44. Österreichische Mathematische Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

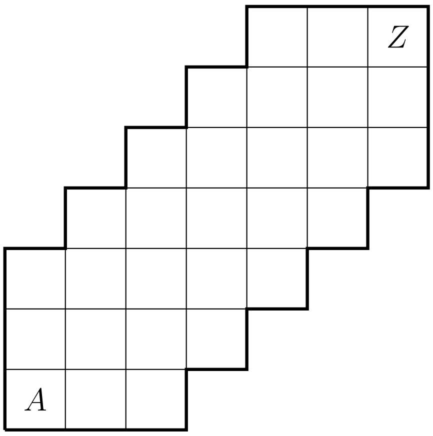
13. Juni 2013

---

1. Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n > 1$, für die Folgendes gilt:
   Die Summe der Zahl n und ihres zweitgrößten Teilers ist 2013.

   R. Henner, Wien

2. Gegeben ist die folgende Figur:



   Man bestimme die Anzahl der Wege vom Ausgangsquadrat A zum Zielquadrat Z, wobei ein Weg aus Schritten von einem Quadrat zu seinem oberen oder rechten Nachbarquadrat besteht.

   W. Janous, WRG Ursulinen, Innsbruck

3. Es seien a und b reelle Zahlen mit $0 \leq a, b \leq 1$. Man beweise:
$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \leq 1.$$
   Wann gilt Gleichheit?

   K. Czakler, GRG 21, Wien

4. Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck und D ein Punkt auf der Höhe durch C. Es seien E, F, G bzw. H die Mittelpunkte der Strecken AD, BD, BC bzw. AC.
   Man zeige, dass E, F, G und H ein Rechteck bilden.

   G. Anegg, Innsbruck

45. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

12. Juni 2014

---

1. Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$a^2 = b \cdot (b + 7)$$

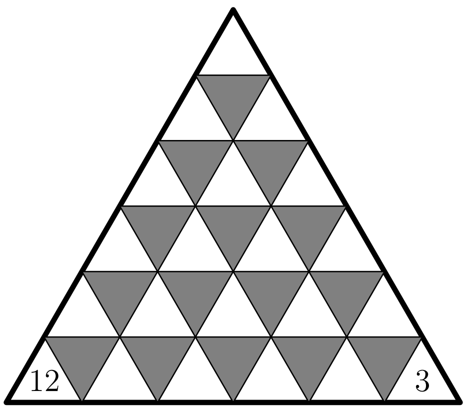
mit ganzen Zahlen $a \geq 0$ und $b \geq 0$.

W. Janous, WRG Ursulinen, Innsbruck

2. In der Abbildung sollen alle leeren weißen Dreiecke mit ganzen Zahlen gefüllt werden, sodass die Summe der drei Zahlen in den weißen Nachbardreiecken jedes grauen Dreiecks durch 5 teilbar ist.

Im linken unteren und im rechten unteren weißen Dreieck sind die Zahlen 12 bzw. 3 vorgegeben.

Man bestimme alle ganzen Zahlen, die im obersten weißen Dreieck stehen können.



G. Woeginger, TU Eindhoven, Niederlande

3. Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a < b < c < d$.

Man ordne $x = a \cdot b + c \cdot d$, $y = b \cdot c + a \cdot d$ und $z = c \cdot a + b \cdot d$ der Größe nach und beweise die angegebene Reihenfolge.

R. Henner, Wien

4. Es sei ABC ein Dreieck. Die Mittelpunkte der Seiten BC, AC und AB werden mit D, E bzw. F bezeichnet.

   Die beiden Schwerlinien AD und BE sollen aufeinander normal stehen und die Längen $\overline{AD} = 18$ und $\overline{BE} = 13{,}5$ haben.

   Man berechne die Länge der dritten Schwerlinie CF dieses Dreiecks.

   K. Czakler, GRG 21, Wien

46. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

20. und 21. Mai 2015

1. Es sei $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

   (i) $f(1) = 0$,

   (ii) $f(p) = 1$ für alle Primzahlen p,

   (iii) $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ für alle x, y in $\mathbb{Z}_{>0}$.

   Man bestimme die kleinste ganze Zahl $n \geq 2015$, die $f(n) = n$ erfüllt.

   (Gerhard J. Woeginger)

2. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Der Mittelpunkt der Seite AB heiße M.

   Es sei P ein Punkt im Inneren des Dreiecks. Die Spiegelung von P an M ergebe den Punkt Q.

   Weiters seien D und E die Schnittpunkte der Geraden AP bzw. BP mit den Seiten BC bzw. AC.

   Man beweise, dass die Punkte A, B, D und E genau dann auf einem Kreis liegen, wenn $\sphericalangle ACP = \sphericalangle QCB$ gilt.

   (Karl Czakler)

3. Wir betrachten die folgende Operation, die aus einer gegebenen natürlichen Zahl eine neue Zahl entstehen lässt: Die gegebene Zahl wird in einer beliebigen ganzzahligen Basis $b \geq 2$ dargestellt, in der sie zweistellig mit beiden Ziffern ungleich 0 ist. Dann werden die beiden Ziffern vertauscht und das Ergebnis in der Zifferndarstellung zur Basis b ist die neue Zahl.

   Ist es möglich, mit eventuell mehreren dieser Operationen jede Zahl größer als zehn zu einer Zahl kleiner oder gleich zehn zu verändern?

   (Theresia Eisenkölbl)

4. Es seien x, y, z positive reelle Zahlen mit $x + y + z \geq 3$. Man beweise:

$$\frac{1}{x+y+z^2} + \frac{1}{y+z+x^2} + \frac{1}{z+x+y^2} \leq 1.$$

   Wann gilt Gleichheit?

   (Karl Czakler)

5. Es sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC und k ein Kreis durch A und B. Dieser Kreis schneide

   - die Gerade AI in den Punkten A und P,
   - die Gerade BI in den Punkten B und Q,
   - die Gerade AC in den Punkten A und R sowie
   - die Gerade BC in den Punkten B und S,

   wobei die Punkte A, B, P, Q, R und S paarweise verschieden sind und R bzw. S im Inneren der Strecken AC bzw. BC liegen.

   Man zeige, dass die Geraden PS, QR und CI einander in einem Punkt schneiden.

