Mathematik

Klasse 10

Unterrichtshilfen

Unterrichtshilfen Mathematik, Klasse 10

Autoren: Oskar Mader, Dietrich Richter

6. Auflage

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1981

Autoren:
Prof. Dr. Oskar Mader – Vorwort und Allgemeine Bemerkungen: Kapitel 1.4., 2.
Studienrat Dr. Dietrich Richter – Kapitel 1.1. bis 1.3., 3.

6. Auflage
Ausgabe 1971
Lizenz-Nr. 203 · 1000/80 (DN 0021 66-6)
LSV 0645
Redaktion: Heinz Junge
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Einband: Erika Kerschner
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: IV/2/14 VEB Druckerei »Gottfried Wilhelm Leibniz«,
4450 Gräfenhainichen · 5725
Schrift: 9/10 Extended Monotype
Redaktionsschluß: 8. Juli 1980
Bestell-Nr. 706 208 1
DDR 6,50 M

Inhalt

Vorwort 6

0. Allgemeine Bemerkungen zum Mathematikunterricht in Klasse 10 . . 8
0.1. Zur Ziel- und Aufgabenstellung 8
0.2. Allgemeine didaktische und methodische Probleme 21
0.3. Übersicht über Teillehrgänge des Mathematikunterrichts der Oberschule, über verbindliche und empfohlene Unterrichtsmittel und über die Koordinierung des Mathematikunterrichts mit anderen Unterrichtsfächern 30

1. Winkelfunktionen 41
1.0. Vorbemerkungen 41
1.1. Die Funktion $y = \sin x$ 57
1.2. Die Funktionen $y = \cos x$, $y = \tan x$ und $y = \cot x$ 66
1.3. Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten 74
1.4. Anwendung der Winkelfunktionen bei Dreiecksberechnungen 93

2. Körperdarstellung und Körperberechnung 109
2.0. Vorbemerkungen 109
2.1. Wiederholung und Ergänzung 132
2.2. Pyramiden- und Kreiskegelstümpfe 152

3. Festigung und Systematisierung; Prüfungsvorbereitung 160
3.0. Vorbemerkungen 160
3.1. Zahlenbereichserweiterungen 162
3.2. Abbildungen 164
3.3. Mathematische Aussagen und Beweise 177
3.4. Abstraktion und Fachsprache in der Mathematik 180

Literaturverzeichnis 185

Vorwort

Die Unterrichtshilfen für den Mathematikunterricht in Klasse 10 nach dem Lehrplan, der am 1. September 1971 in Kraft trat, bilden mit den Unterrichtshilfen für die Klassen 4 bis 8 und insbesondere mit den zu Beginn des Schuljahres 1970/71 erschienenen Unterrichtshilfen für Klasse 9 eine Einheit. Die Unterrichtshilfen für die Klassen 9 und 10 haben prinzipiell die gleiche Funktion und sind auch in gleicher Weise aufgebaut.

Da in den Unterrichtshilfen für den Mathematikunterricht in Klasse 9 auf Grundsatzfragen des Mathematikunterrichts und auf Besonderheiten des Unterrichts in den Abschlußklassen der Oberschule ausführlicher eingegangen wird, beschränken sich die Unterrichtshilfen für Klasse 10 in dieser Hinsicht auf das Notwendigste. Um die Hinweise und Bemerkungen in diesen Unterrichtshilfen richtig verstehen und in größere Zusammenhänge richtig einordnen zu können, erscheint es zweckmäßig, die Unterrichtshilfen für Klasse 9 zur Ergänzung heranzuziehen.

Wie in den Unterrichtshilfen für Klasse 9 sind in der vorliegenden Schrift Bemerkungen und Hinweise zu den Aufgaben des Unterrichts und zu den Zielen der Bildung und Erziehung auf dreifache Weise gegeben:

- in allgemeiner Formulierung in den „Allgemeinen Bemerkungen zum Mathematikunterricht in Klasse 10" (Teil 0.);
- auf das Stoffgebiet bezogen in den „Vorbemerkungen" zum jeweiligen Stoffgebiet (1. und 2.);
- auf die Unterrichtseinheit bezogen in den Ausführungen zu den jeweiligen Unterrichtseinheiten.

Allgemeine Aussagen, die in den „Allgemeinen Bemerkungen . . ." oder in den „Vorbemerkungen" zu den Stoffgebieten enthalten sind, werden in den Ausführungen zu den Unterrichtseinheiten nicht mehr wiederholt; vgl. „Unterrichtshilfen Mathematik, 9. Klasse", Seite 6.

Methodische Hinweise werden gleichfalls an drei Stellen gegeben:

- im Teil „Allgemeine Bemerkungen zum Mathematikunterricht in Klasse 10" (Teil 0., besonders Teil 0.2.);
- in den „Vorbemerkungen" zu den Stoffgebieten;
- in den Ausführungen zu den Unterrichtseinheiten.

Um Überschneidungen und Wiederholungen zu vermeiden, sind in den Teil „Allgemeine Bemerkungen zum Mathematikunterricht in Klasse 10" vor allem solche Hinweise aufgenommen worden, die für alle Stoffgebiete des Mathematikunterrichts dieser Klassenstufe gelten (z. B. für das Lösen von mathematischen Aufgaben, besonders von Sachaufgaben). In den Vorbemerkungen zu den einzelnen Stoffgebieten sind Hinweise zu finden, die für das jeweilige Stoffgebiet spezifisch sind, aber für mehrere Stoff- oder Unterrichtseinheiten gelten (z. B. in den Vorbemerkungen zum Stoffgebiet 2. die Hinweise zur Behandlung der darstellenden Geometrie). Einzelhinweise zu den Unterrichtseinheiten haben ihren Platz in den Ausführungen zu diesen. Bestimmte allgemeinere methodische Hinweise wiederholen sich somit in den Ausführungen zu den Unterrichtseinheiten nicht mehr (notwendige Verweise sind genannt).

Übersichten, die in den Unterrichtshilfen für Klasse 9 enthalten sind, werden in der vorliegenden Schrift nicht wiederholt. So wurde z. B. auf eine Übersicht über den Unterrichtsstoff des Gesamtlehrgangs der Mathematik an der Oberschule verzichtet; vgl. „Unterrichtshilfen Mathematik, 9. Klasse", Seite 33f. Dagegen wurden ein Überblick zur zeitlichen Einordnung der zu behandelnden Stoffgebiete aus den Teillehrgängen in den Gesamtlehrgang des Mathematikunterrichts der Klassen 1 bis 10, eine Übersicht über die verbindlichen und empfohlenen Unterrichtsmittel für die Klassen 9 und 10 und eine Tabelle der zeitlichen Koordinierung des Stoffes des Mathematikunterrichts mit dem Stoff der naturwissenschaftlichen und polytechnischen Unterrichtsfächer bzw. Lehrgänge aufgenommen, die auch die Klasse 9 umfaßt.

Der Aufbau des Teiles 3., der sich auf das Stoffgebiet 3. „Festigung und Systematisierung; Prüfungsvorbereitung" (vgl. Lehrplan Mathematik für Klasse 10, Seite 20) bezieht, weicht vom Aufbau der Teile 1. und 2. wesentlich ab. Der Lehrplan schreibt für das Stoffgebiet 3. „Festigung und Systematisierung; Prüfungsvorbereitung" keine allgemeinverbindliche Thematik vor; der Teil 3. der vorliegenden Schrift wurde deshalb nach inhaltlichen Komplexen geordnet, deren Auswahl als Empfehlung zu werten ist und deren Reihenfolge, die sich an die Reihenfolge bei der Angabe wesentlicher Leitlinien des Mathematikunterrichts im Lehrplan auf den Seiten 7f anlehnt, nicht als Vorschlag für die zeitliche Abfolge bei der Wiederholung und Prüfungsvorbereitung angesehen werden darf. Es ist notwendig, daß der Lehrer auf Grund eines Vergleiches zwischen den im Lehrplan formulierten Zielen und Aufgaben des Mathematikunterrichts und den tatsächlich erreichten Unterrichtsergebnissen die Auswahl, die Reihenfolge und das Gewicht der Wiederholungsthemen festlegt; vgl. Seite 160. Näheres zum Charakter der Ausführungen im Teil 3. ist im Teil 3.0. „Vorbemerkungen" enthalten; vgl. Seite 160ff.

Die Seitenverweise zu den Lehrplänen Mathematik beziehen sich auf die im Literaturverzeichnis unter [G 2] und [G 3] vermerkten Ausgaben. Für die Leser, die die Ausgabe „Lehrplan Mathematik, Klassen 5 bis 10, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1973" benutzen, seien die folgenden Entsprechungen angegeben.

[G 2], S. 5 bis 58 – Ausgabe 1973, S. 23 bis 76

[G 3], S. 5 bis 45 – Ausgabe 1973, S. 79 bis 119

Wie die anderen Unterrichtshilfen kann auch dieses Buch keine vollständige Übersicht über die verfügbare Literatur zu den erörterten didaktischen und methodischen Fragen des Unterrichts und seiner Gliederungsabschnitte geben. Einiges – zu allgemeinen und speziellen Fragen – ist im Literaturverzeichnis am Schluß des Buches vermerkt; im Text sind verschiedentlich Bezüge zu vorhandener Literatur, vor allem zu Literatur neueren Datums, angegeben. Besonders berücksichtigt ist dabei die Methodik Mathematikunterricht, herausgegeben im Jahre 1975 von der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR (Literaturverzeichnis [59]).

0. Allgemeine Bemerkungen zum Mathematikunterricht in Klasse 10

0.1. Zur Ziel- und Aufgabenstellung

Der VII. Pädagogische Kongreß der Deutschen Demokratischen Republik und der VIII. Parteitag der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands stellten die inhaltliche Ausgestaltung der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule als Schule, die den Erfordernissen und Bedingungen der entwickelten sozialistischen Gesellschaft entspricht, als grundlegende Bildungs- und Erziehungsstätte für alle Kinder als wichtigsten Auftrag aller Pädagogen dar. Der IX. Parteitag der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands und der VIII. Pädagogische Kongreß der DDR haben diese schulpolitische Orientierung bekräftigt und die qualitative Verbesserung der Bildungs- und Erziehungsarbeit, die Sicherung bestmöglicher Bedingungen für die allseitige Entwicklung aller Schüler zu sozialistischen Persönlichkeiten und ihre kommunistische Erziehung besonders hervorgehoben (siehe [G 4] und [G 5]).
In der sozialistischen Schule gilt für alle Unterrichtsfächer der Grundsatz eines wissenschaftlichen, parteilichen und lebensverbundenen Unterrichts, der alle Seiten der Persönlichkeit anspricht, der zur Aneignung dauerhafter solider Kenntnisse, sozialistischer Grundüberzeugungen, zur Herausbildung von Fähigkeiten und Fertigkeiten, Gewohnheiten und Charaktereigenschaften, Interessen und Gefühlen entscheidend beiträgt. Dieser Aufgabe, die die **Einheit von wissenschaftlicher Bildung und ideologischer Erziehung** widerspiegelt und den **Unterricht** als das **Hauptfeld der Bildung und Erziehung** der Kinder und Jugendlichen kennzeichnet, ordnet sich auch die Zielstellung des Mathematikunterrichts der Klasse 10, der Abschlußklasse der zehnklassigen Oberschule, unter.

Im folgenden werden, ergänzend zu den Erörterungen in den Unterrichtshilfen für Klasse 9, jene Ziele und Aufgaben hervorgehoben, die für den Mathematikunterricht in Klasse 10 spezifisch sind oder in dieser Klasse besondere Aspekte oder Akzente erkennen lassen. Wie in den Unterrichtshilfen für Klasse 9 werden auch in der vorliegenden Schrift die Ziele und Aufgaben des Unterrichts – übereinstimmend mit der Darstellung im Lehrplan – in der Reihenfolge

- mathematische Grundlagenbildung
- allgemeine geistige Bildung
- ideologische Bildung und Erziehung
- polytechnische Bildung

dargelegt. Dabei ist zu beachten, daß die Zielsetzungen stets in ihrem Zusammenhang gesehen werden müssen, in ihrem Bezug zur allseitigen Entwicklung sozialistischer Persönlichkeiten. Das Prinzip der Einheit von Bildung und Erziehung durchdringt jeden der genannten Zielbereiche, es bedeutet nicht eine einfache Addition der ideologischen Bildung und Erziehung zu den anderen Bildungsbereichen. Es sei darauf verwiesen, daß die hier gewählte Unterteilung in vier Gruppen nicht einem einheitlichen Gliederungsaspekt, sondern verschiedenen Aspekten entspricht; vgl. „Unterrichtshilfen Mathematik, 9. Klasse", S. 25, und [57].

Die mathematische Grundlagenbildung

In Klasse 10 liegt das Hauptgewicht der mathematischen Grundlagenbildung der Schüler, die die wesentlichste enger fachbezogene Aufgabe des Mathematikunterrichts darstellt (vgl. Uh 9/10[1]), auf einer *Erweiterung und Abrundung des Wissens über Funktionen* sowie auf einer *Festigung und Ergänzung des Wissens und Könnens in der Körperdarstellung und Körperberechnung*. Entsprechend den speziellen Aufgaben des Unterrichts in Klasse 10 haben bei der Behandlung aller Stoffgebiete Wiederholung, Systematisierung und Anwendung des Stoffes – verbunden mit zusammenfassenden schulwissenschaftlichen und weltanschaulichen Betrachtungen – besondere Bedeutung.
Eine genaue Angabe der Ziele und Aufgaben des Unterrichts im Bereich der mathematischen Grundlagenbildung enthält der Lehrplan [G 3] im Vorwort, Teil „Ziele und Aufgaben"; vgl. Lp 10f. Weiter konkretisiert und auf die Stoffgebiete, -einheiten und Themen des Unterrichts bezogen werden diese Angaben im Lehrplanteil „Inhalt des Unterrichts", und zwar in den Vorbemerkungen zu den einzelnen Stoffgebieten (1. und 2.) sowie in den Angaben zu den Stoffeinheiten (1.1. bis 2.2.), in die die Stoffgebiete untergliedert sind; vgl. Uh 9/11 (dort wird auch der Zusammenhang zwischen den Zielangaben für das Wissen und Können und den Stoffangaben im Lehrplan erläutert).

Wie in den Klassen 6 bis 9 (vgl. [G 2], Seite 9f, und [G 3], Seite 7f) kommen auch in Klasse 10 wesentliche wissenschaftliche Aspekte in den **inhaltlichen Leitlinien** des Mathematikunterrichts zum Ausdruck. Es sind dies vor allem

- Anwenden der Erkenntnisse der Mengentheorie („Mengen")
- Arbeiten mit Variablen („Variable")
- Aufbau und Erweiterung der Zahlenbereiche („Zahlenbereichserweiterungen")
- Arbeiten mit Gleichungen und Ungleichungen („Gleichungen und Ungleichungen")
- Anwenden des Prinzips der Abbildung („Abbildungen").

Die Funktion dieser Leitlinien – als Mittel der Lehrplanentwicklung, der Lehrplaninterpretation und der Lehrplanverwirklichung – wird in der Methodik Mathematikunterricht [59], S. 47f., und in Arbeiten von WEBER [88] [89] näher gekennzeichnet; vgl. auch Uh 7/6f.
Welchen Bezug diese Leitlinien zu den Zielen und zum Stoff des Unterrichts in Klasse 10 haben, geht aus dem Lehrplan näher hervor, und zwar vor allem aus dem Teil „Ziele und Aufgaben" (Lp 7f) und aus den Stoffangaben im Teil „Inhalt des Unterrichts". Eine allgemeine Übersicht gibt die Tabelle auf Uh 10 bis 13.

[1]) Verweise auf bestimmte Seiten oder Abbildungen dieses Buches bzw. auf andere Unterrichtsmaterialien (Lehrplan, Lehrbuch usw.) sind durch Abkürzungen vermerkt, deren Bedeutung durch die folgenden Beispiele erläutert sei.

Uh 115	– (Diese) Unterrichtshilfen, Seite 115
Bild 85/2	– (Diese) Unterrichtshilfen, Seite 85, Bild 2
Uh 9/10	– Unterrichtshilfen für Klasse 9, Seite 10
Lp 39	– Lehrplan für die Klassen 9 und 10, Seite 39
Lb 50	– Lehrbuch für Klasse 10, Seite 50
Lb 30/Satz A 9	– Lehrbuch für Klasse 10, Seite 30, Satz A 9
Lb 100/30, 31	– Lehrbuch für Klasse 10, Seite 100, Aufgaben 30 und 31.
Mi Üb 19	– Mathematik in Übersichten, Seite 19

Alle diese Beispiele beziehen sich auf Materialien für das Fach Mathematik.

Beispiele für Hinweise auf Materialien anderer Unterrichtsfächer sind:

Lb Ph 7/17	– Lehrbuch „Physik" Klasse 7, Seite 17;
Lp Ph 9/25	– Lehrplan „Physik" Klasse 9, Seite 25.

Übersicht über die inhaltlichen Leitlinien des Mathematikunterrichts in Klasse 10

Stoffeinheit	Mengen	Variable
1.1. Die Funktion $y = \sin x$	Mengentheoretische Grundlagen der Lehre von den Funktionen (Wdhg.) Sinusfunktion als Menge geordneter Paare reeller Zahlen Definitions- und Wertebereich der Sinusfunktion	Variablengrundbereiche bei $f(x) = \sin x$ Variable als Koeffizienten bei $f(x) = a \sin bx$
1.2. Die Funktionen $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$	Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktion als Mengen geordneter Paare reeller Zahlen Definitions- und Wertebereiche dieser Funktionen	Variablengrundbereiche bei $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$ und $f(x) = \cot x$
1.3. Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten		Definitionsbereiche der Funktionen und Grundbereiche von Variablen
1.4. Anwendung der Winkelfunktionen bei Dreiecksberechnungen	Anwenden mengentheoretischer Grundlagen bei der Klassifikation von Dreiecken	Variablengrundbereiche bei Dreiecksberechnungen Umformen von Termen

Zahlenbereichserweiterungen	Gleichungen und Ungleichungen	Abbildungen
Reelle Zahlen als Argumente und Funktionswerte der Sinusfunktion	Ermitteln von Werten der Sinusfunktion als Lösen von Gleichungen	Grundbegriffe der Lehre von den Funktionen (Wdhg.) Funktion $f(x) = \sin x$ Periode (einer Funktion) Streckung und Stauchung des Graphen einer Funktion (Wdhg.) Funktionen $f(x) = a \sin x$, $f(x) = \sin bx$ und $f(x) = a \sin bx$ Skizzen der Graphen dieser Funktionen
Reelle Zahlen als Argumente und Funktionswerte der Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktion	Ermitteln von Werten der Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktion als Lösen von Gleichungen	Funktionen $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$ und $f(x) = \cot x$ Skizzen der Graphen dieser Funktionen
Rationale Näherungswerte irrationaler Funktionswerte	Lösen einfacher goniometrischer Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen Gleichungen für den Zusammenhang der Winkelfunktionswerte Ermitteln von Winkelfunktionswerten Anwenden der Umformungsregeln für Gleichungen	Anwenden der Winkelfunktionen bei goniometrischen Berechnungen
Rationale Näherungswerte für irrationale Argument- und Funktionswerte	Gleichungen zum Ermitteln gesuchter Größen Umformen von Gleichungen Ungleichungen zum Abschätzen von Lösungen	Funktionale Zusammenhänge zwischen den Stücken der Dreiecke

Stoffeinheit	Mengen	Variable
2.1. Wiederholung und Ergänzung (der Körperdarstellung und Körperberechnung)	Anwenden mengentheoretischer Grundlagen beim Klassifizieren geometrischer Körper Flächen und geometrische Körper als Punktmengen	Variablengrundbereiche bei Flächen- und Rauminhaltsberechnungen Umformen von Termen
2.2. Pyramiden- und Kreiskegelstümpfe	Flächen und geometrische Körper als Punktmengen	Variablengrundbereiche bei Flächen- und Rauminhaltsberechnungen Umformen von Termen

Die Orientierung auf eine sichere, anwendbare und erweiterungsfähige mathematische Grundlagenbildung ist ein Ausdruck der allgemeinbildenden Funktion des Mathematikunterrichts der Oberschule. Sie bedingt Auswahl, Auffassung und Behandlungsweise des Stoffes. Wie für Klasse 9 sieht der Lehrplan für Klasse 10 gegenüber den bisherigen Lehrplänen eine Konzentration des Stoffes auf das Mathematisch-Grundlegende – bei Verzicht auf periphere Einzelheiten – vor, z. B. bei der Verbindung von Gebieten der Stereometrie und der darstellenden Geometrie zu einem geschlossenen Komplex (Stoffgebiet „Körperdarstellung und Körperberechnung", Lp 43f). Damit ist – gegenüber dem früher gültigen Lehrplan – eine Erhöhung des fachlichen Niveaus verbunden, die sich besonders in Tiefe, Exaktheit und Gründlichkeit der Behandlung sowie in der Verflechtung mit anderen Stoffen und in der Betonung wesentlicher „tragender Ideen" der Mathematik widerspiegelt; vgl. Uh 9/17.

Der Beitrag zur allgemeinen geistigen Bildung

Auch für den Mathematikunterricht der Klasse 10 gilt, daß ein wesentliches Mittel zur allgemeinen geistigen Bildung der Schüler, zur Entwicklung ihres logischen Denkens, ihrer schöpferischen Fähigkeiten und ihrer geistigen Disponibilität die Ausbildung spezieller, unmittelbar fachbezogener – d. h. „mathematischer" – Fähigkeiten ist.

Zahlenbereichserweiterungen	Gleichungen und Ungleichungen	Abbildungen
Rationale Näherungswerte für irrationale Zahlen	Gleichungen zum Ermitteln gesuchter Größen Gleichungen zum Darstellen einer Funktion Umformen von Gleichungen (Auflösen von Formeln nach der gesuchten Größe) Ungleichungen zum Abschätzen	Funktionale Zusammenhänge zwischen Größen bei der Flächen- und Rauminhaltsberechnung Anwenden der Winkelfunktionen bei trigonometrischen Berechnungen Darstellend-geometrische Abbildung; senkrechte Projektion, schräge Parallelprojektion (Konstruktionen, Skizzen) Verschiebung
Rationale Näherungswerte für irrationale Zahlen	Gleichungen zum Ermitteln gesuchter Größen Gleichungen mit einer unabhängigen Variablen zum Darstellen einer Funktion Umformen von Gleichungen (Auflösen von Formeln nach der gesuchten Größe) Ungleichungen zum Abschätzen von Näherungslösungen bzw. zum Einschließen der Lösung in Schranken	Funktionale Zusammenhänge zwischen Größen bei der Flächen- und Rauminhaltsberechnung Anwenden der Winkelfunktionen bei trigonometrischen Berechnungen Darstellend-geometrische Abbildung: senkrechte Projektion, schräge Parallelprojektion (Konstruktionen, Skizzen) Zentrische Streckung

Nicht nur unter dem enger facheigenen, sondern auch unter dem übergreifenden Aspekt besteht eine bedeutsame Aufgabe des Unterrichts in Klasse 10 darin, die *geistigen Operationen* – wie *Vergleichen, Ordnen, Gliedern, Klassifizieren, Abstrahieren, Konkretisieren, Analysieren, Synthetisieren* – bei den Schülern zu einer solchen Qualität zu entwickeln, daß diese Operationen in allen Lebensbereichen, besonders aber bei der weiteren Bildung und Selbstbildung nutzbringend angewendet werden können.

Die spezie llen Ziele der geistigen Bildung werden im Lehrplan im Vorwort, Teil „Ziele und Aufgaben" und im Teil „Inhalt des Unterrichts" (hier in den Vorbemerkungen zu den Stoffgebieten) im einzelnen angegeben. Da es bei der Entwicklung geistiger Fähigkeiten nicht nur auf den Inhalt, sondern wesentlich auch auf die Methode ankommt (vgl. Uh 9/19), lassen sich aus den methodischen Hinweisen des Lehrplans (im Vorwort, Teil „Hinweise zur methodischen und organisatorischen Gestaltung des Unterrichts" und in den Bemerkungen zu den einzelnen Stoffeinheiten und Themen im Teil „Inhalt des Unterrichts") Rückschlüsse auf Ziele und Aufgaben des Unterrichts bei der geistigen Bildung der Schüler ziehen. Es erscheint deshalb notwendig, beim diesbezüglichen Studium des Lehrplans auch die vielfältigen methodischen Bemerkungen zu berücksichtigen.

Übersicht über die Leitlinien der mathematischen Methode im Mathematikunterricht in Klasse 10

Stoffeinheit	Definieren	Beweisen
1.1. Die Funktion $y = \sin x$	Definition „Sinus eines Winkels“ Definition der Funktion $f(x) = \sin x$	
1.2. Die Funktionen $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$	Definition „Kosinus eines Winkels“, „Tangens eines Winkels“, „Kotangens eines Winkels“ Definition der Funktionen $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$, $f(x) = \cot x$	Herleiten von $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\tan x \cdot \cot x = 1$ $\left(x \neq \frac{k\pi}{2};\ k \in G\right)$
1.3. Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten		Übungen im Beweisen einiger Quadrantenbeziehungen
1.4. Anwendung der Winkelfunktionen bei Dreiecksberechnungen	Definition „kongruent“ (Wdhg.) Klassifikation der Dreiecke (Wdhg.)	Seitenrelation und Seiten-Winkel-Relation für das Dreieck (Wdhg.) Herleiten des Sinussatzes und des Kosinussatzes der ebenen Trigonometrie Herleiten der Flächeninhaltsformel für das Dreieck Kongruenzsätze für das Dreieck (Wdhg.)

