Mathematik

Klasse 8

Unterrichtshilfen

Unterrichtshilfen Mathematik, Klasse 8

Autoren: Günther Erbrecht, Helmut Leiße, Günther Lorenz,
Fritz Neigenfind, Günther Pietzsch, Klaus Ritter, Siegfried Schneider

6. Auflage

Volk und Wissen Volkseigener Verlag · Berlin 1980

Verfaßt von einem Autorenkollektiv unter der Leitung von Dr. Klaus Ritter
Autoren: Dr. Fritz Neigenfind – Vorwort und Allgemeine Bemerkungen
Helmut Leiße – Kapitel 1
Dr. Günter Lorenz, Prof. Dr. Günter Pietzsch – Kapitel 2
Dr. Siegfried Schneider – Kapitel 3
Günter Erbrecht – Kapitel 4
Redaktion: Ingrid Fabian, Karlheinz Martin

6. Auflage
Lizenz-Nr. 203/1000/79 (DN 00 21 53-6)
LSV 0645
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Einband und typografische Gestaltung: Atelier Volk und Wissen
Printed in the German Democratic Republic
Satz: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden (III/9/1)
Druck: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Schrift: 9/10 p Bodoni
Redaktionsschluß: 11. April 1979
Bestell-Nr 706 207 3
DDR 7,50 M

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die Unterrichtshilfen, die vom Verlag Volk und Wissen für die verschiedenen Unterrichtsfächer herausgegeben wurden, sind heute unbestritten ein wichtiges Hilfsmittel für die Vorbereitung des Lehrers auf den Unterricht geworden.
Für das Fach Mathematik sind „Unterrichtshilfen" für die Klassen 1 bis 10 erschienen. Für die Klassen 11 und 12 sowie für den fakultativen Unterricht nach dem Plan „Wahrscheinlichkeitsrechnung" stehen „Methodische Hinweise" zur Verfügung.
Die „Unterrichtshilfen – Mathematik, 8. Klasse" wurden auf der Grundlage des Lehrplans für Mathematik, Klassen 6 bis 8, der seit dem 1. September 1969 verbindlich ist, entwickelt. Die Hinweise auf das Lehrbuch beziehen sich jeweils auf das Buch „Mathematik, Klasse 8", Ausgabe 1971 (00 08 06).
Zu den Aufgaben der Unterrichtshilfen ist in den Vorworten früher erschienener Titel dieser Art, z.B. in dem Band für die 7. Klasse (00 21 36), ausführlich Stellung genommen worden. Es sei in diesem Zusammenhang auch auf den Artikel „Zur Planung des Mathematikunterrichts mit Unterrichtshilfen" von Helmut Leiße im Heft 6, Jahrgang 11 (1973), der Fachzeitschrift „Mathematik in der Schule" verwiesen. Es soll jedoch auch hier hervorgehoben werden, daß die Unterrichtshilfen lediglich **empfehlenden** Charakter tragen und **keine verbindliche** Grundlage für den Unterricht darstellen.
Auch bei ständiger Benutzung der „Unterrichtshilfen – Mathematik, 8. Klasse" wird die kontinuierliche und intensive Arbeit mit dem grundlegenden staatlichen Dokument, dem **Lehrplanwerk** als Ganzes, nicht überflüssig. Besonders die Pläne „Lehrplan für Mathematik, Klassen 5 bis 8" (00 30 17), „Lehrplan für Mathematik, Klassen 9 und 10" (00 30 07) sowie die Lehrpläne für die anderen Fächer in Klasse 8 sind von großer Bedeutung für die Unterrichtsvorbereitung. Darüber hinaus sei auch auf den „Bedarfsplan für Unterrichtsmittel" als weiteres verbindliches Material, auf die geltenden Lehrbücher, das Nachschlagebuch „Tabellen und Formeln" (00 07 13) und den Wissensspeicher „Mathematik in Übersichten" (00 08 09) hingewiesen, die als wichtige Nachfolgematerialien immer wieder zu Rate gezogen werden müssen.
Die Unterrichtshilfen können den Lehrer nur auf bestimmte methodische oder mathematische Probleme *hinweisen* und *aufmerksam machen*, die er bei der Behandlung der lehrplanmäßig vorgesehenen Stoffgebiete zu beachten hat. Eine tiefergehende Behandlung dieser Probleme in einer relativ geschlossenen Weise ist in den Unterrichtshilfen allerdings nicht möglich. Es sei aber in diesem Zusammenhang auf die „Methodik des Mathematikunterrichts" (Best.-Nr. 00 21 80) verwiesen, die im Jahre 1975 erschienen ist.
Die Arbeit mit den Unterrichtshilfen ist dann besonders erfolgversprechend, wenn sie auf dem ständigen Studium der einschlägigen mathematischen und pädagogischen Fachliteratur, besonders der Zeitschriften „Mathematik in der Schule", „Pädagogik" und „Deutsche Lehrerzeitung", aufbaut.

Nach Aufbau und Anlage gleichen die vorliegenden „Unterrichtshilfen“ für die Klasse 8 denjenigen für die Klasse 7. Inhaltlich stellen sie ebenfalls eine Fortführung der dort verwirklichten Konzeption dar, bilden aber zugleich auch einen Übergang zu den „Unterrichtshilfen“ für die Klasse 9, indem in noch stärkerem Maße als im Material für die Klasse 7 das Grundlegende in den Vordergrund der methodischen Erörterungen gerückt ist und die konkreten Beispiele Modellcharakter besitzen. Die Autoren hoffen, auf diese Weise eine besonders wirksame Hilfe für die Realisierung der Lehrplanforderungen gegeben zu haben und sind für kritische Hinweise für eine weitere Verbesserung des vorliegenden Materials, die bei einer überarbeiteten Neuauflage berücksichtigt werden können, jederzeit dankbar.

Berlin, im Februar 1977 *Fritz Neigenfind*

0. Allgemeine Bemerkungen zum Mathematikunterricht in Klasse 8

0.1. Grundgedanken zur Ziel- und Aufgabenstellung

Der VIII. Pädagogische Kongreß, der vom 18. bis zum 20. Oktober 1978 in Berlin stattfand, hat den gesellschaftlichen Auftrag der Schule für die kommunistische Erziehung der Jugend in der entwickelten sozialistischen Gesellschaft herausgearbeitet, die Grundpositionen der marxistisch-leninistischen Pädagogik und des Unterrichts in der sozialistischen Oberschule der DDR klar formuliert und damit jedem Lehrer und Erzieher das Ziel seiner pädagogischen Arbeit aufgezeigt und den Weg zur Erreichung dieses Zieles gewiesen. Seine Forderungen, Beschlüsse und Empfehlungen stellen somit auch für den Mathematikunterricht der Klasse 8 eine entscheidende Grundlage dar.
Margot Honecker, der Minister für Volksbildung der DDR, hob in ihrem Referat auf dem Kongreß hervor, daß die „Erziehung der Jugend zur kommunistischen Moral" als ein komplexer „Prozeß der politischen und weltanschaulichen, geistigen, körperlichen und ästhetischen Erziehung, der patriotischen und internationalistischen, der Arbeits- und Kollektiverziehung" zu verstehen ist. Sie fuhr fort: „Nur in dieser Komplexität prägt sich der Charakter der jungen Menschen aus. Dazu gehören politisch-ideologische Überzeugtheit, Prinzipientreue zur Sache der Arbeiterklasse, Unversöhnlichkeit gegenüber dem Klassengegner ebenso wie Erkenntnisdrang, gesellschaftliche Aktivität, Willensstärke und Pflichtbewußtsein, Achtung vor dem Leben, vor den arbeitenden Menschen und den Älteren, Mut, Ehrlichkeit, Kameradschaftlichkeit, Hilfsbereitschaft, Bescheidenheit und Zuverlässigkeit."[1])
An der Anerziehung solcher Charakterzüge hat der Mathematikunterricht einen bedeutenden Anteil. Denn in ihm werden hohe Anforderungen nicht nur an das spezielle mathematisch-fachliche Wissen und Können der Schüler gestellt, sondern in untrennbarer Einheit damit an ihre gesamte Lernhaltung, an ihr schöpferisches Denken, ihr zielgerichtetes und überlegtes Handeln, ihren Willen und ihre Bereitschaft zur Überwindung von Schwierigkeiten, ihre Ausdauer und Beharrlichkeit.
Auf dem Kongreß konnte festgestellt werden: „Mit den jetzt geltenden Lehrplänen für Mathematik haben wir endgültig mit dem bürgerlichen Rechen- und Raumlehreunterricht gebrochen. Als dieser Weg vor 15 Jahren eingeschlagen wurde, gab es noch manchen Zweifel an der Realisierbarkeit der hohen Zielstellung unseres Mathematikunterrichts. Wir können heute feststellen, daß diese Ziele in immer höherer Qualität realisiert werden."[2])
Dieses positive Resultat konnte erreicht werden, weil es immer besser gelingt, „großen Wert auf die Vermittlung und Aneignung soliden fachwissenschaftlichen Wissens, ent-

[1]) Honecker, Margot: *Der gesellschaftliche Auftrag unserer Schule.* In: VIII. Pädagogischer Kongreß der Deutschen Demokratischen Republik vom 18. bis 20. Oktober 1978 – Protokoll; Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, 1979. Seite 81.
[2]) Ebenda, Seite 95.

scheidender Fakten, Tatsachen und Sachverhalte, grundlegender Begriffe und Theorien zu legen." Es hat sich als richtig und notwendig erwiesen, in den Lehrplänen, Lehrbüchern, Unterrichtsmitteln und methodischen Veröffentlichungen zum Mathematikunterricht „auf die Vermittlung elementarer Methoden wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens, auf die Befähigung zum selbständigen Wissenserwerb zu orientieren. Ist dies doch unerläßlich für die aktive Aneignung, für die Solidität, Dauerhaftigkeit und Anwendungsbereitschaft der Kenntnisse, für die Befähigung zum logischen und dialektischen Denken, für ständiges Weiterlernen."[3])

Da der Erfolg des Unterrichts, das Erreichen der Ziele der Bildung und Erziehung wesentlich von der richtigen Interpretation der lehrplanmäßig vorgesehenen Inhalte eines jeden Lehrgangsabschnittes abhängt, sollen nachfolgend zunächst einige inhaltliche Fragen, einige Probleme der Stoffauswahl und -anordnung für den Mathematikunterricht der Klasse 8 näher betrachtet werden. Sie sollen dem Mathematiklehrer helfen, sich bei der didaktisch-methodischen Gestaltung seines Unterrichts auf das Wesentliche und für die weitere Entwicklung der mathematischen Bildung seiner Schüler Bedeutsame zu konzentrieren sowie die Spezifik des Unterrichts in Klasse 8 aus der Gesamtsicht des Mathematikunterrichts zu bestimmen.

0.2. Zu einigen Fragen des Inhalts der in Klasse 8 zu vermittelnden mathematischen Bildung

Für die mathematische Wissenschaft ist es charakteristisch, gewonnene **Einzelerkenntnisse zu Systemen zusammenzufassen,** sie nach bestimmten Gesichtspunkten zu ordnen und zu strukturieren, durch Hervorheben von in bestimmter Hinsicht wesentlichen und durch Nichtbeachten von in gleicher Hinsicht nicht wesentlichen Merkmalen oder Eigenschaften der Untersuchungsgegenstände neue Begriffe zu bilden und zu Verallgemeinerungen, tieferen Einsichten und neuen mathematischen Erkenntnissen zu gelangen. Das Systematisieren der Vielzahl von Einzelfakten ermöglicht das Aufdecken immer neuer Zusammenhänge und hilft, weitere Anwendungsgebiete zu erschließen.

Der Mathematikunterricht der Klasse 8 hat in besonderem Maße an der Systematisierung des von den Schülern bis dahin erworbenen mathematischen Wissens und Könnens beizutragen und es unter umfassenderen Gesichtspunkten neu zu ordnen. Er hat dabei zugleich die Aufgabe zu erfüllen, den Schülern an geeigneten Beispielen diese für die mathematische Wissenschaft und darüber hinaus für die moderne Wissenschaft überhaupt charakteristische Verfahrensweise nahezubringen, die Schüler zum Systemdenken zu erziehen und sie schrittweise auch zum Systematisieren zu befähigen. An der Erfüllung dieser wichtigen Bildungs- und Erziehungsaufgabe kann und muß in allen vier Stoffgebieten, die lehrplanmäßig für den Mathematikunterricht in der Klasse 8 vorgesehen sind, gearbeitet werden.

Wie es im Lehrplan heißt, geht es im **Stoffgebiet „1. Arbeiten mit Variablen"** nicht um „die Einführung in einen neuen mathematischen Gegenstandsbereich". Vielmehr gilt: „Der Begriff ‚Variable' und der Gebrauch von Variablen sind den Schülern schon aus früheren Schuljahren bekannt. An dieser Stelle ist es notwendig, das bisherige Wissen

3) Ebenda, Seite 82.

der Schüler zusammenzutragen, zu ergänzen und dadurch ihr Verständnis für den Begriff ‚Variable' weiter zu erhöhen."[1])
Schon in Klasse 1 lernten die Schüler mit Variablen umzugehen. Indem sie in vorgelegten Termen für die Variablen natürliche Zahlen einsetzten, bildeten sie im gesamten Mathematikunterricht der Unterstufe viele Aufgaben, unterschieden zwischen lösbaren und nicht lösbaren Aufgaben und entwickelten ihre Rechenfertigkeiten beim Lösen so gewonnener Aufgaben. Im Mathematikunterricht der Klasse 6 lernten sie beachten, daß Variable nicht nur natürliche, sondern auch gebrochene Zahlen bezeichnen können und daß das Problem der Lösbarkeit einer Aufgabe nur im Zusammenhang mit der Angabe eines Grundbereiches beantwortet werden kann. Daran anknüpfend wurden in Klasse 7 die rationalen Zahlen erarbeitet, und die Schüler berechneten den Wert von Termen, in denen sie für die auftretenden Variablen außer natürlichen oder gebrochenen Zahlen auch beliebige rationale, ganze oder sogar irrationale Zahlen einsetzten. In Klasse 8 kommt es nunmehr darauf an, **das seit Jahren Geübte bewußtzumachen.** Deshalb schreibt der Lehrplan vor:
„Einsetzen von Zahlen (aus verschiedenen Grundbereichen) für die Variablen; Berechnen des Werts der Terme."[2])
Die Schüler haben auf den der Klasse 8 vorangehenden Klassenstufen Variable aber nicht nur im Zusammenhang mit Zahlen und Termen kennengelernt. Sie haben **auch in der Geometrie Variable** verwendet und mit ihnen sowohl geometrische Gebilde als auch Größen bezeichnet. Das gilt es bei den systematisierenden Betrachtungen in der Behandlung des Stoffgebietes „1. Arbeiten mit Variablen" ebenfalls deutlich herauszustellen. Damit der Variablenbegriff von den Schülern nicht zu eng gebildet wird, fordert der Lehrplan ausdrücklich:
„Übersicht über bisher benutzte Variablen-Grundbereiche (auch aus geometrischen Gebieten)."[2])
Während es sich bei den beiden bisher erörterten Problemkreisen in erster Linie um ein **zusammenfassendes Systematisieren** von Bekanntem handelt, geht es bei den folgenden beiden darüber hinaus auch um ein **ergänzendes und vertiefendes Systematisieren.**
Schon im Mathematikunterricht der Unterstufe gewannen die Schüler aus Gleichungen und Ungleichungen, die Variable enthielten, durch Einsetzen von natürlichen Zahlen für die Variablen **wahre oder falsche Aussagen.** Bis einschließlich Klasse 7 erfolgte keine prinzipielle Erweiterung der diesbezüglichen Kenntnisse und Erkenntnisse, denn die auf den verschiedenen Klassenstufen auftretenden Veränderungen bezogen sich nur auf die Variablen-Grundbereiche, nicht auf das Verfahren zur Gewinnung der Aussagen. In Klasse 8 hingegen lernen die Schüler in der Verwendung von Quantifikatoren ein weiteres Verfahren zur Gewinnung von mathematischen Aussagen kennen. Sie lernen an bekannten Beispielen das Formulieren von mathematischen Aussagen bei Benutzung von (gebundenen) Variablen und solchen Redeweisen wie „für alle (jedes, beliebige) ... gilt (ist gültig, ist wahr)" und „es gibt ...., so daß gilt ...".[2])
Mit Nachdruck sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß es inhaltlich und damit auch methodisch **zweierlei** ist, ob solche Gesetze wie die Kommutativ- und Assoziativgesetze der Addition oder der Multiplikation in verschiedenen Zahlenbereichen erarbeitet, wiederholt oder angewendet werden, oder ob diese Gesetze als „Beispiele für das Beschreiben mathematischer Zusammenhänge mit Hilfe von Variablen"[2]) benutzt werden, wie es der Lehrplan für die Klasse 8 im ersten Stoffgebiet vorsieht: Im ersten Fall sind die Gesetze **selbst Unterrichtsgegenstand,** im zweiten werden sie als so hinlänglich

[1]) *Lehrplan Mathematik – Klassen 5 bis 10,* Seite 68. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1975 (00 30 18).
[2]) Ebd., Seite 68.

bekannt vorausgesetzt, daß man mit ihrer Hilfe ein anderes Problem verdeutlichen kann. Auf die Konsequenzen, die sich daraus für die Unterrichtsgestaltung, insbesondere für die Reaktivierung des für die Behandlung des jeweiligen Stoffgebietes notwendigen Wissens und Könnens ergeben, werden wir im Abschnitt 0.3. näher eingehen.
Gleichungen und Ungleichungen wurden im vorangegangenen Unterricht nicht nur auf ihren Wahrheitswert hin untersucht, der sich beim Einsetzen von Zahlen für die in ihnen vorkommenden Variablen ergibt, sie wurden vor allem **gelöst.** Bis einschließlich Klasse 5 erfolgte dieses Lösen auf der Grundlage inhaltlicher Überlegungen, in Klasse 6 lernten die Schüler für einfachste Gleichungstypen, in Klasse 7 für einige weitere Typen von linearen Gleichungen mit einer Variablen kalkülmäßige Lösungsverfahren kennen. Da den Schülern ferner seit Klasse 6 Gleichungen als zwei durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbundene Terme bekannt sind[1]), sind die erforderlichen Voraussetzungen vorhanden, in Klasse 8 ein System „von Regeln für die Umformung von Termen mit Variablen auf der Basis des Rechnens mit rationalen Zahlen" zu erarbeiten.[2]) Das Beachten dieser Zusammenhänge und der von den Schülern durchlaufenen Erkenntnisstufen ist wichtig für das Finden der geeigneten Motivierungen und Formen der unterrichtlichen Behandlung gerade dieses Stoffgebietes mit seinem überwiegend formalen Inhalt.
Der weiterführende und vertiefende, der ergänzende und wiederholende Charakter dieses zugleich systematisierend und aufbauend angelegten Stoffgebietes schafft zu Beginn des Mathematikunterrichts der Klasse 8 vom Lehrplan her besonders günstige Möglichkeiten für das Erreichen eines **einheitlichen und hohen Ausgangsniveaus** für den gesamten weiteren Arithmetikunterricht in der Oberstufe und auch für das zielgerichtete Schließen vorhandener Lücken bei einzelnen Schülern oder in der gesamten Klasse. Allerdings kommt es hier auch besonders darauf an, die vom Lehrplan her durch Stoffauswahl und -anordnung geschaffenen Möglichkeiten im Unterricht voll zu nutzen. Vor allem ist es wichtig, für das Klassenkollektiv insgesamt und für den einzelnen Schüler die Aufgaben für die Übung, Wiederholung und Anwendung des neu Angeeigneten sehr sorgfältig, zielgerichtet und überlegt auszuwählen; Lehrbuch und „Unterrichtshilfen" können dabei nur in beschränktem Umfange helfen, da in ihnen nicht auf individuelle Erfordernisse und auf die jeweiligen Klassenerfordernisse eingegangen werden kann.
Abschließend sei zum Stoffgebiet „1. Arbeiten mit Variablen" gesagt, daß es – wie jedes andere Stoffgebiet auch – unbedingt in seiner **Stellung und Funktion im Gesamtlehrgang** für den Mathematikunterricht der zehnklassigen Oberschule gesehen werden muß und nur von seiner Einordnung in diesen Gesamtlehrgang her voll erfaßt werden kann. Das bedeutet zunächst zu beachten, daß es im ersten Stoffgebiet des Mathematikunterrichts der Klasse 9 erneut um das „Arbeiten mit Variablen" geht.[3]) Die Schwerpunkte, Akzentuierungen und Begrenzungen der in Klasse 8 zu leistenden Arbeit werden besonders deutlich, wenn man das im Lehrplan der Klasse 9 Geforderte mit den Forderungen im Lehrplan der Klasse 8 vergleicht und für diesen Vergleich auch die Lehrbücher und Unterrichtshilfen heranzieht. Die Einordnung des Stoffgebietes in den Gesamtlehrgang bedeutet ferner, daß es in den für seine Behandlung vorgesehenen 18 Unterrichtsstunden in erster Linie um **das Systematisieren und das Erzielen von Einsichten** sowie um das Erwerben grundlegender Kenntnisse und erster Fertigkeiten geht, nicht um letzte Perfektion im Umformen komplizierter Ausdrücke. Der Lehrplan weist darauf mit den Worten hin:

[1]) Ebd., Seite 46. [2]) Ebd., Seite 68. [3]) Ebd., Seiten 95ff.

„Da bei der Behandlung aller weiteren Stoffgebiete das Arbeiten mit Variablen zu einer sicher beherrschten Fertigkeit zu entwickeln ist, sind für die Übungen in diesem Stoffgebiet solche Aufgaben zu wählen, an denen das Grundsätzliche der anzuwendenden Verfahren in übersichtlicher Form vom Lehrer erläutert und von den Schülern angeeignet werden kann."[1])

Das **Stoffgebiet „2. Ähnlichkeit"** nimmt mit 52 von insgesamt 120 Unterrichtsstunden offenkundig eine zentrale Stellung im Mathematikunterricht der Klasse 8 ein. Dennoch trägt auch dieses Stoffgebiet **in weitem Umfange Systematisierungscharakter,** dient nicht nur der Erweiterung der mathematischen Kenntnisse der Schüler. Das ergibt sich einmal aus seinem Inhalt, zum anderen wiederum aus seiner Stellung im Gesamtlehrgang und schließlich aus der dem Inhalt und der Stellung im Gesamtlehrgang entsprechenden Konzipierung im Lehrplan, seiner dort festgelegten Zielstellung und didaktisch-methodischen Vorprogrammierung.

Inhaltlich umfassen bekanntlich die Ähnlichkeitsabbildungen die Kongruenzabbildungen, mit denen sich die Schüler bis einschließlich Klasse 7 befaßten, als Spezialfälle, stellt die Kongruenz einen Spezialfall der Ähnlichkeit dar. Die Kenntnisse der Schüler über Kongruenz und Kongruenzabbildungen werden daher im Zusammenhang mit der Behandlung der Ähnlichkeit und der Ähnlichkeitsabbildungen neu und von höherer Warte her geordnet, erhalten eine andere Stellung im Gesamtsystem des geometrischen Wissens der Schüler. Von der **Stellung** her bildet das Stoffgebiet „2. Ähnlichkeit" den Abschluß des Planimetrielehrganges der zehnklassigen Oberschule und hat daher ebenfalls Systematisierungsfunktionen zu erfüllen. Die **Konzipierung** dieses Stoffgebietes im Lehrplan zeigt den Systematisierungscharakter besonders deutlich, da sich immer wieder Formulierungen finden wie: „Wiederholen von ‚Bewegung' und der Eigenschaften der Bewegung; ‚Kongruenz' von Figuren und der Kongruenzkriterien für Dreiecke; ‚Maßstab'."[2])

Die Schüler lernen im Mathematikunterricht der Unterstufe wichtige **ebene Figuren** kennen. Sie ermitteln auch bereits einige Eigenschaften dieser Figuren. Dennoch bleiben alle Betrachtungen zwangsläufig propädeutisch, weil stets nur Einzelfiguren betrachtet werden können. In Klasse 6 lernen die Schüler die ihnen aus dem Unterstufenunterricht bekannten und vertrauten Figuren nach bestimmten Gesichtspunkten klassifizieren. Damit wird eine neue Qualitätsstufe im Geometrieunterricht erreicht, weil nun nicht mehr einzelne geometrische Gebilde, sondern **Klassen solcher Gebilde, kongruente geometrische Figuren** betrachtet und untersucht werden. Der propädeutische Charakter des vorangehenden geometrischen Unterrichts wird überwunden, Beweise werden möglich und notwendig, Sätze für Klassen von Figuren werden formuliert.

In Klasse 6 werden somit zwei für die mathematische Bildung außerordentlich wichtige Erkenntnisschritte vollzogen: Erstens werden von den Schülern von diesem Zeitpunkt an bewußt alle bisher wegen ihrer unterschiedlichen Lage (oder bei noch jüngeren Schülern auch zum Beispiel wegen der unterschiedlichen Farbe des ein bestimmtes geometrisches Gebilde darstellenden Linienzuges) als verschieden betrachteten geometrischen Gebilde, die in bestimmten Merkmalen übereinstimmen, **als nicht wesentlich voneinander verschieden, als äquivalent,** als Repräsentanten einer einzigen geometrischen Figur angesehen (oder sollten und könnten von den Schülern in diesem Sinne angesehen werden). Zweitens haben die Schüler in diesem Zusammenhang erfahren, daß es zur Feststellung der Äquivalenz, der Zugehörigkeit verschiedener Repräsentanten zur gleichen Klasse bestimmter **Untersuchungsverfahren** bedarf. Sie haben damit die kurz

1) *Lehrplan Mathematik — Klassen 5 bis 10.* A. a. O., Seite 68.
2) Ebd., Seite 71.

zuvor in der Arithmetik — bei der Untersuchung von Brüchen auf Zugehörigkeit zur gleichen Klasse, auf Repräsentanz ein und derselben gebrochenen Zahl — gemachten Erfahrungen in der Geometrie wiedergefunden. Schließlich haben sie neben dem allgemeinen, abbildungsgeometrischen Verfahren für besonders wichtige Figuren, nämlich für Dreiecke, leicht handhabbare Kriterien, die Kongruenzsätze, kennen und bei der Untersuchung auf Kongruenz anwenden gelernt, zum Beispiel beim Beweisen.

In Klasse 8 werden die gleichen Schritte — allerdings auf einer höheren Ebene der Verallgemeinerung — noch einmal gegangen. Die Schüler lernen, Klassen von kongruenten Figuren zu umfassenderen Klassen, zu **Klassen von ähnlichen Figuren** zusammenzufassen. Das geschieht, indem an die Stelle des für die Kongruenz wesentlichen Merkmals der gleichen Länge von einander zugeordneten Strecken das allgemeinere Merkmal des gleichen Streckenverhältnisses gesetzt wird. Ein solches Vorgehen ist — wie eingangs erwähnt — für die mathematische Wissenschaft charakteristisch. Die Schüler lernen dabei zugleich die für die Kongruenz kennzeichnende Gleichheit der Streckenlängen als jenen Spezialfall von Streckenverhältnissen erfassen, der gleich 1 ist (aus $a' = a$ folgt über $a' = 1 \cdot a$ nämlich sofort $a' : a = 1$), und erfassen so die Kongruenz als Spezialfall der Ähnlichkeit. Ohne zu philosophischen Verallgemeinerungen vorzustoßen, kann an diesem Beispiel den Schülern die Dialektik von Allgemeinem und Besonderem vorzüglich verdeutlicht werden.

Schließlich erfahren die Schüler erneut, daß zur Feststellung der Äquivalenz von Figuren, nämlich nunmehr der Ähnlichkeit, bestimmte **Untersuchungsverfahren** erforderlich sind. Wiederum lernen sie neben dem allgemeinen, abbildungsgeometrischen Verfahren für Dreiecke in den Ähnlichkeitssätzen leicht handhabbare Kriterien kennen und anwenden, erneut besonders beim Beweisen.

Im Ergebnis dieser Arbeit erfährt **das gesamte Wissen der Schüler über ebene Figuren eine Neustrukturierung; es wird neu systematisiert.** Allerdings ist dieses für die Entwicklung der mathematischen Bildung außerordentlich bedeutsame Resultat nur dann zu erreichen, wenn im Unterricht die Ähnlichkeit ebener Figuren so behandelt wird, daß das Prinzipielle und vor allem das mit dem Vorgehen in Klasse 6 sowie weitgehend auch bei den Zahlenbereichserweiterungen Vergleichbare verdeutlicht und bewußtgemacht wird, nicht aber dann, wenn das Stoffgebiet „2. Ähnlichkeit“ als etwas völlig Neues und isoliert vom bisher Bekannten behandelt wird. Pädagogisch verfehlt wäre es ferner, würde man annehmen, die Schüler könnten bei der ersten Aneignung von Grundkenntnissen über kongruente Figuren in den Klassen 6 und 7 sowie über ähnliche Figuren in Klasse 8 diese mathematisch wesentlichen Zusammenhänge bereits in ihrer ganzen Bedeutung und Tragweite erfassen. Das ist keineswegs der Fall und auch **nicht Ziel des Mathematikunterrichts der allgemeinbildenden Schule.** Wir haben deshalb oben bereits durch die Klammerbemerkung, daß kongruente geometrische Gebilde von Schülern der Klasse 6 als nicht wesentlich voneinander verschieden, als äquivalente Vertreter einer geometrischen Figur angesehen werden **sollten und könnten,** vor pädagogisch schädlichen Illusionen warnen wollen. Im Mathematikunterricht der gesamten Oberstufe ist es jedoch notwendig, mit viel Geduld und Geschick und an immer neuen und anderen Beispielen den Schülern allmählich klarzumachen, welche Zusammenhänge mathematisch wesentlich sind. Bei der Behandlung des Stoffgebietes „2. Ähnlichkeit“ in Klasse 8 geht es in dieser Hinsicht darum, ihnen **rückschauend zu verdeutlichen,** was sie in Klasse 6 im Geometrieunterricht lernten und worin das Gleichartige und worin das Unterschiedliche beim Vorgehen in Klasse 8 besteht. Im Mathematikunterricht der allgemeinbildenden Schule ist der Aufbau der Geometrie nicht Unterrichtsgegenstand. Aber in ihm muß den Schülern eine solche mathematische

Grundbildung vermittelt werden, in der das gesamte geometrische Wissen der Schüler ein geordnetes Ganzes, ein System bildet, das in den Grundzügen dem in der modernen mathematischen Wissenschaft üblichen entspricht. Obwohl es sich hier also nicht um die Vermittlung von Kenntnissen und Erkenntnissen handelt, die von den Schülern unmittelbar angewandt werden können, gehören doch gewisse Einsichten in das System der äquiformen euklidischen Geometrie der Ebene und auch ein erstes Begreifen des Verfahrens der Verallgemeinerung und der Systematisierung ebenso zur in der sozialistischen Oberschule der DDR allen Schülern zu vermittelnden mathematischen Grundbildung wie beispielsweise das abfragbare und beim Lösen von bestimmten Konstruktionsaufgaben oder beim Beweisen anwendbare Faktenwissen über ähnliche Figuren.

Bei der Behandlung der **Ähnlichkeitsabbildungen** lernen die Schüler ein weiteres Beispiel dafür kennen, wie zunächst getrennt voneinander Untersuchtes unter übergreifenden Gesichtspunkten zusammengefaßt wird, wie — ähnlich wie bei den Zahlenbereichserweiterungen in den Klassen 6 und 7 — ein bewährtes Verfahren, ein bestimmtes Vorgehen mehrfach mit Erfolg angewendet werden kann und wie auf diese Weise neue Zusammenhänge sichtbar und neue Erkenntnisse gewonnen werden.

Der gesamte im neuen Lehrplan konzipierte Geometrielehrgang der zehnklassigen Oberschule beruht auf der Anwendung des Abbildungsprinzips. In Klasse 4 lernen die Schüler zunächst die Verschiebung, in Klasse 5 dann die Drehung und die Spiegelung an einer Geraden als **eindeutige Abbildungen der Ebene auf sich** kennen. Die Zusammenfassung dieser drei Arten von Abbildungen führt in Klasse 6 zur **ersten Verallgemeinerung**, nämlich zur Einführung des Begriffs der Bewegung. Mit seiner Hilfe wird die Kongruenz erklärt, so daß schließlich Bewegungen von den Schülern als Kongruenzabbildungen begriffen werden. In Klasse 7 werden die Kenntnisse über Kongruenzabbildungen und Kongruenz mehrfach angewendet und damit gefestigt, vor allem bei Beweisen und bei der Behandlung des Kreises. In Klasse 8 werden alle diese Kenntnisse wiederholt, bevor die Schüler in der zentrischen Streckung eine weitere eindeutige Abbildung der Ebene auf sich kennenlernen. Über das Zusammensetzen mehrerer zentrischer Streckungen und von zentrischen Streckungen mit einer Bewegung erfolgt eine **zweite Verallgemeinerung**, nämlich die Einführung des Begriffs der Ähnlichkeitsabbildung. Analog zum Vorgehen in Klasse 6 bei der Einführung des Kongruenzbegriffs wird schließlich der Begriff der Ähnlichkeit mit Hilfe des Begriffs der Ähnlichkeitsabbildung gewonnen. Indem die Bewegung ebenso wie die zentrische Streckung als Spezialfälle der Ähnlichkeitsabbildung und die Kongruenz als Spezialfall der Ähnlichkeit erkannt werden, erfolgt eine **Neustrukturierung des gesamten bis dahin angeeigneten Wissens der Schüler über eindeutige Abbildungen der Ebene auf sich.** Das Stoffgebiet „2. Ähnlichkeit" trägt also auch hinsichtlich der Anwendung des Abbildungsprinzips, das als eine Leitlinie den gesamten Geometrielehrgang der zehnklassigen Oberschule durchzieht, ausgesprochenen Systematisierungscharakter. Das gilt es im Unterricht ständig zu beachten. Dann erst können die vielfältigen im Stoff gelegenen Potenzen für die mathematische Bildung der Schüler voll ausgeschöpft werden.

Wenngleich sich die Bemühungen um Systematisierung des mathematischen Wissens und Könnens der Schüler bei der Behandlung des Stoffgebietes „2. Ähnlichkeit" auf die beiden bisher erörterten, stofflich-inhaltlich unmittelbar gegebenen Aspekte konzentrieren sollten, dürfen doch zumindest die beiden folgenden, mehr immanent im Stoff enthaltenen Problemkreise auch nicht übersehen werden.

Schon im Mathematikunterricht der Klassen 1 bis 5 zeichneten die Schüler mit Hilfe von Schablonen, später auch mit Lineal, Zeichendreiecken und Zirkel einfache geometrische Figuren. In den Klassen 6 und 7 wandten sie ihre neu erworbenen planimetrischen Kenntnisse in vielfältiger Weise beim **Konstruieren** von Dreiecken und Vierecken sowie von Kreisen und zugehörigen Tangenten an. Dabei wurden wichtige Fähigkeiten im konstruktiven Denken und grundlegende Fertigkeiten im Ausführen von geometrischen Konstruktionen entwickelt und ausgebildet. Darauf konnte bei der Behandlung der darstellenden Geometrie in Klasse 7, aber auch im Technischen Zeichnen aufgebaut werden. Zugleich erfuhren diese für die polytechnische Bildung und Erziehung außerordentlich wichtigen Fähigkeiten und Fertigkeiten im geometrischen Konstruieren hier eine entscheidende Weiterentwicklung. Mit der Behandlung des Stoffgebietes „2. Ähnlichkeit“ in Klasse 8 erreicht die systematische Einführung in das geometrische Konstruieren einen gewissen Abschluß, wenn von weiteren Anwendungen (z.B. beim Zeichnen von Graphen zu Funktionen oder im Stoffgebiet „2. Körperdarstellung und Körperberechnung“ in Klasse 10) hier einmal abgesehen wird. Auch das verpflichtet, den Unterricht so zu gestalten, daß die Fähigkeiten und Fertigkeiten im geometrischen Konstruieren einschließlich der dazu erforderlichen Wissenselemente und Verhaltensweisen zu einem System zusammengefaßt werden. Der Lehrplan bietet dazu viele Möglichkeiten, indem er beispielsweise im Abschnitt 2.1. die Streckenteilung, im Abschnitt 2.2. das Zusammensetzen zweier zentrischer Streckungen, im Abschnitt 2.3. das „Lösen von Konstruktionsaufgaben, bei denen zunächst eine zur gesuchten Figur ähnliche konstruiert werden muß“, und im Abschnitt 2.4. „einige geometrisch-konstruktive Anwendungen der Satzgruppe des Pythagoras“ fordert.[1]) Darüber hinaus sind unter den lehrplanmäßig vorgeschriebenen Anwendungen nicht zufällig auch Zeichengeräte genannt, z.B. der Storchschnabel, und es wird gefordert, auf den Maßstab sowie auf das Meßtischverfahren einzugehen.

Die Schüler wurden in Klasse 6 in das **Beweisen** mathematischer Aussagen eingeführt. In Klasse 7 wurden weitere Beweise geführt, zum Teil bereits von den Schülern weitgehend selbständig. Bei der Behandlung des Stoffgebietes „2. Ähnlichkeit“ wird das fortgesetzt. Der Lehrplan nennt einige Sätze und ihre Umkehrungen, die zu beweisen sind, und verlangt ausdrücklich: „Die Fähigkeiten der Schüler im selbständigen Führen kleinerer (direkter) Beweise sind durch geeignete Übungen weiterzuentwickeln.“[2]) Bei der Behandlung des Abschnitts „2.4. Die Satzgruppe des PYTHAGORAS“ erreicht diese Arbeit einen gewissen Höhepunkt, indem einmal der Höhensatz, der Kathetensatz und der Satz des PYTHAGORAS unter Verwendung von Sätzen über ähnliche Figuren hergeleitet werden, zum anderen die Einführung der bei gleichzeitiger Gültigkeit von Satz und Umkehrung dieses Satzes üblichen Sprechweisen „dann und nur dann, wenn“ beziehungsweise „genau dann, wenn“ erfolgt, zum dritten schließlich noch die Einführung in die indirekte Beweismethode vorgenommen wird. Speziell diese drei zuletzt genannten Lehrplanforderungen machen deutlich, daß auch auf dem Gebiete des Beweisens und Herleitens mathematischer Aussagen in Klasse 8 eine Systematisierung erforderlich ist. Nur am Rande erwähnt sei, daß auch hierin – nicht nur durch die Einordnung des lange Zeit hindurch selbständigen Stoffgebietes zur Satzgruppe des PYTHAGORAS in das Stoffgebiet „2. Ähnlichkeit“ – die „veränderte Stellung, Wertigkeit und ... Interpretation“[3]) dieses traditionellen Bestandteiles der Schulmathematik sichtbar wird.

Das **Stoffgebiet „3. Lineare Funktionen“** nimmt eine ähnlich zentrale Stellung im Mathematikunterricht der Klasse 8 und darüber hinaus im gesamten Mathematikunterricht der zehnklassigen Oberschule ein wie das soeben näher betrachtete über

[1]) Ebd., Seiten 60/62.
[2]) Ebd., Seite 60.
[3]) Vgl. das mit dem in Fußnote 1, Seite 9, gekennzeichneten Zitat aus dem Referat von M. HONECKER.

Ähnlichkeit und Ähnlichkeitsabbildungen. Der zusammenfassende und ergänzende Systematisierungscharakter dieses in der methodischen Literatur vielfach diskutierten Stoffgebietes ist so offenkundig, daß wir uns hier darauf beschränken können, einige wenige Hinweise zu geben.

Den inhaltlichen Schwerpunkt bildet wiederum der Abbildungsbegriff. Insofern stellt eine gründliche Systematisierung im vorangehenden Stoffgebiet zugleich die beste Vorbereitung auf die Behandlung dieses Stoffgebietes dar. Im Mittelpunkt der Systematisierungen stehen jetzt aber der Mengenbegriff und der Begriff der **eindeutigen Abbildung.** Die Begriffe „Menge", „Element einer Menge" und „Teilmenge" wurden im gesamten Mathematikunterricht bis einschließlich Klasse 8 so oft und in so vielfältigen Zusammenhängen benutzt, daß es durchaus genügt, wenn die entsprechenden Grundkenntnisse zu Beginn der Behandlung des Stoffgebietes „3. Lineare Funktionen" in einer relativ knappen Wiederholung, gestützt auf geeignet zusammengestellte außermathematische und auch den Schülern bekannte Beispiele aus der Mathematik, reaktiviert werden. Bei der Gewinnung des Begriffs der eindeutigen Abbildung sollte in erster Linie mit vielfältigen Beispielen und Gegenbeispielen für nicht eindeutige Abbildungen gearbeitet werden. Dabei ist es ratsam, auch an die im Geometrieunterricht von den Schülern gesammelten Erkenntnisse anzuknüpfen, insbesondere an die bei der Behandlung der darstellenden Geometrie und der Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen erworbenen. Durch Einordnung dieser geometrischen Beispiele in die nunmehr allgemein geführten Betrachtungen über mathematische Abbildungen sind nicht nur gut geeignete innermathematische Motivationen für das besondere Herausheben der eindeutigen Abbildungen aus der Menge der Abbildungen zu gewinnen, sondern erfährt — sozusagen von höherer Warte aus zurückschauend — auch das geometrische Wissen der Schüler erneut eine wertvolle Bereicherung.

Ein zweiter Ansatz für umfassende Systematisierungen liegt in der gemäß Abschnitt 3.3. und 3.4. des Lehrplanes vorzunehmenden weiterführenden Behandlung von **linearen Gleichungen.** Der Lehrplan schreibt bewußt keine Systematisierungsgesichtspunkte vor, da sich hier eine besonders günstige Gelegenheit bietet, jene Probleme in den Mittelpunkt der Wiederholung, Übung, Anwendung und Systematisierung zu rücken, die in der jeweiligen Klasse in erster Linie der Festigung bedürfen. Der Lehrer sollte sich also auf der Grundlage einer sorgfältigen Analyse der Lehrplanforderungen und des bei seinen Schülern erreichten Erfüllungsstandes genau überlegen, was er durch die Auswahl der Beispiele und Aufgaben in den Mittelpunkt dieser Arbeit rückt. Auf keinen Fall erscheint es günstig, auf vielen Gebieten durch einige wenige Beispiele nur anzutippen und nirgends gründlich und tiefschürfend vorzugehen. Die Skale der Möglichkeiten reicht von systematisierend-wiederholenden Betrachtungen, Übungen und Anwendungen zu den verschiedenen Zahlenbereichen und entsprechenden Rechnungen über das Umformen von Termen und das Arbeiten mit Variablen bis hin zu den Sachbezügen bei eingekleideten Gleichungen, also zum Beispiel zur Umfangs-, Flächeninhalts- und Rauminhaltsberechnung einschließlich der richtigen Verwendung der Einheiten bei Größen, zur direkten und zur umgekehrten Proportionalität und zur Prozentrechnung, aber auch bis zu außermathematischen Problemkreisen, etwa aus der Volkswirtschaft, der Physik, der Chemie usw. Nicht vernachlässigt werden darf — ganz gleich welcher konkreter Gegenstandsbereich zur Grundlage der im Zusammenhang mit der Arbeit am neuen Stoff erfolgenden Wiederholung und Systematisierung gewählt wird — die Weiterentwicklung des sprachlichen Ausdrucksvermögens der Schüler. Auch hier sind immer wieder systematisierende Übungen erforderlich.

Das letzte Stoffgebiet in Klasse 8, „**4. Flächen- und Rauminhaltsberechnung**", zählt

zu den traditionellen Stoffgebieten der Schulmathematik und erfuhr im neuen Lehrplan nach Inhalt und Funktion im Gesamtlehrgang keine grundlegende Veränderung gegenüber früher. Es ist offenkundig, daß es nur dann erfolgreich behandelt werden kann, wenn auf den im vorangegangenen Mathematikunterricht erworbenen Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten aufgebaut wird. Deshalb heißt es im Lehrplan auch: „Dieses Stoffgebiet setzt den Lehrgang Stereometrie aus den vorherigen Schuljahren mit der Behandlung einiger weiterer einfacher Körper fort und führt ihn zu einem vorläufigen Abschluß. Dabei ist das gesamte bisherige Wissen der Schüler über Flächeninhalts- und Volumenberechnung zusammenzufassen, zu ordnen und zu systematisieren."[1]) Wir haben dem an dieser Stelle nichts hinzuzufügen und verweisen daher auf die detaillierten Ausführungen zu diesem Stoffgebiet im Abschnitt 4. dieser „Unterrichtshilfen". Wir wollen lediglich noch darauf aufmerksam machen, daß im letzten Stoffgebiet der Klasse 10, „2. Körperdarstellung und Körperberechnung" eine weitere zusammenfassende Systematisierung der stereometrischen und darstellend-geometrischen Schülerkenntnisse vorgesehen ist, allerdings unter anderen Aspekten als in Klasse 8. Es ist daher empfehlenswert, wenn sich der Lehrer vor Beginn der Behandlung des letzten Stoffgebietes der Klasse 8 im Lehrplan der Klasse 10, im zugehörigen Lehrbuch und in den „Unterrichtshilfen" für diese Klassenstufe genau darüber orientiert, was dort als bekannt vorausgesetzt wird, was und in welcher Form dort systematisiert wird und mit welchen Zielsetzungen es erfolgt.
Zweifellos enthält der Lehrplan für den Mathematikunterricht der Klasse 8 noch eine Fülle von weiteren Problemen inhaltlicher Art, die eine genauere Betrachtung verdienen würden. Wir müssen uns ein Eingehen auf sie hier leider versagen, da – wie wir im Vorwort bereits sagten – die „Unterrichtshilfen" nur auf bestimmte Probleme aufmerksam machen, nicht aber den Anspruch erheben können, die mit der Behandlung bestimmter Stoffe zusammenhängenden mathematischen und methodischen Fragen auch nur annähernd vollständig und in relativ geschlossener Weise darzustellen. Wir haben uns für die Darlegung von einigen den gesamten Mathematikunterricht vertikal durchziehenden Problemkreisen entschlossen, weil wir – vom Ziel und Inhalt des Mathematikunterrichts in Klasse 8 ausgehend – die **Fragen der Systematisierung als besonders wichtig** ansehen, weil wir hoffen, dem Lehrer damit am ehesten den Blick weiten zu können für die Fülle der Fragen, die sich bei der Arbeit mit diesen „Unterrichtshilfen" immer dann auftun, wenn er zu entscheiden hat, ob er den gegebenen Empfehlungen und Ratschlägen in der für ihn und seine Klasse konkret vorliegenden Situation folgen kann bzw. in welcher Richtung und Form er Veränderungen vornehmen sollte, weil wir schließlich und nicht zuletzt bestrebt waren, hier nicht das zu wiederholen, was in den Einleitungen zu anderen Bänden dieser „Unterrichtshilfen" für das Fach Mathematik schon gesagt ist.

0.3. Zu einigen Fragen der Didaktik und der Methodik des Mathematikunterrichts in Klasse 8

Entsprechend der im Abschnitt 0.2. getroffenen Auswahl von stofflich-inhaltlichen Problemen unter dem einheitlichen Gesichtspunkt der Systematisierung wollen wir

[1]) *Lehrplan Mathematik – Klassen 5 bis 10*, Seite 75. A. a. O.

auch in diesem Abschnitt unser Hauptaugenmerk auf solche didaktisch-methodischen Fragen lenken, die mit der **Bereitstellung, Festigung und Systematisierung des lehrplanmäßig geforderten Wissens und Könnens** der Schüler zusammenhängen. Wir halten das nicht nur wegen einer möglichst anzustrebenden thematischen Übereinstimmung der beiden Abschnitte 0.2. und 0.3. für sinnvoll, sondern vor allem aus dem Grunde, weil die Aneignung von dauerhaftem, anwendungsfähigem und anwendungsbereitem, von solidem, tragfähigem und sicherem Wissen und Können ein langwieriger Prozeß ist, dessen Erfolg und Ergebnis bei aller Bedeutung der Erstaneignung keineswegs nur durch sie bestimmt wird. So wichtig es ist, durch gute Motivation und Vorbereitung auf das Neue bei den Schülern Interesse, Aufgeschlossenheit und eine positive Lernhaltung zu erzeugen, so bedeutsam methodisch gut gestaltete Neueinführungen sind, so wenig genügt es, wenn der Lehrer sich im Unterricht, in seiner didaktisch-methodischen Führung des Lernprozesses zwar mit aller Kraft auf diese Phasen des Gesamtprozesses konzentriert, den übrigen hingegen weniger Aufmerksamkeit widmet.

Es ist nicht unsere Aufgabe, hier das kurz darzulegen, was in jedem Lehrbuch der Didaktik über Wiederholung, Übung, Systematisierung usw. ausführlich steht und dort jederzeit nachgelesen werden kann. Uns geht es um einige **für den Mathematikunterricht wichtige Fragen** und dabei wiederum nur um solche, denen im Mathematikunterricht der Klasse 8 besondere Beachtung geschenkt werden sollte.

Wie wir im Abschnitt 0.2. ausführten, gibt es auf dieser Klassenstufe kein Stoffgebiet, das nicht auf ganz bestimmten Vorleistungen aus dem Unterricht auf vorangegangenen Klassenstufen aufbaut. Wir meinen damit nicht nur solche unerläßlich notwendigen allgemeinen Fähigkeiten und Fertigkeiten wie das sichere und schnelle Rechnen mit rationalen Zahlen oder ein gut entwickeltes Abstraktions-, Denk-, Ausdrucks- oder Raumvorstellungsvermögen. Daran muß kontinuierlich und bei jeder sich bietenden Gelegenheit gearbeitet werden. Wir meinen hier vor allem jenes relativ spezifische, nach Umfang und Tiefe genau bestimmbare mathematische Wissen und Können, das neben dem allgemeinen, dem grundlegenden zu einer bestimmten Zeit, an einer genau angebbaren Stelle im Unterrichtsprozeß vorausgesetzt werden und bei allen Schülern anwendungsbereit zur Verfügung stehen muß, damit sie sich den neuen Stoff mit Erfolg aneignen können. Wie G. FANGHÄNEL kürzlich in einer umfangreichen Untersuchung nachwies, können speziell in den Klassen 7 bis 9 sehr beträchtliche Verbesserungen der mathematischen Schülerleistungen ohne zusätzliche Sondermaßnahmen und im Rahmen der lehrplanmäßig vorgeschriebenen Zeit erzielt werden, wenn jenes **für die erfolgreiche Behandlung eines bestimmten Stoffgebietes notwendige Wissen und Können** rechtzeitig, planmäßig und systematisch reaktiviert wird. (Ohne auf weitere Einzelheiten eingehen zu können, sei angemerkt, daß G. FANGHÄNEL in seiner Arbeit den Begriff des für ein bestimmtes Stoffgebiet notwendigen Wissens und Könnens weiter faßt, als wir es hier tun; er bezieht zum Beispiel auch wesentliche Elemente des allgemeinen und grundlegenden Wissens und Könnens, das wir der Einfachheit halber unberücksichtigt lassen, mit ein.)

Die Bestimmung der einzelnen Elemente des jeweiligen notwendigen Wissens und Könnens für ein bestimmtes Stoffgebiet ist relativ unkompliziert, erfordert aber eine bis in die Einzelheit gehende inhaltliche und weitgehend auch methodische Vorwegnahme aller wesentlichen Phasen des Unterrichts durch den Lehrer.

Zwar stellt der Lehrplan bereits eine gewisse Vorprogrammierung des Gesamtablaufs des Unterrichts in einem bestimmten Stoffgebiet dar, aber schon ein Blick in das Lehrbuch zeigt, daß dort die didaktisch-methodische Aufbereitung des Stoffes viel weiter getrieben ist. Der Lehrplan läßt im allgemeinen noch offen, an welchen Beispielen die vorgesehenen mathematischen Erkenntnisse gewonnen werden. Er gibt auch keine Auskunft darüber, welche Definitionen und Sätze bei einer bestimmten Beweisführung benutzt werden, welche Kenntnisse aus dem vorangegangenen Unterricht für das Lösen solcher Aufgaben erforderlich sind, die mehr sind als beliebig austauschbare Übungsaufgaben, die zur Grundlage für wichtige Erklärungen und weitere Schritte im Unterricht gemacht werden sollen. Im Lehrplan sind an verschiedenen Stellen Hinweise auf unbedingt zu Wiederholendes zu finden. Damit ist aber keineswegs die Gesamtheit des für ein bestimmtes Stoffgebiet notwendigen Wissens und Könnens erfaßt. Im Lehrbuch dienen viele vorbereitende Fragen, Aufträge und Übungen der Reaktivierung notwendigen Wissens und Könnens für eine bestimmte Lerneinheit, allerdings dann auch direkt auf den im Lehrbuch eingeschlagenen Weg bezogen und auf die dort gewählten Beispiele zugeschnitten, die nicht immer und für jede Klasse als die geeignetsten angesehen werden dürfen. Dasselbe gilt für viele Hinweise und Empfehlungen in den „Unterrichtshilfen". Dem Lehrer sind damit zwar schon vielfältige Hilfen gegeben, aber die genaue Bestimmung des für seinen Unterricht und für seine Klasse zu reaktivierenden notwendigen Wissens und Könnens für ein bestimmtes Stoffgebiet kann nur er selber vornehmen.

Es ist eine im Mathematikunterricht immer wieder zu beobachtende Erscheinung, daß einige Schüler von einer bestimmten Stelle an den weiteren Ausführungen und Erklärungen nicht oder nur mit Mühe zu folgen vermögen, weil sie irgendeinen Zwischenschritt, eine Umformung, Hilfskonstruktion, einen Begriff o. ä. nicht verstanden haben. Merkt es der Lehrer rechtzeitig, so unterbricht er oftmals seine Erläuterungen und versucht, die sichtbar gewordene Lücke zu schließen. Der Erfolg ist allerdings meist recht zweifelhaft. Denn einmal mußte der auf ein bestimmtes Ziel hin gerichtete Weg verlassen, der begonnene Gedankengang also unterbrochen werden. Zum anderen erfolgt das Schließen der Lücken in den Schülerkenntnissen unvorbereitet, daher zumeist methodisch nicht sonderlich geschickt und auch nur selten anhand der am besten geeigneten Beispiele, auf jeden Fall aber unter dem Druck der enteilenden Zeit. Die Folge solcher „Hilfen" ist dann häufig, daß das Geplante nicht voll geschafft wird und wichtige Teile des Aneignungsprozesses entweder ganz wegfallen oder aber in die häusliche Arbeit der Schüler verlagert werden.

All das kann und sollte vermieden werden, wenn im Rahmen der **komplexen Unterrichtsvorbereitung** so weit gegangen wird, daß sich der Lehrer vor Beginn der Behandlung einer Stoffeinheit — zum Beispiel der für die nächsten 5 bis 10 oder 15 Unterrichtsstunden vorgesehenen — genaue Klarheit darüber verschafft, welche Kenntnisse, welche Fertigkeiten er bei allen Schülern unbedingt voraussetzen muß und zu welchem Zeitpunkt das der Fall ist. Dann kann er diese Kenntnisse, diese Fertigkeiten rechtzeitig, gezielt und systematisch reaktivieren.

Diese Forderung bedeutet — das sei ausdrücklich betont — allerdings nicht, daß der Lehrer im Rahmen der Komplexvorbereitung auf einen größeren Unterrichtsabschnitt auch bereits jede einzelne Übungs- und Anwendungsaufgabe lösen und sie dabei auf alle in ihr enthaltenen Probleme analysieren müßte. Eine solche überspitzte Forderung ist nicht nur nicht zu realisieren, sie ist in didaktisch-methodischer Hinsicht auch weitgehend wertlos. Es kommt uns vielmehr darauf an, die Knotenpunkte, die Eckpfeiler des ständig fortschreitenden Unterrichtsprozesses richtig und möglichst genau zu erfassen, um hier vor Überraschungen weitgehend gefeit zu sein.

Für die Reaktivierung des notwendigen Wissens und Könnens gibt es viele Verfahren. G. Fanghänel hat in seiner bereits erwähnten Arbeit festgestellt, daß keinem Verfahren gegenüber allen anderen der absolute Vorrang gebührt. Es haben sich aber einige wissenswerte Hinweise ergeben, die hier kurz genannt seien. Für leistungsschwächere und jüngere Schüler ist es offenbar günstiger, wenn die Reaktivierung vor Beginn der Behandlung des neuen Stoffgebietes — wenn dieses nicht zu umfangreich ist, also nicht wesentlich mehr als etwa 10 Unterrichtsstunden umfaßt — in einer Stunde oder auch in zwei bis drei aufeinander folgenden Stunden geschlossen, also explizite, erfolgt. Für leistungsstärkere und ältere Schüler erweist es sich im allgemeinen als günstiger, wenn in kleineren Quantitäten immer wieder innerhalb des fortschreitenden Unterrichts, also implizite, reaktiviert wird und dabei vor allem auch die sachlogischen Zusammenhänge mit in die Erinnerung zurückgerufen werden. Gemischte Formen, also teils explizite, teils implizite Reaktivierungen lassen im allgemeinen weder Vorteile noch Nachteile gegenüber den zuerst genannten „reinen" Formen erkennen. Sie sprechen besonders Durchschnittsschüler günstig an.

Während die Reaktivierung des für ein Stoffgebiet notwendigen Wissens und Könnens mit einer Systematisierung und Festigung von bereits einmal angeeignetem Stoff Hand in Hand geht und **vorbereitenden Charakter** trägt, stellt die **abschließende Wiederholung und Systematisierung in einem Stoffgebiet** im wesentlichen ein Ordnen des neu erworbenen Wissens und Könnens dar. Sie ist wohl die bekannteste und auch am häufigsten genutzte Systematisierungsform. Bei ihr kommt es vor allem nicht darauf an, noch einmal den im Unterricht bei der Erstaneignung, Übung und Anwendung beschrittenen Weg in schnellen, raschen Schritten zu durcheilen, sondern darauf, von der erreichten höheren Warte aus den zurückgelegten Weg so zu überschauen, die Verfahren der Erkenntnisgewinnung und Erkenntnissicherung den Schülern deutlich zu machen und zu zeigen, daß diese in gewisser Hinsicht Modellcharakter annehmen und für später in analoger Weise zu Erarbeitendes als Beispiel zur Verfügung stehen. Ferner kommt es darauf an, eine Differenzierung von wesentlichen Aussagen und von Hilfssätzen, von grundlegenden Begriffen und von Hilfsbegriffen vorzunehmen. Schließlich gilt es zu sichern, daß sich die Schüler tatsächlich das Wichtige, nicht das im Unterricht vielleicht einmal besonders interessant Gewesene, fest und dauerhaft einprägen.

Geht man von einer solchen Zielsetzung aus, dann wird deutlich, daß es nur in seltenen Fällen richtig ist, die abschließende Systematisierung und die Vorbereitung auf eine ebenfalls auf die letzten Unterrichtsstunden eines Stoffgebietes gelegte Klassenarbeit zu vereinen. Weitaus günstiger ist es, diese abschließende Systematisierung nach dem Schreiben der Klassenarbeit durchzuführen und sie eventuell schon als eine Art der Vorbereitung auf die Rückgabe und Besprechung der Arbeit zu nutzen. (Mit dieser Bemerkung soll allerdings nicht gesagt sein, daß es von uns prinzipiell als günstig angesehen wird, Klassenarbeiten erst am Abschluß der Behandlung eines Stoffgebietes zu schreiben.)

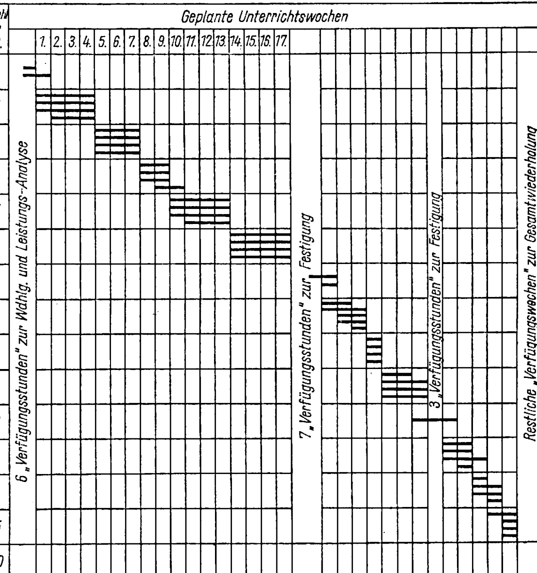
Abschließend wollen wir kurz auf **eine dritte Form des Systematisierens** hinweisen, auf eine Form, die im allgemeinen weder zu Beginn noch gegen Abschluß der Behandlung eines Stoffgebietes anzuwenden ist. Sie hat ihren günstigsten Platz vielmehr inmitten der Behandlung, und zwar beim Übergang von der Erarbeitung des neuen Stoffes zu seiner Festigung durch Übung.

Bekanntlich kommt es in der Mathematik sehr oft darauf an, **ein zu lösendes Problem auf ein bereits gelöstes zurückzuführen.** Bei der Einführung von Verfahren zur Lösung bestimmter Aufgaben wird im Unterricht auch meist so vorgegangen. Die Schüler folgen willig dem Gedankengang des Lehrers und akzeptieren dann auch das gewonnene Resultat, zum Beispiel eine Regel. Wenn sie aber selbständig Aufgaben lösen sollen, wenn sie dabei gar auf mehrere und zum Teil schon vor längerer Zeit erarbeitete Regeln zurückgreifen sollen, dann haben sie Schwierigkeiten. Diese Schwierigkeiten können, das zeigen Untersuchungen, die H. VOCKENBERG in jüngster Zeit durchgeführt hat, beträchtlich gemindert werden, wenn im fortschreitenden Unterricht den Schülern **in eingestreuten systematisierenden Betrachtungen das Prinzip der Rückführung des Neuen auf das bereits Bekannte** und Beherrschte gezeigt, an Beispielen erläutert und immer wieder bewußtgemacht wird. Das Üben selber erhält damit einen höheren Bewußtheitsgrad und kann auch leichter so gestaltet werden, daß nicht nur eine bestimmte Tätigkeit, sondern auch eine zweite, gegebenenfalls sogar eine wohlausgewählte und überlegte dritte geübt, oder besser: **systematisch mitgeübt** wird. Effekt und Intensität sind dabei erwiesenermaßen weit höher als bei quantitativer Anhäufung von mit relativ niedrigem Bewußtheitsgrad durchgeführten monotonen Übungen.

0.4. Bemerkungen zu Unterrichtsmitteln

Im „Gesamtausstattungsplan für Unterrichtsmittel" sind alle Unterrichtsmittel, die für die jeweilige Klasse vom Staatlichen Kontor für Unterrichtsmittel und Schulmöbel (SKUS) angeboten werden, enthalten. Der Gesamtausstattungsplan für Unterrichtsmittel der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule der DDR – Klassen 1 bis 10" löst den „Bedarfsplan" ab. Die Aufstellung für das Fach Mathematik ist im Teil 2 (Titel-Nr. 20 30 25) enthalten.
Die ständige Verbesserung der Ausstattung unserer Schulen mit Unterrichtsmitteln bringt es mit sich, daß der Lehrer nicht starr an den in dieser Unterrichtshilfe enthaltenen Empfehlungen für die Stoffverteilung und für die Unterrichtsgestaltung festhalten darf, sondern daß er seinen Unterricht unter Nutzung der Neuerwerbungen im Mathematikkabinett modifizieren sollte.
Wir möchten hervorheben, daß die Unterrichtsmittel für den Mathematikunterricht der Klasse 8 weniger für Illustrationszwecke und zur Veranschaulichung von räumlichen Beziehungen genutzt werden sollten – obwohl auch das, besonders bei der Behandlung des Stoffgebietes „4. Flächen- und Rauminhaltsberechnung" nicht überflüssig ist –, sondern in erster Linie als Mittel zur Intensivierung und Rationalisierung und bei der Systematisierung Verwendung finden sollten.
Einige neue Unterrichtsmittel haben in jüngster Zeit einen großen Einfluß auf die Methodik im Mathematikunterricht ausgeübt. Wir möchten in diesem Zusammenhang an den Tageslichtschreibprojektor „Polylux" erinnern, für den ständig neue Folien zentral entwickelt werden oder aber in Eigeninitiative der Lehrer entstehen. Einige Techniken, die mit diesem Gerät möglich sind, eröffnen ganz neue Wege für die Veranschaulichung von sonst nur schwer darzustellenden Sachverhalten. So können durch das Übereinanderlegen von Folien Entwicklungsprozesse, Körperschnitte, Klappungen und Mengenoperationen (Teilmengenbildung, Durchschnitt zweier Mengen usw.) dargestellt werden.
Grundlegende Ausführungen zur Funktion der Unterrichtsmittel kann der Leser dem Artikel von Prof. Dr. HORST WEISS: *Die Funktion der Unterrichtsmittel in der sozialistischen Schule* – erschienen in der Zeitschrift „Pädagogik", Jahrgang 25 (1970), Heft 9 – entnehmen.

Klasse 8			Graphische Übersicht über die Jahresstoffverteilung
	Stoffgebiet	Anzahl der Std.	Geplante Unterrichtswochen
1.1.	Grundlagen für das Arbeiten mit Variablen	3	
1.2.	Rechenoperationen mit Variablen	15	
2.1.	Der Strahlensatz	10	
2.2.	Zentrische Streckung	7	
2.3.	Ähnliche Figuren	17	
2.4.	Die Satzgruppe des Pythagoras	18	
3.1.	Der Funktionsbegriff	3	
3.2.	Lineare Funktionen	10	
3.3.	Nullstellen lin. Funktionen, lin. Gleichungen	4	
3.4.	Lösung linearer Gleichungen	11	
4.1.	Volumenvergleiche	3	
4.2.	Pyramiden	8	
4.3.	Kreiskegel	6	
4.4.	Kugel	5	
	30 Wochen zu je 4 Std.	120	



1. Arbeiten mit Variablen

1.0. Vorbemerkungen

1.0.1. Stellung, Bedeutung, Ziele

Mit dem Stoffgebiet „1. Arbeiten mit Variablen“ wird in der Klasse 8 die Arbeit mit Variablen folgerichtig weitergeführt. Vom ersten Schuljahr an sind die Schüler in den verschiedensten Stoffgebieten mit Variablen vertraut gemacht worden und haben sich in wachsendem Maße der Variablen bedienen gelernt.
So wurden einfache Terme mit Variablen durch Einsetzen von gegebenen natürlichen Zahlen berechnet, aber auch bei der Erörterung des Lösungsweges von Text- und Sachaufgaben wurden schon Variablen verwendet. Bereits in der Unterstufe übten sich die Schüler darin, einfache Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen durch Einsetzen von natürlichen Zahlen in wahre Aussagen zu überführen bzw. Entscheidungen über die Lösbarkeit im Bereich der natürlichen Zahlen überhaupt zu treffen.
In der Mittelstufe wurden die Fertigkeiten der Schüler im Berechnen von Termen weiterentwickelt, indem die Variablen nun auch mit Elementen des Bereichs der gebrochenen Zahlen belegt wurden. Darüber hinaus lernten die Schüler, die Variablen zur formalisierten Darstellung von Rechengesetzen im Bereich der natürlichen und gebrochenen Zahlen zu nutzen. So wurden in den Klassen 5 und 6 die Kommutativgesetze der Addition und Multiplikation, die Assoziativgesetze der Addition und Multiplikation und das Distributivgesetz im Bereich der natürlichen Zahlen und im Bereich der gebrochenen Zahlen mit Hilfe von Variablen dargestellt.
In Klasse 6 wurde die Anwendung von Variablen auf die Formulierung von Sätzen und Definitionen erweitert.
Von Anfang an wurden Variablen auch zur Bezeichnung von Repräsentanten geometrischer Gebilde verwendet. Dadurch konnten Definitionen, z. B. die Definitionen der Verschiebung, Drehung und Spiegelung in Klasse 6, sowie Sätze und ihre Umkehrungen knapp und übersichtlich formuliert werden. Überall dort, wo die Schüler Beweise verstehen lernen sollten und die Beweisführung selbst üben mußten, spielten die Variablen eine bedeutende Rolle. Ein weiteres Anwendungsgebiet erschloß sich den Schülern auch bei der Darstellung funktionaler Zusammenhänge in Formeln. Das gilt besonders im Geometrieunterricht für Flächeninhalts- und Volumenformeln, aber auch in Arithmetik. In der Klasse 7 führten die Schüler Betrachtungen über die Abhängigkeit der Existenz bzw. Anzahl von Lösungen einer linearen Gleichung vom Variablen-Grundbereich durch. Sie lernten dort auch bereits den Begriff „Koeffizient“ kennen und mußten Glieder mit gleichen Variablen zusammenfassen, um lineare Gleichungen zur Lösung zu führen.
Auch in anderen Fächern lernten die Schüler, Darstellungen mit Variablen zu verstehen und mit Variablen zu arbeiten. So wurden im Fach „Einführung in die sozialistische Produktion“ in „Grundlagen der mechanischen Technologie“ die Variablen in schematischen Darstellungen und für Lösungsformeln verwendet. Im Fach Physik wurden von Klasse 7 an die für die Darstellung physikalischer Zusammenhänge notwendigen De-

finitionen und die in Versuchen gewonnenen Erkenntnisse über Naturgesetze mit Hilfe von Variablen formuliert.

Zusammenfassend kann festgestellt werden:

Zu Beginn der 8. Klasse sind die Schüler mit dem Variablenbegriff vertraut, ohne daß er aber exakt definiert worden ist. Die Verwendung von Variablen in Termen, Gleichungen, Ungleichungen, zur Darstellung mathematischer Zusammenhänge, zur Formulierung von Sätzen und zum Führen von Beweisen hat dazu beigetragen, die Schüler allmählich, aber planmäßig an mathematische Denk- und Arbeitsweisen heranzuführen und ihr funktionales Denken zu entwickeln und zu schulen.

Die Verwendung von Variablen in anderen Unterrichtsfächern war geeignet, den Schülern eine erste, wenn auch noch bescheidene Vorstellung von der universellen Bedeutung der Mathematik zu geben. Das alles muß bedacht werden, wenn man die Stellung dieses Stoffgebietes im gesamten Lehrgang Mathematik der zehnklassigen polytechnischen Oberschule kennzeichnen will. Im Lehrplan Klasse 8 wird bewußt die Sonderstellung des Stoffgebietes „1. Arbeiten mit Variablen“ hervorgehoben. Es heißt dort auf Seite 68: „Dieses Stoffgebiet hat – im Gegensatz zu allen anderen – **nicht die Einführung in einen neuen mathematischen Gegenstandsbereich** zum Inhalt, sondern bezweckt die Entwicklung eines Kalküls, eines Systems von Regeln für die Umformung von Termen mit Variablen **auf der Basis des Rechnens mit rationalen Zahlen.**“ (Vom Verfasser hervorgehoben.) Es geht also vor allem darum, das bisher Gelernte zu vertiefen, zu systematisieren und unter Verarbeitung des vorhandenen Wissens weiterzuführen.

Dabei muß das Dominieren solcher didaktischer Funktionen wie Systematisierung und Festigung in dem ganzen Stoffgebiet natürlich auch zu bestimmten Folgerungen für die methodische Gestaltung des Unterrichts führen.

Im Sinne der marxistisch-leninistischen Auffassung von der sozialistischen Persönlichkeitsentwicklung im Prozeß der Arbeit bieten sich auch im Stoffgebiet „Arbeiten mit Variablen“ große Möglichkeiten für eine aktive Mitarbeit der Schüler im Unterrichtsprozeß, für die Erzielung eines hohen Grades von Selbständigkeit bei der Aneignung neuen Wissens und dem Erwerb neuer Fähigkeiten und Fertigkeiten.

Dazu ist es aber notwendig, daß zu Beginn der Behandlung des Stoffgebietes wichtige Kenntnisse, die die Schüler in den zurückliegenden Schuljahren erworben haben, reaktiviert werden. Das sind vor allem einfache Grundlagen für mengentheoretische Betrachtungen, also die Begriffe „Menge“, „Element“ (von) und „Teilmenge“ (von) sowie aus der Gleichungslehre in Klasse 6 die Begriffe „Term“, „Gleichung“, „Ungleichung“, „Grundbereich einer Variablen“, „erfüllen“, „lösen“ bzw. „Lösung“ und „Lösungsmenge“ sowie die Eigenschaften der Addition und Multiplikation rationaler Zahlen, die ebenfalls in Klasse 7 behandelt wurden. Durch diese Zusammenfassung einiger Grundbegriffe der Mengenlehre und der Gleichungslehre wird zugleich auch eine wichtige Vorarbeit für das Stoffgebiet „3. Lineare Funktionen“ in Klasse 8 geleistet.

Als Grundlage für die weitere Arbeit muß aber vor allem gesichert sein, daß jeder Schüler die Variable als Zeichen für ein Element eines vorgegebenen Zahlenbereiches oder anderer Variablen-Grundbereiche erfaßt hat. Die Schüler müssen ausgeprägte Fertigkeiten im Arbeiten mit Variablen erwerben, sie müssen den Wert von Termen mit Variablen bei Vorgabe bestimmter Elemente aus einem Variablen-Grundbereich berechnen können, sie sollen Sicherheit im Überführen von Gleichungen bzw. Ungleichungen mit Variablen in Aussagen bei unterschiedlichen Lösungsgrundbereichen erwerben und sich ein System von Regeln zur Umformung von Termen auf der Grundlage des Rechnens mit rationalen Zahlen erarbeiten, das es ihnen ermöglicht, diese Terme zu vereinfachen oder in eine gewünschte andere Form zu bringen.

Sehr wichtig ist es auch, daß die Schüler lernen, die Struktur eines vorgegebenen Terms zu erfassen und zu beschreiben. In diesem Zusammenhang ist es möglich und notwendig, die sprachliche Ausdrucksfähigkeit der Schüler weiterzuentwickeln und die Bedeutung einzelner Fachtermini in ihrer richtigen Verwendung zu festigen, indem man Terme in Worte fassen bzw. einen sprachlich formulierten mathematischen Zusammenhang durch einen Term darstellen läßt.
Durch die Erfüllung aller genannten Aufgaben werden die Voraussetzungen dafür geschaffen, daß die Schüler in den beiden Abschlußklassen ihr mathematisches Grundwissen im Sinne der Herausbildung sozialistischer Persönlichkeiten abrunden und festigen. Dazu gehört auch, daß sich die Schüler durch den sicheren Umgang mit Variablen das Rüstzeug erwerben, um Beweise und Herleitungen in der nunmehr notwendigen Kompliziertheit verstehen und sogar selber führen zu können.
Von größter Bedeutung für die lehrplanmäßige Behandlung des Stoffgebietes „1. Arbeiten mit Variablen“ ist es, daß der gesamte Stoff in seiner Komplexität erfaßt wird, daß man bei der Planung des Lernprozesses den dialektischen Zusammenhang von Ziel, Inhalt und Methode richtig erkennt und beachtet. Nachdem, ausgehend von der allgemeinen Zielsetzung – der Herausbildung allseitig entwickelter sozialistischer Persönlichkeiten –, bestimmte Teilziele für die Erziehung und mathematische Bildung der Schüler im 8. Schuljahr im Lehrplan konkret und präzis formuliert worden sind, ist es nun Aufgabe des Lehrers, für die Zuordnung einzelner Erziehungsziele zu ganz bestimmten Stoffabschnitten, Lerneinheiten und Unterrichtsstunden das Optimum zu finden. Dazu sollen Anregungen und Hinweise gegeben werden, die dann vom Lehrer entsprechend der konkreten Klassensituation verwertet werden können.
Für folgende auf Seite 30 des Lehrplans für Mathematik Klassen 5 bis 10 (Titel-Nr. 00 30 18) festgelegten Erziehungsaufgaben muß der Lehrer auch im Stoffgebiet „1. Arbeit mit Variablen“ einen wesentlichen Beitrag leisten:

1. „... die Bedeutung der Mathematik für jeden gebildeten Bürger unseres Staates verständlich und überzeugend darzulegen und das Interesse der Schüler an dieser Wissenschaft zu wecken und bei ihnen eine positive Lernhaltung zu entwickeln“;
2. „... zu verdeutlichen, welche wichtige Rolle die Mathematik im Leben der menschlichen Gesellschaft spielt“;
3. zu zeigen, „... daß der Mensch auch die Mathematik benutzt und ständig weiterentwickelt, um die Welt zu erkennen und zu verändern, um sein Wissen über die Dinge und Erscheinungen der objektiven Realität zu erhöhen, ihre Gesetze zu erforschen und somit zum bewußten Gestalter seines Lebens zu werden“.
4. herauszuarbeiten: „Die Mathematik ist ... eben durchaus keine ‚unpolitische‘ Wissenschaft – und der Mathematiker arbeitet genausowenig wie etwa der Physiker oder Chemiker in einem politisch ‚leeren Raum‘ “.

Eine erzieherische Funktion in dem oben genannten Sinne kommt besonders dem Stoffabschnitt „1.1. Grundlagen für das Arbeiten mit Variablen“ sowie im Stoffabschnitt „1.2. Rechenoperationen unter Verwendung von Variablen“ der Lerneinheit „Beispiele für Beweisführungen unter Verwendung von Variablen zu“.
An der vielseitigen Verwendbarkeit der Variablen in allen Bereichen der Technik, der Naturwissenschaften, aber auch der Gesellschaftswissenschaften kann den Schülern die große Rolle der Mathematik für unsere sozialistische Gesellschaft deutlich gemacht werden. Davon ausgehend kann der Mathematiklehrer auf die Lernhaltung der Schüler einwirken und die große Bedeutung einer soliden mathematischen Bildung für jeden Bürger unseres Staates darlegen. Gleichzeitig kann den Schülern gezeigt werden, wie mit Hilfe mathematischer Symbolik objektive Gesetzmäßigkeiten in Natur und Gesell-

schaft klar und knapp dargestellt werden. Durch die Herausarbeitung der gleichartigen Struktur verschiedenster realer Sachverhalte werden der hohe Abstraktionsgrad, die Universalität und Rationalität mathematischer Denk- und Arbeitsweisen deutlich. Aus der universellen Verwendbarkeit der Mathematik läßt sich die hohe Verantwortung des Mathematikers für die Anwendung seiner wissenschaftlichen Erkenntnisse im Sinne des gesellschaftlichen Fortschritts ableiten.
Auch zur weltanschaulichen und intellektuellen Bildung kann und muß das Stoffgebiet „1. Arbeiten mit Variablen" beitragen, indem durch den notwendigen hohen Abstraktionsprozeß das Abstraktionsvermögen der Schüler weiter entwickelt wird. Durch die Formulierung von Rechenregeln, Algorithmen und Formeln, durch die Interpretation von Variablen, durch die Notwendigkeit, einen Variablen-Grundbereich zu definieren, vollziehen und erleben die Schüler ständig die Einheit von Konkretem und Abstraktem, von Besonderem und Allgemeinem.
Zuletzt sei auch noch auf die Potenzen des Stoffgebietes für die Entwicklung wichtiger Charakterqualitäten hingewiesen. Die Notwendigkeit einer übersichtlichen Darstellung, die zu fordernde Genauigkeit beim Schreiben mathematischer Symbole, die beim Schüler zu erzielende Einsicht in die Zweckmäßigkeit einer ganz bestimmten Anordnung der Glieder und Faktoren tragen dazu bei, das ästhetische Gefühl der Schüler zu verstärken und bei ihnen Einsichten in die dialektische Einheit von Inhalt und Form vorbereiten zu helfen.
Besonders bei der Verwendung von Variablen für Beweisführungen müssen die Schüler Zielstrebigkeit, Ideenreichtum und Beharrlichkeit entwickeln. Auch die kritische und selbstkritische Haltung der Schüler wird im Stoffgebiet „1. Arbeiten mit Variablen" weiter gefördert. Ständig müssen sie angehalten werden, ihre mit Hilfe von Variablen und Quantifikatoren gemachten Aussagen durch Einsetzen bestimmter Elemente aus dem vorgegebenen Variablen-Grundbereich zu überprüfen. Dabei muß immer wieder betont werden, daß zwar ein Gegenbeispiel genügt, um nachzuweisen, daß eine für alle Elemente formulierte Aussage falsch ist, daß aber umgekehrt auch noch so viele Beispiele **nicht** ausreichen, um die Wahrheit einer solchen Aussage zu beweisen.
Ganz besonders wird im Lehrplan darauf hingewiesen, wie wichtig es ist, die Liebe zur Mathematik und das Interesse für sie bei den Schülern zu wecken bzw. zu erhalten. Dazu ist es notwendig, daß wir den Schülern im Unterricht immer wieder Erfolgserlebnisse verschaffen, daß jeder Schüler selbst spürt, wie sein Wissen sich ständig erweitert, wie seine Fähigkeiten und Fertigkeiten sich entwickeln.
Das heißt aber auch, dafür zu sorgen, daß sein Wissen stets anwendungsbereit bleibt. In diesem Zusammenhang sei auf die Möglichkeiten der immanenten Wiederholung hingewiesen. So werden im Stoffabschnitt 1.1. das Rechnen mit gebrochenen und rationalen Zahlen, Eigenschaften der Addition und Multiplikation rationaler Zahlen, wichtige geometrische Grundbegriffe sowie Begriffe und Fertigkeiten aus der Gleichungslehre wiederholt bzw. gefestigt. Im Stoffabschnitt 1.2. finden wir besonders gute Möglichkeiten, die Übungen im Rechnen mit gebrochenen und rationalen Zahlen fortzusetzen.
Dabei sollte man in Verfolgung der Leitlinie „Rationalisierung der geistigen Arbeit" die Schüler dazu anhalten, den Rechenstab und die Zahlentafel zu verwenden. Nicht zuletzt sei darauf hingewiesen, daß der Lehrer auch in diesem Stoffgebiet die Aufgabe hat, an der muttersprachlichen Bildung und Erziehung der Schüler mitzuwirken. Unter Beachtung der dialektischen Einheit von Sprache und Denken sollte er jede Gelegenheit nutzen, um die Lösung von Aufgaben kommentieren, das verwendete Verfahren begründen sowie die Struktur von Termen beschreiben zu lassen.

1.0.2. Literaturhinweise

Artikel in der Fachzeitschrift „Mathematik in der Schule“

(1) ILGNER, K.: *Über einen Unterrichtsversuch zur Behandlung der Gleichungslehre in der Klasse 7.* Jahrgang 2 (1964), Heft 6.

(2) JÄKEL, E.: *Didaktische Differenzierung auf der Grundlage langfristiger Fehleranalysen im Mathematikunterricht der Klasse 8.* Jahrgang 10 (1972), Heft 11.

(3) KERBER, H. J.: *Einige Betrachtungen zu Fragen der Einheit von Bildung und Erziehung im Mathematikunterricht.* Jahrgang 12 (1974), Heft 12.

(4) KRÖTENHEERDT, M./SCHWARZ, E./WALSCH, W.: *Vorschläge zur Ergänzung der Aufgabenteile in den Lehrbüchern.* Jahrgang 14 (1976), Heft 9.

(5) LORENZ, G.: *Zur Bedeutung eines möglichst rationellen Arbeitens im Mathematikunterricht.* Jahrgang 9 (1971), Heft 10.

(6) LORENZ, G./PIETZSCH, G.: *Das Festigen.* Jahrgang 12 (1974), Heft 2.

(7) REHM, M.: *Hinweise zur Behandlung des Stoffgebietes „1. Arbeiten mit Variablen“ in Klasse 8 nach dem neuen Lehrplan für Mathematik der Klassen 6 bis 8.* Jahrgang 7 (1969), Heft 8.

(8) REHM, M.: *Zur Nutzung von „Reserven“ beim Arbeiten mit Variablen in Klasse 8.* Jahrgang 12 (1974), Heft 12.

(9) TIETZ, W.: *Über sprachlich-logische Schulung im Mathematikunterricht.* Teil 1: Jahrgang 11 (1973), Heft 10; Teil 2: Jahrgang 12 (1974), Heft 3.

(10) WEBER, K.: *Neue Lehrpläne für den Mathematikunterricht der Klassen 6, 7 und 8.* Jahrgang 7 (1969), Heft 1.

(11) WINKLER, H.: *Vorschläge zur Verbesserung des Unterrichts bei der Behandlung des Stoffgebietes „Arbeiten mit Variablen“.* Jahrgang 6 (1968), Heft 5.

1.0.3. Vorschlag einer Stoffverteilung für das Stoffgebiet „Arbeiten mit Variablen“

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
1.1. Stoffeinheit: Grundlagen für das Arbeiten mit Variablen (3 Stunden)						
1.1.1. Grundlagen für das Arbeiten mit Variablen (LE 1, 2, 3)	3	4 bis 7	32	Darstellung funktionaler Zusammenhänge mit Hilfe von Variablen; Einsetzen von Zahlen für die Variablen in Termen; Berechnen des Wertes von Termen; Überführen von Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen in Aussagen durch Einsetzen von Elementen aus verschiedenen Grundbereichen; Untersuchen des Wahrheitswertes von Aussagen; Beispiele für das Beschreiben mathematischer Zusammenhänge mit Hilfe von Variablen und unter Verwendung von Quantifikatoren	Das Lesen von Formeln aus dem Bereich der Mathematik und Physik; Symbole für mathematische und physikalische Größen; Die Begriffe „Term“, „Gleichung“, „Ungleichung“, „Lösungsmenge“; Lösen von Gleichungen mit einer Variablen; Rechengesetze im Bereich der rationalen Zahlen	Zahlentafel Arbeitsblatt

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
1.2. Stoffeinheit: Rechenoperationen unter Verwendung von Variablen (15 Stunden)						
1.2.1. Vielfachbildung, Addieren und Subtrahieren unter Verwendung von Variablen (LE 4)	1	7 und 8	37	Begriffe: Glieder einer Summe; Vielfaches einer Variablen; Ordnen einer Summe; Zusammenfassen von Gliedern mit gleichen Variablen auf Grund des Distributivgesetzes für rationale Zahlen	Koeffizient einer Variablen; Summe; Addition und Subtraktion rationaler Zahlen; einander entgegengesetzte rationale Zahlen; Lösen von Gleichungen mit einer Variablen; Rechengesetze im Bereich der rationalen Zahlen	
1.2.2. Addition und Subtraktion von Summen (LE 5, 6, 7)	4	8 bis 12	38	Finden und Beweisen von Sätzen für das Auflösen von Klammern; Übungen im Addieren und Subtrahieren von Summen; das Setzen von Klammern; das Auflösen von mehrfachen Klammern	Addition rationaler Zahlen, auch in der Form $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ und in Dezimalbruchdarstellung; Berechnen des Wertes von Termen durch Einsetzen von rationalen Zahlen für Variablen; Rechengesetze für rationale Zahlen	Arbeitsblatt
1.2.3. Multiplizieren und Dividieren von eingliedrigen Ausdrücken mit eingliedrigen Ausdrücken bzw. durch eingliedrige Ausdrücke (LE 8, 9)	2	12 bis 14	41	Erarbeiten von Schrittfolgen für die Multiplikation und Division; Multiplizieren bzw. Dividieren von Potenzen mit gleichen Variablen als Basen	Multiplikation und Division gebrochener Zahlen in der Form gemeiner Brüche und in Dezimalbruchdarstellung; Das Reziproke einer rationalen Zahl; Multiplizieren und Dividieren mit dem Rechenstab; Die Potenzschreibweise für Produkte aus gleichen Faktoren; Begriffe: „Basis“, „Exponent“	Rechenstab

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichts-mittel
1.2.4. Umformen von Summen in Produkte durch Ausklammern (LE 10)	2	14	43	Einführung des Begriffs „ausklammern“; Beschreibung der Struktur von Termen; Anwendung des Distributivgesetzes zur Umformung von Summen in Produkte; Übungen im Multiplizieren und Dividieren unter Verwendung von Variablen	Zerlegen von Produkten und Faktoren; Begriffe: „Summe“, „Summand“, „Produkt“, „Faktor“; Multiplikation und Division gebrochener Zahlen in der Form gemeiner Brüche und in Dezimalbruchdarstellung; Addition und Subtraktion unter Verwendung von Variablen	
1.2.5. Multiplizieren von Summen mit Summen (LE 11)	3	15	45	Beweis zum Satz über die Multiplikation zweier zweigliedriger Summen; Übungen im Multiplizieren von Summen mit Summen unter Verwendung von Variablen; Multiplikation von zweigliedrigen mit dreigliedrigen Summen	Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division unter Verwendung von Variablen; Rechnen mit rationalen Zahlen; Multiplizieren und Dividieren mit dem Rechenstab	Rechenstab
1.2.6. Beweisführungen unter Verwendung von Variablen (LE 12)	1	16	47	Beweis von Sätzen, die mit Hilfe gebundener Variablen formuliert wurden; Beweis einiger Sätze über natürliche Zahlen	Rechengesetze im Bereich der rationalen Zahlen; Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen	
1.2.7. Leistungskontrolle und Rückgabe der Arbeit	2		49			

1.1. Grundlagen für das Arbeiten mit Variablen (3 Stunden; Lerneinheiten A 1 bis 3)

Dieser Stoffeinheit kommt in mehrfacher Hinsicht eine große Bedeutung zu:

1. Der Lehrer muß sie nach der relativ langen Ferienzeit nutzen, um an die vorhandenen Kenntnisse der Schüler anzuknüpfen, diese am Anfang des neuen Schuljahres zu reaktivieren und somit die Verbindung zwischen Bekanntem und neu zu Vermittelndem herzustellen.
2. Das Verständnis der Schüler für den Variablenbegriff muß vertieft werden, indem auf seine exakte Definition in Klasse 9 hingearbeitet wird. Immer wieder muß den Schülern beim Arbeiten mit Variablen bewußtgemacht werden, daß sie hierbei mit Zeichen für beliebige Elemente einer vorgegebenen Menge umgehen. Sie werden dann um so besser einsehen, daß in jedem Falle die Angabe des Variablen-Grundbereiches notwendig ist und daß Umformungen von Termen nur auf Grund derjenigen Rechengesetze erfolgen können, die für den angegebenen Variablen-Grundbereich, d. h. in Klasse 8 für den Bereich der rationalen Zahlen, erklärt sind.
3. Wegen des hohen Grades der Verallgemeinerung und der Abstraktion ist eine gründliche und für das ganze Stoffgebiet wirksam werdende Motivation notwendig, damit den Schülern über dem aus Gründen der Rationalisierung anzustrebenden Formalismus beim Umformen von Termen nicht der Blick für die Praxisbezogenheit ihrer Tätigkeit verlorengeht. In diesem Zusammenhang muß den Schülern auch wieder einmal bewußtgemacht werden, welche große Rolle die Mathematik in Wissenschaft und Technik spielt und welche Forderungen sich daraus für jeden einzelnen Schüler ergeben, wenn er mithelfen will, unser sozialistisches Vaterland wirtschaftlich und politisch zu stärken.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.1.1.: Die Verwendung von Variablen – Berechnung von verschiedenen Größen mit Hilfe von Formeln – Zusammenstellung bisher verwendeter Variablen-Grundbereiche (Lerneinheit A 1)

Hier geht es vor allem darum, an das von den Schülern bisher erworbene Wissen anzuknüpfen und ihre Fertigkeiten im Arbeiten mit Variablen zu reaktivieren. Dabei kann gleichzeitig ein wichtiger Beitrag zur politisch-moralischen Erziehung der Schüler geleistet und eine positive Lernhaltung zum ganzen Stoffgebiet geschaffen werden. Dazu wird folgender Unterrichtsverlauf vorgeschlagen:

Gliederung:

(1) Beispiele für die vielseitige Verwendung von Variablen
(2) Zusammenstellung bisher verwendeter Variablen-Grundbereiche
(3) Übungen im Berechnen von Größen mit Hilfe von Formeln

Methodische Hinweise:

Zu (1): Die Schüler haben für das beginnende Schuljahr neue Lehrbücher erhalten, die sie nun zum ersten Male im Unterricht verwenden. Den Reiz des Neuen nutzend, sollte der Lehrer deshalb das neue Mathematiklehrbuch kurz betrachten lassen und die Schüler besonders auf das Bild „Papyrus mit mathematischem Text“ hinweisen. An die Abbildung und die Erfahrung der Schüler anknüpfend, sollte im Unterrichtsgespräch der große Wert der Variablen für die knappe, präzise und übersichtliche Darstellung mathematischer Sachverhalte herausgearbeitet werden. Besonders deutlich läßt sich dieser Vorteil am Problem der Speicherung menschlichen Wissens sichtbar machen. Der Lehrer könnte dazu im Nachschlagewerk „Tabellen und Formeln" folgende Formeln aufsuchen und in einem Tafelbild zusammenstellen lassen:

Seite	Formel
67	$s = v \cdot t$
68	$W = F \cdot s$
32	$A = a \cdot b$
32	$A = g \cdot h_g$

Vorschlag für Tafelbild und Hefteintrag:

Beispiel für die Verwendung von Variablen

Sachverhalt	Formel
Berechnung der Arbeit	$W = F \cdot s$
des Weges	$s = v \cdot t$
des Rechteckflächeninhalts	$A = a \cdot b$
des Parallelogrammflächeninhalts	$A = g \cdot h_g$
Ergebnis: Mit Hilfe der Variablen erkennen wir: Alle Gleichungen haben denselben Aufbau.	

Zu (2): Im Unterrichtsgespräch wird herausgearbeitet, daß die unterschiedlichsten Sachverhalte zu Gleichungen geführt haben, die in ihrer mathematischen Struktur völlig übereinstimmen, und daß diese Erkenntnis für die Rationalisierung der geistigen Arbeit wichtig und notwendig ist. Den Schülern wird an den vorliegenden Beispielen bewußtgemacht, daß sie je nach Sachverhalt unterschiedliche Arten von Größen bzw. Zahlen aus verschiedenen Zahlenbereichen anstelle der Variablen eingesetzt haben. Es wird die Übersicht im Beispiel A4 (Lb 5) gelesen, wobei der Lehrer an Beispielen verdeutlichen sollte, wie auch geometrische Grundbegriffe als Variablen-Grundbreiche verwendet werden.
Zu (3): Mit dem Hinweis, daß man Formelsammlungen nur verwenden kann, wenn man in der Lage ist, für die Variablen Größen bzw. Zahlen aus dem vorgegebenen Variablen-Grundbereich richtig einzusetzen und die Rechenoperationen in der vorgegebenen Reihenfolge auszuführen, wird die Motivation für die anschließende Übungsphase gegeben. Für die Übung eignen sich Aufgabe a2 (Lb 98) und bei Verwendung des Rechenstabes Aufgabe a4 (Lb 98).
Eine Aufgabe wird an der Tafel jeweils vorgerechnet, die anderen werden dann von den Schülern selbständig im Heft gelöst. Als Hausaufgabe wird Aufgabe a6 (Lb 98) empfohlen. Außerdem sollten die Schüler den Auftrag erhalten, die Lerneinheit A2 (Lb 5 und 6) durchzulesen.
Die Stunde sollte mit einer Zusammenfassung durch den Lehrer beendet werden. Dem Schüler wird noch einmal der Stundenbeginn ins Gedächtnis zurückgerufen, der gezeigt

hat, daß alle Werktätigen in steigendem Maße mathematische Kenntnisse benötigen, daß dabei der sichere Umgang mit Variablen unerläßlich ist und daß die Unterrichtsarbeit in den nächsten Wochen zur Erreichung dieses Zieles beitragen soll.
Dieser kurze Lehrervortrag sollte gründlich durchdacht und vorbereitet werden, damit es wirklich gelingt, die Schüler auch emotional anzusprechen und mitzureißen.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.1.1.: Überführen von Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen in Aussagen durch Einsetzen von Zahlen (Lerneinheit A 2)

Die Begriffe „Term“, „Gleichung“, „Ungleichung“, „Lösung“, „Lösungsmenge“ werden wiederholt. Die Abhängigkeit der Lösungsmenge vom Grundbereich wird erörtert.

