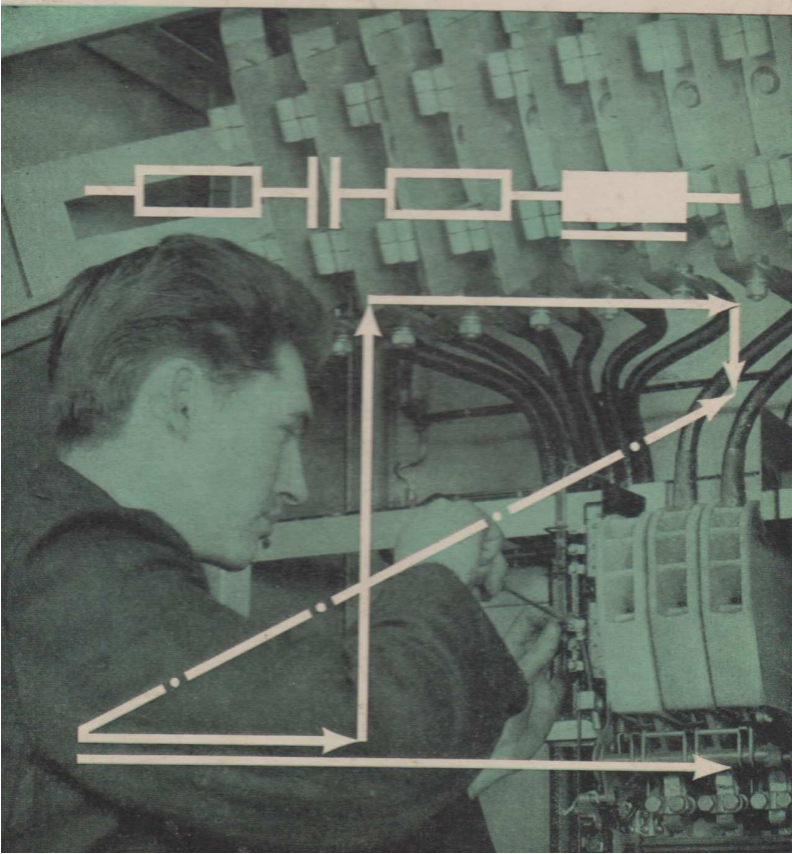


# MATHEMATIK

Ergänzungen für Berufsausbildung mit Abitur



**Mathematik · Ergänzungen für Berufsausbildung mit Abitur**

## **Lehrbücher für die Berufsausbildung**

# Mathematik

Ergänzungen für Berufsausbildung mit Abitur · Ausgabe 1963



Volk und Wissen

Volkseigener Verlag Berlin

1965

**Verfasser:**

**Prof. Dr. Wolfgang Lange**

**Kapitel 1 (unter teilweiser Verwendung eines Manuskripts von Erich Weiß),  
Kapitel 3**

**Hans Simon**

**Kapitel 2 (unter teilweiser Verwendung eines Manuskripts von Willi Barthold)**

**Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik  
als Lehrbuch für die Berufsausbildung mit Abitur bestätigt.**

**Redaktion: Siegmur Kubicek, Karlheinz Martin und Peter Pfeiffer**

**Zeichnungen: Heinz Grothmann**

**Einband: Werner Fahr**

**Redaktionsschluß: 10. September 1964**

**ES 11 G · Bestell-Nr. 00 13 33 · 2 · 4,50 MDN · Lizenz Nr. 203/1000 63 (DN)**

**Satz, Druck und Binden: B. G. Teubner, Leipzig (III-18-154)**

# 1. Komplexe Zahlen

## 1.1. Vorbemerkungen

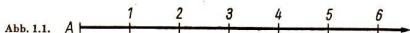
Komplexe Zahlen traten erstmalig im 16. Jahrhundert bei Problemen der Gleichungslehre auf; sie wurden zunächst nicht anerkannt und als „unmögliche Zahlen“ bezeichnet. Trotzdem versuchte man zaghaft, mit ihnen nach den herkömmlichen Regeln zu rechnen und erkannte dabei bald ihre Brauchbarkeit. Heute stellt das Rechnen mit den komplexen Zahlen ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel, z. B. in der Wechselstromtechnik und in der Strömungslehre, dar. Aus diesem Grunde wird im folgenden für die Lehrlinge der Elektroberufe das Rechnen mit komplexen Zahlen behandelt. Als Einleitung soll zunächst eine sehr vereinfachte wiederholende Übersicht über die bisher behandelten Zahlbereiche gegeben werden, damit deutlich wird, welche Stellung die komplexen Zahlen einnehmen.

Um eine Vereinfachung handelt es sich insofern, als im folgenden beispielsweise die natürlichen Zahlen einfach mit der Null und den negativen ganzen Zahlen zum Bereich der ganzen Zahlen zusammengefaßt werden, so daß dann die positiven ganzen Zahlen mit den natürlichen Zahlen identisch sind. Tatsächlich besteht aber ein begrifflicher Unterschied zwischen den natürlichen Zahlen und den positiven ganzen Zahlen; das wird beispielsweise schon daraus klar, daß man zwar sagen kann, man hat drei Gegenstände vor sich liegen („drei“ ist hier eine natürliche Zahl), während die Aussage, daß man „plus drei Gegenstände“ vor sich liegen hat, unsinnig ist („plus drei“ ist eine positive ganze Zahl).

## 1.2. Vom Bereich der natürlichen Zahlen zum Bereich der reellen Zahlen

### 1.2.1. Der Bereich der natürlichen Zahlen

Der Zahlenbegriff entwickelte sich bereits in vorgeschichtlicher Zeit zum Kennzeichnen von Mengen gleichartiger Dinge, also beim Zählen. Durch das Zählen entstand die Folge der natürlichen Zahlen:  $1; 2; 3; 4; \dots$ . Die Null gehört im allgemeinen nicht zu den natürlichen Zahlen; denn wenn nichts vorhanden ist, besteht keine Veranlassung zum Zählen. Offensichtlich gibt es eine kleinste natürliche Zahl, die Eins, aber keine größte. Von zwei (verschiedenen) natürlichen Zahlen steht stets fest, welche die größere ist. Die natürlichen Zahlen lassen sich also der Größe nach ordnen. Diese Eigenart der Folge der natürlichen Zahlen läßt das Veranschaulichen auf einem Strahl zu, indem man auf ihm von seinem Anfangspunkt  $A$  aus nach rechts die Einheitsstrecke wiederholt abträgt und die so entstehenden Punkte der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen bezeichnet (Abb. 1.1.).



Mit dem Zählen entstand durch das Zusammenfassen mehrerer Schritte das Rechnen mit den natürlichen Zahlen. Die Ergebnisse müssen selbstverständlich ebenfalls der Folge der natürlichen Zahlen angehören, sonst könnte man nicht vom Rechnen im Bereich der natürlichen Zahlen sprechen. Addieren, Multiplizieren und Potenzieren sind im Bereich der natürlichen Zahlen uneingeschränkt ausführbar; das heißt, sind  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen, so sind stets auch

$$a + b, \quad a \cdot b \quad \text{und} \quad a^b$$

natürliche Zahlen.

### ■ Beispiel 1:

Für  $a = 3$ ,  $b = 5$  erhält man

$$a + b = 3 + 5 = 8; \quad a \cdot b = 3 \cdot 5 = 15; \quad a^b = 3^5 = 243.$$

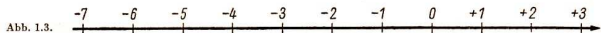
Die Umkehrungen dieser Rechenoperationen, also das Subtrahieren, das Dividieren, das Radizieren und das Logarithmieren, sind dagegen nur in speziellen Fällen im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar. So ist  $5 - 3 = 2$ ;  $15 : 3 = 5$ ;  $\sqrt[3]{64} = 4$ ;  $\log_2 1024 = 10$ .

## 1.2.2. Der Bereich der ganzen Zahlen

Das Bilden der Differenz  $a - b$  für den Fall, daß  $a = b$  ist, erfordert das Einführen der Zahl 0. Wir erhalten so die Zahlenfolge  $0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots$ , die durch den bei 0 beginnenden Zahlenstrahl veranschaulicht werden kann (Abb. 1.2.). Für diese Zahlenfolge ist das Bilden der Differenz  $a - b$  mit  $a = b$  möglich und ergibt die Zahl 0. Das



Erweitern des Zahlenbereichs besteht also in dem Einführen der Zahl 0, der der „Nullpunkt“ am Anfang  $A$  des Zahlenstrahls entspricht. Um das Subtrahieren auch für den Fall zu ermöglichen, daß der Subtrahend größer als der Minuend ist, wird die Einheitsstrecke vom Nullpunkt aus nach links auf dem verlängerten Zahlenstrahl wiederholt abgetragen; dann werden die mit dem Vorzeichen „-“ versehenen negativen ganzen Zahlen  $-1; -2; -3; \dots$  eingeführt und den neu entstandenen Punkten der Reihe nach zugeordnet (Abb. 1.3.). Zur Unterscheidung versteht man nun die natürlichen



Zahlen mit dem Vorzeichen „+“ und nennt sie jetzt positive ganze Zahlen. Die beiderseitig unbegrenzte Folge stellt den Bereich der ganzen Zahlen dar, wobei festgesetzt wird, daß jede Zahl größer als die auf der Zahlengeraden links vor ihr stehenden ist,  $-6 < -5$ ;  $-7 < -5$ ;  $-3 < 0$ . Offensichtlich gibt es keine kleinste und keine größte ganze Zahl.

Im Bereich der ganzen Zahlen ist außer dem Addieren, Multiplizieren und Potenzieren mit positiv ganzzahligem Exponenten auch das Subtrahieren ohne Einschränkung ausführbar.

**Beispiel 2:**

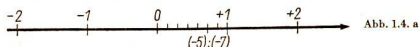
$$\begin{array}{lll}
 (+5) + (+8) = +13 & (+5) - (+8) = -3 & (+5) \cdot (+8) = +40 \\
 (+5) + (-8) = -3 & (+5) - (-8) = +13 & (+5) \cdot (-8) = -40 \\
 (-5) + (+8) = +3 & (-5) - (+8) = -13 & (-5) \cdot (+8) = -40 \\
 (-5) + (-8) = -13 & (-5) - (-8) = +3 & (-5) \cdot (-8) = +40
 \end{array}$$

Der Quotient  $a : b$  mit den ganzen Zahlen  $a$  und  $b$  dagegen stellt nur dann wiederum eine ganze Zahl dar, wenn  $b$  als Faktor in  $a$  enthalten ist, d. h. wenn es eine ganze Zahl  $c$  gibt, so daß  $b \cdot c = a$  ist. Das ist z. B. für  $a = 91$  und  $b = 7$  der Fall, weil  $7 \cdot 13 = 91$  ist, desgleichen für  $a = -12$ ,  $b = -4$ , weil  $(-4) \cdot 3 = -12$  ist.

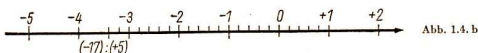
**1.2.3. Der Bereich der rationalen Zahlen**

Das Bilden des Quotienten  $a : b$  mit den ganzen Zahlen  $a$  und  $b$  für den Fall, daß  $a$  nicht den Faktor  $b$  enthält, erfordert wiederum eine Erweiterung des Zahlenbereichs, das Einführen der vorzeichenbehafteten Brüche.

Jedem Quotienten  $a : b$ , bei dem  $b$  nicht als Faktor in  $a$  enthalten ist, kann, wenn  $b \neq 0$  ist, trotzdem ein Punkt der Zahlengeraden zugeordnet werden. Man teilt die Einheitsstrecke in  $|b|$  gleiche Teile und trägt vom Nullpunkt aus  $|a|$  solche Teile nach rechts oder links ab, je nachdem, ob Dividend und Divisor gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben. So findet man z. B. den Punkt, der dem Quotienten  $(-5) : (-7)$  zugeordnet ist, indem man die Einheitsstrecke in  $| -7 | = 7$  gleiche Teile teilt und vom Nullpunkt aus  $| -5 | = 5$  solche Teile nach rechts abträgt (Abb. 1.4.a). Den Punkt,

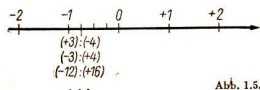


der dem Quotienten  $(-17) : (+5)$  entspricht, findet man, wenn man die Einheitsstrecke in  $| +5 | = 5$  gleiche Teile teilt und vom Nullpunkt aus  $| -17 | = 17$  solche Teile nach links abträgt (Abb. 1.4. b). Auf diese Weise wird z. B. den Quotienten  $(+3) : (-4)$ ,



$(-3) : (+4)$ ,  $(-12) : (+16)$  ein und derselbe Punkt der Zahlengeraden zugeordnet (Abb. 1.5.). Nun wird festgesetzt, daß diese demselben Punkt zugeordneten Quotienten eine gebrochene Zahl darstellen, die man einfach durch  $-\frac{3}{4}$  oder  $-0,75$  bezeichnet.

In entsprechender Weise kommen z. B. die gebrochenen Zahlen  $-\frac{16}{3} = -5.\bar{3}$  und  $\frac{36}{25} = 1,44$  zustande. Die gebrochenen Zahlen bilden zusammen mit den ganzen Zahlen den Bereich der rationalen Zahlen. Behält man die Regel bei, daß jede Zahl größer





ist als alle, deren zugeordnete Punkte auf der Zahlengeraden weiter links liegen, so steht von zwei rationalen Zahlen stets fest, welche die größere ist. Zwischen zwei beliebig dicht beieinanderliegenden rationalen Zahlen kann man noch beliebig viele weitere rationale Zahlen angeben; z. B.: Zwischen 1,44 und 1,45 liegen 1,441; 1,442; 1,443; ...; 1,449; zwischen 1,442 und 1,443 liegen 1,4421; 1,4422; ...; 1,4429 usw. Diesen Sachverhalt beschreibt man durch die Formulierung:

Die rationalen Zahlen liegen überall dicht.

Im Bereich der rationalen Zahlen ist nun auch die Division mit Ausnahme der Division durch Null uneingeschränkt ausführbar. Dagegen sind die inversen Rechenoperationen der dritten Stufe, das Radizieren und das Logarithmieren, nur in speziellen Fällen im Bereich der rationalen Zahlen ausführbar, auch wenn der Wurzelradikand nicht negativ sowie Basis und Numerus des Logarithmus positiv sind (was laut Definition in jedem Falle erfüllt sein muß): Die Wurzel  $\sqrt[n]{b}$  kann nur dann eine rationale Zahl darstellen, wenn  $b$  die  $n$ -te Potenz einer rationalen Zahl ist, d. h. wenn es eine rationale Zahl  $a$  gibt, so daß  $a^n = b$  ist; das ist z. B. der Fall bei  $b = \frac{81}{16}$ ,  $n = 4$ , weil  $(\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16}$  ist. Der Logarithmus  $\log_a b$  ist nur dann gleich einer rationalen Zahl, wenn  $b$  eine Potenz von  $a$  ist, d. h., wenn es eine rationale Zahl  $c$  gibt, so daß  $a^c = b$  ist; das ist z. B. der Fall bei  $\log_{1,69} 2,197 = \frac{3}{2}$ , weil  $1,69^{\frac{3}{2}} = 2,197$  ist.

#### 1.2.4. Der Bereich der reellen Zahlen

Die Symbole  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt{3}$  z. B. bedeuten dagegen keine rationalen Zahlen. Das Bilden der Wurzel und des Logarithmus erfordert im allgemeinen eine nochmalige Erweiterung des Zahlenbereichs durch Einführen der irrationalen Zahlen  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\log_2 3$  usw. Die irrationalen Zahlen werden zwischen die rationalen eingeordnet; sie können mit beliebiger Genauigkeit durch rationale Zahlen angenähert werden. Um z. B.  $\sqrt[3]{2}$  durch zwei rationale Näherungswerte  $a_1$  und  $a_2$  einzuschachteln,

$$a_1 < \sqrt[3]{2} < a_2,$$

muß

$$a_1^3 < 2 < a_2^3$$

sein. Daraus findet man

$$1,2 < \sqrt[3]{2} < 1,3, \quad \text{weil } 1,2^3 = 1,728 < 2 < 1,3^3 = 2,197 \text{ ist,}$$

dann

$$1,25 < \sqrt[3]{2} < 1,26, \quad \text{weil } 1,25^3 \approx 1,953 < 2 < 1,26^3 \approx 2,0004 \text{ ist}$$

usf. Wie für  $\sqrt[3]{2}$  lassen sich irrationale Zahlen stets durch beliebig nahe kommende rationale Werte annähern.

● *Geben Sie in dieser Weise eine Schachtelung für  $\sqrt[3]{3}$  bis auf Tausendstel an!*

Das numerische Rechnen mit irrationalen Zahlen wird durch das Rechnen mit den rationalen Näherungswerten ausgeführt. Die irrationalen Zahlen bilden zusammen mit den rationalen den Bereich der reellen Zahlen.

Obwohl zwischen zwei noch so dicht beieinanderliegenden rationalen Zahlen beliebig viele weitere rationale Zahlen angegeben werden können, haben zwischen den rationalen Zahlen noch unzählig viele irrationale Zahlen Platz. Auf der Zahlengeraden liegen also zwischen den Punkten, die den rationalen Zahlen zugeordnet sind, noch die Punkte, die den irrationalen Zahlen entsprechen. Nach dem Einordnen der irrationalen Zahlen veranschaulicht die Zahlengerade den Bereich der reellen Zahlen. Nunmehr ist jedem Punkt der Zahlengeraden eine Zahl, und zwar eine reelle Zahl, zugeordnet. Von zwei reellen Zahlen steht stets fest, welche von ihnen die größere ist. Die reellen Zahlen sind also der Größe nach geordnet.

Im Bereich der reellen Zahlen ist nun auch das Logarithmieren (Basis und Numerus als positiv vorausgesetzt) stets ausführbar, desgleichen das Radizieren, wenn der Radikand nicht negativ ist. Die Gleichungen  $x^2 = a$  und  $x^{2n} = a$  z. B. haben daher bei nicht negativem  $a$  reelle Zahlen als Lösungen.

**Beispiel 3:**

$$x^2 = 2 \text{ hat die Lösungen } x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2};$$

$$x^4 = 81 \text{ hat die Lösungen } x_1 = 3, x_2 = -3;$$

$$x^6 = 0 \text{ hat die Lösung } x = 0.$$

## 1.3. Der Bereich der komplexen Zahlen

### 1.3.1. Imaginäre Zahlen

Die Gleichungen  $x^2 = -a$  ( $a > 0$ ) und  $x^2 + px + q = 0$  ( $p^2 - 4q < 0$ ) z. B. haben im Bereich der reellen Zahlen keine Lösungen. Um diese Einschränkung zu beseitigen ist wieder eine Erweiterung des Zahlenbereichs notwendig.

Um z. B.

$$x^2 = -a \quad (a > 0)$$

lösen zu können, definiert man durch  $-1 = j^2 = j \cdot j$  eine neue Zahl  $j$ . Dann kann man

$$x^2 = -a \quad (a > 0)$$

auch als

$$x^2 = j^2 a$$

mit den Lösungen

$$x_1 = j \sqrt{a} \text{ und } x_2 = -j \sqrt{a}$$

schreiben.

Durch Quadrieren von  $x_1$  und  $x_2$  erhält man wieder  $-a$ , wenn man  $j$  wie ein allgemeines Zahlensymbol behandelt und bedenkt, daß  $j^2 = -1$  ist;  $x_1$  und  $x_2$  sind dann also Lösungen der vorgelegten Gleichung. Man nennt  $j$  die imaginäre Einheit und die Zahlen  $ja, jb, 2j, -3j, \pi j$  usw., die als Produkt der imaginären Einheit mit einer beliebigen reellen Zahl ( $a, b, 2, -3, \pi$  usw.) dargestellt werden, imaginäre Zahlen.

Man bezeichnet die Zahl  $j$ , für die  $j^2 = -1$  gilt, als imaginäre Einheit.

Eine imaginäre Zahl hat die Form  $a \cdot j$ . Der Faktor  $a$  bedeutet eine beliebige reelle Zahl.

Für die imaginäre Einheit benutzt man in der Mathematik das Symbol  $i$ , bei den Anwendungen in der Elektrotechnik dagegen die Bezeichnung  $j$ , um Verwechslungen mit  $i$  als Symbol für die Stromstärke zu vermeiden. Auch im folgenden wird  $j$  als Symbol der imaginären Einheit benutzt, weil die Behandlung dieses Stoffgebiets vor allem wegen der Anwendungen in der Elektrotechnik erfolgt.

Bis zum Beginn der Neuzeit wurden Lösungen von Aufgaben wie  $x^2 = -2$  für unmöglich, unwirklich oder eingebildet gehalten. Daraus ist auch die heute noch gebräuchliche Bezeichnung „imaginäre Zahlen“ für derartige Lösungen entstanden („imaginär“, d. h. nur in der Einbildung bestehend). Dennoch begann man vorsichtig mit ihnen in der gleichen Weise wie mit reellen Zahlen zu rechnen, wobei sich ihre Brauchbarkeit erwies. Heute sind die imaginären Zahlen zusammen mit den aus ihnen entwickelten komplexen Zahlen zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel der Mathematik und ihrer Anwendungsgebiete geworden; ihr Wesen wurde einwandfrei geklärt.

### Aufgaben

1. Die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  folgender Gleichungen sind anzugeben. Führen Sie die Probe durch!

a)  $x^2 = -25$

b)  $x^2 + 11 = 0$

c)  $x^2 = -121$

d)  $x^2 = -\frac{4}{9}$

e)  $x^2 + 1\frac{13}{36} = 0$

f)  $x^2 = -4\frac{4}{9}$

g)  $x^2 = -81a^2$

h)  $x^2 = -225a^2b$  ( $b > 0$ )

2. Welche Zahlen  $x$  genügen den folgenden Gleichungen?

a)  $x^2 + 100 = 0$

b)  $x^2 + 17 = 0$

c)  $x^2 + 0,1 = 0$

d)  $x^2 + \frac{9}{7} = 0$

3. Bilden Sie die Folge  $j, j^2, j^3, j^4, j^5, \dots$ , und suchen Sie nach einer Gesetzmäßigkeit!

### 1.3.2. Komplexe Zahlen in allgemeiner Form

Erweitert man den Bereich der reellen Zahlen durch die imaginären Zahlen, so erhält man den Bereich der komplexen Zahlen  $\tilde{z} = a + bj$ , wobei  $a$  und  $b$  reelle Zahlen und  $j$  die imaginäre Einheit bedeuten. Eine quadratische Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  ( $p^2 - 4q < 0$ ), die im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung hat, besitzt Lösungen im Bereich der komplexen Zahlen.

#### Beispiel 4:

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \quad [(-4)^2 - 4 \cdot 13 < 0];$$

$$x^2 - 4x = -13$$

$$x^2 - 4x + 2^2 = -13 + 4$$

$$(x - 2)^2 = -9$$

Nun müßte radiziert werden, und da rechts eine negative Zahl steht, ersetzt man vorher  $-1$  durch  $j^2$ :

$$(x - 2)^2 = 9j^2$$

$$x_1 - 2 = 3j$$

$$x_2 - 2 = -3j,$$

$$\text{also } x_1 = 2 + 3j \text{ und } x_2 = 2 - 3j.$$

Man macht die Probe, indem man z. B.  $x_1$  in die quadratische Gleichung einsetzt und  $j$  dabei wie ein allgemeines Zahlensymbol behandelt. Bedenkt man, daß  $j^2 = -1$  ist, so ergibt sich  $(2 + 3j)^2 - 4(2 + 3j) + 13 = 4 + 12j + 9j^2 - 8 - 12j + 13 = 0$ . Die komplexe Zahl  $x_1$  erfüllt also die quadratische Gleichung.

● *Machen Sie die Probe mit  $x_2$ !*

Der Bereich der komplexen Zahlen  $z = a + bj$  enthält für  $b = 0$  die reellen, für  $a = 0$  die imaginären Zahlen;  $a$  heißt **Realteil**,  $b$  **Imaginärteil** der komplexen Zahl  $a + bj$ .

Bei zwei komplexen Zahlen ist es sinnlos zu fragen, welche von ihnen die größere ist; hier liegt also ein wesentlicher Unterschied gegenüber den natürlichen, den ganzen, den rationalen und den reellen Zahlen vor.

▶ **Zwei komplexe Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden, werden als zueinander konjugiert komplex bezeichnet.**

■ **Beispiele:**

$$3 + 4j, 3 - 4j; \quad -5 + 2j, -5 - 2j; \quad \text{allgemein: } a + bj, a - bj.$$

▶ **Zwei komplexe Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen des Realteils und des Imaginärteils voneinander unterscheiden, heißen einander entgegengesetzt.**

■ **Beispiele:**

$$3 + 4j, -3 - 4j; \quad -5 + 2j, 5 - 2j; \quad a + bj, -a - bj.$$

Naheliegend sind folgende Festsetzungen:

1. Zwei komplexe Zahlen  $a + bj$  und  $c + dj$  sind einander gleich, wenn sie in Real- und Imaginärteil übereinstimmen, d. h. wenn  $a = c$  und  $b = d$  ist.
2. Die vier Grundrechenoperationen mit komplexen Zahlen werden nach den für das Rechnen mit reellen Zahlen gültigen Regeln ausgeführt;  $j$  wird dabei wie ein allgemeines Zahlensymbol behandelt, und ein eventuell auftretendes  $j^2 = j \cdot j$  wird durch  $-1$  ersetzt.

Aus diesen Festsetzungen ergeben sich folgende Regeln für die vier Grundrechenoperationen.

*Addition*

$$(1) \quad (a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j$$

Die Summe zweier komplexer Zahlen ist ebenfalls eine komplexe Zahl. Der Realteil der Summe ist gleich der Summe der Realteile der Summanden, der Imaginärteil der Summe ist gleich der Summe der Imaginärteile der Summanden.

■ **Beispiele:**

$$(4 + 3j) + (1 + 5j) = 5 + 8j; \quad (2 - 7j) + (-1 + 6j) = 1 - j;$$

$(a + bj) + (a - bj) = 2a$ , d. h., die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen ist eine reelle Zahl, ein Sonderfall der komplexen Zahl.

● *Welche Zahl muß zu  $a + bj$  addiert werden, damit sich als Summe die imaginäre Zahl  $2bj$  ergibt? Welche Zahl muß zu  $a + bj$  addiert werden, damit sich Null ergibt?*

### Subtraktion

$$(2) \quad (a + bj) - (c + dj) = (a - c) + (b - d)j$$

Die Differenz zweier komplexer Zahlen ist ebenfalls eine komplexe Zahl.

● Formulieren Sie die Regel für das Bilden der Differenz!

#### Beispiele:

$$(4 + 3j) - (1 + 5j) = 3 - 2j; (2 - 7j) - (-1 + 6j) = 3 - 13j.$$

● Welche Zahl muß von  $(a + bj)$  subtrahiert werden, damit sich als Differenz

a) die reelle Zahl  $2a$ ,

b) die imaginäre Zahl  $2bj$  ergibt?

● Zeigen Sie die Richtigkeit des folgenden Satzes!

Statt die Zahl  $\delta_2 = c + dj$  zu subtrahieren, kann man auch die zu  $\delta_2$  entgegengesetzte Zahl  $-\delta_2 = -c - dj$  addieren:

$$\delta_1 - \delta_2 = \delta_1 + (-\delta_2).$$

### Multiplikation

$$(a + bj) \cdot (c + dj) = ac + adj + bcj + bdj^2 = (ac - bd) + (ad + bc)j;$$

$$(3) \quad (a + bj) \cdot (c + dj) = (ac - bd) + (ad + bc)j$$

Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist ebenfalls eine komplexe Zahl.

● Formulieren Sie die Regel, nach der das Produkt aus den Faktoren gebildet wird!

#### Beispiele:

$$(4 + 3j) \cdot (1 + 5j) = -11 + 23j; (2 - 7j) \cdot (-1 + 6j) = 40 + 19j;$$

$(a + bj) \cdot (a - bj) = a^2 + b^2$ , d.h., das Produkt konjugiert komplexer Zahlen ist eine reelle Zahl.

### Division

Man erweitert den Quotienten mit der zum Divisor konjugiert komplexen Zahl, weil dann ein reeller Divisor entsteht:

$$\frac{a + bj}{c + dj} = \frac{(a + bj)(c - dj)}{(c + dj)(c - dj)} = \frac{ac - adj + bcj + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j$$
$$(4) \quad \frac{a + bj}{c + dj} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j \quad (c \text{ und } d \text{ nicht gleichzeitig Null}).$$

Der Quotient komplexer Zahlen ist also ebenfalls eine komplexe Zahl.

#### Beispiele:

$$\frac{4 + 3j}{1 - 5j} = \frac{19}{26} - \frac{17}{26}j, \quad \frac{2 - 7j}{-1 + 6j} = -\frac{44}{37} - \frac{5}{37}j.$$

In den folgenden Abschnitten werden zwei weitere Darstellungsmöglichkeiten für komplexe Zahlen behandelt, durch die sich die Regeln für die Multiplikation und Division vereinfachen.

## Aufgaben

Ermitteln Sie folgende Differenzen und Summen komplexer Zahlen!

1. a)  $(3 + 5j) + (2 + 3j)$     b)  $(5 - 3j) + (3 + 7j)$     c)  $(-3 + 2j) + (6 - 5j)$   
d)  $(7 - j) + (-2 - 3j)$     e)  $(3 + 5j) - (2 + 3j)$     f)  $(5 - 3j) - (3 + 7j)$   
g)  $(-3 + 2j) - (6 - 5j)$     h)  $(7 + j) - (-2 - 3j)$
2. a)  $(a + bj) + (a - bj)$     b)  $(a + bj) - (a - bj)$     c)  $(\frac{3}{7} + \frac{1}{2}j) + (\frac{3}{7} - \frac{1}{2}j)$   
d)  $(\frac{3}{7} + \frac{1}{2}j) - (\frac{3}{7} - \frac{1}{2}j)$     e)  $(0,85 + 15j) + (0,58 - 0,42j) - (0,43 - j)$   
f)  $(2,3a - 1,3bj) - (3,5a + 3,5bj) + (6,8a - 0,8bj)$
3. a)  $(5x + 5j) - (7x - 4j) + (2x - j) - (3x + 6j)$   
b)  $(15y - j) - (8y - 7j) - (y + 3j) + (-6y + 5j)$   
c)  $(6a + 5bj) - (-3a - 4bj) + (17a - 8bj) + (-a + 5bj)$

Ermitteln Sie die Produkte und Quotienten folgender komplexer Zahlen!

4. a)  $(2 - 7j) \cdot (6 + j)$     b)  $(5 + 7j) \cdot (8 - 3j)$     c)  $(-4 - 5j) \cdot (3 - 2j)$   
d)  $(-9 + 7j) \cdot (-10 - 11j)$     e)  $(13 + 5j) \cdot (2 - j)$     f)  $(0,9 - 0,2j) \cdot (1,2 - 3j)$
5. a)  $\frac{5 + 6j}{3 + 4j}$     b)  $\frac{3 - 2j}{5 + 4j}$     c)  $\frac{1 + 7j}{8 - j}$     d)  $\frac{2 - 3j}{3 - 4j}$   
e)  $\frac{3 + 2j}{3 - 4j} + \frac{2 + 3j}{4 + 3j}$     f)  $\frac{5 - 4j}{2 + 3j} - \frac{4 - 5j}{3 - 2j}$
6. a)  $\frac{13j}{4 - 5j}$     b)  $\frac{25j}{3 + 4j}$     c)  $\frac{13}{3 - 2j}$     d)  $\frac{1}{1 + 2j}$   
e)  $\frac{1}{1 - 5j}$     f)  $\frac{1}{6 - 7j}$     g)  $\frac{1}{a + bj}$     h)  $\frac{1}{a - bj}$

### 1.3.3. Die GAUSSSCHE Zahlenebene

Jeder komplexen Zahl  $\tilde{z} = a + bj$  kann der Punkt  $P(a; b)$  der Koordinatenebene zugeordnet werden, und umgekehrt läßt sich jedem Punkt  $P(a; b)$  die komplexe Zahl  $\tilde{z} = a + bj$  zuordnen (Abb. 1.6.).

Die reellen Zahlen, die für  $b = 0$  im Bereich der komplexen Zahlen  $a + bj$  enthalten sind, werden durch die Punkte der Abszissenachse veranschaulicht, die hier deshalb **reelle Achse** genannt wird. Die imaginären Zahlen ( $a = 0$ ) werden durch die Punkte der Ordinatenachse veranschaulicht, die man hier deshalb **imaginäre Achse** nennt. Die Ebene, in der die komplexen Zahlen veranschaulicht werden, nennt man zu Ehren des großen deutschen Mathematikers CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855), der viel zur begrifflichen Klärung der komplexen Zahlen beigetragen hat, **GAUSSSCHE Zahlenebene**.

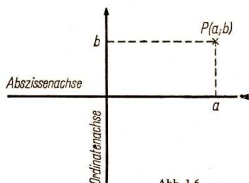


Abb. 1.6.

■ **Beispiel 5:**

Der Zahl

$\mathfrak{z}_1 = 3 + 5j$  entspricht der Punkt  
 $P_1(3; 5)$ ;

$\mathfrak{z}_2 = 7 - 8j$  entspricht der Punkt  
 $P_2(7; -8)$ ;

$\mathfrak{z}_3 = -2 + j$  entspricht der Punkt  
 $P_3(-2; 1)$ ;

$\mathfrak{z}_4 = -1 - 2j$  entspricht der Punkt  
 $P_4(-1; -2)$  (Abb. 1.7).

Dem Ursprung  $O$  des Koordinatensystems ist die Zahl  $0 + 0j = 0$  zugeordnet. Der Punkt  $P(a; b)$  kann somit zur Veranschaulichung der komplexen Zahl  $\mathfrak{z} = a + bj$  dienen. Statt durch  $P(a; b)$  kann man den Punkt, der die Zahl  $\mathfrak{z} = a + bj$  veranschaulicht, geradezu mit  $\mathfrak{z} = a + bj$  bezeichnen (Abb. 1.8.); davon soll hier künftig Gebrauch gemacht werden.

■ **Beispiel 6:**

Den Punkt  $P_1(3; 5)$   
 bezeichnet man mit  $\mathfrak{z}_1 = 3 + 5j$ ,

den Punkt  $P_2(7; -8)$   
 bezeichnet man mit  $\mathfrak{z}_2 = 7 - 8j$ ,

den Punkt  $P_3(-2; 1)$   
 bezeichnet man mit  $\mathfrak{z}_3 = -2 + j$ ,

den Punkt  $P_4(-1; -2)$   
 bezeichnet man mit  $\mathfrak{z}_4 = -1 - 2j$

(Abb. 1.9).

● *Veranschaulichen Sie die Zahlen  $3 + 4j$ ;  
 $-2 + 7j$ ;  $1,3 - 6,2j$ ;  $-4,8 - 2,6j$   
 in der GAUSSSchen Zahlenebene!*

Statt  $P(a; b)$  kann auch der Pfeil, der vom Ursprung  $O$  zu diesem Punkt reicht, die Zahl  $a + bj$  veranschaulichen (Abb. 1.10.). Dieser Pfeil wird Zeiger genannt und ebenfalls mit  $\mathfrak{z} = a + bj$  bezeichnet. Nach dem Satz des Pythagoras ist die Länge des Zeigers gleich  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Die reelle Zahl  $\sqrt{a^2 + b^2}$  nennt man den **Betrag** oder auch den **Modul** der komplexen Zahl  $\mathfrak{z} = a + bj$ . Man bezeichnet den Betrag mit  $z = |\mathfrak{z}| = |a + bj|$ :

$$(5) \quad |\mathfrak{z}| = z = |a + bj| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

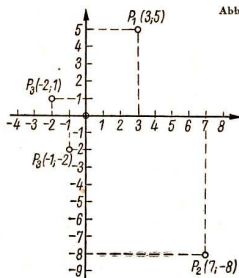


Abb. 1.7

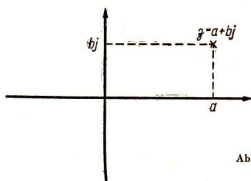


Abb. 1.8.

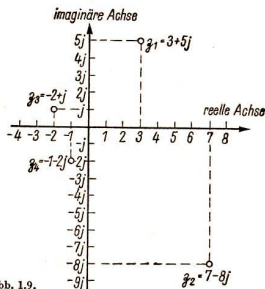


Abb. 1.9.

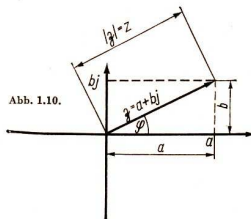


Abb. 1.10.

Für  $b = 0$ , im Falle einer reellen Zahl also, ist der Betrag  $\sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$  und stimmt mit dem im Bereich der reellen Zahlen erklärten Betrag der reellen Zahl  $a$  überein. Gleiche Beträge haben die komplexen Zahlen, deren zugeordnete Punkte gleiche Entfernung vom Schnittpunkt  $O$  der beiden Achsen haben. Der Winkel  $\varphi$ , den der Zeiger mit der positiven reellen Achse bildet, wird **Phase** oder auch **Argument** der betreffenden komplexen Zahl genannt. Die Phase  $\varphi$  ermittelt man aus den Beziehungen

$$(6) \quad \sin \varphi = \frac{b}{z} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{z} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

oder aus  $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ . Benutzt man den Tangens, so muß man der Anschauung (GAUSSsche Zahlenebene) entnehmen, welcher der beiden möglichen Winkel, die sich um  $180^\circ$  unterscheiden, der richtige ist.

### Beispiel 7:

Betrag und Phase der komplexen Zahl  $\hat{z}_1 = 2 + 3j$  sollen berechnet werden.

$$|\hat{z}_1| = z_1 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13};$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{2}{\sqrt{13}}; \quad \text{daraus folgt } \varphi_1 \approx 56,3^\circ.$$

Der zugehörige Zeiger ist in Abbildung 1.11. dargestellt.

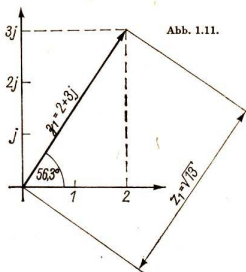
### Beispiel 8:

$$\hat{z}_2 = 1 - 2j.$$

$$|\hat{z}_2| = z_2 = \sqrt{1^2 + 4} = \sqrt{5};$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{-2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \text{daraus folgt } \varphi_2 \approx 296,6^\circ.$$

Zeichnen Sie den zugehörigen Zeiger in die GAUSSsche Zahlenebene ein!



### Aufgaben

1. Geben Sie zu den folgenden komplexen Zahlen die entsprechenden Punkte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  der GAUSSschen Zahlenebene an!

Zeichnen Sie die Zeiger!

a)  $\hat{z}_1 = 3 + 4j$

b)  $\hat{z}_2 = 4 - 3j$

c)  $\hat{z}_3 = -2 + 3j$

d)  $\hat{z}_4 = -3 - 2j$

2. Für die Zahlen der Aufgabe 1 sind der Betrag  $z$  und die Phase  $\varphi$  zu berechnen.

3. Wie groß sind der Betrag und die Phase der komplexen Zahl  $a + bj$  für  $a = b$ ?

4. a) Wie groß sind die Beträge und die Phasenwinkel der konjugiert komplexen Zahlen  $5 + 12j$  und  $5 - 12j$ ?

b) Verallgemeinern Sie das Ergebnis von a) für alle konjugiert komplexen Zahlen!

5. Welcher Zahl ist der Zeiger zugeordnet, der durch Spiegelung folgender Zeiger am Ursprung entsteht?

a)  $\hat{z}_1 = 3 - 4j$

b)  $\hat{z}_2 = a + bj$



### 1.3.4. Veranschaulichung von Addition und Subtraktion in der GAUSSSchen Zahlenebene

Werden die komplexen Zahlen  $\delta_1 = a_1 + b_1j$  und  $\delta_2 = a_2 + b_2j$  durch ihre Zeiger dargestellt (Abb. 1.12.), so läßt sich die Summe  $\delta_1 + \delta_2$  finden, indem man die von den beiden Zeigern  $\delta_1$  und  $\delta_2$  gebildete Figur zu einem Parallelogramm ergänzt; denn der neu

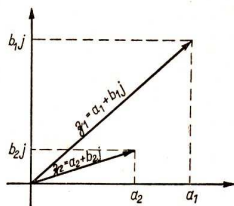


Abb. 1.12.

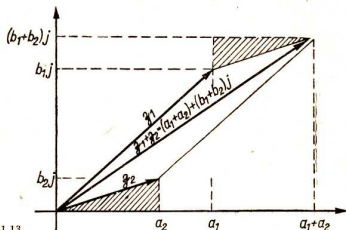


Abb. 1.13.

gefundene Parallelogrammpunkt oder der Zeiger zu diesem Punkt gibt wegen der Kongruenz der schraffierten Dreiecke die Summe  $\delta_1 + \delta_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j$  an (Abb. 1.13.).

In 1.3.2. wurde gezeigt, daß  $\delta_1 - \delta_2 = \delta_1 + (-\delta_2)$  gilt, wobei  $-\delta_2$  die zu  $\delta_2$  entgegengesetzte Zahl ist. In 1.3.3. (Aufg. 5) wurde gefunden, daß sich der Zeiger  $-\delta_2$  durch Spiegeln des Zeigers  $\delta_2$  am Ursprung ergibt. Auf Grund dieses Sachverhalts findet man den Zeiger  $\delta_1 - \delta_2$ , indem man die Zeiger  $\delta_1$  und  $-\delta_2$  zum Parallelogramm zusammensetzt (Abb. 1.14.).

#### Aufgaben

Ermitteln Sie die Summen und Differenzen der komplexen Zahlen aus den Aufgaben 1 und 2 von Seite 13 auf grafischem Wege!

### 1.3.5. Komplexe Zahlen in goniometrischer Form

Der Betrag  $z$  und die Phase  $\varphi$  der komplexen Zahl  $\delta = a + bj$  werden nach Abbildung 1.10. aus den Beziehungen

$$(5) \quad z = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$(6) \quad \sin \varphi = \frac{b}{z}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{z}$$

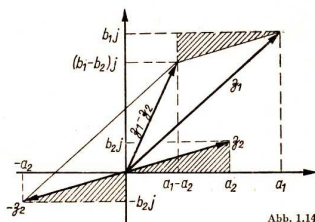


Abb. 1.14.

ermittelt. Stellt man die beiden letzten Formeln nach  $b$  bzw.  $a$  um, so erhält man

$$b = z \sin \varphi, \quad a = z \cos \varphi.$$

Setzt man das in die allgemeine Form  $\tilde{z} = a + bj$  ein, so erhält man die **goniometrische Form der komplexen Zahl**:  $\tilde{z} = z \cos \varphi + jz \sin \varphi$  bzw.

$$(7) \quad \tilde{z} = z(\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

#### Beispiel 9:

Die komplexe Zahl  $\tilde{z}_1 = 2 + 3j$  soll in die goniometrische Form umgeschrieben werden. Wie bereits ermittelt wurde, ist  $z_1 = \sqrt{13}$ ,  $\varphi_1 = 56,3^\circ$ . Dann lautet die goniometrische Form

$$\tilde{z}_1 = \sqrt{13} (\cos 56,3^\circ + j \sin 56,3^\circ).$$

Wird die Phase im Bogenmaß angegeben, so ist  $\varphi_1 = 0,983$ , und damit lautet die goniometrische Form

$$\tilde{z}_1 = \sqrt{13} (\cos 0,983 + j \sin 0,983).$$

#### Beispiel 10:

$\tilde{z}_2 = 1 - 2j$ . Es ist  $z_2 = \sqrt{5}$ ,  $\varphi_2 = 296,6^\circ$ , im Bogenmaß 5,177. Die goniometrische Form lautet dann

$$\tilde{z}_2 = \sqrt{5} (\cos 296,6^\circ + j \sin 296,6^\circ)$$

oder

$$\tilde{z}_2 = \sqrt{5} (\cos 5,177 + j \sin 5,177).$$

*Probe: Bestimmen Sie die Funktionswerte des Kosinus und des Sinus, und lösen Sie die Klammer auf! Dann muß wieder die allgemeine Form der komplexen Zahl entstehen.*

### Aufgaben

1. Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in goniometrischer Form!

a)  $3 + 4j$       b)  $4 - 3j$       c)  $-6 + 2j$       d)  $-1 - 4j$

e)  $1,2 + 2,7j$       f)  $\frac{4}{3} - \frac{5}{3}j$       g)  $-\frac{1}{3} + 2,6j$

2. Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in allgemeiner Form!

a)  $3(\cos 12,8^\circ + j \sin 12,8^\circ)$       b)  $\sqrt{2}(\cos 1,2 + j \sin 1,2)$

c)  $(\cos 315^\circ + j \sin 315^\circ)$       d)  $14 \left( \cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right)$

### 1.3.6. Multiplikation und Division komplexer Zahlen in der goniometrischen Form

#### Multiplikation

Die Berechnung des Produkts  $\tilde{z}_1 \cdot \tilde{z}_2$  der in goniometrischer Form vorliegenden komplexen Zahlen

$$\tilde{z}_1 = z_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) \text{ und } \tilde{z}_2 = z_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$$

ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 \cdot \tilde{z}_2 &= z_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) \cdot z_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) \\ &= z_1 z_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + j \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + j \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2). \end{aligned}$$

Später wird gezeigt werden, daß die „Additionstheoreme“

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos (\varphi_1 + \varphi_2)$$

und

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin (\varphi_1 + \varphi_2)$$

gelten.

● Prüfen Sie die Formeln nach, indem Sie

a)  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $\varphi_2 = 30^\circ$ ;

b)  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $\varphi_2 = 60^\circ$

setzen!

Mit Hilfe der beiden Formeln ergibt sich:

$$\hat{z}_1 \cdot \hat{z}_2 = z_1 z_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin (\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Ist  $\hat{z}_1 = z_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$  und  $\hat{z}_2 = z_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$ ,  
so ist das Produkt

(8)  $\hat{z}_1 \cdot \hat{z}_2 = z_1 \cdot z_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin (\varphi_1 + \varphi_2)].$

► Das Produkt komplexer Zahlen ist die komplexe Zahl, deren Betrag das Produkt der Beträge der Faktoren und deren Phase die Summe der Phasen der Faktoren ist.

Die Multiplikation komplexer Zahlen in der goniometrischen Form ist also wesentlich übersichtlicher als die Multiplikation komplexer Zahlen in der allgemeinen Form.

■ **Beispiel 11:**

$$\hat{z}_1 = 5 (\cos 134,2^\circ + j \sin 134,2^\circ),$$

$$\hat{z}_2 = 2 (\cos 93,5^\circ + j \sin 93,5^\circ);$$

$$\hat{z}_1 \cdot \hat{z}_2 = 10 (\cos 227,7^\circ + j \sin 227,7^\circ).$$

Man findet in der GAUSSschen Zahlenebene leicht den Zeiger, der dem Produkt zugeordnet ist. Seine Länge beträgt 10, und er schließt mit der positiven reellen Achse einen Winkel von  $227,7^\circ$  ein; seine Spitze liegt also im 3. Quadranten. Bestimmt man die Funktionswerte von Sinus und Kosinus und löst man die Klammer auf, so erhält man das Produkt in der allgemeinen Form.

■ **Beispiel 12:**

Die Zahlen  $\hat{z}_1 = 3 + 4j$  und  $\hat{z}_2 = 2 + 5j$  sollen miteinander multipliziert werden; das Produkt soll aus ihren goniometrischen Formen bestimmt werden. Es ergibt sich

$$\hat{z}_1 = 5 (\cos 53,1^\circ + j \sin 53,1^\circ),$$

$$\hat{z}_2 = \sqrt{29} (\cos 68,2^\circ + j \sin 68,2^\circ);$$

$$\hat{z}_1 \cdot \hat{z}_2 = 5 \sqrt{29} (\cos 121,3^\circ + j \sin 121,3^\circ);$$

$$\hat{z}_1 \cdot \hat{z}_2 \approx 26,9 (\cos 121,3^\circ + j \sin 121,3^\circ).$$

Ergibt sich hierbei einmal eine Phase größer als  $360^\circ$ , so kann sie wegen der Periodizität der Winkelfunktionen durch eine Phase kleiner als  $360^\circ$  ersetzt werden; z. B. ist  $\cos 400^\circ + j \sin 400^\circ = \cos (40^\circ + 360^\circ) + j \sin (40^\circ + 360^\circ) = \cos 40^\circ + j \sin 40^\circ$ .

## Division

Entsprechend ergibt die Berechnung des Quotienten  $\delta_1 : \delta_2$  ( $\delta_2 \neq 0$ ) der in goniometrischer Form vorliegenden Zahlen  $\delta_1$  und  $\delta_2$

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{z_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)}{z_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2}$$

Dieser Quotient wird mit der zum Divisor konjugiert komplexen Zahl erweitert:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + j(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2}$$

Später wird gezeigt werden, daß die „Additionstheoreme“

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

und

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

gelten.

● Prüfen Sie auch diese Formeln nach!

Mit Hilfe der beiden Formeln ergibt sich:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{z_1}{z_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Ist  $\delta_1 = z_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$  und  $\delta_2 = z_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$ , so ist der Quotient gleich

$$(9) \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{z_1}{z_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

► Der Quotient komplexer Zahlen ist die komplexe Zahl, deren Betrag der Quotient der Beträge von Dividend und Divisor und deren Phase die Differenz der Phasen von Dividend und Divisor ist.

Auch die Division komplexer Zahlen in der goniometrischen Form ist also wesentlich übersichtlicher als die Division in allgemeiner Form.

### Beispiel 13:

$$\delta_1 = 5(\cos 134,2^\circ + j \sin 134,2^\circ), \quad \delta_2 = 2(\cos 93,5^\circ + j \sin 93,5^\circ);$$

$$\delta_1 : \delta_2 = \frac{5}{2}(\cos 40,7^\circ + j \sin 40,7^\circ).$$

Ergibt sich dabei einmal ein negativer Winkel, so kann dieser wegen der Periodizität der Winkelfunktionen durch einen positiven ersetzt werden; z. B. ist  $\cos(-30^\circ) + j \sin(-30^\circ) = \cos 330^\circ + j \sin 330^\circ$ .

### Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Produkte und Quotienten komplexer Zahlen der Aufgaben 4, 5 und 6 von Seite 13 unter Verwendung der goniometrischen Form der entsprechenden komplexen Zahlen!
2. Berechnen Sie die folgenden Produkte bzw. Quotienten!
  - a)  $3(\cos 15^\circ - j \sin 15^\circ) \cdot 2(\cos 23^\circ + j \sin 23^\circ)$
  - b)  $4(\cos 45^\circ + j \sin 50^\circ) \cdot 0,5(\cos 61^\circ + j \sin 61^\circ)$
  - c)  $3(\cos 215^\circ + j \cos 25^\circ) : 2(\cos 16^\circ + j \sin 16^\circ)$

Hinweis: Bei diesen Aufgaben ist zu beachten, daß jeweils das erste Glied nicht die goniometrische Form einer komplexen Zahl darstellt; bei der ersten Aufgabe kann man diese recht schnell finden, bei den beiden letzten dagegen stellt man erst einmal durch Bestimmen der Funktionswerte von Kosinus und Sinus und Auflösen der Klammer die allgemeine Form dieser komplexen Zahl her, und daraus ermittelt man dann die goniometrische Form.

### 1.3.7. Potenzieren und Radizieren komplexer Zahlen

#### Potenzieren mit ganzzahligen Exponenten

Mit  $n$  sei eine beliebige ganze Zahl größer als 1 bezeichnet. Wie im Reellen wird festgesetzt:

- 1. Unter  $\delta^n$  versteht man das Produkt von  $n$  (gleichen) Faktoren  $\delta$ ;  
2.  $\delta^1 = \delta$ ;  
3.  $\delta^0 = 1$  ( $\delta \neq 0$ );  
4.  $\delta^{-n} = \frac{1}{\delta^n}$  ( $\delta \neq 0$ ).

Damit ist die Potenz komplexer Zahlen für alle ganzzahligen Exponenten erklärt. Betrag und Phase der Potenz von  $\delta = z(\cos \varphi + j \sin \varphi)$  sollen jetzt durch Betrag und Phase von  $\delta$  ausgedrückt werden. Nach der Multiplikationsformel

$$(8) \delta_1 \cdot \delta_2 = z_1 \cdot z_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

ergibt sich für  $\delta_1 = \delta_2 = \delta = z(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ :

$$\delta \cdot \delta = z \cdot z [\cos(\varphi + \varphi) + j \sin(\varphi + \varphi)],$$

$$\delta^2 = z^2(\cos 2\varphi + j \sin 2\varphi).$$

● Bestimmen Sie in analoger Weise  $\delta^3 = \delta^2 \cdot \delta$ , indem Sie in (8)  $\delta_1 = \delta^2$  und  $\delta_2 = \delta$  setzen!

Sie erhalten  $\delta^3 = z^3(\cos 3\varphi + j \sin 3\varphi)$ .

Die Formeln für  $\delta^2$  und  $\delta^3$  führen zu der Vermutung

$$(10) \delta^g = z^g(\cos g\varphi + j \sin g\varphi).$$

● Zeigen Sie die Richtigkeit dieser Vermutung für  $g = 4$ , indem Sie in (8)  $\delta_1 = \delta^3$  und  $\delta_2 = \delta$  setzen!

Für  $g = 2$ ,  $g = 3$  und  $g = 4$  ist damit die Formel (10) gesichert. Würde man nun in analoger Weise ihre Richtigkeit der Reihe nach für  $g = 5$ ,  $g = 6$  und die folgenden ganzen Zahlen beweisen, so erhielte man noch keine Gewißheit über ihre Richtigkeit für alle folgenden ganzen Zahlen, weil man nicht jeden Fall einzeln untersuchen kann. Es führt aber folgender Gedankengang zum Ziel. Wenn sich aus der Annahme, die Formel (10) sei für eine bestimmte ganze Zahl  $g = n > 1$  richtig, ihre Richtigkeit für die auf  $n$  folgende Zahl  $g = n + 1$  ergibt, so kann man dann schließen:

Da (10) sicher für  $g = 2$  richtig ist, muß (10) auch für die auf 2 folgende Zahl  $g = 3$  richtig sein;

ist (10) nun für  $g = 3$  richtig, muß (10) auch für die auf 3 folgende Zahl  $g = 4$  richtig sein;

usw.

So folgt dann aus der Richtigkeit der Formel (10) für  $g = 2$  ihre Richtigkeit für alle auf 2 folgenden ganzen Zahlen.

Nun bleibt noch zu zeigen, daß tatsächlich aus der Annahme der Richtigkeit der Formel (10) für eine bestimmte ganze Zahl  $g = n$  ihre Richtigkeit für  $g = n + 1$  folgt.

Ist

$$\delta^n = z^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi)$$

richtig, so folgt aus der Produktformel (8) für  $\delta_1 = \delta^n$  und  $\delta_2 = \delta$ , daß auch

$$\delta^n \cdot \delta = z^n \cdot z [\cos(n\varphi + \varphi) + j \sin(n\varphi + \varphi)],$$

also

$$\delta^{n+1} = z^{n+1} [\cos(n+1)\varphi + j \sin(n+1)\varphi]$$

richtig ist.

Damit ist die Richtigkeit von (10) für alle ganzen Zahlen, die größer als 1 sind, bewiesen. Das benutzte Beweisverfahren heißt **Schluß von  $n$  auf  $n + 1$** .

● Die Formel (10) gilt auch für  $g = 1$ . Weisen Sie das nach!

Die Formel (10) gilt auch für negative ganze Zahlen  $g$ . Denn für  $g = -n$  ist nach Definition

$$\delta^{-n} = \frac{1}{\delta^n} = \frac{1}{[z(\cos \varphi + j \sin \varphi)]^n} \quad (\delta \neq 0).$$

Da der Nenner eine Potenz mit positivem ganzzahligem Exponenten ist, kann (10) benutzt werden:

$$\delta^{-n} = \frac{1}{z^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi)} = z^{-n} \frac{1}{\cos n\varphi + j \sin n\varphi}.$$

Erweitert man nun mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl, so erhält man

$$\delta^{-n} = z^{-n} \frac{\cos n\varphi - j \sin n\varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = z^{-n} (\cos n\varphi - j \sin n\varphi);$$

wegen  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  und  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$  gilt

$$\delta^{-n} = z^{-n} [\cos(-n\varphi) + j \sin(-n\varphi)]; \text{ was zu beweisen war.}$$

● Die Formel (10) gilt auch für  $g = 0$ . Weisen Sie das nach!

Nunmehr ist die Richtigkeit der Formel (10) für alle ganzen Zahlen  $g$  bewiesen. Somit gilt:

► **Der Betrag der Potenz ist gleich der Potenz des Betrags der Basis, und die Phase der Potenz ist gleich dem Produkt der Phase der Basis mit dem Exponenten.**

■ **Beispiel 14:**

Man soll  $\delta^6 = (3 + \sqrt{3}j)^6$  berechnen. In der goniometrischen Form ist

$$\delta = 2\sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Nach (10) erhält man

$$\delta^6 = (2\sqrt{3})^6 \left( \cos 6 \frac{\pi}{6} + j \sin 6 \frac{\pi}{6} \right) = 1728 (\cos \pi + j \sin \pi);$$

$$\delta^6 = -1728.$$

**Beispiel 15:**

Man soll  $\frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{(1-j)^2}$  berechnen. In der goniometrischen Form ist

$$\delta = \sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + j \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Nach (10) erhält man  $\frac{1}{\delta^2} = \delta^{-2} = \sqrt{2}^{-2} \left( \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} j$ .

Ist speziell  $|\delta| = 1$ , gilt also  $\delta = \cos \varphi + j \sin \varphi$ , so erhält man aus (10) für ganzzahliges  $g$

$$(11) \quad (\cos \varphi + j \sin \varphi)^g = \cos g\varphi + j \sin g\varphi.$$

Diese Formel heißt **Satz des MOIVRE**.

**Beispiel 16:**

Mit Hilfe des Satzes von MOIVRE sollen  $\cos 2\varphi$  und  $\sin 2\varphi$  durch  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  ausgedrückt werden. Für  $g = 2$  erhält man aus (11)

$$(\cos \varphi + j \sin \varphi)^2 = \cos 2\varphi + j \sin 2\varphi,$$

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + j 2 \sin \varphi \cos \varphi = \cos 2\varphi + j \sin 2\varphi.$$

Wenn zwei komplexe Zahlen gleich sind, müssen ihre Realteile und ihre Imaginärteile übereinstimmen; daraus ergibt sich

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

**Aufgaben**

1. a)  $\left[ \frac{1}{2} (\cos \pi + j \sin \pi) \right]^3$       b)  $\left[ \frac{2}{3} \left( \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^7$   
 c)  $[5(\cos 10^\circ + j \sin 10^\circ)]^5$       d)  $[2(\cos 127^\circ + j \sin 127^\circ)]^2$
2. a)  $(4 + 3j)^2$       b)  $\left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3}j \right)^3$       c)  $(-2 + 3j)^4$       d)  $(\sin \pi + j \cos \pi)^3$   
 e)  $\left( \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{3} \right)^2$       f)  $\left( \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} \right)^4$       g)  $\left[ 3 \left( \cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{2\pi}{5} \right) \right]^2$

3. Drücken Sie  $\cos 3\varphi$  und  $\sin 3\varphi$  durch  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  aus!

**Radizieren**

► Unter einer  $n$ -ten Wurzel aus  $\delta$  versteht man eine Zahl, deren  $n$ -te Potenz gleich  $\delta$  ist:

$$\left( \sqrt[n]{\delta} \right)^n = \delta. \quad \text{Für } \sqrt[n]{\delta} \text{ schreibt man auch } \delta^{\frac{1}{n}}.$$

Es sei zunächst angenommen, daß es in jedem Falle eine komplexe Zahl  $\delta$  gibt, deren  $n$ -te Potenz  $\delta$  ist; ihre goniometrische Form sei  $\delta = Z(\cos \Phi + j \sin \Phi)$ :

$$(12) \quad \sqrt[n]{\delta} = Z(\cos \Phi + j \sin \Phi).$$

Betrag  $Z$  und Phase  $\Phi$  dieser Zahl sollen nun durch den Betrag  $z$  und die Phase  $\varphi$  von  $\delta = z(\cos \varphi + j \sin \varphi)$  ausgedrückt werden.

Man potenziert (12) mit  $n$ :

$$\delta = [Z(\cos \Phi + j \sin \Phi)]^n.$$

Daraus folgt nach (10)

$$z(\cos \varphi + j \sin \varphi) = Z^n (\cos n\Phi + j \sin n\Phi).$$

Nun sind komplexe Zahlen genau dann gleich, wenn sie gleiche Beträge haben und sich ihre Phasen nur um ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  unterscheiden.

● *Machen Sie sich das anschaulich in der GAUSSSchen Zahlenebene klar!*

Daraus folgt  $z = Z^n$  und  $\varphi + k \cdot 2\pi = n\Phi$ , also

$$Z = \sqrt[n]{z} \text{ und } \Phi = \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \text{ mit } k = 0, \pm 1, \dots$$

Setzt man dies in (12) ein, so erhält man

$$(13) \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z} (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \sqrt[n]{z} \left( \cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right)$$

● *Machen Sie die Probe durch Potenzieren mit  $n$ !*

► **Der Betrag der Wurzel ist gleich der Wurzel des Betrags des Radikanden; die Phase der Wurzel ist gleich dem Quotienten der Phase des Radikanden mit dem Wurzelexponenten, wobei zu berücksichtigen ist, daß die Phase nur bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  bestimmt ist.**

■ **Beispiel 17:**

Man soll  $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{1 + \sqrt{3}j}$  berechnen. In der goniometrischen Form ist

$$\sqrt[4]{3} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right). \text{ Nach (13) erhält man}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{3} &= \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi}{4} + j \sin \frac{\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt[4]{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2} \right) + j \sin \left( \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Mit  $k = 0, 1, 2, 3$  folgt daraus:

$$\sqrt[4]{3}_{k=0} = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + j \sin \frac{\pi}{12} \right);$$

$$\sqrt[4]{3}_{k=1} = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + j \sin \frac{7\pi}{12} \right);$$

$$\sqrt[4]{3}_{k=2} = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{13\pi}{12} + j \sin \frac{13\pi}{12} \right);$$

$$\sqrt[4]{3}_{k=3} = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + j \sin \frac{19\pi}{12} \right).$$

● *Zeigen Sie, daß sich für alle weiteren  $k$  keine neuen Zahlen ergeben!*

Im Falle einer  $n$ -ten Wurzel erhält man für  $k = 0, k = 1, \dots, k = n - 1$  alle verschiedenen Werte der Wurzel.



## Aufgaben

1. a)  $\sqrt[4]{9 \left( \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right)}$       b)  $\sqrt[4]{16 \left( \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right)}$   
 c)  $\sqrt[5]{273 \left( \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right)}$       d)  $\sqrt[3]{8 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + j \sin \frac{3\pi}{2} \right)}$   
 e)  $\sqrt[6]{4(\cos 260^\circ + j \sin 260^\circ)}$       f)  $\sqrt[3]{64(\cos 144^\circ + j \sin 144^\circ)}$   
 2. a)  $\sqrt[4]{4+3j}$       b)  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}j}$       c)  $\sqrt[4]{-2+3j}$       d)  $\sqrt[3]{-8}$       e)  $\sqrt{j}$   
 f)  $\sqrt[4]{-3}$       g)  $\sqrt{-6}$       h)  $\sqrt[4]{\cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4}}$       i)  $\sqrt[3]{3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{2\pi}{5} \right)}$

### 1.3.8. Komplexe Zahlen in Exponentialform

Die oben hergeleiteten Formeln (8) und (9) über das Produkt und den Quotienten komplexer Zahlen, die in goniometrischer Form gegeben sind, sind bereits einfacher als die entsprechenden Regeln für die komplexen Zahlen in allgemeiner Form. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn man für  $\cos \varphi + j \sin \varphi$  die Potenz  $e^{j\varphi}$  schreibt, also

$$(14) \quad e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

festsetzt; denn dann ergeben sich die Regeln über das Produkt und den Quotienten komplexer Zahlen und auch andere Regeln, die bei etwas tieferem Eindringen in die Lehre von den komplexen Zahlen auftreten, ohne weiteres aus dieser Festsetzung durch Anwenden der geläufigen Potenzgesetze.

Die Formel (14) wurde von LEONHARD EULER (1707–1783) aufgestellt und heißt ihm zu Ehren EULERSche Formel. Daß die Basis  $e = 2,71828 \dots$  eine irrationale Zahl ist, sei hier nur am Rande vermerkt; denn bei der Anwendung, die hier von der EULERSchen Formel gemacht werden soll, spielt dieser Zahlenwert keine Rolle.

Aus  $\bar{z} = z(\cos \varphi + j \sin \varphi)$  ergibt sich mit der EULERSchen Formel die Exponentialform der komplexen Zahl:

$$(15) \quad \bar{z} = z e^{j\varphi}.$$

#### Beispiel 18:

Die komplexe Zahl mit dem Betrage  $z = 4$  und der Phase  $\varphi = 45^\circ$  (Abb. 1.15.) hat die Exponentialform  $\bar{z} = 4e^{j45^\circ}$ .

Gibt man die Phase im Bogenmaß an ( $45^\circ \cong \frac{\pi}{4}$ ), so ist

$$\bar{z} = 4e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Umformung in die goniometrische Form gibt nach der EULERSchen Formel

$$\bar{z} = 4(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = 4 \left( \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Einsetzen der Winkelfunktionswerte und Auflösen der Klammer führt zur allgemeinen Form dieser komplexen Zahl:  $\bar{z} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}j$ .

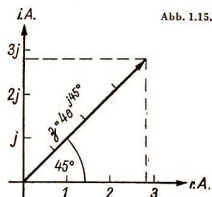


Abb. 1.15.

### Beispiel 19:

Die komplexe Zahl  $\hat{z} = 5 + 12j$  hat den Betrag 13 und die Phase  $67,4^\circ \cong 1,176$ . Man erhält die Exponentialform

$$\hat{z} = 13 e^{j67,4^\circ} = 13 e^{j1,176}$$

und die goniometrische Form

$$\hat{z} = 13(\cos 67,4^\circ + j \sin 67,4^\circ) = 13(\cos 1,176 + j \sin 1,176).$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } e^{j(\varphi + k2\pi)} &= \cos(\varphi + k2\pi) + j \sin(\varphi + k2\pi) \quad (k = 0; \pm 1; \dots) \\ &= \cos \varphi + j \sin \varphi \\ &= e^{j\varphi}; \end{aligned}$$

$e^{j\varphi}$  hat also wie  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  die Periode  $2\pi$ .

### 1.3.9. Multiplikation, Division, Potenzieren und Radizieren komplexer Zahlen in der Exponentialform

Im folgenden sollen komplexe Zahlen in Exponentialform multipliziert, dividiert, potenziert und radiziert werden.

#### Multiplikation

$$\hat{z}_1 \cdot \hat{z}_2 = z_1 e^{j\varphi_1} \cdot z_2 e^{j\varphi_2}.$$

Anwendung des Potenzgesetzes  $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$  führt auf

$$(16) \quad \hat{z}_1 \cdot \hat{z}_2 = z_1 z_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Schreibt man das Ergebnis um in die goniometrische Form, so ergibt sich Übereinstimmung mit der Formel (8):

$$\hat{z}_1 \cdot \hat{z}_2 = z_1 z_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

#### Division

$$\frac{\hat{z}_1}{\hat{z}_2} = \frac{z_1 e^{j\varphi_1}}{z_2 e^{j\varphi_2}}.$$

Anwendung des Potenzgesetzes  $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$  führt auf

$$(17) \quad \frac{\hat{z}_1}{\hat{z}_2} = \frac{z_1}{z_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Schreibt man das Ergebnis um in die goniometrische Form, so ergibt sich Übereinstimmung mit der Formel (9):

$$\frac{\hat{z}_1}{\hat{z}_2} = \frac{z_1}{z_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

nach der EULERSchen Formel (14) ist das gleichwertig mit

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + k 2\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + k 2\pi}{n} \right),$$

was mit der Wurzelformel (13) für komplexe Zahlen übereinstimmt. Daraus folgt, daß das Radizieren komplexer Zahlen in Exponentialform formal nach den im Reellen gültigen Gesetzen durchgeführt werden kann.

### Aufgaben

1. Berechnen Sie

a) das Produkt  $\delta_1 \cdot \delta_2$ ;      b) den Quotienten  $\delta_1 : \delta_2$  für  $\delta_1 = \frac{4}{5} e^{j \frac{3\pi}{4}}$  und  $\delta_2 = \frac{1}{2} e^{j \frac{2\pi}{3}}$  !

2. Berechnen Sie

a) das Produkt  $\delta_1 \cdot \delta_2$ ;      b) den Quotienten  $\delta_1 : \delta_2$  für  $\delta_1 = 5 e^{j 3,368}$  und  $\delta_2 = 2 \cdot e^{j 1,276}$  !

3. Berechnen Sie

a) das Produkt  $\delta_1 \cdot \delta_2$ ;      b) den Quotienten  $\delta_1 : \delta_2$  für  $\delta_1 = 2 \cdot e^{j \frac{5\pi}{3}}$  und  $\delta_2 = 3 \cdot e^{j \frac{\pi}{6}}$  !