   (Stephan Wagner)

6. Max hat 2015 Dosen, die von 1 bis 2015 nummeriert sind, sowie einen unbeschränkten Vorrat an Münzen.

   Man betrachte folgende Startkonfigurationen:

   (a) Alle Dosen sind leer.

   (b) In der Dose Nummer 1 befindet sich 1 Münze, in der Dose Nummer 2 sind 2 Münzen, und so weiter, bis zur Dose Nummer 2015, in der sich 2015 Münzen befinden.

   (c) In der Dose Nummer 1 befinden sich 2015 Münzen, in der Dose Nummer 2 sind 2014 Münzen, und so weiter, bis zur Dose Nummer 2015, in der sich 1 Münze befindet.

   Nun wählt Max in jedem Schritt eine Zahl n mit $1 \leq n \leq 2015$ aus, und fügt zu jeder Dose außer zur Dose Nummer n jeweils n Münzen hinzu.

   Man bestimme für jede der drei Startkonfigurationen (a), (b) bzw. (c), ob Max erreichen kann, dass sich nach endlich vielen Schritten in jeder Dose gleich viele Münzen befinden und mindestens ein Schritt ausgeführt wurde.

   (Birgit Vera Schmidt)

46. Österreichische Mathematik-Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

26. März 2015

1. *(R. Henner)* Man bestimme alle Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen, für die die Bedingungen

$$\mathrm{ggT}(a, 20) = b, \qquad \mathrm{ggT}(b, 15) = c \qquad \text{und} \qquad \mathrm{ggT}(a, c) = 5$$

gelten.

2. *(K. Czakler)* Es seien x, y und z positive reelle Zahlen mit $x + y + z = 3$.
Man beweise, dass mindestens eine der drei Zahlen

$$x(x + y - z), \qquad y(y + z - x) \qquad \text{oder} \qquad z(z + x - y)$$

kleiner oder gleich 1 ist.

3. *(T. Eisenkölbl)* Gegeben ist eine natürliche Zahl $n \geq 3$. Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$. In jedem Spielzug wählt man zwei Zahlen aus und ersetzt sie durch ihr arithmetisches Mittel. Dies geschieht so lange, bis nur mehr eine Zahl auf der Tafel steht.

   Man bestimme die kleinste ganze Zahl, die man durch eine geeignete Folge von Spielzügen am Ende erreichen kann.

4. *(W. Janous)* Es sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AC = BC$ und $\sphericalangle ACB < 60°$. Wir bezeichnen den Inkreismittelpunkt und den Umkreismittelpunkt mit I bzw. U. Der Umkreis des Dreiecks BIU schneidet den Schenkel BC ein zweites Mal im Punkt D.

   (a) Man beweise, dass die Geraden AC und DI parallel sind.

   (b) Man beweise, dass die Geraden UD und IB aufeinander normal stehen.

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

46. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

9. Juni 2015

1. Es seien a, b und c ganze Zahlen, für die die Summe $a^3 + b^3 + c^3$ durch 18 teilbar ist.

   Man beweise, dass das Produkt abc durch 6 teilbar ist.

   (Karl Czakler)

2. Für die positiven reellen Zahlen x und y gilt die Bedingung $xy = 4$.

   Man beweise, dass die Ungleichung

   $$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \le \frac{2}{5}$$

   gilt. Für welche x, y tritt Gleichheit ein?

   (Walther Janous)

3. Anton wählt eine beliebige ganze Zahl $n \ge 0$, die keine Quadratzahl ist, als Startzahl. Berta addiert dazu die nächstgrößere ganze Zahl $n + 1$. Ist die Summe eine Quadratzahl, so hat sie gewonnen. Andernfalls addiert Anton zur Summe die nächstgrößere ganze Zahl $n + 2$. Ist die Summe eine Quadratzahl, so hat er gewonnen. Andernfalls ist wieder Berta am Zug und addiert die nächstgrößere ganze Zahl $n + 3$, und so weiter.

   Man zeige, dass es unendlich viele Startzahlen gibt, mit denen Anton gewinnt.

   (Richard Henner)

4. Der Kreis k_2 berührt den Kreis k_1 von innen im Punkt X. Der Punkt P liegt auf keiner der beiden Kreislinien und nicht auf der Geraden durch die beiden Kreismittelpunkte. Der Punkt N_1 ist jener Punkt auf k_1, der P am nächsten liegt, und F_1 ist jener Punkt auf k_1, der von P am weitesten entfernt ist. Analog ist der Punkt N_2 jener Punkt auf k_2, der P am nächsten liegt, und F_2 ist jener Punkt auf k_2, der von P am weitesten entfernt ist.

   Man beweise, dass $\sphericalangle N_1XN_2 = \sphericalangle F_1XF_2$ gilt.

   (Robert Geretschläger)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

46. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

1. Teil 1. Mai 2015

---

1. Man zeige
$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \geq (a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$$
für alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d.

   Wann gilt Gleichheit?

   (Georg Anegg)

2. Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit $AC < AB$ und mit Umkreisradius R. Der Punkt D sei der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt A. Der Punkt T liege so auf der Geraden AD, dass $AT = 2R$ gilt und D zwischen A und T liegt.

   Der Mittelpunkt des Umkreisbogens BC, der A nicht enthält, werde mit S bezeichnet.

   Man zeige: $\sphericalangle AST = 90°$.

   (Karl Czakler)

3. Alice und Bob spielen ein Spiel mit einer Schnur, auf der 2015 Perlen aufgereiht sind. Wer am Zug ist, zerschneidet die Schnur zwischen zwei Perlen. Der oder die andere entscheidet, welches der beiden Stücke für den Rest des Spieles verwendet wird. Das andere Stück wird entfernt.

   Alice beginnt, danach wechseln sich die beiden mit dem Zerschneiden ab. Verloren hat, wer am Zug ist und nur eine einzige Perle vor sich hat, sodass kein Schnitt zwischen zwei Perlen mehr möglich ist.

   Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

   (Theresia Eisenkölbl)

4. Eine *Polizeinotrufzahl* sei eine positive ganze Zahl, die im Dezimalsystem auf die Ziffern 133 endet. Man beweise, dass jede Polizeinotrufzahl einen Primteiler größer als 7 besitzt.

