daß sich zuerst, bevor noch am inneren Zylinder zwischen den Faßböden etwas fehlt, die Flüssigkeit in der Tunika oder dem Gürtel senkt; denn wenn der Zylinderinhalt sich zu vermindern beginnt, nimmt immer auch eine Tunika ab; schließlich wenn der Zylinder sich ganz geleert hat, bleibt immer noch ein Rest im untersten Teil des Gürtels. Wer würde bei einer solchen Regellosigkeit von einer handwerksmäßigen Behandlung Hilfe erwarten?

Nun würde aber nur ein einziger Lehrsatz erforderlich sein, um für den Hohlraum eines Fasses von der Form eines doppelten Kegelstumpfes eine völlig ausreichende Methode angeben zu können. Es ist oben im 1. Teil erwähnt worden, daß von den Geometern bisher keine Berechnung vorliegt für den Inhalt beliebiger Abschnitte eines Kegels, zu denen auch die Segmente eines Kegelstumpfes oder Fasses gehören, die durch die Oberfläche der ausfließenden Flüssigkeit begrenzt werden, wenn sie parallel zur Achse des Stumpfes und senkrecht auf die gemeinsame Grundfläche beider Hälften oder auf den Kreis um den Bauch des Fasses ist.

Über diese Kegelsegmente möge daher auch hier einiges Platz finden zur Aufmunterung für die Geometer, damit sie, die bisher wegen mangelnder Verwendung sich mit ihnen nicht beschäftigen zu müssen glaubten, nun endlich, nachdem ihre Verwendbarkeit klar zutage liegt, aus ihrem Schlafe erwachen und ihren Inhalt bestimmen. Ich untersuchte also zuerst, ob ein solcher Kegelabschnitt, entstanden durch einen zur Achse parallelen und daher hyperbolischen Schnitt, zum ganzen Kegel in einem Verhältnis stehe, das sich aus dem Verhältnis seiner Grundfläche zur Grundfläche des Kegels und dem seiner Höhe zur Höhe des Kegels zusammensetzt. Diese Meinung liegt zwar sehr nahe, sie ist aber dennoch falsch. Dieses Verhältnis ist nämlich richtig für das Segment eines niedrigeren gleichseitigen Kegels, das durch einen Schnitt durch den Scheitel entsteht, im Vergleich mit einem bestimmten höheren Kegel; nun ist aber dieses Segment eines gleichseitigen Kegels kleiner als das eines höheren (schiefen) Kegels über derselben Grundfläche, denn es geht in eine Spitze aus, während das letztere oben eine hyperbolische Schärfe (acies) besitzt; jenes ist begrenzt von der Oberfläche eines kleineren Kegels und einem ebenen Dreieck, dieses von einem Teil der Oberfläche eines größeren Kegels und einer hyperbolischen Ebene.

Ich habe dann weiter betrachtet, ob das vorgelegte Kegelsegment etwa gleich ist einem Abschnitt eines ähnlichen Zylindersegments über derselben Grundfläche und mit derselben Höhe, wie wir sie im ersten Teil behandelt haben, und worauf sich zum Teil auch Lehrsatz 22 bezieht, und ferner, ob nicht sowohl der zylindrische Huf wie das Kegelsegment über demselben Kreisabschnitt, von denen der erstere durch eine Ebene von elliptischem Umriß, das zweite durch eine solche mit hyperbolischer Begrenzung abgeschnitten wird, gleich ist dem dritten Teil eines geraden Zylindersegments über derselben Grundfläche, wie es durch eine zur Achse parallele Ebene abgeschnitten wird. Aber auch dies entspricht nicht vollkommen der Wahrheit, obwohl es ihr nahe kommt. Denn wäre es richtig für das eine, so könnte es nicht falsch sein für den Halbzylinder, den ein Achsenschnitt begrenzt, der auch durch den Scheitel und die Achse des eingeschriebenen Kegels hindurchgeht. Teilt man nämlich den Halbzylinder in 33 Teile, so besitzt der durch denselben Achsenschnitt erhaltene Halbkegel deren 11, der zylindrische Huf aber 14. Was nun den aus zwei getrennten Teilen bestehenden Körper betrifft, der nach innen von der Kegelfläche, nach außen von einer Ebene und den zwei Teilen der Zylinderfläche begrenzt wird, so ist sein Inhalt nur 8. Wenn auch hier der Halbkegel genau $\frac{1}{3}$ des Halbzylinders ist, so ist bei andern Segmenten das Verhältnis dennoch ein anderes, deshalb, weil dann der Kegel nicht mehr im Scheitel getroffen wird; es ist daher das betrachtete Kegelsegment größer als ein Drittel des gleichhohen geraden Zylindersegments, sie werden scheinbar allmählich einander mehr und mehr gleich, und andrerseits scheinen sich jene zwischenliegenden Körper mehr und mehr zu vermindern, je kleiner das gerade Zylindersegment wird, dessen Teile sie sind.

Drittens scheint es, daß man die Quadratur der Hyperbel zu suchen hat, die das Kegelsegment begrenzt; wenn sie gefunden ist, so ist es leicht, zu jeder Hyperbel ein flächengleiches Dreieck über derselben Grundlinie zu finden. Das Verhältnis des Kegelsegmentes zum ganzen Kegel scheint sich nämlich zusammenzusetzen aus dem Verhältnis der ebenen Grundflächen und dem der Höhen jener Dreiecke, die mit den Hyperbeln flächengleich sind. Wir wollen uns inzwischen, bis die Geometer mit dieser Jagdbeute zurückkehren, auf die Richtigkeit des noch ausstehenden und unbewiesenen Lehrsatzes verlassen und das auswählen, was der Wahrheit nahe kommt, indem wir die Kreisabschnitte, die Grundflächen der vorgelegten Kegelsegmente, nicht mit den Höhen multiplizieren, wodurch wir weniger als richtig erhalten würden, sondern mit längeren Strecken, die man erhält, wenn man die Höhen bis zu dem Kreise verlängert, der durch die vollständigen Kegel und das Spundloch geht, so daß, wenn (in Fig. 9 S. 46) dieser größte Kreis durch BC und den andern Scheitel jenseits von D gelegt wird, CL den Pfeil (sagitta) und LB den Sinus des unsere Linien bestimmenden Bogens vorstellt; es ist angezeigt, diesem Kreis einen besonderen Namen zu geben, und er soll Meßkreis (metator) genannt werden. Es ist klar, daß dieser Kreis nicht durch den Punkt G des Bodens gehen wird, und daß die »technische« Höhe OG des Segments COG bis zum Kreis verlängert größer werden wird, so daß sie etwa OZ ist. Zur Bestimmung des Inhalts des Kegelsegments multiplizieren wir also den Kreisabschnitt im Bauche des Fasses CA von der Höhe CO mit dem dritten Teil der Strecke OZ. Fürchtet jemand, daß OZ doch zu lang ist, so möge er bedenken, daß die uns hier beschäftigenden Segmente nicht vollständig kegelförmig sind, sondern daß sie infolge der Zitronen- oder Spindelform größeren Inhalt haben als die Kegelsegmente.

Schluß des Buches.

Ich hatte mir vorgenommen, die Irrtümer anderer in der Bestimmung des Inhalts eines ganz oder teilweise gefüllten Fasses aufzudecken und die Grundlagen der Berechnung in den Lehrsätzen dieses Buches darzustellen. Da aber eine Wahrheit sich durchsetzt, auch wenn sie schweigt im Lärm der Irrtümer, und da das Buch, das anfangs kaum zehn Sätze umfaßte, über die Maßen angewachsen ist, so möge, wer daran seine Freude hat, an seinen Fehlern festhalten; wir wollen die erlangten Vorteile verwenden und beten, daß uns unsere geistigen und leiblichen Güter erhalten bleiben, und der trinkbare Stoff in reichlicher Menge vorhanden sein möge.

Et cum pocula mille mensi erimus,
Conturbabimus illa, ne sciamus.

Nachwort des Herausgebers.

»Wenn ich in diesen Betrachtungen über den Einfluß der unmittelbaren Sinnesanschauung besonders *Kepler* genannt habe, so war es, um daran zu erinnern, wie sich in diesem großen, herrlich begabten und wunderbaren Manne jener Hang zu phantasiereichen Kombinationen mit einem ausgezeichneten Beobachtungstalente und einer ernsten, strengen Induktionsmethode, mit einer mutigen, fast beispiellosen Beharrlichkeit im Rechnen, mit einem mathematischen Tiefsinn vereinigt fand, der, in der Stereometria doliorum offenbart, auf *Fermat* und durch diesen auf die Erfindung der Rechnung des Unendlichen einen glücklichen Einfluß ausgeübt hat.«

Humboldt, Kosmos II, 364.

»*Kepler* présente dans cet ouvrage des vues sur l'infini qui ont influé sur la révolution que la géometrie a éprouvée à la fin du 17me siècle; et *Fermat* que l'on doit regarder comme le véritable inventeur du calcul différentiel, a fondé sur elles sa belle méthode de maximis et minimis.«

Laplace, Précis de l'hist. de l'Astronomie. 1821. p. 95.

Was *Kepler* zum Nachdenken über die Inhaltsbestimmung der Fässer veranlaßte, hat er in der Widmung des Buches in launiger Weise ausgesprochen.

»Als ich im November des letzten Jahres (1613) meine Wiedervermählung feierte, zu einer Zeit, da an den Donauufern bei Linz die aus Niederösterreich herbeigeführten Weinfässer nach einer reichlichen Lese aufgestapelt und zu einem annehmbaren Preise zu kaufen waren, da war es die Pflicht des neuen Gatten und sorglichen Familienvaters, für sein Haus den nötigen Trunk zu besorgen. Als einige Fässer eingekellert waren, kam am 4. Tage der Verkäufer mit der Meßrute, mit der er alle Fässer, ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung ihrem Inhalte nach bestimmte. Die Visierrute wurde mit ihrer metallenen Spitze durch das Spundloch quer bis zu den Rändern der beiden

Böden eingeführt, und als die beiden Längen gleich gefunden worden waren, ergab die Marke am Spundloch die Zahl der Eimer im Fasse. Ich wunderte mich, daß die Querlinie durch die Faßhälfte ein Maß für den Inhalt abgeben könne, und bezweifelte die Richtigkeit der Methode, denn ein sehr niedriges Faß mit etwas breiteren Böden und daher sehr viel kleinerem Inhalt könnte dieselbe Visierlänge besitzen. Es schien mir als Neuvermähltem nicht unzweckmäßig, ein neues Prinzip mathematischer Arbeiten, nämlich die Genauigkeit dieser bequemen und allgemein wichtigen Bestimmung nach geometrischen Grundsätzen zu erforschen und die etwa vorhandenen Gesetze ans Licht zu bringen.«