Produkt und Quotient sind in allgemeiner Form anzugeben.

4.  $\delta^3$  für  $\delta = \frac{2}{3} e^{1,3j}$

5.  $\delta^{-2}$  für  $\delta = 1,5 e^{j 73^\circ}$

6.  $\sqrt[3]{\delta}$  für  $\delta = \frac{2}{3} e^{1,3j}$

7.  $\sqrt[7]{\delta}$  für  $\delta = 1,5 e^{j 73^\circ}$

### 1.3.10. Zusammenfassung

Das Lösen quadratischer Gleichungen führt in einzelnen Fällen auf die Notwendigkeit, negative Zahlen zu radizieren; das ist jedoch im Gebiet der reellen Zahlen nicht möglich. Deshalb wurde für das uneingeschränkte Radizieren eine erneute Erweiterung des Zahlenbereichs zu dem Bereich der komplexen Zahlen notwendig. Die GAUSSsche Zahlenebene veranschaulicht den Bereich der komplexen Zahlen.

- Eine komplexe Zahl  $\delta$  wird  
in allgemeiner Form  $\delta = a + bj$ ,  
in goniometrischer Form  $\delta = z (\cos \varphi + j \sin \varphi)$ ,  
in Exponentialform  $\delta = z e^{j\varphi}$   
geschrieben,

wobei  $z = \sqrt{a^2 + b^2}$  ist und  $\varphi$  sich aus  $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  bzw. aus  $\tan \varphi = \frac{b}{a}$  errechnen läßt.

Wie die Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sind auch Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren mit komplexen Zahlen ausführbar (von wenigen Ausnahmefällen, wie Division durch Null, Potenzieren der Null mit nicht positiven Exponenten, abgesehen) und ergeben wieder komplexe Zahlen. Von dem Begriff der natürlichen Zahl ausgehend, ist der Zahlbegriff den jeweils auftretenden Bedürfnissen entsprechend schrittweise erweitert worden.

## 1.4. Anwendung komplexer Zahlen in der Elektrotechnik

Bei einphasigem Wechselstrom ändern sich Stromstärke und -richtung periodisch, und zwar nach einer Kosinusfunktion. Ist  $J_m$  der Maximalwert der Stromstärke und  $i$  ihr Momentanwert, so gilt

$$(20) \quad i = J_m \cos(\omega t + \varphi_i).$$

Hierin heißt  $\omega$  Kreisfrequenz,  $\varphi_i$  Phasenwinkel des Stroms. Zur Zeit  $t = 0$  ergibt sich aus (20) der Anfangswert des Stroms

$$i = J_m \cos \varphi_i.$$

Dieser Anfangswert wird nach der Zeit  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  wieder erreicht, denn es ist

$$i = J_m \cos\left(\omega \frac{2\pi}{\omega} + \varphi_i\right) = J_m \cos \varphi_i.$$

Die Zeit  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  wird Periode genannt; es gilt daher

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Die Anzahl der Perioden  $T$  in der Sekunde heißt Frequenz und wird mit  $f$  bezeichnet; ihre Einheit ist Hertz (Hz). Es gilt also

$$T \cdot f = 1, \quad f = \frac{1}{T} \quad \text{und} \quad \omega = 2\pi f.$$

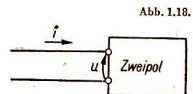
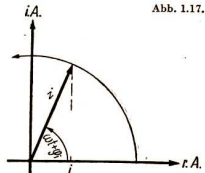
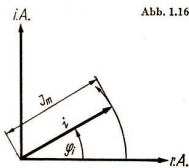
Man betrachtet nun einen mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in der GAUSSschen Ebene im mathematisch positiven Drehsinn umlaufenden Zeiger  $i$ , dessen Länge  $J_m$  ist und der zur Zeit  $t = 0$  die Phase  $\varphi_i$  hat, d. h., der zur Zeit  $t = 0$  mit der reellen Achse den Winkel  $\varphi_i$  bildet (Abb. 1.16.). Zur Zeit  $t$  bildet er dann mit der reellen Achse den Winkel  $\omega t + \varphi_i$  (Abb. 1.17.). Für diesen Zeiger gilt also

$$(21) \quad \dot{i} = J_m [\cos(\omega t + \varphi_i) + j \sin(\omega t + \varphi_i)] = J_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}.$$

Die Projektion dieses Zeigers auf die reelle Achse (Abb. 1.17.) oder, anders ausgedrückt, der Realteil der zugehörigen komplexen Zahl ist

$$i = J_m \cos(\omega t + \varphi_i),$$

er gibt folglich nach (20) den Momentanwert der Stromstärke an.



Fließt dieser Strom  $i$  durch einen Zweipol (Abb. 1.18.), so bewirkt er an diesem einen Spannungsabfall  $u$ , der im allgemeinen ebenfalls dem Kosinusetz mit der gleichen Kreisfrequenz  $\omega$ , aber anderem Phasenwinkel  $\varphi_u$  gehorcht:

$$(22) \quad u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u).$$

Hier ist  $u$  der Momentanwert der Spannung,  $U_m$  ihr Maximalwert. Dieser Momentanwert der Spannung kann nun analog zum Strom als Projektion eines Zeigers  $u$  auf die reelle Achse aufgefaßt werden, der mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in der GAUSSschen Ebene im positiven Drehsinn umläuft, dessen Länge  $U_m$  ist und der zur Zeit  $t = 0$  mit der reellen Achse den Winkel  $\varphi_u$  bildet (Abb. 1.19.):

$$(23) \quad u = U_m [\cos(\omega t + \varphi_u) + j \sin(\omega t + \varphi_u)] = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}.$$

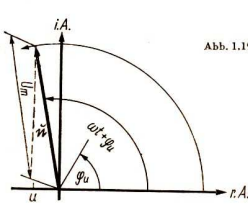


Abb. 1.19.

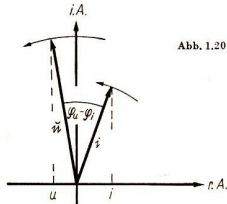


Abb. 1.20.

Die mit der Frequenz  $f$  umlaufenden Zeiger  $i$  und  $u$  bilden stets den Winkel

$$(\omega t + \varphi_u) - (\omega t + \varphi_i) = \varphi_u - \varphi_i$$

(Abb. 1.20.), der positiv ist, wenn die Spannung voreilt, und negativ, wenn der Strom voreilt.

Die Theorie der Wechselstromtechnik lehrt nun, daß der Quotient  $\frac{u}{i}$  der komplexen Zahlen  $u$  und  $i$  den gerichteten Widerstand  $\Re$  ergibt:

$$(24) \quad \frac{u}{i} = \Re;$$

dieses Gesetz entspricht dem OHMSchen Gesetz für den Gleichstrom. Einsetzen von (21) und (23) in (24) ergibt

$$\begin{aligned} \Re &= \frac{u}{i} = \frac{U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \left( \frac{U_m}{I_m} \right) e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = R_s e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \\ &= R_s [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + j \sin(\varphi_u - \varphi_i)]. \end{aligned}$$

Der Quotient

$$\frac{U_m}{I_m} = R_s$$

heißt Scheinwiderstand. Offensichtlich ist  $|\Re| = R_s$ . In  $\Re = R_s e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$  ist  $t$  nicht enthalten; der gerichtete Widerstand  $\Re$  ist also im Gegensatz zu  $u$  und  $i$  unabhängig von der Zeit; er ist konstant und kennzeichnet den Strom-Spannungs-Zusammenhang für

den betreffenden Zweipol. Insbesondere ist die Phase von  $\Re$  gleich der Phasendifferenz  $\varphi_u - \varphi_i$  zwischen Spannungs- und Stromzeiger. Der gerichtete Widerstand  $\Re$  hat als Realteil

$$(25) \quad R_w = R_s \cos(\varphi_u - \varphi_i),$$

als Imaginärteil

$$(26) \quad R_b = R_s \sin(\varphi_u - \varphi_i).$$

Beide haben eine physikalische Bedeutung. Um sie zu finden, werden beide Gleichungen mit  $J_m$  multipliziert:

$$J_m R_w = J_m R_s \cos(\varphi_u - \varphi_i) = U_m \cos(\varphi_u - \varphi_i),$$

$$J_m R_b = J_m R_s \sin(\varphi_u - \varphi_i) = U_m \sin(\varphi_u - \varphi_i).$$

Da die Zeiger  $u$  und  $i$  stets den Winkel  $\varphi_u - \varphi_i$  bilden (Abb. 1.20.), bedeutet  $U_m \cos(\varphi_u - \varphi_i)$  die Komponente des Spannungszeigers  $u$  in Richtung des Stromzeigers  $i$  (Abb. 1.21.). Diese Komponente heißt Wirkspannung  $U_w$ :

$$U_w = U_m \cos(\varphi_u - \varphi_i) = J_m R_w.$$

Entsprechend bedeutet  $U_m \sin(\varphi_u - \varphi_i)$  die Komponente senkrecht dazu, die Blindspannung  $U_b$  heißt:

$$U_b = U_m \sin(\varphi_u - \varphi_i) = J_m R_b.$$

Die Blindspannung trägt nicht wie die Wirkspannung zur wirklich verfügbaren elektrischen Leistung bei, sondern bedingt nur zusätzliche Verluste. Der Widerstand  $R_w$ , über dem die Wirkspannung  $U_w = J_m R_w$  liegt, heißt Wirkwiderstand, der Widerstand  $R_b$ , über dem die Blindspannung  $U_b = J_m R_b$  liegt, heißt Blindwiderstand. Es gilt also:

$$(\text{gerichteter Widerstand}) \quad \Re = \frac{u}{i} = R_w + R_b j;$$

$$(\text{Scheinwiderstand}) \quad R_s = |\Re| = \sqrt{R_w^2 + R_b^2};$$

$$\tan(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{R_b}{R_w}.$$

OHmsche Widerstände sind Wirkwiderstände, (reine) Kapazitäten und Induktivitäten sind Blindwiderstände; den Blindwiderstand einer Induktivität  $L$  errechnet man nach der Formel  $R_{bL} = \omega L$ , den Blindwiderstand einer Kapazität  $C$  nach  $R_{bC} = -\frac{1}{\omega C}$ .

Bei Parallel- und Reihenschaltung von Wechselstromwiderständen gelten für die gerichteten Widerstände analoge Formeln wie für OHmsche Widerstände bei Gleichstrom:

$$\Re_{ges} = \Re_1 + \Re_2 \quad (\text{Reihenschaltung}),$$

$$\frac{1}{\Re_{ges}} = \frac{1}{\Re_1} + \frac{1}{\Re_2} \quad (\text{Parallelschaltung}).$$

#### ■ Beispiel 22:

Eine Spule hat den Wirkwiderstand  $R_w = 20 \Omega$  und die Induktivität  $L = 0,06 \text{ H (Henry)}$ . Bei einer Frequenz von  $f = 50 \text{ Hz}$  beträgt ihr Blindwiderstand somit

$$R_b = \omega L = 0,06 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \Omega = 18,8 \Omega.$$

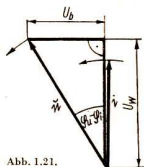


Abb. 1.21.

Als gerichteter Widerstand ergibt sich dann  $\Re = (20 + 18,8j) \Omega$ . Daraus erhält man den Scheinwiderstand  $R_s = |\Re| = \sqrt{20^2 + 18,8^2} \Omega = 27,4 \Omega$ .

Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung erhält man aus

$$\tan(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{18,8}{20}; \varphi_u - \varphi_i = 43,3^\circ, \text{ die Spannung eilt also vor.}$$

Die goniometrische Form des gerichteten Widerstands ist

$$\Re = 27,4(\cos 43,3^\circ + j \sin 43,3^\circ) \Omega,$$

die Exponentialform

$$\Re = 27,4 e^{j43,3^\circ} \Omega.$$

Fließt durch die Spule ein Strom von  $J_m = 0,6 \text{ A}$ , so entsteht als maximale Klemmenspannung  $U_m = J_m R_s = 0,6 \text{ A} \cdot 27,4 \Omega = 16,4 \text{ V}$ .

Die Wirkspannung beträgt  $U_w = J_m R_w = 0,6 \text{ A} \cdot 20 \Omega = 12 \text{ V}$

und die Blindspannung  $U_b = J_m R_b = 0,6 \text{ A} \cdot 18,8 \Omega = 11,3 \text{ V}$ .

#### Beispiel 23:

Ein Kondensator  $C = 1 \mu\text{F}$  ist bei einer Frequenz von  $f = 796 \text{ Hz}$  in Reihe geschaltet mit einem OHMSchen Widerstand von  $R_w = 50 \Omega$ . Der gerichtete Widerstand  $\Re_1$  des Kondensators ist  $\Re_1 = 0 + R_{bC} j = -\frac{1}{\omega C} j = -\frac{10^6 \text{ s} \cdot \text{V}}{5000 \cdot 1 \text{ A}} j = -200j \Omega$ . Der gerichtete

Widerstand  $\Re_2$  des OHMSchen Widerstands ist  $\Re_2 = (50 + 0j) \Omega = 50 \Omega$ . Somit ist  $\Re_{\text{ges}} = (50 - 200j) \Omega$ . Daraus ergibt sich der Scheinwiderstand  $R_s$  der Reihenschaltung

$R_s = |\Re_{\text{ges}}| = \sqrt{50^2 + 200^2} \Omega = 206 \Omega$ . Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung erhält man aus  $\tan(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{-200}{50} = -4$ ;  $\varphi_u - \varphi_i = -76^\circ$ . Hier ist also

die Phase  $\varphi_i$  des Stroms zur Zeit  $t = 0$  größer als die der Spannung, d.h., der Strom eilt der Spannung voraus. Fließt ein Strom von  $J_m = 1 \text{ A}$  durch Widerstand und Kondensator, so ist die maximale Klemmenspannung  $U_m = 206 \text{ V}$ , die Wirkspannung  $U_w = 50 \text{ V}$ , die Blindspannung  $U_b = 200 \text{ V}$ .

#### Beispiel 24:

Eine Spule ( $10 \Omega$ ,  $0,1 \text{ H}$ ) und ein Kondensator ( $10 \mu\text{F}$ ) sind in Reihe geschaltet, die Frequenz beträgt  $50 \text{ Hz}$ . Eilt der Strom gegenüber der Spannung vor oder umgekehrt?

$$\Re_1 = (10 + 314j) \Omega, \Re_2 = \left(0 - \frac{10^6}{314 \cdot 10} j\right) \Omega = -318j \Omega.$$

$$\Re_{\text{ges}} = \Re_1 + \Re_2 = (10 - 286,6j) \Omega.$$

Aus  $\tan(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{-286,6}{10}$  erhält man  $\varphi_u - \varphi_i = -88^\circ$ ; der Strom eilt also fast um  $90^\circ$  vor.

Ermitteln Sie  $R_s$ ,  $R_w$  und  $R_b$  sowie  $U_w$  und  $U_b$  für diese Schaltung!

#### Beispiel 25:

Spule und Kondensator aus dem Beispiel 24 sind jetzt parallelgeschaltet. Eilt jetzt der Strom oder die Spannung vor?

$$\Re_{\text{ges}} = \frac{\Re_1 \cdot \Re_2}{\Re_1 + \Re_2} = \frac{33 e^{j72,3^\circ} \cdot 318 e^{-j90^\circ}}{287 e^{-j88^\circ}} \Omega = 46,6 e^{j70,3^\circ} \Omega;$$

$\varphi_u - \varphi_i = 70,3^\circ > 0$ , d.h., die Spannung eilt vor.

Ermitteln Sie entsprechend dem Beispiel 24 die übrigen Werte!

## Aufgaben

- Zwei Spulen, von denen die eine den Wirkwiderstand  $R_{w1} = 100 \Omega$  und die Induktivität  $L_1 = 0,3 \text{ H}$ , die andere den Wirkwiderstand  $R_{w2} = 50 \Omega$  und die Induktivität  $L_2 = 0,2 \text{ H}$  hat, sind
  - hintereinander geschaltet;      b) parallelgeschaltetund an eine Wechselspannung von  $U = 220 \text{ V}$  mit der Frequenz  $f = 50 \text{ Hz}$  angeschlossen. Zu berechnen sind zu
  - die Stromstärke, die Spannungen an beiden Spulen und die Phasenverschiebung;
  - die Stromstärken in der Zuleitung und in den Zweigen sowie die Phasenverschiebung.
- Eine Spule hat bei  $R_{w1} = 10 \Omega$  Wirkwiderstand die Induktivität  $L_1 = 0,05 \text{ H}$ , eine zweite Spule hat bei  $R_{w2} = 30 \Omega$  Wirkwiderstand die Induktivität  $L_2 = 0,04 \text{ H}$ . Die Spulen werden
  - hintereinander geschaltet;      b) parallelgeschaltetund an eine Wechselspannung von  $U = 110 \text{ V}$  mit der Frequenz  $f = 25 \text{ Hz}$  angeschlossen. Zu berechnen sind zu
  - die Stromstärke, die Spannungen an beiden Spulen und die Phasenverschiebungen;
  - die Stromstärke in den Zweigen und in der Zuleitung sowie die Phasenverschiebungen.
- Eine Spule mit dem Wirkwiderstand  $R_w = 100 \Omega$  sowie der Induktivität  $L = 0,6 \text{ H}$  und ein Kondensator mit  $C = 30 \mu\text{F}$  Kapazität sind
  - hintereinander geschaltet;      b) parallelgeschaltetund an eine Wechselspannung  $U = 220 \text{ V}$  mit der Frequenz  $f = 50 \text{ Hz}$  angeschlossen. Zu berechnen sind zu
  - die Stromstärke, die Spannungen an der Spule und an dem Kondensator sowie die Phasenverschiebung,
  - die Stromstärke in der Zuleitung und in den Zweigen sowie die Phasenverschiebung.
- Parallel zu einem Kondensator von  $C = 20 \mu\text{F}$  ist eine Spule von  $R_w = 15 \Omega$  Wirkwiderstand und  $L = 0,8 \text{ H}$  Induktivität geschaltet. Die Stromstärke in der Zuleitung ist  $J_m = 0,5 \text{ A}$ . Die Frequenz des Wechselstroms ist  $f = 50 \text{ Hz}$ . Zu berechnen sind
  - der Blindwiderstand  $R_{bC}$  des Kondensators und der Blindwiderstand  $R_{bL}$  der Spule,
  - der Scheinwiderstand  $R_s$  der Schaltung,
  - die Spannung  $U$  zwischen den Verzweigungspunkten,
  - die Stromstärken  $J_{mC}$  und  $J_{mL}$  im Kondensator und in der Spule.
- Eine Spule mit der Induktivität  $0,4 \text{ H}$  und  $8 \Omega$  Wirkwiderstand und ein Kondensator mit  $C = 40 \mu\text{F}$  sind in Reihe geschaltet und an eine Wechselspannung von  $120 \text{ V}$  angeschlossen, welche die Frequenz von  $f = 60 \text{ Hz}$  hat. Wie groß sind
  - der Blindwiderstand des Kondensators  $R_{bC}$ ,
  - der Blindwiderstand der Spule  $R_{bL}$ ,
  - der Scheinwiderstand  $R_s$  des äußeren Stromkreises,
  - die Stromstärke  $J_m$ ,
  - die Spannungen  $U_{mL}$  an der Spule und  $U_{mC}$  am Kondensator?



## 2. Grafisches Rechnen und Nomografie

### 2.1. Vorbemerkungen

In der Technik, in der Wirtschaft und in den Naturwissenschaften treten häufig umfangreiche, immer wiederkehrende Rechenarbeiten auf. So muß z. B. der Dreher Drehzahlen an der Drehmaschine berechnen, in Sparkassen müssen Zinsbeträge ermittelt werden, in der Elektrotechnik sind Drahtquerschnitte für die jeweiligen Stromstärken und Werkstoffe zu bestimmen.

Solche Rechenarbeiten können durch verschiedene Rechenhilfsmittel, wie Zahlentafeln, Logarithmen, Tabellen, erleichtert werden. Auch mechanische Geräte, wie Rechenstab, Rechenscheiben, Rechenmaschinen verschiedenster Art, dienen diesem Zweck. Moderne elektronische Rechenautomaten führen heute Rechnungen in wenigen Minuten aus, die geübte Rechner nur in wochenlanger Arbeit bewältigen können.

Andere Hilfsmittel sind grafische Darstellungen, die **Nomogramme**<sup>1</sup> genannt werden. Nomogramme ermöglichen es, aus gegebenen Größen durch einfaches Ablesen gesuchte Größen zu ermitteln. Das Darstellen von in mathematischer Form vorliegenden Gesetzmäßigkeiten aus den verschiedensten Wissenschaften durch Nomogramme ist die Aufgabe der **Nomografie**.

Das Anfertigen von Nomogrammen erfordert große Erfahrung und ist oft zeitraubend und kostspielig. Für kompliziertere Rechengänge wird überdies das Nomogramm leicht unübersichtlich, und seine Benutzung bedarf dann großer Übung und Sorgfalt. Dazu kommt, daß die Herstellung und das Ablesen wie bei jeder grafischen Darstellung mit Ungenauigkeiten behaftet ist. Die Benutzung eines Nomogramms in der Praxis ist deshalb nur rentabel, wenn

1. die betreffende Berechnung mit verschiedenen Zahlenwerten oft wiederkehrt, so daß das Nomogramm ständig benutzt werden kann;
2. die Genauigkeit des Diagramms immer oder zumindest in der überwiegenden Anzahl der Fälle ausreicht;
3. die Benutzung des Nomogramms gegenüber der numerischen Berechnung zeitliche Vorteile bringt;
4. das Nomogramm übersichtlich ist, so daß das Benutzen leicht erlernt werden kann und ohne langes Überlegen mechanisch und sicher möglich ist.

<sup>1</sup> νόμος (griech.), Gesetz; γράφειν (griech.), zeichnen, im Umriß darstellen.

## 2.2. Funktionen und Funktionsleitern

### 2.2.1. Grafische Darstellungen im kartesischen Koordinatensystem

Jeder grafischen Darstellung liegt eine Funktion zugrunde. Man nennt  $y$  dann eine Funktion von  $x$  (Symbol:  $y = f(x)$ ), wenn jedem  $x$  aus einer gewissen Menge  $X$  (dem **Definitionsbereich** der Funktion) ein bestimmtes  $y$  aus einer Menge  $Y$  (dem **Wertevorrat** der Funktion) eindeutig zugeordnet ist. Eine solche Funktion kann beschrieben werden

- durch eine in Worten gegebene Vorschrift,
- durch Paare einander zugeordneter  $x$ - und  $y$ -Werte, die gewöhnlich in Form einer Wertetafel angeordnet werden,
- durch einen analytischen Ausdruck in  $x$  (oder in  $x$  und  $y$ ),
- durch eine grafische Darstellung.

Am bekanntesten ist die grafische Darstellung im kartesischen Koordinatensystem. Diesem liegen zwei einander rechtwinklig schneidende Achsen zugrunde, auf denen unter Verwendung der gleichen Maßeinheit gleichmäßig geteilte Maßskalen angebracht sind. Jedem Wertepaar der Funktion entspricht ein Punkt als geometrisches Bild. Die beiden Zahlenwerte des Wertepaares heißen die **Koordinaten** des Punktes (**Abszisse** und **Ordinate**). Geometrisch können sie durch die Lotstrecken vom Punkt auf die Koordinatenachsen veranschaulicht werden (Abb. 2.1.).

Sofern Definitionsbereich und Wertevorrat auf einzelne Werte beschränkt sind, besteht die grafische Darstellung aus diskreten Punkten, die niemals durch eine Kurve verbunden werden dürfen.

Falls die Funktion für alle reellen  $x$  eines Intervalls erklärt ist, ergibt sich als grafische Darstellung eine Kurve.

Gestalt und Lage dieser Kurven hängen außer von der zugrunde liegenden Funktion auch von den auf den Achsen gewählten Maßeinteilungen ab und lassen sich durch Änderung dieser Maßskalen ebenfalls verändern.

### 2.2.2. Funktionsleitern

Eine Maßskale, wie sie auch auf den Achsen des kartesischen Koordinatensystems verwendet wird, entsteht, wenn man auf einer Geraden einzelne Punkte markiert und beziffert. Die Auswahl und Bezifferung dieser Punkte erfolgt nach einem gewissen Gesetz, das den Abstand der Punkte von einem beliebig angenommenen Anfangspunkt als Funktion der zur Beschriftung benutzten Zahlenwerte festlegt. In der Nomografie spricht man deshalb statt von Maßskalen auch von Funktionsleitern. Je nach der Gestalt des verwendeten Leiterträgers und je nach dem Gesetz der Leiterteilung unterscheidet man verschiedene Arten von Funktionsleitern.

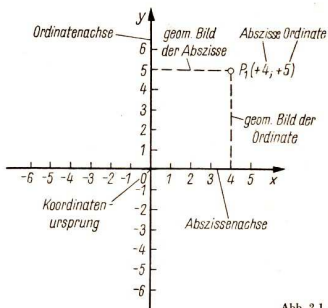


Abb. 2.1.

### 2.2.3. Das Gesetz der Leiterteilung

Um eine Leiterteilung vornehmen zu können, muß man das Gesetz kennen bzw. festlegen, nach dem die Teilung zu erfolgen hat. Dazu wählt man auf dem Träger einen beliebigen Anfangspunkt  $P_0$ , von dem aus zu den Teilpunkten  $P_1, P_2, \dots, P$  die Träger-

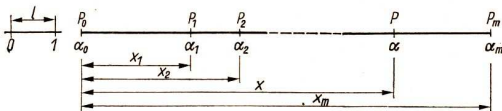


Abb. 2.2.

teile  $x_1, x_2, \dots, x$  mit Hilfe einer ebenfalls festzulegenden Leitereinheit  $l$  gemessen werden. Sind diesen Teilpunkten die Beschriftungen  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha$  zugeordnet, die einem gewissen Gesetz  $f(x)$  genügen, so folgt daraus das Gesetz der Leiterteilung:

$$(1) \quad x = l[f(\alpha) - f(\alpha_0)]$$

Meist ist die Leiter nach oben ebenfalls durch einen letzten Punkt  $P_m$  begrenzt. Der zugeordnete Zahlenwert  $\alpha_m$  bestimmt zusammen mit  $\alpha_0$  den Meßbereich der Leiter. Man nennt  $x_m$  die Leiterhöhe (Abb. 2.2.).

#### Beispiel 1:

Die Abbildung 2.3. zeigt eine geradlinige Leiter mit  $f(x) = x^2$  (quadratische Leiter)  
 $\alpha_0 = 2; \quad \alpha_m = 5; \quad l = 0,5 \text{ cm.}$

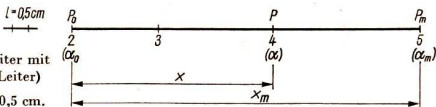


Abb. 2.3.

Der Meßbereich liegt also zwischen 2 und 5; ihm entspricht eine Leiterhöhe

$$x_m = l \cdot [f(\alpha_m) - f(\alpha_0)] = l \cdot [\alpha_m^2 - \alpha_0^2]$$

$$x_m = 0,5 \text{ cm} [5^2 - 2^2] = 10,5 \text{ cm.}$$

Für den mit  $\alpha = 4$  bezifferten Punkt  $P$  ergibt sich als Abstand vom Anfangspunkt  $P_0$ :

$$x = l \cdot [f(\alpha) - f(\alpha_0)]$$

$$x = 0,5 \text{ cm} [4^2 - 2^2] = 6 \text{ cm.}$$

### 2.2.4. Gleichmäßig geteilte Leitern

Ist das zugrunde liegende Gesetz  $f(x)$  eine lineare Funktion, so ergibt sich eine gleichmäßige Leiterteilung. Man spricht deshalb in diesen Fällen auch von linear geteilten Leitern.

#### Beispiel 2:

Es soll eine gleichmäßig geteilte geradlinige Leiter mit dem Meßbereich von 6 bis 17 entworfen werden (Abb. 2.4.), wobei die Leiterhöhe 44 mm betragen soll.

Gegeben:  $f(x) = x; \quad \alpha_0 = 6; \quad \alpha_m = 17; \quad x_m = 44 \text{ mm}$

Gesucht:  $l$

Abb. 2.4.

Um die verlangte Leiter entwerfen zu können, muß die Leitereinheit nach Gleichung (1) errechnet werden.

$$x_m = l \cdot [f(\alpha_m) - f(\alpha_0)] = l \cdot (\alpha_m - \alpha_0)$$

$$l = \frac{x_m}{\alpha_m - \alpha_0} = \frac{44 \text{ mm}}{17 - 6} = \frac{44}{11} \text{ mm}$$

$$l = 4 \text{ mm}$$

Sehr häufig wird dem Anfangspunkt der Leiter der Zahlenwert  $\alpha_0 = 0$  zugeschrieben. Dann vereinfacht sich das Gesetz der Leiterteilung.

$$(1a) \quad x = l \cdot f(\alpha), \quad \text{wenn } \alpha_0 = 0$$

### Beispiel 3:

Es soll eine linear geteilte geradlinige Leiter mit dem Meßbereich 0...7 und der Leitereinheit  $l = 15 \text{ mm}$  gezeichnet werden.

Gegeben:  $f(\alpha) = \alpha$ ;  $l = 15 \text{ mm}$ ;  $\alpha_0 = 0$ ;  $\alpha_m = 7$

Gesucht:  $x_1 \dots x_m$

Es ergibt sich mit Gleichung (1a)

$$x_m = l \cdot f(\alpha_m) = l \cdot \alpha_m = 15 \text{ mm} \cdot 7$$

$$x_m = 105 \text{ mm}$$

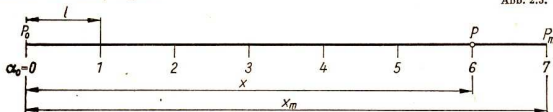
und beispielsweise für  $\alpha = 6$

$$x = l \cdot f(\alpha) = l \cdot \alpha = 15 \text{ mm} \cdot 6$$

$$x = 90 \text{ mm}.$$

So entsteht die Abbildung 2.5.

Abb. 2.5.



### Aufgaben

1. Was ändert sich, wenn man die Einheit einer gleichmäßig geteilten Leiter a) auf die Hälfte verkleinert, b) auf das Doppelte vergrößert?
2. Eine 60 mm lange Strecke ist so gleichmäßig zu teilen, daß sie die Zahlenwerte 15 bis 21 trägt. Die Leiterteilung ist zu errechnen und die Leiter zeichnerisch darzustellen. (Auf größtmögliche Zeichengenaugkeit ist zu achten.)
3. Es ist eine gleichmäßig geteilte Leiter mit einem Meßbereich von 24 bis 36 und einer Leitereinheit von 6 mm zu zeichnen.
4. Der Abstand des Zahlenwertes 24 von dem Zahlenwert 30 einer gleichmäßig geteilten Leiter ist 48 mm. Es ist die Leitereinheit zu errechnen.
5. Die Leitereinheit einer gleichmäßig geteilten Leiter ist 12 mm. Wie groß ist der Abstand des Zahlenwertes 6 von dem Zahlenwert 27 in mm?
6. Eine gleichmäßig geteilte Leiter beginnt mit 7. Die Leitereinheit ist 4 mm, die Leiterhöhe ist 48 mm. Wie heißt der Zahlenwert, der am Ende der Leiter stehen muß?

### 2.2.5. Ungleichmäßig geteilte Leitern

Aus dem Abschnitt 2.2.4. ist bekannt, daß eine lineare Funktion stets durch eine gleichmäßig geteilte Leiter dargestellt werden kann. Es wird nun untersucht, wie die Leiter geteilt wird, wenn eine nichtlineare Funktion dargestellt werden soll.

In Beispiel 1 in Abschnitt 2.2.3. wurde gezeigt, wie durch Berechnung der Abstände  $x$  mit Hilfe des Gesetzes der Leiterteilung die Lage der einzelnen Teilpunkte bestimmt werden kann. Es gibt aber auch einen anderen Weg, der über das Bild der zugrunde liegenden Funktion im kartesischen Koordinatensystem geht.

Für die Bilder nichtlinearer Funktionen ergeben sich im kartesischen Koordinatensystem Kurven. So ergibt z. B.

$y = \lg x$  die logarithmische Kurve,

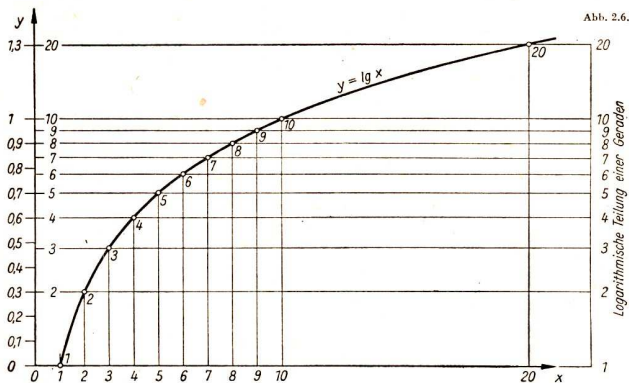
$F = A \cdot \sigma$  eine Hyperbel,

$s = \frac{g \cdot t^2}{2}$  eine Parabel.

Wenn man diese Kurven als krummlinige Träger mit einer Leiter versieht und diese dann auf eine der Koordinatenachsen projiziert, ergibt sich dort eine geradlinige Leiter, der die entsprechende Funktion als Leitergesetz zugrunde liegt.

#### Beispiel 4:

Die Abbildung 2.6. zeigt das Verfahren für die logarithmische Funktion  $y = \lg x$ . Die Abszissenachse trägt die Numeri, die Ordinatenachse die Logarithmen. Die Teilung beider Achsen ist, wie immer im kartesischen System, gleichmäßig. Nur die Maßeinheiten wurden unterschiedlich gewählt. Jetzt werden die Numeri auf die Kurve projiziert und die projizierten Werte angeschrieben. Dadurch erhält man eine krummlinige Leiter. Projiziert

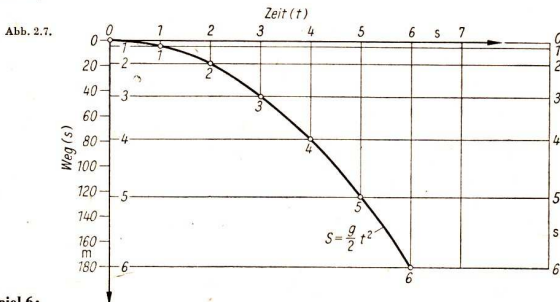


man diese Kurvenpunkte auf die Ordinatenachse, so entsteht dort eine logarithmische Teilung auf einem geradlinigen Träger. An der Ordinatenachse erhält man dabei neben der ursprünglichen gleichmäßigen Teilung eine ungleichmäßige Teilung. Man erkennt auch an der rechts herausgezogenen senkrechten Geraden die ungleichmäßige Leiterteilung für  $y = \lg x$ . Auf der Geraden stellen die Zahlenwerte den Numerus (also die Werte von  $x$ ) dar, abgetragen als Strecken vom Anfangspunkt 1 sind aber die Funktionswerte (also  $y = \lg x$ ).

### Beispiel 5:

Potenzleiter mit quadratischer Teilung (vgl. Beispiel 1).

Wirft man einen Körper von einem erhöhten Ort aus in waagerechter Richtung, so nähert er sich im luftleeren Raum dem Erdboden nach dem Gesetz des freien Falls  $s = \frac{1}{2}gt^2$ . Die grafische Darstellung dieses Gesetzes, die der Bahn (der Wurfparabel) des geworfenen Körpers entspricht, ergibt bei Projektion auf die  $s$ -Achse eine quadratische Leiter (Abb. 2.7.).



### Beispiel 6:

Wurzelleiter

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite  $a = 40$  mm. Eine Seite soll mit einer Leiterteilung versehen werden, deren Zahlenwerte  $\alpha$  die jeweilige Größe der Flächen  $A$  derjenigen Dreiecke angeben, die vom Ausgangsdreieck durch eine Parallele zur Grundseite durch eben diesen Punkt der Leiterteilung abgeschnitten werden (Abb. 2.8.).

Gegeben:  $\alpha_0 = 0$ ;  $x_m = a = 40$  mm

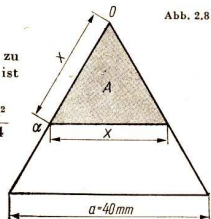
Gesucht:  $f(\alpha)$ ;  $l$ ;  $x$  (für verschiedene  $\alpha$ )

Es muß eine Beziehung zwischen den an die Teilung zu schreibenden Zahlen ( $\alpha$ ) und  $x$  gefunden werden. Dabei ist  $\alpha$  der Zahlenwert der Dreiecksfläche  $A$ :

$$A = \alpha \text{ mm}^2 = \frac{g \cdot h_g}{2}; \quad g = x; \quad h_g^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$h_g^2 = \frac{x^2}{4} \cdot 3$$

$$h_g = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{3}$$



$$\alpha \text{ mm}^2 = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$x^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \alpha \text{ mm}^2 \approx 2,32 \cdot \alpha \text{ mm}^2$$

$$x \approx 1,52 \cdot \sqrt{\alpha} \text{ mm}$$

(Gleichung der Leiterteilung)

$$x \approx 1,52 \text{ mm} \cdot \sqrt{\alpha} = l \cdot f(\alpha)$$

Hieraus folgt:

$$l = 1,52 \text{ mm}; \quad f(\alpha) = \sqrt{\alpha}$$

Es ist also eine Leiterteilung nach einem Quadratwurzelgesetz erforderlich. Sie ließe sich durch Projektion der zu  $y = \sqrt{x}$  gehörenden Kurve auf die y-Achse gewinnen, wobei die Strecke von 0 bis 1 auf dieser Achse gleich 1,52 mm werden müßte.

Einfacher ist die Berechnung einzelner Punkte mit Hilfe der Leiterteilungsgleichung:

$$\alpha_1 = 50, \quad \alpha_2 = 100, \quad \alpha_3 = 200, \quad \alpha_4 = 300, \quad \alpha_5 = 400, \quad \alpha_6 = 500,$$

$$\alpha_7 = 600, \quad \alpha_8 = 700.$$

$$x_1 \approx 1,52 \text{ mm} \cdot \sqrt{50} \approx 1,52 \text{ mm} \cdot 7,07 \approx 10,75 \text{ mm}$$

$$x_2 \approx 1,52 \text{ mm} \cdot \sqrt{100} \approx 1,52 \text{ mm} \cdot 10 \approx 15,2 \text{ mm}$$

$$x_3 \approx 1,52 \text{ mm} \cdot \sqrt{200} \approx 1,52 \text{ mm} \cdot 14,15 \approx 21,5 \text{ mm}$$

$$x_4 \approx 1,52 \text{ mm} \cdot \sqrt{300} \approx 1,52 \text{ mm} \cdot 17,3 \approx 26,3 \text{ mm}$$

$$x_8 \approx 1,52 \text{ mm} \cdot \sqrt{700} \approx 1,52 \text{ mm} \cdot 26,46 \approx 40,2 \text{ mm}$$

Das Ergebnis zeigt die Abbildung 2.9.

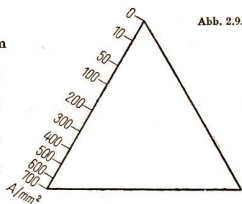


Abb. 2.9.

## Aufgaben

- a) Die untere Leiter eines 25 cm langen logarithmisch geteilten Rechenstabs trägt die Zahlenwerte von 1 bis 10, die Leiter für die Quadratzahlen die Zahlenwerte von 1 bis 100 und die Leiter für die Kubikzahlen die von 1 bis 1000. Es sind die Leitereinheiten der 3 Leitern zu errechnen.

b) Auf der Leiter für die Quadratzahlen sind die Entfernungen der Zahlenwerte 6 und 55 vom Anfangspunkt zu errechnen und am Stab zu kontrollieren.

c) Auf der Leiter für die Kubikzahlen sind die Entfernungen der Zahlenwerte 6; 55 und 830 vom Anfangspunkt zu errechnen und zu kontrollieren.
- Eine logarithmisch geteilte Leiter trägt die Zahlenwerte  $\alpha_0 = 2,5$  und  $\alpha_m = 120$ . Ihr Abstand beträgt 134,5 mm. Es ist die Leitereinheit zu errechnen.
- a) Eine logarithmisch geteilte Leiter beginnt mit  $\alpha_0 = 3$ . Sie ist 100 mm lang, die Leitereinheit ist 65 mm. Wie groß ist  $\alpha$  am Ende der Leiter?

b) Es ist der Abstand des Wertes 60 vom Wert 10 zu errechnen und zu überprüfen.
- Es ist eine Kubikleiter mit  $\alpha_0 = 0$ ;  $\alpha_m = 5$ ;  $x_m = 10$  cm zu zeichnen.

## 2.2.6. Doppelleitern

Werden auf einem Träger zugleich zwei Leitern abgetragen, so entsteht eine Doppelleiter. Fügt man in dieser Weise eine Funktionsleiter und eine gleichmäßig geteilte Leiter mit derselben Leitereinheit zusammen, so kann die entstehende Doppelleiter die Wertetafel der der Funktionsleiter zugrunde liegenden Funktion ersetzen, d. h., man kann zugeordnete Wertepaare ablesen.

### Beispiel 7:

Es ist eine Doppelleiter für die Abhängigkeit der Kreisfläche  $A$  vom Kreisdurchmesser  $d$  im Meßbereich  $\alpha_0 = 1$  bis  $\alpha_m = 8$  mit der Leitereinheit  $l = 2$  mm zu entwerfen.

Die Funktionsleiter ergibt sich aus  $A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} \alpha^2 \text{ mm}^2$  mit dem Leiterteilungsgesetz:

$$x = l[f(\alpha) - f(\alpha_0)]$$

$$= l \left[ \frac{\pi}{4} \alpha^2 - \frac{\pi}{4} \alpha_0^2 \right]$$

$$x = 2 \text{ mm} \cdot \left[ \frac{\pi}{4} \alpha^2 - \frac{\pi}{4} \cdot 1^2 \right]$$

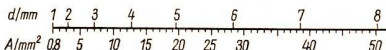


Abb. 2.10.

Die Leiterhöhe  $x_m$  wird:

$$x_m = 2 \text{ mm} \left[ \frac{\pi}{4} 8^2 - \frac{\pi}{4} 1^2 \right] \approx 99 \text{ mm}.$$

Entsprechend werden  $x_2 \dots x_7$  für  $\alpha = 2 \dots 7$  errechnet, z. B.

$$x_4 = 2 \text{ mm} \left[ \frac{\pi}{4} 4^2 - \frac{\pi}{4} 1^2 \right] \approx 24 \text{ mm}.$$

Die so errechneten Punkte werden auf dem Träger aufgetragen und beziffert. Schließlich wird eine gleichmäßig geteilte Leiter mit derselben Leitereinheit  $l = 2$  mm und mit  $\alpha_0' = \frac{\pi}{4} 1^2$  aufgetragen, so daß sich wegen  $f(\alpha') = \alpha'$  z. B. für  $\alpha' = 10$  ergibt:

$$x = 2 \text{ mm} \left[ 10 - \frac{\pi}{4} \right] \approx 18,4 \text{ mm}.$$
 Das Ergebnis zeigt die Abbildung 2.10.

Doppelleitern werden besonders einfach, wenn auch die Funktionsleiter linear ist. Solche Doppelleitern sind als Umrechnungshilfen für verschiedene Maßeinheiten sehr praktisch. Bei ihnen läuft die Konstruktion auf das Entwerfen zweier gleichmäßig geteilter Leitern mit verschiedenen Leitereinheiten hinaus.

### Beispiel 8:

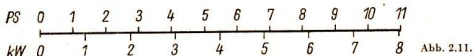
Es ist eine Doppelleiter zur Umrechnung der Leistungseinheiten kW und PS zu entwerfen. Die Beziehung  $1 \text{ kW} \approx 1,36 \text{ PS}$  bedingt, daß derselbe Punkt, der auf der kW-Leiter mit  $\alpha$  beziffert ist, auf der PS-Leiter die Bezifferung  $1,36 \alpha$  bekommen muß. Es gilt also

$$\left. \begin{array}{l} \text{für die kW-Leiter: } x = l_{\text{kW}} \cdot \alpha \\ \text{für die PS-Leiter: } x = l_{\text{PS}} \cdot 1,36 \alpha \end{array} \right\} \text{ falls } \alpha_0 = 0.$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich  $l_{\text{kW}} \alpha = l_{\text{PS}} \cdot 1,36 \alpha$

$$l_{\text{kW}} = 1,36 l_{\text{PS}}.$$





Die Leitereinheit auf der kW-Leiter muß also 1,36mal so groß sein wie die auf der PS-Leiter. So entsteht die Abbildung 2.11.

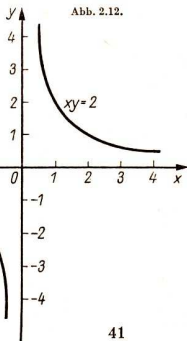
### Aufgaben

- Auch auf dem Rechenstab finden sich Doppelleitern, die allerdings hier auf zwei getrennten Trägern angebracht sind und zu deren Querverbindung der Läuferstrich dient. Welche sind es?
- Entwerfen Sie Doppelleitern für die Berechnung
  - der Flächeninhalte der Quadrate ( $A = a^2$ );
  - der Würfelvolumina ( $V = a^3$ );
  - der Flächeninhalte von gleichseitigen Dreiecken ( $A = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$ );
  - der Kreisumfänge ( $u = \pi d$ );
  - der Kugeloberflächen ( $A_O = \pi d^2$ );
  - der Kugelvolumina ( $V = \frac{\pi}{6} d^3$ )!
- Entwerfen Sie Doppelleitern zum Umrechnen von
  - Zoll in mm;
  - Kilokalorien in Kilowattstunden;
  - Kilopond in Newton;
  - Millibar in Torr!

### 2.2.7. Geradstreckung von Kurven im rechtwinkligen Koordinatensystem

Gerade Linien sind immer einfacher und genauer zu zeichnen als gekrümmte Linien (ausgenommen der Kreis). Gerade Linien ergeben sich aber im rechtwinkligen Koordinatensystem nur als Darstellungen linearer Funktionen. Man kann jedoch nichtlineare Funktionen, die bei linear geteilten Koordinatenachsen krumme Linien ergeben, durch Einführen neuer Veränderlicher zu linearen Funktionen machen und demgemäß als grafische Darstellungen Geraden erhalten. Dazu müssen allerdings die Leitern auf den Koordinatenachsen den neuen Veränderlichen angepaßt, d. h. ungleichmäßig unterteilt werden. Man spricht hierbei von einer Geradstreckung der Kurven.

Abb. 2.12.



#### Beispiel 9:

Die Hyperbel  $xy = 2$  ist geradzustrecken (Abb. 2.12.). Das kann auf zweierlei Weise geschehen:

- Die Gleichung wird beidseitig logarithmiert:

$$\lg x + \lg y = \lg 2.$$

Für  $\lg x$  und  $\lg y$  werden neue Veränderliche eingeführt:

$$u = \lg x; \quad v = \lg y.$$

Dann ergibt sich die in  $u$  und  $v$  lineare Funktion

$$u + v = \lg 2$$

$$v = -u + \lg 2.$$

Im  $uv$ -System wird die grafische Darstellung eine unter  $135^\circ$  ansteigende Gerade. Die  $u$ - und die  $v$ -Achse müssen beide eine logarithmische Teilung in  $x$  bzw.  $y$  erhalten (Abb. 2.13).

b) Die Gleichung wird in die Form  $y = \frac{2}{x}$  gebracht und für  $\frac{2}{x}$  eine neue Veränderliche  $z$  eingeführt; dann entsteht die lineare Gleichung  $y = z$ . Die  $z$ -Achse muß diesmal mit einer Reziprokleiter versehen werden, für die die Leitergleichung heißt:

$$x = l \cdot f(x) = l \cdot \frac{2}{\alpha}$$

Für  $l$  ist dabei die gleiche Leiter-einheit wie auf der  $y$ -Achse zu wählen. Dann berechnet man:

für  $\alpha_1 = 1: x_1 = 2l$

$$\alpha_2 = 2: x_2 = l$$

$$\alpha_3 = 4: x_4 = \frac{1}{2}l \text{ usw.}$$

Die Hyperbel wird dadurch zu einer unter  $45^\circ$  durch den Koordinatenursprung verlaufenden Geraden gestreckt (Abb. 2.14).

### Aufgaben

Die Bilder folgender Funktionen sind geradzustrecken.

1.  $y = \sqrt{x}$

2.  $y = \frac{1}{4}x^3$

3.  $x^2 + y^2 = 25$

4.  $y = 2^x$

5.  $y = \lg x$

Untersuchen Sie jeweils, ob ein beiderseitiges Logarithmieren der Gleichung zum Ziel führt oder ob die unmittelbare Einführung neuer Veränderlicher sinnvoll ist! In welchen Fällen führen beide Wege zum Erfolg?

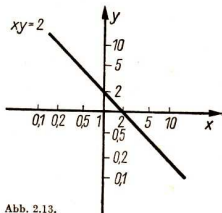


Abb. 2.13.

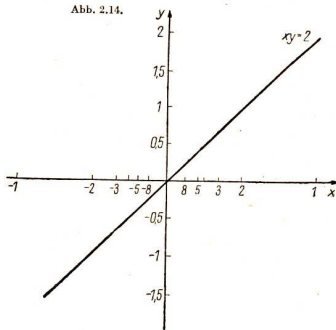


Abb. 2.14.

## 2.3. Leitertafel-Nomogramme

Die bisher besprochenen und grafisch dargestellten Funktionen stellten Beziehungen zwischen lediglich zwei Veränderlichen dar. Diese bilden nicht das Stoffgebiet der Nomografie. Nomogramme haben die Aufgabe, Funktionen mit drei und mehr Veränderlichen darzustellen. Die bei zwei Veränderlichen möglichen Methoden (Kurve im Koordinatensystem; Doppelleiter) versagen dann in der bisherigen Form; sie müssen sinnvoll erweitert werden. Aus der Doppelleiter entsteht die Drei- oder Mehrleitertafel, aus der Kurve die Kurvenschar (das Kurvennetz), die sogenannte Netztafel,

### 2.3.1. Dreileitertafeln

Funktionen mit drei Veränderlichen können durch Nomogramme mit drei Leitern dargestellt werden. Beispiele solcher Funktionen sind:

$$A = a \cdot b; \quad v = \frac{d \cdot 3,14 \cdot n}{1000}; \quad U = I \cdot R; \quad P = U \cdot I; \quad F = A \cdot \sigma.$$

Als Träger für die drei Leitern verwendet man möglichst Geraden, die entweder parallel zueinander liegen oder durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Das Prinzip des Dreileiter-Nomogramms ist folgendes:

Jede der drei Geraden trägt die Funktionsleiter je einer der drei Veränderlichen. Diese Funktionsleitern werden dabei so kombiniert, daß jede beliebige Gerade, die nicht parallel zu einer der Trägergeraden verläuft, die Trägergeraden in drei Punkten schneidet, deren Bezifferungen die dargestellte Funktion erfüllen.

#### Beispiel 10:

Es soll eine Dreileitertafel konstruiert werden, mit der die Addition und Subtraktion positiver und negativer Zahlen auf grafischem Wege ermöglicht wird:  $a + b = c$ .

Die Träger sollen drei abstandsgleiche parallele Geraden sein. Da die Leiterfunktionen linear sind [ $f(a) = x = a$ ,  $f(b) = \beta = b$ ,  $f(c) = \gamma = c$ ], ergeben sich gleichmäßig geteilte Leitern. Legt man die Summenleiter in die Mitte, wählt ihre Leitereinheit halb so groß wie die der beiden äußeren Summandenleitern und stimmt die Lage der drei Leitern so ab, daß ihre Nullpunkte auf einer Geraden liegen, so ergibt sich das gewünschte Nomogramm. Da auch negative Werte von  $a$ ,  $b$  und  $c$  in den Bereich der Rechnungen einbezogen werden sollen, ist der Meßbereich aller drei Leitern auch auf negative Werte auszudehnen (Abb. 2.15.).

Zur Benutzung benötigt man eine mechanische „Ablesegerade“, z. B. einen Faden, die Kante eines (am besten durchsichtigen) Lineals, eine auf Transparentpapier gezeichnete Gerade. Sie wird an die beiden gegebenen Werte angelegt und schneidet die dritte Gerade dann im gesuchten Ergebnis. In Abbildung 2.15. ist eingezeichnet:

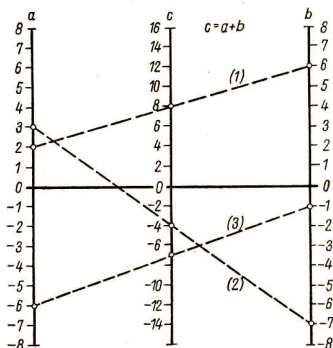


Abb. 2.15.

- (1) Addition:  $2 + 6 = x; \quad x = 8;$   
 (2) Addition:  $3 + (-7) = x; \quad x = -4;$   
 (3) Subtraktion:  $(-7) - (-6) = x; \quad x = -1.$

### 2.3.2. Die Schlüsselgleichung für Tafeln mit drei parallelen Leitern

Die Anpassung der Lage der Trägergeraden und der Funktionsleitern an die darzustellende Funktion erfolgt mit Hilfe der sogenannten **Schlüsselgleichung**.

Für die drei parallelen Leitern der Abbildung 2.16. mögen die Leitergleichungen gelten:

$$x = l_1 \cdot f_1(\alpha); \quad y = l_2 \cdot f_2(\beta); \quad z = l_3 \cdot f_3(\gamma).$$

Abb. 2.16.

Man entnimmt der Figur folgende Proportion:

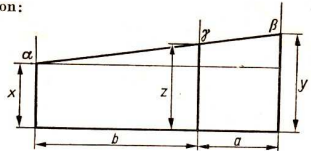
$$(z - x) : (y - x) = b : (a + b).$$

Aus ihr folgt

$$b \cdot (y - x) = (z - x) \cdot (a + b),$$

$$by - bx = z \cdot (a + b) - ax - bx,$$

$$(2) \quad (a + b) \cdot z = ax + by.$$



Mit Hilfe der Leitergleichungen werden  $x, y$  und  $z$  ersetzt. Man erhält die Schlüsselgleichung

$$(3) \quad (a + b) \cdot l_3 \cdot f_3(\gamma) = a \cdot l_1 \cdot f_1(\alpha) + b \cdot l_2 \cdot f_2(\beta).$$

Man kann die Koeffizienten der Funktionen durch die Symbole  $c_1, c_2$  und  $c_3$  darstellen und erhält so eine vereinfachte Form der Schlüsselgleichung (3):

$$(3a) \quad c_3 \cdot f_3(\gamma) = c_1 \cdot f_1(\alpha) + c_2 \cdot f_2(\beta)$$

mit

$$(3b) \quad (a + b) \cdot l_3 = c_3;$$

$$(3c) \quad a \cdot l_1 = c_1;$$

$$(3d) \quad b \cdot l_2 = c_2.$$

Man kann die Gleichungen (3 b) bis (3 d) je nach Bedarf zur Berechnung von  $a, b, l_1, l_2, l_3$  verwenden, wenn man sie entsprechend umstellt.

Es muß darauf hingewiesen werden, daß (3) und (3a) nur dann gelten, wenn  $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$  gilt. Sind diese Werte aber verschieden von Null, so ergibt sich als Schlüsselgleichung:

$$(3e) \quad c_3 [f_3(\gamma) - f_3(\gamma_0)] = c_1 [f_1(\alpha) - f_1(\alpha_0)] + c_2 [f_2(\beta) - f_2(\beta_0)].$$

Soll jetzt eine gegebene Funktion, z. B. die Umfangsfunktion eines Rechtecks

$U = 2m + 2n$  ( $m$  und  $n$  seien die Rechteckseiten),

durch ein **Dreileiternomogramm** dargestellt werden, muß die Schlüsselgleichung (3) Glied für Glied mit dem analytischen Ausdruck der Funktion in Übereinstimmung gebracht werden (Koeffizientenvergleich):

$$(a + b)l_3 \cdot f_3(\gamma) = al_1 \cdot f_1(\alpha) + bl_2 \cdot f_2(\beta)$$

$$1 \cdot U = 2 \cdot m + 2 \cdot n.$$

Daraus folgt:

a)  $f_3(\gamma)$  mm =  $U$ ;  $f_1(\alpha)$  mm =  $m$ ;  $f_2(\beta)$  mm =  $n$

b)  $(a + b)l_3 = 1$ ;  $al_1 = 2$ ;  $bl_2 = 2$ .

Das bedeutet:

- zu a) Es müssen drei gleichmäßig geteilte Leitern konstruiert werden, wobei die Funktionen  $f_1(\alpha) = \alpha$  und  $f_2(\beta) = \beta$ , also zwei lineare Funktionen, auf den Außenträgern dargestellt werden sollen und die ebenfalls lineare Funktion  $f_3(\gamma) = \gamma$  auf dem Innenträger.
- zu b) Von den fünf Unbekannten  $a, b, l_1, l_2, l_3$  können zwei willkürlich festgesetzt werden, während sich die anderen daraus bestimmen lassen. Dabei ist es oft so, daß die willkürliche Wahl zweier der fünf Unbekannten dadurch eingeschränkt ist, daß für zwei der Veränderlichen, hier z. B.  $m$  und  $n$ , der Meßbereich und die Leiterhöhe vorgeschrieben sind. Dann ist dadurch  $l_1$  und  $l_2$  festgelegt.

### Beispiel 11:

Es soll ein Leitertafelnomogramm für den Umfang eines Rechtecks aufgestellt werden ( $U = 2m + 2n$ ), wobei die Leiterhöhe für die Summandenleitern je mit 90 mm und die Meßbereiche für  $m$  und  $n$  durch  $5 \text{ mm} \leq m \leq 50 \text{ mm}$  bzw. durch  $10 \text{ mm} \leq n \leq 100 \text{ mm}$  vorgeschrieben sind.

Aus  $f_1(x) \text{ mm} = m, f_2(\beta) \text{ mm} = n, f_3(\gamma) \text{ mm} = U$  folgt als Festsetzung:

$$m = \alpha \text{ mm}; \quad n = \beta \text{ mm}; \quad U = \gamma \text{ mm}, \quad \text{also} \quad f_1(\alpha) = \alpha, \quad f_2(\beta) = \beta, \quad f_3(\gamma) = \gamma.$$

Daraus ergibt sich weiter:  $\gamma = 2\alpha + 2\beta$

$$\text{und: } (a+b)l_3 = 1; \quad al_1 = 2; \quad bl_2 = 2$$

sowie:  $5 \leq \alpha \leq 50; \quad 10 \leq \beta \leq 100$ , d.h.

$$\alpha_0 = 5; \quad \alpha_m = 50; \quad \beta_0 = 10; \quad \beta_m = 100 \quad \text{und für beide Leitern } x_m = 90 \text{ mm.}$$

Daraus errechnet man  $l_1$  und  $l_2$ .

$$x_m = l_1[f_1(\alpha_m) - f_1(\alpha_0)] = l_1(\alpha_m - \alpha_0)$$

$$90 \text{ mm} = l_1(50 - 5)$$

$$l_1 = 2 \text{ mm}$$

$$x_m = l_2[f_2(\beta_m) - f_2(\beta_0)] = l_2(\beta_m - \beta_0)$$

$$90 \text{ mm} = l_2(100 - 10)$$

$$l_2 = 1 \text{ mm}$$

Wegen  $\gamma = 2\alpha + 2\beta$  muß gelten:

$$\gamma_0 = 2\alpha_0 + 2\beta_0 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 = 30,$$

$$\gamma_m = 2\alpha_m + 2\beta_m = 2 \cdot 50 + 2 \cdot 100 = 300.$$

Daraus folgt bei gleicher Leiterhöhe:

$$x_m = l_3[f_3(\gamma_m) - f_3(\gamma_0)] = l_3(\gamma_m - \gamma_0)$$

$$90 \text{ mm} = l_3 \cdot (300 - 30)$$

$$l_3 = \frac{1}{3} \text{ mm.}$$

Jetzt folgt für die Leiterabstände:

$$a \cdot l_1 = 2; \quad b \cdot l_2 = 2;$$

$$a \cdot 2 = 2; \quad b \cdot 1 = 2;$$

$$a = 1; \quad b = 2.$$

Also  $a : b = 1 : 2$ .

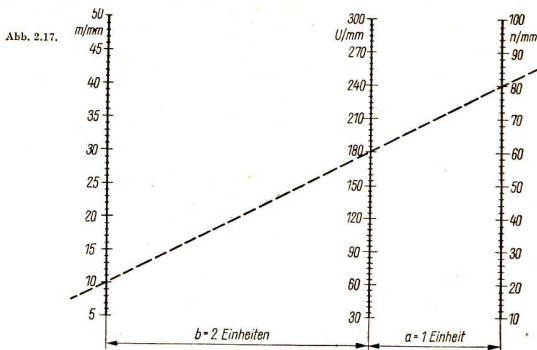
Daraus folgt  $a + b = 3$ . Das bestätigt auch die dritte

Beziehung:  $(a + b)l_3 = 1$

$$(a + b) \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$(a + b) = 3.$$

Das Ergebnis zeigt die Abbildung 2.17.



Ablesebeispiel (gestrichelte Ablesegerade):  $2 \cdot 10 + 2 \cdot 80 = 180$

Man erkennt:

- Durch Leitertafelnomogramme mit drei parallelen Leitern lassen sich alle Funktionen mit drei Veränderlichen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  darstellen, deren analytische Ausdrücke von der Form  $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(y) = c_3 f_3(z)$  sind.

Falls  $f_1(x)$ ,  $f_2(y)$  und  $f_3(z)$  lineare Funktionen sind, erhalten die Leitern gleichmäßige Teilungen. Leitereinheiten und Trägerabstände können z.T. willkürlich gewählt werden, z.T. ergeben sie sich durch Vergleichen des analytischen Ausdrucks der darzustellenden Funktion mit der Schlüsselgleichung für diesen Nomogrammtyp

$$a l_1 f_1(\alpha) + b l_2 f_2(\beta) = (a + b) l_3 f_3(\gamma).$$

### 2.3.3. Dreileitertafelnomogramme mit drei parallelen, gleichmäßig geteilten, gleichläufigen Leitern

Nomogramme dieser Art können sich unterscheiden

- im Abstand der Trägergeraden;
- in Meßbereich und Leitereinheit der drei Leitern.

Es ist zu untersuchen, welche Faktoren diese Größen beeinflussen.

In Abschnitt 2.3.2. wurde festgestellt

$$a l_1 = c_1; \quad b l_2 = c_2;$$

$$a = \frac{c_1}{l_1}; \quad b = \frac{c_2}{l_2}.$$

Das heißt, daß der Abstand der Trägergeraden von den Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  der Veränderlichen in dem analytischen Ausdruck der darzustellenden Funktion und von den Leiteinheiten auf den beiden gesetzten Leitern abhängt. Insbesondere gilt  $a = b$ , d. h., es ergeben sich abstandsgleiche Träger, falls  $c_1 = c_2$  und  $l_1 = l_2$  (vgl. Abschnitt 2.3.1.; Beispiel 10).

Die Einheiten  $l_1$  und  $l_2$  hängen wie alle Leiteinheiten wegen

$$x_m = l[f(\alpha_m) - f(\alpha_0)]$$

vom Meßbereich  $\alpha_0 \dots \alpha_m$  und von der Leiterhöhe  $x_m$  ab. Wenn diese vorgeschrieben sind, sind also  $l_1$  und  $l_2$  nicht frei wählbar (vgl. Abschnitt 2.3.2.; Beispiel 11).

Die Leiteinheit  $l_3$  der Ergebnisleiter hängt ebenfalls von ihrem Meßbereich ab. Dieser ist aber durch die Meßbereiche der gesetzten Außenleitern und durch den analytischen Ausdruck der darzustellenden Funktion bestimmt.

### Beispiel 12:

Leitertafel für das Widerstandsgesetz  $R = R_1 + R_2$  in den Meßbereichen  $0 \Omega \leq R_1 \leq 6 \Omega$ ;  $0 \Omega \leq R_2 \leq 6 \Omega$ .

Da die Koeffizienten der Veränderlichen  $R_1$  und  $R_2$  sowie ihre Meßbereiche gleich sind, ergeben sich bei gleicher Höhe der beiden äußeren Leitern auch gleiche Leiteinheiten. Folglich muß das Nomogramm abstandsgleiche Träger erhalten. Die Leiterhöhe sei zu 36 mm angenommen. Dann folgt:

$$l_1 = \frac{x_m}{\alpha_m - \alpha_0} = \frac{36 \text{ mm}}{6 - 0} = 6 \text{ mm} = l_2;$$

$$a = \frac{c_1}{l_1} = \frac{1}{6} = b.$$

Wird die Tafelbreite mit 80 mm angenommen, so wird  $a = b = 40 \text{ mm}$ .

Berechnung von  $l_3$ :

$$\gamma_m = \alpha_m + \beta_m$$

$$= 6 + 6 = 12$$

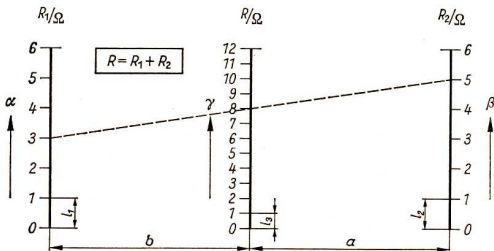
$$\gamma_0 = \alpha_0 + \beta_0$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$l_3 = \frac{36 \text{ mm}}{12 - 0}$$

$$= 3 \text{ mm}.$$

Die Abbildung 2.18. zeigt das Nomogramm.



Ablesebeispiel:  $R = R_1 + R_2$   
 $R = (3 + 5) \Omega = 8 \Omega$

Abb. 2.18.

Ändert sich in  $R = R_1 + R_2$  der Meßbereich von z.B.  $R_2 (0 \Omega \leq R_2 \leq 18 \Omega)$  bei gleicher Leiterhöhe, so verlaufen die Träger nicht mehr abstandsgleich und die Leitereinheit der Ergebnisleiter ändert sich ebenfalls.

Bestimmen Sie für diesen Fall den Abstand der Träger und die Leitereinheit der Ergebnisleiter!

### Beispiel 13:

Werden in  $R = R_1 + R_2$  die Koeffizienten ungleich, so ergeben sich auch bei gleichen Meßbereichen Träger mit verschiedenen Abständen:

$$R = 2R_1 + R_2 \text{ mit } 2 \Omega \leq R_1 \leq 10 \Omega \text{ und } 2 \Omega \leq R_2 \leq 10 \Omega.$$

Leiterhöhe: 40 mm; Tafelbreite: 90 mm

$$l_1 = \frac{x_m}{\alpha_m - \alpha_0} = \frac{40 \text{ mm}}{10 - 2} = 5 \text{ mm} = l_2$$

$$a = \frac{c_1}{l_1} = \frac{2}{5} \quad b = \frac{c_2}{l_2} = \frac{1}{5}$$

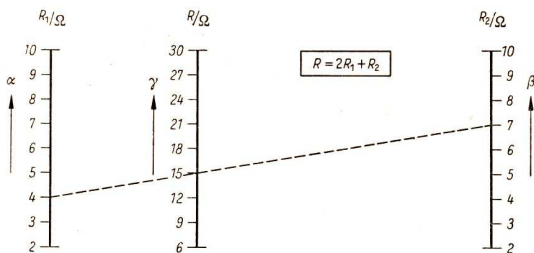
$$b : a = 1 : 2; \quad b = 30 \text{ mm}; \quad a = 60 \text{ mm}$$

$$\gamma_m = 2\alpha_m + \beta_m = 2 \cdot 10 + 10 = 30$$

$$\gamma_0 = 2\alpha_0 + \beta_0 = 2 \cdot 2 + 2 = 6$$

$$l_3 = \frac{40 \text{ mm}}{30 - 6} = \frac{5}{3} \text{ mm}$$

Die Abbildung 2.19. zeigt das Nomogramm.



Ablesebeispiel:  $R = 2R_1 + R_2$   
 $R = (2 \cdot 4 + 7) \Omega = 15 \Omega$

Abb. 2.19.

Enthält der analytische Ausdruck der darzustellenden Funktion einen konstanten Summanden, so wird dadurch lediglich die Ergebnisleiter beeinflusst.