   (Robert Geretschläger)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

47. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene (Tag 1)

25. Mai 2016

1. Es sei $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, sodass für alle x, $y \in \mathbb{Q}^+$

$$f\Big(\frac{x}{y} + y\Big) = \frac{f(x)}{f(y)} + f(y) + \alpha x$$

   gilt.

   Dabei bezeichnet $\mathbb{Q}^+$ die Menge der positiven rationalen Zahlen.

   (Walther Janous)

2. Es sei ABC ein Dreieck. Sein Inkreis berühre die Seiten BC, CA und AB in den Punkten D, E bzw. F. Der Schnittpunkt der Geraden ED mit der Normalen auf EF durch F sei P und der Schnittpunkt der Geraden EF mit der Normalen auf ED durch D sei Q.

   Man beweise: Der Punkt B ist Mittelpunkt der Strecke PQ.

   (Karl Czakler)

3. Wir betrachten Anordnungen der Zahlen 1 bis 64 auf den Feldern eines 8×8-Schachbretts, wobei jedes Feld genau eine Zahl enthält und jede Zahl genau einmal vorkommt.

   Eine Zahl in einer derartigen Anordnung heißt *super-plus-gut*, falls sie die größte Zahl in ihrer Zeile und gleichzeitig die kleinste Zahl in ihrer Spalte ist.

   Man beweise oder widerlege jeweils:

   (a) In jeder derartigen Anordnung gibt es mindestens eine super-plus-gute Zahl.

   (b) In jeder derartigen Anordnung gibt es höchstens eine super-plus-gute Zahl.

   (Gerhard J. Woeginger)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

47. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene (Tag 2)

26. Mai 2016

4. Es seien a, b, $c \geq -1$ reelle Zahlen mit $a^3 + b^3 + c^3 = 1$.

   Man beweise:
$$a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 \leq 4.$$

   Wann gilt Gleichheit?

   (Karl Czakler)

5. Gegeben sei ein Spielbrett, das aus $n \times n$ quadratischen Feldern besteht, wobei $n \geq 2$ gilt. Felder, die direkt horizontal oder vertikal neben einem Feld liegen, werden als dessen Nachbarn bezeichnet. Zu Beginn sind auf den Feldern k Spielsteine verteilt, wobei sich auf einem Feld auch mehrere oder keine Spielsteine befinden können.

   In jedem Spielzug wählt man nun ein Feld aus, das mindestens so viele Spielsteine wie Nachbarn besitzt und legt auf jedes Nachbarfeld einen dieser Spielsteine. Das Spiel endet, wenn es kein derartiges Feld zur Auswahl gibt.

   (a) Man bestimme das kleinste k, für das das Spiel für jede mögliche Anfangsanordnung und Wahl der Spielzüge nicht endet.

   (b) Man bestimme das größte k, für das das Spiel für jede mögliche Anfangsanordnung und Wahl der Spielzüge endet.

   (Theresia Eisenkölbl)

6. Es seien a, b, c ganze Zahlen, für die
$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}$$
   ganzzahlig ist.

   Man beweise: Jede der Zahlen
$$\frac{ab}{c}, \ \frac{ac}{b} \quad \text{und} \quad \frac{bc}{a}$$
   ist eine ganze Zahl.

   (Gerhard J. Woeginger)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2016`

47. Österreichische Mathematik-Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

31. März 2016

1. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen k und n, die die Gleichung

$$k^2 - 2016 = 3^n$$

erfüllen.

(Stephan Wagner)

2. Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$.
Man beweise, dass die Ungleichung

$$(a + 2)(b + 2) \geq cd$$

gilt, und man gebe vier Zahlen a, b, c und d an, für die Gleichheit gilt.

(Walther Janous)

3. Anlässlich der 47. Mathematik-Olympiade 2016 stehen die Zahlen 47 und 2016 auf der Tafel. Alice und Bob spielen folgendes Spiel: Sie sind abwechselnd am Zug, wobei Alice beginnt. Wer am Zug ist, wählt zwei auf der Tafel stehende Zahlen a und b mit $a > b$, deren Differenz $a - b$ noch nicht auf der Tafel steht, und schreibt diese Differenz zusätzlich auf die Tafel. Das Spiel endet, wenn kein Zug mehr möglich ist. Wer den letzten Zug gemacht hat, gewinnt.
Man beweise, dass Bob jedenfalls gewinnt, egal wie die beiden spielen.

(Richard Henner)

4. Es sei ABC ein Dreieck mit $AC > AB$ und dem Umkreismittelpunkt U. Die Tangenten an den Umkreis in den Punkten A und B schneiden einander im Punkt T. Die Symmetrale der Seite BC schneidet die Seite AC im Punkt S.
Man zeige:

   (a) Die Punkte A, B, S, T und U liegen auf einem Kreis.

   (b) Die Gerade ST ist parallel zur Seite BC.

(Karl Czakler)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

47. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

16. Juni 2016

1. Man bestimme alle natürlichen Zahlen n mit zwei verschiedenen positiven Teilern, die von $\frac{n}{3}$ gleich weit entfernt sind.

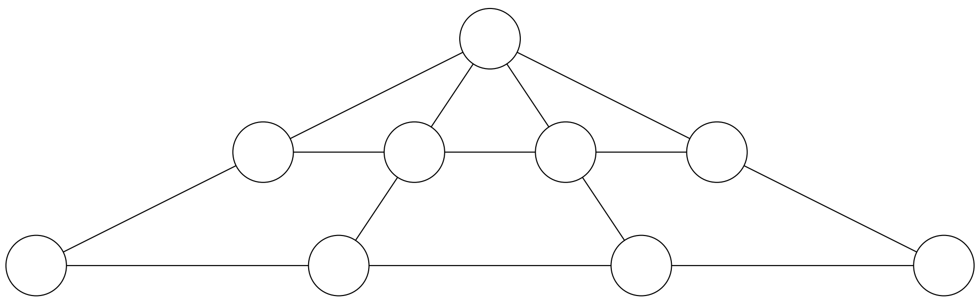
(Richard Henner)

2. Man beweise, dass für alle reellen Zahlen $x \neq -1$, $y \neq -1$ und mit $xy = 1$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2+y}{1+y}\right)^2 \geq \frac{9}{2}$$

(Karl Czakler)

3. Wir betrachten die folgende Figur:



Wir suchen Beschriftungen der neun Felder in der Figur mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 9$. Dabei soll jede dieser Zahlen genau einmal verwendet werden. Weiters sollen die sechs Summen von jeweils drei bzw. vier Zahlen längs der eingezeichneten geraden Verbindungen gleich sein.
Man gebe eine solche Beschriftung an.
Man zeige, dass bei allen solchen Beschriftungen im obersten Feld die selbe Zahl steht.
Wie viele solche Beschriftungen gibt es insgesamt? (Zwei Beschriftungen sind verschieden, wenn sie sich in mindestens einem Feld unterscheiden.)