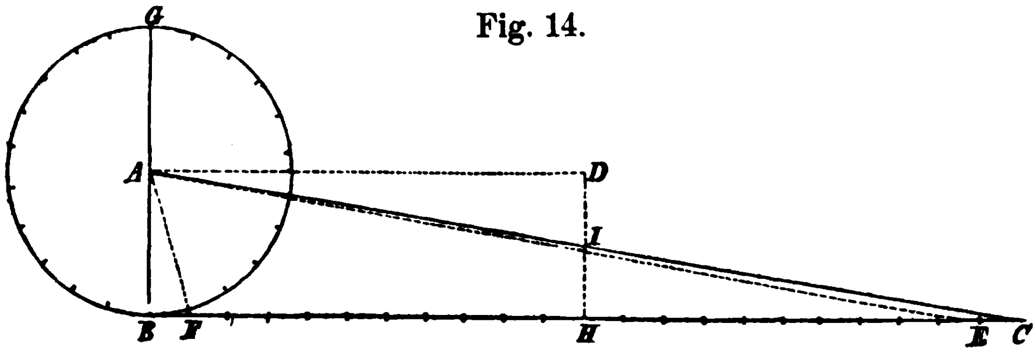
Ein Zeitraum von drei Tagen genügte ihm, die richtige Lösung zu finden; in dieser Fassung beschränkte sich die Schrift auf sechs Seiten. Aber der Herausgabe stellten sich, nachdem die Abhandlung etwas erweitert worden war, große Schwierigkeiten entgegen, weil jeder Drucker ein rein mathematisches Werk, wenn es auch von dem berühmten *Kepler* stammte, für unverkäuflich hielt. So lag das Buch durch mehr als ein Jahr, bis *Kepler* sich entschloß, es auf eigene Kosten herauszugeben. Diese Verzögerung kam aber dem Buche sehr zu statten, denn sie gab dem Verfasser Gelegenheit, den Inhalt nicht nur zu verbessern, sondern auch wesentlich zu erweitern. »Obgleich ich durch geraume Zeit meinen übrigen Arbeiten entzogen wurde, reut mich der Zeitverlust nicht, denn niemals erntet eine Arbeit den Lohn der Unsterblichkeit, die den Samen der Zeit nicht ausgestreut hat«, heißt es am Ende des ersten Abschnittes.

Gewidmet ist das Werk *Kepler*s Gönnern und Freunden, *Maximilian* Fürsten von Lichtenstein und *Helmhard Joerger*. 1615 erschien es im Druck als erstes Werk des ersten Linzer Druckers *Hans Plank*.

Der erste Teil, »Curvorum regularium Stereometria«, enthält nichts Neues, er gibt einige Sätze des *Archimedes*, *Apollonius* und *Euclid* wieder und beruft sich in der Darstellung wiederholt besonders auf den ersten. Aber schon *Guldinus* (1577 bis 1643) sagt mit Recht: »*Kepler* zitiert zwar den *Archimedes*, wenn man aber dessen beide Bücher über die Kugel und den Zylinder durchblättert, so findet man nichts darinnen«. In der Tat ist seine Darstellungsweise eine ganz andere. Dies zeigt sich zunächst in dem II. Lehrsatze, dessen Inhalt hier auszugsweise wiedergegeben werden möge.

»Der Umfang des Kreises BG hat so viele Teile als Punkte, nämlich unendlich viele; jedes Teilchen kann angesehen werden als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Schenkeln AB, so daß in der Kreisfläche unendlich viele Dreiecke

Fig. 14.



liegen, die sämtlich mit ihren Scheiteln im Mittelpunkt A zusammenstoßen. Es werde nun der Kreisumfang zu einer Geraden BC ausgestreckt. So werden also die Grundlinien jener unendlich vielen Dreiecke oder Sektoren sämtlich auf der einen Geraden BC abgebildet (imaginatae) und nebeneinander angeordnet«. Der Kreisinhalt ist dem Inhalt des Dreiecks ABC gleich.

Eine Erweiterung dieses Zerlegungsgedankens auf die Kugel und den Zylinder spricht der 11. Satz aus. »Die Kugel besteht aus unendlich vielen Kegeln, deren Scheitel im Mittelpunkte zusammentreffen, und deren auf der Oberfläche gelegene Grundflächen durch Punkte ersetzt sind.« Ebenso kann man sich den Zylinder über dem Kreise BG in unendlich viele in der Zylinderachse zusammenstoßende Prismen ABF zerlegt und hierauf die Mantelfläche aufgerollt denken, der Zylinder wird dann dem Prisma mit dem Querschnitt ABC gleich. Diese Betrachtungen, namentlich die letzte, sind deshalb von besonderer Bedeutung, weil sie den Schlüssel zu *Keplers* späteren Untersuchungen, den schönen Sätzen und Folgerungen des »Supplementum« enthalten.

Damit hatte der Begriff des Unendlich-Kleinen in die Geometrie Eingang gefunden; nach der Exhaustionsmethode des *Archimedes* war dies der zweite Schritt auf dem Wege zur Infinitesimalrechnung. *Keplers* Methode eröffnete ein weites Feld für neue Spekulationen, auf sie stützt sich die Vorstellung der späteren Geometer, »ebene Figuren seien als Gewebe aus parallelen Fäden hergestellt zu denken, Körper als Bücher, die aus einander parallelen Blättern bestehen«. (*Cavalieri.*)

Dem ersten Teil folgt das »Supplementum ad *Archimedem*« mit den schönen, aber nicht immer richtigen Untersuchungen des Inhalts der Körper, die durch Rotation von Kegelschnitten oder ihren Teilen entstehen.

Im zweiten Teil »Stereometria dolii Austriaci in specie« wendet sich *Kepler* der eigentlichen Aufgabe zu, den Inhalt eines aus zwei Kegelstumpfen bestehenden Fasses aus der Diagonale oder der Visierlänge und dem Verhältnis des Durchmessers des Bodens zur Spundtiefe zur ermitteln. Es ergeben sich für das österreichische Faß zwei merkwürdige Eigenschaften. Betrachtet man das Faß als Zylinder, so hat seine Hälfte den größten Inhalt unter allen andern, die mit derselben Visierlänge gebaut werden können. Und zweitens, was dem Autor noch merkwürdiger erscheint, eine kleine Abweichung von der Form des österreichischen Fasses bleibt ohne Einfluß auf sein Fassungsvermögen. Diese Erkenntnis, daß die Wertänderung in der Nähe des Maximums verschwindet, enthält den Keim der analytischen Regel über die Maxima und Minima, auf die *Fermat* 20 Jahre später kam.

Ein Anhang »Usus totius libri circa dolia« gibt Regeln für den Gebrauch der Visierrute. Zum Schlusse kommt *Kepler* zu der Aufgabe, den Inhalt eines Teils eines geraden Kegels zu finden, der durch eine zur Achse parallele Ebene abgeschnitten wird, eine Aufgabe, die er trotz aller Bemühungen nicht lösen kann.

Der Weg, auf dem *Kepler* zu seinen Sätzen gelangte, war der der Spekulation; die Anwendung der Algebra oder, wie sie damals vielfach heißt, der Cossa, war ihm zu seinem Bedauern fremd oder wenig geläufig. »At ego has species tracto non numeris, non per algebram, sed ratiocinatione mentis; sane mihi non est opus ad subducendas rationes mercatuum sed ad explicandum rerum causas«, sagt er in der Vorrede zu den »Harmonices mundi« 1619. Neben der Anwendung der Lehre von den Proportionen, durch die seine Darstellung an großer Schwerfälligkeit leidet, findet sich neben Analogieschlüssen öfter auch die mittelalterliche Schlußweise des *Nicolaus von Cusa*, »was beim Größten und Kleinsten einer Gattung Geltung habe, müsse auch in den dazwischen liegenden Zuständen richtig sein«. So erheben sich denn bald Stimmen gegen seine Methode, wie *Guldin* 1641, der *Kepler*, obwohl er ihn als großen Denker feiern muß, tadelt, er habe zu wenig Gewicht auf geometrische Reinheit und Genauigkeit gelegt und alles in dunkler Weise dargestellt. Es mag wohl mancher wie *Guldin* gedacht haben: »Mihi certe, ut penitius penetrarem, frangere caput aut cerebrum nolui.« Doch trotz dieser Schwächen bleibt *Keplers* Buch eines der klassischen Werke der Geometrie.

Bedenken wegen der schwierigen Einführung eines lateinischen Buches über Mathematik in das praktische Leben bewogen den Verfasser, das Buch ins Deutsche zu übertragen. So entstand sein »Visierbüchlein«, das den Titel führt: »Auszug aus der uralten Messekunst Archimedis und deroselben newlich in Latein aussgangenen Ergentzung, betreffend Rechnung der körperlichen Figuren, hohlen Gefäßen und Weinfässer, sonderlich dess Oesterreichischen, so under allen andern den artigisten Schick hat.« Linz 1616. Das Buch gibt den Inhalt der Stereometria ohne ihre Ableitungen und enthält die oft ziemlich komplizierten Vorschriften für die Anfertigung und Ausmessung der Fässer, nebst einer Vergleichung der gebräuchlichen Gewichts-, Längen- und Getreidemaße untereinander und mit den altrömischen. Die Übersetzung bietet ihm aber auch Gelegenheit, seine deutsche Gesinnung, sein stolzes Ego Germanus zu betätigen, und die Grundsätze durchzuführen, die er 1611 in einem Briefe ausgesprochen hatte: »Auch ich bin mit Ähnlichem (einer Übersetzung des *Euclid*) beschäftigt, doch als schönstes Ziel schwebt mir vor, auch die Fachausdrücke deutsch wiederzugeben. Es ist eine Schande, daß man im Deutschen »Parallele« nicht anders nennen kann. Es wäre fürwahr für die Allgemeinheit ersprießlich, wenn diese Fachausdrücke allgemein gebraucht würden. Mit demselben Recht, mit dem *Euclid* neue griechische Ausdrücke bildet, habe ich einheimische Wörter gesetzt.« Ein Urteil, das in der Zeit der ärgsten Sprachverderbnis um so mehr Beachtung verdient. Deshalb fügt er dem Visierbuch eine Übersicht der gebrauchten Verdeutschungen bei, die hier folgen möge, die sich aber noch vervollständigen ließe.

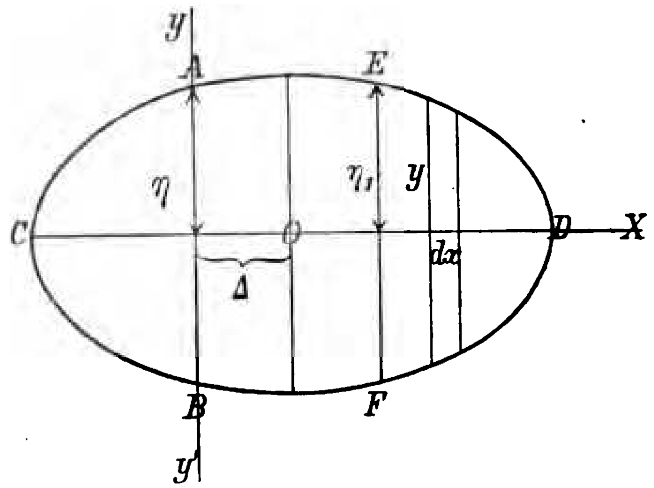
Saag, Crena.
Taufeln, Tafeln, Taugen, Tabulae.
Frösche, Velgen, Margines tabularum, Apsides.
Bauch, Venter dolii.
Beyhel, Spontloch, Orificium infusorium.
Emmer, Amphora.
Dreyling, Dolium magnum.
Eych, Mensuratio, Capacitas mensurata, Character capacitatis index, Locus exactus mensurae.
Hemstab, Visierruthen, Virga mensoria cubica, bacillus, Specillum exploratorium.
Strich, Riß, Zug, Linea.
Strecke, Geräde, Recta.