Gliederung:

(1) Übung im Berechnen von Termen
(2) Die Entstehung von Aussagen aus Gleichungen bzw. Ungleichungen mit einer Variablen
(3) Die Abhängigkeit der Lösungsmenge vom vorgegebenen Variablen-Grundbereich
(4) Übungen zur Untersuchung des Wahrheitswertes von Aussagen, die durch Belegung aller Variablen entstanden sind

Methodische Hinweise:

Zu (1): An die Kontrolle der Hausaufgabe schließt sich eine kurze Wiederholung zum Begriff „Term“ anhand der Ausführungen (Lb 5) an, die eine Übung im Berechnen des Wertes von Termen einleitet. Nachdem noch einmal ein Beispiel an der Tafel von einem Schüler vorgerechnet und kommentiert worden ist, lösen die Schüler selbständig den Auftrag A 2a (Lb 5). Beim Vergleich der Ergebnisse wird erörtert, daß bei (1) die Menge N, bei (2) die Menge R und bei (3) die Menge R^* als Variablen-Grundbereich gelten könnte. An der Aufgabe d (2) des Auftrages A 2 (Lb 5) sollte der Lehrer zeigen, daß auch der Bereich der rationalen Zahlen, vermehrt um die irrationalen Zahlen (der Begriff „reelle Zahlen“ wird erst in Klasse 9 definiert, die Schüler kennen aber schon irrationale Zahlen), noch nicht ausreicht, alle Terme zu berechnen.
Zu (2): Anhand des Beispieles A 6 (Lb 6) erörtert der Lehrer in einem Unterrichtsgespräch, daß die Lösung von Sachaufgaben oft zu Ungleichungen oder, wie aus früheren Klassen bekannt, zu Gleichungen mit einer Variablen führt. Auf der Grundlage der in der 1. Stunde erteilten Hausaufgabe (Lerneinheit A 2 durchlesen) wird kurz wiederholt, was man unter dem „Lösen“ einer Gleichung bzw. Ungleichung versteht.
Zu (3): Bei der Problemanalyse zum Beispiel A 6 sollte der Lehrer die Schüler selber finden lassen, daß der Variablen-Grundbereich nur die Menge N sein kann. Durch ein einfaches Beispiel wird den Schülern wieder in Erinnerung gebracht, daß bei formalen Ungleichungen bzw. Gleichungen mit einer Variablen der Variablen-Grundbereich angegeben werden muß. Es gibt ja in diesem Fall keinen Sachverhalt, aus dem man auf einen Variablen-Grundbereich schließen könnte. Zu jeder Gleichung bzw. Ungleichung, in der Variablen vorkommen, wird also die Angabe zum Variablen-Grundbereich (z. B. in der Form $a \in N$, falls a die Variable und N der zugrunde liegende Variablen-Grundbereich ist) beigefügt. Im Aufgabenteil des Lehrbuches ist allerdings des öfteren vereinfacht worden, indem für einen ganzen Komplex von Aufgaben festgelegt wurde, daß alle darin vorkommenden Variablen Zeichen für rationale Zahlen sind.

Dazu wird folgendes Tafelbild vorgeschlagen:

Abhängigkeit der Lösungsmenge vom Variablen-Grundbereich		
Gleichung/Ungleichung	Variablen-Grundbereich	Lösungsmenge
$3a < 7$	Menge aller Primzahlen	$L = \{2\}$
	N	$L = \{0; 1; 2\}$
	R^*	alle gebrochenen Zahlen, die kleiner als $\frac{7}{3}$ sind
$4 + x = 2$	R^*	$L = \emptyset$
	R	$L = \{-2\}$

Der Lehrer sollte diese Gelegenheit auch nutzen, um den Schülern noch einmal bewußtzumachen, daß gerade die Notwendigkeit, solche Gleichungen zu lösen, der Anlaß war, die Zahlenbereiche immer wieder zu erweitern, und daß mit der Menge der rationalen Zahlen ein Variablen-Grundbereich zur Verfügung steht, in dem die Grundrechenoperationen mit Ausnahme der Division durch Null stets ausführbar sind.

Zu (4) : Zur Vertiefung dieser Gedanken und zugleich zur weiteren Entwicklung der Fähigkeit, Gleichungen bzw. Ungleichungen durch Belegung der Variablen in wahre

Arbeitsblatt					
	Beantworte mit ja oder nein! Gehört die Lösungsmenge dem Zahlenbereich N, R^*, G oder R an oder handelt es sich um eine irrationale Zahl?				
Gleichung/ Ungleichung	N	R^*	G	R	*Menge der irration. Zahlen*
$2x + 5 = 7$	ja	ja	ja	ja	nein
$2x + 7 = 7$					
$2x + 4 = 3$					
$2x + 5 = -7$					
$\frac{1}{3}x + 1 = 4$					
$x - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$					
$0{,}5x - 2 = 0$					
$-x - 5 = 0$					
$\sqrt{x} = 16$					
$\sqrt{x} = -2$					
$x^2 = 49$					
$x^2 = 5$					
$2x + 5 < 7$					
$2x + 1 < -7$					
$0 < x < 2$					
$\|x\| < 0$					

Bild 1.1.

Aussagen zu überführen (das kalkülmäßige Lösen von Gleichungen wird vor allem im Stoffabschnitt „3.4. Lösung linearer Gleichungen“ weiter gefestigt, und die Erarbeitung eines Kalküls zur Lösung von Ungleichungen erfolgt erst in Klasse 9 in der Stoffeinheit „2.1. Lineare Ungleichungen“), sollte sich nun eine Übung anschließen. Dazu eignet sich eine Auswahl aus den Aufgaben a10 bis 13 (Lb 99).
Auch ein Arbeitsblatt (↗ Bild 1.1.) wäre gut geeignet, die Einsicht der Schüler in den Zusammenhang zwischen Lösungsmenge und Variablen-Grundbereich zu vertiefen.
Als Hausaufgabe wird die Aufgabe a 8 (Lb 99) empfohlen.

Dritter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.1.1.: Das Beschreiben mathematischer Zusammenhänge mit Hilfe von Variablen (Lerneinheit A 3)

Es darf vorausgesetzt werden, daß die Eigenschaften der Addition und Multiplikation rationaler Zahlen den Schülern geläufig sind. Das trifft auch auf die Darstellung der entsprechenden Gesetze in Form von Gleichungen mit Variablen zu. Bereits im 5. Schuljahr bei der systematischen Behandlung des Bereichs der natürlichen Zahlen wurden sie formuliert und eingeprägt, und auch im 6. Schuljahr bei der Erschließung des Bereichs der gebrochenen Zahlen und im 7. Schuljahr im Bereich der rationalen Zahlen wurde die Gültigkeit dieser Gesetze bewiesen bzw. an Beispielen verdeutlicht. Die Lehrbuchseiten 6 und 7 eignen sich deshalb gut zum Selbststudium, das als vorbereitende Hausaufgabe erfolgen sollte.
Im Unterricht muß zunächst herausgearbeitet werden, daß zum Beispiel die Gleichung $a + b = b + a$ keine Aussage ist, also auch keine wahre Aussage und damit kein Satz sein kann. Es wird im Unterrichtsgespräch geklärt, daß offensichtlich beim Einsetzen jeder beliebigen rationalen Zahl für a und b eine wahre Aussage entsteht und daß man durch diesen Zusatz mit Hilfe der Gleichung $a + b = b + a$ eine wahre Aussage formulieren kann. Durch eine Gegenüberstellung an der Tafel wird es dem Schüler deutlich gemacht.

keine Aussage	(wahre) Aussage
$a + b = b + a$	Für alle rationalen Zahlen a und b gilt: $a + b = b + a$

Für den Erfolg dieser Unterrichtsstunde ist entscheidend, daß den Schülern bewußt wird: Während sie bisher Gleichungen bzw. Ungleichungen mit Variablen lediglich durch das Einsetzen einzelner Elemente aus einem vorgegebenen Variablen-Grundbereich in wahre Aussagen überführt haben, sind sie nunmehr imstande, Aussagen über einen ganzen Zahlenbereich zu machen, indem sie die Variablen mit Hilfe der eingeführten Redeweisen binden. Am Beispiel der Aufgabe a 15b (Lb 100) wird die Notwendigkeit der Redeweise „es gibt ..., so daß gilt ...“ erläutert. Um erste Fertigkeiten im Gebrauch solcher Quantifikatoren bei den Schülern zu entwickeln, sollte eine mündliche Übung angeschlossen werden, in der die Schüler die bekannten Sätze der Addition und Multiplikation unter Verwendung der Redeweise „für alle ... gilt“ bzw. „für beliebige ... gilt“ formulieren. Als schriftliche Übungen eignen sich Aufgabe a 15 (Lb 100) und Aufgabe a 16 (Lb 100), wobei bei der letzteren besonders auf die Formulierung der Ergebnisse geachtet werden sollte.

Zusammenfassung:

Wie die vorliegenden Ausführungen zeigen, wird empfohlen, jeden Schwerpunkt in einer Unterrichtsstunde zu behandeln. Bei der Betrachtung zu verschiedenen Variablen-Grundbereichen wurde der Leitlinie „Zahlenbereichserweiterungen" entsprochen, und im zweiten Schwerpunkt wurden die Leitlinien „Gleichungen und Ungleichungen" sowie „Mengen" berücksichtigt. Durch die Wiederholungen und Übungen wurde bei den Schülern das Ausgangsniveau für die Einführung kalkülmäßiger Umformungen von Termen mit Variablen geschaffen. Die Schüler lernten wichtige Quantifikatoren kennen und erwarben erste Fertigkeiten im Umgang mit ihnen. Durch die Einführung neuer fachspezifischer Redeweisen wurde gleichzeitig an der weiteren Entwicklung der sprachlichen Bildung der Schüler gearbeitet. Als Beitrag zur staatsbürgerlichen Erziehung wurde den Schülern wieder einmal verdeutlicht, welche wichtige Rolle die Mathematik bei der Erfassung von Gesetzmäßigkeiten der objektiven Realität spielt. Damit wurde zugleich eine Motivation für das ganze Stoffgebiet gegeben.

1.2. Rechenoperationen unter Verwendung von Variablen (15 Stunden)

1.2.1. Vielfachbildung, Addieren und Subtrahieren unter Verwendung von Variablen (1 Stunde; Lerneinheit A 4)

Schon in Klasse 7, in der Stoffeinheit „2.3. Addition und Subtraktion rationaler Zahlen", lernten die Schüler, den Begriff „Summe" auf Terme zu erweitern, in denen rationale Zahlen durch Additionszeichen oder (und) Subtraktionszeichen verknüpft werden. Ebenfalls in der 7. Klasse wurde in der Stoffeinheit „3.1. Äquivalente Gleichungen" der Begriff „Koeffizient" eingeführt. Der Lehrer sollte an die entsprechenden Stoffinhalte anknüpfen und den Schülern zeigen, daß die beiden Begriffe sinnvoll beim Addieren und Subtrahieren unter Verwendung von Variablen zu verwenden sind. Das Vorgehen beim additiven Zusammenfassen mehrerer Vielfachen der gleichen Variablen wird den Schülern mit Hilfe des Distributivgesetzes kurz begründet.

Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.2.1.: Vielfachbildung, Addieren und Subtrahieren unter Verwendung von Variablen (Lerneinheit A 4)

Die Stunde sollte mit einer Übung zur Addition und Subtraktion rationaler Zahlen begonnen werden. Dabei muß den Schülern bewußtgemacht werden, daß sich die Subtraktion rationaler Zahlen durch die Addition der zum Subtrahenden entgegengesetzten Zahl zum Minuenden ersetzen läßt. In diesem Zusammenhang wird der Begriff „Summe" wiederholt und der neue Begriff „Glied einer Summe" eingeführt, der durch laufende Verwendung im nachfolgenden Unterricht zu festigen ist. Anhand einer linearen Gleichung mit einer Variablen (z. B. $3x + 9 + 5x = 2x - 3$) zeigt der Lehrer, daß es notwendig ist, Glieder mit Variablen zusammenzufassen. Er erläutert den Schülern, daß es sich bei den Termen $3x$; $5x$; $2x$ um Vielfache von x handelt. Dazu könnte folgendes Tafelbild entwickelt werden:

	Vielfachbildung
$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3$	Das Vierfache von 3
$x + x + x + x = 4 \cdot x$	Das Vierfache von x
$x + x = 2 \cdot x$	Das Doppelte von x
$x + x + x + x + x = 5 \cdot x$	Das Fünffache von x

Allgemein: $4x$; $2x$; $5x$ sind Vielfache von x

Durch die Lösung der Gleichung werden die Schüler daran erinnert, wie sie die Glieder mit gleichen Variablen addiert haben, und es wird die Frage aufgeworfen, auf Grund welchen Gesetzes für den Bereich der rationalen Zahlen eine Zusammenfassung der Glieder in dieser Weise möglich ist. Mit Hilfe der Ausführungen (Lb 7f) wird erörtert, daß dabei das Distributivgesetz zur Anwendung kommt. An einem Beispiel, das an der Tafel vorgerechnet wird, muß der Lehrer dann die Schrittfolge bis zum Ergebnis kennzeichnen. Übungen wie in der Aufgabe a 17f (Lb 100) schließen sich an.

Zusammenfassung:

Als Ergebnis dieser Stunde sollen sich die Schüler die Schrittfolge bei der Addition und Subtraktion unter Verwendung von Variablen eingeprägt haben. Weitere Übungen dazu erfolgen immanent in der nächsten Unterrichtseinheit.

1.2.2. Addition und Subtraktion von Summen (4 Stunden; Lerneinheiten A 5 bis 7)

Die Bedeutung von Klammern in Termen ist den Schülern bekannt. Es muß ihnen zunächst gezeigt werden, daß es mitunter notwendig ist, Klammern aufzulösen, weil man die Summe bzw. Differenz nicht berechnen kann. Es erfolgt eine Fallunterscheidung:

1. Vor der Klammer steht ein Pluszeichen;
2. Vor der Klammer steht ein Minuszeichen.

Für beide Fälle sollte das Vorgehen erarbeitet und begründet werden. Durch Übungen werden zunächst entsprechende Rechenfertigkeiten entwickelt, bevor auf das Setzen von Klammern eingegangen wird. An Termen mit mehrfachen Klammern üben sich die Schüler darin, die gelernten Regeln auch auf etwas kompliziertere Sachverhalte anzuwenden, und entwickeln damit ihre Fertigkeiten im Auflösen von Klammern weiter. Dabei darf aber keinesfalls über die Forderungen des Lehrplanes hinausgegangen werden. (Vergleiche Lehrplan S. 68.)

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.1.2.: Das Auflösen von Klammern, vor denen ein Pluszeichen steht (Lerneinheit A 5)

Durch die Gegenüberstellung eines Terms ohne Variablen und eines Terms mit Variablen, die beide Klammern enthalten, wird den Schülern gezeigt, daß, wenn in der Klammer Glieder mit unterschiedlichen Variablen vorkommen, diese zunächst nicht zusammengefaßt werden können. Es wird nach einem Ausweg gesucht. Der Lehrer verweist auf die Anwendung der Rechengesetze für rationale Zahlen. Mit Hilfe der Ausführungen (Lb 9) sollten die Schüler selber auf den Ausweg kommen können. Es wird Satz A 1

Arbeitsblatt

Das Auflösen von Klammern, vor denen ein Minuszeichen steht

a	b	c	$b+c$	$a-(b+c)$	$a-b-c$	$b-c$	$a-(b-c)$	$a-b+c$
18	3	9	12	6	6	−6	24	24
80	35	19						
−7	6	−8						
0,8	0,4	0,1						
$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$						
3,8	−0,6	1,1						
Für alle rat. Zahlen a, b, c gilt:								

1. Vergleiche Spalten 5 und 6 sowie Spalten 8 und 9!
2. Formuliere Deine Erkenntnis mit Hilfe der gegebenen Variablen und trage sie in die Kästchen ein!
3. Können wir die beiden Gleichungen als Satz für das Rechnen mit rationalen Zahlen formulieren? Begründe Deine Entscheidung!

Bild 1.2.

(Lb 9) gelesen. Dabei sollte auch die Anwendung der eingeführten Quantifikatoren wieder geübt werden. Die anschließenden Übungen dienen sowohl der Entwicklung von Fertigkeiten im Auflösen von Klammern als auch der Festigung der Addition und Subtraktion unter Verwendung von Variablen. Dabei sollte auf den Schritt „Ordnen der Glieder“ vorläufig noch nicht verzichtet werden.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.2.2.: Das Auflösen von Klammern, vor denen ein Minuszeichen steht (Lerneinheit A 6)

Dieser zweite Schwerpunkt sollte ganz der Festigung mathematischer Denk- und Arbeitsweisen dienen. Durch das Ausfüllen eines Arbeitsblattes (Bild 1.2.) werden die Schüler zunächst zu der Vermutung gebracht, daß sich beim Auflösen von Klammern, vor denen ein Minuszeichen steht, eine Änderung aller Plus- und Minuszeichen in der Klammer in die zu ihnen entgegengesetzten Zeichen nötig macht. An dieser Stelle wird es dann besonders wichtig zu betonen, daß für die Richtigkeit dieser Vermutung der Beweis zu erbringen ist. Wir empfehlen dem Lehrer, sich an den im Lehrbuch ausgeführten Beweisgang anzuschließen und ihn in einem Unterrichtsgespräch zu erläutern.
Sehr wichtig für die Anwendung der Regel ist es, jedem Schüler bewußtzumachen, daß mit der Klammer auch das Minuszeichen vor der Klammer wegfällt, da die gebildeten entgegengesetzten Zahlen ja zu addieren sind.
Durch Übungen im Auflösen von Klammern und im Zusammenfassen von Gliedern mit Variablen werden die zu entwickelnden Fertigkeiten weiter ausgebildet. Durch das Setzen von Klammern in Termen mit Variablen wird die Einsicht in die Regeln weiter vertieft. Dabei genügt es, sich auf wenige Beispiele zu beschränken.

Dritter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.2.2.: Das Auflösen von mehrfachen Klammern (Lerneinheit A 7)

Beim Vereinfachen von Summen mit mehrfachen Klammern üben sich die Schüler im Anwenden der erarbeiteten Regeln. Dabei sollte man die schwächeren Schüler auf das Auflösen der Klammern „von innen nach außen“ orientieren und sie nicht durch das Erörtern beider Methoden verwirren.
Von Schülern, die der Lehrer auf mathematischem Gebiet zu fördern beabsichtigt, sollte man allerdings verlangen, daß sie sich auch die Methode des Auflösens von „außen nach innen“ erarbeiten und daß sie in beiden Methoden sicher sind.

Zusammenfassung:

Für die Verteilung der Schwerpunkte auf Unterrichtsstunden wird empfohlen, für den ersten und dritten Schwerpunkt je eine Unterrichtsstunde zu verwenden, während für den zweiten Schwerpunkt zwei Unterrichtsstunden vorzusehen sind. Am Ende der zweiten Unterrichtseinheit sollten die Schüler im Addieren und Subtrahieren rationaler Zahlen unter Verwendung von Variablen sicher geworden sein. Dabei sollte ihnen das Auflösen von Klammern keine Schwierigkeiten bereiten. Ihre Fertigkeiten im Addieren rationaler Zahlen und im Rechnen mit gebrochenen Zahlen sollten zugenommen haben, das Beweisbedürfnis der Schüler und ihr Verständnis für das logische Schließen innerhalb eines Beweisverfahrens weiter entwickelt worden sein. Vor allem der zweite Schwerpunkt dieser Unterrichtseinheit sollte einen Beitrag zur Schulung des logischen Denkens der Schüler, zur Erziehung zu wissenschaftlicher Strenge und Exaktheit (Leitlinie „Beweisen und Herleiten“) leisten.

1.2.3. Multiplizieren und Dividieren von eingliedrigen Ausdrücken mit eingliedrigen Ausdrücken bzw. durch eingliedrige Ausdrücke (2 Stunden; Lerneinheiten A 8 und 9)

Auch bei der Multiplikation unter Verwendung von Variablen ist den Schülern bewußtzumachen, daß wir nicht Variablen, sondern Zahlen miteinander multiplizieren, daß es also um eine Zusammenfassung, eine Vereinfachung der Terme geht. Während bei der Addition gleicher Summanden eine Verkürzung der Schreibweise erreicht wird, indem man das Vielfache des gleichen Summanden bildet, führt die Multiplikation gleicher Faktoren zur Bildung von Potenzen. Durch die Potenzschreibweise und unter Anwendung des Assoziativgesetzes und Kommutativgesetzes der Multiplikation rationaler Zahlen kommt man zu einer wesentlich kürzeren Schreibweise der Terme. Für die Vereinfachung von Quotienten ist der Satz wichtig, daß für jede von Null verschiedene rationale Zahl a gilt: $a:a = 1$. Auf der Grundlage dieser Gesetzmäßigkeiten üben sich die Schüler dann im Vereinfachen von Produkten und Quotienten, die Variablen enthalten. Zu Beginn dieser Unterrichtseinheit sollte mit den Schülern die Multiplikation und Division rationaler Zahlen wiederholt werden. Dabei könnte man darauf hinweisen, daß man die in Klasse 7 gelernten Rechenregeln nunmehr mit Hilfe von Variablen sehr übersichtlich und knapp darstellen kann. Keinesfalls dürfen die Schüler den Eindruck erhalten, daß sie im Zusammenhang mit der Verwendung von Variablen neue Regeln zu lernen haben.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.2.3.: Multiplizieren eingliedriger Ausdrücke mit eingliedrigen Ausdrücken (Lerneinheit A 8)

Für die erste Stunde sollte vor allem der Gedanke im Vordergrund stehen, daß es für das Rechnen unter Verwendung von Variablen im Grunde keine neuen Rechenregeln gibt, sondern daß es darum geht, die bereits bekannten Gesetzmäßigkeiten im Bereich der rationalen Zahlen bewußt zu nutzen. Zur Verwirklichung dieses Gedankens wird der nachfolgende Stundenentwurf vorgeschlagen:

Thema: Das Multiplizieren eingliedriger Ausdrücke mit eingliedrigen Ausdrücken unter Verwendung von Variablen

Gliederung:

(1) Wiederholung: Multiplikation rationaler Zahlen; Nutzung des Assoziativgesetzes und Kommutativgesetzes der Multiplikation zur Erzielung von Rechenvorteilen
(2) Erarbeitung einer Schrittfolge zur Vereinfachung von Produkten mit Variablen
(3) Anwendung dieser Schrittfolge auf Beispiele

Methodische Hinweise:

Zu (1): Als vorbereitende Hausaufgabe haben die Schüler den Auftrag erhalten, die Regeln für das Multiplizieren rationaler Zahlen zu wiederholen und sich zu jedem Fall ein Beispiel aufzuschreiben. Nachdem ein Schüler in Form eines Kurzvortrages zu den Regeln gesprochen und diese an Beispielen an der Tafel erläutert hat, lösen die Schüler entsprechende Aufgaben, die der Lehrer auf einer Lichtschreiberfolie vorbereitet hat. Dabei werden die Schüler auch angehalten, den Rechenstab zu benutzen.

Beispiele für die Übung:

$(-3{,}8) \cdot (+6{,}3)$ $\qquad$ $(-0{,}25) \cdot (+1{,}8) \cdot (-4)$

$\left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$ $\qquad$ $(+125) \cdot (-0{,}1) \cdot (-8) \cdot (-10)$

An den rechten Beispielen wird gezeigt, daß es günstig ist, das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz der Multiplikation zu nutzen:

$$\begin{aligned}[(-0{,}25) \cdot (-4)] \cdot (+1{,}8) &= (+1) \cdot (+1{,}8)\\ &= 1{,}8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(+125) \cdot (-8)] \cdot [(-0{,}1) \cdot (-10)] &= (-1\,000) \cdot (+1)\\ &= -1\,000\end{aligned}$$

Zu (2): Anknüpfend an den 1. Stundenabschnitt gibt der Lehrer den Impuls: „Wir wollen sehen, wie man Produkte mit Variablen unter Benutzung der Eigenschaften der Multiplikation rationaler Zahlen vereinfachen kann!" Die Schüler lesen zunächst Beispiel A 20 (Lb 12). Im anschließenden Unterrichtsgespräch wird die dort angegebene Schrittfolge erörtert und erläutert. Dabei sollten sich die Schüler darin üben, die einzelnen Schritte jeweils mit dem entsprechenden Gesetz aus dem Bereich der rationalen Zahlen zu begründen.
Zu (3): An einigen Beispielen wird die Schrittfolge dann gefestigt (Aufgabe a 27, Lb 100). Als Hausaufgabe sollten die Aufgaben a 25 und 26 (Lb 100) gestellt werden.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.2.3.: Das Dividieren eingliedriger Ausdrücke durch eingliedrige Ausdrücke (Lerneinheit A 9)

Am Anfang sollte man unbedingt Übungen zur Division gebrochener Zahlen in Dezimalbruchdarstellung durchführen. Die Schüler müssen sich ins Gedächtnis zurückrufen, daß es notwendig ist, den Divisor kommafrei zu machen.
Die für die Division angegebene Schrittfolge (Lb 13) ist für den Schüler ohne weiteres einzusehen. Es empfiehlt sich, die Darstellung in Bruchform auch in den Übungen zunächst beizubehalten. Besonderen Wert sollte man auf die Feststellung legen, daß für alle $x \neq 0$ in $x^2 : x = \frac{x \cdot x}{x}$ der Quotient $\frac{x}{x} = 1$ ist, weil sonst später beim Ausklammern oft falsch gerechnet wird. So kann man bisweilen den Fehler

$$3a^2 + ab + a = a\,(3a + b)$$

antreffen. Nach jeder Lösung einer Divisionsaufgabe sollte man von den Schülern die Probe durch Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor fordern, um gleichzeitig das Multiplizieren weiter zu festigen. Das wird bei der Mehrzahl der in den Nummern a 28 und 29 (Lb 101) enthaltenen Aufgaben im Kopfe möglich sein und somit keinen großen zusätzlichen Zeitaufwand fordern. Auch für die Division sollte der Rechenstab verwendet werden.

Zusammenfassung:

Für die Behandlung eines jeden Schwerpunktes müßte je eine Stunde ausreichen. Am Ende der Unterrichtseinheit sollten die Schüler die Schrittfolgen für die Multiplikation und Division kennen. Ausreichende Fertigkeiten werden aber sicher erst in der nächsten Unterrichtseinheit bei der Multiplikation von Summen und beim Ausklammern entwickelt werden können.

1.2.4. Umformen von Summen in Produkte durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors aller Glieder (2 Stunden; Lerneinheit A 10)

Diese Unterrichtseinheit hat als Hauptziel, eine neue Art der Umformung von Termer einzuführen und zu üben. Darüber hinaus dient sie aber auch der Festigung von Kenntnissen und der weiteren Entwicklung von Fertigkeiten im Multiplizieren und Dividieren unter Verwendung von Variablen. Gleichzeitig sollen sich die Schüler hier besonders im Erkennen und Beschreiben der Struktur von Termen üben. Da durch die Umformungen keine offensichtliche Vereinfachung der Terme erfolgt, sollte eine Motivation am Anfang stehen, die dem Lehrer gestattet, darauf hinzuweisen, daß solche Umformungen für das Rechnen mit Quotienten in Klasse 9 notwendig sind.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.2.4.: Motivation der Umformung von Summen in Produkte (Lerneinheit A 10)

Zur Sicherung des notwendigen Ausgangsniveaus sollten sich die Schüler am Anfang der Stunde darin üben, Produkte in Faktoren zu zerlegen. Nach einer kurzen Einführung an wenigen Beispielen rechnen die Schüler selbständig, z. B.:

$$48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$$

$$5a^2b = 5 \cdot a^2b = 5a \cdot ab = 5a^2 \cdot b = 5b \cdot a^2 = 5ab \cdot a$$

Um die Umformung von Summen in Produkte zu motivieren, kann man das Problem stellen, den Quotienten $\frac{2a - 2b}{2}$ zu kürzen. Nachdem eventuell an einem Zahlenbeispiel noch einmal herausgearbeitet worden ist, daß man in einer Summe nicht kürzen kann, wird als Ausweg die Umformung der Summe in ein Produkt erkannt. Die Schüler werden an das additive Zusammenfassen von Vielfachen einer Variablen erinnert, das auf Grund des Distributivgesetzes für rationale Zahlen erfolgte. (Siehe Lerneinheit A 4, Lb 7!)
Dazu könnte das Tafelbild 1.3. entworfen werden.

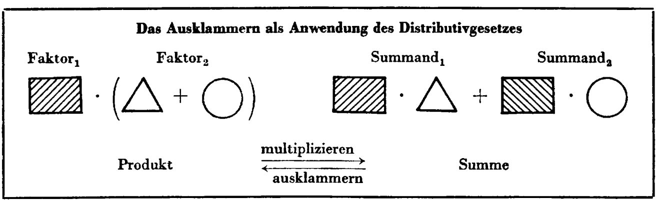


Bild 1.3.

Bei der Erarbeitung des Tafelbildes muß vom Lehrer herausgearbeitet werden, daß das Distributivgesetz die Multiplikation einer Summe mit einem Faktor gestattet, ohne diese vorher berechnen zu müssen. (Die Schüler haben das Gesetz bereits im 3. Schuljahr in diesem Sinne angewandt.) Zugleich muß er ihnen mitteilen, daß man die Anwendung des Distributivgesetzes zur Umformung einer Summe in ein Produkt als

„ausklammern" bezeichnet. An einigen einfachen Beispielen sollte das Verfahren dann gefestigt werden. Dazu wird folgende Form vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} 6x + 4y &= 2 \cdot 3x + 2 \cdot 2y \\ &= 2 \cdot (3x + 2y) \end{aligned}$$

Dabei sollte man den auszuklammernden Faktor und die beiden Faktoren, die als Summanden in die Klammer kommen, verschiedenfarbig kennzeichnen. Zum Schluß sollte man zum Ausgangsproblem $\frac{2a - 2b}{2}$ zurückkehren und den Schülern bewußtmachen, daß sie nunmehr durch „Ausklammern" das Problem lösen können:

$$\frac{2a - 2b}{2} = \frac{2\,(a - b)}{2} = \frac{1\,(a - b)}{1} = a - b$$

Dieses Erfolgserlebnis kann man dann auch nutzen, um weitere Übungen zu motivieren.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.2.4.: Festigung des Ausklammerns durch Übungen (Lerneinheit A 10)

Der Tatsache entsprechend, daß eine Funktion dieser Unterrichtseinheit auch darin besteht, die Fertigkeiten im Multiplizieren und Dividieren unter Verwendung von Variablen weiterzuentwickeln, wird eine Übung vorgeschlagen, die zugleich das notwendige Ausgangsniveau der Schüler für diesen Schwerpunkt sichern soll. Rationell ist folgendes Verfahren: Die Schüler schreiben die Ordinalzahlen 1 bis 10 in ihr Heft. Der Lehrer schreibt die erste Aufgabe an, welche die Schüler im Kopf lösen. Auf ein Kommando schreiben sie das Ergebnis hinter die Nummer 1 usw. Dabei muß jeder Schüler jede Aufgabe rechnen, und es ist eine schnelle Kontrolle über den erreichten Grad der Fertigkeiten möglich. Für das Kopfrechnen eignen sich Aufgaben wie folgende:

$$3a^2 \cdot 4a^3; \quad \frac{6y^3}{2y}; \quad 28a - 40a; \quad \frac{3x^2}{\frac{1}{2}x}; \quad 16b \cdot 7c; \quad 25a + 6b\,(!)$$

Für die Entwicklung von Fertigkeiten und die Festigung des Verfahrens ist es wichtig, den Schülern eine Schrittfolge für das Ausklammern bewußtzumachen:

1. Ermittle die gemeinsamen Faktoren aller Summanden, und schreibe sie hinter das Gleichheitszeichen!
2. Dividiere jeden Summanden durch diese Faktoren und schreibe die Quotienten in die Klammer!

Nach dieser Schrittfolge sollten die Schüler dann die Aufgaben A 30 bis 32 (Lb 101) mit zunehmender Selbständigkeit lösen. Als Probe sollte man auch wieder ausmultiplizieren lassen, um damit zugleich für die nächste Unterrichtseinheit vorzuarbeiten.

Zusammenfassung:

Für jeden Schwerpunkt sollte eine Unterrichtsstunde verwendet werden. Außer zur Einführung des Ausklammerns dient die Unterrichtseinheit auch dazu, das sprachliche Ausdrucksvermögen der Schüler zu entwickeln, die richtige Verwendung mathematischer Termini zu üben und eine ausreichende Sicherheit im Multiplizieren und

Dividieren unter Verwendung von Variablen zu erzielen. Die Schüler sollen das Verfahren zur Umformung von Summen in Produkte kennen und ihre Fertigkeiten im Ausklammern so weit entwickelt haben, daß sie einfache Terme umformen können.

1.2.5. Multiplizieren von Summen mit Summen (3 Stunden; Lerneinheit A 11)

In der Unterrichtseinheit „Multiplizieren von Summen mit Summen" erfolgt eine komplexe Anwendung des bisher in diesem Stoffgebiet erworbenen Wissens bzw. der bis dahin entwickelten Fertigkeiten. Deshalb erscheint es zweckmäßig, in einer Kurzarbeit den Leistungsstand der Schüler zu überprüfen, damit man auf eventuelle Unsicherheiten in der Verwendung der Variablen bei den einzelnen Rechenoperationen in dieser Unterrichtseinheit eingehen kann. Durch den Beweis zum Satz A 3 (Lb A 15) wird ein weiterer Beitrag zur Verfolgung der Leitlinie „Beweisen" geleistet, und eine Gegenüberstellung zum Wortlaut des Satzes 3 macht den Schülern noch einmal deutlich, wie die Darstellung mathematischer Zusammenhänge durch die Verwendung von Variablen an Übersichtlichkeit und Klarheit gewinnt.
Die Übungen müssen einerseits dazu dienen, daß sich die Schüler das Verfahren der Multiplikation zweier Summen einprägen, andererseits aber auch die Fertigkeiten im Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren unter Verwendung von Variablen in einem ausreichenden Maße ausbilden.
Deshalb ist es notwendig, daß in diese Unterrichtseinheit auch Divisionsaufgaben und das „Ausklammern" eingeschlossen werden.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.2.5.: Vorschlag für eine schriftliche Kurzkontrolle (Lerneinheit A 11)

	Punkte
1) $3{,}1c - 2{,}8b + 4{,}9c - 0{,}4b$ (Fasse zusammen)	(2)
2) $4ab^2 \cdot 3ab \cdot 0{,}9ab^3$	(2)
3) $(-38x^3y) : (+1{,}9xy)$	(2)
4) $15a : 60f$	(2)
5) $\frac{1}{2}r - \left(\frac{1}{4}t - \frac{3}{4}r\right) + \left(\frac{1}{3}s + \frac{1}{2}t\right)$	(3)
6) $0{,}8x\,(10x^2 - 0{,}1xy - y)$	(2)
7) Klammere gemeinsame Faktoren aus: $4ab^2 - 144a^2b^2 + 28a^2b$!	(2)

Für die Arbeit sollte man 15 Minuten reine Arbeitszeit rechnen.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.2.5.: Beweis des Satzes: Für alle rationalen Zahlen a, b, c und d gilt: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ (Lerneinheit A 11)

Innerhalb der Beweisführung ist vor allem der Grundgedanke herauszuarbeiten, daß wir mit Hilfe bereits bewiesener Sätze auf die Wahrheit einer neuen Aussage schließen dürfen, die dann ihrerseits wieder einen Satz darstellt. Beim Beweis des Satzes über die Multiplikation zweier zweigliedriger Summen benutzen wir mehrfach das Distributivgesetz. Im Mittelpunkt der Beweisführung könnte folgendes Tafelbild stehen:

Behauptung: Für alle rationalen Zahlen a, b, c und d gilt:

$$\boxed{(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd}\,.$$

Beweis: Wir setzen fest: $c + d = m$.
Nach dem Distributivgesetz gilt:

$(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m.$

Wegen $c + d = m$ gilt:

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d).$

Auf den rechten Term wenden wir nochmals das Distributivgesetz an und erhalten:

$$\boxed{\boldsymbol{(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd}}\,,$$

was zu beweisen war.

Diese Aussage sollte unbedingt auch mit Worten formuliert werden, so wie das im Lehrbuch auf Seite 15 angeben wird.

Dritter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.2.5.: Übungen zur Multiplikation einer Summe mit einer Summe (Lerneinheit A 11)

Zu Beginn der Übungen bietet sich eine gute Gelegenheit, den Schülern bewußtzumachen, welche große Bedeutung ein systematisches Vorgehen für das fehlerfreie Rechnen besitzt. Es ist zu empfehlen, zunächst einmal alle Glieder der zweiten Summe mit dem ersten Glied der ersten Summe zu multiplizieren, dann alle Glieder der zweiten Summe mit dem zweiten Glied der ersten Summe usw. Dadurch wird gesichert, daß auch wirklich alle Produkte gebildet werden. Darüber hinaus kann man die Schüler finden lassen, daß die Anzahl der entstehenden Produkte durch Multiplikation der Anzahl der Glieder in beiden Summen berechnet werden kann. Zur Veranschaulichung des Vorgehens könnte das Tafelbild 1.4. dienen.

$$(a + b) \cdot (c + d + e) = \underset{1.}{ac} + \underset{2.}{ad} + \underset{3.}{ae} + \underset{4.}{bc} + \underset{5.}{bd} + \underset{6.}{be}$$

Bild 1.4.

In Verfolgung der Leitlinie „Entwicklung der sprachlichen Bildung“ sollte man die Schüler dazu anhalten, ihr Vorgehen zu kommentieren, etwa: „Ich multipliziere zuerst alle Glieder der zweiten Summe mit dem ersten Glied der ersten Summe. Ich erhalte die Produkte *ac*, *ad* und *ae*. Diese addiere ich. Nun multipliziere ich alle Glieder der zweiten Summe mit dem zweiten Glied der ersten Summe ...“ usw. Während solche Übungen am Anfang stehen, bei denen ein Schüler an der Tafel vorrechnet, seine Lösungsschritte begründet, Fragen seiner Klassenkameraden beantworten muß und schließlich für seine Leistung durch den Lehrer eine Wertung erfährt, müssen die

Schüler später die Aufgaben selbständig lösen. Dabei kann man die Anforderungen differenzieren, indem man z. B. leistungsstarken Schülern einen Zettel mit komplizierten Aufgaben aushändigt oder mit einer Gruppe leistungsschwacher Schüler noch einmal eine Aufgabe an der Tafel durchrechnet. Dabei muß allerdings für jede Gruppe innerhalb des Klassenverbandes eine Kontrolle der Ergebnisse garantiert sein. In diese Übungen sollte man auch einige Aufgaben einbauen, die die Schüler zur Verwendung des Rechenstabes veranlassen. Keinesfalls sollte eine Beschränkung auf ganzzahlige Koeffizienten oder gar auf natürliche Zahlen erfolgen, da sich in diesem Falle die Fertigkeiten im Rechnen mit rationalen Zahlen und im Umgang mit dem Rechenstab sehr schnell verringern, zumal auch im folgenden Stoffgebiet die Möglichkeiten in dieser Hinsicht begrenzt sind.
Als Übungs- und als Hausaufgaben eignen sich die Aufgaben a 37 und 38 (Lb 101).

Zusammenfassung:

Es wird empfohlen, die Unterrichtseinheit in folgender Weise zu gliedern:
In der ersten Stunde sollten der erste und der zweite Schwerpunkt behandelt werden. Die Auswertung der Kurzkontrolle ermöglicht es dem Lehrer, die Übungen, für die zwei Stunden zu planen sind, dem von der Klasse erreichten Niveau anzupassen und auch auf einzelne Schüler individuell einzugehen. Am Ende dieser Unterrichtseinheit müssen sich alle Schüler das Grundsätzliche der behandelten Verfahren angeeignet haben und die Voraussetzungen besitzen, durch den ständigen Umgang mit Variablen in allen folgenden Stoffgebieten sicher beherrschte Fertigkeiten im Rechnen unter Verwendung von Variablen zu entwickeln.

1.2.6. Beweisführungen unter Verwendung von Variablen (1 Stunde; Lerneinheit A 12)

In dieser Unterrichtseinheit geht es vor allem darum, daß die Schüler sich der Variablen bei Beweisführungen bedienen lernen. Unter Beachtung der Leitlinie „Beweisen und Herleiten" sollte man den Schülern bei dieser Gelegenheit erneut vor Augen führen, daß ein für alle Elemente formulierter Satz nicht dadurch bewiesen werden kann, daß man an einer Reihe von Einzelbeispielen die Richtigkeit der Aussage zeigt. Die Schüler sind zu der Einsicht zu führen, daß gerade die Verwendung von Variablen, für die ja jedes Element eines angegebenen Variablen-Grundbereiches eingesetzt werden kann, den Beweis für die Allgemeingültigkeit der betreffenden Aussage ermöglicht.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.2.6.: Zusammenstellung von Sätzen, die in den Beweisführungen Verwendung finden (Lerneinheit A 12)

Ausgehend von einem Gegenbeispiel zum Beispiel A 32 (Lb 16) schafft der Lehrer die Motivation für diese Unterrichtseinheit:

Die Verhältnisgleichungen $3:4=6:\ 8$
und $1:2=2:\ 4$ stellen wahre Aussagen dar.

Durch Addition erhalten wir: $4:6=8:12$, ebenfalls eine wahre Aussage.

Die Schlußfolgerung: Aus $a:b=b:d$
und $e:f=g:h$
folge $(a+e):(b+f)=(b+g):(d+h)$

ist aber falsch, was folgendes Gegenbeispiel beweist:

$$\begin{array}{rl} 1:3 = 3:9 & \text{w.} \\ 5:4 = 10:8 & \text{w.} \\ \hline 6:7 = 13:17 & \text{f.} \end{array}$$

Es erfolgt eine Zusammenstellung von Sätzen, die als Voraussetzungen für die folgenden Beweisübungen benötigt werden:

Für alle rationalen Zahlen a, b, c und d gilt:

(V_{1A}) $a + b = b + a$ (V_{1M}) $a \cdot b = b \cdot a$

(V_{2A}) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (V_{2M}) $(a \cdot b)\, c = a \cdot (b \cdot c)$

(V_3) $a\,(b + c) = ab + ac$

(V_4) $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Für alle natürlichen Zahlen a gilt:

(V_5) $2 \cdot a$ ist eine gerade Zahl

(V_6) $2a + 1$ ist eine ungerade Zahl

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 1.2.6.: Übungen im Führen von Beweisen (Lerneinheit A 12)

Zu den Übungen eignen sich die Aufgaben a 39 und 40 (Lb 101). Man beginnt mit einer einfacheren Aufgabe, etwa Nummer a 39b.
Das Tafelbild könnte folgendermaßen gestaltet werden:

Behauptung: Für alle rationalen Zahlen a, b gilt:

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

Beweis: Nach (V_4) gilt: $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$

Nach (V_{1M}) gilt: $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$

Wegen $-ab + ab = 0$ gilt: $\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$ w. z. b. w.

oder

Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen a gilt:

$(2a + 1)^2$ ist eine ungerade Zahl.

Beweis: Nach (V_4) gilt: $(2a + 1)(2a + 1) = 4a^2 + 2a + 2a + 1$

Nach (V_{2A}) gilt: $(2a + 1)(2a + 1) = 4a^2 + 4a + 1$

Nach (V_3) gilt: $(2a + 1)(2a + 1) = 2\,(2a^2 + 2a) + 1$

Da $2a^2 + 2a$ eine natürliche Zahl ist, so gilt nach (V_6):

$\boxed{2\,(2a^2 + 2a) + 1 \text{ ist eine ungerade Zahl}}$ w. z. b. w.

Zusammenfassung:

Beide Schwerpunkte müssen in einer Stunde behandelt werden. Deshalb muß der erste Schwerpunkt durch eine Hausaufgabe so gut vorbereitet werden, daß die Zusammenstellung der Voraussetzungen in 10 Minuten erfolgen kann. In den verbleibenden 35 Minuten könnten dann zwei Beweise erörtert und von den Schülern auch niedergeschrieben werden, damit für die Hausaufgaben eine ausreichende Hilfestellung gewährleistet ist.
Als Ergebnis dieser Unterrichtseinheit haben die Schüler einige weitere Beispiele für die Verwendung von Variablen zur Beweisführung kennengelernt und ihre Einsichten in das Verfahren der mathematischen Deduktion vertieft.

1.2.7. Leistungskontrolle und Rückgabe der Arbeit

Am Ende der Behandlung des Stoffgebietes „1. Arbeiten mit Variablen“ sollte eine einstündige Klassenarbeit stehen. Ihre gewissenhafte und gründliche Auswertung bietet die Grundlage für die Planung einer systematischen Wiederholung der erworbenen Kenntnisse und der Sicherung der entwickelten Fertigkeiten in den folgenden Stoffgebieten.
Im folgenden werden einige Aufgaben vorgeschlagen, wie sie in der Arbeit enthalten sein könnten:

Aufgabe 1: Durch den Quotienten $\frac{a}{b}$ können verschiedene Sachverhalte beschrieben werden.
Nenne zwei solcher Sachverhalte, z. B. aus dem Physikunterricht! Gib jeweils die Bedeutung der Variablen und des von ihnen gebildeten Quotienten an!

Aufgabe 2: Fasse zusammen! $7{,}5a - \left(3\frac{1}{4}a + 2\frac{1}{2}b\right) - 5{,}5b$

Aufgabe 3: $0{,}7c^2\,(1{,}8b^2c - 3{,}4b^2c^3 - 10c)$

Aufgabe 4: $\left(-7\frac{1}{5}r^2t^5\right) : (-6r^2t)$

Aufgabe 5: Gegeben sind die Summen $A = 3x - 7y$; $B = 2x - xy + 4y$.
Berechne $A \cdot B$ und fasse, wenn möglich, zusammen!

Aufgabe 6: Wandle in ein Produkt um!
$108a^2b + 60ab^2 - 12ab$

Aufgabe 7: Zeige, daß für alle rationalen Zahlen a, b gilt: $(a - b)^2 = (b - a)^2$!
Rechne dazu auch ein Zahlenbeispiel ($a = 25$, $b = 9$)!

Bewertungsvorschlag

Aufgabe 1: 4 Punkte
Aufgabe 2: 3 Punkte
Aufgabe 3: 3 Punkte
Aufgabe 4: 2 Punkte
Aufgabe 5: 5 Punkte
Aufgabe 6: 4 Punkte
Aufgabe 7: 4 Punkte

Die Punkte für die einzelnen Aufgaben sind teilbar.

2. Ähnlichkeit

2.0. Vorbemerkungen

2.0.1. Stellung, Bedeutung, Ziele

In dem seit 1. 9. 1969 gültigen Lehrplan wurde das Stoffgebiet *Ähnlichkeit* völlig neu konzipiert und vor allem der Leitlinie *Abbildungen* gemäß gestaltet. Dabei verdienen die folgenden Punkte besonders hervorgehoben zu werden:

- Der Lehrplan setzt an den *Anfang* dieses Gebiets die verschiedenen Teile des Strahlensatzes. Dabei bilden den Inhalt des dritten Teils des Strahlensatzes die Beziehungen zwischen den Parallelenabschnitten und nicht, wie es in der Literatur mitunter zu finden ist, die Beziehungen zwischen Strahlenabschnitten, die durch einen schneidenden Kreis erzeugt werden.
- Der Zugang zum Begriff *Ähnlichkeit von Figuren* erfolgt über Ähnlichkeitsabbildungen; diese wiederum werden durch die *zentrische Streckung* gewonnen. Es handelt sich also um einen abbildungsgeometrischen Aufbau.
- Die Satzgruppe des PYTHAGORAS wird unmittelbar in die Ähnlichkeitslehre einbezogen. Dabei wird der Begriff der Quadratwurzel als bekannt vorausgesetzt. (Vergleiche Stoffgebiet 4. des Lehrplans für die Klasse 7.)
- Die Schüler kennen bereits aus der Klasse 7 irrationale Zahlen; auf dieses Wissen stützt sich der Lehrplan im Stoffgebiet „Ähnlichkeit“. Auf die Erörterung des Problems kommensurabler und inkommensurabler Strecken wird verzichtet.
- Gewisse allgemein-mathematische, stoffgebietsunabhängige Begriffe und Verfahren werden deutlich hervorgehoben bzw. als Unterrichtsgegenstand genannt. Das gilt z. B. für das Umkehren von Sätzen, für die Sprechweise „... genau dann, wenn ...“ und für die indirekte Beweismethode.

Diese fünf Punkte sind in ihrer Art und ihrem Gewicht gewiß recht unterschiedlich, und als der wichtigste ist wohl der zweite anzusehen, in dem es um den abbildungsgeometrischen Aufbau geht. Einerseits entspricht ein solcher Aufbau dem Vorgehen in der mathematischen Wissenschaft und der Behandlung der Kongruenz in Klasse 6; andererseits zieht ein solcher Aufbau die stärksten Konsequenzen für alle Teilgebiete der Ähnlichkeitslehre nach sich. Dabei ist das Auftreten von Ähnlichkeitsabbildungen allein noch kein hinreichendes Kennzeichen für einen abbildungsgeometrischen Aufbau. Vielmehr kommt es auf deren Stellung und deren Funktion an. Ein solcher Aufbau ist dadurch charakterisiert, daß zunächst gewisse Abbildungen der Ebene (oder des Raumes) auf sich in irgendeiner Weise – aber ohne Ähnlichkeit von Figuren – erklärt und mit ihren Eigenschaften behandelt werden. Erst danach wird die Ähnlichkeit von Figuren mit Hilfe der zuvor erklärten Abbildungen eingeführt. Im Anschluß an den Geometrieunterricht der Klassen 4 bis 6 legt der Lehrplan ein konsequent abbildungsgeometrisches Vorgehen in folgenden Stufen fest:

(1) Es werden die zentrischen Streckungen der Ebene (mit positivem Streckungsfaktor) erklärt und als umkehrbar eindeutige, punktweise Abbildungen der Ebene auf sich erkannt.
(2) Es werden gewisse Eigenschaften dieser Abbildungen untersucht.
(3) Zusammensetzungen zentrischer Streckungen untereinander und mit Bewegungen werden als Ähnlichkeitsabbildungen definiert. Die Bewegungen sind demzufolge spezielle Ähnlichkeitsabbildungen.
(4) Zwei Figuren werden genau dann als einander ähnlich bezeichnet, wenn sie Original und Bild bei einer Ähnlichkeitsabbildung sind.
(5) Da der Nachweis, ob zu zwei vorgegebenen Figuren eine Ähnlichkeitsabbildung existiert, oft langwierig ist, wird ein Satz über die Ähnlichkeit von Polygonen erarbeitet (eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Ähnlichkeit).
(6) Zur Erleichterung der Untersuchung bei Dreiecken werden die Ähnlichkeitssätze gewonnen. Sie gestatten vor allem, aus den Eigenschaften einiger Dreiecksstücke auf die der anderen zu schließen.

Wenn der Lehrplan vorschreibt, die zentrischen Streckungen als Grundlage für die Behandlung der Ähnlichkeitsabbildungen *konstruktiv* zu erklären, so hat das u. a. folgende Gründe, die man beim Unterrichten genau beachten sollte:

(1) Eine konstruktive Abbildungsvorschrift für die Punkte der Ebene gibt die Möglichkeit zu sofortiger Festigung der Definition durch vielseitiges Üben. Dadurch haben die Schüler bei den weiteren Überlegungen „festen Boden unter den Füßen“.
(2) Eine solche Definition läßt die Fragen nach Existenz, Eindeutigkeit und Umkehrbarkeit zu, deren begründete Beantwortung leicht, aber nicht trivial ist.
(3) Die Zuordnung durch eine Konstruktionsvorschrift steht in völliger Analogie zu der später (Stoffgebiet 3.) erfolgenden Behandlung der (linearen) Funktionen. Auch dort werden Paare gebildet, indem nach einer bestimmten Vorschrift – gegeben etwa durch eine Gleichung mit zwei Variablen – zu den Elementen des Definitionsbereichs Werte bestimmt werden.
(4) Bei einer Definition durch punktweises Zuordnen ist die Frage nach den Bildern von Geraden, Strecken, Winkeln, Dreiecken, Kreisen usw. berechtigt, damit motiviert und das Suchen nach Antworten viel interessanter als bei anderen Definitionen.[1]) Auf diese Weise kann man bei den Ähnlichkeitsabbildungen das Wesentliche der abbildungsgeometrischen Betrachtungsweise viel besser bewußtmachen als bei den Kongruenzabbildungen; denn zu diesen Abbildungen ist der Schüler über das Schieben, Drehen und Umwenden realer Objekte gekommen. Eine Frage wie „Ist das Bild einer Strecke wieder eine Strecke, und wie steht es mit ihrer Länge?“ wäre für die Schüler völlig trivial, und das Aufwerfen dieser Frage würde unverständlich sein. Deshalb fällt es übrigens auch bei den Kongruenzabbildungen viel schwerer als bei den zentrischen Streckungen, falsche Vorstellungen über die „Existenz von Zwischenlagen“ zu vermeiden bzw. abzubauen und zu der bloßen Vorstellung der umkehrbar eindeutigen Abbildung der Ebene auf sich zu gelangen, bei der lediglich die geordneten Paare $[P; P']$ von Interesse sind.

Traditionsgemäß ist mit dem Stoffgebiet *Ähnlichkeit* das Problem maßverwandter und maßfremder Strecken verknüpft. Bedingt ist diese Tradition einerseits durch die

[1]) Über andere Definitionsmöglichkeiten vgl. z. B.: LORENZ, G., und G. PIETZSCH: *Das Stoffgebiet „2. Ähnlichkeit“ in Klasse 8 nach dem neuen Lehrplan für Mathematik — Klassen 6 bis 8.* In: Mathematik in der Schule. Jahrgang 7 (1969), Heft 8, Seite 571.

Stellung dieses Problems in der Mathematik der Griechen, die ja Algebra bzw. Arithmetik geometrisierten, andererseits durch das Auftreten des Begriffs *Streckenverhältnis* und eines speziellen Beweises für den ersten Teil des Strahlensatzes in der Ähnlichkeitslehre.

So kulturhistorisch interessant und so wichtig dieses Problem sowohl für die mathematische als auch für die weltanschauliche Bildung der Schüler ist, für die Ähnlichkeitslehre stellt es eine Belastung dar. Inhaltlich gehört es in die Analysis bzw. zur Behandlung der reellen Zahlen. Diese freilich sind notwendig, stehen aber auch in ausreichendem Maße zur Verfügung, weil nach dem Lehrplan für Klasse 7 die Voraussetzungen dafür geschaffen worden sind, daß zu Beginn der Ähnlichkeitslehre jeder Schüler weiß: Zu jedem Punkt der Zahlengeraden gehört entweder eine rationale Zahl oder eine irrationale Zahl. Damit hat, jeweils bezüglich unserer Längeneinheiten Meter, Dezimeter, Zentimeter, ..., jede Strecke eine Maßzahl. Je zwei dieser Zahlen haben genau einen Quotienten (abgesehen vom Divisor Null). Wenn der Dividend oder der Divisor eine irrationale Zahl ist, kann man den Quotienten oft nur näherungsweise ermitteln, indem man rationale Näherungswerte benutzt. Je genauer diese sind, desto genauer ist auch der Näherungswert für den Quotienten.

Der vom Lehrplan geforderte Beweis des Strahlensatzes (erster Teil) über die Flächengleichheit von Dreiecken bzw. Parallelogrammen macht eine Erörterung der Inkommensurabilität ebenfalls überflüssig. Sie wäre vielmehr angebracht dort, wo man bei der Flächeninhaltsberechnung von Figuren beliebige Streckenlängen zuläßt. Dort müßte z. B. plausibel gemacht werden, daß die Rechtecksformel und damit auch alle anderen bekannten Flächenformeln auch für irrationale Zahlen bzw. Seitenlängen gültig sind. Das wird nämlich bei dem erwähnten Beweis des Strahlensatzes – und nicht nur dort – vorausgesetzt. Wenn auch solche Erörterungen unterblieben sind und hier nicht nachgeholt werden, so ist es doch mit der Forderung nach fachlicher Exaktheit viel eher zu vereinbaren, diese *richtige* Voraussetzung stillschweigend zu machen, als etwa *fälschlicherweise* bei dem früher üblichen Beweis des Strahlensatzes die Kommensurabilität stillschweigend vorauszusetzen.

Nach diesen, den mathematischen Inhalt des Stoffgebiets betreffenden Bemerkungen sollen nun noch einige methodische Schwerpunkte aufgeführt werden, die dann in den Abschnitten 2.1. bis 2.4. wiederkehren:

(1) In der Entwicklung jeder Wissenschaft geht die Bildung eines Begriffes meist folgendermaßen vor sich: Zuerst sind mehr oder weniger präzise inhaltliche Vorstellungen vorhanden; erst danach wird zu dem Inhalt die passende Form gesucht, erfolgt eine Definition. Auch wenn man im Unterricht diesen Weg nicht immer nachvollzieht, so ist er doch bei schwieriger zu erarbeitenden Begriffen anzuraten.
Der Begriff „Ähnlichkeit" bietet sich für ein derartiges Vorgehen geradezu an, weil er sich relativ leicht intuitiv erfassen läßt und die Schüler sogar schon gewisse Vorstellungen über ihn mitbringen. Andererseits muß aber auch herausgearbeitet werden, daß eine solche intuitive Vorstellung nicht ausreicht, wie sich besonders deutlich an widersprüchlichen Meinungen zeigt, zu denen man etwa gelangt, wenn man sich mit einer Erklärung der Ähnlichkeit als „Formgleichheit" oder „Gestaltgleichheit" begnügen will. Die Schüler müssen dabei die Notwendigkeit bzw. Zweckmäßigkeit einer mathematisch präzisen Begriffsbildung einsehen und gleichzeitig den Ursprung mathematischer Begriffe in der Realität erkennen.

(2) Durch Beweisen mathematischer Sätze und das Konstruieren auf Grund erkannter Sachverhalte bzw. gegebener Vorschriften ist bei den Schülern die Fähigkeit des

deduktiven Denkens weiterzuentwickeln. Dabei ist auch auf die Schulung ihrer mündlichen und schriftlichen Ausdrucksfähigkeit zu achten. Unbewiesene Annahmen und verbleibende Lücken in den Beweisführungen sind den Schülern möglichst deutlich zu machen. Auf eine klare Unterscheidung von Definitionen und Sätzen ist Wert zu legen. Insbesondere muß den Schülern bei den Ähnlichkeitssätzen erneut der Charakter des Kriteriums gegenüber dem der Definition bewußt werden. Es sollen auch in diesem geometrischen Stoffgebiet in ausreichendem Maße Konstruktions- und Beweisaufgaben gestellt werden. Sie dienen hier aber nicht so sehr dem Einüben irgendwelcher spezieller Konstruktions- und Beweisverfahren, wie das zum Beispiel bei der Behandlung der geometrischen Grundkonstruktionen oder der Dreieckskonstruktionen in Klasse 6 der Fall war. Hier im Rahmen der Ähnlichkeitslehre dienen diese Übungen vielmehr dem vielseitigen Einprägen der Sätze zur Ähnlichkeit. Dabei sollen die Schüler die Bedeutung der Sätze zur Ähnlichkeit auch für innermathematische Anwendungen erfassen. Durch abwechslungsreiche Problemstellung hat man gleichzeitig die Möglichkeit, den Unterricht interessanter und effektiver zu gestalten.

(3) Die Schüler sind erneut an das Problem des Umkehrens von Sätzen, insbesondere auch als Methode mathematischer Erkenntnisgewinnung, heranzuführen. Dadurch werden sie mit der Aussagenverknüpfung „Implikation" mehr vertraut. (Es soll aber nicht der Begriff „Implikation" Unterrichtsgegenstand sein; auch die Bezeichnung soll nicht benutzt werden.)
Die Teile des Strahlensatzes eignen sich hierzu besonders, weil an ihnen auch die Fragen behandelt werden können, die entstehen, wenn Prämisse oder Konklusion selbst zusammengesetzte Aussagen (Konjunktionen) sind. Bei den Umkehrungen zu den Sätzen der Satzgruppe des Pythagoras stehen hingegen das Verfahren des indirekten Beweises sowie die Formulierungen der aussagenlogischen Äquivalenz im Vordergrund.

(4) Bei der Gegenüberstellung von Ähnlichkeit und Kongruenz müssen die Schüler die Beziehungen zwischen Allgemeinem und Speziellem, zwischen Oberbegriff und Unterbegriff erkennen. Dabei sollen sie gleichzeitig das Verallgemeinern bekannter Sätze als ein weiteres Verfahren der Erkenntnisfindung kennenlernen.

(5) Die Schüler sollen in angemessener Form mit dem weitgespannten Bogen von praktischen Anwendungen der Ähnlichkeit vertraut gemacht werden. Dabei soll es sich u. a. um Fragen handeln, die mit maßstäblichen Vergrößerungen oder Verkleinerungen zusammenhängen (technisches Zeichnen, Kartographie), um ähnliche Flächen und Körper in unserer Umwelt, um Modellbau – auch für wissenschaftliche Untersuchungen (z. B. Strömungsuntersuchungen, Hafenanlagen, Deichbauten), um Zeichen- und Meßgeräte sowie um Vermessungsverfahren. Auch die Bedeutung des Verhältnisses von Längen, Oberflächen- und Rauminhalten bei ähnlichen Gebilden sowie von damit zusammenhängenden Größen (z. B. Tragfähigkeit) für Natur und Technik ist an Beispielen hervorzuheben.
Im Rahmen dieses Stoffgebiets kann auch an den Selbstbau einfacher Meßgeräte gedacht werden. Einige praktische Vermessungsübungen im Gelände, gegebenenfalls in Verbindung mit der außerunterrichtlichen Arbeit, sind erzieherisch sehr wirksam. Im Zusammenhang mit der hierbei zweckmäßigen Gruppenarbeit üben sich die Schüler in der koordinierten Arbeit im Kollektiv. Ihnen wird bewußt, daß jedes Mitglied des Kollektivs zuverlässig arbeiten muß. Die Schludrigkeit eines einzelnen gefährdet die Arbeit des ganzen Kollektivs. Die Schüler werden in der Gruppenarbeit bei Vermessungsübungen auf die Bedeutung einer sorgfältigen

Planung aufmerksam; sie ist Voraussetzung für das Gelingen der Arbeit. Bei Vermessungsübungen ist nicht anzustreben, daß die Schüler Fertigkeiten im Umgang mit verschiedenen Geräten erwerben. Sie sollen vielmehr das zugrunde liegende Prinzip kennenlernen.

(6) Die Ähnlichkeit von Körpern ist in gebührendem Maße zu berücksichtigen. Gerade dadurch kann den Schülern wieder der Zusammenhang von Mathematik und objektiver Realität bewußt gemacht werden. Indem räumliche Betrachtungen mit einbezogen werden (ohne allerdings Ähnlichkeitstransformationen des dreidimensionalen Raumes eingehend zu besprechen), wird der Begriff „Ähnlichkeit" mit der genügenden Allgemeinheit gewonnen und ein gewisser Beitrag zur Entwicklung der Raumanschauung geleistet.

Im „Lehrplan Mathematik, Klassen 5 bis 10" (Bestell-Nr. 00 30 18) wird auf Seite 34 ausgeführt, daß die Stundenangabe für jedes Stoffgebiet verbindlich sei (in diesem Fall 52 Stunden). Dagegen könne von der Stundenangabe für die Stoffabschnitte abgewichen werden.

An verschiedenen Stellen des Buches wurden Hinweise zur Förderung der leistungsstarken Schüler gegeben. Diese Anregungen sollen nicht zu dem Schluß führen, daß eine Differenzierung in den Anforderungen ausschließlich darin besteht, leistungsstärkeren Schülern zusätzliche Aufgaben zu stellen. Der Lehrer hat natürlich die Pflicht, zurückbleibenden Schülern durch Aufgabenstellungen, die nach eingehender Analyse der Gründe für das Zurückbleiben zusammengestellt werden, den Anschluß an das Klassenkollektiv zu ermöglichen. Hierfür können aber in der Unterrichtshilfe keine Anregungen gegeben werden.

2.0.2. Literaturhinweise

(1) Ebner, M.: *Geometrische Schülerarbeiten im Gelände.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1958 (Teil 1), 1960 (Teil 2).

(2) Klotzek, B.: *Elementarer Lehrgang der Geometrie,* Teil II. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969, § 9.

(3) Lietzmann, W.: *Der Pythagoreische Lehrsatz,* 6. Auflage. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1951.

(4) Perelman, J. I.: *Unterhaltsame Geometrie.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1963.

(5) Autorenkollektiv: *Mathematik in Übersichten.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973.

(6) Autorenkollektiv: *Unterrichtshilfen Mathematik, 7. Klasse,* Seiten 121 bis 138. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1970.

Artikel in der Fachzeitschrift „Mathematik in der Schule"

(7) Bittner, R.: *Kommensurable und inkommensurable Strecken.* Jahrgang 3 (1965), Heft 1, Seite 37.

(8) Herzog, H.: *Einige Gedanken zum Thema „Schülerarbeitsblätter" und Vorschläge für die inhaltliche Gestaltung und Verwendung solcher Blätter in Klasse 8.* Jahrgang 8 (1970), Heft 8, Seite 561.

(9) Lorenz, G., und G. Pietzsch: *Das Stoffgebiet „2. Ähnlichkeit" in Klasse 8 nach dem neuen Lehrplan für Mathematik – Klassen 6 bis 8.* Jahrgang 7 (1969), Heft 8, Seite 571.

(10) LORENZ, G., und G. PIETZSCH: *Hinweise zur Behandlung des Stoffgebietes „2. Ähnlichkeit" in Klasse 8 nach dem neuen Lehrplan für Mathematik – Klassen 6 bis 8.* Jahrgang 7 (1969), Teil 1, Heft 9, Seite 692; Teil 2, Heft 10, Seite 740.
(11) LORENZ, G., und G. PIETZSCH: *Festigung zur Satzgruppe des Pythagoras, Klasse 8.* Jahrgang 16 (1978), Heft 12, Seite 669.
(12) RÜLKE, W.: *Erfahrungen bei der Behandlung des Strahlensatzes.* Jahrgang 12 (1974), Heft 2, Seite 99.
(13) RÖSEL, R.: *Vorschlag für eine Klassenarbeit in Klasse 8.* Jahrgang 7 (1969), Heft 10, Seite 764; Heft 12, Seite 930.
(14) RUB, R.: *Erfahrungen bei der Behandlung des Stoffgebiets „Ähnlichkeit".* Jahrgang 12 (1974), Heft 8.
(15) RUB, R.: *Vorschlag für eine Klassenarbeit in Klasse 8.* Jahrgang 8 (1970), Heft 12, Seite 905.
(16) TRÄGER, W.: *Lösen von Konstruktionsaufgaben unter Verwendung von Bewegungen und Ähnlichkeitsabbildungen im Unterricht und in Arbeitsgemeinschaften.* Jahrgang 13 (1975), Heft 10.
(17) WIESEMANN, H.: *Kommensurabilität und Inkommensurabilität.* Jahrgang 4 (1966), Heft 2, Seite 114.

2.0.3. Vorschlag einer Stoffverteilung für das Stoffgebiet „Ähnlichkeit“

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
2.1. Stoffeinheit: Der Strahlensatz (12 Stunden)						
2.1.1. Der erste Teil des Strahlensatzes (LE 1, 2, 3)	4	18 bis 21	65	Begriffe: Streckenverhältnis, Strahlenbüschel, Parallelenschar, Strahlenabschnitte, gleichliegende Strahlenabschnitte; Erster Teil des Strahlensatzes mit Beweis; Vervielfachen einer Strecke, Begriff und Konstruktion	Streckenmessung; Maßzahl und Einheit; Maßstab; Verkürzungsverhältnis. Flächeninhaltsformeln für Rechteck und Dreieck; Proportionalität und Verhältnisgleichungen	Modellspielwaren; Schiefertuchtafel: *Quadratmeter*; Zeichengeräte; Applikationen für Hafttafel: Holzleisten oder entsprechende Schablone für *Polylux*; Folien für *Polylux* mit Strahlensatzfiguren oder entsprechend vorbereitete Tafelbilder; Lochschablone
2.1.2. Zweiter und dritter Teil des Strahlensatzes (LE 4, 5, 6)	4	22 bis 24	75	Begriffe: Parallelenabschnitte, Zugehörigkeit von Strahlen- und Parallelenabschnitten; Zweiter und dritter Teil des Strahlensatzes mit Beweis; Gültigkeit des Strahlensatzes für Geradenbüschel; Innere und äußere Teilung	Erster Teil des Strahlensatzes; Vervielfachen einer Strecke; Eigenschaften der Drehung um 180°	Zeichengeräte, Maniperm-Schiefertuchtafel mit Koordinatensystem; Applikation: Holzleiste; Transparentpapier; Folien für *Polylux* mit innerer und äußerer Teilung

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
2.1.3. Umkehrung des Strahlensatzes (LE 7, 8)	2	25 und 26	82	Die gültigen Umkehrungen zu allen drei Teilen des Strahlensatzes mit Beweisen	Verhältnis von Satz und Umkehrung; Existenz mehrerer Umkehrungen bei zusammengesetzten Prämissen (an Sätzen der Teilbarkeitslehre und über Winkel an geschnittenen Parallelen)	Applikationen für die Hafttafel zur Umkehrung von Sätzen; Schautafel mit Übersicht zu Strahlensatzteilen und ihren Umkehrungen
2.1.4. Anwendungen des Strahlensatzes (LE 9)	2	27 und 28	90	Grundlagen und Anwendung von Meß- und Zeichengeräten, die auf dem Strahlensatz beruhen; Aufgaben aus dem Vermessungswesen	Lösen von Gleichungen; Abstecken von Strecken (Gebrauch von Fluchtstäben)	Zeichengeräte; Modelle für Meß- und Zeichengeräte: Meßkeil, Transversalmeßstab, Proportionalzirkel (evtl. Försterdreieck, Jakobsstab u. dgl.). Applikationen für Hafttafel: Gummischnüre und entsprechend vorbereitete Haftplättchen
2.2. Stoffeinheit: Zentrische Streckung (9 Stunden)						
2.2.1. Vorbereitung der Ähnlichkeitsabbildungen durch vertiefende Wiederholung (LE 10, 11, 12)	3	29 bis 32	92	Verschiebung, Drehung, Spiegelung und Begriff der Bewegung; Begriff der eineindeutigen Abbildung der Ebene auf sich; Eigenschaften der Bewegungen und Begriff der Kongruenz; Kongruenzsätze für Dreiecke; Maßstäbliche Vergrößerungen und Verkleinerungen		Zeichengeräte; Tafel mit Gitternetz bzw. entsprechende Folie für Schreibprojektor *Polylux*; Applikationen: Holzleiste, Pappwinkel; Diaprojektor mit entsprechenden Diapositiven; Rechenstab; Lochschablone

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
2.2.2. Zentrische Streckung (LE 13, 14, 15, 16)	4	32 bis 36	97	Definition der zentrischen Streckung. Begriffe: Streckungszentrum, Streckungsfaktor; Eigenschaften der zentrischen Streckung; Zusammensetzen zentrischer Streckungen	Streckenverhältnis; Strahlensatz mit Umkehrungen	Zeichengeräte; Lochschablone; Flachmodell *Zentrische Streckung* für *Polylux*
2.2.3. Leistungskontrolle mit Auswertung	2		104			Arbeitsblatt; Lochschablone
2.3. Stoffeinheit: Ähnliche Figuren (15 Stunden)						
2.3.1. Ähnlichkeitsabbildungen und Ähnlichkeit (LE 17, 18, 19)	3	36 bis 39	107	Begriffe: Ähnlichkeitsabbildung, Ähnlichkeit zweier Punktmengen; Kongruenz als Sonderfall der Ähnlichkeit; Gleichsinnige und ungleichsinnige Ähnlichkeit; Negative Zahlen als Streckungsfaktoren	Begriffe: Bewegung, Eigenschaften von Bewegungen, Kongruenz von Figuren; Aufbau der Kongruenzlehre; Zusammenhang und Bedeutung der einzelnen Stufen; Eigenschaften der zentrischen Streckung	Zeichengeräte; Arbeitsblatt; Modell *Zentrische Streckung* für Schreibprojektor *Polylux*

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
2.3.2. Ähnlichkeit von Vielecken (LE 20, 21, 22)	4	39 bis 42	113	Satz über die Eigenschaften von Winkeln und Seiten in ähnlichen Vielecken; Ähnlichkeitssatz für Vielecke mit Beweis; Ähnlichkeit regelmäßiger Vielecke; Ähnlichkeitssätze für Dreiecke; Kongruenzsätze als spezielle Ähnlichkeitssätze	Streckenverhältnis, Ähnlichkeitsabbildungen, Ähnlichkeit von Punktmengen; Eigenschaften von Ähnlichkeitsabbildungen; Eigenschaften von regelmäßigen Vielecken und Parallelogrammen; Kongruenzsätze für Dreiecke; gleichschenkliges Dreieck; Umkehrungen zum Strahlensatz	Zeichengeräte; Applikation: Fünfeck aus Pappe
2.3.3. Ähnlichkeit von krummlinig begrenzten Figuren und von Körpern (LE 23)	1	43	122	Ähnlichkeit krummlinig begrenzter Figuren, speziell von Kreisen; Ähnlichkeit von Körpern, dabei Untersuchung spezieller Körper (Würfel, quadratische Pyramiden, Zylinder u. dgl.)	Definition des Kreises, Begriffe: Würfel, Quader, Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel, Kugel; Definition der Ähnlichkeit von Figuren	Ähnliche Körper aus der Modellsammlung; Reale Gegenstände, die einander ähnlich sind (Bechergläser, Haushaltsgegenstände); Modelle realer Gegenstände (Flugzeugmodelle, Neubauten usw.); Reale Gegenstände als Gegenbeispiele (Milchflaschen o. dgl.)
2.3.4. Umfang und Inhalt ähnlicher Figuren (LE 24)	1	43 und 44	124	Verhältnis der Umfänge und Inhalte bei ähnlichen Figuren; Verhältnis der Oberflächeninhalte und Volumina bei ähnlichen Körpern	Flächeninhaltsformeln für Rechteck, Dreieck, Kreis; Umfangsformel für den Kreis; Oberflächeninhaltsberechnung eines Quaders; Volumenformel von Würfel und Quader	Einige der unter 2.3.3. genannten Körper, bei denen die Frage nach Fassungsvermögen und Oberflächeninhalt sinnvoll ist

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
2.3.5. Konstruktionen mit Hilfe der Ähnlichkeit (LE 25, 26)	3	44 und 45	125	Konstruieren von Figuren, die anderen, vorgegebenen Figuren einbeschrieben sind; Konstruieren von Figuren (Dreiecken), für die u. a. ein gewisses Streckenverhältnis vorgegeben ist; Umformen der Ähnlichkeitssätze für Dreiecke	Definition und Eigenschaften der zentrischen Streckung; Schritte beim Lösen von Konstruktionsaufgaben; Konstruktion von Parallelen; Umformen von Gleichungen, speziell von Proportionen; Ähnlichkeitssätze für Dreiecke	Arbeitsblatt, Zeichengeräte, Lochschablone
2.3.6. Anwendungen der Ähnlichkeit (LE 27)	3	46 und 47	131	Lösen von Anwendungsaufgaben zur Ähnlichkeit; Wirkungsweise technischer Geräte (Pantograph, Storchschnabel); Einfache Vermessungsübungen (Meßtischverfahren)	Ähnlichkeitssätze für Dreiecke; Lösen von Gleichungen, speziell Proportionen; Prozentrechnung; Absoluter und relativer Fehler	Zeichengeräte, Rechenstab; Modelle für Meß- und Zeichengeräte (Pantograph, evtl. Jakobsstab, Meßquadrat, Entfernungsmesser); Einfache Meßtische mit Diopterlineal (Stecknadeln), Lotgabel, Fluchtstäbe; Abbildung (Diapositiv) von Meßtisch mit Kippregel, Pantograph u. dgl.

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
2.4. Stoffeinheit: Die Satzgruppe des PYTHAGORAS (16 Stunden)						
2.4.1. Die Satzgruppe des PYTHAGORAS (LE 28, 29, 30, 31)	7	47 bis 51	137	Begriffe: Kathete, Hypotenuse, Hypotenusenabschnitt, Höhe im rechtwinkligen Dreieck, Zugehörigkeit von Kathete und Hypotenusenabschnitt; Proportionen am rechtwinkligen Dreieck; Höhensatz, Kathetensatz und Satz des PYTHAGORAS mit Beweis; Berechnen von Stücken des rechtwinkligen Dreiecks nach diesen Sätzen; Konstruktive Verwandlung von Rechtecken in flächeninhaltsgleiche Quadrate und umgekehrt; Konstruktion von Strecken der Länge $\sqrt{a}$ für natürliche a	Eigenschaften rechtwinkliger Dreiecke; Eigenschaften einander ähnlicher Dreiecke; Hauptähnlichkeitssatz für Dreiecke; Ähnlichkeit am rechtwinkligen Dreieck; Umstellen von Gleichungen, insbesondere von Verhältnisgleichungen; Quadrat als geometrischer Begriff und als zweite Potenz; Quadratzahlen und Quadratwurzeln; Irrationalzahl; Berechnen von Quadraten und Quadratwurzeln mit Hilfe von Zahlentafel und Rechenstab	Applikationen für Hafttafel: Gummischnüre und entsprechend vorbereitete Haftplättchen, Teildreiecke des rechtwinkligen Dreiecks; Zeichengeräte; Zahlentafel und Rechenstab
2.4.2. Umkehrungen zur Satzgruppe des PYTHAGORAS (LE 32, 33)	2	51 bis 53	143	Umkehrung von Höhensatz, Kathetensatz und Satz des PYTHAGORAS mit Beweis; Sprechweisen *dann und nur dann, wenn* und *genau dann, wenn*; Verfahren des indirekten Beweises	Umkehren von Sätzen; Höhensatz, Kathetensatz und Satz des PYTHAGORAS; Wahrheit und Falschheit einer Aussage, Verneinung	Knotenschnur für Pythagoreisches Dreieck; Zeichengeräte

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
2.4.3. Anwendungen (LE 34, 35)	4	54 bis 56	150	Formale Anwendungen und praktische Aufgaben zu Höhensatz, Kathetensatz und vor allem zum Satz des Pythagoras	Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks; Ähnlichkeit; Prozentrechnung; Schritte beim Lösen von Anwendungsaufgaben; Genauigkeit beim Arbeiten mit Näherungswerten; Lösen von Gleichungen; Ermitteln von Quadraten und Quadratwurzeln mit Hilfe von Tafel und Stab	Zeichengeräte; Rechenstab und Zahlentafel
2.4.4. Leistungskontrolle mit Auswertung	3		152			Arbeitsblatt

2.1. Der Strahlensatz (12 Stunden)

Den Inhalt dieser Stoffeinheit bilden die drei Teile des Strahlensatzes und ihre Umkehrungen, zusammen mit Anwendungen bei gewissen Konstruktionsverfahren (Vervielfachen einer Strecke, innere und äußere Teilung einer Strecke) und in der Praxis (Vermessungsverfahren, Meß- und Zeichengeräte).
Bei der unterrichtlichen Gestaltung dieser Stoffeinheit ist zu beachten, daß der Lehrplan dem Strahlensatz aus folgenden Gründen besondere Aufmerksamkeit schenkt und seine Behandlung zu Beginn des Stoffgebiets „Ähnlichkeit" fordert:

- Die Teile des Strahlensatzes bzw. ihre Umkehrungen liefern die Grundlage für den Beweis der zum abbildungsgeometrischen Aufbau der Ähnlichkeitslehre benötigten Eigenschaften der zentrischen Streckung. Das ist wichtig, auch wenn der Lehrplan nicht die Behandlung dieser Beweise fordert, weil die zur Verfügung stehende Zeit hierfür im allgemeinen nicht ausreichen wird. Dessen ungeachtet wird jedoch ein besonderer dritter Teil des Strahlensatzes, der (bzw. dessen Umkehrung) solche Beweise vereinfacht, herausgehoben. An dieser Stelle sei für den Lehrer vermerkt, daß in der Fachliteratur vielfach nur ein erster und ein zweiter Teil unterschieden werden, die oftmals auch einfach „erster Strahlensatz" und „zweiter Strahlensatz" genannt werden.
Freilich darf nicht verkannt werden, daß auch der umgekehrte Weg denkbar ist, bei dem die Strahlensätze lediglich als Anwendungen der zentrischen Streckung erscheinen. Bei einem solchen Aufbau bliebe aber nur übrig, gewisse Eigenschaften der zentrischen Streckung entweder unbewiesen der Anschauung zu entnehmen bzw. axiomatisch zu fordern oder in ähnlicher Weise zu beweisen, in der man sonst den Strahlensatz beweist. Das erstere ist mathematisch unbefriedigend, bei dem letzteren ergäbe sich eine methodisch bedenkliche Häufung von Schwierigkeiten.
- Das Vervielfachen einer Strecke bildet seinerseits die Grundlage für eine konstruktive Definition der zentrischen Streckung. Dieser Weg bietet die beste Möglichkeit, einerseits das Problem kommensurabler und inkommensurabler Strecken aus der Ähnlichkeit weitgehend hinauszudrängen (wenn außerdem, wie vom Lehrplan gefordert, der Beweis für den ersten Teil des Strahlensatzes über Flächengleichheiten geführt wird) und andererseits die Notwendigkeit besonderer Überlegungen beim Auftreten irrationaler Zahlen deutlich zu machen.
- Zwar lassen sich alle Anwendungen des Strahlensatzes auch als Anwendungen der Ähnlichkeit auffassen, und an allen Stellen, an denen später der Strahlensatz benötigt wird, kommt man mit der Ähnlichkeit aus, ohne den Strahlensatz überhaupt ausdrücklich zu kennen. Trotzdem resultiert aus der Kenntnis des Strahlensatzes in vielen Fällen eine gewisse Vereinfachung. Zum Teil wird diese Vereinfachung allerdings nur dadurch bedingt, daß es schwerfällt, ineinanderliegende Dreiecke als zwei verschiedene ähnliche Dreiecke aufzufassen.
- Der Strahlensatz mit seinen verschiedenen Teilen bietet eine Möglichkeit, die Schüler mit dem Problem der Umkehrung vertraut zu machen.
Dabei muß auf die Existenz mehrerer Umkehrungen bei zusammengesetzten Prämissen und auf – möglicherweise – verschiedene Wahrheitswerte dieser Umkehrungen hingewiesen werden.

Vom sachlogischen Aufbau her würde es sich anbieten, zunächst die drei Teile des Strahlensatzes, danach ihre Umkehrungen und schließlich die Anwendungen, beginnend mit dem Vervielfachen einer Strecke, zu behandeln. Das ist aber ungünstig, weil damit eine Häufung von Begriffen und Sätzen eintreten würde ohne ausreichende rechtzeitige Festigungsmöglichkeit. Aus diesem Grunde erscheint es vorteilhafter, dem Weg des Lehrbuches zu folgen und das Vervielfachen einer Strecke bereits nach der Behandlung des ersten Teils des Strahlensatzes einzuschieben. So erreicht man, daß die Schüler den Inhalt des Satzes besser erfassen, sich vor allem auch durch eigene Tätigkeiten mit ihm vertraut machen.

2.1.1. Der erste Teil des Strahlensatzes (4 Stunden; Lerneinheiten B 1 bis 3)

Diese Unterrichtseinheit umfaßt folgende Schwerpunkte:

1. Motivation des gesamten Stoffgebietes „Ähnlichkeit",
2. Einführung des Begriffs „Streckenverhältnis",
3. Erarbeitung und Beweis des ersten Teils des Strahlensatzes,
4. Das Vervielfachen einer Strecke.

Erfahrungsgemäß ist für die Einstellung der Schüler zu einem völlig neuen Stoffgebiet der erste Eindruck besonders wichtig. Um einer negativen Lerneinstellung und der Meinung vorzubeugen, es würden jetzt besonders schwierige Sachverhalte behandelt werden, die nur von den leistungsstärksten Schülern verstanden werden könnten, sollte der Lehrer der einleitenden Motivation besondere Sorgfalt widmen und bei ihr vom unmittelbaren Erfahrungs- und Interessenbereich der Schüler ausgehen. Ferner sollte er auch den Begriff „Streckenverhältnis" in steter Verbindung mit den Schülern bereits vertrauten Tatsachen und unter Ausnutzung aller Möglichkeiten einer interessanten, vielseitigen und vertiefenden Wiederholung verhältnismäßig ausführlich behandeln, obwohl es sich – bei der hier gebotenen Hintansetzung der Frage inkommensurabler Strecken – um einen recht einfachen Begriff handelt. Vor allem aber widme man dem ersten Teil des Strahlensatzes als dem ersten Satz des Stoffgebietes überhaupt sowohl beim Gewinn der Vermutung als auch beim Beweis genügend Aufmerksamkeit und Zeit. Jedes Versäumnis hier – sei es formales Auswendiglernen statt eines klaren Erfassens des Inhalts, sei es Unverständnis beim Beweisgang – hat schwerwiegende Folgen für das gesamte Stoffgebiet. Deshalb sollte man sich gegebenenfalls auch nicht scheuen, hier etwas mehr Zeit zu investieren als im folgenden vorgeschlagen wird und dafür die eine oder andere später zu erörternde Frage – etwa die der Gültigkeit des Strahlensatzes auch für Geradenbüschel oder den dritten Teil des Strahlensatzes – nicht ganz mit der sonst gebotenen Gründlichkeit zu behandeln. Daß auch das Vervielfachen einer Strecke in erster Linie der klaren inhaltlichen Erfassung des ersten Teils des Strahlensatzes dienstbar zu machen ist, wurde bereits oben erwähnt.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.1.1.: Motivation des Stoffgebiets „Ähnlichkeit" (Lerneinheit B 1)

Die motivierte Zielstellung für das gesamte Stoffgebiet sollte von praktischen, den Schülern bekannten und sie interessierenden Sachverhalten ausgehen. Geeignet dafür sind Modelle von Neubaugebieten, Modelleisenbahnen, maßstabgerecht verkleinerte Flugzeuge, Kraftwagen (Modellspielwaren) oder entsprechende Abbildungen; so wird im Lehrbuch das Stoffgebiet „Ähnlichkeit" durch ein Bild eingeleitet, das das Modell einer TU 144 im Windkanal zeigt. Auch unterschiedlich vergrößerte Abbildungen ein

und desselben Objekts oder Landkarten des gleichen Gebiets in unterschiedlichem Maßstab sind geeignet. Dabei sollte das Gespräch weniger auf die „gleiche Gestalt“ oder die „Ähnlichkeit“ der Objekte hinzielen als auf (schülergemäße) Formulierungen wie: „Das eine sieht genauso aus wie das andere, nur ist es größer als das andere“; „... nur ist alles größer als beim anderen“; „... sind alle Strecken ungefähr doppelt so lang wie beim anderen“. Ein solches Gespräch gibt den Schülern zweierlei: Sie erkennen, daß sie etwas für die Praxis Bedeutsames lernen werden und daß es notwendig ist, die vorerst noch unklaren Formulierungen zur Beschreibung eines Sachverhalts präziser zu fassen.
Diese Motivation sollte auch in erzieherischer Hinsicht genutzt werden. Man sollte dabei die sorgfältige Planung eines jeden Arbeitsvorhabens hervorheben und darauf hinweisen, daß unbedachtes Handeln besonders bei großen Projekten (siehe Kapitelbild) gewaltige wirtschaftliche Verluste zur Folge hat. Ein exaktes Vorgehen ist bei der Planung oberstes Gebot. Eventuelle Schwierigkeiten müssen nach Möglichkeit bereits im Rahmen der Planung erkannt und überwunden werden. Getreuliche Modelle bilden hierfür ein gutes Hilfsmittel.
Die Motivierung für ein ganzes Stoffgebiet hat allerdings meist den Nachteil, daß das Ziel erst relativ spät erreicht wird. Will man das vermeiden, so kann man die geschilderte Zielstellung auch an den Anfang der Stoffeinheit 2.3. *Ähnliche Figuren* stellen, dann freilich unter Verwendung der umgangssprachlichen Wörter „gleiche Gestalt“ oder „ähnlich sein“. Für 2.1. wird man sich dann auf das Streckenverhältnis konzentrieren, etwa von geographischen Gegebenheiten her. Aus dem Geographielehrbuch der Klasse 8 eignen sich Darstellungen wie etwa das Bild vom Stromsystem des Kongo[1]). Daran läßt sich dieser Begriff motivieren, und er kann dann in Verbindung mit der Wiederholung des Maßstabs eingeführt werden. Auch aus dem Mathematikunterricht ist mit dem „Verkürzungsverhältnis“ in der Darstellenden Geometrie im Zusammenhang mit der Darstellung in Kavalierperspektive bereits ein spezielles Streckenverhältnis bekannt, an das man unbedingt erinnern sollte und das man sogar zum Ausgangspunkt der Betrachtungen nehmen kann.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.1.1.: Das Streckenverhältnis (Lerneinheit B 1)

Bei der Behandlung des Streckenverhältnisses wird relativ wenig neuer Stoff vermittelt; auch die Definition des Streckenverhältnisses wendet ja nur einen bekannten Begriff (Verhältnis) auf bekannte geometrische Objekte an, und auch das ist im Grunde beim „Verkürzungsverhältnis“ in der Darstellenden Geometrie schon einmal geschehen. Daher liegt das Schwergewicht hier einerseits im Sichtbarmachen *verschiedener* Sachverhalte, in die der *gleiche* Begriff (Streckenverhältnis) eingeht, andererseits in vielseitigen Übungen bei gleichzeitiger sprachlicher Schulung. Dabei scheue man sich nicht vor sehr einfachen Übungen wie der folgenden: An der Wand ist eine Schiefertuchtafel *Quadratmeter* aufgehängt, auf ihr eine Anzahl von Gitterpunkten so markiert, daß das Ablesen entsprechender Streckenlängen leicht möglich ist. Folgende Aufgabentypen werden behandelt (mündlich und in Stillarbeit):

[1]) *Geographie, Lehrbuch für Klasse 8*, Seite 18. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969.

Lehrer	Schüler
Zeigen bzw. Nennen von zwei Strecken	Angeben des Verhältnisses
Nennen eines Verhältnisses (Zahl)	Zeigen bzw. Nennen von entsprechenden Streckenpaaren
Zeigen bzw. Nennen von zwei Strecken	Zeigen bzw. Nennen von zwei Strecken mit gleichem Verhältnis

(Auch Kästchenpapier und Lochschablone können für solche Zwecke eingesetzt werden.) Am – zumindest näherungsweisen – Ermitteln der Verhältnisse von Strecken, die im Klassenzimmer auftreten, sollte man ebenfalls nicht vorbeigehen: Tisch-, Schrank-, Raumkanten u. dgl., Bilderrahmen, Körpergrößen von Schülern usw. Dabei lernen die Schüler:

a) Es ist gleichgültig, ob das Verhältnis z. B. als $1:2$; $\frac{1}{2}$; $0{,}5$; $15:30$; ... angegeben wird: Immer handelt es sich um die gleiche Zahl.
b) Zwei Strecken haben genau ein Verhältnis, es ist also unabhängig von der verwendeten (gemeinsamen) Längeneinheit. (Es müssen also gleiche Längeneinheiten benutzt werden.)
c) Zu jedem Verhältnis gibt es beliebig viele Streckenpaare.

Bezüglich irrationaler Streckenverhältnisse muß deutlich werden, daß ein irrationales Verhältnis niemals durch Messen feststellbar ist. Insgesamt wird der Hinweis auf die Existenz irrationaler Streckenverhältnisse als Quotienten irrationaler Maßzahlen kurz sein müssen. Dabei muß jedoch der Auffassung vorgebeugt werden, daß der Quotient zweier Irrationalzahlen stets irrational ist; am besten geschieht das durch ein Gegenbeispiel wie $a = \sqrt{8}$ cm, $b = \sqrt{2}$ cm, $a : b = 2$.
Aus dem Aufgabenteil des Lehrbuches werden die Aufgaben b 1 und b 2 (Lb 104) für die (mündliche!) Arbeit im Unterricht empfohlen, während sich Aufgabe b 3 mehr als Hausaufgabe eignet.
Die Überlegungen zu den flächengleichen Rechtecken und Dreiecken in den Bildern B 2 und B 3 (Lb 18), für die man zehn bis fünfzehn Minuten einplanen sollte, dienen der unmittelbaren Vorbereitung des Beweises zum Strahlensatz. Zunächst aber besteht das Neue darin, daß man Aussagen über Streckenverhältnisse und deren Gleichheit macht, ohne diese selbst zahlenmäßig zu kennen. Das muß den Schülern in Gegenüberstellung zum Vorigen ganz deutlich werden, durchzieht diese Problematik doch die gesamte Stoffeinheit 2.1. Um hier bei den Schülern keinen Bruch entstehen zu lassen, empfiehlt sich folgendes Vorgehen:
An der Tafel befinden sich die beiden Rechtecke (in entsprechender Vergrößerung, eventuell auch als Applikationen). Problemstellung:

Aus den vier Strecken kann man viele Verhältnisse und damit auch Verhältnisgleichungen bilden. Zwei davon sind hier schon angeschrieben:

(1) $a : b = c : d$ *(2)* $a : c = d : b$

Wir wollen überprüfen, ob darunter wahre Aussagen sind.