Verfahren zur Problemlösung	Rechentechnik	Graphisches Arbeiten
Anwenden der Kenntnisse über den Streckungsfaktor a bei Potenzfunktionen $f(x) = a \cdot g(x)$ auf die Sinusfunktion	Näherungsweises Berechnen ausgewählter Werte der Sinusfunktion Arbeiten mit dem Tafelwerk (Sinusfunktion)	Graphische Darstellung von $f(x) = \sin x$ Streckung, Stauchung des Graphen (Wdhg.) Skizzieren von $f(x) = a \sin x$, $f(x) = \sin bx$ und $f(x) = a \sin bx$
Anwenden der Beziehungen zwischen Funktion und Kofunktion bei Winkelfunktionen	Berechnen ausgewählter Werte der Kosinus-, der Tangens- und der Kotangensfunktion Arbeiten mit dem Tafelwerk (Winkelfunktionen)	Skizzieren der Graphen der Kosinus-, der Tangens- und der Kotangensfunktion
Fallunterscheidungen bei den Beweisen zu Quadrantenbeziehungen	Arbeiten mit dem Tafelwerk (Winkelfunktionen und Formeln) Arbeiten mit dem Rechenstab, einschließlich der goniometrischen Skalen	
Rückführen der Aufgaben zum Berechnen gleichschenkliger und schiefwinkliger Dreiecke auf Aufgaben über rechtwinklige Dreiecke Fallunterscheidungen beim Beweisen (Herleiten) des Sinus- und des Kosinussatzes sowie bei trigonometrischen Aufgaben Aufstellen von Lösungsplänen und Arbeiten nach diesen Plänen Anwenden von Kontrollverfahren beim Rechnen	Arbeiten mit dem Tafelwerk Arbeiten mit dem Rechenstab Schätzen und Überschlagen, Genauigkeitsbetrachtungen	Dreieckskonstruktionen nach den Kongruenzsätzen (Wdhg.) Skizzen zu formalen Aufgaben und zu Anwendungsaufgaben aus der Praxis

Stoffeinheit	Definieren	Beweisen
2.1. Wiederholung und Ergänzung (der Körperdarstellung und Körperberechnung)	Definition „Prisma“ und „Pyramide“ (Wdhg.) Anwenden bekannter Definitionen bei Aufgaben zum Berechnen und Darstellen geometrischer Körper	Anwenden bekannter Sätze über geometrische Körper beim Beweisen oder Herleiten von Sätzen über Sonderfälle
2.2. Pyramiden- und Kreiskegelstümpfe	Anwenden bekannter Definitionen bei Aufgaben zum Berechnen und Darstellen geometrischer Körper	Anwenden bekannter Sätze über geometrische Körper beim Beweisen oder Herleiten von Sätzen über Sonderfälle

Verfahren zur Problemlösung	Rechentechnik	Graphisches Arbeiten
Aufstellen von Lösungsplänen, Arbeiten nach Lösungsschemata Anwenden der Trigonometrie bei der Körperberechnung Anwenden darstellend-geometrischer Methoden zum Ermitteln geometrischer Größen Anwenden von Kontrollverfahren beim Rechnen und Zeichnen	Arbeiten mit dem Tafelwerk Arbeiten mit dem Rechenstab Schätzen und Überschlagen, Genauigkeitsbetrachtungen	Darstellend-geometrische Grundkonstruktionen in Zweitafelprojektion (Wdhg.) Anwenden darstellend-geometrischer Konstruktionen in senkrechter Projektion Einfache Zeichnungen und Skizzen in schräger Parallelprojektion Arbeiten mit gebräuchlichen Zeichenhilfsmitteln, einschließlich Schablonen Lesen darstellend-geometrischer Zeichnungen Zeichenkontrollen bei darstellend-geometrischen Arbeiten
Aufstellen von Lösungsplänen, Arbeiten nach Lösungsschemata Anwenden der Trigonometrie bei der Körperberechnung Anwenden darstellend-geometrischer Methoden zum Ermitteln geometrischer Größen Anwenden von Kontrollverfahren beim Rechnen und Zeichnen Exakte Lösungen und Näherungslösungen unter Rückführen auf gelöste Probleme der Körperberechnung	Arbeiten mit dem Tafelwerk Arbeiten mit dem Rechenstab Schätzen und Überschlagen, Genauigkeitsbetrachtungen Näherungslösungen Arbeiten mit Näherungsformeln	Anwenden darstellend-geometrischer Konstruktionen in senkrechter Projektion Einfache Zeichnungen und Skizzen in schräger Parallelprojektion Arbeiten mit gebräuchlichen Zeichenhilfsmitteln, einschließlich Schablonen Lesen darstellend-geometrischer Zeichnungen Zeichenkontrollen bei darstellend-geometrischen Arbeiten

Für den Bereich der geistigen Bildung der Schüler gelten Leitlinien, die – in Übereinstimmung mit den Ausführungen in den Unterrichtshilfen für das Fach Mathematik, Klasse 9 – **als Leitlinien der mathematischen Methode** bezeichnet werden sollen. Es sind dies besonders

- Definieren mathematischer Begriffe („Definieren")
- Beweisen oder Herleiten mathematischer Sätze („Beweisen")
- Anwenden spezieller Verfahren zur Lösung mathematischer Probleme („Verfahren zur Problemlösung")
- Verwenden von Hilfsmitteln mathematischen Arbeitens („Rechentechnik", „graphisches Arbeiten").

WEBER, der in den bereits genannten Arbeiten ([88] [89]) auch diese Leitlinien näher erläutert, bezeichnet sie als Leitlinien der Fähigkeitsentwicklung und zählt zu diesen noch eine Leitlinie des Gebrauchs der mathematischen Fachsprache, Terminologie und Symbolik hinzu. Die hier genannten Leitlinien werden gleichfalls im Lehrplan im einzelnen dargelegt, vor allem im Vorwort (Lp 9f) und in den Vorbemerkungen zu den Stoffgebieten (1. und 2.) im Teil „Inhalt des Unterrichts". Die Tabelle auf Uh 14ff skizziert – im Überblick – die Beziehungen zwischen den Stoffeinheiten des Unterrichts der Klasse 10 und diesen Leitlinien.

Wie bei allen übergreifenden Aufgaben der Bildung und Erziehung (vgl. Uh 9/10) ist bei der Entwicklung allgemeiner geistiger Fähigkeiten der Schüler eine gute *Koordinierung des Mathematikunterrichts mit anderen Unterrichtsfächern* erforderlich, besonders mit den Fächern Physik, Chemie, dem polytechnischen Unterricht und – soweit es im besonderen Fragen der Logik und der sprachlichen Darstellung eines Sachverhalts betrifft – mit dem Fach Deutsche Sprache und Literatur. Die Tabelle auf Uh 37ff, aus der der zeitliche Gleichlauf der Stoffgebiete des Mathematikunterrichts mit den Stoffgebieten naturwissenschaftlicher Unterrichtsfächer und des polytechnischen Unterrichts hervorgeht, gibt auch Anhaltspunkte für die Koordinierung der Aufgaben der allgemeinen geistigen Bildung.

Der Beitrag zur ideologischen Bildung und Erziehung

Die hohe Bedeutung, die der ideologischen Bildung und Erziehung in jedem Unterrichtsfach und auf jeder Klassenstufe beigemessen wird, ist in der objektiven Gesetzmäßigkeit begründet, daß die Grundprozesse der weiteren gesellschaftlichen Entwicklung im Sozialismus ein ständiges Wachsen des Bewußtseins und des Schöpferischen in der Tätigkeit des Menschen auf allen Gebieten seines Lebens bedingen. Besonderes Augenmerk muß – vor allem in den Abschlußklassen – einer umfassenden ideologischen Vorbereitung der Schüler auf alle jene Tätigkeiten und Lebensbereiche zugewandt werden, vor die sie sich nach dem Verlassen der Oberschule gestellt sehen. Dabei darf natürlich nicht außer Betracht bleiben, daß die Schüler bereits im Leben stehen und auch den Anforderungen in der Schule und neben dem Schulbesuch ideologisch gewachsen sein müssen.
Zu diesen Lebensbereichen gehört das politische Leben in seinen verschiedenartigen Formen ebenso wie die produktive Arbeit, das weitere Lernen und – bei den Jungen – der Ehrendienst in den bewaffneten Kräften der DDR.
Wie in Klasse 9 kommt es in Klasse 10 bei der ideologischen Bildung und Erziehung im Mathematikunterricht besonders darauf an, die Schüler zu der Einsicht zu führen, daß eine hohe mathematische Bildung für die Erfüllung der Anforderungen in der entwickelten sozialistischen Gesellschaft unerläßlich ist, und die Schüler mit Optimismus, Lernwillen und Schaffenskraft zu erfüllen.
Auch die Mittel, mit denen die Ziele der ideologischen Bildung und Erziehung in Klasse 10 erreicht werden können, entsprechen den Mitteln, die in Klasse 9 anzu-

wenden sind; der Lehrplan weist auf Text- und Anwendungsaufgaben aus der Volkswirtschaft, der Technik und anderen Lebensbereichen der sozialistischen Gesellschaft sowie auf historische und aktualisierende Betrachtungen zu den Beziehungen zwischen Mathematik und Gesellschaft hin; vgl. Lp 12f.
Als methodische Ansatzpunkte der ideologischen Bildung und Erziehung kommen besonders in Betracht

- Fragen der mathematischen Wissenschaft und ihrer „inneren" Entwicklung,
- Fragen der Anwendung der Mathematik, einschließlich der mathematischen Durchdringung ökonomischer und politischer Zusammenhänge und
- die ideologische Bedeutsamkeit des Sachinhalts der Anwendungsaufgaben zu den verschiedenen Stoffgebieten der Mathematik.

Spezielle inhaltliche Akzente der ideologischen Bildung und Erziehung sind in Klasse 10 durch die Forderung des Lehrplans gesetzt, in allen Stoffeinheiten vielfältige Anwendungsaufgaben aus den verschiedenen Bereichen des gesellschaftlichen Lebens, besonders aus Produktion, Technik, Naturwissenschaft und Militärwesen, zur Anwendung und Festigung des Stoffes zu behandeln. Fragen des Wesens der Mathematik, ihres Abstraktionscharakters und ihrer Methoden sind vor allem im Stoffgebiet 2. „Körperdarstellung und Körperberechnung" Gegenstand weltanschaulicher Erörterungen.
Außer den obengenannten Ausführungen im Teil „Ziele und Aufgaben" werden im Lehrplan Hinweise zur ideologischen Bildung und Erziehung in den Vorbemerkungen zu den Stoffgebieten (im Teil „Inhalt des Unterrichts") gegeben.
Inhaltliche und methodische Empfehlungen zur ideologischen Bildung und Erziehung im Mathematikunterricht sind außer in den Arbeiten von FANGHÄNEL [14], ROSSA [70], STRECH [79] und WEBER [89] vor allem in der Methodik Mathematikunterricht [59], S. 26f., und in dem von LEY und WESSEL herausgegebenen Buch zur weltanschaulich-philosophischen Bildung [53] enthalten.

In den Darstellungen werden **Leitlinien der ideologischen Bildung und Erziehung** formuliert; diese Leitlinien sind in ihrer Auswahl eng den Zielstellungen angelehnt, die auch auf dem VII. Pädagogischen Kongreß dargelegt wurden [61]. Sie betreffen

- die Überzeugung vom objektiven Charakter der Entwicklung in Natur und Gesellschaft und von der Fähigkeit des Menschen, diese Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und in bewußter, verändernder Tätigkeit anzuwenden,
- die Überzeugung von der historischen Aufgabe der DDR und der Verantwortung der Jugend bei der weiteren Gestaltung der entwickelten sozialistischen Gesellschaft, bei der Meisterung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts, sowie bei der Stärkung und Verteidigung der Deutschen Demokratischen Republik und der sozialistischen Staatengemeinschaft.

Im Zusammenhang mit der ideologischen Bildung und Erziehung nennt der Lehrplan weitere Aufgaben des Mathematikunterrichts bei der allseitigen Entwicklung und Formung sozialistischer Persönlichkeiten (Lp 14). Sie betreffen vor allem die Erziehung zu

- Genauigkeit, Sorgfalt, Selbständigkeit und Verantwortungsbewußtsein,
- Zielstrebigkeit, Beharrlichkeit, Willensstärke,
- Sauberkeit und Ordnung (Übersichtlichkeit) beim Arbeiten,
- kritischem und selbstkritischem Denken.

Für die Erfüllung dieser Aufgaben sind die Organisationsformen, Methoden und Mittel des Unterrichts von besonderer, z. T. entscheidender Bedeutung; vgl. die Teile 0.2. sowie 1. und 2. dieser Schrift.

Bei der *Koordinierung des Mathematikunterrichts mit anderen Unterrichtsfächern hinsichtlich der ideologischen Bildung und Erziehung* ist zu beachten, daß der Unterricht im Fach Staatsbürgerkunde in Klasse 10 – ähnlich wie in Klasse 9 – zwar keine systematisch-philosophischen oder politisch-ökonomischen Themen vorsieht, aber Gegenstände zum Inhalt hat, die mit den weltanschaulich- und politisch-erzieherischen Aufgaben des Mathematikunterrichts in enger Verbindung stehen. Vor allem besteht ein Zusammenhang zwischen den Überlegungen zur Funktion der Wissenschaft als Produktivkraft und zur Bedeutung der Mathematik für die materielle Produktion (im Mathematikunterricht) und der Behandlung des Themas „Sozialistische Intensivierung – Hauptweg der Entwicklung der sozialistischen Volkswirtschaft" (im Fach Staatsbürgerkunde, im Rahmen des Stoffgebiets „2. Grundfragen der ökonomischen Entwicklung in der Deutschen Demokratischen Republik"). Der Unterricht im abschließenden und zusammenfassenden Stoffgebiet des Faches Staatsbürgerkunde („4. Grundzüge der sozialistischen Weltanschauung und Moral") muß sich besonders auf die im Mathematikunterricht gewonnenen Einsichten stützen können.

Der Beitrag zur polytechnischen Bildung

Die polytechnische Bildung der Schüler in allen Fächern und Klassen muß grundsätzlich mit der Arbeitserziehung verbunden und darauf gerichtet sein, bestmögliche Bedingungen für eine berufliche Qualifizierung auf hohem Niveau und eine ständig steigende Effektivität der Arbeit zu schaffen. Dabei sollte berücksichtigt werden, daß der Werktätige in der materiellen Produktion zunehmend kompliziertere technische Einrichtungen bedienen muß, vielfach zum Beherrscher ganzer Maschinensysteme wird und von seiner Arbeit und seinem Schöpfertum die weitere Entwicklung der Arbeitsproduktivität – und damit des Reichtums der sozialistischen Gesellschaft – entscheidend abhängt.
Für die polytechnische Bildung der Schüler im Mathematikunterricht der Klasse 10 gelten im Prinzip die gleichen allgemeinen Ziele und Aufgaben wie für Klasse 9. Im Vordergrund steht die Entwicklung der Fähigkeit der Schüler, reale Sachverhalte aus Produktion und Technik zu analysieren, das mathematische Problem herauszufinden, zu formulieren und zu lösen sowie die mathematische Lösung auf den realen Sachverhalt wieder zu übertragen; vgl. Methodik Mathematikunterricht [59], S. 15, und Weber [90]. Damit verbunden ist die Erziehung der Schüler zu einer positiven, sozialistischen Einstellung zur Arbeit und zum weiteren Bildungserwerb (zum „lebenslangen Lernen"). Auch Fragen der Berufsorientierung der Schüler hängen eng mit der polytechnischen Bildung zusammen; vgl. Uh 9/26 f.
Inhaltliche Konzentrationspunkte der polytechnischen Bildung in Klasse 10 sind

- Anwendung der Winkelfunktionen auf Probleme aus Technik und Naturwissenschaften,
- darstellend-geometrische Abbildungen und Konstruktionen sowie
- Körperberechnung (mit Hilfe von Formelsammlungen, Tabellen und Rechenstab).

Die darstellend-geometrischen Abbildungen und Konstruktionen knüpfen nicht nur an den Mathematikunterricht in Klasse 7 (Grundzüge der darstellenden Geometrie), sondern auch an das technische Zeichnen im polytechnischen Unterricht an (Lehrgang und Anwendung bei der produktiven Arbeit; vgl. Lp 44).
Im Mathematikunterricht der Klasse 10 muß die Raumvorstellungs- und Raumdarstellungsfähigkeit der Schüler ein Niveau erreichen, das günstige Voraussetzungen für das Fachzeichnen bzw. Konstruieren und für das Lösen anderer Aufgaben, die sich auf Fähigkeiten dieser Art gründen, im Rahmen der beruflichen Ausbildung schafft; vgl. Ilgner [30].

Einzelheiten zur Ziel- und Aufgabenstellung im Bereich der polytechnischen Bildung der Schüler sind im Vorwort des Lehrplans – hier sowohl im Teil „Ziele und Aufgaben" als auch im Teil „Hinweise zur methodischen und organisatorischen Gestaltung des Unterrichts" – und, in konkreter Form, in den Vorbemerkungen zu den Stoffgebieten (im Teil „Inhalt des Unterrichts") enthalten.

Die *Koordinierung des Mathematikunterrichts mit anderen Unterrichtsfächern im Hinblick auf die polytechnische Bildung*, vor allem mit den naturwissenschaftlichen Fächern und dem polytechnischen Unterricht, geht von dem Grundsatz aus, Probleme aus Produktion und Technik für die Einführung in einen den Schülern bisher unbekannten mathematischen Sachverhalt zu nutzen und, umgekehrt, Erkenntnisse der Mathematik bei der Lösung technischer Probleme durch die Schüler anzuwenden (vgl. Uh 9/28). Nähere Ansatzpunkte für ein richtiges Ineinandergreifen der Aufgaben der einzelnen Unterrichtsfächer können der Zeittabelle auf Uh 38ff entnommen werden.

0.2. Allgemeine didaktische und methodische Probleme

Die Gestaltung des Unterrichts in jedem Fach und in jeder Klasse muß von dem Grundsatz bestimmt sein, das Lernen der Schüler als bewußte, aktive und rationelle Aneignung des Bildungsinhalts und der Schulung der Kräfte zu organisieren und die Einheit von wissenschaftlicher Bildung und kommunistischer Erziehung in jeder Phase des Unterrichts zu sichern. Diese Forderung entspricht den hohen Zielen der Bildung und Erziehung, die der Schule gestellt sind, und steht in Einklang mit der objektiven Tendenz, daß bei der weiteren Gestaltung der entwickelten sozialistischen Gesellschaft und beim Übergang zum Kommunismus Arbeit und Lernen immer mehr verschmelzen, daß jede Arbeit Bildungs- und Erziehungsvoraussetzungen fordert und ihrerseits zur Bildung und Erziehung allseitig entwickelter sozialistischer Persönlichkeiten beiträgt. In diesem Prozeß werden Schule und Unterricht immer mehr mit den anderen Bereichen des Lebens verbunden und zu einem notwendigen Teil der gesamten Gesellschaft.
Wie bereits in Zusammenhang mit den hauptsächlichen Zielen der Bildung und Erziehung im Mathematikunterricht der Klasse 10 (Uh 8 und Uh 9/9f) bemerkt wurde, hat der Unterricht in dieser Klasse die wesentliche Aufgabe, das Wissen und Können der Schüler aus dem Gesamtbereich der in der Oberschule behandelten Gebiete der Mathematik zu festigen, zu systematisieren und zu erweitern. Dementsprechend sollen im Unterricht Methoden und Mittel vorherrschen, bei denen **Wiederholung, Systematisierung, Kontrolle und Übung** sowie die **Verknüpfung des neuen Stoffes mit früher erworbenem Wissen und Können der Schüler** besonders ausgeprägt sind, und deren Anwendung **Selbständigkeit und Aktivität beim Lernen** bewirkt und auf den **künftigen weiteren Bildungserwerb** vorbereitet; vgl. Uh 9/30.
Die didaktischen und methodischen Formen der Wiederholung, Systematisierung und Verarbeitung früher erworbenen Wissens der Schüler sowie der Kontrolle sind vielgestaltig. Im allgemeinen werden diese didaktischen Funktionen innerhalb des Lehrgangs zur Einführung neuen Stoffes von einzelnen Teilen einer Unterrichtsstunde erfüllt. Der Lehrplan fordert jedoch auch spezielle Unterrichtseinheiten und Unterrichtsstunden zu Wiederholung, Systematisierung und Übung; vgl. Lp 16. Unterrichtsstunden mit Wiederholungs-, Systematisierungs- und Übungsfunktion werden zweckmäßigerweise entweder der Einführung neuen Stoffes vorausgeschickt oder als Abschluß der Einführung neuen Stoffes vorgesehen; im letztgenannten Falle können sie auch der Verknüpfung des Neueingeführten mit dem Bekannten und der Betrachtung des Ganzen unter übergreifenden, ordnenden Aspekten

dienen (Lp 20; vgl. Uh 160). In diesem Zusammenhang sei auf die diesbezüglichen Ausführungen in der Methodik Mathematikunterricht [59], S. 200ff., und auf die Arbeit von LEGEL über die abschließende Wiederholung in Klasse 10 [50] aufmerksam gemacht.

Inhaltlich werden Wiederholung, Systematisierung und Verarbeitung früher erworbenen Wissens durch die im Lehrplan getroffene Auswahl und vorgeschriebene Behandlungsweise des Stoffes bestimmt, es dominiert in Klasse 10 eine verbindende, z. T. unmittelbar fusionistische Behandlung. Besonders bei der Trigonometrie (Stoffeinheit 1.4.) sowie bei der Körperdarstellung und Körperberechnung (Stoffgebiet 2.) werden früher erworbene Kenntnisse der Schüler aus verschiedenen Bereichen der Mathematik bei der Gewinnung neuer Kenntnisse, vor allem aber bei der Lösung komplexer mathematischer Aufgaben angewendet und dadurch miteinander in Beziehung gesetzt. Hierbei kommt es speziell darauf an, die tragenden Begriffe, Denkweisen und Methoden der Mathematik herauszuarbeiten; vgl. WEBER [89].

Für die *Kontrolle* gelten in Klasse 10 die gleichen Grundsätze wie in den vorangegangenen Klassenstufen; Einzelheiten nennt der Lehrplan (Lp 17). Die Kontrollen sollten sich – ohne Rücksicht auf ihre besondere Form – vor allem auf die Kenntnis größerer Zusammenhänge, auf die Beherrschung komplexer Arbeitsverfahren und auf das Vermögen, ein mathematisches Problem zu lösen – nicht auf Einzelwissen – konzentrieren (vgl. Uh 9/31f). Notwendig erscheint weiterhin, die Schüler durch entsprechende Formen der Kontrolle auf die Situation bei der schriftlichen und der mündlichen Abschlußprüfung vorzubereiten, auch durch Simulation einer solchen Situation. Bei der Zensierung sollte beachtet werden, daß eine Zensur sowohl Ausdruck eines objektiv erreichten Standes als auch Antrieb für das weitere Lernen sein muß. Probleme der Kontrolle des Gelernten im Mathematikunterricht haben in der fachmethodischen Literatur seit jeher ihren festen Platz; in jüngerer Zeit ist eine bemerkenswerte Arbeit zu diesem Thema von HOFFE [27] erschienen; vgl. auch die Methodik Mathematikunterricht [59], S. 232 ff., und die Literaturangaben auf Uh 9/32.

Wodurch sich Kurzkontrollen von Klassenarbeiten inhaltlich unterscheiden sollten, geht aus Lp 17 hervor. Für schriftliche Kurzkontrollen könnten etwa 10 bis 20 Minuten angesetzt werden. In den Teilen 1. und 2. dieser Unterrichtshilfen werden dort, wo solche Kurzkontrollen besonders empfehlenswert sind, entsprechende Vorschläge unterbreitet.

Für die Vorbereitung der Schüler auf den weiteren Bildungserwerb sowie auf die Tätigkeit in den verschiedenen Lebensbereichen der sozialistischen Gesellschaft ist die Aneignung von **Denk- und Handlungsalgorithmen** von großem Wert. Neben dem **kausalen** Aspekt des Denkens sollte dem **finalen** Aspekt besondere Beachtung geschenkt werden. Ebenso kommt es darauf an, daß die Schüler das für das Lösen einer Aufgabe günstigste Verfahren auszuwählen, die zweckmäßigste Darstellungsform zu finden und bestimmte Denkweisen mehr und mehr bewußt anzuwenden lernen; vgl. Lp 12. Als Beispiele nennt der Lehrplan:

- Umformen von Termen,
- Lösen von Gleichungssystemen,
- Verwenden des Rechenstabes,
- Arbeiten mit dem Tafelwerk,
- Lösen von Textaufgaben,
- Anwenden des Prinzips des Rückführens eines unbekannten Problems auf bereits gelöste Probleme.

Hinzu kommen noch

- Planen und Ausführen geometrischer Konstruktionen.

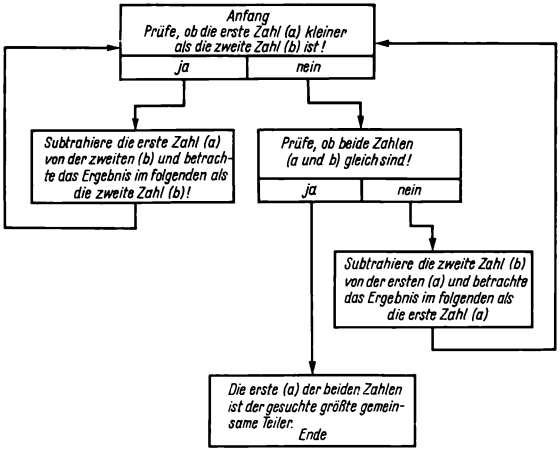
Es ist von der Sache her verständlich, daß ein enger Zusammenhang zwischen diesen Gegenständen und den – in Zusammenhang mit den Zielen der allgemeinen geistigen Bildung genannten – Leitlinien der mathematischen Methode besteht; vgl. Uh 14 bis 17.