Entwerfen Sie ein Nomogramm mit dem analytischen Ausdruck

$$R = 2R_1 + R_2 + 5 \text{ mit } 2 \Omega \leq R_1 \leq 10 \Omega \text{ und } 2 \Omega \leq R_2 \leq 10 \Omega!$$



## Aufgaben

1. a) Welchen Einfluß hat der Koeffizient von  $R_1$  im Beispiel 13 auf die Lage der Ergebnisleiter?  
b) Wie müßte der Koeffizient von  $R_1$  lauten, wenn die Ergebnisleiter nach rechts anstatt nach links verschoben werden soll?  
c) Welchen Einfluß übt der Koeffizient von  $R_1$  auf den Meßbereich und die Teilung der Ergebnisleiter aus?
2. Es ist eine Leitertafel für die Gleichung  $R = R_1 + 2R_2$  zu entwerfen.  
Gegeben:  $5 \Omega \leq R_1 \leq 45 \Omega$     Leiterhöhe: 80 mm  
 $5 \Omega \leq R_2 \leq 45 \Omega$     Tafelbreite: 90 mm
3. Es ist eine Leitertafel für das Gesetz  $R = R_1 + R_2$  zu entwerfen.  
Gegeben:  $5 \Omega \leq R_1 \leq 55 \Omega$     Tafelhöhe: 100 mm  
 $10 \Omega \leq R_2 \leq 110 \Omega$     Tafelbreite: 90 mm
4. Es ist eine Leitertafel für das Gesetz  $R = R_1 + R_2$  zu entwerfen.  
Gegeben:  $5 \Omega \leq R_1 \leq 60 \Omega$     Tafelhöhe: 80 mm  
 $10 \Omega \leq R_2 \leq 100 \Omega$     Tafelbreite: 90 mm
5. Es ist eine Leitertafel für das Gesetz  $I = I_1 + I_2$  zu entwerfen.  
Gegeben:  $2 \text{ A} \leq I_1 \leq 10 \text{ A}$     Tafelhöhe: 64 mm  
 $4 \text{ A} \leq I_2 \leq 20 \text{ A}$     Tafelbreite: 90 mm
6. Es ist eine Leitertafel für  $R = 2R_1 + 3R_2 + 10 \Omega$  zu entwerfen.  
Gegeben:  $2 \Omega \leq R_1 \leq 10 \Omega$     Leiterhöhe: 80 mm  
 $4 \Omega \leq R_2 \leq 12 \Omega$     Tafelbreite: 100 mm  
Welchen Einfluß übt ein konstanter Summand auf den Meßbereich und die Leiterteilung der Ergebnisleiter aus?
7. Es ist eine Leitertafel für das arithmetische Mittel  $M = \frac{a+b}{2}$  zu entwerfen.  
Gegeben:  $2 \leq a \leq 10$     Tafelhöhe: 80 mm  
 $2 \leq b \leq 10$     Tafelbreite: 90 mm

### 2.3.4. Gegenläufige Leitern

In Abschnitt 2.3.3. wurde gezeigt, daß jede Funktion von der analytischen Form  $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(y) = c_3 f_3(z)$  nomografisch durch eine Leitertafel mit drei parallelen Trägern dargestellt werden kann, wobei die  $x$ - und  $y$ -Leitern auf den beiden äußeren Trägern, die Ergebnisleiter ( $z$ -Leiter) auf dem dazwischenliegenden Träger abzutragen ist. Es entsteht die Frage, wie das Nomogramm sich ändert, wenn die Funktionen der unabhängigen Veränderlichen  $x$  und  $y$  subtraktiv miteinander verknüpft sind:

$$c_1 f_1(x) - c_2 f_2(y) = c_3 f_3(z).$$

Es gibt zwei Wege zur Lösung.

1. Weg: Durch Umstellen kann auf den in Abschnitt 2.3.3. behandelten Fall zurückgegangen werden:

$$c_1 f_1(x) = c_2 f_2(y) + c_3 f_3(z).$$

Dann erscheint allerdings die Ergebnisleiter auf einem der beiden außen liegenden Träger.

2. Weg: Soll die Ergebnisleiter auf dem mittleren Träger verbleiben, ergibt der Vergleich mit der Schlüsselgleichung für die Anlage der Leiter des Subtrahenden etwas grundsätzlich Neues:

$$(a + b)l_3 \cdot f_3(\gamma) = a l_1 f_1(\alpha) + b l_2 f_2(\beta);$$

$$c_3 \cdot f_3(z) = c_1 \cdot f_1(x) - c_2 \cdot f_2(y).$$

Daraus folgt:

$$b \cdot l_2 = -c_2.$$

Da der Leiterabstand  $b$  eine positive Größe ist, muß die Leitereinheit  $l_2$  in diesem Falle negativ werden.

Das bedeutet, daß die  $\beta$ -Leiter in bezug auf die  $\alpha$ - und  $\gamma$ -Leiter in entgegengesetzter Richtung abzutragen ist. Solche Leitern heißen gegenläufige Leitern.

Bei derartigen Leitern muß sinngemäß mit  $\beta_0$  der größte und mit  $\beta_m$  der kleinste Zahlenwert des Meßbereichs bezeichnet werden.

#### Beispiel 14:

Es ist ein Nomogramm für  $I = I_1 - I_2$  zu entwerfen.

Gegeben: Leiterhöhe  $x_m = 64$  mm; Tafelbreite  $a + b = 84$  mm; Meßbereiche  $4 \text{ A} \leq I_1 \leq 12 \text{ A}$ ;  $4 \text{ A} \leq I_2 \leq 12 \text{ A}$ .

Den Meßbereich von  $I$  berechnet man aus

$$\alpha_0 = 4; \quad \alpha_m = 12;$$

$$\beta_0 = 12; \quad \beta_m = 4.$$

Daraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \alpha_0 - \beta_0 = 4 - 12 = -8 \\ \gamma_m &= \alpha_m - \beta_m = 12 - 4 = 8 \end{aligned} \right\} -8 \leq \gamma \leq 8$$

$$l_1 = \frac{x_m}{\alpha_m - \alpha_0} = \frac{64 \text{ mm}}{12 - 4} = 8 \text{ mm}$$

$$l_2 = \frac{x_m}{\beta_m - \beta_0} = \frac{64 \text{ mm}}{4 - 12} = -8 \text{ mm}$$

$$l_3 = \frac{x_m}{\gamma_m - \gamma_0} = \frac{64 \text{ mm}}{8 - (-8)} = 4 \text{ mm}$$

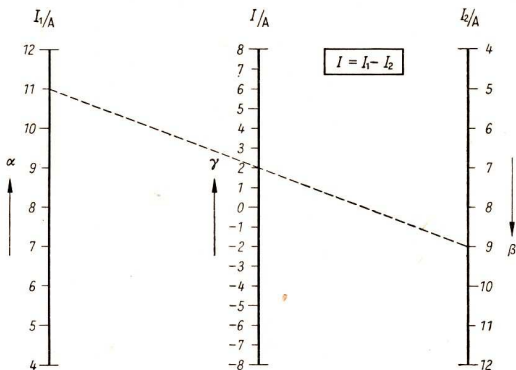
$$a = b = 42 \text{ mm}.$$

Das Ergebnis zeigt die Abbildung 2.20.

#### Aufgaben

- Entwerfen Sie eine Dreileitertafel für die Subtraktion positiver und negativer Zahlen mit einer gegenläufigen Leiter!
- Entwerfen Sie eine Dreileitertafel mit gegenläufiger Leiter für die Funktion  $z = 2x - 3y - 5!$

Abb. 2.20.



Ablesebeispiel:  $I = I_1 - I_2$   
 $I = (11 - 9) A = 2 A$

### 2.3.5. Dreileitertafelnomogramme mit drei parallelen, ungleichmäßig geteilten Leitern

Gesetze, in denen die Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen multipliziert oder dividiert werden müssen, können nicht mit Tafeln mit gleichmäßig geteilten Leitern dargestellt werden.

Diese Gesetze werden zunächst durch Logarithmieren auf eine additive oder subtraktive Form gebracht und dann nach der Schlüsselgleichung so behandelt wie bisher. Alle Vorschriften zum Entwurf von Tafeln mit gleichmäßig geteilten Leitern bleiben gültig.

#### Beispiel 15:

$$F = A \cdot \sigma$$

$$\lg F = \lg A + \lg \sigma$$

$$v = \frac{s}{t} = s \cdot t^{-1}$$

$$\lg v = \lg s - \lg t$$

Vergleich mit der Schlüsselgleichung

$$(a + b)l_3 \cdot f(\gamma) = a l_1 \cdot f(x) + b l_2 \cdot f(\beta) \quad | \quad (a + b)l_3 \cdot f(\gamma) = a l_1 \cdot f(x) - b l_2 f(\beta)$$

In diesen Fällen sind also die Leiterteilungen logarithmisch:

$$f(x) = \lg a; \quad f(\beta) = \lg \beta; \quad f(\gamma) = \lg \gamma.$$

Die Leiterabstände  $a$  und  $b$  sowie die Leitermaßstäbe  $l_1, l_2$  und  $l_3$  ergeben sich dabei von Fall zu Fall aus den zusätzlichen Vorschriften über Meßbereich, Leiterhöhe und Tafelbreite. Dabei ist besonders zu beachten, daß die Leitereinheit die Strecke einer logarithmischen Einheit, das ist die Entfernung des Zahlenwertes 1 vom Zahlenwert 10, darstellt.

Das Berechnen der Abstände für die logarithmische Teilung erfordert erheblichen Zeitaufwand, muß aber meist für jedes Nomogramm gesondert durchgeführt werden. Ein grafisches Hilfsmittel für das Bestimmen dieser Leiterabstände, das diesen Zeitaufwand verringert, ist die sogenannte **Logarithmenharfe**. Mit Hilfe einer einmal sorgfältig konstruierten logarithmischen Leiter kann man entsprechende Leitern mit jeder beliebigen Leitereinheit bestimmen.

In Abbildung 2.21. wurde (am rechten Rand sichtbar) eine logarithmische Leiter mit  $l = 125$  mm sorgfältig konstruiert. Um nun Leitern mit  $l < 125$  mm abgreifen zu können, wurden von den Punkten der Ausgangsleiter Strahlen nach dem 125 mm entfernt gelegenen Punkt  $P$  gezogen. Es ist leicht zu erkennen, daß die logarithmische Teilung der rechten Leiter durch die Strahlen proportional verkleinert wird. Die obere und die untere waagerechte Leiter tragen mm-Teilung. Sie geben die gewünschte Leitereinheit an. Soll z. B. die Leitereinheit auf  $l_1 = 75$  mm verkleinert werden, so wird ein Papierstreifen wie in Abbildung 2.21. an die Zahlen 75 der waagerechten Leitern gelegt. Die Schnittpunkte des Papierstreifens mit den Strahlen werden markiert und mit den entsprechenden Zahlen von 1 bis 10 versehen. Werden für die

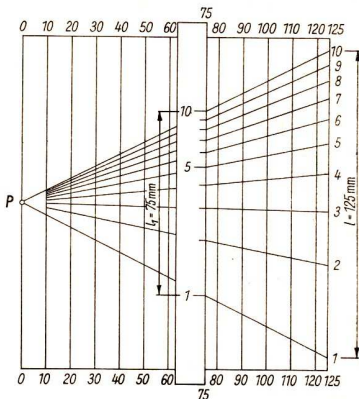


Abb. 2.21.

Leiterteilung Zahlen gebraucht, die beispielsweise zwischen 1 und 2 liegen, wie 1,2; 1,3 usw., so können ihre Abstände in diesem Fall vom Rechenstab auf die Logarithmenharfe übertragen oder nach der Gleichung  $x = l \cdot \lg \alpha$  errechnet werden.

Eine besonders einfache Konstruktion einer Logarithmenharfe ergibt sich bei Verwendung eines Spezialgitterpapiers, das in einer Richtung logarithmisch, in der anderen linear geteilt ist.

Besonders wertvoll ist die Verwendung dieses Gitterpapiers beim Vergrößern der Leitereinheit über die Ausgangseinheit  $l = 125$  mm hinaus. Das könnte an sich durch Verlängern der Strahlen geschehen. Das ist aber oft unpraktisch. In Abbildung 2.22. ist deshalb ein anderer Weg erläutert. Soll z. B. eine logarithmische Leiter von der Höhe 90 mm bei einem Meßbereich  $12 \leq \beta \leq 30$  mit Hilfe der Ausgangsleiter wie in Abbildung 2.21. ( $10 \leq \alpha \leq 100$ , Leiterhöhe 125 mm) dargestellt werden, so wird auf einem Papierstreifen die Leiterhöhe 90 mm durch 2 Striche markiert, die mit den Zahlen 12 und 30 versehen werden, denn sie bilden den Anfang und das Ende der Leiter. Jetzt müssen noch die dazwischenliegenden Zahlen aufgetragen werden. Dazu wird der Papierstreifen mit der Zahl 12 auf die Rasterlinie durch 12 der linken Leiter so gelegt, daß die Zahl 30 des Streifens den Schnittpunkt des Papierstreifens mit der Rasterlinie durch 30 an der linken Leiter bildet. Jetzt können die Schnittpunkte des Papierstreifens mit den übrigen Rasterlinien markiert und mit Zahlen versehen werden.

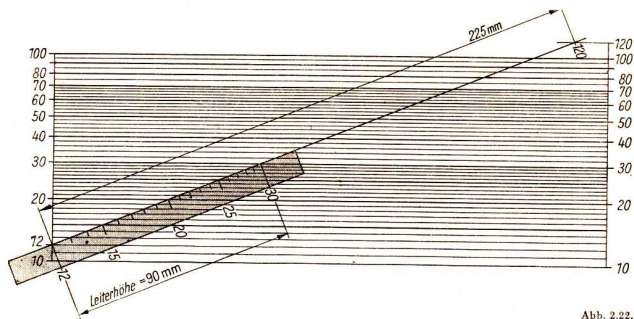


Abb. 2.22.

Die Leitereinheit der neuen Leiter kann man wie folgt errechnen:

$$x_{30} = l \cdot (\lg 30 - \lg 12)$$

$$90 \text{ mm} = l(1,4771 - 1,0792)$$

$$l = \frac{90 \text{ mm}}{0,3979} \approx \frac{90 \text{ mm}}{0,4} = 225 \text{ mm}.$$

Wird die neue logarithmische Leiter bis zur Rasterlinie 120 verlängert, so ist die Strecke von 12 bis 120 die Leitereinheit. Sie muß 225 mm betragen.

#### Beispiel 16:

Es ist ein Nomogramm für das Gesetz  $F = A \cdot \sigma$  mit  $1 \text{ mm}^2 \leq A \leq 10 \text{ mm}^2$ ,  $12 \text{ kp mm}^{-2} \leq \sigma \leq 30 \text{ kp mm}^{-2}$ , der Leiterhöhe 90 mm und der Tafelbreite 100 mm zu entwerfen.

Logarithmiert:  $\lg F = \lg A + \lg \sigma$

Mit  $F = \gamma \text{ kp}$ ,  $A = \alpha \text{ mm}^2$ ;  $\sigma = \beta \text{ kp mm}^{-2}$

ergibt sich:

$$\lg \gamma = \lg \alpha + \lg \beta.$$

Für  $\alpha_0 = 1$ ,  $\beta_0 = 12$  ist  $\gamma_0 = 1 \cdot 12 = 12$ .

Für  $\alpha_m = 10$ ,  $\beta_m = 30$  ist  $\gamma_m = 10 \cdot 30 = 300$ .

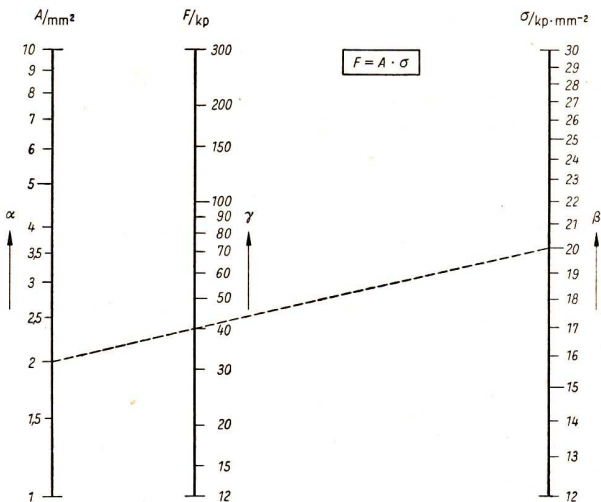
Daraus folgt  $12 \leq \gamma \leq 300$ .

Leitereinheiten:

$$l_1 = \frac{x_m}{\lg \alpha_m - \lg \alpha_0} = \frac{90 \text{ mm}}{\lg 10 - \lg 1} = \frac{90 \text{ mm}}{1 - 0} = 90 \text{ mm}$$

$$l_2 = \frac{y_m}{\lg \beta_m - \lg \beta_0} = \frac{90 \text{ mm}}{\lg 30 - \lg 12} = \frac{90 \text{ mm}}{1,48 - 1,08} = \frac{90 \text{ mm}}{0,4} = 225 \text{ mm}$$

$$l_3 = \frac{x_m}{\lg \gamma_m - \lg \gamma_0} = \frac{90 \text{ mm}}{\lg 300 - \lg 12} = \frac{90 \text{ mm}}{2,48 - 1,08} = \frac{90 \text{ mm}}{1,4} = 64,4 \text{ mm}$$



Ablesebeispiel:  $F = A \cdot \sigma$   
 $F = 2 \cdot 20 \text{ kp} = 40 \text{ kp}$

Abb. 2.23.

Die Leiterabstände sind nicht gleich. Es ergibt sich:

$$\begin{array}{l|l} a \cdot l_1 = 1 & a : b = l_2 : l_1 = 225 \text{ mm} : 90 \text{ mm} = 5 : 2 \\ b \cdot l_2 = 1 & a + b = 100 \text{ mm} \\ & a \approx 71 \text{ mm}; \quad b \approx 29 \text{ mm}. \end{array}$$

Die Abbildung 2.23. zeigt das Nomogramm.

### Beispiel 17:

Es ist eine Leitertafel für das Gesetz zur Berechnung der kinetischen Energie

$$W_k = \frac{G v^2}{2g} \quad (\text{mit } g \approx 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \text{ zu entwerfen.}$$

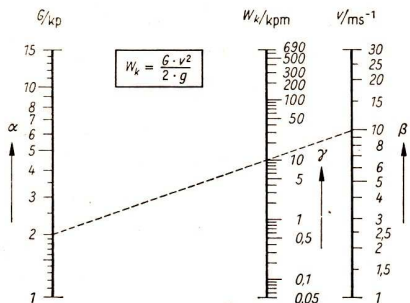
Meßbereiche:  $1 \text{ kp} \leq G \leq 15 \text{ kp}$ ;  $1 \text{ ms}^{-1} \leq v \leq 30 \text{ ms}^{-1}$

Tafelhöhe: 100 mm; Tafelbreite: 120 mm

$\alpha \text{ kp} = G$ ;  $\beta \text{ ms}^{-1} = v$ ;  $\gamma \text{ kpm} = W_k$

Es gilt also:

$$\gamma = \frac{\alpha \cdot \beta^2}{2 \cdot 9,8}$$



Logarithmiert:

$$\lg \gamma = \lg \alpha + 2 \cdot \lg \beta - \lg(2 \cdot 9,8)$$

Meßbereich für  $\gamma$ :

Für  $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 1$  ist

$$\gamma_0 = \frac{1 \cdot 1^2}{2 \cdot 9,8} \approx 0,05.$$

Für  $\alpha_m = 15, \beta_m = 30$  ist

$$\gamma_m = \frac{15 \cdot 30^2}{2 \cdot 9,8} = \frac{13500}{19,6} \approx 690.$$

Leitereinheiten:

$$l_1 = \frac{x_m}{\lg \alpha_m - \lg \alpha_0} = \frac{100 \text{ mm}}{\lg 15 - \lg 1} \approx \frac{100 \text{ mm}}{1,18 - 0} \approx 85 \text{ mm}$$

$$l_2 = \frac{y_m}{\lg \beta_m - \lg \beta_0} = \frac{100 \text{ mm}}{\lg 30 - \lg 1} \approx \frac{100 \text{ mm}}{1,48} \approx 67,7 \text{ mm}$$

Ablesebeispiel:  $W_k = \frac{G \cdot v^2}{2 \cdot g}$

$$W_k = \frac{196 \cdot 10^2}{2 \cdot 9,8} \text{ kpm} = 10 \text{ kpm}$$

Abb. 2.24.

$$l_3 = \frac{z_m}{\lg \gamma_m - \lg \gamma_0} = \frac{100 \text{ mm}}{\lg 690 - \lg 0,051} \approx \frac{100 \text{ mm}}{2,84 - (0,71 - 2)} \approx 24,2 \text{ mm}$$

Leiterabstände:

$$\frac{a l_1}{b l_2} = \frac{1}{2}; \quad a : b = l_2 : 2 l_1 = 67,7 : 170$$

$$a + b = 120 \text{ mm}$$

Daraus folgt:

$$a = \frac{120 \cdot 67,7 \text{ mm}}{67,7 + 170} = \frac{81240}{237,7} \text{ mm} \approx 34,2 \text{ mm};$$

$$b = \frac{120 \cdot 170}{237,7} \text{ mm} = \frac{20400}{237,7} \text{ mm} \approx 85,8 \text{ mm}.$$

Das Nomogramm zeigt die Abbildung 2.24. im Maßstab 1 : 2.

## Aufgaben

- Zeichnen Sie eine Logarithmenharfe entsprechend der Abbildung 2.21. mit  $l = 125 \text{ mm}$  und der Teilung wie am Rechenstab!
- Mit einer Logarithmenharfe sind die folgenden logarithmischen Teilungen zu zeichnen.
  - $x_m = 90 \text{ mm}; \quad l = 90 \text{ mm}; \quad \alpha_0 = 1$
  - $x_m \approx 132 \text{ mm}; \quad l = 90 \text{ mm}; \quad \alpha_0 = 10$
  - $x_m \approx 54,2 \text{ mm}; \quad l = 90 \text{ mm}; \quad \alpha_0 = 1$
  - $x_m = 180 \text{ mm}; \quad l = 60 \text{ mm}; \quad \alpha_0 = 3$

Die Teilpunkte sind mit den entsprechenden Zahlen zu versehen.

- Auf der Leiter der Aufgabe 2 a) ist die Strecke zwischen den Zahlen 1 und 2 logarithmisch in 10 Teile zu teilen und mit Zahlen zu versehen.

3. Mit Hilfe von logarithmisch geteilten Vordrucken sind entsprechend der Abbildung 2.22. die folgenden logarithmischen Teilungen zu zeichnen.

a)  $x_m = 200 \text{ mm}; \quad l = 200 \text{ mm}; \quad \alpha_0 = 1;$

b)  $x_m = 100 \text{ mm}; \quad l = 200 \text{ mm}; \quad \alpha_0 = 1;$

c)  $x_m = 90 \text{ mm}; \quad \alpha_0 = 15; \quad \alpha_m = 55$

d) Beim Parallelverschieben des in Abbildung 2.22. eingezeichneten Papierstreifens bleibt die Leitereinheit ( $l = 225 \text{ mm}$ ) unverändert.

Durch Parallelverschieben eines solchen Papierstreifens im genannten Vordruck nach  $\lg 20$  ist eine logarithmisch geteilte Leiter mit  $\alpha_0 = 20$  und  $\alpha_m = 70$  herzustellen. Die dadurch erhaltene Leiterhöhe  $x_m$  ist rechnerisch zu überprüfen ( $x_m \approx 122 \text{ mm}$ ).

4. Es ist eine Leitertafel für das Gesetz  $F = \frac{d^2 \cdot 3,14}{4} \cdot \sigma$  zu entwerfen.

Gegeben:  $1 \text{ mm} \leq d \leq 10 \text{ mm}; \quad 8 \text{ kp mm}^{-2} \leq \sigma \leq 25 \text{ kp mm}^{-2}$

Tafelhöhe: 150 mm; Tafelbreite: 120 mm

5. Es ist eine Leitertafel für das Hubvolumen eines Kompressors zu entwerfen:

$$V = 0,785 \cdot 10^{-6} \text{ dm}^3 \cdot \text{mm}^{-3} \cdot s \cdot d^2.$$

Gegeben:  $50 \text{ mm} \leq s \leq 250 \text{ mm}; \quad 50 \text{ mm} \leq d \leq 250 \text{ mm}$

Tafelhöhe: 160 mm; Tafelbreite: 105 mm

### 2.3.6. Zusammenfassung

Mit Hilfe von Tafeln mit drei parallelen Leitern lassen sich Funktionen mit drei Veränderlichen darstellen. Die allgemeine Schlüsselgleichung lautet

$$(a + b) l_3 f_3(\gamma) = a l_1 f_1(\alpha) + b l_2 f_2(\beta).$$

Mit gleichmäßig geteilten Dreileitertafeln lassen sich Additionen und Subtraktionen durchführen, wenn man von zwei Leitern ausgeht und die dritte als Ergebnisleiter benutzt.

Die Leitereinheit  $l$  ist abhängig

- a) von der Tafelhöhe,
- b) vom Meßbereich.

Das Leiterabstandsverhältnis  $a : b$  ist abhängig

- a) von den Meßbereichen der Außenleitern, d. h. von den Leitereinheiten  $l_1$  und  $l_2$ ,
- b) von den Koeffizienten der Funktionen der unabhängigen Veränderlichen.

Ein konstanter Summand beeinflußt den Meßbereich der Ergebnisleiter ( $\gamma$ -Leiter) und verschiebt die Zahlenwerte ihrer Teilung. Negative Koeffizienten der Funktionen der unabhängigen Veränderlichen bewirken gegenläufige Teilung der betreffenden Leiter.

Werden Produkte, Quotienten und Potenzen durch Logarithmieren auf Summen bzw. Differenzen zurückgeführt, so ist das Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren mit Hilfe von ungleichmäßig geteilten Leitern möglich.



### 2.3.7. Leitertafelnomogramm für vier Veränderliche

Viele nomografisch darzustellende Gesetze enthalten vier Veränderliche. Sofern sie die Form

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(y) + c_3 f_3(z) = c_4 f_4(u)$$

haben oder durch Logarithmieren auf diese Form gebracht werden können, lassen sie sich durch zwei miteinander gekoppelte Nomogramme mit je drei parallelen Leitern darstellen.

Man führt dazu eine fünfte Hilfsveränderliche  $v$  wie folgt ein:

$$(I) \quad c_1 f_1(x) + c_2 f_2(y) = v.$$

Diese verbindet man dann mit den beiden letzten Veränderlichen zu

$$(II) \quad v + c_3 f_3(z) = c_4 f_4(u).$$

(I) und (II) lassen sich je durch eine Dreileitertafel darstellen, wobei man die  $v$ -Leiter aus (I) zugleich als  $v$ -Leiter in (II) benutzt. Die  $v$ -Leiter braucht dabei keine Einteilung und keine Zahlenwerte zu erhalten, da auf ihr nichts abzulesen ist. Sie heißt **Zapfenlinie**.

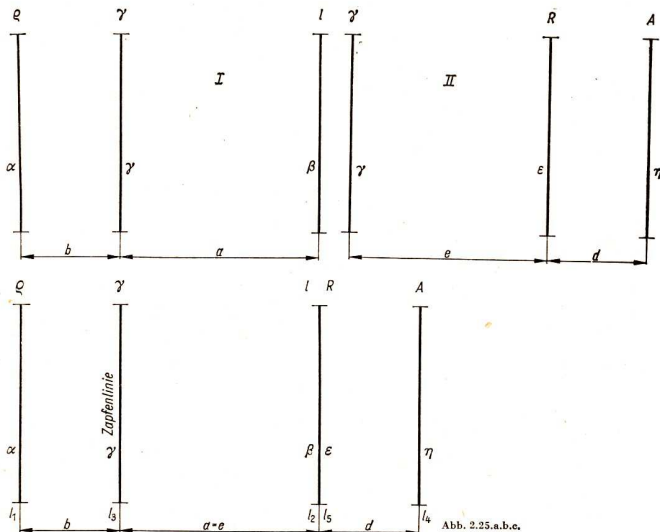


Abb. 2.25.a.b.c.

**Beispiel 18:**

Nomogramm zur Berechnung des elektrischen Widerstands in festen Leitern

mit Hilfe von  $R = \frac{\rho \cdot l}{A}$ .

Durch Logarithmieren ergibt sich:

$$\lg R = \lg \rho + \lg l - \lg A.$$

Mit  $\rho = \alpha \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$ ;

$$l = \beta \text{ m};$$

$$A = \eta \text{ mm}^2;$$

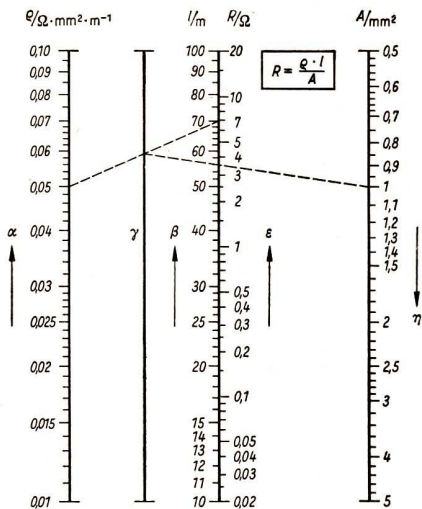
$$R = \varepsilon \Omega$$

und einer neutralen  $\gamma$ -Leiter als Zapfenlinie ergibt sich:

$$(I) \lg \alpha + \lg \beta = \lg \gamma$$

$$(II) \lg \gamma - \lg \eta = \lg \varepsilon.$$

Bei der Vereinigung zu einem einzigen Nomogramm kann schließlich für die  $\beta$ - und die  $\varepsilon$ -Leiter noch derselbe Träger benutzt werden (Abb. 2.25.).



Ablesebeispiel:  $R = \frac{\rho \cdot l}{A}$

Für  $\rho = 0,05 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ ,  $l = 70 \text{ m}$ ,  $A = 1 \text{ mm}^2$  ist

$$R = \frac{0,05 \cdot 70}{1} \Omega = 3,5 \Omega$$

Abb. 2.26.

Die Benutzung solcher Tafeln geht so vor sich, daß zunächst durch eine erste Ablesegerade zu den gegebenen Werten auf der  $\alpha$ - und der  $\beta$ -Leiter ein Punkt auf der Zapfenlinie festgelegt wird. Dieser wird mit dem dritten gegebenen Wert auf der  $\eta$ -Leiter durch eine zweite Ablesegerade verbunden, die auf der  $\varepsilon$ -Leiter den gesuchten Wert anzeigt.

Die Abbildung 2.26. zeigt das Nomogramm für die Meßbereiche:

$$0,01 \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1} \leq \rho \leq 0,1 \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}; 10 \text{ m} \leq l \leq 100 \text{ m}; 0,5 \text{ mm}^2 \leq A \leq 5 \text{ mm}^2.$$

Alle Leitern enthalten logarithmische Teilungen, die  $\eta$ -Leiter ist eine gegenläufige Leiter, da in Gleichung (II)  $\lg \eta$  mit negativem Vorzeichen auftritt.

Übungen zum Entwerfen derartiger Leitertafel-Nomogramme sind in diesem Rahmen nicht möglich. Ebenso werden Dreileitertafeln mit nichtparallelen Trägern hier nicht besprochen.

## 2.4. Netztafel-Nomogramme

### 2.4.1. Das Wesen der Netztafel

Im Abschnitt 2.2.1. wurde gezeigt, daß eine Funktion zwischen zwei Veränderlichen  $y = f(x)$  in einem kartesischen Koordinatensystem durch eine Anzahl diskreter Punkte oder durch eine Kurve dargestellt werden kann. Auch die Funktionen zwischen drei Veränderlichen  $y = f(x, z)$  können in einem Koordinatensystem durch eine Kurve grafisch dargestellt werden, wenn man zunächst einer der unabhängigen Veränderlichen, z. B.  $z$ , einen bestimmten konstanten Wert  $z_1$  zuweist. Wählt man einen anderen Wert  $z_2$ , ergibt sich auch eine andere Kurve. Läßt man jetzt  $z$  veränderlich werden, d. h. alle möglichen Werte  $z_1, z_2, \dots$  durchlaufen, so ergibt sich als Bild eine Kurvenschar (Abb. 2.27.).

Jeder Kurve entspricht ein ganz bestimmter Wert von  $z$ , der für alle Punkte dieser Kurve derselbe ist. Man nennt diese Kurven deshalb auch  $z$ -Gleicher;  $z$  heißt der **Parameter der Kurvenschar**; die gesamte grafische Darstellung eine **Netztafel**.

So wie für alle Punkte einer Kurve die Veränderliche  $z$  denselben Wert hat, sind für alle Punkte einer Parallelen zur  $x$ -Achse die  $y$ -Werte und für alle Punkte einer Parallelen zur  $y$ -Achse die  $x$ -Werte gleich. Erstere heißen deshalb  **$y$ -Gleicher**, letztere  **$x$ -Gleicher**. Man kann diese Scharen von Parallelen zu den Achsen ebenfalls in die Netztafel einzeichnen und dann sagen, daß jede Netztafel drei Kurvenscharen enthält. Jedem Punkt sind dann drei Kurven und damit drei bestimmte Werte der drei Veränderlichen zugeordnet, während bei den Leitertafeln jeder Geraden, die drei zusammengehörige Punkte verbindet, drei Punkte und damit drei bestimmte Werte der drei Veränderlichen zugeordnet sind.

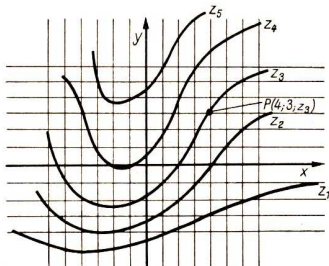


Abb. 2.27.

### 2.4.2. Diagonaltafeln

#### Allgemeine Grundlagen

Besonders einfach werden die Netztafeln, wenn alle drei Kurvenscharen Parallelgeradenscharen sind. Für die  $x$ - und  $y$ -Gleicher trifft das sowieso schon zu, für die  $z$ -Gleicher ist es dann gegeben, wenn die darzustellende Funktion linear in allen drei Veränderlichen ist.

Wenn wieder (wie in 2.2.3. festgelegt wurde) mit  $x_1 \dots, y_1 \dots, z_1 \dots$  die Trägereile, die Beschriftungen an den Trägerpunkten aber mit  $\alpha_1 \dots, \beta_1 \dots, \gamma_1 \dots$  bezeichnet werden, muß die Gleichung der Parallelgeradenschar grundsätzlich die Form

$$f_2(\beta) = c_1 f_1(\alpha) + c_3 f_3(\gamma) \quad \text{haben mit } \gamma \text{ als Parameter.}$$

(Das entspricht der Geradengleichung  $y = mx + n$  aus der analytischen Geometrie mit  $n$  als Parameter.)

Die Lage der Punkte auf den Achsen, die Richtung und die gegenseitige Lage der Scharparallelen ergeben sich mit Hilfe der Leitereinheiten aus den Trägerteilen:

$$x = l_1[f_1(\alpha) - f_1(\alpha_0)];$$

$$y = l_2[f_2(\beta) - f_2(\beta_0)];$$

$$z = l_3[f_3(\gamma) - f_3(\gamma_0)].$$

Ist speziell

$$f_1(\alpha_0) = f_2(\beta_0) = f_3(\gamma_0) = 0,$$

d. h., beginnen alle Leitern die Zählung mit 0 im Koordinatenursprung, so folgt:

$$f_1(\alpha) = \frac{x}{l_1}; \quad f_2(\beta) = \frac{y}{l_2};$$

$$f_3(\gamma) = \frac{z}{l_3},$$

$$\frac{y}{l_2} = c_1 \cdot \frac{x}{l_1} + c_3 \cdot \frac{z}{l_3} \quad \text{oder}$$

$$y = c_1 \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot x + c_3 \cdot \frac{l_2}{l_3} \cdot z.$$

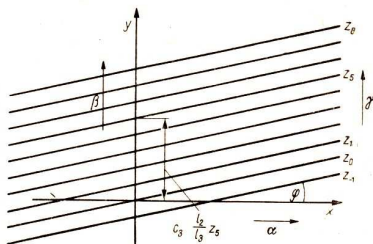


Abb. 2.28.

Der Neigungswinkel  $\varphi$  der Parallelgeradenschar gegen die  $x$ -Achse läßt sich dann durch  $\tan \varphi = c_1 \frac{l_2}{l_1}$  bestimmen und die Lage der einzelnen Parallelen mit dem Parameter  $z_i$  durch die Ordinate ihres Schnittpunkts mit der  $y$ -Achse, nämlich  $c_3 \frac{l_2}{l_3} z_i$  (Abb. 2.28.).

### Diagonaltafeln mit gleichmäßig geteilten Leitern auf beiden Achsen

Diese Netztafeln sind die einfachsten; sie finden allerdings in der Praxis wenig Anwendung, da die durch sie dargestellten Rechenoperationen des Addierens und Subtrahierens im allgemeinen ohne Nomogramm leichter zu bewältigen sind. Infolge der gleichmäßigen Teilung gilt:

$$f_1(\alpha) = \alpha; \quad f_2(\beta) = \beta; \quad f_3(\gamma) = \gamma.$$

#### Beispiel 19:

Es ist eine Netztafel für das Gesetz des OHMSchen Widerstandes  $R_1 + R_2 = R$  zu entwerfen.

Gegeben:  $0 \Omega \leq R_1 \leq 6 \Omega$ ;  $0 \Omega \leq R_2 \leq 6 \Omega$

Tafelhöhe und Tafelbreite je 90 mm

Mit  $R_1 = \alpha \Omega$ ;  $R_2 = \beta \Omega$ ;  $R = \gamma \Omega$  folgt  $\alpha + \beta = \gamma$  oder  $\beta = -\alpha + \gamma$ .

Für die Lösung aller Aufgaben legt man fest, daß die Zahlenwerte der Veränderlichen  $\alpha$  und  $\beta$  immer auf der Abszissen- bzw. Ordinatenachse aufgetragen werden. Die dritte Veränderliche  $\gamma$  soll immer als Parameter dienen.

Wegen  $\gamma = \alpha + \beta$  folgt  $\gamma_0 = \alpha_0 + \beta_0 = 0 + 0 = 0$  und  $\gamma_m = \alpha_m + \beta_m = 6 + 6 = 12$ , also  $0 \leq \gamma \leq 12$ . Damit ist  $\gamma_1 = 1$  und  $\gamma_{12} = 12$ .

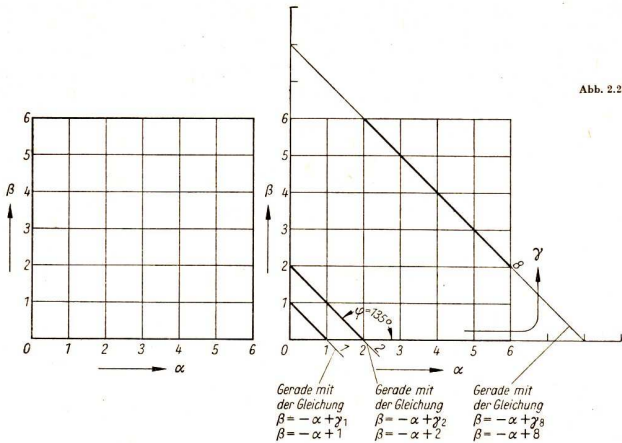


Abb. 2.29.

Die Leitereinheiten auf den Achsen ergeben sich wie folgt:

$$l_1 = \frac{x_m}{\alpha_m - \alpha_0} = \frac{90 \text{ mm}}{6 - 0} = 15 \text{ mm}; \quad l_2 = \frac{y_m}{\beta_m - \beta_0} = \frac{90 \text{ mm}}{6 - 0} = 15 \text{ mm}.$$

Die Richtung der Diagonalen ergibt sich aus

$$\tan \varphi = \frac{l_2}{l_1} \cdot \epsilon_1 \quad \text{mit } \epsilon_1 = -1 \text{ zu}$$

$$\tan \varphi = \frac{15 \text{ mm}}{15 \text{ mm}} \cdot (-1) = -1;$$

$$\varphi = 135^\circ \text{ (Abb. 2.29).}$$

Die Beschriftung der Diagonalen ermittelt man am besten aus den Schnittpunkten mit der  $\beta$ -Leiter durch Einsetzen von  $\alpha_0$  in die Gleichung

$$\beta = -\alpha + \gamma. \quad \text{Das ergibt}$$

$$\beta = 0 + \gamma, \text{ also } \beta = \gamma.$$

Das bedeutet, daß in diesem Falle die Bezifferung der  $\beta$ -Leiter gleichzeitig die Beschriftung der jeweiligen Parallelen darstellt (Abb. 2.30).

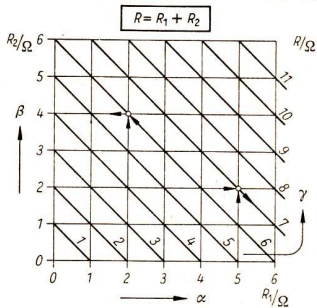


Abb. 2.30.

Ablesebeispiel für

Addition

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + \beta \\ R &= R_1 + R_2 \\ R &= (5 + 2)\Omega = 7\Omega \end{aligned}$$

Subtraktion

$$\begin{aligned} \beta &= \gamma - \alpha \\ R_2 &= R - R_1 \\ R_2 &= (6 - 2)\Omega = 4\Omega \end{aligned}$$

### Diagonaltafeln mit logarithmischen Leitern auf beiden Achsen

Sollen analytische Ausdrücke, die die Form eines Produkts oder eines Quotienten haben, durch Diagonaltafel-Nomogramme dargestellt werden, werden sie zunächst logarithmiert:

$$y = x \cdot z$$

$$\lg y = \lg x + \lg z.$$

Unter Verwendung logarithmisch geteilter Leitern auf den Achsen lassen sie sich dann wie die bereits besprochenen Funktionen behandeln.

#### ■ Beispiel 20:

Es ist eine Netztafel für das Gesetz  $v = \frac{d \cdot 3,14 \cdot n}{1000 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-1}}$  zu entwerfen.

Es bedeuten

$v$ : Schnitt- oder Umfangsgeschwindigkeit in  $\text{m} \cdot \text{min}^{-1}$ ,

$d$ : Werkstückdurchmesser in mm,

$n$ : Umdrehungszahl des Werkstückes in  $\text{min}^{-1}$ .

Gegeben:  $1 \text{ mm} \leq d \leq 100 \text{ mm}$ ;  $1 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1} \leq v \leq 100 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$

Tafelhöhe und Tafelbreite je 100 mm

$n$  gestuft nach einer geometrischen Folge:  $19/30/47,5/75/118/190/300/474 \text{ min}^{-1}$ .

Es ist ratsam, für  $d$  und  $v$  die  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Werte zu wählen, da in den genannten Intervallen alle Zwischenwerte auftreten können, die Drehzahl  $n$  dagegen als Parameter  $\gamma$  zu nehmen, da von ihr nur die bestimmten angegebenen Werte benötigt werden.

Mit  $d = \alpha \text{ mm}$ ;  $v = \beta \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$ ;  $\frac{3,14 n}{1000} = \gamma \text{ min}^{-1} \cdot \text{m} \cdot \text{mm}^{-1}$  ergibt sich

$$\beta = \alpha \cdot \gamma \quad \text{oder} \quad \lg \beta = \lg \alpha + \lg \gamma.$$

Für die Leitereinheiten findet man:

$$l_1 = \frac{x_m}{\lg \alpha_m - \lg \alpha_0} = \frac{100 \text{ mm}}{\lg 100 - \lg 1} = \frac{100 \text{ mm}}{2 - 0} = 50 \text{ mm} = l_2.$$

Der Neigungswinkel der Parallelschar ergibt sich aus

$$\tan \varphi = c_1 \frac{l_2}{l_1} = 1 \cdot \frac{100 \text{ mm}}{100 \text{ mm}} = 1; \quad \varphi = 45^\circ.$$

Die Bezifferung der Diagonalen ist durch die Stufung vorgeschrieben. Infolgedessen muß diesmal die Lage der Diagonalen in der Netztafel bestimmt werden. Das geschieht am besten für  $\alpha = 1$ , d. h. durch Bestimmen des  $\beta$ -Wertes des Punktes, durch den die Diagonale auf der  $\beta$ -Achse verlaufen muß.

Für  $n = 19 \text{ min}^{-1}$  ergibt sich  $\lg \beta = \lg \alpha + \lg \gamma = \lg 1 + \lg \frac{3,14 \cdot 19}{1000}$

$$\lg \beta = 0 + \lg \frac{3,14 \cdot 19}{1000} \approx 0,05.$$

Dieser Zahlenwert ist ungünstig, weil er außerhalb des Meßbereichs von  $\beta$  liegt. Wird  $\beta$  gleich 1 gesetzt, so ergibt sich die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden mit der  $\alpha$ -Leiter.

Für  $\beta = 1$  und  $n = 19 \text{ min}^{-1}$  folgt

$$\lg 1 = \lg \alpha + \lg \frac{3,14 \cdot 19}{1000}$$

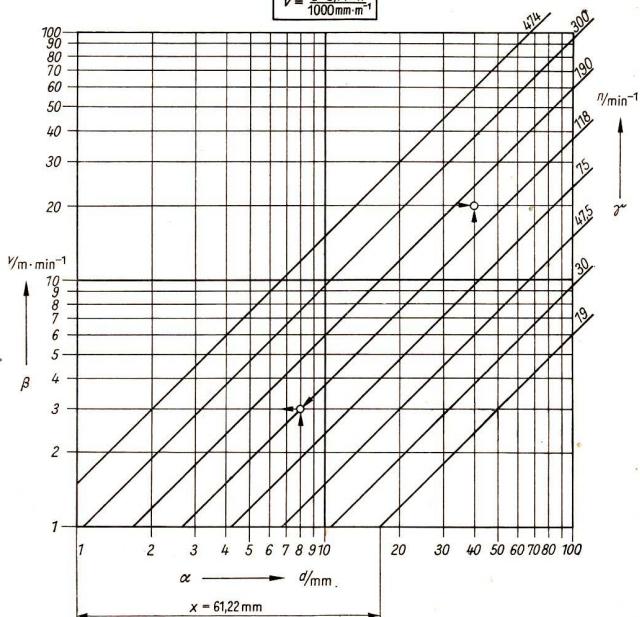
$$0 = \lg \alpha + \lg \frac{3,14 \cdot 19}{1000}$$

$$\lg \alpha = -(\lg 3,14 + \lg 19 - \lg 1000)$$

$$\lg \alpha = -0,49693 - 1,27875 + 3 = 1,22432$$

$$\alpha \approx 16,8.$$

$$v = \frac{d \cdot 3,14 \cdot n}{1000 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-1}}$$



Ablesebeispiele: a) Für  $d = 8 \text{ mm}$  und  $n = 118 \text{ min}^{-1}$  ist  $v = 3 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$

b) Für  $d = 40 \text{ mm}$  und  $v = 20 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$  liegt die günstigste Drehzahl  $n$  zwischen  $118 \text{ min}^{-1}$  und  $190 \text{ min}^{-1}$ .

Es wird im allgemeinen die nächst kleinere genommen, also  $n = 118 \text{ min}^{-1}$

Abb. 2.31.

Dieser Zahlenwert ist brauchbar. Um den Punkt möglichst genau zu finden, errechnet man seinen Abstand vom Ursprung in Millimetern.

$$x = l_1 \cdot \lg \alpha$$

$$x = 50 \cdot 1,22432 \text{ mm}$$

$$x = 61,2 \text{ mm.}$$

Durch diesen Punkt der  $\alpha$ -Leiter geht die Diagonale für  $n = 19 \text{ min}^{-1}$ . Die Lage der übrigen Diagonalen könnte auf dieselbe Weise ermittelt werden. Man nutze aber folgende Möglichkeit:

Wegen der Abstufung der Umdrehungszahlen nach einer geometrischen Folge sind die Abstände der Diagonalen gleich. Zeichnet man also außer der Diagonale für die kleinste Drehzahl noch die Diagonale für die größte Umdrehungszahl ein, so kann man den Abstand beider Geraden in sieben gleiche Teile teilen (weil es acht Umdrehungszahlen sind). Das hat den Vorteil, daß die Rechenarbeit erspart und die unvermeidbare Zeichentoleranz gleichmäßig auf alle Diagonalen verteilt wird (Abb. 2.31.).

### Beispiel 21:

Es ist eine Netztafel für die Formel des Volumens eines regelmäßigen sechseckigen geraden Prismas  $V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot s^2 \cdot h$  zu entwerfen.

Gegeben:  $4 \text{ mm} \leq s \leq 20 \text{ mm}$ ;  $l_1 = 200 \text{ mm}$ ;

$2 \text{ mm} \leq h \leq 20 \text{ mm}$ ;  $l_2 = 100 \text{ mm}$ ;

$V$  gestuft:  $50/100/150/200/250/300/400/500/600/700/800/900/1000 \text{ mm}^3$ .

Es ist  $V$  gestuft gegeben. Deshalb ist es günstig, wenn die Werte für  $V$  auf den Diagonalen dargestellt werden. Die Ausgangsformel wird aus diesem Grund umgestellt:

$$h = \frac{2V}{\sqrt{3} \cdot s^2} = \frac{1,15V}{s^2} = s^{-2} \cdot 1,15 \cdot V.$$

Mit  $\beta \text{ mm} = h$ ;  $\alpha \text{ mm} = s$ ;  $\gamma \text{ mm}^3 = 1,15 \cdot V$  ergibt sich  $\beta = \alpha^{-2} \cdot \gamma$ .

Logarithmiert:  $\lg \beta = -2 \cdot \lg \alpha + \lg \gamma$ .

Die Leitereinheiten sind diesmal gegeben. Dafür muß berechnet werden die Tafelhöhe:

$$\begin{aligned} y_m &= l_2(\lg \beta_m - \lg \beta_0) \\ &= 100(\lg 20 - \lg 2) \text{ mm} \\ &= 100(1,30103 - 0,30103) \text{ mm} \\ y_m &= 100 \text{ mm}; \end{aligned}$$

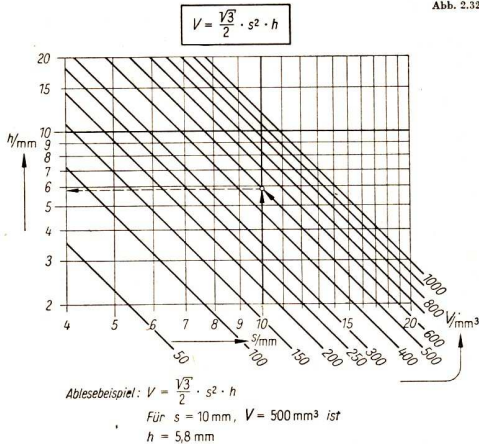
Tafelbreite:

$$\begin{aligned} x_m &= l_1(\lg \alpha - \lg \alpha_0) \\ &= 200(\lg 20 - \lg 4) \text{ mm} \\ &= 200(1,30103 - 0,60206) \text{ mm} \\ x_m &= 139,8 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Die Richtung der Diagonalen folgt aus:

$$\tan \varphi = c_1 \cdot \frac{l_2}{l_1} = -2 \cdot \frac{100}{200} = -1; \quad \varphi = 135^\circ.$$





Die Berechnung der Lage der durch die vorgeschriebene Stufung festliegenden Diagonalen erfolgt wieder durch Berechnung der Abszissen der Schnittpunkte auf der  $x$ -Leiter.

Für  $V = 50 \text{ mm}^3$ ,  $\beta_0 = 2$  und  $\alpha_0 = 4$  folgt

$$\gamma = 1,15 \cdot 50 = 57,5 \quad \text{und wegen } \lg \alpha = \frac{\lg \gamma - \lg \beta_0}{2} = \frac{\lg 57,5 - \lg 2}{2} \approx 0,729$$

und  $\lg \alpha_0 = \lg 4 \approx 0,602$  schließlich

$$x = l_1 (\lg \alpha - \lg \alpha_0) = 200 (0,729 - 0,602) \text{ mm}$$

$$x \approx 25,4 \text{ mm.}$$

Entsprechend werden die Werte für die übrigen vorgeschriebenen Stufen berechnet.

$V$	50	100	150	200	250	300	400	500	600	...
$x$	25,4	55,6	73,1	85,7	95,3	103,3	...	...		

Die Netztafel für die Bestimmung des Volumens der Sechskantsäule zeigt die Abbildung 2.32.

*Allgemeine Gleichungsform für Netztafeln mit ein oder zwei logarithmisch geteilten Achsen*

Alle Funktionen mit analytischen Ausdrücken der Form  $y = c \cdot x^m \cdot z$  können im doppelt logarithmisch geteilten Netz durch Diagonaltafeln dargestellt werden. Mit  $x \hat{=} \alpha$ ,  $y \hat{=} \beta$ ,  $c \cdot z \hat{=} \gamma$  ergibt sich

$$\beta = \alpha^m \cdot \gamma \quad \text{oder logarithmisch } \lg \beta = m \lg \alpha + \lg \gamma.$$

Man erkennt:

1. Für die Darstellung im doppelt logarithmisch geteilten Netz sind Potenzfunktionen geeignet. Der Exponent  $m$  bestimmt (zusammen mit den Einheiten der auf den Achsen abgetragenen  $\alpha$ - und  $\beta$ -Leitern) die Steigung der Parallelen:

$$\tan \varphi = m \cdot \frac{l_2}{l_1}.$$

2. Durch  $\lg \gamma$  wird die Lage der einzelnen Geraden der Schar durch den Schnittpunkt mit der  $\beta$ -Achse festgelegt. Falls  $\alpha_0 = 1$  und  $\beta_0 = 1$ , ist  $\lg \gamma$  die Ordinate dieses Schnittpunkts.

Auch Exponentialfunktionen von der allgemeinen Form  $y = c \cdot a^x \cdot z$  können durch Diagonaltafeln dargestellt werden. Mit  $x \cong \alpha$ ;  $y \cong \beta$ ;  $cz \cong \gamma$  ergibt sich  $\beta = a^\alpha \cdot \gamma$  oder logarithmisch  $\lg \beta = \alpha \cdot \lg a + \lg \gamma$ .

In diesem Fall ist aber die  $\alpha$ -Leiter mit gleichmäßiger Teilung zu versehen, während die  $\beta$ -Leiter logarithmisch zu teilen ist. Es ergibt sich also ein einfach logarithmisch geteiltes Netz.

Man erkennt:

1. Die Richtung der Parallelen ist durch den Logarithmus der Basis der Exponentialfunktion ( $\lg a$ ) im Zusammenhang mit den Leitereinheiten der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Leiter bestimmt.
2. Die Lage der einzelnen Geraden ist wie oben durch  $\lg \gamma$  mit Hilfe des Schnittpunkts auf der  $\beta$ -Achse festgelegt.

#### Beispiel 22:

Es ist eine Netztafel zur Bestimmung des Endguthabens bei Verzinsung durch Zinseszinsen nach der Gleichung  $k_n = k_0 \cdot r^n$  aufzustellen.

Dabei bedeutet:  $k_0$  das Anfangsguthaben in MDN;

$k_n$  das Endguthaben in MDN nach  $n$  Jahren;

$r$  den Zinsfaktor ( $r = 1 + \frac{p}{100}$ , wenn  $p\%$  der Zinsfuß ist).

Gegeben:  $1 \text{ MDN} \leq k_0 \leq 10 \text{ MDN}$ ;  $l_1 = 5 \text{ mm}$ ;

$1 \text{ MDN} \leq k_n \leq 40 \text{ MDN}$ ;  $l_2 = 90 \text{ mm}$ ;

$0 \text{ Jahre} \leq n \leq 30 \text{ Jahre}$ ; Zinsfuß:  $4\%$  ( $r = 1,04$ ).

Mit  $n = \alpha$  Jahre;  $k_n = \beta$  MDN;  $k_0 = \gamma$  MDN folgt  $\beta = \gamma \cdot r^\alpha$ .

Logarithmiert:  $\lg \beta = \alpha \cdot \lg r + \lg \gamma$ .

Die Leitereinheiten sind gegeben, daraus folgt die Richtung der Geraden.

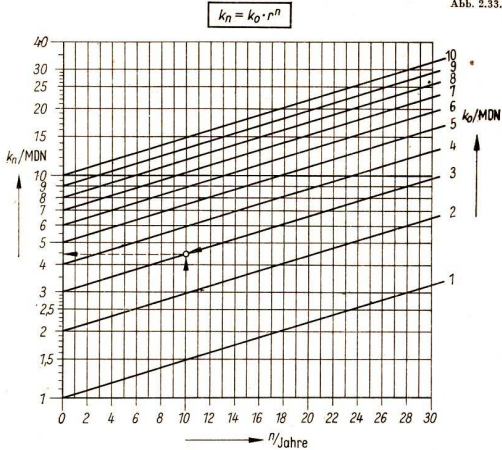
$$\tan \varphi = \frac{l_2}{l_1} \cdot \lg r = \frac{90}{5} \cdot \lg 1,04$$

$$\tan \varphi = 18 \cdot 0,01703$$

$$\tan \varphi \approx 0,307; \quad \varphi \approx 17^\circ$$

Wegen  $\alpha_0 = 0$  folgt  $\lg \beta = \lg \gamma$ , also  $\beta = \gamma$ . Die Bezifferung der einzelnen Diagonalen stimmt also mit der Beschriftung ihrer Schnittpunkte auf der  $\beta$ -Achse überein.

Die Abbildung 2.33. zeigt die Netztafel.



Ablesebeispiel:  $k_n = k_0 \cdot r^n$

Für  $n = 10$  Jahre,  $k_0 = 3$  MDN, Zinsfuß  $\beta = 4\%$  ist

$$k_n = 4,40 \text{ MDN}$$

### Aufgaben

1. Es ist eine Netztafel für die Gleichung  $I - I_1 = I_2$  zu entwerfen.  $I_2$  gestuft von 1 A zu 1 A.

Gegeben:  $0 \text{ A} \leq I \leq 6 \text{ A}$ ;  $0 \text{ A} \leq I_1 \leq 6 \text{ A}$

Tafelhöhe und Tafelbreite je 90 mm

2. Es ist eine Netztafel für die Gleichung  $t_{GM} = \frac{10 \text{ mm}}{n \cdot s}$  zu entwerfen.

Es bedeuten

$t_{GM}$ : Grundzeit-Maschine für das Abdrehen eines Werkstückes in min;

$n$ : Drehzahl des Werkstückes in  $\text{min}^{-1}$ ;

$s$ : Vorschub je Umdrehung senkrecht zur Schnittrichtung in mm.

Gegeben:  $0,03 \text{ mm} \leq s \leq 6 \text{ mm}$ ;  $0,02 \text{ min} \leq t_{GM} \leq 5 \text{ min}$ ;  $n$  gestuft nach einer geometrischen Folge: 19/30/47,5/75/118/190/300/474  $\text{min}^{-1}$ ;

Tafelhöhe und Tafelbreite je 150 mm.

3. In ein doppelt logarithmisch geteiltes Netz sind die den folgenden Gleichungen entsprechenden Geraden einzuzeichnen.

a)  $\beta = 2 \cdot \alpha^2$       b)  $\beta = 3 \cdot \alpha^2$       c)  $\beta = 4 \cdot \alpha^2$       d)  $\beta = 0,5 \cdot \alpha^2$

4. In ein doppelt logarithmisch geteiltes Netz sind die den folgenden Gleichungen entsprechenden Geraden einzuzeichnen.
- a)  $\beta = \alpha^2$       b)  $\beta = 3\alpha$       c)  $\beta = \sqrt{\alpha}$       d)  $\beta = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$       e)  $\beta = \frac{1}{2\alpha}$
5. In ein einfach logarithmisch geteiltes Netz sind die den folgenden Gleichungen entsprechenden Geraden einzuzeichnen.
- a)  $\beta = 2^\alpha$       b)  $\beta = 2 \cdot 2^\alpha$       c)  $\beta = \left(\frac{5}{3}\right)^\alpha$   
d)  $\beta = 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^\alpha$       e)  $\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^\alpha$       f)  $\beta = \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$
6. In ein einfach und ein doppelt logarithmisch geteiltes Netz sind Geraden in beliebiger Lage zu zeichnen und die ihnen entsprechenden Gleichungen aufzustellen. Die ermittelten Gleichungen sind durch Ablesebeispiele zu überprüfen.

### 2.4.3. Strahlentafeln

#### Allgemeine Grundlagen

Eine weitere einfache Netztafel ergibt sich, wenn die Kurvenschar ein Strahlenbüschel ist. Die Gleichung muß dann grundsätzlich die Form  $f_2(\beta) = c_1 f_3(\gamma) \cdot f_1(\alpha) + c_2$  mit  $\gamma$  als Parameter haben. (Das entspricht der Geradengleichung  $y = mx + n$  mit  $m$  als Parameter.)

Mit  $x = l_1[f_1(\alpha) - f_1(\alpha_0)]$ ;

$y = l_2[f_2(\beta) - f_2(\beta_0)]$ ;

$z = l_3[f_3(\gamma) - f_3(\gamma_0)]$

folgt, falls  $f_1(\alpha_0) = f_2(\beta_0) = f_3(\gamma_0) = 0$ , schließlich

$$\frac{y}{l_2} = c_1 \frac{z}{l_3} \cdot \frac{x}{l_1} + c_2 \quad \text{oder}$$

$$y = \frac{c_1 \cdot l_2}{l_1 \cdot l_3} \cdot z \cdot x + l_2 c_2$$

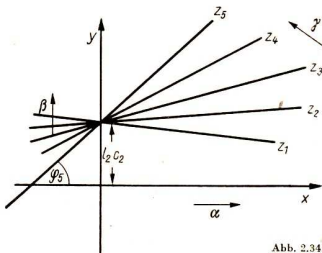


Abb. 2.34.

als grundlegende Form der analytischen Ausdrücke von Funktionen, die sich durch Strahlentafeln darstellen lassen. Der Neigungswinkel  $\varphi_i$  der einzelnen Strahlen ergibt sich aus  $\tan \varphi_i = \frac{c_1 l_2}{l_1 l_3} z_i$ .

Das Zentrum des Büschels liegt auf der  $y$ -Achse im Punkte mit der Ordinate  $l_2 c_2$  (Abb. 2.34.).

#### Strahlentafeln mit gleichmäßig geteilten Leitern auf beiden Achsen

Falls  $f_1(\alpha) = \alpha$ ,  $f_2(\beta) = \beta$ ,  $f_3(\gamma) = \gamma$  gesetzt werden kann, ergeben sich gleichmäßig geteilte Leitern auf den Achsen, und die Strahlentafel nimmt die einfachste Gestalt an, die möglich ist.

### Beispiel 23:

Es ist eine Strahlentafel für die Gleichung  $v = \frac{d \cdot 3,14 \cdot n}{1000 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-1}}$  zu entwerfen.

Gegeben:  $0 \text{ mm} \leq d \leq 540 \text{ mm}$ ;  $0 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1} \leq v \leq 45 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$ ;

$n$  gestuft: 19/30/47,5/75/118/190/300/474  $\text{min}^{-1}$ ;

Tafelbreite: 135 mm; Tafelhöhe: 90 mm.

Mit  $d = \alpha \text{ mm}$ ;  $v = \beta \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$ ;  $\frac{3,14 \cdot n}{1000} = \gamma \text{ min}^{-1} \cdot \text{m} \cdot \text{mm}^{-1}$  ergibt sich

$$\beta = \gamma \cdot \alpha.$$

Diese Gleichung läßt sich im gleichmäßig geteilten Netz darstellen.

Die Leitereinheiten auf den Achsen ergeben sich wie folgt:

$$l_1 = \frac{x_m}{\alpha_m - \alpha_0} = \frac{135 \text{ mm}}{540 - 0} = 0,25 \text{ mm};$$

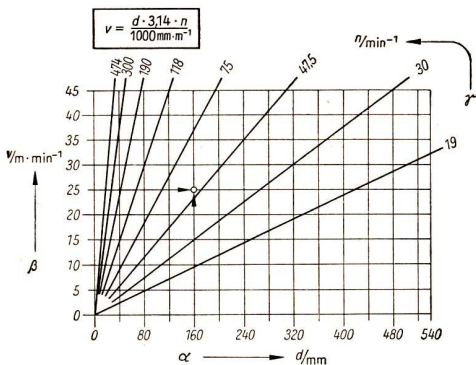
$$l_2 = \frac{y_m}{\beta_m - \beta_0} = \frac{90 \text{ mm}}{45 - 0} = 2 \text{ mm}.$$

Die Neigungswinkel  $\varphi_i$  der einzelnen Strahlen ergeben sich, falls  $l_3 = 1$  gesetzt wird, wie folgt:

$$\tan \varphi_i = \frac{c_1 z_i \cdot l_2}{l_1} = \frac{3,14 \cdot n_i}{1000} \cdot \frac{l_2}{l_1} \text{ min} = \frac{3,14 \cdot 2}{1000 \cdot 0,25} \cdot n_i \text{ min} \approx 0,025 \cdot n_i \text{ min}.$$

Für  $n_i = 19 \text{ min}^{-1}$  ergibt sich  $\tan \varphi_{19} = 0,025 \cdot 19 \approx 0,475$ ;  $\varphi_{19} \approx 25,5^\circ$ .

Entsprechend können die Neigungswinkel für die anderen Strahlen berechnet werden. Es ergibt sich die Abbildung 2.35.



Ablesebeispiel:  $v = \frac{d \cdot 3,14 \cdot n}{1000 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-1}}$

Für  $d = 160 \text{ mm}$ ,  $v = 25 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$  ist  
 $n = 47,5 \text{ min}^{-1}$

Abb. 2.35.

### Strahlentafeln mit logarithmisch geteilten Leitern auf den Achsen

Sofern die eine Veränderliche im Exponenten einer Potenz steht, kann man durch Logarithmieren die für Strahlentafeln erforderliche Form der Gleichung herstellen. In der einfachsten Form ist das der Fall bei dem Ausdruck

$$y = z^x;$$

$$\lg y = x \cdot \lg z \quad \text{bzw.}$$

$$\lg \beta = \alpha \cdot \lg \gamma.$$

Das erfordert eine logarithmische Teilung auf der  $\beta$ -Achse, eine lineare auf der  $\alpha$ -Achse.

#### Beispiel 24:

Es ist eine Strahlentafel für die Zinseszinsformel  $k_n = k_0 \cdot r^n$  zu entwerfen.

Gegeben:  $1000 \text{ MDN} \leq k_n \leq 4000 \text{ MDN}$ ;  $k_0 = 1000 \text{ MDN}$  sei konstant;

0 Jahre  $\leq n \leq 25$  Jahre; Zinsfuß  $p\%$  gestuft:  $2/3/4/5\%$ ;

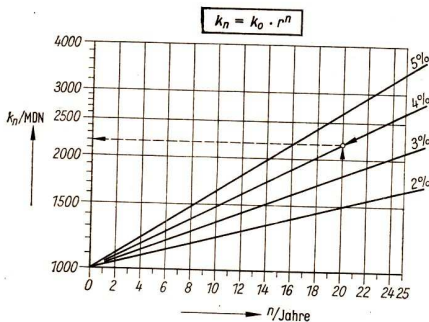
Tafelbreite: 125 mm;  $l_2 = 150 \text{ mm}$ .

Zunächst wird die Form der gegebenen Gleichung untersucht, um festzustellen, in welchem Netz sie darstellbar ist. Wählt man für  $k_n$  die  $\beta$ -Leiter und für  $n$  die  $\alpha$ -Leiter, so erhält die Gleichung die Form  $\beta = k_0 \cdot r^\alpha$ .

Setzt man nun  $r = \gamma$ , so ist  $\beta = k_0 \cdot \gamma^\alpha$  oder  $\lg \beta = \alpha \cdot \lg \gamma + \lg k_0$ .

Gleichungen dieser Form sind, wie bereits festgestellt wurde, im einfach logarithmisch geteilten Netz darstellbar.

Man setzt  $\beta \text{ MDN} = k_n$ ;  $\alpha \text{ Jahre} = n$ ;  $\gamma = r = 1 + \frac{p}{100}$ .



Ablesebeispiel:  $k_n = k_0 \cdot r^n$

Für  $n = 20$  Jahre,  $k_0 = 1000 \text{ MDN}$ ,  $p\% = 4\%$  ist

$$k_n \approx 2200 \text{ MDN}$$

Die Leitereinheit für die  $\alpha$ -Leiter errechnet man wie folgt:

$$l_1 = \frac{x_m}{\alpha_m - \alpha_0} = \frac{125 \text{ mm}}{25 - 0} = 5 \text{ mm}.$$

$l_2 = 150 \text{ mm}$  war gegeben.

Die Richtungen der Strahlen für verschiedene Werte von  $p$  erhält man mit  $l_3 = 1$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \tan \varphi_p &= \frac{l_2}{l_1} \lg \left( 1 + \frac{p}{100} \right) \\ &= \frac{150 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} \cdot \lg r_p = 30 \lg r_p. \end{aligned}$$

Abb. 2.36.

Für die vorgeschriebenen Zinssätze ergibt sich:

$p$	2	3	4	5
$r$	1,02	1,03	1,04	1,05
$\lg r$	0,0086	0,01284	0,01703	0,02119
$\tan \varphi$	0,258	0,385	0,511	0,636
$\varphi$	14,5°	21,1°	27,1°	32,5°

Die Abbildung 2.36. zeigt die gesuchte Strahlentafel.

#### Aufgaben

1. Es ist eine Strahlentafel für die Gleichung  $A = F \cdot s$  zu entwerfen.

Gegeben:  $0 \text{ kpm} \leq A \leq 100 \text{ kpm}$ ;  $0 \text{ kp} \leq F \leq 10 \text{ kp}$ ;  
 $s$  gestuft: 1/2/3/4 bis 10/20/25/50/100 m;  
 Tafelbreite und Tafelhöhe je 100 mm.