Gewiß werden einige Schüler durch Messen überprüfen wollen; der Hinweis, daß Überlegen oftmals schneller, einfacher und sicherer zum Ziel führt (meist auch über den Einzelfall hinausgeht), ergibt folgenden Gesprächsinhalt:
Wenn (1) wahr sein soll, so müßte wegen $a > b$ gelten $c > d$ und mit $a > c$ gleichzeitig auch $b > d$. Das ist augenscheinlich nicht erfüllt, also ist (1) falsch.
Wenn (2) wahr sein soll, so müßte wegen $a > c$ gelten $d > b$ und mit $a > d$ gleichzeitig auch $c > b$. Da das erfüllt ist, könnte (2) wahr sein. Um mehr sagen zu können, müßte man mehr wissen.
Nun wird die Flächengleichheit, also $a \cdot b = c \cdot d$, mitgeteilt und den Schülern zur Überprüfung das Umformen dieser Gleichung oder das Messen mit anschließender Verhältnisbildung freigestellt. Im Auftrag B 2 (Lb 18) treten dieselben Überlegungen an flächengleichen Dreiecken auf, beim Teil a) zunächst in umgekehrter Richtung. Der Teil b) sollte auf keinen Fall entfallen, stellt er doch die Beweismittel für den nächsten Schwerpunkt zur Verfügung. Bei Zeitmangel kann man auch den Auftrag B 2 b) allein behandeln, etwa so, wie es oben für das Rechteck beschrieben wurde: Vorgeben von $\frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} d \cdot h_d$, daraus Gewinnen von $a : d = h_d : h_a$. Dabei sollten diese Übungen auch mündliche Formulierungen von Sätzen wie „In flächengleichen Dreiecken stehen zwei Seiten im umgekehrten Verhältnis wie die zugehörigen Höhen“ enthalten. Ebenso wie später im gesamten Stoffgebiet „Ähnlichkeit“ sollte man schon hier darauf achten, daß bei Verhältnisgleichungen die Schreibweise mit dem Divisionszeichen gleichwertig neben der mit Bruchstrich verwandt wird, und man sollte einen wohl abgewogenen Wechsel zwischen beiden Darstellungsweisen anstreben. Auch im Lehrbuch wird das versucht, doch ist zu beachten, daß hier – und mehr noch in den vorliegenden Unterrichtshilfen – die Schreibweise mit Divisionszeichen aus typographischen Gründen und zur Platzersparnis bevorzugt wird.
Schließlich sei noch auf die Aufgabe b 5 (Lb 104) hingewiesen, die besondere Aufmerksamkeit verdient, weil sie zu einem für die Schüler neuen Sachverhalt über das Dreieck führt; allerdings wird man unter Umständen wohl auf diese Aufgabe verzichten müssen – schon aus zeitlichen Gründen.

Dritter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.1.1.: Der erste Teil des Strahlensatzes (Lerneinheit B 2)

Dieser Schwerpunkt dürfte (mindestens, ↗ Uh 65) zwei Stunden in Anspruch nehmen – eine für die Einführung mit Beweis für eine bestimmte Lage der Strahlenabschnitte und eine für die Festigung einschließlich weiterer Beweisübungen.
Zunächst müssen die Schüler mit den Begriffen **Strahlenbüschel, Parallelenschar, Strahlenabschnitte, gleichliegende Strahlenabschnitte** vertraut gemacht werden. Nach dem Lehrplan werden diese Begriffe nur *eingeführt*, also nicht *definiert*. Das bedeutet: Die Schüler müssen diese Begriffe inhaltlich erfaßt haben, mit ihnen arbeiten, Beispiele und Gegenbeispiele für sie angeben können. Im Unterricht geschieht dieses Einführen, z. B. des Strahlenbüschels, am besten durch ein Tafelbild und den Satz: „So etwas nennt man ein Strahlenbüschel.“ Beschreibungen runden dann das Bild ab. Der Einfachheit wegen ist es zweckmäßig, sowohl zwei (oder mehr) als auch alle Strahlen von einem einzigen Punkt aus als **Büschel** zu bezeichnen. Der Lehrer sollte beachten – ohne die Schüler damit stark zu behelligen –, daß das Verwenden des bestimmten Artikels, z. B. in „*Das* Büschel mit dem Zentrum S“, die Gesamtheit *aller* Strahlen von S aus bedeutet. Gleiches gilt für die Parallelenschar. Für entsprechende Übungen ist das Bild B 4 (Lb 19) bestimmt. Dabei sollte schon hier durch Sprechübungen dem später häufig

auftretenden Mangel vorgebeugt werden, daß Schüler z. B. $\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{DE}}$ als „S zu A wie A zu B gleich ...“ lesen

Auf die strikte Benutzung von *gleichliegend* ist zu achten; es sollte keinesfalls durch *entsprechend* (auch nicht gelegentlich) ersetzt werden, weil dieses Wort für Original und Bild bei Abbildungen vorbehalten bleiben soll.

Die Zielstellung für die Behandlung des Strahlensatzes könnte etwa so erfolgen: „Wir haben bereits nach gleichen Streckenverhältnissen gesucht, z. B. am Dreieck, und gesehen, daß man aus einer Verhältnisgleichung Schlußfolgerungen ziehen kann. An einem so geschnittenen Strahlenbüschel finden wir ebenfalls viele Strecken, z. B. als Strahlenabschnitte. Wir wollen sehen, ob wir auch hier solche Zusammenhänge aufdecken können.“ Eine solche Zielangabe ist nicht nur verständlich, sie ist vor allem wegweisend. Daher ist sie einer nur formalen Zielangabe wie „Heute werden wir den Strahlensatz kennenlernen“ unbedingt vorzuziehen.

Im allgemeinen finden die Schüler nach dieser Aufforderung noch keine Verhältnisgleichung. Folgendes Verfahren hat sich als zweckmäßig erwiesen: An einer Manipermhafttafel befinden sich zwei Strahlen und zwei schneidende Parallelen, letztere durch verschiebbare Holzleisten symbolisiert. Parallelverschiebungen der einen oder der anderen Leiste zeigen erste Zusammenhänge: Gleichliegende Strahlenabschnitte verändern sich gleichartig, und zwei Abschnitte des einen Strahls verhalten sich bezüglich der Längenbeziehung genauso wie die gleichliegenden des anderen (man vergleiche mit den Überlegungen beim Rechteck im zweiten Schwerpunkt der Unterrichtseinheit). Das führt über die Vermutung der Proportionalität oder über einige Spezialfälle (Verhältnisse 1 : 1; 2 : 1; 1 : 2) zu $\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD}$.

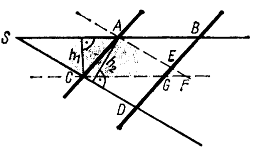


Bild 2.1.

Der Lehrplan fordert den Beweis dieses Sachverhalts mittels inhaltsgleicher Dreiecke oder Parallelogramme. Es gibt verschiedene Varianten. Im Lehrbuch ist ein verhältnismäßig einfacher und übersichtlicher Beweis über Dreiecke gewählt worden. Das Auftreten der 2 im Nenner kann verhindert werden, indem man wie im Bild 2.1. angedeutet, den Beweis über Parallelogramme führt, zu denen man gelangt, wenn man durch A die Parallele zu SC und durch C die Parallele zu SA zieht. Der Flächeninhalt des Parallelogramms $SAFC$ wird dann verschieden ausgedrückt, und außerdem wird berücksichtigt, daß die Parallelogramme $ABGC$ und $AEDC$ den gleichen Flächeninhalt haben.

Beide Beweisvarianten haben allerdings einen nicht zu übersehenden Nachteil: Es fällt schwer, den gesamten Beweisgedanken und speziell die Hilfslinien zu motivieren, gleichgültig, ob es sich im Bild B 5 (Lb 19) um die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ oder um die oben genannten Parallelen handelt (die Höhen h_1 und h_2 sind auch noch dazuzurechnen). Insgesamt erscheint der Beweis als unmotivierter „Kunstgriff“, dessen Berechtigung erst hinterher deutlich wird.

Das ist aber ungünstig für die Befähigung der Schüler zum selbständigen Finden von Beweisen. Letzteres gilt auch in erzieherischer Hinsicht, weil leicht der Eindruck entstehen kann, es sei eine besondere mathematische Begabung nötig, um auf solche Beweisgedanken zu verfallen.

Aus diesem Grunde sollte der Lehrer die Schüler ja immer wieder erleben lassen, daß sich in den meisten Fällen auch das Finden solcher Hilfslinien aus dem gründlichen Durchdenken von Voraussetzung und Behauptung ergibt. Es geht dabei um eine Sichtung und Vorauswahl derjenigen Kenntnisse des Schülers, die für einen Beweis eventuell in Frage kommen. Und wenn das auch im vorliegenden Fall nicht ganz leicht ist, zumal man natürlich auch nicht über Gebühr Zeit dafür beanspruchen darf, so sollte doch wenigstens motiviert werden, daß der Beweis über Flächeninhalte erfolgt: Die Verhältnisgleichung

$$\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD}$$

ist gleichwertig mit

$$\overline{SA} \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{SC}.$$

Dabei stehen auf beiden Seiten Größen mit der Dimension einer Fläche, also liegt es nahe, den Beweis über Flächeninhalte zu versuchen, bei deren Ermittlung die Strecken $\overline{SA}$, $\overline{SC}$, $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ auftreten.

Eine ganz andere und leichter zu motivierende Beweisführung ist möglich, wenn man vorher (im Anschluß an Auftrag B 2, ↗ Uh 68) folgende Aussage – gewissermaßen als „Hilfssatz“ – formuliert hat:

> Wenn zwei Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_2$ in einer Höhe übereinstimmen ($h_1 = h_2$), so gilt: Die Flächeninhalte A_1 und A_2 der Dreiecke stehen im gleichen Verhältnis wie die zu h_1 und h_2 gehörigen Seitenlängen s_1 und s_2.

Nunmehr kann dem Beweis folgende Gedankenführung zugrunde gelegt werden (Bild 2.2.):

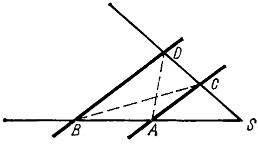


Bild 2.2.

Die Dreiecke SAC und ABC stimmen in der Höhe von C aus überein. Für ihre Flächeninhalte A_1 und A_2 gilt also:

$$A_1 : A_2 = \overline{SA} : \overline{AB}.$$

Die gleiche Überlegung, angestellt für die Dreiecke SAC und CAD mit ihren Flächeninhalten A_1 und A_3, ergibt:

$$A_1 : A_3 = \overline{SC} : \overline{CD}.$$

Wegen

$$A_2 = A_3$$

gilt demnach

$$\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD}.$$

Die größere Einfachheit dieses Beweises – er ist etwas kürzer und kommt mit weniger Hilfslinien aus – wird in gewisser Weise dadurch wieder wettgemacht, daß man zusätzlich den zuvor genannten „Hilfssatz“ formulieren und außerdem den Begriff *Flächenverhältnis* verwenden muß, dessen Einführung vom Lehrplan – zumindest an dieser Stelle – nicht vorgesehen ist. Aber dieser Hilfssatz erscheint als bloße Anwendung des Begriffs *Streckenverhältnis*, und das weitgehend selbständige Finden des Beweisganges und auch der Hilfslinien wird besonders einfach, wenn man bereits anläßlich der Behandlung des Dreiecksinhalts und der Proportionalität in den Klassen 6 und 7 statt bloßen Einprägens gewisser Fakten und formaler Aufgabenlösungen alle Möglichkeiten funktionaler Schulung genutzt hat. Bereits dort konnte man nämlich zu folgenden Erkenntnissen vorstoßen:

1) Hält man die Länge der Grundseite eines Dreiecks konstant, so sind die Länge der zugehörigen Höhe und der Flächeninhalt direkt proportional zueinander (ein entsprechender Satz läßt sich auch bei konstanter Länge der Höhe formulieren).
2) Hält man den Flächeninhalt eines Dreiecks konstant, so sind die Länge einer Seite und die Länge der zugehörigen Höhe zueinander umgekehrt proportional.

Unmittelbar nach dem Beweis (und einer zusammenfassenden Wiederholung) sollten mündliche und schriftliche Übungen im Aufstellen entsprechender Verhältnisgleichungen anhand von Bild B 4 (Lb 19) durchgeführt werden, und zwar zwei Typen: Einerseits wird ein Strahlenabschnittsverhältnis vorgegeben, andererseits ist die ganze Verhältnisgleichung aufzustellen. Man beachte, daß dafür z. B. auf dem Strahl s_1 im Bild B 4 nicht nur $\overline{SA} : \overline{AB}$, sondern auch $\overline{SA} : \overline{AC}$ und $\overline{SB} : \overline{BC}$ in Frage kommen. Wenn derartige Übungen an anderen Figuren als denen des Lehrbuchs durchgeführt werden, sollte das *Gleichliegen* (und später die *Zugehörigkeit*) von Abschnitten keinesfalls durch Bezeichnungen wie A und A' oder A_1 und A_2 für die Punkte suggeriert werden. Solche Übungen werden sonst allzu schnell zum Formalismus.
Nach diesen Übungen liegt die Vermutung nahe, daß derartige Verhältnisgleichungen in jedem Falle gelten, also nicht nur in der bisherigen, speziellen Lage der Strahlenabschnitte. Dazu müßten noch die Fälle sich überlagernder Strahlenabschnitte erörtert werden. Unter dem Hinweis, daß das später geschieht, wird die allgemeine Formulierung (Satz B 1 des Lehrbuches) erarbeitet. Als Hausaufgabe könnte gestellt werden:

a) Lernen von Satz B 1 (nicht formal im Wortlaut; die Schüler sollen vielmehr den Inhalt mit eigenen Worten wiedergeben können);
b) Aufstellen von vier (bisher gesicherten) Verhältnisgleichungen nach Bild b 1 (Lb 104);
c) Aufgabe 6 a);
d) Einige geeignete Schüler werden – unter Entlastung von b) – beauftragt, sich mit dem Beweis für die Verhältnisgleichung (2) vertraut zu machen oder den Auftrag B 4 (Lb 20) zu bearbeiten.

Für die *dritte Stunde* der Unterrichtseinheit, eine **Festigungsstunde**, wird folgender Vorschlag unterbreitet:

Thema: Festigung des ersten Teils des Strahlensatzes

Gliederung:

(1) Wiederholung, verbunden mit täglicher Übung: Begriffe „Strahlenbüschel", „gleichliegende Strahlenabschnitte" u. dgl.
(2) Kontrolle der Hausaufgaben
(3) Erarbeitung: Beweis der Behauptung $\overline{SB} : \overline{SA} = \overline{SD} : \overline{SC}$
(4) Übung: 1. Aufstellen und Lösen von Verhältnisgleichungen wie in Aufgabe b 9 (Lb 105)
2. Aufgabe b 8 (mündlich)
(5) Erarbeitung: Umformen der Verhältnisgleichungen wie im Auftrag B 4 (Lb 20) und entsprechende Textformulierung für den Satz B 1
(6) Hausaufgabenstellung: Aufgaben 9 c), 8 e) bis h), für geeignete Schüler 10 b), c), d) (Lb 105)
(7) Zusammenfassung: Kurzes Skizzieren der Abschnitte (3) und (5)

Methodische Hinweise:

Zu (1): Es empfiehlt sich, diese Wiederholung und Übung anhand eines vorbereiteten Tafelbildes (bzw. einer Folie für den Tageslichtprojektor *Polylux*) in Anlehnung an das Bild b 1 (Lb 104) vornehmen zu lassen. Dabei sind vor allem die Schüler, die noch Schwierigkeiten haben, heranzuziehen.

Zu (2): Bei der Wiedergabe des ersten Teils des Strahlensatzes durch die Schüler sollte – wie stets in derartigen Fällen – in erster Linie auf sachliche, in zweiter Linie auf sprachliche Richtigkeit geachtet werden. Keinesfalls sollten die Schüler angehalten werden, sich den Text des Buches wortgetreu einzuprägen, da so die Form den Inhalt verdrängt und auch aus der Wiedergabe derartig auswendig gelernter Sätze keinerlei Aufschluß über das wirkliche Verständnis der Schüler für den Sachverhalt zu erlangen ist. Bei der Korrektur sachlicher und sprachlicher Fehler sollte der Lehrer konsequent, aber behutsam und mit pädagogischem Feingefühl vorgehen, um den Schülern eine häufig vorhandene Scheu vor der sprachlichen Formulierung mathematischer Sachverhalte zu nehmen bzw. eine solche nicht erst zu erzeugen.

Ob der Satz inhaltlich erfaßt worden ist, zeigt sich vor allem bei der Beantwortung der Frage nach Verhältnisgleichungen, die nach diesem Satz bestehen müssen, wobei zwischen solchen, deren Gültigkeit bereits bewiesen wurde, und solchen, für die das nicht zutrifft, zu unterscheiden ist. Die Frage nach letzteren leitet zur Zielstellung für die ganze Stunde und speziell für den nächsten Abschnitt über. Die bisherigen Kenntnisse über ein von Parallelen geschnittenes Strahlenbüschel sollen jetzt gefestigt und vertieft werden. Dazu sollte man zunächst weitere Verhältnisgleichungen als gültig nachweisen lassen.

Zu (3): Bei dem Beweis der Proportion $\overline{SB} : \overline{SA} = \overline{SD} : \overline{SC}$ sollte man sich an den Weg des Lehrbuches anlehnen und damit begnügen, daß alle Schüler den Beweis verstehen. Zweckmäßig ist es, wenn man, wie auf Seite Uh 71 vorgeschlagen, bereits vorher mit der Vorbereitung auf diese Beweisführung einen oder mehrere dazu befähigte Schüler betraut hat. Dann kann jetzt dieser Beweis möglichst anhand eines vorbereiteten Tafelbildes oder einer Folie vorgetragen werden. Anschließend ist im Gespräch mit der Klasse der Unterschied zu dem in der vorigen Stunde behandelten Beweisgang herauszuarbeiten und besonderes Augenmerk auf die Motivation der Zähleraufspaltung durch das Bestreben nach Zurückführung auf die Proportion (1) zu lenken. Auf die Tatsache, daß man so auch die anderen Verhältnisgleichungen beweisen könnte und darauf nur aus Zeitgründen verzichtet wird, muß deutlich hingewiesen werden. Abschließend sollte man den gesamten Sachverhalt des ersten Teils des Strahlensatzes noch einmal von einzelnen Schülern in Worten formulieren lassen.

Zu (4): Die Aufgabe b 9 (Lb 105), die man hier benutzen bzw. an der man sich orientieren sollte, dient – ebenso wie andere gleichartige Aufgaben – in erster Linie dem Erkennen gleicher Streckenverhältnisse durch Anwenden des Strahlensatzes und dem inhaltlichen Lösen der betreffenden Verhältnisgleichung. Die Zahlenverhältnisse sind im allgemeinen so einfach gewählt, daß ein Anwenden des Gleichungskalküls, nach einiger Übung auch das explizite Formulieren der Verhältnisgleichung, unnötig wird. Schritte der Lösung bei Aufgabe b 9 b):

a) Farbiges Kennzeichnen der gegebenen Stücke;

b) Überprüfen, ob Addition oder Subtraktion zum Ziel führt ($\overline{SB} = 5{,}4$ cm);

c) Aufstellen der Verhältnisgleichung $\overline{SC} : \overline{SD} = \overline{SA} : \overline{SB}$

$\overline{SC} : 6{,}3 \text{ cm} = 4{,}2 : 5{,}4;$

d) Inhaltliches Lösen gemäß

$\overline{SC} : 6{,}3 \text{ cm} = 7 : 9;\quad 6{,}3 = 0{,}7 \cdot 9;\quad \overline{SC} = 0{,}7 \cdot 7 \text{ cm} = 4{,}9 \text{ cm};$

e) Ermitteln der letzten gesuchten Größe durch Subtraktion ($\overline{CD} = 1{,}4$ cm).

Selbstverständlich ist diese Schrittfolge nicht etwa einzuprägen. Sie richtet sich ja auch nach der Art der Aufgabe, und außerdem läßt sich auch für den Gedankengang beim inhaltlichen Lösen kein Schema angeben.

Dem gemeinsamen Bearbeiten einer solchen Aufgabe sollte eine entsprechende Stillarbeit – etwa mit b 9 a) und 9 d) – folgen. Bei 9 d) beachte man die Vieldeutigkeit, die sich ergibt, weil sich die Angaben auf einen einzigen Strahl beziehen und voneinander abhängig sind.

Die Aufgaben b 8 a) und c) sollten dann wieder mündlich gelöst werden. Bei der Aufgabe 8 b) ist der Unterschied zu den bisherigen Verhältnisgleichungen deutlich zu machen und damit die Motivation für den nächsten Stundenabschnitt zu geben.

Zu (5): Schüler, die als Hausaufgabe den Auftrag B 4 (Lb 20) bearbeitet haben (↗ Uh 71), führen die Umformungen vor und formulieren entsprechend den Text für den ersten Teil des Strahlensatzes um. Anschließend sollte man solche Formulierungen auch von anderen Schülern verlangen, wobei sinngemäß das unter (3) Gesagte gilt.

Vierter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.1.1.: Vervielfachen einer Strecke (Lerneinheit B 3)

Auf Seite Uh 65 wurde bereits betont, daß das Vervielfachen einer Strecke deshalb zwischen dem ersten und zweiten Teil des Strahlensatzes steht, damit den Schülern die Möglichkeit zur rechtzeitigen Festigung durch selbständiges, praktisches Handeln gegeben wird. Verglichen mit dem vorangegangenen Stoff sind die geistigen Anforderungen geringer. Man kann allerdings diesen Komplex auch nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes in Zusammenhang mit Lerneinheit B 5 (Innere und äußere Teilung einer Strecke) behandeln.

Der Ablauf könnte etwa folgendermaßen sein:

1. Übung: Auf der Schiefertuchtafel *Quadratmeter* ist eine Strecke von 2 dm markiert. Schüler zeigen Strecken von 2-, 3-, $4\frac{1}{2}$-, $\frac{1}{3}$facher Länge. (Das Vorgehen kann durch entsprechendes Arbeiten aller Schüler mit Kästchenpapier ersetzt oder ergänzt werden.)
2. Einführung des allgemeinen Begriffs *Vervielfachen einer Strecke* (ohne Definition).
3. Problem 1: Eine an einer (normalen) Tafel vorgegebene Strecke soll mit 2, 3, ..., n vervielfacht werden. Lösung: (n — 1)maliges Abtragen mit dem Zirkel.
   Problem 2: Eine an der Tafel vorgegebene Strecke soll mit $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \ldots$ vervielfacht werden.
   Erkenntnis: Mit bisherigen Mitteln nur möglich, wenn Nenner Zweierpotenz ist.
4. Zielangabe: Erarbeitung eines Verfahrens zum beliebigen Vervielfachen einer Strecke.
5. Arbeit der Schüler mit dem Lehrbuch am Bild B 7 (Lb 21).
6. Ein Schüler führt die Konstruktion an der Tafel vor und beschreibt sein Vorgehen; die anderen arbeiten im Heft. Ein zweiter Schüler begründet das Verfahren, ein dritter verallgemeinert auf $\frac{1}{n}$.
7. Problem: Faktor $\frac{5}{3}$; Lösung durch einen Schüler an der Tafel, die anderen arbeiten im Heft.
8. Die Schüler lösen selbständig im Heft: $\overline{AB}$ ist durch die Löcher 14 und 16 der Lochschablone gegeben. Konstruiere zwei Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ mit $\overline{AC} = \frac{1}{5}\overline{AB}$ und $\overline{AD} = \frac{7}{5}\overline{AB}$!
9. Zusammenfassungen durch Schüler.
10. Hinweis auf Vorgehen bei irrationalem Faktor anhand des Lehrbuches.
11. Hausaufgabe: Aufgaben 12, 11 a) und 11 f)

Zusammenfassung:

1) Folgende zeitliche Gliederung der Unterrichtseinheit wird empfohlen:
   1. und 2. Schwerpunkt – eine Stunde
   3. Schwerpunkt – zwei Stunden
   4. Schwerpunkt – eine Stunde
2) Am Ende der Unterrichtseinheit sollte folgendes erreicht sein: Die Schüler haben *Streckenverhältnisse* kennengelernt.
   Sie wissen, daß ein Streckenverhältnis eine *Zahl* ist, obwohl die Formulierung oftmals mit Hilfe der Strecken und ihrer Symbole erfolgt. Sie sehen Maßstab und Verkürzungsverhältnis als spezielle Streckenverhältnisse. Sie wissen, daß jeder Streckenmessung das Ermitteln eines Streckenverhältnisses zugrunde liegt. Sie können Verhältnisse vorgegebener Strecken und Streckenlängen nach vorgegebenen Verhältnissen ermitteln.
   Die Schüler kennen die Begriffe „Strahlenbüschel", „Parallelenschar", „Strahlenabschnitte", „gleichliegende Strahlenabschnitte". Sie kennen den ersten Teil des

Strahlensatzes, können seinen Inhalt sprachlich einwandfrei angeben und nach ihm wahre Verhältnisgleichungen aufstellen. Sie verstehen den Beweis dieses Satzes und können die Grundgedanken dieses Beweises wiedergeben.
Die Schüler haben den Begriff „Vervielfachen einer Strecke" für beliebige positive Faktoren erfaßt, insbesondere für Zahlen der Form $\frac{1}{n}$ (n eine natürliche Zahl). Sie können den ersten Teil des Strahlensatzes zum Vervielfachen einer Strecke anwenden und haben ihre Fähigkeiten im Zeichnen und Konstruieren aufgefrischt bzw. vervollkommnet.

2.1.2. Zweiter und dritter Teil des Strahlensatzes (4 Stunden; Lerneinheiten B 4 bis 6)

Diese Unterrichtseinheit umfaßt drei Schwerpunkte:

1. Zweiter Teil des Strahlensatzes
2. Innere und äußere Teilung einer Strecke
3. Dritter Teil des Strahlensatzes

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.1.2.: Zweiter Teil des Strahlensatzes (Lerneinheit B 4)

Zunächst sind als neue Begriffe *Parallelenabschnitt* und das *Zueinandergehören* von *Strahlen- und Parallelenabschnitten* einzuführen; bezüglich des letzteren gilt das gleiche, was auf Seite Uh 69 von *gleichliegend* und *entsprechend* gesagt wurde. Zu beachten ist, daß zu jedem Parallelenabschnitt zwei Strahlenabschnitte gehören. Ist es bei zwei Strahlen also gerechtfertigt, von einem Strahlenabschnitt und *dem* zugehörigen Parallelenabschnitt zu sprechen, so gilt das Umgekehrte nicht. Den bekannten Verwechslungen der Schüler, auch Strahlenabschnitte einzubeziehen, die nicht vom Büschelzentrum ausgehen, kann man folgendermaßen vorbeugen: Auf eine Maniperm-Schiefertuchtafel mit Koordinatensystem werden zwei Strahlen gezeichnet, der eine waagerecht, der andere diagonal. Die schneidenden Parallelen sind die senkrechten Linien des Gitters. Durch eine mit Manipermplättchen versehene verschiebbare Leiste wird jeweils eine dieser Linien hervorgehoben: Die Zugehörigkeit von Strahlen- und Parallelenabschnitt wird, unterstützt durch Zeigen und Sprechen, deutlich. Das Verschieben der Leiste kann dann anschließend zur Vermutung des Strahlensatzes, 2. Teil, führen.
Beim Beweis ist das Auffinden der Hilfslinie und damit das Umstrukturieren der Figur der schwerste Schritt. (Übrigens wird er um so leichterfallen, je mehr man sich vorher in der Lage der Strahlen und Parallelen um Abwechslung bemüht hat.) Um die Fähigkeit der Schüler zu entwickeln, selbständig Beweise zu führen, also auch den Anfang selbständig zu finden, muß man ihnen zeigen, wie man von Voraussetzung und Behauptung her zu solchen Hilfslinien kommen kann. Durch folgenden Gedankengang ist das möglich (an der Tafel befindet sich das Bild 2.3. mit der unmittelbar zuvor erarbeiteten Behauptung):

Die Behauptung sagt etwas über Streckenverhältnisse aus. Als Satz, der ebenfalls etwas über die Gleichheit von Streckenverhältnissen aussagt, kennen wir den ersten Teil des Strahlensatzes. Seine Anwendung liegt daher nahe. Dazu müßten die vier Strecken aber

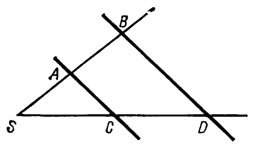


Bild 2.3.

Strahlenabschnitte sein. Demzufolge müssen ein anderer Scheitelpunkt und eine andere Parallelenschar gewählt werden. Wenn die Strahlen von B als Scheitelpunkt ausgingen, so wären drei der vier fraglichen Strecken Strahlenabschnitte, nämlich $\overline{BD}$, $\overline{SB} = \overline{BS}$ und $\overline{SA} = \overline{AS}$; dabei sind $\overline{BD}$ und $\overline{BS}$ gleichliegend, wenn $\overline{SD}$ zu der erzeugenden Parallelenschar gehört. Es fehlt also auf $\overline{BD}$ noch ein Strahlenabschnitt, der mit $\overline{AS}$ gleichliegt. Wir erhalten ihn, wenn wir durch A zu SD die Parallele ziehen.

Es versteht sich, daß das Umstrukturieren vom Büschelzentrum S zum Büschelzentrum B durch farbige Kreide und Beschreibungen seitens der Schüler unterstützt werden muß.

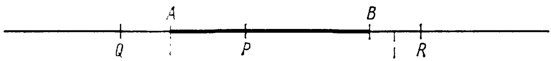
Beim zweiten Teil des Strahlensatzes ist auch der entsprechende Sachverhalt für Geradenbüschel zu behandeln, der einem besonders bequemen Konstruktionsverfahren der inneren Teilung als Grundlage dient. Um die Anzahl der den Schülern in dieser Stoffeinheit begegnenden Sätze nicht zu groß und unüberschaubar zu machen, vermeide man aber unbedingt den Eindruck, es handle sich hier um einen völlig neuen, grundlegenden Satz, der gewissermaßen gleichwertig neben den ersten und den zweiten Teil des Strahlensatzes tritt und dessen Inhalt ebenso einzuprägen ist. Vielmehr sollte deutlich werden, daß die Aussagen über Geradenbüschel gleichsam „selbstverständlich" aus denen über Strahlenbüschel folgen. Aus diesem Grunde verzichtet auch das Lehrbuch auf ein besonderes Hervorheben durch Fettdruck und Numerierung.

Bei den Aufgaben zur Lerneinheit B 4 bemühe man sich nicht um Vollständigkeit, insbesondere nicht bei der Tabelle (Aufgabe b 18). Eine Möglichkeit zur Zeitersparnis besteht darin, nach der (mündlichen) Bearbeitung von ein oder zwei Aufgaben alle übrigen nur auf die Anzahl der Lösungen hin zu untersuchen. Läßt hingegen die Klassensituation genauere Berechnungen günstiger erscheinen, so wird man sich mit einer Aufgabenauswahl begnügen, die möglichst alle Typen berücksichtigt. Unbedingt sollten aber dabei eine der nicht lösbaren Aufgaben e) und f) und die nicht eindeutig lösbare Aufgabe d) Berücksichtigung finden. Der Lehrer muß selbst entscheiden, ob er es seiner Klasse zutraut, solche Aufgaben ohne Vorbereitung als Hausaufgaben zu bearbeiten; anzustreben ist es auf jeden Fall. Im übrigen sollte man auch bei diesen Aufgaben einen möglichst rationellen Lösungsweg einschlagen. Daß z. B. bei Aufgabe e) die Verhältnisgleichung $\frac{178}{225} = \frac{143}{209}$ nicht bestehen kann, sieht man, ohne etwa die Produkte $178 \cdot 209$ und $143 \cdot 225$ zu berechnen: Von den vier Zahlen ist nur 225 durch 3 (und 9) teilbar.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.1.2.: Innere und äußere Teilung einer Strecke (Lerneinheit B 5)

Hier sind die Schüler zunächst mit dem Begriff der inneren und äußeren Teilung vertraut zu machen. Dazu ist es notwendig, den engen Zusammenhang, aber auch den Unterschied zwischen diesen Teilungen und dem in der Unterrichtseinheit 2.1.1. be-

Teilung einer Strecke $\overline{AB}$



Äußere Teilung	Jnnere Teilung	Äußere Teilung
$\overline{QA} = \frac{1}{4}\overline{AB}$	$\overline{PA} = \frac{3}{8}\overline{AB}$	$\overline{RA} = \frac{5}{4}\overline{AB}$
$\overline{QB} = \frac{5}{4}\overline{AB}$	$\overline{PB} = \frac{5}{8}\overline{AB}$	$\overline{RB} = \frac{1}{4}\overline{AB}$
$\overline{QA} : \overline{QB} = 1:5$	$\overline{PA} : \overline{PB} = 3:5$	$\overline{RA} : \overline{RB} = 5:1$
$\overline{QA} : \overline{QB} = p:q\ (p<q)$	$\overline{PA} : \overline{PB} = p:q$	$\overline{RA} : \overline{RB} = p:q\ (p>q)$
$\overline{QA} = \frac{p}{q-p}\overline{AB}$	$\overline{PA} = \frac{p}{p+q}\overline{AB}$	$\overline{RA} = \frac{p}{p-q}\overline{AB}$
$\overline{QB} = \frac{q}{q-p}\overline{AB}$	$\overline{PB} = \frac{q}{p+q}\overline{AB}$	$\overline{RB} = \frac{q}{p-q}\overline{AB}$

Bild 2.4.

handelten Vervielfachen einer Strecke herauszuarbeiten. Es empfiehlt sich, dafür ein (entsprechend farbig gestaltetes) Tafelbild gemäß Bild 2.4. in nachstehender Reihenfolge zu erarbeiten:

1. Strecke $\overline{AB}$ mit Teilpunkt P und Verlängerungen über A und B hinaus, Überschrift und $\overline{PA} = \frac{3}{8}\overline{AB}$ in der mittleren Spalte (kann bereits vorbereitet sein)
2. $\overline{PB} = \frac{5}{8}\overline{AB}$
3. $PA : PB = 3:5$; Innere Teilung
4. Q; $\overline{QA} = \frac{1}{4}\overline{AB}$; Äußere Teilung; $\overline{QB} = \frac{5}{4}\overline{AB}$; $\overline{QA} : \overline{QB} = 1:5$
5. R; Äußere Teilung; $\overline{RA} : \overline{RB} = 5:1$; $\overline{RA} = \frac{5}{4}\overline{AB}$; $\overline{RB} = \frac{1}{4}\overline{AB}$
6. $\overline{PA} : \overline{PB} = p:q$; $\overline{QA} : \overline{QB} = p:q\ (p<q)$; $\overline{RA} : \overline{RB} = p:q\ (p>q)$

Die allgemeinen Beziehungen $\overline{PA} = \frac{p}{p+q}\overline{AB}$ usw. sollte man erst nach der Behandlung des Konstruktionsverfahrens (die dann freilich an einer anderen Tafel erfolgen muß) ergänzen. In manchen Klassen wird man vielleicht ganz auf sie verzichten oder nur einige geeignete Schüler zu entsprechenden Überlegungen anregen. Keinesfalls darf bei der Erörterung dieser Frage der Eindruck entstehen, man müsse sich diese Beziehungen einprägen; es kommt allein auf inhaltliches Erfassen der Begriffe **Vervielfachen und Teilung einer Strecke** an. Deutlich muß dabei werden: Jede Teilungsaufgabe läßt sich auch als Vervielfachungsaufgabe formulieren, wenn für die Lage der gesuchten Strecke die Einschränkung gemacht wird, daß sie mit der gegebenen Strecke einen

Endpunkt gemeinsam haben und außerdem die eine gänzlich in der anderen liegen soll. (Diese Einschränkung ist nötig, weil das Vervielfachen von Strecken eigentlich ein Operieren mit Klassen von einander kongruenten Strecken ist, von denen die Ausgangs- wie die ermittelte Strecke jeweils nur Repräsentanten sind.) Manche Verwirrung entsteht bei den Schülern auf folgende Weise:

> Beim **Vervielfachen einer Strecke** $\overline{AB}$, d. h. beim Konstruieren einer Strecke $\overline{AC} = \frac{p}{q} \cdot \overline{AB}$, bedeutet:
>
> $\frac{p}{q} < 1$, daß die ermittelte Strecke $\overline{AC}$ kürzer als $\overline{AB}$ ist, während
>
> $\frac{p}{q} > 1$ bedeutet, daß die ermittelte Strecke $\overline{AC}$ länger als $\overline{AB}$ ist.
>
> (In der Zeichnung wirkt sich das üblicherweise so aus, daß der Punkt C innerhalb bzw. außerhalb von $\overline{AB}$ liegt.)
>
> Beim **Teilen einer Strecke** $\overline{AB}$ sagt jedoch die Tatsache, ob das Teilverhältnis $\frac{p}{q}$ kleiner oder größer als 1 ist, nichts darüber aus, ob der Teilpunkt innerhalb oder außerhalb von $\overline{AB}$ liegt; denn sowohl für die innere als auch für die äußere Teilung kann $\frac{p}{q}$ kleiner oder größer als 1 sein. (Beide werden allenfalls durch verschiedene Vorzeichen unterschieden, doch wird das in der Schule vermieden, weil man sonst mit gerichteten Strecken arbeiten müßte.)

Den Unterschied zwischen Vervielfachen und Teilen in dieser Hinsicht kann man durch folgenden Hinweis deutlich machen: Beim Vervielfachen erfolgt stets der Bezug zur Ausgangsstrecke $\overline{AB}$ $\left(\overline{AC} : \overline{AB} = \frac{p}{q}\right)$; beim Teilen hingegen geht in das Teilverhältnis die Ausgangsstrecke $\overline{AB}$ nicht ein $\left(\overline{CA} : \overline{CB} = \frac{p}{q}\right)$. Wohl aber geht verabredungsgemäß die Reihenfolge der Punkte A und B der Strecke $\overline{AB}$ ein, weil es ja sonst z. B. bei innerer Teilung zu jedem Teilverhältnis zwei Teilpunkte gäbe. Nach der Verabredung entstehen diese beiden Punkte, je nachdem $\overline{AB}$ oder $\overline{BA}$ in dem betreffenden Verhältnis geteilt wird (insofern handelt es sich also hier eigentlich um eine gerichtete Strecke).
Für die Vermittlung der Konstruktionsverfahren gilt: Die Schüler sollen keine perfekten „Streckenteiler" werden. Wichtig ist vielmehr, daß sie das Prinzipielle im Anwenden der Strahlensätze erleben und befähigt werden, die Konstruktion vom jeweiligen Problem her selbst zu finden. Dazu empfiehlt sich im Unterricht etwa das folgende gedankliche Vorgehen:

(1) *Aufgabe:* Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$ (wenn Einheitlichkeit gewünscht wird, etwa mittels der Lochschablone, keinesfalls jedoch durch eine Längenangabe). Sie soll innen im Verhältnis 7 : 3 geteilt werden.
(2) *Durchdenken der Aufgabe:* Gesucht ist ein Teilpunkt T, der zwischen A und B liegt und die Teilstrecken $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$ erzeugt, für die $\overline{TA} : \overline{TB} = 7 : 3$ gilt.
(3) *Finden der Lösung:* $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$ können als Strahlenabschnitte gedacht werden, die aneinander grenzen. Dann muß A oder B Scheitelpunkt sein, von dem ein weiterer

Strahl ausgeht. Auf ihm müssen dann zwei Strahlenabschnitte abgetragen werden, die zu (den gesuchten) $\overline{TA}$ und $\overline{TB}$ gleichliegen. Ihre Länge ist gleichgültig, nur müssen sie ebenfalls das Verhältnis 7 : 3 bilden.

(4) *Ausführen der Konstruktion: ...*

Das Gegenüberstellen verschiedener Konstruktionswege bei der gleichen Aufgabe kann etwa folgendermaßen geschehen: Die Schüler erhalten die Aufgabe, eine der Strecken $\overline{AB}$ der Bilder B 13 (Lb 23) auf Transparentpapier zu übertragen und sie dann im gleichen Verhältnis wie im Lehrbuch zu teilen. Der Lehrer weist den Schülern das Verfahren unter Beachtung folgender Bedingungen zu: anders als im Buch und unterschiedlich zwischen den jeweiligen Nachbarn. Nach der Konstruktion werden dann jeweils die beiden Nachbarblätter auf das Bild des Lehrbuches gelegt, und das Aufeinanderfallen der Teilpunkte wird kontrolliert. Für die Erziehung zur Genauigkeit ist ein solches Vorgehen von großem Wert. Daneben empfiehlt sich für den Lehrer die Anfertigung entsprechend abgestimmter Folien für den Schreibprojektor *Polylux*.

Beeindruckt sind die Schüler, wenn sie in dem praktischen Sachverhalt der Aufgabe b 21 (Lb 106) das mathematische Problem der inneren und äußeren Teilung wiedererkennen. Wer vermutet das schon hinter einem solchen Text, in dem doch von keinem Streckenverhältnis die Rede ist? Man könnte sogar meinen, zur Lösung des Problems Gleichungen mit zwei Variablen zu benötigen, dabei wird nur benötigt, daß sich die in gleichen Zeiten zurückgelegten Strecken zueinander verhalten wie die Geschwindigkeiten, also die Proportionalität von Weg und Geschwindigkeit. Bei entsprechend anderer Gestaltung der Unterrichtsstunde (schwieriger, aber interessanter) kann man diese Aufgabe auch umgekehrt nutzen, nämlich zur Einführung des Begriffs *äußere Teilung*. Bekanntlich fällt das ja deshalb schwer, weil beim Wort *Teilen* jeder die Vorstellung hat, es müsse etwas Kleineres entstehen („Ein Teil ist stets kleiner als das Ganze“). Von einer echten Begriffserweiterung kann man aber auch nicht sprechen, da ja negative Zahlen als Teilverhältnisse nicht berücksichtigt werden. So bleibt nur eine Analogiebetrachtung, und gerade die ist vom praktischen Beispiel her gut zu motivieren. Die Beziehung zwischen praktischem Sachverhalt und mathematischer Begriffsbildung sollte man jedoch in jedem Falle deutlich machen.

Der Schulung des funktionalen Denkens und damit der Vorbereitung des Funktionsbegriffs dient es, wenn die Lage des Teilpunktes in Abhängigkeit vom Teilverhältnis (und umgekehrt) betrachtet wird. Dabei kann, durch die Anschauung unterstützt, auch folgendermaßen formuliert werden:

Ein äußeres Teilverhältnis 1 ist zwar nicht möglich. Doch kommt es der 1 (von unten oder von oben) „beliebig“ nahe, wenn der Teilpunkt nur weit genug von A und damit auch von B entfernt ist.

Dritter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.1.2.: Dritter Teil des Strahlensatzes (Lerneinheit B 6)

Ein dritter Teil des Strahlensatzes als Aussage über die Parallelenabschnitte wird selten ausdrücklich formuliert. Allerdings drängt er sich von der Systematik her geradezu auf: Geht es im ersten Teil um die von Parallelen erzeugten Strahlenabschnitte, so im dritten Teil um die durch Strahlen erzeugten Parallelenabschnitte. Von daher könnte dieser sogar an zweiter Stelle stehen und der die Verbindung beider Abschnittsarten herstellende zweite Teil an letzter; doch erfordern die Beweise eine andere Reihenfolge, wobei der des dritten Teils geradezu in den Schoß fällt. Das ist auch einer der Gründe, warum er meist vernachlässigt wird – es bereitet keine besonderen Schwierigkeiten, ohne ihn auszukommen, wenn man statt dessen den zweiten Teil mehrmals anwendet. Ein anderer Grund für den oftmaligen Verzicht auf ihn besteht darin, daß man ihn an der einfachsten Strahlensatzfigur (zwei Strahlen und zwei Parallelen), auf die man sich häufig weitgehend beschränkt, nicht formulieren kann. Wenn der Lehrplan die Behandlung des dritten Teils fordert, so tut er das nicht nur aus Gründen der Vollständigkeit, sondern auch, weil dessen Kenntnis bzw. die seiner Umkehrung Beweise für Sätze über Ähnlichkeitsabbildungen bzw. ähnliche Vielecke etwas zu vereinfachen vermag (↗ Uh 115). Der Lehrer sollte jedoch beachten, daß hier am ehesten die Möglichkeit besteht, gewisse Abstriche an Ausführlichkeit und Gründlichkeit zugunsten anderer Probleme zu machen, falls die Klassensituation das als günstig erscheinen läßt. Aus diesem Grunde wird auch empfohlen, einen Teil der dem dritten Teil des Strahlensatzes gewidmeten Unterrichtsstunde für eine Kurzarbeit (schriftliche Leistungskontrolle von etwa 10 Minuten Dauer) zu verwenden. Eine Auswahl von Aufgaben der folgenden Art ist dafür geeignet:

1. Bild 2.5.: Fülle in den folgenden Gleichungen die leeren Stellen so aus, daß richtige Verhältnisgleichungen entstehen! Gib an, aus welchem Teil des Strahlensatzes die Richtigkeit folgt!

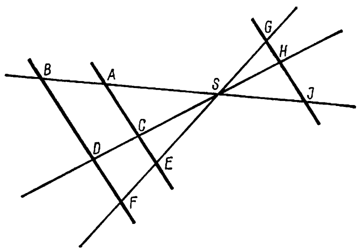


Bild 2.5.

Gruppe A	Begründung	Gruppe B	Begründung
a) $\overline{SB} : \quad\quad = \overline{SF} : \overline{SE}$ b) $\overline{AC} : \overline{AE} = \quad\quad : \overline{BF}$ c) $\quad\quad : \overline{CD} = \overline{EC} : \overline{DF}$ d) $\overline{SB} : \overline{SJ} = \overline{DB} : \quad\quad$ e) $\overline{SB} : \overline{SA} = \quad\quad : \overline{EC}$ f) $\overline{SJ} : \overline{EF} = \overline{SG} : \quad\quad$		a) $\overline{SB} : \quad\quad = \overline{DB} : \overline{AC}$ b) $\overline{SC} : \overline{CD} = \quad\quad : \overline{EF}$ c) $\overline{DB} : \overline{DF} = \overline{AC} : \quad\quad$ d) $\quad\quad : \overline{SG} = \overline{SA} : \overline{SJ}$ e) $\overline{SA} : \overline{CD} = \overline{SC} : \quad\quad$ f) $\overline{SE} : \overline{SF} = \quad\quad : \overline{DB}$	

2. Bild 2.6.: Im Dreieck ABC gilt:

   (1) D teilt $\overline{CA}$ im Verhältnis $2:1$, d. h. $\overline{CD} : \overline{DA} = 2:1$.
   (2) $\overline{CM}$ ist Seitenhalbierende von $\overline{AB}$.
   (3) $\overline{DE}$ ist parallel zu $\overline{AB}$.

Gib die folgenden Verhältnisse an (unabhängig von dem hier gezeichneten Dreieck ABC)!

Gruppe A: a) $\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} =$ b) $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} =$ c) $\frac{\overline{DF}}{\overline{AM}} =$ d) $\frac{\overline{CA}}{\overline{AM}} =$
e) $\frac{\overline{DF}}{\overline{MB}} =$

Gruppe B: a) $\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} =$ b) $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} =$ c) $\frac{\overline{DF}}{\overline{FE}} =$ d) $\frac{\overline{FE}}{\overline{AM}} =$
e) $\frac{\overline{CE}}{\overline{EF}} =$

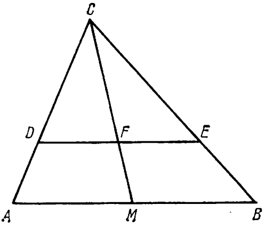


Bild 2.6.

3. (Die Strecke $\overline{AB}$ kann entweder auf einem Arbeitsblatt oder mit Hilfe einer Lochschablone vorgegeben werden, oder sie wird vom Schüler beliebig gewählt.)

Gruppe A:	Gruppe B:
a) Konstruiere einen Punkt P, der die Strecke $\overline{AB}$ innen im Verhältnis 5 : 4 teilt!	**a)** Konstruiere einen Punkt P auf der Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus, so daß $\overline{AP} = \frac{7}{4}\overline{AB}$ ist!
b) $\overline{AP} = k_1 \cdot \overline{AB}$; $k_1 = \ldots$ $\overline{PB} = k_2 \cdot \overline{AB}$; $k_2 = \ldots$	**b)** Der Punkt P teilt $\overline{AB}$ ... im Verhältnis ...

Dabei sollte die Zeit voll zum Arbeiten genutzt werden können, die Aufgaben sollten also an der Tafel vorbereitet oder – noch besser – den Schülern auf Blättern ausgehändigt werden, auf denen auch gleich die Lösungen niedergeschrieben werden können.
Am Beginn der Betrachtungen zum dritten Teil des Strahlensatzes steht gewiß eine Figur wie Bild B 14 (Lb 24) im Lehrbuch. Zum Beweis kann jedoch schon Bild B 15 benutzt werden; denn der Beweis daran ist um keinen Deut schwieriger, und es handelt sich um den wichtigeren, auch später häufiger auftretenden Fall. Bild B 15 kann aber noch eine andere Aufgabe erfüllen: Es kann zum Problem der Umkehrungen hinführen (↗ Uh 84).
Bevor man jedoch die Umkehrungen in Angriff nimmt, ist es günstig, wenn man in knapper, einprägsamer Form die drei behandelten Teile des Strahlensatzes noch einmal

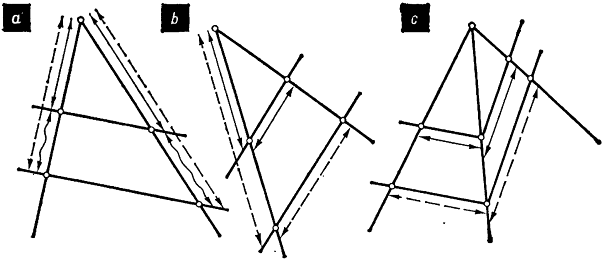


Bild 2.7.

einander gegenüberstellt. In einem Tafelbild veranschaulichen farbige Pfeile nicht nur das Gleichliegen oder Zueinandergehören von Strahlen- oder Parallelenabschnitten, sondern gleichzeitig auch die nach dem jeweiligen Teil des Strahlensatzes gültigen Verhältnisgleichungen. (Im Bild 2.7. sind die verschiedenen Farben durch unterschiedliche Ausführung der Maßpfeile angedeutet.)

Zusammenfassung:

1) Für den ersten Schwerpunkt der Unterrichtseinheit sollten zwei Stunden, für die anderen beiden je eine Stunde veranschlagt werden.
2) Am Ende der Unterrichtseinheit sollte folgendes erreicht sein:
   Die Schüler kennen die Begriffe „Parallelenabschnitt", „Zugehörigkeit bei Strahlen- und Parallelenabschnitten" sowie „Gleichliegen bei Parallelenabschnitten".
   Sie kennen den zweiten und dritten Teil des Strahlensatzes, können ihren Inhalt mit eigenen Worten angeben und diese Sätze für das Aufstellen wahrer Proportionen anwenden.
   Sie verstehen die Beweise für diese Sätze und können sie wiedergeben. Weiterhin wissen sie über die Gültigkeit der den Strahlensatzteilen entsprechenden Aussagen auch für Geradenbüschel Bescheid.
   Die Schüler kennen die Begriffe *innere und äußere Teilung einer Strecke* und sehen diese Begriffe auch im Zusammenhang mit der früher behandelten Vervielfachung einer Strecke. Sie können Strecken konstruktiv nach vorgegebenen Verhältnissen innen und außen teilen und haben einen Überblick über die Möglichkeiten, die dafür unter Anwendung verschiedener Teile des Strahlensatzes bestehen.

2.1.3. Umkehrungen des Strahlensatzes (2 Stunden; Lerneinheiten B 7 und 8)

Von all den Möglichkeiten (und auch Notwendigkeiten) logischer Durchdringung des Mathematikunterrichts hat das Umkehren von Implikationen in den letzten Jahren mehr und mehr Eingang in Lehrpläne und Lehrbücher gefunden und ist heute zum ausgesprochenen Unterrichtsgegenstand geworden. Wenn das Fragen nach der Umkehrung eines mathematischen Satzes und deren Wahrheit dem Schüler zu einer selbstverständ-

lichen Gewohnheit geworden ist, so ist ein gutes Stück allgemein-mathematischer Bildungsarbeit geleistet worden. Wenn der Schüler darüber hinaus erkannt hat, daß dieses Fragen auch außerhalb der Mathematik berechtigt, wichtig und notwendig ist, so hat der Mathematikunterricht wesentlich zur Allgemeinbildung im Sinne fachübergreifender Leitlinien beigetragen.
Die Hauptaufgaben der Unterrichtseinheit liegen demgemäß in der Denkschulung. Hier wird der Leitlinie *Beweisen* besonders entsprochen. Darüber hinaus wird ein wichtiges Lehrplanziel, nämlich die Befähigung der Schüler zum Anwenden wichtiger mathematischer Denk- und Arbeitsweisen, in den Vordergrund gerückt. Demgegenüber tritt das unmittelbare inhaltliche Anliegen, das Kennenlernen der gültigen Umkehrungen der Strahlensatzteile, an Bedeutung eindeutig zurück. Damit soll allerdings nicht gesagt sein, daß es vollkommen gleichgültig ist, ob die Schüler nach dieser Unterrichtseinheit die gültigen Umkehrungen des Strahlensatzes kennen oder nicht; schließlich werden diese Sätze nicht nur für den Beweis der Eigenschaften der zentrischen Streckung benötigt, sondern auch für den vom Lehrplan ausdrücklich geforderten Beweis des Satzes über die Eigenschaften ähnlicher Vielecke und seiner Umkehrung. Es ist deshalb zweckmäßig, bei der Formulierung der beiden Schwerpunkte jeweils einen allgemeinen und einen an den speziellen Inhalt gebundenen Teil zu berücksichtigen.

Allgemein	Speziell
1. Verhältnis von Satz und Umkehrung und deren Wahrheitswert	Umkehrung zum ersten Teil des Strahlensatzes
2. Umkehrungen bei Sätzen mit zusammengesetzten Prämissen	Umkehrung zum zweiten und dritten Teil des Strahlensatzes

Da die allgemeinen Gesichtspunkte bereits in Klasse 6 zur Sprache gekommen sind, handelt es sich hier eigentlich um eine Wiederholung. Trotzdem gebe man sich keiner Täuschung hin: Gerade bei diesen schwierigen Fragen ist Klarheit erst ganz allmählich zu erreichen, und es ist sehr fraglich, ob in der Zwischenzeit dem Problem der Umkehrung ständig genügend Aufmerksamkeit geschenkt werden konnte, so daß jetzt mit einer tragfähigen Grundlage gerechnet werden kann. So wird der Lehrer schon aus erzieherischen Gründen den Schüler daran erinnern, daß diese Fragen eigentlich nicht neu sind, daß die in der Klasse 6 erarbeiteten Vorkenntnisse jedoch wieder aufgefrischt werden müssen. Der Lehrer wird sich aber auf eine recht gründliche Behandlung dieses Problems einstellen müssen, ohne daß er viel voraussetzen kann.
Bei den Beweisen in dieser Unterrichtseinheit ist zu beachten: Ging es vorher bei geometrischen Beweisen vorwiegend um kongruente Strecken oder Winkel, die es mit Hilfe kongruenter Dreiecke nachzuweisen galt, so geht es jetzt um die Parallelität von Geraden oder gar um die Zugehörigkeit eines Punktes zu einer Geraden. Obwohl oftmals derartige Beweise sehr einfach scheinen, weil sie kurz sind, fallen sie den Schülern recht schwer.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.1.3.: Verhältnis von Satz und Umkehrung und deren Wahrheitswert; Umkehrung zum ersten Teil des Strahlensatzes

Für die Gestaltung dieses Schwerpunktes in der *1. Stunde* der Unterrichtseinheit, einer *Einführungsstunde*, wird auf der folgenden Seite ein Stundenentwurf als Vorschlag unterbreitet.

Thema: Umkehrung des Strahlensatzes, erster Teil

Gliederung:

(1) Motivierung und Zielstellung
(2) Formulierung der Umkehrung zum ersten Teil des Strahlensatzes und Beweis
(3) Übungen im Umkehren einer Aussage (Implikation)
(4) Formulierung der (ersten) Umkehrung zum zweiten Teil des Strahlensatzes und Untersuchung auf Gültigkeit
(5) Hausaufgabe: a) Auftrag B 12 (Lb 25)
b) Aufgabe b 33 (Lb 108) (für leistungsstarke Schüler)

Methodische Hinweise:

Zu (1): Wie bereits auf Seite Uh 81 angedeutet wurde, kann die Untersuchung der Umkehrungen zum Strahlensatz anhand des Bildes B 15 (Lb 24) im Lehrbuch motiviert werden. Das ist auf zweierlei Weise möglich: Entweder man deutet das Bild räumlich (↗ Lb 24 unten), oder aber man gewinnt – genauso wie Teil 3 des Strahlensatzes – beispielsweise die Proportion $\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{SG} : \overline{SH}$ als wahre Aussage, obwohl man nicht weiß, ob die betreffenden Strahlenabschnitte von Parallelen erzeugt werden. Das wirft die Frage auf, ob $\overline{AG}$ und $\overline{BH}$ parallel zueinander sind, ob also die Umkehrung zum Strahlensatz, Teil 1, wahr ist.
Zu (2): Zunächst wird man sich hier mit dem formalen Umkehren von Voraussetzung und Behauptung begnügen, das zu der Aussage *Wenn* $\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{SG} : \overline{SH}$ *gilt, so gilt* $AG \parallel BH$ führt, und erst diese Aussage beweisen, bevor man sich um eine rein textliche Formulierung der Umkehrung bemüht. Die beiden Strahlen SB und SH sowie die erzeugenden Parallelen sollten dabei aus einem dem Bild B 15 entsprechenden Tafelbild heraus entstanden sein.
Bei der Beweisführung, die der Lehrer unter aktiver Beteiligung einiger Schüler selbst vortragen sollte, wird man sich im wesentlichen an den Weg des Lehrbuches halten. Dadurch wird mit den Schülern die Methode des indirekten Beweises, die in Klasse 7 im Zusammenhang mit dem Satz von Tangente und Berührungsradius vorbereitet wird[1]), in den Unterricht eingeführt. Im Stoffgebiet „Ähnlichkeit“ kommt die Methode des indirekten Beweises wiederholt zur Anwendung und wird dadurch gefestigt. Dabei sieht der Lehrplan für die Stoffeinheit 2.4. im Zusammenhang mit der Behandlung der Umkehrungen der Satzgruppe des PYTHAGORAS ein Eingehen auf die Problematik dieser Beweismethode vor (↗ Uh 148), während an dieser Stelle nur Einzelüberlegungen auf der Basis indirekter Beweisführungen erfolgen.
Von der Sache her würde sich schon die jetzt erreichte Stelle im Lehrgang, also die Umkehrung des ersten Teils des Strahlensatzes, eignen. Durch die nochmalige isolierte Betrachtung eines Einzelfalls schafft aber der Lehrplan die Möglichkeit, eine Häufung von Schwierigkeiten an dieser Stelle zu umgehen und gleichzeitig die Ausgangsposition für die spätere Behandlung der indirekten Beweismethode zu stärken.
Diese Überlegungen bilden auch den Grund dafür, daß die ausgeprägte Form eines indirekten Beweises vor der Behandlung der Methode im Stoffabschnitt 2.4. meist noch vermieden wird; so geschieht das auch beim Beweis von Satz B 5 (Lb 26).
Zumindest sollen die Schüler hier aber lernen, daß man beim Beweis einer Umkehrung

[1]) Vgl. *Mathematik, Lehrbuch für die 7. Klasse* (Bestell-Nr. 00 07 06-1), Seite 107 f. (Satz F 3). Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1970.

oftmals den ursprünglichen Satz anwendet, sich also demzufolge eine dafür geeignete Situation erst herstellen muß. Im übrigen werden wir uns hier damit begnügen, daß die Schüler den Beweis verstehen und wiedergeben können. Nachdem der Beweis durch Schüler wiederholt worden ist, ist kurz zu der Figur gemäß Bild B 15 zurückzukehren, also der Bezug zur Motivierung herzustellen. Schließlich ist – unter Beachtung des auf Seite 71 Gesagten – eine wörtliche Formulierung zu erarbeiten. Dabei tritt ein Problem auf:

Wenn man sich möglichst kurz fassen will, wird man in der Prämisse, wie das auch im Lehrbuch beim Satz B 5 geschieht, von *gleichliegenden Strahlenabschnitten* sprechen müssen. Nun ist aber nur für Strahlenabschnitte, die von einer Parallelenschar erzeugt werden, *gleichliegend* erklärt. Anderenfalls, also auch in der Prämisse der Umkehrung zum Strahlensatz, ist die Verwendung dieses Begriffs eigentlich nicht gerechtfertigt. Nun können sich aber dadurch, besonders in Verbindung mit einer Abbildung, keine Mißverständnisse ergeben; allenfalls erfordert die Lage, bei der *ABCD* ein überschlagenes Viereck ist (Bild 2.8.), eine zusätzliche Erläuterung, aber dabei kann ohnehin keine Verhältnisgleichheit „gleichliegender" Strahlenabschnitte vorliegen. Deshalb sollte man die Schüler zwar auf diesen Umstand aufmerksam machen, dennoch aber beim Gebrauch des fraglichen Terminus bleiben.

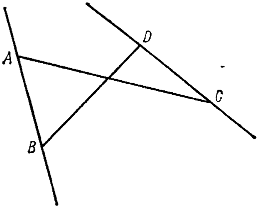


Bild 2.8.

Zu (3): Gewiß werden auch einige prinzipielle Übungen im Umkehren von Sätzen notwendig sein. Vor allem kommt es darauf an, in Erinnerung zu rufen bzw. deutlich zu machen, daß die Umkehrung einer wahren Aussage durchaus nicht immer selbst wahr sein muß. Solche Übungen kann man auch vor (2) durchführen; man muß dann allerdings bedenken, daß zwischen Motivation und Zielstellung einerseits und der Realisierung dieser Zielstellung andererseits eine relativ große Zeitspanne liegt. Bei solchen Übungen ist zunächst einmal an einfache, den Schülern bekannte mathematische Sätze zu denken, etwa:

Jede durch 6 teilbare Zahl ist auch durch 3 teilbar.
Jedes gleichseitige Dreieck hat drei Winkel von 60°.

Diese Sätze, die an einer Tafel vorbereitet sein können, sind zunächst in Implikationen (Wenn p, so q) umzuformen, und das eigentliche Bilden der Umkehrungen sollte auch in Stillarbeit geschehen, wobei hier neben der zunächst entstehenden Implikation (Wenn q, so p) auch andere textliche Formulierungen zu geben sind. Die Vorstellung von dem formalen Vertauschen von Voraussetzung und Behauptung kann verstärkt werden, wenn man die Aussagen p und q auf kleinen Papptafeln als Applikationen vorbereitet hat und nun einfach ihre Plätze hinter den an der Tafel stehenden Wörtern **Wenn** und **so** bzw. **Voraussetzung** und **Behauptung** wechselt. Auch im Lehrbuch ist versucht wor-

den, diesen Prozeß durch eine entsprechende graphische Gestaltung mit farbigen Unterstreichungen deutlich zu machen.
Allerdings sollte man bei diesen Übungen, vor allem um die Einprägsamkeit zu erhöhen, bewußt über den mathematischen Bereich hinausgehen, ja überhaupt nicht unbedingt bei wissenschaftlichen Aussagen verbleiben. Besonders nachhaltig wirken auf Schüler zum Beispiel „Umkehrversuche" an Sprichwörtern, bei denen man sich durchaus nicht scheuen sollte, bis zu Aussagen wie „Was Gold im Munde hat, ist die Morgenstunde" vorzudringen. Wenn dann später einmal Satz und Umkehrung verwechselt werden, genügt der kurze Hinweis „Morgenstunde", um Klarheit zu schaffen.
Zu (4): Hier könnte der Auftrag B 12 (Lb 25) als Ausgangspunkt dienen. Ein Gegenbeispiel (Bild B 17) führt zu der Erkenntnis, daß die Umkehrung des zweiten Teils des Strahlensatzes – im Gegensatz zu der des ersten – falsch ist. Schon in der darauffolgenden Stunde wird zwar zur Sprache kommen, daß sich ein anderes Resultat ergibt, falls man die Tatsache, daß ein geschnittenes Strahlenbüschel vorliegt, ausdrücklich mit zu den Voraussetzungen zählt. Trotzdem sollte man jetzt darauf noch nicht hinweisen und auch ruhig von *der* Umkehrung zum zweiten Teil des Strahlensatzes sprechen. Da die Richtigstellung schon so kurze Zeit später erfolgt, ist das nicht als Verstoß gegen die Wissenschaftlichkeit des Unterrichts anzusehen. Wegen der hier vorliegenden Verständnisschwierigkeiten werden auch im Lehrbuch nicht von vornherein zwei Umkehrungen unterschieden, und auch später wird nicht etwa von der „Umkehrung erster bzw. zweiter Art zum zweiten Teil des Strahlensatzes" gesprochen.
Zu (5): Hier bietet sich Gelegenheit, über die angegebenen Hausaufgaben hinaus auch noch einen gewissen „Nachholebedarf" zu befriedigen und noch ausstehende Übungen oder Aufgaben aus früheren Lerneinheiten bearbeiten zu lassen

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.1.3.: Umkehrungen bei Sätzen mit zusammengesetzten Prämissen; Umkehrung zum zweiten und dritten Teil des Strahlensatzes

Die Frage der Umkehrung von Sätzen mit zusammengesetzten Prämissen ist vielleicht der schwierigste Teil der ganzen Unterrichtseinheit. Bereits in Klasse 6 ist aber auch schon erörtert worden (bei den Sätzen über Winkel an geschnittenen Parallelen), daß Sätze mit zusammengesetzten Prämissen mehrere Umkehrungen haben[1]). Deshalb ist es empfehlenswert, nach wiederholenden Übungen im Umkehren einfacher Sätze das seinerzeit behandelte Beispiel zu betrachten. Um den Übergang zum zweiten Teil des Strahlensatzes zu erleichtern, bei dem ja zunächst einmal gar nicht deutlich wird, daß eine zusammengesetzte Prämisse vorliegt, geht man am besten auch hier von einer entsprechenden Formulierung aus:

Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent oder
Wenn α und β Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind, so sind α und β gleich groß.

Der Versuch der Umkehrung führt dann lediglich zu der falschen Aussage

Wenn α und β kongruente Winkel sind, so sind sie Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen.

Erst danach sollte man zu einer Form übergehen, die das Bestehen zweier Umkehrungsmöglichkeiten deutlicher macht. Die folgenden Formulierungen sind dem Lehrbuch der Klasse 6 entnommen.

[1]) *Unterrichtshilfen, Mathematik Klasse 6* (Bestell-Nr. 00 21 29), Seite 230 f. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969. *Mathematik, Lehrbuch für die sechste Klasse* (Bestell-Nr. 00 06 03), Seite 106 f. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969.

Satz (D 12)

Sind zwei Winkel Stufenwinkel und sind die geschnittenen Geraden zueinander parallel, so sind die beiden Winkel kongruent.

1. Umkehrung (falsch)

Sind zwei Winkel an geschnittenen Parallelen kongruent, so sind die beiden Winkel Stufenwinkel.

2. Umkehrung (wahr)

Sind zwei Stufenwinkel kongruent, so sind die geschnittenen Geraden zueinander parallel.

Danach ist die Möglichkeit gegeben, auch beim zweiten Teil des Strahlensatzes das Bestehen zweier Umkehrungen zu erörtern. Wenn es die Klassensituation gestattet, kann man den Sachverhalt auch noch deutlicher machen. Für das Beispiel des Stufenwinkelsatzes bedeutet das das Verwenden einer Form wie der folgenden:

Satz

Voraussetzung:

(1) *α und β sind Stufenwinkel an geschnittenen Geraden.*
(2) *Die geschnittenen Geraden sind parallel.*

Behauptung:

(3) *α und β sind gleich groß.*

Entsprechend ergeben sich die Umkehrungen „Aus (1) und (3) folgt (2)“ und „Aus (2) und (3) folgt (1)“.
Beim zweiten Teil des Strahlensatzes ist der Sachverhalt bei ausführlicher Darstellung noch etwas komplizierter:

Satz

Voraussetzung:

(1) Die Punkte S, A und B liegen auf ein und derselben Geraden.
(2) Die Punkte S, C und D liegen auf einer (von der unter (1) genannten verschiedenen) Geraden.
(3) $AC \parallel BD$

Behauptung:

(4) $\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{AC} : \overline{BD}$

1. Umkehrung

Voraussetzung:

(1) Die Punkte S, A und B liegen auf einer Geraden.
(2) Die Punkte S, C und D liegen auf einer (anderen) Geraden.
(4) $\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{AC} : \overline{BD}$

Behauptung:

(3) $AC \parallel BD$

2. Umkehrung

Voraussetzung:

(1) Die Punkte S, A und B liegen auf einer Geraden.
(2) $AC \parallel BD$
(4) $\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{AC} : \overline{BD}$

Behauptung:

(2) S, C und D liegen auf einer Geraden.

Der Lehrer sollte hier nach Möglichkeit mit vorbereiteten Tafelbildern und Applikationen arbeiten. Der Beweis für die gültige Umkehrung zum zweiten Teil des Strahlensatzes wird – ähnlich wie beim ersten Teil – unter starker Führung des Lehrers erfolgen müssen. Auch hier handelt es sich im Grunde wieder um eine Vorbereitung auf das indirekte Beweisverfahren.
Selbstverständlich erhebt sich nun noch die Frage, wie es mit der Gültigkeit der entsprechenden „2. Umkehrung" zum ersten Teil des Strahlensatzes steht. Diese Frage kann mit dem Hinweis auf ein Gegenbeispiel beantwortet werden (Bild 2.9.a), bei dem

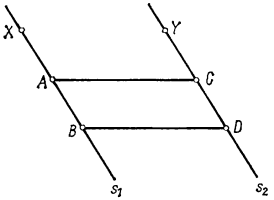


Bild 2.9.a

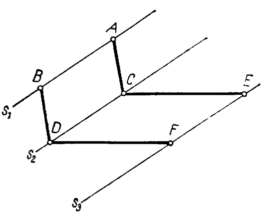


Bild 2.9.b

allerdings s_1 und s_2 parallel sein müssen. Sonst können unter der Voraussetzung der Parallelität von AC und BD und des Bestehens einer Proportion wie

$$\overline{XB} : \overline{XA} = \overline{YD} : \overline{YC}$$

die Streckenpaare $\overline{XA}$ und $\overline{YC}$, $\overline{XB}$ und $\overline{YD}$ und auch $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ immer als gleichliegende, von Parallelen erzeugte Abschnitte eines Strahlenbüschels aufgefaßt werden.
Eine gewisse Analogie dazu ergibt sich bei der 2. Umkehrung des dritten Teils. Da es jedoch nicht selbstverständlich ist, daß sich drei Geraden in ein und demselben Punkt schneiden, ist das Formulieren einer (eingeschränkten) Umkehrung zweckmäßig, bei der gleiche Länge gleichliegender Parallelenabschnitte ausgeschlossen wird (Bild 2.9.b). Zum Beweis braucht man nicht auf den dritten Teil des Strahlensatzes selbst zurückzugreifen, sondern kommt mit einer Anwendung des zweiten Teils und seiner (gültigen) Umkehrung aus. Als Hausaufgabe, aber auch zur Bearbeitung in der Stunde, eignet sich besonders die Aufgabe b 35 (Lb 108).
Ohne daß es den Schülern bewußt wird, werden hier Rechtecke auf Ähnlichkeit untersucht – eine Tatsache, auf die man später in Unterrichtseinheit 2.3.2. verweisen kann. Die Aufgabenstellung läßt sich auch noch durch die Forderung ergänzen, im Falle eines existierenden Schnittpunktes bei vorgegebener Stumpfhöhe (z. B. 24 cm) die Pyramidenhöhe zu ermitteln.
Für die abschließende Zusammenfassung empfiehlt sich eine Übersicht, wie sie Bild 2.10 zeigt. Eine solche Übersicht ist selbstverständlich zu umfangreich, um während der Stunde als Tafelbild erarbeitet zu werden. Andererseits ist es nützlich, sie auch in den

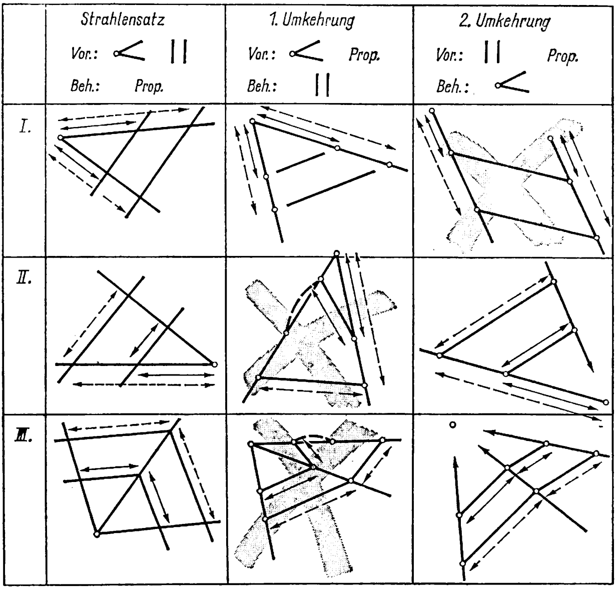


Bild 2.10.

folgenden Stunden vor Augen zu haben. Deshalb sollte der Lehrer eine solche Übersicht als Schautafel (in Zusammenarbeit mit den Schülern) herstellen. Eine solche Tafel eignet sich auch ausgezeichnet zur Ausgestaltung des Mathematikkabinetts.

Zusammenfassung:

1) Für jeden der beiden Schwerpunkte sollte eine Unterrichtsstunde verwandt werden.
2) Am Ende der Unterrichtseinheit sollte folgendes erreicht sein:
   Die Schüler wissen, daß ein Satz und seine Umkehrung(en) verschiedene Aussagen sind, demzufolge jede für sich zu beweisen ist, und daß eine wahre Aussage nicht immer zu einer wahren Umkehrung führt. Sie können einfache Sätze als Implikationen formulieren und selbständig Umkehrungen bilden. Sie wissen, daß bei zusammengesetzten Prämissen mehrere Umkehrmöglichkeiten bestehen. Die Beweisfähigkeit der Schüler ist weiterentwickelt worden.
   Die Schüler kennen die wahren Umkehrungen der verschiedenen Teile des Strahlensatzes, verstehen die Beweise für diese Sätze, können die Sätze mit eigenen Worten wiedergeben und sie bei einfachen Sachverhalten anwenden.

2.1.4. Anwendungen des Strahlensatzes (2 Stunden; Lerneinheit B 9)

Anwendungsaufgaben haben bei allen Stoffgebieten und so auch beim Strahlensatz nicht nur den Zweck, den vorher behandelten mathematischen Stoff besser erfassen zu lassen und vielseitig zu üben. Sie sollen die Schüler vor allem mit den vielfältigen Formen der Bedeutung der Mathematik für die Praxis vertraut machen und in ihnen die Überzeugung wecken, daß alle mathematischen Erkenntnisse für praktische Problemstellungen bedeutsam sind. Darüber hinaus dienen sie der Erweiterung der polytechnischen Bildung und bieten die beste Gelegenheit zur Verbindung mit anderen Unterrichtsfächern.
Bei den Anwendungen des Strahlensatzes ist allgemein folgendes zu beachten:

- Anwendungsaufgaben brauchen nicht erst jetzt aufzutreten. Entsprechend den jeweils vorhandenen Voraussetzungen können sie auch vorher eingeflochten werden, gegebenenfalls unter Abänderung der in dieser Unterrichtshilfe vorgeschlagenen Stundenaufteilung. Auch im Lehrbuch finden sich Anwendungsaufgaben (Fotografie u. dgl.) bereits im Aufgabenteil zur Lerneinheit B 6 (dritter Teil des Strahlensatzes).
- Viele der Anwendungsaufgaben zu den Strahlensätzen können auch als Anwendungen zu den ähnlichen Dreiecken aufgefaßt werden. Man muß diese beiden Komplexe also im Zusammenhang sehen und kann die eine oder andere der im Lehrbuch an dieser Stelle aufgeführten Aufgaben auch später in der Unterrichtseinheit 2.3.6. behandeln

Auf manche Aufgaben zu Hilfsmitteln, die nur noch historisch interessant sind, z. B. zum Försterdreieck oder Jakobstab, ist entsprechend dem Lehrplan im Lehrbuch verzichtet worden. Will man auf sie eingehen, so muß man dafür sorgen, daß die Schüler keinen falschen Eindruck von modernen Meßverfahren erhalten. Solche Aufgaben sollten dann zum Selbstbau entsprechender Geräte anregen (nicht unbedingt durch die gesamte Klasse), und ihr tatsächlicher Einsatz dürfte auf einer „mathematischen Wanderung“ gewiß Interesse finden. Hier hätten dann auch *Daumensprung*, *Daumenbreite* u. dgl. ihren Platz[1]), deren Behandlung allein im Klassenraum doch nicht recht befriedigt. Das gilt übrigens auch von den Vermessungsaufgaben, bei denen die Längen unzugänglicher Strecken zu bestimmen sind. Hier lege man zumindest Wert auf eine ausführliche Beschreibung des praktischen Vorgehens, unterstützt durch eine Veranschaulichung an der Manipermtafel, an der sich beispielsweise das Einfluchten mit entsprechend präparierten Haftplättchen und Gummischnüren gut demonstrieren läßt. Im übrigen gilt für das Lösen der Anwendungsaufgaben in dieser Unterrichtseinheit das gleiche, was für Anwendungsaufgaben in anderen Unterrichtseinheiten gesagt wurde. Daher kann man die üblichen Lösungsschritte hier folgendermaßen formulieren:

(1) Versuche, dir über den Sachverhalt des Textes mit Hilfe einer Zeichnung Klarheit zu verschaffen!
(2) Suche in der Skizze nach einem Strahlenbüschel, das von Parallelen geschnitten wird!
(3) Stelle nach dir bekannten Sätzen eine Verhältnisgleichung auf, in der möglichst nur eine gesuchte Größe auftritt, und löse sie!
(4) Wenn du so noch keine gesuchten Größen erhalten hast, so mußt du andere Verhältnisgleichungen suchen, wobei du immer das Gesuchte im Auge behalten mußt.

[1]) Näheres dazu siehe z. B. EBNER, M.: *Geometrische Schülerarbeiten im Gelände* (Lit.-Verzeichnis), Teil 2, Seite 15 f.

Beim Auftrag B 14 (Lb 27) und den Aufgaben b 36 bis b 38 (Lb 109) – und auch bei allen übrigen Anwendungen des Strahlensatzes und der Ähnlichkeit – ist noch eine Besonderheit zu beachten. Während man sonst immer bei Anwendungsaufgaben eine „allgemeine Lösung" anstreben sollte, aus der sich die numerische für den speziellen Fall lediglich durch Einsetzen in eine „berechnungsreife" Endformel ergibt, ist das hier kaum möglich. Die Schüler sind noch nicht so weit in die Gleichungslehre vorgedrungen, daß sie Gleichungen behandeln können, die außer der gebundenen Variablen (x) noch weitere (freie) Variable enthalten. Außerdem sollte beim Ansatz die Variable nicht in Zähler und Nenner gleichzeitig auftreten. Aus diesem Grunde strebe man ein Vorgehen wie beim Beispiel B 4 an, bei dem der allgemeine Ansatz zunächst mit den Streckenbezeichnungen $\overline{AB}$ usw. erfolgt, um dann durch zweckentsprechende Multiplikation zur Produktform zu gelangen. In diese Form werden dann die gegebenen Werte bzw. die Variablenbezeichnungen eingesetzt und die numerische Rechnung zu Ende geführt.
Eine gewisse Schwierigkeit kann auch dadurch entstehen, daß der praktische Sachverhalt räumlich ist, die Strahlensatzteile aber nur für die Ebene formuliert wurden. Überlegungen wie am Ende von Lerneinheit B 6 und Aufgaben wie b 28 und b 35 sollten dem eigentlich bereits entgegengewirkt haben.
Abschließend sei eine Verteilung der Beispiele, Übungen und Aufgaben auf die beiden Stunden der Unterrichtseinheit vorgeschlagen.

1. Stunde:
Beispiel B 4; Auftrag B 14; Beispiel B 5; eventuell Aufgabe b 47
Hausaufgaben: Aufgabe b 33

2. Stunde:
Beispiel B 6; Auftrag B 15; Aufgabe b 37; Aufgabe b 39
Hausaufgaben: Aufgabe b 38; aus den Aufgaben b 29 bis b 31 d) zwei noch nicht bearbeitete Aufgaben.
Keinesfalls sollte Aufgabe b 37 vergessen werden, handelt es sich doch – abgesehen von Aufgabe b 40 b) – um die einzige Anwendung einer Umkehrung des Strahlensatzes.

Zusammenfassung:

1) In jeder der beiden Stunden sollten sowohl Vermessungsaufgaben als auch Meß- und Zeichengeräte, die auf dem Strahlensatz fußen, behandelt werden.
2) Am Ende der Unterrichtseinheit sollte folgendes erreicht sein:
Die Schüler kennen verschiedene Anwendungsmöglichkeiten des Strahlensatzes; sie haben von der Bedeutung des Strahlensatzes und seiner Umkehrungen für gewisse Vermessungsaufgaben und als Grundlage für Zeichen- und Meßgeräte eine Vorstellung. Sie sind imstande, die Wirkungsweise der Geräte zu erläutern und können entsprechende Aufgaben selbständig lösen.

2.2. Zentrische Streckung (9 Stunden)

In dieser Stoffeinheit liegt der abbildungsgeometrische Schwerpunkt des gesamten Stoffgebiets *Ähnlichkeit*. Das gilt sowohl für die anfängliche Wiederholung von Bewegung und Kongruenz, bei der den Schülern die Prinzipien eines abbildungsgeometrischen Aufbaus noch einmal vor Augen geführt werden, als auch für die Behand-

lung der zentrischen Streckung als Grundlage für alle Ähnlichkeitsabbildungen. Denn hier stehen die Gedanken der Abbildungsgeometrie im Vordergrund: Das eineindeutige Abbilden der Ebene auf sich, das Aufsuchen von Bildpunkten bzw. Originalpunkten bei gegebenen Original- bzw. Bildpunkten, das Aufsuchen der Bilder vorgegebener Figuren und das Fragen nach Invarianten.
Am Ende der Stoffeinheit sollte das bisher Erreichte in einer einstündigen Klassenarbeit überprüft werden.

2.2.1. Vorbereitung der Ähnlichkeitsabbildungen durch vertiefende Wiederholung (3 Stunden; Lerneinheiten B 10 bis 12)

Diese Unterrichtseinheit umfaßt die Wiederholung zu Bewegung und Kongruenz sowie die Behandlung maßstäblicher Vergrößerungen und Verkleinerungen, die nicht nur wiederholenden, sondern auch einstimmenden und motivierenden Charakter für die Stoffeinheiten 2.2. und 2.3. trägt.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.2.1.: Wiederholung von Bewegung und Kongruenz (Lerneinheiten B 10 und 11)

Hier geht es einerseits darum, Begriffe und Sätze bereitzustellen, die man bei der weiteren Behandlung des Stoffgebiets benötigt. Andererseits sind den Schülern – und das ist mindestens ebenso wichtig! – die wesentlichen Aspekte einer abbildungsgeometrischen Denkweise für ein bestimmtes Teilgebiet sichtbar zu machen, die dann auch die Gliederung des weiteren Unterrichts der Stoffeinheiten 2.2. und 2.3. bestimmen. Wegen ihrer Wichtigkeit seien diese Schritte hier noch einmal zusammengestellt:

a) Nach irgendeiner Vorschrift wird jedem Punkt der Ebene genau ein Bildpunkt zugeordnet; dabei ist jeder Punkt der Ebene seinerseits Bildpunkt genau eines Originalpunktes.
b) Es wird nach den Eigenschaften solcher Abbildungen gefragt, d. h.: Wie sehen die Bilder von Figuren (Punktmengen) wie Strecke, Gerade, Dreieck u. a. aus?
c) Mit Hilfe dieser Abbildungen wird eine Verwandtschaft für Figuren definiert.
d) Es wird für gewisse Figuren (z. B. Dreiecke) nach einfachen, handhabbaren Möglichkeiten zum Feststellen der Verwandtschaft (Kriterien) gesucht, um daraus auf andere Eigenschaften dieser Figuren schließen zu können.

Gewiß kann man von dieser Wiederholung, die etwa zwei Unterrichtsstunden in Anspruch nehmen sollte, nicht erwarten, daß alle Schüler die genannten vier Schritte am Beispiel der Kongruenz erklärend wiedergeben können. Aber sie müssen sie durch die Unterrichtsgestaltung des Lehrers „erlebt“ haben und später durch Hinweise auf die Analogie wiedererkennen.
Die Wiederholung beginnt zweckmäßigerweise mit der Erledigung des Auftrags B 16 (Lb 29), wobei die Begriffe *Verschiebung*, *Drehung*, *Spiegelung*, *Drehzentrum*, *Drehwinkel*, *Bildpunkt*, *Originalpunkt* ins Gedächtnis zurückgerufen und gefestigt werden. Das Quadratgitter in Bild B 27 soll es ermöglichen, die Lage der gesuchten Bild- bzw. Originalpunkte verhältnismäßig einfach zu beschreiben. Gewiß wird es in manchen Klassen günstiger sein, zumindest die eine oder andere Teilaufgabe nicht nur verbal lösen zu lassen. In diesem Fall dient das Quadratnetz auch dem leichteren Übertragen

auf Karopapier bzw. auf eine entsprechende Tafel. Auch hierbei wird man aber, um keine Zeit zu vergeuden, die Eigenschaften des Quadratgitters und die spezielle Lage der Punkte im Gitter für die Lösung ausnutzen. Kommt der Lehrer hingegen zu der Überzeugung, daß es gut wäre, wenn die Schüler auch das regelrechte Konstruieren von Bild- und Originalpunkten wiederholten, so ist eine dem Auftrag B 16 ähnliche Aufgabenstellung, bei der Punkte mit Hilfe der Lochschablone gegeben werden oder ein Arbeitsblatt benutzt wird, anzuraten.

Im Bild B 27 ist übrigens das Viereck $ABCD$ nicht ausgezogen worden, damit wirklich die *punktweise* Zuordnung deutlich wird. Der Lehrer würde diesem Anliegen zuwiderhandeln, würde er vom Verschieben (Drehen, Spiegeln) dieses Vierecks sprechen und das an der Tafel durch eine bewegliche Pappschablone veranschaulichen. Dagegen ist gegen die Verwendung einer Holzleiste als Verschiebungspfeil, eines Pappstücks als Drehwinkel, eines Zeichendreiecks beim Spiegeln nichts einzuwenden. Der Eindruck, daß es bei einer Abbildung wirklich um *alle* Punkte der Ebene geht, kann dadurch verstärkt werden, daß man noch andere, nicht benannte Punkte, vornehmlich Gitterpunkte, einbezieht und dazu entsprechende (sowohl Bild als auch Original) nach Augenmaß ermitteln läßt; man könnte ein solches Ermitteln als mündliche tägliche Übung ansehen. Dabei ist schon hier herauszuarbeiten, daß es in vielen Fällen *den* zu einem Punkt P *entsprechenden* Punkt nicht gibt, weil dem Punkt P zwei andere Punkte entsprechen, sein Originalpunkt und sein Bildpunkt. (Man vergleiche dazu Auftrag B 17, wo auch auf die Sonderstellung der Geradenspiegelung – hier existiert genau wie bei der Halbdrehung oder Punktspiegelung zu jedem Punkt genau ein entsprechender Punkt – und auf die der Fixpunkte hingewiesen wird.)

Erfahrungsgemäß macht den Schülern das Erfassen dieses Sachverhalts Schwierigkeiten, vor allem bedingt durch die – andererseits notwendige – Bezeichnungsweise $P — P'$, die das Ermitteln des Bildes bevorzugt. Diesen Schwierigkeiten kann man vorbeugen, indem man häufiger auch Originalpunkte ermitteln läßt. Bei der Suche nach dem Originalpunkt zu P ist mitunter eine zusätzliche Bezeichnung wie $P = X'$ ratsam, weil sie das Problem des Suchens nach dem Originalpunkt X klarer hervortreten läßt.

Es ist nicht erforderlich, daß alle Schüler sämtliche Teile des Auftrags B 16 (Lb 29) bearbeiten. Wenn Gruppen gebildet werden, so beachte man, daß erfahrungsgemäß die Schwierigkeiten von der Verschiebung über die Spiegelung zur Drehung zunehmen. Von diesen Gruppen können auch die jeweiligen Eigenschaften zusammengetragen werden, aus denen die Eigenschaften aller Bewegungen herauszulesen sind.

Beim Beispiel B 7 sollen in erster Linie durch Beschreiben Begriffe und Sätze geübt werden. Dabei ist zu beachten, daß die Pfeile nicht nur die Verschiebung, sondern allgemeiner die Zuordnung der Punkte symbolisieren sollen. Für die Lösung des Auftrags B 17 reicht allenfalls ein Herauszeichnen der Spiegelachse mit dem Punkt E und eines Verschiebungspfeils. Hier kommt es nicht auf die Entwicklung von Konstruktionstechniken an, sondern auf das Wissen der Schüler von der Möglichkeit des Zusammensetzens, auf den Bewegungsbegriff und die Eigenschaften aller Bewegungen. Bei diesen Eigenschaften sei erwähnt, daß der Satz „Liegt ein Punkt A auf einer Geraden a, so liegt auch der Bildpunkt A' auf der Bildgeraden a'“[1]) absichtlich nicht mit aufgenommen wurde. Da nämlich Geraden als Punktmengen verstanden werden, ist diese Aussage bereits in der zuvor angeführten Aussage „Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade“ enthalten. Denn wenn ein Punkt P zu einer Menge M gehört, muß selbst-

[1]) Eigenschaft (2) in Satz D 5. In: Mathematik, Lehrbuch für Klasse 6, Seite 99. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969.

verständlich sein Bildpunkt P' zu der Menge M' gehören, deren Elemente die Bilder der Elemente von M sind. Die sogenannte „Inzidenzerhaltung" der Bewegungen (und aller Kollineationen) ist als Eigenschaft sinnvoll nur herauszuheben, wenn – wie etwa in HILBERTS *Grundlagen der Geometrie* – Punkte, Geraden und Ebenen als ganz verschiedenartige Objekte angesehen werden, die nur durch die Inzidenzbeziehung miteinander im Zusammenhang stehen.

Im übrigen sollte man deutlich den Unterschied zwischen einer Beschreibung ein und derselben Bewegung auf verschiedene Weisen, also durch Zusammensetzung aus verschiedenen „Elementarbewegungen" oder in unterschiedlicher Reihenfolge, und der Angabe mehrerer voneinander verschiedener Bewegungen hervorheben. So gibt es z. B. nur eine einzige Bewegung, die ein unregelmäßiges Dreieck in ein vorgegebenes ihm kongruentes überführt (auch wenn man diese Bewegung verschiedenartig beschreiben kann), es gibt zwei Bewegungen, die ein gleichschenkliges (aber nicht gleichseitiges) Dreieck auf ein ihm kongruentes abbilden, und beim gleichseitigen Dreieck sind es sogar drei Bewegungen. (Man vergleiche dazu etwa die Aufgaben b 42 und b 44 sowie vor allem die Aufgabe b 5 des Wiederholungsteils auf Seite Lb 122.)
Durch den Auftrag B 19 soll die Anwendung der Kongruenzsätze geübt, aber auch unterstrichen werden, daß die Kongruenz nicht nur für Dreiecke erklärt ist. Um mit der Aufgabe ein echtes Problem aufzustellen, wurden die einander entsprechenden Eckpunkte nicht schon durch Bezeichnungen wie A — A_1 oder A — A' kenntlich gemacht[2]) und auch keine einfache Verschiebungslage gewählt. Diese beiden Bedingungen sollte man auch dann beibehalten, wenn man wegen der Klassensituation als einfachere Figur ein Viereck wählt. Beim Bearbeiten dieser Übung (im Unterrichtsgespräch, am vorbereiteten Tafelbild, eventuell im Lehrbuch mit schwachen Bleistiftstrichen, die später wieder zu entfernen sind) müßten etwa folgende Gedankenschritte durchlaufen werden:

1) Welcher Eckpunkt vom Fünfeck $FGHIK$ könnte A entsprechen?
   $\overline{AB} = \overline{IK}$ und $\overline{EA} = \overline{HI}$, also I.
   (Oder: Winkel bei B und E jeweils 90°, Winkel bei H und K dem Anschein nach auch; also I, weil A zwischen B und E und weil I zwischen H und K liegt.)
2) Dem Anschein nach könnten $\triangle ABC$ und $\triangle IKF$ kongruent sein. Von ihnen wissen wir (farbiges Kennzeichnen der jeweils gleichen Stücke): $\overline{AB} = \overline{IK}$; $\overline{BC} = \overline{KF}$ ($\sphericalangle ABC = 90°$ nutzt nichts, da über $\sphericalangle IKF$ nichts bekannt ist); $\sphericalangle BCA = \sphericalangle KFI$. Da $\overline{AB} > \overline{BC}$, sind die beiden Dreiecke einander kongruent. Damit wissen wir außerdem: $\sphericalangle IKF = \sphericalangle ABC = 90°$; $\sphericalangle BAC = \sphericalangle KIF$ und $\overline{CA} = \overline{FI}$.
3) In Stillarbeit kann – analog zum Schritt 2) – die Kongruenz in den beiden anderen Fällen nachgewiesen werden, wobei eine Gruppeneinteilung jedoch nicht möglich ist, weil das eine Voraussetzung des anderen ist.
4) Zusammenfassend wird die Kongruenz der beiden Fünfecke durch Angabe der entsprechenden Eckpunkte, Seiten und Winkel, deren jeweiliger Gleichheit und Beschreiben einer geeigneten Bewegung festgestellt.

Beim vierten Schritt beachte man, daß das Angeben der vermittelnden Bewegung nicht etwa überflüssig ist. Die Schüler haben nämlich in Klasse 6 keinen Satz kennengelernt, der dem in der Ähnlichkeit später zu behandelnden Satz B 12 (Lb 39) entspricht und etwa folgendes aussagt:

[2]) Hier gilt Entsprechendes wie bei gleichliegenden bzw. zugehörigen Strahlen- oder Parallelenabschnitten. Vgl. Seite Uh 71.