Ob solche Algorithmen (oder anders geartete Vorschriften) von den Schülern in einer besonderen Form notiert werden sollen und in welcher Form dies geschehen soll, bleibt dem Lehrer überlassen; der Lehrplan erhebt hierzu keine spezielle Forderung; vgl. auch BUCHE [12]. Bewährt haben sich die Block- und Fließbilddarstellungen, wie sie von LANDA [47] und BOCK [7] angegeben werden; vgl. Bild 24/1. Auch können beim Notieren von Algorithmen Symbole verwendet werden, wie sie bei der Aufstellung von Programmablaufplänen in der Datenverarbeitung üblich sind („Programmkästchen-" und „Programmlinienmethode" nach TGL 22451, vgl. EICHLER [13]). Das Bild 24/2 zeigt den im Bild 24/1 dargestellten Algorithmus in einem Kästchendiagramm, das Bild 24/3 den gleichen Algorithmus in einem Liniendiagramm, und zwar unter Verwendung einer in der Datenverarbeitung üblichen Symbolik. Im allgemeinen sollte man im Unterricht eine Form, die sich sowohl verbaler Elemente als auch der den Schülern geläufigen mathematischen Symbolik bedient, einer speziellen „algorithmischen" Symbolik (oder: Sprache) vorziehen. Man sollte stets daran denken, daß die Notation von Algorithmen im Unterricht der allgemeinbildenden Schule nicht Selbstzweck, sondern Mittel zum Zweck, zum Verständnis mathematischer Denk- und Arbeitsverfahren, ist. Die Beispiele für algorithmische Vorschriften, die in diesen Unterrichtshilfen im Rahmen der Hinweise zu den einzelnen Unterrichtseinheiten gegeben werden (Uh 100f und 145), haben eine solche „gemischte" Form. Von noch weitergehenden Abstraktionen beim Notieren, z. B. von Graphen (vgl. LANDA [47]) oder in einer Symbol- oder Programmsprache, etwa nach LJAPUNOW, sollte jedoch abgesehen werden. Zu beachten ist aber auch, daß gewisse algorithmische Vorschriften den Schülern nicht nur aus dem vorangegangenen Mathematikunterricht, sondern auch aus anderen Unterrichtsfächern bekannt sind. Zum Beispiel sind botanische zoologische Bestimmungsbücher (wie die Exkursionsflora von ROTHMALER und die Exkursionsfauna von STRESEMANN) nach dem Prinzip des algorithmischen Vorgehens aufgebaut.

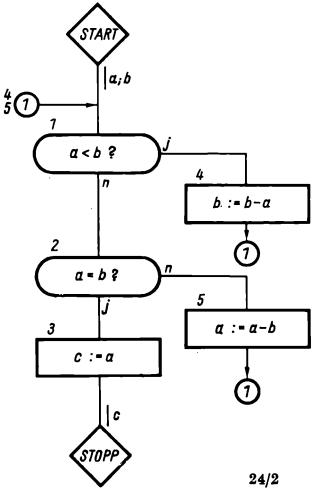
Beim *Umformen von Termen* soll in Klasse 10 durch Übungen im Erkennen der Struktur eines Terms und durch Analyse der Schrittfolge beim Umformen der Terme erreicht werden, daß die Schüler den rationellsten Weg auffinden und beschreiten sowie Sicherheit und Schnelligkeit beim Arbeiten zeigen. Das Umformen von Termen spielt in allen in Klasse 10 zu behandelnden Stoffgebieten eine Rolle, vor allem bei der Dreiecksberechnung sowie bei der Flächeninhalts- und Rauminhaltsberechnung geometrischer Körper. Da Terme und ihre Umformungen spezieller Gegenstand des Unterrichts in Klasse 9 (Stoffeinheit 1.3. „Arbeiten mit Variablen", vgl. Uh 9/58f) sind, kann sich der Unterricht in Klasse 10 im allgemeinen auf eine sichere Kenntnis der Umformungsbedingungen und -regeln sowie auf einen hohen Grad an Fertigkeiten im Arbeiten mit Termen bei den Schülern stützen.

Der Niveauerhöhung, die in Klasse 10 gegenüber Klasse 9 beim *Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen* erreicht werden soll und die in erster Linie die Sicherheit im Erkennen und Ausführen der erforderlichen Operationen betrifft, dienen hauptsächlich Übungen mit einfachen goniometrischen Gleichungen und mit Gleichungen, die sich beim Anwenden der Formeln der Flächeninhalts- und Rauminhaltsberechnung bei geometrischen Körpern ergeben (lineare, quadratische und kubische Gleichungen sowie Gleichungen mit Quadratwurzeln). Von diesen Gleichungen wird nur ein Teil mit Hilfe von Algorithmen gelöst, der andere Teil, zu dem z. B. die goniometrischen Gleichungen gehören, durch inhaltliche Überlegungen (analog dem Lösen von Exponentialgleichungen im Unterricht der Klasse 9, vgl. Uh 9/155f).

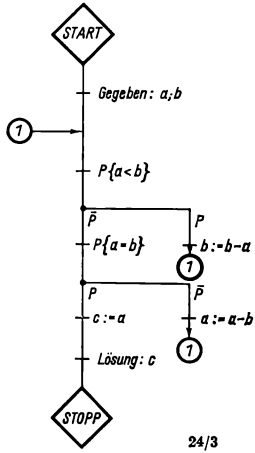
Algorithmus zum Ermitteln des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen



24/1



24/2



24/3

Bei der Flächen- und Rauminhaltsberechnung muß oftmals eine gegebene Gleichung nacheinander nach verschiedenen Variablen aufgelöst, d. h. so in äquivalente Gleichungen umgeformt werden, daß jeweils die Variable für die gesuchte Größe isoliert auf einer Seite der Gleichung steht. Auch beim Lösen von Gleichungen sollte den Schülern zur Gewohnheit werden, zu den Rechnungen und Aufgabenlösungen die Probe, gegebenenfalls durch Bezug auf den Aufgabentext, zu machen (über Proben bei Gleichungen, Gleichungssystemen und Ungleichungen vgl. Uh 9/80f). Übungen, bei denen es auf die Wahl des rationellsten Lösungsweges ankommt, und das Kommentieren des Lösungsweges bei schwierigeren und komplizierteren Gleichungen und Gleichungssystemen können den Schülern helfen, den Zugang zur Lösung auch bei weniger „übersichtlichen" Gleichungen, Gleichungssystemen und Ungleichungen zu finden. Ebenso können sie das Verständnis der Schüler für die mathematischen Sachverhalte, die den Aufgaben zugrunde liegen, fördern.

Für das *Arbeiten mit dem logarithmischen Rechenstab* wurden den Schülern im Unterricht der Klasse 9 die erforderlichen mathematischen Grundlagen vermittelt; durch das praktische Arbeiten von Klasse 7 an wurde bereits ein hoher Grad der Fertigkeiten im Gebrauch des Stabes erzielt. Neu in Klasse 10 ist das Verwenden der goniometrischen (trigonometrischen) Skalen des Stabes. Durch Übungen sollten in Klasse 10 alle Schüler lernen, bei angemessen raschem Rechnen mit dem Stab dessen Genauigkeit voll zu nutzen, d. h., beim Einstellen und Ablesen innerhalb der technisch bedingten Fehlergrenze zu bleiben. Um falsche Einstellungen und Ablesungen am Rechenstab zu unterdrücken, empfiehlt sich auch in Klasse 10 gelegentlich ein Einstell- und Ablesetraining, z. B. im Rahmen täglicher Übungen zu Beginn einer Unterrichtsstunde.

In diesem Zusammenhang erscheint eine Bemerkung zur Angabe von Größen bei Anwendungsaufgaben erforderlich. In der Technik, allgemein auch in anderen Bereichen bei Meßwerten und wenn eine besondere Toleranzangabe fehlt, bedeuten die angegebenen Stellen auch die genauen Stellen; in diesem Sinne ist „2,0 cm" von „2,00 cm" oder „2 cm" zu unterscheiden. In der Geometrie hat – traditionell – eine Maßangabe die Bedeutung einer Angabe ohne Toleranzen, d. h., „2 cm" steht für „genau 2 cm". Mit Rücksicht auf die praktischen Anwendungen gibt das Lehrbuch Größen in der Regel auf die in der Technik übliche Weise an; der Unterricht sollte dem folgen, den Schülern aber auch die andere Möglichkeit erklären. Ebenso sei hier auf die Verwendung des Gleichheitszeichens bei numerischen Rechnungen hingewiesen. Es hat sich beim Rechnen mit Hilfe des logarithmischen Rechenstabes und unter Verwendung von Zahlentafeln in der technischen Praxis und im Unterricht eingebürgert, das Annäherungszeichen nur dann zu verwenden, wenn die (mögliche) Differenz der zu vergleichenden Werte über der beim Rechnen technisch bedingten oder angestrebten Fehlergrenze liegt, also z. B. beim Schätzen und bei Überschlagsrechnungen. In anderen Fällen, auch beim Rechnen mit gerundeten Werten, wird dagegen das Gleichheitszeichen gesetzt, z. B.:
$4{,}53 \cdot 7{,}17 = 31{,}5$ (Berechnung mit Hilfe des Rechenstabes);
$\sin 23° = 0{,}3907$ (Zahlentafel);
$\tan \alpha = 0{,}874$, $\alpha = 41{,}2°$ (Rechenstab, goniometrische Skale oder Zahlentafel).
Der gleiche Grundsatz gilt auch für das Rechnen mit Meßwerten.

Der *Gebrauch des Tafelwerkes* ist vor allem für das Lösen von Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie (Stoffeinheit 1.4.) und aus der Körperberechnung (Stoffgebiet 2.) bedeutsam. Die Schüler haben mit dem Tafelwerk „Tabellen und Formeln – Mathematik, Physik, Chemie" [80] und mit dem Wissensspeicher „Mathematik in Übersichten" [5] bereits gearbeitet. In Klasse 10 muß nun ein hoher Grad an Sicherheit und Gewandtheit in der Anwendung dieser Hilfsmittel erreicht werden. Da aber

ebenfalls zu fordern ist, daß sich die Schüler auch bei anders angelegten oder in der äußeren Form abweichenden Tafelwerken und Formelsammlungen zurechtfinden, erscheint es zweckmäßig, nicht allein das Arbeiten mit dem gebräuchlichen Tafelwerk zu üben, sondern auch den Schülern allgemeine Regeln für den Umgang mit Wissensspeichern dieser Art zu vermitteln (eventuell kann ihnen bei bestimmten Anlässen, z. B. im Rahmen einer Übung, auch einmal ein anderes, in der Praxis oder an weiterführenden Schulen gebräuchliches Tafel- und Formelwerk in die Hand gegeben werden).

Die Befähigung der Schüler, *Sach- und Anwendungsaufgaben rationell lösen und entsprechende Regeln oder Algorithmen anwenden zu können*, gehört zu den Schlüsselproblemen der Methodik des Mathematikunterrichts. Entsprechend dem Lehrplan muß die Niveausteigerung beim Lösen von eingekleideten Aufgaben und Anwendungsaufgaben besonders darin bestehen, das für die Lösung einer Aufgabe günstigste Verfahren auszuwählen, die zweckmäßigste Darstellungsform zu finden und bestimmte Denkweisen mehr und mehr bewußt anzuwenden; vgl. Lp 12. Deshalb erscheint es notwendig, besondere Aufmerksamkeit den Methoden des Aufgabenlösens zuzuwenden und diese Methoden zum Gegenstand spezieller Erörterungen, auch in besonderen Unterrichtsstunden, zu machen. Möglichkeiten sind z. B. auf Uh 9/86, 144 kenntlich gemacht.

Das Lehrbuch gibt im Kapitel A (LE A 27, Lb 57) kurzgefaßte Hinweise speziell zum Lösen trigonometrischer Aufgaben; einer ausführlichen Darlegung des Lösungsweges bei komplexen Aufgaben aus der Stereometrie ist im Kapitel B eine besondere Lerneinheit gewidmet (LE B 5, Lb 77f). Bei Aufgaben, bei denen zwar das zu lösende Problem unmittelbar ersichtlich ist, aber der Lösungsweg erst ermittelt werden muß, sind im Lehrbuch Hinweise zur Lösungsmethode meist in Vorbemerkungen (unter der Überschrift „Vorüberlegung", „Ausführung", oder „Lösung") gegeben.

Es empfiehlt sich, im Unterricht den Schülern ein „Gerüst" zum Lösen von mathematischen Anwendungsaufgaben zu vermitteln, das sowohl direkt durch ihre Daten gegebene als auch durch einen Text formulierte Aufgaben zu lösen gestattet.

Bei den kommentierenden Beispielen im Lehrbuch, Kapitel B (LE B 5, Lb 77f) wird der Lösungsweg in *analytische* und in *synthetische Lösungsschritte* untergliedert.[1])

Die fachmethodische Literatur (in Mathematik und in den naturwissenschaftlichen Fächern) ist reich an Ausführungen über das Lösen mathematischer Aufgaben und seine Methoden; vgl. Boltjanskij [10], Fanghänel [15]. Kosse [43] nennt für Rechenaufgaben sieben Schritte:

1. Klärung des Problems der Aufgabe
2. Entwicklung des Lösungsweges
3. Durchführung eines Überschlages
4. Ausführung der numerischen Operationen
5. Vergleich des Ergebnisses mit dem Überschlag – Kontrollen
6. Rückblick auf die Zweckmäßigkeit des Lösungsweges
7. Antwortsatz

Redecker, der um Einheitlichkeit bei der Lösung von Aufgaben im mathematischen und im naturwissenschaftlichen Unterricht bemüht ist, unterscheidet [64]:

1. Problemanalyse
   1.1. Vorüberlegung
   1.2. Angeben der gegebenen Größen
   1.3. Angeben der gesuchten Größe(n)

[1]) Nach dem gleichen Schema wird z. B. im Lehrbuch der Physik für die Erweiterte Oberschule, Klasse 12, im Abschnitt „Lösung von Aufgaben aus der Mechanik" vorgegangen.

2. Lösungsmethode
3. Allgemeine Lösung
4. Wahl der Einheiten
5. Überschlagsrechnung
6. Numerische Lösung
7. Überprüfung
8. Ergebnissatz

SCHLOSSER [73] weist auf den Zusammenhang zwischen der Art und Weise der Aufgabenstellung und der Entwicklung der Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler hin, er gibt als hauptsächliche Schritte an:

1. Analyse
2. Zuordnung der Gesetze und Definitionen (Bedingungen)
3. Anwendung dieser Gesetze

Bei der Auswahl der günstigsten Variante für ein Lösungsschema – es kann u. U. bis zur Form einer algorithmischen Vorschrift ausgestaltet sein – muß vom Stand der Kenntnisse und Fertigkeiten der Schüler im Lösen mathematischer Probleme und Aufgaben ausgegangen werden. Im Hinblick auf die Anlage und äußere Form eines solchen Schemas wäre zu bedenken, daß die Ausführungen zur Lösung von Aufgaben im Lehrbuch (besonders Lerneinheit B 5, Lb 77 f) nur als eine Art Skelett, nicht aber als fertige Vorschrift zu werten sind.

Das Prinzip, ein *ungelöstes mathematisches Problem auf bereits gelöste Probleme zurückzuführen*, wird im Mathematikunterricht an vielen Stellen und in vielfältiger Weise angewendet. In Klasse 10 ist das im Stoffgebiet 1., vor allem beim Zeichnen der Graphen für die Funktionen $f(x) = a \sin x$, $f(x) = \sin bx$, $f(x) = a \sin bx$, bei der Berechnung von Werten anderer Winkelfunktionen mit Hilfe von Werten der Sinusfunktion, bei derBerechnung des gleichschenkligen Dreiecks, des regelmäßigen Vielecks und des schiefwinkligen Dreiecks, der Fall. Im Stoffgebiet 2. betrifft es die Körperberechnung, z. B. die Oberflächen- und Rauminhaltsberechnung der Stumpfkörper, und die Körperdarstellung, z. B. die Ermittlung der wahren Größe und Gestalt der Figuren, die beim Schnitt ebenflächig begrenzter Körper und Kreiszylinder durch Ebenen entstehen.
Die methodischen Formen und Verfahren, mit denen die Schüler in das bewußte Anwenden dieses Prinzips und damit in ein wesentliches Element der wissenschaftlichen Heuristik eingeführt werden können, sind sehr vielgestaltig; bewährt haben sich vor allem „gezielte" Frage - und Aufgabenstellungen, die den Schülern in gewisser Weise eine Brücke bauen. Dabei werden den Schülern zunächst genauere Informationen zur Sache vermittelt, später wird nur das Informationsfeld angegeben oder angedeutet. Grundsätzlich sollte es den Schülern der Klasse 10 zur Gewohnheit geworden sein, bei jeder Aufgabe eingehend, nicht etwa nur oberflächlich, zu prüfen, ob Lösungsprinzipien für andere, bereits gelöste Probleme auf den zu untersuchenden Sachverhalt übertragen werden können.

Das *Planen und Ausführen geometrischer Konstruktionen* bezieht sich im Mathematikunterricht der Klasse 10 vor allem auf die darstellend-geometrischen Grundkonstruktionen im Rahmen des Stoffgebiets „Körperdarstellung und Körperberechnung" und – in geringerem Umfang – auf planimetrische Konstruktionen, die zur Kontrolle bei trigonometrischen Berechnungen (in der Stoffeinheit „Anwendung der Winkelfunktionen bei Dreiecksberechnungen") dienen. Zu den letztgenannten erscheinen keine besonderen Hinweise erforderlich, auf die darstellend-geometrischen Konstruktionen wird im Abschnitt 2.0. dieser Schrift und in den Bemerkungen zu

den betreffenden Unterrichtseinheiten (insbesondere 2.1.4.) näher eingegangen (vgl. Uh 117f und 141ff).

Im Anschluß an diese Bemerkungen zu den Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik sei auf ein Problem aufmerksam gemacht, das den *Gebrauch mathematischer Fachausdrücke* betrifft. Im Unterricht sind die Schüler dazu zu erziehen, die mathematischen Fachausdrücke und Wendungen richtig zu gebrauchen, die Gedanken folgerichtig zu ordnen und sie in einem sachgerechten, aber auch ästhetisch ansprechenden Stil darzulegen; vgl. TIETZ [84]. Formulierungsübungen bei Definitionen, Sätzen, Lösungsvorschriften, Konstruktionsbeschreibungen u. ä. sollten in den Unterricht einbezogen werden, selbstverständlich ohne Überspitzungen, die man etwa in „mathematischen Klassenaufsätzen" sehen könnte. Besonderes Augenmerk erfordern Ausdrücke und Wendungen, die in der Fachsprache der Mathematik (bzw. der Logik) von der Umgangssprache abweichen. So kann „Kreis" umgangssprachlich sowohl als „Kreislinie" als auch als „Kreisfläche" verstanden werden, je nach dem Kontext; in der Mathematik – und die Lehrbücher richten sich nach den wissenschaftlichen Gepflogenheiten – bedeutet „Kreis" eindeutig „Kreislinie". Allerdings sollte man im Unterricht Wendungen wie „Flächeninhalt eines Kreises" nicht verwerfen, besser ist es aber, vom „Inhalt der Kreisfläche" zu sprechen („Flächeninhalt der Kreisfläche" wäre ein unschöner Pleonasmus).
Etwas komplizierter ist der Sachverhalt bei „Zylinder", „Kegel" und „Kugel". Die Beschreibungen – auf Definitionen wird gemäß dem Lehrplan verzichtet – im Lehrbuch weisen Zylinder, Kegel und Kugel als geometrische Körper, d. h., als allseitig von Flächen begrenzte geometrische Objekte (Punktmengen) aus; in der Mathematik bedeuten Zylinder, Kegel und Kugel Flächen (für Zylinder und Kegel sogar uneingegrenzte Flächen). Im Unterricht muß selbstverständlich von der Beschreibung (oder, bei Prismen und Pyramiden, der Definition) des geometrischen Objekts als Körper ausgegangen werden; die Schüler sollten jedoch über die andere Bedeutung, speziell bei Zylinder und Kegel, informiert werden, damit später kein „Umlernen" nötig wird.
Besonderes Augenmerk, nicht zuletzt im Hinblick auf die schriftliche Abschlußprüfung, erfordern auch *Anlage und äußere Form schriftlicher Arbeiten*. Bei solchen Arbeiten sollte vor allem auf folgendes geachtet werden.

- Richtiger Gebrauch mathematischer Fachausdrücke und Symbole
- Richtige Wahl und Zuordnung von Variablen (z. B. Verwendung verschiedener Variablen für Zahlen und für Größen)
- Angemessene Genauigkeit beim Rechnen mit Näherungswerten und beim Gebrauch technischer Rechenhilfsmittel
- Größtmögliche Genauigkeit bei geometrischen Konstruktionen
- Übersichtliche Gliederung der Niederschrift des Lösungsganges, Unterscheidung von Hauptsächlichem und Nebensächlichem (auch: Abtrennung von Nebenrechnungen), Hervorhebung der Ergebnisse
- Sauberkeit und Übersichtlichkeit des Schriftbildes und der Zeichnungen bzw. Skizzen

Zur Arbeit mit den **Unterrichtsmitteln** sei zunächst gesagt, daß auf die Verwendung von *gegenständlichen Modellen* in den Ausführungen zu den Stoffgebieten und Unterrichtseinheiten eingegangen wird, da diese Mittel im wesentlichen stoffspezifisch sind; vgl. Methodik Mathematikunterricht [59], S. 285 ff., und auch Uh 33 ff.

Die Arbeit mit dem *Lehrbuch* richtet sich in Klasse 10 im allgemeinen nach den gleichen Grundsätzen wie in Klasse 9 (vgl. Uh 9/31), zumal das Lehrbuch für Klasse 10 den gleichen Aufbau wie das Buch für Klasse 9 hat. Die selbständige Arbeit mit dem

Buch – auch mit dem Lehrtext – gewinnt in Klasse 10 noch mehr an Bedeutung als auf den vorangegangenen Klassenstufen. Auch zur Arbeit mit dem Lehrbuch sind in den Ausführungen zu den Stoffgebieten und Unterrichtseinheiten spezielle Hinweise enthalten. Eine allgemeine Bemerkung sei jedoch hier vorausgeschickt, da sie sich auf die allgemeine Anlage des Buches, auf seine Systematik bezieht.

Das Lehrbuch enthält historische Rückblicke auf die Entwicklung der im Unterricht zu behandelnden mathematischen Disziplinen in einem besonderen Abschnitt. Das sollte jedoch nicht dazu Anlaß geben, unter allen Umständen besondere Unterrichtsstunden zur Geschichte der Mathematik zu planen; allerdings ist diese Möglichkeit auch nicht auszuschließen. Eine zusammenfassende Darlegung des historischen Weges der Erkenntnis – und der Anwendung des Erkannten in der gesellschaftlichen Praxis – empfiehlt sich vor allem bei der Behandlung der ebenen Trigonometrie; vgl. Unterrichtseinheit 1.4.5., Uh 104ff. Historische Exkurse bieten gute Möglichkeiten für die selbständige Arbeit der Schüler, zumal in Klasse 10 die Kenntnis der allgemeingeschichtlichen Zusammenhänge vorausgesetzt werden kann (jedoch liegt die unterrichtliche Behandlung der historischen Epochen, in die die wissenschaftsgeschichtlichen Ereignisse fallen, vielfach längere Zeit zurück).

Im Hinblick auf die *Programmierung des Unterrichts*, für die in Klasse 10 ebenfalls im Prinzip das gleiche wie in Klasse 9 gilt, sei auf eine spezielle Untersuchung aufmerksam gemacht. Bauer [3] hat am Beispiel trigonometrischer Sätze über das schiefwinklige Dreieck und verschiedenartiger Anwendungsaufgaben nachgewiesen, daß mit Hilfe programmierter Materialien (Buchprogramme) nicht nur sichere Kenntnisse und Fertigkeiten erreicht werden können, sondern daß auch die Fähigkeit, mathematische Probleme zu lösen, wesentlich und auf rationelle Weise entwickelt werden kann; vgl. Methodik Mathematikunterricht [59], S. 278ff.

Arbeitsblätter, vor allem Blätter mit deren Hilfe kleinere und kleinste Teilstrecken im Unterricht programmiert werden können, haben auch in Klasse 10 wie in Klasse 9 ihren Wert; sie ermöglichen beispielsweise, ohne großen Zeitaufwand Aufgaben zu stellen, den Lösungsweg bei Aufgaben zu standardisieren und Ergebnisse zu überprüfen, und können vor allem die häusliche Arbeit der Schüler rationell gestalten helfen. Sie dürfen allerdings nicht – etwa durch ihre Anlage – den Schülern das Denken abnehmen oder die Schüler einseitig auf das Arbeiten nach Methoden orientieren, die in den weiterführenden Bildungseinrichtungen und in der Berufspraxis nicht üblich sind. Ihr Wert ist dann besonders groß, wenn sie auf die Anwendung praktisch üblicher Methoden des Bildungserwerbs, des „Studierens" im weitesten Sinne, vorbereiten. In den Ausführungen zu den Stoffeinheiten in dieser Schrift wird gelegentlich auf die Möglichkeit und Zweckmäßigkeit, Arbeitsblätter zu verwenden, noch näher eingegangen.

Wie für Klasse 9 gibt auch für Klasse 10 der Lehrplan Stoffe an, die *„zur Information"* für die Schüler bestimmt sind und nicht Gegenstand von Leistungskontrollen sein dürfen; vgl. Lp 18.