(Walther Janous)

4. Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit fünf gleich langen Seiten und rechten Winkeln in den Eckpunkten C und D. Weiters sei P der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Man beweise, dass die Strecken PA und PD gleich lang sind.

(Gottfried Perz)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

47. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Teil 1

30. April 2016

1. Man bestimme die größte Konstante C derart, dass für alle reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_6$ die Ungleichung

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_6)^2 \geq C \cdot (x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_3 + x_4) + \cdots + x_6(x_1 + x_2))$$

gilt.

Man ermittle für dieses C alle $x_1, x_2, \ldots, x_6$, für die Gleichheit gilt.

(Walther Janous)

2. Gegeben sei ein spitzwinkeliges Dreieck ABC mit $AB > AC$. Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks werde mit H bezeichnet. Spiegelt man den Punkt C an der Höhe AH, erhält man den Punkt E. Der Schnittpunkt der Geraden EH mit der Geraden AC sei F.

Man beweise: Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks AEF liegt auf der Geraden AB.

(Karl Czakler)

3. Es sind 2016 Punkte auf einem Kreis angeordnet. Wir dürfen nach Lust und Laune 2 oder 3 Punkte im Uhrzeigersinn weiter springen.

Wie viele Sprünge muss man mindestens machen, um alle Punkte zu erreichen und wieder am Ausgangspunkt anzukommen?

(Gerd Baron)

4. Man bestimme alle zusammengesetzten positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft: Sind $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ alle positiven Teiler von n, so gilt

$$(d_2 - d_1) : (d_3 - d_2) : \cdots : (d_k - d_{k-1}) = 1 : 2 : \cdots : (k-1).$$

(Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

48. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene (Tag 1)

24. Mai 2017

1. Es sei eine reelle Zahl α gegeben.

   Man bestimme in Abhängigkeit von α alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

   $$f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 + \alpha y f(y)$$

   für alle x, $y \in \mathbb{R}$.

   (Walther Janous)

2. Auf einer Kette sind 2016 Perlen im Kreis angeordnet, von denen jede eine der Farben schwarz, blau oder grün hat. In jedem Schritt wird gleichzeitig jede Perle durch eine neue Perle ersetzt, wobei sich die Farbe der neuen Perle wie folgt bestimmt: Falls die beiden ursprünglichen Nachbarn dieselbe Farbe hatten, hat die neue Perle deren Farbe. Falls die Nachbarn zwei verschiedene Farben hatten, hat die neue Perle die dritte Farbe.

   (a) Gibt es eine solche Kette, auf der die Hälfte der Perlen schwarz und die andere Hälfte grün ist, aus der man mit solchen Schritten eine Kette aus lauter blauen Perlen erhalten kann?

   (b) Gibt es eine solche Kette, auf der tausend Perlen schwarz und die übrigen grün sind, aus der man mit solchen Schritten eine Kette aus lauter blauen Perlen erhalten kann?

   (c) Ist es möglich, von einer Kette, die genau zwei benachbarte schwarze und sonst nur blaue Perlen enthält, mit solchen Schritten zu einer Kette zu kommen, die genau eine grüne und sonst nur blaue Perlen enthält?

   (Theresia Eisenkölbl)

3. Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ die Folge rationaler Zahlen mit $a_0 = 2016$ und

   $$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{a_n}$$

   für alle $n \geq 0$.

   Man zeige, dass diese Folge kein Quadrat einer rationalen Zahl enthält.

   (Theresia Eisenkölbl)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

48. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene (Tag 2)

25. Mai 2017

---

4. (a) Man bestimme den größtmöglichen Wert M, den $x+y+z$ annehmen kann, wenn x, y und z positive reelle Zahlen mit

$$16xyz = (x+y)^2(x+z)^2$$

sind.

(b) Man zeige, dass es unendlich viele Tripel (x, y, z) positiver rationaler Zahlen gibt, für die

$$16xyz = (x+y)^2(x+z)^2 \text{ und } x+y+z = M$$

gelten.

(Karl Czakler)

5. Es seien ABC ein spitzwinkeliges Dreieck, H sein Höhenschnittpunkt und D, E und F die Fußpunkte der Höhen durch A, B bzw. C. Der Schnittpunkt von DF mit der Höhe durch B sei P. Die Normale auf BC durch P schneide die Seite AB in Q. Der Schnittpunkt von EQ mit der Höhe durch A sei N.

Man beweise, dass N die Strecke AH halbiert.

(Karl Czakler)

6. Es sei $S = \{1, 2, \ldots, 2017\}$.

Man bestimme die größtmögliche natürliche Zahl n, für die es n verschiedene Teilmengen von S gibt, sodass für keine zwei dieser Teilmengen ihre Vereinigung gleich S ist.

(Gerhard Woeginger)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2017`

48. Österreichische Mathematik-Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

30. März 2017

1. Es seien x_1, x_2, $\ldots$, x_9 nicht negative reelle Zahlen, für die gilt:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_9^2 \geq 25$$

Man beweise, dass es drei dieser Zahlen gibt, deren Summe mindestens 5 ist.

(Karl Czakler)

2. Es sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck mit dem Umkreismittelpunkt U, in dem die Diagonalen aufeinander normal stehen. Es sei g die Gerade, die man erhält, wenn man die Diagonale AC an der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle BAD$ spiegelt.

Man zeige, dass der Punkt U auf der Geraden g liegt.

(Theresia Eisenkölbl)

3. Auf der Tafel stehen die drei natürlichen Zahlen 2000, 17 und n. Anna und Berta spielen folgendes Spiel: Anna beginnt, dann sind sie abwechselnd am Zug. Ein Zug besteht darin, eine der drei Zahlen auf der Tafel durch den Betrag der Differenz der beiden anderen Zahlen zu ersetzen. Dabei ist kein Zug erlaubt, bei dem sich keine der drei Zahlen verändert. Wer an der Reihe ist und keinen erlaubten Zug mehr machen kann, hat verloren.