Zwei n-Ecke ($n \geqq 3$) sind einander kongruent, wenn es bei Beachtung der Reihenfolge eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen ihren Eckpunkten derart gibt, daß einander zugeordnete Seiten und Winkel gleich groß sind.

(Auch ein – übrigens nur schwer präzise zu formulierender – Satz, wonach sich die Kongruenz zweier Vielecke auf Grund der Zerlegbarkeit in „einander entsprechende" Dreiecke folgern läßt, steht nicht zur Verfügung.) Freilich kann der Lehrer die Behandlung des Auftrags B 19 (Lb 31) dahingehend ausdehnen, daß er den obengenannten Satz formuliert. Als Vorbereitung für die spätere Besprechung von Satz B 11 (dessen Analogon in der Kongruenz „selbstverständlich" ist) und Satz B 12 ist das sogar äußerst zweckmäßig.

Es sei hier noch eine Bemerkung zu Schreibweisen wie $\overline{AB} = \overline{IK}$ und $\sphericalangle BCA = \sphericalangle KFI$ angefügt: Es ist zur Zeit in unseren Schulbüchern üblich, mit $\overline{AB}$ sowohl die Strecke als auch die Länge der Strecke zu bezeichnen und auch ein Symbol wie $\sphericalangle BCA$ sowohl für den Winkel selbst als auch für die Größe des Winkels zu verwenden. Dabei muß dann jeweils aus dem Zusammenhang ersehen werden, was gemeint ist. In diesem Falle ist neben $\overline{AB} \cong \overline{IK}$ und $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle KFI$ auch $\overline{AB} = \overline{IK}$ und $\sphericalangle BCA = \sphericalangle KFI$ zulässig. Es ist ja auch nicht einzusehen, warum man eine solche Schreibweise verbieten sollte, wenn andererseits beispielsweise $\sphericalangle BCA < \sphericalangle ABC$ geschrieben werden darf. Andernfalls wäre ja auch so etwas wie $\sphericalangle ABC = 90°$ oder $\overline{AB} = 3$ cm gar nicht zulässig. Bei der Einführung der Kongruenz in Klasse 6 allerdings wird man der Schreibweise mit dem Kongruenzzeichen im Interesse begrifflicher Klarheit den Vorzug geben und erst später – nach ausdrücklicher Verabredung! – auch die einfachere Darstellung verwenden. Jetzt empfiehlt es sich hingegen, nach nochmaliger Besprechung des Sachverhalts das Kongruenzzeichen möglichst zu vermeiden, und man kann zum Beispiel durchaus auch von *Winkelgleichheit* sprechen, wenn Übereinstimmung in der Größe gemeint ist.

Als Hausaufgabe eignet sich Aufgabe b 41 (Lb 110), wobei Möglichkeiten einer differenzierten Aufgabenstellung genutzt werden sollten. Auch hier kann, wenn man auf das genaue und zeitraubende Konstruieren verzichten zu können glaubt, Karopapier benutzt werden, oder man gibt sich gar mit sauberen Skizzen zufrieden. In gleicher Weise kann Aufgabe b 42 vereinfacht werden; sie könnte auch einigen Schülern zur freiwilligen Bearbeitung mit anschließendem Bericht vor der ganzen Klasse gestellt werden. Wenn diese Schüler wissen, daß es um das Erkunden der Vertauschbarkeit geht, sind sie meist mit Eifer bei der Sache. Die Aufgaben b 43 und b 44 eignen sich auch zur mündlichen Bearbeitung in der Klasse, wobei dann neben der Arbeit am Begriff *Bewegung* die Sprachschulung im Vordergrund steht. Die Schüler müssen erkennen, daß es hier gegenüber dem Bisherigen um die umgekehrte Fragestellung geht, nämlich das Finden einer Bewegung bei vorgegebenen Figuren, also zunächst um eine Existenzfrage.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.2.1.: Maßstäbliche Vergrößerungen und Verkleinerungen (Lerneinheit B 12)

Die Stunde, die diesem Schwerpunkt gewidmet ist und bei der nach einigen Überhängen aus dem ersten Schwerpunkt (von Lerneinheit B 10 und B 11) Lerneinheit B 12 im Vordergrund steht, ist im Zusammenhang mit der ersten Stunde des ganzen Stoffgebiets zu sehen. Hier sind auch die Bedeutung maßstäblicher Vergrößerungen und Verkleinerungen für praktische Untersuchungen (Schiffs- und Flugzeugformen,

Wasserschutzbauten u. dgl. m.) und die Grenzen solcher Betrachtungen an Modellen zu erörtern[1]), gleichgültig, ob diese Fragen bereits in der ersten Stunde des Stoffgebiets zur Sprache gekommen sind oder nicht. Während dort jedoch vom Maßstab her das Streckenverhältnis gewonnen wurde, geht es jetzt mehr um den Prozeß des maßstäblichen Vergrößerns und Verkleinerns und um den Vergleich von Ausgang und Ergebnis, Original und Bild bei diesem Prozeß. Bei diesem Vergleich wird von den Schülern gewiß das Wort *ähnlich* benutzt – es ist ja in der Umgangssprache weit gebräuchlicher als der entsprechende Begriff in der Bewegungsgeometrie, etwa *deckungsgleich*, was in der Regel durch *gleich* ersetzt wird. Das Bild B 32 (Lb 32) soll den Schülern einerseits die Fragwürdigkeit des landläufigen Ähnlichkeitsbegriffs bewußtmachen (es kommt also keinesfalls auf eine „richtige Antwort" an) und soll andererseits auf die „gleichmäßige Ausdehnung" in allen Richtungen orientieren, was dann noch präziser zu fassen wäre. Noch besser als durch das Bild B 32 lassen sich diese Absichten verwirklichen, wenn man im Klassenraum von einem Diapositiv eine geometrische Figur (auch Personen, Bauwerke u. dgl. eignen sich) auf eine bewegliche Leinwand projiziert und darauf nun durch Schieben, Drehen, Neigen „unterschiedlich ähnliche Bilder" im fließenden Übergang erzeugt. Darüber hinaus kann man bei einem solchen Vorgehen eventuell eine zentrische Streckung des Raumes – freilich recht oberflächlich und lediglich qualitativ – beschreiben und hat dann ein gutes Motiv für die genauere Behandlung des ebenen Analogons in der nächsten Unterrichtseinheit.
Für die weltanschauliche Bildung der Schüler muß man ein solches Vorgehen und auch die Aufgaben b 48 und 49 unter folgenden Zielen sehen:

- Den Schülern wird (wiederum) der Zusammenhang zwischen realen Sachverhalten und mathematischen Begriffen in elementarer Form bewußt.
- Die Schüler erkennen die Unvollkommenheit anschaulicher Vorstellungen und damit die Notwendigkeit präziser Begriffsbildungen und Aussagen. Sie sehen in der Mathematik ein Mittel, wesentliche Seiten der Realität präzis zu erfassen, zu beschreiben und damit zu deren Veränderung beizutragen.

Bei den Aufgaben b 48 und b 49 sollten die Schüler möglichst selbständig erkennen, daß hier die Anwendung des Rechenstabes wegen der Tabellenbildung (Proportionaleinstellung) besonders zweckmäßig ist. Dabei ist auch auf eine günstige Reihenfolge der Berechnungen zu achten, um immer mit höchstens einem Durchschieben der Zunge auszukommen.

Zusammenfassung:

1) Dem ersten Schwerpunkt sollten etwas mehr als zwei Unterrichtsstunden gewidmet werden, dem zweiten knapp eine Stunde.
2) Nach dieser Unterrichtseinheit sollte folgendes erreicht sein: Den Schülern ist wieder gegenwärtig, was eine Verschiebung, Drehung, (Geraden-) Spiegelung ist. Sie können bei Vorgabe einer dieser Abbildungen Paare entsprechender Punkte angeben und kennen die wichtigsten Eigenschaften dieser Abbildungen.
   Sie wissen, daß man diese Abbildungen zusammensetzen kann und daß man jede einzelne von ihnen und jede Zusammensetzung *Bewegung* nennt. Sie kennen die wichtigsten Eigenschaften der Bewegungen. Sie kennen den Begriff *eineindeutige (punktweise) Abbildung der Ebene auf sich.*

[1]) Anregungen bietet z. B.: K. Th. BRAUN: *Schiffsform im Examen.* In: Wissenschaft und Fortschritt. Jahrgang 19 (1969), Heft 1, Seite 11.

Sie können den Begriff *Kongruenz von Figuren* definieren. Sie beherrschen den Inhalt der Kongruenzsätze für Dreiecke und wissen, daß es sich bei diesen Sätzen um „Mindestforderungen" handelt.
Die Schüler haben erfahren, daß Modelle, also maßstäbliche Vergrößerungen und Verkleinerungen, für praktische Problemstellungen bedeutsam sind. Sie wissen, daß für die weitere Beschäftigung mit diesen Fragen zunächst eine Präzisierung des umgangssprachlichen Begriffs *ähnlich* erfolgen muß.

2.2.2. Zentrische Streckung
(4 Stunden; Lerneinheiten B 13 bis 16)

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.2.2.: Der Begriff der zentrischen Streckung (Lerneinheit B 13)

Es liegt nahe, die zentrische Streckung über die ebene Darstellung eines räumlichen Projektionsvorganges einzuführen, besonders wenn man bei der Behandlung der Lerneinheit B 12 die Diaprojektion benutzt hat. Eine solche Betrachtung kann allerdings bestenfalls der Einstimmung und Motivation dienen, denn es kommt ja darauf an, die benötigten kennzeichnenden Eigenschaften der zentrischen Streckung herauszuarbeiten. Mathematisch würde es zwar genügen, die zentrische Streckung als Abbildung zu erklären, bei der jede Gerade eine zu ihr parallele Gerade als Bild hat. Die konstruktive Erklärung der zentrischen Streckung, wie sie vom Lehrplan ausdrücklich gefordert wird, ist aber für die Schüler wesentlich leichter zu erfassen.
Für die *erste Stunde* der Unterrichtseinheit, die der Realisierung des ersten Schwerpunktes dient, also eine *Einführungsstunde*, wird der folgende Vorschlag gemacht.

Thema: Einführung der zentrischen Streckung

Gliederung:

(1) Tägliche Übung: Aufgaben zum Streckenverhältnis
(2) Hausaufgabenkontrolle mit anschließender Übung
(3) Erarbeitung der Definition
(4) Festigung
(5) Hausaufgabenstellung und Zusammenfassung

Methodische Hinweise:

Zu (1): Diese tägliche Übung soll vor allem auf die Definition der zentrischen Streckung, in die ja der Begriff des Streckenverhältnisses eingeht, vorbereiten. Zweckmäßigerweise geht man von einem an die Tafel gezeichneten Strahl aus, auf dem neben dem Anfangspunkt Z eine Anzahl von weiteren Punkten im gleichen Abstand abgetragen sind (Bild 2.11.).

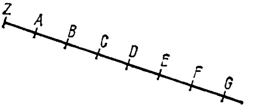


Bild 2.11.

Dazu werden drei Aufgabentypen gestellt:

(a) Der Lehrer nennt Verhältnisse von Strecken, z. B. $\overline{ZC} : \overline{ZB}$. Ein Schüler nennt die vollständige Verhältnisgleichung ($\overline{ZC} : \overline{ZB} = 3:2$), ein anderer formt um $\left(\overline{ZC} = \frac{3}{2}\,\overline{ZB}\right)$.

(b) Eine Zahl wird als Verhältnis vorgegeben, die Schüler nennen zwei Strecken (vor allem von Z aus) mit diesem Verhältnis.

(c) Lösen von Gleichungen wie $\overline{ZC} = x \cdot \overline{ZD}$ in Stillarbeit, wobei nach dem Nennen oder Anschreiben der Gleichung durch den Lehrer die Schüler nur das Ergebnis aufschreiben.

Zu (2): Zur Vorbereitung auf das Stundenthema ist die Bearbeitung des Auftrags B 21 a) zu empfehlen. Die Kontrolle dieser Aufgabe geschieht durch Beschreiben des Ergebnisses durch die Schüler, worauf ein entsprechendes vorbereitetes Tafelbild (bzw. Folie für Schreibprojektor) sichtbar gemacht wird. Daran sollte sich das Lösen des Teils b) der Übung anschließen; als Arbeitsform ist gruppenweise Stillarbeit der Schüler (je eine Gruppe für u, v, w) günstig. Auch der Aufgabenteil c) sollte von jedem Schüler im Heft gelöst werden, während ein Schüler die Konstruktion an der Tafel durchführt. In einer anschließenden Zusammenfassung wird im Unterrichtsgespräch geklärt, daß auf diese Weise jedem Punkt der Ebene genau ein anderer mit doppeltem Abstand von Z zugeordnet wird; es handelt sich offenbar um eine Abbildung, die eine maßstäbliche Vergrößerung (Maßstab 2 : 1) erzeugt. Daraus ergibt sich die Zielstellung für die Stunde (und die nächsten), derartige Abbildungen näher zu untersuchen.

Zu (3): Zunächst sind im Unterrichtsgespräch die Punkte 1. bis 4. der Definition B 7 zu erarbeiten, wobei selbstverständlich eine Erläuterung am Tafelbild erfolgen muß. Anschließend wird die Definition formuliert. Der Zwischentext im Lehrbuch bis zum Satz B 8 und dieser Satz selbst sollten von den Schülern selbständig durchgearbeitet werden, ebenso der anschließende Text bis zum Beispiel B 8. Der Erfolg dieser Arbeit muß dann kontrolliert werden, was am zweckmäßigsten unter Benutzung des bei (2) in den Heften bzw. an der Tafel entstandenen Bildes anhand von Fragen folgender Art geschieht:

Um welche zentrische Streckung handelt es sich?
Gib das Bild von A, B, Q, Z an!
Nenne das Original von F, R, Z, E!
Wo etwa müßte das Bild von D, F, Q liegen? (entsprechend für Originale)
Was geschieht bei $k < 1$, $k > 1$, $k = 1$?

Zu (4): Zur Festigung des Begriffs der zentrischen Streckung empfiehlt es sich, zunächst das Beispiel B 8 anhand des Lehrbuches im Unterrichtsgespräch durchzuarbeiten. Dabei sollte der Teil, der im Bild B 34c dargestellt wird, mit dem ersten Teil des Strahlensatzes begründet werden, und es sollte herausgestellt werden, daß dieses Vorgehen bei jedem k möglich ist.

Anschließend sollten alle Schüler selbständig Bildpunkte zu vorgegebenen Punkten bei einer vorgegebenen zentrischen Streckung konstruieren. Benutzt man für diese Stillarbeit die Aufgabe b 50, so wird man am besten die Punkte einheitlich vorgeben, etwa mittels der Angaben $A = (4)$, $B = (8)$, $C = (5)$, $Q = (1)$ für die Lochschablone.

Zu (5): Als Hausaufgaben eignen sich die Aufgaben b 50 [mit $A = (9)$, $B = (12)$, $C = (5)$, $Q = (8)$] und b 52 [$A = (9)$, $B = (14)$, $C = (15)$, $R = (12)$]. Außerdem wird man von den Schülern verlangen, daß sie sich die Definition B 7 zur nächsten Stunde so einprägen, daß sie sie inhaltlich wiedergeben können.

Bei der abschließenden Zusammenfassung sollten die Schüler erläutern, wodurch eine

zentrische Streckung festgelegt ist, wie man den Bildpunkt zu einem vorgegebenen Originalpunkt findet und umgekehrt.
Im allgemeinen wird eine Unterrichtsstunde nicht ausreichen, um den zentralen Begriff der zentrischen Streckung einzuführen und hinreichend zu festigen, so daß man danach zu den Eigenschaften der zentrischen Streckung übergehen kann. Aus diesem Grunde wird es erforderlich sein, sich auch in einem Teil einer weiteren Unterrichtsstunde noch mit der Lerneinheit B 13 zu befassen. So blieb ja zum Beispiel bei der Besprechung von Beispiel B 8 zunächst offen, wie A' gewonnen wurde, ob durch Messen und Errechnen der Länge von $\overline{DA'}$, ob durch zweimaliges Streckenhalbieren oder durch Vervielfachen der Strecke $\overline{DA}$ mit $\frac{3}{4}$ nach dem bekannten Verfahren. Jetzt sollte an einem Beispiel [Aufgabe b 51 oder Aufgabe b 53 a) und e)] dieses Verfahren von Lerneinheit B 3 demonstriert und dabei herausgestellt werden, daß sich auf diese Weise mit Zirkel und Lineal bei jedem (rationalen) Streckungsfaktor entsprechende Punkte konstruieren lassen. Doch wird man auch hier die Schüler dazu anhalten (Erziehung zum zweckmäßigen Arbeiten), auf diese Weise nur ein Punktepaar zu konstruieren, die anderen dann durch Parallelverschiebung wie im Beispiel B 8 zu finden. Anhand von Aufgabe b 54 sollen die Schüler erkennen, daß eine zentrische Streckung auch durch drei vorgegebene Punkte festgelegt werden kann; freilich müssen diese Punkte auf einer Geraden liegen und als Streckzentrum, Original und Bild benannt sein.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.2.2.: Eigenschaften der zentrischen Streckung (Lerneinheiten B 14 und 15)

Gewiß haben bereits bei der Behandlung des ersten Schwerpunktes, insbesondere bei den Aufgaben, die Schüler davon gesprochen, daß die Strecke $\overline{A'B'}$ das Bild der Strecke $\overline{AB}$ ist oder das Dreieck ABC das Original zum Dreieck $A'B'C'$. Das liegt um so näher deshalb, weil sie entsprechende Sätze von den Bewegungen her gewöhnt sind, und dort wiederum waren diese Sätze so einleuchtend und allzu selbstverständlich, weil Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen über das reale Bewegen realer Objekte gewonnen wurden. In dieser Hinsicht ist die Situation bei Einführung der zentrischen Streckung völlig anders: Hier wird kein reales Objekt über verschiedene Zwischenlagen hinweg gestreckt (gedehnt) – freilich eine methodische, keine mathematische Andersartigkeit. Daran muß aber *der* Lehrer vorläufig die Fragwürdigkeit einer Aussage wie

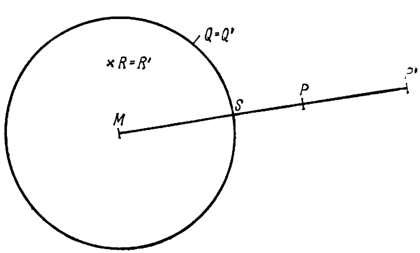


Bild 2.12.

$\overline{A'B'}$ *ist das Bild von* $\overline{AB}$ herausarbeiten – auch dann, wenn er die räumliche Projektion zur Motivation benutzt hat. Anschaulich kann das unterstützt werden durch das Dehnen einer Gummihaut, wobei eine gezeichnete Strecke deformiert wird. Auch das Bild B 32 läßt sich dazu nutzen, wo der Vergleich der verschiedenen Fälle zeigt, daß entsprechende Winkel keineswegs gleich groß sind.
Eine ähnliche Funktion hat Aufgabe b 55: Ein Begriff wird um so mehr zum festen Besitz des Schülers, je besser er ihn in Unterbegriffe aufzufächern, in Oberbegriffe einzuordnen und mit Nebenbegriffen zu vergleichen vermag. Ganz genauso wird für den Schüler eine Frage, deren Antwort scheinbar selbstverständlich ist, erst dann zum Problem, wenn er bei gleichen Fragen und gleichwertigen Sachverhalten zu anderen Antworten kommt. Deshalb sollte man solchen Betrachtungen wie in Aufgabe b 55 unbedingt besondere Aufmerksamkeit schenken. Auch die folgende, der zentrischen Streckung ebenfalls nahestehende Abbildung bietet sich hier an (Bild 2.12.):

Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Jeder Punkt im Innern des Kreises und auf dem Kreis wird sich selbst zugeordnet. Jeder Punkt P außerhalb des Kreises erhält seinen Bildpunkt P′ folgendermaßen: Es wird der Strahl $\overline{MP}$ *gezogen. S sei sein Schnittpunkt auf dem Kreis. P′ liegt dann auf MP derart, daß* $\overline{SP'} = k \cdot \overline{SP}$ *(in der Figur* $k = 2{,}5$*) gilt.*

Die Behandlung solcher Aufgaben bzw. Abbildungen muß nicht am Anfang stehen, sie hat auch am Schluß noch ihren Wert. Zu den obengenannten Absichten einer solchen Erörterung kommt dann noch die „Horizont-Erweiterung", der „Blick über den Zaun", wobei die Geradenstreckung (Aufgabe b 55) in Klasse 9 bei der Streckung und Stauchung von Parabeln, allgemein bei Veränderung der Maßeinteilung auf nur einer der beiden Achsen, wieder aufgegriffen werden kann. (Dabei ist jedoch zu beachten: Obwohl die Geradenstreckungen keine Ähnlichkeitsabbildungen sind, läßt sich aber speziell für Parabeln, die Original und Bild bei einer Geradenstreckung sind, auch stets eine Ähnlichkeitsabbildung angeben.[1]))
Mit welcher Ausführlichkeit der Lehrer hier auch vorgehen mag, er muß die Frage „Was heißt eigentlich, daß $\overline{A'B'}$ Bild von $\overline{AB}$ ist?" aufwerfen und etwa folgende Antwort mit den Schülern erarbeiten: Jeder Punkt von $\overline{AB}$ hat sein Bild auf $\overline{A'B'}$. Jeder Punkt von $\overline{A'B'}$ hat sein Original auf $\overline{AB}$. Man kann diese Überlegungen dadurch unterstützen, daß man die Schüler durch Konstruktion – also gewissermaßen experimentell – überprüfen läßt, ob ein beliebiger Punkt auf $\overline{AB}$ ($\overline{A'B'}$) sein Bild (Original) auf $\overline{A'B'}$ ($\overline{AB}$) hat. Der Lehrer muß dabei auch entscheiden, ob er die Frage berührt, daß zwei unterschiedlich lange Strecken „gleich viel" Punkte haben, wobei „gleich viel" im Sinne der Gleichmächtigkeit beider Punktmengen zu verstehen ist.
Von den Beweisen für die zunächst herzustellenden sechs Eigenschaften der zentrischen Streckung enthält das Lehrbuch nur einen beispielhaft, und zwar in Kleindruck, weil die Behandlung dieser Beweise vom Lehrplan nicht gefordert wird. Allerdings muß jeder Schüler wissen, daß alle Eigenschaften bewiesen werden müssen und nicht etwa der Anschauung entnommen werden dürfen und daß diese Beweise mit Hilfe des Strahlensatzes bzw. seiner Umkehrungen erfolgen können.
Die Gliederung für den im Lehrbuch dargestellten Beweis der Eigenschaft (1) ist durch die oben genannten Betrachtungen bereits vorgegeben. Dabei ist der Übergang von den

[1]) Vgl. SIMON, H.: *Gibt es eine „Normalparabel"?* Mathematik in der Schule. Jahrgang 1 (1963), Heft 4, Seite 313.

Strecken zu den Geraden damit zu motivieren, daß sich die Lösung der Fragestellung für die Strecken aus der für die Geraden ergibt, wenn man noch zusätzlich überlegt, daß die „Zwischenbeziehung mit abgebildet" wird, d. h., daß im Falle „C zwischen A und B" für die Bilder gilt „C' zwischen A' und B'".
Es sei hier auch noch ein etwas anderer Gedankengang als bei dem im Lehrbuch dargestellten Beweis angegeben, damit der Lehrer gegebenenfalls den ihm nach der Klassensituation günstiger erscheinenden Weg auswählen kann:

Voraussetzung:

Es seien g irgend eine Gerade, $A \neq Z$ ein Punkt auf ihr, A' dessen Bild und g' die Parallele zu g durch A'. Außerdem seien B und B' zwei einander entsprechende Punkte.

Behauptung:

1. Liegt B auf g, so liegt B' auf g'.
2. Liegt B' auf g', so liegt B auf g.

Beweis zu 1.:

Nach Voraussetzung liegen A' und B' auf denselben von Z ausgehenden Strahlen wie A bzw. B, und es gilt: $\overline{ZA'} = k \cdot \overline{ZA}$; $\overline{ZB'} = k \cdot \overline{ZB}$.
Für $B \neq Z$ ist $\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = k = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}}$, also $AB \parallel A'B'$ nach Satz B 4 (Umkehrung zum ersten Teil des Strahlensatzes). Für $B = Z$ ist auch $B' = Z$ und daher ebenfalls $AB \parallel A'B'$. Aus der Tatsache, daß B auf g liegt, folgt also, daß B' auf g' liegt.

Der Beweis für 2. erfolgt entsprechend, gewissermaßen durch Vertauschen der gestrichenen mit den ungestrichenen Bezeichnungen. Man beachte, daß diese Formulierung des Beweises erfordert, daß man jede Gerade als parallel zu sich selbst ansieht. Das ist aber auch üblich, damit die Parallelität als Äquivalenzrelation erscheint. (Ihre Äquivalenzklassen sind dann die Klassen einander paralleler Geraden oder „Richtungen".) Tut man das nicht, so muß man auch die Eigenschaft (1) mit dem Zusatz verstehen „oder fallen zusammen (im Fall der Geraden durch Z)".
Das Lehrbuch enthält außerdem noch in Lerneinheit B 15 den Beweis für die Eigenschaft (7), der sich auf die vorher genannten Eigenschaften stützt. Deshalb ist der Beweis auch leichter überschaubar, obwohl er länger ist als der für die Eigenschaft (1). Der Beweisweg sollte von den Schülern skizziert werden können, zumal es hier auch um die Realisierung einer Lehrplanforderung insofern geht, als es sich im Grunde um den vorweggenommenen Beweis für den späteren Satz B 11 handelt. Wer diese Überlegungen hier wegläßt, muß sie später in Lerneinheit B 20 nachholen. Die Schüler müssen allerdings merken, daß hier allgemeine Überlegungen an einem speziellen Beispiel durchgeführt werden. Zur Veranschaulichung kann auch das Flachmodell *Zentrische Streckung* für den *Polylux* eingesetzt werden.
Im Lehrbuch ist nicht jede der acht Eigenschaften als eigener Satz hervorgehoben, um die Schüler nicht durch eine Fülle von zu lernenden Sätzen zu „erschlagen"; entsprechend sollte im Unterricht verfahren werden. Der Eigenschaft (8) kommt im Zusammenhang mit Aufgabe b 58 (Lb 112) insofern eine besondere Bedeutung zu, als es hier um die Streckung eines Kreises bzw. einer beliebigen krummlinig begrenzten Figur geht. An ihnen soll der Schüler wieder die Allgemeinheit der Definition der zentrischen Streckung erkennen und nicht bei Vielecken oder gar bei Dreiecken stehenbleiben.

Die spätere Allgemeinheit der Ähnlichkeitsdefinition ist hiermit im Zusammenhang zu sehen.

Dritter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.2.2.: Zusammensetzen zweier zentrischer Streckungen (Lerneinheiten B 16 und 17)

Das Verknüpfen (Hintereinanderausführen) von Abbildungen führt bekanntlich auf die Frage, ob diese Abbildungen bezüglich der betreffenden Verknüpfung eine Gruppe bilden, ob die Verknüpfung kommutativ ist usw. Der Gruppenbegriff wird gegenwärtig in unserer Schule nicht behandelt. Die Fragen algebraischer Strukturen stehen aber im Hintergrund, und beim Zusammensetzen zentrischer Streckungen miteinander (und später mit Bewegungen) sind u. a. folgende Eigenschaften solcher Zusammensetzungen von Interesse:

Zwei zentrische Streckungen $(Z_1; k_1)$ und $(Z_2; k_2)$ lassen sich stets zu genau einer Streckung $(Z_3; k_1 \cdot k_2)$ zusammensetzen.

Zu jeder zentrischen Streckung $(Z_0; k_0)$ gibt es die zentrische Streckung $\left(Z_0; \frac{1}{k_0}\right)$, die die erste aufhebt.

Führt man zwei zentrische Streckungen (mit nicht notwendig gleichen Streckzentren) hintereinander aus, so ist das Ergebnis im allgemeinen nicht unabhängig von der Reihenfolge.

Im Lehrbuch wird nur die erste der drei hier genannten Eigenschaften ausdrücklich hervorgehoben, und man wird auch nur eine Unterrichtsstunde auf diese Fragen verwenden.

Das Üben im konstruktiven Zusammensetzen zentrischer Streckungen kostet verhältnismäßig viel Zeit. Dennoch sollte das Aufwerfen und begründete Beantworten der Frage nach der Existenz einer zentrischen Streckung als Ergebnis der Hintereinanderausführung zweier zentrischer Streckungen nicht in den Hintergrund treten. Denn man muß beachten, daß eine Zusammensetzung auch möglich wäre, wenn ihr Ergebnis nicht wieder eine zentrische Streckung wäre. Die Gefahr, den Schwerpunkt einseitig auf das Konstruieren und damit auf das Finden von Z_3 und k_3 bzw. des Bildes bei der Streckung $(Z_3; k_3)$ zu legen, liegt deshalb besonders nahe, weil den Schülern dieses konstruktive Zusammensetzen und Suchen nach einem Z_3 erfahrungsgemäß Freude macht; in ihm liegt eine gewisse Spannung.

Dieses unterschiedliche Setzen der Schwerpunkte kommt in der Regel durch unterschiedliche Ziel- und Problemformulierungen zum Ausdruck. So sollte man z. B. nach Erörterung der Gegebenheiten des Bildes B 39 nicht fragen: „Bei welcher Streckung ist P'' Bild von P?“, sondern vielmehr zunächst: „Gibt es eine ... ?“ Diese Frage ist zwar etwas unproblematisch, wenn früher Aufgabe b 54 behandelt worden ist, sie legt aber die Richtung des Denkens für den Fall unterschiedlicher Zentren fest. Diesen Fall sollte man dann nicht am Bild B 40 des Buches besprechen, weil hier schon der abgeschlossene Lösungsweg vorliegt. Vielmehr wird man hier die folgenden Schritte gehen:

a) Zeichnet mit Hilfe der Lochschablone die vier Punkte $Z_1 = (15)$; $Z_2 = (21)$; $A = (16)$; $B = (19)$!
b) Ermittelt das Bild $\overline{A'B'}$ von $\overline{AB}$ bei der Streckung $(Z_1; 3)$!
c) Ermittelt das Bild $\overline{A''B''}$ von $\overline{A'B'}$ bei der Streckung $(Z_2; 2)$!

d) Gibt es eine Streckung, bei der $\overline{A''B''}$ Bild von $\overline{AB}$ ist?
e) Beantwortung etwa in der Art, wie es im Lehrbuch zu Bild B 40 geschieht, nachdem die Schüler A mit A'' und B mit B'' verbunden und diese beiden Geraden zum Schnitt gebracht haben.

Es sei hier angefügt, daß dieser Beweis eigentlich unvollständig ist, weil er nur die zwei Punkte A und B betrachtet, tatsächlich aber für alle Punkte der Ebene geführt werden müßte. Doch ist das relativ leicht: Wählt man einen beliebigen Punkt C (nicht auf $\overline{AB}$) und konstruiert C'', so gilt genauso wie für A und B $AC \,||\, A''C''$ und $\overline{A''C''} = k_1 \cdot k_2 \overline{AC}$. Es muß nun nur noch gezeigt werden, daß auch CC'' durch Z_3 geht, das ja nunmehr bereits festliegt. Das aber folgt sofort aus der Umkehrung zum dritten Teil des Strahlensatzes. Nicht wegen der Schwierigkeit, sondern aus Zeitgründen wird man das im Unterricht allerdings höchstens andeuten können.
Daß Z_3 auf der Geraden Z_1Z_2 liegen muß, kann man mitteilen und das Durcharbeiten der Begründung den leistungsstarken Schülern empfehlen. Alle Schüler sollten jedoch die Genauigkeit ihrer Konstruktion daran messen.
Insbesondere bei den Zusammensetzungen, aber auch bei den vorangegangenen Konstruktionen wird vielen Schülern die Übersicht erleichtert, wenn (an der Tafel und im Heft) farbig gearbeitet wird. So kann man z. B. verabreden, Originale stets rot, Bilder stets grün zu zeichnen. Daß dann bei den Zusammensetzungen z. B. $\overline{A'B'}$ zweifarbig gezeichnet wird, ist kein Mangel, unterstreicht vielmehr die Stellung dieser Strecke als „Durchgangsstadium“ beim Zusammensetzen. Je nach Klassensituation wird man abschließend den Bezug zum Zusammensetzen der bisher bekannten Bewegungen herstellen.

Zusammenfassung:

1) Folgende Zeitaufteilung wird empfohlen:
Erster Schwerpunkt – etwas mehr als eine Unterrichtsstunde
Zweiter Schwerpunkt – knapp zwei Unterrichtsstunden
Dritter Schwerpunkt – eine Unterrichtsstunde
2) Nach dieser Unterrichtseinheit sollte folgendes erreicht sein:
Die Schüler kennen den Begriff *zentrische Streckung*. Sie können ihn durch eine Konstruktionsvorschrift wiedergeben. Sie wissen, daß eine zentrische Streckung eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Ebene auf sich ist und durch die Angabe eines Punktes und einer positiven Zahl eindeutig bestimmt ist. Sie können bei vorgegebener Streckung sowohl Bild- als auch Originalpunkte bestimmen.
Die Schüler haben eingesehen, daß die Frage nach den Bildern von Punktmengen (Geraden, Strecken usw.) sinnvoll und die Antwort nicht selbstverständlich ist. Sie kennen entsprechende Eigenschaften der zentrischen Streckung und wissen, daß der Beweis dieser Eigenschaften unter Benutzung des Strahlensatzes und seiner Umkehrungen möglich ist. Insbesondere wissen sie über das Bild von Vielecken bei zentrischen Streckungen Bescheid und können die entsprechenden Aussagen begründen.
Die Schüler können beschreiben, was *Zusammensetzen zweier zentrischer Streckungen* bedeutet. Sie wissen: Mit einer Ausnahme ($k_1 \cdot k_2 = 1$) ergibt die Zusammensetzung zweier zentrischer Streckungen wieder eine zentrische Streckung. Sie können bei Vorgabe von $(Z_1; k_1)$ und $(Z_2; k_2)$ den Faktor k_3 der Zusammensetzung bestimmen und die Lage von deren Zentrum Z_3 beschreiben. Die Schüler haben sich in ihren Beweis- und Konstruktionsfähigkeiten (Genauigkeit) vervollkommnet. Dabei haben

sie (erneut) das Zurückführen des Neuen auf das Bekannte und damit den Zusammenhang im System mathematischer Definitionen und Sätze erlebt.

2.2.3. Leistungskontrolle mit Auswertung (2 Stunden)

Die Behandlung der Stoffeinheiten 2.1. und 2.2. sollte mit einer einstündigen Klassenarbeit abgeschlossen werden, für die Aufgaben folgender Art geeignet sind:

1. S sei Scheitelpunkt eines Strahlenbüschels, A liege auf dem Strahl SB und C auf dem Strahl SD. Außerdem sei $AC \parallel BD$. Fertige eine Skizze an und fülle folgende Tabelle aus!

		$\overline{SA}$	$\overline{SB}$	$\overline{AB}$	$\overline{SC}$	$\overline{SD}$	$\overline{CD}$	$\overline{AC}$	$\overline{BD}$
Gruppe A	a)	40 mm	60 mm		50 mm			30 mm	
	b)	2,3 cm	6,9 cm					1,9 cm	5,7 cm
Gruppe B	a)			20 mm		75 mm	25 mm	30 mm	
	b)				8,3 cm	16,6 cm		1,6 cm	3,2 cm

2. Bild 2.13.: Bei der zentrischen Streckung $(Z; 3)$ ist F das Bild von A, E das Bild von B, D das Bild von C. Fülle die Lücken aus! (Beachte: AB heißt *Gerade AB*, $\overline{AB}$ heißt *Strecke* $\overline{AB}$.)

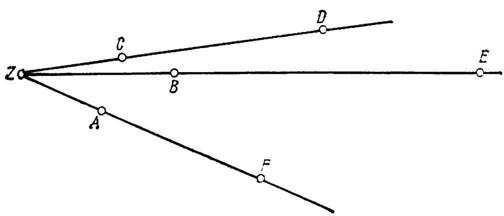


Bild 2.13.

Gruppe A	Gruppe B
a) $\overline{EF}$ ist Bild von ...	a) $\overline{ZD}$ ist Bild von ...
b) $\overline{BC}$ ist ... von ...	b) $\overline{AB}$ ist ... von ...
c) AF ist ... von ...	c) BE ist ... von ...
d) $\overline{ZA} = k \cdot \overline{ZF}$; $k = \ldots$	d) $\overline{FE} : \overline{AB} = k$; $k = \ldots$.
e) AB und FE sind ...	e) $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle FED$ sind ...

3. Bild 2.14.:
   a) Konstruiere das Bild P' von P bei der Streckung $(Z; 1{,}5)$!
   b) Konstruiere das Original Q von P bei der Streckung $(Z; 2)$!
   c) Konstruiere das Bild Z' von Z bei der Streckung $(P; 2)$!

Bild 2.14.

4. Bild 2.15.: Um die Höhe einer Fahnenstange $\overline{FG}$ zu ermitteln, werden zwei Stäbe $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ bekannter Länge so aufgestellt, daß man über sie die Spitze G der Fahnenstange anpeilen kann. B, D und G liegen also auf ein und derselben Geraden. Dann bestimmt man die Entfernung der Stäbe voneinander und vom Fußpunkt F der Fahnenstange. Gemessen wurden:

   Gruppe A: $\overline{AB} = 1{,}4$ m; $\overline{CD} = 2{,}1$ m; $\overline{AC} = 1{,}5$ m; $\overline{CF} = 12{,}0$ m
   Gruppe B: $\overline{AB} = 1{,}1$ m; $\overline{CD} = 2{,}0$ m; $\overline{AC} = 1{,}8$ m; $\overline{CF} = 12{,}6$ m

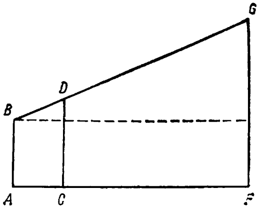


Bild 2.15.

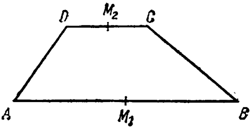


Bild 2.16.

5. Bild 2.16.: Im Trapez $ABCD$ sind die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ nicht parallel (also Schenkel des Trapezes). M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$. Beweise: Die Geraden AD, M_1M_2 und BC schneiden einander in einem Punkt.

Lösungen und Vorschlag einer Punktbewertung (Gruppe A)

Aufgabe 1. (7 Punkte)

a) Ermitteln von $\overline{AB}$, $\overline{SD}$, $\overline{CD}$, $\overline{BD}$	je 1 Punkt
b) Ermitteln von $\overline{AB}$	1 Punkt
Feststellen, daß $\overline{SC}$, $\overline{SD}$, $\overline{CD}$ nicht eindeutig angebbar sind	2 Punkte

Aufgabe 2. (5 Punkte)

a) bis e)	je 1 Punkt

Aufgabe 3. (3 Punkte)

a) bis c)	je 1 Punkt

Hier ist vorher zu entscheiden (und die Klasse entsprechend zu instruieren), ob die Punkte mit Zirkel und Lineal konstruiert oder mit Hilfe der cm-Einteilung des Lineals nur abgetragen werden sollen.

Aufgabe 4. (7 Punkte)

a) Ansetzen der Proportion für $h' = \overline{FG} - \overline{AB}$ nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes — 3 Punkte
b) Ermitteln von $h' = 6{,}3$ m — 2 Punkte
c) Ermitteln von $h = h' + \overline{AB} = 7{,}7$ m — 1 Punkt
d) Antwortsatz — 1 Punkt

Der Punkt für den Antwortsatz wird bei fehlerhafter Berechnung nur erteilt, wenn das zahlenmäßige Ergebnis im Rahmen des Möglichen liegt.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

a) Der Schüler hat verstanden, daß die Umkehrung des dritten Teils des Strahlensatzes zur Anwendung kommen muß — 2 Punkte (unteilbar)

b) Richtige Formulierung des Beweises, z. B.:

Nach dem Text gilt: $\overline{DM_2} : \overline{M_2C} = 1 : 1$
$\overline{AM_1} : \overline{M_1B} = 1 : 1$

Damit sind die Voraussetzungen zur Umkehrung des dritten Teils des Strahlensatzes erfüllt. Also muß gelten: Die Geraden AD, M_1M_2 und BC schneiden einander in genau einem Punkt. — 2 Punkte
(Auf das Herausstellen von Voraussetzung und Behauptung kann verzichtet werden.)

Bemerkungen zu den Aufgaben

Die Formulierung der Aufgaben macht deutlich, daß es zweckmäßig ist, den Schülern die Aufgaben auf Arbeitsblättern oder sonst in einer Form zu geben, die unproduktive Schreibzeiten so kurz wie möglich hält (besonders bei Aufgabe 2.). Ist das nicht möglich, so muß Aufgabe 3. mittels Lochschablone gestellt werden, etwa durch $P = (12)$, $Z = (7)$ für Gruppe A und $P = (14)$, $Z = (15)$ für Gruppe B.
Es sei auch deutlich betont, daß es sich hier lediglich um Vorschläge handelt, die – auch durch die angegebene Punktbewertung – die Art der zu stellenden Anforderungen deutlich machen sollen. Den größten Schwierigkeitsgrad haben die Aufgaben 4. und vor allem 5., doch sollten weder Anwendungs- noch Beweisaufgabe in einer größeren Leistungskontrolle fehlen. Sollte der Lehrer jedoch meinen, daß in seiner Klasse die Schwierigkeiten hierbei zu groß sind, so muß er alles in die Wege leiten, was zur Besserung dieser Situation beiträgt. Es ist sogar anzustreben, in der Figur zu Aufgabe 4. die gestrichelte Hilfslinie wegzulassen. Wer darüber hinaus bei dieser Aufgabe die bequemen Zahlenverhältnisse vermeiden und die Schüler damit auch zur Arbeit mit dem Stab veranlassen will, der braucht nur geringfügige Änderungen an den Zahlen vorzunehmen. Eine Genauigkeit auf drei gültige Ziffern dürfte dabei allerdings den praktischen Möglichkeiten nicht in jedem Fall entsprechen.

2.3. Ähnliche Figuren (15 Stunden)

Bevor man sich in dieser Stoffeinheit der Untersuchung ähnlicher Figuren, insbesondere Dreiecken, sowie den konstruktiven und praktischen Anwendungen der Ähnlichkeit zuwendet, sollten zunächst die Ähnlichkeitsabbildungen erklärt und auf dieser Grundlage dann, gemäß den Prinzipien des abbildungsgeometrischen Aufbaus, die Ähnlichkeit von Punktmengen definiert werden. Dieser Teil der Stoffeinheit (Unterrichtseinheit 2.3.1.) hätte an sich von der Systematik her – zumindest zum größten Teil – auch zur Stoffeinheit 2.2. gerechnet werden können, die dann die Überschrift *Ähnlichkeitsabbildungen* tragen könnte. Daß im Lehrplan einer anderen Einteilung der Vorzug gegeben worden ist, ist für den Gesamtaufbau und den Inhalt ohne Belang.

2.3.1. Ähnlichkeitsabbildungen und Ähnlichkeit (3 Stunden; Lerneinheiten B 17 bis 19)

Diese Unterrichtseinheit nimmt durch die beiden genannten Begriffe eine Schlüsselstellung für das Verständnis des abbildungsgeometrischen Aufbaus des gesamten Stoffgebiets ein. Um das auch den Schülern bewußtzumachen, empfiehlt sich eine Erinnerung an den in der Unterrichtseinheit 2.2.1. wiederholten Aufbau der Kongruenzlehre und eine Gegenüberstellung analoger Begriffe. Das kann anhand eines vorbereiteten Tafelbildes (Bild 2.17.) erfolgen, wodurch gleichzeitig Gliederung und Gang des weiteren Unterrichts angedeutet werden und die Frage aufgeworfen wird: Reichen die zentrischen Streckungen bereits aus zur Definition der Ähnlichkeit von Figuren? Im Tafelbild sollte das Wort „Bewegungen" farbig hervorgehoben werden, um es von den anderen, nicht gleichrangigen Begriffen dieses Feldes abzuheben.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.3.1.: Definition der Ähnlichkeitsabbildungen (Lerneinheit B 17)

Bei der Erarbeitung der Definition der Ähnlichkeitsabbildungen und, darauf aufbauend, der Ähnlichkeit von Figuren kommt es darauf an, die zu Beginn des gesamten Stoff-

Lehre von der	
Kongruenz	Ähnlichkeit
Verschiebungen Drehungen Spiegelungen Bewegungen	Zentrische Streckungen
Kongruenz von Punktmengen (Figuren)	Ähnlichkeit von Punktmengen (Figuren)
Kongruenzsätze für Dreiecke	

Bild 2.17.

gebiets und vor allem auch in Unterrichtseinheit 2.2.1. (↗ Uh 84) erfolgten motivierenden Betrachtungen sinnvoll auszunutzen. Es wäre bedenklich, wollte man die Definitionen B 9 und B 10 ohne Begründung geben, statt sie etwa folgendermaßen zu erarbeiten: Die Eigenschaften der zentrischen Streckung legen uns nahe, zwei Punktmengen als einander ähnlich zu bezeichnen, wenn die eine das Bild der anderen bei einer zentrischen Streckung ist. Dabei sollen bloße Lageveränderungen nichts an dem Sachverhalt ändern, daß eine Figur ähnlich bzw. nicht ähnlich zu einer anderen ist. Deshalb werden noch zusätzlich Bewegungen zugelassen und Ähnlichkeitsabbildungen als Zusammensetzungen einer zentrischen Streckung mit einer Bewegung erklärt.
Dabei muß den Schülern bewußt werden, daß nach dieser Definition jede zentrische Streckung allein auch eine Ähnlichkeitsabbildung ist, weil die identische Abbildung eine spezielle Bewegung ist. Ganz entsprechend ist jede Bewegung allein ebenfalls eine Ähnlichkeitsabbildung, denn man kann sie sich ja zusammengesetzt denken mit einer Streckung mit dem Streckungsfaktor $k = 1$. Damit ergibt sich dann sofort, daß die Kongruenz von Figuren ein Sonderfall der noch zu definierenden Ähnlichkeit von Figuren ist. Die Erkenntnis, daß sowohl die Bewegungen als auch die zentrischen Streckungen echte Teilmengen der Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen sind (unterstützt durch ein entsprechendes Venn-Diagramm), führt zu den Überlegungen, welche der Eigenschaften der Spezialfälle allen Ähnlichkeitsabbildungen zukommen (Auftrag B 25). Dieses Herausarbeiten des Zusammenhanges von Speziellem und Allgemeinem ist besonders wichtig, weil andernfalls die Gefahr besteht, daß einige Schüler auf Grund der Definition B 9 nur die „echten“ Zusammensetzungen als Ähnlichkeitsabbildungen ansehen. Was den Unterschied zwischen wirklich verschiedenen Ähnlichkeitsabbildungen und verschiedenartigen Beschreibungsmöglichkeiten ein und derselben Ähnlichkeitsabbildung betrifft, gilt hier dasselbe wie bei den Bewegungen (↗ Uh 94).

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.3.1.: Definition der Ähnlichkeit von Punktmengen (Lerneinheit B 18)

Bekanntlich neigen die Schüler immer wieder dazu, Beziehungsbegriffe als Eigenschaften einzelner Objekte aufzufassen, in unserem Falle also z. B. von „einem ähnlichen Dreieck“ zu sprechen. Um dem vorzubeugen, sollte man das in der Definition B 10 benutzte Wort *einander* auch bei allen weiteren entsprechenden Sachverhalten verwenden und die vereinfachte Sprechweise, z. B. „Die Dreiecke ABC und DEF sind ähnlich“, möglichst vermeiden. Wichtig und dem gleichen Ziele dienend ist ferner, den Schülern die Ähnlichkeit als Äquivalenzrelation bewußtzumachen: Ohne die entsprechenden Fachausdrücke *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* zu benutzen, sollte mit kurzer Begründung erarbeitet werden, daß

jede Figur sich selbst ähnlich ist,
aus $F_1 \sim F_2$ *folgt* $F_1 \sim F_1$,
aus $F_1 \sim F_2$ *und* $F_2 \sim F_3$ *folgt* $F_1 \sim F_3$.

In welchem Maße z. B. die Eigenschaft der Symmetrie für selbstverständlich gehalten wird, ersieht man auch daraus, daß i.a. sofort definiert wird (auch in Definition B 10), wann zwei Figuren einander ähnlich heißen, und nicht etwa erst, wann eine Figur (F_1) ähnlich zu einer zweiten (F_2) heißt, woraus dann erst zu folgern ist, daß auch F_2 ähnlich zu F_1 ist. Die Symmetrie der Ähnlichkeitsrelation hat auch zur Folge, daß man eigentlich von Ähnlichkeitsfaktor (bzw. Ähnlichkeitsverhältnis) nur dann sprechen kann,

wenn von den beiden Punktmengen F_1 und F_2 feststeht, welche Original und welche Bild ist. Wenn man sich auch üblicherweise nicht streng an diese Einschränkung hält, so sollte man doch auf alle Fälle vermeiden, dann den bestimmten Artikel zu verwenden, also z. B. von *dem* Ähnlichkeitsfaktor zu sprechen, wenn nicht bestimmt ist, welche Figur das Original sein soll. Auch den Schülern muß das klar sein, und man sollte ihnen auch in Erinnerung bringen, daß bei der Proportionalität zweier Folgen und dem Proportionalitätsfaktor der gleiche Sachverhalt vorliegt.
Beim Begriff des Ähnlichkeitspunktes sollten die Schüler an einem geeigneten Beispiel darauf hingewiesen werden, daß zwei Figuren sehr wohl zwei Ähnlichkeitspunkte haben können (Bild 2.18).

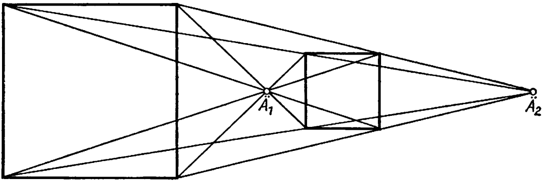


Bild 2.18.

Der mündlichen Übung im inhaltlich und sprachlich richtigen Verwenden der eingeführten Begriffe und Fachausdrücke (und dem zielgerichteten Betrachten von Figuren und Begründen von Aussagen) dient Aufgabe b 63 (Lb 112). Eine Schülerantwort zum Bild b 1 könnte etwa lauten: „$\triangle$ *SAD* und $\triangle$ *SCF* sind einander ähnlich, weil $\triangle$ *SCF* das Bild von $\triangle$ *SAD* bei einer zentrischen Streckung ist. Zentrum dieser Streckung ist *S*; Streckfaktor und gleichzeitig Ähnlichkeitsfaktor ist $\frac{\overline{SA}}{\overline{SC}}$." Bei den Aufgaben b 64 und b 65, die ebenfalls der Festigung beider zentraler Begriffe dienen, ist zu beachten, daß das Zeichnen der Ausgangsdreiecke nebensächlich ist; sauberes, einigermaßen maßstabgerechtes Skizzieren würde genügen; besser wäre allerdings ein Arbeitsblatt, wie es Bild 2.19. für Aufgabe b 64 zeigt.
Ferner kommt es auch bei den Abbildungen selbst nicht auf den Erwerb von Konstruktionsfertigkeiten an, sondern auf das Erkennen der Zusammenhänge. So sollen die Schüler z. B. den Einfluß der Reihenfolge in der Zusammensetzung von zentrischer Streckung und Bewegung auf die entstehende Ähnlichkeitsabbildung erkennen. Auch auf das Einzeichnen der Zwischenlagen kann verzichtet werden. Statt des ausführlichen Bildes [Bild 2.20. für Aufgabe b 64 a)] genügt auch eine Darstellung, wie sie – ebenfalls für Aufgabe b 64 a) – Bild 2.21. zeigt.
Eine Begründung ist in beiden Fällen erforderlich. Übrigens ist bei diesen Aufgaben gegen die Benutzung des Zeichendreiecks für die rechten Winkel genau so wenig einzuwenden wie gegen das rechnerische Vervielfachen der Streckenlängen. Schließlich sei noch auf die Einführung des Zeichens „$\sim$" für „ähnlich" hingewiesen: Hier ist zunächst zu bedenken, daß die Schüler dieses Zeichen bereits in anderer Bedeutung aus der Behandlung der Proportionalität kennen. Einerseits muß man sich dagegen abgrenzen, indem man auf die unterschiedlichen Objekte hinweist, die in der jeweiligen Beziehung

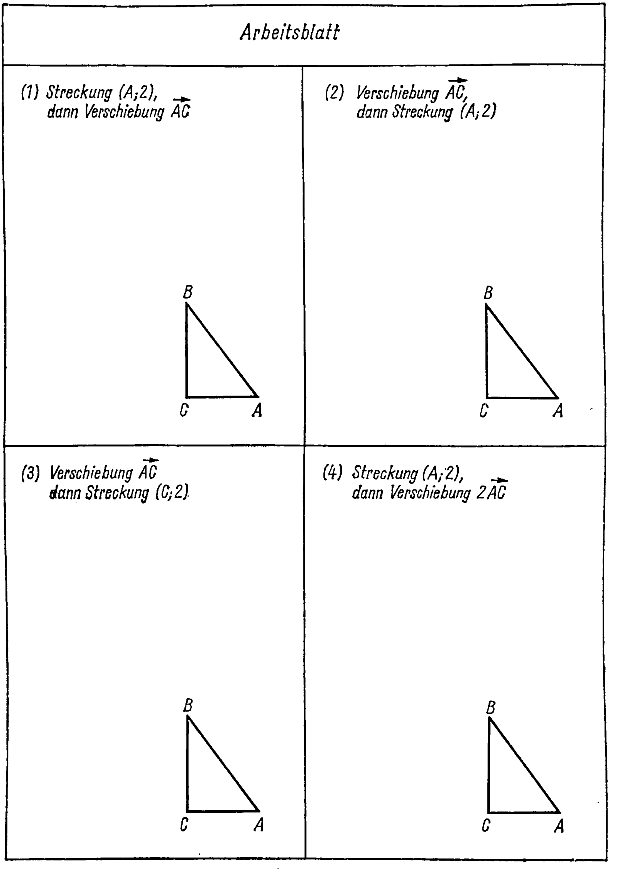

Arbeitsblatt
(1) Streckung $(A;2)$, dann Verschiebung $\overrightarrow{AC}$
(2) Verschiebung $\overrightarrow{AC}$, dann Streckung $(A;2)$
(3) Verschiebung $\overrightarrow{AC}$ dann Streckung $(C;2)$
(4) Streckung $(A;2)$, dann Verschiebung $2\overrightarrow{AC}$
B
C
A
B
C
A
B
C
A
B
C
A

Bild 2.19.

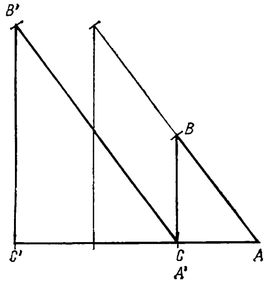


Bild 2.20

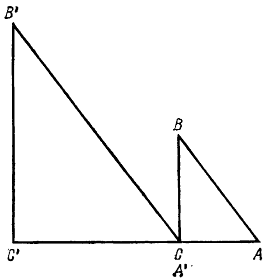


Bild 2.21.

(„proportional" bzw. „ähnlich") stehen können. Andererseits sollte man hervorheben, daß die Übereinstimmung der beiden Zeichen nicht zufällig ist, der Zusammenhang aber erst bei der Besprechung der Ähnlichkeit von Vielecken deutlich werden wird. Beim Erkennen der Kongruenz als Sonderfall der Ähnlichkeit sollte dann ausdrücklich – auch im Interesse eines besseren Einprägens – auf die Verwandtschaft der Zeichen „$\sim$" und „$\cong$" hingewiesen werden.

Dritter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.3.1.: Untersuchung vorgegebener Figuren auf Ähnlichkeit über Ähnlichkeitsabbildungen (Lerneinheit B 18)

Im Beispiel B 11 des Lehrbuches wird an zwei Dreiecken das Vorgehen bei der Untersuchung auf Ähnlichkeit demonstriert und damit gleichzeitig – den Schülern zunächst noch unbewußt – der Hauptähnlichkeitssatz für Dreiecke gewonnen. Dabei ist folgendes zu beachten: Strenggenommen läßt sich von gezeichneten Figuren durch Messen ebensowenig Ähnlichkeit nachweisen wie etwa die Eigenschaft, ein Quadrat zu sein o. ä.; vielmehr sind hier eigentlich immer zusätzliche Angaben nötig. Im Beispiel B 11 wurde absichtlich darauf verzichtet; denn bei einer vorgegebenen Größenangabe der Winkel wäre nicht deutlich genug zum Ausdruck gekommen, wie man überlegt, um Ähnlichkeit festzustellen. Allerdings kann man auch etwa verlangen, die Dreiecke ABS und CDS auf Ähnlichkeit zu untersuchen, wobei $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ zwei Sehnen eines Kreises sind, die einander in S schneiden (Bild 2.22.).

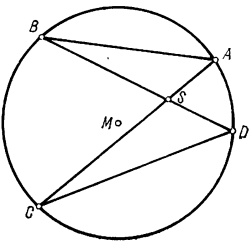


Bild 2.22.

Bei einer solchen Problemstellung ist aber zu bedenken, daß durch das Heranziehen weiterer Sätze (Peripheriewinkelsatz, Scheitelwinkelsatz) zusätzliche Schwierigkeiten entstehen und das eigentliche Anliegen verdeckt werden kann. Wichtig ist jedenfalls, daß die Schüler das Prinzip der bei Untersuchung auf Ähnlichkeit anzustellenden Überlegungen voll erfassen. Dabei sollte ihnen auch deren relative Umständlichkeit bewußt werden, und der Lehrer sollte schon hier darauf hinweisen, daß (für gewisse Figuren) später Vereinfachungen angestrebt und erreicht werden. An Aufgabe b 66 (Lb 113) sollten in gleicher Art wie bei Aufgabe b 63 die Gedanken aus dem Beispiel B 11 in groben Zügen wiederholt werden. Eine mündliche Antwort für a) könnte zum Inhalt haben:

Verschiebung $\overrightarrow{EI}$, *anschließend zentrische Streckung* $\left(I; \frac{\overline{MI}}{\overline{H'I}}\right)$

Für e) könnte sie etwa lauten:

Eine derartige Abbildung gibt es nicht, da die Höhen der Trapeze offensichtlich ein anderes Verhältnis haben als die Grundseiten.

Vierter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.3.1.: Gleichsinnige und ungleichsinnige Ähnlichkeit (Lerneinheit B 19)

Gemäß dem Lehrplan ist auf eine ausdrückliche Definition der gleichsinnigen bzw. ungleichsinnigen Ähnlichkeit zu verzichten, diese Begriffe sind nur „einzuführen". Insgesamt sollte man den hiermit zusammenhängenden Erörterungen nicht über Gebühr Gewicht verleihen. Den Schülern muß aber deutlich werden, daß es bei diesen Begriffen nicht etwa auf die Benennung der Punkte, z. B. der Eckpunkte von Vielecken, ankommt. Deshalb sollte der Lehrer in diesem Zusammenhang ausdrücklich auf das Bild B 29 in Lerneinheit B 11 hinweisen, in dem beide Fünfecke im mathematisch positiven Umlaufssinn durchlaufen werden, wenn man der Reihenfolge des Alphabets bei den Bezeichnungen der Eckpunkte folgt, und wo trotzdem ungleichsinnige Kongruenz (und damit ein Sonderfall der ungleichsinnigen Ähnlichkeit) vorliegt.

Fünfter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.3.1.: Negative Zahlen als Streckfaktoren (Lerneinheit B 19)

Eigentlich geht es hier um eine Erweiterung des Begriffs zentrische Streckung, indem nun auch negative und damit alle (dem Schüler bekannten) Zahlen ungleich 0 als Streckfaktoren zugelassen werden. Auf eine neue Definition ist jedoch verzichtet worden, um dieses Problem nicht übermäßig in den Vordergrund zu stellen. Deutlich hervorzuheben ist jedoch, daß ein negativer Streckfaktor nicht etwa zu ungleichsinniger Ähnlichkeit führt, daß diese vielmehr allein dadurch erzeugt werden kann, daß die betreffende Ähnlichkeitsabbildung eine Bewegung enthält, die zu ungleichsinniger Kongruenz führt (Zusammensetzung aus einer ungeraden Anzahl von Geradenspiegelungen und – beliebig vielen – Drehungen und Verschiebungen. Daß Verschiebungen und Drehungen ihrerseits durch eine gerade Anzahl von Geradenspiegelungen ersetzt werden können, sie also hier gar nicht erwähnt zu werden brauchten, ist den Schülern ja nicht bekannt).

Nun gibt es ja prinzipiell zwei Möglichkeiten, durch die Art der Behandlung einer naheliegenden Verwechslung zweier Sachverhalte (I) und (II) vorzubeugen: Entweder man läßt zwischen der Behandlung von (I) und (II) eine längere Zeit verstreichen [was aber nicht etwa der Notwendigkeit einer klaren inhaltlichen Abgrenzung von (I) und (II) gegeneinander vollständig enthebt], oder man behandelt (I) und (II) in unmittelbarem Zusammenhang, stellt einander gegenüber und grenzt deutlich ab. Bezüglich gleichsinniger und ungleichsinniger Ähnlichkeit einerseits und positiver und negativer Streckfaktoren andererseits sei hier die zweite Möglichkeit empfohlen. Das Lehrbuch behandelt deshalb auch beide Fragen in einer einzigen Lerneinheit. Die Bilder B 43 und B 44 bieten übrigens noch einmal Gelegenheit, darauf hinzuweisen, daß auch krummlinig begrenzte Figuren durch die Ähnlichkeitsdefinition erfaßt werden.

Zusammenfassung:

1) Die aufgeführten fünf Schwerpunkte sollten etwa folgendermaßen auf die vorgesehenen drei Stunden verteilt werden:
   Erster und zweiter Schwerpunkt – eine Stunde
   Dritter Schwerpunkt – eine Stunde
   Vierter und fünfter Schwerpunkt – eine Stunde

2) Nach dieser Unterrichtseinheit sollte folgendes erreicht sein: Die Schüler kennen die Definition der Ähnlichkeitsabbildung und der Ähnlichkeit von Figuren (Punktmengen) und können sie inhaltlich und sprachlich einwandfrei wiedergeben. Sie kennen wichtige Eigenschaften der Ähnlichkeitsabbildungen und können angeben, in welchen dieser Eigenschaften die Ähnlichkeitsabbildungen den Bewegungen oder den zentrischen Streckungen gleichen bzw. sich von ihnen unterscheiden. Die Schüler kennen die Begriffe *Ähnlichkeitsfaktor* und *Ähnlichkeitspunkt* und wissen, daß es nur bei spezieller Lage ähnlicher Figuren (mindestens) einen Ähnlichkeitspunkt gibt. Sie haben erkannt, daß die Kongruenz ein Sonderfall der Ähnlichkeit (mit dem Ähnlichkeitsfaktor 1) ist.
   Die Schüler wissen, daß die Frage nach der Ähnlichkeit zweier Figuren positiv durch die Angabe einer entsprechenden Ähnlichkeitsabbildung beantwortet wird und wie man im Prinzip hierbei vorgeht. Dabei haben sie erfahren, daß der Nachweis einer solchen Abbildung oft recht mühsam ist.
   Die Schüler können gleichsinnige Ähnlichkeit von ungleichsinniger unterscheiden. Sie wissen, daß nunmehr auch negative Zahlen als Streckfaktoren auftreten können und welche Bedeutung diese haben.

2.3.2. Ähnlichkeit von Vielecken (4 Stunden; Lerneinheiten B 20 bis 22)

Hauptanliegen der vorigen Unterrichtseinheit war die allgemeine Ähnlichkeitsdefinition mittels Ähnlichkeitsabbildungen. In dieser Unterrichtseinheit geht es um diejenigen Figuren, die im Vordergrund künftiger Betrachtungen stehen, also um Vielecke und speziell um Dreiecke. Dabei könnten die Hauptgedanken etwa folgendermaßen motiviert werden: Will man über die Ähnlichkeit zweier vorgelegter Figuren dadurch etwas aussagen, daß man Existenz (oder Nicht-Existenz) einer geeigneten Ähnlichkeitsabbildung nachweist, so kann das recht mühevoll sein. Daher ist es lohnend, sich wenigstens für Vielecke, insbesondere für die häufig auftretenden Dreiecke, nach einfacheren Möglichkeiten umzusehen. Eine solche Möglichkeit ergäbe sich, wenn aus gewissen anderen Beziehungen der Vielecke – im Beispiel B 11 war es die Gleichheit einiger Winkel – stets auf die Existenz einer Ähnlichkeitsabbildung geschlossen werden könnte. Mit anderen Worten heißt das: Gewisse Eigenschaften der Ähnlichkeitsabbildungen (bezüglich der abgebildeten Punktmengen) müßten nur diesen Abbildungen zukommen.

Oder noch anders ausgedrückt: Der Satz B 11 müßte umkehrbar sein. Da diese Möglichkeit besteht, aber in der allgemeinen Form von Satz B 12 immer noch schwer handhabbar ist, wird nach weiteren Vereinfachungen für Dreiecke gesucht. Hier kann wieder die Analogie zur Kongruenzlehre genutzt werden, doch ist das insofern etwas schwieriger, als dort (in Klasse 6) von der Kongruenzdefinition für beliebige Figuren sofort zum Dreieck übergegangen wird, das Vieleck dort also übersprungen wird (↗ Uh 95).
Insgesamt werden in diesen vier Stunden sieben Sätze behandelt. Sollen die Schüler diese sieben Sätze inhaltlich erfassen und – gegebenenfalls mit eigenen Worten – wiedergeben können, so ist das nur möglich, wenn sie die skizzierten Grundgedanken durchschauen und das Zueinander der einzelnen Sätze (Satz und Umkehrung; Spezialfall; Ähnlichkeitssätze – Kongruenzsätze) erfaßt haben. Ein isoliertes Behandeln und wörtliches Einprägen der Sätze ist deshalb verfehlt.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.3.2.: Ähnlichkeitssatz für Vielecke

Hier geht es um die Sätze B 11 und B 12, deren Behandlung mit Beweis der Lehrplan fordert. Der Satz B 11 besagt eigentlich nichts Neues. Er spricht nur die Eigenschaft (7) der zentrischen Streckung (Lerneinheit B 15) für alle Ähnlichkeitsabbildungen aus, freilich gleich unter Benutzung des Begriffs *Ähnlichkeit.* Seine Formulierung ist aber schon deshalb nötig, damit man zu seiner Umkehrung, dem Satz B 12, gelangt. Diese Umkehrung ist allerdings nicht ganz einfach zu bilden, denn es muß ja zunächst die Existenz einer umkehrbar eindeutigen Abbildung der Eckpunkte beider Vielecke aufeinander gefordert werden, bevor von *einander entsprechenden* Winkeln und Seiten die Rede sein kann. Wegen dieser Schwierigkeiten versuche man nicht mit Gewalt, die Schüler sofort zu einer selbständigen Formulierung des in Satz B 12 ausgesprochenen Sachverhalts zu bringen. Hier genügt es, wenn die Schüler zunächst inhaltlich das Wesentliche erfaßt haben und wenn sie *nach* der ausführlichen Erörterung der Formulierung im Lehrbuch (oder einer entsprechenden des Lehrers) in der Lage sind, den Sachverhalt einwandfrei wiederzugeben. Unbedingt sollte aber zur Sprache kommen, daß es nicht ausreicht, lediglich die Übereinstimmung in „entsprechenden" Winkeln und den Verhältnissen „entsprechender" Seiten zu fordern, und daß eine solche Formulierung auch als vereinbarte Kurzsprechweise bedenklich ist, weil sie den wahren Sachverhalt verschleiert. Mit voller Absicht ist in der Voraussetzung von Satz B 12 die Zuordnung zunächst für die Eckpunkte hergestellt worden. Einerseits entspricht das dem punktweisen Abbilden der Ebene auf sich, andererseits wird dadurch gleichzeitig eine Zuordnung zwischen den Seiten sowie zwischen den Innenwinkeln hergestellt; die Aufnahme des Umlaufssinnes (gleich oder entgegengesetzt) soll auf das Problem aufmerksam machen, daß zu benachbarten Eckpunkten als Originalen benachbarte Eckpunkte als Bilder gehören müssen. Um diesen Satz zu vereinfachen, könnte man auf den Einfall kommen, etwa folgendermaßen zu formulieren:

> *Wenn zwei Vielecke in den Seitenverhältnissen und in den Winkeln übereinstimmen, so sind die Vielecke ähnlich.*

Ein solcher Satz wäre der (richtigen) Aussage für Dreiecke

> *Wenn zwei Dreiecke in den Seiten und in den Winkeln übereinstimmen, dann sind die Dreiecke kongruent.*[1])

[1]) Im Lehrbuch Klasse 6 auf Seite 115 als Umkehrung zu Satz D 21 formuliert.

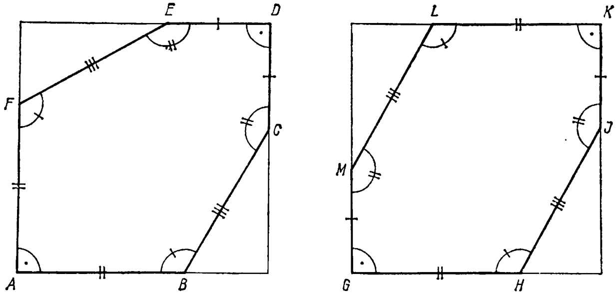


Bild 2.23.

völlig analog, aber für Vielecke falsch. Auch Schüler, die im Vereinfachen zu weit gehen, können durch das folgende Gegenbeispiel leicht überzeugt werden: Die Innenwinkel und Seiten der beiden Sechsecke *ABCDEF* und *GHIKLM*, die aus zwei Quadraten entstanden sind (Bild 2.23.), können einander so zugeordnet werden, daß entsprechende Winkel gleich groß und entsprechende Seiten gleich lang sind. Dennoch sind die beiden Sechsecke nicht ähnlich (bzw. kongruent).
Der Beweis für Satz B 12 wird nicht allgemein, sondern nur an einem „leicht verallgemeinerungsfähigen“ Beispiel geführt; der Schüler soll also wissen, daß Satz B 12 zwar nur für zwei beliebige Fünfecke bewiesen wird, daß aber bei anderer Eckenzahl im Prinzip genauso geschlossen werden kann. (Ohne daß im Unterricht darauf eingegangen werden soll, sei hier jedoch bemerkt: Die Beschränkung auf Fünfecke gestattet es, beim Beweis mit Satz B 6 [Umkehrung zum zweiten Teil des Strahlensatzes] ohne Schwierigkeiten auszukommen und auf die Benutzung der Umkehrung zum dritten Teil des Strahlensatzes zu verzichten.) Die Wahl zweier nicht-konvexer Fünfecke sollte unnötigen Einschränkungen entgegenwirken. Hat man Voraussetzung und Behauptung deutlich herausgestellt und Beispiel B 11 gründlich behandelt, so ist der Beweisgedanke nicht schwer zu finden. Soll der Beweis nicht anhand des Buches geführt werden, so kann die benutzte Bewegung durch eine Pappschablone veranschaulicht werden.
Beim Bearbeiten des Auftrages B 28 (Lb 41) ist die Gedankenführung der im Beispiel B 11 weitgehend analog; nur geschieht der Nachweis der Ähnlichkeit jetzt nicht durch eine Abbildung, sondern mit Hilfe von Satz B 12[1]). (Satz B 11, auf den im Text der Übung auch hingewiesen wird, würde man bei Nicht-Ähnlichkeit brauchen; vgl. dritter Schwerpunkt.) Bezeichnung, Lage und auch der unterschiedliche Umlaufssinn der Figuren im Bild B 47 wurden mit voller Absicht in dieser Weise gewählt, um die Gedankenführung in voller Allgemeinheit hervortreten zu lassen. Sie müßte vom Schüler etwa in folgender Weise durchlaufen werden:

(1) Beide Vierecke haben dem Augenschein nach genau einen rechten Winkel. Wenn also überhaupt eine geeignete Zuordnung der Eckpunkte möglich ist, dann müssen dabei *A* und *H* einander zugeordnet sein.

[1]) Im Lehrbuch „Mathematik, Klasse 8“ (Bestell-Nr. 00 0806-1, d. h. 1. Auflage) ist auf Seite 41 im Auftrag 28 irrtümlich der Satz B 13 anstelle von Satz B 11 angegeben worden.

Ferner sieht man, daß $\overline{AD}$ und $\overline{HE}$ die jeweils längeren Schenkel der beiden rechten Winkel sind. Daher kann die Zuordnung der Eckpunkte nur lauten:

$A - H$; $D - E$; $C - F$; $B - G$

(2a) Wir überprüfen, ob die dadurch einander zugeordneten Innenwinkel gleich groß sind, ob also gilt $\sphericalangle BAD = \sphericalangle GHE$; $\sphericalangle ADC = \sphericalangle HEF$; $\sphericalangle DCB = \sphericalangle EFG$; $\sphericalangle CBA = \sphericalangle FGH$.

(2b) Wir überprüfen, ob die dadurch einander zugeordneten Seiten gleiche Verhältnisse bilden, ob also gilt

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{HE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{GH}}.$$

Dieses Überprüfen durch Messen kann dann arbeitsteilig erfolgen.
Bei der Behandlung von Beispiel B 12 sollte unbedingt auf die den Schülern bekannten Papierformate der A-Reihe eingegangen werden. Selbstverständlich ist es dem Lehrer auch freigestellt, dieses Problem gänzlich auf die Rechtecke zu beschränken, die Verallgemeinerung auf Parallelogramme dann etwa für die Förderung der leistungsstärkeren Schüler einzusetzen. Dabei könnte darauf hingewiesen werden, daß die am Ende des Beispiels angestellte Überlegung mit $a = b\sqrt{2}$ wegen des Quadrierens eigentlich nur eine notwendige Bedingung für $a : b = b : \frac{1}{2}a$ liefert. Da a und b positiv sind, ist sie aber in diesem Falle auch hinreichend.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.3.2.: Erkenntnisgewinnung durch Verallgemeinerung

Das Verallgemeinern von Aussagen ist eine der wichtigsten Methoden auf dem Wege zu neuen mathematischen Erkenntnissen. Es ist immer dann anwendbar, wenn in einem Satz etwas über einen Begriff ausgesagt wird, zu dem man einen Oberbegriff kennt und für diesen eine entsprechende Aussage sinnvoll ist. Wenn man z. B. weiß, daß im Quadrat die Diagonalen gleich lang sind, und wenn man außerdem Rechteck, Parallelogramm und Trapez als Oberbegriffe zum Quadrat kennt, die ja ebenfalls Diagonalen besitzen, so liegt die Frage nahe, ob sich auch für diese Vierecke die Eigenschaft gleich langer Diagonalen nachweisen läßt. Hingegen ist die Frage für eine Punktmenge schlechthin, die ja auch Oberbegriff zu Quadrat ist, nicht mehr sinnvoll.
Der Lehrplan mißt dem Verallgemeinern große Bedeutung zu:

Durch die weitere Schulung des Abstraktionsvermögens, durch die Befähigung zum Verallgemeinern, zur Begriffsbildung, zum Erkennen von Zusammenhängen und zum Systematisieren ... trägt der Mathematikunterricht gleichzeitig zur allgemeinen geistigen Entwicklung der Schüler bei.

Der im Lehrbuch eingeschlagene Weg zum Finden der Ähnlichkeitssätze kommt dieser Lehrplanforderung nach, und zwar für die Schüler erstmals in dieser expliziten Form. Damit wird versucht, die Schüler an das bewußte Verstehen und Anwenden eines über die Mathematik hinaus bedeutsamen Verfahrens der Erkenntnisgewinnung heranzuführen.

Dritter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.3.2.: Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Hat man als Hausaufgabe zur ersten Stunde, die diesem Schwerpunkt gewidmet ist, die Aufgabe b 72 gestellt, so kann an ihre Besprechung sofort die Motivation der folgenden Betrachtungen angeschlossen werden. Dabei sollte auch kurz erörtert werden, warum man sich – genau wie bei der Kongruenz – zweckmäßigerweise auf Dreiecke beschränkt.

Für den Gewinn der Ähnlichkeitssätze durch Verallgemeinerung der Kongruenzsätze ist der entscheidende Schritt die Umformulierung von $a' = a$ zu $a' : a = 1$. Statt dessen könnte man auch $a' = 1 \cdot a$ als Ausgangspunkt wählen, doch scheint die Einführung eines zusätzlichen Faktors 1 weniger naheliegend und etwas gekünstelt. Man sollte aber gerade an dieser Stelle bei den Schülern unbedingt den Eindruck vermeiden, als werde hier (wieder) mit einem „Trick" gearbeitet, der einem für die Mathematik nicht besonders begabten Menschen eben nicht einfallen könne. Entsteht dieser Eindruck, der leider auch bei Beweisführungen viel zu oft hervorgerufen wird, so ist damit der gesamte Wert der zu den Ähnlichkeitssätzen hinführenden Überlegungen in Frage gestellt.

Da die Ähnlichkeitssätze lediglich als Implikationen formuliert sind, bei denen die Konklusionen die Ähnlichkeit der Dreiecke aussprechen, bieten sie keine Möglichkeit, von zwei Dreiecken festzustellen, ob sie nicht einander ähnlich sind. Wenn also z. B. bei Aufgabe b 74 c) auf Seite Lb 114 festgestellt wird, daß die kürzeren Schenkel des jeweils gleichen Winkels das Verhältnis $42 : 60 = 7 : 10$ haben, die beiden längeren sich aber wie $45 : 70 = 9 : 14$ verhalten und diese beiden Verhältnisse verschieden sind, so kann die verneinende Antwort nicht mit dem Ähnlichkeitssatz B 14 begründet werden. Vielmehr muß hier die Spezialisierung von Satz B 11 auf Dreiecke, genauer seine Kontraposition, benutzt werden. Diesen Sachverhalt sollte auch der Schüler erkennen.

Im Zusammenhang mit der Formulierung der Ähnlichkeitssätze als Implikationen ist auch die Bezeichnungsweise zu sehen. Im Lehrbuch wird zwar absichtlich immer von Kongruenzsätzen und Ähnlichkeitssätzen gesprochen, doch ist damit dem Lehrer natürlich nicht die Verwendung des Wortes *Kriterium* untersagt. Allerdings erfordert die Benutzung dieses Terminus eine Erläuterung, d. h., den Schülern sollte (anhand von Beispielen) deutlich gemacht werden, welcher Art die Sätze sind, die man vorzugsweise als *Kriterien* bezeichnet, und daß es hier vor allem auf die Verwendung dieser Sätze ankommt. In der Regel sprechen sie eine *hinreichende* Bedingung für eine auf andere Weise definierte Eigenschaft von Objekten aus und dienen dem bequemen Nachweis dieser Eigenschaft.

Bei der Formulierung der Ähnlichkeitssätze ist auch zu beachten, daß die auftretenden Seitenverhältnisse sämtlich aus je einer Seite der beiden zu betrachtenden Dreiecke gebildet werden, daß also zur Bildung der Verhältnisse stets vom einen Dreieck ins andere gegangen wird. Die Umformung der entsprechenden Proportionen dahingehend, daß die Verhältnisse aus Seiten ein und desselben Dreiecks gebildet werden, wird erst in der Unterrichtseinheit 2.3.5. (Lerneinheit B 25) vollzogen. Auch im Unterricht sollte man diese beiden so verwandten Sachverhalte zeitlich trennen, weil die Gefahr der Verwechslung und des Durcheinanderwerfens groß ist. Im übrigen entspricht diese Reihenfolge auch dem abbildungsgeometrischen Aufbau und der Verallgemeinerung aus den Kongruenzsätzen; sie bringt allerdings einige Formulierungsschwierigkeiten mit sich.

Der Zusammenhang zwischen den Kongruenz- und den Ähnlichkeitssätzen wird noch auf eine dritte Art hergestellt, nämlich bei den Beweisen. Auch wenn im Lehrbuch nur ein Beweis ausgeführt worden ist, so sollte man daran doch das Grundprinzip auch für die anderen deutlich machen: Es wird eine zentrische Streckung angewandt, bei der das Bild des einen Dreiecks kongruent zum anderen ist und diese Kongruenz mit dem entsprechenden Kongruenzsatz nachgewiesen werden kann.

Vierter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.3.2.: Entwicklung der Fähigkeit, Beweise zu verstehen und selbständig zu führen

Diesem Schwerpunkt dienen nicht nur die bei der Erarbeitung neuer Sätze zu führenden, im Lehrbuch abgedruckten Beweise, sondern mindestens in gleichem Maße die Übungen und Aufgaben; denn in all diesen Fällen geht es um das Begründen der Wahrheit bzw. Falschheit gewisser, z. T. vorgegebener Aussagen. Dabei ist keineswegs daran gedacht, all diese Begründungen schriftlich formulieren zu lassen. So könnte bei Aufgabe b 72 eine mündliche Begründung für den Fall der Rhomben folgendermaßen lauten:

Der Satz „Zwei Rhomben sind stets einander ähnlich" ist falsch, wie man an einem Gegenbeispiel sieht. (Schüler skizziert an Tafel oder im Heft, Bild 2.24.) Bei jeder Zuordnung der Eckpunkte ergibt sich zwar immer das Seitenverhältnis 2 : 1, doch niemals Winkelgleichheit, denn im Rhombus (Quadrat) ABCD sind sämtliche vier Winkel rechte, der Rhombus EFGH hat aber keinen rechten Winkel.

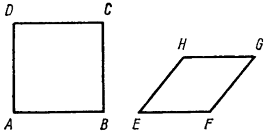


Bild 2.24.

Wahr ist aber der Satz „Wenn zwei Rhomben in einem Winkel übereinstimmen, so sind sie einander ähnlich". Wenn man die Scheitelpunkte der beiden gleich großen Winkel einander zuordnet und die anderen Eckpunkte nacheinander im gleichen Umlaufssinn, so sind alle zugeordneten Winkel gleich groß, weil im Rhombus Nachbarwinkel sich zu 180° ergänzen und gegenüberliegende Winkel gleich groß sind. Da in jedem Rhombus die vier Seiten gleich lang sind, sind auch die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich.

In dieser Weise lassen sich alle Teile von Aufgabe b 72 (Lb 114), die Aufgaben b 73, b 74 und der Auftrag B 30 erledigen. Doch ist eine schriftliche Bearbeitung einiger weniger Fälle besonders dann zu empfehlen, wenn derartige Aufgaben als Hausaufgaben gestellt werden und die Klasse an das mündliche Bearbeiten solcher Aufgaben nicht gewöhnt ist. Als Beispiel sei hier eine schriftliche Bearbeitung für die Aufgabe b 74 f) angegeben (Bild 2.25.).

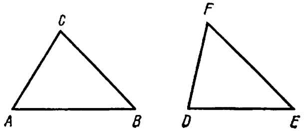


Bild 2.25.

Voraussetzung:

$\overline{AB} = 70$ cm; $\overline{EF} = 70$ cm
$\overline{BC} = 60$ cm; $\overline{DE} = 60$ cm
$\overline{AC} = 50$ cm
$\sphericalangle\, CAB = 57{,}1°$
$\sphericalangle\, ABC = 44{,}4°$ $\qquad \sphericalangle\, DEF = 44{,}4°$
$\sphericalangle\, BCA = 78{,}5°$

Behauptung:

$\triangle\, ABC \sim \triangle\, DEF$

Beweis:

$\sphericalangle\, ABC = \sphericalangle\, DEF$ (nach Voraussetzung)

$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \text{ und } \overline{BC}\\ \overline{DE} \text{ und } \overline{EF}\end{array}\right\}$ sind die diese Winkel einschließenden Seiten.

Es gilt: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = 1$; $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = 1$ (nach Voraussetzung)

Damit sind die Dreiecke einander ähnlich nach Satz B 14.

Bei den sechs Teilaufgaben zu Aufgabe b 74 fällt es den Schülern mitunter schwer, die geeigneten Zuordnungen herzustellen, Verhältnisse und Proportionen aufzustellen und Beweismittel auszuwählen. Als Beispiel sei an Aufgabe b 74 d) die Gedankenfolge skizziert.

(1) Wir betrachten die bekannten Stücke von $\triangle\, DEF$ und stellen fest: Es sind ein Winkel, eine anliegende und die gegenüberliegende Seite bekannt, und zwar ist diese die längere von beiden. Diese Feststellung kann durch eine Skizze erleichtert werden, sie kann aber auch durch einfaches Analysieren der Bezeichnungen erfolgen: F ist Scheitelpunkt des Winkels; in $\overline{DE}$ tritt F nicht auf, also muß diese Seite dem Winkel gegenüberliegen.
Damit kommt zum Nachweis der Ähnlichkeit nur der Ähnlichkeitssatz in Frage, der dem Kongruenzsatz ssw (SsW) entspricht, also Satz B 16.
(2) Gibt es im Dreieck ABC einen Winkel, der ebenso groß ist wie $\sphericalangle\, EFD$? Ja, $\sphericalangle\, BCA$.
(3) Welches Verhältnis bildet seine gegenüberliegende Seite $\overline{BA}$ (sie ist aus der Bezeichnung $\sphericalangle\, BCA$ durch Weglassen des Scheitelpunktes wieder sofort abzulesen) mit $\overline{DE}$? $70 : 84 = 5 : 6$.
(4) Gibt es unter den beiden anderen Seiten ($\overline{AC}$ oder $\overline{BC}$) eine, die mit $\overline{FD}$ das gleiche Verhältnis bildet? $\overline{AC} : \overline{FD} = 50 : 60 = 5 : 6$.

Diese Überlegungen kann ein Schüler auch dann anstellen, wenn er den Satz B 16 nicht im Wortlaut wiedergeben kann. Es liegt auf der Hand, daß derartige Überlegungen gegenüber dem wörtlichen Formulieren oder gar Auswendiglernen der Sätze den Vorrang haben, ja daß sie sogar das Einprägen der entsprechenden Satzinhalte erleichtern.
Mit den angeführten vier Schritten sollte keineswegs ein mit den Schülern einzuübendes

und abfragbares Lösungsschema gegeben werden; es sollte sich vielmehr im Prozeß der Arbeit als ein nützliches Hilfsmittel erweisen.
Eine gewisse Sonderstellung nimmt wegen seiner Vorleistungen für die Satzgruppe des Pythagoras der Auftrag B 29 (Lb 41) ein; er sollte daher auf alle Fälle schriftlich bearbeitet und das Ergebnis – mit einem Hinweis auf später – hervorgehoben werden. Ein Herausziehen der beiden Teildreiecke und ihr Überführen in Ähnlichkeitslage zum Dreieck *ABC* ist nur zu empfehlen, falls einige Verhältnisgleichungen aufgestellt werden sollen. Denn die Übereinstimmung in dem jeweils zweiten Winkel läßt sich beim Ineinanderliegen leichter feststellen.
Allerdings ist das Aufstellen einiger Verhältnisgleichungen nicht nur vorteilhaft, weil man diese später doch benötigt, sondern vor allem aus einem anderen Grunde: Aus Übungsgründen geht es in allen Aufgaben und Übungen dieser Unterrichtseinheit fast ausschließlich darum, von vorgelegten Figuren festzustellen, ob bzw. unter welchen Bedingungen sie ähnlich sind. Doch sollte auch der Schüler schon hier erkennen, daß diese Feststellung der Ähnlichkeit – wie die der Kongruenz in der Kongruenzlehre! – meist nicht Selbstzweck, sondern nur Mittel zum Zweck ist. Aus der Kenntnis einiger Eigenschaften vorgelegter Figuren soll über die Ähnlichkeit auf andere Eigenschaften dieser Figuren geschlossen werden. Im speziellen Fall: Auf Grund der Kenntnis einiger Seiten- und Winkelgrößen zweier Dreiecke soll durch die Ähnlichkeit über die Größe der anderen Seiten und Winkel etwas ausgesagt werden können. Um diesen Sinn – auch das oben zum Wort *Kriterium* Gesagte ist in diesem Zusammenhang zu sehen – schon hier bei den Schülern anzudeuten, sollte z. B. bei Aufgabe b 74 in geeigneten Fällen zusätzlich nach der Größe einiger anderer Stücke gefragt werden.

Zusammenfassung:

1) Für die vier Unterrichtsstunden wird folgende Verteilung vorgeschlagen:
   1. Stunde: Schwerpunkt 1 (Lerneinheit B 20)
   2. Stunde: Schwerpunkte 1 und 4 (Lerneinheit B 20)
   3. Stunde: Schwerpunkte 2 und 3 (Lerneinheit B 21)
   4. Stunde: Schwerpunkte 3 und 4 (Lerneinheit B 22)

   Hier sollte in einer systematisierenden Zusammenfassung die Tabelle aus Unterrichtseinheit 2.3.1. (Bild 2.17. auf Seite Uh 107) so ergänzt werden, wie es Bild 2.26. zeigt.

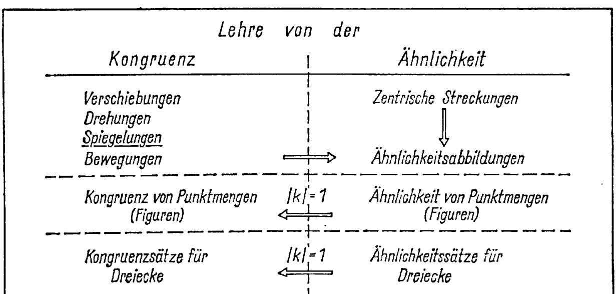


Bild 2.26.

2) Nach dieser Unterrichtseinheit sollte folgendes erreicht sein:
Die Schüler haben die Stellung der Sätze B 11 und B 12 zueinander und zur Ähnlichkeitsdefinition erfaßt. Sie können die Sätze inhaltlich wiedergeben und bei einfachen Vielecken anwenden. Sie haben den Beweis zu Satz B 12 verstanden und können seine Hauptgedanken darlegen.
Die Schüler kennen die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke und vermögen deren Inhalt mit eigenen Worten wiederzugeben. Sie haben erkannt, daß die Bedeutung dieser Sätze vor allem darin besteht, aus relativ wenig Angaben die Ähnlichkeit von Dreiecken zu folgern und daraus Schlüsse auf weitere Eigenschaften zu ziehen.
Die Schüler haben den engen Zusammenhang zwischen Kongruenz- und Ähnlichkeitssätzen auch noch in anderer Hinsicht erfahren, indem die Ähnlichkeitssätze als Verallgemeinerungen aus den Kongruenzsätzen gewonnen wurden. Dabei ist ihnen deutlich geworden, daß Verallgemeinerungen zum Auffinden neuer Erkenntnisse verhelfen können, daß diese aber zunächst nur Vermutungen sind und einer deduktiven Sicherung bedürfen. Ferner haben die Schüler erkannt, daß für eben diese Beweisführung wieder die Kongruenzsätze genutzt werden können.
Die Schüler können von vorgelegten Dreiecken auf Grund der Ähnlichkeitssätze bzw. des Satzes B 11 entscheiden, ob Ähnlichkeit vorliegt oder nicht, und sie sind in der Lage, die Ähnlichkeitssätze bei einfachen Beweisführungen anzuwenden. Die Schüler haben ihre Fähigkeit, selbständig Beweise zu führen, vervollkommnet.

3) Abschließend seien noch einige Aufgaben angeführt, die sich für Kurzkontrollen in dieser Unterrichtseinheit eignen, wobei auch hier wieder gilt, daß durch geeignete Maßnahmen (Arbeitsblätter, vorbereitetes Tafelbild oder Folie und Lochschablone) zu gewährleisten ist, daß die Arbeitszeit voll genutzt wird.

1. Von den beiden Dreiecken ABC und DEF ist bekannt:
$\overline{AB} = 12$ cm; $\overline{AC} = 9$ cm; $\sphericalangle CAB = 65°$
$\overline{DE} = 12$ cm; $\overline{EF} = 16$ cm; $\sphericalangle DEF = 65°$
Gib an, ob beide Dreiecke ähnlich sind oder nicht (mit Begründung!).

2. $\triangle ABC$ ist ein gleichschenkliges Dreieck ($\overline{AC} = \overline{BC}$), das nicht gleichseitig ist, mit den Höhen $\overline{CD}$ und $\overline{AE}$ (Bild 2.27).
Untersuche auf Ähnlichkeit (Begründung!):
$\triangle ADC$ und $\triangle ABE$; $\triangle ADC$ und $\triangle BCD$; $\triangle BCD$ und $\triangle AEC$!

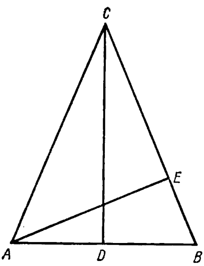


Bild 2.27.

3. Konstruiere ein Rechteck, das zu $ABCD$ ähnlich ist und die Strecke $\overline{EF}$ als Seite hat (Bild 2.28.)!

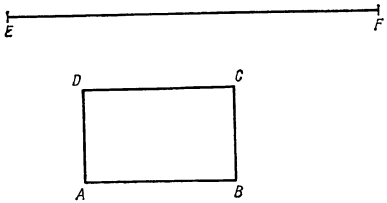


Bild 2.28.