2. Es ist eine Strahlentafel für die Leistungsformel  $P = \frac{F \cdot v}{102 \text{ kpms}^{-1} \text{ kW}^{-1}}$  zu entwerfen,

Gegeben:  $0 \text{ kW} \leq P \leq 20 \text{ kW}$ ;  $0 \text{ kp} \leq F \leq 1000 \text{ kp}$ ;  $v$  gestuft: 0,5/1/2/3/4  $\text{ms}^{-1}$ ;  
 Tafelbreite und Tafelhöhe je 100 mm.

#### 2.4.4. Netztafelnomogramme für vier Veränderliche

In 2.3.7. wurde erarbeitet:

Enthält eine Funktion vier Veränderliche, so läßt sich ihr analytischer Ausdruck durch Einführen einer Hilfsveränderlichen in zwei Gleichungen mit je drei Veränderlichen zerlegen. Für jede Gleichung wird eine Tafel entworfen und beide werden schließlich mit Hilfe der gemeinsamen Hilfsveränderlichen miteinander verbunden.

Das wurde dort für Leitertafeln gezeigt. Es läßt sich aber auch für zwei Netztafeln durchführen. (Auch die Verbindung einer Netztafel und einer Leitertafel ist möglich.) Das Entwerfen derartiger verbundener Netztafeln übersteigt diesen Rahmen. Das folgende Beispiel zeigt eine fertige verbundene Netztafel, um das prinzipielle Aussehen und die Benutzung zu zeigen.

#### Beispiel 25:

Verbundene Netztafel zum Bestimmen der Masse von Rohren von 1 m Länge bei verschiedenen Wandstärken  $s$ , verschiedenen lichten Durchmessern  $d$  und verschiedenem Material von der Dichte  $\varrho$ . Die zugrunde liegende Formel lautet

$$m = 0,001 \frac{\text{dm}^3}{\text{m} \cdot \text{mm}^2} \cdot \pi \cdot (ds + s^2) \cdot \varrho.$$

Es bedeuten

$m$ : Masse von 1 m Rohr in  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$

$s$ : Wandstärke in mm

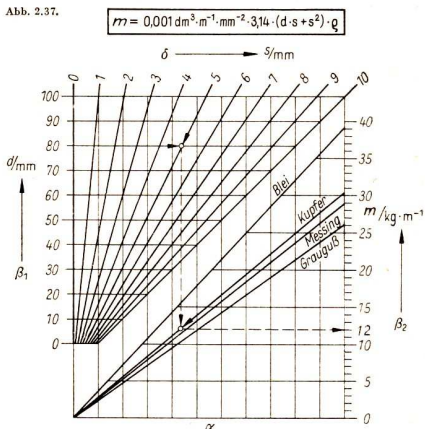
$\varrho$ : Dichte in  $\text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$

$d$ : lichter Durchmesser in mm

Das Nomogramm in Abbildung 2.37. zeigt das Ablesebeispiel:

Ein Kupferrohr von 80 mm lichtigem Durchmesser und 5 mm Wandstärke und einer Länge von 1 m hat eine Masse von 12 kg.

Abb. 2.37.



Ablesebeispiel:  $m = 0,001 \text{ dm}^3 \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{mm}^{-2} \cdot 3,14 \cdot (d \cdot s + s^2) \cdot \rho$   
 Für  $d = 80 \text{ mm}$ ,  $s = 5 \text{ mm}$ , Kupfer ist  
 $m = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$

### 2.4.5. Zusammenfassung

Auch mit Netztafeln lassen sich Nomogramme für Funktionen mit drei und vier Veränderlichen herstellen. Am einfachsten sind Netztafeln mit Geradenscharen, die entweder parallel (Diagonaltafeln) oder durch ein Zentrum als Strahlenbündel (Strahlentafeln) verlaufen. Dazu muß die darzustellende Funktion entweder einen linearen analytischen Ausdruck besitzen oder einen solchen, der z. B. durch Logarithmieren auf eine lineare Form gebracht werden kann.

Werden die Zahlenwerte der drei Veränderlichen mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  bezeichnet,  $\alpha$  auf der waagerechten,  $\beta$  auf der lotrechten Achse abgetragen und  $\gamma$  als Parameter der Geradenschar verwendet, so ergibt sich als allgemeine Form für die

#### Diagonaltafel

(1a)  $\beta = c_1 \alpha + c_2 \gamma$  bzw.

(2a)  $\beta = \alpha^m \cdot \gamma$  oder

(3a)  $\beta = a^{\alpha \cdot \gamma}$ ;

#### Strahlentafel

(1b)  $\beta = c_1 \alpha \cdot \gamma + c_2$  bzw.

(2b)  $\beta = \alpha^\gamma$  oder

(3b)  $\beta = \gamma^{\alpha}$ .

Die Gleichungen (2) und (3) lassen sich durch Logarithmieren umformen zu

(4a)  $\lg \beta = m \cdot \lg \alpha + \lg \gamma$ ;

(4b)  $\lg \beta = \gamma \cdot \lg \alpha$ ;

(5a)  $\lg \beta = \alpha \cdot \lg \alpha + \lg \gamma$ ;

(5b)  $\lg \beta = \alpha \cdot \lg \gamma$ .

Zur Darstellung der Netztafeln sind

bei (1) doppelt linear geteilte Netze,

bei (2) bzw. (4) doppelt logarithmisch geteilte Netze und

bei (3) bzw. (5) einfach logarithmisch geteilte Netze erforderlich.

Die für die Konstruktion der Netztafeln wichtigen Größen (Leitereinheiten, Richtung und Lage der Diagonalen bzw. Strahlen) ergeben sich aus dem darzustellenden analytischen Ausdruck der Funktion und den vorgeschriebenen Meßbereichen.



### 3. Analytische Geometrie

#### 3.1. Vektorrechnung

##### 3.1.1. Wiederholung und Ergänzung einiger physikalischer Kenntnisse

Viele physikalische Größen, wie Masse, Zeit, Arbeit, Leistung, Temperatur, Ohmscher Widerstand und Frequenz, sind durch Angabe von Maßzahl und Maßeinheit völlig bestimmt. Beim Zusammensetzen zweier Massen, Zeiten usw. werden die Maßzahlen in gewohnter Weise addiert. Solche physikalische Größen heißen **skalare Größen**.

Aber nicht alle physikalischen Größen werden durch Angabe von Maßzahl und Maßeinheit vollständig charakterisiert. Die Wirkung einer Kraft zum Beispiel ist unter anderem auch von ihrer Richtung abhängig. Bekanntlich veranschaulicht man eine Kraft durch einen Pfeil entsprechender Richtung, dessen Länge nach Festlegen einer Längeneinheit der Maßzahl der Kraft entspricht. In Abbildung 3.1. zum Beispiel treten die Kräfte  $\mathfrak{F}_1$ ,  $\mathfrak{F}_2$  und  $\mathfrak{F}_3$  auf. Die Kräfte  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$  sind mit  $\mathfrak{F}_3$  im Gleichgewicht. Doch auch eine zu  $\mathfrak{F}_3$  gleich große, parallele, aber entgegengesetzt orientierte Kraft  $\mathfrak{R}$  wäre mit  $\mathfrak{F}_3$  im Gleichgewicht;  $\mathfrak{R}$  könnte also die Kräfte  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$  ersetzen, ohne daß dies das Gleichgewicht stören würde. Man nennt  $\mathfrak{R}$  **Resultierende** der Kräfte  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$ . Das Experiment zeigt, daß  $\mathfrak{R}$  zeichnerisch als Diagonale in dem von  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$  „aufgespannten“ Parallelogramm gefunden werden kann. Die aus den Kraftpfeilen gebildete Figur nennt man **Parallelogramm der Kräfte**. Im vorliegenden Falle ist der Betrag von  $\mathfrak{F}_1$  gleich 3, von  $\mathfrak{F}_2$  gleich 4 und von  $\mathfrak{R}$  gleich 5 Kräfteinheiten. Daher hat das Parallelogramm Seiten von 3 und 4 Längeneinheiten, und die Diagonale ist 5 Einheiten lang (Abb. 3.1.). Dieses Parallelogramm ist ein Rechteck, denn für die Teildreiecke gilt  $3^2 + 4^2 = 5^2$ , sie sind also rechtwinklig (Umkehrung des pythagoreischen Satzes). In Abbildung 3.1. wurden zwei Kräfte nach der „Parallelogrammregel“

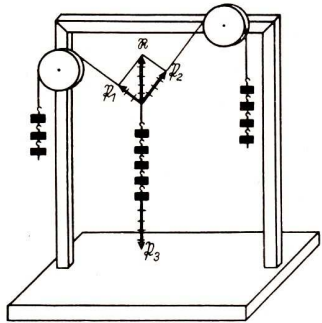


Abb. 3.1.

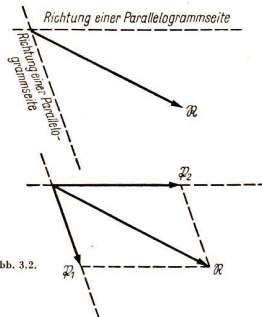


Abb. 3.2.

Abb. 3.4. Last an einem Wandkran

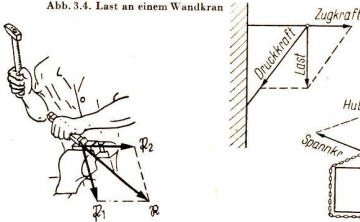


Abb. 3.5. Druckkräfte eines Schlußsteins

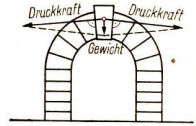


Abb. 3.3. Kräfte am Meißel :

$\mathfrak{P}_1$  drückt den Meißel in den Werkstoff;  
 $\mathfrak{P}_2$  reißt den Span ab

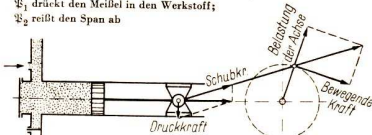


Abb. 3.7. Kräfte an Kreuzkopf und Kurbelzapfen einer Dampfmaschine

Abb. 3.6. Spannkkräfte in der Kette

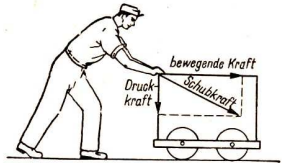


Abb. 3.8. Schubkraft an einem Wagen

zusammengesetzt; vielfach muß man auch Kräfte nach der gleichen Regel zerlegen. In diesen Fällen sind die Parallelogrammdiagonale und die Richtungen der Parallelogrammseiten bekannt, woraus die Längen der Parallelogrammseiten leicht zeichnerisch gefunden werden können (Abb. 3.2.). Praktische Beispiele zeigen die Abbildungen 3.3. bis 3.8.

Auch die Zusammensetzung zweier gleichförmiger (geradliniger) Bewegungen gehorcht der Parallelogrammregel. Vom Anfangspunkt  $A$  der Bewegung aus werden die beiden Wege  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  gezeichnet, die der betreffende Gegenstand bei jeder einzelnen Bewegung in gleichen Zeiten zurücklegen würde (Abb. 3.9.). Aus  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  konstruiert man ein Parallelogramm. Die Resultierende der beiden Bewegungen wird durch die von  $A$  ausgehende Diagonale des Parallelogramms dargestellt.

Abb. 3.9.

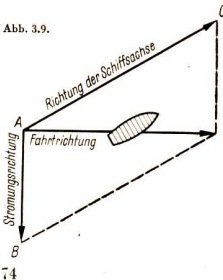
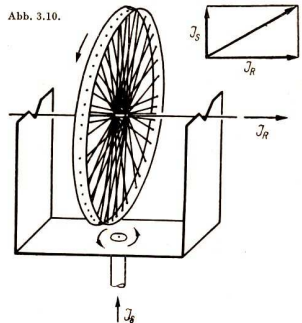


Abb. 3.10.



Nicht nur beim Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften oder gleichförmigen Bewegungen spielt die Parallelogrammregel eine Rolle. Die Abbildung 3.10. zeigt, daß die Achse eines rotierenden Rades in einer Gabel liegt, die um eine vertikale Achse drehbar gelagert ist. Wird die Gabel gedreht, so springt die Achse auf einer Seite aus der Gabel, und zwar mit um so größerer Gewalt, je größer der Drehimpuls  $\mathfrak{J}_R$  des Rades (das Produkt aus Trägheitsmoment und Drehgeschwindigkeit) und je größer der Drehimpuls  $\mathfrak{J}_S$  um die vertikale Achse (das Produkt aus Drehmoment und der Zeit, in der es wirkt) ist. Auf welcher Seite der Gabel die Achse herauspringt, läßt sich voraussagen, wenn man beide Drehimpulse durch je einen Pfeil entsprechender Länge veranschaulicht, der in der jeweiligen Drehachse liegt und so orientiert ist, wie sich eine Rechtsschraube bei dieser Drehung längs ihrer Achse bewegen würde. Die beiden Pfeile müssen nach der Parallelogrammregel zusammengesetzt werden. Die Richtung des resultierenden Pfeils ist die Richtung, in die sich die Radachse einstellt.

Auf Grund dieser Erörterungen definiert man:

- **Physikalische Größen, denen Pfeile zugeordnet werden können, mit deren Hilfe man nach der Parallelogrammregel die Resultierende findet, heißen Vektorgrößen. Die Zusammensetzung der Pfeile nach der Parallelogrammregel nennt man „geometrische Addition“.**

Vektorgrößen werden im allgemeinen durch deutsche Buchstaben (Abb. 3.11.) bezeichnet. Es ist aber auch die Bezeichnung durch Anfangs- und Endpunkt des veranschaulichenden Pfeils, z. B.  $\vec{PQ}$  (Abb. 3.12.), oder durch einen überstrichenen lateinischen oder griechischen Buchstaben möglich; letzteres ist z. B. bei der Winkelgeschwindigkeit der Fall, die durch einen Pfeil in der Drehachse (Rechtsschraubenregel) veranschaulicht und mit  $\vec{\omega}$  bezeichnet wird.

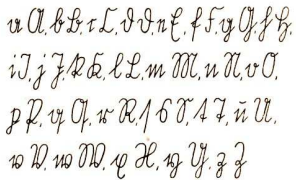


Abb. 3.11.

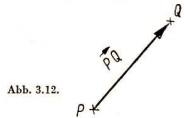


Abb. 3.12.

### 3.1.2. Der Vektorbegriff

Der den skalaren Größen entsprechende mathematische Begriff ist der **Zahlbegriff**, der schließlich nach stufenweiser Erweiterung bis zum Begriff der reellen Zahl genügend umfassend ist, um die rechnerische Behandlung aller skalaren Größen zu ermöglichen. Entsprechend wird ein mathematischer Begriff, der **Vektor**, definiert, der den **Vektorgrößen** entspricht und ihre rechnerische Behandlung ermöglicht. Es versteht sich, daß auch der Vektorbegriff genügend weit sein muß, um alle Vektorgrößen mathematisch behandeln zu können. Die Anforderungen, welche die Vektorgrößen in dieser Hinsicht an den Vektorbegriff stellen, sind recht unterschiedlich, wie die folgenden Beispiele zeigen.

- a) Greift an einem Punkt eines nicht starren Körpers die Vektorgröße **Kraft** an, so kann sie durch einen von diesem Punkt ausgehenden Pfeil veranschaulicht werden. Der ganzen Sachlage entsprechend ist der Pfeil an den Angriffspunkt gebunden; die Kraft ist hier eine **ortsgebundene** Vektorgröße.

- b) Wirkt auf einen drehbaren starren Körper die Vektorgröße **Kraft**, so ist bekanntlich der Abstand ihrer Wirkungslinie vom Drehzentrum sehr wichtig, jedoch gar nicht, an welcher Stelle der Wirkungslinie die Kraft angreift. Beim Veranschaulichen durch einen Pfeil kann dieser daher an irgendeiner Stelle der Wirkungslinie angebracht, also auch in der Wirkungslinie beliebig parallel verschoben werden. Die Kraft ist hier eine **liniengebundene** Vektorgröße.
- c) Verschiebt man alle Punkte des Raumes geradlinig und parallel um eine bestimmte Strecke, so wird diese Bewegung als **Verschiebung** bezeichnet; die Verschiebung ist ebenfalls eine Vektorgröße. Beim Veranschaulichen durch einen Pfeil kann dieser an beliebiger Stelle des Raumes angebracht, also ganz beliebig parallel verschoben werden. Eine solche Vektorgröße heißt **ungebundene** oder **freie** Vektorgröße. Sie stellt den allgemeinsten Fall dar, der durch den mathematischen Vektorbegriff erfaßt werden muß.

Wird vom speziellen Inhalt der Vektorgrößen abgesehen und das Gemeinsame herausgestellt, so wird der **mathematische Begriff des Vektors** gebildet:

► **1. Der Vektor ist eine Rechengröße.**

**2. Das Bild eines Vektors ist ein Pfeil bestimmter Länge, Richtung und Orientierung. Der Vektor ist durch Länge, Richtung und Orientierung dieses Pfeils eindeutig festgelegt.**

Da ein Vektor durch Länge, Richtung und Orientierung eines Pfeils eindeutig festgelegt ist, folgt, daß alle gleich großen, parallelen und gleich orientierten Pfeile Bilder ein und desselben Vektors sind.

So wie man also die reellen Zahlen durch die Punkte der Zahlengeraden veranschaulicht, werden die Vektoren durch Pfeile veranschaulicht. Um das Verständnis zu erleichtern, wird hier das Rechnen mit Vektoren an Hand der zugeordneten Pfeile erklärt und durchgeführt. Dabei werden die Vektorpfeile mit dem gleichen Symbol bezeichnet wie der Vektor, den sie veranschaulichen.

Vektoren werden wie die Vektorgrößen mit deutschen Buchstaben bezeichnet, durch Anfangs- und Endpunkt eines zugeordneten Pfeils oder durch einen überstrichenen lateinischen oder griechischen Buchstaben (vgl. 3.1.1.).

Der Länge des Vektorpfeils  $\mathfrak{A}$  entspricht der Betrag des Vektors  $\mathfrak{A}$ . Er wird mit  $|\mathfrak{A}|$  oder, falls keine Mißverständnisse auftreten können, mit  $A$  bezeichnet.

Naheliegend ist die Definition der Gleichheit von Vektoren:

► **Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie in Betrag, Richtung und Orientierung übereinstimmen.**

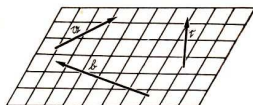
### *Kollinearität und Komplanarität*

Vektoren  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \dots$ , die die gleiche Richtung haben, können durch Vektorpfeile  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$  veranschaulicht werden, die in ein und derselben Geraden liegen (Abb. 3.13.a); solche Vektoren nennt man **kollinear**. Vektoren  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \dots$ , die durch Vektorpfeile  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$  veranschaulicht werden können, die in ein und derselben Ebene liegen, heißen **komplanar** (Abb. 3.13.b).

Abb. 3.13.a



Abb. 3.13.b



### 3.1.3. Vektoraddition

In Anlehnung an die bei den Vektorgrößen gültige Parallelogrammregel (geometrische Addition der Pfeile) wird die Addition zweier Vektoren folgendermaßen definiert:

- Um die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  zu addieren, setzt man zwei ihnen zugeordnete Pfeile  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  mit ihren Anfangspunkten<sup>1</sup> aneinander, so daß sie ein Parallelogramm aufspannen (Abb. 3.14.). Durch den vom Anfangspunkt zur gegenüberliegenden Parallelogrammecke zeigenden Vektorpfeil ist dann der Vektor  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  eindeutig festgelegt.

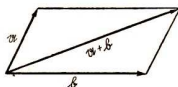


Abb. 3.14.

Da Vektorpfeile beliebig parallel verschoben werden dürfen und dabei doch stets ein und denselben Vektor veranschaulichen, können alle Seiten des Parallelogramms als Vektorpfeile  $\mathbf{a}$  bzw.  $\mathbf{b}$  aufgefaßt werden (Abb. 3.15.). Es ist dann eine Vereinfachung, wenn man beim Addieren nicht mehr das ganze Parallelogramm, sondern nur noch eins der Teildreiecke konstruiert. Für die Summanden  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist damit allerdings eine Reihenfolge eingeführt; naheliegt dann die Festsetzung:

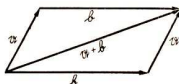


Abb. 3.15.

- Um  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  zu bestimmen, wird an das Ende von Pfeil  $\mathbf{a}$  der Anfang von Pfeil  $\mathbf{b}$  angesetzt; der Pfeil vom Anfang von  $\mathbf{a}$  zum Ende von  $\mathbf{b}$  ist dem Vektor  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  zugeordnet (Abb. 3.16.).

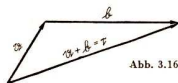


Abb. 3.16.

Um  $\mathbf{b} + \mathbf{a}$  zu bilden, wird dementsprechend an das Ende von  $\mathbf{b}$  der Anfang von  $\mathbf{a}$  angesetzt (Abb. 3.17.).

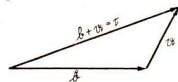


Abb. 3.17.

In dieser Festsetzung ist auch die Addition zweier gleich gerichteter Vektoren enthalten, die von der Parallelogrammregel nicht erfaßt wird.

- In welcher Beziehung stehen  $|\mathbf{a}|$ ,  $|\mathbf{b}|$  und  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$  miteinander, wenn  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  gleich gerichtet und orientiert sind? In welcher Beziehung stehen sie, wenn die beiden Vektoren entgegengesetzt orientiert sind?

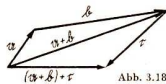


Abb. 3.18.

#### Eigenschaften der Summe zweier Vektoren:

1. Für die so erklärte Addition gilt offensichtlich (vgl. Abb. 3.16. und 3.17.) das Kommutationsgesetz:

$$(1) \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

2. Das Verfahren kann sofort auf die Addition von mehr als zwei Vektoren übertragen werden.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$  verlangt, erst  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  zu bilden und hierzu  $\mathbf{c}$  zu addieren (Abb. 3.18.); es leuchtet unmittelbar ein, daß die Konstruktion des Summenpfeils  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  dabei überflüssig ist. Entsprechend verlangt  $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ , erst  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$  zu bilden und dies zu  $\mathbf{a}$  zu addieren (Abb. 3.19.); statt dessen kann man offensichtlich gleich an das Ende von  $\mathbf{a}$  den Anfang von  $\mathbf{b}$  und an das Ende von  $\mathbf{b}$  den Anfang von  $\mathbf{c}$  ansetzen. Die Klammersetzung ist also ohne Einfluß und somit überflüssig. Es gilt das Assoziationsgesetz:

$$(2) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

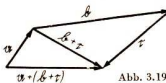


Abb. 3.19.

<sup>1</sup> Das Ende des Pfeils ist die Spitze.

Die Gültigkeit des Kommutationsgesetzes und des Assoziationsgesetzes sowie der Sonderfall gleich gerichteter und orientierter Vektoren rechtfertigen den Terminus **Addition**.

Entsprechend ist die Summe von mehr als drei Vektoren zu bilden, z. B.  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  (Abb. 3.20.).

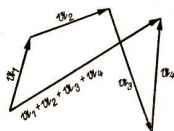


Abb. 3.20.

### Nullvektor und entgegengesetzter Vektor

Unter dem **Nullvektor** versteht man einen Vektor, der den Betrag Null hat; ihm wird keine bestimmte Richtung und Orientierung zugeschrieben. Im Gegensatz zum Skalar 0 symbolisiert man den Nullvektor mit  $\emptyset$ . Es wird festgesetzt, daß der Nullvektor zu jedem Vektor kollinear und zu jedem Vektorpaar komplanar ist.

Bilden die Vektorpfeile beim Addieren der Vektoren einen geschlossenen Polygonzug<sup>1</sup> (Abb. 3.21.), so ergibt sich als Summe der Nullvektor. Insbesondere ist die Summe zweier Vektoren der Nullvektor, wenn sie gleichen Betrag, gleiche Richtung, aber entgegengesetzte Orientierung haben:  $a + b = \emptyset$  (Abb. 3.22.a). Bezeichnet man den Vektor, der im Betrag und in der Richtung, aber nicht in der Orientierung mit  $a$  übereinstimmt, mit  $-a$ , so gilt wie in der Algebra



Abb. 3.21.



Abb. 3.22.

$$a + (-a) = \emptyset \text{ (Abb. 3.22.b);}$$

$-a$  heißt der zu  $a$  **entgegengesetzte Vektor**.

### Aufgaben

Die folgenden Vektoren  $\mathfrak{A}, \dots, \mathfrak{H}$  werden durch Vektorpfeile in der Zeichenebene veranschaulicht: ( $\mathfrak{A}; x$ ) z. B. soll den Winkel zwischen dem Vektorpfeil  $\mathfrak{A}$  und der  $x$ -Achse bedeuten. Gegeben sind

- |   |   |
|---|---|
| $\mathfrak{A}$ durch $ \mathfrak{A}  = A = 3$ , | $(\mathfrak{A}; x) = 235^\circ$ ,                         |
| $\mathfrak{B}$ durch $B = 2$ ,                  | $(\mathfrak{B}; x) = 170^\circ$ ,                         |
| $\mathfrak{C}$ durch $C = 1,5$ ,                | $(\mathfrak{C}; x) = 17^\circ$ ,                          |
| $\mathfrak{D}$ durch $D = 7$ ,                  | $(\mathfrak{D}; x) = 318^\circ$ ,                         |
| $\mathfrak{E}$ durch $E = 10$ ,                 | $(\mathfrak{E}; x) = 0^\circ$ ,                           |
| $\mathfrak{F}$ durch $F = 13$ ,                 | $(\mathfrak{F}; x) = \frac{\pi}{4}$ (Winkel im Bogenmaß), |
| $\mathfrak{G}$ durch $G = 2,4$ ,                | $(\mathfrak{G}; x) = 1,1$ (desgl.),                       |
| $\mathfrak{H}$ durch $H = 3,5$ ,                | $(\mathfrak{H}; x) = 2$ (desgl.).                         |

1.  $|\mathfrak{A} + \mathfrak{B}| = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}; x) =$
2.  $|\mathfrak{C} + \mathfrak{D}| = (\mathfrak{C} + \mathfrak{D}; x) =$
3.  $|\mathfrak{E} + \mathfrak{F}| = (\mathfrak{E} + \mathfrak{F}; x) =$
4.  $|\mathfrak{G} + \mathfrak{H}| = (\mathfrak{G} + \mathfrak{H}; x) =$

<sup>1</sup> Polygon, d. h. Vieleck.

5. Wie viele Aufgaben dieser Art kann man aus den gegebenen Vektoren bilden?

$$6. |\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}| = (\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}; x) =$$

$$7. |\mathcal{A} + \mathcal{C} + \mathcal{D}| = (\mathcal{A} + \mathcal{C} + \mathcal{D}; x) =$$

8. Wie viele solcher Aufgaben kann man aus den acht gegebenen Vektoren bilden?

*Anmerkung:* Die zu addierenden Vektoren brauchen natürlich nicht (wie in den voranstehenden Aufgaben) komplanar zu sein. Vergleichen Sie hierzu Abbildung 3.23.1

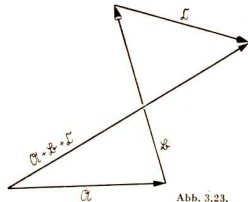


Abb. 3.23.

### 3.1.4. Vektorsubtraktion

Die Subtraktion zweier Vektoren wird als Umkehrung der Addition erklärt:

$$a + b = c \quad \begin{cases} a = c - b, \\ b = c - a. \end{cases}$$

Wegen der Gültigkeit des Kommutativgesetzes der Addition genügt es, eine der rechts stehenden Gleichungen zu untersuchen. Die Gleichung  $a = c - b$

beschreibt also die gleiche, in Abbildung 3.16. dargestellte Beziehung zwischen  $a$ ,  $b$  und  $c$  wie die Gleichung  $a + b = c$ . Daher läßt sich  $a = c - b$  (Abb. 3.24.) aus gegebenem  $c$  und  $b$  finden, indem man an das Ende des Minuenden  $c$  das Ende des Subtrahenden  $b$  ansetzt und den Vektorpfeil vom Anfang des Minuenden  $c$  zum Anfang des Subtrahenden  $b$  zeichnet. Das gleiche wird aber erreicht, wenn man  $c$  und  $-b$  addiert (Abb. 3.25.):

$$c - b = c + (-b).$$

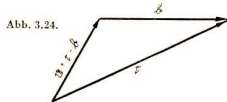


Abb. 3.24.

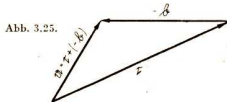


Abb. 3.25.

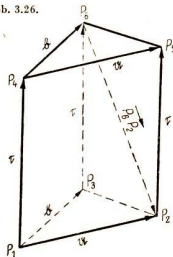
Die Subtraktion eines Vektors wird durch die Addition des entgegengesetzten Vektors ersetzt.

Das ist eine wesentliche Vereinfachung.

#### Beispiel 1:

Die orientierte Seitendiagonale  $\overrightarrow{P_6 P_2}$  eines von drei Vektorpfeilen  $a$ ,  $b$  und  $c$  gemäß Abbildung 3.26. aufgespannten Prismas  $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$  soll durch die Vektoren  $a$ ,  $b$  und  $c$  ausgedrückt werden. Alle Kanten des Prismas können dann durch Vektorpfeile  $a$ ,  $b$ ,  $c$  bezeichnet werden. Um nun  $\overrightarrow{P_6 P_2}$  durch  $a$ ,  $b$ ,  $c$  auszudrücken, wird  $\overrightarrow{P_6 P_2}$  als „Summenpfeil“ der Vektorpfeile  $\overrightarrow{P_6 P_4}$ ,  $\overrightarrow{P_4 P_1}$  und  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  aufgefaßt. Wegen  $\overrightarrow{P_6 P_4} = -b$ ,  $\overrightarrow{P_4 P_1} = -c$  und  $\overrightarrow{P_1 P_2} = a$  ergibt sich:  
 $\overrightarrow{P_6 P_2} = (-b) + (-c) + a$ , also  $\overrightarrow{P_6 P_2} = a - b - c$ .

Abb. 3.26.



## Aufgaben

1. Gegeben sind die Vektoren  $\mathfrak{A}, \dots, \mathfrak{H}$  (vgl. Seite 78).

a)  $|\mathfrak{A} - \mathfrak{B}| = (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}; x) =$

b)  $|\mathfrak{B} - \mathfrak{A}| = (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}; x) =$

c)  $|\mathfrak{D} - \mathfrak{E}| = (\mathfrak{D} - \mathfrak{E}; x) =$

d)  $|\mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{F}| = (\mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{F}; x) =$

e)  $|\mathfrak{C} + \mathfrak{E} - \mathfrak{G} + \mathfrak{H}| = (\mathfrak{C} + \mathfrak{E} - \mathfrak{G} + \mathfrak{H}; x) =$

2. Das Parallelogramm  $P_1P_2P_3P_4$  wird durch Vektorpfeile  $\overrightarrow{P_1P_2} = a$ ,  $\overrightarrow{P_1P_4} = b$  aufgespannt.

Drücken Sie  $\overrightarrow{P_2P_4}$  durch  $a$  und  $b$  aus!

3. Drücken Sie für das Prisma (Abb. 3.26.) auch die übrigen Seitendiagonalen durch  $a$ ,  $b$  und  $c$  aus, desgleichen  $\overrightarrow{P_5P_6}$ !

### 3.1.5. Vervielfachung; Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor

#### Vorbemerkung

Das Multiplizieren von Zahlen wurde ursprünglich als wiederholtes Addieren des gleichen Summanden erklärt, z. B.  $3 \cdot a = a + a + a$ . Der erste Faktor gibt an, wie oft der zweite als Summand gesetzt werden muß; der zweite Faktor wird „vervielfacht“. Diese Erklärung versagt aber, wenn der erste Faktor keine natürliche Zahl ist. Für diese Fälle ist die Multiplikation neu zu erklären. In jedem Falle bleibt jedoch das Multiplizieren mit dem Addieren verknüpft; denn es gilt das **Distributionsgesetz**

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Der Vektor  $a + a + a$  stimmt in Richtung und Orientierung mit  $a$  überein und hat den dreifachen Betrag von  $a$ . Naheliegender ist hierfür die Schreibweise  $3a$  (Abb. 3.27.). Entsprechend ist bei natürlicher Zahl  $n$  der Vektor  $na$  durch die Summe von  $n$  (gleichen) Summanden  $a$  zu erklären;  $na$  stimmt also in Richtung und Orientierung mit  $a$  überein und hat den  $n$ -fachen Betrag;  $|na| = n|a|$ . Man nennt  $na$  **Vervielfachung des Vektors**  $a$ . Durch Verallgemeinerung erhält man folgende Definition für das Produkt aus Skalar und Vektor:

▶  $pa$  ( $p > 0$ ) bedeutet einen Vektor, der wie  $a$  gerichtet und orientiert ist und den Betrag

$$|pa| = p|a| \text{ hat;}$$

$pa$  ( $p < 0$ ) bedeutet einen Vektor, der wie  $a$  gerichtet, aber entgegengesetzt orientiert ist und den Betrag  $|pa| = |p||a|$  hat.

#### Beispiel 2:

Eine orientierte Seitenhalbierende soll durch die orientierten Dreieckseiten ausgedrückt werden (Abb. 3.28.). Es gilt:

$$\vec{s} = \vec{CA} + \vec{AM} = b + \frac{1}{2}c \text{ und}$$

$$\vec{s} = \vec{CB} + \vec{BM} = -a - \frac{1}{2}c.$$

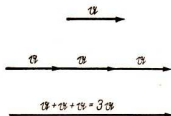


Abb. 3.27.

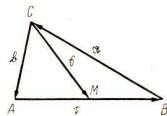


Abb. 3.28.



### Eigenschaften des Produkts zwischen Skalar und Vektor

1. Für die Verknüpfung  $p\mathbf{a}$  zwischen Skalar  $p$  und Vektor  $\mathbf{a}$  gilt das Assoziationsgesetz in der Form

$$(3) \quad r(s\mathbf{a}) = (rs)\mathbf{a} = r s \mathbf{a}.$$

Da es also auf die Klammersetzung nicht ankommt, kann man ganz auf sie verzichten. Zum Beweis von (3) ist zu zeigen, daß Betrag, Richtung und Orientierung von  $r(s\mathbf{a})$  und  $(rs)\mathbf{a}$  übereinstimmen. Unmittelbar klar ist die Übereinstimmung in der Richtung. Wegen

$$|r(s\mathbf{a})| = |r| |s\mathbf{a}| = |r| |s| |\mathbf{a}|$$

und

$$|(rs)\mathbf{a}| = |rs| |\mathbf{a}| = |r| |s| |\mathbf{a}|$$

stimmen auch die Beträge überein. Um die Übereinstimmung der Orientierung nachzuweisen, sind Fallunterscheidungen durchzuführen.

● Zeigen Sie an Hand einer Skizze, daß  $r(s\mathbf{a})$  und  $(rs)\mathbf{a}$  im Falle a)  $r > 0, s > 0$ , b)  $r > 0, s < 0$  gleiche Orientierung haben! Welche Fälle sind dann noch offen?

2. Es gilt auch das Distributionsgesetz, und zwar in den Formen

$$(4) \quad m\mathbf{a} + m\mathbf{b} = m(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

und

$$(5) \quad r\mathbf{a} + s\mathbf{a} = (r + s)\mathbf{a}.$$

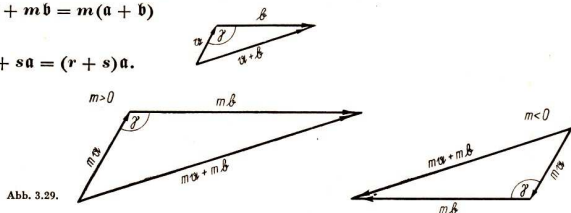
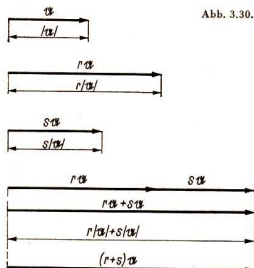


Abb. 3.29.

Zu (4): Diese Beziehung läßt sich aus Abbildung 3.29. ablesen; auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke ist  $m\mathbf{a} + m\mathbf{b}$  gleich  $m(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ .

Zu (5): Der Beweis wird zunächst für den Fall  $r > 0$  und  $s > 0$  geführt. Dann ist (Abb. 3.30.)  $r\mathbf{a} + s\mathbf{a}$  der Vektor der Richtung und Orientierung von  $\mathbf{a}$ , der den Betrag  $r|\mathbf{a}| + s|\mathbf{a}|$  hat. Und  $(r + s)\mathbf{a}$  bedeutet dann ebenfalls den Vektor der Richtung und Orientierung von  $\mathbf{a}$ , der den Betrag  $|(r + s)\mathbf{a}| = (r + s)|\mathbf{a}| = r|\mathbf{a}| + s|\mathbf{a}|$  hat; denn  $r, s$  und  $|\mathbf{a}|$  sind reelle Zahlen, bei denen das Distributionsgesetz gilt, d. h. die Klammer aufgelöst werden kann.



● Für welche Fälle ist nun der Beweis von (5) noch offen?

Da das Distributionsgesetz gilt, ist man berechtigt, die Verknüpfung  $p\alpha$  eines Skalars mit einem Vektor als Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor zu bezeichnen.

■ **Beispiel 3:**

Man beweise: Werden die Seitenmitten eines (beliebigen, nicht notwendig ebenen) Vierecks  $ABCD$  miteinander verbunden, so entsteht ein Parallelogramm (Abb. 3.31).  
Es gilt

$$\vec{s}_1 = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

und

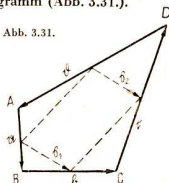
$$\vec{s}_2 = -\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{1}{2}(-\vec{c} - \vec{d});$$

da  $-\vec{c} - \vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$  ist, gilt weiter

$$\vec{s}_2 = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Man erkennt, daß die Pfeile  $\vec{s}_1$  und  $\vec{s}_2$  gleiche Länge und Richtung haben; damit ist die Behauptung bewiesen.

Abb. 3.31.



*Einheitsvektor*

Mit  $e_a$  wird der zu  $a$  gehörige **Einheitsvektor** bezeichnet; er hat gleiche Richtung und gleiche Orientierung wie  $a$ , jedoch den Betrag 1:

$$|e_a| = 1.$$

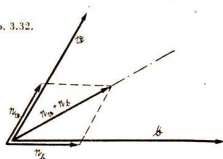
Der Vektor  $a$  kann als Produkt seines Betrages mit dem Einheitsvektor  $e_a$  dargestellt werden:

$$a = |a| e_a = a e_a;$$

hiermit ist gleichwertig

$$e_a = \frac{a}{|a|} = \frac{a}{a} \quad (a \neq 0).$$

Abb. 3.32.



■ **Beispiel 4:**

Die Richtung einer Geraden, die den Winkel zwischen zwei Vektorpfeilen  $a$  und  $b$  halbiert, kann durch  $e_a + e_b$  charakterisiert werden (Abb. 3.32).

*Zur Kollinearität und Komplanarität*

Kollineare Vektoren können durch Vektorpfeile veranschaulicht werden, die in ein und derselben Geraden liegen (vgl. 3.1.2.). Dann muß die Relation

$$(6) \quad \vec{b} = \lambda \vec{a}$$

bestehen, weil sich alle Vektoren, die gleiche Richtung wie  $a$  haben, mit Hilfe eines passenden Skalars  $\lambda$  durch  $\lambda a$  darstellen lassen. Umgekehrt folgt aus Gleichung (6), daß  $a$  und  $b$  kollinear sind. Zwei Vektoren sind also dann und nur dann kollinear, wenn die Beziehung (6) besteht.

Komplanare Vektoren können durch Vektorpfeile veranschaulicht werden, die in ein und derselben Ebene liegen (vgl. 3.1.2.). Offensichtlich können sie sogar durch Pfeile veranschaulicht werden, die in einer Ebene liegen und von ein und demselben Punkt

ausgehen (Abb. 3.33.). Indem man nun durch die Spitze von  $c$  zu  $a$  und  $b$  Parallelen zeichnet, erkennt man, daß zwischen komplanaren Vektoren  $a$ ,  $b$  und  $c$  die Relation

$$(7) \quad c = \lambda a + \mu b$$

bestehen muß. Umgekehrt ergibt  $\lambda a + \mu b$  offensichtlich stets einen zu  $a$  und  $b$  komplanaren Vektor. Drei Vektoren sind also dann und nur dann komplanar, wenn die Beziehung (7) besteht.

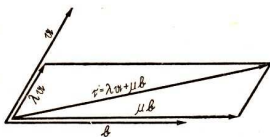


Abb. 3.33.

● Welche Bedeutung hat Gleichung (6) bzw. (7) insbesondere, wenn  $\lambda$  und  $\mu$  die Werte 1,  $-1$  und 0 annehmen?

### Koeffizientenvergleich

Bei den Anwendungen ergibt sich mitunter eine Vektorgleichung

$$p_1 a + q_1 b = p_2 a + q_2 b,$$

wobei  $a$  und  $b$  nicht kollinear sind. Dann liegt die Vermutung nahe, daß

$$p_1 = p_2,$$

$$q_1 = q_2$$

gilt. Eine solche Schlußweise nennt man **Koeffizientenvergleich**. Die Richtigkeit der Vermutung läßt sich leicht beweisen.

Indem man auf beiden Seiten der Vektorgleichung  $q_1 b + p_2 a$  subtrahiert, erhält man

$$p_1 a - p_2 a = q_2 b - q_1 b,$$

$$(p_1 - p_2) a = (q_2 - q_1) b.$$

Wäre nun  $p_1 \neq p_2$ , so könnte man beide Seiten dieser Gleichung mit  $\frac{1}{p_1 - p_2}$  multiplizieren und erhielte

$$a = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2} b.$$

Dann wären  $a$  und  $b$  im Gegensatz zur Voraussetzung kollinear, denn diese Gleichung hat die gleiche Struktur wie die Formel (6). Da dieser Widerspruch durch die Annahme  $p_1 \neq p_2$  zustande kommt, müssen wir diese Annahme fallen lassen. Dann kann aber nur  $p_1 = p_2$  gelten.

Wäre  $q_1 \neq q_2$ , so könnte man die gegebene Vektorgleichung mit  $\frac{1}{q_2 - q_1}$  multiplizieren und erhielte ebenfalls im Widerspruch zur Voraussetzung, daß  $a$  und  $b$  kollinear sind.

### Beispiel 5:

In Abbildung 3.34. ist ein Parallelogramm durch die Vektorpfeile  $a$  und  $b$  bestimmt. Es sollen die Teilverhältnisse ermittelt werden, in denen die Diagonalen von ihrem Schnittpunkt  $S$  geteilt werden. Die Lösung des Problems erfolgt in vier Schritten:

a) Zunächst wird eine Vektorgleichung aufgestellt, welche die orientierte Teilstrecke  $\overline{RS}$  auf der

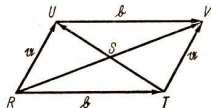


Abb. 3.34.

einen Diagonalen mit der orientierten Teilstrecke  $\overrightarrow{TS}$  auf der anderen Diagonalen in Beziehung setzt:

$$\overrightarrow{RS} = \vec{b} + \overrightarrow{TS}.$$

- b) Die orientierten Teilstrecken  $\overrightarrow{RS}$  und  $\overrightarrow{TS}$  werden mit Hilfe der noch unbekanntem Teilverhältnisse  $\lambda$  und  $\mu$  durch die orientierten Gesamtstrecken  $\overrightarrow{RV}$  und  $\overrightarrow{TU}$  ausgedrückt:

$$\overrightarrow{RS} = \lambda \overrightarrow{RV}, \quad \overrightarrow{TS} = \mu \overrightarrow{TU}.$$

Damit folgt aus a)

$$\lambda \overrightarrow{RV} = \vec{b} + \mu \overrightarrow{TU}.$$

- c) Die orientierten Gesamtstrecken  $\overrightarrow{RV}$  und  $\overrightarrow{TU}$  werden durch die beiden nicht kollinearen Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ausgedrückt:

$$\overrightarrow{RV} = \vec{b} + \vec{a}, \quad \overrightarrow{TU} = -\vec{b} + \vec{a}.$$

Damit folgt aus b)

$$\lambda(\vec{b} + \vec{a}) = \vec{b} + \mu(-\vec{b} + \vec{a}),$$

$$\lambda\vec{b} + \lambda\vec{a} = \vec{b} - \mu\vec{b} + \mu\vec{a},$$

$$\lambda\vec{b} + \lambda\vec{a} = (1 - \mu)\vec{b} + \mu\vec{a}.$$

- d) Durch Koeffizientenvergleich erhält man zwei skalare Gleichungen für die beiden Unbekannten  $\lambda$  und  $\mu$ :

$$\begin{array}{l} \text{Vergleich für } \vec{a}: \\ \text{Vergleich für } \vec{b}: \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda = \mu \\ \lambda = (1 - \mu) \end{array} \right|.$$

Daraus folgt:

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2}.$$

Das heißt,  $S$  halbiert beide Diagonalen.

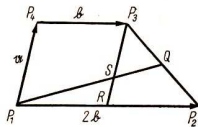


Abb. 3.35.

### Beispiel 6:

Das Trapez in Abbildung 3.35. ist durch die Vektorpfeile  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  gegeben.  $\overline{P_2P_3}$  wird durch  $Q$  halbiert; die zu  $P_1P_4$  durch  $P_3$  gezeichnete Parallele schneidet  $P_1P_2$  in  $R$ . In welchen Verhältnissen werden  $\overline{RP_3}$  und  $\overline{P_1Q}$  von ihrem Schnittpunkt  $S$  geteilt?

- a) Die beiden orientierten Teilstrecken  $\overrightarrow{RS}$  und  $\overrightarrow{P_1S}$  werden miteinander in Beziehung gesetzt:

$$\overrightarrow{RS} = -\vec{b} + \overrightarrow{P_1S}.$$

- b) Mit Hilfe der noch unbekanntem Teilverhältnisse  $\lambda$  und  $\mu$  werden die beiden orientierten Teilstrecken  $\overrightarrow{RS}$  und  $\overrightarrow{P_1S}$  durch die orientierten Gesamtstrecken  $\overrightarrow{RP_3}$  und  $\overrightarrow{P_1Q}$  ausgedrückt:

$$\overrightarrow{RS} = \lambda \overrightarrow{RP_3}, \quad \overrightarrow{P_1S} = \mu \overrightarrow{P_1Q}.$$

Damit folgt aus a)

$$\lambda \overrightarrow{RP_3} = -\vec{b} + \mu \overrightarrow{P_1Q}.$$

c)  $\vec{RP}_3$  und  $\vec{P}_1\vec{Q}$  werden durch die nicht kollinearen Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ausgedrückt:

$$\vec{RP}_3 = \mathbf{a}, \quad \vec{P}_1\vec{Q} = 2\mathbf{b} + \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \frac{3}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{a}.$$

Damit folgt aus b)

$$\lambda\mathbf{a} = -\mathbf{b} + \mu\left(\frac{3}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{a}\right),$$

$$\lambda\mathbf{a} = \left(-1 + \frac{3}{2}\mu\right)\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mu\mathbf{a}.$$

d) Durch Koeffizientenvergleich erhält man zwei skalare Gleichungen für die beiden Unbekannten  $\lambda$  und  $\mu$ :

$$\begin{array}{l} \text{Vergleich für } \mathbf{a}: \\ \text{Vergleich für } \mathbf{b}: \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2}\mu \\ 0 = -1 + \frac{3}{2}\mu \end{array} \right|.$$

Daraus folgt

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{2}{3}.$$

### Beispiel 7:

In welchem Verhältnis teilt die Halbierende eines Dreieck-Innenwinkels die gegenüberliegende Seite (Abb. 3.36.)?

a)  $\vec{AS} = -\mathbf{b} + \vec{CS}.$

b)  $\lambda\mathbf{c} = -\mathbf{b} + \mu\mathbf{w}_\varphi$ ; hier interessiert nur  $\lambda$ .

c)  $\lambda(-\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -\mathbf{b} + \mu(\mathbf{e}_b - \mathbf{e}_a),$

$$-\lambda\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b} = -\mathbf{b} + \mu\frac{\mathbf{b}}{b} - \mu\frac{\mathbf{a}}{a},$$

$$-\lambda\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b} = -\frac{\mu}{a}\mathbf{a} + \left(-1 + \frac{\mu}{b}\right)\mathbf{b}.$$

d) 
$$\left| \begin{array}{l} -\lambda = -\frac{\mu}{a} \\ -\lambda = -1 + \frac{\mu}{b} \end{array} \right|;$$

$$\lambda = \frac{b}{a+b}.$$

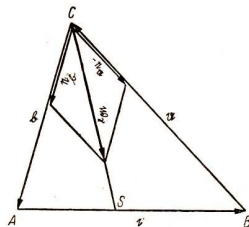


Abb. 3.36.

Es gilt also  $\vec{AS} = \lambda\mathbf{c} = \frac{b}{a+b}\vec{AB}$ . Dieses Ergebnis wird instruktiver, wenn man die Beziehung zwischen  $\vec{AS}$  und  $\vec{SB}$  angibt, die man folgendermaßen findet:

$$\vec{AS} = \lambda\mathbf{c} = \lambda(\vec{AS} + \vec{SB}) = \lambda\vec{AS} + \lambda\vec{SB},$$

$$(1 - \lambda)\vec{AS} = \lambda\vec{SB},$$

$$\vec{AS} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}\vec{SB}.$$

Mit dem errechneten  $\lambda$  folgt daraus

$$\vec{AS} = \frac{b}{a}\vec{SB}.$$

Da  $\overrightarrow{AS}$  und  $\overrightarrow{SB}$  kollinear und gleich orientiert sind, kann daraus die skalare Gleichung

$$\overrightarrow{AS} = \frac{b}{a} \overrightarrow{SB},$$

$$\overrightarrow{AS} : \overrightarrow{SB} = b : a$$

gewonnen werden. Die Winkelhalbierende teilt also die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

### Aufgaben

1. Das Trapez in Abbildung 3.35. ist durch die Vektorpfeile  $a$  und  $b$  gegeben.
  - a) In welchem Verhältnis werden die Diagonalen durch ihren Schnittpunkt geteilt?
  - b)  $\overline{P_3P_2}$  wird von  $Q$  halbiert. In welchem Verhältnis wird  $\overline{P_1P_2}$  vom Schnittpunkt mit  $P_1Q$  geteilt?
2. In Abbildung 3.35. wird der Grundlinienpfeil  $2b$  durch  $nb$  ersetzt. Behandeln Sie jetzt die entsprechenden Probleme!
3. Gegeben ist Dreieck  $ABC$  durch die Vektorpfeile  $\overrightarrow{AB} = c$  und  $\overrightarrow{CA} = b$ . Auf  $\overline{CB}$  wird von  $C$  aus die Strecke  $\frac{CB}{n} = \overline{CP}$  abgetragen. In welchem Verhältnis wird die Seitenhalbierende a)  $s_c$ , b)  $s_b$  vom Schnittpunkt mit  $\overline{AP}$  geteilt?
4. Bestimmen Sie die Teilverhältnisse, in denen die Seitenhalbierenden  $s_a$  und  $s_b$  des Dreiecks  $ABC$  durch ihren Schnittpunkt geteilt werden! (Dehnen Sie die Untersuchung auch auf  $s_c$  aus, so können Sie beweisen, daß die drei Seitenhalbierenden einander in einem Punkte schneiden.)
5. Die Winkelhalbierende  $w_\gamma$  und die Seitenhalbierende  $s_a \equiv \overline{AM}$  des Dreiecks  $ABC$  schneiden einander in  $S$ . Bestimmen Sie  $AS : SM!$

### 3.1.6. Komponentendarstellung

Die bisher benutzten Vektorsymbole entsprechen in gewisser Weise den allgemeinen Zahlensymbolen; sie bringen keinen bestimmten Betrag, keine bestimmte Richtung und Orientierung zum Ausdruck. Die mit diesen Vektorsymbolen durchgeführten Rechnungen führen wie die Rechnungen unter Benutzung allgemeiner Zahlensymbole zu allgemeinen Ergebnissen. Für die praktische Anwendung der Vektoren ist aber auch ein Rechnen mit Vektoren bestimmten Betrags, bestimmter Richtung und bestimmter Orientierung erforderlich, das dem numerischen Rechnen entspricht. Dafür muß die Vektorsymbolik so verändert werden, daß auch der bestimmte Betrag, die bestimmte Richtung und Orientierung in der Symbolik zum Ausdruck kommen können. Das wird erreicht, indem man ein räumliches rechtwinkliges  $xyz$ -Koordinatensystem einführt und die Richtung und Orientierung der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse durch die Einheitsvektoren  $i$ ,  $j$  und  $k$  festlegt (Abb. 3.37.). Die  $x$ -Achse,  $y$ -Achse und  $z$ -Achse bzw. die Einheitsvektoren  $i$ ,  $j$  und  $k$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem, das heißt:

Werden sie in dieser Reihenfolge Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand zugeordnet, so veranschaulichen diese drei Finger bei rechtwinkligem Spreizen den Zusammenhang zwischen den Koordinatenachsen bzw. zwischen  $i$ ,  $j$  und  $k$  als Rechtssystem.

● Halten Sie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand parallel zu drei in einer Ecke zusammenlaufenden Zimmerkanten, und bezeichnen Sie die Kanten als  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse! Wie viele Möglichkeiten gibt es? Machen Sie sich klar, daß sich keine dieser Möglichkeiten beim analogen Benutzen der linken Hand einstellen könnte!

Im Normalfall zeigt die  $z$ -Achse nach oben (Abb. 3.37.). In Abbildung 3.38. hat der Punkt  $A$  die Koordinaten  $a_x = 1$ ,  $a_y = 2$ ,  $a_z = 4$ ; man schreibt kurz  $A(a_x; a_y; a_z) \equiv A(1; 2; 4)$ . Entsprechend ist  $B(b_x; b_y; b_z) \equiv B(2; -3; 1)$ .

● Geben Sie in gleicher Weise die Koordinaten von  $C$  an (Abb. 3.38.)!

Bekanntlich veranschaulichen alle gleich langen, parallelen und gleich orientierten Vektorpfeile ein und denselben Vektor. Unter diesen Vektorpfeilen gibt es genau einen, dessen Anfang im Ursprung<sup>1</sup>  $O(0; 0; 0)$  des Koordinatensystems liegt. Dieser Vektorpfeil heißt **Ortsvektor**. Durch die Spitze eines jeden Ortsvektors wird eindeutig ein Punkt des Raumes festgelegt, und umgekehrt ist jedem Punkt eindeutig ein Ortsvektor zugeordnet, dessen Spitze in dem betreffenden Punkt liegt.

Damit ist auch jedem Vektor eindeutig ein Punkt zugeordnet und jedem Punkt eindeutig ein Vektor.

Ein Vektor  $a$  werde durch den Ortsvektor  $a$  veranschaulicht, dessen Spitze bei  $A(a_x; a_y; a_z)$  liegt (Abb. 3.39.). Im allgemeinen sind die acht Punkte  $O(0; 0; 0)$ ,  $P_1(a_x; 0; 0)$ ,

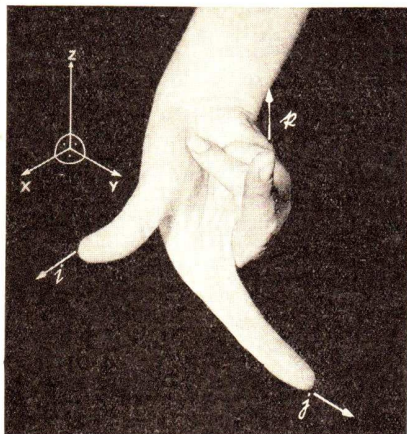


Abb. 3.37.

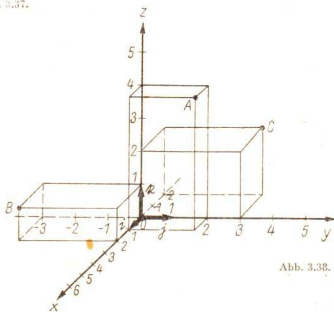


Abb. 3.38.

<sup>1</sup> Dieser Punkt hat die Bezeichnung  $O$  (Anfangsbuchstabe des lateinischen Worts *origo*, d. h. Ursprung).

$P_2(0; a_y; 0)$ ,  $P_3(a_x; a_y; 0)$ ,  $P_4(0; 0; a_z)$ ,  
 $P_5(a_x; 0; a_z)$ ,  $P_6(0; a_y; a_z)$ .  $A(a_x; a_y; a_z)$   
 die Ecken des Quaders mit achsenparallelen  
 Kanten, in dem der Ortsvektor  $a$  orientierte  
 Diagonale ist. Es gilt

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

Diese Schreibweise nennt man **Komponentendarstellung des Vektors**  $\mathbf{a}$ ;  $a_x, a_y$  und  $a_z$  heißen **vektorielle Komponenten**,  $a_x, a_y$  und  $a_z$  heißen **skalare Komponenten** des Vektors  $\mathbf{a}$ .<sup>1</sup> Gleichzeitig sind  $a_x, a_y$  und  $a_z$  die Koordinaten des Punktes  $A$ , in dem die Spitze des Ortsvektors  $\mathbf{a}$  liegt. Statt  $A(a_x; a_y; a_z)$  schreibt man auch  $A(\mathbf{a})$ . In den beiden Abbildungen 3.40.a und b ist  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$  dargestellt, wobei das Koordinatensystem von zwei verschiedenen Seiten aus betrachtet wird.

- Zeichnen Sie in der gleichen Weise die Ortsvektoren  $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$  und  $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ! Geben Sie die Koordinaten der Spitzen  $B$  und  $C$  an!

### Anwendungen der Komponentenschreibweise

#### 1. Betrag

Durch zweimaliges Anwenden des pythagoreischen Lehrsatzes (erst in der  $xy$ -Ebene zur Bestimmung der Entfernung  $OA'$ , dann im rechtwinkligen Dreieck  $OA'A$  zur Bestimmung der Entfernung  $OA$ ; vgl. Abb. 3.41.) ergibt sich für die Länge des Ortsvektors  $\mathbf{a}$  und damit für den Betrag des Vektors  $\mathbf{a}$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{|a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2} \\ = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},^2$$

also

$$(8) \quad |\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

<sup>1</sup> Da  $a_x, a_y$  und  $a_z$  auch negativ sein können,  $|a_x|, |a_y|$  und  $|a_z|$  dagegen nicht, gilt im allgemeinen nicht  $|a_x| = a_x$  usw., sondern  $|a_x| = |a_x|, |a_y| = |a_y|, |a_z| = |a_z|$ .

<sup>2</sup> Stets gilt  $|a_x|^2 = a_x^2, |a_y|^2 = a_y^2, |a_z|^2 = a_z^2$ .

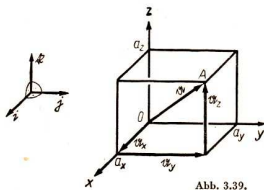


Abb. 3.39.

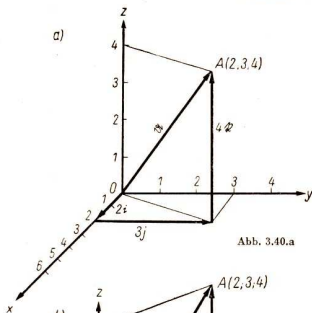


Abb. 3.40.a

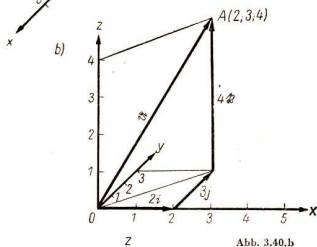


Abb. 3.40.b

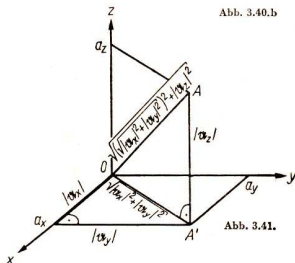


Abb. 3.41.



### Beispiel 8:

Der Ortsvektor  $\mathbf{a}$  in den Abbildungen 3.40. a, b hat somit die Länge  $a = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} \approx 5,4$ .

## 2. Addition

Da bei der Addition von Vektoren das Assoziativgesetz (2) und das Kommutativgesetz (1) und bei der Multiplikation von Skalar und Vektor das Distributivgesetz (5) gelten, ergibt die Addition zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ , welche die Komponentendarstellungen

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$$

haben:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) + (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}),$$

$$(9) \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k}.$$

Die Komponenten der Summe sind gleich der Summe der entsprechenden Komponenten der Summanden.

### Beispiel 9:

$$(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = (2 - 2)\mathbf{i} + (3 + 3)\mathbf{j} + (4 - 4)\mathbf{k} = 6\mathbf{j}.$$

## 3. Subtraktion

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) - (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}),$$

$$(10) \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x) \mathbf{i} + (a_y - b_y) \mathbf{j} + (a_z - b_z) \mathbf{k}.$$

Formulieren Sie die Regel!

### Beispiel 10:

$$(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) - (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{k}.$$

### Beispiel 11:

Der Pfeil vom Punkt  $A(\mathbf{a}) \equiv A(a_x; a_y; a_z)$  zum Punkte  $B(\mathbf{b}) \equiv B(b_x; b_y; b_z)$  veranschaulicht den Vektor

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_x - a_x) \mathbf{i} + (b_y - a_y) \mathbf{j} + (b_z - a_z) \mathbf{k}.$$

Vergleichen Sie Abbildung 3.42.!

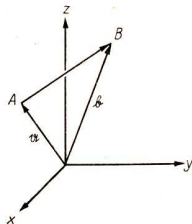


Abb. 3.42.

## 4. Multiplikation zwischen Skalar und Vektor

Auf Grund des Distributivgesetzes (4) und des Assoziativgesetzes (3) ergibt sich

$$(11) \quad m \mathbf{a} = m(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = m a_x \mathbf{i} + m a_y \mathbf{j} + m a_z \mathbf{k}.$$

### Beispiel 12:

$$0,4(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = -0,8\mathbf{i} + 1,2\mathbf{j} - 1,6\mathbf{k}$$

## 5. Einheitsvektor

Die Komponentendarstellung des zu  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$  gehörigen Einheitsvektors  $\mathbf{e}_a$  ist

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{a} \mathbf{a} = \frac{1}{a} (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = \frac{a_x}{a} \mathbf{i} + \frac{a_y}{a} \mathbf{j} + \frac{a_z}{a} \mathbf{k}.$$

**Beispiel 13:**

$$a = 15i - 12j + 16f, \quad e_a = 0,6i - 0,48j + 0,64f.$$

**6. Koeffizientenvergleich**

Bei den Anwendungen ergibt sich mitunter eine Vektorgleichung

$$p_1 i + q_1 j + r_1 f = p_2 i + q_2 j + r_2 f.$$

Die Vektoren  $i$ ,  $j$  und  $f$  sind natürlich nicht kollinear oder komplanar. Man vermutet, daß auch hier der **Koeffizientenvergleich**

$$p_1 = p_2, \quad q_1 = q_2, \quad r_1 = r_2$$

möglich ist (vgl. S. 83). Das läßt sich leicht beweisen:

Indem man auf beiden Seiten  $p_2 i + q_2 j + r_2 f$  subtrahiert, erhält man

$$(p_1 - p_2)i + (q_1 - q_2)j + (r_1 - r_2)f = \vec{0}.$$

Wäre nun  $p_1 \neq p_2$ , so könnte man die Gleichung mit  $\frac{1}{p_1 - p_2}$  multiplizieren und  $i$  isolieren:

$$i = -\frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2} \cdot j - \frac{r_1 - r_2}{p_1 - p_2} \cdot f;$$

$i$ ,  $j$  und  $f$  wären demnach komplanar [vgl. (7)], was jedoch nicht sein kann. Da dieser Widerspruch durch die Annahme  $p_1 \neq p_2$  zustande kommt, müssen wir diese Annahme verwerfen. Dann kann aber nur  $p_1 = p_2$  gelten.

● Zeigen Sie in analoger Weise, daß  $q_1 = q_2$  und  $r_1 = r_2$  sein muß!

**Beispiel 14:**

An der Vektorgleichung  $(a + b + c)i - (3b - 6a + 7c)j + (4a + 7c - 9b)f = 14i$  ist der Koeffizientenvergleich durchzuführen.

Man erhält

$$\left| \begin{array}{l} a + b + c = 14, \\ -(3b - 6a + 7c) = 0, \\ 4a + 7c - 9b = 0. \end{array} \right|$$

● Welche  $a$ ,  $b$  und  $c$  erfüllen dieses Gleichungssystem?

**7. Zur Kollinearität**

Zwei Vektoren  $a$  und  $b$  sind genau dann kollinear, wenn die Beziehung (6) gilt. Setzt man  $a$  und  $b$  in Komponentendarstellung ein, so erhält man anschließend durch Koeffizientenvergleich drei skalare Gleichungen. Dann errechnet man aus einer dieser Gleichungen  $\lambda$ . Erfüllt dieses  $\lambda$  die beiden anderen Gleichungen, so erfüllt es auch die Vektorgleichung (6), die Vektoren sind dann also kollinear.

Erfüllt es dagegen eine der beiden anderen Gleichungen nicht, so gibt es kein  $\lambda$ , das (6) erfüllt; die Vektoren sind dann also nicht kollinear.

**Beispiel 15:**

$\frac{3}{5}i - \frac{7}{6}j + \frac{1}{4}f$  und  $-\frac{18}{35}i + j - \frac{3}{14}f$  sind kollinear, weil die Vektoren Gleichung (6) erfüllen.

## 8. Zur Komplanarität

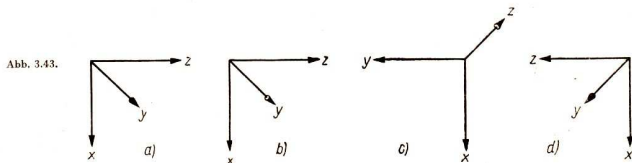
Drei Vektoren sind genau dann komplanar, wenn (7) gilt. Auch hier erhält man aus der Komponentenschreibweise drei skalare Gleichungen. Aus zweien von ihnen berechnet man  $\lambda$  und  $\mu$ . Erfüllt dieses Wertepaar auch die dritte Gleichung, so erfüllt es die Gleichung (7), die Vektoren sind dann komplanar. Andernfalls sind sie es nicht.

### Beispiel 16:

$i - 3j + 2f$ ,  $-4i + j - 3f$  und  $5i + 7j$  sind komplanar, weil sie Gleichung (7) erfüllen.

### Aufgaben

1. Welche der in Abbildung 3.43. gezeichneten Koordinatensysteme sind Rechtssysteme?



Im folgenden sind die Vektoren  $\mathfrak{A} = -3i + 3j + 5f$ ,  $\mathfrak{B} = i - 2j + 4f$ ,  $\mathfrak{C} = 4i + 3j - f$ ,  $\mathfrak{D} = 7,5i - 4,5j + 1,5f$ ,  $\mathfrak{E} = -12,5i + 7,5j - 2,5f$ ,  $\mathfrak{F} = -i + j + f$ ,  $\mathfrak{G} = 2i - j + 3f$  und  $\mathfrak{H} = 5,5i - 3j + 7f$  gegeben.

- Zeichnen Sie die Ortsvektoren  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  in ein Koordinatensystem ein!
- Bestimmen Sie die Beträge der drei Vektoren  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$ !
- Wie lauten die Komponentendarstellungen der zu  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  gehörigen Einheitsvektoren?
- Bestimmen Sie die Summen a)  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  b)  $\mathfrak{A} + \mathfrak{C}$  c)  $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ !
- Bestimmen Sie die Differenzen a)  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$  b)  $\mathfrak{A} - \mathfrak{C}$  c)  $\mathfrak{B} - \mathfrak{C}$ !
- Bestimmen Sie a)  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$  b)  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C}$  c)  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$  d)  $-\mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C}$ !  
Wie viele derartige Aufgaben kann man aus den drei Vektoren bilden?
- Geben Sie die Komponentendarstellungen der folgenden Vektoren an!  
a)  $\frac{2}{3}\mathfrak{A}$  b)  $1,6\mathfrak{B}$  c)  $\frac{2}{3}\mathfrak{A} - 3,5\mathfrak{C}$
- Sind die folgenden Vektoren kollinear?  
a)  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  b)  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  c)  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{C}$  d)  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$
- Sind die folgenden Vektoren komplanar?  
a)  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  b)  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$  c)  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$
- a) Für welche  $a$ ,  $b$  und  $c$  ist die folgende Gleichung erfüllt?  
 $(3a - 2b + c)i + (c - 3b + 4a)j - (5b - 5a - c)f = 22i + 24j + 17f$   
b) Für welche  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ist die folgende Gleichung erfüllt?  
 $(8y + 9x + 6z)i + \frac{x}{y}j + \frac{y}{z}f = 300i + \frac{2}{3}j + \frac{5}{6}f$

### 3.1.7. Das skalare Produkt

Wirkt eine konstante Kraft  $\mathfrak{F}$  auf einen Gegenstand, während er einen geradlinigen Weg  $\mathfrak{s}$  zurücklegt, so wird eine Arbeit  $A$  verrichtet, die sich als Produkt der Weglänge mit der Größe der Kraftkomponente in Wegrichtung berechnen läßt. Wird mit  $(\mathfrak{F}; \mathfrak{s})$  der Winkel zwischen Kraft- und Wegrichtung<sup>1</sup> bezeichnet, so gilt (Abb. 3.44.)

$$A = |\mathfrak{F}| |\mathfrak{s}| \cos(\mathfrak{F}; \mathfrak{s}).$$

Diese Beziehung stellt eine multiplikative Verknüpfung zweier Vektorgrößen (Kraft und Weg) dar, deren Ergebnis eine skalare Größe (Arbeit) ist. Eine solche Verknüpfung zweier Vektorgrößen, deren Ergebnis ein Skalar ist, kommt oft vor. Deshalb definiert man allgemein für zwei den Winkel  $(a; b)$  einschließende Vektoren  $a$  und  $b$  das skalare Produkt  $|a| |b| \cos(a; b)$ , wofür man kurz  $a \cdot b$  schreibt<sup>2</sup>:

$$(12) \quad a \cdot b = |a| |b| \cos(a; b).$$

► Das skalare Produkt zweier Vektoren ist gleich dem Produkt ihrer Beträge mit dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Das skalare Produkt wird auch **Punktprodukt** oder **inneres Produkt** genannt.