Weiterhin ist zu beachten, daß der Lehrer – im Rahmen der verbindlichen Zielstellung und des als verbindlich genannten Inhalts des Unterrichts – gewisse stoffliche Details auswählen muß oder kann, die vor allem

- als Illustration für Begriffe, Gesetze und andere Zusammenhänge
- als Hilfsmittel für das Definieren, Beweisen oder Herleiten (z. B. Hilfssätze) oder
- als Übungsfeld für die Anwendung mathematischer Erkenntnisse, Methoden und Arbeitsverfahren

dienen. Sie können im Lehrplan nicht bis in die Einzelheiten genannt werden, auch das Lehrbuch kann hierzu nur eine Auswahl bieten. Auch diese Details illustrativen

Charakters sind nicht Inhalt der mathematischen Grundlagenbildung und sollten deshalb auch nicht in die Leistungskontrollen einbezogen werden.
Bei der didaktischen und methodischen Gestaltung des Unterrichts ist grundsätzlich zu beachten, daß der Lehrplan sozusagen ein allgemeingültiges Modell der Persönlichkeitsentwicklung und Persönlichkeitsformung verkörpert und der Lehrer im Rahmen dieses Modells seine pädagogischen Maßnahmen jeweils nach dem erreichten Stand der Persönlichkeitsentwicklung der Schüler treffen muß (vgl. MADER [58]). Die Unterrichtshilfen können dieses allgemeingültige Modell interpretieren, nicht aber den konkreten Stand der Persönlichkeitsentwicklung der Schüler antizipieren. Inwieweit den Empfehlungen in den Unterrichtshilfen im einzelnen gefolgt werden kann, hängt somit jeweils von der Einschätzung (Diagnose) des real erreichten Standes der Persönlichkeitsentwicklung der Schüler ab.
Schließlich sei noch bemerkt, daß im Unterschied zum Lehrplan für Klasse 9 der Lehrplan für Klasse 10 im Rahmen der als **Berechnungsgrundlage für die Planung** gewählten 28 **Unterrichtswochen** eine bestimmte Zeit – *20 Stunden*, d. h. 5 Wochen – *für Festigung, Systematisierung und Prüfungsvorbereitung* vorsieht (Stoffgebiet 3.). Die stoffliche Thematik wird für diesen Abschnitt nicht vom Lehrplan vorgeschrieben; sie richtet sich wesentlich auch nach den lokalen Bedingungen in Schule und Klasse. Die Unterrichtshilfen geben für seine Gestaltung in Teil 3. Empfehlungen. Für die restliche Unterrichtszeit, die dem Lehrer zur Verfügung steht und die in Klasse 10 wegen der Termine der Abschlußprüfungen kürzer als in den vorhergehenden Klassen bemessen ist, gelten die in den Unterrichtshilfen für Klasse 9 gegebenen Hinweise sinngemäß; vgl. Uh 9/32.

0.3. Übersicht über Teillehrgänge des Mathematikunterrichts der Oberschule, über verbindliche und empfohlene Unterrichtsmittel und über die Koordinierung des Mathematikunterrichts mit anderen Unterrichtsfächern

In der **Übersicht über Teillehrgänge des Mathematikunterrichts der Oberschule** wird gezeigt, welche Stoffe und Stoffkomplexe aus den Gebieten, die im Mathematikunterricht der Klasse 10 weitergeführt und zu einem (relativen) Abschluß gebracht werden, in den vorhergehenden Klassen Gegenstand der Behandlung sind. Das betrifft die

- Lehre von den Funktionen
- Planimetrie
- Stereometrie (Kennzeichnung und Berechnung geometrischer Körper)
- darstellende Geometrie.

Eine Gesamtübersicht über den Mathematiklehrgang der Oberschule ist in den Unterrichtshilfen für Klasse 9 enthalten; vgl. Uh 9/34 ff.

Lehre von den Funktionen

Klasse 6

Einführung in die Gleichungslehre, Proportionalität	**30 Stunden**
– Proportionalität und Verhältnisgleichungen	(23)

Klasse 7

Rechenstab, Anwendung von Verhältnisgleichungen	**38 Stunden**
– Prozentrechnung	(23)

Klasse 8

Lineare Funktionen	**28 Stunden**
– Der Funktionsbegriff	(3)
– Lineare Funktionen	(10)
– Nullstellen linearer Funktionen, lineare Gleichungen	(4)

Klasse 9

Potenzen und Potenzfunktionen	**32 Stunden**
– Potenzfunktionen	(14)
Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen	**30 Stunden**
– Quadratische Funktionen	(10)
Exponential- und Logarithmusfunktionen; Rechenhilfsmittel	**20 Stunden**
– Exponential- und Logarithmusfunktionen	(8)

Planimetrie

Klasse 2

Geometrie	**20 Stunden**
– Lagebeziehungen zwischen Punkten und Geraden; Dreieck und Viereck	(5)
– Strahl, Winkel, Kreis	(3)
– Lagebeziehungen zwischen Geraden; Streifen	(5)
– Parallelogramm, Rechteck und Quadrat	(5)

Klasse 3

Geometrie	**20 Stunden**
– Wiederholung der Lagebeziehungen von Geraden; Zeichnen mit Lineal und Zeichendreieck	(5)
– Zeichnen von Vierecken; Trapez und Trapezfläche	(6)
– Kreis	(3)

Klasse 4

Geometrische Grundbegriffe	**30 Stunden**
– Punkte und Geraden	(18)
– Verschiebung	(12)

Klasse 5

Messen und Einheiten	**60 Stunden**
– Längenmessung, Längenmaße	(9)
– Flächeninhaltsbestimmung, Flächenmaße, Berechnungen an Rechtecken	(15)
– Winkel und Winkelmessung	(10)
Geometrische Grundbegriffe und Konstruktionen	**30 Stunden**
– Drehung	(15)
– Spiegelung	(15)

Klasse 6

Planimetrie	**70 Stunden**
– Wiederholung und systematische Zusammenfassung	(6)
– Bewegung und Kongruenz	(7)

– Beziehungen zwischen Winkeln (7)
– Dreiecke (8)
– Kongruenz von Dreiecken (18)
– Vierecke und Vielecke (13)
– Flächeninhalt und Umfang von Vielecken (11)

Klasse 7

Der Kreis **29 Stunden**
– Definition des Kreises, Sätze über den Kreis (20)
– Kreisberechnung (9)

Klasse 8

Ähnlichkeit **52 Stunden**
– Der Strahlensatz (10)
– Zentrische Streckung (7)
– Ähnliche Figuren (17)
– Die Satzgruppe des PYTHAGORAS (18)

Stereometrie (Kennzeichnung und Berechnung geometrischer Körper)

Klasse 2

Geometrie **20 Stunden**
– Würfel und Quader (nur Beschreibung) (2)

Klasse 3

Geometrie **20 Stunden**
– Quader und Würfel, Zylinder, Pyramiden und Kegel (nur Beschreibung) (6)

Klasse 5

Messen und Einheiten **60 Stunden**
– Rauminhaltsbestimmung, Raummaße, Berechnungen an Quadern (18)

Klasse 7

Stereometrie **12 Stunden**
– Prismen (4)
– Kreiszylinder (4)
– Übungen und Anwendung (4)

Klasse 8

Flächen- und Rauminhaltsberechnung **22 Stunden**
– Volumenvergleiche (3)
– Pyramiden (8)
– Kreiskegel (6)
– Kugel (5)

Darstellende Geometrie

Klasse 7

Darstellende Geometrie **30 Stunden**
– Projektionsbegriff, Projektionsarten, Kavalierperspektive (6)
– Senkrechte Eintafelprojektion (10)
– Senkrechte Zweitafelprojektion (14)

(Eine detaillierte Aufstellung, die auch den Beitrag erfaßt, den der Unterricht im Fach „Technisches Zeichnen" leistet, wird im Teil 2. auf Uh 122ff gegeben.)

Aus der folgenden Tabelle ist die zeitliche Einordnung der zu behandelnden Stoffgebiete aus den Teillehrgängen in den Gesamtlehrgang des Mathematikunterrichts der Klassen 1 bis 10 im Überblick ersichtlich.

Klasse 1	Arithmetik	Funktionen und Gleichungen	Planimetrie	Stereometrie (Beschreibung und Berechnung)	Darstellende Geometrie
	×				
			×[1]	×[1]	
	×				
2			×		
				×[1]	
	×				
3			×		
				×[1]	
	×				
4			×		
	×				
5			×	×	
	×				
			×		
	×				
6		×			
			×		
	×				
		×			
7					×
			×		
				×	
	×				
8			×		
		×			
			×	×	
	×				
9		×			
		×			
10			×		
				×	×

[1]) Vorwiegend propädeutische Behandlung

Die **Übersicht über die in den Klassen 9 und 10 verbindlichen und empfohlenen mathematischen Unterrichtsmittel** stellt einen Auszug aus dem „Gesamtbedarfsplan für Unterrichtsmittel" [18] dar; vgl. Uh 34ff. Die in den Spalten „Verwendbarkeit" stehenden Ziffern haben folgende Bedeutung:

1 – Das Unterrichtsmittel ist obligatorisch.
2 – Das Unterrichtsmittel wird empfohlen.
3 – Das Unterrichtsmittel ist noch bzw. bereits verwendbar (obligatorisch oder empfohlen in vorangegangenen bzw. folgenden Klassenstufen).

Übersicht über verbindliche und empfohlene Unterrichtsmittel in den Klassen 9 und 10

Unterrichtsmittel	Verwendung in den Klassen				Nr. der Sortimentsliste des SKUS
	9		10		
	Verwendbarkeit	Stoffgebiet bzw. Stoffeinheit	Verwendbarkeit	Stoffgebiet bzw. Stoffeinheit	
1. Filme					
K-F					
Grundlagen der EDV	1	5.2.	2	3.	N
Kas. I (3,5 min)					
F 831/832					
Die Exponentialfunktion $y = p^x$ (16 min)	2	5.1.			
F 653					
Die Potenzfunktion $y = ax^2$ (10 min)	2	3.2.; 4.1.			
F 807					
Entstehung der Sinuskurve (12 min)			2	1.1.	
2. Lichtbildreihen					
R 606					
Lineare Funktionen (col.; 15 B.)	2	2.2.; 3.2.			
R 289					
Die Funktion $y = ax^2$ (S/W; 10 B.)	2	3.2.; 4.1.			
R 607					
Die Funktion $y = p^x$ (S/W; 13 B.)	2	5.1.			
R 571					
Die Sinuskurve (S/W; 17 B.)			2	1.1.	
R 347					
Die Funktion $y = ax^3$ (S/W; col.; 13 B.)	3	3.2.			
...					
6. Folien					
Maßstab			3	3.	N
Logarithmische Skalen	1	5.2.	3	3.	N
Darstellende Geometrie I			2	2.	N
Darstellende Geometrie II			1	2.	N
Lineare Funktion	1	2.2.; 3.2.			
Quadratische Funktion I ($y = x^2$)	1	3.2.; 4.1.			06 7501 56

Unterrichtsmittel	Verwendung in den Klassen				Nr. der Sortimentsliste des SKUS
	9		10		
	Verwendbarkeit	Stoffgebiet bzw. Stoffeinheit	Verwendbarkeit	Stoffgebiet bzw. Stoffeinheit	
Quadratische Funktion II ($y = ax^2 + bx + c$)	1	4.1.			
Potenzfunktionen I (ganzzahlige positive Exponenten)	1	3.2.			06 7505 56
Potenzfunktionen II (ganzzahlige negative Exponenten)	1	3.2.			
Sinusfunktion			1	1.1.	06 7504 56
7. Anschauungstafeln/ Anschauungsbilder					
Dekadische Logarithmen	3	5.2.			06 9101 56
...					
10. Geräte/Modelle					
Lochschablone (Tafelgerät)			1	1.4.; 2.	06 3065 89
Lochschablone (Schülergerät)			1	1.4.; 2.	06 3067 89 Klassensatz 15 Stck.
Stereometriemodelle (Fadenmodelle)			1	2.	06 6002 89
Maniperm-Klapptafel			1	2.	06 3060 54
Demonstrationsrechenstab „Mono-Rietz“	1	5.2.	3	1.3.	06 3002 54
Rechenstab „Mono Rietz“	1		1		06 3014 38 Mit Selbstkauf durch Schüler
Schülerarbeitsmittel für Darstellende Geometrie			1	2.	N
Kurvenschablonen	1		1		06 3073 45 Klassensatz 20 Stck.
Normalparabel (Tafelgerät)	1	3.2.; 4.	3	3.	06 3071 45
Sinusschablone (Tafelgerät)			1	1.	06 3072 45
Projektionsmodell zur Veranschaulichung der Winkelfunktionen			1	1.1.; 1.2.	N Löst 06 6150 89 ab

Unterrichtsmittel	Verwendung in den Klassen				Nr. der Sortimentsliste des SKUS
	9		10		
	Verwendbarkeit	Stoffgebiet bzw. Stoffeinheit	Verwendbarkeit	Stoffgebiet bzw. Stoffeinheit	
Stereometriebaukasten			2	2.	
Teil I					06 6401 54
Teil II					06 6402 54
Teil III					06 6403 54
Gerät zur Planimetrie			2	1.4.	06 3050 89
Schiefertuchtafel mit Koordinatensystem	2		2		01 1018 89
Schiefertuchtafel mit Koordinatensystem (haftbar)	2		2		01 1118 89
Geometriebaukasten			3		06 6100 89
Kegelschnittschablone	2		2		06 3074 45
Gerader Kreiszylinder mit elliptischem Schnitt			2	2.1.	06 6305 89
Tangens- und Kotangensschablone (Tafelgerät)			2	1.2.	06 3068 89
Arbeitssatz Bleche			3	3.	06 3031 89 Klassensatz 20 Stck.
Arbeitssatz Profilstähle			3	2.2.; 3.	06 3030 89 Klassensatz 20 Stck.
Modell zur Veranschaulichung trigonometrischer Funktionen			3	1.1.; 1.2.	06 6150 89 Gilt bis zur Ablösung durch Projektionsmodell

Die Angaben in den Spalten „Stoffgebiet bzw. Stoffeinheit" wurden von den Autoren dieser Schrift eingefügt.

Es sei darauf hingewiesen, daß einige der angeführten Unterrichtsmittel Neuentwicklungen sind (in der Übersicht mit N bezeichnet) und zu unterschiedlichen Zeitpunkten zur Verfügung stehen werden. Diese Zeitpunkte sind zweckmäßigerweise den Ankündigungsmaterialien des SKUS (Staatliches Kontor für Unterrichtsmittel und Schulmöbel Leipzig) zu entnehmen. Das trifft auch für einige der Lehrmittel zu, die in der hier vorgelegten Übersicht bereits mit einer Nummer der Sortimentsliste des SKUS versehen sind.

Die **Übersicht** auf Uh 37 bis 40 demonstriert den **zeitlichen Gleichlauf** der Stoffgebiete des Mathematikunterrichts mit den Stoffgebieten der Fächer **Physik, Chemie und Astronomie sowie** mit **den theoretischen Lehrgängen des polytechnischen**

Klasse 9

Zeit Woche	Mathematik		Physik	
1 2	1. Reelle Zahlen; Arbeiten mit Variablen	1.1. Wiederholung und Systematisierung	1. Mechanik	1.1. Grundlagen der Kinematik
3 4		1.2. Reelle Zahlen		1.2. Grundlagen der Dynamik
5 6 7 8 9		1.3. Arbeiten mit Variablen		1.3. Energie
10 11	2. Ungleichungen und Gleichungssysteme	2.1. Lineare Ungleichungen		1.4. Kreisbewegung
				1.5. Gravitation
12 13 14		2.2. Systeme aus zwei linearen Gleichungen		Festigen . . .
15 16 17	3. Potenzen und Potenzfunktionen	3.1. Potenzen	2. Elektrizitätslehre	2.1. Elektrisches Feld
				2.2. Magnetisches Feld
18 19 20		3.2. Potenzfunktionen		2.3. Elektromagnetische Induktion
21 22 23	4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen	4.1. Quadratische Funktionen		2.4. Elektrische Leitungsvorgänge
24 25 26		4.2. Quadratische Gleichungen		
27 28	5. Exponential- und Logarithmusfunktionen; Rechenhilfsmittel	5.1. Exponential- und Logarithmusfunktionen		Festigen . . .
29 30		5.2. Rechenhilfsmittel	3. Praktikum	

Unterrichts. Da eine solche Übersicht in die Unterrichtshilfen für Klasse 9 nicht aufgenommen wurde, bezieht sich die Darstellung auf den Unterricht der Klassen 9 und 10.

Chemie	Polytechnischer Unterricht (ESP)	
	Mechanische Technologie und Maschinenkunde[1]	**Grundlagen der Produktion sozialistischer Betriebe[2]**
1. Chemische Reaktionen	11. Achsen und Lager als Bauteile zum Abstützen	1. Produktionsaufgaben des Betriebes
	12. Wellen und Kupplungen als Bauteile zum Fortleiten mechanischer Energie	2. Material- und Energiewirtschaft
2. Einige organische Verbindungen mit einer funktionellen Gruppe im Molekül		3. Hauptstufen des Produktionsprozesses
	13. Getriebe als Bauteile zum Umformen von Bewegungen	
		4. Rationalisierung des Fertigungsprozesses
	14. Systematische Zusammenfassung der Bauteile	
3. Einige organische Verbindungen mit mehreren funktionellen Gruppen im Molekül	15. Einführung in die Steuerung und Regelung von Maschinen und Anlagen	
4. Plaste, Elaste und Chemiefaserstoffe		5. Aufgaben der Werktätigen im Betrieb bei der Verwirklichung des Neuen Ökonomischen Systems der Planung und Leitung
5. Systematisierung		

[1] Die Landwirtschaftsvariante steht an Stelle der Themen 11. bis 14. Traktorentechnik vor.

[2] Dieser Plan gilt für die metallverarbeitende Industrie und die Elektroindustrie. Die Varianten für die Bauindustrie und die Landwirtschaft sind prinzipiell gleich – mit geringen Unterschieden im einzelnen – aufgebaut.

Klasse 10

Zeit Woche	Mathematik		Physik	
1 2 3	1. Winkelfunktionen	1.1. Die Funktion $y = \sin x$	1. Kernphysik	
4 5		1.2. Die Funktionen $y = \cos x$, $y = \tan x$ und $y = \cot x$	2. Schwingungen	2.1. Mechanische Schwingungen
6 7 8		1.3. Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten		2.2. Elektromagnetische Schwingungen (Wechselstrom; Schwingkreis)
9 10 11 12 13 14 15		1.4. Anwendung der Winkelfunktionen bei Dreiecksberechnungen		Festigen . . .
16 17 18 19 20 21 22 23	2. Körperdarstellung und Körperberechnung	2.1. Wiederholung und Ergänzung	3. Wellen	3.1. Mechanische Wellen
		2.2. Pyramiden- und Kreiskegelstümpfe		3.2. Elektromagnetische Wellen
				Festigen . . .
24 25 26 27 28	8. Festigung und Systematisierung; Prüfungsvorbereitung		4. Gesamtwiederholung und Systematisierung (einschließlich Praktikum)	

Chemie	Polytechn. Unterricht (ESP) Elektrotechnik		Astronomie	
1. Redoxreaktion – Oxydationszahl	**1. Volkswirtsch. Bedeutung der Elektrotechnik**		**1. Das Planetensystem**	1.1. Einführung in das Fach Astronomie
	2. Einführung in die Prüf- und Meßtechnik			1.2. Die Erde als Himmelskörper
2. Stickstoff als Element der V. Hauptgruppe	**2. Einf. in die Starkstromtechnik**	3.1. Erzeugung und Verteilung von Elektroenergie		1.3. Der Erdmond
3. Schwefel als Element der VI. Hauptgruppe		3.2. Elektrowärme und elektr. Beleuchtung		1.4. Das Planetensystem
4. Systematisierung und Praktikum zur chemischen Reaktion		3.3. Drehstrom und Drehstrom-Asynchronmotor		1.5. Systematisierung...
	4. Einführung in die Schwachstromtechnik		**2. Astrophysik und Stellarastronomie**	2.1. Die Sonne
				2.2. Die Sterne
				2.3. Das Milchstraßensystem und extragalaktische Systeme
5. Wissenschaft Chemie als Produktivkraft				2.4. Systematisierung...

1. Winkelfunktionen

1.0. Vorbemerkungen

Mit dem Stoffgebiet 1. „Winkelfunktionen" wird die Behandlung ausgewählter Funktionen im Mathematikunterricht der Oberschule fortgesetzt und abgeschlossen. Analog zum Stoffgebiet 5. „Exponential- und Logarithmusfunktionen; Rechenhilfsmittel" im Unterricht der Klasse 9 (Lp 9/36; vgl. Uh 9/151) handelt es sich hier um Funktionen, die nicht auf einfache (additive oder multiplikative) Verbindung spezieller, den Schülern bekannter Funktionen zurückzuführen sind, sondern auf andere Weise definiert werden müssen.

Die **mathematische Grundlagenbildung** der Schüler wird bei der Behandlung des Stoffgebiets „Winkelfunktionen" systematisiert, vertieft und erweitert. Das betrifft vor allem den Funktionsbegriff, mengentheoretische Zusammenhänge, den Begriff der reellen Zahl sowie das Operieren mit rationalen Zahlen (einschließlich der Anwendung praktisch gebräuchlicher Rechenhilfsmittel, besonders des logarithmischen Rechenstabes). Bei der Anwendung der Winkelfunktionen zur Dreiecksberechnung (Stoffeinheit 1.4.) tritt noch eine Festigung der elementaren Sätze aus der Planimetrie hinzu. Als ein sehr bedeutsamer Beitrag zur mathematischen Grundlagenbildung ist anzusehen, daß die Schüler in den Sätzen und Arbeitsweisen der ebenen Trigonometrie ein Mittel kennen und (im Rahmen der stofflichen Begrenzungen) beherrschen lernen, das ihnen wesentliche Anwendungsgebiete innerhalb der Mathematik und außerhalb der Mathematik, vor allem in der Physik und der Technik, erschließt.
Das Herleiten oder Beweisen der Sätze für das rechtwinklige und das allgemeine Dreieck sowie das Anwenden dieser Sätze auf Sonderfälle (z. B. auf das regelmäßige Vieleck oder ein spezielles Viereck) dienen dem tieferen Eindringen der Schüler in die Methoden der Mathematik.

Elemente der mathematischen Grundlagenbildung, die den Schülern im Rahmen des Stoffgebietes „Winkelfunktionen" vermittelt wird, stellen Voraussetzungen für die Behandlung von Stoff nicht nur des weiteren Mathematikunterrichts (z. B. Körperberechnung), sondern auch des Physikunterrichts (Schwingungen, Wellen) und des polytechnischen Unterrichts (Elektrotechnik) dar.

Zur **allgemeinen geistigen Bildung** der Schüler trägt besonders die Anwendung geistiger Operationen bei, die dem wissenschaftlichen Arbeiten in der Mathematik und auf vielen anderen Gebieten eigen sind. Das bezieht sich z. B. auf Abstraktion und Verallgemeinerung bei der Definition der Winkelfunktionen und bei deren Anwendung auf Sachverhalte aus anderen Bereichen der Mathematik, der Physik und der Technik.

Bei der Anwendung der Winkelfunktionen zur Dreiecksberechnung wird vor allem die Fähigkeit der Schüler weiterentwickelt, Probleme zu analysieren und auf bereits gelöste Probleme zurückzuführen (z. B. die Berechnung des allgemeinen Dreiecks auf die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks), ebenso die Fähigkeit, beim Lösen von Problemen die Lösungsbedingungen zu untersuchen und die Me-

thode der Fallunterscheidung anzuwenden (z. B. beim Herleiten oder Beweisen der Sätze für das allgemeine Dreieck und bei der Berechnung des allgemeinen Dreiecks). Selbstverständlich trägt der Unterricht auch zur Schulung des logischen Denkens und zur Erhöhung der Verlaufsqualitäten der geistigen Operationen bei; er fördert auch die Vorstellungsfähigkeit der Schüler für geometrische Zusammenhänge in der Ebene.

Ein wesentlicher Beitrag zur **ideologischen Bildung und Erziehung** der Schüler ergibt sich aus der philosophischen Durchdringung der zu behandelnden und anzuwendenden mathematischen Inhalte und Methoden, z. B. des Entwicklungsprozesses mathematischer Begriffe sowie ihrer Definitionen (und Definitionsmethoden). Auch soll die Einsicht der Schüler vertieft werden, daß das quantitative Erfassen eines Sachverhalts nicht nur eine genauere Widerspiegelung der objektiven Realität ermöglicht als das Anwenden nichtquantitativer Verfahren, sondern auch einen wesentlichen Ansatzpunkt für die praktische Anwendung, für die Bewältigung von Problemen aus der gesellschaftlichen Praxis, vermittelt. Solche und ähnliche Überlegungen berühren den Sinn und Zweck wissenschaftlichen Forschens und Entwickelns in der sozialistischen Gesellschaft; sie lassen deutlich werden, daß Wissenschaft nicht praxisferner Selbstzweck, sondern eine bedeutsame gesellschaftliche Produktivkraft ist. Weiterhin tragen zur ideologischen Bildung und Erziehung historische Rückblicke auf die Entwicklung der Trigonometrie – einschließlich des Vermessungswesens – bei (vgl. z. B. HERRMANN [24]).

Weitere Beiträge zur ideologischen Bildung und Erziehung erwachsen aus dem sachlichen Inhalt von Aufgaben zur Anwendung der Winkelfunktionen, einschließlich der Aufgaben zur Dreiecksberechnung; es handelt sich dabei vorwiegend um Aufgaben aus der sozialistischen Volkswirtschaft, aus der Technik in anderen Bereichen und aus dem Militärwesen.

Der Anteil an der **polytechnischen Bildung** der Schüler konzentriert sich im Rahmen des Stoffgebietes „Winkelfunktionen" hauptsächlich auf die Weiterentwicklung und Vervollkommnung der Fähigkeit, die erworbenen mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten beim Lösen praktisch-technischer Probleme anzuwenden, und auf die Weiterentwicklung der Fertigkeiten im Gebrauch der Rechenhilfsmittel (Rechenstab, Tafelwerk) und – mit einer gewissen Einschränkung – der Zeichengeräte. Mit der polytechnischen Bildung ist auch die (bereits oben genannte) Entwicklung der Vorstellungsfähigkeit für geometrische Zusammenhänge in der Ebene verbunden.

Bei der **methodischen Gestaltung** des Unterrichts müssen die Ziele, die allgemein für den Mathematikunterricht gelten oder für das Stoffgebiet spezifisch sind, aber auch die fachwissenschaftlichen Gegebenheiten beachtet werden.