Grundstrich, Bodenlini, Basis figurae planae.
Schrancke, Zaun, Vmbzeununge, Perimetros.
Seitte, Latus plani.
Langes Eck, Scherffe, Reiffen, Latus solidi.
Lenge, longitudo.
Breitte, latitudo.
Höhe, altitudo.
Tieffe, profunditas.
Lähn, acclivitas, planum acclive.
Dicke, diameter solidi.
Zwerlini, Querlini, Durchzug, Diagonios, vel quasi. Transversalis ab orificio ad fundum dolii.
Platz, Feld, Feldung, Superficies, area.
Wand, Solidi planum vel hedra.
Boden, Basis plana solidi.
Tisch, Planum superius parallelum Horizonti.
Fläche, plana superficies.
Kraiss, Circkel, circularis linea.
Vmbkraiss, Circumferentia.
Circkelfeld, Circuli planum.
Circkels Durchzug, Breitte, Höhe, diameter circuli pro ratione situs.
Weitte, diameter circuli; etiam longitudo circumferentiae circuli.
Ablenger Circkel, Ellipsis.
Eylini, circumferentia elliptica, ovalis.
Bogen, Arcus.
Senne, Vnderzug, Chorda, Subtensa.
Halbe Senne, Sinus.
Boltz, sinus versus, Sagitta.
Circkelzaan, Sector Circuli.
Circkelschnitz, Segmentum Circuli.
Anstreicher, Tangens.
Durchschneider, Secans.
Anstehen, inscriptum esse.
Rundung, curva superficies.
Geviert, quadratus.
Vierung, Quadratum.
Ablenge Vierung, Parallelogrammum rectangulum longum.
Fürgehend, continuatus.
Gesellet, conjugati.
Gleichlauffend, lineae parallelae.
Winckel, Spitz, Angulus.
Scharff, acutus.
Stumpff, obtusus.
Seiger, Höch, Perpendiculum.
Rautten, Rhombus.
Spiesseckich, Trapezium.
Geordnet, regularis.
Gleich, aequalis.
Enlich, similis.
Schick, Ratio, Proportio.
Schnit, Sectio.
Schnitz, Segmentum.
Leib, Fülle, Griff, Corpulentia, Soliditas.
Volle, Volleibige, Leibhaffte, beschlossene Figur, Corpus, Solidum.
Raum, Spatium, Capacitas.
Gewicht, Schwäre, Pondus.
Würffel, Cubus.
Gewürffelt, würffelrecht, würffelgantz, cubicus.
Wurtzel, Radix, quadrati per numerum expressi latus numero expressum.
Cubicwurtzel, Cubi numeralis latus numerale.
Quaderstuck, viereckte, gevierte Seulen, Parallelepipedum.
Gerade Seulen, Parallelepipedum rectangulum.
Zwerstuck, Speidel, Kegel-Wecken, Prisma.
Zugespitzte Seule, Pyramis.
Runde Seule, Welle, Walger, Waltzen, Cylinder.
Täller, Rad, Cylinder humilis latus.
Kugel, Globus, Sphaera.
Ablenge Kugel, Ay, Sphaeroides longum.
Gedruckte Kugel, Linse, Sphaeroides latum.
Kugelzaan, Sector globi.
Kegel, Conus.
Kegelschnitt, Sectio conica, Parabola vel Hyperbole.
Schnitz, Segmentum solidum.

Kegelschnitz, segmentum coni interminatum deorsum.
Stumpff, Residuum.
Güpffel, Wüpffel, Wirbel, Vertex.
Graat, Axlini, Axis.
Gürtel, Zona tornatae figurae.
Hütlein, Segmentum superficiei globi.
Trum, Apotome.
Stock, Truncus.
Rinden, Limbus cylindri, Coni.
Rock, Tunica.
Rucken, Margo rotundatus longus.
Lehr, Norma in torno.
Ring, Annulus.
Bschlossner Ring, Annulus strictus.
Apfelrund, Malum.
Citronenrund, Citrium.
Heyschober, Conoides Parabolicum.
Berg, Arbishauff, Conoides Hyperbolicum.
Kegel, daraus diser geschelet, Conus Asymptoton.
Olivenrund, Oliva.
Zwespenrund, Prunum.
Spuelrund, Fusum.

Die Inhaltsbestimmung der von *Kepler* betrachteten Rotationskörper bietet im allgemeinen auf Grund der Infinitesimalrechnung keinerlei Schwierigkeiten. Der erste, der die höhere Mathematik auf einige Probleme anwendete, war *Pezenas*, dessen Abhandlung sich mit der Berechnung eines von einem Paraboloid durch eine Ebene abgeschnittenen Segments beschäftigt. Sie ist abgedruckt in *F. W. Beer*, »Auserlesene Abhandlungen, welche an die K. Akademie der Wissenschaften in Paris eingesendet worden«. Leipzig 1752—54. Einige

Fig. 15.



Formeln für das Volumen von verschieden gekrümmten Fässern stellt *Lambert* in seinen »Beiträgen zum Gebrauch der Mathemathik«, Berlin 1765—1767, auf, während die Dissertation *Pfleiderers*: »*Kepleri* methodus, solida quaedam sua dimetiendi, illustrata et cum methodis geometrarum posteriorum comparata«, Tubingae 1795, den andern Rotationskörpern, die *Kepler* als Ring, Apfel usw. bezeichnet, gewidmet ist. Bei der Wichtigkeit einer genauen Faßbestimmung ist es nicht zu verwundern, daß noch eine Reihe von Mathematikern der »Visierkunst« ihre Aufmerksamkeit zuwandte, ohne aber das Problem wesentlich zu fördern. Die angeführten drei Abhandlungen enthalten so ziemlich die Lösung aller bei *Kepler* gestellten Aufgaben, ihre Methoden sind noch recht schwerfällig und lassen sich nach dem heutigen Standpunkt bedeutend vereinfachen.

Bezieht man die Gleichung einer Ellipse (Fig. 15) auf die Rotationsachse AB und nennt Δ den Abstand des Mittelpunktes O von ihr, so ist der Rotationskörper bestimmt durch:

$dS = 4\pi xy\,dx$ und es wird, wenn $x - \Delta = z$, $k^2 = \frac{b^2}{a^2}$ ist:

$$S = 4\pi\int(z + \Delta)\sqrt{b^2 - k^2z^2}\,dz \text{ oder}$$

$$S = -\frac{4\pi}{3k^2}\left(b^2 - k^2z^2\right)^{\frac{3}{2}} + 2\pi\Delta \text{ . rotierend. Segm.}$$

Rotiert das größere Segment ABD, so sind die Grenzen für z bzw. $-\Delta$ und a, rotiert das kleinere ABC, so ist für Δ zu setzen $-\Delta$ und von Δ bis a zu integrieren. Man erhält also

$$S = \frac{4\pi}{3k^2}\left(b^2 - k^2\Delta^2\right)^{\frac{3}{2}} \pm 2\pi\Delta \text{ . Segm. oder}$$

$$S = \frac{4\pi\eta^3}{3k^2} \pm 2\pi\Delta \text{ . Segm., wobei das obere Zeichen für}$$

das größere Segment gilt.

Nimmt man als untere Grenze H, als obere a, so ergibt sich für den Wulst oder Limbus, entstanden durch Rotation des Teiles EFD um AB, die Formel:

$$S = \frac{4\pi\eta_1^3}{3k^2} \pm 2\pi\Delta \text{ . Segm.}$$

Will man den Inhalt eines Fasses finden, so ist es bequemer, die Fläche in Streifen parallel zur X-Achse zu zerlegen und einige Umformungen vorzunehmen.

Wenn die Ellipse (Fig. 16) $a^2(x - \Delta)^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ um die Y-Achse rotiert, so erhält man, da $dS = 2\pi\int x^2 dy$, für das Volumen des durch $EABCD$ erzeugten Körpers:

$$S = 2\pi h\left[\varDelta^2 + k^2\left(a^2 - \frac{h^2}{3}\right)\right]$$

$$+ 4\pi\varDelta k\left[\frac{h}{2}\sqrt{a^2 - h^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{h}{a}\right]$$

Nimmt man mit *Lambert* $\varDelta = 0$, also $b = R$, so folgt daraus die Formel für das Faß mit elliptischer Krümmung:

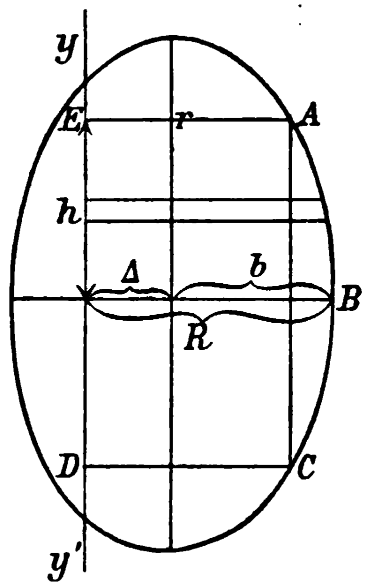
$$S = 2\pi h k^2\left(a^2 - \frac{h^2}{3}\right),$$

oder, weil $r^2 = k^2(a^2 - h^2)$

$$S = \frac{2\pi h}{3}(2R^2 + r^2) =$$

$$2\pi h\left(R^2 - \tfrac{2}{3}R(R-r) + \tfrac{1}{3}(R-r)^2\right)$$

Fig. 16.



Für ein Faß mit Kreiskrümmung wird $k = 1$; *Lambert* entwickelt $\arcsin\frac{h}{a}$ in eine Potenzreihe und findet mit Vernachlässigung höherer Potenzen:

$$S = 2\pi h\left(R^2 - \tfrac{2}{3}R(R-r) + \tfrac{2}{9}(R-r)^2\right).$$

Wenn ABC einen Bogen der Parabel $y^2 = 2p(R-x)$ vorstellt, so wird wegen $h^2 = 2p(R-r)$ der Inhalt des parabolischen Fasses:

$$S = 2\pi h\left(R^2 - \tfrac{2}{3}R(R-r) + \tfrac{1}{5}(R-r)^2\right).$$

Der Inhalt einen hyperbolisch gekrümmten Fasses läßt sich ohne Angabe des Wertes von $\varDelta$ nicht in so geschlossener Form aufstellen. Betrachtet man nur den gegen die Y-Achse konkaven Hyperbelast, so wird

$$x - \varDelta = -\frac{1}{k}\sqrt{y^2 + b^2}$$

und die Integration liefert den Wert:

$$S = 2\pi h\left[\varDelta^2 + \frac{1}{k^2}\left(\frac{h^2}{3} + b^2\right) - \frac{\varDelta}{k}\sqrt{b^2 + h^2} - \frac{a\varDelta}{h}\log\left(h + \sqrt{h^2 + b^2}\right)\right],$$

der sich durch Einsetzung von $r - \varDelta = \frac{1}{k}\sqrt{h^2 + b^2}$ etwas vereinfacht:

$$S = 2\pi h\left[\frac{1}{k^2}\left(\frac{h^2}{3} + b^2\right) + r\varDelta - \frac{a\varDelta}{h}\log\left(h - k(r - \varDelta)\right)\right].$$

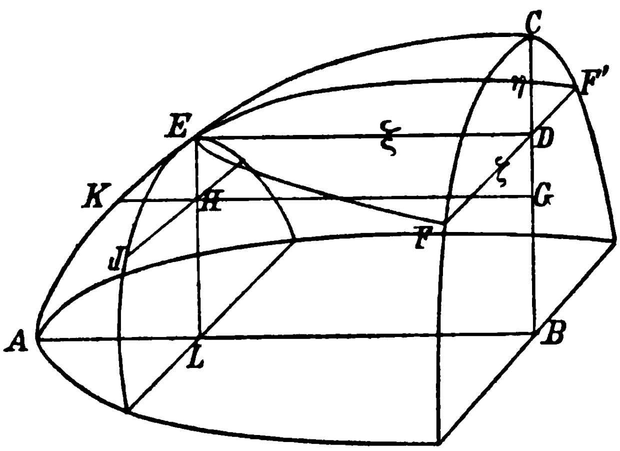
Die Größe a ließe sich hier noch durch $a = R - \varDelta$ ausdrücken.