2.3.3. Ähnlichkeit von krummlinig begrenzten Figuren und Körpern (1 Stunde; Lerneinheit B 23)

Es wurde bereits betont, daß ein Vorteil des abbildungsgeometrischen Zugangs zur Ähnlichkeit in der Möglichkeit besteht, auch krummlinig begrenzte Figuren und – bei einer naheliegenden Ausdehnung des Begriffs der Ähnlichkeitsabbildung auf den Raum – Körper einbeziehen zu können. Erst dadurch ist man berechtigt, z. B. von ähnlichen Kreisen oder Parabeln zu sprechen oder die Frage zu stellen, ob der Fernsehturm in Berlin und sein als Souvenir angebotenes Modell einander ähnlich sind. Dabei darf man freilich nicht verkennen, daß die exakte Entscheidung, ob zwei krummlinig begrenzte Figuren einander ähnlich sind oder nicht, ohne Schwierigkeiten nur möglich ist, wenn mit Koordinaten gearbeitet werden kann; nur verhältnismäßig einfache Figuren, bei denen z. B. die krummlinigen Teile lediglich Kreisbögen sind, machen da eine Ausnahme, und für krummflächig begrenzte Körper gilt Entsprechendes. Deshalb und auch aus Zeitgründen können die Erörterungen in dieser Unterrichtseinheit nur vorwiegend beschreibender und ergänzender Art sein. Dennoch kommt ihnen, besonders hinsichtlich der räumlichen Gebilde, erhebliche Bedeutung zu: Die Schüler erkennen, daß sich der mathematische Begriff der Ähnlichkeit auch an Gegenständen ihrer täglichen Umwelt, an Werkzeugen usw. wiederfindet. Sie werden auch veranlaßt, darüber nachzudenken, warum in manchen Fällen Ähnlichkeit angestrebt wird, in anderen bei gewissen Eigenschaften davon abgewichen wird. Diese Betrachtungen sind auch im Zusammenhang mit der Motivierung des gesamten Stoffgebietes, besonders mit dem Inhalt der Lerneinheit B 12 (Unterrichtseinheit 2.2.1.), zu sehen.
Von den krummlinig begrenzten ebenen Figuren kommt im Lehrbuch nur der Kreis zur Sprache, und auch das geschieht ohne Beweis für die Tatsache, daß alle Kreise einander ähnlich sind, weil der Lehrplan eine solche Beweisführung nicht fordert. Die notwendigen Überlegungen für eine solche Beweisführung seien jedoch hier für den Lehrer mitgeteilt.
Zu zeigen ist, daß zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2 stets einander ähnlich sind. Für $r_1 = r_2$ sind die Kreise kongruent, also ähnlich. Für $r_1 \neq r_2$ schneiden sich die beiden äußeren Tangenten der beiden Kreise in einem Punkt Z, durch den auch die Gerade M_1M_2 geht (Bild 2.29.). Da die Berührungsradien für die gleiche Tangente zueinander parallel sind, gilt $\overline{M_1Z} : \overline{M_2Z} = r_1 : r_2$.

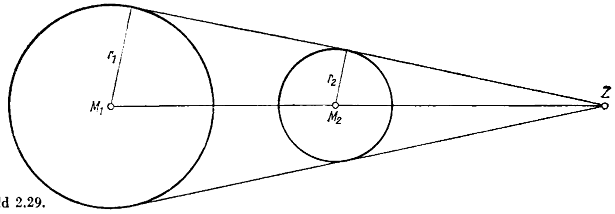


Bild 2.29.

Der Kreis mit dem Radius r_2 ist also das Bild des anderen bei der zentrischen Streckung $\left(Z, \frac{r_1}{r_2}\right)$ [nach Eigenschaft (8) der zentrischen Streckung], und Z ist Ähnlichkeitspunkt für beide Kreise.
Anschließend an diese Beweisführung wäre dann noch zu erörtern, warum „ohne Beschränkung der Allgemeinheit" angenommen werden kann, daß der kleinere Kreis nicht gänzlich im Inneren des anderen liegt, so daß also gemeinsame äußere Tangenten existieren. Außerdem ist die Frage nach einem zweiten Ähnlichkeitspunkt interessant, den es nur im Fall konzentrischer Kreise nicht gibt. Hier sollte man sich zuerst mit dem Fall beschäftigen, in dem die beiden Kreise keinen inneren Punkt gemeinsam haben, so daß es also auch gemeinsame innere Tangenten gibt. Für begabte und interessierte Schüler sind aber der oben angeführte Beweis und die Diskussion der möglichen Fälle z. B. in Arbeitsgemeinschaften oder im Rahmen individueller Förderungen lohnend.
Im Anschluß an Aufgabe b 78 (Lb 114) kann das gleiche Problem für eine beliebig krummlinig begrenzte Figur gestellt werden. Auch wenn es sich bei der punktweisen Konstruktion nur um eine Näherung handeln kann, weil ja die einzelnen Punkte nach Augenmaß miteinander verbunden werden müssen, so ist ein solches Vorgehen zum Erfassen des Wesentlichen nützlich; gegebenenfalls genügt ein Hinweis auf die bereits früher gelöste Aufgabe b 58. Außerdem wird das Verständnis des Pantographen vorbereitet, gegen dessen Behandlung bereits an dieser Stelle selbstverständlich nichts einzuwenden ist.
Bei den Erörterungen zueinander ähnlicher Körper versäume man nicht, neben der Erwähnung der in früheren Stunden betrachteten Modelle u. dgl. auch reale Objekte durch Messungen auf Ähnlichkeit untersuchen zu lassen. Der Lehrer sollte hierfür einige ähnliche (oder „fast ähnliche") Gegenstände mitbringen lassen. Auch Geräte und Behälter aus dem Chemieraum bieten sich hier ebenso an wie die bekannten Schachtelpuppen („Matrjoschkas"). Die Zuordnung der einzelnen Stücke zweier auf Ähnlichkeit zu untersuchender Gegenstände wird in der Regel durch ihren Zweck und Gebrauch bestimmt. Obwohl den Schülern das (arbeitsteilige) Messen und Verarbeiten der Meßergebnisse Freude macht und auch der Festigung des Begriffs der Ähnlichkeit räumlicher Gebilde dient, sollte das nicht der ausschließliche Weg sein, wenn Nicht-Ähnlichkeit festzustellen ist. Oftmals reichen auch einfache Überlegungen oder Betrachtungen aus. So werden die meisten Schüler, wenn ihnen zwei der üblichen Milchflaschen unterschiedlichen Fassungsvermögens vorgelegt werden (Auftrag B 31, Lb 43), diese als ähnlich bezeichnen und das durch Messen belegen wollen. Dabei genügt zur Widerlegung dieser Meinung die einfache Feststellung, daß die Öffnungen gleich, die Höhen jedoch unterschiedlich sind. Auch bei derartigen Gelegenheiten sollte eine Gegenüber-

stellung des mathematischen Begriffs *Ähnlichkeit* mit der naiven „Gleichartigkeit im Aussehen" erfolgen.

Zusammenfassung:

Am Ende dieser Unterrichtseinheit (Stunde) sollte folgendes erreicht sein:
Die Schüler haben den Begriff *Ähnlichkeit von Figuren* auch für krummlinig begrenzte ebene Figuren gefestigt. Sie wissen, daß alle Kreise einander ähnlich sind.
Die Schüler können beschreiben, was man unter ähnlichen Körpern versteht. Sie wissen, daß die Ähnlichkeit räumlicher Gebilde für die Praxis von großer Bedeutung ist.

2.3.4. Umfang und Inhalt ähnlicher Figuren (1 Stunde; Lerneinheit B 24)

Die Betrachtung ähnlicher Bechergläser bildet eine gute Möglichkeit, das Problem von Umfang und Inhalt ähnlicher Figuren bzw. Oberfläche und Volumen ähnlicher Körper zu motivieren. Denn schließlich ist für die Produktion derartiger Gläser das erforderliche Volumen ausschlaggebend; der Materialverbrauch jedoch ist in erster Linie von der Oberfläche abhängig. Hat man für zwei derartige Gläser den Ähnlichkeitsfaktor $k = 2$ festgestellt, so kann die Frage nach dem Verhältnis ihrer Rauminhalte (etwa 125 cm^3 und 1000 cm^3, den Schülern jedoch noch nicht bekannt) zunächst durch Schätzen, dann durch Umschütten näherungsweise beantwortet werden und dadurch zu der mathematischen Behandlung des gesamten Problems hinführen. Dabei muß jedoch wiederum auf eine exakte, allgemeine Beweisführung verzichtet werden. Dieser Verzicht muß auch den Schülern deutlich zum Bewußtsein kommen, doch sollen sie gleichzeitig erkennen, daß mit der Beweisführung für den Kreis und für Dreiecke, die sich ja sofort auf beliebige Vielecke wegen deren Zerlegbarkeit in Dreiecke ausdehnen läßt, all das erfaßt worden ist, was für sie überhaupt einer Berechnung zugänglich ist.
Wesentlich erheblicher sind dagegen die Einschränkungen bei Oberflächeninhalt und Volumen ähnlicher Körper, und hier werden wir uns damit begnügen müssen, den Satz an Würfeln verschiedener Kantenlängen zu erläutern (Auftrag B 33 a).
Der Abschluß des Becherglasproblems durch einen allgemeinen Nachweis für die Zylinderformeln (Volumen und Oberflächeninhalt) zu erbringen, wird gewiß einigen Schülern Ansporn sein. Bei der im Verhältnis 2 : 1 vergrößerten Streichholzschachtel (Auftrag B 33 b) ist die Frage nach der Abnutzung der Reibflächen im Verhältnis zu normalen Streichholzschachteln gewiß nicht unwichtig, und überhaupt sollte sich der Lehrer in dieser Stunde die Gelegenheit nicht entgehen lassen, über die unmittelbaren Erörterungen zu Volumen und Oberfläche hinaus den Schülern einen Einblick in gewisse interessante Tatsachen zu geben. Hier bietet sich eine gute Möglichkeit zur Verbindung mit anderen Unterrichtsfächern und zur Vertiefung der Allgemeinbildung in weitestem Sinne, indem die Schüler zum Nachdenken über sie ständig umgebende Erscheinungen angeregt werden. Der Zusammenhang von Größe und Sprungkraft (Elefant und Floh), Größe und Tragkraft (Steg und Brücke) und damit Bedeutung sowie Grenzen von Ähnlichkeitsbetrachtungen[1]) können hier ebenso zur Sprache kommen wie das wichtige Prinzip der Oberflächenvergrößerung (Pulverisieren von Chemikalien, Mahlen von Kaffee, Kohlen- und Mehlstaubexplosionen, Kraftstoffvergaser, aber auch Lungenbläschen und rote Blutkörperchen). Auch die Fragwürdigkeit von Schaubildern, in

[1]) Anregungen bietet z. B. das Kapitel „Wespen — groß wie Lerchen?" des Buches *Rund um die Mathematik*, Der Kinderbuchverlag, Berlin 1969.

denen aus Gründen der abwechslungsreichen graphischen Gestaltung an Stelle von Rechtecken oder Strecken Darstellungen von Körpern zur Veranschaulichung dienen, kann hier erörtert werden.

Zusammenfassung:

Am Ende dieser Unterrichtseinheit (Stunde) sollte folgendes erreicht sein:
Die Schüler können den Zusammenhang zwischen den Umfängen und Flächeninhalten ähnlicher Figuren bzw. den Oberflächeninhalten und Volumina ähnlicher Körper mit eigenen Worten oder so wie in den Sätzen B 17 und B 18 wiedergeben.
Sie wissen, daß ein allgemeiner Beweis für beliebige Figuren und Körper nicht durchgeführt wurde, haben aber den Beweis für Kreise und Dreiecke verstanden bzw. selbständig geführt und können auch den Sachverhalt für Körper an einem Beispiel (Würfel) erläutern. Sie sind in der Lage, Aufgaben wie b 82 selbständig zu lösen.
Die Schüler haben eine Vorstellung von der Bedeutung des Problems für die Praxis und können den Sachverhalt an selbstgewählten praktischen Beispielen beschreiben.

2.3.5. Konstruktionen mit Hilfe der Ähnlichkeit (3 Stunden; Lerneinheiten B 25 und 26)

In den Konstruktionsaufgaben der vorangegangenen Unterrichtseinheiten (z. B. Aufgaben b 67, b 69, b 78) ging es vor allem darum, zu vorgegebenen Figuren ähnliche zu konstruieren. Sie dienten vorwiegend der Festigung solcher Begriffe wie *Ähnlichkeit*, *Ähnlichkeitsverhältnis* usw., sollten aber auch die nun folgenden Konstruktionen vorbereiten. Denn all diesen Aufgaben ist gemeinsam, daß zunächst eine der verlangten Figur ähnliche konstruiert wird, die es dann maßstäblich zu verändern gilt. Dabei geht es vor allem um zwei Typen von Aufgaben, deren Lösung in einfachen Fällen schließlich von den Schülern beherrscht werden soll: einmal sind vorgegebenen Figuren andere einzubeschreiben, zum zweiten sind Figuren zu konstruieren, für deren Stücke gewisse Maßangaben vorgegeben sind.
Abgesehen von den in der Stoffeinheit 2.4. folgenden „Verwandlungsaufgaben" (und der Körperdarstellung in Klasse 10) ist hier die letzte Gelegenheit in der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule, bei der Behandlung eines Stoffgebiets das exakte Konstruieren im Zusammenhang mit den vorher notwendigen, zur Lösung hinführenden Überlegungen und einer einwandfreien sprachlichen Darstellung dieser Überlegungen zu üben. Aus diesem Grunde und wegen des erfahrungsgemäß erheblichen Zeitbedarfs der Schüler für jede Art von Konstruktionen dürften hier drei Unterrichtsstunden unbedingt notwendig sein, obwohl keine prinzipiellen Verständnisschwierigkeiten zu befürchten sind.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.3.5.: Entwicklung der Fähigkeit im Konstruieren

Eine praktische Motivierung der Einbeschreibungsaufgaben kann durch einen Sachverhalt erfolgen, wie er in Aufgabe b 87 beschrieben ist. Soll sich daraus gleich die erste Aufgabe entwickeln, so sollte der Abstand von 1 m zunächst außer acht gelassen und das Rechteck zu einem Quadrat spezialisiert werden. Gerade bei den Einbeschreibungsaufgaben ist die Gefahr groß, daß die Schüler den Konstruktionsgang, insbesondere seinen Anfang, als „Zauberei" empfinden. Abgesehen von den schädlichen erzieheri-

schen Auswirkungen werden diese Schüler bestenfalls zum beschreibenden und konstruierenden Nachvollziehen der Lösung befähigt, niemals aber zum selbständigen Lösen derartiger Aufgaben.
Daher muß man gerade bei der jeweils ersten Aufgabe langsam vorangehen und jeden Schritt motivieren und begründen. Es soll versucht werden, das an Aufgabe b 85 (einem Halbkreis ist ein Quadrat einzubeschreiben) zu demonstrieren.

(1) Jeder Schüler zeichnet nach Durcharbeiten des Aufgabentextes – gegebenenfalls ergänzt durch eine Tafelskizze des Lehrers – einen Halbkreis ($r = 3$ cm) in sein Heft (noch besser wäre die Vorgabe auf einem Arbeitsblatt). Mit Hilfe eines Zeichendreiecks (für gerade Linien und rechte Winkel) soll sodann nach Augenmaß ein Quadrat gezeichnet werden, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.
Ergebnis: Die Schüler erkennen, daß es auf Anhieb kaum gelingt, alle geforderten Eigenschaften zu vereinen. In der Mehrzahl entsteht ein nicht quadratisches Rechteck, dessen Eckpunkte „richtig" liegen, oder der Schüler erhält ein Quadrat, bei dem nicht alle Eckpunkte die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. In der Regel wird intuitiv die Seite $\overline{AB}$ auf den Durchmesser gelegt, und zwar symmetrisch zum Kreismittelpunkt.
(2) Es wird der Grundgedanke entwickelt: Wenn uns das Vereinen *aller* Bedingungen nicht gleich gelingt, so suchen wir vorerst nach einer leichten Konstruktion einer Hilfsfigur, die möglichst viele dieser Bedingungen erfüllt. Dazu stellen wir uns diese Bedingungen noch einmal zusammen. (Das kann zeitsparend unter Zuhilfenahme eines vorbereiteten Tafelbildes, das jetzt sichtbar gemacht wird, oder mit Hilfe einer Folie für den Schreibprojektor geschehen.)
a) $ABCD$ soll ein Quadrat sein.
b) $\overline{AB}$ soll auf einem Durchmesser liegen.
c) C und D sollen auf einem Kreis liegen.
Daraus ergibt sich (Begründung mit Symmetrieeigenschaft von Halbkreis und Quadrat):
d) A und B sollen von M gleich weit entfernt sein.
Die Diskussion muß nun ergeben, daß man der gesuchten Figur wahrscheinlich näher ist, wenn man zunächst die Bedingung c) außer acht läßt, weil man dann ein Quadrat erhält, also eine zu der gesuchten *ähnliche* Figur.
(3) Das Finden des nächsten und wichtigsten Schrittes wird erleichtert, wenn man sich die Schar aller derartigen Quadrate (unter denen sich dann auch das gesuchte befindet) vor Augen stellt. Diese Vorstellung sollte bei den Schülern unterstützt werden durch eine Zeichnung (Bild 2.30.; vorbereitetes Tafelbild oder Folie); sie kann motiviert werden, indem der Lehrer einige der Schülerzeichnungen „zusammenträgt". Am wirksamsten, aber auch am zeitaufwendigsten ist es, wenn jeder Schüler selbst zwei oder drei derartige Quadrate zeichnet.
Aus einer derartigen Zeichnung wird deutlich: Alle diese Quadrate befinden sich in Ähnlichkeitslage mit dem Halbkreismittelpunkt M als Ähnlichkeitspunkt. Oder anders ausgedrückt: Das gesuchte Quadrat ist Bild des Hilfsquadrates bei einer zentrischen Streckung von M aus. Seine Eckpunkte auf dem Halbkreis liegen also auf den beiden Strahlen von M durch C' und D'. (Will man vermeiden, daß hier A' als Original, A als Bild und entsprechend auch bei den anderen Eckpunkten erscheint, so muß man das Hilfsquadrat anders bezeichnen. Jedoch dürfte diese Bezeichnungsfrage keine Schwierigkeiten bereiten, wenn vorher bei der Frage der eineindeutigen Abbildung der Ebene auf sich wirkliches Verständnis erzielt worden ist.)

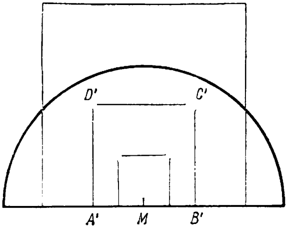


Bild 2.30.

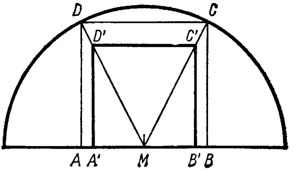


Bild 2.31.

(4) Die Konstruktion wird nun am zweckmäßigsten folgendermaßen verlaufen (Bild 2.31): C und D entstehen als Schnittpunkte von MC' und MD' mit dem Halbkreis und werden verbunden; A und B entstehen als Schnittpunkte der Parallelen zu $A'D'$ und $B'C'$ durch D und C mit dem Durchmesser.

(5) Nach diesem Konstruktionsgang bleibt freilich noch zu zeigen, daß das so entstandene Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist. Da bei einer zentrischen Streckung das Bild eines Quadrates ein Quadrat ist, bedeutet das: Es ist nachzuweisen, daß A, B und D Bilder von A', B' und D' bei der zentrischen Streckung $\left(M; \frac{\overline{MC}}{\overline{MC'}}\right)$ sind.

Das ist aber leicht einzusehen:

a) Aus Symmetriegründen ist $\overline{MD'} = \overline{MC'}$ und damit $\frac{\overline{MD}}{\overline{MD'}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MC'}}$, also ist D' Bild von D bei der genannten Streckung.

b) Nach dem ersten Teil des Strahlensatzes gilt $\frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MC'}}$ und $\frac{\overline{MA}}{\overline{MA'}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{MD'}}$, also sind auch A und B Bilder von A' und B' bei der genannten Streckung.

Wird diese (oder eine ähnliche) Aufgabe in solcher Weise behandelt, so müssen dafür mindestens 25 Minuten eingeplant werden. Dennoch kann man dadurch auf dem Wege zu den Lehrplanzielen einen größeren Schritt tun, als würde man in der gleichen Zeit zwei Aufgaben oberflächlich und ohne aktive Mitarbeit der Schüler behandeln. Die Verwendung eines Arbeitsblattes, das in diesem Falle zwei Halbkreise [vgl. (1) und (4) der obigen Schrittfolge] tragen müßte, ist bei derartigen Aufgaben nicht nur aus Gründen der Zeitersparnis zu empfehlen. Vielmehr ist zu beachten, daß jede Handlung, durch die erst eine für die eigentliche Konstruktion notwendige Ausgangssituation geschaffen werden soll, die Aufgabe und ihre Lösung nicht nur äußerlich verlängert, sondern auch vom Kern der Sache ablenkt, das Erkennen und Verarbeiten der Lösungsschritte erschwert und zudem noch die Aufgabenstellung selbst unmotiviert erscheinen läßt. Das Bild 2.32. zeigt ein solches Arbeitsblatt für andere Konstruktionsaufgaben des gleichen Typs. Bei dem anderen Typ von Konstruktionsaufgaben (etwa Beispiel B 14) entfallen diese Gesichtspunkte für ein Arbeitsblatt, doch gilt das oben für die einzelnen Lösungsschritte Gesagte ganz entsprechend.

Bei den Beispielen im Lehrbuch ist bewußt auf die gesonderte Formulierung einer *Analysis* und einer *Konstruktionsbeschreibung* nach einem gewissen Schema verzichtet

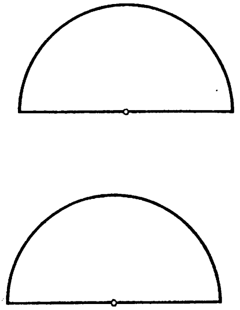
Arbeitsblatt

1. a) Beiden Halbkreisen ist je ein Rechteck einzubeschreiben, dessen Seiten das Verhältnis 4:3 haben.
Beide Rechtecke sollen unterschiedlich groß sein.

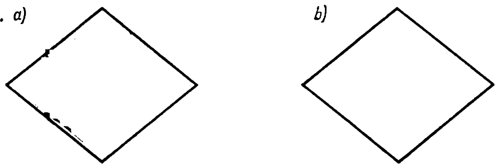
b) Stelle Differenz und Verhältnis der beiden Flächeninhalte fest, indem Du in beiden Fällen je eine Länge mißt!

$A_1 - A_2 =$

$A_1 : A_2 =$



2. a) b)



a) Dem Rhombus ist ein Quadrat einzubeschreiben

b) Dem Rhombus ist ein Rechteck einzubeschreiben. Es soll ähnlich sein zu demjenigen umbeschriebenen Rechteck, dessen Symmetrieachsen mit denen des Rhombus zusammenfallen.

Bild 2.32.

worden. Ein solches Schema ist zwar für die üblichen Dreieckskonstruktionen in Klasse 6 und auch für die Konstruktionen in der Kreislehre (Klasse 7) ein recht brauchbares Gedankengerüst. In Klasse 8 bei der Ähnlichkeit sollte es aber einer etwas freieren Gestaltung weichen, damit die hier zu bewältigenden Aufgaben nicht gewaltsam in ein Schema gepreßt werden, das ihnen nicht angemessen ist. Das bedeutet natürlich in keiner Weise einen Verzicht auf systematische Überlegungen zum Finden (oder auch Begründen) der Konstruktion; ebensowenig wird damit ausgeschlossen, daß der Lehrer auch hin und wieder zum Zwecke der Wiederholung und vor allem zur Schulung des sprachlichen Ausdrucks die Konstruktionen in der üblichen Weise beschreiben läßt.
Schließlich seien auch noch als Anregung für eine Kurzkontrolle in dieser Unterrichtseinheit drei Aufgaben angegeben, die in unmittelbarem Zusammenhang miteinander stehen und sich aus der ersten, einer Konstruktionsaufgabe, entwickeln. Am zweckmäßigsten ist auch hier wieder ein Arbeitsblatt, doch genügt es auch, den Schülern das in der ersten Aufgabe genannte Dreieck mittels der Lochschablone, z. B. durch (14), (15) und (17) als Eckpunkte, vorzugeben.

1. Dem vorgegebenen Dreieck ist ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $1:2$ derart einzubeschreiben, daß eine der längeren Rechtecksseiten auf der längsten Dreiecksseite liegt.
2. Zu dem in Aufgabe 1. konstruierten Rechteck ist ein ähnliches mit dreifachem Umfang zu konstruieren.
3. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der beiden Rechtecke?

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.3.5.: Umformulierung der Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Da man beispielsweise für die Dreieckskonstruktionen bei den Überlegungen immer innerhalb eines Dreiecks verweilt, ist es zweckmäßig, die in den Sätzen B 11 und B 12 bzw. in den Ähnlichkeitssätzen auftretenden Verhältnisgleichungen etwas umzustellen. An Stelle von

$$(*) \qquad a' : a = b' : b = c' : c \; (= k)$$

schreibt man dann

$$(**) \qquad a' : b' = a : b; \; a' : c' = a : c; \; b' : c' = b : c,$$

wobei sich jeweils eine Proportion auch aus den beiden anderen folgern läßt. Damit im Zusammenhang ergibt sich auch ein anderer Wortlaut für die Ähnlichkeitssätze. Um den Unterschied der beiden Formulierungen durch eine Gegenüberstellung deutlich herauszuheben, empfiehlt sich eine anschauliche Darstellung an der Tafel (Bild 2.33.); auch die Verwendung einer entsprechenden Schautafel ist möglich. Die Darstellung gewinnt durch sinnvollen Einsatz verschiedener Farben erheblich an Instruktivität: Die drei Seiten der Dreiecke sind unterschiedlich gefärbt, entsprechende Seiten in allen vier Dreiecken tragen die gleiche Farbe, die auch bei den betreffenden Größen in den Proportionen wieder auftritt.
Die bequeme Schreibweise als fortlaufende Proportion in der Form $a' : b' : c' = a : b : c$ wird im Lehrbuch absichtlich vermieden, weil es sich hier nicht um eine Gleichung im üblichen Sinne handelt, sondern um eine ausdrücklich vereinbarte Kurzschreibweise für die Proportionen (**) bzw. für (*). Das hat aber seine Tücken: Zum Beispiel ist gemäß den allgemeinen Vereinbarungen über die Reihenfolge der Rechenoperationen

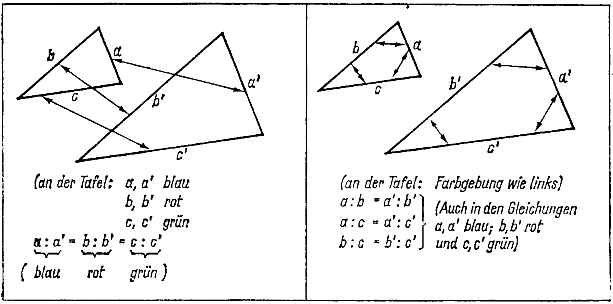


Bild 2.33.

$60 : 10 : 3 = 6 : 3 = 2$ und $24 : 3 : 4 = 8 : 4 = 2$[1]), auch wenn im Schulbuchwerk und im Unterricht der Deutlichkeit halber Klammern gesetzt wurden, also z. B. $(60 : 10) : 3$ geschrieben wird, wo an sich $60 : 10 : 3$ genügen würde. Damit ist aber die Gleichung $60 : 10 : 3 = 24 : 3 : 4$ eine wahre Gleichheitsaussage, doch handelt es sich nicht um eine wahre fortlaufende Proportion, denn es gilt ja weder $60 : 10 = 24 : 3$ noch $10 : 3 = 3 : 4$ oder $60 : 3 = 24 : 4$. Umgekehrt ist die wahre fortlaufende Proportion $8 : 4 : 2 = 4 : 2 : 1$ keine wahre Gleichung, denn die linke Seite ergibt 1, die rechte aber 2.

Zusammenfassung:

1) Für die vorgesehenen drei Unterrichtsstunden wird folgende Verteilung vorgeschlagen:

   1. Stunde – Schwerpunkt 1 (Lerneinheit B 25)
   2. Stunde – Schwerpunkte 1 und 2 (Lerneinheit B 26)
   3. Stunde – Schwerpunkt 1 (Lerneinheit B 26)

2) Am Ende der Unterrichtseinheit sollte folgendes erreicht sein:
   Die Schüler haben ihr Wissen über die Ähnlichkeit von Figuren gefestigt. Sie können dieses Wissen beim Lösen von Konstruktionsaufgaben, wie sie die Beispiele B 13 und B 14 zum Inhalt haben, selbständig anwenden.
   Die Fähigkeit der Schüler, die für das Konstruieren von Figuren mit vorgegebenen Eigenschaften notwendigen Schritte selbständig zu gehen, ist weiterentwickelt worden.
   Die Schüler kennen die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke in beiden Formulierungen und durchschauen Unterschied und Zusammenhang.

[1]) Vgl. Simon, H.: *Die Klammern in algebraischen Ausdrücken.* In „Mathematik in der Schule" 1 (1963), Heft 2, Seite 137.

2.3.6. Anwendungen der Ähnlichkeit (3 Stunden; Lerneinheit B 27)

In dieser Unterrichtseinheit kann außer dem Stoff der Lerneinheit B 27 und den dazugehörigen Aufgaben je nach Bedarf die eine oder andere Aufgabe zur Lerneinheit B 9 nachgeholt werden, die in der Unterrichtseinheit 2.1.4. bei den Anwendungen des Strahlensatzes aus Zeitgründen nicht berücksichtigt werden konnte.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.3.6.: Lösen von Anwendungsaufgaben zur Ähnlichkeit

Selbstverständlich ist auch bei den Anwendungen zur Ähnlichkeit all dem Aufmerksamkeit zu schenken, was überhaupt bei der Behandlung von Anwendungsaufgaben zu beachten ist. So sollte es sich z. B. um echte, der Praxis entsprechende Aufgabenstellungen handeln, und der Sachverhalt darf nicht derart kompliziert sein, daß der Umfang sachlicher Erläuterungen gegenüber dem mathematischen Wert der Aufgabe zu groß wird. Dieser Sachverhalt muß von allen Schülern verstanden worden sein, bevor an die eigentliche Lösung gegangen wird, und vor Beginn der rechnerischen Bearbeitung ist der Lösungsweg deutlich herauszuarbeiten. Am Ende muß ein klarer Rückbezug auf die praktische Situation erfolgen, der nicht nur in der Überlegung, ob das erhaltene Ergebnis praktisch sinnvoll ist, und der Formulierung des Antwortsatzes bestehen sollte. Vielmehr sind hier auch Genauigkeitsbetrachtungen und weiterführende Überlegungen am Platz.
Es empfiehlt sich, die Behandlung der Anwendungen mit einer ganz einfachen Aufgabe wie etwa b 96 zu beginnen. Im Anschluß an die Lösung dieser Aufgabe sollte man darauf hinweisen, daß bereits der griechische Mathematiker THALES von Milet, der um 600 v. u. Z. – also vor EUKLID – lebte, auf diese Weise die Höhe ägyptischer Pyramiden ermittelt haben soll. Dann können sich Erörterungen darüber anschließen, daß eine solche Höhenermittlung mittels des Schattens nur möglich ist, weil die Sonnenstrahlen parallel einfallen, und daß bei nicht parallelen Lichtstrahlen – etwa von einer Lampe aus – keine ähnlichen Dreiecke entstehen. Ferner ist die Frage interessant, wie derartige Höhenermittlungen möglich sind, wenn keine Sonne scheint. Eine Lösung

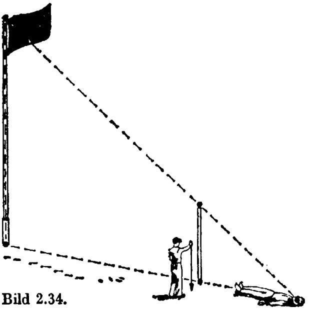


Bild 2.34.

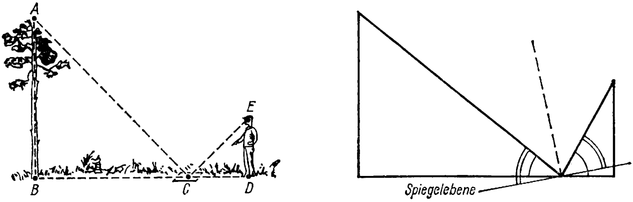


Bild 2.35.

zeigt das Bild 2.34.[1]), eine andere Möglichkeit mit Benutzung zweier Vergleichsstäbe ist bereits im Vorschlag für eine Klassenarbeit in Unterrichtseinheit 2.2.3. (↗ Uh 105) angegeben worden und ist besonders vorteilhaft, wenn man den Fußpunkt des Objektes, dessen Höhe zu ermitteln ist, nicht erreichen kann. Der Verzicht auf Meßstäbe führt zur Erörterung der „Spiegelmethode“ (Bild 2.35.), deren Anwendung nur voraussetzt, daß man die eigene Augenhöhe kennt. Hier ist mit den Schülern herauszuarbeiten, daß zur Erzeugung ähnlicher Dreiecke – entsprechend dem parallelen Verlauf der Lichtstrahlen bei der Ausgangsaufgabe – der Spiegel vollkommen horizontal liegen muß.
Bei den Aufgaben b 97 und b 98 beachte man, daß es bei ersterer um das Verhältnis von Hypotenuse und Gegenkathete des Anstiegswinkels im Steigungsdreieck (also um den Sinus bzw. seinen Kehrwert) geht, beim Straßengefälle hingegen um das Verhältnis der beiden Katheten (also den Tangens des Anstiegswinkels). Hier sollte darauf hingewiesen werden, daß auch bei Bahnstrecken die Steigungsangaben in dieser Weise erfolgen und daß insbesondere die – bei Straßen und Bahnstrecken freilich nicht anzutreffende – Angabe *100* % nicht etwa bedeuten würde, daß es sich um eine senkrecht ansteigende oder abfallende Wand handelt, daß vielmehr ein Winkel von 45° vorliegt, bei einer senkrecht ansteigenden Wand überhaupt keine Prozentangabe mehr möglich ist und bei einer Annäherung an einen Steigungswinkel von 90° der Prozentsatz unbegrenzt wächst. Aufgaben dieser Art sind zur Schulung des funktionalen Denkens ausgezeichnet geeignet und können direkt als gezielte Vorbereitung der trigonometrischen Funktionen angesehen werden, insbesondere wenn man ihre Besprechung etwa dahingehend erweitert, daß zu verschiedenen Steigungswinkeln (etwa 5°, 10°, 15°, 20°) auf zeichnerischem Wege die zugehörigen Prozentangaben zu ermitteln sind. Es sei noch darauf hingewiesen, daß bei der Aufgabe b 97 die Höhe des Fichtelberges die Rolle einer für die Lösung der Aufgabe nicht benötigten Zahlenangabe spielt – etwas, was leider bei Textaufgaben viel zu selten anzutreffen ist. Der manchmal für das Lösen von Anwendungsaufgaben gegebene Hinweis, man möge am Ende des Lösungsweges überprüfen, ob alle Daten der Aufgabe benutzt worden sind, ist ja äußerst fragwürdig und nicht zur Vorbereitung auf das spätere Bewältigen praktischer Problemstellungen geeignet, wenn man bei Verneinung vor allem zu Zweifeln an der Richtigkeit des Lösungsweges gelangen soll.
Der Lehrplan weist ausdrücklich auf die Erdumfangsbestimmung durch ERATOSTHENES (Aufgabe b 100) und auf die geneigte Ebene (Aufgabe b 101) hin. Bei der Behandlung der Erdumfangsbestimmung sollte man dafür Sorge tragen, daß die Schüler nicht nur

[1]) Die Bilder 2.34 und 2.35 a und b wurden nach Anregungen in PERELMAN: *Unterhaltsame Geometrie* gestaltet.

Hochachtung vor der großen geistigen Leistung, sondern auch vor der in Anbetracht der unvollkommenen Hilfsmittel verblüffenden Genauigkeit empfinden. Deshalb ist unbedingt dem absoluten Fehler der Messung der relative gegenüberzustellen, und es ist dabei überhaupt noch einmal wiederholend auf die Bedeutung allein des relativen Fehlers für die Beurteilung der Genauigkeit einer Angabe einzugehen. Ferner sollte man darauf eingehen, daß eine solche Erdumfangsbestimmung mittels des Vergleichs der Sonnenhöhen an zwei verschiedenen Orten zum gleichen Zeitpunkt immer möglich ist, sofern die beiden Orte auf dem gleichen Meridian und – im Interesse der Genauigkeit – nicht zu dicht beieinander liegen. Es ist also nicht erforderlich, daß die Sonne in einem dieser Orte senkrecht steht, sondern vereinfacht nur etwas, und eine solche Bestimmung kann beispielsweise auch von zwei Orten der DDR aus durchgeführt werden. Bei Aufgabe b 101 (Lb 117) verschweige man den Schülern nicht, daß an sich für das rechtwinklige Dreieck, das beim Schnitt der geneigten Ebene entsteht, die Angabe zweier Seiten ausreicht, weil sich die dritte – nach dem Kongruenzsatz sws oder ssw – daraus ergibt. Die Schüler sollen wissen, daß die Angabe aller drei Seiten hier nur erfolgt ist, weil ihnen die Möglichkeit zur rechnerischen Ermittlung der dritten Seite noch fehlt. Diese Erörterungen können als Vorbereitung auf die Behandlung des Satzes von PYTHAGORAS angesehen werden, und sie können ergänzt werden durch die Aufforderung, durch eine maßstäbliche Zeichnung die Richtigkeit der Angaben in der Aufgabe zu überprüfen. Selbstverständlich besteht auch die Möglichkeit, die Aufgabe zu modifizieren, indem man wirklich nur zwei Seitenlängen (mit anderen als den in der Aufgabe genannten Maßzahlen) vorgibt und die Berechnung der Hangabtriebs- und der Normalkraft nach der zeichnerischen Ermittlung der dritten Seite fordert.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.3.6.: Verständnis der Wirkungsweise technischer Geräte und Vermessungsübungen

Nachdem bereits bei den Anwendungen des Strahlensatzes (Unterrichtseinheit 2.1.4.) Geräte wie Meßkeil, Transversalmaßstab und Proportionalzirkel besprochen worden sind, ist hier vor allem der Pantograph zu behandeln (Beispiel B 15). Dabei empfiehlt sich die Verwendung eines Modells, das man sich in einfachster Form aus den Teilen eines Metallbaukastens bzw. des Geometriebaukastens herstellen kann, auch wenn es verhältnismäßig klein ist und ein eigentliches Arbeiten mit ihm kaum möglich ist. Selbstverständlich kann auch ein Storchschnabelmodell Verwendung finden, dessen Wirkungsweise aus Bild 2.36. zu ersehen ist.

Bei der Erörterung des Pantographen (Storchschnabels) sollten die Schüler auch erkennen, daß eine zentrische Streckung vom Pol P aus erfolgt.

Der Lehrplan fordert auch ausdrücklich die Durchführung von Vermessungsübungen im Freien. Nun muß man sich freilich darüber klar sein, daß die letzten Vermessungsübungen der Schüler etwa drei Jahre zurückliegen (Einfluchten, Abstecken und Ausmessen von Strecken in Klasse 5) und daß hier in Klasse 8, abgesehen von diesen elementaren Übungen, die einzige lehrplanmäßig verankerte Gelegenheit für derartige Übungen in der gesamten Oberschulzeit ist. Das bedeutet einmal, daß gewisse grundsätzliche Erörterungen über das Vorgehen bei solchen Übungen hier erfolgen müssen, und zum anderen, daß man keine zu hohen Anforderungen stellen darf, zumal die Zeit, die für derartige Übungen angesetzt werden kann, kaum mehr als eine Unterrichtsstunde umfassen wird.

Bei der Erwähnung von Daumensprung und Daumenbreite in der Unterrichtseinheit *2.1.4.* (↗ Uh 90) wurde allerdings schon einmal darauf hingewiesen, daß man auch Wanderungen nutzen sollte, um – freilich in etwas aufgelockerter Form – einfache

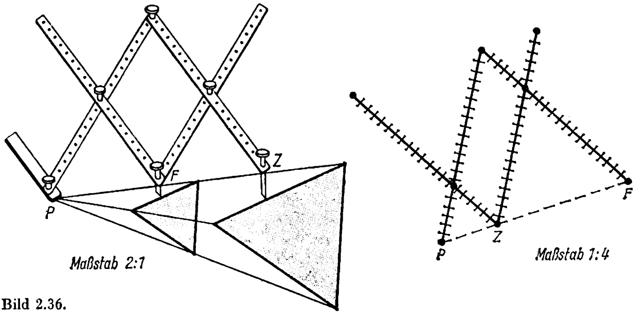


Bild 2.36.

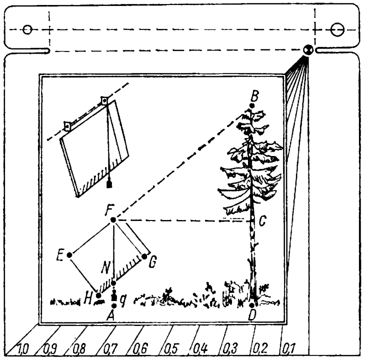


Bild 2.37.

Vermessungsübungen anzustellen. Dabei kann es sich um Übungen handeln, wie sie oben im Zusammenhang mit Aufgabe b 96 theoretisch besprochen wurden. Besonders zu empfehlen ist auch die Verwendung einfacher, von den Schülern selbst angefertigter Geräte bei dieser Gelegenheit. Außer dem Modell eines Jakobsstabes kommen dafür beispielsweise ein Meßquadrat (Bild 2.37.) oder ein Entfernungsmesser (Bild 2.38.) in Frage.[1]) Bei der Verwendung des Jakobsstabes ist übrigens zu beachten, daß hier im allgemeinen das Lösen von Gleichungen mit zwei Variablen erforderlich ist, das man nur in einfachen Fällen (scheinbar) umgehen kann.

Für die eine den praktischen Vermessungsübungen gewidmete Unterrichtsstunde kommt vor allem das *Meßtischverfahren* in Betracht, das man mit einfachsten Mitteln

[1]) Die Bilder 2.37. und 2.38. sind dem Buch *Unterhaltsame Geometrie* von J. I. Perelman (Volk und Wissen, Berlin 1963) entnommen, auf das hier noch einmal ausdrücklich aufmerksam gemacht werden soll.

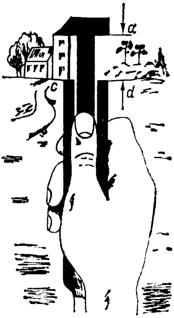


Bild 2.38. a)

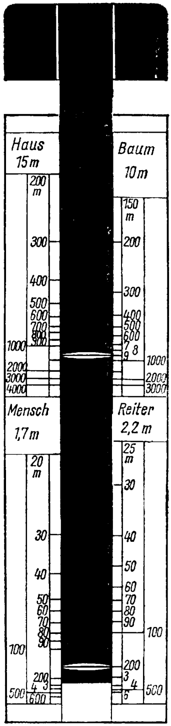


Bild 2.38. b)

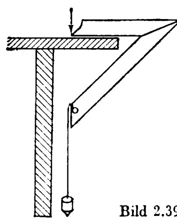


Bild 2.39.

auf dem Schulhof und bei schlechter Witterung oder anderen hinderlichen Umständen sogar in einem größeren Raum der Schule (Turnhalle) modellmäßig nachvollziehen kann. Als Meßtische eignen sich einfache Schultische, die mit Zeichenkarton überspannt sind und mittels einer Wasserwaage genau waagerecht und fest aufgestellt werden. Um den Punkt der Tischplatte, von dem aus man die Geländepunkte anpeilt, genau nach dem Endpunkt der Standlinie loten zu können, empfiehlt sich die Benutzung einer *Lotgabel* (Bild 2.39.), die sich aus einem Tafeldreieck herstellen läßt. Das Anpeilen selbst geschieht über ein *Diopterlineal* oder im einfachsten Fall über Stecknadeln, wobei dann freilich die Tischplatte durch eine Zwischenlage aus starker Pappe zu schützen ist. Als Organisationsform eignet sich die Gruppenarbeit, und für jede Gruppe ist eine Standlinie fest zu vermessen, so daß man insgesamt mit drei bis vier Standlinien für die ganze Klasse

auskommt. Dabei versteht es sich wohl von selbst, daß die Gruppen sorgfältig zusammenzustellen sind und daß die besonderen erzieherischen Möglichkeiten, die gerade die Gruppenarbeit bietet (Erziehung zur kollektiven Arbeit, Hilfsbereitschaft, Verantwortungsbewußtsein), zu nutzen sind.
Eine praktische Vermessungsarbeit kann natürlich nur erfolgreich sein, wenn die Schüler in der Stunde vorher entsprechend sorgfältig theoretisch vorbereitet worden sind und das Prinzip des Verfahrens verstanden haben. M. Ebner[1]) empfiehlt sogar Vorübungen im Klassenzimmer. Bei der Auswertung der Übungen, die wiederum im Klassenraum erfolgen, sollte der Lehrer den Schülern zumindest in einer Abbildung einen Meßtisch mit *Kippregel* zeigen, wie er bei topographischen Geländeaufnahmen verwandt wird. Bei dieser Gelegenheit sind auch historische Bemerkungen über die topographische Landesaufnahme am Platz, und die Schüler sollten nicht nur erfahren, daß der Meßtisch bereits im Jahre 1590 durch Johann Prätorius aus Nürnberg erfunden wurde, sondern auch, daß heutzutage topographische Karten fast nur noch nach Luftaufnahmen entstehen.

Zusammenfassung:

1) Jedem der beiden Schwerpunkte ist etwa die Hälfte der insgesamt zur Verfügung stehenden Zeit von drei Unterrichtsstunden zu widmen. Dabei sollten die praktischen Vermessungsübungen in der zweiten Stunde erfolgen, nachdem sie am Ende der ersten Stunde theoretisch vorbereitet worden sind.
2) Am Ende der Unterrichtseinheit sollte folgendes erreicht sein:
   Die Schüler sind in der Lage, einfache Anwendungsaufgaben zur Ähnlichkeit, wie sie das Lehrbuch enthält, selbständig zu lösen. Sie haben erkannt, daß die Ähnlichkeit – ebenso wie andere Gebiete der Mathematik – für die Lösung praktischer Probleme von Bedeutung ist.
   Die Schüler wissen, daß der Pantograph ein Gerät zur genauen maßstäblichen Vergrößerung oder Verkleinerung von Zeichnungen ist. Sie haben seine Wirkungsweise verstanden und können anhand einer vorgegebenen zeichnerischen Darstellung diese erläutern.
   Die Schüler können das Prinzip des Meßtischverfahrens erklären. Sie haben dieses Verfahren in vereinfachter Form nachvollzogen und wissen, daß es bei derartigen Aufgaben in besonderem Maße auf genaues und verantwortungsbewußtes Arbeiten jedes einzelnen ankommt. Es ist ihnen deutlich geworden, daß auch in der Ähnlichkeit die Weiterentwicklung von Geräten und Verfahren in tätiger Auseinandersetzung des Menschen mit praktischen Erfordernissen erfolgte.

2.4. Die Satzgruppe des Pythagoras (15 Stunden)

In früheren Lehrplänen war diese Stoffeinheit, deren Gegenstand das rechtwinklige Dreieck ist, als eigenes Stoffgebiet ausgewiesen. Ihr Einbeziehen in das Stoffgebiet *Ähnlichkeit* ist vor allem dem Umstand zuzuschreiben, daß sich die drei Sätze (Höhensatz, Kathetensatz und Satz des Pythagoras) mit Hilfe des Hauptähnlichkeitssatzes

[1]) M. Ebner: *Geometrische Schülerarbeiten im Gelände*, Teil 2, Seite 30. Volk und Wissen, Berlin 1960. Dem Teil 1 dieses Werkes ist auch Bild 2.39 entnommen (Abb. 5 auf S. 14).

für Dreiecke sehr schnell und leicht und auf völlig gleichartigen Wegen beweisen lassen. Damit entfallen allerdings – jedenfalls in Lehrplan und Lehrbuch – einige historisch interessante Beweise.
Das Zusammenfassen der beiden einzigen planimetrischen Stoffgebiete von Klasse 8 wurde dadurch erleichtert, daß das Einführen der Begriffe *Quadratwurzel* und *Irrationalzahl* und des Radizierens mit Hilfe von Stab und Tafel nach dem jetzt gültigen Lehrplan bereits in Klasse 7 erfolgt. Dadurch kann in Klasse 8 von vornherein auf die genannten Begriffe und Verfahren zurückgegriffen werden. Ein Nebeneffekt dieser Eingliederung ist darin zu sehen, daß dem Satz des PYTHAGORAS – zumindest äußerlich – seine dominierende Sonderstellung als „wichtigster Satz der Schulgeometrie" genommen worden ist, eine Sonderstellung, die allenfalls historisch, aber keinesfalls sachlich zu rechtfertigen war.
Dem Prinzip der logischen Durchdringung des Mathematikunterrichts folgend legt der Lehrplan auch in dieser Stoffeinheit großen Wert auf die Umkehrung von Sätzen und fordert für alle drei Umkehrungen den Beweis. Daß im Lehrbuch zunächst die drei Sätze und erst danach ihre Umkehrungen im Zusammenhang behandelt werden, hat vor allem zwei Gründe: Für die Sätze einerseits, für die Umkehrungen andererseits sind die jeweiligen Beweisgedanken fast gleich. Daher bietet eine solche Gruppierung eher die Möglichkeit zum selbständigen Führen einzelner Beweise durch die Schüler. Zum anderen ermöglicht sie besser, solchen Lehrplanforderungen wie *Einführen der Sprechweise „dann und nur dann, wenn"* *beziehungsweise „genau dann, wenn"* und *Einführen in die indirekte Beweismethode* nachzukommen. Man sollte deshalb der Reihenfolge des Lehrbuchs auch im Unterricht solcher Klassen folgen, deren Schüler die Frage nach der Gültigkeit der Umkehrungen bei jedem Satz, den sie kennenlernen, schon aus einer guten Gewohnheit stellen.

2.4.1. Die Satzgruppe des Pythagoras (7 Stunden; Lerneinheiten B 28 bis 31)

Für diese Unterrichtseinheit sind als Schwerpunkte anzusehen:

1. Begriffe und Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck
2. Verhältnisgleichungen am rechtwinkligen Dreieck
3. Höhensatz, Kathetensatz und Satz des PYTHAGORAS
4. Konstruktion
5. Rechnerisches Ermitteln von Stücken des rechtwinkligen Dreiecks

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.4.1.: Begriffe und Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck

Mit diesem Schwerpunkt wird die gesamte Stoffeinheit eingeleitet. Daher ist den Schülern zunächst einmal die gesonderte Beschäftigung mit dem rechtwinkligen Dreieck zu motivieren. Das kann auf folgende Weise geschehen:

a) An geeigneten realen Objekten aus der Umwelt der Schüler oder an Abbildungen (am besten einer Reihe von Diapositiven) von Bauwerken oder technischen Konstruktionen wird auf das häufige Auftreten von rechtwinkligen Dreiecken aufmerksam gemacht.
b) Die Schüler kennen bereits das Dreieck als „Elementarbaustein" der Vielecke; dabei kann insbesondere an die Flächenberechnung von Vielecken (Klasse 6)

erinnert werden. Sie werden jetzt darauf aufmerksam gemacht, daß jedes Dreieck durch (zumindest) eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann. Erkenntnisse über das rechtwinklige Dreieck dürften demzufolge auch für die anderen Dreiecke von Belang sein – eine Vermutung, die sich freilich voll erst bei der Trigonometrie bestätigt.

Eine solche Motivierung rechtfertigt dann auch, daß den drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks besondere Namen gegeben werden, deren Benutzung an entsprechenden Abbildungen, auch solchen von realen Gegenständen, geübt werden sollte. Dabei ist auch auf Vielseitigkeit in den Lagen der Dreiecke Wert zu legen, und so ergeben sich ausgezeichnete Vorübungen für die späteren Anwendungen (Unterrichtseinheit 2.4.3.). Sowohl bei den Namen *Kathete* und *Hypotenuse* als auch bei der Zugehörigkeit von Kathete und Hypotenusenabschnitt ist in erster Linie auf die Fähigkeit der Schüler hinzuarbeiten, aus vorgegebenen Figuren die richtigen Bezeichnungen und Zusammenhänge ablesen zu können. Auf wörtliche Erklärungen für diese Begriffe kommt es erst in zweiter Linie an, doch sollten sich die Schüler bei dieser Gelegenheit auch in der selbständigen Formulierung einfacher Definitionen üben. Aus diesem Grunde ist im Lehrbuch auf die Angabe der Definitionen im Wortlaut verzichtet worden; sie werden vielmehr von den Schülern im Auftrag B 38 b) auf der Grundlage des Bildes B 55 verlangt. Auf die Verwendung des Wortes *Projektion* zur Erklärung von *zugehöriger Hypotenusenabschnitt* verzichte der Lehrer im Unterricht ebenso wie es das Lehrbuch tut. Um aber die Schüler mit dem rechtwinkligen Dreieck vertraut zu machen, sollten folgende Probleme als Wiederholung zur Sprache kommen:

Die beiden Katheten sind zusammen länger als die Hypotenuse.
Es gibt rechtwinklige Dreiecke mit gleich langen Katheten.
Die Winkel an der Hypotenuse betragen zusammen 90°.
Dem größeren spitzen Winkel liegt die größere Kathete gegenüber.
Die Katheten sind gleichzeitig Höhen.
Die dritte Höhe liegt stets im Innern des Dreiecks; man kann sie deshalb als *die* Höhe des Dreiecks bezeichnen.

Besondere Aufmerksamkeit verdient noch die Verabredung einer normierten Bezeichnungsweise, die erst *nach* den angeführten Erörterungen und Übungen erfolgen sollte. Den Schülern muß deutlich werden, daß es sich einerseits dabei um eine Verabredung handelt, die sinnvoll ist, weil sie es beispielsweise erspart, bei der Erwähnung des rechtwinkligen Dreiecks ABC immer besonders hinzuzufügen, wo der rechte Winkel liegt. Daß es andererseits aber genügend Gelegenheiten gibt, wo diese Bezeichnungsweise nicht sinnvoll oder sogar nicht möglich ist, zeigen den Schülern schon die anschließenden Betrachtungen der rechtwinkligen Teildreiecke.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.4.1.: Verhältnisgleichungen am rechtwinkligen Dreieck

Bevor die Verhältnisgleichungen aufgestellt werden, sollte als Ziel für die kommenden Stunden die Suche nach Zusammenhängen zwischen den zuvor betrachteten sechs Strecken eines rechtwinkligen Dreiecks erarbeitet werden. Dies kann geschehen, indem im Zusammenhang mit den obengenannten Wiederholungsproblemen folgende Betrachtung angestellt wird: An einer Manipermtafel befindet sich ein Halbkreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$. Durch drei Magnete und eine Gummischnur wird ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ markiert. Wandert der Scheitel des rechten Winkels

auf dem Halbkreis, so wird deutlich: Je kürzer die eine, desto länger die andere Kathete. Die Vermutung, daß vielleicht die Summe beider konstant, vielleicht das Doppelte der Hypotenuse ist, bietet sich an. Markiert man durch einen vierten Magneten und eine zweite Gummischnur auch die Höhe, so kann weiterhin beobachtet werden: Je länger die Kathete, desto länger der zugehörige Hypotenusenabschnitt. Gleiche Katheten haben gleiche Abschnitte; in diesem Fall ist die Höhe am längsten.
Auf diese Weise sind zwar nur sehr grobe Vermutungen gewonnen worden, doch ist die Richtung des weiteren Arbeitens angedeutet und das Bedürfnis nach Präzisierung geweckt worden.
Die Schüler erinnern sich recht leicht daran, daß sie die Ähnlichkeit der drei Dreiecke ABC, ADC und DBC bereits nachgewiesen haben. Wenn bei diesem Nachweis (in der Unterrichtseinheit 2.3.2.) schon darauf hingewiesen wurde, daß daraus Folgerungen für die Seitenverhältnisse gezogen werden können, bedarf das Erinnern bei vielen nicht einmal eines Anstoßes. Jedoch macht es den Schülern oft Schwierigkeiten, Paare jeweils entsprechender Seiten zusammenzustellen. Eine recht weitgehende Hilfe gibt man ihnen, wenn die beiden Teildreiecke, etwa mit Hilfe von Applikationen, zum Dreieck ABC in Ähnlichkeitslage gebracht werden (Bild 2.40.). Aus einem solchen Tafelbild heraus

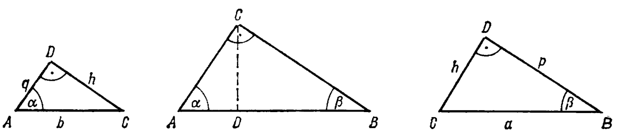


Bild 2.40.

können dann die Angaben leicht zu einer Tabelle (↗ Lb 47) zusammengefaßt werden. Anspruchsvoller und bei geeigneter Klassensituation (aber nur dann!) zu bevorzugen ist das Aufstellen der Tabelle ohne Herauslösen der Teildreiecke. Einander entsprechende Seiten sind dabei solche, die jeweils gleichen Winkeln gegenüberliegen.
Beim Aufstellen der Verhältnisgleichungen wird man zunächst eine größere Anzahl nennen und an der Tafel niederschreiben lassen. Dabei sollte das Aufstellen aus der Tabelle begleitet werden vom Zeigen in der Abbildung. Die weitere Beschäftigung mit nur drei dieser Verhältnisgleichungen kann damit begründet werden, daß in ihnen jeweils eins der Stücke zweimal auftritt, sie also eine Beziehung zwischen nur drei Strecken herstellen.

Dritter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.4.1.: Höhensatz, Kathetensatz und Satz des Pythagoras

Hat man erst einmal die drei Verhältnisgleichungen, so könnten die drei Sätze daraus in 10 Minuten gewonnen werden. Doch würde das bei den Schülern zweifellos zu Verwechslungen zwischen den diskutierten vier Quadraten und drei Rechtecken führen. Daher geht auch das Lehrbuch in jedem der drei Fälle folgenden Weg:

a) Gewinnen des Satzes als Gleichung (aus Proportionen oder anderen Gleichungen);
b) Formulieren des Satzes mit Hilfe arithmetischer Begriffe;
c) Formulieren des Satzes mit Hilfe geometrischer Begriffe;
d) Festigen des Satzes durch formale Übungen, Flächenverwandlungen und andere Konstruktionen sowie durch funktionale Betrachtungen.

Der Lehrplan verlangt die Formulierung der Sätze in zweifacher Weise. Dabei ergibt sich die arithmetische Formulierung aus dem Wege der Herleitung, ist jedoch etwas umständlicher und von den Schülern schwerer wiederzugeben. Die geometrische Formulierung schließt sich dann der Veranschaulichung des Sachverhalts mit Hilfe einprägsamer, farbig gestalteter Tafelbilder an. Sie ist kürzer, macht den Schülern weniger Mühe, und man wird daher in der Regel mit ihr weiterarbeiten. Doch ist in jedem Falle auf eine präzise Verwendung der jeweiligen Begriffe zu achten – aus diesem Grunde verlangt ja der Lehrplan zweierlei Formulierungen; wenn es die Klassensituation erlaubt, sollte auch eine Analyse der wesentlichen Unterschiede erfolgen. Man muß sich allerdings darüber im klaren sein, daß ein völlig konsequentes Vorgehen bei den Bezeichnungen nur möglich ist, wenn zusätzliche Symbole, wie z. B. $\{h\}$ für die Maßzahl der Höhenlänge h, verwandt werden. Eine gewisse Erschwerung bringt dabei die doppelte Bedeutung des Wortes *Quadrat* mit sich, nämlich als geometrische Figur und als zweite Potenz einer Zahl. Diese Doppeldeutigkeit wird im Lehrbuch, z. B. beim Höhensatz durch die Formulierungen „... Quadrat der Höhenmaßzahl ...“ und „... Quadrat über der Höhe ...“, hervorgehoben, und der Auftrag B 40 a) macht ausdrücklich auf den Unterschied aufmerksam. Sieht man „Quadrat“ auch in den Zusammensetzungen „Kathetenquadrat“ und „Hypotenusenquadrat“ in seiner geometrischen Bedeutung (und das ist allgemein üblich), so ist die kurze und einprägsame Formulierung „Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat“ für den Satz des PYTHAGORAS unzulässig. Denn für Figuren ist eben keine Addition bzw. Summe erklärt worden. Und würde man das durch irgendeine Art des Aneinanderlegens tun, so würde sich dabei in keinem Fall das Hypotenusenquadrat (oder ein dazu kongruentes) ergeben. Derartige Überlegungen, Vergleiche und Gegenüberstellungen sind für das Verständnis der betreffenden Sätze und für die Fähigkeit der Schüler, sie anzuwenden, kaum von Bedeutung. Sie sind aber von großer Wichtigkeit für die allgemeinmathematische Bildung der Schüler, und sie entsprechen der Lehrplanleitlinie „Fachterminologie und Symbolik“. (Auf der gleichen Ebene liegt etwa die Unterscheidung von Oberfläche und Oberflächeninhalt bei geometrischen Körpern.) Hat man allerdings die Problematik durchschaut, so ist auch hier – wie an vielen anderen Stellen – nichts gegen eine vereinfachende und abkürzende Sprechweise im obigen Sinne einzuwenden. Etwas anders ist es mit der bekannten Schülerantwort „$a^2 + b^2 = c^2$“ auf die Aufforderung, den Satz des PYTHAGORAS zu nennen. Sie sollte selbst dann nicht akzeptiert werden, wenn sich der betreffende Schüler der Unvollständigkeit bewußt ist, d. h., wenn er die Stufen „Für die Katheten a und b und die Hypotenuse c eines jeden rechtwinkligen Dreiecks gilt $a^2 + b^2 = c^2$“ und „In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$“ durchlaufen hat. Mit voller Absicht sind deshalb in den Lehrbuchformulierungen alle Bezeichnungen vermieden worden, um eine Bindung der Schüler an spezielle Symbole (a, b, c bzw. A, B, C) zu verhindern. Man beachte, daß das kein Widerspruch zu der vorher erfolgten Verabredung über die Bezeichnungen bei rechtwinkligen Dreiecken ABC ist.

Vierter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.4.1.: Konstruktionen

Den hier vor allem zu behandelnden Verwandlungsaufgaben sollte kein allzu großes Gewicht beigemessen werden; sie sind in erster Linie ein historisches Relikt aus der griechischen Mathematik und dienen ausschließlich der Festigung der betreffenden Sätze. Deshalb sind sie auch nicht im Zusammenhang nach der Behandlung aller drei Sätze zu besprechen. Derartige Aufgaben sind für die Schüler unmotiviert, wenn sie mit zahlenmäßigen Angaben der Seiten gestellt werden; denn in solchen Fällen liegt ein

rechnerisches Lösen sehr viel näher. Daher ist auch durch Beispiel B 17 und B 18 sowie die Aufgaben b 107 auf das Vorgeben von Figuren orientiert worden. Freilich wäre nach einem Ausmessen auch hier ein rechnerisches Lösen möglich, doch liegt es etwas ferner und ermöglicht keine *theoretisch* genaue Konstruktion. Wenn nach den Konstruktionen Messungen und Berechnungen erfolgen (bei den Aufgaben b 111 und b 112 werden sie gefordert), so sollte den Schülern bewußt sein, daß damit nicht etwa Höhensatz oder Kathetensatz „an der Praxis" auf ihre Gültigkeit überprüft werden sollen, sondern daß es sich hier um eine Überprüfung der Konstruktionsgenauigkeit handelt. Die entgegengesetzte Auffassung würde zu ganz irrigen Vorstellungen über das Verhältnis allgemeiner, deduktiv erschlossener mathematischer Aussagen und empirischer, in der Genauigkeit prinzipiell beschränkter Verfahren führen.
Bei der konstruktiven Ermittlung von Quadratwurzeln (Übung B 41, Aufgabe b 118) sollte man unbedingt auch auf das Vervielfachen von Strecken Bezug nehmen (Unterrichtseinheit 2.1.1., Lerneinheit B 3); bei dessen Behandlung darauf hingewiesen wurde, daß man für irrationales k das k-fache einer Strecke im allgemeinen nur näherungsweise konstruieren kann. Durch entsprechende Mitteilung ist jetzt allerdings auch der Auffassung vorzubeugen, daß es möglicherweise für alle Irrationalzahlen Konstruktionsmöglichkeiten mit Zirkel und Lineal gibt.

Fünfter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.4.1.: Rechnerisches Ermitteln von Stücken des rechtwinkligen Dreiecks

Auch formale Berechnungen eines der sechs in der Satzgruppe des PYTHAGORAS auftretenden Stücke auf Grund von zwei anderen sind in erster Linie unter dem Gesichtspunkt der Festigung der betreffenden Sätze zu sehen. Dafür ist zunächst das Auflösen der entsprechenden Gleichung nach der zu ermittelnden Größe erforderlich, im einfachsten Falle etwa der Übergang von $h^2 = p \cdot q$ zu $p = \frac{h^2}{q}$. Hier genügt eine kurze Erinnerung an die den Schülern bereits aus Klasse 6 und 7 bekannten Gesetzmäßigkeiten, die beim Arbeiten mit Gleichungen zu beachten sind, und ein Hinweis auf die Bedingung $q \neq 0$, die hier automatisch erfüllt ist. Etwas komplizierter ist die Sachlage beispielsweise beim Ermitteln der Höhenlänge. Hier muß sich der Lehrer darüber klar sein, daß die beiden Gleichungen $h^2 = p \cdot q$ und $h = \sqrt{p \cdot q}$ für feste, positive p, q zwar äquivalent bezüglich des Bereichs der nicht negativen reellen Zahlen, aber beispielsweise nicht äquivalent bezüglich aller reellen Zahlen als Grundbereich für h sind. Deshalb muß auch unbedingt die Formulierung vermieden werden, man habe jetzt „auf beiden Seiten die Quadratwurzel gezogen", denn $\sqrt{h^2}$ ist eben $|h|$, und das ist nur für nicht negative Zahlen gleich h. Wenn es die Klassensituation gestattet, so sollte der Lehrer die Schüler anhand eines Beispiels wie $6^2 = 4 \cdot 9 = (-6)^2$ darauf aufmerksam machen, daß $h = \sqrt{p \cdot q}$ aus $h^2 = p \cdot q$ nur folgt, weil auch für h nur positive Zahlen in Betracht kommen. Im Lehrteil des Lehrbuchs findet sich erst beim Satz des PYTHAGORAS eine formale Berechnung (Beispiel B 19), und die erwähnte Problematik wird hier durch die Formulierung *Die einzige positive Zahl c mit $c^2 = 25$ ist $5 = \sqrt{25}$* erledigt. Bei der unterrichtlichen Behandlung sollte sich eben daran die Bemerkung anschließen, daß auch für $c = -5$ $(= -\sqrt{25})$ gelten würde $c^2 = 25$. So kann hier – den Schülern unbewußt – bereits eine gewisse Vorbereitung auf die Behandlung der quadratischen Gleichungen in Klasse 9 erfolgen; zumindest wird dem Entstehen falscher Vorstellungen, die sich dort später als hinderlich erweisen, vorgebeugt. Freilich wird man im Unter-

richt mit derartigen Aufgaben nicht bis zum Satz des PYTHAGORAS warten, sondern muß bereits beim Höhensatz mit ihnen beginnen (Aufgabe b 104).
Bei allen derartigen Aufgaben sollte das vollständige Auflösen nach der gesuchten Größe immer *vor* dem Einsetzen der Werte erfolgen, nachdem man vielleicht bei der ersten Aufgabe dieser Art anders verfahren ist (wie dies auch im Buch bei Beispiel B 19 geschieht). Bei Aufgaben des gleichen Typs wie etwa den Aufgaben b 104 a) bis g) (Lb 117) kann man sich dann auch mit einer einmaligen allgemeinen Betrachtung begnügen. Freilich sind deshalb bei derartigen Aufgaben die Anforderungen nicht allzu groß, und es ist eine entsprechende Steigerung im Schwierigkeitsgrad anzustreben. So sollte der Schüler dann auch erkennen (vgl. die Steigerung z. B. von Aufgabe b 108 zu b 110), daß zwei der Strecken a, b, c, p, q, h das rechtwinklige Dreieck festlegen, daß sie also nicht nur der Berechnung *eines* weiteren Stückes, sondern aller vier fehlenden gestatten. Gerade Aufgaben wie b 110 sind dabei wertvoll, weil sie ein ständiges Neudurchdenken der Situation erfordern und das Aufstellen eines Lösungsplanes nahelegen.
Bei den Aufgaben zum Satz des PYTHAGORAS selbst findet sich immer wieder der Fehler, daß Schüler zum Beispiel $a + b$ für $\sqrt{a^2 + b^2}$ erhalten. Der Lehrer sollte diesen Fehler nicht nur durch geeignete Zahlenbeispiele (aus Pythagoreischen Zahlentripeln) deutlich machen, sondern auch auf den geometrischen Sachverhalt Bezug nehmen: Dann müßten ja die beiden Katheten zusammen ebenso lang sein wie die Hypotenuse.
Im übrigen ist auch hier wieder zu beachten und den Schülern deutlich zu machen, daß zum Beispiel h, p und q in der Gleichung $h^2 = p \cdot q$ Variable für Größen sind, man sich aber bei der numerischen Lösung trotzdem im allgemeinen auf das Arbeiten mit Maßzahlen beschränkt, nachdem man sich vergewissert hat, daß die beiden gegebenen Größen in der gleichen Einheit vorliegen und damit auch die Einheit der gesuchten Größe bestimmt ist.
Bei allen Aufgaben ist das Berechnen von Quadraten und Quadratwurzeln mit Hilfe von Quadrattafel und Rechenstab besonders wichtig. Der Lehrer sollte die erste Aufgabe dieser Art [b 104 a)] zum Anlaß nehmen, entsprechende Wiederholungen zu beginnen, und er tut gut daran, derartige Ermittlungen in den folgenden Stunden jeweils in den täglichen Übungen vornehmen zu lassen. Die Stellenzahl des Ergebnisses sollte stets durch einen Überschlag ermittelt werden, und das formale Anwenden von Regeln über das Anhängen von Nullen bzw. das Verschieben des Kommas dient allenfalls einer weiteren Vergewisserung.
Im Interesse des Überschlags sollte auch das Wiederholen der schon in Klasse 7 eingeprägten Quadratzahlen bis 25^2 ein Gegenstand der täglichen Übungen sein. Dabei sollte der Lehrer gleich zu Beginn des Arbeitens mit Tafel und Stab noch einmal darauf eingehen, daß es sich bei den meisten der Tafel zu entnehmenden und den auf dem Stab abzulesenden Zahlen um Näherungswerte handelt und daß bei den meisten Wurzeln generell nur mit Näherungswerten gearbeitet werden kann, weil es sich bei ihnen um Irrationalzahlen handelt.

Auch die Frage der Genauigkeit gilt es hier zu beachten:

Die formalen Aufgaben des Lehrbuches (z. B. die Tabellen b 104, b 108 bis b 114 sowie b 116) enthalten die Ausgangswerte meist zweistellig, zumal beispielsweise eine Längenangabe auf $\frac{1}{10}$ mm in diesem Zusammenhang nicht recht sinnvoll erscheint.
Deshalb dürfen auch die zu ermittelnden Werte an sich nur mit zwei gültigen Ziffern angegeben werden, und dieser Umstand muß auch den Schülern vollkommen klar sein. Dennoch sollte man bewußt vor der Angabe des sinnvoll gerundeten Wertes zunächst immer den von der Tafel bzw. vom Stab gelieferten dreistelligen Wert verlangen und

auf dessen Richtigkeit Wert legen. Diese Forderung sollte den Schülern gegenüber damit begründet werden, daß es hier auch wesentlich um das Vervollkommnen der Fertigkeiten im Arbeiten mit Tafel und Stab geht.

Zusammenfassung:

1) Für die Unterrichtseinheit wird folgende zeitliche Gliederung empfohlen:

   1. Stunde – Erster und zweiter Schwerpunkt (Lerneinheit B 28)
   2. Stunde – Dritter und fünfter Schwerpunkt (Lerneinheit B 29)
   3. Stunde – Vierter und fünfter Schwerpunkt (Lerneinheit B 29)
   4. Stunde – Dritter und fünfter Schwerpunkt (Lerneinheit B 30)
   5. Stunde – Vierter und fünfter Schwerpunkt (Lerneinheit B 30)
   6. Stunde – Dritter und fünfter Schwerpunkt (Lerneinheit B 31)
   7. Stunde – Vierter und fünfter Schwerpunkt (Lerneinheit B 31)

2) Am Ende der Unterrichtseinheit sollte folgendes erreicht sein: Die Schüler sind sicher in der Verwendung der für das rechtwinklige Dreieck eingeführten Begriffe.
   Die Schüler können die drei Sätze der Satzgruppe des PYTHAGORAS in mathematisch und sprachlich einwandfreier Form wiedergeben. Sie sind in der Lage, für alle drei Sätze die Beweise zu führen. Die Schüler haben Fertigkeiten in der Umformung von Gleichungen nach der Höhe, den Katheten und der Hypotenuse und in der formalen Berechnung dieser Stücke, auch unter Zuhilfenahme von Quadrattafel und Rechenstab, entwickelt.
   Die Schüler können Höhen- und Kathetensatz zur Verwandlung von Rechtecken in Quadrate und umgekehrt anwenden. Sie können gewisse Strecken (z. B. der Länge $\sqrt{5}$) konstruieren, und sie sind in der Lage, all diese Konstruktionsverfahren zu begründen.

2.4.2. Umkehrungen zur Satzgruppe des Pythagoras (2 Stunden; Lerneinheiten B 32 und 33)

Für diese Unterrichtseinheit sind als Schwerpunkte anzusehen:

1. Das Umkehren der drei Sätze
2. Die Sprechweisen *dann und nur dann, wenn* bzw. *genau dann, wenn*
3. Das Verfahren des indirekten Beweises

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.4.2.: Das Umkehren der drei Sätze

Im Lehrbuch werden die Umkehrungen vom Satz des PYTHAGORAS, vom Höhensatz und vom Kathetensatz im Zusammenhang behandelt, und zwar beginnend mit der Umkehrung des Satzes von PYTHAGORAS. Damit wird nicht nur der am leichtesten zu formulierende und zu beweisende Umkehrsatz an den Anfang gestellt; dieses Verfahren hat auch den Vorteil einer besseren Motivation, ausgehend von dem vermutlichen Vorgehen der ägyptischen Seilspanner (Auftrag B 45; Lb 52). Um sich hier nicht die Pointe zu verderben, sollte man nicht etwa vorher – z. B. in Form einer allgemeinen Zielangabe – von *Umkehrungen* sprechen, und auch das Aufschlagen der Bücher, Lesen und anschließendes Erörtern des Auftrags B 45 wären fehl am Platze, weil mit der Überschrift der Lerneinheit das Wesentliche vorweggenommen würde. Bei diesem vom Lehrbuch nahegelegten Weg können auch geschichtliche Betrachtungen organisch in

den Unterricht einbezogen werden, während sie sonst allzu leicht in die Rolle mehr oder weniger überflüssiger Anhängsel gedrängt werden. Im Interesse der weltanschaulichen Bildung muß dabei unbedingt der enge Zusammenhang von praktischen Bedürfnissen, zum Beispiel des Bauens und Landvermessens, mit mathematischen Überlegungen und Beweisen herausgestellt werden. Insgesamt sind die Vorzüge einer zusammenhängenden Behandlung der Umkehrungen und eines Beginns mit historischen Betrachtungen so groß, daß dieser Weg auch dann beschritten werden sollte, wenn die Schüler durch langjährige Vorbereitung daran gewöhnt worden sind, bei fast jedem neu erarbeiteten Satz sofort nach seiner Umkehrung und deren Gültigkeit zu fragen.
Wenn man bedenkt, daß die Schüler seit dem 6. Schuljahr systematisch an das Umkehren von Sätzen herangeführt worden sind und daß dieses Problem erst jüngst bei den Strahlensätzen zum ausdrücklichen Unterrichtsgegenstand gemacht worden ist, so müßte es den Schülern jetzt eigentlich möglich sein, die Umkehrung zum Satz des PYTHAGORAS selbständig und unmittelbar aus dessen Formulierung im Lehrbuch zu gewinnen. Wer das seiner Klasse nicht zumuten will, der muß erst Satz B 22 umformulieren lassen, etwa zu

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so haben die Kathetenquadrate zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Hypotenusenquadrat.

oder (kürzer und übersichtlicher)

Wenn im Dreieck ABC gilt $\sphericalangle ACB = 90°$,
so gilt auch $a^2 + b^2 = c^2$.

Eine Erleichterung ist das auf jeden Fall, auch im Hinblick auf den zweiten Schwerpunkt.
Bei der Umkehrung des Höhensatzes ist als zusätzliche Voraussetzung zu beachten, daß die Höhe innerhalb des Dreiecks liegt. Nun kann man natürlich fragen, ob der so durch eine zusätzliche Voraussetzung belastete Satz mit Recht noch als Umkehrung des Höhensatzes bezeichnet werden darf. Allerdings sollte man hier wohl nicht übermäßig kleinlich sein: denn nichts spricht dagegen, den Höhensatz in folgender Form auszusprechen:

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so teilt seine Höhe die gegenüberliegende Seite (innen) derart in zwei Abschnitte, daß ...,

und dann kann man direkt Prämisse und Konklusion vertauschen und so zu einer wahren Umkehrung gelangen. Die wörtliche Formulierung der Umkehrung des Kathetensatzes bereitet zusätzliche Schwierigkeiten dadurch, daß der Begriff der Projektion einer Seite auf eine andere nicht zur Verfügung steht. Aus diesem Grunde ist im Lehrbuch auch in der Formulierung des Satzes B 26 der sonst vermiedene Hinweis auf eine Abbildung enthalten.
Höhensatz und Kathetensatz haben eigentlich – ähnlich wie die Teile des Strahlensatzes – zwei Umkehrungsmöglichkeiten. Das wird deutlich, wenn man in den Voraussetzungen der Sätze klar trennt zwischen der Rechtwinkligkeit des Dreiecks ABC ($\sphericalangle BCA = 90°$) und der Tatsache, das $\overline{CD}$ Höhe in diesem Dreieck ist. Auf diese Weise gelangt man beispielsweise beim Höhensatz zu der zweiten – falschen – Umkehrung

Wenn in einem Dreieck ABC mit $\sphericalangle BCA = 90°$ ein Punkt D die Seite $\overline{AB}$ derart (innen) teilt, daß $\overline{AD} \cdot \overline{DB} = \overline{CD}^2$ gilt, so steht CD senkrecht auf AB.

Beim Kathetensatz hingegen ist auch die zweite Umkehrung wahr. Im Lehrbuch ist entsprechend dem Lehrplan auf eine Erörterung dieses Sachverhalts verzichtet worden, zumal diese Umkehrungen in der Folge nie benötigt werden. Der Lehrer könnte jedoch, falls die Klassensituation nicht dagegen spricht, auf das Bestehen einer zweiten Umkehrungsmöglichkeit aufmerksam machen und eine genauere Untersuchung den leistungsstarken Schülern in Arbeitsgemeinschaften übertragen.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.4.2.: Sprechweisen für die aussagenlogische Äquivalenz

Das Einführen der beiden hier zu behandelnden Sprechweisen sollte keineswegs formal geschehen. Es sollte vielmehr der Schlußpunkt sein unter einige (allgemeine und spezielle) Betrachtungen zu dem Sachverhalt, daß man eine Implikation mit ihrer (wahren) Umkehrung zu einem einzigen Satz zusammenfaßt. Das kann an den zuvor behandelten Sätzen recht gut, etwa in folgender Gedankenkette, geschehen:

a) Sowohl beim Satz des PYTHAGORAS als auch bei seiner Umkehrung geht es um zwei Dreieckseigenschaften, in abkürzender Formulierung: Es geht um Rechtwinkligkeit und Quadratgleichheit. Der erste Satz sagt:
Aus der Rechtwinkligkeit folgt die Quadratgleichheit.
Seine Umkehrung sagt:
Aus der Quadratgleichheit folgt die Rechtwinkligkeit.
b) Offenbar können die beiden Eigenschaften nicht unabhängig voneinander auftreten. Keine kann ohne die andere vorhanden sein, beide sind stets vereint:
Quadratgleichheit *immer dann, wenn* Rechtwinkligkeit, aber auch:
Quadratgleichheit *nur dann, wenn* Rechtwinkligkeit.
c) Diese beiden Erkenntnisse kann man in einem Satz aussprechen:
Quadratgleichheit *immer dann, aber auch nur dann, wenn* Rechtwinkligkeit.
Als kürzere Formulierung ergibt sich
Quadratgleichheit *dann und nur dann, wenn* Rechtwinkligkeit.
d) Von den Schülern sollte diese letzte Kurzfassung nun als mathematischer Satz ausgesprochen werden (↗ Satz B 24; Lb 52). Erst danach sollten die allgemeinen Überlegungen, wie sie das Buch in gebotener Kürze darstellt, ausgesprochen werden. Der Übergang zu *genau dann, wenn* bietet dann im Anschluß an die einleitenden Überlegungen von b) keine Schwierigkeiten mehr.

Es empfiehlt sich, in gleicher Weise einen Sachverhalt zu durchdenken, bei dem eine falsche Umkehrung vorliegt. Um nicht unnötig viel neue Begriffe ins Spiel zu bringen, können dafür die Dreieckseigenschaften Gleichseitigkeit und Spitzwinkligkeit gewählt werden. Bekanntlich kann Gleichseitigkeit nicht ohne Spitzwinkligkeit, wohl aber Spitzwinkligkeit ohne Gleichseitigkeit auftreten. Daher gilt in Analogie zu den obigen Aussagen:

Spitzwinkligkeit immer dann, wenn Gleichseitigkeit.

Es gilt aber nicht:

Spitzwinkligkeit nur dann, wenn Gleichseitigkeit,

und daher gilt auch nicht:

Spitzwinkligkeit dann und nur dann, wenn Gleichseitigkeit bzw. Spitzwinkligkeit genau dann, wenn Gleichseitigkeit.

Eine weitere Möglichkeit zur Klärung dieses Sachverhalts, die sich besonders gut in die Leitlinie „mengentheoretische Durchdringung" einfügt, besteht im Heranziehen von Mengendiagrammen, die den Schülern zumindest von den Zahlbereichserweiterungen her bekannt sind:

Es seien M_r die Menge der rechtwinkligen Dreiecke,
M_q die Menge der Dreiecke mit „Quadratgleichheit",
M_s die Menge der spitzwinkligen Dreiecke,
M_g die Menge der gleichseitigen Dreiecke.

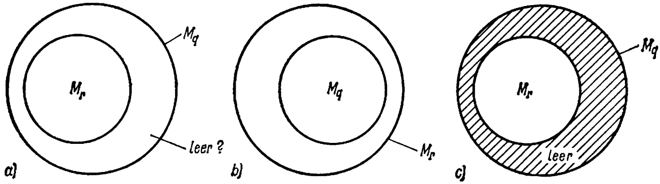


Bild 2.41.

Der Satz des PYTHAGORAS besagt dann $M_r \subseteq M_q$, und das läßt sich wie im Bild 2.41.a veranschaulichen. Die Frage nach der Gültigkeit der Umkehrung dieses Satzes ist gleichbedeutend mit der Frage, ob der „Kreisring" leer ist, ob es also keine Dreiecke mit Quadratgleichheit gibt, die nicht rechtwinklig sind. Würde man die als wahr erwiesene Umkehrung für sich, unabhängig vom Satz des PYTHAGORAS, betrachten, so ergäbe sich $M_q \subseteq M_r$ mit einer Veranschaulichung wie im Bild 2.40.b. In unserem Unterrichtsgang wird man diese Veranschaulichung jedoch nicht wählen, sondern die oben gestellte Frage bejahen, also feststellen, daß jedes Dreieck mit Quadratgleichheit auch rechtwinklig ist, $M_q = M_r$ schreiben und zur Veranschaulichung das ursprüngliche Bild verändern (Bild 2.40.c). In Analogie dazu ergibt sich bei der Frage der Spitzwinkligkeit und Gleichseitigkeit von Dreiecken $M_g \subseteq M_s$, aber $M_s \nsubseteq M_g$ und damit $M_g \neq M_s$, also $M_g \subsetneq M_s$ mit einer Veranschaulichung wie im Bild 2.42.

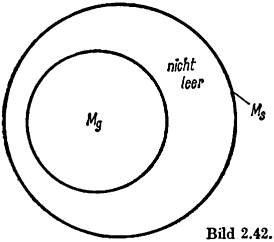


Bild 2.42.

Es versteht sich, daß in den hier vorgesehenen zwei Stunden nicht all diese Betrachtungen durchgeführt werden können. Doch sollen ja derartige allgemein-mathematischen

Betrachtungen nicht an einen bestimmten Stoffkomplex gebunden bleiben, sondern zumindest von ihrer expliziten Behandlung ab den weiteren Unterricht durchdringen. Die Aufgaben b 119 und b 120 sind – sofern sie nicht als Hausaufgaben gestellt werden – vor allem zur mündlichen Bearbeitung gedacht. Dadurch bieten sie, im Verein mit der Entwicklung der Beweisfähigkeit, eine ausgezeichnete Möglichkeit der Sprachschulung. Zur Erleichterung und Rationalisierung sollte an die Manipermtafel ein (ungefähr gleichseitiges) Dreieck ABC (bzw. PQR) gezeichnet werden. Für die in den einzelnen Aufgaben gegebenen Strecken sollten farbige Stäbchen (z. B. Trinkröhrchen mit Büroklammern), die auf Magneten befestigt sind, zur Verfügung stehen. So erkennt der Schüler sofort, welcher Umkehrsatz zur Anwendung kommen muß und über welchen Winkel eine Aussage zu treffen ist. Dann könnte zum Beispiel bei Aufgabe b 119 a) folgende Schülerantwort verlangt werden:

> *Es sind Maße für die drei Seiten gegeben. Wir überprüfen, ob $4{,}3^2 + 5^2 = 7^2$ ist. Dann müßte $4{,}3^2 + 25 = 49$, also $4{,}3^2 = 24$ sein. Das ist aber nicht der Fall, da $4{,}3^2$ keine natürliche Zahl ist. Das Dreieck ist also nicht rechtwinklig, denn es gilt ja: Rechtwinkligkeit genau dann, wenn Quadratgleichheit.*

Bei der Begründung der Schlußaussage, also der Feststellung, ob Rechtwinkligkeit vorliegt oder nicht, ist in all den Fällen die Umkehrung eines der drei Sätze heranzuziehen, in denen diese Frage bejaht werden kann. Das ist zum Beispiel bei Aufgabe b 119 d) der Fall. Wegen $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ hat das Dreieck bei B einen rechten Winkel. Muß diese Frage jedoch verneint werden [wie oben bei Aufgabe b 119 a)], so kann dazu der Umkehrsatz nicht herangezogen werden, da seine Voraussetzungen ja nicht erfüllt sind. Auch der Satz selbst ist aus demselben Grunde ungeeignet, man benötigt vielmehr eine ihm logisch äquivalente Aussage, seine *Kontraposition*. So wäre bei Aufgabe b 119 a) die Kontraposition zum Satz des PYTHAGORAS zu verwenden: „Wenn nicht Quadratgleichheit, so nicht Rechtwinkligkeit." Da die Kontrapositionen nicht eigens formuliert wurden, ist es wohl ratsam, statt dessen die im Satz B 24 ausgesprochene Äquivalenz zu benutzen. In gleicher Weise wäre zum Beispiel bei Aufgabe b 119 f) vorzugehen; allerdings kann hier aus $3 \cdot 5 \neq 42$ zunächst nur gefolgert werden, daß bei C kein rechter Winkel liegt, bei A oder B könnte jedoch einer liegen. Daß auch das nicht der Fall sein kann, ergibt erst eine zusätzliche Überlegung: Läge bei A (oder B) ein rechter Winkel, so wäre $\overline{AB}$ Kathete, die angegebene Höhe also die andere Kathete; dann müßten aber A (bzw. B) und D zusammenfallen, was den Angaben der Aufgabe widerspricht.

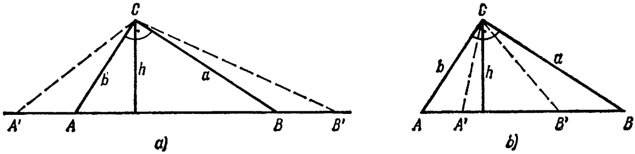


Bild 2.43.

Für die vollständige Beantwortung der einzelnen Teile von Aufgabe b 120 ist eigentlich noch eine Zusatzbetrachtung, etwa folgender Art, nötig (Bild 2.43.): Eine Veränderung des Dreiecks ABC zum Dreieck $A'BC$ oder $AB'C$ (A' und B' liegen auf AB) durch Vergrößerung (Verkleinerung) eines Hypotenusenabschnitts und der Hypotenuse führt zu folgender Erkenntnis:

Wenn $\triangle ABC$ bei C einen stumpfen Winkel hat, so gilt:	Wenn $\triangle ABC$ bei C einen spitzen Winkel hat, so gilt:
$h^2 < p \cdot q$ $a^2 < c \cdot p$ $b^2 < c \cdot q$ $a^2 + b^2 < c^2$	$h^2 > p \cdot q$ $a^2 > c \cdot p$ $b^2 > c \cdot q$ $a^2 + b^2 > c^2$

Wer auf diese oder ähnliche zusätzliche Betrachtungen verzichten will, der kann selbstverständlich auch Aufgabe b 120 dahingehend etwas abändern, daß nur eine Entscheidung über Rechtwinkligkeit oder nicht gefällt werden soll; die zusätzliche Betrachtung sollte dann leistungsstärkeren Schülern aufgetragen werden, die ihre Ergebnisse vor der ganzen Klasse erläutern können.
Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß man bei einer späteren Wiederholung zur Satzgruppe des PYTHAGORAS gut daran tut, sowohl die Sätze als auch die Umkehrungen in möglichst abwechslungsreicher Folge zu berücksichtigen. Nachstehende Aufgabe (Lösungen in Kursivdruck, zur Genauigkeit ↗ Uh 142, unten) bietet dazu besonders gute Möglichkeiten:

Im Dreieck ABC sei D zwischen A und B Fußpunkt der Höhe auf $\overline{AB}$. Ergänze die folgende Tabelle, soweit dies durch Anwenden der Sätze über das rechtwinklige Dreieck möglich ist!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{AB}$	7,3 cm	3,2 cm	8,6 cm	*10,6 cm*	10,9 cm	7,8 cm	*4,55 cm*
$\overline{AC}$	4,8 cm	2,4 cm	5,2 cm	*10,2 cm*	7,4 cm	*4,33 cm*	2,9 cm
$\overline{BC}$	5,5 cm	*2,12 cm*	*4,09 cm*	*2,91 cm*	9,1 cm	*6,49 cm*	3,3 cm
$\overline{AD}$	*3,16 cm*	1,8 cm	*4,9 cm*	9,8 cm	?	*2,4 cm*	*2,0 cm*
$\overline{DB}$	*4,14 cm*	*1,4 cm*	3,7 cm	0,8 cm	?	5,4 cm	*2,55 cm*
$\overline{CD}$	*3,62 cm*	*1,59 cm*	*1,74 cm*	2,8 cm	?	3,6 cm	2,1 cm
$\sphericalangle ACB$	*90°*	*90°*	*> 90°*	*90°*	*< 90°*	*90°*	*> 90°*

Diese Aufgabe gibt auch Gelegenheit, unter verschiedenen Lösungsvarianten zu wählen und die Möglichkeit zusätzlicher Kontrollen zu nutzen. So ist es z. B. beim Aufgabenteil b) möglich, nachdem man mit Hilfe der Umkehrung des Kathetensatzes die Rechtwinkligkeit erkannt hat, die Kathete $\overline{BC}$ sowohl nach dem Satz des PYTHAGORAS als auch nach dem Kathetensatz zu ermitteln, und auch für die Berechnung der Höhe steht sowohl der Höhensatz als auch der Satz des PYTHAGORAS zur Verfügung. Gerade bei dieser Aufgabe wird der enge Zusammenhang zwischen den drei Sätzen und die Rolle der Umkehrungen so recht deutlich.

Dritter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 2.4.2.: Indirekte Beweise

Laut Lehrplan ist im Zusammenhang mit der Behandlung der Umkehrungen auch auf den indirekten Beweis einzugehen. Es sei hier nochmals betont, daß deshalb nicht etwa das Führen indirekter Beweise bei allen früheren Gelegenheiten vermieden werden muß – im Gegenteil (↗ Uh 84). Auch die Umkehrung des Höhensatzes wird im Lehrbuch

noch vor den theoretischen Erörterungen zum indirekten Beweis indirekt bewiesen, allerdings ohne die Annahme der Negation des zu beweisenden Sachverhalts in aller Deutlichkeit herauszuheben.
Gerade beim indirekten Beweis besteht die Gefahr, daß den Schülern das Verständnis durch übertrieben komplizierte, exakt sein wollende Formulierungen erschwert wird. Dabei wird indirektes Beweisen im täglichen Leben und auch in der Justiz überaus häufig praktiziert, und gewiß haben auch schon alle Schüler so argumentiert, ohne daß ihnen das bewußt geworden ist. Will man an diese Erfahrungen anknüpfen, sie den Schülern bewußtmachen und ihnen damit das Wesentliche eines indirekten Beweises deutlich machen, so könnte das – nach Möglichkeit mit konkretem Anlaß – an der Besprechung eines Sachverhalts wie des folgenden geschehen:

Nach einer großen Pause kommt der Lehrer mit seiner Klasse in den leeren Klassenraum und findet die Tafel voller Zeichnungen, die gewiß nicht zum vorangegangenen Unterricht gehören. Er beschuldigt Peter, der Tafeldienst hat, die Tafel nicht gewischt zu haben. Peter widerspricht jedoch, und so stehen sich zwei Aussagen gegenüber:

Peter hat die Tafel gewischt. Peter hat die Tafel nicht gewischt.

An diesem Beispiel ist den Schülern leicht verständlich zu machen:

a) Jede der beiden Aussagen ist entweder wahr oder falsch.
b) Die Wahrheit der einen bedingt die Falschheit der anderen und umgekehrt.

Peter hat deshalb für den Beweis seiner Aussage zwei Möglichkeiten:

1) Er beweist die Wahrheit seiner Behauptung direkt, indem er für sein Tafelwischen einen glaubhaften Zeugen angibt.
2) Er beweist die Wahrheit seiner Aussage indirekt, indem er die Falschheit der Lehreraussage nachweist.

Da Peter keinen Zeugen hat, wählt er den zweiten Weg und sagt: „Wenn ich die Tafel nicht gewischt hätte, müßten ja noch die Vokabeln aus der vorangegangenen Russischstunde dranstehen. Da das nicht der Fall ist, habe ich gewischt.“ Peter macht also einen Widerspruch offenkundig zwischen dem tatsächlichen Sachverhalt (Tafel ohne Vokabeln) und einer notwendigen Folgerung aus der Lehrerbehauptung. Diese muß also falsch sein.
Dieser Gedankengang kann nun in völliger Analogie aus dem bereits geführten Beweis von Satz B 25 herausgelesen und bewußt für die Beweisführung von Satz B 26 (Umkehrung des Kathetensatzes) benutzt werden. Es wäre übrigens auch möglich, den Beweis für die Umkehrung des Satzes von PYTHAGORAS als indirekten Beweis zu formulieren, doch würde das nur eine überflüssige Erschwerung zur Folge haben und keinen Vorteil bringen. Bei allen drei Umkehrungen sollte aber den Schülern deutlich zum Bewußtsein kommen, daß man für den Beweis der Umkehrung eines Satzes häufig den Satz selbst als Beweismittel auszunutzen sucht – etwas, was auch schon bei den Umkehrungen zum Strahlensatz festgestellt werden konnte.