Bei der *Definition der Winkelfunktionen* sind deshalb einige Besonderheiten zu berücksichtigen, die auf der Definition dieser Funktionen mit Hilfe des Winkelbegriffs beruhen. Der Lehrplan sieht vor, daß sowohl Sinus- als auch Kosinusfunktionen an einem Kreis mit beliebigem Radius definiert werden. Das erfordert die Verwendung des Winkelbegriffs. Da als Definitionsbereich jedoch die Menge aller reellen Zahlen festgelegt ist, muß erstens der Winkelbegriff auf Winkel mit einem Gradmaß $\alpha > 360°$ und $\alpha < 0°$ erweitert und zweitens das Bogenmaß des Winkels verwendet werden. Es ist notwendig, daß der Lehrer bei der Einführung der Sinus- und Kosinusfunktion an dieser Stelle exakt formuliert und von den Schülern formulieren läßt, daß die Variable x bei $\sin x$ und bei $\cos x$ das *Bogenmaß* eines Winkels bezeichnet.

Es empfiehlt sich, den Schülern bewußt zu machen, daß sie bei der Definition des

Sinus eines Winkels und der Sinusfunktion ein für die Wissenschaft charakteristisches Vorgehen kennenlernen. In einem konkreten Bereich wird ein Begriff entwickelt, hier der Begriff „Sinus eines Winkels" im Bereich der Geometrie. Um diesen Begriff auch für andere Bereiche nutzbar zu machen, wird er auf eine höhere Abstraktionsebene gehoben; der Definitionsbereich der Sinusfunktion ist die Menge aller reeller Zahlen. Die Schüler werden darauf hingewiesen, daß sie anschließend im Physikunterricht derartige Anwendungsbereiche kennenlernen werden, nämlich die mechanischen Schwingungen und den Wechselstrom.

In diesem Zusammenhang sollte auch auf eine Eigenart des Vorgehens bei der *Bezeichnung von Begriffen* eingegangen werden. Man übernimmt häufig für den *allgemeinen* Begriff die Bezeichnung aus dem Bereich, in dem er ursprünglich entstanden ist. Hierauf ist zurückzuführen, daß man die Elemente des Definitionsbereiches der Winkelfunktionen oft als Winkel bezeichnet, obwohl es reelle Zahlen und keine Winkel im geometrischen Sinne sind.
Im Zusammenhang mit der Definition der Tangens- und Kotangensfunktion sollte hierauf noch einmal hingewiesen werden. Nach Lp 41 werden diese Funktionen mit Hilfe der Gleichungen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \; (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ mit } k \in G)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \; (x \neq k\pi \text{ mit } k \in G)$$

definiert. Da $\sin x$ und $\cos x$ für reelle Zahlen x definiert sind, wird auch $\tan x$ sofort für reelle Zahlen x definiert. Dennoch bezeichnet man auch $\tan x$ als „Tangens eines Winkels" bzw. $\cot x$ als „Kotangens eines Winkels".

Von den vier Winkelfunktionen wird die *Sinusfunktion* wesentlich ausführlicher behandelt als die anderen.
Das kommt in folgender Weise zum Ausdruck.

- Die Sinusfunktion wird gesondert eingeführt, nicht (wie z. B. nach dem Lehrplan von 1959) im Komplex mit den drei anderen Winkelfunktionen am Kreis oder gemeinsam mit der Kosinusfunktion.
- Die Behandlung der Sinusfunktion wird bis zu Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a \sin bx$ geführt, während die anderen drei Winkelfunktionen nur in der Form $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ behandelt werden.

Lp 41 verlangt das *Skizzieren der Graphen* ausgewählter Beispiele der Funktionen $y = a \sin x$, $y = \sin bx$ und $y = a \sin bx$ unter Verwendung der graphischen Darstellung der Funktion $y = \sin x$.
Als ein Kriterium für die Auswahl der Beispiele wurde bei der Erarbeitung des Lehrbuches die Anforderung des nachfolgenden Physikunterrichts genommen. Da man es bei den Anwendungen im Physikunterricht mit positiven Größen a und b zu tun hat, kann man sich auch im Mathematikunterricht auf $a > 0$ und $b > 0$ beschränken. Es ist jedoch notwendig, daß der Lehrer auf diese Beschränkung ausdrücklich verweist und zumindest an einem Beispiel der Funktion $y = a \sin x$ den Einfluß eines negativen Faktors auf die graphische Darstellung zeigt.
Bei der Wahl des Schwerpunktes für die *Berechnung von Funktionswerten* der Winkelfunktionen wurde bei der Erarbeitung des Lehrbuches von der Notwendigkeit ausgegangen, festes Wissen und Können für die Anwendung der Winkelfunktionen bei der Dreiecksberechnung beim Schüler zu erreichen. Deshalb bildet das Intervall $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ den Schwerpunkt der über das Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ hinausgehenden Übungen.
Die Berechnung von Funktionswerten negativer Zahlen und von Funktionswerten

für $x > \pi$ dient dem tieferen Eindringen in die Eigenschaften der Winkelfunktionen. Funktionswerte negativer Zahlen werden nur insoweit behandelt, als damit den Schülern bewußt wird, daß der Definitionsbereich der Funktionen die Menge aller reeller Zahlen ist (mit Ausnahme der Zahlen x, für die $\tan x$ bzw. $\cot x$ nicht definiert ist) und die Graphen auch für negative Argumente gezeichnet werden können. Durch das Berechnen von Funktionswerten für $x > \pi$ werden ferner solche Eigenschaften wie Periodizität und Quadrantenbeziehungen tiefer erfaßt. Außerdem wird die Tatsache bewußt, daß es zu einem gegebenen Funktionswert beliebig viele Elemente des Definitionsbereiches gibt, die auf diese Zahl abgebildet werden.

Konsequent wird die in Klasse 9 angewandte Methode fortgesetzt, auf die Graphen der Funktionen immer wieder zurückzugreifen und gewisse *Eigenschaften der Funktionen aus den Graphen „herauszulesen"*, z. B. beim Ermitteln des Vorzeichens in den vier Quadranten (Quadrantenbeziehungen). Es empfiehlt sich nicht, parallel dazu noch Betrachtungen am Kreis durchzuführen, da dies Verwirrung stiften könnte. Damit die Graphen in diesem Sinne wirkungsvoll genutzt werden können, müssen die Schüler in der Lage sein, schnell solche Graphen zu skizzieren. Diesem Zwecke können Übungen im Skizzieren aus dem Gedächtnis (unter Zuhilfenahme markanter Punkte) dienen. Zum Beispiel läßt sich die Sinusfunktion auf Grund der Kenntnis der Nullstellen, des Wertebereiches, der Symmetrieeigenschaften und der Periodizität schnell graphisch darstellen, u. U. mit Hilfe der Kurvenschablone. Es sollte jedoch nicht ausschließlich mit Schablonen gearbeitet werden; auch Freihandskizzen sind erlaubt, wenn sie das Wesentliche zum Ausdruck bringen.

In vielfältiger Weise wenden die Schüler ihre Fähigkeiten im *Lösen von Gleichungen* an. So wird das Ermitteln von Winkelfunktionswerten als Lösen von Gleichungen aufgefaßt (Lp 39), und die Zugehörigkeit gegebener geordneter Paare reeller Zahlen zu einer Funktion wird mit Hilfe der Gleichung der entsprechenden Funktion überprüft, d. h., es wird untersucht, ob ein gegebenes geordnetes Paar $[x_0; y_0]$ eine Lösung der Gleichung $y = f(x)$ ist.
Der Lehrplan verlangt ferner das Lösen einfacher goniometrischer Gleichungen wie $2 \sin x = 1$ oder $\cos^2 x = \frac{3}{4}$ durch inhaltliche Überlegungen (Lp 40), ohne systematische oder algorithmische Behandlung. Im Lehrbuch ist für diese goniometrischen Gleichungen (der Begriff „goniometrische Gleichung" ist laut Lehrplan nicht einzuführen) kein gesonderter Abschnitt vorgesehen, sondern sie werden bei verschiedenen Gelegenheiten eingestreut, z. B.:

- Es wird nach der Lösbarkeit gewisser Gleichungen wie $3 \sin x = 4$ gefragt, um die Erkenntnis zu festigen, daß der Wertebereich der Sinusfunktion aus dem Intervall $-1 \leq y \leq 1$ $(y \in P)$ besteht.
- Das Ermitteln aller Elemente des Definitionsbereiches, denen der gleiche Funktionswert zugeordnet ist, wird als Lösen von Gleichungen aufgefaßt (Lp 39 f).
- Das Ermitteln der Nullstellen der Funktion $y = a \sin bx$ erfolgt durch das Lösen der Gleichung $0 = a \sin bx$.

Die Fähigkeiten der Schüler im *selbständigen Führen von Beweisen* können bei der Behandlung dieses Stoffgebietes in folgender Weise weiterentwickelt werden: Auf Grund der Gleichungen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\tan x \cdot \cot x = 1$ und mit Hilfe der Definitionen für den Tangens und Kotangens eines Winkels sind weitere Beziehungen zwischen Funktionswerten verschiedener Winkelfunktionen zum gleichen Winkel herzuleiten bzw. zu beweisen; vgl. Lp 39. Beziehungen zwischen den Winkelfunktionswerten an der Stelle x und an den Stellen $\pi - x$, $\pi + x$, $2\pi - x$ (Quadrantenbeziehungen) sind im Tafelwerk aufzusuchen und zu beweisen; vgl. Lp 42.

Im Interesse einer rationellen Unterrichtsgestaltung und der Weiterentwicklung der Fähigkeit in der *Handhabung des Rechenstabes* wird dieser häufig eingesetzt; vgl. Lp 40. Das Umrechnen von Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt erfolgt mit Hilfe der Proportionaleinstellung des Rechenstabes, die den Schülern vom Lösen von Verhältnisgleichungen her bekannt ist. Zum Umrechnen von Grad- in Bogenmaß wird die Formel $\frac{\text{arc } \alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{180^\circ}$ (α: Gradmaß des Winkels) verwendet.

Der Anwendungsbereich des Rechenstabes wird für die Schüler erweitert, indem die Skalen der Winkelfunktionswerte eingeführt und bei den Dreiecksberechnungen angewandt und das Rechnen mit diesen Skalen bis zur Fertigkeit entwickelt wird; vgl. Lp 40.

Die *Tafeln der Winkelfunktionswerte* werden meist dann benutzt, wenn die erforderliche Genauigkeit bei Anwendung des Rechenstabes nicht gegeben ist. In diesen Fällen erfolgt ein kombiniertes Tafel-Stab-Rechnen. Das Interpolieren entfällt sowohl beim „Hineingehen" in die Tafel als auch beim „Herausgehen" aus der Tafel, weil mit dem Rechenstab ohnehin nur Werte mit drei geltenden Stellen verarbeitet werden können. Die Tafeln der Logarithmen der Winkelfunktionen werden beim Rechnen nicht herangezogen.

Die methodische Gestaltung des Unterrichts im Rahmen der Stoffeinheit 1.4. „Anwendung der Winkelfunktionen bei Dreiecksberechnungen (1.4.) folgt, den Zielen der Bildung und Erziehung sowie der Logik des Stoffes entsprechend, einer klaren Linie *vom Einfachen zum Komplizierten*. Jeweils wird beim Lösen der neuen Probleme auf bereits gelöste Probleme zurückgegriffen, es werden früher erworbene Kenntnisse und Fertigkeiten aufgegriffen, genutzt und weiterentwickelt; vgl. Uh 14f. Diese methodische Linie führt, auf die geometrischen Objekte bezogen, vom rechtwinkligen Dreieck zum allgemeinen Dreieck. Formale, eingekleidete Aufgaben und Anwendungsaufgaben (Sachaufgaben) werden in Zusammenhang mit den trigonometrischen Definitionen, Sätzen und Methoden behandelt, das gilt auch für die Anwendungsaufgaben in der Planimetrie (z. B. Aufgaben über das Rechteck in Zusammenhang mit dem rechtwinkligen Dreieck, Aufgaben über den Rhombus und das regelmäßige Vieleck sowie den Kreis in Zusammenhang mit dem gleichschenkligen Dreieck).

Wesentliches Element der methodischen Gestaltung des Unterrichts sind *trigonometrische Aufgaben*, die vom Lehrer in der Regel frontal der Klasse gestellt werden (Aufgaben zur Förderung spezieller Interessen und Talente sowie Aufgaben zur Verhinderung des Zurückbleibens einzelner Schüler werden natürlich individuell formuliert). Beim Lösen dieser Aufgaben werden aus den gegebenen Größen (bei formalen Dreiecksaufgaben: den Bestimmungsstücken) die gesuchten Größen (bei formalen Dreiecksaufgaben: die fehlenden Stücke) durch Rechnung ermittelt. Eventuelle über- oder unterbestimmte Aufgabenstellungen zwingen zu einer eingehenden Analyse der gegebenen Bedingungen.

Beim Lösen der trigonometrischen Aufgaben hat sich bewährt, die Schüler zu veranlassen, im Zusammenhang mit den Berechnungen eine Skizze anzufertigen und gegebenenfalls, z. B. bei der Berechnung der Dreiecke entsprechend den Kongruenzsätzen, auch eine exakte Konstruktion auszuführen; vgl. Lp 40. Solche Skizzen und Zeichnungen unterstützen nicht nur das Erfassen des mathematischen Sachverhalts der Aufgabe, sondern fördern auch die Zeichenfertigkeiten und die Vorstellungsfähigkeit der Schüler; damit dienen sie der Festigung und Vertiefung früher erworbenen Wissens und Könnens.

Bei den Aufgaben zur Dreiecksberechnung kommt es nicht nur darauf an, daß die Schüler einen allgemeinen Lösungsweg kennen und nach diesem – oder nach spe-

ziellen, auch algorithmischen Lösungsvorschriften und -plänen – arbeiten lernen, sondern daß die Schüler auch befähigt werden, den rationellsten Weg zur Lösung selbst zu finden oder zumindest unter mehreren angebotenen Wegen den jeweils rationellsten selbst zu suchen. Das setzt voraus, daß sich die Schüler der notwendigen Schritte bewußt sind, die zur Lösung führen. Zwar haben die Schüler bei den Dreiecksberechnungen keine sehr große Auswahl an Lösungsmitteln, d. h. vor allem an Sätzen, in denen sich die Beziehungen zwischen den Stücken eines Dreiecks ausdrücken, aber dennoch bieten viele Aufgaben die Möglichkeit für Diskussionen des Lösungsweges, z. B.; ob die Anwendung der Sätze für das allgemeine Dreieck zweckmäßiger als die unmittelbare Rückführung auf die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke ist, oder ob unter den Möglichkeiten, eine geometrische Figur in Dreiecke zu zerlegen, sich eine als besonders günstig erweist, oder ob einer bestimmten Reihenfolge der Lösungsschritte gegenüber einer anderen der Vorzug zu geben ist.
Als Kriterien für die Rationalität und Güte einer Lösung bei Dreiecksberechnungen mit Hilfe der Trigonometrie können gelten:

– Einfachheit und Kürze des Lösungsweges;
– Genauigkeit des Ergebnisses (entsprechend der Aufgabenstellung);
– Möglichst geringer rechnerischer Aufwand.

Nach Möglichkeit soll bei den trigonometrischen Berechnungen von den gegebenen Größen oder von Zwischenergebnissen, deren möglicher Fehler gering ist, ausgegangen werden; allerdings ist die bisweilen von Methodikern erhobene Forderung, stets nur von den gegebenen Größen und – beim Weiterrechnen – niemals von Teilresultaten auszugehen, überspitzt; sie wäre auch nicht immer erfüllbar.

Bei den *sprachlichen Darlegungen* der Schüler, z. B. bei Konstruktionsbeschreibungen oder Lösungskommentaren, sollte immer auf logische Vollständigkeit geachtet werden. Das schließt z. B. ein, daß die Bezeichnungen der Ecken, Seiten und Winkel der Figuren erklärt werden. Ebenso ist auf eine exakte, den Regeln der Logik entsprechende Ausdrucksweise Wert zu legen (das betrifft auch den Gebrauch des bestimmten und des unbestimmten Artikels, z. B. bei einem rechtwinkligen Dreieck: ... *die* Hypotenuse ..., ... *eine* Kathete ..., *die* Gegenkathete *des* Winkels β ... u. ä.).
Allgemein sollen sprachliche – mündliche wie schriftliche – Darstellungen kurz und frei von Weitschweifigkeiten sein. In die schriftliche Notation können Symbole einbezogen werden, die Objekte kennzeichnen, nicht aber Symbole für Relationen (und Beziehungen) wie das Gleichheitszeichen oder die Zeichen für „ist kongruent" und „ist ähnlich". Eine Notierung ausschließlich mit Hilfe von Symbolen verbietet sich, da im Unterricht der Oberschule dem Lehrplan entsprechend von einer speziellen, vollständigen Symbolik zur Kennzeichnung geometrischer Lage- und Inzidenzbeziehungen sowie zur Beschreibung von Konstruktionsschritten abgesehen wird.

Übersicht zum Stoffgebiet 1. Winkelfunktionen (62 Stunden – 28 Lerneinheiten)

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
1.1.1. Wiederholung des Funktionsbegriffs (LE 1)	1	4	57	Definition des Begriffes „Funktion“ Begriffe „geordnetes Paar“, „Definitionsbereich“, „Wertebereich“, „Funktionswert“ Eindeutigkeit der Zuordnung Gleichung als spezielle Darstellungsart der Abbildungsvorschrift, Bezeichnungsweisen Bisher behandelte rationale und nichtrationale Funktionen (Gleichungen, Graphen)		Funktionsbegriff Feststellen der Zugehörigkeit von geordneten Paaren zur Funktion mit Hilfe der Gleichung $y = f(x)$ Bezeichnungsweisen
1.1.2. Winkel und Winkelmessung (LE 2)	2	6	59	Winkel, Gradmaß des Winkels Einheiten des Gradmaßes $1°$, $1'$, $1''$ Länge eines Kreisbogens, π als irrationale Zahl Proportionaleinstellung des Rechenstabes zum Lösen von Verhältnisgleichungen	Erweitern des Winkelbegriffes auf $\alpha > 360°$ und $\alpha < 0°$ Begriffe „einander äquivalente Winkel“, „Hauptwert einer Klasse einander äquivalenter Winkel“ Bogenmaß arc α des Winkels α Umrechnen von Gradmaß in Bogenmaß Einheitskreis	Umrechnen von Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt mit Hilfe der Proportionaleinstellung des Rechenstabes auf Grund der Formel $\frac{\text{arc } \alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{180°}$ Mündliches Umrechnen gebräuchlicher Winkelmaße mit Hilfe der Kenntnisse über den Einheitskreis

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
1.1.3. Die Sinusfunktion (LE 3)	2	10	61	Strahlensatz Darstellen von Zahlen mit bestimmten Eigenschaften mit Hilfe von Variablen	Definition von „Sinus eines Winkels" Definition der Sinusfunktion Ermitteln von Funktionswerten auf Grund der Definition des Sinus eines Winkels und der Kenntnisse über die Äquivalenz von Winkeln, insbesondere für $x = k \cdot \frac{\pi}{2}\ (k \in G)$	Definition von „Sinus eines Winkels" und der Sinusfunktion Feststellen der Zugehörigkeit von geordneten Paaren zur Sinusfunktion, besonders bezüglich $x = k \cdot \frac{\pi}{2}\ (k \in G)$
1.1.4. Eigenschaften der Sinusfunktion (LE 4)	2	12	62	Sinus eines Winkels Einheitskreis, Monotonie, Nullstellen, Wertebereich Lösung bzw. Lösungsmenge einer Gleichung	Graphisches Darstellen der Sinusfunktion mit Hilfe des Einheitskreises Eigenschaften der Sinusfunktion im Grundintervall $0 \leq x \leq 2\pi$ (Wertebereich, Vorzeichen der Funktionswerte, Nullstellen, Monotonieverhalten) Begriff „Periode", 2π als kleinste Periode der Sinusfunktion Skizzieren des Graphen der Sinusfunktion unter Verwendung der Schablone (auch im negativen Bereich)	Skizzieren des Graphen der Sinusfunktion mit Hilfe der Schablone auf Grund der Kenntnis der Nullstellen $k\pi$ $(k \in G)$ und des Wertebereiches Periodizität $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$ $(k \in G)$ Ermitteln des Vorzeichens der Funktionswerte und des Monotonieverhaltens mit Hilfe des Graphen

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
1.1.5. Die Funktion $y = a \cdot \sin bx$ ($a, b \in P$; $a, b > 0$) (LE 5)	3	14	64	Auswirkung des Faktors a ($a > 0$) auf den Graph der Funktion $y = a \cdot f(x)$, verglichen mit dem Graph von $y = f(x)$ Begriffe „Streckung", „Stauchung", „Streckungsfaktor" Auswirkung der Veränderung des Nenners auf die Größe eines Quotienten $\frac{a}{b}$ bei konstantem Zähler	Einfluß der Faktoren a, b auf Nullstellen, Wertebereich, Vorzeichen und kleinste Periode der Funktion $y = a \cdot \sin bx$, verglichen mit $y = \sin x$ Geometrische Bedeutung der Faktoren a, b hinsichtlich des Graphen von $y = a \cdot \sin bx$ ($a, b \in P$; $a, b > 0$) Sonderfälle $y = a \cdot \sin x$, $y = \sin bx$	Skizzieren der Graphen der Funktion $y = a \cdot \sin bx$ unter Verwenden des Graphen von $y = \sin x$ und auf Grund der Kenntnis der Auswirkung von a auf den Wertebereich und von b auf die kleinste Periode
1.2.1. Die Kosinusfunktion (LE 6)	1	18	66	Sinus eines Winkels Ermitteln von Funktionswerten auf Grund der Definition von „Sinus eines Winkels"	Definition von „Kosinus eines Winkels" und der Kosinusfunktion Ermitteln von Funktionswerten an den Stellen $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in G$) auf der Grundlage der Definition von „Kosinus eines Winkels" und der Kenntnisse über die Äquivalenz von Winkeln	Definition von „Kosinus eines Winkels" und der Kosinusfunktion Feststellen der Zugehörigkeit von geordneten Paaren zur Kosinusfunktion, besonders bezüglich $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in G$)

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
1.2.2. Eigenschaften der Kosinusfunktion (LE 7)	1	20	66	Skizzieren des Graphen der Sinusfunktion mit Hilfe des Einheitskreises	Graphisches Darstellen der Kosinusfunktion mit Hilfe des Einheitskreises Eigenschaften der Kosinusfunktion im Grundintervall $0 \leq x \leq 2\pi$ (Wertebereich, Vorzeichen der Funktionswerte, Nullstellen) Kleinste Periode 2π	Skizzieren des Graphen der Kosinusfunktion mit Hilfe der Schablone auf Grund der Kenntnis der Nullstellen $(2k+1)\,\frac{\pi}{2}$ $(k \in G)$ und des Wertebereiches Periodizität $\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x$ $(k \in G)$ Ermitteln des Vorzeichens der Funktionswerte mit Hilfe des Graphen
1.2.3. Tangensfunktion und Kotangensfunktion (LE 8)	1	21	67	Eigenschaften des Quotienten, insbesondere Untersuchung des Nenners	Definition von „Tangens eines Winkels“ und „Kotangens eines Winkels“ sowie der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion Begründen der Notwendigkeit für Einschränkungen des Definitionsbereiches	Definition von „Tangens eines Winkels“ und „Kotangens eines Winkels“ sowie der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion Beschränkungen des Definitionsbereiches
1.2.4. Eigenschaften der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion (LE 9)	2	22	68	Sinus und Kosinus eines Winkels am Einheitskreis Skizzieren der Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion mit Hilfe von Schablonen Feststellen des Vorzeichens der Funktionswerte mit Hilfe der Graphen	Eigenschaften der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion (Wertebereich, Nullstellen, Vorzeichen der Funktionswerte, Verhalten bei Annäherung an die Stellen $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in G)$ π als kleinste Periode	Herleiten von Eigenschaften der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion aus den Eigenschaften der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion unter Zuhilfenahme von deren Graphen, insbesondere Nullstellen, Vorzeichen der Funktionswerte, Verhalten bei Annäherung an die Stellen $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in G)$ π als kleinste Periode

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
1.2.5. Spezielle Funktionswerte der Winkelfunktionen (LE 10)	2	25	70	Rechnen mit Quadratwurzeln, insbesondere Rationalmachen von Nennern Satz des PYTHAGORAS Beziehungen zwischen Winkeln und Seiten im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck sowie zwischen Winkeln, Seiten und der Höhe im gleichseitigen Dreieck Beziehungen zwischen den Abständen eines Punktes von den Koordinatenachsen und seinen Koordinaten	Berechnen der Funktionswerte der Winkelfunktionen an den Stellen $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$	Spezielle Werte der Winkelfunktionen an den Stellen $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$
1.2.6. Graphen der Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$ (LE 11)	1	27	73	Berechnen von Näherungswerten für $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ mit Hilfe des Rechenstabes	Graphisches Darstellen der Tagensfunktion und der Kotangensfunktion unter Verwenden spezieller Werte im Intervall $0 < x < \pi$ Skizzieren mit Hilfe der Schablone (auch im negativen Bereich)	Skizzieren der Graphen der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion mit Hilfe der Schablone auf Grund der Kenntnis der Nullstellen, der Funktionswerte $\tan \frac{\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = 1$, der Stellen, an denen die Funktionen nicht definiert sind, und der kleinsten Periode (π)