Für ein aus zwei Kegelstumpfen zusammengesetztes Faß ergibt sich die Formel:

$$S = 2\pi h\left(R^2 - \tfrac{2}{3}R(R - r) - \frac{r(R - r)}{3}\right).$$

Um den Inhalt eines Segments zu bestimmen, das von einem Rotationskörper durch eine zur Rotationsachse parallele Ebene abgeschnitten wird, kann man den von *Pezenas* vorgezeichneten Weg verfolgen.

Fig. 17.



Es sei $AB = x$, $BC = y$ und AC ein Parabelbogen mit der Gleichung $y^2 = 2px$. Durch Drehung des Segments ABC um die X-Achse entsteht ein Rotationskörper, dessen Schnitt mit einer zu AB parallelen Ebene EFF' die Parabel $\zeta^2 = 2p\xi$ ist. Die Summe aller Parabelsegmente $\frac{4}{3}\xi\zeta$ liefert den Abschnitt EDC, dessen Inhalt S bestimmt ist durch:

$$S = \tfrac{4}{3}\int_0^{\eta}\xi\zeta\,d\eta.$$

Weil FCF' einem Kreise angehört, ist $\zeta^2 = 2y\eta - \eta^2$, also

$$S=\frac{2}{3p}\int\limits_0^{\eta}\left(2y\eta-\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}d\eta=-\frac{2}{3p}\int\limits_0^{\eta}\left(2y\eta-\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}d\left(y-\eta\right).$$

Durch partielle Integration findet man:

$$S=-\frac{(y-\eta)(2y\eta-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{6p}+\frac{y^2}{2p}\int\left(2y\eta-\eta^2\right)^{\frac{1}{2}}d\eta$$

$$=-\frac{(y-\eta)(2y\eta-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{6p}+\frac{y^2}{2p}\cdot CDF$$

$$=\frac{\xi}{\zeta^2}\left[y^2\cdot CDF-\frac{(y-\eta)\zeta^3}{3}\right].$$

Berechnet man das Segment KGC und zieht davon KHE ab, so ist damit der Inhalt des Abschnitts $EHGC$ eines parabolischen Fasses gefunden.

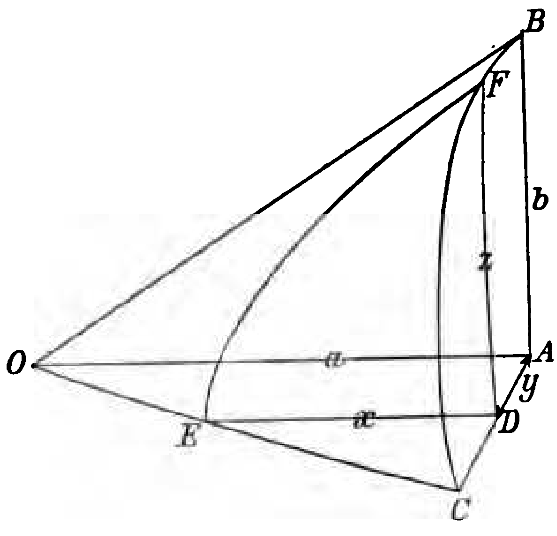
In ganz gleicher Weise ergibt sich, wenn ABC ein Ellipsenquadrant mit den Achsen $AB=a$, $BC=b$ ist, für den Abschnitt EDC:

$$S=\frac{\pi a\eta^2}{6b}(3b-\eta).$$

Das Segment $EHGC$ läßt sich aber jetzt nicht so einfach finden.

Schließlich möge noch die Formel hier Platz finden, die den Inhalt eines Segments eines geraden Kegels darstellt, das durch eine zur Kegelachse parallele Ebene abgeschnitten wird.

Fig. 18.



Wird der durch Rotation des rechtwinkligen Dreiecks OAB entstehende Kegel durch eine Ebene, die in der Entfernung y parallel zu OA gelegt wird, geschnitten, so ist EDF eine Hyperbel mit den Achsen $\frac{ay}{b}$ und y. Das Segment EDF hat den Inhalt

$$F_y = \tfrac{1}{2}\left\{a\sqrt{b^2-y^2} - \frac{ay^2}{b}\log\frac{b+\sqrt{b^2-y^2}}{y}\right\}.$$

Durch Integration zwischen den Grenzen y und b folgt der Wert:

$$S(ECDF) = \frac{\pi}{12}ab^2 - \tfrac{1}{6}a\left\{2y\sqrt{b^2-y^2} + b^2\arcsin\frac{y}{b} - \frac{y^3}{b}\log\frac{b+\sqrt{b^2-y^2}}{y}\right\}.$$

Anmerkungen.

Vorbemerkung. Eine Lebensbeschreibung *Keplers* findet der Leser im 144. Heft der »Klassiker«. Einen vortrefflichen Kommentar zur »Faßrechnung« hat *Frisch* in der Gesamtausgabe von *Keplers* Werken in Band IV der »Stereometria doliorum« angehängt; derselbe enthält neben zahlreichen historischen Anmerkungen und Äußerungen zeitgenössischer Mathematiker auch einen Auszug aus *Pfleiderers* oben erwähnter Dissertation, ist aber im folgenden nur an sehr vereinzelten Stellen benutzt.

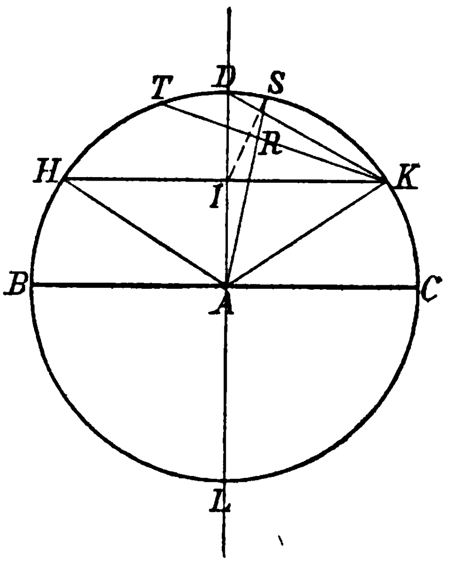
1) *Zu S. 4. Lehrs. 15.* Setzt man $AD = r$, $ID = h$, $SR = x$, $IK = SK = \varrho$, und bedeutet V den Inhalt der Kugel, V_1 das Volumen der Kalotte DHK, V_2 das von HKL, so ist

$$V_1 : V = h^2 (3r - h) : 4r^3.$$

führt man die Größe x ein, so wird $SK^2 = \varrho^2 = 2rx = h(2r - h)$ und damit

$$V_1 : V = h(h + 2x) : 4r^2.$$

Fig. 19.



2) *Zu S. 4. Lehrs. 17.* Denkt man sich in Fig. 5 S. 21 den Huf $MNDS$ in unendlich dünne Schnitte parallel zu DS zerlegt, so erhält man durch Integration für den Inhalt des Hufes, wenn $AF = \varDelta$, $FD = r$, $AM = \eta$ und $SD = h$ gesetzt wird:

$$V = \frac{2h}{3(r+\varDelta)} (r^2 - \varDelta^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{h\,\varDelta}{r+\varDelta} \cdot \text{Segm. } (MND) \text{ oder}$$

$$V = \frac{2h\,\eta}{3} (r - \varDelta) + \frac{h\,\varDelta}{r+\varDelta} \cdot \text{Segm. } (MND).$$

Für den kleineren Huf $MENY$ ist $-\Delta$ statt Δ zu schreiben. Der Limbus, d. h. die Ergänzung des geraden Kegelstumpfs zu einem Zylinder über der größeren Grundfläche, hat den Inhalt $\frac{\pi h}{3}(R-r)(2R+r)$; für die Tunika, die den Zylinder unter der kleineren Grundfläche des Stumpfes umgibt, findet man $\frac{\pi h}{3}(R-r)(R+2r)$. Ihr Verhältnis ist mithin $\frac{2R+r}{3} : \frac{R+2r}{3}$ oder gleich dem Verhältnis der beiden arithmetischen Mittel von R und r. (Vgl. Anm. 23.)

3) *Zu S. 5. Archimedes* betrachtet in »De conoidibus et sphaeroidibus« die Rotationskörper, die durch die Ellipse, Parabel und Hyperbel entstehen bei der Drehung um die Hauptachse. *Kepler* übersetzt im »Visierbuch«: Sphaeroides longum, ablenge Kugel, sphaer. latum, gedrückte Kugel, rundes Polster oder Kissen, Linse, conoid. parabolicum, Heuschober, conoid. hyperbol., Berg oder Erbsenhaufen.

4) *Zu S. 18.* Sind die Scheiben unendlich dünn, so kann man von der Krümmung der Mantelflächen ganz absehen und die Scheiben als schief abgeschnittene Zylinder betrachten. Läßt sich zu jeder Scheibe eine zweite gleiche finden, so geben diese aufeinander gelegt, einen Zylinder mit parallelen Grundflächen.

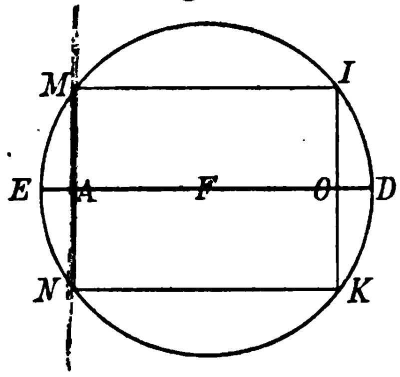
Guldin sagt in seinem Werke De centro gravitatis: »Schnell und leicht soll dieser Satz aus den Elementen der Geometrie des *Archimedes* hervorgehen, warum aber, ist nicht so leicht ersichtlich. Inbesonders weiß *Archimedes* nichts von den unendlich dünnen Scheiben. Richtig ist, daß die Scheibchen dies- und jenseits des Umfangs, den wir via rotationis nennen, gleich und gleich gelegen sein müssen. Denn dies verlangt das Zentrum gravitatis. Nichts fehlt *Kepler* zu meiner Methode, als der Begriff via rotationis«.