#### ■ Beispiel 17:

Gegeben sind  $|a| = 9$ ,  $|b| = 7$  und  $(a; b) = 60^\circ$ ; man soll  $a \cdot b$  ermitteln.

$$a \cdot b = 9 \cdot 7 \cdot \cos 60^\circ = 31,5.$$

Für  $a \cdot a$  schreibt man auch  $a^2$ . Dann gilt also

$$a^2 = |a| |a| \cos 0^\circ = a^2.$$

Daraus folgt für den Betrag  $a$  des Vektors  $a$

$$(13) \quad a = \sqrt{a^2} = \sqrt{a \cdot a}.$$

Wie Abbildung 3.45. zeigt, kann das skalare Produkt auch anschaulich als Produkt aus der Länge des Vektorpfeils  $b$  mit der Projektion des Pfeils  $a$  auf  $b$  gedeutet werden.

#### Eigenschaften des skalaren Produkts

1. In Abbildung 3.46. haben die Vektorpfeile  $a_1, a_2, a_3$  die gleiche Projektion auf  $b$ , so daß

$$a_1 \cdot b = a_2 \cdot b = a_3 \cdot b = c$$

ist. Daraus folgt, daß bei gegebenem skalarem Produkt  $c$  und einem Faktor  $b$  der andere nicht eindeutig bestimmt werden kann. Das bedeutet aber, daß es zur Bildung des skalaren Produkts keine Umkehrung, keine Division, gibt.

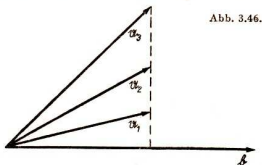


Abb. 3.46.

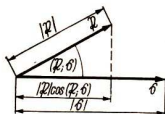


Abb. 3.44.

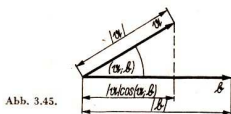


Abb. 3.45.

<sup>1</sup> Das Symbol  $(a; b)$  soll den Winkel bezeichnen, den die beiden mit ihren Anfangspunkten aneinandergesetzten Vektorpfeile  $a$  und  $b$  einschließen und der zwischen  $0$  und  $\pi \triangleq 180^\circ$  liegt. Somit ist  $(a; b) = (b; a)$ .

<sup>2</sup> Gelesen „a Punkt b“.

2. Beim skalaren Produkt gilt das Kommutativgesetz

$$(14) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a},$$

denn das bedeutet nach der Definition des skalaren Produkts

$$|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{b}; \mathbf{a}).$$

Weil  $(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = (\mathbf{b}; \mathbf{a})$  gilt, stimmen beide Seiten überein.

3. Beim skalaren Produkt gilt auch das für jede Multiplikation charakteristische Distributivgesetz

$$(15) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

Denn wie die Abbildung 3.47. zeigt, ist die Projektion von  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  auf  $\mathbf{c}$  gleich der Summe der Projektionen von  $\mathbf{a}$  und von  $\mathbf{b}$  auf  $\mathbf{c}$ .

4. Nun läßt sich leicht beweisen, daß

$$(15a) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}$$

gilt, daß die Klammern also formal in der gleichen Weise aufgelöst werden, wie man das vom Rechnen unter Benutzung allgemeiner Zahlensymbole her kennt. Denn es gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) \\ &= (\mathbf{c} + \mathbf{d}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{c} + \mathbf{d}) \cdot \mathbf{b} \\ &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{b}, \end{aligned}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}.$$

● *Geben Sie zu jeder Zeile das Gesetz an, das die Umformung ermöglicht!*

■ **Beispiel 18:**

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 &= a^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + b^2. \end{aligned}$$

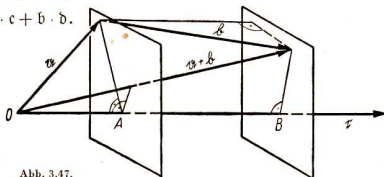


Abb. 3.47.

Die Regel (15a) kann mühelos auf mehr als zwei Summanden in den Klammern übertragen werden. Auch dann werden die Klammern so aufgelöst, wie man das vom Rechnen mit allgemeinen Zahlensymbolen her kennt.

5. In Verbindung mit einem skalaren Faktor  $p$  gilt beim skalaren Produkt das Assoziativgesetz  $(p\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = p(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ . Da es also auf die Klammersetzung nicht ankommt, kann man ganz auf sie verzichten:

$$(16) (p\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = p(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = p\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Beim folgenden Beweis beachte man, daß für die Winkel im Falle

$$p > 0 \quad (p\mathbf{a}; \mathbf{b}) = (\mathbf{a}; \mathbf{b}), \quad \text{im Falle } p < 0$$

$$(p\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \pi - (\mathbf{a}; \mathbf{b}) \quad \text{gilt (Abb. 3.48.).}$$

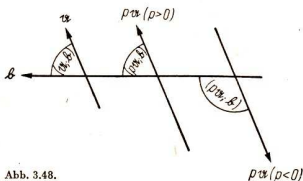


Abb. 3.48.

Es ist

$$(p\alpha) \cdot \mathfrak{b} = |p\alpha| |\mathfrak{b}| \cos(p\alpha; \mathfrak{b}) = |p| |\alpha| |\mathfrak{b}| \cos(p\alpha; \mathfrak{b}).$$

Daraus ergibt sich für

$$\begin{array}{l} p > 0 \\ (p\alpha) \cdot \mathfrak{b} = |p| |\alpha| |\mathfrak{b}| \cos(\alpha; \mathfrak{b}) \\ = p(\alpha \cdot \mathfrak{b}). \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} p < 0 \\ (p\alpha) \cdot \mathfrak{b} = |p| |\alpha| |\mathfrak{b}| \cos[\pi - (\alpha; \mathfrak{b})] \\ = -|p| |\alpha| |\mathfrak{b}| \cos(\alpha; \mathfrak{b}) \\ = p(\alpha \cdot \mathfrak{b}). \end{array} \right.$$

6. Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, so ist ihr skalares Produkt gleich Null, weil  $\cos 90^\circ = 0$  ist. Umgekehrt folgt aus

$$\alpha \cdot \mathfrak{b} = |\alpha| |\mathfrak{b}| \cos(\alpha; \mathfrak{b}) = 0$$

und  $\alpha \neq \mathfrak{O}, \mathfrak{b} \neq \mathfrak{O}$ , daß

$$\cos(\alpha; \mathfrak{b}) = 0$$

ist, daß  $\alpha$  und  $\mathfrak{b}$  also aufeinander senkrecht stehen. Im Gegensatz zum Produkt reeller Zahlen kann also das skalare Produkt zweier Vektoren gleich Null sein, ohne daß ein Faktor Null ist.

7. Sind die Vektoren  $\alpha$  und  $\mathfrak{b}$  in Komponentendarstellung gegeben:

$$\alpha = a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j} + a_z \mathfrak{k} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = b_x \mathfrak{i} + b_y \mathfrak{j} + b_z \mathfrak{k},$$

so gilt auf Grund des Distributivgesetzes (15 a) und des Assoziativgesetzes (16)

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \mathfrak{b} = & a_x b_x \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} + a_x b_y \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} + a_x b_z \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{k} \\ & + a_y b_x \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{i} + a_y b_y \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j} + a_y b_z \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k} \\ & + a_z b_x \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{i} + a_z b_y \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{j} + a_z b_z \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k} &= 1, \\ \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{i} &= 0, \\ \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{i} &= 0, \\ \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{j} &= 0. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$(17) \quad \alpha \cdot \mathfrak{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Liegen  $\alpha$  und  $\mathfrak{b}$  in der  $xy$ -Ebene, so ist  $a_z = b_z = 0$ , und es gilt:

$$(17a) \quad \alpha \cdot \mathfrak{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

#### ■ Beispiel 19:

Das skalare Produkt der Vektoren

$\alpha = -\mathfrak{i} + 6\mathfrak{j} + 5\mathfrak{k}$  und  $\mathfrak{b} = 3\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}$  soll gebildet werden. Nach (17) ist

$$\alpha \cdot \mathfrak{b} = (-1) \cdot 3 + 6 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 = 5.$$

### Winkel zwischen zwei Vektoren

Um den Winkel zwischen zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  zu ermitteln, stellt man die Definitionsgleichung des skalaren Produkts (12) nach  $\cos(\mathbf{a}; \mathbf{b})$  um:

$$(18) \quad \cos(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

Für  $\cos(\mathbf{a}; \mathbf{b}) > 0$  ist  $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$  ein spitzer Winkel, für  $\cos(\mathbf{a}; \mathbf{b}) < 0$  ist  $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$  stumpf.

#### Beispiel 20:

Wie groß ist der Winkel  $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$  zwischen den Vektoren  $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$  und  $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ?

Nach (18) gilt  $\cos(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \frac{5}{\sqrt{62} \cdot \sqrt{29}} \approx 0,118$ ,

$$(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \approx 83,2^\circ.$$

### Projektion eines Vektors auf die Richtung eines anderen

Soll die Projektion von  $\mathbf{a}$  auf  $\mathbf{b}$  bestimmt werden, so bildet man das skalare Produkt von  $\mathbf{a}$  mit dem  $\mathbf{b}$  zugeordneten Einheitsvektor:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b.$$

Dieses skalare Produkt ist gleich dem Produkt der Projektion von  $\mathbf{a}$  auf  $\mathbf{b}$  mit der Zahl 1.

#### Beispiel 21:

Die Länge der Projektion von

$\mathbf{a} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  auf  $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$  soll ermittelt werden.

$$\mathbf{e}_b = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b = -2.$$

Die Projektion hat die Länge 2. Das negative Vorzeichen zeigt an, daß der Winkel  $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$  stumpf ist.

### Berechnung der Arbeit

Auf Grund der Definition des skalaren Produkts kann für die Arbeit

$$A = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s}$$

geschrieben werden.

#### Beispiel 22:

Der Angriffspunkt der Kraft  $\mathfrak{F} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$  (skalare Komponenten in Kilopond) wird vom Punkt  $A(1; 4; -2)$  zum Punkt  $B(6; 7; 3)$  (Koordinateneinheit: Meter) geradlinig verschoben. Wie groß ist die verrichtete Arbeit?

Werden die den Punkten  $A$  und  $B$  zugeordneten Ortsvektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  eingeführt (Abb. 3.49.), so gilt

$$\mathfrak{s} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k},$$

so daß

$$\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s} = 14$$

wird. Da das skalare Produkt hier positiv ist, ist der Winkel zwischen Kraft und Weg spitz; die Kraft fördert also die Bewegung längs des Weges. Die verrichtete Arbeit beträgt 14 kpm.

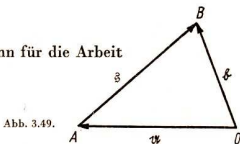


Abb. 3.49.

## Aufgaben

- a)  $(a - b)^2 =$       b)  $(a + b) \cdot (a - b) =$       c)  $(a + b) \cdot (2a + b) =$
- Gegeben sind  $\mathfrak{A} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ,  $\mathfrak{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ,  $\mathfrak{C} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  
 $\mathfrak{D} = 7,5\mathbf{i} - 2,3\mathbf{j} + 1,8\mathbf{k}$ ,  $\mathfrak{E} = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} - \frac{2}{5}\mathbf{k}$ . Bestimmen Sie die Winkel zwischen  
 a)  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ ; b)  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$ ; c)  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{D}$ ; d)  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$ ; e)  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{E}$ !  
 f) Wie viele derartige Aufgaben kann man mit den gegebenen Vektoren bilden?  
 g) Bestimmen Sie den Winkel zwischen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathbf{i}$ !
- Welche Winkel hat das Dreieck  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-2; 5; -1)$ ,  $C(-1; 2; 6)$ ?  
 Anleitung: Bestimmen Sie die Winkel zwischen den Vektoren  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AC}$  usw.!
- Wie groß sind die Winkel der durch folgende Punkte gegebenen Vierecke?  
 a)  $P_1(-2; 3; 5)$ ,  $P_2(0; 2; 0)$ ,  $P_3(-1; 0; 1)$ ,  $P_4(-10; -1; -3)$   
 b)  $P_1(1; 1; 1)$ ,  $P_2(0; 7; 6)$ ,  $P_3(3; -2; 5)$ ,  $P_4(2; 4; 10)$   
 c) Handelt es sich um ebene Vierecke?
- Wie groß sind die Winkel des in der  $xy$ -Ebene gelegenen Dreiecks  $A(2; -3)$ ,  $B(5; 0)$ ,  $C(4; 10)$ ?
- Bestimmen Sie die Länge der Projektion von  $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  auf  
 a)  $\mathbf{b} = 15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$ ; b)  $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ !
- a) Der Angriffspunkt der Kraft  $\mathfrak{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$  (skalare Komponenten in Kilopond) wird vom Punkt  $A(1; 0; 0)$  zum Punkt  $B(3; 4; 7)$  (Koordinateneinheit: Meter) verschoben. Fördert oder hemmt die Kraft die Fortbewegung? Wie groß ist die Arbeit?  
 b) Desgl. Verschiebung von  $D(-1; 0; 0)$  nach  $C(2; 3; 0)$ !

### 3.1.8. Das Vektorprodukt

Der Betrag des Drehmoments  $\mathfrak{M}$ , das durch eine senkrecht zur Drehachse gerichtete Kraft  $\mathfrak{F}$  hervorgerufen wird, läßt sich als Produkt des Betrags dieser Kraft mit dem Abstand  $p$  ihrer Wirklinie von der Drehachse berechnen (Abb. 3.50.a). Ist  $\tau$  die orientierte Entfernung des Angriffspunkts der Kraft von der Drehachse, so ist der Abstand  $p$

$$p = |\tau| \sin(\tau; \mathfrak{F}).^1$$

Der Betrag des Drehmoments ist somit

$$(19) \quad |\mathfrak{M}| = p |\mathfrak{F}| = |\tau| |\mathfrak{F}| \sin(\tau; \mathfrak{F}).$$

Das Drehmoment ist als Vektorgröße erklärt, die durch einen Pfeil in der Drehachse veranschaulicht wird, der so orientiert ist, wie sich eine Rechtsschraube bei einer vom

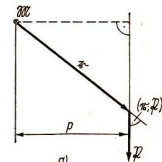


Abb. 3.50.

<sup>1</sup> Wegen  $\sin[\pi - (\tau; \mathfrak{F})] = \sin(\tau; \mathfrak{F})$  und  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  gilt die Beziehung unabhängig davon, ob  $(\tau; \mathfrak{F})$  spitz, stumpf oder gleich  $\frac{\pi}{2}$  ist.



Abb. 3.50.b

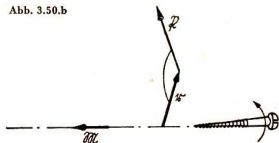
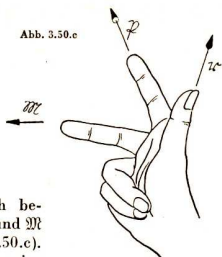


Abb. 3.50.e



Drehmoment hervorgerufenen Drehung translatorisch bewegen würde (Abb. 3.50.b) oder anders formuliert:  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{M}$  bilden (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem (Abb. 3.50.e). Hier liegt wieder eine multiplikative Verknüpfung zweier Vektorgrößen vor, deren Ergebnis jedoch eine Vektorgröße ist. Da auch eine solche Verknüpfung zweier Vektorgrößen öfters vorkommt, definiert man allgemein für zwei den Winkel  $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$  einschließende Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  das **Vektorprodukt**  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ :<sup>1</sup>

► **Der Vektor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  hat folgende Eigenschaften:**

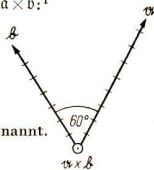
1. **Betrag:**  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ ,
2. **Richtung:** Senkrecht zu  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ ,
3. **Orientierung:**  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  bilden ein Rechtssystem.

Das Vektorprodukt wird auch **Kreuzprodukt** oder **äußeres Produkt** genannt.

■ **Beispiel 23:**

Gegeben sind zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ , die durch Vektorpfeile in der Zeichenebene veranschaulicht werden können (Abb. 3.51.). Das Vektorprodukt  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  soll ermittelt werden. Es kann durch einen Pfeil veranschaulicht werden, der auf der Zeichenebene senkrecht steht. Im Falle der Abbildung 3.51. zeigt er nach oben aus der Zeichenebene heraus. Ist  $|\mathbf{a}| = 9$ ,  $|\mathbf{b}| = 7$ ,  $(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = 60^\circ$ , so ergibt sich  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \approx 54,5$ .

Abb. 3.51.



Da der Flächeninhalt eines von den Vektorpfeilen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms (Abb. 3.52.) gleich

$$A = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

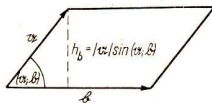


Abb. 3.52.

ist, kann der Betrag  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  des Vektorprodukts als Flächeninhalt des Parallelogramms gedeutet werden, das von den Vektorpfeilen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannt wird; die Richtung von  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  liegt senkrecht zur Parallelogrammfläche.

*Eigenschaften des Vektorprodukts*

1. In Abbildung 3.53. sind die von den komplanaren Vektoren  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}_2$  und  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}_3$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramme flächengleich, so daß

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_3 \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

ist. Daraus folgt, daß bei gegebenem Vektorprodukt  $\mathbf{c}$  und einem Faktor  $\mathbf{b}$  der andere nicht eindeutig bestimmt werden kann. Das bedeutet aber, daß es zur Bildung des Vektorprodukts keine Umkehrung, **keine Division**, gibt.

<sup>1</sup> Gelesen: „a Kreuz b“.

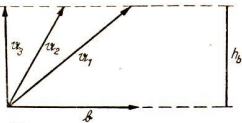


Abb. 3.53.

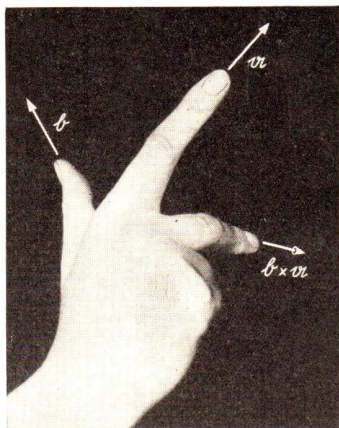
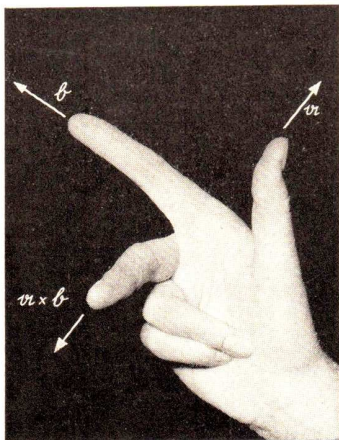


Abb. 3.54.a

2. Beim Vektorprodukt gilt das Kommutationsgesetz nicht. Es ist zwar

$$|a \times b| = |b \times a|,$$

denn das ist gleichbedeutend mit

$$|a| |b| \sin(a; b) = |b| |a| \sin(b; a).$$

Das ist wegen der Winkelgleichheit  $(a; b) = (b; a)$  offensichtlich richtig. Auch die Richtungen von  $a \times b$  und  $b \times a$  stimmen überein. Die Orientierung von  $b \times a$  ist jedoch der von  $a \times b$  entgegengesetzt (Abb. 3.54. a und b). Daher gilt

$$(20) \quad b \times a = -a \times b.$$

Diese Beziehung heißt **Alternativgesetz**; es tritt beim Vektorprodukt an die Stelle des Kommutationsgesetzes.

3. Auch beim Vektorprodukt gilt das für jede Multiplikation charakteristische **Distributionsgesetz**

$$(21) \quad (a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

Den Beweis führen wir nur für den Sonderfall, daß  $a$ ,  $b$  und  $c$  komplanar sind. Für diesen Fall zeigt Abbildung 3.55. a, daß das von  $a + b$  und  $c$  aufgespannte Parallelogramm flächengleich ist der Summe der Parallelogramme, die von  $a$  und  $c$  und von  $b$  und  $c$  aufgespannt werden. Da überdies Richtung und Orientierung der drei Vektorprodukte übereinstimmen, ist damit für diesen Fall die Gültigkeit von (21) nachgewiesen.

● Zeigen Sie, daß (21) auch bei den komplanaren Vektoren der Abbildung 3.55. b gilt!

4. Nun läßt sich leicht beweisen, daß

$$(21a) \quad (a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Abb. 3.54.b

Abb. 3.55.a

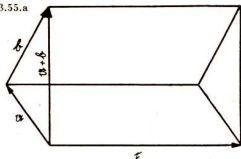
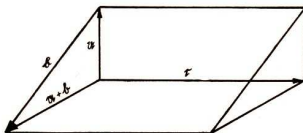


Abb. 3.55.b



gilt, daß die Klammern also formal in der gleichen Weise aufgelöst werden, wie man das vom Rechnen unter Benutzung allgemeiner Zahlensymbole her kennt. Dabei ist aber auf die Reihenfolge der Faktoren zu achten, weil beim Vektorprodukt das Alternativgesetz gilt.

● *Beweisen Sie (21 a)! Anleitung: Verfahren Sie analog wie beim Beweis von (15 a)!*

Die Regel (21 a) kann ohne Schwierigkeiten auf mehr als zwei Summanden in den Klammern übertragen werden.

5. In Verbindung mit einem skalaren Faktor  $p$  gilt beim Vektorprodukt das **Assoziationsgesetz**  $(p\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = p(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ . Da es also auf die Klammersetzung nicht ankommt, kann man ganz auf sie verzichten:

$$(22) \quad (p\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = p\mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

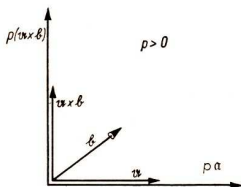


Abb. 3.56.a

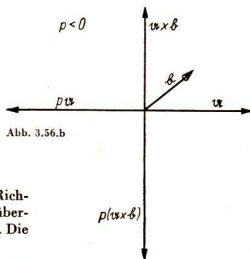


Abb. 3.56.b

#### Beweis:

$(p\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$  und  $p(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  haben offensichtlich gleiche Richtung; aber auch in der Orientierung stimmen sie überein, wie man der Abbildung 3.56.a und b entnimmt. Die Beträge sind ebenfalls gleich, denn es gilt

$$\begin{aligned} |(p\mathbf{a}) \times \mathbf{b}| &= |p\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(p\mathbf{a}; \mathbf{b}) = |p| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(p\mathbf{a}; \mathbf{b})^1 \\ &= |p| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \end{aligned}$$

und

$$|p(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = |p| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |p| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}; \mathbf{b}).$$

<sup>1</sup> Für die Winkel  $(p\mathbf{a}; \mathbf{b})$  und  $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$  gilt im Falle  $p > 0$   $(p\mathbf{a}; \mathbf{b}) = (\mathbf{a}; \mathbf{b})$  und im Falle  $p < 0$   $(p\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \pi - (\mathbf{a}; \mathbf{b})$ , in beiden Fällen also  $\sin(p\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \sin(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ .

6. Wenn zwei Vektoren kollinear sind, so ist ihr Vektorprodukt gleich dem Nullvektor, weil  $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$  ist. Umgekehrt folgt aus

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\alpha; \mathbf{b}) = 0$$

und  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , daß

$$\sin(\alpha; \mathbf{b}) = 0$$

ist, daß  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  also kollinear sind. Im Gegensatz zum Produkt reeller Zahlen kann also auch das Vektorprodukt gleich Null sein, ohne daß ein Faktor Null ist.

7. Sind die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  in Komponentendarstellung gegeben:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k},$$

so gilt auf Grund des Distributionsgesetzes (21a) und des Assoziationsgesetzes (22)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a_x b_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ &\quad + a_y b_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \times \mathbf{j} + a_y b_z \mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ &\quad + a_z b_x \mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_z b_y \mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k} \times \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k},$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{j},$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}.$$

● Zeigen Sie die Richtigkeit dieser Gleichungen!

Also gilt

$$(23) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}.$$

Liegen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  in der  $xy$ -Ebene, so ist  $a_z = b_z = 0$ , und es gilt

$$(23a) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}.$$

■ **Beispiel 24:**

Das Vektorprodukt der Vektoren

$$\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \quad \text{soll gebildet werden.}$$

$$\text{Nach (23) ist } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 34\mathbf{i} + 19\mathbf{j} - 16\mathbf{k}.$$

Der Ortsvektor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 34\mathbf{i} + 19\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$  steht auf dem von den Ortsvektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramm senkrecht; seine Länge beträgt  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \approx 42$  Längeneinheiten, und die Parallelogrammfläche beträgt  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \approx 42$  Flächeneinheiten.

### Berechnung des Drehmoments

Auf Grund der Definition des Vektorprodukts und der Beziehung (19) kann für das Drehmoment

$$\mathfrak{M} = \mathbf{r} \times \mathfrak{P}$$

geschrieben werden.

**Beispiel 25:**

Ein starrer Körper sei um den Punkt  $A(1; 4; -2)$  drehbar (Koordinateneinheit: Meter). Im Punkt  $B(6; 7; 3)$  wirke auf den Körper die Kraft  $\mathfrak{F} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{f}$  (skalare Komponenten in Kilopond). Das Drehmoment soll bestimmt werden.

Werden die den Punkten  $A$  und  $B$  zugeordneten Ortsvektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  eingeführt, so gilt für die orientierte Entfernung  $\mathbf{r}$  des Angriffspunktes  $B$  vom Drehpunkt  $A$

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{f}.$$

Das Drehmoment ist dann

$$\mathfrak{M} = \mathbf{r} \times \mathfrak{F} = -18\mathbf{i} + 15\mathbf{j} + 9\mathbf{f}$$

(skalare Komponenten in Meterkilopond).

Geben Sie  $|\mathfrak{M}|$  und  $e_{\mathfrak{M}}$  an!

**Lineargeschwindigkeit bei Rotation**

Ein starrer Körper rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine Achse. Welche Lineargeschwindigkeit hat der Punkt  $B$  des Körpers?

Der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  kann man einen Vektor  $\vec{\omega}$  zuordnen, der folgendermaßen festgelegt wird:

- $|\vec{\omega}| = \omega$ ,
- Richtung von  $\vec{\omega}$  ist gleich der Richtung der Drehachse,
- $\vec{\omega}$  ist so orientiert, wie sich eine Rechtsschraube bei dieser Drehung längs ihrer Achse bewegen würde.

Dann hat der Punkt  $B$  des Körpers, der mit einem Punkt  $A$  der Achse durch den Vektorpfeil  $\mathbf{r}$  verbunden ist, die Lineargeschwindigkeit (Abb. 3.57.)

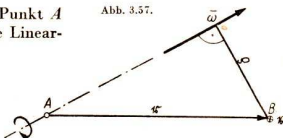
$$\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Ist  $\varrho$  die Länge des Lotes von  $B$  auf die Achse, so gilt nämlich

$$|\mathbf{v}| = \omega \varrho = \omega |\mathbf{r}| \sin(\vec{\omega}; \mathbf{r}) = |\vec{\omega} \times \mathbf{r}|,$$

und außerdem stimmen Richtung und Orientierung von  $\mathbf{v}$  und  $\vec{\omega} \times \mathbf{r}$  überein.

Abb. 3.57.

**Beispiel 26:**

Ein starrer Körper rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $15 \text{ s}^{-1}$  um eine Achse, die durch den Punkt  $A(1; 4; -2)$  (Koordinateneinheit: Meter) und den Einheitsvektor

$\mathbf{e} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{15}\mathbf{j} + \frac{11}{15}\mathbf{f}$  festgelegt ist;  $\mathbf{e}$  ist nach der Rechtsschraubenregel orientiert. Die Lineargeschwindigkeit des Punktes  $B(6; 7; 3)$  soll bestimmt werden. Dann ist

$$\vec{\omega} = 15\mathbf{e} = 10\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 11\mathbf{f} \left( \text{skalare Komponenten in } \frac{1}{\text{Sekunde}} \right),$$

$$\mathbf{r} = (6\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 3\mathbf{f}) - (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{f})$$

$$= 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{f} \text{ (skalare Komponenten in Metern),}$$

$$\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r} = -43\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 40\mathbf{f} \text{ (skalare Komponenten in Metern pro Sekunde),}$$

Daraus folgt  $v = |\mathbf{v}| \approx 59 \text{ ms}^{-1}$ .

## Aufgaben

- a)  $(a + b) \times (a + b) =$     b)  $(a + 2b) \times (a + b) =$     c)  $(a - b) \times (a - b) =$
- Gegeben sind die Vektoren  $\mathfrak{A}, \dots, \mathfrak{G}$  (3.1.7. Aufgabe 2). Bestimmen Sie die Fläche des Parallelogramms, das von den folgenden Ortsvektoren aufgespannt wird!

a)  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$     b)  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$     c)  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{D}$     d)  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$     e)  $\mathfrak{A}$  und  $i$
- a) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die folgenden Punkte gegeben ist?  
 $A(1; 1; 1), B(-2; 5; -1), C(-1; 2; 6)$

Anleitung: Arbeiten Sie mit den Vektoren  $\overrightarrow{AB}$  usw.! Denken Sie daran, daß die von den Pfeilen aufgespannte Parallelogrammfläche den Betrag des Vektorprodukts veranschaulicht!

b) Geben Sie die beiden Einheitsvektoren  $e_1$  und  $e_2$  an, die auf der Dreiecksfläche senkrecht stehen!
- Begründen Sie folgenden Satz: Sind  $a$  und  $b$  kollinear, so ist  $a \times b = \mathfrak{D}$ !
- Um festzustellen, ob drei Vektoren  $a, b$  und  $c$  komplanar sind, untersucht jemand, ob die Vektoren  $a \times b$  und  $a \times c$  kollinear sind. Führt das Verfahren zum Ziel? Geben Sie eine Begründung!
- Ein starrer Körper sei um den Punkt  $A(2; -1; 3)$  drehbar (Koordinateneinheit: Meter). Im Punkt  $B(-9; 3; -4)$  wirke auf den Körper die Kraft  $\mathfrak{B} = 2i - 11j + 10k$  (skalare Komponenten in Kilopond). Bestimmen Sie das Drehmoment!
- Ein starrer Körper rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $314 \text{ s}^{-1}$  um eine Achse, die durch den Punkt  $A(2; -1; 3)$  (Koordinateneinheit: Meter) und den Vektor  $12i - 4j + 6k$  (nach der Rechtsschraubenregel orientiert) festgelegt ist. Bestimmen Sie die Lineargeschwindigkeit des Punktes  $B(-9; 3; -4)$ !

## 3.1.9. Anwendungen in der Geometrie

### Merkwürdige Punkte des Dreiecks

1. Es soll bewiesen werden, daß sich die Höhen eines Dreiecks in einem Punkte schneiden.

Eine einfache Umformung des Problems erleichtert die Lösung der Aufgabe. Statt zu behaupten, die drei Höhen schneiden einander in einem Punkt, formuliert man die gleichwertige Aussage (Abb. 3.58.a):

Schneiden einander  $h_c$  und  $h_b$  in  $H$ , so steht  $AH$  auf  $a$  senkrecht.

**Voraussetzung:**

$h_c \perp c, h_b \perp b, h_c$  und  $h_b$  schneiden einander in  $H$ .

**Behauptung:**

$AH \perp a$ .

Da die Aufgabe vektorieLL behandelt werden soll, werden die Vektorpfeile  $\overrightarrow{AH} = \underline{x}, \overrightarrow{CH} = \underline{x} + \underline{b}, \overrightarrow{BH} = \underline{x} - \underline{c}$  eingeführt (Abb. 3.58.b).

Nunmehr können Voraussetzung und Behauptung durch Vektoroperationen ausgedrückt werden.

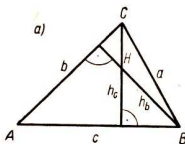


Abb. 3.58.a

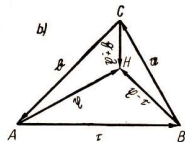


Abb. 3.58.b

**Voraussetzung:**

$$(\underline{x} + \underline{b}) \perp \underline{c}, \quad \text{d.h.} \quad (\underline{x} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = 0;$$

$$(\underline{x} - \underline{c}) \perp \underline{b}, \quad \text{d.h.} \quad (\underline{x} - \underline{c}) \cdot \underline{b} = 0.$$

**Behauptung:**

$$\underline{x} \perp \underline{a}, \quad \text{d.h.} \quad \underline{x} \cdot \underline{a} = 0.$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \underline{x} \cdot \underline{a} &= \underline{x} \cdot (-\underline{b} - \underline{c}) \\ &= -\underline{x} \cdot \underline{b} - \underline{x} \cdot \underline{c} \end{aligned}$$

$$= -\underline{c} \cdot \underline{b} + \underline{b} \cdot \underline{c}$$

$$\underline{x} \cdot \underline{a} = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

$\underline{x}$ , dessen Eigenschaften noch nicht bekannt sind, wird eliminiert. Das ermöglichen die Voraussetzungen:

$$\underline{x} \cdot \underline{c} = -\underline{b} \cdot \underline{c},$$

$$\underline{x} \cdot \underline{b} = \underline{c} \cdot \underline{b};$$

2. Es soll bewiesen werden, daß die Winkelhalbierenden eines Dreiecks einander in einem Punkte schneiden.

**Voraussetzung:**

$w_\gamma$  halbiert  $\gamma$ ,  $w_\beta$  halbiert  $\beta$ ,  $w_\gamma$  und  $w_\beta$  schneiden einander in  $W$ .

**Behauptung:**

Die Gerade  $AW$  halbiert  $\alpha$  (Abb. 3.59.a).

In vektorieller Schreibweise (Abb. 3.59.b):

**Voraussetzung:**

$$(\underline{x} + \underline{b}) \times (\underline{e}_b - \underline{e}_a) = \mathcal{D},$$

$$\text{d.h.} \quad \underline{x} \times \underline{e}_b - \underline{x} \times \underline{e}_a - \underline{b} \times \underline{e}_a = \mathcal{D};$$

$$(\underline{x} - \underline{c}) \times (\underline{e}_a - \underline{e}_c) = \mathcal{D},$$

$$\text{d.h.} \quad \underline{x} \times \underline{e}_a - \underline{x} \times \underline{e}_c - \underline{c} \times \underline{e}_a = \mathcal{D}.$$

**Behauptung:**

$$\underline{x} \times (\underline{e}_c - \underline{e}_b) = \mathcal{D}$$

**Beweis:**

$$\underline{x} \times (\underline{e}_c - \underline{e}_b) = \underline{x} \times \underline{e}_c - \underline{x} \times \underline{e}_b$$

Aus den Voraussetzungen

$$\underline{x} \times \underline{e}_c = \underline{x} \times \underline{e}_a - \underline{c} \times \underline{e}_a \quad \text{und}$$

$$\underline{x} \times \underline{e}_b = \underline{x} \times \underline{e}_a + \underline{b} \times \underline{e}_a$$

ermitteln und einsetzen:

$$= \underline{x} \times \underline{e}_a - \underline{c} \times \underline{e}_a - \underline{x} \times \underline{e}_a - \underline{b} \times \underline{e}_a$$

$$= (-\underline{c} - \underline{b}) \times \underline{e}_a$$

$$= \underline{a} \times \underline{e}_a$$

$$\underline{x} \times (\underline{e}_c - \underline{e}_b) = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Abb. 3.59.a

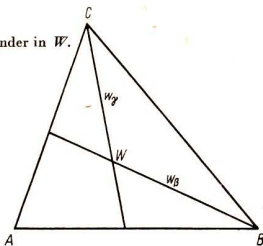
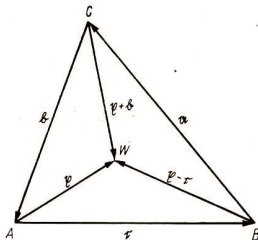
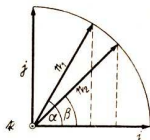


Abb. 3.59.b



## Additionstheoreme

Abb. 3.60.



### 1. Das Additionstheorem für die Kosinusfunktion

Aus Abbildung 3.60. liest man ab:

$$c_1 = \cos \alpha i + \sin \alpha j,$$

$$c_2 = \cos \beta i + \sin \beta j.$$

Werden die linken und die rechten Seiten dieser Gleichungen skalar miteinander multipliziert, so folgt daraus wegen der Eindeutigkeit der skalaren Multiplikation wieder eine Gleichung:

$$c_1 \cdot c_2 = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Nach der Definition des skalaren Produkts gilt aber auch

$$c_1 \cdot c_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

Durch Gleichsetzen erhält man

$$(24) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

● Leiten Sie an Hand der Abbildung 3.61. her:

$$(25) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta!$$

Die Formeln (24) und (25) heißen **Additionstheoreme der Kosinusfunktion**.

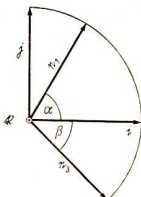


Abb. 3.61.

### 2. Das Additionstheorem für die Sinusfunktion

Aus Abbildung 3.60. liest man wieder

$$c_1 = \cos \alpha i + \sin \alpha j,$$

$$c_2 = \cos \beta i + \sin \beta j$$

ab. Werden die linken und die rechten Seiten dieser Gleichungen vektoriell miteinander multipliziert, so entsteht nach (23 a)

$$c_1 \times c_2 = (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) f.$$

Nach der Definition des Vektorprodukts gilt aber auch;  $c_1 \times c_2$  ist ein Vektor, der senkrecht zur  $xy$ -Ebene steht und wie  $-f$  orientiert ist; sein Betrag ist  $\sin(\alpha - \beta)$ . Das heißt:

$$c_1 \times c_2 = -\sin(\alpha - \beta) f.$$

Durch Gleichsetzen erhält man

$$-\sin(\alpha - \beta) f = (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) f$$

und daraus die skalare Gleichung

$$(26) \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

● Leiten Sie an Hand der Abbildung 3.61. her:

$$(27) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta!$$

Die Formeln (26) und (27) heißen **Additionstheoreme der Sinusfunktion**.



## Kosinussatz

Jetzt sollen mit Hilfe der Vektorrechnung Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreiecks hergeleitet werden. Nach Abbildung 3.62. gilt

$$(28) \quad a = -b - c.$$

Werden die linke und die rechte Seite dieser Gleichung skalar mit sich selbst multipliziert, so ergibt das

$$a \cdot a = (-b - c) \cdot (-b - c),$$

$$a \cdot a = b \cdot b + c \cdot c + 2b \cdot c,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(\pi - \alpha),$$

$$(29) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Das ist der bekannte **Kosinussatz**.

- Stellen Sie (28) nach  $b$  oder  $c$  um! Sie erhalten zwei zu (29) analoge Formeln.

### Sinussatz

Werden beide Seiten von (28) vektoriell mit  $c$  multipliziert, so fällt ein Glied weg:

$$a \times c = -b \times c,$$

$$a \times c = c \times b.$$

Sind zwei Vektoren gleich, so müssen ihre Beträge gleich sein:

$$|a \times c| = |c \times b|,$$

$$|a| |c| \sin(\pi - \beta) = |c| |b| \sin(\pi - \alpha),$$

$$a \sin \beta = b \sin \alpha,$$

$$(30) \quad a : b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Das ist der bekannte **Sinussatz**.

- Multiplizieren Sie (28) vektoriell mit  $a$  oder  $b$ ! Sie erhalten zwei zu (30) analoge Formeln.

### Aufgaben

1. Beweisen Sie, daß die Diagonalen des Rhombus aufeinander senkrecht stehen!
2. Beweisen Sie, daß die Seitenhalbierenden eines Dreiecks einander in einem Punkte schneiden (Abb. 3.63.)!
3. Beweisen Sie, daß die Mittelsenkrechten eines Dreiecks einander in einem Punkte schneiden (Abb. 3.64.)!
4. a) Spezialisieren Sie die Formeln (25) und (27) für den Fall  $\alpha = \beta$ !  
b) Leiten Sie Ausdrücke für  $\cos 3\alpha$  und  $\sin 3\alpha$  her!
5. Leiten Sie das Additionstheorem für die Tangensfunktion her!  
a)  $\tan(x + \beta)$       b)  $\tan(x - \beta)$

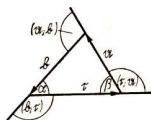


Abb. 3.62.

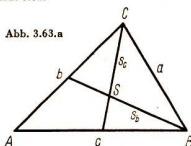


Abb. 3.63.a

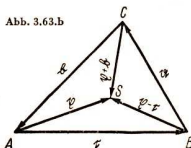


Abb. 3.63.b

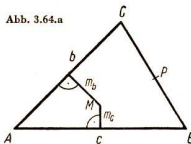


Abb. 3.64.a

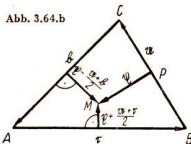


Abb. 3.64.b

## 3.2. Analytische Geometrie: Punkte, Geraden, Ebenen und Kreise

### 3.2.1. Abstand zweier Punkte

Den Abstand zweier Punkte  $P_1(r_1)$  und  $P_2(r_2)$  erhält man (Abb. 3.65.) als Länge des Vektorpfeils  $\overrightarrow{P_1P_2} = r_2 - r_1$  bzw. als Betrag des Vektors  $\overrightarrow{P_1P_2}$ :

$$\overline{P_1P_2} = |\overrightarrow{P_1P_2}| = |r_2 - r_1|.$$

Der Übergang zur Komponentenschreibweise mit  $r_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$  und  $r_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$  ergibt die **Entfernungsformel**

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

#### ■ Beispiel 1:

Der Abstand der Punkte  $P_1(12; -3; 5)$  und  $P_2(2; 13; -4)$  beträgt

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(-10)^2 + 16^2 + (-9)^2} \approx 20,9.$$

Liegen  $P_1$  und  $P_2$  in der  $xy$ -Ebene (Abb. 3.66.), ist also  $z_1 = z_2 = 0$ , so ergibt sich aus (1)

$$(1a) \quad \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Diese Gleichung stellt die Anwendung des pythagoreischen Satzes auf das rechtwinklige Dreieck  $P_1RP_2$  mit der Hypotenuse  $\overline{P_1P_2}$  und den Kathetenlängen  $|x_2 - x_1|$  und  $|y_2 - y_1|$  dar.

#### ■ Beispiel 2:

Der Abstand der (in der  $xy$ -Ebene liegenden) Punkte  $P_1(3; -7)$  und  $P_2(7; 4)$  beträgt

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{4^2 + 11^2} \approx 11,7.$$

### Aufgaben

- Wie groß sind die Seiten des durch folgende Punkte bestimmten Dreiecks?  
 $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-2; 5; -1)$ ,  $C(-1; 2; 6)$
- Wie groß sind die Seiten der durch die folgenden Punkte bestimmten Vierecke?
  - $P_1(-2; 3; 5)$ ,  $P_2(0; 2; 0)$ ,  $P_3(-1; 0; 1)$ ,  $P_4(-10; -1; -3)$
  - $P_1(1; 1; 1)$ ,  $P_2(0; 7; 6)$ ,  $P_3(3; -2; 5)$ ,  $P_4(2; 4; 10)$
- Wie groß sind die Seiten des durch folgende Punkte bestimmten Dreiecks?  
 $A(2; -3)$ ,  $B(5; 0)$ ,  $C(4; 10)$

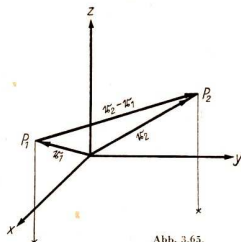


Abb. 3.65.

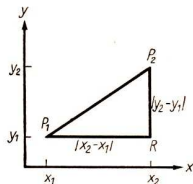


Abb. 3.66.

### 3.2.2. Teilung einer Strecke

Der Punkt  $P_0$  liege auf der Strecke  $\overline{P_1P_2}$ . Diese Strecke wird dann durch  $P_0$  im Verhältnis

$$\lambda = \overline{P_1P_0} : \overline{P_0P_2}$$

geteilt (Abb. 3.67.). Es gilt also

$$\overrightarrow{P_1P_0} = \lambda \overrightarrow{P_0P_2}.$$

Werden die Strecken orientiert, so ergibt sich

$$(2) \quad \overrightarrow{P_1P_0} = \lambda \overrightarrow{P_0P_2}.$$

Für  $\lambda = 0$  folgt aus (2)  $\overrightarrow{P_1P_0} = \vec{0}$ ;  $P_0$  fällt dann also mit  $P_1$  zusammen. Wird  $\lambda$  größer ( $\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1; 2; 3; \dots$ ), so durchläuft  $P_0$  die Strecke  $P_1P_2$  von  $P_1$  nach  $P_2$  (Abb. 3.68.). Ist z. B.  $\lambda = 100$ , so ist der Vektorpfeil  $\overrightarrow{P_1P_0}$  hundertmal so lang wie der Vektorpfeil  $\overrightarrow{P_0P_2}$ ;  $P_0$  liegt dann also sehr nahe bei  $P_2$ . Aber auch wenn  $\lambda$  unbegrenzt weiter wächst, wird  $P_0$  nie auf  $P_2$  fallen, sondern sich  $P_2$  nur immer mehr nähern.

Wenn  $P_0$  auf der Strecke  $\overline{P_1P_2}$  liegt, sind  $\overrightarrow{P_1P_0}$  und  $\overrightarrow{P_0P_2}$  gleich orientiert. Gleichung (2) zeigt, daß dann  $\lambda > 0$  sein muß;  $P_0$  heißt dann **innerer Teilpunkt**. Soll nun (2) auch für  $\lambda < 0$  gelten, so muß  $\overrightarrow{P_0P_2}$  offenbar entgegen  $\overrightarrow{P_1P_0}$  orientiert sein.

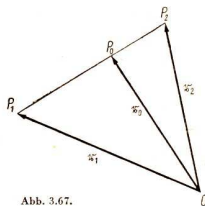


Abb. 3.67.

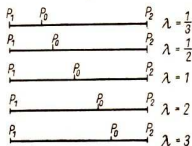


Abb. 3.68.

#### Beispiel 3:

Offenbar bedeutet  $\overrightarrow{P_1P_0} = -\frac{3}{2} \overrightarrow{P_0P_2}$ , daß der Vektorpfeil  $\overrightarrow{P_1P_0}$  anderthalbmal so lang wie der Vektorpfeil  $\overrightarrow{P_0P_2}$ , gleich gerichtet, aber entgegengesetzt orientiert ist (Abb. 3.69.).

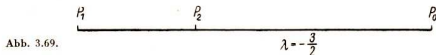


Abb. 3.69.

Ist  $\lambda < 0$ , so liegt  $P_0$  auf der Geraden  $P_1P_2$  außerhalb der Strecke  $\overline{P_1P_2}$ . Man nennt  $P_0$  dann einen **äußeren Teilpunkt** der Strecke.

► Ist  $\lambda > 0$ , so ist  $P_0$  ein innerer Teilpunkt,  
ist  $\lambda < 0$ , so ist  $P_0$  ein äußerer Teilpunkt der Strecke.

Die Beziehung (2) kann durch die Ortsvektoren  $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{r}_0$ ,  $\overrightarrow{OP_1} = \mathbf{r}_1$  und  $\overrightarrow{OP_2} = \mathbf{r}_2$  ausgedrückt werden (Abb. 3.67.):

$$(3) \quad \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0).$$

Bestimmung des Teilverhältnisses  $\lambda$  bei gegebenem  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_0$

Liegt  $P_0$  auf der Geraden  $P_1P_2$ , so kann man aus (3) das Teilverhältnis ermitteln, nach dem  $P_0$  die Strecke  $\overline{P_1P_2}$  teilt.

**Beispiel 4:**

In welchem Verhältnis teilt  $P_0(2; 0; 3)$  die Strecke  $\overline{P_1P_2}$  mit  $P_1(0; 1; 2)$  und  $P_2(6; -2; 5)$ ?  
 Man setzt  $r_0 = 2i + 3f$ ,  $r_1 = j + 2f$ ,  $r_2 = 6i - 2j + 5f$  in (3) ein:

$$2i - j + f = \lambda(4i - 2j + 2f).$$

Koeffizientenvergleich: 
$$\begin{cases} 2 = 4\lambda \\ -1 = -2\lambda \\ 1 = 2\lambda \end{cases}.$$

Alle drei Gleichungen werden durch  $\lambda = \frac{1}{2}$  erfüllt, das demnach auch die Vektorgleichungen (3) und (2) befriedigt:  $P_1P_0 = \frac{1}{2}P_0P_2$ ;  $P_0$  ist wegen  $\lambda > 0$  innerer Teilpunkt.

**Beispiel 5:**

In welchem Verhältnis teilt  $P_0(14; -7; -1)$  die Strecke  $\overline{P_1P_2}$  mit  $P_1(2; -1; 3)$  und  $P_2(-4; 2; 5)$ ?

In der gleichen Weise findet man, daß  $\lambda = -\frac{2}{3}$  die Vektorgleichungen (3) und (2) erfüllt:

$\overrightarrow{P_1P_0} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{P_0P_2}$ . Wegen  $\lambda < 0$  ist  $P_0$  äußerer Teilpunkt, und zwar liegt  $P_0$  näher bei  $P_1$  als bei  $P_2$ , weil  $|\overrightarrow{P_1P_0}| < |\overrightarrow{P_0P_2}|$  ist.

**Beispiel 6:**

In welchem Verhältnis teilt  $P_0(5; 6; -4)$  die Strecke  $\overline{P_1P_2}$  mit  $P_1(2; -1; 3)$  und  $P_2(-4; 2; 5)$ ?

Die analoge Behandlung führt auf

$$\begin{cases} 3 = -9\lambda \\ 7 = -4\lambda \\ -7 = 9\lambda \end{cases}.$$

Es gibt kein  $\lambda$ , das alle drei Gleichungen befriedigt, also gibt es auch keins, das hier die Vektorgleichungen (3) und (2) erfüllt. Der Punkt liegt folglich nicht auf der Geraden  $\overline{P_1P_2}$  und kann somit die Strecke nicht teilen. Die Vektoren  $\overrightarrow{P_1P_0}$  und  $\overrightarrow{P_0P_2}$  sind in diesem Falle nicht kollinear.

*Bestimmung des Teilpunktes  $P_0$  bei gegebenen  $P_1, P_2$  und  $\lambda$*

Um die Koordinaten des Teilpunktes  $P_0$  zu ermitteln, wird (3) nach dem Ortsvektor des Teilpunktes  $P_0(r_0)$  aufgelöst:

$$(4a) \quad r_0(1 + \lambda) = r_1 + \lambda r_2,$$

$$r_0 = \frac{r_1 + \lambda r_2}{1 + \lambda}.$$

Durch Übergang zur Komponentendarstellung und durch Koeffizientenvergleich erhält man die drei skalaren Gleichungen

$$(4b) \quad x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

für die Koordinaten des Teilpunktes  $P_0$ .

**Beispiel 7:**

Welcher Punkt  $P_0$  teilt die Strecke  $\overline{P_1P_2}$  mit  $P_1(2; -1; 3)$  und  $P_2(-4; 2; 5)$  im Verhältnis  $\lambda = -\frac{1}{3}$ ?

Aus (4b) ergibt sich  $x_0 = 4$ ,  $y_0 = -2$ ,  $z_0 = \frac{7}{3}$ , also  $P_0(4; -2; \frac{7}{3})$ .

Liegen die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  in der  $xy$ -Ebene, so sind  $z_1$  und  $z_2$  gleich Null. Dann folgt aus (4b)  $z_0 = 0$ . In diesem Falle werden also die Koordinaten des Teilpunktes  $P_0(x_0; y_0)$  aus den ersten beiden Gleichungen von (4b) ermittelt.

**Beispiel 8:**

Welcher Punkt  $P_0$  teilt die Strecke  $\overline{P_1P_2}$  mit  $P_1(-3; 5)$  und  $P_2(1; -4)$  im Verhältnis  $\lambda = \frac{3}{8}$ ?

Nach (4b) ergibt sich  $P_0\left(-\frac{3}{2}; \frac{13}{8}\right)$ .

Wird  $\overline{P_1P_2}$  von  $P_0$  halbiert, so ist  $\lambda = 1$ , und es gelten

$$(5) \quad x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Die Koordinaten des Halbierungspunktes  $P_0$  der Strecke  $\overline{P_1P_2}$  ergeben sich als arithmetisches Mittel der entsprechenden Koordinaten von  $P_1$  und  $P_2$ .

**Aufgaben**

1. Bestimmen Sie die Seitenmitten der durch folgende Punkte bestimmten Dreiecke!

a)  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-2; 5; -1)$ ,  $C(-1; 2; 6)$       b)  $A(2; -3)$ ,  $B(5; 0)$ ,  $C(4; 10)$

2. Die Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  mit  $A(5; -3; 7)$ ,  $B(-1; -2; 4)$ ,  $C(5; -4)$ ,  $D(-1; 3)$  sollen im Verhältnis

a)  $\lambda = -\frac{1}{2}$ ;   b)  $\lambda = -\frac{1}{5}$ ;   c)  $\lambda = -\frac{1}{100}$ ;   d)  $\lambda = \frac{1}{100}$ ;   e)  $\lambda = \frac{1}{3}$ ;   f)  $\lambda = 3$ ;

g)  $\lambda = 100$ ;   h)  $\lambda = -100$ ;   i)  $\lambda = -3$

geteilt werden. Geben Sie jeweils die Koordinaten des Teilpunktes an!

3. Welche Werte muß  $\lambda$  durchlaufen, damit  $P_0$  die Gerade  $P_1P_2$  beschreibt? Gelangt  $P_0$  dabei an jede Stelle der Geraden?

**3.2.3. Gleichung der Geraden***Zweipunktgleichung der Geraden*

Die Gleichungen (4a) bzw. (4b) ordnen jedem Wert von  $\lambda$  mit Ausnahme von  $\lambda = -1$  einen Punkt  $P_0(x_0)$  bzw.  $P_0(x_0; y_0; z_0)$  zu, der auf der Geraden  $P_1P_2$  liegt. Durchläuft  $\lambda$  die Menge der reellen Zahlen außer  $-1$ , so beschreibt der Punkt  $P_0$  die Gerade  $P_1P_2$ , wobei nur  $P_2$  ausgelassen wird. Einen Punkt, der wie  $P_0$  eine Linie beschreibt, nennt man **laufenden Punkt**. Das variable  $\lambda$ , dem der laufende Punkt zugeordnet ist, heißt **Parameter**. Die Gleichung (4a) bzw. (4b) kann als Gleichung der Geraden aufgefaßt werden, die durch die beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$  bestimmt ist. Eine Gleichung einer

Geraden, die durch zwei gegebene Punkte festgelegt ist, nennt man **Zweipunktgleichung der Geraden**.

Eine Zweipunktgleichung der Geraden kann man auch aus Abbildung 3.70. ablesen:

$$(6) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

wobei  $P(\mathbf{r})$  der laufende Punkt der Geraden und  $\lambda$  wieder ein Parameter ist. Der Ortsvektor  $\mathbf{r}$  des laufenden Punktes  $P$  ändert sich in Abhängigkeit von  $\lambda$  so, daß seine Spitze stets auf der Geraden  $P_1P_2$  liegt. Durchläuft  $\lambda$  die Menge der reellen Zahlen, so beschreibt  $P$  die Gerade. Die Gleichung (6) hat gegenüber (4a) den Vorteil, daß sie für keinen Wert von  $\lambda$  sinnlos wird und daß  $P$  jeden Punkt der Geraden beschreibt.

Durch Übergang zur Komponentenschreibweise  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$  und durch Koeffizientenvergleich erhält man aus (6) das System der drei skalaren Gleichungen

$$(6a) \quad \begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{cases},$$

das mit (6) völlig gleichwertig ist.

● Führen Sie die Herleitung von (6a) ausführlich durch!

### ■ Beispiel 9:

Wie lautet die Gleichung der Geraden durch die Punkte  $P_1(2; -1; 3)$  und  $P_2(-4; 2; 5)$ ? Aus (6a) erhält man die Parameterdarstellung

$$\begin{cases} x = 2 - 6\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}.$$

● Setzen Sie zur Probe  $\lambda = 0$  und  $\lambda = 1$ ! Geben Sie einige weitere Punkte der Geraden an!

### ■ Beispiel 10:

Liegt der Punkt  $P(1; 2; 3)$  auf der Geraden  $P_1P_2$  des Beispiels 9? Ist das der Fall, dann muß es ein  $\lambda$  derart geben, daß für  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 3$  das Gleichungssystem des Beispiels 9 erfüllt ist:

$$\begin{cases} 1 = 2 - 6\lambda \\ 2 = -1 + 3\lambda \\ 3 = 3 + 2\lambda \end{cases}.$$

Ein solches  $\lambda$  existiert offenbar nicht, denn nach der ersten Gleichung kommt nur  $\lambda = \frac{1}{6}$ , nach der zweiten  $\lambda = 1$  und nach der dritten  $\lambda = 0$  in Frage. Es gibt also kein  $\lambda$ , das alle drei Gleichungen zugleich erfüllt. Der Punkt  $P(1; 2; 3)$  liegt daher nicht auf der Geraden. Der Punkt  $P(14; -7; -1)$  dagegen liegt auf der Geraden.

● Weisen Sie das nach!

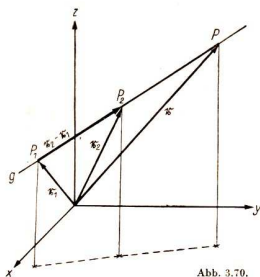


Abb. 3.70.

Nun soll der Parameter  $\lambda$  eliminiert werden. Zu diesem Zweck multipliziert man beide Seiten der mit (6) gleichwertigen Gleichung

$$r - r_1 = \lambda(r_2 - r_1)$$

vektoriell mit  $r_2 - r_1$ . Dadurch wird der auf der rechten Seite stehende Vektor  $\lambda(r_2 - r_1)$  vektoriell mit dem dazu kollinearen Vektor  $r_2 - r_1$  multipliziert, und das ergibt den Nullvektor:

$$(7) \quad (r - r_1) \times (r_2 - r_1) = \mathfrak{D}.$$

Diese Gleichung kann folgendermaßen gedeutet werden:  $r - r_1$  und  $r_2 - r_1$  sind kollinear, die Punkte  $P_1, P_2$  und  $P$  liegen also in einer Geraden. Gleichung (7) ist eine parameterfreie Zweipunktgleichung der Geraden.

Liegen die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  und somit auch die Gerade  $P_1P_2$  in der  $xy$ -Ebene, so ist  $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ,  $r_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ ,  $r_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ , und die Geradengleichung ergibt sich nach (7) speziell in der Form

$$[(x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j}] \times [(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}] = \mathfrak{D}.$$

Nach 3.1.8., Formel (23 a), folgt daraus

$$[(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1)]\mathbf{k} = \mathfrak{D}$$

und

$$(8a) \quad (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0.$$

Falls  $x_2 \neq x_1$  gilt, die Gerade also nicht parallel zur  $y$ -Achse verläuft, kann dies auf die Form

$$(8b) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

gebracht werden.

● Die Beziehung (8b) kann nach Division durch  $x - x_1$  mit Hilfe des Strahlensatzes geometrisch gedeutet werden (Abb. 3.71). Machen Sie sich das ausführlich klar!

Liegen die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  auf den Koordinatenachsen der  $xy$ -Ebene,  $P_1(a; 0)$  und  $P_2(0; b)$ , so ergibt sich aus (8b)

$$(8c) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Diese Gleichung heißt **Achsenabschnittsgleichung der Geraden**. Sie ist also ein spezieller Fall der Zweipunktgleichung der Geraden.

Löst man in Gleichung (8a) die Klammern auf, so erhält man die Struktur der **allgemeinen Gleichung der Geraden** (in der  $xy$ -Ebene):

$$(9) \quad Ax + By + C = 0.$$

#### Aufgaben

1. Wie lauten die Gleichungen der Geraden, die das durch folgende Punkte bestimmte Dreieck einschließen?

a)  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-2; 5; -1)$ ,  $C(-1; 2; 6)$       b)  $A(2; -3)$ ,  $B(5; 0)$ ,  $C(4; 10)$

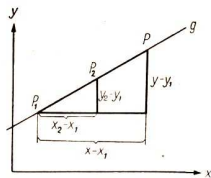


Abb. 3.71.

2. Spezialisieren Sie (6a) für die  $xy$ -Ebene! Eliminieren Sie den Parameter, und versuchen Sie die Gleichung auf die Form (8b) zu bringen!
3. Liegen die Punkte  $P(49; -27; 72)$ ,  $P'(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{5}{7})$ ,  $P''(-6; 6; -5)$  auf der Geraden  $r = -i + 3j + 2f + \lambda(5i - 3j + 7f)$ ?
4. Die Punkte  $P_1(1; 3; 0)$ ,  $P_2(-5; 1; 0)$ ,  $P_3(1; -1; 0)$ ,  $P_4(3; 4; 7)$  sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide. Geben Sie die Gleichungen der Geraden an, in denen die sechs Kanten liegen, und fertigen Sie entsprechende Skizzen (Schrägbild, Grund-, Auf- und Seitenriß) an!
5. Geben Sie die Gleichung der Geraden, die durch die folgenden Punkte geht, in der allgemeinen Form an!
- a)  $P_1(3; -2)$  und  $P_2(3; 8)$       b)  $P_1(-5; 12)$  und  $P_2(-5; 9)$   
 c)  $P_1(3; -2)$  und  $P_2(-4; -2)$       d)  $P_1(-5; 12)$  und  $P_2(15; 12)$
6. Geben Sie die Gleichungen der Geraden in der allgemeinen Form an, welche die  $x$ -Achse und die  $y$ -Achse in folgenden Punkten schneiden!
- a)  $x = 2$ ,  $y = 3$     b)  $x = 2$ ,  $y = -3$     c)  $x = -2$ ,  $y = 3$     d)  $x = -2$ ,  $y = -3$
7. Liegen die folgenden Punkte auf einer der gegebenen Geraden
- $g_1: 5(x-3) - (y+2)(-3) = 0$ ,  $g_2: \frac{y-2}{x+3} = 4$ ,  $g_3: 2x + 3y + 4 = 0$ ?
- a)  $A(2; 22)$     b)  $B(1; -12)$     c)  $C(-1; -\frac{2}{3})$
8. Bringen Sie die folgenden Geradengleichungen auf die Achsenabschnittsform! In welchen Punkten werden die Koordinatenachsen geschnitten?
- a)  $5(x-3) - (y+2)(-3) = 0$     b)  $\frac{y-2}{x+3} = 4$   
 c)  $2x + 3y + 4 = 0$

### Punktgleichung der Geraden

Wird die Gerade  $g$  durch einen Punkt  $P_0(r_0)$  und die Forderung festgelegt, daß sie die Richtung des Vektors  $a$  hat, so muß der von  $P_0$  ausgehende, den Vektor  $a$  veranschaulichende Pfeil in der Geraden  $g$  liegen (Abb. 3.72.). Für den Ortsvektor  $r$  des auf der Geraden  $g$  laufenden Punktes  $P(r)$  gilt dann:

$$(10) \quad r = r_0 + \lambda a.$$

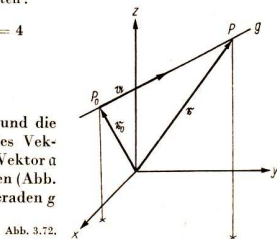
Eine Gleichung einer Geraden, die durch einen gegebenen Punkt und eine gegebene Richtung festgelegt ist, nennt man **Punktgleichung der Geraden**.

Durch Übergang zur Komponentenschreibweise ( $a = a_x i + a_y j + a_z f$ ) und durch Koeffizientenvergleich erhält man aus (10) das System der drei skalaren Gleichungen

$$(10a) \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda a_x \\ y = y_0 + \lambda a_y \\ z = z_0 + \lambda a_z \end{cases},$$

das mit (10) völlig gleichwertig ist.

● Führen Sie die Herleitung von (10a) ausführlich durch!





**Beispiel 11:**

Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt  $P_0(3; -1; 5)$  geht und dem Ortsvektor  $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  parallel ist?

Aus (10a) erhält man die Parameterdarstellung

$$\begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 5 + 2\lambda \end{cases}.$$

Führen Sie gemäß Beispiel 9 die Probe durch! Geben Sie weitere Punkte der Geraden an!

**Beispiel 12:**

Liegt der Punkt  $P(-1; 2; 7)$  auf der Geraden des Beispiels 11?

Da der Punkt das Gleichungssystem des Beispiels 11 befriedigt, liegt er auf der Geraden.

Weisen Sie das nach!

**Beispiel 13:**

Wie lautet die Gleichung der Geraden durch den Punkt  $P_0(1; -2; 3)$ , die der z-Achse parallel ist?

Für  $\mathbf{a}$  ist ein Ortsvektor zu nehmen, der in der z-Achse liegt, z. B.  $\mathbf{a} = 4\mathbf{k}$ . Damit wird aus (10a)

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases}.$$

Nun soll der Parameter  $\lambda$  eliminiert werden. Zu diesem Zweck multipliziert man beide Seiten der mit (10) gleichwertigen Gleichung

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \lambda \mathbf{a}$$

vektoriell mit dem zu  $\lambda \mathbf{a}$  kollinearen Vektor  $\mathbf{a}$ . Da das Vektorprodukt kollinearer Vektoren den Nullvektor ergibt, verschwindet  $\lambda$ :

$$(11) \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Diese Gleichung kann folgendermaßen gedeutet werden:  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  und  $\mathbf{a}$  sind kollinear. Gleichung (11) ist eine parameterfreie Punktrichtungsgleichung der Geraden.

Liegen der Punkt  $P_0$  und der Ortsvektor  $\mathbf{a}$  und somit auch die durch sie bestimmte Gerade in der xy-Ebene, so ergibt sich die Geradengleichung nach (11) speziell in der Form

$$[(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j}] \times (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}) = \mathbf{0}.$$

Nach 3.1.8., Formel (23 a), folgt daraus

$$[(x - x_0)a_y - (y - y_0)a_x]\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

und

$$(12a) \quad (x - x_0)a_y - (y - y_0)a_x = 0.$$

Falls  $a_x \neq 0$ , der Ortsvektor  $\mathbf{a}$  also nicht in der y-Achse liegt, kann (12a) auf die Form

$$y - y_0 = \frac{a_y}{a_x}(x - x_0)$$

gebracht werden.

Bezeichnet man den Winkel, den der Ortsvektor  $\vec{a}$  mit  $i$  bildet, mit  $\alpha$  (Abb. 3.73.), so ist  $\frac{a_y}{a_x} = \tan \alpha$ , wofür kurz  $m$  gesetzt wird:

$$\frac{a_y}{a_x} = \tan \alpha = m.$$

Man nennt  $m$  **Richtungsfaktor**. Damit ergibt sich

$$(12b) \quad y - y_0 = m(x - x_0).$$

● Die Beziehung (12b) kann mit Hilfe von  $m = \tan \alpha$  geometrisch gedeutet werden (Abb. 3.74.).

*Machen Sie sich das ausführlich klar!*

Liegt der Punkt  $P_0$  auf der  $y$ -Achse und der Ortsvektor  $\vec{a}$  in der  $xy$ -Ebene:

$P_0(0; n)$  und  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$  mit  $\frac{a_y}{a_x} = m$ , so ergibt sich aus (12b)

$$(12c) \quad y = mx + n.$$

Diese Gleichung ist bekannt; sie wurde als analytischer Ausdruck der linearen Funktion bezeichnet. Hierin bedeutete  $x$  die unabhängige und  $y$  die abhängige Veränderliche. Durch diesen analytischen Ausdruck wurde jedem  $x$  eindeutig ein  $y$  zugeordnet. In (12c) ist aber keine der beiden Veränderlichen als unabhängige oder als abhängige Veränderliche ausgezeichnet. Diese Gleichung stellt die Bedingung dafür dar, daß ein Punkt  $P(x; y)$  auf der Geraden liegt.

Die Geradengleichung (12c) wird zu Ehren des französischen Mathematikers DESCARTES (1596-1650), den man zu den Begründern der analytischen Geometrie zählt, **kartesische Form der Geradengleichung** genannt. Die kartesische Form der Geradengleichung ist also ein spezieller Fall der Punktgleichung der Geraden.