Zusammenfassung:

1) Für die Unterrichtseinheit wird folgende zeitliche Gliederung vorgeschlagen:
   1. Stunde – Erster und zweiter Schwerpunkt (Lerneinheit B 32)
   2. Stunde – Erster und dritter Schwerpunkt (Lerneinheit B 33)
2) Am Ende der Unterrichtseinheit sollte folgendes erreicht sein: Die Schüler wissen, daß alle drei Sätze wahre Umkehrungen haben und können diese mathematisch und sprachlich einwandfrei formulieren.

Die Schüler verstehen den Sinn der Sprechweisen ... *dann und nur dann, wenn* ... und ... *genau dann, wenn* ... und können sie richtig verwenden.
Die Schüler haben die wesentlichen Schritte eines indirekten Beweises verstanden, können einen der indirekten Beweise aus Lerneinheit B 33 wiedergeben und wissen, daß man indirekte Beweise oftmals bei Umkehrungen zu führen versucht.

2.4.3. Anwendungen (4 Stunden; Lerneinheit B 34)

Bei Textaufgaben zur Satzgruppe des PYTHAGORAS ist zu unterscheiden zwischen formalen, gewissermaßen „innermathematischen" Anwendungen, wie sie der Aufgabenteil des Lehrbuchs unter den Nummern b 121 bis b 124 (Lb 119/120) enthält, und praktischen Anwendungen, zu denen die Beispiele B 20, B 21 und die Aufgaben ab b 128 (Lb 120) zu rechnen sind; die Aufgabe b 125 kann als Übergang zwischen beiden Typen angesehen werden.
Es liegt zwar nahe, die Unterrichtseinheit 2.4.3. mit dem ersten Typ zu beginnen, doch braucht man das nicht unbedingt zu tun und kann auch im weiteren Verlauf zwischen beiden Typen abwechseln. Freilich wird man beim Beginn mit dem zweiten Typ nicht eine verhältnismäßig komplizierte Aufgabe wie die im Beispiel B 20 dargebotene an den Anfang stellen, sondern etwa eine der Aufgaben b 128 bis b 131. Dabei beachte man, daß die jeweils über die unmittelbare Anwendung der drei Sätze hinausgehenden Anforderungen zwar meist recht geringfügig, aber verschiedener Art sind, so etwa die Prozentangaben bei den Aufgaben b 127 und b 128 oder bei Aufgabe b 130 die Tatsache, daß das rechtwinklige Dreieck noch nicht vorhanden ist. Demgemäß können diese Aufgaben je nach der Klassensituation einen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad besitzen, der bei der Auswahl zu berücksichtigen ist. Noch leichter wird natürlich den Schülern der Anfang gemacht, wenn keinerlei zusätzliche Anforderung gestellt wird wie etwa bei folgender Aufgabe:

> *Eine 8,5 m lange Leiter wird so an eine Hauswand gestellt, daß ihr Fuß 3,20 m absteht. Wie hoch reicht die Leiter an der Wand hinauf?*[1])

Hält es der Lehrer für notwendig, eine solche Aufgabe an den Anfang zu stellen, so muß aus erzieherischen Gründen auch den Schülern deutlich gemacht werden, daß es sich hier nicht um eine „echte" Anwendung handelt, daß vielmehr das Lösen dieser Aufgabe nur als Vorbereitung dient (obwohl auch dieser Effekt recht gering zu veranschlagen ist). Sinnvoller wären derartige „Leiteraufgaben" allenfalls, wenn man etwa fragen würde, welche Länge eine Leiter zum Erreichen einer bestimmten Höhe haben könne, wenn aus Gründen der Sicherheit gewisse minimale und maximale Steigungen beachtet werden müssen.
Daß im Lehrteil des Buches zwei verhältnismäßig komplizierte Sachverhalte behandelt werden, hat vor allem den Grund, daß daran alle einzelnen Schritte des Lösungsvorganges besonders deutlich gemacht werden können. Aufmerksamkeit verdient hier vor allem die *Lösungsüberlegung*, mit der dem immer wieder anzutreffenden Übelstand entgegengewirkt werden soll, daß einfach darauflos gerechnet wird, ohne daß vorher der Sachverhalt und der einzuschlagende (günstigste) Lösungsweg genau durchdacht werden. Wenn man auch bei der schriftlichen Formulierung nicht immer eine solche

[1]) *Rechnen, Messen, Konstruieren*, 8. Schuljahr, Ausgabe 1959, Seite 154. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin.

Lösungsüberlegung fordern kann, so ist sie doch beim mündlichen Arbeiten nie zu vergessen.
Ob eine *Skizze* auch in derartig einfachen Fällen, wo nur das rechtwinklige Dreieck mit den Bezeichnungen zu zeichnen wäre (h, e, a im Beispiel B 20), verlangt werden soll, muß der Lehrer entscheiden. Übrigens sind die Bezeichnungen selbst immer in Anlehnung an den jeweiligen Sachverhalt zu wählen; hier beschränke man sich keinesfalls auf a, b, c. Wie schon bei den formalen Berechnungen zur Satzgruppe des PYTHAGORAS (Unterrichtseinheit 2.4.1., fünfter Schwerpunkt) beachte man auch hier die Trennung von *allgemeiner* und *numerischer Lösung*. Dabei ist von Fall zu Fall zu entscheiden, ob die allgemeine Lösung mit einer einzigen Gleichung abschließen soll, bei der die gesuchte Größe „berechnungsreif" in Abhängigkeit von den gegebenen erscheint, oder ob mehrere Gleichungen zweckmäßiger sind. Im Beispiel B 20 ist der erste Weg gewählt und dadurch erleichtert worden, daß die einfache Berechnung $h = \frac{3}{4} \cdot 103{,}5\ \text{m} \approx 77{,}6\ \text{m}$ und die Angabe $s = 4a$ bereits in die Aufzählung der gegebenen und gesuchten Größen aufgenommen wurden. Andernfalls wäre die Endformel der allgemeinen Lösung mit $s = 4\sqrt{\left(\frac{3}{4}H\right)^2 + e^2}$, wobei H die Gesamthöhe des Mastes bedeutet, wohl etwas zu unübersichtlich geworden. Bei Beispiel B 21 sind es hingegen die drei Gleichungen $e = \sqrt{c^2 - d^2}$, $c = \frac{b}{n}$, $d = \frac{A}{n \cdot a}$, die die gesuchte Größe e auf Grund der gegebenen (a, b, n und A) zu ermitteln gestatten. Bei der numerischen Lösung sind übrigens in den Beispielen des Lehrbuches die Einheiten immer hinzugefügt worden; es ist also stets mit Größen gearbeitet worden, allerdings nicht in der Form, daß die Einheiten beispielsweise unter den Wurzelzeichen auftreten. An dieser Stelle sei darauf aufmerksam gemacht, daß es unzulässig ist, in einer Aufgabe sowohl eine Größe als auch deren Maßzahl durch die gleiche Variable auszudrücken.
Aber auch wenn konsequent mit Größen gearbeitet wird, sollte man bereits bei der Angabe der gegebenen und gesuchten Größen etwa notwendige Umrechnungen in andere Einheiten vornehmen und hinzufügen, in welcher Einheit dann die gesuchte Größe erscheint. Daß am Ende der numerischen Lösung und für den Antwortsatz dann eventuell eine weitere Umrechnung der gesuchten Größe zweckmäßig sein kann, besonders auf Grund von Genauigkeitsbetrachtungen (etwa 3,6 km statt der irreführenden Angabe 3600 m für $3{,}6 \cdot 10^3$ m), ist dafür bedeutungslos.
Vor der Formulierung des *Antwortsatzes* vergesse der Lehrer keinesfalls, den errechneten Wert mit dem Ergebnis des vor der numerischen Lösung durchgeführten *Überschlags zu vergleichen*. Um die Anfertigung des Überschlages und das Arbeiten mit Quadrattafel und Rechenstab zu erleichtern, empfiehlt es sich hier ebenso wie in der Unterrichtseinheit 2.4.1., Quadratzahlen bis 25^2 einschließlich des überschlagsmäßigen Bestimmens von Wurzeln sowie Tafel- und Stabarbeit zum Gegenstand täglicher Übungen zu machen.
Besondere Aufmerksamkeit verdient ferner noch die Frage der sinnvollen Genauigkeit auf Grund der Genauigkeit der gegebenen Größen. Dieses Problem darf nicht etwa „automatisch" durch die mittels der Tafel oder mit dem Rechenstab erreichbare Genauigkeit als erledigt betrachtet werden. Bei Beispiel B 20 weise man darauf hin, daß die Rundungsregeln ein Abrunden von 372,4 auf 372 verlangen, obwohl ein Aufrunden vom Sachverhalt her zweckmäßiger erscheint – ähnlich wie man bei einem formal errechneten Fliesenbedarf von 372,4 Fliesen für eine Wand nicht etwa auf 372 Fliesen abrunden darf. Dieser Tatsache wird aber im Teil a) des Auftrags B 49 (Lb 54) Rech-

nung getragen, auf den man deshalb keinesfalls verzichten sollte. Bei Beispiel B 21 (Lb 55) mache man darauf aufmerksam, daß es sich bei $n = 8$ im Gegensatz zu den anderen Angaben nicht etwa um einen Näherungswert handelt, der dann nur eine Genauigkeit von einer gültigen (Grund-) Ziffer im Endergebnis zulassen würde.
Abschließend sei noch erwähnt, daß die Behandlung der Anwendungsaufgaben nicht über Gebühr ausgedehnt werden sollte, indem man sich etwa bemüht, *alle* Aufgaben des Lehrbuchs und eventuell noch weitere an dieser Stelle lösen zu lassen, und vielleicht sogar einige der „Verfügungsstunden" dafür nutzt. Man bedenke, daß es im Interesse der Erzielung eines wirklich anwendungsbereiten Wissens und Könnens viel wertvoller ist, wenn die Schüler derartige Aufgaben auch sicher zu lösen verstehen, falls sie ihnen zu einem Zeitpunkt gestellt werden, zu dem sie nicht von vornherein wissen, daß Sätze der Satzgruppe des PYTHAGORAS zu verwenden sind. Deshalb streue man dann lieber solche Aufgaben an geeigneten Stellen in die Behandlung anderer Stoffgebiete ein.

Zusammenfassung:

1) In den vier Stunden dieser Unterrichtseinheit werden vor allem Anwendungsaufgaben, daneben aber auch formale Textaufgaben behandelt.
2) Am Ende der Unterrichtseinheit sollte folgendes erreicht sein: Die Schüler haben erfahren, daß die Sätze der Satzgruppe des PYTHAGORAS große Bedeutung für mannigfache Anwendungen innermathematischer Art und für die Bewältigung praktischer Problemstellungen haben. Sie können Textaufgaben von dem Schwierigkeitsgrad der Lehrbuchaufgaben sicher lösen. Sie gehen dabei nach einem klaren Lösungsplan zu Werke, und ihre Lösungen entsprechen den Forderungen bezüglich Trennung von allgemeiner und numerischer Lösung, Überschlag und Vergleich, klarer Formulierung des Antwortsatzes und Beachtung der sinnvollen Genauigkeit.

2.4.4. Leistungskontrolle und Auswertung (3 Stunden)

Die Behandlung des gesamten Stoffgebiets wird mit einer zweistündigen Leistungskontrolle abgeschlossen, zu der eine Stunde für die Auswertung zu veranschlagen ist. Geeignet sind etwa folgende Aufgaben:

1. (Bild 2.44. zu Gruppe A)
Gruppe A: In dem abgebildeten Kreis sind $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei Durchmesser, die aufeinander senkrecht stehen. Untersuche $\triangle\, AEB$ und $\triangle\, MFB$ auf Ähnlichkeit (Begründung)!
Gruppe B entsprechend mit P, Q, R, S, T und U an Stelle von A, B, C, D, E, F.

2. (mit entsprechender Skizze, für Gruppe A Bild 2.45.)
Die Fünfecke $ABCDE$ und $A'B'C'D'E'$ sind einander ähnlich. (Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu.)
Vom Fünfeck $ABCDE$ sind bekannt:

Gruppe A:	Gruppe B:
$\overline{AB} = 4{,}5$ cm; $\overline{BC} = 1{,}8$ cm $\sphericalangle\, ABC = 90°$ Flächeninhalt $A_F = 21$ cm^2	$\overline{BC} = 3{,}5$ cm; $\overline{CD} = 1{,}3$ cm $\sphericalangle\, BCD = 90°$ Flächeninhalt $A_F = 15$ cm^2

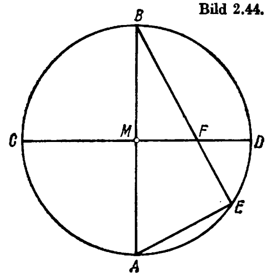


Bild 2.44.

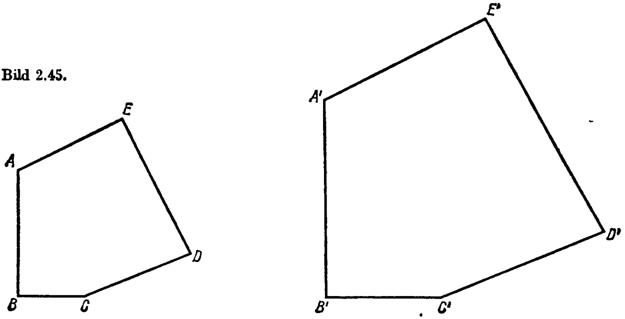


Bild 2.45.

Vom Fünfeck $A'B'C'D'E'$ sind bekannt:

Gruppe A:	Gruppe B:
$\overline{A'B'} = 13{,}5$ cm; $\overline{D'E'} = 10{,}8$ cm $\sphericalangle\, C'D'E' = 82°$ Umfang $u' = 57{,}6$ cm	$\overline{B'C'} = 10{,}5$ cm; $\overline{E'A'} = 8{,}7$ cm $\sphericalangle\, D'E'A' = 79°$ Umfang $u' = 41{,}4$ cm

Gib alle Maße an, die du auf Grund dieser Kenntnisse von den beiden Fünfecken ermitteln kannst!

3. Gruppe A:
Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem $a : c = 5 : 7$, $\beta = 42°$, $h_b = 4$ cm (Höhe bezüglich b) gilt!
Gruppe B:
Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem $b : c = 6 : 8$, $\alpha = 54°$, $h_c = 5$ cm (Höhe bezüglich c) gilt!

4. Von einem Flugzeug wird aus der Höhe h mit einer Luftbildkamera der Brennweite f eine Senkrechtaufnahme gemacht. Dabei erscheint eine Entfernung in der Länge b. Wie lang ist diese Strecke auf einer Karte mit dem Maßstab M darzustellen?

Gruppe A: $h = 1400$ m; $f = 210$ mm; $b = 8{,}4$ cm; $M = 1:40000$
Gruppe B: $h = 1500$ m; $f = 250$ mm; $b = 7{,}5$ cm; $M = 1:25000$

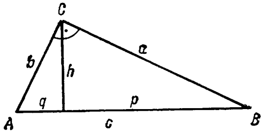


Bild 2.46.

5. (Bild 2.46.)
Gruppe A: In dem rechtwinkligen Dreieck ABC betragen $b = 5$ cm, $c = 13$ cm. Ermittle die Längen von a, q, h und den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC!
Gruppe B: Entsprechend mit $a = 8$ cm; $c = 17$ cm.

6. Gruppe A: Für $\triangle DEF$ gilt $\overline{DE} = 18{,}0$ cm; $\overline{EF} = 14{,}0$ cm; $\overline{FD} = 11{,}0$ cm;
Gruppe B entsprechend mit 26,0 cm; 18,0 cm; 21,0 cm.
   a) Untersuche, ob $\triangle DEF$ rechtwinklig ist (Begründung)!
   b$_1$) Wenn du bei a) Rechtwinkligkeit festgestellt hast, dann ändere *eine* Seite so ab, daß kein rechtwinkliges Dreieck entsteht!
   b$_2$) Wenn du unter a) festgestellt hast, daß das Dreieck nicht rechtwinklig ist, dann ändere *eine* Seite so ab, daß ein rechtwinkliges Dreieck entsteht!

7. Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks soll 12 cm (bei Gruppe B 18 cm) lang sein.
   a) Gib an, ob dadurch die Länge der Hypotenusenabschnitte festgelegt ist (Begründung)!
   b$_1$) Bei bejahender Antwort zu a) berechne die beiden Hypotenusenabschnitte!
   b$_2$) Bei verneinender Antwort zu a) gib drei Möglichkeiten für die Längen der beiden Hypotenusenabschnitte an!

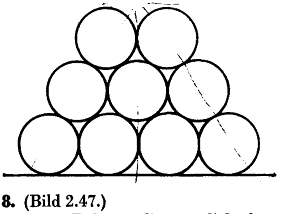


Bild 2.47.

8. (Bild 2.47.)
Neun Röhren, die sämtlich den äußeren Durchmesser D und die Wandstärke w haben, sind in der Art gestapelt, wie es die Figur im Querschnitt zeigt.
   a) Wie hoch ist der Stapel?
   b) Wieviel solcher Röhren kann man in dieser Weise stapeln, wenn man in der Breite auf B, in der Höhe auf H beschränkt ist?

Gruppe A: $D = 60$ cm; $w = 15$ mm; $B = 5{,}0$ m; $H = 2{,}8$ m
Gruppe B: $D = 70$ cm; $w = 20$ mm; $B = 6{,}0$ m; $H = 3{,}3$ m

Lösungen und Vorschlag einer Punktbewertung (Gruppe A):

Aufgabe **1.** (4 Punkte)

a) Erkennen, daß $\sphericalangle FBM = \sphericalangle EBA$ gilt	1 Punkt
b) $\sphericalangle AEB = 90°$, Begründung mit THALESsatz	1 Punkt
c) $\sphericalangle AEB = \sphericalangle BMF = 90°$	1 Punkt
d) Feststellen der Ähnlichkeit und Begründen mit Hauptähnlichkeitssatz	1 Punkt

Voraussetzung für die Erteilung der vollen Punktzahl ist eine klare Formulierung bei allen Teilschritten.

Aufgabe **2.** (6 Punkte)

a) $\sphericalangle A'B'C' = 90°$, $\sphericalangle CDE = 82°$	1 Punkt

(Dieser Punkt kann nur vergeben werden, wenn beide Angaben vorhanden sind, sonst 0 Punkte.)

b) $k = 3$	1 Punkt
c) $\overline{B'C'} = 5{,}4$ cm	1 Punkt
d) $\overline{DE} = 3{,}6$ cm	1 Punkt
e) $A'_F = 189\ \text{cm}^2$	1 Punkt
f) $u = 19{,}2$ cm	1 Punkt

Der Punkt für **b)** wird auch vergeben, wenn die darauffolgenden Angaben erkennen lassen, daß k bestimmt worden ist oder wenn diese Angaben durch das Lösen von Verhältnisgleichungen (etwa $4{,}5 : 13{,}5 = 1{,}8 : x$) gefunden worden sind. Sollte jedoch ein falsches k ermittelt, mit diesem Wert aber richtig weitergerechnet worden sein, so wird nur der Punkt für **b)** abgezogen.

Aufgabe **3.** (5 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

Hier ist nur eine saubere und das Vorgehen klar widerspiegelnde Konstruktion verlangt. Für eine einwandfreie Konstruktionsbeschreibung können 2 Zusatzpunkte vergeben werden.

a) Richtige Konstruktion des Hilfsdreiecks	3 Punkte
b) Richtige Konstruktion des gesuchten Dreiecks ABC von diesem Hilfsdreieck aus	2 Punkte

Bei nur teilweise richtiger Lösung erfolgen entsprechende Abzüge. Ein Punkt sollte auch abgezogen werden, wenn das Hilfsdreieck die Bezeichnung ABC trägt, das verlangte Dreieck jedoch $A'B'C'$ (oder etwa ebenfalls ABC)!

Aufgabe **4.** (6 Punkte)

a) Skizze und Ansetzen der Proportion $x : b = h : f$ (oder einer gleichwertigen)	3 Punkte
b) Errechnen der wahren Entfernung x	2 Punkte
c) Errechnen der Streckenlänge $x' = 1{,}4$ cm auf der Karte	1 Punkt

Die drei Punkte für **b)** und **c)** werden auch dann vergeben, wenn der Schüler auf die Errechnung von x verzichtet hat.

Aufgabe **5.** (5 Punkte)

$a = 12$ cm	1 Punkt
$q = \frac{25}{13}$ cm	1 Punkt
$h = \frac{60}{13}$ cm	2 Punkte
$A = 30\ \text{cm}^2$	1 Punkt

Aufgabe 6. (4 Punkte)

a) Begründung der Nichtrechtwinkligkeit durch $14^2 + 11^2 \neq 18^2$ — 2 Punkte

b) Eine der drei Angaben

$\overline{DE} = \sqrt{317}$ cm $= 17{,}8$ cm
$\overline{EF} = \sqrt{203}$ cm $= 14{,}2$ cm
$\overline{FD} = \sqrt{128}$ cm $= 11{,}3$ cm — 2 Punkte

Die Entscheidung unter **a)** kann durch Ausrechnen oder – einfacher! – auch durch Betrachten der letzten Ziffern getroffen worden sein. Die Punkte für **b)** können nur vergeben werden, wenn in **a)** die richtige Entscheidung getroffen wurde.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

a) Begründung der Mehrdeutigkeit durch Feststellung, daß die Gleichung $12^2 = p \cdot q$ nicht nur eine Lösung hat, z. B. $144 = 1 \cdot 144 = 2 \cdot 72$ oder durch zwei gezeichnete Dreiecke mit $h = 12$ cm — 2 Punkte

b) Angabe dreier Lösungen, z. B.

$p_1 = 1$ cm, $q_1 = 144$ cm
$p_2 = 2$ cm, $q_2 = 72$ cm
$p_3 = 3$ cm, $q_3 = 48$ cm — 1 Punkt

Aufgabe 8. (10 Punkte)

a) Erkennen des rechtwinkligen bzw. gleichseitigen Dreiecks — 2 Punkte
Ermitteln von $h' = 104$ cm (Rechenstab!) — 2 Punkte
Ermitteln von $h = 164$ cm — 1 Punkt

b) 8 Röhren nebeneinander — 1 Punkt
5 Schichten übereinander mit Begründung,
z. B. durch $\sqrt{432} + 6 < 28 < \sqrt{611} + 6$ — 2 Punkte

Antwortsätze für **a)** und **b)** — 1 Punkt

Bei Teil **b)** kann man für die Anzahl der Schichten auch weniger ausführliche Begründungen als ausreichend ansehen. Es muß aber ersichtlich sein, daß der Sachverhalt klar erkannt und das Ergebnis nicht nur durch Raten ermittelt worden ist.

Bemerkungen zu den Aufgaben

Auch hier gilt wieder, daß die Aufgabenzusammenstellung vor allem Umfang und Tiefe der Anforderungen deutlich machen soll, die zu stellen sind, und die Aufteilung in zwei Gruppen soll zeigen, auf welche Weise man eine solche Aufteilung vornehmen und dabei Gleichmäßigkeit der Anforderungen erreichen kann. Ein einfaches Übernehmen der hier angegebenen Aufgaben verbietet sich für den Lehrer schon deshalb, weil solche immer für Leistungskontrollen bevorzugten Aufgaben bald bekannt würden, und bei mehreren Parallelklassen ist ein solches Vorgehen von vornherein kaum möglich.
Da die Aufgaben relativ viel Text und auch Figuren enthalten, empfiehlt es sich, sie den Schülern schriftlich vorzulegen. Die Reihenfolge in der obigen Zusammenstellung entspricht sachlichen Gesichtspunkten, ist also nicht unter Berücksichtigung einer Steigerung des Schwierigkeitsgrades gewählt worden. Im konkreten Fall muß das selbstverständlich bedacht werden. Dabei wird es sich meist empfehlen, eine der Aufgaben 5. bis 7. an die erste Stelle zu setzen und mit der Aufgabe 2. zu enden. Freilich ist dann die Gefahr groß, daß einige Schüler die letzte Aufgabe lediglich aus Zeitgründen

nicht bearbeiten (zumindest kann man das nicht ausschließen), so daß der durch die Leistungskontrolle gewonnene Überblick bezüglich der in dieser Aufgabe gestellten Anforderungen (Beweisfähigkeit) gewisse Lücken aufweist. Im übrigen sind auch durch kleine Veränderungen an den genannten Aufgaben leicht Umfang und Schwierigkeitsgrad der jeweiligen Klassensituation anzupassen. So kann z. B. an die Stelle des Fünfecks in Aufgabe 1. ein Viereck oder gar ein Dreieck treten, die Aufgabenteile 6. b) und 8. b) können entfallen, und in Aufgabe 8. kann man die nicht benötigte Wandstärke von vornherein nicht mit angeben. Man beachte auch, daß bei den beiden Anwendungsaufgaben bestimmte Symbole wie h, D usw. hier nur angegeben wurden, um die Aufgaben der beiden Gruppen A und B leichter einander gegenüberstellen zu können. Vor der Klasse sollte man zumindest bei einer der beiden Aufgaben nicht so verfahren, um die Schüler auch zur (möglichst geschickten) Wahl von Bezeichnungen zu veranlassen. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß bei Aufgabe 3. für Gruppe B absichtlich das Verhältnis 6 : 8 und nicht 3 : 4 angegeben wurde, um zu verhindern, daß die Schüler mit den naheliegenden Werten 3 cm und 4 cm arbeiten, wodurch das Hilfsdreieck zu klein und die Genauigkeit leiden würde. Wer seine Schüler genügend daran gewöhnt hat, auch Fragen der Konstruktionsgenauigkeit zu beachten, beispielsweise die Hilfsdreiecke immer so groß zu konstruieren, wie es der verfügbare Platz gestattet, kann natürlich auch das gekürzte Verhältnis angeben und eventuell diese Frage in die Bewertung mit einbeziehen. Wer bei Aufgabe 4. „bequeme" Zahlenverhältnisse und damit Kürzungsmöglichkeiten vermeiden, dafür die Schüler zum Arbeiten mit dem Rechenstab (Proportionaleinstellung!) veranlassen will, der braucht nur die Maßangaben entsprechend abzuändern.

3. Lineare Funktionen

3.0. Vorbemerkungen

3.0.1. Stellung, Bedeutung, Ziele

Bei der Behandlung des Stoffgebietes sind drei Hauptaufgaben zu lösen:

- Die Schüler werden mit der Definition des Funktionsbegriffes auf mengentheoretischer Grundlage vertraut gemacht (3.1.).
- Die Schüler lernen die linearen Funktionen kennen und werden befähigt, solche Funktionen zu untersuchen (3.2. und 3.3.).
- Die Schüler entwickeln Fertigkeiten im Lösen linearer Gleichungen, in denen Klammern, Brüche und mehrere Variablen auftreten (3.4.).

Beim Heranführen der Schüler an den Funktionsbegriff werden Beispiele für Abbildungen sowohl aus dem bekannten Stoff des Mathematikunterrichts als auch aus anderen Bereichen verwendet. Als besonders wichtig werden eindeutige Abbildungen erkannt und als Funktionen definiert.

Danach beginnt die systematische Behandlung von Funktionen, die auf dem Bereich der rationalen Zahlen definiert sind und bei denen die zugrunde liegenden Abbildungsvorschriften durch Gleichungen ausgedrückt werden können. In Klasse 8 werden die linearen Funktionen behandelt, in Klasse 9 und 10 folgen weitere wichtige Klassen von Funktionen (Potenzfunktionen, quadratische Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, Winkelfunktionen).

Die Untersuchung von Funktionen ist eng mit dem Lösen von Gleichungen verbunden. Die Schüler wenden ihr Wissen und Können, das sie bei der Behandlung der Gleichungslehre erworben haben, an. Sie lernen weitere Formen linearer Gleichungen kennen. Im Lösen linearer Gleichungen, in denen auch kompliziertere Terme auftreten als in den bisher behandelten Gleichungen, entwickeln die Schüler Fertigkeiten.

Im Mittelpunkt aller Betrachtungen zu diesem Stoffgebiet steht der in der Mathematik äußerst bedeutsame Begriff **„Funktion"**. Er spielt im Schulstoff eine besondere Rolle (Leitlinie des Lehrplans) und bildet ab Klasse 8 einen unmittelbaren Unterrichtsgegenstand.

Im Verlaufe der historischen Entwicklung der Mathematik war der Funktionsbegriff Wandlungen unterworfen. Die Mathematik zu Beginn der Neuzeit ging mehr und mehr dazu über, anstelle der starren Betrachtung und Beschreibung der Eigenschaften mathematischer Objekte wie von Zahlen und geometrischen Figuren das Moment der Veränderung und der Bewegung zu erfassen. Beziehungen zwischen mathematischen Objekten traten in den Vordergrund. Wesentliche Impulse gingen von der Entwicklung der Mechanik aus. Das führte zur Herausbildung des für die heutige Mathematik außerordentlich bedeutsamen Begriffs der Funktion, für den u. a. LEONHARD EULER (1703–1783) eine für lange Zeit gültige Erklärung gab. Während bei ihm noch der analytische Ausdruck im Mittelpunkt stand, wird heute der Funktionsbegriff in wesentlich verallgemeinerter Form auf **mengentheoretischer und abbildungstheoretischer Grundlage definiert.** Funktionen, deren Abbildungsvorschrift in Form einer Gleichung gegeben werden kann, sind nur Spezialfälle, wenn auch sehr wichtige. Dieser Grundgedaken liegt dem Lehrplan zugrunde (↗ Lp 5–10, S. 72), wenn es heißt: „Bei der Einführung des Funktionsbegriffes ist von solchen Beispielen für eindeutige und nicht eindeutige Abbildungen auszugehen, die sich nur durch eine Wortvorschrift oder eine Wertetabelle kennzeichnen lassen. Erst anschließend sind dann auch Gleichungen als Abbildungsvorschriften zu verwenden.“

War schon der klassische Begriff der Funktion geeignet, mannigfaltige Gesetzmäßigkeiten, insbesondere in der Physik, mathematisch zu erfassen, so spiegelt der moderne Funktionsbegriff noch weit mehr reale Beziehungen in Natur, Technik, Ökonomie usw. wider. Diese vielfältige Anwendbarkeit des Funktionsbegriffes ist Ursache für die große Rolle, die ihm in der Mathematik und folglich auch im Mathematikunterricht zukommt. Die Bedeutung des Funktionsbegriffes sollte den Schülern durch Auswahl geeigneter Beispiele bewußtgemacht werden.

Im Bestreben, bei allen Schülern die Überzeugung vom objektiven Charakter der Entwicklung in Natur und Gesellschaft und von der Fähigkeit der Menschen, diese Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und in bewußter, verändernder Tätigkeit anzuwenden, systematisch herauszubilden, kann der Mathematikunterricht einen wertvollen Beitrag leisten. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß den Schülern im Mathematikunterricht die Rolle der Mathematik für die Entwicklung der sozialistischen Gesellschaft in Wissenschaft, Technik und Ökonomie, dargestellt an Beispielen für die Anwendung mathematischer Begriffe und Verfahren, erläutert werden sollte. Eine Möglichkeit dazu besteht bei der Behandlung des Funktionsbegriffs, mit dem viele Gesetzmäßigkeiten aus den genannten Bereichen quantitativ beschrieben werden können.

Der **Abbildungsbegriff**, auf dem wir den **Funktionsbegriff** aufbauen, wird in der Fachliteratur nicht durchweg einheitlich verwendet. Mitunter werden Abbildungen als eindeutige Zuordnungen aufgefaßt. In der Schule gehen wir von einem allgemeinen Abbildungsbegriff aus.

Dem Schulstoff zugrunde liegende Begriffsbildung:

Mengen → *Abbildungen* (Mengen geordneter Paare)

↓

Funktionen als eindeutige Abbildungen

Die Entwicklung des Funktionsbegriffes bei den Schülern beginnt in Klasse 1. Sie setzt im Grunde genommen schon im Vorschulalter ein, wenn das Kind eindeutige Zuordnungen verschiedener Art kennenlernt und so bestimmte Seiten der „Struktur“ in der Familie sowie der Umwelt begreift. Jedes Kind hat seinen Namen und seine Mutter. Den Gegenständen werden Bezeichnungen zugeordnet, den Familien Wohnungen, den Häusern Hausnummern, den Wohnungen Klingeln usw.

Im Mathematikunterricht der Unterstufe lernen die Schüler u.a., daß jede natürliche Zahl genau einen Nachfolger besitzt, sie schreiben die Multiplikationsfolgen nieder und füllen Tabellen z.B. der folgenden Art aus:

a	$a+3$

Von Klasse 4 ab lernen die Schüler mehrere geometrische Abbildungen kennen. Sie ordnen den Zahlen (verschiedener Zahlbereiche) Punkte auf dem Zahlenstrahl bzw. der

Zahlengeraden zu, desgleichen geordneten Zahlenpaaren Punkte einer Ebene, die durch ein Koordinatensystem orientiert ist. Jede rationale Zahl hat genau eine ihr entgegengesetzte Zahl, genau einen Betrag und mit Ausnahme der Zahl 0 genau ein Reziprokes. Durch die Rechenoperationen werden Zahlenpaaren eindeutig Zahlen zugeordnet. Bestimmten Maßzahlen von Bestimmungsstücken geometrischer Figuren werden vermittels der Inhaltsformeln eindeutig Maßzahlen für Inhalte zugeordnet. Die Behandlung der Proportionalität stellt eine unmittelbare Vorleistung für die Behandlung der linearen Funktionen dar.
Somit liegt eine Fülle von Beispielen allein aus dem Mathematikunterricht vor, denen sich viele aus der Physik und aus anderen Gebieten hinzufügen lassen. Auf dieser Grundlage, die den Schülern bewußtzumachen ist, wird in Klasse 8 der Funktionsbegriff definiert. Die Funktion wird als Menge geordneter Paare erklärt, die eine eindeutige Abbildung ist. Der Begriff „Kreuzmenge“ wird nicht verwendet, lediglich der Begriff „geordnetes Paar“, der bereits in Klasse 6 eingeführt wurde (LP 6, Stoffeinheit 3.2.).
Durch den Lehrplan wird gefordert, daß mit einer minimalen Anzahl von Begriffen operiert wird. Der Schwerpunkt des Unterrichts muß auf der inhaltlichen Arbeit liegen, nicht auf der Vermittlung einer Vielzahl von Begriffen. Wir weisen auf diese wesentliche Veränderung gegenüber früheren Lehrplänen und Lehrbüchern hin. So werden z.B. die Begriffe „unabhängige Variable“ und „abhängige Variable“ nicht benutzt. Diese Begriffsbildungen entsprechen der klassischen Auffassung des Funktionsbegriffs. Auch der Begriff „Richtungsfaktor“ wird nicht eingeführt. Wir verwenden den Begriff „Anstieg“. Ein besonderes „Anstiegsdreieck“ muß nicht ausgezeichnet werden. Wichtiger ist, daß die Schüler beim graphischen Darstellen linearer Funktionen ihre Kenntnisse und Fähigkeiten aus der Ähnlichkeitslehre (Klasse 8) und der Stoffeinheit „3.2. Proportionalität und Verhältnisgleichungen“ (Klasse 7) anwenden. Auch auf die Begriffe „explizite Form“ und „implizite Form“ einer Funktionsgleichung wird in Klasse 8 verzichtet. Die Abbildungsvorschriften für lineare Funktionen können durch lineare Gleichungen mit zwei Variablen ausgedrückt werden. Die Schüler lernen das Berechnen von Zahlenpaaren, die solche Gleichungen erfüllen. Dabei stellen sie die Gleichungen nach der einen oder der anderen Variablen um, je nachdem, wie es das Untersuchungsziel erfordert.
In diesem Stoffgebiet treten solche mathematischen Grundbegriffe in den Vordergrund, die den gesamten Inhalt des Mathematiklehrgangs der Schule durchziehen. Das betrifft vor allem die Begriffe „Menge“ und „Abbildung“ und den Funktions- und Gleichungsbegriff selbst. Die Behandlung konzentriert sich auf lineare Funktionen. Als Definitions- und Wertebereiche treten Zahlenbereiche oder Teilbereiche davon auf. Der im Lehrplan geforderte „Hinweis auf die Lückenhaftigkeit der Geraden, sofern sie die graphische Darstellung einer Funktion ist, deren Definitionsbereich nur rationale Zahlen angehören“ (LP 5–10, S. 74), soll den Schülern erneut bewußtmachen, daß eine weitere Zahlenbereichserweiterung notwendig sein wird. Es wurde bereits beim Einführen der irrationalen Zahlen im Zusammenhang mit der Behandlung der Quadratwurzeln auf die Existenz eines solchen Bereichs hingewiesen. Der Lehrer wird der Strukturierung des Lehrplanstoffes anhand bestimmter Leitlinien am ehesten gerecht, wenn er auf diese Weise immer wieder langfristige Zielorientierungen für die Schüler in den Unterricht aufnimmt, ihnen die inneren Zusammenhänge des Stoffes vor Augen führt und so die Bewußtheit des Lernens fördert.
Im letzten Abschnitt des Stoffgebietes werden Fertigkeiten im Lösen von linearen Gleichungen entwickelt. Dabei stehen solche Formen im Vordergrund, die häufig bei Anwendungsaufgaben, besonders in der Physik und Technik, vorkommen. Das sichere

Umformen von Gleichungen, in denen Klammern, Brüche und mehrere Variablen auftreten, ist auch eine unmittelbare Voraussetzung für die Erhöhung der Effektivität des Physikunterrichts. Eine Koordinierung der Arbeit der Fachlehrer an der Schule muß sichern, daß jedes Fach wohl abgewogen für das andere Vorleistungen bzw. Anwendungen liefert. Auf diese Weise wird der Gesamtkonzeption des Lehrplanwerkes entsprochen. In bestimmtem Maße trifft das auch auf die Abstimmungen mit anderen Fächern zu, in denen Berechnungen durchgeführt werden (Chemie, Unterrichtstag in der Produktion, Fach „Einführung in die sozialistische Produktion").

3.0.2. Literaturhinweise

(1) GÖRKE, L.: *Mengen – Relationen – Funktionen.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973 (002509).
(2) AUTORENKOLLEKTIV: *Methodik Mathematikunterricht.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1975, S. 376 bis 390.
(3) GELFAND/GLAGOLEWA/SCHNOL: *Funktionen und ihre graphische Darstellung.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.
Artikel in der Fachzeitschrift „Mathematik in der Schule":
(4) DIETZ, A.: *Gleichungen und Ungleichungen.* Jahrgang 1 (1963), Heft 2.
(5) ILSE, D., und W. TIETZ: *Zur Behandlung der linearen Funktionen in Klasse 8.* Jahrgang 9 (1971), Heft 1.
(6) REHM, M.: *Bemerkungen zur graphischen Darstellung linearer Funktionen.* Jahrgang 3 (1965), Heft 11.
(7) SCHAUER, R.: *Welche Vorstellungen verbinden unsere Schüler mit dem Begriff „Funktion"?* Jahrgang 2 (1964), Heft 3.
(8) LORENZ, G., und G. PIETZSCH: *Zur Einführung des Funktionsbegriffs, Klasse 8.* Jahrgang 17 (1979), Heft 1, S. 29.

Die Veröffentlichungen (1), (2) und (4) bis (6) enthalten grundlegende Hinweise für eine moderne mengentheoretische Fassung und Behandlung des Funktions- und Gleichungsbegriffes in der Schule.
(7) enthält wichtige Hinweise für das Vermeiden von Fehlern bei der Entwicklung des Funktionsbegriffes.
In (6) werden Beweise erörtert, mit denen gezeigt wird, daß die graphische Darstellung von Funktionen mit den Gleichungen $y = mx$ und $y = mx + n$ auf Geraden führt.
Für die außerunterrichtliche Arbeit und für die Auswahl von Zusatzaufgaben für die differenzierte Arbeit mit den Schülern sind wertvolle und interessante Beispiele und Anregungen in den folgenden Veröffentlichungen enthalten:

(9) GÖRKE, ILGNER, LORENZ, PIETZSCH und REHM: *Rund um die Mathematik.* Kinderbuchverlag, Berlin 1968.
(10) *Streifzüge durch die Mathematik*, Band 2. Urania-Verlag, Leipzig/Jena/Berlin 1966.
(11) OSTROWSKI und KORDEMSKI: *Zeichnen hilft Rechnen.* VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1963.

3.0.3. Vorschlag einer Stoffverteilung für das Stoffgebiet „Lineare Funktionen“

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seite Lb	Seite Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
3.1. Stoffeinheit: Der Funktionsbegriff (3 Stunden)						
(LE 1, 2, 3)	3	58 bis 61	167	Eindeutige und nichteindeutige Abbildungen von Mengen; Definition des Begriffes „Funktion“ als Menge geordneter Paare, die eine eindeutige Abbildung ist; Einführung der Begriffe „Definitionsbereich“, „Wertebereich“ und „Funktionswert“; Funktion als bedeutsamer mathematischer Begriff	Grundbegriffe der Mengenlehre: Menge, Element einer Menge, Teilmenge (von), leere Menge; entsprechende Symbole; endliche und unendliche Mengen; Abbildungen aus dem behandelten Schulstoff; Begriff „geordnetes Paar“; Bilden von Mengen und Teilmengen; Gebrauch der Symbole	
3.2. Stoffeinheit: Lineare Funktionen (9 Stunden)						
3.2.1. Das rechtwinklige Koordinatensystem (LE 4 und 5)	2	61 bis 64	178	Erweitern des Koordinatensystems auf vier Quadranten; Einführen von „Quadrant“; Abbilden von geordneten Zahlenpaaren auf Punkte des Koordinatensystems und Ablesen der Koordinaten von gegebenen Punkten; Koordinatensystem als Hilfsmittel für die graphische Darstellung funktionaler Zusammenhänge	Zueinander direkt proportionale Zahlenfolgen; Darstellung in Form einer Wertetabelle und im rechtwinkligen Koordinatensystem; Abszisse, Ordinate und Koordinaten eines Punktes im Koordinatensystem; Abszissenachse, Ordinatenachse	Koordinatensystem auf Rasterpapier und auf Haft- und Schiefertuchtafeln; Arbeitsblätter mit vorgegebenen Punkten in Koordinatensystemen Folie „Koordinatensystem“

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seite Lb	Seite Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
3.2.2. Funktionen mit einer Gleichung der Form $y = mx$ (LE 6, 7, 8)	3	64 bis 68	180	Funktionen mit einer Gleichung der Form $y = mx$ ($m \in R$, $m \neq 0$); Berechnen von geordneten Zahlenpaaren, die einer solchen Gleichung genügen; Deuten von m als Proportionalitätsfaktor; Nachweis, daß sämtliche Punkte der graphischen Darstellung auf ein und derselben Geraden liegen; Einführung von Anstieg m und seiner Bedeutung für die Lage der Geraden; Beziehungen aus Natur, Technik und Ökonomie, die durch Funktionsgleichungen der Form $y = mx$ erfaßt werden; Graphische Darstellung der Funktion mit der Gleichung $y = \|x\|$	Lösen von Gleichungen; Direkte Proportionalität, Proportionalitätsfaktor; Nachweis der Ähnlichkeit von Dreiecken mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze; Drehung; Betrag einer rationalen Zahl	Koordinatensysteme auf Rasterpapier, Folien und auf Haft- oder Schiefertuchtafeln, Koordinatenscheiben; Arbeitsblätter mit vorgegebenen Geraden in Koordinatensystemen; Rechenstab Zahlentafeln
3.2.3. Funktionen mit einer Gleichung der Form $y = mx + n$ (LE 9 und 10)	4	68 bis 71	187	Funktionen mit einer Gleichung der Form $y = mx + n$ ($m, n \in R$, $m \neq 0$); Berechnen von geordneten Zahlenpaaren, die einer solchen Gleichung genügen; Graphisches Darstellen dieser Funktion; Nachweis, daß sämtliche Punkte der graphischen Darstellung auf ein und derselben Geraden liegen; Bedeutung des Summanden n für die Lage der Geraden, Sytemati-	Lösen von Gleichungen mit zwei Variablen; Verschiebung und Drehung; Parallelität von Geraden	dto. Schreibprojektor mit vorbereiteten Folien: lineare Funktion $y = mx + n$

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seite Lb	Seite Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
				sierung; Bedingung für die Parallelität von Geraden; Hinweis auf die graphische Darstellung von Funktionen mit der Gleichung $y = 0 \cdot x + n$ bzw. $g = \lvert x \rvert + n$; Einführen von „lineare Funktion“ und „lineare Gleichung“ ihre Bedeutung in Natur, Technik und Ökonomie		
3.3. Stoffeinheit: Nullstellen linearer Funktionen; lineare Gleichungen (3 Stunden)						
(LE 11 und 12)	3	71 bis 73	192	Beziehungen zwischen linearen Funktionen und linearen Gleichungen; Berechnen von Zahlenpaaren $[x;y]$ und von x in $[x;b]$ und y in $[a;y]$ bei gegebenem a, b und gegebener Gleichung; Definition des Begriffes „Nullstelle einer Funktion“ und Deutung als Abszisse des Schnittpunktes zwischen Abszissenachse und graphischer Darstellung der entsprechenden Funktionen; Hinweis auf Funktionen mit mehreren Nullstellen ($y = \lvert x \rvert + n$ u. a.)	Gleichungsbegriffe: erfüllen, Lösung, Lösungsmenge, Lösen von Gleichungen; Zusammenfassende Wiederholung der Grundbegriffe der Funktionslehre	Koordinatensysteme auf Rasterpapier, Folien und auf Haft- oder Schiefertuchtafeln; Koordinatenscheiben; Arbeitsblätter mit vorgegebenen Geraden in Koordinatensystemen; Schreibprojektor mit vorbereiteten Folien

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seite Lb	Seite Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
3.4. Stoffeinheit: Lösen linearer Gleichungen (10 Stunden)						
3.4.1. Lineare Gleichungen mit Klammerausdrücken (LE 13)	3	73 bis 75	200	Lösen linearer Gleichungen mit einer Variablen, die Klammerausdrücke enthalten, und einiger nichtlinearer Gleichungen mit einer Variablen, die auf lineare Gleichungen führen; Umformungen, die nicht zu äquivalenten Gleichungen führen; Proben	Zueinander äquivalente Gleichungen; Umformungsregeln für lineare Gleichungen	
3.4.2. Lineare Gleichungen mit Brüchen (LE 14)	3	75 und 76	205	Lösen linearer Gleichungen mit einer Variablen, die Brüche enthalten, in denen auch die Variable im Nenner auftritt; Einschränkung des Grundbereichs der Gleichung; Proben; Einfache mathematisch oder sachbezogen eingekleidete Aufgaben, besonders aus der Physik	Verhältnisgleichungen; Rechnen mit Brüchen	
3.4.3. Lineare Gleichungen mit mehreren Variablen (LE 15)	4	76	208	Auflösen linearer Gleichungen mit mehreren Variablen nach den einzelnen Variablen; Umstellen von Formeln aus dem behandelten Stoff in Mathematik und Physik nach den verschiedenen darin enthaltenen Größen; Textaufgaben	Funktionsgleichungen; Inhaltsberechnungsformeln	Zahlentafel

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seite Lb	Seite Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
Schriftliche Leistungskontrolle und Auswertung	3		211	Funktionsbegriff; Lineare Funktionen mit Gleichungen $y = mx + n$ $(m, n \in R)$; Lineare Gleichungen mit Klammern, Brüchen und mehreren Variablen; Textaufgaben		

Für die zweistündige schriftliche Leistungskontrolle und deren Auswertung wurde je eine Stunde dem Volumen der Stoffabschnitte 3.2., 3.3. und 3.4. entnommen.

Die Stoffverteilung entspricht dem Lehrplan und sollte zur Grundlage der komplexen Planung benutzt werden, in der zusätzlich Bedingungen zu berücksichtigen sind, die sich aus der konkreten Situation an der Schule und in der Klasse ergeben. Dazu gehört z. B. die Ergänzung des Wiederholungsplanes auch durch solche Stoffe, die in der jeweiligen Klasse dringend einer Wiederholung bedürfen und nicht unmittelbar mit dem zu behandelnden Stoff im Zusammenhang stehen.
Für den Abschnitt 3.4. besteht die Möglichkeit, die vorgesehene Unterrichtseinheit 3.4.3. aufzulösen und ihren Inhalt den Unterrichtseinheiten 3.4.1. und 3.4.2. unmittelbar zuzuordnen, also bei der Behandlung von Gleichungen mit Klammern und Brüchen stets auch solche zu lösen, in denen mehrere Variablen auftreten. Es ist auch denkbar, einen Teil dieser Unterrichtseinheit bereits im Abschnitt 3.3. zu behandeln, da dort ohnehin schon Gleichungen mit zwei Variablen gelöst werden, um die Beziehungen zwischen linearer Funktion und linearer Gleichung sichtbar zu machen. Auf alle Fälle muß aber dann dafür gesorgt werden, daß Umformungen mathematischer und physikalischer Formeln noch im Abschnitt 3.4. geübt werden.
Im Interesse der Förderung des bewußten Lernens empfehlen wir, den Schülern Teile des Stoffverteilungsplanes bekanntzugeben. Das kann beispielsweise durch Aushang an der Wandzeitung der Klasse geschehen. Dazu eignen sich die Thematik und die Angaben über den zu behandelnden und den zu wiederholenden Stoff. Anstelle der Aufteilung nach Unterrichtseinheiten könnte die detaillierte konkrete Zeitplanung treten. Die Schüler können auf dieser Grundlage mit dem Lehrer gemeinsam die Erfüllung des Planes kontrollieren.

3.1. Der Funktionsbegriff (3 Stunden)

Das Hauptziel dieser Stoffeinheit besteht darin, daß die Schüler den Funktionsbegriff kennenlernen und die Funktionen als spezielle Abbildungen begreifen. Dazu ist eine Wiederholung und Vertiefung der Grundbegriffe der Mengenlehre notwendig, die in den vorangegangenen Klassenstufen behandelt wurden. Es werden Mengen gebildet und aufeinander abgebildet. Die Abbildungen werden durch Mengen geordneter Paare und auf andere Weise dargestellt, ihre Eigenschaften untersucht und eindeutige von nicht eindeutigen Abbildungen unterschieden. Die eindeutigen Abbildungen werden als Funktionen definiert. Zu beachten ist dabei der Lehrplanhinweis, auf den bereits in den Vorbemerkungen verwiesen wurde (↗ Uh 159). Definitions- und Wertebereich müssen nicht Zahlenbereiche (oder Teilbereiche davon), die Abbildungsvorschrift nicht unbedingt durch eine Gleichung gegeben sein.
Die Behandlung der Funktionen ist ausführlich zu motivieren. Dazu sind Gedanken über die Bedeutung des Funktionsbegriffes heranzuziehen, wie sie bereits in den Vorbemerkungen angedeutet wurden (↗ Uh 159). Mit dem Funktionsbegriff können wir bestimmte Beziehungen zwischen realen oder gedanklichen Objekten mathematisch erfassen. Die Begriffsbildung vollzieht sich im Unterricht auf der Grundlage vielfältiger Beispiele. Eine einseitige, durch Wahl ungünstiger Beispiele geförderte Einengung darf nicht zugelassen werden. Zusammenhänge zwischen den Elementen von Mengen, die durch den Funktionsbegriff erfaßt werden, sind nicht notwendig kausaler Natur. Schon anhand des Motivbildes im Lehrbuch (Thermograph) kann darauf hingewiesen werden. Nicht die Tageszeit direkt und allein ist die Ursache für die Temperaturänderung. Die

kausalen Zusammenhänge sind so kompliziert, daß es nicht möglich ist, für einen beliebigen Tag und eine beliebige Zeit die Temperatur exakt vorauszubestimmen. Man kann nur Näherungsangaben machen. Diese beruhen letzten Endes auf der ständigen Kontrolle des Zusammenhangs zwischen Zeit und Temperatur, wie sie etwa Meßreihen oder Thermographen liefern. In mathematischen Betrachtungen wird von solchen inhaltlichen (physikalischen) Fragen völlig abstrahiert. Mathematisch liegt eine eindeutige Abbildung einer Menge auf eine andere vor.

Bedeutsam für die weltanschauliche Bildung und Erziehung und die damit in Verbindung stehende Einschätzung der Rolle der Mathematik ist der Umstand, daß mathematische Begriffe, trotz der ihnen im allgemeinen eigenen hohen Abstraktionsstufe, sich nicht etwa von der Realität entfernen, sondern umfassender bestimmte Seiten realer Beziehungen widerspiegeln.[1]) Man kann die Schüler zu solchen Einsichten führen, wenn man sie selbst Beispiele für Beziehungen zusammenstellen läßt, die durch den Funktionsbegriff erfaßt werden. Damit entwickeln sie zugleich Fähigkeiten im Abstrahieren und Konkretisieren. Derartige Übungen sind von erheblichem erzieherischem Wert und sollten nicht als überflüssig betrachtet oder aus Zeitmangel unterlassen werden. Sie sind für die geistige Entwicklung der Schüler von größerer Bedeutung als die Kenntnis vieler Einzelfakten. Im Lehrplan heißt es dazu: „Durch die weitere Schulung des Abstraktionsvermögens, durch die Befähigung zum Verallgemeinern, zur Begriffsbildung, zum Erkennen von Zusammenhängen und zum Systematisieren sowie durch das Herausbilden erster Fähigkeiten im Definieren und Beweisen trägt der Mathematikunterricht gleichzeitig zur allgemeinen geistigen Entwicklung der Schüler bei." (Vgl. Lehrplan für die 5. bis 10. Klasse, Seite 23.)

Die ausführlichen Hinweise zu dieser Stoffeinheit sind auch in den folgenden Stoffeinheiten zu berücksichtigen. Das betrifft vor allem die Bemerkungen zum Funktionsbegriff im dritten Schwerpunkt (↗ Uh 174).

Erster Schwerpunkt der Stoffeinheit 3.1.: Wiederholung von Grundbegriffen der Mengenlehre (Lerneinheit C 1)

Die Wiederholung sollte durch vielfältige Übungen effektiv gestaltet werden. Besonderer Wert ist auf die Weiterentwicklung der Fähigkeiten im Umgang mit den Grundbegriffen der Mengenlehre und mit den entsprechenden Symbolen zu legen. Für das Bilden von Mengen steht eine Fülle von Material zur Verfügung, aus dem der Lehrer solche Beispiele auswählen sollte, die zugleich entsprechend den Erfordernissen in seiner Klasse wichtige Wiederholungsmöglichkeiten und erzieherische Akzente aufweisen.

Zusätzlich zu den Beispielen C 1 (Lb 58) und den Aufgaben c 1 bis 3 (Lb 123) nennen wir zur Auswahl weitere Beispiele, mit deren Hilfe verschiedene Begriffe bewußtgemacht werden können. Weiter unten werden Übungsaufgaben hierzu empfohlen.

A_1 – Die Menge aller ungeraden Zahlen zwischen 2 und 9.

A_2 – Die Menge aller Primzahlen zwischen 2 und 9.

A_3 – Die Menge aller rationalen Zahlen a, die die Gleichung $2(a + 3) = 6 + 2a$ erfüllen.
(Die Lösungsmenge ist gleich dem Grundbereich der Variablen.)

A_4 – Die Menge aller rationalen Zahlen z, die die Gleichung $z + 1 = z + 2$ erfüllen.
(Die Gleichung ist nicht lösbar; Wiederholung des Begriffs „leere Menge".)

A_5 – Die Menge aller entgegengesetzten Zahlen der rationalen Zahlen von 10 bis 20.

[1]) Vgl. LENIN: *Werke*, Bd. 38, Dietz Verlag, Berlin 1964, Seite 160.

Die folgenden Mengen beziehen sich stets auf eine bestimmte Ebene:

A_6 – Die Menge aller Punkte,
die von einem gegebenen Punkt (von zwei, von drei gegebenen Punkten) bzw. von einer (von zwei) gegebenen Geraden den gleichen Abstand haben. (Wiederholung von „Kreis", „Symmetrieachse", „Parallele" und „Winkelhalbierende" als Punktmengen.)

A_7 – Die Menge aller Dreiecke, deren Innenwinkel kongruent sind (gleichseitige Dreiecke).

A_8 – Die Menge aller Dreiecke, die zwei spitze Innenwinkel besitzen. (Wiederholung der Dreiecksarten und der Eigenschaft aller Dreiecke, mindestens zwei spitze Innenwinkel zu besitzen; Satz über die Innenwinkelsumme.)

Die folgenden Mengen realer Objekte beziehen sich stets auf eine bestimmte Klasse:

A_9 – Die Menge aller Schüler, die sich in der letzten Klassenarbeit gegenüber der vorangehenden (gegenüber der Vorjahresendnote) um mindestens einen Grad verbessert haben.

A_{10} – Die Menge aller Schüler, die Mitglied der JP (FDJ) sind.

A_{11} – Die Menge aller Schüler, die sich am letzten Arbeitseinsatz (an der letzten Solidaritätsaktion) beteiligten.

Beispiele aus anderen Fächern:

A_{12} – Die Menge aller chemischen Elemente.

A_{13} – Die Menge aller Mitgliedsstaaten des Warschauer Vertrages.

In erster Linie sollten die Schüler selbst Beispiele für Mengen und Mengenbildungsvorschriften finden.
Die Mengen werden, soweit sie endlich sind, vollständig in Mengenschreibweise unter Verwendung geschweifter Klammern elementweise angegeben. Die Elemente sind unter Umständen mit sinnvollen Kurzzeichen zu bezeichnen (Anfangsbuchstaben des Namens). Punktmengen können zum Teil durch Skizzen veranschaulicht werden.
In den Übungen ist zu sichern, daß durch die ausgewählten Aufgaben alle im Lehrplan, Stoffabschnitt 3.1. (↗ Lehrplan für die 5. bis 10. Klasse, Seite 73), genannten Grundbegriffe der Mengenlehre wiederholt werden.
Beispiel für eine Aufgabenfolge, die sich auf oben genannte Mengen bezieht:

- Bilde die Mengen A_1 bis A_5 und A_7 bis A_{11}! Gib sie elementweise an oder beschreibe sie!
- Welche dieser Mengen sind endlich?
- Setze von den Zeichen „$\in$", „$\subset$", „$=$" jeweils dasjenige in die leere Stelle, so daß eine wahre Aussage entsteht!
  $A_1 \cdots A_2$; $18 \cdots A_3$; $A_7 \cdots A_8$; $A_4 \cdots \emptyset$.
- Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
  $A_5 \subset A_8$; $A_{10} = A_{11}$ (erzieherisch auswerten!); $7 \in A_1$; Schüler $S \in A_9$. (Für S ist der Name eines geeigneten Schülers der Klasse zu setzen, für den das zugleich ein Lob darstellt.)

In ähnlicher Weise kann mit einer geringeren Anzahl von Aufgaben eine Kurzkontrolle gestaltet werden.
Im Lehrplan wird die Abgrenzung des mathematischen Mengenbegriffes von seiner

umgangssprachlichen Verwendung gefordert. Das erfolgt im Unterricht durch geeignete Gegenüberstellungen.
Gebrauch des Begriffes erfolgt im mathematischen Sinne:

(1) Wir haben bis morgen in Mathematik eine Menge Aufgaben zu lösen.
(2) Bei der Altstoffsammlung wurden eine Menge Flaschen gesammelt.
(3) Am Schwimmwettkampf nahm eine Menge von Schülern teil.

Gebrauch des Begriffes erfolgt nicht im mathematischen Sinne:
(1)′ Wir haben bis morgen eine Menge zu lernen.
(2)′ Bei der Altstoffsammlung wurde eine Menge Papier gesammelt.
(3)′ Wir verdünnen die Salzlösung mit einer Menge Wasser.

Zweiter Schwerpunkt der Stoffeinheit 3.1.: Abbildung von Mengen (Lerneinheit C 2)

Bei der Behandlung von Abbildungen sollten ebenfalls vielfältige Übungen durchgeführt und mit Wiederholungen verbunden werden. Abbildungen kennen die Schüler vor allem aus dem Geometrieunterricht. Daran ist anzuknüpfen (Ähnlichkeitsabbildungen, Stoffgebiet 2.). Auch aus dem arithmetischen Bereich kennen sie Zuordnungen schon von Klasse 1 an (↗Vorbemerkungen 3.0.1., Uh 159). An Beispielen machen wir den Schülern verständlich, daß Abbildungen nichts Bildhaftes im umgangssprachlichen Sinn darstellen. Zu einer Abbildung gehören Originale, Bilder und die Abbildungsvorschrift. Dieser Inhalt des Begriffes wird durch Mengen geordneter Paare beschrieben. Wenn wir Abbildungen im Unterricht behandeln, lassen wir nach Möglichkeit stets die entsprechenden Paarmengen bilden und aufschreiben. In diesem Zusammenhang erfolgt die Wiederholung des Begriffes „geordnetes Paar", wie er in Klasse 6 eingeführt wurde. (Vgl. Lehrplan für die 5. bis 10. Klasse, Seite 48).
Für die Wiederholung und Übung enthält das Lehrbuch Beispiele und Aufgaben (Lb 59 und Lb 123). Vor allem aber sollten die Schüler selbst Beispiele für Abbildungen finden. Um die Vielfalt der Möglichkeiten anzudeuten, auch die der Verbindung zu anderen Fächern, führen wir noch Beispiele (**B 1** bis **B 6**) an, die als Anregungen gedacht sind. Der Lehrer kann einige für den Unterricht auswählen oder ähnliche bilden lassen. Zugleich werden verschiedene Darstellungsformen für Abbildungen gezeigt. Zur rationellen Gestaltung des Unterrichts können solche Aufgaben z.T. auf Arbeitsblättern vorgegeben werden.

B 1 – Den Schülern der Klasse werden die von ihnen in der letzten Kontrollarbeit im Fach Mathematik erreichten Noten zugeordnet.

B 2 – Ordne den Dreiecken die richtigen Flächeninhalte zu! Schätze! Berechne!
Damit das Zuordnen nicht durch das Ausführen von Hilfstätigkeiten überdeckt wird, können in den Dreiecken bereits Höhen eingezeichnet werden. Die Maße für die Grundseiten und die zugehörigen Höhen sollten so gewählt werden, daß die Flächeninhalte durch Kopfrechnen bestimmt werden können (Bild 3.1.).

B 3 – Ordne den chemischen Verbindungen die richtigen Summenformeln zu!

Aluminiumoxid	$Ca(OH)_2$
Kalziumhydroxid	H_2SO_4
Schwefelsäure	Al_2O_3
Natriumkarbonat	Na_2CO_3
Kohlendioxid	CO_2

Die Schüler tragen die richtigen Zuordnungen wie in B 2 in eine Tabelle ein.

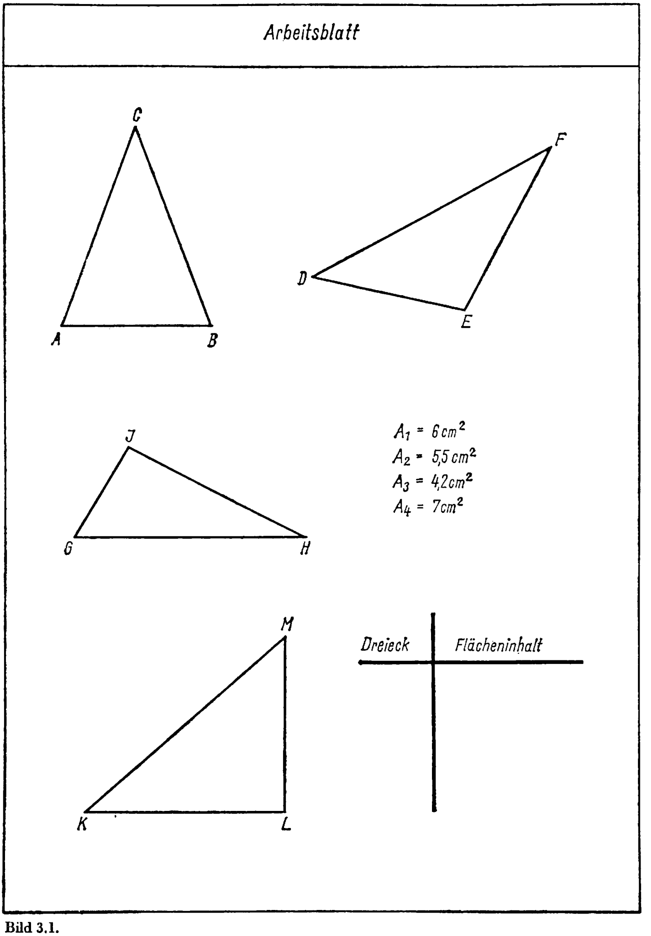

Arbeitsblatt
C
F
D
E
A
B
J
A1 = 6 cm2
A2 = 5,5 cm2
A3 = 4,2 cm2
A4 = 7 cm2
G
H
M
Dreieck
Flächeninhalt
K
L

Bild 3.1.

B 4 – In welchem Jahr wurden bedeutende Führer der Arbeiterbewegung geboren? Gib die richtige Zuordnung durch Pfeile an!

KARL LIEBKNECHT	1818
W. I. LENIN	1820
KARL MARX	1870
ERNST THÄLMANN	1871
ROSA LUXEMBURG	1886
WALTER ULBRICHT	1893
FRIEDRICH ENGELS	

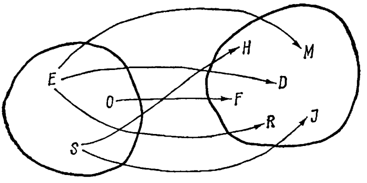


Bild 3.2.

B 5 – Durch welche Städte fließen die Flüsse?
Gib die richtige Zuordnung durch Pfeile an! Nenne geordnete Paare! (Bild 3.2.)

Flüsse: Elbe (E), Oder (O), Saale (S)

Städte: Halle (H), Magdeburg (M), Frankfurt (F), Jena (J), Dresden (D), Riesa (R)

Auch die Kennzeichnung durch ein Kreuz in einer Tabelle ist möglich. Besonders bei nicht eindeutigen Abbildungen erhöht sich dadurch die Übersichtlichkeit (Bild 3.3.).

	H	M	F	D	R	J
E		×		×	×	
O			×			
S	×					×

Bild 3.3

B 6 – Die Waffengattungen der NVA sind durch Farben an den Schulterstücken und Spiegeln der Uniformen erkennbar. Ordne den Waffengattungen die richtigen Farben zu! Die folgende Übersicht zeigt die richtigen Zuordnungen:

Mot.-Schützen	weiß
Artillerie	rot
Panzer	rosa
Nachrichtentruppen	gelb
Pioniere	schwarz
Grenztruppen	hellgrün
Luftstreitkräfte	hellblau
Luftverteidigung	grau
Luftlandetruppen	orange
Volksmarine	dunkelblau
Rückwärtige Dienste	dunkelgrün

Bei Hinzunahme weiterer Gattungen wie Aufklärungstruppen (weiß), Funkortungstruppen (gelb), chemische, technische und KFZ-Dienste (schwarz) gelangt man zu nicht eineindeutigen Zuordnungen.

Im Unterricht konzentrieren wir uns auf Abbildungen *von* einer Menge M *auf* eine Menge N. Andere Abbildungen (von – in, aus – auf, aus – in) sind nicht Unterrichtsgegenstand. Abbildungen einer Menge auf sich selbst kennen die Schüler in Form von Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen (als umkehrbar eindeutige Abbildungen der Punktmenge einer Ebene auf sich selbst).

Die im Unterricht zusammengestellten Beispiele für Abbildungen werden auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Mit der Beantwortung der Frage „Ist jedem Element der ersten Menge genau ein Element der zweiten zugeordnet?" werden eindeutige Abbildungen von nicht eindeutigen unterschieden.

Die Eineindeutigkeit kann wiederholend erwähnt werden, steht aber nicht im Mittelpunkt der Betrachtungen. Wir belasten die Schüler nicht mit anderen Begriffen und Bezeichnungen wie „links-", „rechts-", „vor-" oder „nach-eindeutig". Sie sind nicht Lehrgegenstand in der zehnklassigen polytechnischen Oberschule.

Dritter Schwerpunkt der Stoffeinheit 3.1.: Definition des Funktionsbegriffs (Lerneinheit C 3)

Auf der Grundlage einer intensiven Wiederholung und Festigung der Grundbegriffe der Mengenlehre und der Abbildungen schlagen wir für die Erarbeitung der Definition des Funktionsbegriffs folgenden Stundenverlauf vor:

Gliederung:

(1) Wiederholen der Begriffe „eindeutige Abbildung" und „nicht eindeutige Abbildung" anhand von Beispielen
(2) Erarbeitung der Definition des Funktionsbegriffs und Einführung der mit ihm im Zusammenhang stehenden Begriffe „Definitionsbereich", „Wertebereich" und „Funktionswert"
(3) Darstellen von Funktionen in verschiedenen Formen

Methodische Hinweise:

Zu (1): Für diese Stunde sollten die Schüler eine vorbereitende Hausaufgabe erhalten, in der sie sich mit eindeutigen und nicht eindeutigen Abbildungen beschäftigen.
Empfehlung: Aufgaben c 5 b, c (Lb 123), Angabe von Teilmengen.
Beispiele B 4 und B 5 (Uh 172) aus den Darlegungen zum zweiten Schwerpunkt.
Zu Beginn der Stunde lösen die Schüler die folgenden Aufgaben selbständig in ihren Heften. Der Lehrer nutzt die Zeit für Hausaufgabenkontrollen.

- Bildet
  - die Menge M_1 der 15 kleinsten natürlichen Zahlen, die größer als 0 sind,
  - die Menge M_2 der 6 kleinsten natürlichen Zahlen, die größer als 0 sind,
  - die Menge M_3 der Primzahlen von M_1,
  - die Menge M_4 der natürlichen Zahlen von M_1, die keine Primzahlen und größer als 1 sind,
  - die Menge M_5 der 4 kleinsten Primzahlen!
- Welche Teilmengenbeziehungen bestehen zwischen M_1, M_2, M_3, M_4 und M_5?

● Bildet M_2 auf M_3 ab, indem den natürlichen Zahlen der Größe nach die Primzahlen zugeordnet werden!
● Bildet M_4 auf M_5 ab, indem jeder natürlichen Zahl ihre Teiler zugeordnet werden!

Die Abbildungen werden von den Schülern als Paarmengen angegeben. An der Tafel erfolgt eine Darstellung durch Pfeildiagramme (Bild 3.4.).
Die Schüler ermitteln, ob die Abbildungen eindeutig oder nicht eindeutig sind. Ergänzend wird festgestellt, welche Eigenschaften die Abbildungen besitzen, die in der Hausaufgabe zu bilden waren.

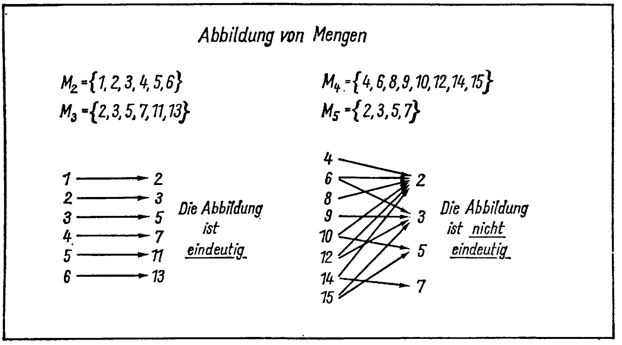


Bild 3.4.

Zu (2): Die eindeutige Abbildung $M_2 \rightarrow M_3$ wird nun besonders betrachtet. Der Lehrer erläutert, daß eindeutige Zuordnungen eine besondere Rolle spielen, und begründet das, indem er z.B. auf die erforderliche Eindeutigkeit der Rechenoperationen, der Bestimmung von Größen aus Formeln (Inhaltsberechnung, physikalische und technische Berechnungen) usw. hinweist. Die Schüler versuchen selber, Beispiele für eindeutige Abbildungen zu nennen. Der Lehrer erklärt, daß solche wesentlichen und vielfach auftretenden Beziehungen Anlaß zur Bildung eines neuen Begriffs geben. Danach wird die Definition des Funktionsbegriffs genannt. Die Schüler lesen sie im Lehrbuch (Lb 61) und prägen sie sich ein. Sie kann zugleich an die Tafel geschrieben werden. Im Zusammenhang damit werden die Begriffe „Definitionsbereich" und „Wertebereich" und der Begriff „Funktionswert" für die Elemente des Wertebereichs eingeführt.
Da sich der Funktionsbegriff historisch entwickelt und verändert hat und auch in der noch heute zugänglichen älteren Fachliteratur durchaus nicht einheitlich formuliert wird, ist es notwendig, von vornherein die moderne, im Lehrplan geforderte Definition richtig zu interpretieren. Es dürfen auch keinerlei einseitige Auslegungen zugelassen werden. Andere gleichwertige Definitionen für den Funktionsbegriff können formuliert werden, wie z.B. in (1) (↗ Uh 161), S. 90: „Eine Funktion ist eine eindeutige Abbildung einer Menge A auf eine Menge B." Auf Formulierungen der Definition des Funktionsbegriffs in solchen Büchern, die den Schülern zugänglich sind [z.B. „Kleine Enzyklopä-

die Mathematik"[1])], sollte erst später eingegangen werden, wenn der Begriff bei allen Schülern bereits eine relative Stabilität besitzt.
Aus der Definition geht hervor, daß zur Angabe einer bestimmten Funktion stets der Definitionsbereich, der Wertebereich und die Abbildungsvorschrift gehören. Kann die Abbildungsvorschrift durch eine Gleichung angegeben werden, so genügt die Angabe des Definitionsbereiches. Der Wertebereich läßt sich daraus bestimmen.
Bei der Einführung des Funktionsbegriffes gehen wir jedoch nicht von solchen Beispielen aus, für die eine Abbildungsvorschrift in Form einer Gleichung angegeben werden kann (vgl. Lehrplan für die 5. bis 10. Klasse, Seite 72). Die Beispiele für diesen Stundenentwurf wurden entsprechend ausgewählt. Die symbolische Darstellung einer Funktionsgleichung mit $y = f(x)$ tritt erst ab Klasse 9 auf. Zwischen Funktion und Funktionsgleichung muß streng unterschieden werden, wenngleich wir in höheren Klassenstufen die Ausdrucksweise „die Funktion $y = f(x)$" zulassen.
Die folgenden Hinweise gehen über das hinaus, was wir den Schülern in der ersten Stunde zum Funktionsbegriff nahebringen können. Auf die Mehrzahl der genannten Gesichtspunkte sollte der Lehrer in den folgenden Stoffabschnitten und in den höheren Klassenstufen immer wieder eingehen, um auf diese Weise ständig an der Festigung des Funktionsbegriffes zu arbeiten.
Wir müssen den Schülern erläutern, daß es widersinnig wäre und keineswegs einer dialektischen Auffassung entspräche, wenn wir annehmen würden, der Funktionsbegriff habe sich durch Jahrhunderte entwickelt und verändert, und diese Entwicklung sei gerade heute abgeschlossen. Vielmehr gilt es, zu zeigen, daß die Mathematik kein starres System ist, sondern ein flexibles Instrument, mit dem wir immer besser bestimmte Beziehungen der Umwelt erfassen können, indem wir das Begriffs- und Aussagengefüge zweckmäßig verändern und ausbauen. Die gewählte Fassung des Funktionsbegriffes ist nach unseren Kenntnissen die gegenwärtig zweckmäßigste.

Zu (3): Im letzten Abschnitt der Stunde wird eine Funktion in verschiedenen Formen dargestellt.

Aus den Beispielen, die möglichst von den Schülern gegeben werden, wählen wir ein geeignetes aus, das etwa dem hier verwendeten entspricht (endlich, leicht überschaubar, mit einer Gleichung als Abbildungsvorschrift). An der Tafel werden gebräuchliche Darstellungsformen nebeneinandergestellt. Wir knüpfen an die Kenntnisse der Schüler über die Darstellung von Abbildungen an. Sicher werden nicht alle Formen in dieser Stunde behandelt werden können. Die Schüler sollten jedoch im Verlaufe der Behandlung des Stoffgebietes 3. verschiedene Möglichkeiten kennenlernen.

Beispiel:

Die Menge $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ wird eindeutig auf die Menge $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$ abgebildet, indem jedem Element von A das Dreifache zugeordnet wird.

Menge geordneter Paare:

$F = \{[0; 0], [1; 3], [2; 6], [3; 9], [4; 12], [5; 15[\}$

[1]) *Kleine Enzyklopädie Mathematik.* VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1965.

Wertetafel:

$x \in A$	0	1	2	3	4	5
$y \in B$	0	3	6	9	12	15

Die obere Zeile enthält Elemente des Definitionsbereichs, die untere Funktionswerte. Die Wertetafel kann mit einer den Schülern bereits bekannten Tafel (Quadratzahltafel) verglichen werden. Die Schüler sollen erkennen, daß solche Tafeln nichts anderes sind als Darstellungen von Funktionen (endlicher Teilmengen von Funktionen).

Funktionsgleichung:

$y = 3 \cdot x \quad (x \in A)$

Weitere Darstellungsformen:

$0 \longrightarrow 0$
$1 \longrightarrow 3$
$2 \longrightarrow 6$
$3 \longrightarrow 9$
$4 \longrightarrow 12$
$5 \longrightarrow 15$

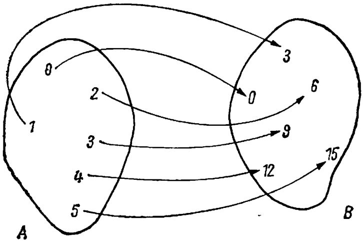


Bild 3.5.

A \ B	0	3	6	9	12	15
0	×					
1		×				
2			×			
3				×		
4					×	
5						×

Bild 3.6.

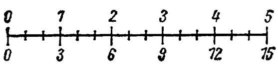


Bild 3.7.

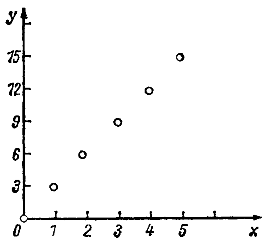


Bild 3.8.

Solche Skalen wie im Bild 3.7. finden sich z. B. an Thermometern, die zugleich die Celsius- und Reaumurskale tragen. Auch die Skalen des Rechenstabes gehören hierher. Für jede Darstellungsform wird erörtert, in welcher Weise sich die Eindeutigkeit der Abbildung zeigt. Dazu sind Vergleiche mit einer nicht eindeutigen Abbildung angebracht (das rechtsstehende Beispiel in Bild 3.4. oder das Beispiel in Bild 3.2. bzw. 3.3.).

Für die Hausaufgabe sind u. a. auch solche Beispiele vorzusehen, die zu unendlichen Paarmengen führen (Aufgabe c 5 a, Lb 123). An einem solchen Beispiel erläutern wir, daß nur Teilmengen dargestellt werden können und allein die Funktionsgleichung die gesamte Menge repräsentiert. Hier finden wir ein Motiv, weshalb wir uns in den folgenden Stunden besonders mit solchen Funktionen befassen werden, für die eine Funktionsgleichung existiert.

Zusammenfassung:

1) Für die Einführung des Funktionsbegriffes liegen aus dem vorangegangenen Mathematikunterricht so viele Beispiele vor, daß er auf der Grundlage der Wiederholung der Grundbegriffe der Mengenlehre unter aktiver Mitarbeit der Schüler erarbeitet werden kann. Das selbständige Bilden von Mengen und Abbildungen und die verschiedenen Darstellungen für Abbildungen stehen in dem gesamten Stoffabschnitt im Vordergrund.
2) Den Schülern ist die außerordentliche Bedeutung des Funktionsbegriffes in der Mathematik und für die quantitative Erfassung bestimmter realer Beziehungen anhand von Beispielen verständlich zu machen. Dazu wird jedoch nur ein erster Schritt getan werden können. Der weitere Ausbau der Erkenntnis der praktischen und theoretischen Bedeutung dieses Begriffs erfolgt bei der Behandlung der folgenden Stoffabschnitte und in den höheren Klassenstufen.
3) Wir empfehlen, die Schwerpunkte in der angegebenen Reihenfolge zu behandeln und für jeden eine Stunde zu verwenden. Wenn die Grundbegriffe der Mengenlehre in der zu unterrichtenden Klasse sicher beherrscht werden, kann die Wiederholung verkürzt und sofort in der ersten Stunde mit der Behandlung von Abbildungen verknüpft werden. Für die Behandlung des Funktionsbegriffs stehen dann 2 Stunden bereit. Der Lehrer sollte nicht versäumen, in die Stoffeinheit die Wiederholung verschiedener Stoffe aus der Mathematik einzubeziehen und Verbindungen zu anderen Fächern herzustellen (↗ Uh 168 bis 172). Die Auswahl trifft der Lehrer entsprechend den Erfordernissen in seiner Klasse.

3.2. Lineare Funktionen (9 Stunden)

Das Hauptziel dieser Stoffeinheit besteht in der Einführung in die systematische Behandlung von Funktionen, deren Abbildungsvorschriften durch Gleichungen gegeben werden können. Wir beginnen mit den verhältnismäßig leicht überschaubaren linearen Funktionen. Zunächst wird an die Kenntnisse über die direkte Proportionalität angeknüpft und das Rüstzeug zum graphischen Darstellen der Funktionen durch Erweiterung des Koordinatensystems geschaffen. Danach werden schrittweise Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx$ und $y = mx + n$ betrachtet, wobei wir den Bereich der rationalen Zahlen als Definitionsbereich wählen. Die Erörterung der Eigenschaften wird in starkem Maße an den graphischen Darstellungen orientiert. In der Zusammenfassung und Systematisierung erfolgt auch ein Vergleich mit anderen Funktionen (z. B. $y = |x|$ u. a.).

3.2.1. Das rechtwinklige Koordinatensystem (2 Stunden; Lerneinheiten C 4 und 5)

Die Schüler lernen das Koordinatensystem als ein Hilfsmittel für das graphische Darstellen von Funktionen kennen.
Diagramme sind ihnen bereits bekannt. Wir greifen vor allem auf die direkte Proportionalität und ihre graphische Darstellung zurück, die in Klasse 6 behandelt wurden.
Die Erweiterung des Koordinatensystems auf vier Quadranten kann durch ein praktisches Beispiel motiviert werden. Im Mathematikunterricht der Klasse 7 haben die Schüler den Übergang vom Zahlenstrahl zur Zahlengeraden kennengelernt, der bei der Erweiterung des Bereichs der gebrochenen Zahlen zu dem der rationalen Zahlen vorgenommen wurde. Daran sollte angeknüpft werden.
Die Schüler sollen lernen, Zahlenpaare $(x_i; y_i)$, x_i und y_i aus R, auf Punkte eines Koordinatensystems abzubilden und zu bestimmten vorgegebenen Punkten eines Koordinatensystems Zahlenpaare anzugeben. Zur Rationalisierung und Intensivierung der Übungen werden Blätter mit vorbereiteten Koordinatensystemen, Arbeitsblätter und Hafttafeln empfohlen. Im Verlaufe des Unterrichts, vor allem auch der folgenden Unterrichtseinheiten, sollen die Schüler zu der Einsicht geführt werden, daß das rechtwinklige Koordinatensystem ein Mittel darstellt, mit dessen Hilfe die Eigenschaften von Funktionen anhand der graphischen Darstellungen besonders gut erkannt werden können. Im Koordinatensystem erscheinen Funktionen (meist) als Kurven, deren Gestalt wichtige Aussagen über die Eigenschaften liefert. Die graphische Darstellung von Funktionen wird in der Mathematik als heuristisches Mittel zum Erkennen wesentlicher Eigenschaften benutzt und findet vor allem in der Praxis in vielfältiger Weise Verwendung. Andere Darstellungsformen für Funktionen, wie sie im letzten Schwerpunkt der vorangehenden Unterrichtseinheit genannt wurden (Uh 176), bieten zwar für bestimmte Zwecke Vorteile, lassen aber im allgemeinen die mathematisch bedeutsamen Eigenschaften nicht so klar hervortreten wie die graphische Darstellung in einem Koordinatensystem.
Bei der graphischen Darstellung von Funktionen in einer durch ein Koordinatensystem orientierten Zeichenebene erfolgt eine eindeutige Abbildung der Elemente der Funktion, der geordneten Paare, in die Punktmenge der Zeichenebene.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.2.1.: Zueinander direkt proportionale Zahlenfolgen (Lerneinheit C 4)

Wir geben zwei Zahlenfolgen vor, etwa die im Lehrbuch angegebenen (Lb 62), und lassen die Schüler untersuchen, ob sie zueinander direkt proportional sind.
Die Schüler bestimmen den einheitlichen Faktor c und formulieren die Beziehung als Gleichung $y = c \cdot x$.
Sie stellen die Proportionalität in einer Wertetabelle und graphisch im rechtwinkligen Koordinatensystem dar. Dabei erfolgt die Wiederholung der Begriffe am Koordinatensystem unter Verwendung des Bildes 3.9.
Den Lehrer weisen wir auf die Darlegungen über die Einführung direkt proportionaler Zahlenfolgen in der Unterrichtshilfe für die Klasse 6 hin.[1])
Für die Übung im Unterricht und für Hausaufgaben empfehlen wir Aufgaben aus Nr. c 6, Lb 123.

[1]) *Unterrichtshilfen Mathematik 6. Klasse,* Seiten 166–172. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1975.

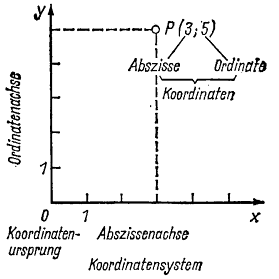


Bild 3.9.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.2.1.: Das rechtwinklige Koordinatensystem (Lerneinheit C 5)

Als Motiv für die Erweiterung des Koordinatensystems können wir z. B. die Temperaturmessung an einem Wintertag wählen. Wir können auch sofort von einem mathematischen Beispiel ausgehen (Aufgabe 5a, Lb 123).
Mit der Erweiterung der Koordinatenachsen zu Geraden wird die Zeichenebene in 4 Felder eingeteilt, für die wir die Bezeichnung „Quadranten" einführen (↗Lb 63, Bild C 9). Zuvor müssen aber die Begriffe „Koordinaten", „Abszisse" „Ordinate", „Abszissenachse" und „Ordinatenachse" wiederholt werden. Dann könnten einige Vereinbarungen besprochen werden: Angabe der Einheiten auf den beiden Achsen; Anbringen der Bezeichnungen unterhalb der Abszissenachse und links von der Ordinatenachse, wodurch der praktisch am häufigsten verwendete 1. Quadrant von Bezeichnungen freigehalten wird. Davon geht man nur dann ab, wenn es für die Darstellung zweckmäßiger ist.
Das Hauptgewicht liegt auf Übungen im Abbilden geordneter Zahlenpaare auf Punkte im Koordinatensystem und im Angeben von Zahlenpaaren zu vorgegebenen Punkten. Arbeitsblätter sind für eine intensive und rationelle Gestaltung der Übung besonders bei der zweiten Aufgabenstellung sehr zu empfehlen (Aufgaben 16 und 18, Lb 125). Der Lehrer sollte entweder eine Hafttafel benutzen, auf die ein Koordinatensystem gezeichnet ist (evtl. Leisten oder dünne Streifen als Achsen), oder eine Schiefertuchtafel mit Koordinatensystem. Auch ein Koordinatensystem auf einer Folie für den Tageslichtschreibprojektor „Polylux", kann gute Dienste leisten. An der Hafttafel werden Punkte durch Magnethaftsteine dargestellt, deren eine Seite man hell gefärbt hat. Die Schüler sollten in Vorbereitung auf diese Übung auf Kästchenpapier (evtl. Millimeterpapier) Koordinatensysteme zeichnen.
Für Übungen und Hausaufgaben stehen die Aufgaben c 7 bis 18 (Lb 123 bis 125) zur Verfügung, die unter anderem auch eine Wiederholung der Spiegelung einschließen können (Aufgaben c 12 bis 15).

Zusammenfassung:

Die Unterrichtseinheit ist durch Einsatz geeigneter Arbeitsmittel für den Lehrer und für die Schüler rationell und intensiv zu gestalten. Wir empfehlen, für den ersten Schwerpunkt etwa eine halbe Unterrichtsstunde zu verwenden und in dieser Stunde

auch die Erweiterung des Koordinatensystems auf vier Quadranten durch Erweitern der Koordinatenachsen zu Zahlengeraden vorzunehmen.
Die zweite Stunde sollte vollständig vielfältigen Übungen in der Verwendung des Koordinatensystems zur Abbildung von Zahlenpaaren und zur Angabe von Zahlenpaaren zu bestimmten vorgegebenen Punkten dienen. In die Übungen sind auch graphische Darstellungen von Zahlenpaaren proportionaler Zahlenfolgen einzubeziehen. In Verbindung mit dem Hinweis auf Punkte des Koordinatensystems, für die kein Paar rationaler Zahlen angegeben werden kann, sind die Kenntnisse der Schüler über irrationale Zahlen (aus Klasse 7) zu wiederholen.

3.2.2. Funktionen mit einer Gleichung der Form $y = mx$ (3 Stunden; Lerneinheiten C 6 bis 8)

Nach der Definition des Funktionsbegriffs lernen die Schüler von dieser Unterrichtseinheit ab systematisch spezielle, in ihrer Struktur einfache Funktionen kennen. Als Glieder der geordneten Paare treten zunächst nur rationale Zahlen auf (in Anwendungen auch Größen). Die Abbildungsvorschriften sind durch Gleichungen gegeben.
Es ist wichtig, daß gelegentlich immer wieder Beispiele für andere Funktionen eingeflochten werden, damit keine Einengung des Begriffes entsteht, vielmehr die Schüler die linearen Funktionen als spezielle Funktionen begreifen. Sie müssen erkennen:

– Nicht jede Funktion ist eine Abbildung von Zahlenmengen;
– Nicht jede Funktion ist durch eine Gleichung darstellbar.

Anknüpfend an die Kenntnisse der Schüler über die direkte Proportionalität werden lineare Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx$ behandelt.
Wir gehen von mehreren konkreten Beispielen für Abbildungsvorschriften aus und gelangen zur allgemeinen Form $y = mx$. Die Bedeutung des Faktors m für die Lage der graphischen Darstellung der Funktion im Koordinatensystem verwenden wir als Systematisierungsgesichtspunkt.
Die Ziele der Unterrichtseinheit bestehen darin, daß die Schüler diese Funktion genau kennenlernen und erkennen, daß vielfältige Beziehungen durch Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx$ erfaßt werden können. Sie sind in der Lage, Zahlenpaare zu berechnen, die einer Funktionsgleichung $y = mx$ genügen, entsprechende Wertetafeln aufzustellen und die Funktionen graphisch darzustellen. Sie wissen, daß alle Punkte der graphischen Darstellung auf ein und derselben Geraden liegen. Dazu wird der Beweis mit Hilfsmitteln aus der Ähnlichkeitslehre geführt. Sie machen sich dieses Wissen zunutze, indem sie zwei geeignete Punkte für die Darstellung auswählen, wobei sie auch den Anstieg m verwenden.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.2.2.: Funktionen mit einer Gleichung der Form $y = mx$ ($m \neq 0$, $m \in R$) (Lerneinheit C 6)

Wir gehen von mehreren Beispielen für direkt proportionale Zahlenfolgen und Größen aus. Sie werden der Mathematik, der Physik und anderen Gebieten entnommen. In jedem Fall wird die entsprechende Funktionsgleichung gebildet. Beispiele enthält das Lehrbuch (Lb 64 und Aufgaben c 6 a bis f, Lb 123).
Die Schüler sollten auch selbst entsprechende Beziehungen suchen. Dem Tafelwerk können mathematische und physikalische Formeln entnommen werden.
Die Erarbeitung der Gleichung $y = mx$, die die Schüler in der Gestalt $y = c \cdot x$ bereits

aus Klasse 6 kennen, wird erneut als Verallgemeinerungsprozeß gestaltet, in dem von mehreren konkreten Fällen abstrahiert wird.
Im Bild 3.10., das als Tafelbild entwickelt werden kann, sind mehrere Beispiele zusammengestellt, die dem Lehrbuch und dem Tafelwerk[1]) entnommen sind.

Beispiele für Funktionen aus Mathematik und Physik (Proportionalitäten)		
1. $s = \underline{90} \cdot t$	6. $s = \underline{v} \cdot t$	allgemeine Form:
2. $y = \underline{0{,}05} \cdot x$	7. $F_2 = \underline{\frac{1}{2}} \cdot F_1$	$\square = m \cdot \bigcirc$
3. $u = \underline{4} \cdot a$	8. $F = \underline{m} \cdot a$	$\boxed{y = m \cdot x}$
4. $e = a \cdot \underline{\sqrt{2}}$	9. $p = h \cdot \underline{\gamma}$	$\downarrow$
5. $u = \underline{\pi} \cdot d$	10. $P = F \cdot \underline{v}$	m Proportionalitätsfaktor

Bild 3.10.