Der Lehrsatz XVIII ist ein spezieller Fall der von *Guldin* gefundenen, übrigens aber schon bei *Pappus* vorkommenden Regel, die als baryzentrische bezeichnet wird: Rotiert eine Fläche um eine Achse, so ist das Volumen des Rotationskörpers gleich dem Produkt aus der Größe der Fläche und dem Weg des Schwerpunkts. Wenn die Achse die rotierende Figur schneidet, so ist bei der Anwendung der Regel eine gewisse Vorsicht geboten. Ebenso findet man die Oberfläche des durch den Bogen einer Kurve entstehenden Rotationskörpers gleich dem Produkt aus der Länge des Bogens und dem Weg des Schwerpunkts.

5) *Zu S. 20.* Als zylindrazeische Körper bezeichnet *Kepler* Körper, die durch Rotation eines von zwei parallelen und gleichlangen Sehnen begrenzten Teiles eines Kreises um den zu den Sehnen parallelen Durchmesser entstehen. Für sie gilt der Lehrsatz ebenfalls. Dagegen ist der Satz für den Gürtel oder Wulst einer Kugel, der durch einen konzentrischen Zylinder von ihr abgeschnitten wird, nicht mehr anwendbar.

6) *Zu S. 22.* Der Apfel entsteht durch Rotation des Kreisteils $MIDKN$ um MN. Denkt man sich die Fläche in Linienelemente parallel zu MN zerlegt, so erzeugt jedes solche Flächenelement eine »Tunika« oder einen ringförmigen Apfelschnitt, für welchen der Lehrsatz 19 gilt. Diese unendlich dünnen Tuniken ergeben, in eine Ebene ausgebreitet, Rechtecke, die zusammen den Zylinderhuf $MSDN$ ausmachen. Die Höhe jedes Rechtecks ist gleich dem Umfang des Kreises, den ein Punkt des Flächenelements bei der Rotation um MN beschreibt.

Fig. 20.



Es ist daher der Apfelwulst, der durch Rotation von IDK um MN entsteht — ich führe dafür kurz $IDK \big/ MN$ ein und analoge Bezeichnungen für die folgenden Größen — gleich dem Teil des Hufes über IDK.

Denkt man sich den Halbkreis $bb'T$ um bb' (Fig. 5 S. 21) rotierend, so beschreibt er eine Kugel, die dem Zylinderprisma oder Huf $bb'TS$ gleich ist. Es ist also:

$$MIDKN \big/ MN = MNDS = ADS$$

$$bb'T \big/ bb' = GTS$$

$$ikT \big/ bb' = IDK \big/ CE' = VTSL$$

$$IDK \big/ MN = ODSL$$

$$IDK\Big/_{MN} - IDK\Big/_{CE'} = ODTV$$

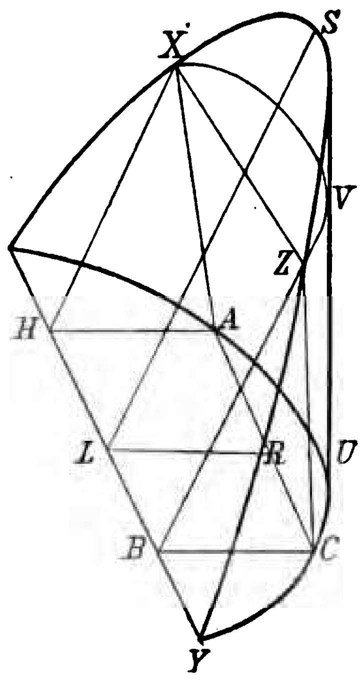
Oder der Apfelwulst $IDK\Big/_{MN}$ ist gleich dem Kugelwulst $IDK\Big/_{CE'}$ + dem Zylindersegment $ODTV$, dessen Höhe FG oder der Umfang des Kreises ist, den das Zentrum F bei der Rotation um MN beschreibt. Der Satz ergibt sich am einfachsten mit Hilfe der *Guldin*schen Regel.

7) *Zu S. 24.* Es ist

$$adR\Big/_{ad} = IDK\Big/_{IK} = LRS = VTSL - ODTV$$
$$= IKD\Big/_{CE'} - ODTV$$

Der Zitronenkörper ist also die Differenz der genannten beiden Körper.

Fig. 21.



8) *Zu S. 27.* Die ganze Schlußweise wird durchsichtiger, wenn man den Huf in anderer Lage betrachtet und die obige abkürzende Schreibweise einführt.

$$LU : US = BC : CZ = 1 : 2\pi$$

$$QUC\Big/_{HB} = QCUSXZ$$

$$(LU - BC) : (US - CZ) = LU : US = RU : SV = 1 : 2\pi$$

$$XVZ\Big/_{XZ} = QUC\Big/_{QC} =$$

$$XZVS = QUC\Big/_{HB} - XZVUCQ$$

$$QUC\Big/_{HB} = QUC\Big/_{QC} +$$

Zyl. segm. QCV

9) *Zu S. 29.* Das Volumen der Tunika ist dem Körper gleich, der sich aus dem Prisma $KOPDCB$ und der Pyramide $BCDA$ zusammensetzt. Der Inhalt ist daher:

$$KOP.\ OC + KOP.\ \tfrac{1}{3}\ AD = KOP.\ \tfrac{1}{3}\ AP + KOP.\ \tfrac{2}{3}\ OC$$

Der von der Tunika umgebene Zylinder ist $KOXV.\frac{1}{2}OC$. In der Zusammenstellung sieht *Kepler*, dem es sich hauptsächlich um das Verhältnis der beiden Körper handelt, von der Multiplikation mit OK und π ab und setzt statt der einzelnen Größen ihnen proportionale Größen ein.

10) *Zu S. 30. Kepler* fügt hier ein ausführlich gerechnetes Beispiel an, in welchem er die Berechnung mit trigonometrischen Tafeln erläutert. Ich glaube, die weitläufige Rechnung — es kommen mehrfach Zahlen mit 16 Stellen vor — übergehen zu können, da sie für das Verständnis seiner Methode nicht weiter notwendig ist.

11) *Zu S. 34.* Der Lehrsatz ist nicht richtig; *Kepler* traut selbst seinen Schlüssen nicht und spricht deshalb den Satz in so vorsichtiger Form aus.

12) *Zu S. 40.* Der Lehrsatz 27, einer der schönsten des ganzen Werkes, enthält die erste inverse Tangentenaufgabe, (vgl. *Cantor*, Gesch. d. Math. 2. Bd. 754), aus der Tangente, dem Berührungspunkt und dem Scheitel den Kegelschnitt zu bestimmen. Geht man von den Mittelpunktsgleichungen der Kegelschnitte aus, so schneidet die Tangente CB im Punkt. $B\,(x', y')$ von der X-Achse, als welche wir DF betrachten, die Stücke ξ ab, gerechnet vom Koordinatenanfangspunkt: 1. Parabel, $\xi = -x'$. 2. Hyperbel, $\xi = \frac{a^2}{x'}$ 3. Ellipse, $\xi = \frac{a^2}{x'}$ 4. Kreis $\xi = \frac{r^2}{x'}$.

1. Da $AO = OC$ ist, so muß BO eine Parabel sein.

2. Wählt man CF entsprechend der Bedingung $CV^2 = CF\,(CA - 2.\,CV)$, so erhält man durch Addition von CF^2 und $2\,CF.\,CV$:

$$(CV + CF)^2 = CF(CA + CF),\ VF^2 = CF.\ AF.$$

BV ist also eine Hyperbel, deren Mittelpunkt in F liegt, und deren große Achse $a = FV$ ist.

3. Wählt man AD nach
$AI^2 = AD(CA - 2.\,AI)$, so wird $(AI + AD)^2 = AD(AD + AC)$, $ID^2 = AD.\ CD$

Es ist also D der Mittelpunkt der Kurve, ID die in die X-Achse fallende Achse des Kegelschnitts. Da $2\,CI > CA$, so ist, entsprechend der Gleichung $CI^2 = CD.\,(CA - 2\,CI)$ die Größe CD negativ, der Mittelpunkt D liegt also innerhalb der Kurve, die eine Ellipse wird.

8*

l
c

4. Nimmt man den Scheitel der Kurve in N an, so tritt zu der Bedingung $ND^2 = AD \cdot CD$ die weitere hinzu: $AN : NC = AB : BC$. Gemäß der ersten Bedingung ist $ND : AD = CD : ND$ oder $AN : CN = AD : ND = AB : BC$. Diese Beziehung gilt aber, wenn die Kurve NB ein Kreis, d. h. wenn $DN = DB$ und $DB \perp CB$ ist.

13) *Zu S. 49.* In der Lehre von den Proportionen ließen die älteren Mathematiker nur Verhältnisse vom Größeren zum Kleineren zu. Auch *Kepler* hält im allgemeinen daran fest, doch finden sich an einigen Stellen Abweichungen von dieser Festsetzung.

Für einige Proportionen sind bestimmte Bezeichnungen gebräuchlich. So ist

Ratio oder proportio dupla $= 2 : 1$	Das Verhältnis zweier Quadrate wird dupla prop., jenes der Quadratwurzeln dimidia prop. genannt.
» subdupla $= 1 : 2$	
» semidupla $= \sqrt{2} : 1$	
» subsemidupla $= 1 : \sqrt{2}$	
» sesquidupla $= \sqrt{2^3} : 1$	
» tripla $= 3 : 1$	
» sesquialtera $= 3 : 2$	
» sesquitertia $= 4 : 3$	

Unter Addition und Subtraktion von Verhältnissen ist das Produkt, bzw. der Quotient zu verstehen.