   - Man beweise, dass das Spiel für jedes n irgendwann zu Ende geht.
   - Wer gewinnt, wenn $n = 2017$ ist?

(Richard Henner)

4. Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, für die

$$n = a^2 + b^2$$

gilt, wobei a der kleinste von 1 verschiedene Teiler von n und b ein beliebiger Teiler von n ist.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

48. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

13. Juni 2017

---

1. Gegeben sind die nichtnegativen reellen Zahlen a und b mit $a+b=1$. Man beweise:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} \leq 1$$

Wann gilt Gleichheit in der linken Ungleichung, wann in der rechten?

(Walther Janous)

2. Im gleichschenkeligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist D der Fußpunkt der Höhe durch C und M der Mittelpunkt der Strecke CD. Die Gerade BM schneidet AC in E. Man beweise, dass AC dreimal so lang wie CE ist.

(Erich Windischbacher)

3. Anton schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 2 teilbar sind. Berta schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 3 teilbar sind. Clara schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 4 teilbar sind. Die ordnungsliebende Dora notiert die von den anderen aufgeschriebenen Zahlen. Dabei ordnet sie die Zahlen der Größe nach und schreibt keine Zahl mehrfach an. Wie lautet die 2017. Zahl in ihrer Liste?

(Richard Henner)

4. Wie viele Lösungen hat die Gleichung

$$\left\lfloor \frac{x}{20} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{17} \right\rfloor$$

über der Menge der positiven ganzen Zahlen?

Dabei bezeichnet $\lfloor a \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich a ist.

(Karl Czakler)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Teil 1

28. April 2018

---

1. Es sei α eine positive reelle Zahl. Man bestimme für dieses α die größte reelle Zahl C derart, dass für alle positiven reellen Zahlen x, y und z mit $xy + yz + zx = \alpha$ die Ungleichung

$$\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{y^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{z^2}\right) \geq C \cdot \left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+2\right)$$

gilt. Wann gilt Gleichheit?

(Walther Janous)

2. Es sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Die Berührpunkte des Inkreises mit den Seiten BC und AC seien D bzw. E. Der Schnittpunkt der Geraden AI und DE sei P. Die Mittelpunkte der Seiten BC und AB seien M bzw. N.

   Man beweise, dass die Punkte M, N und P auf einer Geraden liegen.

(Karl Czakler)

3. Alice und Bob beschließen, eine 2018-stellige Zahl im Dezimalsystem ziffernweise von links nach rechts festzulegen, wobei Alice beginnt und die beiden sich abwechseln. Dabei soll folgende Regel gelten: Jede neu genannte Ziffer soll in einer anderen Restklasse modulo 3 liegen als die unmittelbar davor genannte.

   Da Bob die letzte Ziffer angeben darf, wettet er, dass es ihm gelingt, dass die Zahl am Ende durch 3 teilbar ist. Kann Alice das verhindern?

(Richard Henner)

4. Es sei M eine Menge von positiven ganzen Zahlen mit den folgenden drei Eigenschaften:

   (1) $2018 \in M$.

   (2) Wenn $m \in M$, dann sind auch alle positiven Teiler von m Elemente von M.

   (3) Für alle Elemente $k, m \in M$ mit $1 < k < m$ ist auch $km + 1$ ein Element von M.

   Man beweise, dass $M = \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gilt.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene (Tag 1)

31. Mai 2018

1. Es sei $\alpha \neq 0$ eine reelle Zahl.

   Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit

   $$f(f(x)+y) = \alpha x + \frac{1}{f\left(\frac{1}{y}\right)}$$

   für alle x, $y \in \mathbb{R}_{>0}$.

   (Walther Janous)

2. Es seien A, B, C und D vier verschiedene Punkte auf einem Kreis in dieser Reihenfolge. Im Sehnenviereck $ABCD$ sei AB die (einzige) längste Seite.

   Man beweise, dass die Ungleichung

   $$AB + BD > AC + CD$$

   gilt.

   (Karl Czakler)

3. In einem Raum sind n Kinder, von denen jedes mindestens ein Zuckerl hat. In Runde 1, Runde 2, usw., werden nun weitere Zuckerln an diese Kinder nach folgender Regel verteilt:

   In Runde k bekommt jedes Kind, dessen Zuckerlanzahl teilerfremd zu k ist, ein Zuckerl dazu.

   Man zeige, dass nach einigen Runden die Kinder im Raum höchstens zwei verschiedene Anzahlen von Zuckerln haben.

   (Theresia Eisenkölbl)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene (Tag 2)

1. Juni 2018

4. Es seien ABC ein Dreieck und P ein Punkt im Inneren des Dreiecks, für den die Mittelpunkte M_B und M_A der Umkreise k_B bzw. k_A von ACP bzw. BCP außerhalb des Dreiecks ABC liegen. Weiters seien die drei Punkte A, P und M_A kollinear und ebenso die drei Punkte B, P und M_B. Die durch P verlaufende Parallele zur Seite AB schneide die Kreise k_A und k_B in den Punkten D bzw. E mit $D, E \neq P$.

   Man zeige, dass dann $DE = AC + BC$ gilt.

   (Walther Janous)

5. Auf einer Kreislinie liegen 2018 Punkte. Jeder dieser Punkte wird mit einer ganzen Zahl beschriftet. Dabei sei jede Zahl größer als die Summe der zwei Zahlen, die im Uhrzeigersinn unmittelbar davor stehen.

   Man bestimme die größtmögliche Anzahl von positiven Zahlen, die sich unter den 2018 Zahlen befinden können.

   (Walther Janous)

6. Man bestimme alle Ziffern z, sodass für jede ganze Zahl $k \geq 1$ eine ganze Zahl $n \geq 1$ mit der Eigenschaft existiert, dass die Dezimaldarstellung von n^9 mit mindestens k Ziffern z endet.

   (Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2018`

49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

5. April 2018

---

1. Es seien a und b nichtnegative reelle Zahlen mit $a + b < 2$.

   Man beweise die folgende Ungleichung:

   $$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}$$

   Für welche a, b gilt Gleichheit?