1. Beispiel C 15 (Lb 64)
2. Aufgabe c 6a (Lb 123)
3. Aufgabe c 1d (Lb 130)
4. Quadratdiagonale
5. Kreisumfang
6. Weg bei gleichförmig geradliniger Bewegung
7. Kraft an der losen Rolle
8. Grundgesetz der Dynamik
9. Schweredruck in Flüssigkeiten
10. Leistung

Zu beachten ist, daß in den Beispielen gleiche Symbole in verschiedener Bedeutung auftreten. Die Schüler können daraus ersehen, daß zum richtigen Gebrauch der Tafel Kenntnisse über die Bedeutung der Symbole gehören. In den meisten Fällen kann diese Bedeutung jedoch ebenfalls dem Tafelwerk entnommen werden.
Auf der rechten Seite der Gleichungen 6, 8, 9 und 10 ist jeweils eine Größe als konstant anzusehen, etwa die Geschwindigkeit v, die Masse m oder die Wichte γ. Der Lehrer unterstützt den Verallgemeinerungsprozeß bei den Schülern, indem er zunächst die konstanten Faktoren unterstreichen läßt.
Die Schüler formulieren die Abhängigkeiten oder Zuordnungen mit eigenen Worten:

„*Der zurückgelegte Weg ist abhängig von der abgelaufenen Zeit.*"
„*Jeder Seitenlänge eines Quadrates entspricht ein bestimmter Umfang*" *usw.*

Sodann sind die Formulierungen zu präzisieren:

„*Die Maßzahl des zurückgelegten Weges ist das 90fache der Maßzahl der abgelaufenen Zeit.*"
„*Der Weg ist proportional zur Zeit. Die Geschwindigkeit (90 km in der Stunde) ist der Proportionalitätsfaktor.*"
„*Der Umfang eines Quadrates ist gleich dem Vierfachen der Seitenlänge. Der Umfang ist proportional zur Seitenlänge.*" *usw.*

Es sollte darauf geachtet werden, daß die Schüler die Definitionsbereiche und Wertebereiche und einzelne Elemente daraus richtig beschreiben bzw. nennen können. Der Gebrauch des mathematischen Begriffes „Menge" ist deutlich vom umgangssprach-

[1]) Tabellen und Formeln, Mathematik – Physik – Chemie. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973 (Titel-Nr. 00 07 13).

lichen Gebrauch abzuheben. In Aufgabe c 6 a (Lb 123) wird z. B. nicht „eine Menge Brötchen" auf „eine Menge Geld" abgebildet! Der Definitionsbereich besteht hier aus Mengen von Brötchen, der Wertebereich aus Geldbeträgen. Jedes Element des Definitionsbereichs ist eine Menge, der Definitionsbereich also eine Menge von Mengen. Jeder Menge von Brötchen (z. B. der Menge von 4 Brötchen) wird genau ein Geldbetrag (0,20 M), ihr Preis, zugeordnet.
In allen Gleichungen treten drei Größen bzw. Zahlen auf. Sie sind wohl zu unterscheiden. Um die Elemente des Definitions- bzw. Wertebereichs, die durch die Variablen bezeichnet werden, deutlich hervorzuheben, zeichnen wir für die zu gewinnende allgemeine Form auf der linken Seite zunächst ein leeres Kästchen, in gleicher Weise für die Variable auf der rechten Seite einen leeren Kreis. Für den konstanten Faktor wählen wir die Variable m. Schließlich setzen wir in die Leerstellen die üblichen Bezeichnungen y und x ein.
Für einzelne Beispiele berechnen die Schüler geordnete Zahlenpaare, die die Funktionsgleichung erfüllen. Dazu verwenden sie die Proportionaleinstellung auf dem Rechenstab.
Für Übungen und Hausaufgaben werden die Aufgaben c 19 und 20 (Lb 125) empfohlen, deren Lösungen als Grundlage für die sich anschließende Behandlung der graphischen Darstellung der Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx$ verwendet werden können.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.2.2.: Graphische Darstellung der Funktionen $y = mx$ $(m \neq 0)$ (Lerneinheit 7)

1. Unter Verwendung von Wertetafeln stellen die Schüler Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx$ im Koordinatensystem graphisch dar. Dazu sollten vorbereitende Hausaufgaben erteilt werden (siehe oben!).
2. Aus einigen Darstellungen (auch Bild C 11, Lb 65) entsteht die Vermutung, daß alle Punkte der graphischen Darstellung einer solchen Funktion auf jeweils ein und derselben Geraden liegen. Die Schüler kennen das bereits von der graphischen Darstellung der direkten Proportionalität in Klasse 6. Dort war das ihnen lediglich mitgeteilt worden. Jetzt ist es notwendig, das Bedürfnis zu wecken, diese Behauptung wie jede andere in der Mathematik zu beweisen. Die Schüler werden auch in Klasse 8 leicht geneigt sein, diesen Umstand als selbstverständlich hinzunehmen. („Das sieht man doch!") Wir sollten das Beweisbedürfnis nicht immer nur dadurch zu wecken suchen, daß wir die Behauptung anzweifeln. Vielmehr sollten wir die richtige Vermutung bestätigen und die Schüler auffordern, stichhaltige Begründungen dafür anzugeben. Das Bemühen darum führt dann zwangsläufig zum Beweis.
3. Als wesentliche Voraussetzungen für das Verstehen des Beweises müssen die Schüler erstens wissen, daß die Koordinaten von Punkten, die der graphischen Darstellung der Funktion $y = mx$ angehören, die Gleichung erfüllen. Sie müssen zweitens die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke anwendungsbereit beherrschen.
4. Zunächst wird die logische Struktur der Behauptung aufgehellt. Die Schüler formulieren den Satz C 2 (Lb 65) in die „wenn – so"-Form um:
   Wenn ein Punkt zur graphischen Darstellung der Funktion $y = mx$ $(m \neq 0)$ gehört, so liegt er mit allen anderen zugehörigen Punkten auf ein und derselben durch den Ursprung verlaufenden Geraden.
   Ein Punkt der Darstellung ist gewiß der Koordinatenursprung, weil seine Koordinaten die Gleichung erfüllen. Wählen wir zwei beliebige weitere Punkte der Darstellung, so müssen sie auf ein und derselben Geraden durch den Ursprung liegen.

5. Die Beweisidee kann verhältnismäßig leicht gefunden werden, wenn wir zu zwei (beliebigen) Punkten die Ordinaten und Abszissen einzeichnen. Die entstehenden Dreiecke können herausgezeichnet werden (Bild C 12, Lb 65). Die Schüler vermuten die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke und weisen sie mit Hilfe eines Ähnlichkeitssatzes (Lb 42, Satz B 14) nach.
Der Beweisgang ist ausführlich im Lehrbuch dargestellt. Er wird zunächst nur für eine bestimmte Funktion, $y = 2x$, geführt. Dann wird darauf hingewiesen, daß der Beweis in gleicher Form für jedes andere m abläuft. Der Fall $m = 0$ wird ausgeschlossen.
6. Es bleibt noch die Frage offen, ob jeder Punkt der Geraden, auf der zwei beliebige Punkte der graphischen Darstellung der Funktion $y = mx$ liegen, selbst zur graphischen Darstellung gehört, seine Koordinaten also die Gleichung $y = mx$ erfüllen. Das wäre die Umkehrung des Satzes. Wir teilen den Schülern mit, daß der Beweis nur in einem umfassenderen Zahlenbereich geführt werden kann, auf dessen Existenz bereits in Klasse 7 bei der Behandlung von Quadratwurzeln und der Einführung des Begriffes „irrationale Zahl“ verwiesen wurde, der aber erst in Klasse 9 aufgebaut wird. Solange nur der Bereich R der rationalen Zahlen als Definitions- und Wertebereich zur Verfügung steht, bleiben auf der Geraden noch Lücken bestehen, also Punkte, die nicht zur graphischen Darstellung der Funktion gehören. Ein solcher Punkt P ist z.B. konstruierbar, wenn wir vom Ursprung auf dem Bild der Funktion $y = x$ eine Einheit abtragen. Dessen Koordinaten haben beide die Länge $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$, sind also nicht rational (Bild 3.11.).

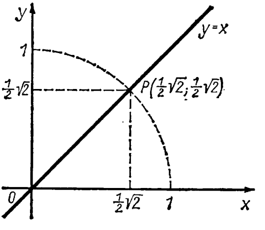


Bild 3.11.

Aus diesen Gründen können wir noch nicht formulieren:

Die graphische Darstellung einer Funktion $y = mx$ *ist eine Gerade.*

Wir können nur sagen:

Alle Punkte der graphischen Darstellung einer Funktion $y = mx$ *liegen auf einer* (gemeinsamen) *Geraden* durch den Ursprung.
Da die Lücken auf der Geraden, wenngleich ihre Anzahl unbegrenzt ist, nicht sichtbar sind, sprechen wir dennoch häufig einfach von „der Geraden“. Hier wird erneut deutlich, welche Grenzen der Veranschaulichung abstrakter mathematischer Beziehungen gesetzt sind. Im Interesse der mathematischen Bildung der Schüler sollte der Lehrer unbedingt darauf hinweisen. Leistungsstarke Schüler können in diesem Zusammenhang Zusatzaufgaben erhalten.

Als Folgerung für das Konstruieren der graphischen Darstellung der Funktion mit der Gleichung $y = mx$ ergibt sich aus dem Beweis, daß lediglich zwei Punkte angegeben werden müssen, die durch eine Gerade miteinander zu verbinden sind. Alle Punkte der graphischen Darstellung liegen auf dieser Geraden. Ein Punkt der graphischen Darstellung von $y = mx$ ist der Koordinatenursprung.
Wir benötigen also noch einen zweiten, der nicht zu nahe beim ersten liegen sollte. Einen dritten Punkt lassen wir stets zur Kontrolle einzeichnen.

Dritter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.2.2.: Der Anstieg m (Lerneinheit C 8)

Nachdem erarbeitet und bewiesen wurde, daß alle Punkte der graphischen Darstellung einer Funktion mit einer Gleichung der Form $y = mx$ ($m \neq 0$) auf einer Geraden liegen, die durch den Koordinatenursprung verläuft, ist noch die Neigung der Geraden gegenüber den Koordinatenachsen zu erörtern. Wir empfehlen, in drei Schritten vorzugehen.

1. Wir lassen die Schüler mehrere Funktionen in ein und dasselbe Koordinatensystem zeichnen und nach einem Kriterium für die Neigung gegenüber der Abszissenachse suchen (↗ Bild C 14, Lb 67). Sie sollen finden, daß die Neigung von m abhängt. Für diesen Koeffizienten führen wir die Bezeichnung „Anstieg“ ein.
2. Untersuchungen über die Bedeutung des Anstiegs m für das Steigen oder Fallen der Geraden und für die symmetrische Lage zweier Geraden bezüglich der Abszissen- und der Ordinatenachse schließen sich an. (Aufgabe c 25, Lb 125, sowie die Bilder C 15 und C 16, Lb 67)
3. Die Betrachtungen sollten in einer Systematisierung der Lagebeziehungen der Geraden zur Abszissenachse in Abhängigkeit von m mit dem Ziel münden, diese Kenntnisse über m für das graphische Darstellen nutzbar zu machen.
   Zur Gegenüberstellung betrachten wir noch die Funktion mit der Gleichung $y = |x|$, die Betragsfunktion, und stellen sie graphisch dar (Bild C 17 und Aufgabe c 26, Lb 125). Die Schüler können selbständig den Wertebereich bestimmen (Bereich der nichtnegativen rationalen Zahlen).

Wir stellen im folgenden einige Möglichkeiten dar, den Zusammenhang zwischen dem Anstieg m und der Lage der Geraden sichtbar zu machen. Für den Unterricht kann der Lehrer davon die eine oder andere auswählen.

- Durch den Punkt P' (1; 0) wird eine Parallele zur Ordinatenachse gezeichnet (Bild 3.12.). Sie schneidet die graphische Darstellung der Funktion in einem Punkt P (1; m). Die Ordinate dieses Punktes können die Schüler berechnen, indem sie für x in die Gleichung $y = m \cdot x$ die Zahl 1 einsetzen. Wir beschränken uns auf rationale m. Neben $P_0(0; 0)$ ist damit ein zweiter Punkt $P(1; m)$ gewonnen, durch den die Lage der Geraden festgelegt ist.
- P liegt aber im allgemeinen sehr nahe bei P_0, so daß die Darstellung ungenau wird. So wie das Paar (1; m) erfüllt auch jedes Paar (k; km) mit $k \in R$ die Gleichung $y = mx$. In der graphischen Darstellung entspricht das der Ähnlichkeit der Dreiecke $P_0P'P$, $P_0P_1'P_1$, $P_0P_2'P_2$, $P_0P_3'P_3$ usw. (Bild 3.13.). Als zweiten Punkt für die graphische Darstellung können wir also einen Punkt P_k (k; km) verwenden.
- Für die Systematisierung eignen sich die Bilder 3.14. oder 3.15. Die Felder der einzelnen Bereiche sollten farbig voneinander abgehoben (Bild 3.14.) oder die Geraden selbst farbig eingezeichnet werden (Bild 3.15.). Die Bilder der Funktionen $y = x$ und $y = -x$ als Winkelhalbierende des I./III. bzw. II./IV. Quadranten werden hervorgehoben. Der Fall $m = 0$ wird einbezogen. Die Schüler sollen erkennen, daß die Ordinatenachse und

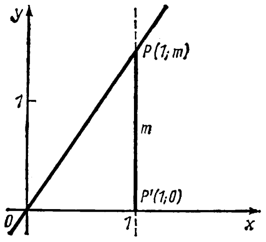


Bild 3.12.

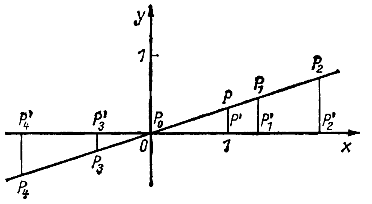


Bild 3.13.

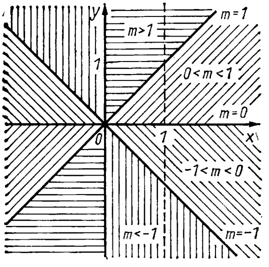


Bild 3.14.

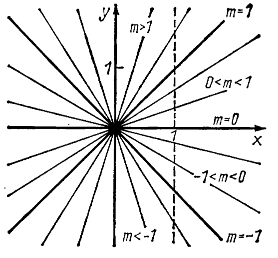


Bild 3.15.

Parallelen zu ihr, z.B. die durch (1; 0), keine graphischen Darstellungen von Funktionen sind, wenn der Definitionsbereich (wie üblich) auf der Abszissenachse abgebildet ist. Der Verlauf der Geraden wird jeweils wachsenden x-Werten entsprechend beschrieben: „die Gerade steigt vom III. zum I. Quadranten“, „die Gerade fällt vom II. zum IV. Quadranten“. Die Bilder sind schrittweise zu entwickeln. Bild 3.15. kann als Zusammenfassung der Bilder C 14 im Lehrbuch gegeben werden.
Vgl. auch die Abbildungen in „Mathematik in Übersichten“, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973, S. 63.

Unterrichtsmittel für eine rationelle und intensive Gestaltung der Übungen und der Systematisierung:

Für den Lehrer:

Hafttafeln bzw. Haftschiefertafeln mit Koordinatensystemen, auf denen Geraden durch dünne Leisten oder Streifen markiert werden. Durch Drehung der Geraden (Leisten) um den Ursprung zeigen wir die verschiedenen Lagen. Auch der Einsatz eines Schreibprojektors sei hier empfohlen.

Für die Schüler:

Vorbereitete Koordinatensysteme auf Millimeterpapier, evtl. in Klarsichtfolientaschen eingelegt, auf die sie dünne Stäbe als Geraden legen. Für eine rasche Rückkopplung eignen sich besonders sogenannte Koordinatenscheiben (Bild 3.16.). Auf eine runde feste Pappscheibe ist ein auf Millimeterpapier gezeichnetes Koordinatensystem aufgeklebt. Im Ursprung sind auf der Rückseite mit einem Splint einige Gummischlaufen befestigt, die über die Scheibe gezogen werden können. Die Schüler können damit Geraden andeuten und die Scheiben zur Kontrolle durch den Lehrer hochhalten. Der Lehrer kann sich rasch davon überzeugen, wie viele Schüler die Aufgabe richtig gelöst haben. Das Arbeitsmittel können sich die Schüler leicht selbst herstellen.

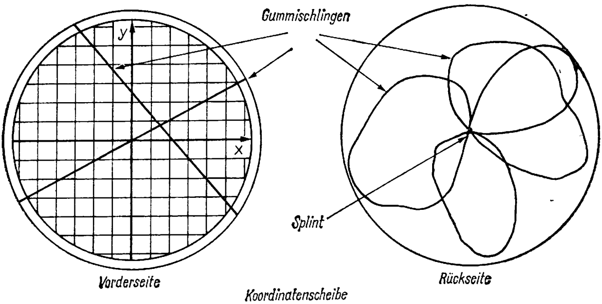


Bild 3.16.

Übungen, in denen Funktionsgleichungen aus vorgegebenen graphischen Darstellungen näherungsweise zu bestimmen sind, können durch den Einsatz eines Arbeitsblattes rationell gestaltet werden.

Zusammenfassung:

1. Die Schüler lernen Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx$ kennen. Vielfältige Beispiele sollen den Schülern zeigen, daß mit der allgemeinen Funktion $y = mx$ eine große Anzahl verschiedener Beziehungen aus unterschiedlichen Bereichen erfaßt werden. Sie verstehen den Verallgemeinerungsprozeß, der von den Einzelbeispielen zu der Gleichung $y = mx$ führt.
2. Eine besondere Rolle in den Untersuchungen spielt die graphische Darstellung, weil aus ihr leicht wesentliche Eigenschaften der Funktion abgelesen werden können. Es wird bewiesen, daß alle Punkte der graphischen Darstellung einer Funktion mit einer Gleichung der Form $y = mx$ auf einer Geraden liegen, die durch den Koordinatenursprung verläuft.
3. Die Schüler lernen den Einfluß des Anstiegs m auf die Lage der graphischen Darstellung der Funktion im Koordinatensystem kennen. In einer Systematisierung werden die Verlaufsmöglichkeiten gegenübergestellt. Vergleichsweise wird die Funktion mit der Gleichung $y = |x|$ betrachtet. Der Anstieg m wird zur raschen Fest-

legung von Punkten der graphischen Darstellung genutzt. Rationelle Übungen im graphischen Darstellen durch Verwenden geeigneter Arbeitsmittel schließen die Unterrichtseinheit ab.

Für die Behandlung der drei Schwerpunkte sollte jeweils eine Stunde verwendet werden.

3.2.3. Funktionen mit einer Gleichung der Form $y = mx + n$ (4 Stunden; Lerneinheiten C 9 und 10)

Das Hauptziel der Unterrichtseinheit besteht für die Schüler im Kennenlernen der linearen Funktionen. Die systematische Untersuchung wird fortgesetzt, indem wir von den bekannten Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx$ ausgehen und in den Gleichungen einen konstanten Summanden hinzufügen, also einen Summanden, in dem die Variable x nicht enthalten ist.
Die Motivierung kann auch durch geeignete praktische Beispiele erfolgen.
Die Gleichungen werden in dieser Unterrichtseinheit i. allg. in der Form $y = mx + n$ gegeben. Die Begriffe „explizite" und „implizite" Form werden nicht verwendet. Gleichungen der Gestalt $ax + by + c = 0$ treten verstärkt im Stoffabschnitt 3.4. im Zusammenhang mit der Behandlung von Gleichungen mit mehreren Variablen auf.
Die Schüler berechnen geordnete Zahlenpaare, die die Funktionsgleichung $y = mx + n$ erfüllen. Der Einfluß von n auf die Lage der graphischen Darstellung im Koordinatensystem wird untersucht und für die Bestimmung des Bildes genutzt. Die Schüler üben das graphische Darstellen von linearen Funktionen und das näherungsweise Bestimmen der Funktionsgleichung aus vorgegebenen graphischen Darstellungen.
Nach der Untersuchung mehrerer Funktionen der Form $y = mx + n$ ($m \neq 0$) erfolgt eine Systematisierung, bei der auch spezielle Fälle erfaßt und Funktionen, die nicht die Form $y = mx + n$ haben, ($y = |x| + n$), zum Vergleich herangezogen werden.
Die Unterrichtseinheit wird mit einer Zusammenfassung des Stoffes der Abschnitte 3.1. und 3.2. abgeschlossen.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.2.3.: Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx + n$ ($m \neq 0$; $m, n \in R$) (Lerneinheit C 9)

In Analogie zur Einführung von Funktionen mit einer Gleichung der Form $y = mx$ ($m \neq 0$), Unterrichtseinheit 3.2.2., 1. Schwerpunkt, gehen wir von Beispielen aus, die zu der allgemeinen Form $y = mx + n$ führen.

1. Der Lehrer gibt z. B. den folgenden Sachverhalt vor (transportable Tafel):

   Die Elektroenergiemenge von 1 kWh kostet für den Verbraucher 0,08 M. Zusätzlich wird eine Grundgebühr von 2,50 M erhoben.
2. Die Schüler sollen selbständig die Beziehung in Form einer Gleichung niederschreiben. Als Impuls kann der Lehrer den Hinweis geben, zunächst die Grundgebühr außer acht zu lassen und sie später als Summand hinzuzufügen. So gewinnen die Schüler die Gleichung $y = 0{,}08x + 2{,}50$.
3. Aus ihren physikalischen Kenntnissen und aus dem Tafelwerk suchen sie weitere Beispiele, die auf Gleichungen dieser Gestalt führen. Aus dem Lehrbuch können Aufgabe 5 f, Lb 123, und die Gleichungen aus den Aufgaben c 27 und 28, Lb 126, verwendet werden. Wir erhalten z. B. folgende Zusammenstellung:

$y = \underline{0{,}08}x + 2{,}50$	(Beispiel v. oben)
$y = \underline{2}x - 3$	(Aufgabe 5f, Lb 123)
$v = v_0 + \underline{a} \cdot t$	(gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit)
$l_t = l_0 + \underline{l_0 \cdot \alpha} \cdot \Delta\vartheta$	(Längenausdehnung eines Stabes bei Erwärmung)

4. Die Schüler unterstreichen die konstanten Koeffizienten, die bei der Variablen auf der rechten Seite der Gleichungen stehen, und die konstanten Summanden mit verschiedenen Farben und verallgemeinern zu

$$\boxed{y = mx + n}$$

5. Wir lassen die Schüler zu einem einfachen Beispiel die Wertetafel berechnen. Wir empfehlen dazu, zunächst eine Tafel für $y = \frac{1}{2}x$ aufzustellen und danach für $y = \frac{1}{2}x + 3$. Die Tabelle lassen wir in der folgenden Form anlegen:

x	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{1}{2} \cdot x$						
$\frac{1}{2} \cdot x + 3$						

Sie bildet die Grundlage für die Untersuchung der graphischen Darstellung solcher Funktionen.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.2.3.: Graphische Darstellung von Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx + n$ (Lerneinheiten C 9 und 10)

Das graphische Darstellen und die Untersuchung der Bilder der linearen Funktionen umfassen den größten Zeitraum der Unterrichtseinheit. Wir empfehlen, in folgenden Schritten vorzugehen:

1. Zu dem Beispiel, das wir am Ende des 1. Schwerpunktes vorgeschlagen haben, fertigen die Schüler die graphische Darstellung an. Die Differenz 3, die zwischen den entsprechenden Funktionswerten von $y = \frac{1}{2}x$ und $y = \frac{1}{2}x + 3$ besteht, wird im Bild als Verschiebung erkennbar. Wir markieren die Verschiebung durch Pfeile (↗Bild C 18, Lb 69). Die Richtung der Geraden bleibt konstant (m verändert sich nicht), die Verschiebung ist von n abhängig. Wir müssen darauf achten, daß die Schüler die Verschiebung nicht mit dem Abstand der beiden Geraden verwechseln. Wir lassen daher formulieren: Der Summand n in $y = mx + n$ gibt an, um welchen Betrag und in welcher Richtung die Gerade mit der Gleichung $y = mx$ **längs der Ordinatenachse** verschoben ist. Das Verschieben wird anschaulich z. B. an einer Hafttafel ausgeführt.
2. Wir zeigen, daß alle Punkte der graphischen Darstellung einer Funktion mit einer Gleichung der Gestalt $y = mx + n$ ($m, n \in R$, $m \neq 0$) auf einer Geraden liegen. Mit

unserem Vorgehen in 1. haben wir den Grundgedanken bereits erfaßt. Für die Lückenhaftigkeit der Geraden gilt das gleiche, was bereits im 2. Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.2.2. (↗Uh 183, Punkt 6) zum Ausdruck gebracht wurde.

3. Wir suchen nun nach geeigneten Verfahren zur Gewinnung der Koordinaten zweier Punkte, die es ermöglichen, solche Funktionen rasch und sicher graphisch darzustellen. Wir sollten den Schülern erklären, daß prinzipiell bei allen Funktionen, auch bei komplizierten, die in den folgenden Klassenstufen behandelt werden, stets die Berechnung von Wertetabellen für eine Mindestanzahl von Punkten zum Ziel führt. Diesen Weg müssen die Schüler sicher beherrschen. Im Lehrplan wird ausdrücklich das Berechnen von geordneten Zahlenpaaren, die einer solchen Funktionsgleichung genügen, verlangt. Ein weiteres Ziel besteht aber darin, möglichst rasch die Koordinaten zweier geeigneter Punkte zu ermitteln und dabei spezielle Eigenschaften von Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx + n$, vor allem die Bedeutung der Zahlen m und n, für die Darstellung zu nutzen.
   Die im 1. Schritt gewonnenen Erkenntnisse werden dafür verwendet.
   - Mit Hilfe des Anstiegs m können wir die Funktion $y = mx$ darstellen (↗3. Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.2.2.).
   - Der Summand n gibt die Verschiebung der Geraden in Richtung der y-Achse an, liefert uns also den Schnittpunkt $P_n(0; n)$ der Geraden mit der Ordinatenachse. Durch eine Zeichnung (Bild 3.17.) machen wir den Zusammenhang verständlich.

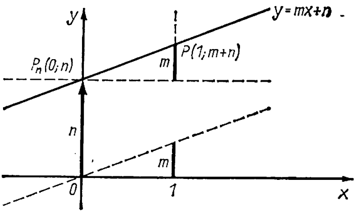


Bild 3.17.

   Daraus lesen die Schüler folgende Wege ab:
   - Wir zeichnen das Bild der Funktion $y = mx$ und dazu eine Parallele durch $P_n(0; n)$.
   - Wir zeichnen durch $P_n(0; n)$ eine Parallele zur Abszissenachse, betrachten P_n als Ursprung eines verschobenen Koordinatensystems und zeichnen das Bild von $y = mx$ ein.
   - Wir zeichnen eine Gerade durch $P_n(0; n)$ und $P(1; m + n)$.

4. Nun folgen Übungen
   - im graphischen Darstellen von Funktionen mit Gleichungen der Form

     $y = mx + n \ (m, n \in R, m \neq 0)$.

     Aufgaben der Art von c 27 bis 30 und c 35 (Lb 126) führen zugleich zu einer Vertiefung der Kenntnisse über den Einfluß der Zahlen m und n.
     Anhand von Aufgabe c 27 kann das Kriterium für die Parallelität der graphischen Darstellung zweier Funktionen $y = mx + n$ durch die Schüler erarbeitet werden. Als Unterrichtsmittel werden Hafttafeln und Koordinatenscheiben verwendet;

– im näherungsweisen Bestimmen der Gleichungen von Funktionen aus den graphischen Darstellungen: Aufgabe c 36 (Lb 126) oder ein entsprechend gestaltetes Arbeitsblatt und Aufgaben c 31 bis 34 sowie c 37.
Das Vorgehen ist im Lehrbuch im Beispiel C 21 (Lb 70) dargestellt. Die Schüler können aber m auch direkt aus der graphischen Darstellung ablesen, indem sie eine Parallele zur Ordinatenachse im Punkt $P\,(1;\,0)$ einzeichnen (Bild 3.17.).

5. Die Kenntnisse über die Funktionen mit einer Gleichung der Form $y = mx + n$ werden systematisiert. Auch die Fälle $n = 0$ und $m = 0$ werden einbezogen. Wir unterscheiden verschiedene Fälle und geben die graphische Darstellung der entsprechenden Funktionenschar an (Bild 3.18.). Eine Veränderung von m erscheint als Drehung um $P\,(0;\,n)$, genaugenommen erfolgt eine Streckung der Ordinaten

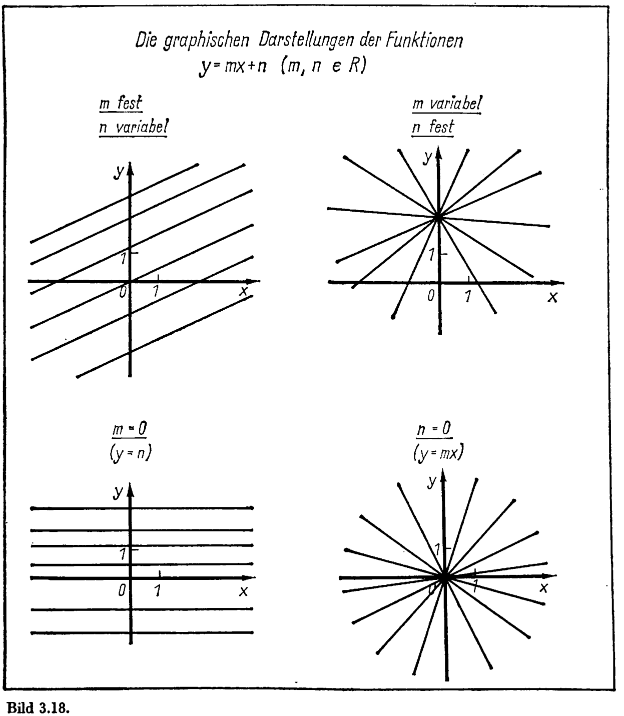


Bild 3.18.

Der Veränderung von n entspricht eine Verschiebung in Richtung der Ordinatenachse um n.
Bei einer Drehung der Geraden um 90° gegenüber der x-Achse erhalten wir Geraden, die nicht mehr als graphische Darstellungen von Funktionen aufgefaßt werden können, wenn auf der x-Achse der Definitionsbereich abgebildet ist.
Die Intensität der Systematisierung wächst, wenn wir die Darstellungen veränderlich gestalten. Die Hafttafel kann dafür gute Dienste leisten. Mit Hilfe eines Tageslichtschreibprojektors können aus drei Folien (Bilder 3.19. bis 3.21.) alle Fälle von Bild 3.18. durch Überdecken dargestellt und zudem noch in der Bewegung (Verschiebung, Drehung) gezeigt werden.

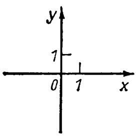


Bild 3.19.

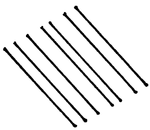


Bild 3.20.

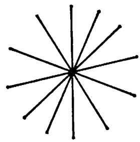


Bild 3.21.

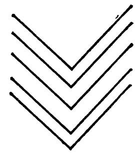


Bild 3.22.

Die Bilder werden mit Tusche auf Klarsichtfolie gezeichnet und zum Zwecke der guten Handhabung in feste Klarsichtfolientaschen eingelegt.

6. Nach der Systematisierung sollen die Schüler erneut zur Vertiefung ihres Wissens und Könnens das Untersuchen und Darstellen von Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx + n$ üben: Aufgaben 38 bis 42 (Lb 127).
Auch Anwendungen aus der Physik, wie sie im 1. Schwerpunkt genannt wurden, sollten in die Übungen einbezogen werden. Auf Funktionstafeln und Netztafeln an Maschinen und in Tabellenbüchern, auf graphische Fahrpläne u.a. kann hingewiesen werden. Beispiele findet der Lehrer auch in den im Literaturverzeichnis angeführten Büchern (3), (8), (9) und (10). (↗Uh 161).
7. Abschließend betrachten wir noch Funktionen mit Gleichungen der Form $y = |x| + n$ (Bild C 22, Lb 70, und Aufgabe c 43, Lb 127).
Mit einem Folienblatt (Bild 3.22.) können wir den Schülern durch Überdecken von Bild 3.19. die graphische Darstellung vor Augen führen. Gemeinsames und Unterschiedliches der Funktionenscharen
$y = mx + n$ ($m = 1$ und $m = -1$) und $y = |x| + n$
werden hervorgehoben.

Dritter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.2.3.: Lineare Funktionen und lineare Gleichungen (Lerneinheit C 10)

Am Ende der Stoffeinheit 3.2. führen wir für Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx + n$ die Bezeichnung „lineare Funktion" ein. Gleichungen der Art, wie wir sie für die Abbildungsvorschriften von linearen Funktionen verwenden, heißen „lineare Gleichungen". Da die Einführung des Begriffes „lineare Gleichung" im Zusammenhang mit der Behandlung linearer Funktionen erfolgt, müssen wir die Schüler darauf hinweisen, daß lineare Gleichungen nicht notwendig zwei Variablen enthalten. Vielmehr muß als Kennzeichen hervorgehoben werden, daß in linearen Gleichungen z.B. keine der zu betrachtenden Variablen in Potenzen mit dem Exponenten n ($n \neq 1$) oder unter Wurzelzeichen auftreten. Wir stellen entsprechende Beispiele gegenüber:

Lineare Gleichungen	Nichtlineare Gleichungen
$y = mx + n$	$A = a^2$
$3x + 4 = 0$	$y = \sqrt{x}$
$u = \pi \cdot d$	$x^2 + y^2 = 4$

Die Gleichung $x = a^2 + 3$ ist für x linear, für a oder für x und a jedoch nicht.
Der Begriff „lineare Gleichungen" wird im folgenden Stoffabschnitt vertieft. Abschließend weisen wir auf die praktische Bedeutung linearer Funktionen und linearer Gleichungen hin. Sie sind mathematisch verhältnismäßig leicht zu handhaben. Daher wird in der Praxis oft versucht, reale Beziehungen und Probleme durch lineare Modelle darzustellen. Bekannt ist die Linearoptimierung, ein in Technik und Ökonomie in breitem Maße verwendetes Verfahren.

Zusammenfassung:

1. In der Unterrichtseinheit 3.2.3. lernen die Schüler die linearen Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx + n$ kennen. Die in der vorangehenden Unterrichtseinheit behandelten Funktionen $y = mx$ erscheinen als Spezialfälle wieder. Im Mittelpunkt steht die systematische Behandlung der Eigenschaften dieser Funktionen. Sie werden vorwiegend anhand der graphischen Darstellungen der Funktionen erarbeitet.
2. Die Schüler sind am Ende der Stoffeinheit 3.2. in der Lage, Zahlenpaare zu berechnen, die die Funktionsgleichungen erfüllen, die Funktionen graphisch darzustellen und aus der graphischen Darstellung näherungsweise die Gleichung einer Funktion aufzustellen. Dabei wird der Einfluß der beiden Zahlen m und n in der Gleichung $y = mx + n$ auf die Lage der graphischen Darstellung im Koordinatensystem nutzbar gemacht.
3. Die bei der Behandlung der Stoffeinheit von den Schülern erworbenen Kenntnisse werden zusammengefaßt und systematisiert. Auf die praktische Bedeutung linearer Funktionen und Gleichungen wird anhand von Beispielen hingewiesen.

Vorschlag für die Zeiteinteilung:
1. Schwerpunkt: eine halbe Stunde,
2. Schwerpunkt: drei Stunden,
3. Schwerpunkt: eine halbe Stunde.

3.3. Nullstellen linearer Funktionen; lineare Gleichungen (4 Stunden)

Für diese Unterrichtseinheit ergeben sich die folgenden wichtigen Ziele:
Um das mathematische Rüstzeug für die Untersuchung der Beziehungen zwischen linearen Funktionen und Gleichungen zur Verfügung zu haben, werden die den Schülern bereits bekannten Begriffe aus der Gleichungslehre wiederholt.
Der Zusammenhang zwischen linearen Funktionen und Gleichungen beschränkt sich nicht auf die Nullstellenbestimmung. Zunächst wird daher noch einmal allgemein her-

ausgearbeitet, daß es Funktionen gibt, deren Abbildungsvorschrift als Gleichung gegeben werden kann. So können z. B. lineare Funktionen durch lineare Gleichungen mit zwei Variablen beschrieben werden. Wir knüpfen damit an die vorangehenden Unterrichtseinheiten an. Die Schüler sollen erkennen, daß die Lösungsmenge einer solchen Gleichung genau die Funktion ist, die Menge geordneter Paare.
Aus der Menge geordneter Paare greifen wir, soweit vorhanden, diejenigen heraus, deren zweites Glied die Zahl 0 ist. Das erste Glied eines solchen Paares bezeichnen wir als Nullstelle der Funktion. Nullstellen können aus den Funktionsgleichungen berechnet werden.
Wir gehen zur Deutung der Nullstelle in der graphischen Darstellung der Funktion über und erkennen sie als Abszisse des Schnittpunktes der graphischen Darstellung der Funktion mit der Abszissenachse.
Übungen im rechnerischen und näherungsweisen graphischen Bestimmen von Nullstellen linearer Funktionen schließen sich an. Dabei werden auch Funktionen gegenübergestellt, die keine oder mehrere Nullstellen besitzen.
Am Ende der Unterrichtseinheit fassen wir den Stoff der Abschnitte 3.1. bis 3.3. zusammen.
Aus dem skizzierten Weg ergeben sich drei Schwerpunkte:

Erster Schwerpunkt der Stoffeinheit 3.3.: Der Zusammenhang zwischen linearen Funktionen und linearen Gleichungen (Lerneinheit C 11)

Stundenvorschlag für die Behandlung des ersten Schwerpunktes:

Gliederung:

(1) Wiederholung von Begriffen aus der Gleichungslehre
(2) Erarbeitung des Zusammenhangs zwischen linearen Funktionen und linearen Gleichungen
(3) Übung im Berechnen von Zahlenpaaren aus Funktionsgleichungen

Methodische Hinweise:

Zu (1): In der Wiederholung arbeiten die Schüler weitgehend selbständig. Wir empfehlen, den Schülern die folgenden Aufgaben zur Lösung vorzulegen:

1. Welche der folgenden Ausdrücke sind Gleichungen?

a) $5 + x = 7$	**d)** $1 : 8 = 0{,}125$
b) $a \cdot b = c$	**e)** $3 \cdot 18 = 56$
c) $15 - 4 < 11$	**f)** $y = 2x - 1$

2. **a)** Welche Zahlen aus R erfüllen die Gleichung $|x + 7| = 14$?
b) Nenne *eine Lösung*!
c) Nenne die *Lösungsmenge*!

3. Löse die Gleichungen
a) $4x + 17 = 27; \quad x \in N$
b) $x + y = 100; \quad x \in R, y \in R$

Die Wiederholung kann als Kurzkontrolle gestaltet werden. In der Besprechung der Lösungen dieser Aufgaben kann der Lehrer alle zu wiederholenden Begriffe aus der Gleichungslehre klären und festigen.

Zu (2): Der Lehrer stellt die Frage, welche der Beispiele
- lineare Gleichungen darstellen,
- als Gleichungen linearer Funktionen aufgefaßt werden können.

Es wird geklärt:

- Von linearen Gleichungen spricht man nur, wenn Variablen auftreten und die zu betrachtenden nicht in Potenzen, Wurzeln usw. vorkommen. Ihre Anzahl spielt dabei keine Rolle. Die Wiederholung des Begriffs erfolgt gemäß der am Ende der vorangehenden Unterrichtseinheit durchgeführten Einführung. Er erfährt nun eine Vertiefung.
- Nicht jede lineare Gleichung ist als Gleichung einer linearen Funktion aufzufassen.

Die Erkenntnisse werden zusammengefaßt:

- Es gibt Funktionen, deren Abbildungsvorschrift in Form einer Gleichung angegeben werden kann, z. B. die linearen Funktionen. Es gibt aber auch Funktionen, für die das nicht möglich ist.
- Es gibt Gleichungen, die als Abbildungsvorschrift für Funktionen aufgefaßt werden können, z. B. lineare Gleichungen mit zwei Variablen. Es gibt aber auch Gleichungen, die nicht als Abbildungsvorschrift für Funktionen aufgefaßt werden können.

Dazu werden jeweils Beispiele angegeben.

Die Schüler bestimmen nun die Lösungsmenge der Gleichung $y = 2x - 1$, $x \in R$, $y \in R$ (Aufgabe 1 f), von der erkannt wurde, daß sie als Abbildungsvorschrift für eine bestimmte lineare Funktion angesehen werden kann. Die Schüler stellen fest, daß sie nur eine Teilmenge der Lösungsmenge angeben können. Als Erkenntnis wird schließlich hervorgehoben, daß die Lösungsmenge der Gleichung $y = 2x - 1$ genau die Menge der geordneten Zahlenpaare ist, die wir als Funktion bezeichnen. Darin besteht der wesentliche Zusammenhang zwischen Funktion und Gleichung. Ihn machen wir uns ständig bei der Berechnung von geordneten Zahlenpaaren als Elemente der Funktionen zunutze.

Zu (3): In der Übung können wir vom Lehrbuchbeispiel C 22 (Lb 72) ausgehen:

$y = 2x - 4$.
- Zunächst werden die Schüler aufgefordert, das Beispiel durchzulesen und für das Zahlenpaar c) $[2; 0]$ nachzuweisen, daß es ein Element der Funktion ist.
- Danach geben wir weitere geordnete Zahlenpaare vor, die in gleicher Weise zu prüfen sind.
- Für Zahlenpaare $[a; y]$ wird aus der Funktionsgleichung die Zahl y, der Funktionswert, bestimmt. Die Schüler arbeiten zur Anleitung zuvor selbständig Beispiel C 23 durch (Lb 72). Sie erkennen, daß die Vorgabe eines Elements a des Definitionsbereiches und die Berechnung des Funktionswertes aus der Funktionsgleichung durch Einsetzen von a der Weg ist, den wir beim Aufstellen von Wertetafeln von Funktionen stets beschreiten. Die Berechnung von Funktionswerten, in der die Schüler Fertigkeiten entwickeln sollen, führt auf das Lösen von Gleichungen mit einer Variablen, wobei die Gleichung im allgemeinen bereits nach dieser Variablen (y) umgeformt ist und nur noch ein Rechenausdruck zu bestimmen ist.

  Beispiele: $[-1; y]$, $[-3; y]$, $\left[\frac{1}{2}; y\right]$.
- In gleicher Weise berechnen die Schüler für Zahlenpaare $[x; b]$ Werte des Definitionsbereiches. Diese Übung dient der Vorbereitung der rechnerischen Bestimmung von Nullstellen.

  Beispiele: $[x; -2]$, $[x; 2]$, $[x; -4{,}5]$.

Im Falle linearer Funktionen wird es auch bei dieser Aufgabenstellung stets genau eine Lösung geben, was an der Eineindeutigkeit der Funktionen mit Gleichungen $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ liegt. Der Lehrer kann darauf hinweisen, daß z. B. eine Funktion mit der Gleichung $y = |x| + 2$ für das Paar $[x; 7]$ auf die Lösungsmenge $L = \{+5; -5\}$ führt.
Für weitere Übungen und Hausaufgaben steht Aufgabe c 44, Lb 127, zur Verfügung.

Zweiter Schwerpunkt der Stoffeinheit 3.3.: Nullstellen linearer Funktionen (Lerneinheit C 12)

Für die Behandlung dieses Schwerpunktes unterbreiten wir folgenden Vorschlag für die Gestaltung einer Unterrichtsstunde:

Gliederung:

(1) Erarbeitung des Begriffes „Nullstelle einer Funktion"
(2) Übungen im Berechnen von Nullstellen linearer Funktionen
(3) Erarbeitung der Bedeutung der Nullstellen in der graphischen Darstellung
(4) Übungen im rechnerischen und näherungsweisen graphischen Bestimmen von Nullstellen

Methodische Hinweise:

Zu (1): – In selbständiger Arbeit stellen die Schüler eine Wertetafel für die Funktion mit der Gleichung $y = 0{,}5x - 2$ auf. Für x geben wir vor: $x \in G$, $-3 < x < 7$. Aus der Tabelle lassen wir diejenigen Zahlenpaare nennen, in denen ein Glied 0 ist: $[0; -2]$, $[4; 0]$.
– Wir betrachten das erste Paar und erkennen, daß das zweite Glied des Paares mit dem Summanden n übereinstimmt. Dieses Paar $[0; n]$ haben wir bereits bisher benutzt, um rasch einen Punkt für die graphische Darstellung zu gewinnen.
– Wir betrachten das zweite Paar und erkennen, daß hierbei ein Element des Definitionsbereichs, die Zahl 4, auf das Element 0 des Wertebereichs abgebildet wird. Der Lehrer erläutert den Schülern, daß solche Elemente, die auf die Zahl 0 abgebildet werden, bei der Untersuchung von Funktionen von Bedeutung sind und gegenüber anderen Elementen ausgezeichnet werden. Auf der Grundlage dieser Betrachtungen wird die Definition für den Begriff „Nullstelle einer Funktion" gegeben.
In diesem ersten Stundenabschnitt entsteht ein Teil des Tafelbildes (Bild 3.23.).
Zu (2): Im Lehrbuch werden für drei Funktionen die Nullstellen genannt (Beispiel C 24, Lb 72). Die Schüler werden aufgefordert, einen Weg zur Berechnung der Nullstellen anzugeben. Impuls: Als Funktionswert y muß die Zahl 0 auftreten. Die Schüler sollen erkennen, daß wir Aufgaben der Art zu lösen haben, wie sie in der vorangegangenen Stunde geübt wurden: Gegeben ist eine Funktionsgleichung $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ und ein Zahlenpaar $[x; b]$. In unserem Fall ist $b = 0$. Wir haben also die Gleichung $mx + n = 0$ zu lösen. Auf diese Weise berechnen die Schüler die Nullstellen.
Zu (3): Die Ausgangsfunktion $y = 0{,}5x - 2$ stellen die Schüler graphisch dar. Dabei interessiert besonders die Abbildung des Zahlenpaares $[4; 0]$ im Koordinatensystem. Die Schüler deuten die Nullstelle in der graphischen Darstellung. Mit der farbigen Markierung der Nullstelle in der graphischen Darstellung wird das Tafelbild abgeschlossen (Bild 3.23.). Zur Vertiefung werden die Paare $[0; -2]$ und $[4; 0]$ in ihrer Bedeutung für die graphische Darstellung gegenübergestellt. Der Begriff „Nullstelle" ist

Die Nullstelle einer Funktion

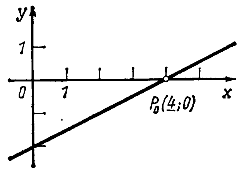
$y = 0{,}5x - 2$

x	-2	-1	0	1	2	3	$\boxed{4}$	5	6	…
y	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	$\boxed{0}$	0,5	1	…

Definition: Ein Element aus dem Definitionsbereich einer Funktion, das auf das Element 0 des Wertebereiches abgebildet wird, heißt Nullstelle dieser Funktion.

Das Element 4 ist die Nullstelle der Funktion $y = 0{,}5x - 2$

Berechnung:
$$0 = 0{,}5x - 2$$
$$2 = 0{,}5x$$
$$4 = x$$



Der Nullstelle der Funktion entspricht in der graphischen Darstellung die Abszisse des Schnittpunktes mit der Abszissenachse

Bild 3.23.

gegenüber der umgangssprachlichen Bedeutung des Wortes „Stelle“ abzugrenzen. So ist die Nullstelle in der graphischen Darstellung nicht mit dem Schnittpunkt gleichzusetzen, sondern eben nur mit dessen Abszisse.

Zu (4): Die Übung dient der Vertiefung und Festigung des Begriffes „Nullstelle einer Funktion“. Wir lassen die Nullstellen der Funktionen mit den Gleichungen $y = x - 3$; $y = |x| + 2$; $y = |x| - 2$ und $y = x^2 - 4$ rechnerisch aus den Gleichungen und z. B. für die erste und dritte Funktion näherungsweise aus den graphischen Darstellungen bestimmen.

Folgende Erkenntnisse werden dabei gewonnen:

- Nicht für jede Funktion existiert eine Nullstelle ($y = |x| + 2$). Das ist nur dann der Fall, wenn das Element 0 im Wertebereich auftritt ($y = x - 3$).
- Es gibt Funktionen mit mehreren Nullstellen ($y = x^2 - 4$, $y = |x| - 2$).
- Lineare Funktionen ($y = mx + n$; $m \neq 0$) besitzen genau eine Nullstelle.

Eine andere Übungsmöglichkeit ergibt sich, wenn wir den Schülern graphische Darstellungen (Bild 3.24.) vorgeben und folgende Fragen beantworten lassen:

- Welche Bilder können als graphische Darstellungen von Funktionen aufgefaßt werden, wenn die Elemente des Definitionsbereichs auf der x-Achse abgebildet sind?
- Wieviel Nullstellen haben die entsprechenden Funktionen?

Daraus gewinnen wir als Erkenntnis:

- In der graphischen Darstellung einer Funktion gibt es höchstens einen Schnittpunkt mit der Ordinatenachse. Die Begründung folgt unmittelbar aus der Definition der Funktion als eindeutige Abbildung der Elemente x auf die Elemente y.
- In der graphischen Darstellung einer Funktion kann es mehr als einen Schnittpunkt mit der Abszissenachse geben. Die Anzahl der Schnittpunkte entspricht der Anzahl der Nullstellen der Funktion.

Arbeitsblatt

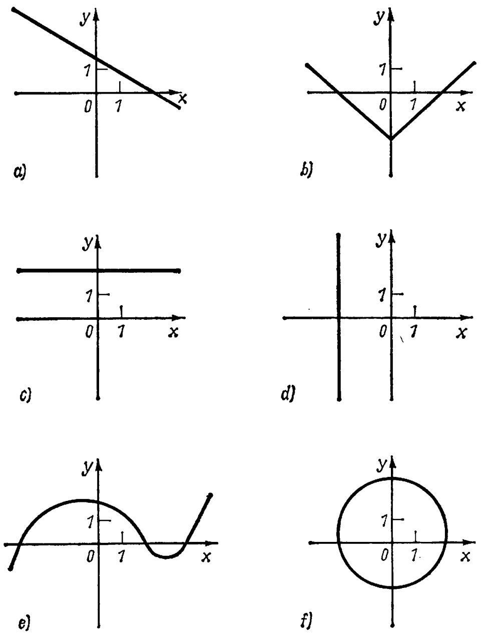


Bild 3.24.

Dritter Schwerpunkt der Stoffeinheit 3.3.: Zusammenfassung zu den Stoffeinheiten 3.1. bis 3.3.

Für eine abschließende Wiederholung und Zusammenfassung des Stoffes empfehlen wir die Entwicklung der Übersicht auf Seite Uh 199. Sie kann im Unterrichtsgespräch erarbeitet werden und erscheint als Tafelbild und in den Schülerheften. Man kann sie auch in Teilen auf einem Arbeitsblatt vorgeben und ergänzen lassen. In der hier angegebenen Übersicht sollten dabei die halbfett gedruckten Worte oder Symbole als Leerstellen erscheinen. Man kann den Schülern gestatten, ihre Aufzeichnungen in den Heften zu verwenden. Zur Vorbereitung auf die Zusammenfassung zeichnen die Schüler (vorbereitende Hausaufgabe) die Bilder der folgenden beiden Gruppen von Funktionen in je ein Koordinatensystem (Bilder 3.25. und 3.26.), durch die alle typischen Verläufe

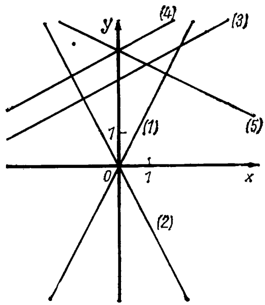


Bild 3.25.

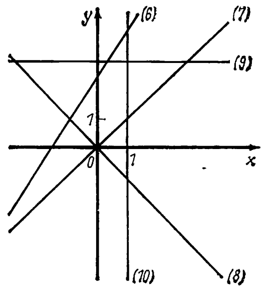


Bild 3.26.

und Beziehungen erfaßt sind. Zur Unterstützung wird in der Übersicht an der betreffenden Stelle auf die Aufgabennummer verwiesen. Die Schüler betrachten nochmals die konkreten Beispiele und notieren das Ergebnis allgemein in der Übersicht.

1. Koordinatensystem

(1) $y = 2x$
(2) $y = -2x$
(3) $y = \frac{1}{2}x + 3$
(4) $y = \frac{1}{2}x + 4$
(5) $y = -\frac{1}{2}x + 4$

2. Koordinatensystem

(6) $y = \frac{2}{3}x + 2{,}5$
(7) $y = x$
(8) $y = -x$
(9) $y = 3$
(10) Parallele zur y-Achse durch $P(1; 0)$

Wir können den Schülern diese Aufgaben auch als Hilfen geben, und sie stellen während der Entwicklung der Übersicht jeweils die graphischen Darstellungen mit der Koordinatenscheibe her und verallgemeinern.

Gute Dienste kann auch die Systematisierung leisten, die am Ende der Unterrichtseinheit 3.2.3. erarbeitet wurde (↗ Uh 190 f). Der Einfachheit halber nennen wir die graphische Darstellung der linearen Funktion „Gerade“, obwohl die Gerade nur der Träger aller Punkte der graphischen Darstellung ist (↗ Unterrichtseinheit 3.2.2., 2. Schwerpunkt, Uh 183, Punkt 6).

Die lineare Funktion $y = mx + n$, $x \in D$, $y \in W$

Gleichung, Symbol, Begriff	*Graphische Darstellung*
a) $y = mx$	(1) Gerade durch $P_1\,(0; 0)$ und $P_2\,(1; m)$
b) $y = mx + n$	(6) Gerade durch $P_1\,(0; n)$ und $P_2\,(1; m + n)$
c) x	Element des **Definitionsbereichs**
d) y	Element des **Wertebereichs** (Funktionswert)
e) m	**Anstieg**
f) n	Ordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse
g) $(x; y)$	**Punkt auf der Geraden**
h) $(x; 0)$	**Schnittpunkt mit der x-Achse**
i) $(0; y)$	Schnittpunkt mit der y-Achse
k) Nullstelle	**Abszisse des Schnittpunktes mit der x-Achse**
l) $y = x$	(7) Winkelhalbierende des **I.** u. **III.** Quadranten
m) $y = -x$	(8) Winkelhalbierende des **II.** u. **IV.** Quadranten
n) $y = mx$, $m < 0$	(2) Gerade vom **II.** zum **IV.** Quadranten
o) $y = mx$ und	(1) Symmetrisch zur **x-Achse und**
$y = -mx$	(2) **zur y-Achse** liegende Geraden
p) $y = mx + n$ und	(4) Symmetrisch zur y-Achse liegende
$y = -mx + n$	(5) Geraden
q) $y = m_1x + n$ und	(4) Geraden durch denselben Punkt der y-Achse
$y = m_2x + n$	(5)
r) $y = mx + n_1$ und	(3) **Parallele Geraden**
$y = mx + n_2$	(4)
s) $y = n$	(9) Parallele zur x-Achse (Senkrechte zur y-Achse)
t) $x = a$	(10) **Parallele zur y-Achse (Senkrechte zur x-Achse); kein Funktionsbild!**

Zusammenfassung:

1) Die Schüler sollen erkennen, daß der wesentliche Zusammenhang zwischen Funktionen und Gleichungen darin besteht, daß für solche Funktionen, deren Abbildungsvorschrift durch eine Gleichung beschrieben werden kann, die Lösungsmenge der Gleichung genau die Menge der geordneten Paare, die Funktion ist. Die Betrachtungen werden für lineare Funktionen durchgeführt.
   Die Schüler üben sich im Berechnen von Wertepaaren $[x; y]$, $[x; a]$, $[b; y]$ aus vorgegebenen Funktionsgleichungen.
2) Die Schüler lernen die Nullstelle als spezielles Element des Definitionsbereichs kennen und in der graphischen Darstellung deuten. In der Übung werden Nullstellen linearer Funktionen rechnerisch und näherungsweise graphisch bestimmt. Auf Funktionen mit keiner oder mit mehreren Nullstellen wird hingewiesen.
3) Die abschließende Wiederholung zu den Stoffabschnitten 3.1. bis 3.3. stellt zugleich eine Zusammenfassung und Systematisierung dar.

Die Behandlung der drei Schwerpunkte sollte jeweils in einer Unterrichtsstunde erfolgen.

3.4. Lösen linearer Gleichungen (10 Stunden)

1. In dieser Stoffeinheit sollen die Schüler in Fortführung der Behandlung der Gleichungslehre in Klasse 7 einige weitere Formen linearer Gleichungen kennenlernen.
2. Sie sollen Fertigkeiten im Umformen der in den Gleichungen auftretenden Terme und damit im Lösen der Gleichungen erwerben. Übungen nehmen deshalb in diesem Stoffabschnitt einen breiten Raum ein.
   Insbesondere sollen die Schüler in der Lage sein, Umformungen von Formeln aus der Mathematik und Physik zu vollziehen und die Gleichungen nach verschiedenen darin auftretenden Variablen aufzulösen.
3. Das Wissen und Können wenden die Schüler beim Lösen von Sachaufgaben an, die auf Gleichungen führen. Sie erkennen dabei die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten für Gleichungen.

3.4.1. Lineare Gleichungen mit Klammern (3 Stunden; Lerneinheit C 13)

Die systematische Fortsetzung der Behandlung der Gleichungslehre wird eingeleitet durch eine Wiederholung des Begriffes „einander äquivalente Gleichungen“ und der Umformungsregeln, die in Klasse 7 vermittelt wurden.
Die Schüler lernen dann lineare Gleichungen kennen, in denen die Variable innerhalb von Klammerausdrücken auftritt. Darunter befinden sich auch nichtlineare Gleichungen, die auf lineare führen.
Umformungen, die nicht zu äquivalenten Gleichungen führen, werden den äquivalenten Umformungen gegenübergestellt und von da erneut die Notwendigkeit der Proben begründet.
Beim Lösen von Gleichungen, in denen Klammerausdrücke auftreten, wenden die Schüler u. a. das im Stoffgebiet „1. Arbeiten mit Variablen“ erworbene Wissen und Können an.
In den Übungen treten auch einfache Text- und Sachaufgaben auf, deren Lösung auf Gleichungen mit Klammerausdrücken führt.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.4.1.: Wiederholung des Begriffs „einander äquivalente Gleichungen“ und der Umformungsregeln für lineare Gleichungen

Die Schüler lösen eine lineare Gleichung mit einer Variablen im Bereich der rationalen Zahlen (aus Aufgabe c 48, Lb 127), erläutern an dem Beispiel die Umformungen, begründen sie mit den Umformungsregeln und erklären, weshalb sie aus der letzten Zeile (Gleichung) der Umformungskette schließen können, daß die gefundene Zahl die Lösung der Gleichung ist. Dabei wird vom Begriff „einander äquivalente Gleichungen“ Gebrauch gemacht.
Zusammenfassend können die Umformungsregeln noch einmal vollständig genannt werden.
Anhand der Aufgabe, den Durchmesser eines Kreises zu berechnen, der einen Umfang von 6 m hat, kann wiederholt werden, daß die Umformungsregeln auch dann gelten, wenn in den Gleichungen irrationale Zahlen vorkommen. Ein Beweis wird nicht geführt. Auf die Beweisnotwendigkeit wird jedoch hingewiesen.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.4.1.: Lineare Gleichungen mit Klammern

Zur Einführung in die Arbeit am neuen Stoff sollte das Umformen von Termen mit Klammern (vor allem das Auflösen von Klammern) geübt werden (Aufgabenteil zu Kapitel A des Lehrbuchs). Dann werden schrittweise solche Beispiele gelöst und erörtert, wie sie im Lehrbuch enthalten sind (Beispiele C 27 bis 31 Lb 73 f.). Die Probe wird in jedem Falle (als Rechenkontrolle) ausgeführt. Sie wird zum notwendigen Bestandteil der Lösung, wenn wir Umformungen vornehmen, die nicht zu äquivalenten Gleichungen führen (Beispiele C 29, 30, 31).
Für Übungen stehen die Aufgaben c 49 bis 52 (Lb 128) zur Verfügung. Die folgenden Gleichungen sind interessant wegen der dabei auftretenden Lösungsmengen. Sie können auch als Zusatzaufgaben verwendet werden:

(1) $(2x + 5)(x + 4) = (x + 8)(x + 4);\ x \in R$
Dividiert man durch $(x + 4)$ und vernachlässigt die Bedingung $x \neq -4$, so geht eine Lösung verloren. Die Gleichung kann in Klasse 8 nur inhaltlich gelöst werden.
(2) $3(x + 2) = 5(x + 1) - (2x - 1);\ x \in R$
$L = R$
(3) $3(x + 2) = 5(x + 2) - 2(2x - 1);\ x \in R$
$L = \emptyset$

Beispiele fehlerhafter Umformungen von Gleichungen enthält das Buch „Wo steckt der Fehler?“ von W. LIETZMANN, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1963.

Dritter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.4.1.: Textaufgaben und mathematisch oder sachbezogen eingekleidete Aufgaben

Das Lösen von Textaufgaben und eingekleideten Aufgaben stellt an die Schüler prinzipiell andere Anforderungen als das Lösen textfreier formaler Aufgaben. Der Umstand, daß wir Aufgaben auswählen, die auf Gleichungen mit Klammerausdrücken führen, die die Schüler lösen lernten, ist nur die eine und weniger schwierige Seite. Die andere ist die Entwicklung von Fähigkeiten im Umsetzen von in Texten gegebenen Beziehungen in die mathematische Symbolsprache, im Abstrahieren von konkreten Sachbezügen. An der Entwicklung dieser geistigen Fähigkeit bei den Schülern muß im gesamten Mathematikunterricht gearbeitet werden. Mit den Übungen in dieser Unterrichtseinheit leisten wir dazu einen Beitrag.
Die Aufgaben c 69 bis 76, Lb 129, führen auf Gleichungen mit Klammern. Es sind verhältnismäßig einfache Textaufgaben mit mathematischem Bezug. Sie eignen sich gut, um die Schüler wieder an das Lösen von Sachaufgaben heranzuführen. Wir empfehlen dem Lehrer, die entsprechenden Hinweise in der Unterrichtshilfe Mathematik Klasse 7, S. 115 ff., zu beachten.
Wertvoll sind auch Aufgabenstellungen wie in c 75 (Lb 129). Wenn die Schüler vorgegebene Gleichungen selbst in Sätze kleiden, in denen mathematische Beziehungen oder Sachbezüge zum Ausdruck gebracht werden, wird ihnen die Bedeutung mathematischer Begriffe und Verfahren klar. Sie erleben, wie mit Hilfe einer einzigen Gleichung vielfältige Beziehungen erfaßt werden können.
Für das Lösen von Textaufgaben und Sachaufgaben geben wir den Schülern Schritte vor, die im allgemeinen zu durchlaufen sind. Abweichungen untergeordneter Art können sich in speziellen Fällen ergeben.
(1) Lies die vorgelegte Aufgabe genau durch!
Durchdenke jedes Wort! Lasse nichts aus!
(2) Analysiere das Problem!

- Wenn möglich, fertige eine Skizze oder eine Überlegungsfigur an! Lege für gesuchte und gegebene Größen Bezeichnungen fest (Variablen)!
- Achte darauf, daß die Einheiten aufeinander abgestimmt sind!
- Wende mathematische (oder physikalische) Gesetzmäßigkeiten an, die zwischen den gegebenen und den gesuchten Größen bestehen!
- Formuliere eine Gleichheit! Stelle die Gleichung auf, die den Zusammenhang zwischen den gegebenen und den gesuchten Größen widerspiegelt!

Beachte eventuell notwendige Einschränkungen des Grundbereichs, die sich aus dem Sachverhalt ergeben!

(3) Löse die Gleichung! (Suche die Erfüllungsmenge unter den speziellen Bedingungen!) Fertige einen Überschlag bei der numerischen Lösung an!

(4) Formuliere das Ergebnis!
Überprüfe die Richtigkeit der Lösung durch die Probe am Text der Aufgabe!

(5) Gib Antwort auf die Frage der Aufgabe!

Von Ansatzpunkten ausgehend, die im Sachverhalt selbst liegen, bis hin zur ästhetischen Erziehung bei der sauberen und übersichtlichen Anlage des Lösungsweges können wir bei der Behandlung von eingekleideten Aufgaben in mannigfaltiger Weise erzieherisch auf die Schüler Einfluß nehmen.
Am Beispiel der Aufgabe c 76 (Lb 129) geben wir in ausführlicher Form einige Hinweise für das Lösen von eingekleideten Aufgaben.
Die Schüler lesen die Aufgabe gründlich, unter Umständen bei komplizierten Texten mehrere Male. Die vorliegende Aufgabe enthält keine unwesentlichen Angaben. Wir machen die Schüler darauf aufmerksam, daß in diesem Falle die Größen allein nicht herausgehoben werden können, da sie alle in Beziehung zu anderen Größen stehen. Es würde wenig helfen, wenn die Schüler die drei Größen 2 cm, 4 cm und 72 cm^2 ohne Zusammenhang notieren würden.
Das Lesen des Textes wird zugleich mit einer Analyse verbunden. Das Herausschreiben gegebener und gesuchter Größen oder Zahlen erfolgt im Zusammenhang mit dem Anfertigen einer Skizze und dem Festlegen und Bezeichnen der gesuchten Größen oder Zahlen mit Variablen. Dazu müssen die Schüler den Text Schritt für Schritt in eine Skizze umsetzen.

In der Aufgabe ist die Rede
– von einem Rechteck,
– von der Vergrößerung der Seiten dieses Rechtecks um gleich lange Strecken,
– von dem damit verbundenen Anwachsen des Flächeninhalts.
Gesucht sind die Seiten des vergrößerten Rechtecks.

Es wäre denkbar, sofort die gesuchten Seiten mit Variablen zu bezeichnen. Wir müßten dann „rückwärts" bis zum Ausgangsrechteck vordringen. Man kann das vergleichsweise den Schülern vorführen, um ihnen verständlich zu machen, daß es besser ist, die Skizze schrittweise entsprechend den Angaben im Text aufzubauen und dabei jede auftretende unbekannte Größe zunächst mit einer Variablen zu bezeichnen. Die Anzahl der Variablen wird so gering wie möglich gehalten, indem man im Text enthaltene Beziehungen ausnutzt. Am Ende der ersten, in der Skizze oder Tabelle festgehaltenen Überlegungen, sollte überprüft werden, welche der Größen am zweckmäßigsten mit einer Variablen zu bezeichnen und damit zu berechnen ist. Bis zum Aufstellen einer Gleichung sind die folgenden Schritte zu gehen:
– Unserer Aufgabe entsprechend wird zuerst ein Rechteck gezeichnet, dessen eine Seite 2 cm länger ist als die andere. Die Skizze muß nicht maßgerecht sein, jedoch

qualitativ richtig angelegt werden (also hier z. B. kein Spezialfall eines Rechtecks in Form eines Quadrates). Die kleinere Seite wird mit x, die andere mit $x + 2$ bezeichnet. Damit legen wir bereits fest, daß wir mit Zahlenwerten arbeiten wollen (↗ Gesamtlösung).

– Die Seiten des Rechtecks werden um jeweils 4 cm verlängert. Wir erhalten das vergrößerte Rechteck. Die angesetzten Strecken bezeichnen wir mit 4. Als Maßzahlen der Seiten des vergrößerten Rechtecks tragen wir $(x + 4)$ und $(x + 2 + 4)$, also $(x + 6)$, in die Skizze ein.

– Das Anwachsen des Flächeninhalts wird durch Schraffur markiert, die Maßzahl in die entsprechende Fläche geschrieben. Nun muß der entscheidende Schritt zu einem Ansatz folgen. Der Lehrer unterstützt die Gedanken der Schüler, wenn er folgende Fragen aufwirft oder entsprechende Impulse gibt:

- Nennt Beziehungen zwischen den Seiten eines Rechtecks!

(Sie ergeben summiert den Umfang. Der ist aber nicht bekannt.)

- Gibt es Beziehungen zwischen den Seiten des ursprünglichen und des vergrößerten Rechtecks?

(Ja, nur kennen wir von keiner Seite die Länge genau, nur immer in bezug auf die kleine Seite des Ausgangsrechtecks.)

- Gibt es Beziehungen zwischen den Seiten und dem Flächeninhalt eines Rechtecks?

(Ja, wir kennen die Formel $A = a \cdot b$. Man könnte den Flächeninhalt des kleinen Rechtecks mit A_1, des vergrößerten mit A_2 bezeichnen. Dann lassen sich die Gleichungen $A_1 = x \cdot (x + 2)$ und $A_2 = (x + 4)(x + 6)$ formulieren. Die Flächeninhalte sind aber beide nicht bekannt.)

- Gibt es Beziehungen zwischen den Flächeninhalten A_1 und A_2?

(Ja: $A_1 + 72 = A_2$. Das ist eine Gleichung mit zwei Variablen. Dafür gibt es unbegrenzt viele Lösungen.)

- Für A_1 und A_2 haben wir Beziehungen gefunden, die beide nur noch die Variable x enthalten!

Dieser Impuls muß über die vorangehende Gleichung zum Ansatz führen:

$$A_1 + 72 = A_2$$

$$x \cdot (x + 2) + 72 = (x + 4)(x + 6)\,.$$

Zusammen mit der Berechnung ergibt sich für die Aufgabe der folgende Lösungsweg (als Tafelbild möglich):

↗ Lb 129, Aufgabe c 76

Analyse:

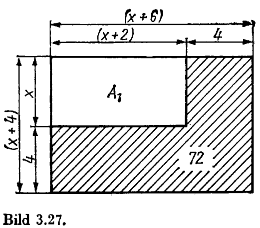


Bild 3.27.

Festlegen der gesuchten Größen:

kleine Seite des Ausgangsrechtecks: x cm
Seiten des vergrößerten Rechtecks:
$(x + 4)$ cm
$(x + 6)$ cm

Ansatz:

$$A = a \cdot b$$
$$A_1 = x \cdot (x + 2)$$
$$A_2 = (x + 4)(x + 6)$$
$$A_1 + 72 = A_2$$

$$\boxed{x(x + 2) + 72 = (x + 4)(x + 6)}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 72 &= x^2 + 4x + 6x + 24 \\ 2x + 72 &= 10x + 24 \\ 2x - 10x &= 24 - 72 \\ + 8x &= + 48 \\ \underline{x} &\underline{= 6} \end{aligned}$$

Probe:

l. S.: $6(6 + 2) + 72 = 120$
r. S.: $(6 + 4)(6 + 6) = 120$
Vergleich: $120 = 120$

Gesuchte Rechteckseiten:
$\underline{\underline{x + 4 = 10}}$
$\underline{\underline{x + 6 = 12}}$

Überprüfung am Sachverhalt:
$$A_1 = 6 \cdot 8 = 48$$
$$48 + 72 = 120$$
$$A_2 = 10 \cdot 12 = 120$$

Antwortsatz:

Die Seiten des vergrößerten Rechtecks betragen 10 cm und 12 cm.

Zusammenfassung:

1) Voraussetzung für die systematische Fortführung der Behandlung der Gleichungslehre ist die Aktivierung des entsprechenden Wissens und Könnens aus Klasse 7. Da die Schüler in allen Stoffgebieten immer wieder mit Gleichungen gearbeitet haben, besonders in den vorangehenden Stoffabschnitten im Zusammenhang mit der Behandlung linearer Funktionen, konzentrieren wir die Wiederholung auf die Umformungsregeln und die Äquivalenz von Gleichungen.
2) Die Schüler erwerben Fertigkeiten im Lösen von linearen Gleichungen mit Klammern und solchen nichtlinearen, die auf lineare Gleichungen führen. Auf Beispiele nichtäquivalenter Umformungen wird hingewiesen.
3) Die Schüler entwickeln Fähigkeiten im Lösen von einfachen mathematisch und sachbezogen eingekleideten Aufgaben, die auf lineare Gleichungen mit Klammern führen.

Vorschlag für die Zeiteinteilung:

1. Schwerpunkt: $\frac{1}{2}$ Stunde,
2. Schwerpunkt: $1\frac{1}{2}$ Stunden,
3. Schwerpunkt: 1 Stunde.

3.4.2. Lineare Gleichungen mit Brüchen (3 Stunden; Lerneinheit C 15)

In Gestalt von Verhältnisgleichungen haben die Schüler in Klasse 6 einfache Gleichungen mit Brüchen kennengelernt. Dabei trat die Variable sowohl im Zähler als auch im Nenner auf. In dieser Unterrichtseinheit lernen sie kompliziertere Formen von Gleichungen mit Brüchen kennen und lösen. Besonderer Wert ist bei den Gleichungen, in denen die Variable in Nennern von Brüchen erscheint, auf die Festlegung des Grundbereichs zu legen.
Im Vordergrund des Unterrichts steht die Entwicklung von Fertigkeiten im Lösen von Gleichungen mit Brüchen. Zugleich wird das Rechnen mit gebrochenen Zahlen wiederholt und gefestigt.
Anhand von Sachaufgaben aus verschiedenen Bereichen, insbesondere aus Physik, Chemie und ihren Anwendungen in der Technik, wird die Fähigkeit der Schüler weiterentwickelt, reale Beziehungen zu analysieren, mit mathematischen Mitteln zu beschreiben und Berechnungen auszuführen. Dabei soll sich weiterhin die Einsicht der Schüler in die Bedeutung mathematischer Begriffe und Verfahren für praktische Aufgaben vertiefen.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.4.2.: Lineare Gleichungen mit Brüchen (Lerneinheit C 15)

Für die Behandlung von linearen Gleichungen mit Brüchen schlagen wir folgende Schritte der systematischen Steigerung des Schwierigkeitsgrades vor:

1. Wiederholen des Rechnens mit Brüchen im Bereich der rationalen Zahlen. Alle Grundrechenoperationen und das Kürzen und Erweitern von Brüchen werden in die Übungen einbezogen.
   Schwerpunkt: Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche; Bestimmen des Hauptnenners. Aufgaben können den Lehrbüchern der Klassen 6 und 7 entnommen werden.
2. Lösen von Verhältnisgleichungen, wie sie aus Klasse 6 und 7 bekannt sind. Aufgaben c 47 und c 56 bis 58 (Lb 127 f.). Bei einigen dieser Aufgaben muß bereits eine Einschränkung des Grundbereichs vorgenommen werden.
3. Lösen komplizierterer linearer Gleichungen mit Brüchen, in denen die Variable noch nicht im Nenner auftritt. Der Grundbereich braucht nicht eingeschränkt zu werden. Wir verwenden als Grundbereich im allgemeinen R. Aufgabe c 59 (Lb 128). Das Beispiel C 32 (Lb 75) sollte erst am Ende dieser Aufgabengruppe besprochen werden, weil die Gleichung bereits recht kompliziert ist.
4. Lösen von linearen Gleichungen mit Brüchen, bei denen die Variable im Nenner erscheint und daher eine Einschränkung des Grundbereichs gegenüber R vorgenommen werden muß. Er ist jeweils vollständig anzugeben. Aufgaben c 60 bis 62 (Lb 128) und Beispiele C 33 und 34 (Lb 75).

Die Schwierigkeit für die Schüler beim Lösen dieser Gleichungen besteht im allgemeinen im Auffinden des Hauptnenners. Die Hauptnennerbestimmung über die Primfaktorenzerlegung und die Ermittlung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen, wie es die Schüler in Klasse 6 erlernten, ist nicht mehr direkt anwendbar, wenn Variablen in den Einzelnennern auftreten. Wir erklären: Eine Variable ist nicht wie eine natürliche Zahl, die nicht selbst Primzahl ist, in Primfaktoren zerlegbar. Das trifft auch für mehrgliedrige Ausdrücke mit Variablen zu, die sich nicht (durch Ausklammern) in Faktoren zerlegen lassen. Als Hauptnenner bestimmen wir ein gemeinsames Vielfaches der Einzelnenner. In der Mehrzahl der Fälle wird das gemeinsame Vielfache bei den einfachen Gleichungen, die in Klasse 8 zu behandeln sind, das Produkt der Einzelnenner sein. Wir können es nicht als „kleinstes" gemeinsames Vielfaches bezeichnen, da dieser Begriff nur im Bereich der natürlichen Zahlen erklärt ist. Die Variablen in den Gleichungen, die in Klasse 8 behandelt werden, stehen jedoch für rationale Zahlen. Wir müssen dafür sorgen, daß **alle** Schüler die Prinzipien für das Lösen solcher Gleichungen beherrschen und sichere Fertigkeiten erwerben. Der Lehrer soll nicht möglichst komplizierte Gleichungen von nur wenigen leistungsstarken Schülern lösen lassen, sondern alle Schüler zum festgelegten Lehrplanziel führen. Leistungsstarken Schülern sollten schwierigere Gleichungen als Zusatzaufgaben gestellt werden. Aber auch bei diesen Schülern müssen zunächst Sicherheiten in den Grundaufgaben nachgewiesen sein.
Die Schritte:

1. Ermitteln des Hauptnenners,
2. Multiplizieren beider Seiten der Gleichung (nach den Umformungsregeln) und damit jedes Gliedes eventuell auftretender algebraischer Summen mit dem Hauptnenner,
3. Kürzen der Brüche

sind prinzipiell beim Lösen von Gleichungen mit Brüchen zu durchlaufen. Besondere Regeln für einfache Verhältnisgleichungen („über Kreuz multiplizieren") werden nicht formuliert. Wir verweisen dazu auf die Ausführungen in der Unterrichtshilfe Mathematik 6. Klasse, S. 140/141, in denen Grundgedanken der Lehrplankonzeption in bezug auf diese Problematik zum Ausdruck gebracht werden.
Die oben genannten drei Schritte können nur dann wie folgt reduziert werden, wenn die Schüler inhaltlich den Vorgang vollständig verstanden haben:

1. Ermitteln des Hauptnenners,
2. Die Zähler der Glieder der Gleichung werden mit den Erweiterungsfaktoren multipliziert, die Nenner weggelassen.

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.4.2.: Textaufgaben und eingekleidete Aufgaben, die auf Gleichungen führen, in denen Brüche auftreten

Prinzipiell gelten die gleichen Hinweise, die im 3. Schwerpunkt der vorangehenden Unterrichtseinheit gegeben worden sind (↗ Uh 201 f). Übungsmaterial: Aufgaben c 80 bis 82, c 84, c 88 und 89 (Lb 129 f.). In der Mehrzahl führen die Aufgaben zu einfachen Verhältnisgleichungen. Wir wollen wiederum für ein Beispiel ausführlich die Gewinnung des Ansatzes erörtern und wählen dazu die Aufgabe c 84 (Lb 130).
Zum Sachverhalt muß so viel gesagt werden, daß die Aufgabe vollständig verstanden wird. Solche Bemerkungen sind im Mathematikunterricht auf das Notwendigste zu beschränken, denn sie sind nicht Unterrichtsgegenstand. In größerem Umfang sind sie nur dann vertretbar, wenn damit wesentliche Ziele in der Bildung und Erziehung verfolgt werden.

Bei der Analyse des Textes stellen wir erneut fest, daß es schwierig ist, die gegebenen und gesuchten Größen unmittelbar aus dem Text herauszulösen. Im Grunde soll ein Prozeß erfaßt werden. Wir gelangen wieder (wie bei Aufgabe c 76, die in der vorangehenden Unterrichtseinheit ausführlich erörtert wurde) am besten zum Ziel, wenn wir die Ausgangs- und Endsituation zunächst getrennt erfassen und dann zueinander in Beziehung setzen.
Dem Text entnehmen wir drei wesentliche Angaben:

- Über das Gradierwerk läuft eine 7prozentige Sole.
  Wir betrachten 100 kg davon.
- Ein Teil des Wassers verdunstet.
- Übrig bleibt eine 25prozentige Sole.

Gesucht ist die Masse des verdunsteten Wassers.
Wir gelangen zum Ziel, wenn wir die gesuchte Größe (bzw. deren Maßzahl) mit einer Variablen bezeichnen. Die schrittweise Umsetzung des Textes in eine Skizze oder Tabelle führt uns zwangsläufig dahin:

– Wir veranschaulichen 100 kg Sole durch ein Rechteck. Aus dem Chemieunterricht wissen die Schüler, daß aus einer Salzlösung nur das Wasser verdunstet, das Salz jedoch zurückbleibt. Das ist natürlich eine Idealisierung des Vorganges. Einerseits läuft die Sole in der Tat über das Gradierwerk, damit sie konzentriert wird, andererseits werden an Gradierwerken Promenaden für Kranke angelegt, weil die Luft salzhaltig ist und heilend wirkt. Ein Teil des Salzes geht also auch verloren. Der Anteil ist aber so gering, daß wir ihn in unserer Berechnung vernachlässigen können. Wir sollten die Schüler an solche Fragen heranführen, weil damit an einfachen Beispielen erklärt werden kann, daß mathematische Berechnungen oft nur Annäherungen an die Wirklichkeit liefern, aber nicht beliebige, sondern sachlich vertretbare.
In dem Rechteck, das 100 kg Sole darstellt, deuten wir durch einen Trennungsstrich die Anteile an Salz und Wasser an. In Wirklichkeit sind die Anteile nicht sichtbar. Die Angabe „7prozentige" Sole muß in Angaben für die Massen der Bestandteile Salz und Wasser umgesetzt werden (Bild 3.28.).

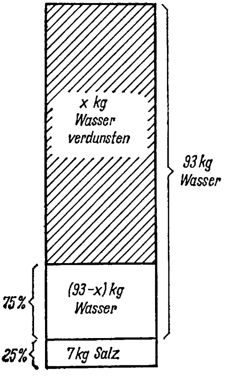


Bild 3.28.

– Der Teil des Wassers, der verdunstet, wird schraffiert hervorgehoben und mit x kg bezeichnet.
– Der übrigbleibende Teil des Wassers wird mit $(93 - x)$ kg bezeichnet. Die verbliebenen 7 kg Salz bilden 25 % der Sole, das Wasser also 75 %. Diese Angaben werden ebenfalls in die Skizze eingetragen.
Daraus kann eine Verhältnisgleichung abgelesen werden:

$$75 : 25 = (93 - x) : 7\,.$$

Selbstverständlich können die Schüler auch anders oder schneller zum Ziel gelangen. Wenn z. B. geklärt ist, daß die Salzmenge von 7 kg übrigbleibt und 25 % der Sole betragen soll, so muß 75 % Wasser, also $3 \cdot 7$ kg $= 21$ kg Wasser enthalten sein. Folglich müssen 93 kg $-$ 21 kg $=$ 72 kg verdunsten. Die Schüler sollten vorwiegend selbständig die Ansätze finden. Die verschiedenen Wege können gegenübergestellt und von den Schülern der rationellste ausgewählt werden.
Unsere Hinweise sollten in erster Linie dazu dienen, an einem Beispiel die schrittweise Analyse eines Textes zu erläutern.

Zusammenfassung:

1) Die Schüler lernen lineare Gleichungen mit Brüchen kennen und erwerben Fertigkeiten im Lösen von Gleichungen dieser Art. Für die Gleichungen ist der Grundbereich stets exakt anzugeben.
2) Das Lösen von eingekleideten Aufgaben wird fortgesetzt. Dazu wählen wir aus verschiedenen Bereichen Aufgaben, die auf Gleichungen mit Brüchen führen.
3) Vorschlag für die Zeiteinteilung:
   1. Schwerpunkt: 2 Stunden,
   2. Schwerpunkt: 2 Stunden.

3.4.3. Lineare Gleichungen mit mehreren Variablen (4 Stunden; Lerneinheit C 16)

In dieser Unterrichtseinheit lernen die Schüler prinzipiell keine neuen Formen von Gleichungen kennen. Gleichungen mit mehreren Variablen sind ihnen im Mathematikunterricht, vor allem auch im Physikunterricht, vielfach begegnet. In den Stoffeinheiten 3.2. und 3.3. wurde mit Gleichungen mit zwei Variablen (als Abbildungsvorschriften linearer Funktionen) gearbeitet.
Das Neue besteht darin, daß für diese Gleichungen mit mehreren Variablen nicht Lösungen angegeben werden, die die Gleichung zu wahren Aussagen machen, sondern nur Umformungen nach einer bestimmten Variablen vollzogen werden. Als Lösungen erhalten wir nicht bestimmte Elemente, sondern Terme, in denen noch Variable auftreten. Es wird also jeweils eine Variable gegenüber den anderen auftretenden ausgezeichnet. Die betreffende Variable ist nicht an ihrer Bezeichnung zu erkennen, sondern muß festgelegt werden. Sofern es sich um Anwendungen handelt, ergibt sich diese Festlegung aus der Aufgabenstellung. Im Umformen von Gleichungen mit mehreren Variablen nach einer bestimmten sollen die Schüler Fertigkeiten erreichen. Der Stoff dieser Unterrichtseinheit erlaubt, den Gleichungsbegriff zu vertiefen und der Einseitigkeit in der Wahl der Symbole zu begegnen.
Die Schüler sollen anhand geeigneter Aufgaben, insbesondere geeigneter Gleichungen aus Mathematik, Physik und Technik, begreifen, daß die Umformungen für die Praxis von

außerordentlicher Bedeutung sind. Wir gehen von mehreren Beispielen aus und erläutern, daß in den Beziehungen, die durch Gleichungen beschrieben werden, nicht immer nur nach ein und derselben Größe gefragt wird. Deshalb ist es notwendig, daß man imstande ist, die Gleichungen nach der jeweils gesuchten Größe umzustellen. Schließlich sollen die Schüler begreifen, daß das Lösen in allgemeiner Form eine Rationalisierung der geistigen Tätigkeit darstellt.
Mit dieser Unterrichtseinheit wird ein wesentlicher Beitrag zur Entwicklung von Fertigkeiten im Umgang mit mathematischen Formeln geleistet. Das kann in der zur Verfügung stehenden Zeit nicht in vollem Umfang geschehen. Durch eine gute Abstimmung, besonders mit dem Physiklehrer, muß der Mathematiklehrer sichern, daß ständig an dieser Fertigkeitsentwicklung weitergearbeitet wird.

Erster Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.4.3.: Lineare Gleichungen mit mehreren Variablen (Lerneinheit C 16)

1. Als Ausgangspunkt für die Behandlung von Gleichungen mit mehreren Variablen wählen wir eine Funktionsgleichung, z.B. $5x + 2y = 4$ (Möglichkeit der Wiederholung und Festigung des Stoffes der Abschnitte 3.2. und 3.3.), eine mathematische Berechnungsformel, z.B. $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ (Möglichkeit der Wiederholung zurückliegenden Stoffes) oder eine physikalische Formel, z.B. $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$ (Möglichkeit der Verbindung zu anderen Fächern).
   Wir stellen als Aufgabe:
   – Löse die Gleichung nach der Variablen y auf, damit du Funktionswerte berechnen kannst!
   – Ermittle aus der Formel die Höhe h des Trapezes!
   – Bestimme die Kraft F_1, wenn Gleichgewicht herrscht!
   Wir erklären den Schülern, daß nach Festlegung der Variablen, nach der die Gleichung aufzulösen ist, bei den Umformungen die anderen Variablen wie bestimmte Zahlen behandelt werden. Der Grundbereich ist vor dem Lösen festzulegen.
2. Wir verstärken bei den Schülern die Einsicht in die Notwendigkeit und Bedeutung dieser Umformungen, wenn sie eine Aufgabe mit bestimmten Zahlen zunächst in allgemeiner Form lösen. Wir empfehlen dazu die Aufgabe c 78 (Lb 129). Aus dem Buch „Tabellen und Formeln“ entnehmen die Schüler auf Seite 67 die Formel für die Bahngeschwindigkeit bei einer gleichförmigen Kreisbewegung $v = 2\pi \cdot r \cdot n$. In der Praxis, der die Aufgabe angepaßt ist, gibt man im allgemeinen wegen der besseren Meßbarkeit den Durchmesser anstelle des Radius an. Die Schüler schreiben die Formel unter Verwendung des Durchmessers d nieder: $v = \pi \cdot d \cdot n$. In Aufgabe c 78 wird nach der Drehzahl n gefragt.
   Es bestehen zwei Möglichkeiten:
   – Wir setzen für alle bekannten Größen die Werte ein und lösen die Gleichungen nach n auf.
   – Wir lösen die Gleichung nach n auf und berechnen den entstehenden Ausdruck, indem wir die bekannten Größen einsetzen.
   In beiden Fällen ist zwar der Rechenaufwand gleich. Beim zweiten Weg erhalten wir jedoch einen Ausdruck von allgemeinerer Bedeutung. Er gibt ein für allemal die Größe n in Abhängigkeit von v und d an und kann für jede gleichgeartete Aufgabe wieder verwendet werden. In Tabellenbüchern der Praxis findet man die Beziehung zwischen Schnittgeschwindigkeit v, Drehzahl n und Durchmesser d nach jeder der drei Größen aufgelöst. Dazu sind meist noch Wertetafeln angegeben. Auch an Maschi-

nen sind häufig solche Tafeln angebracht. Wir machen den Schülern erneut bewußt, daß oft der Rechenaufwand verringert wird, wenn zunächst die Umformung mit Variablen vorgenommen wird. Man erhält einen geschlossenen, einmal am Ende der Umformung zu berechnenden Ausdruck. Dieser Vorteil wird allerdings nur bei komplizierten Aufgaben deutlich. Vorläufig müssen Fertigkeiten im Umformen einfacher linearer Gleichungen mit mehreren Variablen erzielt werden.

3. Am Beispiel C 35 (Lb 76) wird das Ausführen der Probe erläutert.
Wir setzen wie bisher die gefundene „Lösung" in die Ausgangsgleichung ein, wie das im Lehrbuch vorgeführt wird, und erhalten im erwähnten Beispiel die Gleichung $2b - 3a = 2b - 3a$. Zur Klärung des Charakters dieser Probe führen wir mit den Schülern etwa das folgende Gespräch:
„Ist der Ausdruck $2b - 3a = 2b - 3a$ eine Aussage?"
Auf die Antwort „nein", wozu wir eine Begründung geben lassen, fragen wir weiter:
„Gilt die Gleichung dann als Bestätigung der Richtigkeit der Lösung?"
Auf die Antwort „ja" fragen wir, wie das begründet werden kann.

Erkenntnisse:

– Da die Lösung der Gleichung selbst Variablen enthält, erhalten wir beim Einsetzen in die Ausgangsgleichung keine Aussage wie bisher, können also eigentlich nichts über Wahrheit oder Falschheit aussagen.
– Die Probe besteht darin, daß wir eine Gleichung erhalten, von der wir leicht feststellen können, daß sie für alle Variableninterpretationen wahre Aussagen liefert, weil die Terme auf beiden Seiten gleich sind.

Die Umformungen in den Proben werden mitunter kompliziert. In diesem Falle kann noch ein anderer Weg beschritten werden. Wir greifen dazu den Hinweis auf, den wir den Schülern für das Umformen von Gleichungen mit mehreren Variablen gegeben haben: Sie sollen beim Auflösen nach einer dieser Variablen die anderen wie bestimmte Zahlen behandeln. Wir lassen also für die Variablen leicht überschaubare Zahlen einsetzen. Haben wir die Gleichung

$$5x + a = 2b - 3a$$

nach x gelöst mit

$$x = \frac{2b - 4a}{5},$$

so setzen wir etwa $a = 1$, $b = 2$.
Die Ausgangsgleichung erhält dann die Gestalt

$$5 \cdot x + 1 = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 .$$

Für x erhalten wir $\dfrac{2 \cdot 2 - 4 \cdot 1}{5} = 0$.
Also ergibt sich

$$\begin{aligned} 5 \cdot 0 + 1 &= 4 - 3 , \\ 1 &= 1 . \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung für $a = 1$ und $b = 2$ bestätigt. Allgemeingültig ist dieser Nachweis nicht. Er liefert nur eine gewisse Bestätigung für die Richtigkeit der Rechnung. Falsche Lösungen können auf diese Weise leicht erkannt werden.
Übungsmaterial: Aufgaben c 63 bis 67 (Lb 128).

Zweiter Schwerpunkt der Unterrichtseinheit 3.4.3.: Anwendungen

Wir verfolgen drei Ziele:

– Auflösen mathematischer und physikalischer Formeln nach darin enthaltenen Variablen.
Die Schüler entnehmen ihnen bekannte mathematische Formeln aus dem Tafelwerk. Der Lehrer lenkt die Übung so, daß gleichzeitig solcher Stoff wiederholt wird, der in der betreffenden Klasse einer Festigung bedarf. Als Variablen, nach denen die Formeln umzustellen sind, werden nur solche gewählt, die linear auftreten. In einfachen Fällen kann davon abgewichen werden, wenn die Schüler über das mathematische Rüstzeug zum Lösen der Gleichung verfügen, z. B.: Bestimme a (r; d) aus der Quadratflächenformel $A = a^2$ $\left(\text{Kreisflächenformel } A = \pi r^2 \text{ bzw. } A = \frac{\pi}{4} d^2\right)$!
Die Auswahl von physikalischen Formeln sollte in Abstimmung mit dem Physiklehrer erfolgen, damit die Übungen maximal für die Unterstützung dieses Faches genutzt werden können (Aufgabe c 21, Lb 132).
– Lösen von eingekleideten Aufgaben, die auf Gleichungen mit mehreren Variablen führen. Hierfür gelten die Hinweise zu den beiden vorangehenden Unterrichtseinheiten. Unter den Aufgaben sollten sich auch solche befinden, bei denen Umstellungen von Gleichungen mit mehreren Variablen nach einer dieser Variablen zu vollziehen sind (Aufgaben c 78 und 79, Lb 129).
– Mit dieser Unterrichtseinheit wird die Behandlung des Stoffgebietes 3. abgeschlossen. In die Vorbereitung auf eine schriftliche Leistungskontrolle sind auch Übungen zu den Stoffeinheiten 3.1. und 3.2. einzubeziehen. Insbesondere sind Gleichungen für lineare Funktionen in der Form $ax + by + c = 0$ nach der Variablen y aufzulösen, Wertetafeln aufzustellen und die Funktionen graphisch darzustellen. Formeln aus Physik, Technik usw. werden als Funktionen aufgefaßt, u. U. dazu graphische Darstellungen angefertigt.

Zusammenfassung:

1) Die Schüler erwerben Fertigkeiten im Umstellen von linearen Gleichungen mit mehreren Variablen nach einer dieser Variablen. Sie verstehen, in welcher Weise der Charakter der Probe dabei verändert wird, können Proben ausführen und begründen.
2) Im Mittelpunkt der Anwendungen stehen Umformungen von mathematischen und physikalischen Formeln und das Lösen von eingekleideten Aufgaben. Die Übungen werden zugleich für erforderliche Wiederholungen genutzt.
3) Vorschlag für die Zeiteinteilung:

   1. Schwerpunkt: 1 Stunde,
   2. Schwerpunkt: 2 Stunden,
   Vorbereitung auf eine Leistungskontrolle: 1 Stunde.

Aufgabenvorschläge für eine schriftliche Leistungskontrolle (2 Stunden)

1. Ordne den Zahlen -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 jeweils ihren Betrag zu! Besitzt die Abbildung die Eigenschaften einer Funktion? Begründe deine Antwort!
2. Bestimme die Nullstelle der Funktion mit der Gleichung $2y = 4x - 7$ rechnerisch! Stelle die Funktion graphisch dar!
3. Gib zwei Gleichungen von Funktionen an, deren graphische Darstellungen parallel verlaufen!