Wiederholt wird der Satz angewendet:

$$\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b} < \frac{a-n}{b-n}, \text{ wenn } a > b.$$

Zu Lehrs. I, S. 49.

$$\text{Da } \frac{\triangle PIQ}{\triangle PHQ} = \frac{IR}{HS}$$

$$\frac{\triangle AIC}{\triangle AHC} = \frac{IN}{HM} = \frac{IR + RN}{HS + RN} < \frac{IR}{HS}$$

$$\text{so wird } \frac{\triangle AIC - \triangle AHC}{\triangle AHC} < \frac{\triangle PIQ - \triangle PHQ}{\triangle PHQ}$$

14) *Zu S. 50 u. 52.* Es ist (Fig. 22)

$$CI = 2r \sin 45^\circ \qquad IN = r \sin 90^\circ$$

$$CH = 2r \sin (45 + \alpha) \qquad HM = r \sin (90 + 2\alpha)$$

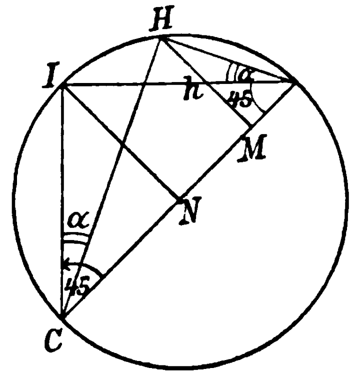
Weil die Änderung des sin für 45° größer ist als für 90°, so wird

$$\tfrac{1}{2}\,CH - \tfrac{1}{2}\,CI > IN - HM \text{ und } \frac{CH}{CI} > \frac{IN}{HM}$$

ferner $AIC \cdot CI : AHC \cdot CH = IN \cdot CI : HM \cdot CH$

also $AHC \cdot CH > AIC \cdot CI$

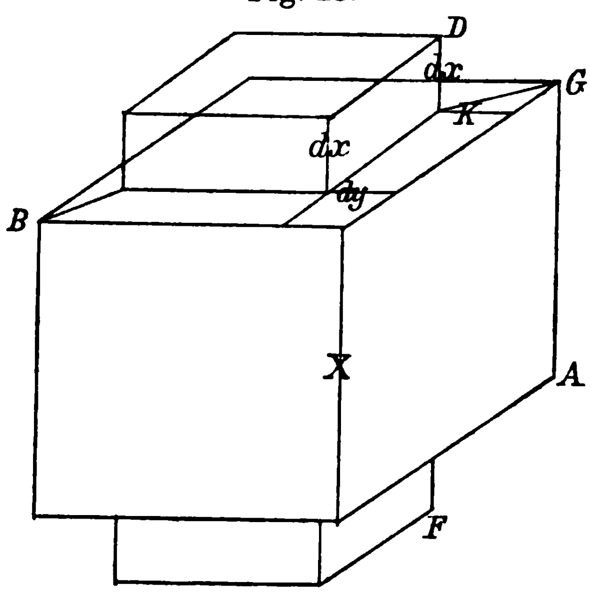
Fig. 22.



In der Tabelle S. 53 rechnet *Kepler* mit $2r = 20$ und nimmt für $HA = b$ die Werte 1, 2, 3 . . . 20. Unter »Höhe« stehen die Werte für b, unter »Basisdurchmesser« die Werte $a = \sqrt{4r^2 - b^2}$, wobei ein — und + andeutet, daß a kleiner oder größer ist als die angeführte Zahl, unter »Inhalt der Säule« das dem Zylinderinhalt proportionale Produkt $a^2 b$. Ist das Verhältnis $b : a = 1 : \sqrt{2}$, so ist der Inhalt der Säule am größten.

15) *Zu S. 56.* Das Dreieck ABG soll die Hälfte eines Diagonalschnitts des Würfels vorstellen. *Kepler* vergleicht das Volumen eines derselben Kugel eingeschriebenen quadratischen Prismas mit dem des Würfels.

Fig. 23.



$$dx\,(x + dx) = KG \cdot KB$$

$$\frac{x + dx}{KB} = \frac{GK}{dx}$$

$$x < x + dx$$

$$GB > KB$$

$$\frac{x}{GB} < \frac{x + dx}{KB} = \frac{GK}{dx}$$

$$\frac{x}{GB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{GK}{dx} > \frac{1}{\sqrt{2}},\ GK > \frac{dx}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dy}{GK} = \frac{x}{BG}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot GK}{dx \cdot BG} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{GK}{dx}$$

$$\frac{\text{Seitenplatte}}{\text{Höhenplatte}} > \frac{1}{2}$$

Höhenplatte $<$ 2 Seitenplatten
2 Höhenplatten $<$ 4 Seitenplatten

In der ganzen Deduktion *Keplers* ist ein Fehler, indem $\frac{x}{GB} > \frac{x + dx}{KB}$ gesetzt wird; der Fehler zieht sich bis zum Ende durch. Der Schlußsatz heißt:

$$\frac{\text{Seitenplatte}}{\text{Höhenplatte}} < \frac{1}{2}$$

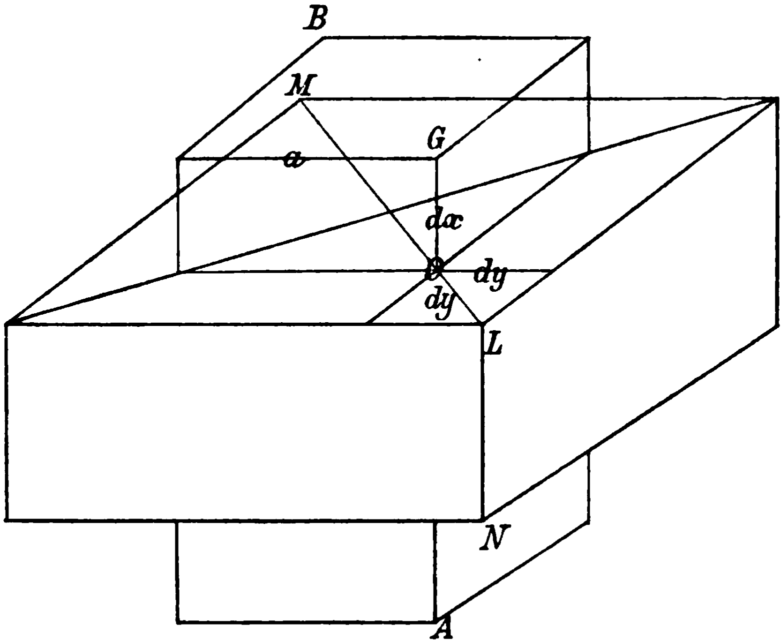
Daraus wird wieder falsch gefolgert:

Höhenplatte $<$ 2 Seitenplatten

$$\text{Seitenplatte} : \text{Höhenplatte} = (x - 2\,dy)^2\,dy : (x - 2\,dy)^2\,dx$$
$$= dy : dx$$

16) *Zu S. 57.*

Fig. 24.



Es stelle AB einen Würfel vor. Dann ist:

$$\frac{OL}{dy} = \sqrt{2} \qquad \frac{dx}{OL} > \sqrt{2}$$

$$\frac{MO}{OA} = \frac{GO}{OL} \qquad \frac{OL}{dy} = \sqrt{2}$$

$$\frac{BG}{GA} < \frac{MO}{OL} = \frac{GO}{OL} = \frac{dx}{OL} \qquad \frac{dx}{dy} > 2$$

$$2 \text{ Höhenplatten} = 2\,a^2\,dx \qquad 8\,a\,dx\,dy > dy^2\,(a - 2\,dx)$$

$$\text{Gürtel} = 4a^2\,dy - 8a\,dx\,dy + 4\,dy^2\,(a - 2\,dx) \qquad 2 \text{ Höhenplatten} > \text{Gürtel}$$

$$2\,a^2\,dx > 4\,a^2\,dy$$

17) *Zu S. 60.* Die drei Zylinder mit den halben Achsenschnitten CHA, CGA, CBH verhalten sich wie $CM \cdot AH : CL \cdot GA : CK \cdot BA$. Weil $LM = LK$ und $CL = 2\,LA$ ist, so wird $\frac{CM}{CL} < \sqrt{\frac{LA}{MA}}$. Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt sich *Kepler* durch das Zahlenbeispiel:

$$\frac{22}{21} < \frac{20}{19}, \quad \frac{21}{20} < \frac{20}{19}, \quad \text{folglich} \quad \frac{22}{20} < \left(\frac{20}{19}\right)^2$$

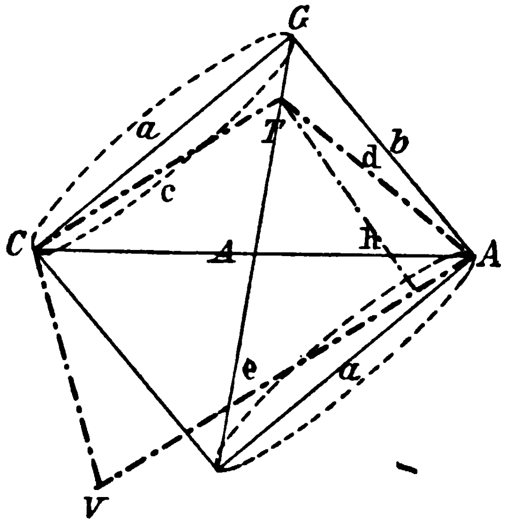
18) *Zu S. 61.* Der Satz: Circa maximam vero utrinque circumstantes decrementa habent initio insensibilia, kehrt in Lehrsatz 27 in der Form wieder: In iis vero articulis, in quibus a minori ad maximum iterumque ad minus fit mutatio, lege aliqua circuli, semper est aliquousque insensibilis illa differentia. Wie *Cantor*, Gesch. d. Math. II. 755 hervorhebt, zeigen die beiden Sätze am deutlichsten, wie tief *Kepler* in die Theorie der Maxima und Minima eingedrungen ist. Einen Beweis besaß *Kepler* allerdings nicht; statt einer Begründung müssen die Worte »es geschehe nach einem Gesetze, das vom Kreise sich herschreibe« dienen, die sich wahrscheinlich auf das dichte Anschmiegen der Berührungslinie des Kreises an den Kreisbogen in der Frage des Kontingenzwinkels beziehen.

p.92

19) *Zu S. 62. Definition.* Für das Verständnis des Folgenden ist die Bemerkung nicht unwesentlich, daß die konjugierten Punkte T (vgl. d. folg. Fig.) auf einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt O auf der verlängerten $\varDelta$ in der Entfernung $CO = \frac{\varDelta\,(3\,m^2 - 1)}{2\,(m^2 - 1)}$ liegt, wobei $\frac{b}{a} = \frac{c}{s} = m$ gesetzt ist. Der Kreis geht durch jenen Punkt auf $\varDelta$, in dem die Winkelsymmetrale von $\measuredangle\, T$ die $\varDelta$ schneidet, sein Halbmesser ist $\frac{\varDelta\,m}{m^2 - 1}$. Der Aufgabe entsprechend kommen hier nur die Punkte T innerhalb des Halbkreises über $\varDelta$ in Betracht.

20) *Zu S. 62.* Da der Zylinder und der Kegelstumpf konjugiert sein sollen, so muß $a : b = c : d$ sein.

Fig. 25.



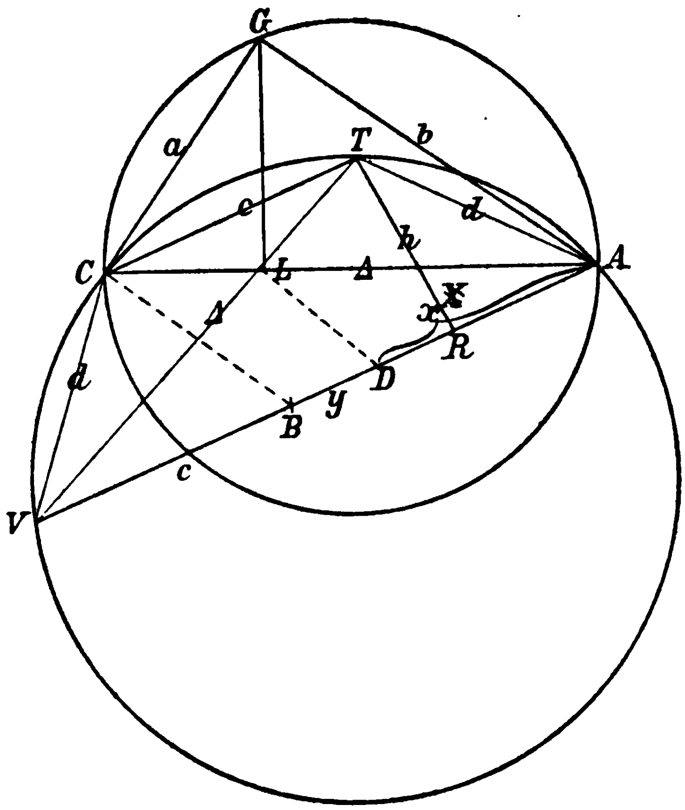
Der Voraussetzung gemäß ist $\frac{a+b}{\varDelta} > \frac{a}{c}$. Aus der Proportion folgt aber

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}.$$

Also $\frac{a+b}{\varDelta} > \frac{a+b}{c+d}$ und $\varDelta < c + d$; es läßt sich demnach mit c und d über $\varDelta$ ein Dreieck errichten.