   (Gottfried Perz)

2. Es seien k ein Kreis mit Radius r und AB eine Sehne von k mit $\overline{AB} > r$. Weiters sei S jener Punkt auf der Sehne AB, für den $\overline{AS} = r$ gilt. Die Streckensymmetrale von BS schneide den Kreis k in den Punkten C und D. Die Gerade durch die Punkte D und S schneide k in einem weiteren Punkt E.

   Man beweise, dass das Dreieck CSE gleichseitig ist.

   (Stefan Leopoldseder)

3. Man bestimme für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ die Anzahl a_n der dreielementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$, in denen ein Element das arithmetische Mittel der beiden anderen Elemente ist.

   (Walther Janous)

4. Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ sei $d(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von n.

   Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die

   $$d(n-1) + d(n) + d(n+1) \leq 8$$

   gilt.

   (Richard Henner)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

12. Juni 2018

---

1. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}$$

Wann gilt Gleichheit?

(Walther Janous)

2. Es seien ABC ein spitzwinkliges Dreieck, M der Mittelpunkt der Seite AC und F auf AB der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt C.

Man beweise, dass $\overline{AM} = \overline{AF}$ genau dann gilt, wenn $\sphericalangle BAC = 60°$.

(Karl Czakler)

3. Zu einer gegebenen ganzen Zahl $n \geq 4$ untersuchen wir, ob es eine Tabelle mit drei Zeilen und n Spalten gibt, die mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 3n$ gefüllt werden kann, sodass

- sich in jeder Zeile die selbe Summe z ergibt und
- sich in jeder Spalte die selbe Summe s ergibt.

Man zeige:

(a) Wenn n gerade ist, gibt es keine solche Tabelle.

(b) Für $n = 5$ gibt es eine solche Tabelle.

(Gerhard J. Woeginger)

4. Für eine beliebige natürliche Zahl n bezeichnen wir die Anzahl der positiven Teiler von n mit $d(n)$ und die Summe dieser Teiler mit $s(n)$. Zum Beispiel ist $d(2018)$ gleich 4, weil 2018 vier Teiler hat (1, 2, 1009 und 2018) und $s(2018) = 1 + 2 + 1009 + 2018 = 3030$.

Man bestimme alle natürlichen Zahlen x, für die $s(x) \cdot d(x) = 96$ gilt.

(Richard Henner)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Teil 1

28. April 2018

1. Es sei α eine positive reelle Zahl. Man bestimme für dieses α die größte reelle Zahl C derart, dass für alle positiven reellen Zahlen x, y und z mit $xy + yz + zx = \alpha$ die Ungleichung
$$\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{y^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{z^2}\right) \geq C \cdot \left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+2\right)$$
gilt. Wann gilt Gleichheit?

(Walther Janous)

2. Es sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Die Berührpunkte des Inkreises mit den Seiten BC und AC seien D bzw. E. Der Schnittpunkt der Geraden AI und DE sei P. Die Mittelpunkte der Seiten BC und AB seien M bzw. N.

   Man beweise, dass die Punkte M, N und P auf einer Geraden liegen.

(Karl Czakler)

3. Alice und Bob beschließen, eine 2018-stellige Zahl im Dezimalsystem ziffernweise von links nach rechts festzulegen, wobei Alice beginnt und die beiden sich abwechseln. Dabei soll folgende Regel gelten: Jede neu genannte Ziffer soll in einer anderen Restklasse modulo 3 liegen als die unmittelbar davor genannte.

   Da Bob die letzte Ziffer angeben darf, wettet er, dass es ihm gelingt, dass die Zahl am Ende durch 3 teilbar ist. Kann Alice das verhindern?

(Richard Henner)

4. Es sei M eine Menge von positiven ganzen Zahlen mit den folgenden drei Eigenschaften:

   (1) $2018 \in M$.

   (2) Wenn $m \in M$, dann sind auch alle positiven Teiler von m Elemente von M.

   (3) Für alle Elemente $k, m \in M$ mit $1 < k < m$ ist auch $km + 1$ ein Element von M.

   Man beweise, dass $M = \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gilt.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb

18. Juni 2019

1. Es seien x und y ganze Zahlen mit $x + y \neq 0$. Man bestimme alle Paare (x, y), für die

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 10$$

gilt.

(Walther Janous)

2. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Über der Strecke BC wird nach außen ein gleichseitiges Dreieck BCS errichtet. Der Halbierungspunkt der Strecke AS sei N und der Halbierungspunkt der Seite CD sei H.

   Beweise: $\sphericalangle NHC = 60°$.

(Karl Czakler)

3. Alice und Bob spielen ein Jahreszahlspiel. Es werden zwei Spielzahlen 19 und 20 und eine Startzahl aus der Menge $\{9, 10\}$ verwendet. Unabhängig voneinander wählt Alice ihre Spielzahl und Bob wählt die Startzahl. Die andere Spielzahl erhält Bob.

   Dann addiert Alice ihre Spielzahl zur Startzahl, zum Ergebnis addiert Bob seine Spielzahl, zum Ergebnis addiert Alice ihre Spielzahl, u.s.w. Das Spiel geht so lange, bis die Zahl 2019 erreicht oder überschritten ist.

   Wer die Zahl 2019 erreicht, gewinnt. Wird 2019 überschritten, endet das Spiel unentschieden.

   - Man zeige, dass Bob nicht gewinnen kann.
   - Welche Startzahl muss Bob wählen, um zu verhindern, dass Alice gewinnt?

(Richard Henner)

4. Es seien p, q, r und s vier Primzahlen, für die

$$5 < p < q < r < s < p + 10$$

gilt. Man beweise, dass die Summe der vier Primzahlen durch 60 teilbar ist.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene

4. April 2019

1. Es seien x und y reelle Zahlen mit $(x+1)(y+2)=8$.

   Man beweise:

   $$(xy-10)^2 \geq 64.$$

   Man bestimme weiters alle Paare (x, y) reeller Zahlen, für die Gleichheit gilt.

   (Karl Czakler)

2. Das konvexe Fünfeck $ABCDE$ besitzt einen Umkreis und es gilt $\overline{AB} = \overline{BD}$. Der Punkt P sei der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BE. Die Geraden BC und DE schneiden einander im Punkt Q.