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
1.3.1. Beziehungen zwischen Funktionswerten bei gleichem Winkel (LE 12)	2	28	74	Absoluter Betrag, $\|a\|^2 = a^2$ $(a \in P)$ Sinus eines Winkels und Kosinus eines Winkels am Einheitskreis Definition des Tangens und des Kotangens eines Winkels Satz des PYTHAGORAS Beziehung zwischen dem Abstand eines Punktes von den Koordinatenachsen und seinen Koordinaten	Vereinbarung $\sin^2 x =_{\text{Def}} (\sin x)^2$ Herleiten von $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $(x \in P)$; $\tan x \cdot \cot x = 1$ $\left(x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}; x \in P\right)$. Darstellen von $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ allein durch $\sin x$ Darstellen von $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$ allein durch $\cos x$ unter Beachten des zulässigen Grundbereiches der Variablen	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $(x \in P)$ $\tan x \cdot \cot x = 1$ $\left(x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}; x \in P\right)$ Beweisen bzw. Herleiten von Beziehungen zwischen den Funktionswerten der Winkelfunktionen bei gleichem Winkel, Benutzen des Tafelwerkes Vereinbarung $\sin^2 x = (\sin x)^2$, nicht allgemeingültig $\sin^2 x = \sin x^2$
1.3.2. Komplementwinkelbeziehungen zwischen einer Winkelfunktion und ihrer Kofunktion (LE 13)	1	30	78	Symmetrieeigenschaften der Graphen von $y = \sin x$ $(y = \tan x)$ und $y = \cos x$ $(y = \cot x)$ in bezug aufeinander im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ Tabelle spezieller Funktionswerte der Winkelfunktionen Komplementwinkel	Begriff „Kofunktion“ Komplementwinkelbeziehungen zwischen einer Winkelfunktion und ihrer Kofunktion	Ermitteln von Komplementwinkeln Komplementwinkelbeziehungen Aufsuchen der Komplementwinkelbeziehungen im Tafelwerk Erkennen der Komplementwinkelbeziehungen als Symmetrieeigenschaften der Graphen einer Winkelfunktion und ihrer Kofunktion

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
1.3.3. Quadrantenbeziehungen (LE 14)	2	31	80	Symmetrieeigenschaften der Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion Sinus und Kosinus eines Winkels am Einheitskreis Begriff „Quadrant“	Aufsuchen der Quadrantenbeziehungen im Tafelwerk Beweisen einiger Quadrantenbeziehungen Geometrische Deutung der Quadrantenbeziehungen Ermitteln von Winkelfunktionswerten im 2., 3. und 4. Quadranten durch Zurückführen auf den 1. Quadranten mit Hilfe der Quadrantenbeziehungen	Erkennen und Formulieren der Quadrantenbeziehungen auf Grund der Kenntnis von Symmetrieeigenschaften der Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion sowie der Definition des Tangens bzw. des Kotangens eines Winkels Aufsuchen der Quadrantenbeziehungen im Tafelwerk
1.3.4. Tafeln der Winkelfunktionswerte (LE 15 und 16)	3	33	82	Monotonieverhalten der Winkelfunktionen im Intervall $0<x<\frac{\pi}{2}$ Komplementwinkelbeziehungen Quadrantenbeziehungen Periodizität Umrechnen von Grad- in Bogenmaß und umgekehrt Lösungsmenge einer Gleichung	Tafeln der Funktionswerte für die Sinusfunktion und Tangensfunktion im Intervall $0<x<\frac{\pi}{2}$ Ermitteln von Funktionswerten der Kosinus- und Kotangensfunktion unter Anwenden der Komplementwinkelbeziehungen Ermitteln von Winkelfunktionswerten für Winkel $\alpha<0$ und $\alpha>\frac{\pi}{2}$ unter Anwenden der Periodizität und der Quadrantenbeziehungen Ermitteln der Lösungsmenge von Gleichungen der Form $\sin x=a$, $\cos x=a$ $(a\in P;\ -1\leq a\leq 1)$; $\tan x=b$, $\cot x=b$ $(b\in P)$ bei gegebenem a bzw. b	Anwenden der Tafeln der Winkelfunktionswerte zum näherungsweisen Ermitteln von Funktionswerten zu beliebigen Winkeln und zum Ermitteln der Elemente des Definitionsbereiches bei vorgegebenen Winkelfunktionswerten, insbesondere auf den 1. und 2. Quadranten bezogen

Unterrichtseinheit	Std	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
1.3.5. Die Skalen der Winkelfunktionen auf dem Rechenstab (LE 17)	2	37	86	Umrechnen von Gradmaß in Bogenmaß mit Hilfe der Proportionaleinstellung des Rechenstabes Reziproke Teilung des Rechenstabes Funktionswerte spezieller Winkel Ermitteln von Näherungswerten für $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$	Die Skalen S und T in Verbindung mit den Skalen D bzw. CI zum Ermitteln von $\sin \alpha \quad 5{,}73° \leq \alpha \leq 90°$ $\cos \alpha \quad 0° \leq \alpha \leq 84{,}27°$ $\tan \alpha \quad 5{,}73° \leq \alpha \leq 84{,}27°$ $\cot \alpha \quad 84{,}27° \leq \alpha \leq 5{,}73°$ und zum Ermitteln von Winkeln bei gegebenen Funktionswerten (Hinweis auf Skale ST für kleine Winkel)	Anwenden der Skalen des Rechenstabes für das Ermitteln von Winkelfunktionswerten und zum Ermitteln von Winkeln bei gegebenen Winkelfunktionswerten Umrechnen von Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt
1.3.6. Übungen im Gebrauch von Tafel und Rechenstab (LE 15 bis 17)	2	33	89	Quadrantenbeziehungen in Verbindung mit den Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion Komplementwinkelbeziehungen in Verbindung mit den Graphen der Winkelfunktionen Periodizität der Winkelfunktionen	Entscheidung für Tafel oder Rechenstab auf Grund der geforderten Genauigkeit	Anwenden der Tafel und der Skalen des Rechenstabes zum Ermitteln von Funktionswerten und von Elementen des Definitionsbereiches, insbesondere bezogen auf den 1. und 2. Quadranten Ablesen von Eigenschaften der Winkelfunktionen aus den Graphen
Kontrollarbeit	2		91			

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
1.4.1. Trigonometrische Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck (LE 18 bis 20)	5	40	93	Begriffe „Sinus", „Kosinus", „Tangens", „Kotangens" eines Winkels Stücke des rechtwinkligen Dreiecks Arbeiten mit der Tafel der Winkelfunktionen Arbeiten mit den trigonometrischen Skalen des logarithmischen Rechenstabes	Trigonometrische Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck Grundaufgaben über das Berechnen von Seiten, Winkeln und des Flächeninhaltes beim rechtwinkligen Dreieck	Trigonometrische Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck Grundaufgaben über das Berechnen von Seiten, Winkeln und des Flächeninhaltes beim rechtwinkligen Dreieck
1.4.2. Das gleichschenklige Dreieck und das regelmäßige Vieleck (LE 21 und 22)	5	45	97	Stücke des gleichschenkligen Dreiecks Trigonometrische Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck Inkreis und Umkreis eines Dreiecks	Zurückführen des Berechnens des gleichschenkligen Dreiecks auf das Berechnen des rechtwinkligen Dreiecks Begriffe „Regelmäßiges Vieleck" (n-Eck), „Inkreis" und „Umkreis" eines regelmäßigen Vielecks Zurückführen des Berechnens des regelmäßigen Vielecks auf das Berechnen des gleichschenkligen Dreiecks	Berechnungen am gleichschenkligen Dreieck und am regelmäßigen Vieleck Inkreis und Umkreis eines regelmäßigen Vielecks
1.4.3. Sätze über das allgemeine Dreieck, Berechnungen (LE 23 bis 26)	8	47	98	Sätze über Seiten und Winkel sowie über die Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln beim Dreieck Kongruenzsätze (Kongruenzkriterien) für das Dreieck Konstruieren von Dreiecken (nach Kongruenzsätzen) Trigonometrische Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck	Zurückführen des Berechnens des allgemeinen Dreiecks auf das Berechnen des rechtwinkligen Dreiecks Sinussatz, Satz über den Flächeninhalt, Kosinussatz Lösungswege beim Berechnen des allgemeinen Dreiecks (Fallunterscheidungen auf Grund der gegebenen Stücke)	Sinussatz, Satz über den Flächeninhalt, Kosinussatz Berechnungen am allgemeinen Dreieck (Lösungswege auf Grund der gegebenen Stücke)

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
1.4.4. Sachaufgaben I (LE 27	5	57	103	Methoden und Verfahren für das Lösen von Sachaufgaben (allgemein) Geometrisches Darstellen physikalischer bzw. technischer Größen, z. B. Kraft, Geschwindigkeit	Methoden und Verfahren für das Lösen von Aufgaben, die auf Dreiecksberechnungen führen, insbesondere von Aufgaben mit vektoriellen Größen	Methoden und Verfahren für das Lösen von Aufgaben, die auf einfache Dreiecksberechnungen führen
1.4.5. Sachaufgaben II (Vermessungsaufgaben) (LE 28)	4	58	104	Methoden und Verfahren für das Lösen von Sachaufgaben (allgemein und für Aufgaben, die auf Dreiecksberechnungen führen)	Grundbegriffe und -beziehungen aus der Landesvermessung, einschließlich ihrer Anwendung im Militärwesen Spezialfälle des Ermittelns von Punkten und Entfernungen (Vorwärtseinschneiden nach einem Punkt und nach zwei Punkten, informatorisch: Rückwärts einschneiden)	Methoden und Verfahren für das Lösen mathematisch komplizierter Aufgaben der Dreiecksberechnungen Grundbegriffe und Grundaufgaben des Vermessungswesens
1.4.6. Kontrollarbeit	3		108			

1.1. Die Funktion $y = \sin x$ (LE 1 bis 5; 10 Std.)

1.1.1. Wiederholung des Funktionsbegriffes (LE 1; 1 Std.)

In dieser Unterrichtsstunde geht es darum, einige Begriffe zu wiederholen und die Motivierung für das gesamte Stoffgebiet „Winkelfunktionen" sowie für die ersten drei Stunden (Funktionsbegriff, Winkel) zu geben.
Ohne Einzelheiten wird den Schülern mitgeteilt, daß sie ihre mathematische Grundlagenbildung in der Oberschule mit dem Kennenlernen einer wichtigen Klasse nichtrationaler Funktionen, der Winkelfunktionen, vervollständigen werden. Es wird der Weg mitgeteilt, der gegangen wird: Die Funktionen werden zunächst erarbeitet und dann im Physikunterricht zum mathematischen Erfassen mechanischer und elektromagnetischer Schwingungen und im Mathematikunterricht zum Berechnen von Winkeln, Seiten und Flächen bei Dreiecken angewandt.
Es empfiehlt sich, die Schüler mit der Planung für den Mathematikunterricht in diesem Schuljahr bekannt zu machen und die Einhaltung des Planes gemeinsam mit den Schülern zu kontrollieren. Die Schüler übertragen folgendes Tafelbild in ihr Heft.

1. Winkelfunktionen

September (3 Wochen)	1.1. Funktionen	$y = \sin x$ $y = a \cdot \sin bx$ Anwendungen im Physikunterricht
September/ Oktober (2 Wochen)	1.2. Funktionen	$y = \cos x$ $y = \tan x$ $y = \cot x$
Oktober/ November (4 Wochen)	1.3. Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen Klassenarbeit (2 Std.)	
Dezember/ Januar (8 Wochen)	1.4. Anwendung der Winkelfunktionen bei Dreiecksberechnungen Klassenarbeit (3 Std.)	

2. Körperdarstellung und Körperberechnung

Januar/ März/April (8 Wochen)	
März	Klassenarbeit (2 Std.)

3. Festigung und Systematisierung; Prüfungsvorbereitung

April/Mai (5 Wochen)	
April	Klassenarbeit (5 Std.)
Datum	Schriftliche Abschlußprüfung

Hat man die technischen Voraussetzungen, so ist es zweckmäßig, den Schülern diese Übersicht auf vorbereiteten Zetteln in die Hand zu geben.

Aus dieser Planung ergibt sich, daß zunächst eine *Bereitstellung des Funktionsbegriffes* und eine *Wiederholung und Erweiterung des Winkelbegriffes* notwendig sind.

Nach einer kurzen Wiederholung der Definition des Begriffes „Funktion" werden damit zusammenhängende Begriffe und Tatsachen gefestigt.

Eindeutigkeit: Lb 4, Auftrag A 1, verlangt von den Schülern, aus einer Menge untereinander verschiedener geordneter Zahlenpaare zu ersehen, ob Eindeutigkeit der Abbildung vorliegt. Dazu müssen die Schüler untersuchen, ob etwa an erster Stelle der geordneten Paare eine Zahl x mehrfach auftritt. In diesem Fall würde x auf mehr als einen Wert abgebildet. Es würde sich also nicht um eine *eindeutige Abbildung* und somit nicht um eine *Funktion* handeln.

An diesem Übungsmaterial können auch die Begriffe „Definitionsbereich", „Wertebereich" und „Funktionswert" wiederholt werden. Lb 4, Auftrag A 2, soll dazu dienen, die Möglichkeiten der Darstellung der Abbildungsvorschrift zu wiederholen (nur kurz nennen) und die Gleichung mit zwei Variablen als *eine* Art herauszustellen. Da im Falle der Darstellbarkeit der Abbildungsvorschrift in Form einer Gleichung die geordneten Paare durch die Gleichung eindeutig festgelegt sind, kann man diese zur Bezeichnung der Funktion verwenden; vgl. Lb 4.

Sehr wichtig ist es, den Schülern bewußt zu machen, daß stillschweigend vorausgesetzt wird, daß y die Funktionswerte und x die Elemente des Definitionsbereiches bezeichnen. Um zu zeigen, daß eine solche Vereinbarung notwendig ist, kann man zur Erläuterung selbst ein Beispiel vorführen, etwa aus der Gleichung $3a+6b=12$ $(a, b \in P)$ zwei Funktionen entwickeln.

1. Fall: a sei Funktionswert, dann heißen die Paare $[b; a]$.

$$3a+6b=12$$
$$a=-2b+4$$
$$f_1=\{\ldots, [0;4], [1;2], [2;0], \ldots\}$$

2. Fall: b sei Funktionswert, dann heißen die Paare $[a; b]$.

$$3a+6b=12$$
$$b=-\tfrac{1}{2}a+2$$
$$f_2=\{\ldots, [0;2], \left[1;\tfrac{3}{2}\right], [2;1], \ldots\}$$

Eine Gleichung mit zwei Variablen kann also oftmals eine Darstellung für *zwei* Funktionen sein, in unserem Beispiel eine lineare Gleichung für zwei lineare Funktionen.

Anschließend wird kurz die Übersicht auf Lb 5 betrachtet. Diese Übersicht enthält Klassen von Funktionen, die sich durch eine Gleichung darstellen lassen und den Schülern bereits bekannt sind.

Die Wiederholung könnte folgendermaßen fortgesetzt werden. Die Schüler werden aufgefordert, die in Lb 4, Auftrag A 3, angegebenen Funktionen graphisch darzustellen, wobei nur Skizzen aus freier Hand anzufertigen sind, aus denen das Wesentliche der Funktionen zu erkennen ist. Eine derartige Übung gibt dem Lehrer die Möglichkeit, die Kenntnisse und Fähigkeiten der Schüler im Skizzieren der Graphen der elementaren Funktionen zu erkennen, und führt den Schülern zum Bewußtsein, wo bei ihnen Lücken vorhanden sind.

Es läßt sich natürlich auch mit Lb 4, Auftrag A 3, fortfahren, der das Überprüfen der Zugehörigkeit von geordneten Paaren zu einer gegebenen Funktion fordert.

Beispiel: $[0; 1]$ $\quad y=-2x+1$
$$1=2\cdot 0+1$$
$$1=1$$

Schlußfolgerung: $1 = 1$ ist eine wahre Aussage, also gehört das geordnete Paar $[0; 1]$ zur Funktion $y = -2x + 1$.

Diese Schlußfolgerung muß unbedingt immer von den Schülern verlangt werden. Die schriftliche Formulierung der Schlußfolgerung könnte wie folgt abgekürzt sein.

Beispiel: $[1; -1]$ $\quad y = x^2 - 1$
$-1 = 1^2 - 1$
$-1 = 0$ f. A., also $[1; -1] \notin f$

Die graphische Darstellung könnte dann als *Hausaufgabe* gestellt werden.

Nach beiden Varianten muß noch folgendes wiederholt werden:
Schreibweise $f(x)$ für den Funktionswert, Nullstelle einer Funktion. Dazu dienen der Text auf Lb 5 und Lb 5, Auftrag A 5, sowie Lb 98/2.
Je nach dem geplanten Stundenverlauf kann das in der Stunde behandelt oder als Hausaufgabe gestellt werden.

Zur Vorbereitung auf die *Einführung des Bogenmaßes* empfiehlt sich als Hausaufgabe das Berechnen der Länge eines Kreisbogens bei gegebener Länge des Radius und gegebenem Maß des Zentriwinkels; vgl. Lb 100/24, 25.
Auf Grund der Kenntnis der Klassensituation ist zu entscheiden, ob eine weitere Stunde für die Wiederholung des Funktionsbegriffes erforderlich ist. Es muß berücksichtigt werden, daß die Aufgabe dieser Wiederholung nur in einem Auffrischen der wichtigsten Kenntnisse besteht, um bei der Behandlung der Sinusfunktion an diese anknüpfen zu können. Es ist ohnehin notwendig, an den entsprechenden Stellen des Unterrichts von den bis dahin behandelten Funktionen auszugehen und Wiederholungen einzustreuen. Dazu ist das Übungsmaterial (Lb 98/1 bis Lb 99/11) bereitgestellt, das auch für die Abschlußwiederholung genutzt werden kann.
Als Literatur für das tiefere Eindringen in den Abbildungs- und Funktionsbegriff stehen einige sehr instruktive Artikel der Fachzeitschrift zur Verfügung; vgl. [29], [45], [72], [82], [83].

1.1.2. Winkel und Winkelmessung (LE 2; 2 Std.)

Ziel der beiden Unterrichtsstunden ist es, den *Winkelbegriff zu erweitern* und den *Begriff „Bogenmaß eines Winkels" einzuführen.* Dadurch werden Grundlagen geschaffen, die es gestatten, die Sinusfunktion als Menge geordneter Paare reeller Zahlen mit einem Definitionsbereich zu gewinnen, der aus der Menge aller reellen Zahlen besteht.

Die im Lehrbuch vorgenommene Darstellung des Begriffes „Winkel" geht von folgender Überlegung aus. Mit dem Winkelbegriff will man zwei Aspekte erfassen, einen statischen und einen dynamischen. Definiert man den Winkel als Menge $\{h; k\}$ aus zwei Strahlen h und k mit gemeinsamem Anfangspunkt, so sind wichtige Anwendungsbereiche nicht erfaßt. Beispielsweise ist noch nicht eindeutig festgelegt, welcher Bereich der Ebene als Menge der inneren Punkte des Winkels anzusehen ist (statische Betrachtungsweise). Für die Anwendung ist es aber oftmals auch wichtig zu wissen, welcher Strahl sich bis in die gegebene Lage gedreht hat und in welcher Richtung er sich gedreht hat (dynamische Betrachtungsweise). Diese Fragen werden eindeutig geklärt, wenn man den Begriff der Abbildung als Menge geordneter Paare anwendet und eine Orientierung der Ebene einführt. Fassen wir das geordnete Paar $[h; k]$ als Element einer Abbildung der Menge aller Strahlen mit S als Anfangspunkt auf, dann ist k das Bild von h und h das Urbild von k. Nehmen wir weiter an, daß diese Abbildung eine Drehung der Ebene im mathematisch positiven Drehsinn

um S ist, dann ist k das Bild von h bei einer Drehung der Ebene im mathematisch positiven Drehsinn.
Durch ein einziges geordnetes Paar $[h; k]$ ist diese Drehung bereits festgelegt. Deshalb ist es sinnvoll, das geordnete Paar $[h; k]$ als Winkel $[h; k]$ zu bezeichnen.
Diese Betrachtungen brauchen jedoch nicht in allen Einzelheiten mit den Schülern durchgeführt zu werden.

In der 1. *Stunde* sollte nach einer kurzen Begründung für die Beschäftigung mit dem Winkelbegriff (diese Begründung ist für die Einführung der Winkelfunktionen notwendig) zusammengetragen werden, in welchen praktischen Sachverhalten Winkel eine Rolle spielen; vgl. Lb 6. Dann kann vom Lehrer der Winkelbegriff entsprechend Lb 6 erläutert werden. Dieser Stundenteil wird im Sinne einer Wiederholung gestaltet, und es wird keine Definition des Winkels formuliert.
Dann werden die Einheiten des Gradmaßes 1° (ein Grad), 1′ (eine Minute), 1″ (eine Sekunde) wiederholt und beim Bearbeiten von Lb 6, Auftrag A 6, und einer Aufgabe aus Lb 99/12 bis Lb 100/19 angewandt.
Die Erweiterung des Winkelbegriffes kann mit Hilfe von Lb 7 in selbständiger Schülerarbeit gewonnen werden. Anschließend werden Lb 7, Auftrag A 7, bearbeitet und die Verallgemeinerung aus Lb 8, Auftrag A 8, gewonnen. Das kann in selbständiger Schülerarbeit oder in gemeinsamer Arbeit unter Leitung des Lehrers an der Tafel erfolgen.
Im letzten Teil der Stunde wird der Begriff „Bogenmaß eines Winkels" eingeführt und die Umrechnungsformel $\frac{\operatorname{arc}\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{180°}$ erarbeitet.

Den Schwerpunkt der 2. *Stunde* bilden Übungen im Umrechnen von Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt mit Hilfe des Rechenstabes. Die genannte Umrechnungsformel kann als Verhältnisgleichung aufgefaßt, entsprechende Aufgaben können mit Hilfe der Proportionaleinstellung des Rechenstabes gelöst werden. Die Schüler werden hiermit bereits in der 7. Klasse vertraut gemacht.
Der Einheitskreis wird an dieser Stelle eingeführt, um den Schülern eine Möglichkeit in die Hand zu geben, das Umwandeln gebräuchlicher Winkelmaße wie 30°, 60°, 45°, 90° usw. im Kopf auszuführen. Diese gedächtnismäßig eingeprägten Zuordnungen können auch für Überschlagsrechnungen genutzt werden. Durch das Umrechnen einiger Winkelmaße $\alpha > 360°$ und einiger negativer Winkelmaße soll den Schülern bewußt werden, daß mit Hilfe dieser Umrechnungsformeln jeder reellen Zahl eineindeutig ein Winkel zugeordnet werden kann. Zum Beispiel entspricht der Zahl -5 ein Winkel, der entsteht, wenn man einen Strahl in mathematisch negativem Drehsinn um seinen Anfangspunkt um 900° dreht.

Auch in dieser Unterrichtseinheit muß der Lehrer entsprechend der Klassensituation entscheiden, ob eine zusätzliche Stunde für Übungen mit dem Rechenstab genutzt werden muß.
Zwar wird der Rechenstab auch später und in täglichen Übungen ständig angewandt, dennoch ist ein gewisser Grad der Beherrschung erforderlich, um dem Schüler das Gefühl zu geben, daß er das Verfahren beherrscht.
Da der Lehrplan für Klasse 10 lediglich das Einführen der Begriffe „einander äquivalente Winkel", „Hauptwert einer Klasse einander äquivalenter Winkel", „Einheitskreis", „Bogenmaß eines Winkels" verlangt, sind keine Definitionen vom Schüler zu verlangen. Diese Begriffe sind in ihrer Anwendung zu festigen.
Hinsichtlich der Bezeichnung von Winkeln sind die Schüler darauf hinzuweisen, daß oft in ein und demselben Zusammenhang die gleichen Variablen, z. B. α, β, γ, zur Bezeichnung des geometrischen Objektes „Winkel" und zur Bezeichnung des Maßes dieses Winkels verwandt werden. Dabei kann dieses Maß als Gradmaß oder als

Bogenmaß aufgefaßt werden. Beispielsweise sagt man „α ist Zentriwinkel, und β ist Peripheriewinkel über demselben Bogen, also gilt: $\alpha = 2\beta$". Im ersten Teil dieser Aussage sind unter α und β die Winkel als geometrische Objekte zu verstehen, in der nachfolgenden Gleichung als ihre Maße.
Man geht sogar so weit, das Winkelmaß selbst als Winkel zu bezeichnen, wie folgendes Beispiel verdeutlichen soll: „Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180°". Eigentlich sind hier die Maße der Innenwinkel gemeint.
Eine derartige Vereinfachung der Sprechweise ist möglich, setzt aber begriffliche Klarheit voraus. Für den Lernenden kann eine zu frühzeitige Abkürzung der sprachlichen Ausdrucksmittel leicht das volle inhaltliche Verständnis erschweren oder gar verhindern. Im Lehrbuch werden deshalb häufig die Formulierungen „Maß eines Winkels" und „Winkel" (als geometrisches Objekt) streng unterschieden.
Analog ist die Situation bei der Bezeichnung von Strecken. Auch diesbezüglich wird im Lehrbuch, wenn es als notwendig angesehen wird, zwischen Strecke und Länge einer Strecke unterschieden.

1.1.3. Die Sinusfunktion (LE 3; 2 Std.)

Die beiden Stunden dienen der *Einführung der Sinusfunktion und* dem ersten *Vertrautmachen* der Schüler *mit einigen Eigenschaften* (Wertebereich, Nullstellen, Periodizität), ohne diese bereits systematisch zusammenzustellen.

In der *1. Stunde* wird, ausgehend von einem Problem der Physik, der Darstellung der Hangabtriebskraft eines gegebenen Körpers in Abhängigkeit vom Neigungswinkel der geneigten Ebene, die Sinusfunktion eingeführt. Dazu werden zunächst der Begriff „Sinus eines Winkels" und danach die Sinusfunktion definiert. Diese Reihenfolge wird später bei den anderen drei Winkelfunktionen beibehalten.

Zu Beginn der Stunde sollte eine kurze Wiederholung des Strahlensatzes erfolgen, wobei auf den 2. Teil besonderes Schwergewicht gelegt wird; vgl. Lb 8/22f.
Das Ausgangsproblem für die Einführung der Sinusfunktion können die Schüler unter Führung des Lehrers (ohne Buch, an der Tafel) erarbeiten.

Die Schüler benutzen hierfür folgende Voraussetzungen aus dem Physikunterricht in Klasse 7. Dort wurde deduktiv aus dem Satz von der Erhaltung der mechanischen Arbeit der Satz hergeleitet: „Die zum Verschieben eines Körpers auf einer geneigten Ebene notwendige Kraft verhält sich zum Gewicht des Körpers wie die Höhe der geneigten Ebene zu deren Länge:

$\frac{F}{G} = \frac{h}{l}$"; vgl. Physik Lp 7/15 und Lb 7/33.