21) *Zu S. 64.* *Keplers* Beweis ist, so schwerfällig er erscheint, einfach genug, wenn man sich der Zeichen der neueren Mathematik bedient. Man erhält im genauen Anschluß an *Keplers* Deduktion:

Fig. 26.



$VB = c, BD = y, DA = x, VA = c + x + y = e, CA = VT = \varDelta,$

$$\varDelta^2 = c \cdot e + d^2$$
$$\varDelta^2 - d^2 = c \cdot e$$
$$\varDelta^2 - b^2 = a^2$$

Weil $b > d$, so ist $a^2 < c \cdot e$; deshalb suchen wir die Strecke x entsprechend der Bedingung

$$a^2 = c\,(e - x);\; a^2 - c^2 = c\,(e - c - x) = cy$$
$$cx = ce - a^2 = b^2 - d^2.$$

Weil der Zylinder und der Stumpf konjugiert sind, hat man:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{d^2}{c^2} = \frac{AL}{CL} = \frac{b^2 - d^2}{a^2 - c^2} = \frac{c \cdot x}{c \cdot y} = \frac{x}{y}.$$

Der Lehrsatz heißt: $a^2 = c\,(c + y)$.

Daraus folgt: $x + y = \dfrac{\left(\dfrac{a^2}{c} - c\right)(b^2 + a^2)}{a^2}$, und wenn $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{m}{n}$, $cy = \dfrac{m\,(x + y)\,c}{m + n}$.

22) *Zu S. 65. Folges. II.* Die Regel ergibt nicht a^2, sondern das Produkt $c \times y$. Die angegebenen Zahlen der Beispiele sind noch um c^2 zu vermehren, wenn a^2 erhalten bleiben soll.

23) *Zu S. 65. Folges. III.* Neben dem einfachen arithmetischen Mittel (medium arithmeticum) kommen bei den älteren Geometern noch zwei andere als arithmetische Mittel bezeichnete Verhältnisse vor, die »duae medietates arithmeticae« $\dfrac{m + 2n}{3}$ und $\dfrac{2m + n}{3}$.

24) *Zu S. 66. Lehrs. VIII* besagt $h : b = ch : ad$.

25) *Zu S. 67. Folges. II.* Die Zahlen der zweiten Kolonne sind berechnet nach folgendem Schema: Wenn wieder $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{m}{n}$, so folgt $b^2 = \dfrac{nc\,(me + nc)}{m\,(m + n)}$, $h^2 = \dfrac{n}{m}\,c^2 - \left(\dfrac{e - c}{2}\right)^2$, und die Zahlen der zweiten Kolonne ergeben sich unter der Annahme $a = b$.

An zweiter Stelle sind die Werte von h^2 berechnet unter der Annahme $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{1}{2}$, und zwar sind nur die Verhältniszahlen angegeben.

26) *Zu S. 68.* Der Kegelstumpf $CTAV$ soll durch $St\,(CA, h)$, der Zylinder durch $Zyl\;(a,\ b)$ bezeichnet werden, analog die übrigen.

$$St\;(CA, h) = \frac{\pi\,h}{4}\left(ce + \frac{(e-c)^2}{3}\right)$$

$$Zyl\;(c,\ h) = \frac{\pi\,c^2\,h}{4}$$

Also $$\frac{St\;(CA,\ h)}{Zyl\;(c,\ h)} = \frac{ce + \frac{(e-c)^2}{3}}{c^2}$$

$$\frac{Zyl\;(c,\ h)}{Zyl\;(a,\ h)} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\frac{St\;(CA,\ h)}{Zyl\;(a,\ h)} = \frac{ce + \frac{(e-c)^2}{3}}{a^2} = \frac{ce + \frac{(e-c)^2}{3}}{c\;(c+y)}$$

$$\frac{Zyl\;(a,\ h)}{Zyl\;(a,\ b)} = \frac{h}{b}$$

$$\frac{Konj.\ St\;(CA,\ h)}{Konj.\ Zyl\cdot(a,\ b)} = \frac{ce + \frac{(e-c)^2}{3}}{c\;(c+y)} \cdot \frac{h}{b}$$

Im Lehrsatze ist wieder ein Fehler, indem der zweite Teil des Verhältnisses verkehrt angegeben ist.

27) *Zu S. 68.* Setzt man $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \lambda$ (Konjugationswert) und $\frac{e}{c} = k$, so erhält man für den Stumpf:

$$St = \frac{\Delta^3}{\sqrt{\left(k+\frac{1}{\lambda}\right)^3}} \cdot \frac{\pi}{12}\,(1+k+k^2)\,\sqrt{\frac{1}{\lambda} - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2}$$

uud für den Zylinder: $$Z = \frac{\pi\;\lambda\;\Delta^3}{4\;(1+\lambda)\;\sqrt{1+\lambda}}$$

$$Zyl : St = \frac{\lambda}{\sqrt{(1+\lambda)^3}} : \frac{1+k+k^2}{3\sqrt{\left(k+\frac{1}{\lambda}\right)^3}}\,\sqrt{\frac{1}{\lambda} - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2}$$

In Folgesatz I ist das letztere Verhältnis für $\lambda = 2$, in II für $\lambda = 1$ berechnet.

Es sei hier darauf aufmerksam gemacht, wie umständlich und zeitraubend sich *Keplers* Rechnungen gestalteten. So ist in einem Beispiel 1684 mit $\sqrt{\frac{35}{38}}$ zu multiplizieren. *Kepler* schafft 1684 als Quadrat unter die Wurzel, führt dann die Rechnungsoperationen aus und berechnet schließlich die Quadratwurzel, offenbar um das Rechnen mit Dezimalzahlen zu vermeiden. Nur an einer einzigen Stelle des Buches kommt eine Dezimalzahl vor.

28) *Zu S. 71.* Das Verhältnis der Durchmesser des Stumpfes wird am größten, wenn T auf dem Kreise in die Diagonale $\varDelta$ rückt. Dann ist aber die Höhe des Stumpfes Null.

29) *Zu S. 71.* Es ist $ce = (\sqrt{ce})^2$

$$ce + \frac{(e-c)^2}{3} = \frac{e^2}{3} + \frac{c^2}{3} + \frac{ec}{3}$$

Der Stumpf $= \frac{\pi h}{4}\left(\frac{e^2}{3} + \frac{c^2}{3} + \frac{ec}{3}\right)$, der gleichhohe Zylinder $= \frac{\pi h x^2}{4}$ folglich $x^2 = \frac{e^2}{3} + \frac{c^2}{3} + \frac{ec}{3}$

30) *Zu S. 73.* Zur Abkürzung werde der Stumpf über CA mit der Höhe h durch $St\ (CA,\ h)$ bezeichnet; man hat:

$$\frac{Zyl\ (c,\ h)}{Zyl\ (CE,\ h)} = \frac{c^2}{CE^2};$$

da die Höhen gleich sind, so ist nach XII

$$CE = \frac{e+c}{2}$$

$$Tunica = St\ (CA,\ h) - Zyl\ (c,\ h)$$

$$Limbus = Zyl\ (CE,\ h) - Zyl\ (c,\ h)$$

$$\frac{Zyl\ (CE,\ h) - Zyl\ (c,\ h)}{Zyl\ (ch)} = \frac{limb}{Zyl\ (ch)} =$$

$$\frac{\left(c + \frac{e-c}{2}\right)^2 - c^2}{c^2} = \frac{c\,(e-c) + \frac{(e-c)^2}{4}}{c^2}$$

$$\frac{\textit{Tunica}}{\textit{Zyl}\ (ch)} = \frac{c\,(e-c) + \dfrac{(e-c)^2}{3}}{c^2}$$

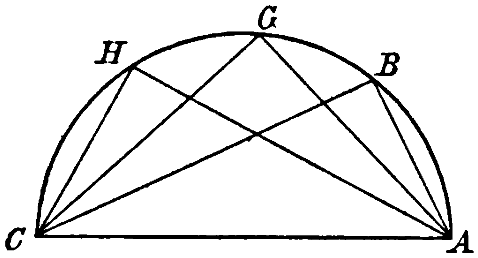
Der von *Kepler* angegebene Lehrsatz heißt also:

$$\frac{\textit{Tun.} - \textit{limb}}{\textit{Zyl}\ (CE,\, h)} = \frac{\textit{St} - \textit{Zyl}\ (CE,\, h)}{\textit{Zyl}\ (CE,\, h)} = \frac{\frac{1}{12}\,(e-c)^2}{\left(\dfrac{c+e}{2}\right)^2}$$

31) *Zu S. 74.* Lehrsatz XV ist wohl so zu verstehen. Es muß $\frac{1}{\lambda} \leqq \left(\frac{k-1}{2}\right)^2$ sein; wenn λ kleiner wird, so wird das Intervall, in dem sich k bewegen kann, größer. Die verschiedenen Konjugationen haben also immer bestimmte Werte k gemeinsam.

32) *Zu S. 75.* Vergleicht man die Zylinder CHA und CGA, so ist sicher $\frac{HA}{GA} < \frac{CG^2}{CH^2}$; läßt man den Punkt G nach B hin wandern, so werden beide Verhältnisse wachsen, aber das erste wächst rascher als das zweite, so daß sie schließlich gleich werden.

Fig. 27.



Nimmt man G auf dem Kreise beweglich an, so ändert sich der Wert des Verhältnisses.

33) *Zu S. 75.* Nimmt man G' beliebig zwischen H und B an, so ist jeder Stumpf von der Höhe AG' nach XIII größer als der Zylinder mit der Höhe AG', also auch größer als die Zylinder CHA oder CBA.

Betrachtet man die verschiedenen Stumpfe mit den Höhen AH, AG, AB, so ist unter ihnen der mit der Höhe AG der größte, die Stumpfe nehmen also mit abnehmender Höhe zuerst zu, dann von AG an ab.

34) *Zu S. 76.* Der Stumpf mit der Höhe AB ist größer als der Zylinder CHA; der mit dem konjugierten Zylinder CHA inhaltsgleiche Stumpf hat also eine kleinere Höhe.

35) *Zu S. 77.* Ist $a = b\sqrt{2}$, so ist die Höhe b des größten Zylinder $= \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$. Für $a < b\sqrt{2}$ wird $b > \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$. Be-

trachtet man den konjugierten Stumpf, dessen Höhe $TR = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$, so ist sein Volumen größer als das des größten Zylinders. Der mit dem Zylinder gleiche Stumpf muß also eine kleinere Höhe haben als b.