   Man beweise, dass die Gerade PQ parallel zur Diagonalen AD ist.

   (Gottfried Perz)

3. Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl.

   Auf eine Tafel wird ein $n \times n$-Raster gezeichnet und jedes Feld mit einer der Zahlen -1 bzw. $+1$ beschriftet. Anschließend werden die n Zeilen- und auch die n Spaltensummen berechnet und die Summe S_n aller dieser $2n$ Summen bestimmt.

   (a) Man zeige: Für keine ungerade Zahl n gibt es eine Beschriftung mit $S_n = 0$.

   (b) Man zeige: Ist n eine gerade Zahl, so gibt es mindestens sechs verschiedene Beschriftungen mit $S_n = 0$.

   (Walther Janous)

4. Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, die kleiner als 128^{97} sind und genau 2019 Teiler haben.

   (Richard Henner)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde

4. Mai 2019

1. Wir betrachten die zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ ganzer Zahlen, die durch $a_0 = b_0 = 2$ und $a_1 = b_1 = 14$ und durch

$$a_n = 14a_{n-1} + a_{n-2},$$
$$b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2}$$

   für $n \geq 2$ festgelegt sind.

   Man entscheide, ob es unendlich viele Zahlen gibt, die in beiden Folgen vorkommen.

   (Gerhard Woeginger)

2. Es sei ABC ein Dreieck und I sein Inkreismittelpunkt. Der Kreis durch A, C und I schneide die Gerade BC ein zweites Mal im Punkt X, der Kreis durch B, C und I schneide die Gerade AC ein zweites Mal im Punkt Y.

   Man zeige, dass die Strecken AY und BX gleich lang sind.

   (Theresia Eisenkölbl)

3. Es sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Ariane und Bérénice spielen ein Spiel auf der Menge der Restklassen modulo n. Zu Beginn steht auf einem Zettel die Restklasse 1. In jedem Spielzug ersetzt die Spielerin, die am Zug ist, die aktuelle Restklasse x entweder durch $x + 1$ oder durch $2x$. Die beiden Spielerinnen wechseln sich ab, wobei Ariane beginnt.

   Ariane hat gewonnen, wenn im Laufe des Spiels die Restklasse 0 erreicht wird. Bérénice hat gewonnen, wenn sie das dauerhaft verhindern kann.

   Man bestimme in Abhängigkeit von n, wer von beiden eine Gewinnstrategie hat.

   (Theresia Eisenkölbl)

4. Man bestimme alle Paare (a, b) reeller Zahlen, sodass

$$a \cdot \lfloor b \cdot n \rfloor = b \cdot \lfloor a \cdot n \rfloor$$

   für alle positiven ganzen Zahlen n gilt.

   (Für eine reelle Zahl x bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.)

   (Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 1)

29. Mai 2019

1. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die
$$f(2x + f(y)) = x + y + f(x)$$
für alle x, $y \in \mathbb{R}$ gilt.

(Gerhard Kirchner)

2. Ein (konvexes) Trapez $ABCD$ heiße *gut*, wenn es einen Umkreis besitzt, die Seiten AB und CD die Parallelseiten sind und CD kürzer als AB ist. Für ein gutes Trapez $ABCD$ werden folgende Bezeichnungen festgelegt.

   - Die durch B verlaufende Parallele zu AD schneide die Verlängerung der Seite CD im Punkt S.
   - Die beiden Tangenten durch S an den Umkreis des Trapezes berühren diesen in E bzw. F, wobei E auf derselben Seite der Geraden CD wie A liege.

   Man gebe eine möglichst einfache äquivalente Bedingung (ausgedrückt in den Seitenlängen und/oder Winkeln des Trapezes) dafür an, dass bei einem guten Trapez $ABCD$ die zwei Winkel $\sphericalangle BSE$ und $\sphericalangle FSC$ gleich groß sind.

(Walther Janous)

3. In Oddland gibt es Briefmarken mit Werten 1 Cent, 3 Cent, 5 Cent usw., wobei es für jede ungerade Zahl genau eine Briefmarkensorte gibt. Die Post von Oddland schreibt vor: Für je zwei verschiedene Werte muss auf einem Brief die Anzahl der Marken des niedrigeren Wertes mindestens so groß sein wie die Anzahl der Marken des höheren Wertes.

   In Squareland hingegen gibt es Briefmarken mit Werten 1 Cent, 4 Cent, 9 Cent usw., wobei es für jede Quadratzahl genau eine Briefmarkensorte gibt. Marken können in Squareland beliebig ohne weitere Vorschriften kombiniert werden.

   Man beweise für jede positive ganze Zahl n: In den beiden Ländern gibt es gleich viele Möglichkeiten, einen Brief vorschriftsgemäß mit Marken im Gesamtwert von n Cent zu frankieren. Dabei macht es keinen Unterschied, wenn man dieselben Briefmarken auf einem Brief anders anordnet.

(Stephan Wagner)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 2)

30. Mai 2019

4. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit $a + b + c + 2 = abc$.

   Man beweise
$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 27.$$
   Wann gilt Gleichheit?

   (Karl Czakler)

5. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Es seien D und E die Höhenfußpunkte auf den Seiten BC bzw. AC. Auf den Strecken AD und BE liegen die Punkte F bzw. G derart, dass
$$\frac{AF}{FD} = \frac{BG}{GE}$$
   gilt. Die Gerade durch C und F schneide BE im Punkt H, und die Gerade durch C und G schneide AD im Punkt I.

   Man beweise, dass die Punkte F, G, H und I auf einem Kreis liegen.

   (Walther Janous)

6. Man bestimme die kleinstmögliche positive ganze Zahl n mit folgender Eigenschaft: Für alle positiven ganzen Zahlen x, y und z mit $x \mid y^3$ und $y \mid z^3$ und $z \mid x^3$ gilt immer auch $xyz \mid (x + y + z)^n$.

   (Gerhard J. Woeginger)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2019`

51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb

6. Juni 2020

1. Sei a eine reelle Zahl und b eine reelle Zahl mit $b \neq -1$ und $b \neq 0$. Man bestimme alle Paare (a, b), für die
$$\frac{(1+a)^2}{1+b} \leq 1 + \frac{a^2}{b}$$
erfüllt ist. Für welche Paare (a, b) gilt Gleichheit?