Dieser Satz wird mit Hilfe eines Schülerexperiments bestätigt; vgl. Physik Lb 7/125. Der Physiklehrplan verlangt die Bezeichnung „Hangabtriebskraft F".
Der Physiklehrplan für Klasse 9 verlangt auf Seite 15 das graphische Darstellen der Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten beliebig vorgegebener Richtungen; vgl. Physik Lb 9/29f.
Der Mathematiklehrer muß sich beim Physiklehrer informieren, in welchem Umfang und in welcher Weise diese Probleme wiederholt werden. In enger Zusammenarbeit mit dem Physiklehrer sollte die beste Möglichkeit für diese Einführung gefunden werden. Es sollte auch erwogen werden, ob der Physiklehrer im Rahmen seiner Wiederholung auf dieses Problem eingehen kann oder ob es einen Schüler gibt, der mit Unterstützung des Physiklehrers darauf vorbereitet werden kann, das Ausgangsproblem darzulegen.
Die Einführung der Sinusfunktion sollte in jedem Fall durch den Lehrer mit Hilfe

eines Tafelbildes vorgenommen werden; vgl. Lb 10, Bild A 6. Anschließend lesen sich die Schüler die Ausführungen im Buch durch, und ein geeigneter Schüler erklärt noch einmal die Definition an der Tafel.
Die Schüler eignen sich nun die Definition an, indem sie einige geordnete Paare auf der Grundlage der Definition berechnen. Dazu können die Schüler selbständig Lb 11, Beispiel A 4, durcharbeiten. An der Tafel trägt ein Schüler danach die Berechnung von $\sin \frac{\pi}{3}$ vor, und es folgen weitere Übungen im Heft.

Als Hausaufgabe könnten Lb 101/39a, b und 40a, b (gemeinsamer Kreis) dienen, als freiwillige Hausaufgabe Lb 101/39c. (Hierzu kann der Hinweis gegeben werden, daß 0,3 in einen Bruch mit dem Nenner 5 umzuwandeln ist).

In der *2. Stunde* werden weitere geordnete Paare der Sinusfunktion ermittelt.

Anknüpfend an Lb 101/39c, deren Lösungsschritte man vortragen läßt bzw. selbst vorträgt, wird herausgearbeitet, daß es zu einem vorgegebenen Funktionswert beliebig viele Elemente des Definitionsbereiches gibt, die auf diesen Wert abgebildet werden. In unserem Fall sind das

$$x = 17° + k \cdot 360° \quad (x = 0{,}296 + k \cdot 2\pi \text{ mit } k \in G);$$
$$x = 163° + k \cdot 360° \quad (x = 2{,}84 + k \cdot 2\pi \text{ mit } k \in G).$$

Dadurch wird das Verständnis für die Eigenschaft der Periodizität vorbereitet.
Es schließt sich die Berechnung der Funktionswerte für $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in G)$ an, indem zunächst im Sinne einer Wiederholung durch Schüler an der Tafel die Definition von „Sinus eines Winkels" auf $x = \frac{3}{2}\pi$, $x = \pi$, $x = -\frac{\pi}{2}$ angewandt wird; vgl. Lb 11, Beispiel A 5.
Die Schüler bearbeiten selbständig Lb 11, Auftrag A 12.
Gemeinsam wird die Verallgemeinerung in Form einer Tabelle an der Tafel erarbeitet; vgl. Lb 11. Anschließend suchen die Schüler diese Tabelle im Buch auf, es wird die Menge der Nullstellen angegeben und überprüft, ob gewisse geordnete Paare reeller Zahlen zur Sinusfunktion gehören oder nicht; vgl. Lb 11, Auftrag A 13.
Den Abschluß der Stunde bildet folgende Betrachtung.
Die Sinusfunktion ist eine Funktion, deren Definitionsbereich aus reellen Zahlen besteht. Indem wir eine reelle Zahl als Bogenmaß eines Winkels auffassen, können wir mit Hilfe der Umrechnungsformel auch Gradmaße als Elemente des Definitionsbereiches verwenden. Danach gilt z. B.: $\sin 30° = \sin \frac{\pi}{6}$ oder $\sin(-90°) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

1.1.4. Eigenschaften der Sinusfunktion (LE 4; 2 Std.)

Für die beiden Stunden wird folgendes *Ziel* gestellt.

- Systematisches Erarbeiten der Eigenschaften der Sinusfunktion (Wertebereich, Vorzeichen der Funktionswerte, Nullstellen, Monotonieverhalten, Periodizität) auf der Grundlage der Definition der Sinusfunktion
- Graphisches Darstellen der Sinusfunktion
- Erkennen der Eigenschaften der Sinusfunktion aus dem Graph der Sinusfunktion

In der *1. Stunde* wird die Sinusfunktion mit Hilfe des Einheitskreises graphisch dargestellt, und es werden die in der Tabelle auf Lb 12 genannten Eigenschaften aus der graphischen Darstellung abgelesen.

Nach kurzer Wiederholung der Definition des Sinus eines Winkels am Kreis mit beliebigem Radius wird an der Tafel zusammengetragen, was bereits zur Sinusfunktion behandelt ist. Dazu wird ein Tafelbild angefertigt $(-4\pi \leq x \leq 4\pi)$.

1. Die Punkte $P\left(k \cdot \frac{\pi}{2}; y\right)$ mit $\left.\begin{array}{l} y=0 \text{ für } k=2n \\ y=1 \text{ für } k=4n+1 \\ y=-1 \text{ für } k=4n+3 \end{array}\right| n \in G$

   gehören zum *Graph der Sinusfunktion*. Die im gegebenen Intervall liegenden Punkte werden eingezeichnet.
2. *Wertebereich* $-1 \leqq y \leqq 1$

   Da der Radius konstant ist und die Ordinaten der Punkte des Kreises nicht größer als r und nicht kleiner als $-r$ werden, ist der Quotient $\frac{v}{r}$ nicht größer als 1 und nicht kleiner als -1. Es werden Parallelen zur Abszissenachse durch $P(0; 1)$ und $P(0; -1)$ gezeichnet.
3. *Periodizität*

   Da für einander äquivalente Winkel die gleiche Ordinate des Punktes $P(u; v)$ auftritt, also auch für die Bogenmaße einander äquivalenter Winkel der Quotient $\frac{v}{r}$ konstant ist, hat der Graph der Sinusfunktion in den Intervallen

   $0 \leqq x \leqq 2\pi;$

   $2\pi \leqq x \leqq 4\pi;$

   $-2\pi \leqq x \leqq 0;$

   $-4\pi \leqq x \leqq -2\pi$

   ein und dieselbe Gestalt, die Kurvenstücke sind einander kongruent. Es genügt also, die Gestalt des Graphen im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ (Grundintervall) genauer zu untersuchen.

Hierfür wird eine Spezialisierung des Kreises auf den Einheitskreis vorgenommen, weil man in diesem Fall den Sinus eines Winkels direkt als Ordinate des Punktes $P(u; v)$ erhält. Das Dividieren durch die Maßzahl des Radius entfällt, weil sie gleich 1 ist.

An der Tafel wird demonstriert, wie man auf geometrischem Wege die Kurvenpunkte ermitteln kann; vgl. Lb 13, Bild A 10. Die Schüler führen in ihren Heften die Zeichnung exakt nach den Angaben des Lehrers aus (Koordinateneinheit auf beiden Achsen 1 LE $\triangleq$ 2 cm).

Zunächst werden auf der Abszissenachse die Vielfachen von $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ eingetragen.

Zum Ermitteln der Kurvenpunkte sollte mit den Schülern eine Handlungsvorschrift erarbeitet werden, die in Stichworten an die Tafel geschrieben wird.

1. Parallele p_1 zur Ordinatenachse durch den gegebenen Punkt auf der Abszissenachse (z. B. durch $P\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$)
2. Zeichnen eines Winkels, der der Abszisse entspricht (hier ein Winkel von 30°)
3. Markieren des Schnittpunktes des freien Schenkels mit der Kreislinie (etwa durch einen kleinen Kreis mit Ziffer)
4. Zeichnen einer Parallelen p_2 zur Abszissenachse durch diesen Punkt
5. Der Schnittpunkt der beiden Parallelen p_1 und p_2 ist der gesuchte Punkt des Graphen (durch die gleiche Ziffer markieren, die der Punkt des Kreises erhielt)

Hausaufgabe: Skizzieren des Graphen der Sinusfunktion im Intervall $-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$ mit Hilfe der Kurvenschablone und aus freier Hand

In der *2. Stunde* werden die Eigenschaften der Sinusfunktion im einzelnen begründet und durch Übungen gefestigt.

Zu Beginn skizzieren alle Schüler die Sinuskurve aus freier Hand und mit Hilfe der Kurvenschablone im Intervall $-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$ aus dem Gedächtnis.

Es wird durch den Lehrer eine Skizze aus freier Hand und eine mit Hilfe der Scha-

blone an die Tafel gezeichnet, um dadurch noch einmal die Anforderungen an eine Skizze der Sinuskurve darzustellen (Eintragen der Vielfachen von $\frac{\pi}{4}$ auf der Abszissenachse, Andeuten von Parallelen durch $y=1$ und $y=-1$, Markieren der höchsten und tiefsten Punkte, mindestens je eine Periode im negativen und positiven Bereich).
Es folgen Betrachtungen über die Periodizität der Sinusfunktion. Den gleichen Funktionswert, den die Sinusfunktion für x hat, besitzt sie auch für jeden Wert $x+k\cdot 2\pi$, also gilt sin $x=\sin(x+k\cdot 2\pi)$.
Es folgt die Einführung der Begriffe „Periode" und „kleinste Periode"; vgl. Lb 13.
Anschließend wird hinsichtlich des Wertebereiches darauf hingewiesen, daß es streng genommen nicht korrekt war, bei der graphischen Darstellung mit Hilfe des Einheitskreises die gewonnenen Kurvenpunkte zu verbinden. Um das tun zu können, müßte man sich davon überzeugen, daß es keine Lücken gibt, daß also zu jeder Zahl y_0 mit $-1\leqq y_0\leqq 1$ auch Elemente des Definitionsbereiches existieren, die diese Zahl y_0 als Funktionswert besitzen. Der Nachweis, daß diese Voraussetzung hier erfüllt ist, wird durch den Lehrer entsprechend Lb 12 geführt.
Lb 13, Auftrag A 15, dient der Festigung dieser Kenntnis über den Wertebereich.
Nach einer Wiederholung des Begriffs der Monotonie von Funktionen werden die Monotonieintervalle ermittelt; vgl. Lb 13, Auftrag A 14. Es folgen Übungen zum Ermitteln des Vorzeichens an Hand der graphischen Darstellung.

1.1.5. Die Funktion $y=a\cdot\sin bx$ ($a, b\in P$; $a, b>0$) (LE 5; 3 Std.)

In den drei Stunden ist durch die Behandlung der Funktion $y=a\cdot\sin bx$ unter anderem auch die *Voraussetzung dafür* zu schaffen, *daß im Physikunterricht Schwingungsvorgänge mathematisch erfaßt werden können.* Die Schüler sollen befähigt werden, die *Graphen* von Funktionen der Form $y=a\cdot\sin bx$ ($a, b>0$) zu *skizzieren*, indem sie von der Sinuskurve ausgehen und ihre Kenntnisse über die Auswirkungen von a auf den Wertebereich und von b auf die kleinste Periode anwenden.

Die *Aufteilung des Stoffes* auf die drei Stunden könnte in folgender Weise geschehen.

1. Stunde: $y=a\cdot\sin x$
2. Stunde: $y=a\cdot\sin bx$
3. Stunde: $y=\sin bx$

Nachdem in der *1. Stunde* mit dem Hinweis auf die im Physikunterricht erfolgende Anwendung der Funktion $y=a\cdot\sin bx$ die Behandlung dieser Funktion motiviert und das Vorgehen in den nächsten drei Stunden erläutert wurde, werden die Kenntnisse wiederholt, die zur Behandlung von $y=a\cdot\sin x$ benötigt werden.
An Hand eines Beispiels, etwa $y=x^2$, $y=2\cdot x^2$, $y=\frac{1}{2}\cdot x^2$, $y=-2\cdot x^2$, $y=-\frac{1}{2}\cdot x^2$ wird an der Tafel die geometrische Bedeutung des Faktors a in einer Funktion $y=a\cdot f(x)$ wiederholt; vgl. Lb 9/95 bis 98.
Mit dem Hinweis darauf, daß bei negativem Faktor a lediglich eine Spiegelung an der Abszissenachse erfolgt, begründet der Lehrer die Möglichkeit, die weiteren Betrachtungen auf positive Faktoren a zu beschränken.
Er weist ferner darauf hin, daß bei den Anwendungen im Physikunterricht nur positive Zahlen für a und b auftreten werden und auch deshalb im folgenden eine Beschränkung auf $a, b>0$ erfolgt.
Nach dieser Wiederholung lesen die Schüler die Zusammenfassung im Lb 14 durch, beschäftigen sich mit Lb 14, Auftrag A 17, um anschließend in gemeinsamer Arbeit an Hand von Bild A 11 die Kenntnis zu gewinnen, daß sich der Wertebereich

verändert, und zwar in das Intervall $-a \leq y \leq a$ übergeht, die Nullstellen aber mit denen von $y = \sin x$ übereinstimmen.
Durch Lb 14, Auftrag A 18, wird diese Erkenntnis gefestigt. Lb 14, Auftrag A 19, führt außerdem zu der Erkenntnis, daß die kleinste Periode von $y = a \cdot \sin x$ erhalten bleibt und für $a > 0$ die Funktionswerte in gleichen Intervallen dieselben Vorzeichen haben wie die Funktionswerte von $y = \sin x$.

Hausaufgaben: Lb 102/48, 49

Zu Beginn der *2. Stunde* sollten die Graphen einiger Funktionen der Form $y = a \cdot \sin x$ skizziert werden, indem die Begrenzung des Wertebereiches durch Parallelen zur Abszissenachse angedeutet wird, anschließend die Schnittpunkte mit der Abszissenachse und zum Schluß die höchsten und tiefsten Punkte eingezeichnet werden.

Zur Vorbereitung auf das Erkennen der Auswirkung des Faktors $b (b > 0)$ in $y = \sin bx$ sind Übungen zweckmäßig, an denen deutlich wird, wie sich die Größe eines Quotienten verändert, wenn der Zähler konstant bleibt, aber der Nenner sich vergrößert oder verkleinert.

Beispiel:

b	1	2	3	4
$\frac{5}{b}$	5	2,6	1,7	1,2

Wenn $b > 1$, so $\frac{5}{b} < 5$.

b	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{5}{b}$	5	10	15	20

Wenn $0 < b < 1$, so $\frac{5}{b} > 5$.

Die Erkenntnis wird in Worten formuliert: Der Quotient $\frac{a}{b} (a, b > 0)$ ist größer als der Zähler a, wenn der Nenner b kleiner ist als 1. Der Quotient ist kleiner als der Zähler, wenn der Nenner größer als 1 ist.
Mit Hilfe der Kenntnis über das Umformen von Ungleichungen kann diese Erkenntnis auch allgemein hergeleitet werden.

$b < 1$	Multiplikation mit $a > 0$	$b > 1$
$a \cdot b < a$	Division durch $b > 0$	$a \cdot b > a$
$a < \frac{a}{b}$		$a > \frac{a}{b}$

Der weitere Stundenverlauf kann entsprechend Lb 15f erfolgen.
Im Ergebnis muß folgende Erkenntnis gewonnen werden. Der Faktor b hat keinen Einfluß auf den Wertebereich, aber auf die kleinste Periode, die sich von 2π auf $\frac{2\pi}{b}$ verändert. Das zieht auch Auswirkungen auf die Nullstellen und die Vorzeichen der Funktionswerte nach sich; vgl. Übersicht auf Lb 18.

Hausaufgaben: Lb 102/50, 51

Am Beginn der *3. Stunde* steht das Skizzieren der Graphen der Funktion $y = \sin x$ und je einer Funktion der Formen $y = a \cdot \sin x$ und $y = \sin bx$. Die Schüler erläutern an Hand dieser Skizze die geometrische Bedeutung der Faktoren a und b.
An Hand von Lb 16, Beispiel A 7, und Lb 17, Beispiel A 8, wird in abwechselnd selbständiger oder gemeinsamer Arbeit folgende Erkenntnis gewonnen. Den Graph der Funktion $y = a \cdot \sin bx$ kann man sich aus dem Graph der Funktion $y = \sin x$ entstanden denken durch die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen der

Ebene auf sich, einer Streckung bzw. Stauchung in Richtung der Ordinatenachse, die dem Faktor a entspricht, und einer Vergrößerung bzw. Verringerung der Abstände zwischen den benachbarten Schnittpunkten des Graphen mit der Abszissenachse, die dem Faktor b entspricht. In der Übersicht auf Lb 18 sind diese Veränderungen besonders hervorgehoben.
In dieser Stunde kann schließlich das rechnerische Ermitteln der Nullstellen der Funktion $y = a \cdot \sin bx$ behandelt werden. Damit wird auch der Forderung des Lehrplans nach inhaltlichem Lösen einfacher goniometrischer Gleichungen entsprochen.
Der Aufgabenteil bietet Material dafür, in vielfältiger Weise zur Festigung der gewonnenen Erkenntnisse beizutragen. Der Lehrer sollte aus diesem Aufgabenmaterial auswählen und die restlichen Aufgaben für eine Wiederholung vorsehen. Auf jeden Fall sollte aber Lb 103/56 behandelt werden, weil in praktischen Anwendungen aus den Bereichen der Naturwissenschaften und der Technik häufig die graphische Darstellung eines Prozesses vorgegeben ist (etwa als Aufzeichnung einer Schwingung) und die mathematische Form einer Aussage darüber gefunden werden soll.

Zur Vorbereitung auf die Einführung der Kosinusfunktion sollten die Schüler zu Hause die Gedankengänge zur Einführung der Sinusfunktion wiederholen.

1.2. Die Funktionen $y = \cos x$, $y = \tan x$ und $y = \cot x$ (LE 6 bis 11: 8 Std.)

1.2.1. Die Kosinusfunktion (LE 6; 1 Std.)

Analog zum Vorgehen bei der Einführung der Sinusfunktion, nur in konzentrierterer Form, werden in dieser und in der folgenden Stunde die *Definition der Kosinusfunktion* und die *Eigenschaften dieser Funktion* erarbeitet.
Zu Beginn dieser Stunde wird das Problem aufgegriffen, das am Beginn der Einführung der Sinusfunktion stand, nämlich die mathematische Erfassung der Abhängigkeit der Hangabtriebskraft bei einer geneigten Ebene. In gemeinsamer Arbeit wird die Lösung des Problems in der Form $F_H = G \cdot \sin x$ (x Maß des Neigungswinkels) gewonnen.
Das gleiche Problem wird, in Abänderung auf die Normalkraft, zur Motivierung der Einführung der Kosinusfunktion verwandt. Die Schüler werden ausdrücklich auf die Analogie zur Einführung der Sinusfunktion hingewiesen. Durch ein derartiges Vorgehen festigen die Schüler ihre Kenntnisse über die Definition der Sinusfunktion und erleichtern sich das Erarbeiten der Definition der Kosinusfunktion.
Der Stundenverlauf kann entsprechend dem Lehrbuch gestaltet werden.

Als Hausaufgabe wird eine Wiederholung der graphischen Darstellung der Kosinusfunktion mit Hilfe des Einheitskreises gestellt.

1.2.2. Eigenschaften der Kosinusfunktion (LE 7; 1 Std.)

Indem an Hand von Lb 20, Bild A 16, auf den engen Zusammenhang von Sinus- und Kosinusfunktion hingewiesen und herausgearbeitet wurde, daß der Graph der Kosinusfunktion durch Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ Längeneinheiten in negativer Richtung der Abszissenachse erhalten werden kann, ist das sofortige Skizzieren des Graphen der Kosinusfunktion möglich.

Analog zur Übersicht im Lb 12 werden *Eigenschaften der Kosinusfnktion* zusammengestellt. Es wird herausgearbeitet, daß die Kosinusfunktion periodisch ist und die kleinste Periode 2π besitzt, d. h. $\cos(x+k\cdot 2\pi)=\cos x (k\in G)$.
Das Bearbeiten von Lb 20, Aufträge A 27 und A 28, festigt die Kenntnis der Schüler über den Wertebereich bzw. die Nullstellen und die Periodizität der Kosinusfunktion. Durch Lb 20, Auftrag A 29, wird auch hinsichtlich der Kosinusfunktion „der Kreis geschlossen", indem das Ausgangsproblem gelöst wird. Zur Vorbereitung auf die Einführung der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion können Lb 21, Auftrag A 31, und Lb 104/61 a) bis d) und 62 a) bis d) als Hausaufgabe gestellt werden.

1.2.3. Tangensfunktion und Kotangensfunktion (LE 8; 1 Std.)

Ziel dieser Stunde ist das *Erarbeiten der Definitionen* von „Tangens eines Winkels", „Kotangens eines Winkels" sowie der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion.

Da beim Definieren der Tangens- und Kotangensfunktion Quotienten benutzt werden, ist es angebracht, zur Vorbereitung solche Eigenschaften von Quotienten zu wiederholen, die beim Erarbeiten der Eigenschaften der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion eine Rolle spielen. Da vor allem auf die Einschränkungen eingegangen werden muß, die sich für den Definitionsbereich der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion an den Stellen ergeben, an denen der Nenner gleich Null ist (das sind die Nullstellen der Sinusfunktion bzw. der Kosinusfunktion), ist eine Übung wie Lb 21, Auftrag A 30, zweckmäßig.

Lb 21, Auftrag A 31, dient der Vorbereitung auf Lb 21, Auftrag A 32. Ist sie als Hausaufgabe gestellt worden, können nach Vergleichen der berechneten Werte die Aussagen von Lb 21, Auftrag A 32, mit Hilfe dieser Tabelle und weiterer allgemeiner Erörterungen begründet werden.
Die Aussagen 1. und 2. lassen sich aus der Tabelle im Bild 68/1 ablesen. Hier soll eine Betrachtung dargestellt werden, die gegebenenfalls durchgeführt werden könnte.
Ist ein Quotient, z. B. $\frac{63}{7}$, zu berechnen, so kann man die Aufgabe $\frac{63}{7}=x$ auf die gleichwertige Aufgabe zurückführen: Es ist eine Lösung der Gleichung $63=7\cdot x$ zu ermitteln.
Ist allgemein ein Quotient $\frac{a}{b}$ gegeben, so kann $\frac{a}{b}=x$ auf $a=b\cdot x$ zurückgeführt werden.

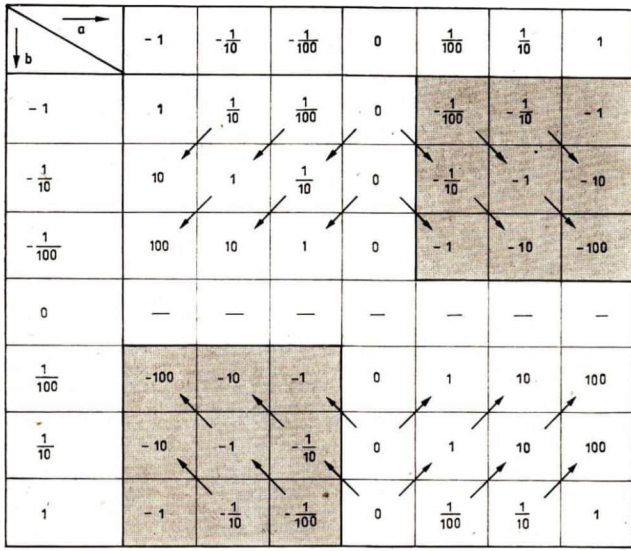
Es wird nun folgende *vollständige Fallunterscheidung* vorgenommen.

1. Fall: $a\neq 0; b\neq 0$ — Es ist $a : b\neq 0$.

2. Fall: $a=0; b\neq 0$ — Es ist $\frac{a}{b}=\frac{0}{b}=0$.

3. Fall: $a\neq 0; b=0$ — $a=b\cdot x$.
$a=0\cdot x$ ist zu lösen.
Es gibt aber keine Zahl x, für die $0\cdot x$ ungleich Null wäre. Also hat die Gleichung keine Lösung. Damit kein Widerspruch dazu auftritt, ist $\frac{a}{b}$ für diesen Fall nicht definiert.

4. Fall: $a=0; b=0$ — $a=b\cdot x$
$0=0\cdot x$ ist zu lösen.
Jede Zahl x ist Lösung dieser Gleichung. Das widerspricht aber dem Wesen einer Rechenoperation, für die stets Eindeutigkeit gefordert wird. Daher ist auch $\frac{0}{0}$ nicht definiert.



68/1

Die Aussagen 3., 4. und 5. werden mit Hilfe der Tabelle begründet.
Es folgen die Definitionen der Begriffe „Tangens eines Winkels" und „Kotangens eines Winkels" und die Einführung von „Tangensfunktion" und „Kotangensfunktion" entsprechend dem Lehrbuch.
Nach dieser Vorbereitung müßte jeder Schüler die Notwendigkeit der Einschränkung des Definitionsbereiches, die auch durch Lb 22, Auftrag A 34, gefordert wird, begründen können.

Zur Festigung der Definitionen können Lb 104/61 e) bis h) und 62 e) bis h) als Hausaufgaben gestellt werden.

1.2.4. Eigenschaften der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion (LE 9; 2 Std.)

In diesen beiden Stunden geht es darum, *Eigenschaften der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion* durch Zurückführen auf Eigenschaften der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion herzuleiten. Dabei werden in starkem Maße die Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion herangezogen.

Folgende *Aufteilung des Stoffes* auf die beiden Stunden ist möglich.