Nehmen wir nun einen Zylinder mit $a < b\sqrt{2}$, und vergleichen wir damit die konjugierten Stumpfe. Der Zylinder ist der Anfang aller Stumpfe. Die ihm unendlich benachbarten Stumpfe sind höher als der konjugierte Zylinder und kleiner als der größte Zylinder. Wächst AB, so werden die Stumpfe größer als der größte Zylinder, einmal wird also ein Stumpf dem größten Zylinder gleich. Bei weiterem Wachstum von AB werden die Stumpfe wieder kleiner, sie verschwinden schließlich, erreichen also nochmals den Wert des größten Zylinders.

36) *Zu S. 78.* *Kepler* vergleicht Stumpfe über derselben Diagonale miteinander, für die das Verhältnis $\frac{c}{e} = \frac{c'}{e'} = \text{konst.}$, und mit Zylindern von derselben Höhe. Zu jedem Zylinder gehört ein solcher Kegel. Es ist aber

$$\frac{St\,(CA,\ h) - Zyl\,(CA,\ h)}{Zyl\,(CA,\ h)} = \frac{\frac{1}{12}(e' - c')^2}{\left(\frac{e' + c'}{2}\right)^2}$$

$$\frac{St\,(CA,\ b) - Zyl\,(CA,\ b)}{Zyl\,(CA,\ b)} = \frac{\frac{1}{12}(e - c)^2}{\left(\frac{e + c}{2}\right)^2}$$

Weil die rechten Seiten gleich sind, ist

$$\frac{St\,(CA,\ h) - Zyl\,(CA,\ h)}{St\,(CA,\ b) - Zyl\,(CA,\ b)} = \frac{Zyl\,(CA,\ h)}{Zyl\,(CA,\ b)}$$

$$Zyl\,(CA,\ b) > Zyl\,(CA,\ h)$$

$St\,(CA,\ b) - Zyl\,(CA,\ b) > St\,(CA,\ h) - Zyl\,(CA,\ h)$ also $St\,(CA,\ b)$ immer größer als $St\,(CA,\ h)$.

37) *Zu S. 80.* Es sei CGA der größte Zylinder, $CTAV$ ein ihm konjugierter Stumpf mit der Höhe $TR = h$, CEA der mit dem Stumpf gleichhohe Zylinder. Es soll bewiesen werden, daß $St\,(CA,\ h) < Zyl\,(GC,\ b)$.

Es ist

$$\frac{St\ (CA,\ h)}{Zyl\ (CG,\ b)} = \frac{ce + \frac{(e-c)^2}{3}}{a^2} = \frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2}{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2}{a^2}$$

Den Beweis gliedert *Kepler* in zwei Teile:

$$1)\ \frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2}{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2} < \frac{d}{h}, \quad 2)\ \frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2}{a^2} < \frac{b}{d}$$

Es ist $d^2 - h^2 = \left(\frac{e-c}{2}\right)^2$

$$\left[\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{e+c}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2$$

Nun benutzt *Kepler* den Satz: Unterscheiden sich zwei kleinere Größen um 3, zwei größere um 1, und ist jede kleinere Zahl kleiner als die Hälfte der entsprechenden größeren, wobei die größere Zahl der ersten Gruppe auch gleich der Hälfte der größeren Zahl der zweiten Gruppe sein kann, so ist das fallende Verhältnis der kleineren Zahlen stets größer als die 6. Potenz des Verhältnisses der größeren. Es ist aber, weil

$$a^2 = 2b^2 \text{ und } h^2 < d^2, \left(\frac{e+c}{2}\right)^2 > 2b^2$$

$h^2 < b^2 < \frac{1}{2}\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 < \left(\frac{e+c}{2}\right)^2$ und $d^2 < \frac{a^2}{2}$, also auch

$$d^2 < \frac{1}{2}\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2$$

folglich, weil die Bedingungen des obigen Satzes bestehen:

$$\frac{d^2}{h^2} > \left\{\frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2}{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2}\right\}^6$$

$$\frac{d}{h} > \left\{\frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2}{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2}\right\}^3 > \frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2}{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2}$$

Um den zweiten Teil zu beweisen, führt *Kepler* eine Größe AH ein, entsprechend der Bedingung:

$$\left(\frac{e+c}{2}\right)^2 = ce + \left(\frac{e-c}{2}\right)^2 = c\,(e + AH),$$

also

$$c \cdot AH = \left(\frac{e-c}{2}\right)^2.$$

Es war aber früher nach Lehrsatz VII $a^2 = c\,(c+y)$, wo für den vorliegenden Fall $(a^2 = 2b)$ $y = \frac{2}{3}\,AB = \frac{e-c}{3}$ ist. Damit wird

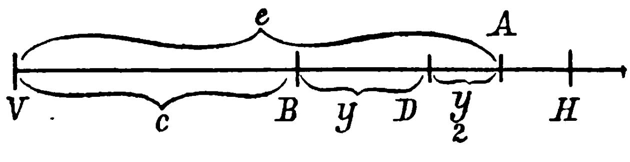
$$\frac{\left(\frac{e+c}{2}\right)^2}{a^2} = \frac{e+AH}{c+y},$$

welches Verhältnis kleiner sein soll als

$$\frac{c+y}{c} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2}.$$

Wenn aber von vier abnehmenden Zahlen je zwei dieselbe Differenz haben, so ist das fallende Verhältnis der größeren kleiner als das der beiden andern. Würden nun die Punkte V, B, D, A, H so liegen, daß D der Halbierungspunkt von BH und A der von DH wäre, so müßte $\frac{VH}{VD} < \frac{VD}{VB}$ sein, diese Beziehung ist umsomehr erfüllt, wenn H gegen A hin rückt. AH ist aber kleiner als AD, denn

Fig. 28.



$$c^2 \geqq 2\,(e-c)^2 = 8\left(\frac{e-c}{2}\right)^2 \text{ gibt mit } c \cdot AH = \left(\frac{c-e}{2}\right)^2$$

verbunden:

$$AH^2 \leqq \frac{1}{8}\left(\frac{e-c}{2}\right)^2 \text{ oder } AH < \frac{1}{3}\left(\frac{e-c}{2}\right) < AD.$$

Sind aber drei Zahlen $m > p > q$, so beschaffen, daß

$$m - p = \frac{p - q}{2},$$

so ist

$$\frac{m}{p} < \sqrt{\frac{p}{q}};$$

drei solche Zahlen sind e, $c + y$, c, also

$$\frac{e}{c + y} < \sqrt{\frac{c + y}{c}} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Solange die Stumpfe vom größten Zylinder nur wenig abweichen, also AH klein ist, wird sicher auch

$$\frac{e + AH}{c + y} < \frac{b}{d} \text{ demnach auch } \frac{St\ (CA,\ h)}{Zyl\ (CG,\ b)} < \frac{b}{h} \text{ oder}$$

$St\ (CA,\ h) < Zyl\ (CG,\ b)$, weil ja h stets größer ist als b. Nimmt h weiter zu, so nehmen die Zylinder CEA, folglich auch die Stumpfe CTA ab; damit ist der Satz bewiesen.

38) *Zu S. 88.* K. weiß, daß es sich hier um die Auflösung einer Gleichung dritten Grades handelt, die er auf geometrischem Wege für unmöglich hält. Mit den Methoden der Algebra oder Cossa wenig vertraut, beschränkt er sich hier und im folgenden Satze auf einige dunkle Andeutungen und beruft sich auf den arabischen Astronomen und Mathematiker *Geber* (*Dschâber ibn Aflah*) des 11. Jahrhunderts. Die Frage nach den Wurzeln einer Gleichung dritten Grades stellten die Cossisten in folgender Art: Gegeben ist das erste Glied einer geometrischen Reihe a, ferner die Summe oder Differenz des zweiten und vierten $aq \pm aq^3 = m$, zu finden ist das zweite und dritte Glied oder die zweite und dritte stetige Proportionale.

Anderson löst in den Exercitationes mathematicae, Paris 1619, *K.*s Problem in nachstehender Weise. Die gestellte Aufgabe ist identisch mit der, jenes quadratische Prisma in der Kugel zu finden, das gleich ist einem gegebenen Körper von kleinerem Inhalt als der größte parallelepipedische Körper in der Kugel, das ist der Würfel.

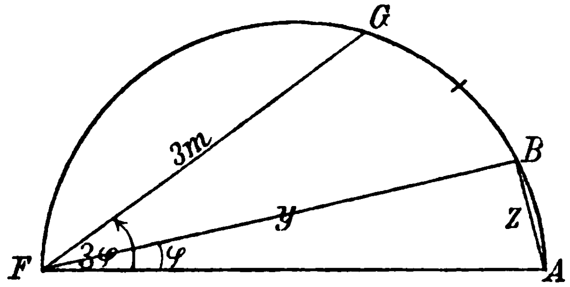
Es sei der gegebene Körper $v = 4r^2 \cdot \frac{m}{2} < a^3$, wenn r der Radius der Kugel, a die Seite des eingeschriebenen Würfels ist, die Höhe des gesuchten Prismas sei x, also

$$4r^2 m = 4r^2 x - x^3.$$

x findet man durch eine Konstruktion.

Errichtet man über $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ einen Halbkreis und trägt dann die Sehne $FG = 3m$ ein, was immer möglich ist, weil $m < \frac{a}{3}$, so liefert die Dreiteilung des Winkels 3φ mittels zweier Hyperbeln oder der Konchoide des *Nikomedes* (nach *Pappus*, Collect. math. IV) die beiden Wurzeln $x_1 = y + z\sqrt{3}$ und $x_2 = y - z\sqrt{3}$ (vgl. *Cantor*, Gesch. d. Math. II. 735). Der Beweis ist durch $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ leicht zu führen.

Fig. 29.



*K.*s Problem läßt sich nun so fassen. Gegeben ist der Stumpf $V = \frac{\pi h}{12}(c^2 + e^2 + ec)$, der dem größten Zylinder gleich ist, gesucht wird ein gleich großer anderer Stumpf (e_1, c_1, h_1) über derselben Diagonale Δ, wenn $\frac{e}{c} = \frac{e_1}{c_1} = k$. Es wird (Fig. 26 S. 120):

$$\Delta^2 = ce + d^2 = c_1 e_1 + d_1^2$$

$$h\,(c^2 + ce + e^2) = h_1\,(c_1^2 + e_1 c_1 + e_1^2)$$

$$h^2 = d^2 - \left(\frac{e - c}{2}\right)^2, \quad h_1^2 = d_1^2 - \left(\frac{e_1 - c_1}{2}\right)^2$$

Oder weil $e = ck$, $e_1 = c_1 k$

$$hc^2 = h_1 c_1^2$$

$$h^2 = \Delta^2 - \left(\frac{k + 1}{2}\right)^2 c^2$$

und

$$h\,(\Delta^2 - h^2) = \Delta^2 h_1 - h_1^3.$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

39) *Zu S. 89.* Es soll $\frac{c^2}{d^2} = \frac{c_1^2}{d_1^2} = \lambda < 2$, ferner sollen