### Aufgaben

- Spezialisieren Sie (10a) für die  $xy$ -Ebene! Eliminieren Sie den Parameter, und versuchen Sie, die Gleichung auf die Form (12b) zu bringen!
- Die Punkte  $A(1; 1)$ ,  $B(-2; 5)$ ,  $C(-1; 2)$  bestimmen ein Dreieck.
  - Wie lautet die Gleichung der Geraden durch  $A, B, C$ , die der Seite  $a$  bzw.  $b$  bzw.  $c$  parallel ist?
  - Geben Sie die Punkte an, die auf der durch  $A$  gehenden Parallelen zu  $a$  liegen und von  $A$  den Abstand 1 haben!
- Wie Aufgabe 2:  $A(2; -3)$ ,  $B(5; 0)$ ,  $C(4; 10)$ .
- Die Punkte  $P_1 P_2 P_3 P_4$  sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide (vgl. S. 112, Aufgabe 4). Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch  $P_1$  geht und auf der Ebene  $P_2 P_3 P_4$  senkrecht steht?

Anleitung: Die Richtung senkrecht zur Ebene  $P_2 P_3 P_4$  wird z.B. durch  $\vec{P_2 P_3} \times \vec{P_2 P_4}$  angegeben.

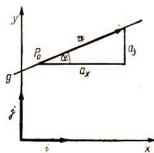


Abb. 3.73.

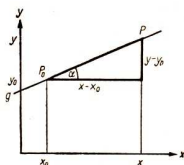


Abb. 3.74.

5. Wie lautet in der  $xy$ -Ebene die Gleichung
- der in  $x = 3$  auf der  $x$ -Achse senkrechten Geraden,
  - der in  $y = -4$  auf der  $y$ -Achse senkrechten Geraden,
  - der  $y$ -Achse,      **d)** der  $x$ -Achse?
6. a) Welches Verfahren kennen Sie, um eine Gerade in ein  $xy$ -Koordinatensystem einzuzichnen, deren Gleichung in kartesischer Form gegeben ist?
- b) Zeichnen Sie in dieser Weise die Geraden, welche die Gleichungen  $y = 2x + 3$ ,  $y = -3x + 2$ ,  $y = \frac{2}{3}x + 1$ ,  $y = \frac{6}{11}x$  haben!
- c) Äußern Sie sich über die Symmetrieeigenschaften folgender Geradenpaare!
- $$y = \frac{4}{3}x, \quad y = \frac{5}{2}x; \quad y = \frac{2}{3}x, \quad y = -\frac{2}{3}x; \quad y = 3x + 2, \quad y = -3x - 2$$
7. Bringen Sie die folgenden Geradengleichungen auf die kartesische Form!
- a)  $\frac{y-3}{x+5} = 4$ ,      b)  $5x + 4y - 2 = 0$       c)  $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 1$

### Normalform der Geradengleichung

Wird die Richtung der durch  $P_0(r_0)$  gehenden Geraden  $g$  durch den Einheitsvektor  $e_a$  festgelegt, so wird Gleichung (11) speziell zu

$$(13a) \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{e}_a = \mathfrak{D}.$$

Das ist die **Normalform der Geradengleichung**. Das Charakteristische der Normalform ist die Aussage, daß das Vektorprodukt des Vektors  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{P_0P}$  mit dem Einheitsvektor, der die Richtung und Orientierung der Geraden festlegt, dem Nullvektor gleich ist. Eine Anwendung der Normalform wird im nächsten Abschnitt behandelt.

● Die Gerade sei durch die Punkte  $P_1(r_1)$  und  $P_2(r_2)$  gegeben. Wie lautet die Normalform?

Mit  $P_1 \hat{=} P_0$  und  $r_2 - r_1 \hat{=} a$  erhält man aus (13 a)

$$(13b) \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{e}_{r_2-r_1} = \mathfrak{D}.$$

#### ■ Beispiel 14:

Wie lautet die Normalform der Gleichung der Geraden, die durch  $P_0(2; -1; 3)$  und die Richtung  $a = i + j + f$  gekennzeichnet ist?

Man bestimmt zunächst

$$\mathbf{e}_a = \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}f.$$

Dann ergibt sich nach (13 a)

$$[(x-2)i + (y+1)j + (z-3)f] \times \left( \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}f \right) = \mathfrak{D}.$$

#### ■ Beispiel 15:

Wie lautet die Normalform der Gleichung der Geraden, die durch die Punkte  $P_1(1; -2; 5)$  und  $P_2(3; 2; -4)$  geht?

Nach (13 b) ist

$$[(x-1)i + (y+2)j + (z-5)f] \times \left( \frac{2}{\sqrt{101}}i + \frac{4}{\sqrt{101}}j - \frac{9}{\sqrt{101}}f \right) = \mathfrak{D}.$$

Um die Normalform der Geradengleichung für eine in der  $xy$ -Ebene liegende Gerade zu spezialisieren, wird  $\tau = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ,  $\tau_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$  gesetzt. Dann ergibt sich aus (13 a)

$$[(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j}] \times \left( \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}\mathbf{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}\mathbf{j} \right) = \mathcal{D}$$

und nach 3.1.8. (23 a)

$$\left[ (x - x_0) \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} - (y - y_0) \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \right] \mathbf{k} = \mathcal{D},$$

also

$$(14) \quad \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}x - \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}y + \frac{-a_yx_0 + a_xy_0}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = 0.$$

Das Charakteristische der Normalform der Geradengleichung in der  $xy$ -Ebene ist, daß die Summe der quadrierten Koeffizienten von  $x$  und  $y$  gleich 1 ist.

● *Weisen Sie das bei (14) nach!*

Jede Geradengleichung kann in die Normalform übergeführt werden, eine Gleichung in der allgemeinen Form (9) z. B., indem man beide Gleichungsseiten durch  $\sqrt{A^2 + B^2}$  dividiert:

$$(14a) \quad \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

In diesem Ausdruck ist die Summe der quadrierten Koeffizienten von  $x$  und  $y$  gleich 1.

■ **Beispiel 16:**

Die Geradengleichung  $5x - 3y + 11 = 0$  soll in die Normalform umgeschrieben werden.

$$5x - 3y + 11 = 0 \quad | : \sqrt{5^2 + 3^2}$$

$$\frac{5}{\sqrt{34}}x - \frac{3}{\sqrt{34}}y + \frac{11}{\sqrt{34}} = 0.$$

**Aufgaben**

1. Bringen Sie folgende Geradengleichungen auf die Normalform!

a)  $\frac{y-2}{x+3} = 4$       b)  $6(x-2) - (7-y)(-4) = 0$

2. Geben Sie die Gleichungen der Geraden, die je zwei der Punkte  $P_1(1; -2)$ ,  $P_2(-2; 1)$ ,  $P_3(3; 3)$ ,  $P_4(0; 5)$  verbinden, in der Normalform an!

### 3.2.4. Abstand eines Punktes von einer Geraden

Der Abstand  $d$  des Punktes  $Q(q)$  von der Geraden  $g$  soll ermittelt werden, die durch den Punkt  $P_0(\tau_0)$  und die Richtung  $\mathbf{a}$  festgelegt ist. Das geschieht am einfachsten mit Hilfe des Flächeninhalts des

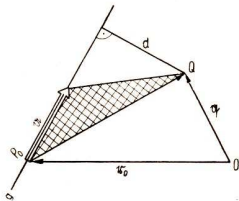


Abb. 3.75.

in Abbildung 3.75. schraffierten Dreiecks. Dieser Flächeninhalt kann sowohl durch das halbe Produkt einer Seite mit der zugehörigen Höhe ausgedrückt werden:

$$A = \frac{1}{2} |\alpha| d,$$

als auch durch den halben Betrag des Vektorprodukts:

$$A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{P_0Q} \times \alpha|,$$

denn das schraffierte Dreieck ist die Hälfte des Parallelogramms, das die Vektorpfeile  $\overrightarrow{P_0Q}$  und  $\alpha$  aufspannen. Durch Gleichsetzen erhält man

$$|\overrightarrow{P_0Q} \times \alpha| = |\alpha| d,$$

$$\frac{|\overrightarrow{P_0Q} \times \alpha|}{|\alpha|} = d,$$

$$\left| \overrightarrow{P_0Q} \times \frac{\alpha}{|\alpha|} \right| = d,$$

$$|\overrightarrow{P_0Q} \times e_\alpha| = d,$$

$$(15) \quad |(\mathbf{q} - \mathbf{r}_0) \times e_\alpha| = d.$$

Die Formel (15) erinnert an die Normalform der Geradengleichung (13a). Geht man in der Gleichung (13a) zum Betrag über, so erhält man

$$|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times e_\alpha| = 0.$$

Das steht mit (15) im Einklang, denn der Punkt  $P(\mathbf{r})$  liegt auf der Geraden, sein Abstand von der Geraden ist also  $d = 0$ . Aus dem Vergleich von (15) und (13a) ergibt sich folgende Regel:

▶ **Setzt man in die Normalform der Geradengleichung für den Ortsvektor  $\mathbf{r}$  des laufenden Punktes  $P(\mathbf{r})$  den Ortsvektor  $\mathbf{q}$  eines Punktes  $Q(\mathbf{q})$  ein, so ist der Betrag des entstehenden Ausdrucks gleich dem Abstand  $d$  des Punktes  $Q$  von der Geraden.**

#### Beispiel 17:

Welchen Abstand hat  $Q(5; 2; 3)$  von der durch  $P_0(3; -3; 2)$  und  $\alpha = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{f}$  bestimmten Geraden?

Wird nach obiger Regel verfahren, so erhält man

$$d = |(\mathbf{q} - \mathbf{r}_0) \times e_\alpha| = \left| [(5-3)\mathbf{i} + (2+3)\mathbf{j} + (3-2)\mathbf{f}] \times \left( \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{f} \right) \right|,$$

$$d \approx 5,5.$$

#### Beispiel 18:

Welchen Abstand hat der Punkt  $Q(2; 3; -2)$  von der durch  $P_1(-2; 2; 3)$  und  $P_2(-3; -2; 2)$  bestimmten Geraden?

Wird nach obiger Regel verfahren, so erhält man mit Hilfe von (13b)

$$d = |(\mathbf{q} - \mathbf{r}_1) \times e_{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}|$$

$$= \left| (4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{f}) \times \left( -\frac{1}{\sqrt{18}}\mathbf{i} - \frac{4}{\sqrt{18}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{18}}\mathbf{f} \right) \right|,$$

$$d \approx 6,4.$$

Da die skalaren Komponenten von  $\tau$  und  $\varrho$  mit den Koordinaten der Punkte  $P$  und  $Q$  übereinstimmen, kann man die oben zur Bestimmung des Abstands  $d$  unter Benutzung der Ortsvektoren aufgestellte Regel auch auf die Koordinaten der Punkte übertragen:

► **Setzt man in die Normalform der Geradengleichung für die Koordinaten des laufenden Punktes  $P$  die Koordinaten eines Punktes  $Q$  ein, so ist der Betrag des entstehenden Ausdrucks gleich dem Abstand des Punktes  $Q$  von der Geraden.**

Diese Formulierung der Regel ist besonders geeignet, wenn die Gerade und der Punkt  $Q$  in der  $xy$ -Ebene liegen, weil dann im allgemeinen nicht die Vektor-, sondern die Koordinatenschreibweise benutzt wird.

■ **Beispiel 19:**

Welchen Abstand hat der Punkt  $Q(8; 7)$  von der Geraden  $y = -\frac{5}{12}x + 5$ ?

Die Normalform der Geradengleichung ist  $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{60}{13} = 0$ . Einsetzen der Koordinaten von  $Q$  für die des laufenden Punktes  $P(x; y)$  ergibt

$$d = \left| \frac{5}{13} \cdot 8 + \frac{12}{13} \cdot 7 - \frac{60}{13} \right| \approx 4,9.$$

**Aufgaben:**

1. a) Welche Abstände hat der Punkt  $P_3(3; -4; 7)$  von den Geraden, in denen die Seiten des durch die Punkte  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-2; 5; -1)$ ,  $C(-1; 2; 6)$  bestimmten Dreiecks liegen?  
 b) Welche Abstände hat der Ursprung  $O(0; 0; 0)$  von den drei Geraden?  
 c) Wie groß sind die Höhen des Dreiecks?
2. a) Welche Abstände hat der Punkt  $P_3(2; -5)$  von den Geraden, in denen die Seiten des durch die Punkte  $A(2; -3)$ ,  $B(5; 0)$ ,  $C(4; 10)$  bestimmten Dreiecks liegen?  
 b) Wie groß ist der Abstand des Ursprungs von den drei Geraden?  
 c) Wie groß sind die Höhen des Dreiecks?

**3.2.5. Winkel zwischen zwei Geraden**

► **Unter dem Winkel zwischen zwei Geraden  $\tau = \tau_0 + \lambda a$  und  $\tau = \tau_0' + \lambda' a'$  versteht man den Winkel zwischen den Vektoren  $a$  und  $a'$ , und zwar auch dann, wenn die Geraden einander nicht schneiden.**

● *Machen Sie sich klar, daß es im Raum Geraden gibt, die einander nicht schneiden und die auch nicht zueinander parallel sind.*

Solche Geraden heißen zueinander **windschief**.

Sind die Geraden durch je zwei Punkte  $P_1(\tau_1)$ ,  $P_2(\tau_2)$  und  $P_1'(\tau_1')$ ,  $P_2'(\tau_2')$  festgelegt, so sind ihre Gleichungen nach (6)

$$\tau = \tau_1 + \lambda(\tau_2 - \tau_1) \quad \text{und} \quad \tau = \tau_1' + \lambda'(\tau_2' - \tau_1').$$

Richtung und Orientierung der Geraden werden in diesem Falle durch die Vektoren  $\tau_2 - \tau_1$  und  $\tau_2' - \tau_1'$  angegeben, so daß als Winkel zwischen den beiden Geraden der Winkel zwischen den Vektoren  $\tau_2 - \tau_1$  und  $\tau_2' - \tau_1'$  zu ermitteln ist.

**Beispiel 20:**

Der Winkel zwischen den beiden Geraden  $g$  und  $g'$  soll ermittelt werden, wobei  $g$  durch  $P_0(1; 2; -1)$  und  $a = -2i + 3j + k$  und  $g'$  durch  $P_0'(-1; 3; 5)$  und  $a' = i - j + k$  festgelegt sind.

Der gesuchte Winkel ist nach Definition gleich dem Winkel  $(a; a')$ . Nach 3.1.7. (18) erhält man  $(a; a') \approx 128,1^\circ$ .

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Geraden, die durch  $P_1(2; -3; 4)$ ,  $P_2(-3; 4; -2)$  und  $P_1'(-1; 1; -4)$ ,  $P_2'(3; 5; -2)$  festgelegt sind!

Handelt es sich um zwei Geraden der  $xy$ -Ebene, so benutzt man meist die kartesische Form der Geradengleichung:

$$y = mx + n \quad \text{mit} \quad m = \tan \alpha.$$

Dann läßt sich der Winkel  $\alpha - \alpha'$  zwischen den beiden Geraden  $y = mx + n$  ( $m = \tan \alpha$ ) und  $y = m'x + n'$  ( $m' = \tan \alpha'$ ) am einfachsten mit Hilfe des Additionstheorems des Tangens (vgl. 3.1.9., Aufgabe 5) ermitteln:

$$(16) \quad \tan(\alpha - \alpha') = \frac{\tan \alpha - \tan \alpha'}{1 + \tan \alpha \tan \alpha'} = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

**Beispiel 21:**

Unter welchem Winkel schneiden einander die Geraden  $g$  und  $g'$  mit den Gleichungen  $2x + 3y + 5 = 0$  bzw.  $x - y - 2 = 0$ ?

In kartesischer Form ist

$$g: \quad y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}, \quad m = -\frac{2}{3},$$

$$g': \quad y = x - 2, \quad m' = 1.$$

Daraus ergibt sich nach (16)  $\alpha - \alpha' \approx 101,3^\circ$ .

Wären die Bezeichnungen  $g$  und  $g'$  der beiden Geraden vertauscht worden, so hätte sich der Nebenwinkel von  $101,3^\circ$ , nämlich  $78,7^\circ$  als Winkel zwischen beiden Geraden ergeben. Da die gegebenen Geraden nicht orientiert sind, können beide Winkel als Winkel zwischen den Geraden angegeben werden.

**Bedingungen für Parallelität und Orthogonalität**

Zwei Geraden  $r = r_0 + \lambda a$  und  $r = r_0' + \lambda' a'$  sind parallel, wenn  $a$  und  $a'$  kollinear sind, also

$$(17) \quad a \times a' = 0$$

ist. Liegen die Geraden in der  $xy$ -Ebene, so bedeutet das speziell

$$(a_x i + a_y j) \times (a'_x i + a'_y j) = 0,$$

woraus nach 3.1.8. (23 a) folgt:

$$(a_x a'_y - a_y a'_x) k = 0,$$

$$a_x a'_y - a_y a'_x = 0,$$

$$\frac{a'_y}{a'_x} = \frac{a_y}{a_x},$$

$$(17a) \quad m' = m.$$

Die Richtungsfaktoren paralleler Geraden sind gleich.

Zwei Geraden stehen aufeinander senkrecht, wenn

$$(18) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}' = 0$$

ist. Liegen die Geraden in der  $xy$ -Ebene, so bedeutet das speziell

$$(a_x i + a_y j) \cdot (a'_x i + a'_y j) = 0,$$

$$a_x a'_x + a_y a'_y = 0,$$

$$\frac{a'_y}{a'_x} = -\frac{a_x}{a_y},$$

$$(18a) \quad m' = -\frac{1}{m} \quad (m \neq 0).$$

► Die Richtungsfaktoren zueinander senkrechter Geraden sind einander entgegengesetzt reziprok.

■ **Beispiel 22:**

Die Geraden mit den Gleichungen  $y = \frac{2}{3}x - 7$  und  $y = -\frac{3}{2}x - 3$  stehen aufeinander senkrecht, weil  $m = \frac{2}{3}$  und  $m' = -\frac{3}{2}$  (18a) gilt.

**Aufgaben**

- Gegeben sind die Geraden  $g$  und  $g'$  durch  $P_0(-7; 13; 4)$  und  $\mathbf{a} = -i + 3j - f$ ,  $P_0'(1; 4; -3)$  und  $\mathbf{a}' = 2i - 3j + 2f$ . Welchen Winkel bilden die Geraden?
- Gegeben sind die Geraden  $g$  und  $g'$  durch  $P_0(-1; -1; 3)$  und  $P_1(12; 2; -5)$ ,  $P_0'(3; -2; 2)$  und  $P_1'(-2; 5; 7)$ . Welchen Winkel bilden die Geraden?
- Geben Sie eine Gerade an, die auf der Geraden  $\tau = 2i - 4j + 3f + \lambda(2i + 3j - f)$  senkrecht steht und durch den Ursprung  $O(0; 0; 0)$  geht! Gibt es mehrere Lösungen dieses Problems? Machen Sie sich den Sachverhalt anschaulich klar, und bedenken Sie vor allem, daß die Geraden einander nicht schneiden müssen!
- Wie groß sind die Winkel des durch folgende Punkte bestimmten Dreiecks?  
 $A(2; -3)$ ,  $B(5; 0)$ ,  $C(4; 10)$
- Wie lauten die Gleichungen der Geraden, in denen die Höhen des Dreiecks der Aufgabe 4 liegen?
- Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme, daß aus  $m = \tan \alpha$  und  $m' = \tan\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)$   $m' = -\frac{1}{m}$  folgt! Warum führt das Additionstheorem des Tangens nicht zum Ziel?

**3.2.6. Parameterdarstellung der Ebenengleichung**

Durch die drei Punkte  $P_0(\mathbf{r}_0)$ ,  $P_1(\mathbf{r}_1)$  und  $P_2(\mathbf{r}_2)$  wird die Ebene  $E$  festgelegt (Abb. 3.76.). Nach Abbildung 3.77. gilt

$$\overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{P_0P_1} + \mu \overrightarrow{P_0P_2},$$

wenn  $P(\mathbf{r})$  der laufende Punkt in der Ebene  $E$  ist. Mit den Ortsvektoren der Punkte wird daraus (Abb. 3.78.):

$$(19) \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \lambda(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + \mu(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0).$$



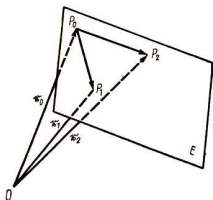


Abb. 3.76.

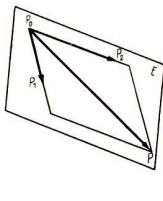


Abb. 3.77.

Sind statt der Punkte  $P_1(r_1)$  und  $P_2(r_2)$  zwei Vektoren  $a$  und  $b$  gegeben, welche die Stellung der Ebene  $E$  festlegen (Abb. 3.79.), so wird entsprechend

$$(20) \quad r = r_0 + \lambda a + \mu b.$$

Bei (19) und (20) handelt es sich um Ebenengleichungen in Parameterdarstellung. Auf das Eliminieren der Parameter wird hier verzichtet.

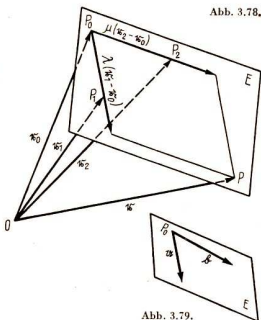


Abb. 3.78.

Abb. 3.79.

### Beispiel 23:

Die Gleichung der Ebene soll angegeben werden, die durch die drei Punkte  $P_0(3; 1; 4)$ ,  $P_1(1; 3; 5)$  und  $P_2(-1; -1; -2)$  gegeben ist. Aus (19) folgt

$$r = 3i + j + 4k + \lambda(-2i + 2j + k) + \mu(-4i - 2j - 6k).$$

Probe: Für  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0$  ergibt sich  $r_0$ ;  
 für  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 0$  ergibt sich  $r_1$ ;  
 für  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$  ergibt sich  $r_2$ .

Für andere Wertepaare  $\lambda$  und  $\mu$  ergeben sich weitere Ortsvektoren, deren Spitzen in der Ebene liegen.

Geben Sie die Gleichung der Ebene an, die durch den Punkt  $P_0(2; -7; -3)$  und die Vektoren  $a = i + j + 3k$  und  $b = i - j - k$  festgelegt ist!

### Aufgaben

- Geben Sie die Gleichung der Ebene an, in der das Dreieck  $ABC$  mit  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-2; 5; -1)$  und  $C(-1; 2; 6)$  liegt! Geben Sie zwei weitere Punkte der Ebene innerhalb des Dreiecks und zwei außerhalb des Dreiecks an!
- Gegeben ist das Viereck, das durch die Punkte  $P_1(-2; 3; 5)$ ,  $P_2(0; 2; 0)$ ,  $P_3(-1; 0; 1)$  und  $P_4(-10; -1; -3)$  bestimmt wird. Geben Sie die Gleichung der Ebene a)  $P_1 P_2 P_3$ ; b)  $P_2 P_3 P_4$  an! c) Wie viele Ebenen werden durch die Punkte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  und  $P_4$  bestimmt?
- a) Geben Sie die Gleichung der  $xy$ -Ebene an!  
 b) Geben Sie die Gleichung der  $xz$ -Ebene an!  
 c) Geben Sie die Gleichung der  $yz$ -Ebene an!
- Geben Sie die Gleichungen der Ebenen an, die auf der  $xy$ -Ebene senkrecht stehen und die Winkel zwischen der  $xz$ -Ebene und der  $yz$ -Ebene halbieren!

### 3.2.7. Schnittprobleme

#### Schnittpunkt zweier Geraden

Schneiden zwei Geraden  $g$  und  $g'$  mit den Gleichungen  $r = r_0 + \lambda a$  und  $r = r_0' + \lambda' a'$  einander im Punkte  $S(r_s)$ , so muß  $S$  sowohl vom laufenden Ortsvektor  $r$  der Geraden  $g$  als auch vom laufenden Ortsvektor  $r$  der Geraden  $g'$  erreicht werden können. Es muß also ein Wertepaar  $\lambda_s$  und  $\lambda_s'$  geben, so daß

$$(21) \quad r_s = r_0 + \lambda_s a = r_0' + \lambda_s' a'$$

erfüllt ist. Aus der Bedingung (21) lassen sich die beiden Zahlen  $\lambda_s$  und  $\lambda_s'$  errechnen. Wenn man die errechneten Werte in die Geradengleichungen einsetzt, muß sich in beiden Fällen  $r_s$ , der Ortsvektor des Schnittpunktes  $S$ , ergeben. Schneiden die Geraden einander nicht, so läßt sich kein Wertepaar  $\lambda_s$  und  $\lambda_s'$  so ermitteln, daß die Bedingung (21) erfüllt ist.

#### ■ Beispiel 24:

Der eventuelle Schnittpunkt der Geraden  $g$  und  $g'$  soll ermittelt werden. Die Gerade  $g$  ist durch die Punkte  $P_1(-6; 10; 4)$  und  $P_2(2; -4; 6)$ ,  $g'$  durch  $P_1'(8; -7; 3)$  und  $P_2'(3; -2; 4)$  festgelegt. Als Gleichungen der Geraden ergeben sich nach (6)

$$r = -6i + 10j + 4k + \lambda(8i - 14j + 2k),$$

$$r = 8i - 7j + 3k + \lambda'(-5i + 5j + k).$$

Gleichsetzen nach (21) und Koeffizientenvergleich führen zu dem Gleichungssystem für  $\lambda_s$  und  $\lambda_s'$ :

$$\begin{cases} -14 + 8\lambda_s + 5\lambda_s' = 0 \\ 17 - 14\lambda_s - 5\lambda_s' = 0 \\ 1 + 2\lambda_s - \lambda_s' = 0 \end{cases}.$$

#### ● Lösen Sie das Gleichungssystem! Sie erhalten $\lambda_s = 0,5$ , $\lambda_s' = 2$ . Machen Sie die Probe!

Die Geraden schneiden einander also. Mit dem errechneten Wertepaar ergibt sich aus beiden Geradengleichungen  $r_s = -2i + 3j + 5k$ , der Schnittpunkt ist also  $S(-2; 3; 5)$ .

Handelt es sich um zwei Geraden in der  $xy$ -Ebene, deren Gleichungen in Koordinatenschreibweise gegeben sind, so wird der Schnittpunkt  $S(x_s; y_s)$  der beiden Geraden mit den Gleichungen  $Ax + By + C = 0$  und  $A'x + B'y + C' = 0$  in bekannter Weise durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

gefunden.

#### ● Unter welchen Bedingungen hat das Gleichungssystem keine bzw. keine eindeutige Lösung?

#### Schnittpunkt zwischen Ebene und Geraden

Schneidet die Ebene mit der Gleichung  $r = r_0 + \lambda a + \mu b$  die Gerade mit der Gleichung  $r = r_0' + \lambda' a'$  in dem Punkte  $S(r_s)$ , so muß  $S$  sowohl vom laufenden Ortsvektor  $r$  der Ebene als auch vom laufenden Ortsvektor  $r$  der Geraden erreicht werden können.

Es muß also ein Tripel<sup>1</sup>  $\lambda_s, \mu_s, \lambda'_s$  geben, so daß

$$(22) \quad \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_0 + \lambda_s \mathbf{a} + \mu_s \mathbf{b} = \mathbf{r}'_0 + \lambda'_s \mathbf{a}'$$

erfüllt ist. Aus der Bedingung (22) lassen sich  $\lambda_s, \mu_s$  und  $\lambda'_s$  errechnen. Wenn man dann  $\lambda_s, \mu_s$  in die Ebenengleichung und  $\lambda'_s$  in die Geradengleichung einsetzt, ergibt sich in beiden Fällen  $\mathbf{r}_s$ , der Ortsvektor des Schnittpunktes S.

#### Beispiel 25:

Die Ebene ist durch die Gleichung

$$r = 2i - 7j - 3f + \lambda(i + j + 3f) + \mu(i - j - f),$$

die Gerade durch die Gleichung

$$r = -3i + 6j + 2f + \lambda'(-i + 2j - f)$$

gegeben. Aus (22) folgt durch Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \lambda_s + \mu_s + \lambda'_s = -5 \\ \lambda_s - \mu_s - 2\lambda'_s = 13 \\ 3\lambda_s - \mu_s + \lambda'_s = 5 \end{cases}.$$

Lösen Sie das Gleichungssystem! Sie erhalten  $\lambda_s = 2, \mu_s = -3, \lambda'_s = -4$ . Machen Sie die Probe!

Setzt man die Lösung in die Ebenen- bzw. in die Geradengleichung ein, so erhält man

$$\mathbf{r}_s = 2i - 7j - 3f + 2(i + j + 3f) - 3(i - j - f)$$

und

$$\mathbf{r}_s = -3i + 6j + 2f - 4(-i + 2j - f),$$

in beiden Fällen also

$$\mathbf{r}_s = i - 2j + 6f,$$

d.h.  $S(1; -2; 6)$ .

#### Aufgaben

- Gegeben ist ein Fünfeck durch die Punkte  $P_1(2; -1; 4), P_2(1; -2; 3), P_3(5; 2; 7), P_4(4; -5; 1), P_5(1; -2; 3)$ . Wo schneiden eventuell die folgenden Geraden einander?
  - $P_1P_2$  und  $P_3P_4$
  - $P_1P_3$  und  $P_4P_5$
  - $P_1P_4$  und  $P_3P_5$

d) Wie viele Geraden gibt es, die zwei der gegebenen Punkte verbinden und einander in keinem der gegebenen Punkte schneiden?
- Gegeben sind die Punkte  $P_1(1; 7), P_2(0; 5), P_3(3; -2), P_4(-2; -3), P_5(0; 0), P_6(4; 0)$ . Wo schneiden eventuell die folgenden Geraden einander?
  - $P_1P_2$  und  $P_3P_4$
  - $P_1P_2$  und  $P_4P_5$
  - $P_1P_2$  und  $P_3P_6$

d) Wie viele derartige Geraden, die einander in keinem der gegebenen Punkte schneiden, gibt es?
- Wo liegen die Fußpunkte der Höhen des Dreiecks, das durch die Punkte  $A(2; -3), B(5; 0), C(4; 10)$  bestimmt wird?

<sup>1</sup> Tripel: Drei zusammengehörige Zahlen.

4. Gesucht ist der Schnittpunkt zwischen der Ebene  $E$  und der Geraden  $g$ , wenn
- die Ebene durch  $P_0(4; -5; 1)$ ,  $P_1(5; -7; 4)$  und  $P_2(6; -6; 2)$ , die Gerade durch  $P_3(3; 4; -2)$  und  $P_4(11; -20; 12)$ ;
  - die Ebene durch  $P_0(3; -1; 6)$  und die Vektoren  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  und  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ , die Gerade durch  $P_1(-4; 3; 2)$  und den Vektor  $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$  festgelegt sind.
5. Wo schneidet die Gerade, die durch die Punkte  $P_0(1; 4; 4)$  und  $P_1(3; -2; 1)$  festgelegt ist,
- die  $xy$ -Ebene; b) die  $xz$ -Ebene; c) die  $yz$ -Ebene?

#### Schnittgerade zweier Ebenen

Schneiden zwei Ebenen mit den Gleichungen  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$  und  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_0 + \lambda'\mathbf{a}' + \mu'\mathbf{b}'$  einander in der Geraden  $s$ , so muß diese sowohl vom laufenden Ortsvektor  $\mathbf{r}$  der einen Ebene als auch vom laufenden Ortsvektor  $\mathbf{r}$  der anderen Ebene beschrieben werden können. Es muß also ein Quadrupel<sup>1</sup>  $\lambda_s, \mu_s, \lambda'_s$  und  $\mu'_s$  geben, so daß

$$(23) \quad \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_0 + \lambda_s\mathbf{a} + \mu_s\mathbf{b} = \mathbf{r}'_0 + \lambda'_s\mathbf{a}' + \mu'_s\mathbf{b}'$$

erfüllt ist. Aus der Bedingung (23) lassen sich drei Werte des Quadrupels durch den vierten ausdrücken, denn Übergang zur Komponentendarstellung und anschließender Koeffizientenvergleich ergeben drei skalare Gleichungen. Wenn man die so erhaltenen Ausdrücke in die Ebenengleichungen einsetzt, ergibt sich in beiden Fällen die Gleichung der Schnittgeraden  $s$ .

#### ■ Beispiel 26:

Eine Ebene ist durch  $P_0(-3; 0; 1)$ ,  $P_1(-11; -3; 0)$  und  $P_2(-1; 1; 2)$ , eine andere durch  $P'_0(2; 1; 2)$ ,  $P'_1(1; 2; 3)$  und  $P'_2(1; 0; 3)$  bestimmt. Gesucht ist die Gleichung der Schnittgeraden  $s$ . Die beiden Ebenengleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= -3\mathbf{i} + \mathbf{k} + \lambda(-8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) + \mu(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \\ \mathbf{r} &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} + \lambda'(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + \mu'(-\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Aus (23) folgt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & 2\mu_s + \lambda'_s + \mu'_s = 5 + 8\lambda_s \\ \text{(II)} \quad & \mu_s - \lambda'_s + \mu'_s = 1 + 3\lambda_s \\ \text{(III)} \quad & \mu_s - \lambda'_s - \mu'_s = 1 + \lambda_s \end{aligned}$$

Aus (I) und (II) sowie (I) und (III) ergeben sich durch Elimination von  $\mu'_s$  die Gleichungen

$$\begin{cases} \mu_s + 2\lambda'_s = 4 + 5\lambda_s \\ 3\mu_s = 6 + 9\lambda_s \end{cases}$$

und schließlich daraus

$$\begin{aligned} \mu_s &= 2 + 3\lambda_s, \\ \lambda'_s &= 1 + \lambda_s, \\ \mu'_s &= \lambda_s. \end{aligned}$$

In beide Ebenengleichungen eingesetzt, folgt daraus

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + \lambda_s(-2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}),$$

die Gleichung der Schnittgeraden. Hierin ist  $\lambda_s$  Parameter.

<sup>1</sup> Quadrupel: Vier zusammengehörige Zahlen.

### 3.2.8. Verschiebung

Ein geometrisches Gebilde soll verschoben werden. Das heißt, alle seine Punkte sollen geradlinig und parallel um die gleiche Strecke verschoben werden. Die Verschiebung ist durch den Vektor  $\tau_m$  eindeutig festgelegt (Abb. 3.80.). Den Punkten

$$P(\tau), P_0(\tau_0), \dots$$

des ursprünglichen Gebildes, die wir **Urpunkte** nennen, werden durch die Verschiebung die **Bildpunkte**

$$P'(\tau'), P_0'(\tau_0'), \dots$$

zugeordnet. Nach Abbildung 3.81. gilt

$$(24) \quad \tau = \tau' - \tau_m, \quad \tau_0 = \tau_0' - \tau_m, \dots$$

Daraus ergibt sich folgende Regel:

► Wird ein Gebilde einer Verschiebung  $\tau_m$  unterworfen, so sind in seiner Vektorgleichung die Ortsvektoren

$$\tau, \tau_0, \dots$$

der **Urpunkte** durch

$$\tau' - \tau_m, \tau_0' - \tau_m, \dots$$

zu ersetzen, wobei  $\tau', \tau_0', \dots$  die Ortsvektoren der **Bildpunkte** sind.

■ **Beispiel 27:**

Die Gerade, die durch  $P_1(\tau_1)$  und  $P_2(\tau_2)$  festgelegt und deren laufender Punkt  $P(\tau)$  ist, hat nach (6) die Gleichung

$$\tau = \tau_1 + \lambda(\tau_2 - \tau_1).$$

Es soll die Gleichung des Gebildes angegeben werden, das durch die Verschiebung  $\tau_m$  der gegebenen Geraden entsteht.

Nach der Regel sind  $\tau$  durch  $\tau' - \tau_m$ ,  $\tau_1$  durch  $\tau_1' - \tau_m$  und  $\tau_2$  durch  $\tau_2' - \tau_m$  zu ersetzen. So ergibt sich

$$\tau' = \tau_1' + \lambda(\tau_2' - \tau_1').$$

Diese Gleichung bringt zum Ausdruck, daß nach der Verschiebung eine Gerade vorliegt, die durch die Punkte  $P_1'(\tau_1')$  und  $P_2'(\tau_2')$ , die Bildpunkte von  $P_1(\tau_1)$  und  $P_2(\tau_2)$ , festgelegt ist. Wegen  $\tau_2' = \tau_2 + \tau_m$  und  $\tau_1' = \tau_1 + \tau_m$  [vgl. (24)] ist

$$\tau_2' - \tau_1' = \tau_2 - \tau_1,$$

d.h. Urgerade und Bildgerade sind parallel.

Es ist anschaulich klar, daß das Ergebnis dieses Beispiels verallgemeinert werden kann:

► Die Verschiebung ist eine **Kongruenzabbildung**, bei der die **Bildstrecken** den **Urstrecken** parallel sind.

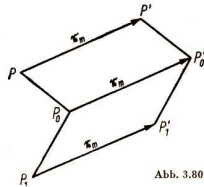


Abb. 3.80.

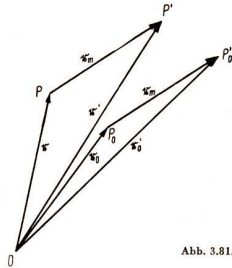


Abb. 3.81.

Durch die Verschiebung  $\mathbf{r}_m = x_m \mathbf{i} + y_m \mathbf{j} + z_m \mathbf{k}$  wird offensichtlich dem Ursprung  $O(0; 0; 0)$  der Bildpunkt  $P_m(x_m; y_m; z_m)$  zugeordnet, d. h. der erst im Ursprung gelegene Punkt kommt an die Stelle  $P_m(x_m; y_m; z_m)$ .

Nach Übergang zur Komponentendarstellung der Ortsvektoren  $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \dots$  und  $\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0, \dots$  erhält man aus (24) durch Koeffizientenvergleich folgende Beziehungen zwischen den Koordinaten der Ursprünge  $P(x; y; z), P_0(x_0; y_0; z_0), \dots$  und ihren Bildpunkten  $P'(x'; y'; z'), P'_0(x'_0; y'_0; z'_0), \dots$ :

$$(24 \text{ a}) \quad \begin{aligned} x &= x' - x_m, & y &= y' - y_m, & z &= z' - z_m; \\ x_0 &= x'_0 - x_m, & y_0 &= y'_0 - y_m, & z_0 &= z'_0 - z_m; \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgende Regel:

► **Wird ein Gebilde so verschoben, daß der ursprünglich im Koordinatenursprung gelegene Punkt an die Stelle  $P_m(x_m; y_m; z_m)$  kommt, so sind in seiner Gleichung**

$$x, y, z; x_0, y_0, z_0; \dots$$

durch

$$x' - x_m, y' - y_m, z' - z_m; x'_0 - x_m, y'_0 - y_m, z'_0 - z_m; \dots$$

zu ersetzen.

#### ■ **Beispiel 28:**

Die  $xy$ -Ebene wird so verschoben, daß der im Ursprung gelegene Punkt an die Stelle  $P_m(x_m; y_m) \equiv P_m(3; -5)$  kommt. Welche Gerade entsteht dann aus der Geraden mit der Gleichung  $y = 4x - 7$ ?

Man hat  $x$  durch  $x' - 3$  und  $y$  durch  $y' + 5$  zu ersetzen, um die Gleichung der verschobenen Geraden zu erhalten:

$$y' = 4x' - 24.$$

Wenn klar ist, welche die Koordinaten der Ursprünge und welche die Koordinaten der Bildpunkte sind, kann man auf die Kennzeichnung der zuletzt genannten durch den angefügten Strich verzichten. Man kann dann im Beispiel 28 sagen, daß die Gerade vor der Verschiebung die Gleichung  $y = 4x - 7$ , nach der Verschiebung die Gleichung  $y = 4x - 24$  hat.

Von dieser Vereinfachung wird bei den folgenden Beispielen Gebrauch gemacht.

#### ■ **Beispiel 29:**

Die Parabel  $y = x^2$  soll so verschoben werden, daß der im Ursprung gelegene Punkt an die Stelle  $P(-2; 3)$  kommt. Wie lautet die Gleichung nach der Verschiebung? In der Gleichung sind  $x$  durch  $x + 2$  und  $y$  durch  $y - 3$  zu ersetzen:  $y = x^2 + 4x + 7$ .

#### ■ **Beispiel 30:**

Das Bild der Funktion mit dem analytischen Ausdruck  $y = \sin x$  soll so verschoben werden, daß der im Ursprung gelegene Punkt an die Stelle  $P\left(\frac{\pi}{2}; -1\right)$  kommt.

Indem man  $x$  durch  $x - \frac{\pi}{2}$  und  $y$  durch  $y + 1$  ersetzt, erhält man nach Umformung  $y = -\cos x - 1$ .

## Aufgaben

1. Die  $xy$ -Ebene soll so verschoben werden, daß der im Ursprung gelegene Punkt an die Stelle  $P(6; -5)$  kommt. Welche Gleichungen haben die folgenden Kurven nach der Verschiebung?

a)  $y = -3x + 1$     b)  $2x + 3y - 5 = 0$     c)  $\frac{y-3}{x+5} = -4$     d)  $y = x^3$     e)  $2y - 4x^2 = 1$

2. Desgleichen; der im Ursprung gelegene Punkt kommt an die Stelle  $P\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$ .

a)  $y = \sin x$     b)  $y = \cos x$     c)  $y = \tan x$

d)  $y + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

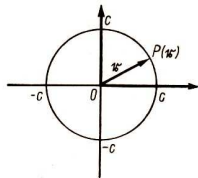


Abb. 3.82.

### 3.2.9. Der Kreis

*Gleichung des Kreises (Mittelpunktslage)*

Der Punkt  $P(r)$  soll den Kreis vom Radius  $c$  beschreiben, dessen Mittelpunkt im Ursprung  $O(0;0)$  liegt (Abb. 3.82.). Bedingung hierfür ist, daß der Ortsvektor  $r$  des laufenden Punktes  $P(r)$  die konstante Länge  $c$  hat, daß also

$$|r| = c$$

gilt. Nach 3.1.7. (13) kann für  $|r|$  auch  $\sqrt{r \cdot r} = \sqrt{r^2}$  geschrieben werden, so daß man  $\sqrt{r^2} = c$  und schließlich (25a)  $r^2 = c^2$

erhält. Das ist die Gleichung des Kreises in Vektorschreibweise.

Führt man einen mit  $i$  und  $j$  komplanaren Vektor  $c$  vom Betrage  $c$ , sonst aber beliebig ein (Abb. 3.83.), so kann wegen  $c^2 = c \cdot c = c^2$  für (25 a) auch

$$r^2 = c^2,$$

$$r^2 - c^2 = 0,$$

$$(r + c) \cdot (r - c) = 0$$

geschrieben werden. Das besagt, daß  $(r + c) \perp (r - c)$  ist (Abb. 3.84.); dies ist der **Satz des Thales**.

Sind  $x$  und  $y$  die Koordinaten des laufenden Kreispunktes  $P(r)$ , gilt also  $r = xi + yj$ , so ergibt sich wegen

$$r^2 = (xi + yj) \cdot (xi + yj) = x^2 + y^2$$

aus (25 a)

$$(25b) \quad x^2 + y^2 = c^2.$$

Diese Gleichung läßt sich mit Hilfe des pythagoreischen Satzes anschaulich deuten (Abb. 3.85.).

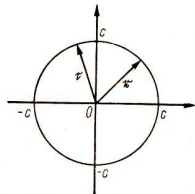


Abb. 3.83.

Abb. 3.84.

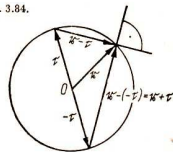
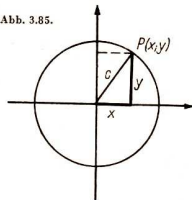


Abb. 3.85.



Löst man (25b) nach  $y$  auf, so erhält man

$$(25c) \quad y = \sqrt{c^2 - x^2},$$

die Gleichung des oberen Halbkreises, und

$$(25d) \quad y = -\sqrt{c^2 - x^2},$$

die Gleichung des unteren. Betrachtet man (25c) und (25d) als analytische Ausdrücke von zwei Funktionen mit der unabhängigen Veränderlichen  $x$ , so ist der Definitionsbereich in beiden Fällen  $-c \leq x \leq c$ , der Wertevorrat im ersten Falle  $0 \leq y \leq c$ , im zweiten Falle  $-c \leq y \leq 0$ .

### Gleichung des Kreises (allgemeine Lage)

Wird der Kreis mit der Gleichung (25b) so verschoben, daß der ursprünglich im Ursprung gelegene Mittelpunkt an die Stelle  $P_m(x_m; y_m)$  kommt, so sind nach Abschnitt 3.2.8. in der Kreisgleichung (25b)  $x$  und  $y$  durch  $(x - x_m)$  bzw.  $(y - y_m)$  zu ersetzen:

$$(26) \quad (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = c^2.$$

Auch diese Gleichung läßt sich mit Hilfe des pythagoreischen Satzes unmittelbar anschaulich deuten (Abb. 3.86.).

Durch die drei Zahlen  $x_m, y_m$  und  $c$  sind Lage und Größe des Kreises völlig bestimmt. Wenn drei Punkte  $P_1(x_1; y_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2)$  und  $P_3(x_3; y_3)$  des Kreises gegeben sind, so müssen die Koordinaten eines jeden dieser Punkte die Kreisgleichung (26) erfüllen. Das ergibt ein System von drei Bestimmungsgleichungen für  $x_m, y_m$  und  $c$ :

$$\begin{array}{l} x_1 \text{ und } y_1 \text{ in (26) einsetzen: } \\ x_2 \text{ und } y_2 \text{ in (26) einsetzen: } \\ x_3 \text{ und } y_3 \text{ in (26) einsetzen: } \end{array} \left| \begin{array}{l} (x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2 = c^2 \\ (x_2 - x_m)^2 + (y_2 - y_m)^2 = c^2 \\ (x_3 - x_m)^2 + (y_3 - y_m)^2 = c^2 \end{array} \right.$$

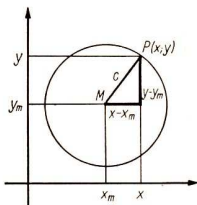


Abb. 3.86.

Um aus diesem System  $x_m, y_m$  und  $c$  zu ermitteln, löst man die Klammern auf und eliminiert (durch Subtraktion je zweier Gleichungen) die Quadrate  $x_m^2, y_m^2$  und  $c^2$ . Das gibt ein System von zwei linearen Gleichungen zur Bestimmung von  $x_m$  und  $y_m$ .

### ■ Beispiel 31:

Wie lautet die Gleichung des Kreises, der durch die Punkte  $P_1(4; 16)$ ,  $P_2(18; 14)$ ,  $P_3(16; 0)$  geht? Das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} (4 - x_m)^2 + (16 - y_m)^2 = c^2 \\ (18 - x_m)^2 + (14 - y_m)^2 = c^2 \\ (16 - x_m)^2 + (0 - y_m)^2 = c^2 \end{array} \right.$$

hat die Lösung  $x_m = 10$ ,  $y_m = 8$ ,  $c = 10$ . Daraus folgt die Kreisgleichung  $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 100$ .

● Warum versagt das Verfahren bei  $P_1(0; 0)$ ,  $P_2(-4; 2)$ ,  $P_3(2; -1)$ ? Geben Sie auf Grund dieses Beispiels die Bedingung an, der die Punkte genügen müssen!



## Aufgaben

- Wie lautet die Gleichung des Kreises, der durch die folgenden Punkte geht?
  - $P_1(-8; -3)$ ,  $P_2(16; 7)$ ,  $P_3(9; 14)$
  - $P_1(-4; 2)$ ,  $P_2(-11; 1)$ ,  $P_3(-3; -5)$
  - $P_1(1; 2)$ ,  $P_2(3; 4)$ ,  $P_3(5; 3)$
  - $P_1(-3; -2)$ ,  $P_2(-1; 1)$ ,  $P_3(0; 0)$
- Bestimmen Sie die Mittelpunkte und die Radien der Kreise mit den folgenden Gleichungen!
  - $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$
  - $x^2 + y^2 - 14x + 26y + 217 = 0$
- Der Mittelpunkt des Kreises, der durch die drei Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  geht, läßt sich auch in der Weise ermitteln, daß man den Konstruktionsweg rechnerisch verfolgt. Man müßte also die Gleichungen von zwei Mittelsenkrechten des Dreiecks  $P_1P_2P_3$  aufstellen und ihren Schnittpunkt ermitteln.
  - bis d) Verfahren Sie in dieser Weise bei Aufgabe 1. a) bis d)!
- Geben Sie die Gleichungen der Kreise an, die durch die folgenden Stücke gegeben sind!
  - Mittelpunkt  $P_m(3; 5,3)$ , Kreispunkt  $P(7; 7)$
  - Kreispunkte  $P_1(4; 2)$ ,  $P_2(7; -9)$ , Radius 25
  - Kreispunkt  $P(7; 3)$ , Mittelpunkt  $P_m(x_m; 6)$ , Radius 5
  - Kreispunkt  $P(-7; 3)$ , Mittelpunkt  $P_m(0; y_m)$ , Radius 13
  - Überlegen Sie sich, ob es bei den Aufgaben a) bis d) stets Lösungen gibt, auch wenn man die gegebenen Zahlen beliebig abwandelt!

### Schnitt zwischen Kreis und Gerader

Sind Kreisgleichung und Geradengleichung in Koordinatenschreibweise gegeben, so müssen die Koordinaten eventueller Schnittpunkte beide Gleichungen zugleich erfüllen. Kreis- und Geradengleichung werden also zu einem System von zwei Bestimmungsgleichungen zusammengefaßt, aus dem sich die Koordinaten der Schnittpunkte bestimmen lassen.

$$\begin{cases} (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = c^2 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}.$$

#### Beispiel 32:

Wo schneidet die Gerade  $3x + 4y - 2 = 0$  den Kreis  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$ ?

$$\text{Das Gleichungssystem } \begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16 \\ 3x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

hat die Lösungen  $x_1 = 5,2$ ,  $y_1 = -3,4$ ;

$$x_2 = -1,2, \quad y_2 = 1,4.$$

Die Schnittpunkte sind  $S_1(5,2; -3,4)$  und  $S_2(-1,2; 1,4)$ .

#### Beispiel 33:

Wo schneidet die Gerade  $y = x + 10$  den Kreis  $x^2 + y^2 = 25$ ?

$$\text{Das Gleichungssystem } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x + 10 \end{cases}$$

führt auf die quadratische Gleichung

$$(x + 5)^2 = -12,5,$$

die im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung hat. Wie man sich leicht an Hand einer Skizze überzeugt, schneidet die Gerade den Kreis nicht. Dieser Sachverhalt spiegelt sich in der Rechnung dadurch wider, daß man eine quadratische Gleichung erhält, die im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung hat.

### Beispiel 34:

Wo schneidet die Gerade  $y = -\frac{3}{4}x + 1$  den Kreis  $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 25$ ?

Das Gleichungssystem 
$$\begin{cases} (x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 25 \\ y = -\frac{3}{4}x + 1 \end{cases}$$

führt auf die quadratische Gleichung

$$(x - 4)^2 = 0,$$

die nur eine Lösung („Doppelwurzel“) hat:  $x_0 = 4$ . Aus der Geradengleichung errechnet man das zugehörige  $y_0 = -2$ . Der Kreis und die Gerade haben nur den Punkt  $P_0(4; -2)$  gemeinsam. Die Gerade ist Tangente an den Kreis.



Überzeugen Sie sich von diesem Sachverhalt an Hand einer Zeichnung!

### Aufgaben

Ermitteln Sie die eventuellen Schnittpunkte folgender Kreise und Geraden!

- $(x - 8)^2 + y^2 - 25 = 0$  und  $4y - 5x + 36 = 0$
- $(x + 21)^2 + (y + 14)^2 - 144 = 0$  und  $y = 1,4x + 7$
- $x^2 + y^2 - 169 = 0$  und  $12x + 5y - 169 = 0$
- $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 100$  und  $x - y + 1 = 0$

### Tangente in einem gegebenen Kreispunkt

Die Gleichung der Tangente soll ermittelt werden, die den Kreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = c^2$  im Punkte  $P_0(x_0; y_0)$  berührt (Abb. 3.87.). Auf der im Punkte  $P_0$  auf dem Kreisradius  $\overline{OP_0}$  senkrechten Geraden liegt außer  $P_0$  kein Kreispunkt; denn jeder weitere Punkt auf dieser Geraden hat vom Kreismittelpunkt eine Entfernung, die größer ist als der Kreisradius  $c$ . Diese auf dem Radius  $\overline{OP_0}$  senkrechte Gerade ist daher Kreistangente. Da der Radius den Anstieg  $m_R = \tan \alpha_R = \frac{y_0}{x_0}$  hat, ist der Anstieg der dazu senkrechten Tangente

$$m_T = \tan \alpha_T = -\frac{x_0}{y_0}.$$

Nach der Punktgleichung der Geraden erhält man

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

und daraus die Tangentengleichung

$$x_0x + y_0y = x_0^2 + y_0^2.$$

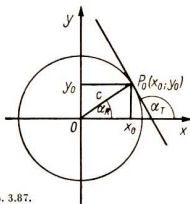


Abb. 3.87.

Da der Berührungspunkt  $P_0(x_0; y_0)$  Kreispunkt ist, müssen seine Koordinaten die Kreisgleichung erfüllen:  $x_0^2 + y_0^2 = c^2$ . Damit erhält die Gleichung der Kreistangente schließlich die Form

$$(27) \quad x_0 x + y_0 y = c^2,$$

die der Kreisgleichung ähnelt;  $x$  und  $y$  sind die Koordinaten des laufenden Punktes  $P(x; y)$ ,  $x_0$  und  $y_0$  sind die Koordinaten des Berührungspunktes  $P_0(x_0; y_0)$ .

■ **Beispiel 35:**

An den Kreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = 169$  soll im Kreispunkt  $P_0(-12; 5)$  die Tangente gelegt werden. Wie lautet ihre Gleichung?

Nach (27) ergibt sich  $-12x + 5y = 169$ .

Wird der Kreis zusammen mit der in  $P_0(x_0; y_0)$  angelegten Tangente so verschoben, daß der ursprünglich im Ursprung gelegene Mittelpunkt an die Stelle  $P_m(x_m; y_m)$  kommt, so sind nach Abschnitt 3.2.8. in der Tangentengleichung (27)  $x$ ,  $y$ ,  $x_0$  und  $y_0$  durch  $(x - x_m)$ ,  $(y - y_m)$ ,  $(x_0 - x_m)$  und  $(y_0 - y_m)$  zu ersetzen. Das führt zu

$$(28) \quad (x_0 - x_m)(x - x_m) + (y_0 - y_m)(y - y_m) = c^2.$$

■ **Beispiel 36:**

An den Kreis mit der Gleichung  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$  soll im Kreispunkt  $P_0(5; 1)$  die Tangente gelegt werden. Wie lautet ihre Gleichung?

Nach (28) ergibt sich

$$(5 - 2)(x - 2) + (1 + 3)(y + 3) = 25.$$

In der kartesischen Form lautet die Gleichung der Tangente  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{19}{4}$ .

Zur Probe kann man nun den Schnitt zwischen dieser Geraden und dem gegebenen Kreis bestimmen, wobei (falls  $y$  eliminiert wird) die entstehende quadratische Gleichung nur die eine Lösung (Doppelwurzel)  $x = 5$  haben darf.

**Aufgaben**

An den Kreis soll jeweils im Kreispunkt  $P_0$  die Tangente gelegt werden. Wie lautet die Tangentengleichung?

- $x^2 + y^2 = 225$ ,  $P_0(-12; 9)$
- $x^2 + y^2 = 20,25$ ,  $P_0(2,7; 3,6)$
- $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$ ,  $P_0(8; 2)$
- $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 387 = 0$ ,  $P_0(10; 19)$
- $x^2 + y^2 - 4x = 0$ ,  $P_0(2; 2)$

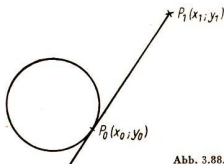


Abb. 3.88.

*Tangente durch einen Punkt an den Kreis*

An den Kreis  $x^2 + y^2 = c^2$  soll vom Punkte  $P_1(x_1; y_1)$  eine Tangente gelegt werden (Abb. 3.88.).

Ist  $P_0(x_0; y_0)$  der Berührungspunkt der Tangente, so lautet die Tangentengleichung nach (27)  $x_0 x + y_0 y = c^2$ . Auf dieser Tangente liegt auch  $P_1$ , so daß  $x_0 x_1 + y_0 y_1 = c^2$  gilt.

Um die unbekanntenen Koordinaten  $x_0$  und  $y_0$  des Berührungspunktes  $P_0$  zu ermitteln, benötigt man eine zweite Gleichung. Da  $P_0$  auf dem Kreis liegt, gilt

$$x_0^2 + y_0^2 = c^2.$$

Aus dem System

$$(29) \quad \begin{cases} x_0 x_1 + y_0 y_1 = c^2 \\ x_0^2 + y_0^2 = c^2 \end{cases}$$

kann man die beiden Unbekannten  $x_0$  und  $y_0$  ermitteln. Nachdem die Koordinaten des Berührungspunktes  $P_0$  bestimmt sind, kann nach (27) die Tangentengleichung aufgestellt werden.

### ■ Beispiel 37:

Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, die von  $P_1(7; 1)$  an den Kreis  $x^2 + y^2 = 25$  gelegt werden können?

Die Koordinaten des Berührungspunktes werden aus dem Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_0 \cdot 7 + y_0 \cdot 1 = 25 \\ x_0^2 + y_0^2 = 25 \end{cases}$$

ermittelt. Die Berührungspunkte sind  $P_{01}(3; 4)$  und  $P_{02}(4; -3)$ . Die Tangentengleichungen lauten  $3x + 4y = 25$  und  $4x - 3y = 25$ .

### Aufgaben

- Geben Sie die Tangenten an, die von  $P_1(7; -17)$  an den Kreis  $x^2 + y^2 = 169$  gelegt werden können!
- Desgl.  $P_1(9; -4)$ ,  $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 12 = 0$ .  
Anleitung: Die  $xy$ -Ebene ist zweckmäßig zu verschieben.
- Leiten Sie das Gleichungssystem (29) her, indem Sie die bekannte Konstruktion der Berührungspunkte  $P_0(x_0; y_0)$  rechnerisch verfolgen! Die Berührungspunkte sind die Schnittpunkte des Kreises  $x^2 + y^2 = c^2$  mit dem Kreis um  $P_m\left(\frac{x_1}{2}; \frac{y_1}{2}\right)$  durch  $O(0; 0)$  und  $P_1(x_1; y_1)$ .

### Schnittwinkel zwischen Kreis und Gerader

► Der Schnittwinkel zwischen einer Geraden und einem Kreis wird als Schnittwinkel zwischen der Geraden und der betreffenden Kreistangente erklärt.

### ■ Beispiel 38:

Unter welchem Winkel schneidet die Gerade mit der Gleichung  $y = x + 1$  den Kreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = 25$ ?

- Bestimmen der Schnittpunkte:  $P_1(3; 4)$ ,  $P_2(-4; -3)$ . Aus Symmetriegründen treten an beiden Schnittpunkten die gleichen Schnittwinkel auf, so daß man nur einen Schnittpunkt weiter zu behandeln braucht.
- Die Gleichung der Tangente, die im Kreispunkt  $P_1$  an den Kreis gelegt werden kann, lautet  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$
- Aus dem Anstieg  $m_0 = 1$  der schneidenden Geraden und dem Anstieg  $m_1 = -\frac{3}{4}$  der Kreistangente durch den Punkt  $P_1$  ergibt sich nach Abschnitt 3.2.5. für den Schnittwinkel  $\alpha_0 - \alpha_1 \approx 81,9^\circ$ .

## Aufgaben

Bestimmen Sie den jeweiligen Schnittwinkel zwischen Kreis und Gerade!  
Fertigen Sie jeweils eine Skizze an!

1.  $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ ;  $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$

2.  $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$ ;  $y = 2 - \frac{x}{2}$

3.  $(x + 1,5)^2 + (y - 2,5)^2 = 6,25$ ;  $y$ -Achse

## Schnittpunkte zweier Kreise

Schneiden zwei Kreise mit den Gleichungen

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = c^2$$

und

$$(x - x_m')^2 + (y - y_m')^2 = c'^2$$

einander, so erhält man die Koordinaten ihrer Schnittpunkte als Lösung des Systems dieser beiden Gleichungen.

### ■ Beispiel 39:

In welchen Punkten schneiden die Kreise mit den Gleichungen  $x^2 + y^2 = 25$  und  $(x - 5)^2 + (y - 35)^2 = 1025$  einander?

Aus

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x - 5)^2 + (y - 35)^2 = 1025 \end{cases}$$

ergeben sich die Schnittpunkte  $P_1(-3; 4)$  und  $P_2(4; 3)$ .

## Schnittwinkel zweier Kreise

► Der Schnittwinkel zwischen zwei Kreisen wird als Winkel zwischen den beiden Tangenten erklärt, die die Kreise im Schnittpunkt berühren.

### ■ Beispiel 40:

Der Schnittwinkel der Kreise des Beispiels 39 soll ermittelt werden.

Mit  $m_1 = -\frac{4}{3}$  und  $m_2 = -\frac{1}{32}$  erhält man nach 3.2.5. (16)  $\tan(\alpha_2 - \alpha_1) = 1,25$ ,  
 $\alpha_2 - \alpha_1 \approx 51,3^\circ$

## Aufgaben

Bestimmen Sie in den folgenden Aufgaben die eventuellen Schnittpunkte folgender Kreise!

1.  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ ;  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$

2.  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$ ;  $x^2 + y^2 = 1$

3.  $x^2 + y^2 + 10y + 21 = 0$ ;  $x^2 + y^2 + 10x + 21 = 0$

Ermitteln Sie in den folgenden Aufgaben die Schnittwinkel der Kreise!

4. Kreise der Aufgabe 1

5. Kreise der Aufgabe 2

6. Kreise der Aufgabe 3

### 3.3. Analytische Geometrie: Kegelschnitte

#### 3.3.1. Kegel und schneidende Ebene

##### Der gerade Kreiskegel; der Doppelkegel

Zwei Geraden  $g$  und  $\bar{g}$  mögen einander im Punkte  $S$  unter dem spitzen Winkel  $\alpha$  (d. h.  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) schneiden (Abb. 3.89.). Dreht man nun die Gerade  $\bar{g}$  um die Gerade  $g$ , ohne daß sich der Schnittwinkel  $\alpha$  ändert, so entstehen zwei gerade Kreiskegel mit gemeinsamer Spitze  $S$ , gemeinsamer Achse  $g$  und gleich großen Öffnungswinkeln  $2\alpha$  (Abb. 3.90.). Jede Ebene, die auf der Achse  $g$  senkrecht steht und nicht durch  $S$  geht, schneidet einen der Kegel in einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf  $g$  liegt (Abb. 3.90.). Deshalb heißen die Kegel **gerade Kreiskegel**. Das aus den beiden geraden Kreiskegeln bestehende Gebilde nennt man **Doppelkegel**.

Abb. 3.89.

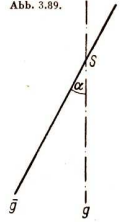


Abb. 3.90.

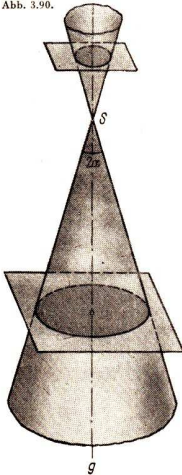


Abb. 3.91.

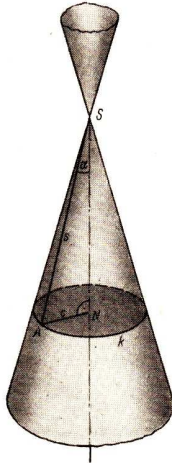
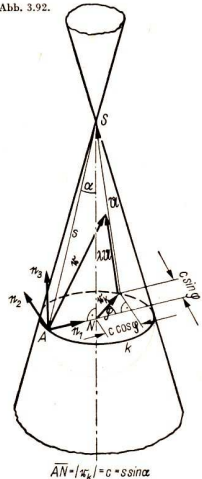


Abb. 3.92.



Auf dem Mantel des unteren Kegels wird im Abstände  $s$  von der Spitze  $S$  (Abb. 3.91.) ein Punkt  $A$  festgelegt. Die Ebene durch  $A$ , senkrecht zur Kegelachse, schneidet den Kegel in einem Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $N$  und dem Radius  $\overline{AN} = c = s \sin \alpha$ . Nun soll der von  $A$  ausgehende Ortsvektor  $\mathbf{r}$  gesucht werden, dessen Spitze den Mantel des Doppelkegels beschreibt (Abb. 3.92.). Zu diesem Zweck werden drei zueinander senkrechte Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  (Abb. 3.92.) durch die Festsetzungen

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\overrightarrow{AN}}{AN}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\overrightarrow{NS}}{NS}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$$

eingeführt. Dann gilt:

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{AN} + \mathbf{r}_k + \lambda \mathbf{u}$$

mit

$$\overrightarrow{AN} = AN \mathbf{e}_1 = s \sin \alpha \mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{r}_k = c \cos \varphi \mathbf{e}_1 + c \sin \varphi \mathbf{e}_2 = s \sin \alpha \cos \varphi \mathbf{e}_1 + s \sin \alpha \sin \varphi \mathbf{e}_2 \text{ und}$$

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{NS} - \mathbf{r}_k = \overline{NS} \mathbf{e}_3 - \mathbf{r}_k = s \cos \alpha \mathbf{e}_3 - \mathbf{r}_k = s \cos \alpha \mathbf{e}_3 - s \sin \alpha \cos \varphi \mathbf{e}_1 - s \sin \alpha \sin \varphi \mathbf{e}_2.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = & s \sin \alpha \mathbf{e}_1 + s \sin \alpha \cos \varphi \mathbf{e}_1 + s \sin \alpha \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \lambda s \cos \alpha \mathbf{e}_3 - \lambda s \sin \alpha \cos \varphi \mathbf{e}_1 \\ & - \lambda s \sin \alpha \sin \varphi \mathbf{e}_2 \text{ und weiter} \end{aligned}$$

$$(1) \quad \mathbf{r} = [1 + (1 - \lambda) \cos \varphi] s \sin \alpha \mathbf{e}_1 + [(1 - \lambda) \sin \varphi] s \sin \alpha \mathbf{e}_2 + \lambda s \cos \alpha \mathbf{e}_3.$$

#### Beispiel 1:

(Abb. 3.93.)

$$\mathbf{r} = [1 + (1 - \lambda) \cos \varphi] 10 \sin 30^\circ \mathbf{e}_1 + [(1 - \lambda) \sin \varphi] 10 \sin 30^\circ \mathbf{e}_2 + \lambda 10 \cos 30^\circ \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{r} = 5[1 + (1 - \lambda) \cos \varphi] \mathbf{e}_1 + 5(1 - \lambda) \sin \varphi \mathbf{e}_2 + 5\sqrt{3} \lambda \mathbf{e}_3.$$

Für bestimmte Werte der Parameter  $\lambda$  und  $\varphi$  ergeben sich die Ortsvektoren  $\mathbf{r}$ , deren Spitzen an bestimmten Punkten des Kegelmantels liegen, beispielsweise für  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $\varphi = 315^\circ$  (Abb. 3.94.) der Ortsvektor

$$\mathbf{r} = 6,77 \mathbf{e}_1 - 1,77 \mathbf{e}_2 + 4,33 \mathbf{e}_3.$$

Überlegen Sie sich, welchen Teil des Kegelmantels die Spitze von  $\mathbf{r}$  beschreibt, wenn

- a)  $0 < \lambda < 1$ ,    b)  $\lambda = 1$ ,  
 c)  $\lambda > 1$ ,    d)  $\lambda < 0$ ,  
 e)  $\lambda = 0$ ,    f)  $0 < \varphi < \pi$ ,  
 g)  $\pi < \varphi < 2\pi$ ,    h)  $\varphi = 0$ ,  
 i)  $\varphi = \pi$

ist!

Abb. 3.93.

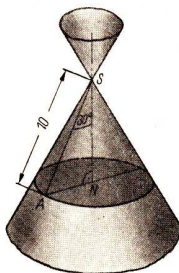


Abb. 3.94.

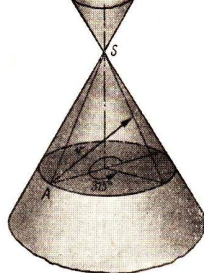


Abb. 3.95.

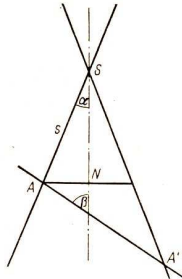
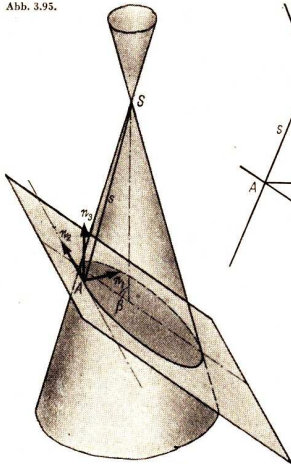


Abb. 3.96.