(Walther Janous)

2. Wie viele positive fünfstellige ganze Zahlen gibt es, für die das Produkt ihrer fünf Ziffern 900 ist?

(Karl Czakler)

3. Gegeben sei ein gleichschenkeliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $AB > CD$. Der Lotfußpunkt von D auf AB sei E. Der Halbierungspunkt der Diagonale BD sei M.

Man beweise, dass EM parallel zu AC ist.

(Karl Czakler)

4. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen a, für die die Gleichung
$$7an - 3n! = 2020$$
eine positive ganzzahlige Lösung n hat.

(*Hinweis*: Für jede positive ganze Zahl n gilt: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$.)

(Richard Henner)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene

2. April 2020

1. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen a, für die die Gleichung

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x+a}\right)=a-x$$

mindestens eine ganzzahlige Lösung für x hat.

Für jedes solche a gebe man die entsprechenden Lösungen an.

(Richard Henner)

2. Die Menge M besteht aus allen 7-stelligen positiven ganzen Zahlen, die (in Dezimalschreibweise) jede der Ziffern 1, 3, 4, 6, 7, 8 und 9 genau einmal enthalten.

   (a) Man bestimme die kleinste positive Differenz d von zwei Zahlen aus M.

   (b) Wie viele Paare (x, y) mit x und y aus M gibt es, für die $x - y = d$ gilt?

(Gerhard Kirchner)

3. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $AB < AC$. Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks sei I. Die Streckensymmetrale der Seite BC schneide die Winkelsymmetrale von $\sphericalangle BAC$ im Punkt S und die Winkelsymmetrale von $\sphericalangle CBA$ im Punkt T.

Man beweise, dass die Punkte C, I, S und T auf einem Kreis liegen.

(Karl Czakler)

4. Man bestimme alle Quadrupel (p, q, r, n) von Primzahlen p, q, r und positiven ganzen Zahlen n, für die

$$p^2 = q^2 + r^n$$

erfüllt ist.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde

21. Mai 2020

1. Seien x, y und z positive reelle Zahlen, für die $x \geq y + z$ gilt.

   Man beweise die Ungleichung

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \geq 7.$$

   Wann gilt Gleichheit?

   (Walther Janous)

2. Sei ABC ein rechtwinkeliges Dreieck mit rechtem Winkel in C und Umkreismittelpunkt U. Auf den Seiten AC und BC liegen die Punkte D bzw. E derart, dass $\sphericalangle EUD = 90°$ gilt. Seien F und G die Lotfußpunkte von D bzw. E auf AB.

   Man beweise, dass FG halb so lang wie AB ist.

   (Walther Janous)

3. Auf einer Tafel stehen drei positive ganze Zahlen. In jedem Schritt wird zuerst eine Bezeichnung der Zahlen mit a, b und c so gewählt, dass $a > \mathrm{ggT}(b, c)$ gilt, und dann wird die Zahl a durch $a - \mathrm{ggT}(b, c)$ ersetzt. Das Spiel endet, wenn es keine Bezeichnung mit der geforderten Eigenschaft gibt.

   Man zeige, dass das Spiel immer endet und dass die drei Zahlen, die am Ende auf der Tafel stehen, nur von den Anfangszahlen abhängen, jedoch nicht vom Spielablauf.

   (Theresia Eisenkölbl)

4. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen N, für die $2^N - 2N$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

   (Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 1)

20. Juni 2020

1. Sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck mit dem Diagonalenschnittpunkt S. Seien weiters P der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABS und Q der Umkreismittelpunkt des Dreiecks BCS. Die Parallele zu AD durch P und die Parallele zu CD durch Q schneiden einander im Punkt R.

   Man beweise, dass R auf BD liegt.

   (Karl Czakler)

2. In der Ebene liegen 2020 Punkte, von denen einige schwarz und die restlichen grün sind.

   Für jeden schwarzen Punkt gilt: Es gibt genau zwei grüne Punkte, die den Abstand 2020 von diesem schwarzen Punkt haben.

   Man bestimme die kleinstmögliche Anzahl von grünen Punkten.

   (Walther Janous)

3. Seien a eine feste positive ganze Zahl und (e_n) die Folge, die durch $e_0 = 1$ und

   $$e_n = a + \prod_{k=0}^{n-1} e_k$$

   für $n \geq 1$ definiert ist.

   (a) Man zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, die ein Element der Folge teilen.

   (b) Man zeige, dass es eine Primzahl gibt, die kein Element der Folge teilt.

   (Theresia Eisenkölbl)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 2)

27. Juni 2020

4. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass
$$f(xf(y)+1) = y + f(f(x)f(y))$$
für alle x, $y \in \mathbb{R}$ gilt.

(Theresia Eisenkölbl)

5. Sei h ein Halbkreis mit Durchmesser AB. Es wird ein beliebiger Punkt P im Inneren der Strecke AB gewählt. Die durch P verlaufende Normale auf AB schneide h im Punkt C. Die Strecke PC zerlegt die Halbkreisfläche in zwei Teile. In jeden davon werde jener Kreis eingeschrieben, der AB, PC und h berührt. Die Berührpunkte der beiden Kreise mit AB werden mit D und E bezeichnet, wobei D zwischen A und P liege.

   Man beweise, dass die Größe des Winkels $\sphericalangle DCE$ nicht von der Wahl von P abhängt.

(Walther Janous)

6. Die Spieler Alfred und Bertrand legen gemeinsam ein Polynom $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit dem vorgegebenen Grad $n \geq 2$ fest. Dazu wählen sie in n Zügen abwechselnd den Wert jeweils eines Koeffizienten, wobei alle Koeffizienten ganzzahlig sein müssen und $a_0 \neq 0$ gelten muss. Alfred ist im ersten Zug an der Reihe. Alfred gewinnt, wenn das Polynom am Ende eine ganzzahlige Nullstelle besitzt.

   (a) Für welche n kann Alfred den Sieg erzwingen, wenn die Koeffizienten a_j von rechts nach links, also für $j = 0, 1, \ldots, n-1$, festgelegt werden?

   (b) Für welche n kann Alfred den Sieg erzwingen, wenn die Koeffizienten a_j von links nach rechts, also für $j = n-1, n-2, \ldots, 0$, festgelegt werden?

(Theresia Eisenkölbl, Clemens Heuberger)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2020`