4. Beschreibe den Verlauf des Bildes der Funktion $y = mx$ mit $m \neq 0$ im Koordinatensystem!
5. Ein PKW „Trabant“ verbraucht im Durchschnitt auf 100 Fahrtkilometern 6,5 l Benzin. Drücke die Beziehung durch eine Gleichung aus und stelle sie in einem Koordinatensystem graphisch dar!
6. Ermittle die Gleichung der linearen Funktion, deren graphische Darstellung durch die Punkte $P_1\,(0; 6)$ und $P_2\,(3; 7)$ verläuft!
7. Löse die Gleichung $\frac{x-3}{x+4} = \frac{x+2}{x-5}$! Gib einen möglichen Grundbereich an!
8. Stelle die Formel für die Längenausdehnung von festen Stoffen bei Temperaturveränderung $l_t = l_0\,(1 + \alpha \Delta\vartheta)$ nach dem Ausdehnungskoeffizienten α um!
9. Bei einem Straßenrennen, das mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 45 km in der Stunde gefahren wird, verliert ein Fahrer durch Reifenschaden 4 Minuten. Wie lange muß er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 km in der Stunde fahren, um seine Gruppe wieder einzuholen?

4. Flächen- und Rauminhaltsberechnung

4.0. Vorbemerkungen

4.0.1. Stellung, Bedeutung, Ziele

Mit diesem Stoffgebiet findet der Lehrgang der Flächen- und Rauminhaltsberechnungen, der in Klasse 5 begonnen wurde, einen vorläufigen Abschluß.
Von Anfang an bildete dieser Lehrgang ein wichtiges Bindeglied zwischen den arithmetischen Stoffgebieten einerseits und den geometrischen andererseits. Dieser Umstand bestimmte weitgehend die fachliche und methodische Gestaltung des Unterrichts in diesem Lehrgang.
Die Probleme der Flächen- und Rauminhaltsberechnungen und damit im Zusammenhang das Kennenlernen einer Reihe wichtiger geometrischer Gebilde des zwei- und dreidimensionalen Raumes sind für die allgemein-geistige Entwicklung der Schüler von Bedeutung. Das gleiche gilt für eine Reihe von Arbeitsmethoden, die in diesem Stoffgebiet vor allem im Zusammenhang mit der Gewinnung neuer Erkenntnisse (z. B. empirische Methoden, Analogiebetrachtungen, Verallgemeinerungen) und deren Sicherung (Beweisen mit den Mitteln der mathematischen Deduktion) Anwendung finden sollten. Die Hinweise zur Gestaltung der Unterrichts wollen auch dazu Anregungen vermitteln.
Die Schüler erfahren, daß viele Erkenntnisse, die sie in diesem Stoffgebiet gewinnen, schon zum ältesten Kultur- und Bildungsgut der Menschheit gehören. Dennoch muß auch der Mensch unserer Tage über ein gründliches und umfassendes Wissen auf diesem Gebiet verfügen. Diese Überzeugung muß der Lehrer beim Schüler wecken, indem er ihm den Blick für gewisse geometrische Gebilde in mehr oder weniger konkreten Erscheinungsformen in seiner Umwelt öffnet, indem er ihn in die Lage versetzt, sein Wissen und Können auch in anderen Unterrichtsfächern, in der Praxis oder in den verschiedenen Formen außerunterrichtlicher Tätigkeit anzuwenden.
An dem mathematisch so bedeutsamen Inhaltsbegriff, einem Hauptgegenstand des Stoffgebietes, wird seit Klasse 5 gearbeitet. In Analogie zu Längenmessungen als Vergleich mit einer geeignet festgelegten Längeneinheit lernen die Schüler das Messen der Flächeninhalte von Rechtecken bzw. der Rauminhalte von Quadern ebenfalls als Vergleichen mit geeigneten Flächeneinheiten (Einheitsquadrate) bzw. Raumeinheiten (Einheitswürfel) kennen. Das Ergebnis eines bedeutsamen Abstraktionsprozesses ist die Erkenntnis, daß sich Flächen- und Rauminhalt von Rechtecken bzw. Quadern auch durch Formeln berechnen lassen.
In Klasse 6 wird herausgearbeitet, daß sich mit diesen Formeln auch die Flächeninhalte beliebiger geradlinig begrenzter ebener Figuren berechnen lassen. Dabei werden diese geometrischen Figuren durch Flächenverwandlungen auf Rechtecke zurückgeführt und dabei spezielle Formeln für den Flächeninhalt einzelner Figurenklassen erarbeitet.
Prinzipiell dasselbe vollzieht sich in Klasse 7 für den dreidimensionalen Raum. Auf diese Weise wird eine geeignete Formel zur Berechnung des Rauminhalts von Prismen gewonnen.

Während die Auslegemethode in Klasse 5 natürliche Zahlen als Maßzahlen der Länge voraussetzte, sind die Formeln $A = a \cdot b$ bzw. $V = a \cdot b \cdot c$ auch für rationale Maßzahlen der Größen a, b und c erklärt.
Die Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks, dessen Länge und Breite inkommensurable Strecken sind, setzt jedoch die definitorische Erweiterung der Gültigkeit der genannten Formeln für reelle Maßzahlen voraus. Vor prinzipiell dem gleichen Problem stehen die Schüler, wenn sie den Flächeninhalt eines Kreises bzw. den Rauminhalt einer Kugel berechnen sollen. In den Klassen 7 und 8 kann diese Problematik aus verständlichen Gründen dem Schüler nur angedeutet werden. Zwar muß manches offenbleiben, ehe es zu einem späteren Zeitpunkt zur Zufriedenheit gelöst werden kann, jedoch Konzessionen an die Wissenschaftlichkeit dürfen nicht gemacht werden. Den Schülern ist diese Lücke in der Darstellung durchaus bewußtzumachen (↗ Uh 7/210).
Für Schüler, die den Unterricht bis zur Klasse 12 besuchen, setzt sich diese Linienführung insofern fort, als der Lehrplan für Klasse 12 fordert:

„Ausgehend von der Problematik der Flächenberechnung unter Anwendung der Integralrechnung, wird die Volumenberechnung mittels Integralrechnung eingeführt... Bei der Berechnung der Volumina von elementaren geometrischen Körpern, insbesondere von Rotationskörpern, sind die den Schülern aus dem Unterricht in niedrigen Klassenstufen bekannten Formeln zu beweisen."

Aus den dargestellten Zusammenhängen heraus ist es auch verständlich, daß das Stoffgebiet zunächst mit einer Wiederholung von Prismen und Zylindern begonnen wird. Diese Begriffe sowie das Berechnen ihres Oberflächen- und Rauminhaltes sind wichtige Grundlagen für das Verstehen des neuen Stoffes in Klasse 8. Dabei wird jedoch nicht ausschließlich wiederholt, sondern es wird zugleich der Satz von CAVALIERI eingeführt und bei Volumenvergleichen angewendet, wobei die Schüler lernen, auch schiefe Prismen und Zylinder zu berechnen. Auf dieser gesicherten und zugleich erweiterten Grundlage vollzieht sich nun die Behandlung des neuen Stoffes (Pyramide, Kreiskegel, Kugel). Diese wird aber nur dann effektiv sein können, wenn die Schüler eine Reihe von wichtigen, in früheren Schuljahren und Stoffgebieten erworbenen Kenntnissen und Erkenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten sicher beherrschen. Vor allem handelt es sich um folgende:

Flächen- und Rauminhaltsberechnungen von Vielecken, Prismen, Kreiszylindern (Klassen 5 bis 7);
Ähnlichkeitslehre (Strahlensatz, Flächeninhalte ähnlicher Figuren, Satz des PYTHAGORAS);
Anwenden von Rechenstab und Tafelwerk;
Lösen von Gleichungen, Arbeiten mit Verhältnisgleichungen und mit Variablen;
Quadratzahlen, Quadratwurzeln;
Körperdarstellung in senkrechter Zweitafelprojektion und in schräger Parallelprojektion.

Speziell diese Sachverhalte sollten also in täglichen Übungen und bei der immanenten Wiederholung berücksichtigt werden.
An dieser Stelle kann festgestellt werden, daß das Stoffgebiet innerhalb der vom Lehrplan vorgezeichneten Linienführung beachtliche Beiträge zur Realisierung der facheigenen und fachübergreifenden Leitlinien, wie sie der Lehrplan ausweist, leistet. Das betrifft insbesondere die folgenden:

Gleichungen:

Im Vordergrund steht das Umformen von Gleichungen beim Herleiten oder Beweisen von Formeln sowie das Lösen von Gleichungen bei den verschiedenen Aufgabenarten.

Abbildungen:

Der Lehrplan weist darauf hin, daß einseitiges Rechnen in diesem Stoffgebiet zu vermeiden ist. Die Fertigkeiten im Zeichnen und Konstruieren sind weiterzuentwickeln und die in Klasse 7 vermittelten Kenntnisse in der Darstellenden Geometrie zu vertiefen. Dabei ist das Raumvorstellungsvermögen der Schüler systematisch weiterzuentwickeln, und es ist zu sichern, daß die Schüler tiefer in den geometrischen Abbildungsbegriff eindringen.

Funktionen:

Gemäß Lehrplan sind alle Formeln dieses Stoffgebietes als Gleichungen mit mehreren Variablen zu interpretieren. Sie sind damit auch als Funktionen zu betrachten, insbesondere dann, wenn überlegt wird, wie das Variieren gewisser Größen in einer Formel sich auf die übrigen in der Formel enthaltenen Größen auswirkt.

Beweisen:

Der Beitrag des Stoffgebietes zu dieser Leitlinie ergibt sich schon aus der Anzahl der Formeln, die herzuleiten oder zu beweisen sind. Kann vorher eine Vermutung erarbeitet werden, so wirkt sich das günstig auf die Einsicht in die Beweisnotwendigkeit und auf die Entwicklung eines Beweisbedürfnisses aus. In zunehmendem Maße sollten die Schüler auch an selbständiges Beweisen herangeführt werden.

Mittel zur Rationalisierung der geistigen Arbeit:

Diese Leitlinie des Lehrplanes ist besonders dadurch zu realisieren, daß die Fertigkeiten im Umgang mit Rechenstab, Formelsammlung und Tabellen weiterentwickelt werden und daß beim Lösen der zahlreichen Aufgaben übersichtlich und sauber gearbeitet wird.

Diese Hinweise zur Realisierung der Leitlinien des Lehrplans sind keineswegs vollständig, sie sollen lediglich auf besondere Schwerpunkte orientieren.
Als wichtigste Kenntnisse und Erkenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, die in diesem Stoffgebiet zu vermitteln sind, weist der Lehrplan aus:

> „Die Schüler haben sich die Begriffe „Pyramide“, „Kreiskegel“ und „Kugel“ angeeignet. Sie kennen den Satz von Cavalieri und verstehen die mit dessen Hilfe vorgenommenen Herleitungen von Volumenformeln.
> Die Schüler besitzen sichere Fertigkeiten im Berechnen von Prismen, Pyramiden, Kreiszylindern, Kreiskegeln und Kugeln und vermögen entsprechende Sach- und Anwendungsaufgaben unter umfassender Verwendung von Zahlentafel, Formelsammlung und Rechenstab zu lösen.“[1])

Wenn der Lehrplan fordert, daß die Schüler sich nur die wichtigsten Grundformeln fest im Gedächtnis einzuprägen haben, so betrifft das etwa die Formeln für die Volumen

[1]) Vgl. *Lehrplan Mathematik, Klassen 5 bis 10.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1975 (00 30 18), Seite 27.

von Pyramide, Kreiskegel und Kugel sowie die Formel für den Oberflächeninhalt der Kugel. Alle anderen Formeln müssen die Schüler schnell und sicher in der Zahlentafel finden oder auch selbst herleiten können.
Wichtige Überzeugungen und Einsichten, die der Lehrer bei den Schülern während der Arbeit im Stoffgebiet schaffen sollte, sind etwa:

Die Notwendigkeit und der Wert eines sicheren Fakten- und Formelwissens;
die Notwendigkeit einer sauberen und übersichtlichen Darstellung von Lösungswegen zur Vermeidung von Fehlern.

Darüber hinaus bieten die vielseitigen Aufgaben, die häufig auch der Umwelt der Schüler entnommen werden sollten, zahlreiche Möglichkeiten für die politisch-ideologische und weltanschauliche Erziehung, besonders dann, wenn Diskussionen und Lösungswege, Lösungen von Aufgaben u. ä. vom Schüler Meinungsbildungen, Darlegungen von Standpunkten fordern.

4.0.2 Literaturhinweise

(1) Autorenkollektiv: *Kleine Enzyklopädie Mathematik.* Seiten 225 bis 228 und 232 bis 235. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1965.
(2) Pietzsch, G.: *Zum Grenzwertproblem.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1967 (Bestell-Nr. 00 21 12).

Artikel in der Fachzeitschrift „Mathematik in der Schule":

(3) Ritter, K.: *Die Lochschablone – ein neues Arbeitsgerät zur Rationalisierung des Mathematikunterrichts.* Jahrgang 2 (1964), Heft 9, Seite 700.
(4) Bohne, E., und W. Mählert: *Einige Bemerkungen zur Behandlung des Stoffgebietes „Zusammengesetzte Körper" und Möglichkeit zur Verwendung eines Klassensatzes „Stereometrie".* Jahrgang 3 (1965), Heft 10, Seite 765.
(5) Otto, M.: *Die Kugel als reguläres Polyeder.* Jahrgang 5 (1967), Heft 6, Seite 470.
(6) Luther, W.: *Zur Einführung der Volumenformel der Kugel.* Jahrgang 5 (1967), Heft 12, Seite 910.
(7) Jungk, W.: *Zur Herleitung von Volumenformeln im Stereometrieunterricht.* Jahrgang 6 (1967), Heft 3, Seite 192.
(8) *Zur Behandlung des Flächeninhalts krummer Oberflächen.* Jahrgang 8 (1970), Heft 2, Seite 88.
(9) *Zur Geschichte der Flächen- und Volumenmessung.* Jahrgang 8 (1970), Heft 4, Seite 251.
(10) *Zur Darlegung der Flächen- und Volumenmessung in sowjetischen Schulbüchern.* Jahrgang 8 (1970), Heft 6, Seite 451.
(11) Glass, W.: *Beschreibung und Hinweise zum Unterrichtsmittel „Fadenmodelle".* Jahrgang 8 (1970), Heft 2, Seite 107.
(12) Erbrecht, G., und D. Geupel: *Richtige Schwerpunktsetzung im Stoffgebiet „4. Flächen- und Rauminhaltsberechnung" der Klasse 8.* Jahrgang 12 (1974), Heft 5/6, Seite 290.

4.0.3. Vorschlag einer Stoffverteilung für das Stoffgebiet „Flächen- und Rauminhaltsberechnung“

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
4.1. Stoffeinheit: Volumenvergleiche (3 Stunden)						
(LE 1, 2, 3)	3	78 bis 81	219	Gerade und schiefe Prismen und Kreiszylinder: Begriffe, Volumenberechnung; Satz von CAVALIERI (ohne Beweis) und seine Anwendung bei Volumenvergleichen, speziell bei Schiefkörpern	Prismen, Zylinder (Begriffe, Volumen, Oberfläche); Körperdarstellung (senkrechte Zweitafelprojektion, schräge Parallelprojektion); Anwenden von Tafelwerk und Rechenstab	Modelle: Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel; Gerade und schiefe Prismen (Zylinder); Prismen aus Schichten (Holzplatten, Postkarten o. ä.); Arbeitsblatt
4.2. Stoffeinheit: Pyramiden (7 Stunden)						
(LE 4, 5, 6, 7) [1 Stunde von 4.2. erscheint bei 4.5.]	7	81 bis 88	224	Pyramiden in der Umwelt; Definieren des Begriffes „Pyramide“; Formen, Klassifizierungsmerkmale; Bezeichnen und Berechnen von Stücken; Herleiten der Formeln für Volumen, Mantel- und Oberflächeninhalte gerader Pyramiden; Vielseitige Übungen (Berechnen, Zeichnen); Kurzarbeit	Vierecke und Vielecke (Flächenzerlegung und -berechnung); Ähnlichkeitslehre (Strahlensatz, Flächeninhalte ähnlicher Figuren; Satz des PYTHAGORAS); Körperdarstellung; Rechenstab und Tafelwerk; Satz von CAVALIERI	Bilder oder Dias von ägyptischen Pyramiden; Kristalle o. ä.; Modelle: Pyramiden, Fadenmodell oder Stativmaterial und Gummifäden; Pyramidennetz; Füllkörper (Pyramide, Prisma); Klassensatz: Pyramiden (Stereometriebaukasten oder Selbstbau durch Schüler); Polylux-Lichtschreiber mit Folien (Zerlegung eines Prismas in Pyramiden); Arbeitsblatt; Plastikröhrchen, Knetmasse

Unterrichtseinheit	Anzahl der Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Stoff	Wiederholung	Unterrichtsmittel
4.3. Stoffeinheit: Kreiskegel (5 Stunden)						
(LE 8, 9) [1 Std. von 4.3. erscheint bei 4.5.]	5	88 bis 91	234	Gerader Kreiskegel als Rotationskörper; Kegelformen; Begriffe: Mantel, Mantellinie, Höhe, Achse; Kreiskegel in der Umwelt; Erarbeiten und Beweisen der Volumenformel für Kreiskegel; Herleiten der Formeln für Mantel- und Oberflächeninhalt; Vielseitige Übungen (Berechnen, Zeichnen)	Verhältnisgleichungen; Kreisberechnung (Umfang, Flächeninhalt, Kreisausschnitt); Ähnlichkeitslehre (Strahlensatz, Flächeninhalte ähnlicher Figuren, Satz des PYTHAGORAS); Körperdarstellung; Rechenstab und Tafelwerk; Satz von CAVALIERI	Modelle: Kegel, Pyramide, Prisma, Zylinder; Kegelmantel; Füllkörper (Kegel, Zylinder); Klassensatz: Kegel (Stereometriebaukasten)
4.4. Stoffeinheit: Kugel (5 Stunden)						
(LE 10, 11, 12, 13)	5	91 bis 96	239	Kugel als Rotationskörper; Erarbeiten und Beweisen der Volumenformel für Kugeln; Herleiten der Formel für den Oberflächeninhalt; Vielseitige Übungen (Berechnen, Zeichnen); Begriff „Kubikwurzel"; Berechnen von dritten Potenzen und Kubikwurzeln mit Hilfe von Rechenstab und Zahlentafel	Kreisberechnung (Kreisring); Pyramide; Satz von CAVALIERI; Körperdarstellung; Rechenstab und Tafelwerk; Quadratzahl, Quadratwurzel	Füllkörper (Kegel, Zylinder, Halbkugel); Demonstrationsrechenstab, Schülerrechenstäbe; Polylux-Lichtschreiber mit Schablonen (K-Skale, Läuferstrich)
4.5. Klassenarbeit (2 Stunden)						
[↗ 4.2. und 4.3.]	2		243	Klassenarbeit (1 Std.); Rückgabe und Besprechung (1 Std.)		

4.1. Volumenvergleiche (3 Stunden; Lerneinheiten D 1 bis 3)

Hauptaufgabe dieser Stoffeinheit ist eine Wiederholung und Vertiefung wichtiger Begriffe und Erkenntnisse, die im bisherigen Lehrgang Stereometrie vermittelt worden sind. Zunächst stehen dabei die Begriffe „Prisma“ und „Kreiszylinder“ sowie die Volumenberechnung gerader Prismen und gerader Kreiszylinder im Mittelpunkt.
Die Erläuterung des Satzes von CAVALIERI (ohne Beweis) schafft die Möglichkeit, durch Volumenvergleiche auch das Volumen schiefer Prismen und schiefer Kreiszylinder zu berechnen. Die Notwendigkeit, gerade und schiefe Prismen (Kreiszylinder) zu unterscheiden, muß den Schülern hier besonders deutlich werden. Dabei sollte zugleich wiederholt werden, daß die Prismen nach der Anzahl der Seitenflächen eingeteilt werden, daß es regelmäßige und unregelmäßige Prismen gibt und daß es nicht nur Kreiszylinder, sondern z. B. auch Zylinder mit elliptischer Grundfläche gibt.
Die hauptsächlichen Anwendungen des Satzes von CAVALIERI erfolgen in den nächsten Stoffeinheiten. Seine Einführung in dieser Stoffeinheit erweist sich aber deshalb als besonders günstig, weil sich bei den Volumenvergleichen von geraden und schiefen Prismen (Kreiszylinder), einer wenigstens teilweise bekannten Problematik, eine besonders einfache Anwendung des Satzes ergibt. Auf diese Weise können Schwierigkeiten für das Verständnis dieses Satzes und seiner Anwendung bei Volumenvergleichen weitgehend vermieden werden.
Das Bestreben, auch das Volumen schiefer Prismen und Kreiszylinder zu berechnen, liefert zugleich eine geeignete Motivation für die Einführung des Satzes von CAVALIERI.
In dieser Stoffeinheit ist das Berechnen von Oberflächeninhalten und Volumen mit dem Skizzieren und Konstruieren der Körper auf vielseitige Weise zu verbinden. Die Kenntnisse aus der Darstellenden Geometrie, der Gleichungslehre, der Kreisberechnung und die Fertigkeiten im Umgang mit Tafelwerk und Rechenstab sind dabei zu festigen.

Erster Schwerpunkt der Stoffeinheit 4.1.: Wiederholung der Begriffe „Prisma“, „Kreiszylinder“; Volumenberechnung gerader Prismen und gerader Kreiszylinder (Lerneinheit D 1)

Es empfiehlt sich, diese Thematik in einer besonderen *Wiederholungsstunde zu Beginn der Stoffeinheit* zu behandeln. Diese Stunde wird ihrer besonderen Rolle wegen hier ausführlich dargestellt.

Thema: Prismen und Kreiszylinder (Wiederholung)

Gliederung:

(1) Zielorientierung: Wiederholung von Prisma und Kreiszylinder
(2) Wiederholung: Begriffe „Prisma“, „Kreiszylinder“; Volumenberechnung gerader Prismen (Kreiszylinder)
(3) Übungen: Prisma
Körperdarstellung (senkrechte Zweitafelprojektion, schräge Parallelprojektion); Volumenberechnung (Arbeitsblatt)
(4) Wiederholung: Einteilung der Prismen (gerade/schief; n-seitig; regelmäßig/unregelmäßig)
(5) Übungen: Kreiszylinder
Körperdarstellung (senkrechte Zweitafelprojektion); Volumenberechnung

Methodische Hinweise:

Zu (1): Die Zielorientierung sollte sich nicht nur auf diese Stunden beziehen. Zu Beginn der ersten Stunde des neuen Stoffgebietes sollte der Schüler einen kurzen Überblick über Anliegen und Aufbau des Stoffgebietes erhalten. Die Zielorientierung erfolgt möglichst nicht nur durch Worte, sondern wird durch die Anschauung unterstützt.
Dazu zeigt der Lehrer jeweils ein Demonstrationsmodell folgender Körper: Prisma, Kreiszylinder, Pyramide, Kegel, Kugel. Die Schüler nennen die Namen der gezeigten Körper und stellen fest, daß sie das Volumen des Prismas und des Kreiszylinders bereits berechnen können, das der übrigen Körper jedoch noch nicht. Der Lehrer macht jetzt die Schüler mit dem Anliegen der Stunde und dem Aufbau des Stoffgebietes bekannt.
Zu (2): Zunächst werden die Begriffe „Prisma" und „Kreiszylinder" wiederholt, ebenso die Formeln für die Volumenberechnung für gerade Prismen (Kreiszylinder). Die Schüler erhalten die Aufgabe, selbständig die Zusammenfassungen über Prisma bzw. Kreiszylinder im Lehrbuch (Lb 78) durchzuarbeiten. Die übersichtliche Darstellung im Lehrbuch ermöglicht auch eine Arbeit in zwei Gruppen. Inzwischen schreibt der Lehrer einige Begriffe an die Tafel, etwa die folgenden:

Prisma	Kreiszylinder
(Grund- und Deckflächen, Seitenflächen)	(Grund- und Deckflächen, Mantel)
Höhe	Höhe
gerades Prisma	gerader Kreiszylinder
Volumenberechnung	Volumenberechnung

Anhand des Tafelbildes und eines Demonstrationsmodells gibt jeweils ein Schüler eine Zusammenfassung durch einen Schülervortrag.
Bei der Erklärung der Begriffe „gerades Prisma" und „gerader Kreiszylinder" sollte das Modell eines schiefen Prismas bzw. eines schiefen Kreiszylinders zur Veranschaulichung benutzt werden.
Zu (3): Im weiteren Verlauf der Stunde stehen vielseitige Übungen im Vordergrund, wobei es stets um die Weiterentwicklung rechnerischer und konstruktiver Fertigkeiten geht. In der ersten Übung wird das Prisma behandelt. Dazu könnte ein Arbeitsblatt verwendet werden, wie es Bild 4.1. zeigt. Die Schüler lösen selbständig die Aufgaben 1 (Ergänzung des Aufrisses zu einem regelmäßigen dreiseitigen Prisma) und 3 (Volumenberechnung).
Die Aufgabe 2 kann als Hausaufgabe erteilt werden (zunächst Begriff „Kavalierperspektive" kurz wiederholen). Eine geeignete Zusatzaufgabe könnte sein, eine andere mögliche Ergänzung des Aufrisses zu finden (andersfarbig einzeichnen). Steht das Arbeitsblatt nicht zur Verfügung, so eignet sich auch der Auftrag D 1 a, b (Lb 78) für diese Übung.
Zu (4): Im Unterrichtsgespräch werden die verschiedenen Einteilungsprinzipien für Prismen wiederholt (gerade/schief; n-seitig; regelmäßig/unregelmäßig). Eine kurze Anwendung dieser Kenntnisse auf einige Modelle oder Abbildungen von Prismen (Tafelbild oder Polylux-Lichtschreiber; Bild 4.2.) schließt diesen Stundenteil ab.
Zu (5): Inhalt der letzten Übung ist der Kreiszylinder.
Die Schüler lösen zunächst den rechnerischen Teil von Aufgabe d 5 a (b, c) (Lb 133) selbständig. Der Lehrer weist auf die Benutzung des Tafelwerkes hin.
Die entsprechende Darstellung in Zweitafelprojektion ist der zweite Teil der Hausaufgabe.

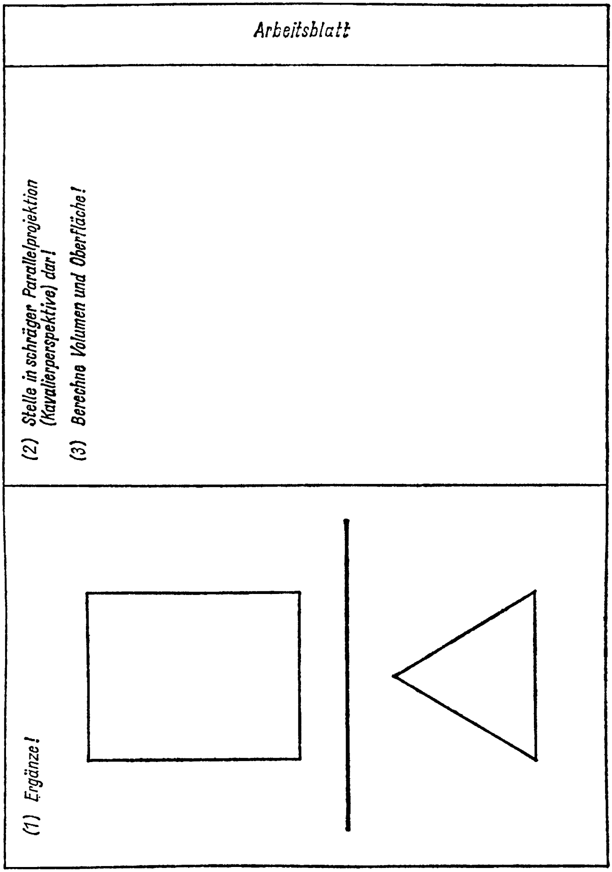

Arbeitsblatt
(1) Ergänze!
(2) Stelle in schräger Parallelprojektion (Kavalierperspektive) dar!
(3) Berechne Volumen und Oberfläche!

Bild 4.1.

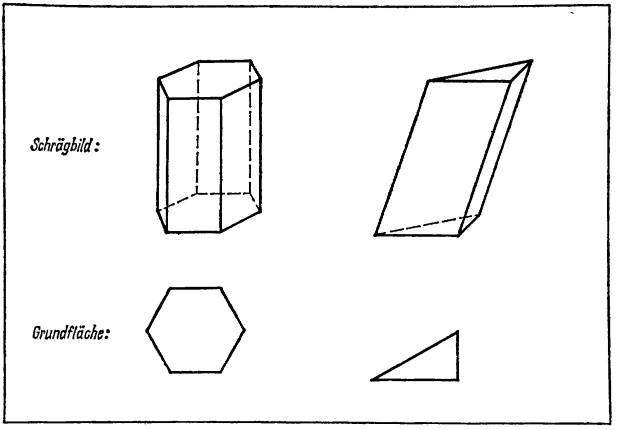


Bild 4.2.

In einer kurzen Zusammenfassung verweist der Lehrer auf den Zusammenhang zwischen Prisma und Zylinder, der in der einheitlichen Volumenformel $V = A_G \cdot h$ zum Ausdruck kommt.
Es wird darauf hingewiesen, daß Übungen, wie sie für die erste Stunde empfohlen wurden, auch in den beiden anderen Stunden der Stoffeinheit durchgeführt werden sollten (Aufgaben d 1 bis 10, Lb 133 f.).

Zweiter Schwerpunkt der Stoffeinheit 4.1.: Einführung des Satzes von Cavalieri *(ohne Beweis) und seine Anwendung bei Volumenvergleichen (Lerneinheit D 2)*

Vor der Einführung des Satzes ist den Schülern bewußtzumachen, daß sie bisher nur das Volumen gerader Prismen berechnen können. Es wird die Überlegung angekündigt, ob und unter welchen Bedingungen ein Vergleich des Volumens schiefer Prismen mit dem Volumen entsprechender gerader Prismen möglich ist.
Obwohl ein Beweis des Satzes von Cavalieri in Klasse 8 nicht möglich ist, sollte der Satz dem Schüler nicht vorgegeben werden. Der Satz wird zunächst auf empirischem Wege in Form einer Vermutung gewonnen. Bei der Formulierung des Satzes ist auf die Notwendigkeit eines Beweises aufmerksam zu machen. Das Kernstück eines solchen Beweises, der Übergang zu beliebig fein werdenden Schichten parallel zur Grundflächenebene des Körpers, sollte auch im Zuge der induktiven Erkenntnisgewinnung anklingen.
In enger Anlehnung an das Lehrbuch, dessen Abbildungen benutzt werden sollten, werden für die Erarbeitung des Satzes von Cavalieri die nachstehenden methodischen Schritte angegeben:

1) Vergleich zweier verschiedener gerader Prismen mit gleich großen Schnittflächen in gleichen Höhen über der Grundflächenebene sowie mit gleich großen Grundflächen und gleich langen Körperhöhen (Bild D 1, Lb 79).
   Wegen $V_1 = A_{G_1} \cdot h_1$ und $V_2 = A_{G_2} \cdot h_2$
   und wegen $A_{G_1} = A_{G_2}$; $h_1 = h_2$
   gilt offenbar: $V_1 = V_2$.
2) Vergleich eines schiefen Prismas mit einem entsprechenden geraden Prisma (Bild D 2, Lb 79).
   Ein aus stärkeren Schichten (Holzplatten) aufgebautes Prisma wird, wie im Lehrbuch dargestellt, in eine neue Lage gebracht (treppenförmiger Körper).
   Wichtiger Denkschritt: Durch Zerlegung des Prismas in beliebig fein werdende Schichten (Stapel von Postkarten) entspricht die neue Lage einem schiefen Prisma. Für gerades wie für schiefes Prisma gelten die unter 1) formulierten Voraussetzungen.
   Vermutung: Offenbar gilt deshalb auch: $V_1 = V_2$.
   Diese Vermutung läßt sich außerdem durch einen Füllversuch (Sand, Wasser) erhärten, wenn geeignete Füllkörper zur Verfügung stehen.
3) Übertragung der Vermutung auf beliebige ebenflächig begrenzte Körper am Beispiel zweier Pyramiden, für die wiederum die unter 1) formulierten Voraussetzungen gelten sollen (Bild D 3, Lb 79).
   Die Überlegungen werden nur theoretisch durchgeführt, da sie prinzipiell mit denen unter 2) übereinstimmen.
   Erkenntnis: Die unter 2) formulierte Vermutung für Prismen kann offenbar auf beliebige ebenflächig begrenzte Körper übertragen werden.
4) Zusammenfassung
   Bei allen unter 1) bis 3) durchgeführten Körpervergleichen gelten offenbar folgende Eigenschaften:
   a) $A_{G_1} = A_{G_2}$
   b) $h_1 = h_2$
   c) Gleiche Schnittflächen in gleichen Höhen parallel zur Grundflächenebene
   d) $V_1 = V_2$
5) Verallgemeinerung zum Satz von CAVALIERI
   Aus der Gültigkeit der Eigenschaften a), b), c) folgt stets die Eigenschaft d) (Formulierung des Satzes ↗ Lb 80, Satz D 1).
6) Gültigkeit des Satzes auch für nicht ebenflächig begrenzte Körper (Bild D 4, Lb 80).
7) Anwendung (Auftrag D 4, Lb 80).

Dritter Schwerpunkt der Stoffeinheit 4.1.: Volumenberechnung schiefer Prismen und schiefer Kreiszylinder (Lerneinheit D 3)

Die Volumenvergleiche mit Hilfe des Satzes von CAVALIERI finden sogleich eine wichtige Anwendung bei der Volumenberechnung schiefer Prismen und schiefer Kreiszylinder. Indem der Lehrer auf dieses Ziel orientiert, läßt er den Unterschied zwischen geraden und schiefen Prismen (Kreiszylinder) wiederholen. Die Beweise der entsprechenden Sätze (Sätze D 2 und D 3, Lb 80 f.) sind im Lehrbuch ausführlich dargestellt. In jedem Falle wird zu einem schiefen Körper die Existenz eines geraden Körpers mit gleicher Grundfläche und Höhe angenommen und auf diesen Sachverhalt der Satz von CAVALIERI angewendet.
Methodisch sollte so verfahren werden, daß der Lehrer den Beweis des Satzes D 2 ausführlich und für alle Schüler verständlich erläutert, daß hingegen der Beweis des Satzes

D 3 von den Schülern selbständig erarbeitet und anschließend durch einen Schülervortrag dargelegt wird. Die Aufgaben d 11 bis d 15 (Lb 134) ermöglichen die Anwendung der erworbenen Kenntnisse im Unterricht und in Hausaufgaben.

Zusammenfassung:

1) Da für die Stoffeinheit drei Stunden zur Verfügung stehen, kann jeder der drei Schwerpunkte in einer Stunde behandelt werden.
   Die Übungen zum ersten Schwerpunkt sollten, soweit die Zeit dazu ausreicht, in der 2. Stunde fortgesetzt werden.
2) Am Ende der Stoffeinheit sollte folgendes erreicht sein:
   Die Schüler kennen den Unterschied zwischen geraden und schiefen Prismen bzw. Kreiszylindern und sind in der Lage, Volumenberechnungen für diese Körper durchzuführen. Sie kennen den Satz von CAVALIERI und verstehen, wie er bei Volumenvergleichen angewendet wird.

4.2. Pyramiden
(7 Stunden; Lerneinheiten D 4 bis 7)

Nachdem in der Stoffeinheit 4.1. die erforderlichen Grundlagen bereitgestellt worden sind, kann nun die Behandlung der ersten Art der in dieser Klassenstufe neu einzuführenden Körper, der Pyramiden, erfolgen.
Es handelt sich bei den Pyramiden im Gegensatz zu den dann folgenden Körperarten (Kreiskegel, Kugel) um ebenflächig begrenzte Körper, doch bereitet die Herleitung der Formel für das Volumen der Pyramiden einige Schwierigkeiten. Sie bestehen vor allem darin, daß die Herleitung aus einer größeren Anzahl von Einzelschritten besteht, daß größere Anforderungen an das Raumvorstellungsvermögen gestellt werden und daß in die Herleitung eine Reihe früher erworbener Kenntnisse einfließen, die zweckmäßigerweise vorher bereitgestellt werden sollten.
Die Herleitung der Volumenformel für Pyramiden basiert vor allem auf der in Klasse 7 erarbeiteten Volumenformel für Prismen und setzt die Kenntnis des Strahlensatzes voraus. Die Behandlung der Pyramiden schafft zugleich wichtige Voraussetzungen für die sich anschließende Behandlung der Kreiskegel.
Im Interesse der Festigung und ständigen Anwendungsbereitschaft der zum Berechnen von Pyramiden erforderlichen Kenntnisse sollte der Übung in diesem Stoffabschnitt breiter Raum gegeben werden. Dabei sind auch das Zeichnen und Konstruieren zu berücksichtigen sowie die bekannten Rechenhilfsmittel zu verwenden.

Erster Schwerpunkt der Stoffeinheit 4.2.: Definieren des Begriffes „Pyramide“ (Lerneinheiten D 4 und 5)

Den Schülern ist bewußtzumachen, daß die Form der Pyramide in der Natur (Kristalle), Architektur (historische Bauwerke in Ägypten und Mittelamerika; Turmhauben) und Technik (Werkstücke, Maschinenelemente) eine bedeutende Rolle spielt. Das Anliegen des Lehrers kann durch geeignete Abbildungen (Projektion durch Diaskop oder Episkop) unterstützt werden. Es sei auch an das Motivbild („Ägyptische Pyramiden“) im Lehrbuch (Lb 77) erinnert, das als Ausgangspunkt für ein Gespräch gewählt werden kann. Dabei kann auf die Unmenschlichkeit der Sklavenhalter hingewiesen und auf die gewaltige Leistung der unterdrückten Sklaven, deren Arbeitsergebnisse die Jahrtausende überdauert haben, eingegangen werden.

„Die Große Pyramide hat eine Grundkante von 227 m Länge (ursprünglich 233 m) und eine Höhe von 137 m, 10 m niedriger als zur Zeit der Fertigstellung.
Zum Transport des verwendeten Baumaterials wären 20000 Güterzüge mit je 30 Waggons erforderlich; aneinandergekoppelt hätten sie eine Länge, die z. B. der doppelten Entfernung Paris–Wolgograd (Luftlinie) entspräche ..." (Aus „Kleine Enzyklopädie – Mathematik". VEB Bibliografisches Institut, Leipzig 1965, Seite 226.)

Es ist nun an der Zeit, den Schülern begreiflich zu machen, daß der mathematische Pyramidenbegriff das Ergebnis eines langen Abstraktionsprozesses darstellt. Die Schüler erkennen das bereits, wenn sie die abgebildeten ägyptischen Pyramiden mit einem Anschauungsmodell einer Pyramide vergleichen, wobei auch das letztere noch eine Vergegenständlichung des abstrakten mathematischen Begriffs darstellt. Aus diesen Überlegungen wird die Notwendigkeit einer exakten Definition des mathematischen Pyramidenbegriffs ersichtlich.
Obwohl nicht vorgesehen ist, den Schülern eine genetische Definition des Begriffs „Pyramide" zu geben, sollte doch zunächst das Entstehen einer Pyramide im Raum lediglich unter Verwendung der Begriffe Punkt, Gerade, Ebene beschrieben werden. Dazu regt Beispiel D 5 (Lb 81) im Zusammenhang mit Bild D 7 (Lb 81) an. Neben dem genannten Bild sind Fadenmodelle mit Gummifäden oder Stativmaterialien aus der Physiksammlung geeignete Mittel zur Veranschaulichung. Auch Auftrag D 7 (Lb 82) enthält wichtige Vorüberlegungen zum Verständnis der Definition. Dieser Auftrag sollte deshalb von den Schülern möglichst selbständig mit Hilfe von Tabellen bearbeitet werden.
Nun kann Definition D 4 (Lb 82) zur Kenntnis genommen und von den Schülern wiedergegeben werden. Sie sollte sofort auf einige geeignete Modelle gerader Pyramiden angewendet werden. Statt dessen kann der Lehrer auch verschiedene Grundflächen gerader Pyramiden anzeichnen (Quadrat, Rechteck, Dreieck, Sechseck). Die Schüler haben dann die entsprechende Pyramide mit Worten zu beschreiben.
Bevor weitere Begriffe eingeführt werden, sollten die Schüler selbständig Auftrag D 8 (Lb 82) bearbeiten (Darstellung als gerade Pyramide). Danach werden gemeinsam alle Eckpunkte bezeichnet, und es werden nun die übrigen Begriffe eingeführt.

Grundfläche: $ABCD$
Seitenflächen: $ABS, \ldots$
Spitze: S
Grundkanten: $\overline{AB}, \ldots$
Seitenkanten: $\overline{AS}, \ldots$
Höhe der Pyramide: $\overline{MS}$

Weitere Symbole für die Längen der Kanten und Höhen sind Bild D 8 (Lb 82) zu entnehmen. Dabei ist unbedingt auf die verschiedenen Höhen (h, h_a) einzugehen, zumal diese bei den folgenden Berechnungen eine wichtige Rolle spielen.
Um den Unterschied zwischen geraden und schiefen Pyramiden herauszuarbeiten, kann Auftrag D 8 (Lb 82) noch einmal für eine andere Lage der Spitze (z. B. senkrecht über A) gelöst werden.
Durch Gegenüberstellung eines regelmäßigen und eines unregelmäßigen Sechsecks als

Grundflächen von Pyramiden wird schließlich der Begriff der regelmäßigen (unregelmäßigen) Pyramide eingeführt.
Den Schülern ist zusammenfassend bewußtzumachen, über welche verschiedenen Möglichkeiten der Klassifizierung der Pyramiden sie verfügen:

n-seitige Pyramiden: entsprechend der Anzahl der Eckpunkte der Grundfläche, der Grundkanten bzw. der Seitenflächen;
regelmäßige Pyramiden: Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck und Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche;
gerade Pyramiden: Grundfläche hat einen Mittelpunkt und Spitze liegt senkrecht über dem Mittelpunkt.

Diese Erkenntnisse sollten durch geeignete Übungen im Klassifizieren von Pyramiden gefestigt werden. Dabei können die zu klassifizierenden Objekte als Modelle (Stereometriebaukasten) oder durch Beschreiben ihrer Eigenschaften vorgegeben werden (↗ Dritter Schwerpunkt).
Schließlich ergibt sich das Problem, die Längen der Kanten oder der Höhe einer Pyramide zu berechnen, eine wichtige Vorstufe für das Berechnen des Volumens und des Oberflächeninhalts von Pyramiden. Darum sollten diese Übungen schon vorher vorgesehen werden. Die Herausarbeitung des Lösungsweges einer solchen Aufgabe läßt sich anfangs dadurch erleichtern, daß der Lehrer Schnittflächen, die bei der Berechnung eine Rolle spielen, in ein entsprechendes Fadenmodell einsetzt. Das übersichtliche Darstellen des Lösungsweges einschließlich einer Skizze (farbiges Herausheben der gegebenen und gesuchten Stücke sowie der Schnittdreiecke) in Tafelbild und Schülerheften sind wichtige Voraussetzungen für richtiges Lösen. Den Schülern ist bewußtzumachen, daß hier wieder eines der vielen Anwendungsgebiete des in der „Ähnlichkeitslehre“ erarbeiteten Satzes des Pythagoras vorliegt. Dem Beispiel D 6 (Lb 82 f.) ist zu entnehmen, daß zunächst mit Variablengleichungen gearbeitet wird. Erst nach allen notwendigen Umformungen werden die gegebenen Größen eingesetzt, und es wird die numerische Lösung ermittelt. Dabei wird konsequent mit Größengleichungen gearbeitet.
Auftrag D 9 (Lb 83) ist zu entnehmen, daß es keineswegs immer auf vollständiges Lösen einer Aufgabe ankommt. Sehr wertvoll ist schon das Beschreiben des gesamten Lösungsweges einer solchen Aufgabe. Daß die numerische Lösung unter Zuhilfenahme von Rechenstab und Tafelwerk ermittelt wird, sei nur am Rande erwähnt. (Weitere Hinweise zu Übungen ↗ Dritter Schwerpunkt.)

Zweiter Schwerpunkt der Stoffeinheit 4.2.: Herleiten der Formeln für Volumen, Mantel- und Oberflächeninhalt gerader Pyramiden (Lerneinheiten D 6 und 7)

Die Herleitung der Formel für das Volumen gerader Pyramiden ist mit einigen Schwierigkeiten verbunden und bedarf deshalb einer besonders sorgfältigen methodischen Aufbereitung.
Das beginnt bereits mit der Bereitstellung der erforderlichen Kenntnisse und Erkenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten aus zurückliegenden Stoffgebieten. Daher ist unbedingt eine Wiederholungs- und Übungsphase voranzustellen. Gegenstand dieser Wiederholung sind vor allem:

Vielecke (Flächenzerlegung, Flächeninhaltsberechnung); Stoff der Klasse 6;
Prisma (Volumenberechnung); Stoff der Klasse 7;
Strahlensatz; Satz von CAVALIERI; Stoff der Klasse 8.

Im Zuge dieser Wiederholung sollten die Schüler Aufgaben der folgenden Art lösen.

1. Gegeben sei die Grundfläche $ABCD$ eines geraden Prismas [Lochschablone: A (14), B (10), C (2), D (4)], die Länge der Höhe des Prismas betrage 7,5 cm. Berechne das Volumen (in cm³)!

2. Ergänze die folgenden Verhältnisgleichungen entsprechend Bild d 4.3.!
   a) $\overline{SA} : \overline{SD} = \overline{AB} : \ldots$
   b) $\overline{SB} : \overline{BE} = \ldots : \overline{CF}$
   c) $\overline{BC} : \ldots = \ldots : \overline{SJ}$
   d) $\ldots : \ldots = \overline{SA} : \overline{DG}$

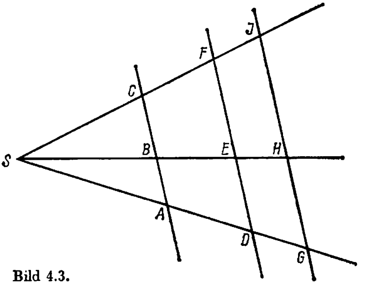


Bild 4.3.

3. Zeichne zwei einander schneidende Geraden, die von einem Paar paralleler Geraden geschnitten werden! Bezeichne alle Schnittpunkte, so daß folgende Verhältnisgleichungen gelten!
   $\overline{ZV} : \overline{ZY} = \overline{VW} : \overline{XY}$
   $\overline{ZW} : \overline{ZX} = \overline{VW} : \overline{XY}$
   $\overline{ZW} : \overline{ZX} = \overline{ZV} : \overline{ZY}$

Bevor die Formel für das Volumen der Pyramide hergeleitet wird, empfiehlt es sich, eine Phase der empirischen Erkenntnisgewinnung einzuschalten. Dadurch gewinnen die Schüler eine gewisse Vorstellung von dem bei der Herleitung zu erwartenden Ergebnis. Auch trägt ein solches Vorgehen zur Anerziehung eines Beweisbedürfnisses seitens der Schüler, einer wichtigen Forderung des Lehrplanes im Rahmen der Leitlinie „Beweisen", bei. Dabei muß der Lehrer stets betonen, daß das Ergebnis eines solchen Vorgehens nur den Charakter einer Vermutung besitzt. Ein Beweis muß sich deshalb anschließen (oder es ist zumindest auf die Notwendigkeit eines solchen zu verweisen).
Im vorliegenden Falle könnte die induktive Phase wie folgt verlaufen:

1) Anhand geeigneter Modelle wird zunächst vermutet, daß das Volumen einer Pyramide offenbar kleiner ist als das eines entsprechenden Prismas mit gleich großer Grundfläche und Höhe.
2) Durch ein Füllexperiment werden Pyramiden und Prisma (mit den schon unter 1) genannten Bedingungen) miteinander verglichen. Entsprechende Füllkörper lassen sich – wenn nicht vorhanden – aus festem Karton leicht selbst herstellen. Als Füllgut eignet sich feiner Sand.

Mit guter Näherung läßt sich dabei die Vermutung aussprechen: Das Volumen der Pyramide beträgt offenbar ein Drittel des Volumens des entsprechenden Prismas.

Die Frage nach der Allgemeingültigkeit dieser Aussage führt nun zur Herleitung der Volumenformel. Diese Herleitung ist im Lehrbuch so ausführlich dargestellt, daß es hier genügt, die methodischen Schritte deutlich zu machen, nach denen das Lehrbuch vorgeht und denen auch der Lehrer im Unterricht folgen sollte. Die Ausführlichkeit und Klarheit der Lehrbuchdarstellung ermöglicht außerdem die aktive Mitarbeit der Schüler bei der Herleitung der Formel.

Nachstehend wird ein Überblick über den Weg des Lehrbuches gegeben.

1) Übungen zur dreiseitigen Pyramide
   a) Konstruieren: Darstellen im Schrägbild sowie Grund- und Aufriß
   b) Begründen: Jede Pyramide läßt sich in dreiseitige Pyramiden zerlegen. Bei dreiseitigen Pyramiden kann jede Begrenzungsfläche als Grundfläche gewählt werden.

   Bemerkung: Es empfiehlt sich die Verwendung eines Klassensatzes von Pyramiden (Stereometriebaukasten oder vorbereitende Hausaufgabe: Modelliere aus Zeichenkarton eine dreiseitige Pyramide aus vier gleichseitigen Dreiecken — Tetraeder!).

2) Teilzielorientierung
   Um das Volumen einer dreiseitigen Pyramide, z. B. der unter 1 a) dargestellten, berechnen zu können, benötigt man eine geeignete Formel. Sie soll nun hergeleitet werden.

3) Satz D 5 (Lb 84) mit Beweis
   Dreiseitige Pyramiden mit gleich langen Höhen und inhaltsgleichen Grundflächen haben gleiches Volumen.

   Bemerkung: Der Beweis ist im Lehrbuch ausführlich dargestellt, dazu Bild D 10 (Lb 84). Es kann daher auf eine umfangreiche Tafelbilddarstellung verzichtet werden. Einzelne Herleitungsschritte sollten von den Schülern durchgearbeitet und selbständig dargestellt werden. Einige Erkenntnisse aus der Ähnlichkeitslehre sind bewußt anzuwenden und dabei zu wiederholen.

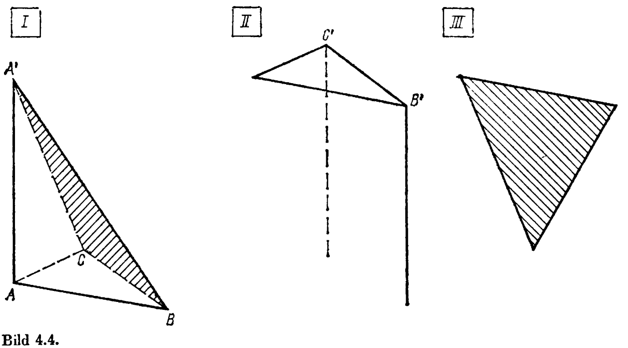


Bild 4.4.

4) Satz D 6 (Lb 85) mit Beweis

Für dreiseitige Pyramiden gilt: $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$.

Bemerkung: Prinzipiell gilt das schon unter 3) Gesagte. Die ausführliche Lehrbuchdarstellung ist gut gegliedert und wird durch die Bilder D 11 bis D 13 (Lb 85) veranschaulicht.
Bei dieser etwas umfangreichen Herleitung empfiehlt sich die Verwendung des Polylux-Schreibprojektors. Entsprechend den Lehrbuchbildern D 11 und D 12 werden drei verschiedene Schablonen vorbereitet (Tusche, auch farbig, auf durchsichtiger Folie). Die Schablonen werden nach und nach aufeinandergelegt und ergeben schließlich die in Bild D 12 des Lehrbuches dargestellte Figur.
Das Bild 4.4. zeigt den Inhalt der drei Schablonen.
Dadurch wird folgendes erreicht:

1) Der Aufbau der Gesamtdarstellung erfolgt schrittweise vor den Augen der Schüler in ein und derselben Figur und kann jederzeit rekonstruiert werden.
2) Das gut ausgeleuchtete Wandbild eignet sich gut zur Demonstration vor der gesamten Klasse.

5) Teilzielorientierung; Erarbeitung

Berechnung des Volumens n-seitiger Pyramiden.
Durch Zerlegung des Volumens in k dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe und den Grundflächeninhalten $A_1, \ldots, A_k$ erfolgt eine Rückführung auf dreiseitige Pyramiden.

Bemerkung: Zu dieser Erkenntnis sollten die Schüler anhand von Bild D 14 selbständig gelangen. Der Weg der Rückführung eines neuen Problems auf ein bereits gelöstes ist den Schülern besonders bewußtzumachen.

6) Herleitung von Satz D 7 (Lb 87)

Die unter 4) gewonnene Formel für das Volumen dreiseitiger Pyramiden wird als allgemeingültig für beliebige gerade Pyramiden erkannt.
Bemerkung: Die Herleitung von Satz D 7 bereitet keine besonderen Schwierigkeiten, wenn vorher Schritt 5) gegangen worden ist.

7) Beispiel

Eine erste Anwendung der erarbeiteten Formel erfolgt an einem einfachen und übersichtlichen Beispiel (formale Aufgabe wie Beispiel D 7, Lb 87).

Bemerkung: Die Schüler sind besonders darauf aufmerksam zu machen, daß
1) der Lösungsweg zwei Teilschritte enthält (Berechnung von A_G und von V),
2) soweit wie möglich alle Termumformungen mit Variablen erfolgen. Erst danach werden die gegebenen Größen eingesetzt. Der Rechenaufwand wird dadurch auf ein Mindestmaß reduziert und dann noch größtenteils mit Rechenhilfsmitteln bewältigt.

Die Gewinnung der Formeln für Mantel- und Oberflächeninhalt bereitet kaum Schwierigkeiten. Die Begriffe „Mantel", „Oberfläche" (und auch der Netzbegriff) sind den Schülern schon aus früheren Schuljahren (Kl. 5: Quader; Kl. 7: Kreiszylinder) bekannt. Sie werden jetzt auf die Pyramide angewendet. Dabei sollten die Schüler weitgehend selbständig tätig sein:

1) Durcharbeiten des entsprechenden Abschnitts im Lehrbuch (Lb 88),
2) (Vorbereiteter) Schülerkurzvortrag anhand eines Pyramidennetzes (Wenn nicht vorhanden, dann im Selbstbau herstellen – Abwicklung der Oberfläche in eine Ebene möglichst vor den Augen der Schüler).

Der Lehrer sollte selbst entscheiden, ob es erforderlich ist, dazu ein besonderes Tafelbild zu entwickeln. Dabei könnten für die einzelnen Netzteile Applikationen benutzt werden.
Bei der Formel für den Mantelflächeninhalt sollten die Schüler noch einmal auf den Zusammenhang zwischen der Bezeichnung „n-seitige Pyramide" und der Anzahl n ihrer Seitenflächen, die den Mantel bilden, hingewiesen werden.
Schließlich ist auf saubere sprachliche Formulierung und eindeutigen Gebrauch der Symbolik zu achten. Begriffe wie Oberfläche und Oberflächeninhalt (A_O) sind klar voneinander zu unterscheiden.
Über die Darstellung des Lösungsweges entsprechender Aufgaben gibt Beispiel D 8 (Lb 88) Auskunft.
Diesem Beispiel sind insbesondere folgende Hinweise zu entnehmen:

1) Die erforderlichen Umformungen werden zunächst soweit wie möglich nur mit Variablen durchgeführt.
2) Die benutzten Gleichungen sind Größengleichungen, d. h. also, es sind die entsprechenden Einheiten mitzuführen.
3) Erforderliche Nebenrechnungen sind als reine Zahlenrechnungen auszuführen und getrennt vom Hauptgang der Rechnung vorzunehmen.

Dritter Schwerpunkt der Stoffeinheit 4.2.: Durchführung vielseitiger Übungen

Das Lösen von Aufgaben erstreckt sich über die gesamte Stoffeinheit. Während es in den ersten Stunden (↗ Erster und Zweiter Schwerpunkt) darum geht, an einfachen Beispielen das Anwenden der erarbeiteten Formeln zu demonstrieren, wird das Lösen von Aufgaben Unterrichtsgegenstand in den letzten Stunden der Stoffeinheit. In ausgesprochenen Übungsstunden, in denen die Schüler Fertigkeiten beim Berechnen und Zeichnen von Pyramiden erwerben sollen, stehen Aufgaben der folgenden Arten im Vordergrund:

1) Berechnen von Stücken an Pyramiden
Solche Stücke sind z. B. Pyramidenhöhe, Höhe einer Seitenfläche bzgl. einer Grundkante, Grund- und Seitenkanten. Dabei kommt es auf klares Durchdenken des Lösungsweges anhand von Planfiguren (Kennzeichnen von Schnittflächen) und richtiges Anwenden des Satzes von Pythagoras an.
2) Berechnen des Volumens, des Mantel- und Oberflächeninhalts gerader Pyramiden
Hierbei handelt es sich um eine Weiterentwicklung der unter 1) genannten Aufgaben, es gilt deshalb das dort schon Gesagte.
3) Zeichenübungen
Sie dienen der Auflockerung der Rechenübungen, vor allem aber der Weiterentwicklung der Zeichen- und Konstruktionsfertigkeiten, des Raumvorstellungsvermögens und der Wiederholung der Kenntnisse aus der Darstellenden Geometrie. Nicht zuletzt sollen die Schüler immer wieder den engen Zusammenhang zwischen Berechnungen und Zeichnungen erkennen. Neben dem Zeichnen von Planfiguren zur Veranschaulichung räumlicher Zusammenhänge stehen Darstellungen von Pyramiden in Schrägrissen und in senkrechter Zweitafelprojektion im Vordergrund. Dabei sollten auch die Kenntnisse über das Darstellen von Strecken und Flächen in wahrer Größe zur Anwendung kommen (evtl. als Bestätigung der durch Rechnung ermittelten Größen).
4) Kombinierte Übungen
Besonders wertvoll sind komplexe Aufgabenstellungen, die das Anwenden vielseitiger Kenntnisse und Fertigkeiten verlangen.

Dabei sollten die Aufgaben nicht immer nur in Form eines Textes, sondern auch einmal als zu bearbeitender Sachverhalt vorgegeben werden. Dazu eignen sich Arbeitsblätter, Lochschablone, Klassensätze aus dem Stereometriebaukasten u. ä. Zu empfehlen sind auch manuelle Übungen (Bauen von Pyramiden aus Zeichenkarton oder aus Stäbchen mit Kugeln aus Knetmasse), wenn sie sinnvoll mit Übungen im Rechnen und Zeichnen verbunden sind.

Für die Übungen dieser Stoffeinheit wie auch des gesamten Stoffgebietes gelten folgende Forderungen:

Vielseitigkeit in der Aufgabenstellung;
Einbeziehen von formalen und eingekleideten Aufgaben sowie von Anwendungsaufgaben;
ständiger Überblick des Lehrers über den Stand der Fertigkeitsentwicklung bei den Schülern durch geeignete Rückkopplungs- und Kontrollmaßnahmen (Durchführung einer Kurzarbeit usw.);
systematisches Steigern des Schwierigkeitsgrades der Aufgaben und der Forderungen an die Selbständigkeit der Schüler;
Überschlagen von Teil- und Endergebnissen;
ständiges Verwenden von Rechenhilfsmitteln (Rechenstab, Tafelwerk);
Beachten von berechtigter und unberechtigter Genauigkeit;
sauberes und übersichtliches Darstellen der Lösungswege (vorher durchdenken) mit klarer Trennung und Bezeichnung der Lösungsschritte;
ständiges Wiederholen des benötigten Faktenwissens aus früheren Stoffgebieten;
Pflege des notwendigen Formelschatzes.

Ein Vorschlag für die *letzte Stunde* der Stoffeinheit als *Übungsstunde* wird im folgenden ausführlich dargestellt.

Thema: Übungen im Berechnen und Darstellen von Pyramiden

Gliederung:

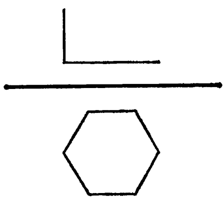
(1) Übung: Darstellen von Prisma und Pyramide mit gleichem Volumen in Grund- und Aufriß;
Beschreiben der Körper; Berechnen von Volumen und Oberflächeninhalt (Arbeitsblatt)
(2) Übung: Anfertigen von Tetraeder und Oktaeder als Kantenmodelle in Gruppenarbeit
(3) Leistungskontrolle (Kurzarbeit): Prisma, Kreiszylinder, Pyramide

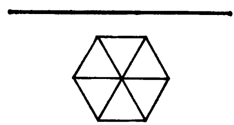
Methodische Hinweise:

Zu (1): Gegenstand der ersten Übungsphase kann das Arbeitsblatt in Bild 4.5. sein. Die Schüler beginnen sofort mit der selbständigen Lösung der Aufgaben 1 und 2. Bei Aufgabe 1 geht es nicht schlechthin um eine zeichnerische Darstellung, sondern zugleich um eine interessante Anwendung der Volumenformeln von Prisma und Pyramide. Bei Aufgabe 2 sollen die Schüler erkennen, daß beide Körper sechsseitig und regelmäßig sind. Nach einer kurzen Auswertung der Aufgaben 1 und 2 (Erläuterungen durch Schüler) wird die Aufgabe 3 ebenfalls selbständig gelöst. Für das Prisma ist der Oberflächeninhalt, für die Pyramide das Volumen (für beide Körper gleich) zu berechnen.
Zu (2): Eine weitere Übung ist mit manueller Tätigkeit verbunden. In Gruppenarbeit

Arbeitsblatt

(1) Ergänze die Darstellungen in Grund- und Aufriß unter der Bedingung, daß Prisma und Pyramide gleiches Volumen haben!





(2) Beschreibe die Körper!

(3) Berechne!
$A_0 =$

$V =$

Bild 4.5.

(2 Gruppen) werden die Aufgaben d 26 bzw. d 27 (Lb 135) gelöst. Dazu erhalten die Schüler Plasttrinkröhrchen und etwas Knetmasse. Die Röhrchen sind entweder schon in den benötigten Längen zugeschnitten, oder die Schüler benötigen noch eine Schere.

Aufgabenstellung:

	Gruppe 1	Gruppe 2
Aufgabe (Lb 135)	Aufgabe d 26	Aufgabe d 27
Materialien	3 Trinkröhrchen Knetmasse	4 Trinkröhrchen Knetmasse
Kantenlänge	$a = 8$ cm	$a = 6$ cm
Hausaufgabe (Lb 135)	Aufgabe d 28	Aufgabe d 29

Die Abmessungen entsprechen also bereits den Hausaufgaben. Die Begriffe „Tetraeder“ (Vierflächner) und „Oktaeder“ (Achtflächner) sind den Schülern zu erklären. Anhand der fertiggestellten Modelle erkennen die Schüler, daß bei diesen Körpern alle Begrenzungsflächen einander kongruent und außerdem regelmäßig sind. Das alles sind Eigenschaften der sogenannten Platonischen (regelmäßigen) Körper, von denen fünf verschiedene existieren. Neben Tetraeder und Oktaeder kennen die Schüler das Hexaeder (Würfel), die übrigen beiden heißen Dodekaeder und Ikosaeder (↗ „Kleine Enzyklopädie – Mathematik“. VEB Bibliographisches Institut Leipzig, Seite 230 und Tafel 61). Es wird jedoch darauf hingewiesen, daß die Behandlung der Platonischen Körper vom Lehrplan nicht gefordert wird.
Zu (3): Den Abschluß der Stunde bildet eine Leistungskontrolle in Form einer Kurzarbeit. Nachstehend einige Aufgabenvorschläge:

1. Aus einem Metallwürfel soll die größtmögliche quadratische Pyramide herausgeschliffen werden. Wieviel Prozent beträgt der Materialverlust?
2. Welcher der beiden Körper von gleicher Höhe hat das größere Volumen? (Begründung!)
   a) Regelmäßiges sechsseitiges Prisma mit der Grundkante $a = 2{,}5$ cm
   b) Gerader Kreiszylinder mit $r = 2{,}5$ cm
3. a) Ergänze die in der Tabelle fehlenden Angaben für drei gerade vierseitige Pyramiden mit rechteckiger Grundfläche (Grundkanten a, b)!

	I	II	III
Grundkante a	2 cm		30 mm
Grundkante b	4 cm	1,5 cm	25 mm
Höhe h	6 cm	15 cm	
Volumen V		45 cm^3	2 500 mm^3

   b) Stelle die Pyramide I in Grund- und Aufriß dar!

Zusammenfassung:

1) Für die Aufteilung der vom Lehrplan für die Stoffeinheit vorgesehenen acht Stunden wird folgender Vorschlag gemacht:

Für die Behandlung des ersten und des zweiten Schwerpunktes werden je zwei Stunden verwendet.
Der dritte Schwerpunkt wird in drei weiteren Stunden realisiert, wobei einzelne Übungselemente selbstverständlich auch schon in die ersten Stunden der Stoffeinheit einfließen.
Die 8. Stunde der Stoffeinheit wird am Ende der Behandlung des Stoffgebietes mit für die Klassenarbeit verwendet.

2) Am Ende der Stoffeinheit sollte folgendes erreicht sein:
Die Schüler kennen die Definition des Begriffes „Pyramide". Sie sind in der Lage, Pyramiden nach ihrer Form klar zu unterscheiden und zu klassifizieren.
Die Schüler beherrschen die Formel für das Volumen gerader Pyramiden und besitzen Fertigkeiten bei ihrer Anwendung. Die Schüler sind in der Lage, einen Lösungsweg für die Berechnung einzelner Stücke sowie des Mantel- und Oberflächeninhaltes von Pyramiden anzugeben und diesen übersichtlich darzustellen.
Sie können die Berechnungen an Pyramiden auch mit zeichnerischen Darstellungen verbinden (senkrechte Zweitafelprojektion, schräge Parallelprojektion).

4.3. Kreiskegel
(5 Stunden; Lerneinheiten D 8 und 9)

Nach der ausführlichen Behandlung der Pyramide werden die Flächen- und Rauminhaltsberechnungen mit der Behandlung des Kreiskegels fortgesetzt.
Zwischen Pyramide und Kegel sowie bei ihrer Behandlung in der Schule gibt es einige Analogien, die für die Rationalisierung des Unterrichts und des Erkenntnisprozesses genutzt werden können und die sich zweifellos günstig auf die allgemein-geistige Entwicklung der Schüler auswirken.
Beim Beweis der Volumenformel des Kreiskegels wird ein Volumenvergleich mit einer geeigneten Pyramide unter Zuhilfenahme des Satzes von CAVALIERI durchgeführt.
Aus den angeführten Gründen wird sich bei der Behandlung des Kreiskegels vieles ähnlich vollziehen wie vorher bei der Pyramide. Mancher dort gegebene Hinweis muß deshalb hier nicht wiederholt werden. Auch in den Schwerpunkten stimmen beide Stoffeinheiten weitgehend überein.

Erster Schwerpunkt der Stoffeinheit 4.3.: Der Begriff des geraden Kreiskegels (Lerneinheit D 8)

Es ist eine ausdrückliche Forderung des Lehrplans, den geraden Kreiskegel als Rotationskörper zu erklären. Dafür gibt es verschiedene Gründe, z. B.:
Drehungen haben im Geometrieunterricht schon wiederholt eine Rolle gespielt und sind daher dem Schüler geläufig.
Die Schüler haben in Klasse 7 den geraden Kreiszylinder ebenfalls als Rotationskörper kennengelernt.
Der Begriff des Rotationskörpers spielt auch nach der Behandlung des Kreiskegels noch eine besondere Rolle: Kugel als Rotationskörper; Stoff der Klasse 8. Volumenberechnung von Rotationskörpern mit Hilfe der Integralrechnung; Stoff der Klasse 12.

Im Bestreben, an Bekanntes anzuknüpfen, sollte zunächst der Begriff des geraden Kreiszylinders als Rotationskörper wiederholt werden (Wiederholung der Veranschaulichung). Danach sollte man die Schüler vor das Problem stellen, aus einer Gruppe verschiedener Körpermodelle solche auszuwählen, die ebenfalls als Rotationskörper erklärt werden können (Kegel, Kugel). Der Lehrer greift zunächst den Kegel heraus und fordert die Schüler auf, diesen Körper als Rotationskörper zu erklären (Drehung eines rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner Katheten oder Drehung eines gleichschenkligen Dreiecks um die zur Basis gehörende Höhe). Die Aussagen der Schüler werden nach Möglichkeit anschließend durch ein kleines Experiment überprüft. Im einfachsten Falle läßt sich eine Stricknadel mit einer entsprechenden Kartonfahne in der Hand drehen. Wirkungsvoller, aber auch aufwendiger, ist ein solches Experiment mit der Schwungmaschine aus dem Physikkabinett.

Nachdem eine geeignete Erklärung für den geraden Kreiskegel gefunden wurde, werden seine Begrenzungsflächen untersucht.

Die Schüler sollten selbst feststellen, daß der Kegel im Gegensatz zur Pyramide nur zwei Begrenzungsflächen besitzt:

Grundfläche (Kreisfläche);
Mantel (regelmäßig gekrümmte Fläche).

Schon hier sollte der Lehrer auf die Analogie Prisma–Zylinder einerseits und Pyramide–Kegel andererseits hinweisen.

Schließlich werden die Begriffe „Mantellinie" (Wie viele sind möglich? – Vergleiche sie untereinander!) und „Höhe" eingeführt, und es werden, wie schon bei anderen Körpern, gerade und schiefe Kreiskegel unterschieden. Rotationskörper sind nur die geraden Kreiskegel. Sie besitzen deshalb auch eine Achse, die mit der Höhe zusammenfällt.

Für eine Zusammenfassung des bisher behandelten Stoffes eignet sich Bild D 16 (Lb 89) des Lehrbuches.

Die Schüler sollten nun erfahren, daß es auch andere Möglichkeiten gibt, den Begriff „Kreiskegel" zu erklären. Um die Schüler selbst eine solche Möglichkeit finden zu lassen, läßt der Lehrer eine entsprechende Erklärung für den Begriff „Pyramide" durcharbeiten (Beispiel 5, Lb 81) und fordert dann die Schüler auf, den Begriff des Kreiskegels in einer solchen Weise zu erklären. Zur Bestätigung nehmen die Schüler Beispiel D 9 (Lb 89) zur Kenntnis.

Eine Betrachtung über Kegel in der Umwelt (Architektur; Werkstücke; Maschinenelemente; technische Bauteile; Absperrkegel als Verkehrsleiteinrichtung; Schüttkegel von Massengut usw.) schließt diesen Teil der Stoffeinheit ab. Die Schüler schreiben Beispiele für Kegel in ihrer Umwelt auf und stellen einen Kegel in Grund- und Aufriß und als Schrägriß (Ellipse als Freihandzeichnung) dar.

Zweiter Schwerpunkt der Stoffeinheit 4.3.: Volumen, Mantel- und Oberflächeninhalt gerader Kreiskegel (Lerneinheit D 9)

Auch bei der Gewinnung der Formel für das Volumen des Kreiskegels und deren Beweis wird wieder wie bei der Pyramide vorgegangen. Daher bietet sich die Möglichkeit an, die Schüler aktiv und weitgehend selbständig besonders an der Beweisführung zu Satz D 8 (Lb 89) arbeiten zu lassen. Trotz der Analogie zur Pyramide wird eine solche Arbeitsweise manchen Schülern Schwierigkeiten bereiten. Folgende methodische Schritte werden empfohlen:

1) Empirische Gewinnung einer Vermutung
   Vergleich des Kegels mit einem Kreiszylinder gleichen Grundflächeninhaltes und gleicher Höhenlänge

a) Vermutung anhand von Modellen: Das Volumen des Kegels ist kleiner als das des entsprechenden Zylinders.
b) Wie bei der Pyramide werden durch ein Füllexperiment Kegel- und Zylindervolumen miteinander verglichen. Es wird vermutet, daß das Kegelvolumen den dritten Teil des entsprechenden Zylindervolumens ausmacht und daß daher gilt:

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h .$$

2) Zur gleichen Vermutung gelangt man auch durch eine rein theoretische Überlegung.
Es wird eine regelmäßige n-seitige Pyramide betrachtet. Durch Erhöhung der Anzahl n der Seitenflächen nähert sich die Pyramide immer mehr einem Kreiskegel an. Es ist daher zu vermuten, daß für das Volumen beider Körper gilt:

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h .$$

3) Zielorientierung
Die aufgestellten Vermutungen bedürfen in jedem Falle des Beweises, auch wenn sie noch so überzeugend erscheinen. Ein solcher Beweis soll nun geführt werden.
4) Auf Grund der Vermutung wird Satz D 8 (Lb 89) formuliert und anschließend bewiesen. Dabei sollen die Schüler weitgehend selbständig tätig werden. Um das zu erreichen, sind zunächst das Problem klar herauszuarbeiten und der Weg zur Erreichung des Zieles abzustecken. Dazu werden die Bilder D 10 und D 17 (Lb 84 und 90) verglichen und noch einmal die Beweisschritte von Satz D 5 (Lb 84) analysiert. Der Lehrer entscheidet, ob die Schüler jetzt schon in der Lage sind, den Beweis selbständig zu führen oder ob schrittweise mit Vorbesprechen des jeweils nächsten Beweisschrittes vorgegangen wird. In jedem Falle sollte jetzt ein Tafelbild entstehen, das die folgende Beweisdarstellung enthält.

Voraussetzungen:

Gegeben sind ein gerader Kreiskegel und eine gerade dreiseitige Pyramide entsprechend Bild D 17 des Lehrbuches mit den Eigenschaften:

$$\pi r^2 = A_{\triangle ABC};$$

$$F_1S_1 = F_2S_2 = h;$$

$$F_1'S_1 = F_2'S_2 = h' .$$

Behauptung: $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

Beweis:

1) Nach Bild D 17 des Lehrbuches gilt:
Alle Kreise sind einander ähnlich. Nach dem Strahlensatz gilt:

$$r : r' = h : h' .$$

2) Nach dem Satz über den Flächeninhalt ähnlicher Figuren gilt:

$$\pi r^2 : \pi r'^2 = h^2 : h'^2 .$$

3) Wie bereits im Beweis von Satz D 5, Punkt b (Lb 84), gezeigt, gilt:

$$A_{\triangle ABC} : A_{\triangle A'B'C'} = h^2 : h'^2 .$$

4) Aus 2) und 3) folgt:

$$\pi r^2 : \pi r'^2 = A_{\triangle ABC} : A_{\triangle A'B'C'} .$$

5) Wegen $\pi r^2 = A_{\triangle ABC}$ gilt daher:

$$\pi r'^2 = A_{\triangle A'B'C'} .$$

6) Nach dem Satz von CAVALIERI gilt daher:

$$V_{\text{Kegel}} = V_{\text{Pyramide}} \quad \text{bzw.}$$

$$\boxed{V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

5) Anschließend bearbeiten die Schüler Auftrag D 13 (Lb 90) selbständig (Aufstellen einer Formel für den Durchmesser).

Die Gewinnung der Formeln für Mantel und Oberflächeninhalt ist zwar etwas aufwendiger als bei der Pyramide, aber im Lehrbuch ausführlich dargestellt. Die hier vorhandenen Möglichkeiten für die immanente Wiederholung sollten ausgiebig genützt werden (Kreisberechnung, speziell Kreisausschnitt; Satz des PYTHAGORAS; Verhältnisgleichungen). Es empfiehlt sich eine entsprechende Gestaltung der einführenden täglichen Übung.

Das Problem der Abwicklung des Kegelmantels in eine Ebene sollte nicht nur theoretisch dargelegt werden. Die Schüler kennen das Vorgehen schon von der Aufstellung der Formel für den Zylindermantel. Es muß aber bemerkt werden, daß nicht jede gekrümmte Fläche in eine Ebene abwickelbar ist. Schon in der nächsten Unterrichtseinheit werden die Schüler das am Beispiel der Kugel erleben. Es ist also günstig, die Abwicklung des Kegelmantels in eine Ebene vor den Augen der Schüler vorzunehmen. Am einfachsten umgibt man dazu ein Kegelmodell mit einem aus Zeichenkarton vorgefertigten Mantel, der mit einem Klebestreifen zusammengehalten wird. Der abgewickelte Mantel kann dann mit zwei Haftmagneten an einer Hafttafel befestigt werden. Daneben erfolgt dann die im Lehrbuch dargestellte Herleitung der Formel für den Mantelinhalt. Die Formel für den Oberflächeninhalt sollte von den Schülern selbständig aufgestellt und begründet werden.

Dritter Schwerpunkt der Stoffeinheit 4.3.: Vielseitige Übungen und Anwendungen

Hierfür gilt grundsätzlich dasselbe, was bereits zu den Übungen und Anwendungen in der Stoffeinheit 4.2. ausgeführt wurde. Eine nochmalige Darlegung erübrigt sich also. Erinnert sei besonders an den Lehrplanhinweis über die Bevorzugung der Formeln für den Durchmesser (↗ Uh 7, Seite 206). Eine besondere Bedeutung bei den Übungen haben in dieser Stoffeinheit die bekannten Rechenhilfsmittel (vorzugsweise der Rechenstab).

Schließlich sei vermerkt, daß diese Stoffeinheit besonders günstig für die Realisierung der folgenden Lehrplanforderung ist:

„Alle Formeln sind als Gleichungen mit mehreren Variablen aufzufassen und entsprechend umzuformen.“

Dieser Hinweis sollte bei Aufgabenstellungen berücksichtigt werden.

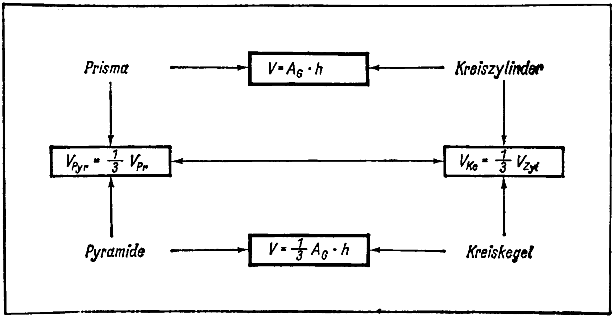


Bild 4.6.

Beispiel:
Ein kegelförmiger Trichter für Schüttgut in einer Be- und Entladungsanlage soll 2,5 m³ Schüttgut fassen und eine Höhe von 1,5 m haben. Wie groß muß sein Grundkreisdurchmesser sein?

Am Ende der Stoffeinheit sollten einige interessante Zusammenhänge, die die Schüler bei der Volumenberechnung von Prisma, Zylinder, Pyramide und Kegel kennengelernt haben, mit Hilfe eines Tafelbildes zusammengefaßt werden (Bild 4.6.). Es versteht sich, daß dieses Tafelbild einer ausreichenden Erklärung bedarf, um richtig verstanden zu werden.

Zusammenfassung:

1) Für die Aufteilung der fünf Stunden der Stoffeinheit wird folgender Vorschlag gemacht:

   In der *1. Stunde* erfolgt die Behandlung des ersten Schwerpunktes. Für den zweiten Schwerpunkt werden zwei Stunden verwendet, davon eine Stunde zur Erarbeitung und Beweisführung der Volumenformel, die zweite Stunde zur Herleitung der Formeln für Mantel- und Oberflächeninhalt. Die Realisierung des dritten Schwerpunktes beginnt in der *2. Stunde* der Stoffeinheit, sie konzentriert sich aber auf die *4. und 5. Stunde*, in denen Übungen und Anwendungen Hauptanliegen sind. Die laut Lehrplan vorgesehene *6. Stunde* wird als zweite Stunde mit für die Klassenarbeit am Ende des Stoffgebietes verwendet.

2) Am Ende der Stoffeinheit sollte folgendes erreicht sein:

   Die Schüler können einen geraden Kreiskegel als Rotationskörper beschreiben und beherrschen die Begriffe „Mantel", „Mantellinie", „Höhe" und „Achse eines geraden Kreiskegels". Sie können gerade und schiefe Kreiskegel voneinander unterscheiden.
   Die Schüler beherrschen die Formel für das Volumen eines Kreiskegels und können sie sicher anwenden.
   Sie sind in der Lage, die Formeln für Mantel- und Oberflächeninhalt eines Kreis-

kegels dem Tafelwerk rasch zu entnehmen, gegebenenfalls auch selbst herzuleiten. Sie können diese Formeln sicher anwenden.
Die Schüler begreifen, daß auf experimentellem oder ähnlichem (induktivem) Wege gefundene Formeln und Sätze stets eines Beweises bedürfen.

4.4. Kugel
(5 Stunden; Lerneinheiten D 10 bis 13)

Die Behandlung der Kugel bildet den Abschluß des Stereometrie-Lehrganges in Klasse 8.
Wie schon der gerade Kreiszylinder und der gerade Kreiskegel wird auch die Kugel als Rotationskörper eingeführt. Sie nimmt aber unter den bisher behandelten Körpern insofern eine Sonderstellung ein, als sich ihre Oberfläche nicht mehr in die Ebene abwickeln läßt. Das kann zwar dem Schüler noch nicht mathematisch nachgewiesen werden, aber es leuchtet doch von der Anschauung her unmittelbar ein. Bei Bastelarbeiten wird er gelegentlich schon solche Erfahrungen gemacht haben (evtl. bei der Herstellung der Turmkugel am Modell des Berliner Fernsehturms). Das Auftreten der dritten Potenz des Kugelradius in der Formel für das Kugelvolumen ist Anlaß zur expliziten Behandlung von dritten Potenzen und vor allem zur Einführung der Kubikwurzeln. Nach kurzer Erklärung der Begriffe wird sehr schnell zur Berechnung von dritten Potenzen und Kubikwurzeln mit Hilfe des Rechenstabes und der Zahlentafel übergegangen.
Um die Übungen zur Kugel nicht zu kurz kommen zu lassen, sollte das Berechnen von dritten Potenzen und Kubikwurzeln häufig am Beispiel von Kugeln durchgeführt werden.

Erster Schwerpunkt der Stoffeinheit 4.4.: Berechnung des Volumens und des Oberflächeninhaltes von Kugeln (Lerneinheiten D 10 und 11)

Im ersten Teil der Stoffeinheit geht es um die Erklärung des Begriffes „Kugel“ und um die Gewinnung einer Formel für das Berechnen des Kugelvolumens. Es ist zu empfehlen, diese Thematik in einer Stunde zu behandeln. Im folgenden wird ein möglicher Aufbau dieser Stunde in großen Zügen dargestellt.

1) Erklärung des Begriffes „Kugel“
   a) Die Kugel als Rotationskörper: Empfehlenswert ist wegen der großen Anschaulichkeit eine experimentelle Einführung ähnlich der beim Kreiskegel.
   b) Kugeloberfläche als Menge aller Punkte des Raumes mit gemeinsamer Eigenschaft (gleicher Abstand vom Kugelmittelpunkt M) – analog zur Einführung des Kreises in Klasse 7 (Erklärung von „Radius“ und „Durchmesser“ einer Kugel).
2) Zielorientierung
   Die große Bedeutung der Kugel in der Mathematik, in anderen Wissenschaften und in der Praxis verlangt Kenntnisse der Möglichkeit, das Volumen und den Oberflächeninhalt von Kugeln zu berechnen.
3) Experimentelle Ermittlung einer Formel für das Kugelvolumen
   a) Durchführung eines Füllversuches unter Verwendung von Halbkugel und Kreiskegel (gleicher Radius, gleiche Höhe, $h = r$).
   Ergebnis: Das Volumen der Halbkugel ist doppelt so groß wie das des Kegels.

Oder:

b) Durchführung eines Füllversuches unter Verwendung von Halbkugel, Kreiszylinder und Kreiskegel (Bedingungen wie unter a)). Dieses Experiment ist zwar etwas aufwendiger, bereitet aber am besten den Beweis der Volumenformel vor. Ergebnis: Das Volumen der Halbkugel ist gleich der Differenz zwischen Zylinder- und Kegelvolumen. (Hier wird also schon auf den Restkörper orientiert.)
c) Ein Weg, der auf Füllexperimente ganz verzichtet, wird im Lehrbuch vorgeschlagen (Lb 93 und Bild D 22). Das leicht zu ermittelnde Volumen des Restkörpers beträgt $\frac{2}{3}\pi r^3$, und es wird nun behauptet, daß eine entsprechende Halbkugel dasselbe Volumen besitzt.

Aus a), b) und c) folgt sofort die Notwendigkeit eines Beweises für die vermutete oder behauptete Formel.

4) *Beweis* zu Satz D 9 (Lb 93)
Der Beweis ist im Lehrbuch ausführlich und übersichtlich dargestellt, er kann deshalb gemeinsam durchgearbeitet werden. Dabei sollte der Lehrer Bild D 22 des Lehrbuches schrittweise an der Tafel entstehen lassen.
Die unter 3) gewonnene Formel ist damit bestätigt. Eine Zusammenfassung wird durch geeignete Schüler gegeben.
5) Erarbeitung einer Volumenformel mit dem Durchmesser (selbständige Schülertätigkeit)
6) Übung
Lösung einer einfachen Aufgabe. Vorschlag Lb 138, Aufgabe d 53 (Hinweis auf Ballonaufstiege mit Radiosonden beim meteorologischen Dienst).

In der *2. Stunde* der Stoffeinheit wird eine Formel für den Oberflächeninhalt einer Kugel hergeleitet. Ein Vorschlag für die Gestaltung dieser Stunde wird im folgenden ausführlich dargestellt:

Thema: Herleitung einer Formel für den Oberflächeninhalt einer Kugel

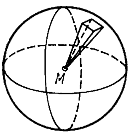
Gliederung:

(1) Übung: Berechnung von Volumen- und Oberflächeninhalt eines Werkstückes (Zylinder mit aufgesetzter Halbkugel)
(2) Zielorientierung: Herleitung einer Formel für den Oberflächeninhalt einer Kugel
(3) Erarbeitung: Herleitung einer Formel für den Oberflächeninhalt einer Kugel
(4) Übung: Berechnung von Volumen und Oberflächeninhalt von Werkstücken — Fortsetzung der Übung (1)

Methodische Hinweise:

Zu (1): Die Stunde beginnt mit einer frontalen Übung.
Für das Werkstück in Bild d 12 a (Lb 140) sind Volumen und Oberflächeninhalt zu berechnen. Der Lehrer sollte darauf hinweisen, daß derartige Aufgaben in der Produktionspraxis häufig vorkommen. Um für größere Stückzahlen den Materialverbrauch im voraus zu ermitteln, benötigt man das Volumen. Ist eine Galvanisierung vorgesehen, dann ist auch die Kenntnis des Oberflächeninhaltes erforderlich.

In selbständiger Tätigkeit lösen die Schüler zunächst die erste Teilaufgabe: Berechnung des Volumens. Die erzielten Ergebnisse werden verglichen und Fehler korrigiert.
Nun wird die zweite Teilaufgabe vorbesprochen: Berechnung des Oberflächeninhaltes. Die Schüler stellen selber fest, daß sich die Oberfläche aus einer Kreisfläche, einem Zylindermantel und der Oberfläche einer Halbkugel zusammensetzt. Der Oberflächeninhalt der Halbkugel kann noch nicht ermittelt werden.
Zu (2): Der Lehrer orientiert auf das von allen erkannte Ziel: Herleitung einer Formel zur Berechnung des Oberflächeninhaltes einer Kugel.
Danach kann die in (1) begonnene Aufgabe gelöst werden.
Zu (3): Die Schüler werden aufgefordert, sich daran zu erinnern, wie die Formeln für den Oberflächeninhalt bei Kreiszylindern und Kreiskegeln gewonnen worden waren: Abwicklung der gekrümmten Fläche in eine Ebene. Die Schüler werden selbst erkennen, daß dies bei der Kugel nicht möglich ist (Impulse: Bastelarbeiten im Zusammenhang mit Kugeln; Darstellung der Erdoberfläche auf einer Weltkarte).
Es muß daher ein anderer Weg zur Lösung des Problems gefunden werden. Dieser Weg wird vom Lehrer in den im Lehrbuch aufgeführten Erkenntnisschritten dargelegt. Dabei entsteht ein Tafelbild (Bild 4.7.).



Oberflächeninhalt der Kugel

1) *Einsetzen von n Pyramiden in die Kugel*
Höhen: $h_1, \dots, h_n$; *Grundflächen:* $A_1, \dots, A_n$

2) *Volumen <u>aller</u> Pyramiden:*
$V = \frac{1}{3} A_1 \cdot h_1 + \dots + \frac{1}{3} A_n \cdot h_n$ (1) ($V_{Pyr} < V_{Ku}$)

3) *<u>n beliebig groß</u>:* (a) $h_1 \approx \dots \approx h_n \approx r$; (b) $A_1 + \dots + A_n \approx A_0$
Damit geht (1) über in: $V = \frac{r}{3} \cdot A_0$ (2)

4) $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{r}{3} \cdot A_0$
$A_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{3}{r} = 4\pi r^2$

$A_0 = 4\pi r^2$	$A_0 = \pi d^2$

Bild 4.7.

Zu (4): Die im Stundenteil (1) begonnene Übung kann jetzt fortgesetzt und abgeschlossen werden. Sollte noch Zeit zur Verfügung stehen, so empfiehlt sich eine Darstellung des Werkstückes in Grund- und Aufriß. Empfehlung für die Hausaufgabe:
Für das in Bild d 12b (Lb 140) dargestellte Werkstück sind zu ermitteln: Volumen, Oberflächeninhalt, Darstellung in senkrechter Zweitafelprojektion.
Für weitere Übungen in dieser Stoffeinheit gelten die schon in den vorangegangenen Stoffeinheiten gegebenen Hinweise.

Zweiter Schwerpunkt der Stoffeinheit 4.4.: Berechnen von dritten Potenzen und Kubikwurzeln (Lerneinheiten D 12 und 13)

Zunächst sollte eine kurze Übung im Berechnen von Quadratzahlen und Quadratwurzeln mit Hilfe von Rechenstab und Tafelwerk durchgeführt werden. Das kann in mündlicher Form geschehen, wobei ohne weiteres Fertigkeiten bei den Schülern vorausgesetzt werden sollten.

Aus einem einfachen Beispiel des Berechnens des Volumens einer Kugel erwächst die Frage, ob sich auch das Berechnen dritter Potenzen und Wurzeln durch Rechenhilfsmittel vereinfachen läßt. Der Nutzen wäre noch beachtlicher als bei Quadratzahlen und Quadratwurzeln. Damit werden die Schüler auf die Zielstellung für die letzten beiden Stunden der Stoffeinheit orientiert.
Da die Schüler bereits Fertigkeiten im Umgang mit Rechenstab und Zahlentafel besitzen, sind weitschweifige Erklärungen nicht am Platze. Es ist zweckmäßig, wenn sich der Lehrer im Vorgehen eng an den Aufbau des Lehrbuches anlehnt. Es wird also mit dem Berechnen der dritten Potenzen mit Hilfe des Rechenstabes und dann der Zahlentafel begonnen. Die knappe, übersichtliche Darstellung des Lehrbuches bietet die Möglichkeit, das Nötige durch kurze Schülervorträge von geeigneten Schülern nach entsprechendem Selbststudium darlegen zu lassen.
Dem Lehrer obliegt es dann vor allem, den Aufbau der K-Skale des Rechenstabes mit den Schülern zu besprechen. Beim Berechnen von Kubikwurzeln bereitet das richtige Einstellen des Läufers in der K-Skale zunächst vielleicht einige Schwierigkeiten. Hier helfen einige Einstell- und Ableseübungen in der Art, wie sie in Klasse 7 bei der Einführung des Rechenstabes durchgeführt werden. Es bieten sich vor allem folgende Möglichkeiten an:

1) Übungen am Demonstrationsrechenstab
2) Übungen am Schülerrechenstab
   An den Skalen A, B, C, D werden Einstellungen des Läufers vorgenommen und die entsprechende Ziffernfolge in der K-Skale abgelesen und umgekehrt.
3) Übungen mit Schablonen (K-Skale, Läuferstrich) am Polylux-Lichtschreibgerät (Vorzüge: Im gesamten Klassenraum gut erkennbar; keine Parallaxe.)

Die erforderlichen Arbeitsschritte für alle Aufgabenstellungen sind im Lehrbuch an Zahlenbeispielen ausführlich dargestellt. Beim Arbeiten mit der Zahlentafel wird auf ein Interpolieren verzichtet.
Die Berechnungen an Kugeln sind in diesem Zusammenhang fortzusetzen. Immerhin waren ja die ersten Berechnungen an Kugeln der Anlaß, dritte Potenzen und Kubikwurzeln mit dem Rechenstab und der Zahlentafel zu ermitteln.

Zusammenfassung:

1) Die fünf Stunden der Stoffeinheit sollten wie folgt gegliedert werden:

1. Stunde:	Kugel als Rotationskörper; Erarbeiten und Beweisen der Formel für das Kugelvolumen
2. Stunde:	Herleiten der Formel für den Oberflächeninhalt der Kugel
3. Stunde:	Übungen im Berechnen von Volumen und Oberflächeninhalt von Kugeln
4. und 5. Stunde:	Einführen von „Kubikwurzel“; Berechnen von dritten Potenzen und Kubikwurzeln mit Hilfe des Rechenstabes und der Zahlentafel

2) Am Ende der Stoffeinheit sollte folgendes erreicht sein:
   Die Schüler erkennen die Kugel als Rotationskörper. Die Schüler kennen je eine Formel für Volumen und Oberflächeninhalt der Kugel und können diese Formeln in unterschiedlichen Aufgabenstellungen anwenden.
   Die Schüler beherrschen die Begriffe „dritte Potenz“ und „Kubikwurzel“ einer Zahl.

Sie sind in der Lage, dritte Potenzen und Kubikwurzeln mit Hilfe des Rechenstabes und der Zahlentafel (ohne Interpolieren) zu berechnen.

4.5. Leistungskontrolle und Auswertung (2 Stunden)

Das Stoffgebiet 4. „Flächen- und Rauminhaltsberechnung" kann mit einer einstündigen Klassenarbeit abgeschlossen werden.
Für eine solche Arbeit werden im folgenden einige Aufgabenvorschläge unterbreitet.

Aufgabe 1: Kann aus einem Baumstamm mit dem kleinsten Durchmesser $d = 27$ cm ein Balken geschnitten werden, dessen Querschnitt ein Quadrat mit der Seitenlänge 18 cm ist? (Begründung!)

Aufgabe 2: Ergänze die folgende Tabelle!

	x	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$
a)			5
b)	51		
c)		28,3	

Aufgabe 3: Stelle die gerade, quadratische Pyramide mit der Höhe $h = 6$ cm und dem Volumen $V = 32\ \text{cm}^3$ in Grund- und Aufriß dar (eine Grundkante parallel zur Rißachse)!

Aufgabe 4: An Stelle eines zylindrischen Tanks (Länge 360 cm; Durchmesser 200 cm) stellt man ein kugelförmiges Gefäß mit gleichem Volumen her.
a) Welchen Durchmesser hat der Kugelbehälter?
b) Vergleiche den Materialverbrauch für beide Behälter! Welche Schlußfolgerung ziehst du?