### Ebene Schnitte des Doppelkegels

Nun werde der Doppelkegel von einer durch  $A$  gehenden, zu  $c_2$  parallelen Ebene geschnitten, die mit der Kegellachse den Winkel

$$\beta \left( 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

bildet (Abb. 3.95. und 3.96.). Als Schnitt zwischen dieser Ebene und dem Kegelmantel entsteht eine Kurve, die man **Kegelschnitt** nennt. Die Form des Kegelschnitts wird bei fest vorgegebenem Kegel

vor allem vom Winkel  $\beta$  zwischen der Ebene und der Kegellachse bestimmt:

Aus Abbildung 3.97.a erkennt man, daß für  $\alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$  nur der Kegel geschnitten wird, auf dessen Mantel  $A$  liegt, also nur der untere, und daß als Kegelschnitt eine geschlossene Kurve entsteht;

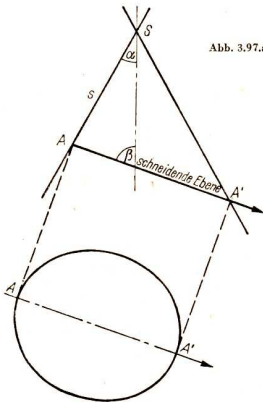


Abb. 3.97.a

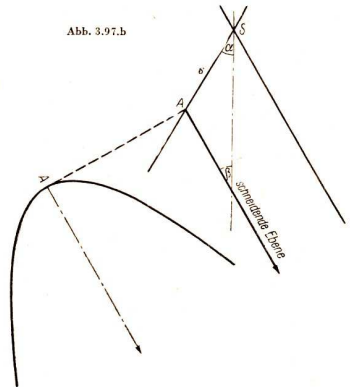
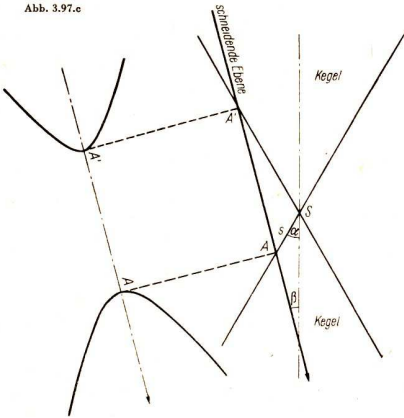


Abb. 3.97.b



Abb. 3.97.c



aus Abbildung 3.97.b erkennt man, daß für  $\beta = \alpha$  ebenfalls nur dieser eine Kegel geschnitten wird, daß aber eine offene Kurve entsteht;

aus Abbildung 3.97.c schließlich ist ersichtlich, daß für  $\beta < \alpha$  beide Kegel geschnitten werden und somit eine Schnittkurve erhalten wird, die aus zwei (offenen) Kurvenästen besteht.

Die im Falle  $\beta > \alpha$  (Abb. 3.97.a) entstehende Kurve heißt **Ellipse**.

Der Fall  $\beta = \frac{\pi}{2}$  ergibt den **Kreis**; Kreise können deshalb als spezielle Ellipsen aufgefaßt werden. Die für  $\beta = \alpha$  (Abb. 3.97.b) entstehende Kurve heißt **Parabel**. Die Kurve, die für  $\beta < \alpha$  (Abb. 3.97.c) erhalten wird, heißt **Hyperbel**.

Es ist nicht schwer, bei gegebenem  $\alpha$ ,  $s$  und  $\beta$  den Kegelschnitt in wahrer Größe und Gestalt zu konstruieren, wie das in den Abbildungen 3.97. durchgeführt wurde. Das Verfahren sei am Beispiel der Ellipse erläutert. Die Schnittebene, in der die Ellipse liegt, ist im Seitenriß des Kegels (Abb. 3.98.a) nur als Gerade  $AA'$  zu sehen, die Ellipse als Strecke  $\overline{AA'}$ . Wie groß ist die Ellipsensehne, die in  $x_0$  auf  $\overline{AA'}$  senkrecht steht? Die senkrecht zur Kegelachse durch  $x_0$  gehende Ebene (in Abb. 3.98.b als Gerade  $B_0B_0'$  zu sehen) schneidet den Kegel in einem Kreis  $k_0$  (in Abb. 3.98.b als Strecke  $\overline{B_0B_0'}$  abgebildet). Das axonometrische Bild (Abb. 3.98.c) läßt erkennen, daß die in  $x_0$  auf  $AA'$  senkrecht

Abb. 3.98.a

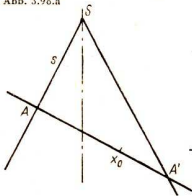


Abb. 3.98.b

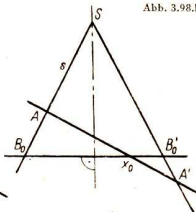


Abb. 3.98.c

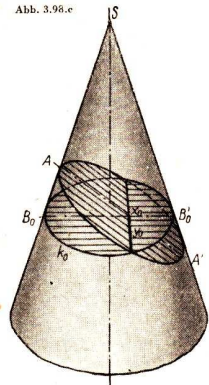


Abb. 3.98.e

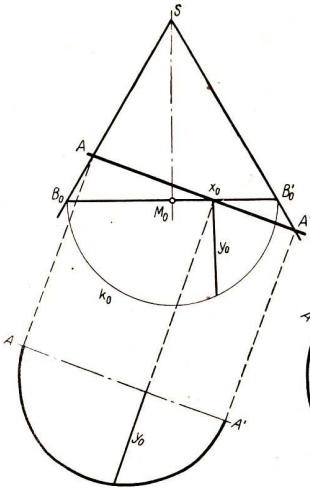
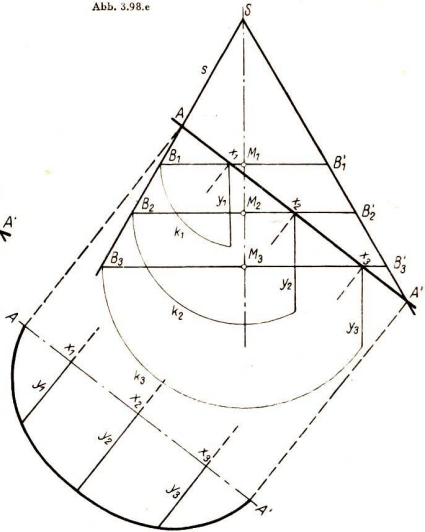


Abb. 3.98.d

stehende Ellipsenschnitte zugleich auf  $\overline{B_0B_0'}$  senkrechte Kreisschnitte ist. Nach Umklappen des Kreises  $k_0$  in die Zeichenebene kann sie dem Kreis entnommen werden (Abb. 3.98.d). Das führt zu der in Abbildung 3.98.e dargestellten Konstruktion. Dabei wird anschaulich klar, daß  $AA'$  Symmetrieachse des Kegelschnitts ist.

Abb. 3.99.a

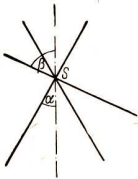


Abb. 3.99.b

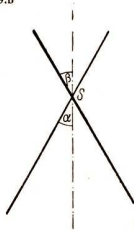
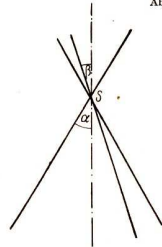


Abb. 3.99.c



Bei den obigen, die Gestalt des Kegelschnitts betreffenden Untersuchungen wurde  $s$  außer acht gelassen, denn offensichtlich beeinflusst  $s$  nicht die Gestalt, sondern nur die Größe des Kegelschnitts. Das gilt aber nur, solange  $s$  von Null verschieden ist. Ist dagegen  $s = 0$ , geht die schneidende Ebene also durch die Kegelspitze, so entsteht im Falle  $\beta > \alpha$  (Abb. 3.99.a) ein Punkt, im Falle  $\beta = \alpha$  (Abb. 3.99.b) eine Gerade und im Falle  $\beta < \alpha$  (Abb. 3.99.c) ein Geradenpaar als Schnittfigur. Man spricht dann von entarteten Kegelschnitten. Auf die Behandlung der entarteten Kegelschnitte wird im folgenden verzichtet; daher ist stets  $s > 0$  vorausgesetzt. Jetzt soll der von  $A$  ausgehende Ortsvektor  $\mathbf{r}$  gefunden werden, dessen Spitze die schneidende Ebene beschreibt. In dieser Ebene legen die Einheitsvektoren

$$\mathbf{i} = \sin \beta \mathbf{e}_1 - \cos \beta \mathbf{e}_3$$

$$\text{und } \mathbf{j} = \mathbf{e}_2$$

nach Abbildung 3.100. die  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung eines auf  $A$  bezogenen Koordinatensystems fest. Dann gilt für einen beliebigen Punkt  $P(\mathbf{r}) \equiv P(x; y)$  dieser Ebene:

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} = x \sin \beta \mathbf{e}_1 - x \cos \beta \mathbf{e}_3 + y \mathbf{e}_2,$$

$$(2) \quad \mathbf{r} = x \sin \beta \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 - x \cos \beta \mathbf{e}_3.$$

### Aufgaben

- Ein kantiger Bleistift wird mit der Maschine gespitzt. Zu welchen Kurven gehören die entstehenden Bögen?
- Eine Stabtaschenlampe strahlt etwa in Form eines geraden Kreiskegels. Was für eine Lichtfigur entsteht auf dem ebenen Fußboden, wenn die Lampe horizontal gehalten wird?
- Konstruieren Sie den Kegelschnitt in wahrer Gestalt und Größe (Bezeichnungen nach Abb. 3.97.):
  - $\alpha = 70^\circ, \quad \beta = 20^\circ, \quad s = 2;$
  - $\alpha = 20^\circ, \quad \beta = 70^\circ, \quad s = 3!$

Anleitung: Wählen Sie die Größe der Einheit und die Anordnung zweckmäßig, so daß das zur Verfügung stehende Zeichenblatt gut genutzt wird!

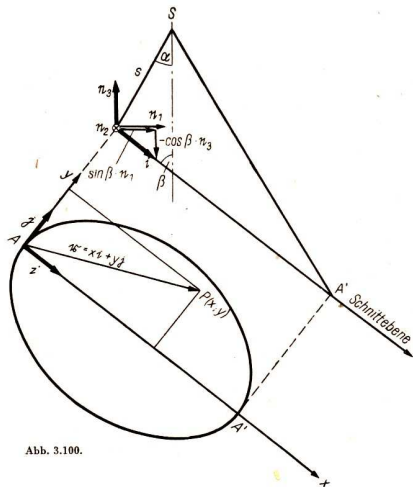


Abb. 3.100.

*Die gemeinsame Scheitelgleichung der Kegelschnitte*

Die Punkte des Kegelschnitts müssen sowohl vom Ortsvektor (1)

$$\vec{r} = [1 + (1 - \lambda) \cos \varphi] s \sin \alpha \vec{e}_1 + [(1 - \lambda) \sin \varphi] s \sin \alpha \vec{e}_2 + \lambda s \cos \alpha \vec{e}_3,$$

der den Kegel beschreibt, als auch vom Ortsvektor (2)

$$\vec{r} = x \sin \beta \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 - x \cos \beta \vec{e}_3,$$

der die schneidende Ebene beschreibt, erreicht werden können. Für die Punkte  $P(x; y)$  des Kegelschnitts folgt deshalb durch Gleichsetzen von (1) und (2) die Bedingung

$$\begin{aligned} [1 + (1 - \lambda) \cos \varphi] s \sin \alpha \vec{e}_1 + [(1 - \lambda) \sin \varphi] s \sin \alpha \vec{e}_2 + \lambda s \cos \alpha \vec{e}_3 \\ = x \sin \beta \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 - x \cos \beta \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich durch Koeffizientenvergleich die drei skalaren Gleichungen

$$\begin{array}{l} (3a) \quad [1 + (1 - \lambda) \cos \varphi] s \sin \alpha = x \sin \beta \\ (3b) \quad [(1 - \lambda) \sin \varphi] s \sin \alpha = y \\ (3c) \quad \lambda s \cos \alpha = -x \cos \beta \end{array} .$$

Aus diesem Gleichungssystem sollen nun die Parameter  $\varphi$  und  $\lambda$  eliminiert werden.  $\varphi$  wird beseitigt, indem man (3 a) und (3 b) nach  $(1 - \lambda) \cos \varphi$  beziehungsweise  $(1 - \lambda) \sin \varphi$  auflöst:

$$\begin{array}{l} (3a) \quad (1 - \lambda) \cos \varphi = \frac{x \sin \beta}{s \sin \alpha} - 1 \\ (3b) \quad (1 - \lambda) \sin \varphi = \frac{y}{s \sin \alpha} \end{array} ,$$

beide quadriert:

$$\begin{array}{l} (3a) \quad (1 - \lambda)^2 \cos^2 \varphi = \frac{x^2 \sin^2 \beta}{s^2 \sin^2 \alpha} - 2 \frac{x \sin \beta}{s \sin \alpha} + 1 \\ (3b) \quad (1 - \lambda)^2 \sin^2 \varphi = \frac{y^2}{s^2 \sin^2 \alpha} \end{array} .$$

und addiert:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)^2 &= \frac{x^2 \sin^2 \beta}{s^2 \sin^2 \alpha} - 2 \frac{x \sin \beta}{s \sin \alpha} + 1 + \frac{y^2}{s^2 \sin^2 \alpha} , \\ - 2 \lambda + \lambda^2 &= \frac{x^2 \sin^2 \beta}{s^2 \sin^2 \alpha} - 2 \frac{x \sin \beta}{s \sin \alpha} + \frac{y^2}{s^2 \sin^2 \alpha} . \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (3 c) wird noch  $\lambda$  eliminiert:

$$2 \frac{x \cos \beta}{s \cos \alpha} + \frac{x^2 \cos^2 \beta}{s^2 \cos^2 \alpha} = \frac{x^2 \sin^2 \beta}{s^2 \sin^2 \alpha} - 2 \frac{x \sin \beta}{s \sin \alpha} + \frac{y^2}{s^2 \sin^2 \alpha} .$$

Da  $y$  nur quadratisch vorkommt, wird nach  $y^2$  aufgelöst:

$$\begin{aligned} y^2 &= \left( \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \right) x^2 + 2 s \left( \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta \right) x , \\ y^2 &= \left[ \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} (1 - \cos^2 \alpha) - \sin^2 \beta \right] x^2 + 2 \frac{s \sin \alpha}{\cos \alpha} (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) x , \\ (4) \quad y^2 &= \left( \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) x^2 + 2 \frac{s \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha} x . \end{aligned}$$

Die Gleichung (4) ist eine parameterfreie Beziehung zwischen den Koordinaten der Punkte  $P(x; y)$  des Kegelschnitts, in der  $s$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  vorkommen, die die Größe und Gestalt des Kegelschnitts bestimmen. Die Gleichung (4) bestätigt die bereits durch Anschauung gewonnene Erkenntnis, daß die  $x$ -Achse (also die Gerade  $AA'$ ) Symmetrieachse, kurz **Achse des Kegelschnitts** ist; denn  $y$  kommt nur in der zweiten Potenz vor, die Gleichung ist also jeweils für  $y$  und  $-y$  zugleich erfüllt.  $A(0; 0)$  heißt **Scheitel** des Kegelschnitts, im Falle der Ellipse **Hauptscheitel**. Zur Abkürzung wird in (4)

$$(5a) \quad \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \varepsilon$$

und

$$(5b) \quad \frac{s \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} = p$$

gesetzt. Das ergibt

$$(6) \quad y^2 = (\varepsilon^2 - 1)x^2 + 2px.$$

Diese Gleichung heißt **gemeinsame Scheitelgleichung der Kegelschnitte**. Da  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $s > 0$  und  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  vorausgesetzt wurden, ist stets  $p > 0$ . Weiter folgt unter den soeben genannten Voraussetzungen aus  $\beta \geq \alpha$  noch  $\cos \beta \leq \cos \alpha$ , so daß

im Falle der Ellipse wegen  $\beta > \alpha$   $0 < \varepsilon < 1$ ,

(7a) im Falle der Parabel wegen  $\beta = \alpha$   $\varepsilon = 1$ ,

im Falle der Hyperbel wegen  $\beta < \alpha$   $\varepsilon > 1$

ist;

(7b) im Falle des Kreises ist wegen  $\beta = \frac{\pi}{2}$   $\varepsilon = 0$ .

Man nennt  $\varepsilon$  **numerische Exzentrizität**;  $2p$  heißt **Parameter**,  $p$  heißt **Halbparameter** des Kegelschnitts.

### Beispiel 2:

Ein Doppelkegel mit halbem Öffnungswinkel  $\alpha = 30^\circ$  wird von einer Ebene geschnitten, die mit der Kegelachse einen Winkel von  $\beta = 60^\circ$  bildet. Der Scheitel  $A$  hat von der Kegelspitze  $S$  den Abstand  $s = 1$  (Skizzieren Sie den Seitenriß!). Nach (5a) und (5b) ergeben sich die numerische Exzentrizität  $\varepsilon = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$  und der Halbparameter  $p = \frac{1 \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin(30^\circ + 60^\circ)}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Wegen  $\varepsilon < 1$  handelt es sich um eine Ellipse; ihre Scheitelgleichung (6) lautet dann  $y^2 = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}x$ .

Aus (6) und (7a) ergibt sich,

daß bei der Parabel wegen  $\varepsilon^2 - 1 = 0$  das Quadrat mit der Seite  $y$  flächengleich ist dem Rechteck mit den Seiten  $x$  und  $2p$ ,

daß bei der Ellipse wegen  $\varepsilon^2 - 1 < 0$  an der Fläche des Quadrats mit der Seite  $y$  gegenüber der des Rechtecks mit den Seiten  $x$  und  $2p$  etwas fehlt,

daß bei der Hyperbel wegen  $\varepsilon^2 - 1 > 0$  die Fläche des Quadrats mit der Seite  $y$  die des Rechtecks mit den Seiten  $x$  und  $2p$  übertrifft.

Aus der Bedeutung der griechischen Wörter  
 $\eta$  παραβολή: Gleichheit,  $\eta$  ἔλλειψις: Mangel und  $\eta$  ὑπερβολή: Überschuß  
 folgt eine Erklärung für die Namen der drei Kegelschnitte.

Die Herleitung der Gleichung (6) hat gezeigt, daß jeder unter den Bedingungen  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $s > 0$  und  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  hergestellte ebene Schnitt eines Doppelkegels durch eine Gleichung der Form (6) mit  $\varepsilon \geq 0$ ,  $p > 0$  dargestellt werden kann. Ist nun umgekehrt jede Gleichung der Form (6) mit  $\varepsilon \geq 0$ ,  $p > 0$  Darstellung einer Kurve, die als ebener Schnitt eines Doppelkegels ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $s > 0$  und  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ ) entstehen kann? Gibt es also beispielsweise einen Doppelkegel, an dem durch einen ebenen Schnitt die Kurve mit der Gleichung  $y^2 = 3x^2 + 2x$  gewonnen werden kann?

Das ist tatsächlich der Fall. Um das zu beweisen, wird gezeigt, daß sich  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $s$  aus vorgegebenem  $\varepsilon$  und  $p$  bestimmen lassen. Allerdings gibt es jeweils mehrere Schnitte von verschiedenen Doppelkegeln, durch die der gleiche Kegelschnitt entsteht, wie sich im folgenden zeigen wird. Aus (5 a) erhält man

$$(8a) \quad \cos \beta = \varepsilon \cos \alpha$$

und aus (5 b)

$$(8b) \quad s = \frac{p \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)},$$

$$= \frac{p \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta} = \frac{p \cdot \cos \alpha}{\varepsilon \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta}$$

$$s = \frac{p}{\varepsilon \cdot \sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{p}{\varepsilon \sin^2 \alpha + \sin \alpha \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha}},$$

was noch zu der Bedingung

$$(8c) \quad 1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha \geq 0$$

führt.

Der Winkel  $\alpha$  ist also innerhalb gewisser Grenzen frei wählbar, nämlich so, daß der Radikand, die linke Seite von (8c), nicht negativ wird (wegen  $0 < \varepsilon \leq 1$  ist bei Ellipse und Parabel  $\alpha$  völlig frei wählbar, selbstverständlich unter Beachtung der Voraussetzung  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ );  $\beta$  und  $s$  ergeben sich dann nach (8a) und (8b) aus  $\varepsilon$  und  $p$ , d. h., man findet einen Kegel und eine schneidende Ebene, die den Kegelschnitt erzeugen.

### ■ Beispiel 3:

Ein Kegel und eine schneidende Ebene sollen gefunden werden, die den Kegelschnitt  $y^2 = 3x^2 + 2x$  erzeugen. Der Vergleich mit (6) zeigt, daß  $p = 1$  und  $\varepsilon^2 = 4$ , also  $\varepsilon = 2$  ist. Wegen  $\varepsilon > 1$  handelt es sich um eine Hyperbel. Nach (8c) ergibt sich für  $\alpha$  die Bedingung  $1 - 4 \cos^2 \alpha \geq 0$ , d. h.  $\cos^2 \alpha \leq \frac{1}{4}$ ,  $\cos \alpha \leq \frac{1}{2}$  und  $\alpha \geq 60^\circ$ . Wird  $\alpha = 60^\circ$  gewählt, so wird aus (8a)  $\cos \beta = 2 \cos 60^\circ = 1$ , also  $\beta = 0^\circ$ , und aus (8b)

$$s = \frac{1 \cdot \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin(60^\circ + 0^\circ)} = \frac{2}{3}.$$

Wird also ein Kegel vom halben Öffnungswinkel  $\alpha = 60^\circ$  von der Ebene so geschnitten, daß  $s = \frac{2}{3}$  und  $\beta = 0^\circ$  ist, so entsteht die Schnittkurve mit der Gleichung  $y^2 = 3x^2 + 2x$ . Wählt man dagegen beispielsweise  $\alpha = 75^\circ$ , so ergibt

sich aus (8a)  $\cos \beta = 2 \cos 75^\circ = 0,5176$ , also  $\beta = 58^\circ 50'$ , und aus (8b)  $s = 0,372$ . Die Kurve mit der Gleichung  $y^2 = 3x^2 + 2x$  kann also auch dadurch entstehen, daß ein Kegel mit  $\alpha = 75^\circ$  von einer Ebene unter  $s = 0,372$  und  $\beta = 58^\circ 50'$  geschnitten wird.

● *Konstruieren Sie beide Kegelschnitte nach dem in Abbildung 3.98. gezeigten Verfahren!*

Aus (6) läßt sich noch der eventuell vorhandene zweite Schnittpunkt  $A'$  des Kegelschnitts mit der  $x$ -Achse ermitteln:

$$(\varepsilon^2 - 1)x^2 + 2px = 0,$$

$$x[(\varepsilon^2 - 1)x + 2p] = 0.$$

Dieses Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. So ergeben sich  $x_1 = 0$  [das ist die Abszisse von  $A(0; 0)$ ] und

$$(9a) \quad x_2 = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2}$$

[das ist die Abszisse von  $A'(x_2; 0)$ ]. Für  $\varepsilon = 1$ , im Falle der Parabel also, existiert  $x_2$  nicht, der Nenner wäre dann ja Null.

Für  $\varepsilon \leq 1$  ist

$$(9b) \quad x_2 \geq 0.$$

Im Falle der Ellipse ist also  $x_2$  positiv, im Falle der Hyperbel negativ, wie sich auch anschaulich am Kegel ergibt (vgl. Abb. 3.97.; die positive  $x$ -Richtung ist durch den Pfeil angedeutet, der Ursprung liegt bei  $A$ ). Man nennt  $A'$  ebenfalls Scheitel des Kegelschnitts, im Falle der Ellipse Hauptscheitel.

### Aufgaben

- Der Öffnungswinkel des Doppelkegels sei  $2\alpha$ , der Winkel zwischen schneidender Ebene und Kegellachse sei  $\beta$ , der Scheitel  $A$  habe von der Kegelspitze den Abstand  $\overline{AS} = s$ . Bestimmen Sie für die folgenden Angaben, um welchen Kegelschnitt es sich jeweils handelt, wie seine Scheiteltgleichung lautet und die Koordinaten des eventuell vorhandenen zweiten Schnittpunkts  $A'$  mit der Achse!  
(Benutzen Sie weitgehend den Rechenstab! Kontrollieren Sie die Rechenergebnisse an Hand einer Zeichnung!)
 

a)  $\alpha = 70^\circ$ ,  $\beta = 20^\circ$ ,  $s = 2$     b)  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 70^\circ$ ,  $s = 3$     c)  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\beta = 40^\circ$ ,  $s = 1$
- Geben Sie jeweils einen Kegel und eine schneidende Ebene an, durch welche die Kurven
 

a)  $y^2 = -0,3x^2 + 5x$ ,    b)  $y^2 = x^2 + 24x$

 erzeugt werden!

### Ebene Schnitte eines geraden Kreiszylinders

Behält man bei einem geraden Kreiskegel (Abb. 3.91.) den Grundkreis  $k$  (vom Radius  $c$ ), auf dem  $A$  liegt, unverändert bei und läßt den Öffnungswinkel  $2\alpha$  des Kegels gegen Null gehen, so rückt die Kegelspitze  $S$  auf der Achse des geraden Kreiskegels unbegrenzt nach oben. Der Grenzfall ist ein Körper, dessen Mantellinien auf der Ebene des Kreises  $k$  senkrecht stehen und somit auch parallel sind. Dieser Körper heißt bekanntlich gerader Kreiszylinder. Die Gleichung der Schnittkurve zwischen dem

Zylinder und der Ebene durch  $A$ , die mit der Zylinderachse den Winkel  $\beta$  bildet, erhält man dann aus (4) für  $\alpha \rightarrow 0$ , d. h.  $\cos \alpha \rightarrow 1$ , und

$$\frac{s \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} = \frac{c \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} \rightarrow c \sin \beta; 1$$

$$y^2 = (\cos^2 \beta - 1)x^2 + 2c \sin \beta x.$$

Das ist eine Gleichung der Form (6), wobei  $\varepsilon \triangleq \cos^2 \beta \geq 0$  und  $p \triangleq c \sin \beta > 0$ , wenn  $\beta \neq 0$  (der Zylinder wird dann nicht geschnitten) ausgeschlossen wird. Die durch die obige Gleichung bestimmte Kurve ist demnach ein Kegelschnitt, d. h., sie könnte auch als ebener Schnitt eines geraden Kreiskegels entstanden sein. Wegen  $\beta \neq 0$  ist  $\varepsilon \triangleq \cos^2 \beta < 1$ .

Es handelt sich also um eine Ellipse. Ist  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , so ergibt sich

$$y^2 = -x^2 + 2cx, \quad x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = c^2, \quad (x - c)^2 + y^2 = c^2,$$

die Gleichung des Kreises  $k$ .

Der ebene Schnitt eines geraden Kreiszylinders ist also eine Ellipse bzw. ein Kreis.

### Aufgaben

1. Ein runder Bleistift wird mit dem Messer gespitzt. Zu welchen Kurven gehören die entstehenden Bögen?
2. Ein gerader Kreiszylinder ( $c = 10$ ) wird von einer Ebene geschnitten, die mit der Zylinderachse einen Winkel von  $30^\circ$  bildet.
  - a) Wie lautet die Gleichung der Schnittellipse?
  - b) Geben Sie einen Kegel und eine schneidende Ebene an, durch die eine zu dem Zylinderschnitt kongruente Ellipse entsteht!

### 3.3.2. Die Parabel

#### Die Scheitelgleichung der Parabel

Nach (7a) ist bei der Parabel  $\varepsilon = 1$ . Damit ergibt sich aus (6) die Scheitelgleichung der Parabel:

$$(10a) \quad y^2 = 2px.$$

Die Gleichung (10a) kann folgendermaßen gedeutet werden: Die Ordinate eines Parabelpunktes ist **geometrisches Mittel** aus der zugehörigen Abszisse  $x$  und dem für eine bestimmte Parabel konstanten Parameter  $2p$ . Dies ermöglicht in Verbindung mit dem Höhensatz eine punktweise Konstruktion der Parabel:

Der Schnittpunkt des über der Strecke  $\overline{OP_1}$  mit  $O(0; 0)$  und  $P_1(x_0 + 2p; 0)$  gezeichneten Thaleskreises (Abb. 3.101.) mit der Geraden  $x = x_0$  ist ein Parabelpunkt.

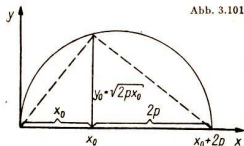


Abb. 3.101.

<sup>1</sup> Es ist günstig, daß für  $s \sin \alpha$  wieder  $c$  gesetzt werden kann; denn aus  $\alpha \rightarrow 0$  folgt  $s \rightarrow \infty$  und  $\sin \alpha \rightarrow 0$ , während  $c$  der halbe Zylinderdurchmesser wird.



Aus (10 a) ergibt sich als Gleichung für die obere Halbparabel

$$(10 b) y = \sqrt{2px},$$

für die untere

$$(10 c) y = -\sqrt{2px}.$$

(10 b) und (10 c) können zum Anfertigen je einer Wertetabelle dienen. Danach kann die Parabel gezeichnet werden. Werden (10 b) und (10 c) als analytische Ausdrücke von zwei Funktionen mit der unabhängigen Veränderlichen  $x$  betrachtet, so umfaßt der Definitionsbereich in beiden Fällen das Intervall  $0 \leq x < \infty$ , der Wertevorrat im ersten Falle  $0 \leq y < \infty$ , im zweiten  $-\infty < y \leq 0$ .

Besonders einfach werden die rechten Seiten von (10 b) und (10 c), wenn  $x = \frac{p}{2}$  eingesetzt wird. Dann ergeben sich  $y = p$  und  $y = -p$ , die Ordinaten der Parabelpunkte mit der Abszisse  $\frac{p}{2}$  (Abb. 3.102.). Demnach beträgt die Länge der Parabelsehne, die im Punkte  $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$  auf der Achse senkrecht steht,  $2p$ ; sie ist also gleich dem Parameter.

*Die Parabel als geometrischer Ort*

Der Abstand eines beliebigen Parabelpunktes  $P(x; \pm\sqrt{2px})$  von  $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$  beträgt nach der Entfernungformel (Abbildung 3.103.a)

$$\overline{FP} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (\pm\sqrt{2px} - 0)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px}$$

$$= \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$= \left|x + \frac{p}{2}\right|;$$

$$\overline{FP} = x + \frac{p}{2};$$

Abb. 3.102.

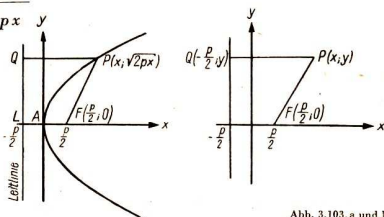
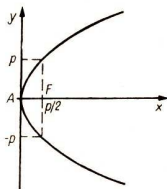


Abb. 3.103. a und b

das bedeutet aber, daß der Abstand  $\overline{FP}$  gleich dem Abstand  $\overline{QP}$  des Punktes  $P$  von der Geraden  $l$  ist, welche die Gleichung  $x = -\frac{p}{2}$  hat (Abb. 3.103.a). Diese Gerade heißt **Leitlinie** der Parabel; sie steht auf der Parabelachse senkrecht. Die Parabel hat also die Eigenschaft, daß die Abstände ihrer Punkte  $P$  jeweils von einem festen Punkt  $F$  der Achse und von einer festen Gerade  $l$ , die senkrecht zur Achse verläuft, gleich sind:

$$(11 a) \overline{FP} = \overline{QP}.$$

<sup>1</sup> Auf Grund der Definition der Wurzel als nicht negative Zahl gilt  $\sqrt{c^2} = |c|$ , falls  $c$  auch negativ sein kann. Daran ist zu denken, wenn — wie oben — ein Ausdruck radiziert werden soll, der allgemeine Zeichensymbole enthält.

Auch der Scheitel  $A(0; 0)$  der Parabel ist als Parabelpunkt von  $F$  und von  $l$  gleich weit entfernt; er halbiert somit das Lot von  $F$  auf  $l$ :

$$(11b) \quad \overline{LA} = \overline{AF} = \frac{p}{2}.$$

Nun könnte man vermuten, daß auch noch andere Punkte  $P(x; y)$  von dem festen Punkt  $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$  und von der festen Geraden mit der Gleichung  $x = -\frac{p}{2}$  gleiche Abstände haben, obwohl sie nicht auf der Parabel  $y^2 = 2px$  liegen. Doch das ist nicht möglich, denn wenn die Punkte  $P$  die Bedingung (11a) erfüllen, so folgt daraus, daß zwischen ihren Koordinaten die Beziehung (10a)  $y^2 = 2px$  besteht, daß sie also auf der Parabel liegen (Abb. 3.103.b). Aus (11a)

$$\overline{FP} = \overline{QP}$$

wird nach der Entfernungformel

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left[x - \left(-\frac{p}{2}\right)\right]^2 + (y - y)^2};$$

es folgt weiter

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

und schließlich (10a)

$$y^2 = 2px.$$

Damit ist die Ortseigenschaft der Parabel bewiesen:

► Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkte und einer festen Geraden der Ebene gleich weit entfernt sind.

Die Parabel kann auch auf diese Weise definiert werden. Hieraus ergibt sich eine Fadenkonstruktion der Parabel:

An einer parallel verschiebbaren Reißschiene (Abb. 3.104.) ist rechts ein nicht dehnbarer Faden befestigt, der außerdem bei  $F$  festgemacht ist und von der Bleistiftspitze  $P$  längs der Reißschiene straffgehalten wird. Beim Verschieben der Reißschiene beschreibt  $P$  eine Parabel.

Daß  $\overline{FP} = \overline{QP}$  ist, erkennt man, wenn man den Faden bei  $F$  löst und entlang der Reißschiene auslegt.

Wird von einem Parabelpunkt  $P_0(x_0; \pm\sqrt{2px_0})$  auf die Leitlinie  $l$  das Lot  $Q_0P_0$  gefällt (Abb. 3.105.), so ist wegen der Ortseigenschaft das Dreieck  $FP_0Q_0$  gleichschenkelig.

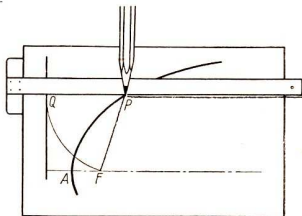


Abb. 3.104.

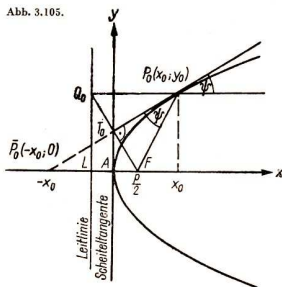


Abb. 3.105.

Daraus ergibt sich eine weitere Möglichkeit der Konstruktion der Parabel:

Eine Gerade durch  $F$  schneidet die Leitlinie in  $Q_0$ . Die Mittelsenkrechte von  $FQ_0$  und die in  $Q_0$  auf der Leitlinie errichtete Senkrechte schneiden einander im Parabelpunkt  $P_0$ .

Es sei  $T_0$  der Fußpunkt des Lotes von  $P_0$  auf  $FQ_0$  (Abb. 3.105.). Da das Dreieck  $FP_0Q_0$  gleichschenkelig ist, gilt  $Q_0T_0 = T_0F$ , und daraus folgt mit (11b)  $Q_0T_0 : T_0F = LA : AF (= 1 : 1)$ . Nach der Umkehrung des Strahlensatzes muß deshalb  $T_0A$  parallel  $Q_0L$  sein. Das bedeutet aber, daß  $T_0$  auf der zur Leitlinie parallelen Scheiteltangente liegt.

#### Die Parabeltangente

Auf der Mittelsenkrechten  $T_0P_0$  von  $FQ_0$  liegt außer  $P_0$  kein Parabelpunkt (Abb. 3.105.). Jeder weitere Punkt  $P_1$  bzw.  $P_2$  auf  $T_0P_0$  (Abb. 3.106.) hat ja jeweils gleiche Abstände von  $F$  und  $Q_0$ , aber nicht von  $F$  und der Leitlinie  $l$ , wie das die Ortseigenschaft von jedem Parabelpunkt fordert. Demnach ist  $T_0P_0$  Tangente. Daraus ergibt sich folgende Tangentenkonstruktion:

Errichtet man auf einer durch  $F$  gehenden Geraden in ihrem Schnittpunkt mit der Scheiteltangente die Senkrechte, so ist dies eine Tangente der Parabel. Die Schar dieser Tangenten umhüllt die Parabel (Abb. 3.107.). Der auf der Tangente liegende Parabelpunkt wird nach Abbildung 3.105. ermittelt.

Verlängert man  $P_0T_0$  bis zum Schnittpunkt  $\bar{P}_0$  mit der  $x$ -Achse (Abb. 3.105.), so haben  $P_0$  und  $\bar{P}_0$  Abszissen von gleichem Betrage. Daraus folgt eine Tangentenkonstruktion, bei der man den Punkt  $F$  nicht benötigt.

#### ■ Beispiel 4:

$P(3; 5)$  liege auf einer Parabel, deren Achse die  $x$ -Achse und deren Scheiteltangente die  $y$ -Achse ist. Die Gerade durch  $P_0(3; 5)$  und  $\bar{P}_0(-3; 0)$  ist Tangente, die die Parabel im Punkte  $P_0$  berührt.

Aus Abbildung 3.105. kann man den Anstieg der Tangente ablesen, welche die Parabel im Punkt  $P_0$  berührt. Im folgenden soll dieser Anstieg jedoch als Grenzwert des Anstiegs der Parabelsekte  $P_1P_0$  für  $P_1 \rightarrow P_0$  ermittelt werden. Solche Sachverhalte wurden beim Behandeln der Differentialrechnung ausführlich besprochen. Im Falle

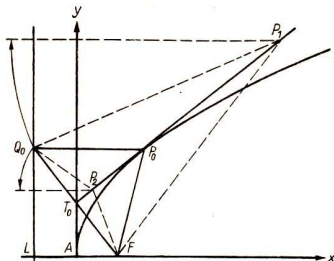


Abb. 3.106.

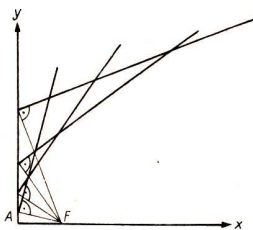


Abb. 3.107.

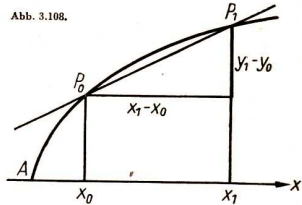
der oberen Halbparabel gilt nach (10 b)  $y = \sqrt{2px}$ , für die Parabelpunkte  $P_1(x_1; y_1)$  und  $P_0(x_0; y_0)$  also  $y_1 = \sqrt{2px_1}$  und  $y_0 = \sqrt{2px_0}$ . Der Anstieg der Sekante  $P_1P_0$  ist dann nach Abbildung 3.108. gleich

$$m_s = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

der Anstieg der Tangente, welche die Parabel im Punkt  $P_0$  berührt, gleich

$$\begin{aligned} m_t &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} m_s = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{2px_1} - \sqrt{2px_0}}{x_1 - x_0}. \end{aligned}$$

Abb. 3.108.



Versucht man, diesen Grenzwert dadurch zu ermitteln, daß man den Grenzübergang im Zähler und im Nenner getrennt durchführt, so erhält man den unsinnigen Ausdruck  $\frac{0}{0}$ . Deshalb formt man den Differenzenquotienten zunächst durch zweckmäßiges Erweitern so um, daß man beim Grenzübergang im Zähler und im Nenner nicht wieder Null erhält:

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{2px_1} - \sqrt{2px_0}}{x_1 - x_0} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{(\sqrt{2px_1} - \sqrt{2px_0}) \cdot (\sqrt{2px_1} + \sqrt{2px_0})}{(x_1 - x_0)(\sqrt{2px_1} + \sqrt{2px_0})} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{2p(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)(\sqrt{2px_1} + \sqrt{2px_0})}; \\ \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{2px_1} - \sqrt{2px_0}}{x_1 - x_0} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{2p}{\sqrt{2px_1} + \sqrt{2px_0}}. \end{aligned}$$

Jetzt erhält man ein sinnvolles Ergebnis, wenn man  $x_1$  im Zähler und im Nenner getrennt gegen  $x_0$  gehen läßt:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{2p}{\sqrt{2px_1} + \sqrt{2px_0}} = \frac{2p}{2\sqrt{2px_0}} = \frac{p}{\sqrt{2px_0}} = \frac{p}{y_0}.$$

Liegen  $P_1$  und  $P_0$  auf der unteren Halbparabel, ist also nach (10 c)  $y_1 = -\sqrt{2px_1}$ ,  $y_0 = -\sqrt{2px_0}$ , so ergibt sich als Tangentenanstieg entsprechend

$$m_t = \frac{p}{-\sqrt{2px_0}} = \frac{p}{y_0},$$

also ebenfalls  $m_t = \frac{p}{y_0}$  ( $y_0 \neq 0$ ).

Mit diesem Anstieg und den Koordinaten des Berührungspunktes  $P_0$  erhält man nach der Punktgleichung der Geraden die Gleichung der Tangente:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \frac{p}{y_0}(x - x_0), \\ yy_0 - y_0^2 &= px - px_0. \end{aligned}$$

Da die Koordinaten des Parabelpunktes  $P_0$  die Parabelgleichung (10 a) erfüllen, kann für  $y_0^2$  noch  $2px_0$  eingesetzt werden, wodurch die Tangentengleichung auf eine der Parabelgleichung ähnliche Form gebracht wird:

$$\begin{aligned} yy_0 - 2px_0 &= px - px_0, \\ yy_0 &= p(x + x_0). \end{aligned}$$

### Die Brennpunkteigenschaft der Parabel

Die Abbildung 3.105. zeigt noch die Gleichheit der Winkel  $\psi$  zwischen der Tangente  $T_0P_0$  und  $FP_0$  sowie zwischen der Tangente und der Achsenparallelen  $Q_0P_0$ . Jeder von  $F$  ausgehende Strahl der Ebene wird daher von der Parabel parallel zur Achse  $AF$  reflektiert, und jeder parallel zur Achse einfallende Strahl wird zum Punkt  $F$  reflektiert. Deshalb heißt  $F$  **Brennpunkt**, und der Strahl  $FP_0$  heißt **Brennstrahl**. Der soeben gefundene Sachverhalt sei kurz als Brennpunkteigenschaft bezeichnet. Die praktische Bedeutung (Scheinwerfer, Schallverstärker usw.) ist bekannt.

#### Aufgaben

1. Wie lautet die Scheitelgleichung der Parabel, wenn der Halbparameter  $p$   
a) 1; b) 1,5; c) 11; d)  $\frac{3}{2}$ ; e)  $\sqrt{2}$ ; f)  $\pi$   
beträgt? Nennen Sie die Koordinaten des Brennpunktes! Wie heißt die Gleichung der Leitlinie? Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, die die Parabel in den Punkten  $P_0(1; y_0)$  berühren?
2. Wie lautet die Gleichung der Parabel, deren Achse die  $x$ -Achse ist und deren Scheitel bei  $O(0; 0)$  liegt, wenn ihr Brennpunkt die folgenden Koordinaten hat?  
a)  $F(1; 0)$     b)  $F(1,5; 0)$     c)  $F(11; 0)$     d)  $F(\frac{3}{2}; 0)$     e)  $F(\sqrt{2}; 0)$     f)  $F(\pi; 0)$
3. Wie lauten die Gleichungen der Parabeln, deren Scheitel  $O(0; 0)$  ist und deren Leitlinien die folgenden Gleichungen haben?  
a)  $x = -3$     b)  $x = -14$     c)  $x = -\sqrt{2}$
4. Wie lauten die Gleichungen der Parabeln, deren Achse die  $x$ -Achse ist und deren Scheitel bei  $O(0; 0)$  liegen, wenn sie durch die folgenden Punkte gehen?  
a)  $P(1; 1)$     b)  $P(2; -2)$     c)  $P(1; -2)$     d)  $P(\frac{7}{9}; \frac{14}{3})$
5. Welche Koordinaten hat der Brennpunkt der Parabel, die beim Schnitt eines geraden Kreiskegels vom Öffnungswinkel  $2\alpha = 80^\circ$  entsteht, wenn der Scheitel  $A(0; 0)$  von der Kegelspitze den Abstand 2 hat? Welche Gleichung hat die Leitlinie?
6. Die Öffnung eines parabolischen Scheinwerfers hat einen Durchmesser von 22 cm, die Tiefe des Scheinwerfers beträgt 12 cm. Welche Gleichung hat die Kurve des Seitenrisses?
7. a) Der Querschnitt eines Scheinwerfers hat die Form einer Parabel, in deren Brennpunkt sich die annähernd punktförmige Lichtquelle befindet. Der Durchmesser der Scheinwerferöffnung ist  $d = 1$  m. Die Strahlen, die den Scheinwerfer verlassen, ohne vom Spiegel reflektiert zu werden, bilden einen Kegel, dessen Öffnungswinkel  $2\alpha = 90^\circ$  beträgt. Wie lautet die Scheitelgleichung der Parabel?  
b) Desgleichen:  $d = 40$  cm,  $2\alpha = 120^\circ$ .

### 3.3.3. Die Ellipse

#### Die Mittelpunktsleichung der Ellipse

In der Gleichung (6) sollen für  $\varepsilon$  und  $p$  an einer vorliegenden Ellipse unmittelbar sichtbare Stücke eingeführt werden. Nach (9a) und (9b) hat der zweite Schnittpunkt  $A'(x_2; 0)$  der Ellipse mit der  $x$ -Achse die Abszisse

$$x_2 = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2} > 0.$$

Wird der Abstand der beiden Schnittpunkte (das sind die Hauptscheitel)  $A, A'$  mit  $2a$  bezeichnet,

so ist  $\frac{2p}{1-\varepsilon^2} = 2a$ , also

$$(12) \quad \frac{p}{1-\varepsilon^2} = a.$$

Damit ergibt sich aus (6)

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)x^2 + 2a(1 - \varepsilon^2)x,$$

$$(1 - \varepsilon^2)(x^2 - 2ax) + y^2 = 0.$$

Durch quadratische Ergänzung entsteht in der zweiten Klammer ein vollständiges Quadrat:

$$(1 - \varepsilon^2)(x^2 - 2ax + a^2) + y^2 = (1 - \varepsilon^2)a^2,$$

$$(1 - \varepsilon^2)(x - a)^2 + y^2 = (1 - \varepsilon^2)a^2,$$

$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - \varepsilon^2)a^2} = 1.$$

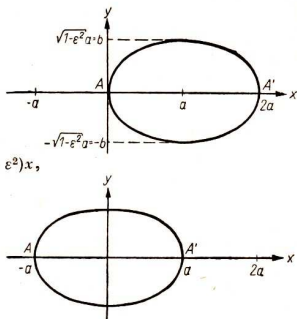


Abb. 3.109.

Wird die  $xy$ -Ebene so verschoben, daß der ursprünglich bei  $O(0; 0)$  gelegenen Punkt  $A$  an die Stelle  $(-a; 0)$  kommt (Abb. 3.109.), so sind  $x$  und  $y$  durch  $x - (-a)$  und  $y - 0$  zu ersetzen:

$$(13) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - \varepsilon^2)a^2} = 1.$$

Der Gleichung ist nun auch die Symmetrie der verschobenen Ellipse bezüglich der  $y$ -Achse zu entnehmen, denn  $x$  tritt nur in der zweiten Potenz auf. Dieses Ergebnis ist bemerkenswert. Denn da der Kegel bei  $A'$  „dicker“ ist als bei  $A$  (vgl. Abb. 3.97.a), sollte man zunächst erwarten, daß die Ellipse eine eiförmige Figur ist. Auch ALBRECHT DÜRER (1471–1528) war dieser Meinung. Aus Gleichung (13) folgt

$$|y| = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Für  $x = 0$  hat  $|y|$  offensichtlich ein Maximum der Größe  $a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ . Wird für diesen größten Wert  $b$  gesetzt:

$$(14) \quad b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad b^2 = (1 - \varepsilon^2)a^2 = a^2 - \varepsilon^2 a^2,$$

so ergibt sich aus (13)

$$(15a) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung heißt **Mittelpunktsgleichung** der Ellipse. Aus (14) folgt  $b < a$ , wenn  $0 < \varepsilon < 1$ . Im Falle des Kreises, der als Sonderfall der Ellipse aufgefaßt werden kann, ist nach (7b)  $\varepsilon = 0$ , so daß dann  $b = a$  gilt.

Aus (15a) erkennt man auch die zentrale Symmetrie der Ellipse: Erfüllen die Koordinaten des Punktes  $P(x; y)$  die Ellipsengleichung (15a), so ist das auch für die Koordinaten des Punktes  $P'(-x; -y)$  der Fall, der zu  $P$  bezüglich  $M(0; 0)$  zentralsymmetrisch liegt

(Abb. 3.110.); die Ellipse ist also zentralsymmetrisch bezüglich  $M(0; 0)$ , und  $M$  kann daher als Mittelpunkt der Ellipse bezeichnet werden. Die Strecke von  $M$  zu einem beliebigen Ellipsenpunkt  $P$  heißt **Halbmesser**, die Verbindungsstrecke zweier zueinander zentralsymmetrisch zu  $M$  gelegener Ellipsenpunkte  $P$  und  $P'$  (Abb. 3.110.) heißt **Durchmesser** der Ellipse. Der größte Ellipsendurchmesser  $\overline{AA'}$  heißt **Hauptachse**, der kleinste  $\overline{BB'}$  **Nebenachse**. Die Länge der Hauptachse beträgt  $2a$ , die der Nebenachse  $2b$ . Man nennt  $a$  und  $b$  **große** und **kleine Halbachsen** der Ellipse. Die Punkte  $A$  und  $A'$  heißen **Hauptscheitel**;  $B$  und  $B'$  **Nebenscheitel**. Löst man (15 a) nach  $y$  auf, so ergibt sich

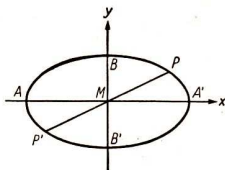


Abb. 3.110.

$$(15 b) y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

als Gleichung der oberen Halbellipse und

$$(15 c) y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

als Gleichung der unteren. Nach Anfertigen einer Wertetabelle kann die Ellipse gezeichnet werden. Betrachtet man (15 b) und (15 c) als analytische Ausdrücke von zwei Funktionen mit der unabhängigen Variablen  $x$ , so umfaßt der Definitionsbereich in beiden Fällen  $-a \leq x \leq a$ , der Wertevorrat im ersten Falle  $0 \leq y \leq b$ , im zweiten Falle  $-b \leq y \leq 0$ .

#### Beispiel 5:

Welche Gleichung hat die Ellipse, deren Mittelpunkt  $M(0; 0)$  ist und die durch die Punkte  $P_1(1; 2)$ ,  $P_2(3; -1)$  geht? Da  $P_1$  und  $P_2$  Ellipsenpunkte sind, müssen ihre Koordinaten die Ellipsengleichung erfüllen. Durch Einsetzen der Koordinaten in die Ellipsengleichung  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  oder  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  erhält man zwei Bestimmungsgleichungen für  $a$  und  $b$ . Setzt man die gefundenen Werte für  $a$  und  $b$  in die Ellipsengleichung ein, ergibt sich  $\frac{x^2}{11,7} + \frac{y^2}{4,37} = 1$ .

#### Ellipsenkonstruktionen

Eine Konstruktion der Ellipse erhält man, wenn man (15 b) zu einer Proportion umformt:

$$(16 a) \sqrt{a^2 - x^2} : a = y : b.$$

Sind  $a$  und  $b$ , die Halbachsen der Ellipse, gegeben, und soll zu einem beliebigen  $x$  des Definitionsbereichs das zugeordnete  $y$  gefunden werden, so ist zuerst  $\sqrt{a^2 - x^2}$  als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks zu konstruieren, in dem  $a$  die Hypotenuse und  $x$  die andere Kathete ist. Zweckmäßigerweise errichtet man dazu bei  $X(x; 0)$  die Senkrechte auf der  $x$ -Achse (Abb. 3.111.a) und zeichnet um

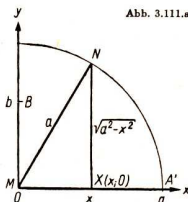


Abb. 3.111.a

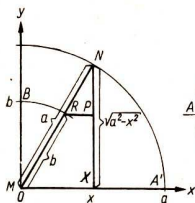


Abb. 3.111.b

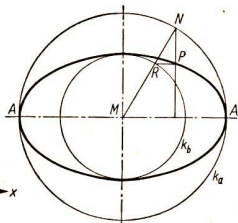


Abb. 3.111.c

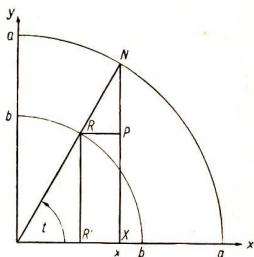


Abb. 3.112.

$M(0; 0)$  mit dem Radius  $a$  den Kreis, der diese Senkrechte in  $N(x; \sqrt{a^2 - x^2})$  schneidet. Zeichnet man nun noch mit dem Radius  $b$  um  $M$  den Kreis (Abb. 3.111.b), der  $MN$  in  $R$  schneidet, und durch  $R$  die Parallele zur  $x$ -Achse, die  $XN$  in  $P$  schneidet, so gilt

$$\sqrt{a^2 - x^2} : a = \overline{XP} : \overline{MR} = \overline{XP} : b.$$

Nach (16a) muß daher  $\overline{XP} = y$  und  $P$  also Punkt der Ellipse sein. Daraus ergibt sich die sogenannte „Konstruktion mit Hilfe der beiden Scheitelkreise“:

Um  $M$  zeichnet man die beiden Scheitelkreise  $k_a$  und  $k_b$  mit den Radien  $a$  und  $b$  (Abb. 3.111.c). Für jeden von  $M$  ausgehenden Strahl, der  $k_a$  in  $N$  und  $k_b$  in  $R$  schneidet, findet man einen Ellipsenpunkt  $P(x; y)$ , indem man die Parallele zur  $y$ -Achse durch  $N$  mit der Parallelen zur  $x$ -Achse durch  $R$  zum Schnitt bringt.

Aus dieser Konstruktion kann auch leicht eine Parameterdarstellung der Ellipse gewonnen werden. Aus Abbildung 3.112. liest man wegen  $\overline{R'R} = \overline{XP} = y$

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

ab. Variiert der Parameter  $t$  in einem Intervall der Größe  $2\pi$ , so wird die Ellipse beschrieben. Man kann  $t$  eliminieren, indem man die nach  $\frac{x}{a}$  und  $\frac{y}{b}$  umgestellten Gleichungen quadriert und addiert; es ergibt sich wieder Gleichung (15a).

Formt man (15b) oder (16a) um zur Proportion

$$(16b) \sqrt{a^2 - x^2} : y = a : b,$$

so erkennt man, daß jede Ordinate  $y$  eines Ellipsenpunktes aus der zur selben Abszisse  $x$  gehörigen Ordinate  $\sqrt{a^2 - x^2}$  eines Punktes des großen Scheitelkreises  $k_a$  durch Stauchen im Verhältnis  $a : b$  entsteht (Abb. 3.113.).

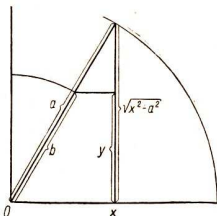


Abb. 3.113.



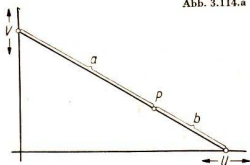


Abb. 3.114.a

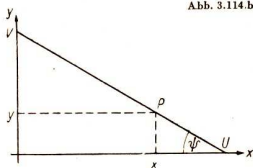


Abb. 3.114.b

Wird die Strecke  $\overline{UV} = \overline{VP} + \overline{PU} = a + b$  (Abb. 3.114.a) so bewegt, daß  $V$  und  $U$  stets auf zwei zueinander senkrechten Achsen gleiten, so beschreibt der Punkt  $P$  eine Ellipse mit den Halbachsen  $\overline{VP} = a$  und  $\overline{PU} = b$ .

● Beweisen Sie das, indem Sie gemäß Abbildung 3.114.b ein Koordinatensystem und den Parameter  $\psi$  einführen!

Dieser Sachverhalt ist die Grundlage der gern benutzten „Papierstreifenkonstruktion“ einer Ellipse:

Man markiert  $V$ ,  $P$  und  $U$  auf der Kante eines Papierstreifens, den man dann in der oben erklärten Weise auf zwei zueinander senkrechten Geraden gleiten läßt (Abb. 3.114.c). Der Bleistift markiert dabei die Lage des Ellipsenpunktes  $P$ .

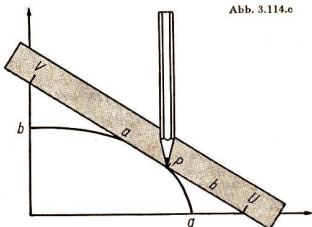


Abb. 3.114.c

Die vorgeschriebene Bewegung der Strecke  $\overline{UV}$  läßt sich aber auch mechanisch durch Führungsschienen erreichen. Man spricht dann von einem Ellipsenzirkel.

### Die Ellipsentangente

Im folgenden soll der Anstieg der Tangente, die die Ellipse im Punkte  $P_0$  berührt, als Grenzwert des Anstiegs der Ellipsensekante  $P_1P_0$  für  $P_1 \rightarrow P_0$  erklärt werden. Im Falle der oberen Halbellipse gilt nach (15b)  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ , für die Ellipsenpunkte  $P_1(x_1; y_1)$  und  $P_0(x_0; y_0)$  also  $y_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2}$  und  $y_0 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}$ . Der Anstieg  $m_s$  der Sekante ist dann nach Abbildung 3.103.

$$m_s = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

der Anstieg der Tangente, welche die Ellipse im Punkte  $P_0$  berührt, gleich

$$m_t = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} m_s = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2} - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_1 - x_0};$$

$$m_t = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{\frac{b}{a} (\sqrt{a^2 - x_1^2} - \sqrt{a^2 - x_0^2})}{x_1 - x_0}.$$

Aus dem gleichen Grund wie beim Bestimmen des Anstiegs der Parabeltangente wird zweckmäßig erweitert:

$$\begin{aligned} m_t &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{\frac{b}{a} (\sqrt{a^2 - x_1^2} - \sqrt{a^2 - x_0^2}) (\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_0^2})}{(x_1 - x_0) (\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_0^2})} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{-\frac{b}{a} (x_1 + x_0)}{\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_0^2}} \\ &= -\frac{\frac{b}{a} 2x_0}{2\sqrt{a^2 - x_0^2}}, \end{aligned}$$

$$m_t = -\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}}; \quad \text{wegen } y_0 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}$$

kann das durch Erweitern mit  $\frac{b}{a^2}$  auf

$$m_t = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

gebracht werden. Liegen  $P_1$  und  $P_0$  auf der unteren Halbellipse, ist also nach (15c)  $y_1 = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2}$ ,  $y_0 = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}$ , so ergibt sich als Tangentenanstieg entsprechend

$$\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0},$$

also ebenfalls

$$m_t = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (y_0 \neq 0).$$

Mit diesem Anstieg und den Koordinaten des Berührungspunktes  $P_0$  erhält man nach der Punkttrichtungsgleichung der Geraden die Gleichung der Ellipsentangente:

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0),$$

$$a^2 y y_0 - a^2 y_0^2 = -b^2 x x_0 + b^2 x_0^2,$$

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Da  $P_0(x_0; y_0)$  Ellipsenpunkt ist, gilt  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ , so daß sich als Gleichung der Ellipsentangente

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

ergibt.

### Die Exzentrizität der Ellipse

In (14) war  $b^2 = a^2 - \varepsilon^2 a^2$  gesetzt worden, somit ist

$$(17) \quad a^2 \varepsilon^2 = a^2 - b^2,$$

$$a \varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2},$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Hieraus ergibt sich eine geometrische Deutung von  $a \varepsilon$  mit Hilfe des pythagoreischen Satzes:

In einem rechtwinkligen Dreieck, in dem  $a$  Hypotenuse,  $b$  Kathete ist, muß die andere Kathete  $a \varepsilon$  darstellen. Zwei solche Dreiecke  $BMF_1$  und  $BMF_2$  erhält man zum Beispiel, wenn man um  $B$  den Kreis mit dem Radius  $a$  zeichnet, der die Hauptachse in  $F_1$  und  $F_2$  schneidet (Abb. 3.115.). Dann gilt  $F_1 M = M F_2 = \sqrt{a^2 - b^2} = a \varepsilon$ . Hierfür führt man die Bezeichnung  $e$  ein:

$$e = a \varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2} < a,$$

so daß  $F_1(-e; 0) \equiv F_1(-a\varepsilon; 0) \equiv F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$  und

$$F_2(e; 0) \equiv F_2(a\varepsilon; 0) \equiv F_2(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$$

gelten. Man nennt  $e$  **lineare Exzentrizität**;  $\varepsilon$  wurde als **numerische Exzentrizität** bezeichnet.

Die Exzentrizitäten  $e$  und auch  $\varepsilon$  sind ein Maß dafür, wie weit  $F_1$  und  $F_2$  vom Zentrum  $M$  entfernt liegen. Nur beim Kreis fallen sie wegen  $a = b$  (vgl. 3.31) mit dem Zentrum zusammen. Damit erklärt sich die Bezeichnung Exzentrizität;  $\varepsilon$  heißt numerische Exzentrizität, weil es das Zahlenverhältnis  $\cos \beta$ ;  $\cos \alpha$  darstellt;  $e$  heißt lineare Exzentrizität, weil es als Streckenlänge (z. B. von  $F_1 M$ ) gedeutet werden kann.

Bei der Parabel hatte sich ein Punkt  $F$  auf der Achse ergeben, der bemerkenswerte Eigenschaften hat:

1. Die Länge der Parabelsehne, die im Punkte  $F$  auf der Achse senkrecht steht, ist gleich dem Parameter  $2p$ ;
2. der Punkt  $F$  hat Bedeutung für die Ortseigenschaft der Parabel;
3. der Punkt  $F$  spielt eine Rolle bei der Brennpunkteigenschaft der Parabel; er heißt deshalb **Brennpunkt**.

Es drängt sich die Frage auf, ob  $F_1$  und  $F_2$  analoge Bedeutung für die Ellipse haben. Das soll im folgenden untersucht werden.

#### ■ Beispiel 6:

Um die Länge der zur Hauptachse senkrechten Ellipsensehne z. B. bei  $F_1(-e; 0) \equiv F_1(-a\varepsilon; 0)$  zu bestimmen, werden aus der Ellipsengleichung die Ordinaten der Ellipsenpunkte ermittelt, welche die Abszisse  $-a\varepsilon$  haben (Abb. 3.116.).

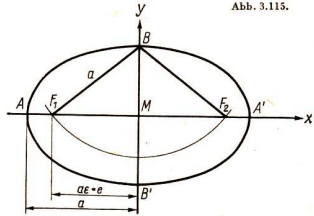
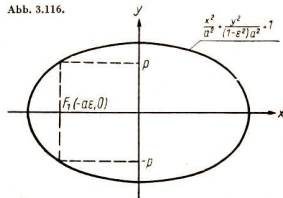


Abb. 3.116.



Am zweckmäßigsten ist hierfür (und auch im folgenden) die Ellipsengleichung in der Form (13). Die gesuchten Ordinaten ergeben sich als  $y_{11} = (1 - \varepsilon^2)a$  und  $y_{12} = -(1 - \varepsilon^2)a$ , woraus man mit (12)  $y_{11} = p$  und  $y_{12} = -p$  erhält. Die Länge der fraglichen Ellipsensehne beträgt also tatsächlich  $2p$ .

● Weisen Sie nach, daß diese Eigenschaft auch für  $F_2$  gilt!

### Die Ellipse als geometrischer Ort

Um die eventuelle Bedeutung der Punkte  $F_1$  und  $F_2$  für eine Ortseigenschaft der Ellipse zu finden, wird der Abstand eines beliebigen Ellipsenpunktes  $P(x; \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sqrt{a^2 - x^2})$  von  $F_1(-a\varepsilon; 0)$  bzw.  $F_2(a\varepsilon; 0)$  ermittelt (Abb. 3.117.):<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \overline{F_1 P} &= \sqrt{(x + a\varepsilon)^2 + (\pm \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sqrt{a^2 - x^2})^2} \\ &= \sqrt{a^2 + 2a\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2} \\ &= \sqrt{(a + \varepsilon x)^2} \\ \overline{F_1 P} &= |a + \varepsilon x|. \end{aligned}$$

Wegen  $0 < \varepsilon < 1$  ist für alle in Frage kommenden  $x$  ( $-a \leq x \leq a$ )

$$(18a) \quad \overline{F_1 P} = a + \varepsilon x.$$

Bei der Parabel ergab sich  $\overline{FP} = \frac{p}{2} + x$ ,

und das konnte nach Abbildung 3.103. als Abstand  $\overline{QP}$  des Parabelpunktes  $P$  von der Geraden mit der Gleichung  $x = -\frac{p}{2}$  gedeutet werden. Diese Gerade wurde Leitlinie genannt. Läßt sich aus (18a) für die Ellipse ein entsprechender Schluß ziehen? Das wäre der Fall, wenn  $x$  nicht den Faktor  $\varepsilon$  hätte. Man kann ihn aber beseitigen, indem man die Gleichung durch  $\varepsilon$  dividiert:

$$\frac{\overline{F_1 P}}{\varepsilon} = \frac{a}{\varepsilon} + x.$$

Es kann dann  $\frac{a}{\varepsilon} + x$  als Abstand  $\overline{QP}$  des Punktes  $P$  von der Geraden  $l_1$  mit der Gleichung  $x = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$  gedeutet werden (Abb. 3.118.), die Leitlinie der Ellipse heißt und auf der Hauptachse senkrecht steht.

Es gilt also  $\frac{\overline{F_1 P}}{\varepsilon} = \overline{QP}$  oder anders:

$$(18b) \quad \overline{F_1 P} : \overline{QP} = \varepsilon$$

$$\text{mit } \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

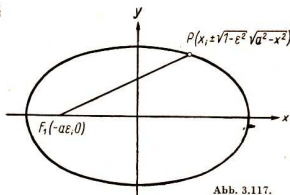
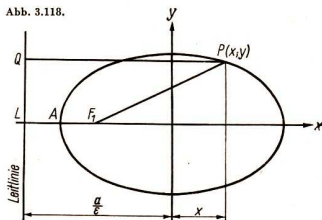


Abb. 3.117.

Abb. 3.118.



<sup>1</sup> Wie schon betont, wird die Ellipsengleichung in der Form (13) benutzt.

Die Ellipse hat also die Eigenschaft, daß die Abstände ihrer Punkte  $P$  von einem festen Punkt  $F_1$  der Hauptachse und einer festen Geraden  $l_1$  senkrecht zur Hauptachse das konstante Verhältnis  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) haben.

● Weisen Sie nach, daß Entsprechendes auch bezüglich  $F_2$  und einer Leitlinie  $l_2$  mit der Gleichung  $x = \frac{a}{\varepsilon}$  gilt!

Nun ist allerdings denkbar, daß auch noch andere Punkte  $P(x; y)$  von dem festen Punkte  $F_1(-e; 0) \equiv F_1(-a\varepsilon; 0)$  und der festen Geraden  $l_1$  mit der Gleichung  $x = -\frac{a}{\varepsilon}$  dieses Abstandsverhältnis  $\varepsilon$  haben, obwohl sie nicht auf der Ellipse (13) liegen. Doch das ist nicht möglich; denn wenn die Punkte  $P$  die Bedingung (18b) erfüllen, so folgt daraus, daß zwischen ihren Koordinaten die Beziehung (13) besteht, daß sie also auf der Ellipse liegen.

Damit ist eine Ortseigenschaft der Ellipse bewiesen:

► Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, deren Abstände von einem festen Punkt und einer festen Geraden der Ebene das konstante Verhältnis  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) haben.

Die Ellipse kann auch auf diese Weise definiert werden.

In gleicher Weise wie den Abstand  $\overline{F_1P}$  erhält man:

$$\begin{aligned}\overline{F_2P} &= \sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + (\pm \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sqrt{a^2 - x^2})^2} \\ &= \sqrt{(a - \varepsilon x)^2};\end{aligned}$$

$$\overline{F_2P} = |a - \varepsilon x|; \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Wegen  $0 < \varepsilon < 1$  ist für alle in Frage kommenden  $x$  ( $-a \leq x \leq a$ )

$$(18c) \quad \overline{F_2P} = a - \varepsilon x.$$

Nach (18a) und (18c) ist also

$$\overline{F_1P} = a + \varepsilon x,$$

$$\overline{F_2P} = a - \varepsilon x.$$

Man erkennt hieraus, daß die Summe der Abstände unabhängig von  $x$  ist und somit für jeden Ellipsenpunkt gleich ist. Es gilt:

$$(18d) \quad \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a.$$

Die Ellipse hat folglich die Eigenschaft, daß die Summe der Abstände ihrer Punkte von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  konstant ist.

Auch hier ist leicht nachzuweisen, daß keine anderen Punkte als die Ellipsenpunkte von  $F_1(-e; 0)$  und  $F_2(e; 0)$  die gleiche Abstandsumme  $2a$  haben.

Damit ist eine weitere Ortseigenschaft der Ellipse bewiesen:

► Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten der Ebene den gleichen Wert hat.

Die Ellipse kann auch auf diese Weise definiert werden.

Aus den vorstehenden Erörterungen folgen zwei weitere Ellipsenkonstruktionen:

1. Um die Punkte  $F_1$  und  $F_2$  wird je ein Kreis mit dem Radius  $r_1$  bzw.  $r_2$  gezeichnet (Abb. 3.119.). Diese Radien werden von einer Strecke der Länge  $2a$  so abgegriffen, daß  $r_1 + r_2 = 2a$  ist. Schneiden die Kreise einander, so sind die beiden Schnittpunkte zwei symmetrisch zur Geraden  $F_1 F_2$  gelegene Ellipsenpunkte.

2. Wird bei  $F_1$  und  $F_2$  ein (nicht dehnbarer) Faden der Länge  $2a > F_1 F_2$  befestigt und mit der Bleistiftspitze  $P$  gestrafft (Abb. 3.120.), so gilt  $\overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = 2a$ . Beim Bewegen der Bleistiftspitze längs des gestrafften Fadens beschreibt  $P$  deshalb eine Ellipse. Diese Konstruktion ist als „Gärtnerkonstruktion“ der Ellipse bekannt.

### Die Brennpunkteigenschaft der Ellipse

Es wurde bereits erkannt, daß die von  $F$  ausgehenden Strahlen an der Parabel parallel zur Achse und umgekehrt die parallel zur Achse einfallenden Strahlen zum Punkte  $F$  hin reflektiert werden. Entsprechend werden alle von  $F_1$  ausgehenden Strahlen an der Ellipse zum Punkte  $F_2$  reflektiert und umgekehrt;  $F_1$  und  $F_2$  heißen deshalb Brennpunkte. Dieser physikalischen Formulierung der Brennpunkteigenschaft entspricht (Abb. 3.121.a) die Gleichheit der Winkel

$(\overrightarrow{F_1 P}; t)$  und  $(\overrightarrow{P F_2}; t)$ , wobei  $t$  ein Vektor in Richtung der Ellipsentangente ist. Diese Gleichheit kann dadurch nachgewiesen werden, daß die Gleichheit der skalaren Produkte  $\epsilon_{F_1 P} \cdot t = |t| \cos(\overrightarrow{F_1 P}; t)$  und  $\epsilon_{P F_2} \cdot t = |t| \cos(\overrightarrow{P F_2}; t)$  gezeigt wird. Auf Grund der Symmetrie genügt die Untersuchung der oberen Halbellipse, für die das Anstiegsverhältnis im Ellipsenpunkt  $P(x; \sqrt{1 - \epsilon^2} \sqrt{a^2 - x^2})$  nach Seite 154 gleich  $m_t = -bx : a \sqrt{a^2 - x^2}$  ist.

Damit ergibt sich (Abb. 3.121.b)

$$t = a \sqrt{a^2 - x^2} i - bx j,$$

mit (14)

$$t = a \sqrt{a^2 - x^2} i - \sqrt{1 - \epsilon^2} a x j.$$

Weiter ist  $\overrightarrow{F_1 P} = (a\epsilon + x)i + \sqrt{1 - \epsilon^2} \sqrt{a^2 - x^2} j$  (Abb. 3.121.a), woraus sich mit (18 a)

$$\epsilon_{F_1 P} = \frac{\overrightarrow{F_1 P}}{F_1 P} = \frac{a\epsilon + x}{a + \epsilon x} i + \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \epsilon x} j$$

ergibt. Damit wird

$$\epsilon_{F_1 P} \cdot t = \epsilon a \sqrt{a^2 - x^2}.$$

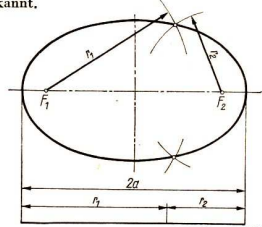


Abb. 3.119.

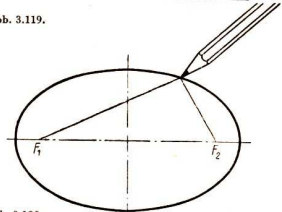


Abb. 3.120.

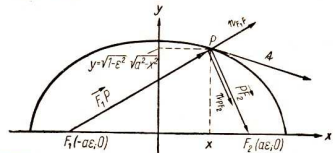


Abb. 3.121.a

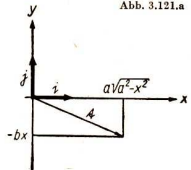


Abb. 3.121.b

Desgleichen ist  $\overrightarrow{PF_2} = (a\varepsilon - x)\mathbf{i} - \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sqrt{a^2 - x^2} \mathbf{j}$ ,

woraus sich mit (18 c)

$$c_{PF_2} = \frac{a\varepsilon - x}{a - \varepsilon x} \mathbf{i} - \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \varepsilon x} \mathbf{j}$$

ergibt. Damit wird

$$c_{PF_2} \cdot \mathbf{t} = \varepsilon a \sqrt{a^2 - x^2}.$$

● Führen Sie die fehlenden Zwischenrechnungen aus!

Die beiden skalaren Produkte sind also gleich; damit ist auch die Gleichheit der Winkel zwischen Brennstrahlen und Tangente bewiesen.

### Aufgaben

- a) Drücken Sie  $b^2$  in der Gleichung der Ellipse durch  $a$  und  $p$  aus!  
b) Benutzen Sie das Ergebnis von a, um bei einer gezeichnet vorliegenden Ellipse  $p$  zu konstruieren!
- a) Spezialisieren Sie die gemeinsame Scheitelgleichung (6) für die Ellipse! Die Gleichung soll nur  $a$  und  $p$  enthalten.  
b) Versuchen Sie, von der Mittelpunktsgleichung aus zu demselben Ergebnis zu gelangen!
- Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse, deren Mittelpunkt bei  $O(0; 0)$  liegt, deren Achse in die  $x$ -Achse fällt und die durch die Punkte a)  $P_1(3; 0)$ ,  $P_2(0; 1,5)$ ; b)  $P_1(1; 1)$ ,  $P_2(0; 1,1)$ ; c)  $P_1(-1; -1)$ ,  $P_2(5; 0,4)$  geht!  
Bestimmen Sie die Koordinaten der Brennpunkte, und ermitteln Sie die Gleichungen der Leitlinien! Bestimmen Sie die numerische Exzentrizität  $\varepsilon$  und den Halbparameter  $p$ !
- Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse, deren Brennpunkte  $F_1(-6; 0)$ ,  $F_2(6; 0)$  sind und die durch  $P(1; 2)$  geht! Ermitteln Sie die Gleichungen der Leitlinien, die numerische Exzentrizität  $\varepsilon$  und den Parameter  $2p$ !
- a) Zeigen Sie, daß  $4x^2 \left(c - \frac{1}{c}\right)^2 + 4y^2 \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 = \left(c^2 - \frac{1}{c^2}\right)^2$  ( $c > 0$ ) eine Ellipsengleichung ist!  
b) Wie groß sind Haupt- und Nebenachse? Beachten Sie, daß auch  $c < 1$  möglich ist!  
c) Wie groß ist die lineare Exzentrizität? Welche Koordinaten haben die Brennpunkte?
- Die Längenkreise des Geoids (idealisierte Gestalt der Erde) sind Ellipsen, deren große Halbachsen 6 378 388 m und deren kleine Halbachsen 6 356 909-m lang sind. Wie groß sind die numerische und die lineare Exzentrizität?
- Bestimmen Sie die Größe des Ellipsendurchmessers  $\overline{P'P}$  in Abhängigkeit von der Abszisse des Ellipsenpunktes  $P(x; y)$  (Abb. 3.110.)! Untersuchen Sie dann, ob sich für  $P \equiv A$  bzw.  $P \equiv A'$  tatsächlich der größte, für  $P \equiv B$  bzw.  $P \equiv B'$  tatsächlich der kleinste Durchmesser ergibt!
- Konstruieren Sie zu einer gezeichnet vorliegenden Ellipse in einem Ellipsenpunkt die Tangente!

9. Die Lemniskate ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, für die das Produkt der Abstände von zwei festen Punkten  $F_1(-e; 0)$  und  $F_2(e; 0)$  den gleichen Wert  $e^2$  hat.
- Wie lautet die Gleichung der Lemniskate?
  - Äußern Sie sich zur Symmetrie der Kurve!
  - Fertigen Sie eine Skizze an!
10. In Ihrer Umwelt begegnen Sie manchmal Figuren (z. B. bei Flanschen, Fensterbögen), die, oberflächlich betrachtet, wie Ellipsen aussehen, die ihnen aber nur ähneln, weil sie der einfacheren Herstellung wegen aus Kreisbögen zusammengesetzt sind (vgl. Abbildung 3.122.). Man nennt solche Figuren Korbbögen.
- Konstruieren Sie einige Korbbögen!
  - Konstruieren Sie hierzu jeweils eine Ellipse mit ebenso großen Achsen!
11. a) Wie konstruiert man die Punkte  $P$  einer vorgegebenen Ellipse, in denen die Brennstrahlen  $F_1P$  und  $F_2P$  einander rechtwinklig schneiden?
- b)  $F_1P$  und  $F_2P$  sollen unter einem beliebig vorgegebenen Winkel einander schneiden.

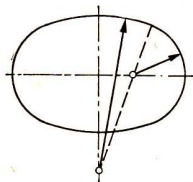


Abb. 3.122.a

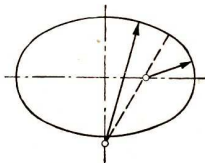


Abb. 3.122.b

### 3.3.4. Die Hyperbel

#### Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

In Gleichung (6) sollen  $\varepsilon$  und  $p$  durch an einer vorliegenden Hyperbel unmittelbar sichtbare Stücke ersetzt werden. Nach (9a) und (9b) hat der zweite Schnittpunkt  $A'(x_2; 0)$  der Hyperbel mit der  $x$ -Achse die Abszisse

$$x_2 = \frac{2p}{1-\varepsilon^2} < 0.$$

Wird der Abstand der beiden Schnittpunkte  $A'$  und  $A$  (das sind die Scheitel) mit  $2a$  bezeichnet, so ist  $\left| \frac{2p}{1-\varepsilon^2} \right| = -\frac{2p}{1-\varepsilon^2} = 2a$ ,  
also

$$(19) \quad \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} = a.$$

Somit folgt aus (6)

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)x^2 + 2a(\varepsilon^2 - 1)x,$$

$$(\varepsilon^2 - 1)(x^2 + 2ax) - y^2 = 0.$$

Durch quadratische Ergänzung entsteht in der zweiten Klammer ein vollständiges Quadrat:

$$(\varepsilon^2 - 1)(x^2 + 2ax + a^2) - y^2 = (\varepsilon^2 - 1)a^2,$$

$$(\varepsilon^2 - 1)(x + a)^2 - y^2 = (\varepsilon^2 - 1)a^2,$$

$$\frac{(x + a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{(\varepsilon^2 - 1)a^2} = 1.$$



Wird die  $xy$ -Ebene so verschoben, daß der ursprünglich in  $O(0; 0)$  gelegene Punkt  $A$  an die Stelle  $(a; 0)$  kommt (Abb. 3.123.), so ist  $x$  durch  $(x - a)$  zu ersetzen;

$$(20) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(\varepsilon^2 - 1)a^2} = 1.$$

Der Gleichung ist nun auch die Symmetrie der verschobenen Hyperbel bezüglich der  $y$ -Achse zu entnehmen, denn  $x$  tritt nur in der zweiten Potenz auf. Wird nun analog zur Ellipse, allerdings völlig formal (das heißt ohne geometrische Deutung) für  $(\varepsilon^2 - 1)a^2 > 0$

$b^2$  eingeführt:

$$(21) \quad b^2 = (\varepsilon^2 - 1)a^2 = \varepsilon^2 a^2 - a^2,$$

$$b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1},$$

so ergibt sich

$$(22a) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Das ist die **Mittelpunktsgleichung der Hyperbel**.

Aus (22 a) erkennt man die zentrale Symmetrie der Hyperbel:

Erfüllen die Koordinaten des Punktes  $P(x; y)$  die Hyperbelgleichung (22 a), so ist das auch für die Koordinaten des Punktes  $P'(-x; -y)$  der Fall. Die Hyperbel ist also zentralsymmetrisch bezüglich  $M(0; 0)$ , und  $M$  kann daher als Mittelpunkt der Hyperbel bezeichnet werden (Abb. 3.124.). Die Strecke  $MP$  heißt **Halbmesser**, die Verbindungsstrecke zweier zentralsymmetrisch gelegener Hyperbelpunkte  $P$  und  $P'$  (Abb. 3.124.) **Durchmesser der Hyperbel**. Der kleinste Hyperbeldurchmesser  $A'A$  ist die **Hauptachse** der Hyperbel;  $A'$  und  $A$  heißen **Scheitel**. Die Mittelsenkrechte zu  $A'A$  nennt man **Nebenachse**,  $a$  und  $b$  **Halbachsen**.

Löst man (22 a) nach  $y$  auf, so ergibt sich

$$(22b) \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

als Gleichung der oberen Halbhypsel und

$$(22c) \quad y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

als Gleichung der unteren. Nach Anfertigen einer Wertetabelle kann die Hyperbel gezeichnet werden. Betrachtet man (22 b) und (22 c) als analytische Ausdrücke von zwei Funktionen mit der unabhängigen Veränderlichen  $x$ , so umfaßt der Definitionsbereich in beiden Fällen  $-\infty < x \leq -a$ ,  $a \leq x < \infty$ , der Wertevorrat im ersten Falle  $0 \leq y < \infty$ , im zweiten Falle  $-\infty < y \leq 0$ .

Abb. 3.123.a

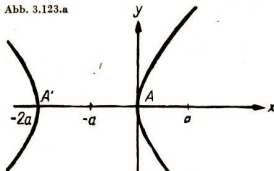


Abb. 3.123.b

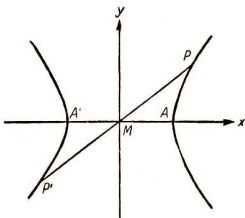
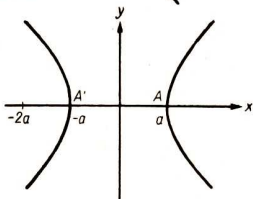


Abb. 3.124.

### Die Asymptoten der Hyperbel

Aus (22 b) läßt sich folgende vektorielle Darstellung der oberen Halbhyperbel gewinnen, wobei die  $x$ -Richtung wie gewohnt durch den Einheitsvektor  $i$ , die  $y$ -Richtung durch den Einheitsvektor  $j$  gekennzeichnet wird (Abb. 3.125.a):

$$r = x i + y j,$$

$$r = x i + \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} j.$$

Der zugehörige Einheitsvektor  $e_r$  gibt die Richtung vom Mittelpunkt  $M(0; 0)$  zum Hyperbelpunkt  $P(x; \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2})$  an (Abb. 3.125.b). Für  $x \rightarrow \infty$  strebt er offensichtlich einer Grenzlage  $e_s$  zu. Um diese Grenzlage zu ermitteln, formt man den Ausdruck für  $e_r$  so um, daß das über alle Grenzen wachsende  $x$  nur in Nennern vorkommt, denn dann gehen die betreffenden Brüche für  $x \rightarrow \infty$  gegen Null:

$$e_r = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}} i + \frac{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}} j,$$

$$e_r = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)}} i + \frac{b}{\sqrt{\frac{a^2}{1 - \frac{a^2}{x^2}} + b^2}} j.$$

Für  $x \rightarrow \infty$  ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e_r = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} i + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} j = \frac{a i + b j}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\tilde{s}}{|\tilde{s}|} = e_{\tilde{s}},$$

wobei  $\tilde{s} = a i + b j$  ist. Die Ortsvektoren  $e_s$  und  $\tilde{s}$  liegen in der Geraden mit der Gleichung

$$(22d) \quad y = \frac{b}{a} x \quad (\text{Abb. 3.125.c}).$$

Diese Gerade heißt **Asymptote der Hyperbel**. Damit erhält  $b$  seine geometrische Deutung:  $b$  ist der Abschnitt auf der Scheiteltangente zwischen  $x$ -Achse und Asymptote. Aus Symmetriegründen ist auch  $y = -\frac{b}{a} x$  Gleichung einer Asymptote, in welcher der Ortsvektor  $\tilde{s}' = a i - b j$  liegt (Abb. 3.125.d).

Die vorstehenden Erörterungen zeigen, daß die Hyperbelasymptote  $y = \frac{b}{a} x$  für  $x \rightarrow \infty$  Grenzlage der Geraden  $MP$  ist, die durch den Mittelpunkt  $M(0; 0)$  und den

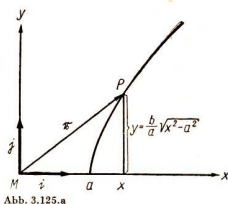


Abb. 3.125.a

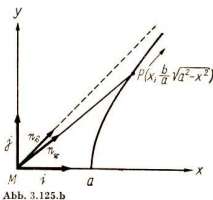


Abb. 3.125.b

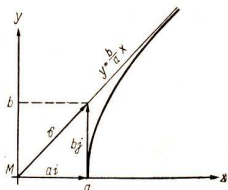


Abb. 3.125.c

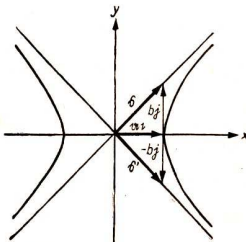


Abb. 3.125.d

Punkt  $P(x; \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2})$  der Hyperbel geht. Hieraus wird oft geschlossen, daß sich der Hyperbelpunkt  $P$  der Asymptote  $y = \frac{b}{a} x$  unbegrenzt nähert. Dieser Schluß ist problematisch. Würde sich der Punkt  $P$  nämlich nicht auf der Hyperbel, sondern beispielsweise auf der zu  $y = \frac{b}{a} x$  parallelen Geraden  $y = \frac{b}{a} x - 1$  unbegrenzt nach rechts oben entfernen (Abb. 3.126.), so würde die Gerade  $MP$  für  $x \rightarrow \infty$  offenbar ebenfalls die Gerade  $y = \frac{b}{a} x$  als Grenzlage haben, obwohl sich der Abstand zwischen  $P$  und dieser Geraden überhaupt nicht ändert, wie weit sich der Punkt  $P$  auch nach rechts entfernen möge. Deshalb

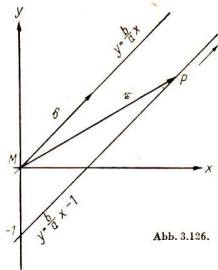


Abb. 3.126.

ist noch zu beweisen, daß sich der Hyperbelpunkt  $P$  der Asymptote  $y = \frac{b}{a} x$  beliebig nähert, wenn er sich genügend weit nach rechts oben entfernt. Dazu werde (Abb. 3.127.)  $r = \lambda \bar{s} + \mu \bar{s}'$  für unbegrenzt wachsendes  $\lambda$  betrachtet und festgestellt, ob dabei  $\mu$  gegen Null geht (denn das würde bedeuten, daß sich der Hyperbelpunkt  $P$  der Asymptote unbegrenzt nähert):

$$\lambda \bar{s} + \mu \bar{s}' = r,$$

$$\lambda(ai + bj) + \mu(ai - bj) = xi + \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}i.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$\left| \begin{array}{l} a\lambda + a\mu = x \\ b\lambda - b\mu = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \end{array} \right|,$$

woraus man durch Eliminieren von  $x$

$$\mu = \frac{1}{4\lambda}$$

erhält. Für  $\lambda \rightarrow \infty$  geht  $\mu \rightarrow 0$ . Die Hyperbel schmiegt sich demnach an ihre Asymptote an.

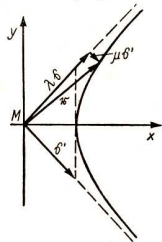


Abb. 3.127.

### Die Hyperbeltangente

● Ermitteln Sie den Anstieg der Tangente, welche die Hyperbel im Punkt  $P_0(x_0; y_0)$  berührt, als Grenzwert des Anstiegs der Hyperbelsekante  $P_1P_0$  für  $P_1 \rightarrow P_0$ ! Orientieren Sie sich dabei am analogen Vorgehen bei der Ellipse!

Man erhält

$$m_t = \frac{bx_0}{a\sqrt{x_0^2 - a^2}} = \frac{b^2x_0}{a^2y_0} \quad \text{für } y_0 > 0 \quad \text{bzw.}$$

$$m_t = -\frac{bx_0}{a\sqrt{x_0^2 - a^2}} = \frac{b^2x_0}{a^2y_0} \quad \text{für } y_0 < 0, \quad \text{in beiden Fällen also}$$

$$m_t = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Mit diesem Anstieg und den Koordinaten des Berührungspunktes  $P_0$  ergibt sich nach der Punktgleichung der Geraden die Gleichung der Tangente, welche die Hyperbel im Punkte  $P_0(x_0; y_0)$  berührt:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0), \\ a^2 y y_0 - a^2 y_0^2 &= b^2 x x_0 - b^2 x_0^2, \\ \frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} &= \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}, \\ \frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$

Nun sei noch untersucht, was man als Grenzfall dieser Gleichung erhält, wenn sich der Berührungspunkt  $P_0(x_0; y_0)$  auf dem rechten oberen Hyperbelzweig unbegrenzt vom Mittelpunkt entfernt, d. h. wenn  $x_0 \rightarrow \infty$  und  $y_0 \rightarrow \infty$  gehen. Zu diesem Zweck wird die Tangentengleichung auf die kartesische Form der Geradengleichung gebracht und, nachdem  $y_0$  durch  $\frac{b}{a} \sqrt{x_0^2 - a^2}$  ersetzt ist, so umgeformt, daß das über alle Grenzen wachsende  $x_0$  nur noch in Nennern vorkommt; denn dann gehen die betreffenden Brüche für  $x_0 \rightarrow \infty$  gegen Null:

$$\begin{aligned} y &= \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x - \frac{b^2}{y_0}, \\ y &= \frac{b^2 x_0}{a^2 \frac{b}{a} \sqrt{x_0^2 - a^2}} x - \frac{b^2}{\frac{b}{a} \sqrt{x_0^2 - a^2}}, \\ y &= \frac{b}{a \sqrt{1 - \frac{a^2}{x_0^2}}} x - \frac{a b}{\sqrt{x_0^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Für  $x_0 \rightarrow \infty$  wird daraus

$$y = \frac{b}{a} x,$$

die Asymptotengleichung (22 d). Auf Grund dieses Sachverhalts kann man die Asymptote als Gerade auffassen, welche die Hyperbel „im Unendlichen“ berührt.

*Die Exzentrizität der Hyperbel*

In (21) war  $b^2 = \varepsilon^2 a^2 - a^2$  gesetzt worden. Somit ist

$$(23) \quad a^2 \varepsilon^2 = a^2 + b^2, \quad a \varepsilon = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Analog zur Ellipse werden zwei Punkte  $F_1$  und  $F_2$  auf der Hauptachse bestimmt, deren Abstände vom Mittelpunkt der Hyperbel

$$e = a \varepsilon = \sqrt{a^2 + b^2}$$

betragen. Man nennt  $e$  wieder lineare Exzentrizität; sie ist hier größer als  $a$ . Die lineare Exzentrizität  $e = a \varepsilon = \sqrt{a^2 + b^2}$  wird durch die vom Mittelpunkt  $M$  und von der Scheiteltangente begrenzte Strecke auf der Asymptote dargestellt (Abb. 3.128.). Damit kann

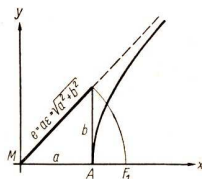


Abb. 3.128.

$F_1(e; 0) \equiv F_1(a\varepsilon; 0) \equiv F_1(\sqrt{a^2 + b^2}; 0)$  nach Abbildung 3.128. eingezeichnet werden. Entsprechend ergibt sich

$$F_2(-e; 0) \equiv F_2(-a\varepsilon; 0) \equiv F_2(-\sqrt{a^2 + b^2}; 0).$$

Es drängt sich die Frage auf, ob  $F_1$  und  $F_2$  für die Hyperbel analoge Bedeutung haben wie die Brennpunkte für die Parabel und Ellipse. Das heißt, ob die Länge der Hyperbelsehne, die im Punkt  $F_1$  bzw.  $F_2$  auf der Hauptachse senkrecht steht, gleich dem Parameter  $2p$  ist und ob die Hyperbel eine Orts- und eine Brennpunkteigenschaft hat, bei der  $F_1$  und  $F_2$  eine Rolle spielen.

Um die Länge der zur Hauptachse senkrechten Hyperbelsehne zum Beispiel bei  $F_1(e; 0) \equiv F_1(a\varepsilon; 0)$  zu bestimmen, werden aus der Hyperbelgleichung die Ordinaten der Hyperbelpunkte ermittelt, welche die Abszisse  $a\varepsilon$  haben. Am zweckmäßigsten ist hierfür (und auch im folgenden) die Hyperbelgleichung in der Form (20). Die gesuchten Ordinaten ergeben sich als  $y_{11} = (\varepsilon^2 - 1)a$  und  $y_{12} = -(\varepsilon^2 - 1)a$ , woraus man mit (19)  $y_{11} = p$  und  $y_{12} = -p$  erhält. Die Länge der fraglichen Hyperbelsehne beträgt also tatsächlich  $2p$ . Das gleiche ist auch bei  $F_2$  der Fall.

● Weisen Sie das nach!

### Die Hyperbel als geometrischer Ort

Um die eventuelle Bedeutung von  $F_1$  und  $F_2$  für eine Ortseigenschaft der Hyperbel zu finden, wird der Abstand eines beliebigen Hyperbelpunktes  $P(x; \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sqrt{x^2 - a^2})$  (die Hyperbelgleichung wird hier wieder in der Form (20) benutzt) von  $F_1(a\varepsilon; 0)$  bzw.  $F_2(-a\varepsilon; 0)$  ermittelt. Man erhält:

$$\overline{F_1 P} = \sqrt{(a - \varepsilon x)^2} = |a - \varepsilon x| \quad (\varepsilon > 1),$$

für  $x \geq a$                       für  $x \leq -a$

$$(24a) \quad \overline{F_1 P} = -a + \varepsilon x; \quad \overline{F_2 P} = a - \varepsilon x.$$

Entsprechend dem Vorgehen bei der Ellipse (S. 156) wird durch  $\varepsilon$  dividiert:

$$\frac{\overline{F_1 P}}{\varepsilon} = -\frac{a}{\varepsilon} + x; \quad \frac{\overline{F_2 P}}{\varepsilon} = \frac{a}{\varepsilon} - x.$$

Im Falle  $x \geq a$  kann  $-\frac{a}{\varepsilon} + x$  als Abstand  $\overline{QP}$  des Punktes  $P$  von der Geraden  $l_1$  mit der Gleichung  $x = \frac{a}{\varepsilon}$  gedeutet werden (Abb. 3.129.a). Diese Gerade heißt Leitlinie und

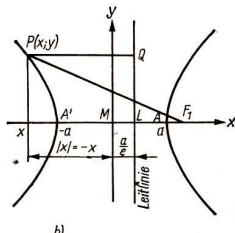
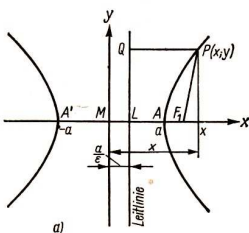


Abb. 3.129.

steht auf der Hauptachse senkrecht. Im Falle  $x \leq -a$  kann  $\frac{a}{\varepsilon} - x$  ebenfalls als Abstand  $\overline{QP}$  des Punktes  $P$  von dieser Leitlinie gedeutet werden (Abb. 3.129.b). In beiden Fällen gilt demnach  $\frac{F_1P}{\varepsilon} = \overline{QP}$  oder anders geschrieben:

$$(24b) \overline{F_1P} : \overline{QP} = \varepsilon$$

mit  $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ . Die Hyperbel hat also die Eigenschaft, daß die Abstände ihrer Punkte von einem festen Punkt  $F_1$  der Hauptachse und einer festen Geraden  $l_1$  senkrecht zur Hauptachse das konstante Verhältnis  $\varepsilon > 1$  haben. Entsprechendes gilt aus Symmetriegründen bezüglich  $F_2$  und einer Leitlinie  $l_2$ .

● *Wie lautet ihre Gleichung?*

● *Weisen Sie nach, daß nur die Hyperbelpunkte die Bedingung (24b) erfüllen!*

Damit ist dann eine Ortseigenschaft der Hyperbel bewiesen:

▶ **Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, deren Abstände von einem festen Punkt und einer festen Geraden der Ebene das konstante Verhältnis  $\varepsilon > 1$  haben.**

Die Hyperbel kann auch auf diese Weise definiert werden.

In gleicher Weise wie den Abstand  $\overline{F_1P}$  erhält man

$$\begin{aligned} \overline{F_2P} &= \sqrt{(a + \varepsilon x)^2} \\ &= |a + \varepsilon x| \quad (\varepsilon > 1), \end{aligned}$$

$$\text{für } x \geq a$$

$$\text{für } x \leq -a$$

$$(24c) \overline{F_2P} = a + \varepsilon x$$

$$\overline{F_2P} = -a - \varepsilon x.$$

Nach (24a) und (24c) ist also

$$\overline{F_1P} = -a + \varepsilon x$$

$$\overline{F_1P} = a - \varepsilon x$$

$$\overline{F_2P} = a + \varepsilon x$$

$$\overline{F_2P} = -a - \varepsilon x.$$

Man erkennt hieraus, daß die Differenz der Abstände von  $x$  unabhängig ist:

$$\overline{F_2P} - \overline{F_1P} = 2a$$

$$\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = 2a,$$

was zu

$$(25) \quad |\overline{F_2P} - \overline{F_1P}| = 2a$$

zusammengefaßt werden kann. Die Hyperbel hat also die Eigenschaft, daß die Differenz der Abstände ihrer Punkte von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  einen konstanten Betrag hat.

● *Zeigen Sie, daß nur die Hyperbelpunkte die Bedingung (25) erfüllen!*

Damit ist eine weitere Ortseigenschaft der Hyperbel bewiesen:

▶ **Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, für die die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten der Ebene den gleichen Betrag hat.**

Die Hyperbel kann auch auf diese Weise definiert werden.

Aus den vorstehenden Erörterungen folgen zwei Hyperbelkonstruktionen:

- Um die Punkte  $F_1$  und  $F_2$  wird je ein Kreis mit dem Radius  $r_1$  bzw.  $r_2$  gezeichnet (Abb. 3.130.). Diese Radien werden von einer Strecke der Länge  $2a$  so abgegriffen, daß  $|r_2 - r_1| = 2a$  ist. Schneiden die Kreise einander, so sind die beiden Schnittpunkte zwei symmetrisch zur Geraden  $F_1F_2$  gelegene Hyperbelpunkte.

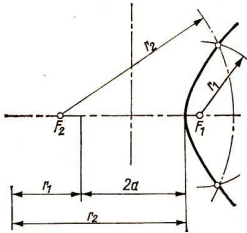


Abb. 3.130.

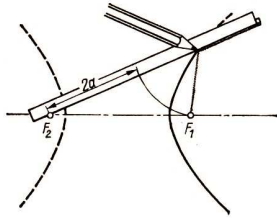


Abb. 3.131.

- Wird bei  $F_2$  ein Lineal drehbar angebracht und an diesem rechts ein Faden geeigneter Länge befestigt, der außerdem bei  $F_1$  befestigt ist und von der Bleistiftspitze  $P$  längs des Lineals gestrafft wird, so gilt  $F_2P - F_1P = 2a$  (Abb. 3.131.). Werden die Rollen von  $F_1$  und  $F_2$  vertauscht, so gilt  $F_1P - F_2P = 2a$ , in beiden Fällen also  $|F_2P - F_1P| = 2a$ . Bei Drehen des Lineals unter entsprechendem Bewegen der Bleistiftspitze  $P$  beschreibt diese daher eine Hyperbel.

### Die Brennpunkteigenschaft der Hyperbel

Auch die Hyperbel hat eine Brennpunkteigenschaft:

Jeder von einem der Punkte  $F_1$  oder  $F_2$  ausgehende Strahl der Ebene wird an der Hyperbel so reflektiert, daß die rückwärtige Verlängerung durch den anderen geht;  $F_1$  und  $F_2$  heißen deshalb Brennpunkte. Dieser physikalischen Formulierung der Brennpunkteigenschaft entspricht (Abb. 3.132.a) die Gleichheit der Winkel  $(\vec{F}_1P; t)$  und  $(\vec{F}_2P; t)$ , wobei  $t$  ein Vektor in Richtung der Hyperbeltangente ist. Diese Gleichheit kann dadurch nachgewiesen werden, daß die Gleichheit der skalaren Produkte

$$e_{F_1P} \cdot t = |t| \cos(\vec{F}_1P; t) \text{ und}$$

$e_{F_2P} \cdot t = |t| \cos(\vec{F}_2P; t)$  gezeigt wird. Auf Grund der Symmetrie genügt die Untersuchung der oberen Halbhypel für  $x \geq a$ , für die die Steigung im Hyperbelpunkt

$$P(x; \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sqrt{x^2 - a^2}) \text{ gleich}$$

$$m_t = bx; a \sqrt{x^2 - a^2} \text{ ist.}$$

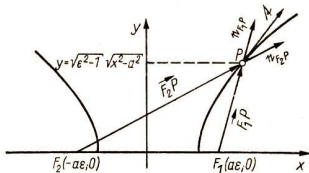


Abb. 3.132.a

Damit ergibt sich (Abb. 3.132.b)

$$\vec{t} = a \sqrt{x^2 - a^2} \vec{i} + bx \vec{j},$$

mit (21)

$$\vec{t} = a \sqrt{x^2 - a^2} \vec{i} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} ax \vec{j}.$$

Weiter ist  $\vec{F}_1 P = (x - a\varepsilon) \vec{i} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sqrt{x^2 - a^2} \vec{j}$   
(Abb. 3.132.a), woraus sich mit (24a)

$$c_{F_1 P} = \frac{\vec{F}_1 P \cdot \vec{t}}{|\vec{F}_1 P| |\vec{t}|} = \frac{x - a\varepsilon}{-a + \varepsilon x} \vec{i} + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sqrt{x^2 - a^2}}{-a + \varepsilon x} \vec{j}$$

ergibt; damit wird

$$c_{F_1 P} \cdot \vec{t} = \varepsilon a \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Desgleichen ist  $\vec{F}_2 P = (x + a\varepsilon) \vec{i} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sqrt{x^2 - a^2} \vec{j}$ , woraus sich mit (24c)

$$c_{F_2 P} = \frac{x + a\varepsilon}{a + \varepsilon x} \vec{i} + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sqrt{x^2 - a^2}}{a + \varepsilon x} \vec{j}$$

ergibt; damit wird

$$c_{F_2 P} \cdot \vec{t} = \varepsilon a \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Die beiden skalaren Produkte sind also gleich. Damit ist auch die Gleichheit der Winkel zwischen Brennstrahlen und Tangente gesichert.

### Aufgaben

- a) Drücken Sie in  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$   $b^2$  durch  $a$  und  $p$  aus!

b) Benutzen Sie das Ergebnis von a), um bei einer gezeichnet vorliegenden Hyperbel (einschließlich Asymptoten)  $p$  zu konstruieren!
- a) Spezialisieren Sie die gemeinsame Scheitelgleichung (6) für die Hyperbel! Die Gleichung soll nur  $a$  und  $p$  enthalten.

b) Versuchen Sie, von der Mittelpunktsleichung aus zu demselben Ergebnis zu gelangen!
- Bestimmen Sie die Gleichung der Hyperbel, deren Mittelpunkt bei  $O(0; 0)$  liegt, deren Hauptachse die  $x$ -Achse ist und die durch die Punkte a)  $P_1(2; 0)$ ,  $P_2(3; 1)$ ; b)  $P_1(-4; 2)$ ,  $P_2(3; -1)$  geht!

Ermitteln Sie die Koordinaten der Brennpunkte, die Gleichungen der Leitlinien, die numerische Exzentrizität  $\varepsilon$ , den Parameter  $2p$  und die Gleichungen der Asymptoten!
- Bestimmen Sie die Gleichung der Hyperbel, deren Brennpunkte  $F_1(6; 0)$ ,  $F_2(-6; 0)$  sind und die durch  $P(2; 1)$  geht! Ermitteln Sie die Gleichungen der Leitlinien, die numerische Exzentrizität  $\varepsilon$ , den Parameter  $2p$  und die Gleichungen der Asymptoten!
- a) Zeigen Sie, daß  $4x^2 \sin^2 c - 4y^2 \cos^2 c - \sin^2 2c = 0$  eine Hyperbelgleichung ist!

b) Wie lautet die Gleichung der Asymptoten dieser Hyperbel?

c) Wie groß ist die lineare Exzentrizität? Welche Koordinaten haben die Brennpunkte?

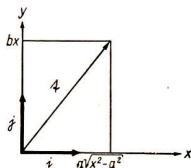


Abb. 3.132.b



6. Die Gleichung  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ist für  $a = b$  die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel.
- Welchen Winkel schließen die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel ein?
  - Wie heißen die Gleichungen der Asymptoten?
  - Welchen Zahlenwert haben die lineare und die numerische Exzentrizität?
  - Bestimmen Sie die Koordinaten der Brennpunkte!
  - Wie lauten die Gleichungen der Leitlinien?
7. a) Wo schneidet die Ellipse  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  die Hyperbel  $b^2x^2 - e^2y^2 = e^2b^2$ , wenn  $e$  die lineare Exzentrizität der Ellipse ist? Wie groß ist dann die lineare Exzentrizität der Hyperbel?
- b) Desgleichen  $b^2x^2 + e^2y^2 = e^2b^2$  und  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ , wenn  $e$  die lineare Exzentrizität der Hyperbel ist? Wie groß ist die lineare Exzentrizität der Ellipse?
8. Bestimmen Sie die Größe des Hyperbeldurchmessers  $P'P$  in Abhängigkeit von der Abszisse des Hyperbelpunkts  $P(x; y)$  (Abb. 3.124.). Untersuchen Sie dann, ob sich für  $P \equiv A$  bzw.  $P \equiv A'$  tatsächlich der kleinste Durchmesser ergibt! Gibt es einen größten Durchmesser?
9. Konstruieren Sie zu einer gezeichnet vorliegenden Hyperbel (einschließlich Asymptoten) in einem Hyperbelpunkt die Tangente!
10. a) Wie konstruiert man die Punkte  $P$  einer vorgegebenen Hyperbel, in denen die Brennstrahlen  $F_1P$  und  $F_2P$  einander rechtwinklig schneiden?
- b)  $F_1P$  und  $F_2P$  sollen einander unter einem beliebigen vorgegebenen Winkel schneiden.

### 3.3.5. Die gemeinsame Ortsdefinition der Kegelschnitte

In den vorangegangenen Abschnitten war herausgestellt worden, daß Parabel, Ellipse und Hyperbel als geometrische Örter definiert werden können. Die Ortsdefinitionen mit Hilfe der Leitlinie (bei Ellipse und Hyperbel ist ja jeweils noch eine andere Ortsdefinition mit Hilfe der beiden Brennpunkte möglich) lauten:

- ▶ Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt und einer festen Geraden der Ebene gleich weit entfernt sind.
- ▶ Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, deren Abstände von einem festen Punkt und einer festen Geraden der Ebene das konstante Verhältnis  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) haben.
- ▶ Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, deren Abstände von einem festen Punkt und einer festen Geraden der Ebene das konstante Verhältnis  $\varepsilon > 1$  haben.

Die erste dieser Definitionen läßt sich den beiden letzten angleichen; denn durch die folgende Formulierung wird nichts anderes ausgesagt:

- ▶ Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, deren Abstände von einem festen Punkt und einer festen Geraden der Ebene das konstante Verhältnis  $\varepsilon = 1$  haben.

Diese Definitionen können zur **gemeinsamen Ortsdefinition** der Kegelschnitte zusammengefaßt werden:

► Ein nicht kreisförmiger Kegelschnitt ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, deren Abstände von einem festen Punkt und einer festen Geraden der Ebene das konstante Verhältnis  $\varepsilon$  haben;

für  $0 < \varepsilon < 1$  ist der Kegelschnitt eine Ellipse, für  $\varepsilon = 1$  eine Parabel und für  $\varepsilon > 1$  eine Hyperbel.

Der feste Punkt heißt Brennpunkt. Er liegt auf der Hauptachse des Kegelschnitts. Die feste Gerade heißt Leitlinie. Sie steht auf der Hauptachse des Kegelschnitts senkrecht.

### 3.3.6. Allgemeinerer Lage der Kegelschnitte

Am gebräuchlichsten sind die Scheitelgleichung  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) der Parabel und die Mittelpunktsgleichungen  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  der Ellipse bzw.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  der Hyperbel.

Durch Spiegelung an der  $y$ -Achse (dann muß in der Gleichung  $x$  durch  $-x$  ersetzt werden) ergibt sich nur bei der Parabel etwas Neues, und zwar die nach links offene Parabel mit der Gleichung  $y^2 = -2px$  ( $p > 0$ ). Beide Fälle können durch die Gleichung  $y^2 = \pm 2px$  ( $p > 0$ ) zusammengefaßt werden.

● Zeichnen Sie nach Anfertigen einer Wertetafel die Parabel  $y^2 = -3x$  (nur zu negativen Abszissen lassen sich Ordinaten bestimmen)! Fassen Sie die obere und untere Halbparabel jeweils als grafische Darstellung einer Funktion auf! Wie lauten die analytischen Ausdrücke in der expliziten Form? Bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertevorrat! Vergleichen Sie diese Parabel mit der Parabel  $y^2 = 3x$ !

Die Kurven mit den Gleichungen

$$y^2 = \pm 2px, \quad (p > 0),$$

$$(26 \text{ a}) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b),$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

haben die  $x$ -Achse zur Hauptachse, auf ihr liegen also die Brennpunkte. Die Kurven sollen jetzt parallel so verschoben werden, daß der ursprünglich bei  $O(0;0)$  gelegene Parabelsattel bzw. Mittelpunkt der Ellipse und Hyperbel an die Stelle  $M(x_m; y_m)$  gelangt. Dann müssen in den Gleichungen  $x$  durch  $(x - x_m)$  und  $y$  durch  $(y - y_m)$  ersetzt werden, so daß sich

$$(y - y_m)^2 = \pm 2p(x - x_m) \quad (p > 0),$$

$$(26 \text{ b}) \quad \frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1 \quad (a > b),$$

$$\frac{(x - x_m)^2}{a^2} - \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$$

ergeben.

Durch Spiegelung der Kurven an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten (dann müssen in den Gleichungen  $x$  und  $y$  vertauscht werden) ergeben sich aus den Gleichungen (26 a)

$$x^2 = \pm 2py \quad (p > 0),$$

$$(26 \text{ c}) \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (a > b),$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Dies sind wieder Gleichungen der Parabel, Ellipse bzw. Hyperbel. Allerdings ist jetzt die  $y$ -Achse Hauptachse; auf ihr liegen die Brennpunkte. Gilt bei der Parabelgleichung rechts das Pluszeichen, so ist die Parabel nach oben, anderenfalls nach unten offen.

■ **Beispiel 9:**

$x^2 = 2y$  ist Gleichung der nach oben offenen Parabel, deren Scheitel  $A$  bei  $O(0; 0)$  und deren Brennpunkt  $F$  wegen  $p = 1$  bei  $A(0; \frac{1}{2})$  liegt.

■ **Beispiel 10:**

$x^2 = -4y$  ist Gleichung der nach unten offenen Parabel;  $A(0; 0)$ ,  $F(0; -1)$ .

■ **Beispiel 11:**

$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$  ist Gleichung der Ellipse, deren Hauptscheitel bei  $A'(0; -4)$ ,  $A(0; 4)$  und deren Brennpunkte bei  $F_1(0; -2,646)$ ,  $F_2(0; 2,646)$  liegen.

■ **Beispiel 12:**

$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = 1$  ist Gleichung einer Ellipse, deren Hauptachse die  $x$ -Achse ist.

■ **Beispiel 13:**

$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$  und  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$  sind Gleichungen von zwei Hyperbeln; bei beiden ist die  $y$ -Achse Hauptachse.

● *Ermitteln Sie die Koordinaten der Scheitel und Brennpunkte! Wie lauten die Gleichungen, wenn die Kurven wieder an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten gespiegelt werden?*

Auch die Kurven mit den Gleichungen (26 c) sollen jetzt parallel so verschoben werden, daß der ursprünglich in  $O(0; 0)$  gelegene Scheitel- bzw. Mittelpunkt an die Stelle  $M(x_m; y_m)$  gelangt. Das führt auf

$$(x - x_m)^2 = \pm 2p(y - y_m) \quad (p > 0),$$

$$(26 \text{ d}) \quad \frac{(y - y_m)^2}{a^2} + \frac{(x - x_m)^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{(y - y_m)^2}{a^2} - \frac{(x - x_m)^2}{b^2} = 1.$$

Die Gleichungen (26b) und (26d) lassen sich auf die Form

$$(26e) \quad Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0$$

bringen. Im Falle einer Parabel (26b), bei der also die Achse der  $x$ -Achse parallel ist, fehlt das Glied mit  $x^2$ ; d. h.,  $A = 0$ :

$$Bx + Cy^2 + Dy + E = 0.$$

Diese Gleichung kann durch einen der Koeffizienten (der natürlich von Null verschieden sein muß) dividiert werden, z. B. durch  $C$ :

$$\left(\frac{B}{C}\right)x + y^2 + \left(\frac{D}{C}\right)y + \left(\frac{E}{C}\right) = 0.$$

Wird für die neuen Koeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  gesetzt, so ergibt das

$$(27a) \quad \alpha x + y^2 + \beta y + \gamma = 0.$$

Diese Gleichung der Parabel, deren Achse der  $x$ -Achse parallel ist, enthält noch drei (von 1 verschiedene) Koeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ . Sind  $P_1(x_1; y_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2)$  und  $P_3(x_3; y_3)$  drei Punkte dieser Parabel, so müssen ihre Koordinaten die Gleichung (27a) erfüllen:

$$\left| \begin{array}{l} \alpha x_1 + y_1^2 + \beta y_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2 + y_2^2 + \beta y_2 + \gamma = 0 \\ \alpha x_3 + y_3^2 + \beta y_3 + \gamma = 0 \end{array} \right|.$$

Das Gleichungssystem läßt sich nach  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  auflösen, so daß diese Koeffizienten durch die Koordinaten der drei Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  ausgedrückt werden. Das bedeutet aber, daß die Parabelgleichung und damit auch die Parabel durch die drei Punkte völlig bestimmt ist.

#### ■ Beispiel 14:

Durch  $P_1(-2; 2)$ ,  $P_2(1; 0)$ ,  $P_3(2; 1)$  soll eine Parabel gelegt werden, deren Achse der  $x$ -Achse parallel ist. Durch Einsetzen der Koordinaten von  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  in (27a) ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} P_1: \quad -2\alpha + 4 + 2\beta + \gamma = 0 \\ P_2: \quad \quad \alpha + 0 + \quad 0 + \gamma = 0 \\ P_3: \quad \quad 2\alpha + 1 + \quad \beta + \gamma = 0 \end{array} \right|.$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems führt auf  $\alpha = 0,4$ ,  $\beta = -1,4$ ,  $\gamma = -0,4$ . Somit wird aus (27a)

$$0,4x + y^2 - 1,4y - 0,4 = 0.$$

Durch quadratische Ergänzung läßt sich das auf die Form (26b) bringen, aus der die Scheitelkoordinaten  $x_m$ ,  $y_m$ , der Parameter  $2p$  ersichtlich sind, und aus der außerdem erkannt werden kann, nach welcher Seite die Parabel geöffnet ist.

$$(y - 0,7)^2 = -0,4(x - 2,225)$$

● Bestimmen Sie die Koordinaten von  $S$  und von  $F$ !

Entsprechend fehlt im Falle einer Parabel, deren Achse parallel zur  $y$ -Achse verläuft (26 d), in (26 e) das Glied mit  $y^2$ , d. h.  $C = 0$ :  $Ax^2 + Bx + Dy + E = 0$ . Diese Gleichung kann z. B. durch  $A$  dividiert werden ( $A \neq 0$ ):

$$(27b) \quad x^2 + \alpha'x + \beta'y + \gamma' = 0.$$

Selbstverständlich ist auch diese Parabel durch drei Punkte völlig bestimmt.

Im Falle der Ellipse haben  $A$  und  $C$  in (26 e) gleiche, im Falle der Hyperbel verschiedene Vorzeichen. Dividiert man dann (26 e) beispielsweise durch  $A$  ( $A \neq 0$ ), und bezeichnet man die Koeffizienten neu, so entsteht eine Gleichung

$$x^2 + tx + uy^2 + vy + w = 0$$

mit vier (von 1 verschiedenen) Koeffizienten. Man benötigt daher vier Punkte, um eine Ellipse oder Hyperbel festzulegen, deren Achsen den Koordinatenachsen parallel sind.

### Zusammenfassung

Die Gleichung 2. Grades  $Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0$  ist im allgemeinen Gleichung eines Kegelschnittes. Haben die quadratischen Glieder gleiche Vorzeichen, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse, bei gleichen Koeffizienten der quadratischen Glieder speziell ein Kreis. Haben die quadratischen Glieder verschiedene Vorzeichen, so handelt es sich um eine Hyperbel. Fehlt ein quadratisches Glied, so ist der Kegelschnitt eine Parabel. Die Lage der Kegelschnitte ist bei den vorstehenden Erörterungen nicht völlig allgemein, denn die Achsen sind ja stets parallel zu den Koordinatenachsen. Auf eine Drehung des Kegelschnitts muß hier jedoch verzichtet werden.

### 3.3.7. Anwendungen

#### Die Wurfpabel

Um die Bahn eines geworfenen Gegenstands mathematisch zu erfassen, werden die Faktoren, von denen sie abhängt, zunächst getrennt untersucht (Abb. 3.133.a). Würde auf den mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  geworfenen Gegenstand keine Schwerkraft wirken, so würde er in der Zeit  $t$  den Weg  $r_1 = tv_0$  zurücklegen (vom Luftwiderstand sei hier und im folgenden abgesehen). Würde er dagegen frei fallen, so würde er in der gleichen Zeit  $t$  den Weg  $r_2 = -\frac{1}{2}gt^2j$  zurücklegen. Die Überlagerung (Parallelogramm der Wege) führt auf

$$r = r_1 + r_2 = tv_0 - \frac{1}{2}gt^2j;$$

mit  $r = xi + yj$  und  $v_0 = v_0 \cos \varphi i + v_0 \sin \varphi j$

folgt daraus (Abb. 3.133.b)

$$r = tv_0 \cos \varphi i + (tv_0 \sin \varphi - \frac{1}{2}gt^2)j.$$

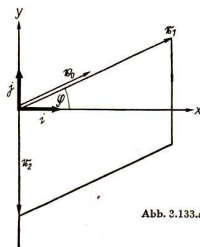


Abb. 3.133.a

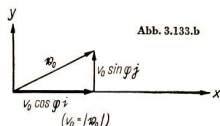


Abb. 3.133.b

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$\begin{cases} x = t v_0 \cos \varphi \\ y = t v_0 \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases},$$

und Eliminieren des Parameters  $t$  führt schließlich auf

$$(28a) \quad y = x \tan \varphi - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2.$$

Durch quadratische Ergänzung erhält man weiter

$$(28b) \quad \left( x - \frac{v_0^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g} \right)^2 = - \frac{2 v_0^2 \cos^2 \varphi}{g} \left( y - \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} \right),$$

woraus man nach (26c) und (26d) entnehmen kann, daß es sich bei der Wurfbahn um eine nach unten offene Parabel handelt, die den Scheitel bei

$$S \left( \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{2g}; \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} \right)$$

hat. Außerdem leuchtet ohne weiteres ein, daß diese Parabel durch den Ursprung des Koordinatensystems geht.

### „Stahl über der Mitte“ beim Kegeldrehen

Beim Kegeldrehen (Abb. 3.134.a) kann es vorkommen, daß der Drehmeißel etwas „über der Mitte“ (Fachausdruck) steht, d. h., daß die Drehstahlspitze nicht in der Horizontalebene durch die Drehachse, sondern um  $c$  über dieser Horizontalebene liegt (Abb. 3.134.b).

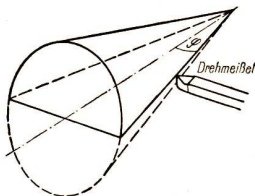


Abb. 3.134.a

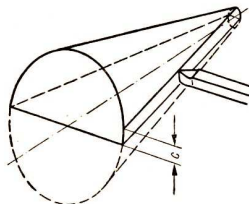


Abb. 3.134.b

Die Erfahrung lehrt, daß in diesem Falle kein Kegel entsteht (Abb. 3.134.c). Zu welchen Kurven gehören die Bögen des Umrisses (Abb. 3.134.c)?

Um das Problem mathematisch zu fassen, sei der Sachverhalt in Grund-, Auf- und Kreuzriß dargestellt (Abb. 3.134.d) und ein  $xy$ -Koordinatensystem eingeführt. Man entnimmt dem Seitenriß, daß zwischen dem Radius  $r(x)$  des rotierenden Werkstücks an der Stelle  $x$  (der negativen  $x$ -Achse), dem Abstand  $h(x)$  der Meißelspitze von der vertikalen Ebene durch die Drehachse und  $c$  die Beziehung

$$[r(x)]^2 = [h(x)]^2 + c^2$$

besteht.

Da der Radius  $r(x)$  gleich  $y$  ist, gilt somit

$$y^2 = [h(x)]^2 + c^2.$$

Nun entnimmt man dem Grundriß (man bedenke:  $x < 0$ , aber  $h(x) > 0$ , denn  $h(x)$  bedeutet eine Streckenlänge)

$$h(x) = \frac{|x|}{\cot \varphi},$$

d. h.,

$$[h(x)]^2 = \frac{x^2}{\cot^2 \varphi},$$

so daß sich

$$y^2 = \frac{x^2}{\cot^2 \varphi} + c^2$$

ergibt. Man erhält weiter

$$\frac{y^2}{c^2} - \frac{x^2}{(c \cot \varphi)^2} = 1.$$

Es handelt sich also nach (26 c) um eine Hyperbel, deren Hauptachse die  $y$ -Achse ist. Der Drehkörper kann als Körper erklärt werden, der durch Rotation dieser Hyperbel um die Nebenachse entsteht. Er heißt **einschaliges Rotationshyperboloid**. An der Drehmaschine kommt jedoch nur der Teil für  $x \leq 0$  in Betracht.

Aus der Art, wie das einschalige Rotationshyperboloid auf der Drehmaschine entstand, ist ersichtlich, daß sich auf der überall gekrümmten Fläche des Hyperboloids Geraden befinden. Denn wenn das Werkstück stillsteht und der Drehmeißel längs der vorher eingestellten Geraden bewegt wird, berührt er ständig das Hyperboloid. Daß es unzählige viele solche Geraden auf dem Hyperboloid gibt, kann man sich durch folgende Überlegung anschaulich klarmachen: Man ritze mit der Drehstahlspitze längs der eingestellten Geraden in das nicht rotierende Werkstück eine Gerade ein, drehe dann das Werkstück um einen sehr kleinen Winkel und ritze mit der Drehstahlspitze wieder eine Gerade ein usw. Auf diese Weise entsteht auf dem Hyperboloid eine Geradenschar. Auf dem Hyperboloid befindet sich noch eine zweite Geradenschar, die mit der soeben beschriebenen nicht identisch ist. Das erkennt man folgendermaßen: Würde die Spitze des Drehmeißels nicht um  $c$  über, sondern unter der Horizontalebene durch die Achse stehen, so entstünde aus Symmetriegründen offenbar dasselbe Hyperboloid; die Drehstahlspitze würde dann aber bei stillstehendem Werkstück andere Geraden einritzen.

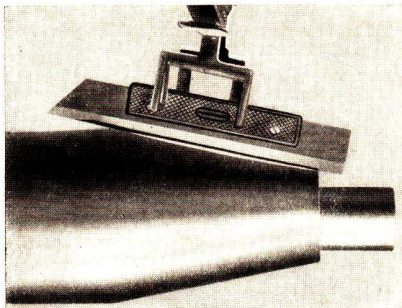


Abb. 3.134.c

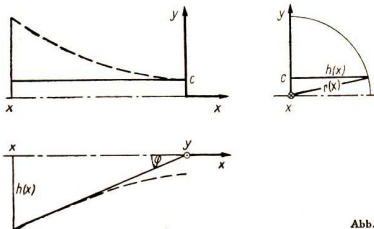


Abb. 3.134.d

Auf dem Hyperboloid gibt es also zwei Geradenscharen. Dies hat technische Bedeutung. Dadurch ist es nämlich möglich, mittels hyperbolischer Zahnräder die Drehung einer Achse unmittelbar auf eine anders gerichtete zu übertragen.

### Aufgaben

- Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, deren Achse zur  $x$ -Achse parallel ist und die durch  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  verläuft! Wo liegt der Scheitel, wo der Brennpunkt? Wie lautet die Gleichung der Leitlinie?
  - $P_1(4; 3)$ ,  $P_2(-1; -1)$ ,  $P_3(-1; 2)$
  - $P_1(-2; -1)$ ,  $P_2(1; 3)$ ,  $P_3(5; 1)$
- Wie Aufgabe 1b, nur soll jetzt die Achse parallel zur  $y$ -Achse sein.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, wenn
  - $F(-5; 7)$ ,  $A(-10; 7)$ ;      **b)**  $F(-5; 7)$ ,  $A(-1; 7)$ ;      **c)**  $F(-5; 7)$ ,  $A(-5; 3)$ ;
  - $F(-5; 7)$ ,  $A(-5; 10)$ ; ist. Wie lautet die Gleichung der Leitlinie?
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung (28a) die Wurfweite ( $\varphi > 0$ ), wenn die Wurfstelle und die Aufschlagstelle in gleicher Höhe liegen (die Wurfbahn soll frei von Hindernissen sein!)!
  - Geben Sie die höchste Stelle der Wurfbahn an!
- Wie lautet die Gleichung der Wurfparabel für einen unter  $45^\circ$  abgeworfenen Stein, der eine 10 m entfernte Wand 3 m über der Abwurfstelle trifft? Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit?
- Wie hoch steigt eine mit der Anfangsgeschwindigkeit von  $80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  unter  $60^\circ$  abgeschossene Leuchtkegel? (Das Ergebnis weicht sehr von der Wirklichkeit ab, weil bei einer solchen Geschwindigkeit der Luftwiderstand nicht mehr vernachlässigt werden darf.)
- Die Kurve, die ein an den beiden Endpunkten befestigter langer biegsamer Draht bildet, kann näherungsweise als Parabel angesehen werden. Stellen Sie die Gleichung der „Durchgangsparabel“ einer Hochspannungsleitung zwischen zwei im waagerechten Gelände stehenden Masten auf! Die Entfernung zwischen den Masten beträgt 100 m, die Aufhängepunkte sind 21 m über dem Boden, der Durchhang beträgt 7 m. (Ursprung im Fußpunkt des linken Mastes.)
- Verschieben Sie die Ellipse  $4x^2 + 9y^2 = 36$  um 2 Einheiten nach rechts und um 1 Einheit nach unten, und bestimmen Sie ihre Schnittpunkte mit den beiden Koordinatenachsen!
- Wie viele Punkte sind nötig, um eine gleichseitige Hyperbel festzulegen, deren Achsen den Koordinatenachsen parallel sind?
- Welche Ellipse oder Hyperbel mit Achsen parallel zu den Koordinatenachsen geht durch die Punkte  $P_1(3; 1)$ ,  $P_2(-2; 11)$ ,  $P_3(2; -5)$  und  $P_4(1; 9)$ ?  
Ermitteln Sie
    - die Koordinaten des Mittelpunktes,
    - die Koordinaten der Brennpunkte und
    - die Gleichungen der Leitlinien!
- Führen Sie die gleichen Untersuchungen wie in Aufgabe 10 für die folgenden Punkte durch!  
 $P_1(-3; -1)$ ,  $P_2(2; -11)$ ,  $P_3(-2; 5)$ ,  $P_4(-1; -9)$
- Führen Sie die gleichen Untersuchungen wie in Aufgabe 10 für die folgenden Punkte durch!  
 $P_1(-1; -1)$ ,  $P_2(5; -1)$ ,  $P_3(2; 1)$ ,  $P_4(2; -3)$



13. Wie lautet die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel, deren Achsen den Koordinatenachsen parallel sind und die durch die Punkte **a)**  $P_1(2; 2)$ ,  $P_2(-3; 1)$ ,  $P_3(-2; -4)$ ; **b)**  $P_1(2; 2)$ ,  $P_2(-3; 1)$ ,  $P_3(-2; 4)$  geht? Bestimmen Sie die Brennpunkte und die Gleichungen der Leitlinien!
14. Wie lauten die Gleichungen der Ellipsen- und Hyperbelschar mit den Brennpunkten  
**a)**  $(1; 5)$ ,  $(1; 16)$ ;      **b)**  $(1; 5)$ ,  $(-7; 5)$ ?
15. Geben Sie an, um welche Kegelschnitte es sich bei den folgenden Gleichungen handelt! Wie lauten die Koordinaten der Scheitel und der Brennpunkte?  
**a)**  $2x^2 - 12x + 3y^2 - 6y + 15 = 0$   
**b)**  $x^2 - 4x - 4y^2 - 8y + 4 = 0$   
**c)**  $x^2 + 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$   
**d)**  $9x^2 - 36x + 4y^2 = 0$   
**e)**  $5x - y^2 - 2y - 11 = 0$   
**f)**  $x^2 - 6y^2 - 12y + 93 = 0$   
**g)** Welche Lage hat ein Kegelschnitt, wenn in seiner Gleichung (26 e)  $B = 0$  ist?
16. Bei der zweiten Anwendung wurde oben das einschalige Rotationshyperboloid erwähnt.  
**a)** Konstruieren Sie auf Grund der Abbildung 3.134.d den Aufriß des einschaligen Rotationshyperboloids!  
**b)** Zeichnen Sie die Brennpunkte, die Asymptoten und die Leitlinien der Hyperbel ein!
17. Stellen Sie sich die folgenden Körper anschaulich vor (Skizze)!  
**a)** Rotiert eine Ellipse um eine ihrer Achsen, so entsteht ein Rotationsellipsoid.  
**b)** Rotiert eine Hyperbel um ihre Hauptachse, so entsteht ein zweischaliges Rotationshyperboloid.  
**c)** Rotiert eine Parabel um ihre Achse, so entsteht ein Paraboloid.

### 3.3.8. Schnitt zwischen Kegelschnitt und Gerade

Ein Kegelschnitt und eine Gerade seien durch ihre Gleichungen gegeben, z. B. die Parabel durch  $(y - 3)^2 = 4(x + 2)$  und die Gerade durch  $y = 4 - x$ . Um die eventuellen Schnittpunkte zu finden, behandelt man die beiden Gleichungen als System zweier Bestimmungsgleichungen mit den beiden Unbekannten  $x$  und  $y$ :

$$\left| \begin{array}{l} (y - 3)^2 = 4(x + 2) \\ y = 4 - x \end{array} \right|.$$

Indem man die zweite Gleichung in die erste einsetzt, eliminiert man  $y$ :

$$(4 - x - 3)^2 = 4(x + 2).$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösung  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = -1$ . Aus der Gleichung der Geraden erhält man die zugeordneten Ordinaten:  $y_1 = -3$ ,  $y_2 = 5$ . Wie die Probe zeigt, erfüllen die Wertepaare  $(x_1; y_1)$  und  $(x_2; y_2)$  beide Gleichungen, die Punkte  $P_1(x_1; y_1)$  und  $P_2(x_2; y_2)$  liegen daher sowohl auf der Parabel als auch auf der Geraden: Sie sind die Schnittpunkte.

Wenn man die eine Veränderliche aus der Kegelschnittgleichung mit Hilfe der Geradengleichung eliminiert, entsteht im allgemeinen eine quadratische Bestimmungsgleichung mit einer Unbekannten. Hat diese (wie im obigen Beispiel) zwei reelle Lösungen, so gibt es zwei Schnittpunkte. Hat sie als Lösung eine sogenannte Doppelwurzel, so ist die Gerade Tangente des Kegelschnitts. Hat sie dagegen keine reelle Lösung, so haben Kegelschnitt und Gerade keinen Punkt gemeinsam. Übrigens kann es auch vorkommen, daß beim Einsetzen aus der Geradengleichung in die Kegelschnittgleichung das quadratische Glied wegfällt, so daß eine lineare Gleichung entsteht. Das ist der Fall, wenn es sich bei dem Kegelschnitt um eine Hyperbel handelt und die Gerade einer der beiden Asymptoten parallel ist. Aus

$$\left| \begin{array}{l} b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = \frac{b}{a}x + c \end{array} \right|$$

folgt

$$b^2x^2 - b^2x^2 + 2abcx - a^2c^2 = a^2b^2,$$

$$x = a \frac{b^2 + c^2}{2bc}.$$

Falls der Kegelschnitt eine Parabel ist und die Gerade zu der Parabelachse parallel ist, erhält man ebenfalls eine lineare Gleichung, da dann Gerade und Kegelschnitt nur einen Schnittpunkt haben. Beispiel:  $y^2 = 2px, y = c$ .

● *Der Kegelschnitt  $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$  wird von der Geraden  $3y - 2x - 15 = 0$  in einem Punkt geschnitten. Untersuchen Sie dieses Verhalten näher!*

● *Der Kegelschnitt  $9x^2 - 36x + 25y^2 + 50y - 164 = 0$  wird von der Geraden  $36x + 45y - 252 = 0$  berührt. Zeigen Sie das!*

Zu einem interessanten Resultat kommt man insbesondere, wenn man die Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  und ihre Asymptoten  $y = \frac{b}{a}x$  und  $y = -\frac{b}{a}x$  mit der Geraden  $y = mx + n$  zum Schnitt bringt, was die Hyperbelpunkte  $H_1$  und  $H_2$  und die Asymptotenpunkte  $A_1$  und  $A_2$  ergeben möge (Abb. 3.135.). Es zeigt sich dann, daß der Mittelpunkt der

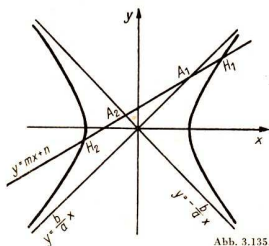


Abb. 3.135.

Strecke  $\overline{H_1H_2}$  mit dem der Strecke  $\overline{A_1A_2}$  identisch ist, so daß auch  $\overline{A_1H_1} = \overline{A_2H_2}$  sein muß. Bei all dem genügt es übrigens, jeweils nur die Abszissen der Schnitt- und Teilpunkte zu bestimmen. Aus dem gefundenen Sachverhalt ergibt sich eine Hyperbelkonstruktion, wenn ein Hyperbelpunkt  $H_1$  und die beiden Asymptoten gegeben sind:

Eine beliebige<sup>1</sup> Gerade durch  $H_1$  schneidet die Asymptoten in  $A_1$  und  $A_2$ . Aus der Bedingung  $\overline{A_1H_1} = \overline{A_2H_2}$  findet man auf der Geraden den zweiten Hyperbelpunkt  $H_2$ . Irgendeine andere Gerade durch  $H_1$  oder  $H_2$  liefert einen dritten Hyperbelpunkt usw.

<sup>1</sup> Da bei der Herleitung dieser Beziehungen die Geradengleichung  $y = mx + n$  benutzt wurde, gelten die Erörterungen nicht ohne weiteres für den Fall, daß die schneidende Gerade auf der Hauptachse der Hyperbel senkrecht steht.

### Aufgaben

Bestimmen Sie die eventuellen Schnittpunkte zwischen Kegelschnitt und Gerade! Fertigen Sie jeweils eine Skizze an!

1.  $3x^2 + 2y^2 - 12x + 4y + 8 = 0$ ,  $2y + x = 0$

2.  $4y^2 + 24x - 6x^2 + 8y - 32 = 0$ ,  $\sqrt{2}y - \sqrt{3}x - 2 = 0$

3.  $x^2 + 2x + 8y - 31 = 0$ ,  $y = -x$

4.  $4y^2 + 24x - 6x^2 + 8y - 32 = 0$  und die  $y$ -Achse

5.  $8x + 2y - 31 + y^2 = 0$  und die  $x$ -Achse

6.  $(2x - 3y)(2x + 3y) - 36 = 0$ ,  $3x - 2y = 15$

## INHALTSVERZEICHNIS

1. Komplexe Zahlen . . . . .	5
1.1. Vorbemerkungen . . . . .	5
1.2. Vom Bereich der natürlichen Zahlen zum Bereich der reellen Zahlen . .	5
1.3. Der Bereich der komplexen Zahlen . . . . .	9
1.4. Anwendung komplexer Zahlen in der Elektrotechnik . . . . .	28
2. Grafisches Rechnen und Nomografie . . . . .	33
2.1. Vorbemerkungen . . . . .	33
2.2. Funktionen und Funktionsleitern . . . . .	34
2.3. Leitertafel-Nomogramme . . . . .	42
2.4. Netztafel-Nomogramme . . . . .	59
3. Analytische Geometrie . . . . .	73
3.1. Vektorrechnung . . . . .	73
3.2. Analytische Geometrie: Punkte, Geraden, Ebenen und Kreise . . . . .	106
3.3. Analytische Geometrie: Kegelschnitte . . . . .	134



00 13 33-2  
4,50 MDN