1. Stunde: Nullstellen,
Vorzeichen der Funktionswerte,
Periodizität

2. Stunde: Verhalten bei Annäherung an die Stellen $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in G)$, Wertebereich

Das graphische Darstellen der beiden Funktionen wird laut Lehrplan erst nach dem Ermitteln der Funktionswerte spezieller Winkel gefordert. In der 2. Stunde werden sich jedoch bereits grobe Skizzen ergeben.
Zu Beginn der *1. Stunde* sollte nach Anleitung durch den Lehrer ein Näherungswert, etwa $\tan \frac{\pi}{3}$ oder $\cot \frac{\pi}{3}$, unter Zuhilfenahme eines Kreises mit einem Radius von 5 cm Länge ermittelt werden. Zunächst werden für $\sin \frac{\pi}{8}$ und $\cos \frac{\pi}{8}$ Näherungswerte ermittelt (Zeichnen des Kreises, erforderlich ist nur der 1. Quadrant) und eines Winkels von 60°; Ermitteln der Ordinate bzw. der Abszisse des Punktes $(P(u; v)$ durch Messen der Abstände des Punktes von den Koordinatenachsen; Bilden des Quotienten $\frac{v}{5} = \sin \frac{\pi}{3}$ und $\frac{u}{5} = \cos \frac{\pi}{3}$.
Die Division dieser Werte führt zu Näherungswerten für $\tan \frac{\pi}{3}$ und $\cot \frac{\pi}{3}$. Durch diese Übung festigen die Schüler einerseits ihre Kenntnisse über die Definitionen von $\sin x$ und $\cos x$, andererseits eignen sie sich die Definitionen von $\tan x$ und $\cot x$ in geistig-praktischer Tätigkeit an. Das Ermitteln der Nullstellen wird entsprechend Lb 22, Auftrag A 35, als Lösen von Gleichungen aufgefaßt und mit Hilfe von Lb 21, Auftrag A 32, Aussage 1, auf das Ermitteln der Nullstellen von $y = \sin x$ und $y = \cos x$ zurückgeführt.
Beispiel:
Die Lösungsmenge von $\tan x = 0$ *ist zu ermitteln.*

$\tan x = 0$ genau dann, wenn $\frac{\sin x}{\cos x} = 0$.
$\frac{\sin x}{\cos x} = 0$ genau dann, wenn $\sin x = 0$ und $\cos x \neq 0$.

Das ist für $x = k \cdot \pi$ $(k \in G)$ der Fall.
Das Ermitteln der Vorzeichen der Funktionswerte wird auf das Feststellen der Vorzeichen von $y = \sin x$ und $y = \cos x$ mit Hilfe der Graphen dieser Funktionen zurückgeführt; vgl. Lb 22, Auftrag A 36.
Hinsichtlich der Periodizität könnten die Schüler annehmen, daß auch für $y = \tan x$ und $y = \cot x$ die kleinste Periode 2π ist. Daß 2π tatsächlich Periode ist, folgt unmittelbar aus den Definitionen und der Periodizität von $y = \sin x$ und $y = \cos x$.

$$\tan (x + k \cdot 2\pi) = \frac{\sin (x + k \cdot 2\pi)}{\cos (x + k \cdot 2\pi)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$\tan (x + k \cdot 2\pi) = \tan x$ mit $x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in G)$

Daß nicht 2π, sondern π die kleinste Periode ist, wird in gemeinsamer Arbeit an der Tafel bewiesen; vgl. Lb 23.

Als Hausaufgaben können Lb 104 f/63, 64 verwendet werden.

In der *2. Stunde* wird mit Hilfe der Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion und von Lb 21, Auftrag A 32, Aussagen 3. bis 5., das Verhalten der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion bei Annäherung an die Stellen $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ am Beispiel der Tangensfunktion für $k = 1$ $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$ untersucht. Anschließend wird Lb 24, Bild A 19, betrachtet.
Hinsichtlich des Wertebereiches ist den Schülern zu sagen, daß ein Beweis der Aussage, der Wertebereich der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion sei die Menge aller reellen Zahlen, erforderlich ist, dieser Beweis aber an dieser Stelle noch nicht geführt werden kann.

Hausaufgaben: Auswahl aus Lb 25, Aufträge A 38 bis A 41. Das dient der Bereitstellung von Kenntnissen für das Berechnen spezieller Funktionswerte.

1.2.5. Spezielle Funktionswerte der Winkelfunktionen (LE 10; 2 Std.)

In dieser Unterrichtseinheit kann man einige Kenntnisse der Schüler über das *Rechnen mit Quadratwurzeln und* über *Beziehungen an Dreiecken wiederholen und festigen* und damit zugleich kontinuierlich die Abschlußprüfung vorbereiten helfen.
Die Bereitstellung entsprechender Kenntnisse ist erforderlich, um das Berechnen der speziellen Funktionswerte erfolgreich durchführen zu können. Der Aspekt der Wiederholung und Festigung erstreckt sich auch auf die Definition von sin x, cos x, tan x und cot x sowie auf das Monotonieverhalten der Funktionen. Die Behandlung der Komplementwinkelbeziehungen wird inhaltlich vorbereitet.
Ein weiteres wichtiges Teilziel ist, die *Fähigkeiten und Fertigkeiten* der Schüler *im Beweisen und Herleiten mathematischer Aussagen weiter* zu *entwickeln.*
Schließlich wird im Ergebnis dieser Unterrichtseinheit in Form spezieller Funktionswerte *Faktenmaterial für Übungen und Anwendungen* bereitgestellt, z. B. für die graphischen Darstellungen der Tangens- und Kotangensfunktion, die nicht wie bei den beiden vorangegangenen Winkelfunktionen mit Hilfe des Einheitskreises erarbeitet werden. Die Schüler sollen sich die speziellen Funktionswerte im Laufe der nächsten Stunden einprägen, aber auch in der Lage sein, sie im Tafelwerk aufzusuchen.

1. Die Schüler müssen wissen:
   Sowohl bei $y = \sin x$ als auch bei $y = \cos x$ treten die Funktionswerte $0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}; 1$ auf bzw. sowohl bei $y = \tan x$ als auch bei $y = \cot x$ treten die Funktionswerte $0; \frac{1}{3}\sqrt{3}; 1; \sqrt{3}; -$ auf. Man sollte den Strich an letzter Stelle als merktechnisches Element mit aufnehmen.
2. Sie merken sich diese dem Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ zugeordneten Funktionswerte als monoton steigende Zahlenfolgen $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1$ bzw. $0, \frac{1}{3}\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}, -$.
3. Sie ordnen die Folge der Elemente des Definitionsbereiches $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ die Folge der speziellen Funktionswerte einer gegebenen Winkelfunktion zu, indem sie das Monotonieverhalten dieser Funktion im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ berücksichtigen. Voraussetzung ist hierbei, daß die Schüler auch die speziellen Elemente des Definitionsbereiches als monoton steigende Zahlenfolge $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ gedächtnismäßig beherrschen und sich die Graphen schnell vorstellen können.

Beispiel: cos $\frac{\pi}{3}$ *ist zu ermitteln.*

– Die zur Sinus- bzw. Kosinusfunktion gehörende Folge der Funktionswerte ist $0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}; 1$.
– Die Kosinusfunktion ist monoton fallend. (Die Schüler stellen sich in Gedanken den Graph der Kosinusfunktion vor.)
– Die Zuordnung ist also in umgekehrter Reihenfolge vorzunehmen.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos x	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

– *Ergebnis:* $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Derartige Zuordnungsübungen in Form von Tabellen sollten zu Anfang schriftlich, später in Gedanken durchgeführt werden. Beim gedächtnismäßigen Einprägen

sollten die Funktionswerte für $\frac{\pi}{4}$ besonders beachtet werden, gewissermaßen als „Stützpunkte" in der „Mitte" der Folgen der Funktionswerte. Bemerkenswert an diesen Funktionswerten ist, daß für sie $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$ bzw. $\tan\frac{\pi}{4}=\cot\frac{\pi}{4}$ gilt. Geometrisch kommt das darin zum Ausdruck, daß die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion im Punkt $P\left(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ die der Tangens- und Kotangensfunktion im Punkt $P\left(\frac{\pi}{4};1\right)$ einander schneiden.

Es sei abschließend betont, daß das Einprägen kein Selbstzweck ist, sondern zum tieferen Eindringen in die Eigenschaften der Winkelfunktionen beitragen muß, anderenfalls könnte man es beim Aufsuchen der Winkelfunktionswerte im Tafelwerk bewenden lassen.

Die beiden Unterrichtsstunden könnten wie folgt verlaufen.

In der 1. *Stunde* werden einige Kenntnisse wiederholt, die bei der Berechnung der speziellen Funktionswerte eine Rolle spielen. Je nach der Auswahl aus Lb 25, Aufträge A 38 bis A 41, wird der Stundenverlauf modifiziert; vgl. Hausaufgaben auf Uh 69.

Zunächst wird an Hand von Lb 25, Aufträge A 38, A 39, das Rechnen mit Quadratwurzeln geübt. Es kommt hierbei vor allem auf die Anwendung von

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};\quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a,b>0)$$

und die Behandlung solcher Spezialfälle wie

$$\sqrt{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}};\quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a;\quad \frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$$

an.

Bei den Berechnungen der speziellen Funktionswerte werden folgende Beziehungen an Dreiecken benötigt.

Gleichseitiges Dreieck; vgl. Bild 72/1

1. Alle drei Winkel haben daß Maß 60°.
2. Für die Höhe h gilt $h=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot a$. Die Höhe halbiert die Basis.
3. In den durch die Höhe gebildeten rechtwinkligen Teildreiecken beträgt je ein Winkel 60°, der andere jeweils 30° (der dritte ist jeweils ein rechter Winkel). Eine Kathete ist jeweils h, die andere hat jeweils die Länge $\frac{a}{2}$.

Rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck; vgl. Bild 72/2

1. Die Basiswinkel haben das Maß 45°.
2. Die beiden Katheten sind gleich lang und es gilt $b=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot a$.

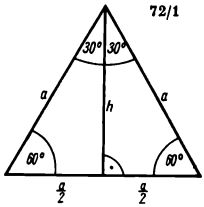
Die Schüler sollen diese Formeln

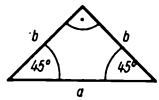
1. als häufig zu benutzende mathematische Fakten zusammenstellen;
2. in ihre Hefte übertragen;
3. im Tafelwerk aufsuchen können;
4. jederzeit herleiten können.

Den dritten Schwerpunkt der Wiederholung bilden Beziehungen zwischen den Koordinaten eines Punktes und seinen Abständen von den beiden Koordinatenachsen; vgl. Bild 72/3.

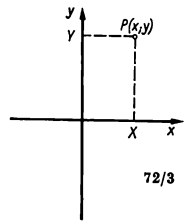
Ist die Koordinateneinheit auf beiden Achsen gleich 1 LE, der Fußpunkt des Lotes von $P(x;y)$ auf die Abszissenachse X und der des Lotes auf die Ordinatenachse Y, so gilt

$$\overline{PX}=|y|\text{LE};\quad \overline{PY}=|x|\text{LE}.$$





72/2



72/3

Diese Erkenntnis kann mit Hilfe von Lb 25, Aufträge A 40, A 41, erarbeitet werden. Hierdurch wird auch die Herleitung der Gleichung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ vorbereitet, deren Behandlung in der Unterrichtseinheit 1.3.1. vorgesehen ist; vgl. UH 74ff.

Die Berechnung der speziellen Funktionswerte erfolgt nach diesen Vorbereitungen konsequent auf der Grundlage der Definitionen von $\sin x$ bzw. $\cos x$ am Kreis. Der Einfachheit halber wird der Einheitskreis gewählt.

Es empfiehlt sich, mit dem Berechnen von $\sin \frac{\pi}{4}$ und $\cos \frac{\pi}{4}$ zu beginnen, weil in diesen Fällen die notwendigen Ergänzungen zu jeweils einem gleichseitigen Dreieck, die bei den beiden anderen Winkeln erforderlich sind, entfallen. Man kann entweder mit Hilfe des Satzes des PYTHAGORAS ausführlich wie im Lb 26, Beispiel A 11, vorgehen oder aber auf die in der Wiederholung zusammengetragenen Erkenntnisse zurückgreifen. Wählt man den letztgenannten Weg, würde die Berechnung folgendermaßen vorgenommen werden.

$\overline{PD}$ und $\overline{OD}$ sind Katheten im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $\Delta\, ODP$. Für sie gilt

$$\overline{PD} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ \overline{OP};$$
$$\overline{OD} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ \overline{OP}.$$

Mit $\overline{OP} = 1$ LE erhält man

$$\overline{PD} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ \text{LE};$$
$$\overline{OD} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ \text{LE}.$$

Für die Koordinaten des Punktes $P(u; v) = P(\cos 45°; \sin 45°)$ gilt folglich

$$\cos 45° = \cos \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2};$$
$$\sin 45° = \sin \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Hieraus gewinnt man sofort

$$\tan \tfrac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1;$$

$$\cot \tfrac{\pi}{4} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1.$$

In der *2. Stunde* werden die speziellen Funktionswerte $\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{6}$ sowie $\sin\frac{\pi}{3}$ und $\cos\frac{\pi}{3}$ berechnet. Das erfolgt in gemeinsamer Arbeit entweder ausführlich wie im Lb 26, Beispiel A 12, bzw. im Lb 27, Beispiel A 13, oder durch Anwendung der Beziehungen am gleichseitigen Dreieck. Die Berechnung von $\tan\frac{\pi}{6}$, $\cot\frac{\pi}{6}$ sowie $\tan\frac{\pi}{3}$, $\cot\frac{\pi}{3}$ können die Schüler selbständig durchführen.
Zum Abschluß wird den Schülern im Sinne der Ausführungen zu Beginn der Darlegungen zu dieser Unterrichtseinheit erläutert, wie man sich diese Funktionswerte gedächtnismäßig einprägen kann.

Als Hausaufgaben können Lb 105/65, 66 dienen.

1.2.6. Die Graphen der Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$ (LE 11; 1 Std.)

Den Schülern sind die Graphen der Tangens- und der Kotangensfunktion „im Groben" bereits aus den Betrachtungen zu den Eigenschaften dieser Funktionen bekannt; vgl. Unterrichtseinheit 1.2.4.
Das Ziel dieser Stunde ist die *genauere graphische Darstellung der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion im Grundintervall* $0 < x < \pi$ *sowie das Skizzieren* der entsprechenden Graphen *in einem größeren Intervall* mit Hilfe der Kurvenschablone für die Tangensfunktion.

Zu Beginn der Stunde werden die Schüler aufgefordert, selber zu überprüfen, in welchem Maße sie sich die speziellen Funktionswerte gedächtnismäßig eingeprägt haben. Dabei wird vor allem mit reellen Zahlen als Elemente des Definitionsbereiches gearbeitet, also mit $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ usw., weniger mit den Winkelmaßen 30°, 45°, usw.
Anschließend wird den Schülern der Gebrauch der Kurvenschablone für $y = \tan x$ erläutert, und es werden Skizzen im Intervall $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ angefertigt. Dazu werden zunächst die Nullstellen für $y = \tan x$ (Nullstellen von $y = \sin x$) markiert, und es werden Parallelen zur Ordinatenachse an den Stellen angedeutet, an denen $y = \tan x$ nicht definiert ist (Nullstellen von $y = \cos x$). Hierfür verwendet man zweckmäßigerweise die Sinuskurve der Schablone, um die Stellen $k \cdot \frac{\pi}{2}$ auf der Abszissenachse und die Einheiten auf Abszissen- und Ordinatenachse zu markieren.
Nachdem die Tangensfunktion dargestellt ist, wird nachträglich noch angedeutet, daß $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ und $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ ist.
Selbständig skizzieren die Schüler den Graph der Kotangensfunktion in ein gesondertes Koordinatensystem.
Dann wird unter Anleitung durch den Lehrer die Tangensfunktion auf Millimeterpapier im Intervall $0 \leq x \leq \pi$ graphisch dargestellt. Hierzu wird die Wertetabelle mit Näherungswerten auf Lb 27 verwendet.

x	0	$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}5$	$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}8$	$\frac{\pi}{3} \approx 1{,}0$	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}6$
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}6$	1	$\sqrt{3} \approx 1{,}7$	–

x	$\frac{4}{6}\pi \approx 2{,}1$	$\frac{3}{4}\pi \approx 2{,}4$	$\frac{5}{6}\pi \approx 2{,}6$	$\pi \approx 3{,}1$
$\tan x$	$-\sqrt{3} \approx -1{,}7$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx -0{,}6$	0

Als Koordinateneinheit auf beiden Achsen wird 1 LE ≙ 2 cm gewählt. Die Schüler verbinden die Punkte aus freier Hand. Ihnen wird mitgeteilt, daß der Graph der Tangensfunktion die Abszissenachse unter einem Winkel von 45° schneidet.

Als Hausaufgabe stellen die Schüler die Kotangensfunktion im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ mit Hilfe einer Wertetabelle, die analog zur Wertetabelle für $y = \tan x$ aufgestellt wird, graphisch dar. Den Graph zeichnen sie in dasselbe Koordinatensystem (eventuell andersfarbig) ein, in das sie bereits den Graph der Tangensfunktion aufgenommen haben.

1.3. Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten

1.3.1. Beziehungen zwischen Funktionswerten bei gleichem Winkel (LE 12; 2 Std.)

Den Schülern wurde durch den bisherigen Unterrichtsverlauf bereits bewußt, daß die vier Winkelfunktionen untereinander in einem engen Zusammenhang stehen. In diesen beiden Stunden werden *weitere Zusammenhänge zwischen den Winkelfunktionen in Form von Gleichungen* erarbeitet. Bis auf Ausnahmen sind es für den Bereich der reellen Zahlen allgemeingültige Gleichungen, durch die diese Zusammenhänge zum Ausdruck gebracht werden. Das trifft übrigens auch auf die in den Unterrichtseinheiten 1.3.2. und 1.3.3. zu behandelnden Komplementwinkelbeziehungen und Quadrantenbeziehungen zu.

Lp 39 und Lp 42 verlangen das Herleiten und feste Einprägen der Gleichungen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\tan x \cdot \cot x = 1$.
Der Charakter der Allgemeingültigkeit wird durch die Formulierung in Form einer Allaussage zum Ausdruck gebracht: „Für alle $x (x \in P)$ gilt: ...". Mit diesen fachspezifischen Redeweisen wurden die Schüler bereits in Klasse 8 vertraut gemacht; vgl. Lp 8/50. Sie lernten hier auch, wie wichtige Gesetzmäßigkeiten (Kommutativität und Assoziativität der Addition und Multiplikation sowie die Distributivität) durch Angabe des jeweiligen Grundbereiches der Variablen sowie durch Verwendung von Quantifikatoren als wahre Aussagen formuliert werden.
Im Zusammenhang mit der Behandlung der Potenzgesetze in Klasse 9 wurde die Variablenbindung mit Hilfe von „für alle" und „es gibt" wiederholt; vgl. Lp 9/29. Man sollte den Schülern diesen Sachverhalt auch dadurch stärker bewußt machen, indem etwa folgende anderslautende Formulierungen verwendet werden.
„Welche reelle Zahl x ich auch wähle, stets ist die Summe der Quadrate des Sinus dieser Zahl und des Kosinus dieser Zahl konstant, und zwar gleich 1."
„Es läßt sich keine reelle Zahl x angeben, für die $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nicht gelten würde."
„Die Gleichung $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$ hat keine Lösung. Das gleiche trifft für alle Gleichungen $\sin^2 x + \cos^2 x = a (a \in P;\ a \neq 1)$ zu."
Schließt man die Zahlen $k \frac{\pi}{2}$ $(k \in G)$ aus, weil für diese Zahlen $\tan x \cdot \cot x$ ohnehin nicht definiert ist, so ist auch $\tan x \cdot \cot x = 1$ für die Menge der um diese Zahlen verminderte Menge der reellen Zahlen allgemeingültig.
Man kann analog zur Behandlung der Gleichung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ auch hier etwa folgende anderslautende Formulierungen für die Aussage „Für alle Zahlen $x \left(x \in P;\ x \neq k \frac{\pi}{2};\ k \in G\right)$ gilt $\tan x \cdot \cot x = 1$" geben, um das Verständnis der Schüler für den Inhalt dieser Beziehungen zu erhöhen.

„Welche reelle Zahl außer $k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in G)$ ich auch wähle, das Produkt aus dem Tangens und dem Kotangens dieser Zahl ist immer konstant, und zwar gleich 1."

„Mit Ausnahme der Zahlen $k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in G)$, für die entweder $\tan x$ oder $\cot x$ nicht definiert ist, läßt sich keine reelle Zahl angeben, für die das Produkt aus $\tan x$ und $\cot x$ nicht gleich 1 wäre."

„Die Gleichung $\tan x \cdot \cot x = 4$ und alle anderen Gleichungen $\tan x \cdot \cot x = a$ $\left(a \in P;\ a \neq 1;\ x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ haben keine Lösung." „Tangens und Kotangens einer gegebenen Zahl sind zueinander reziprok. Ist beispielsweise $\tan x = \frac{1}{2}$, dann ist $\cot x = 2$, denn $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$."

Lp 42 verlangt ferner das Darstellen von $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ allein durch $\sin x$ und das Darstellen von $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$, allein durch $\cos x$ unter Verwendung der Umformungsregel für Gleichungen und der Wurzelgesetze, wobei jeweils der zulässige Grundbereich der Variablen anzugeben ist. Lp 39 verlangt, das Tafelwerk zu benutzen.

Im Tafelwerk auf Seite 41 (die Tabelle Lb 29 ist danach angelegt) sind die Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen als Beziehungen zwischen ihren Quadranten formuliert.

Nehmen wir als Beispiel die Darstellung von $\tan x$ allein durch $\sin x$.

Die Tabelle wäre, bezogen auf dieses Beispiel, in folgender Weise zu verwenden.

„Für alle Zahlen $x\left(x \in P;\ x \neq (2k+1)\ \frac{\pi}{2};\ k \in G\right)$ gilt

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}." \tag{1}$$

Die Zahlen $(2k+1)\ \frac{\pi}{2}$ müssen ausgeschlossen werden, weil für sie $\tan x$ nicht definiert, ferner $\sin x = 1$ und folglich $1 - \sin^2 x = 0$ ist.

Lp 39 verlangt jedoch die Darstellung von $\tan x$ als Funktion von $\sin x$. Zur Verdeutlichung dieser Forderung führt der Lehrplan das Beispiel

$$\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right) \tag{1'}$$

an.

Zur Information für den Lehrer soll kurz auf Probleme eingegangen werden, die beim Übergang von Gleichung (1) zu Gleichung (1') auftreten.

Die Gleichung (1') ist für $x \in P;\ x \neq (2k+1)\ \frac{\pi}{2};\ k \in G$ auf Grund der Definition der Wurzel als nichtnegative Zahl nur für diejenigen reellen Zahlen x erfüllt, die für $y = \tan x$ und $y = \sin x$ gleiches Vorzeichen haben oder eine Nullstelle besitzen. Aus einer Zeichnung der Graphen von $y = \sin x$ und $y = \tan x$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem erkennt man sofort, daß diese Voraussetzungen z. B. in den Intervallen $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{2}\pi < x < \frac{5}{2}\pi$, allgemein in den Intervallen $(4k-1)\ \frac{\pi}{2} < x < (4k+1)\ \frac{\pi}{2}$ $(k \in G)$ erfüllt sind.

Analoge Betrachtungen muß man anstellen, wenn man von der allgemeingültigen Gleichung

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1}$$

zu

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \tag{2}$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \tag{3}$$

übergeht. Die Gleichungen (1) und (2) sind einander äquivalent, d. h., beide Gleichungen besitzen ein und dieselbe Lösungsmenge, nämlich P. Beim Übergang von Gleichung (2) zu Gleichung (3) verändert sich die Lösungsmenge. Da die Wurzel eine nichtnegative Zahl ist, kommen nur solche Zahlen als Lösung in Frage, für die auch $\sin x$ nichtnegativ ist, d. h., die Lösungsmenge der Gleichung (3) besteht beispielsweise aus den Intervallen $-2\pi \leq x \leq -\pi$; $0 \leq x \leq \pi$; $2\pi \leq x \leq 3\pi$, allgemein $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\ \pi (k \in G)$.

Durch die Gleichung

$$\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x} \qquad (3')$$

werden die dazwischen liegenden Intervalle, z. B. $-\pi \leqq x \leqq 0$; $\pi \leqq x \leqq 2\pi$, allgemein $(2k+1)\pi \leqq x \leqq (2k+2)\pi$ $(k \in G)$, erfaßt, in denen die Funktionswerte von $y = \sin x$ negative Vorzeichen haben oder gleich Null sind.
Eine zur Gleichung (2) äquivalente Gleichung ist

$$|\sin x| = \sqrt{1-\cos^2 x} \; (x \in P).$$

Die Anwendung der Definition des absoluten Betrages

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x \text{ für } \sin x \geqq 0 \\ -\sin x \text{ für } \sin x < 0 \end{cases}$$

führt auf die Gleichungen (3) bzw. (3').
Mit dieser Problematik kann man sich ausführlich mit Hilfe des Beitrages von Boox [6] vertraut machen.

Die *Aufteilung des Stoffes* auf die beiden Stunden dieser Unterrichtseinheit könnte folgendermaßen vorgenommen werden.
1. Stunde $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan x \cdot \cot x = 1$
2. Stunde Herleiten weiterer Beziehungen, Betrachtungen über Lösungsmengen

Zu Beginn der *1. Stunde* sollten einige Übungen durchgeführt werden, durch die das inhaltliche Verständnis der Problematik erleichtert und das zügige Fortschreiten bei der Herleitung der Gleichungen gewährleistet wird.

Übungen: $(\sqrt{3})^2$; $(\frac{1}{3}\sqrt{3})^2$; 0^2; $(\tan \frac{\pi}{6})^2$; $(\cos \frac{\pi}{6})^2$
$(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2$; $(\frac{1}{3}\sqrt{2})^2$; $(-\frac{1}{2})^2$; $(\sin \pi)^2$; $(\sin \frac{\pi}{6})^2$

Vertrautmachen der Schüler mit der Schreibweise, z. B.

$$\sin^2 x =_{\text{Def}} (\sin x)^2$$

Die Vereinbarung über die Schreibweise und die Sprechweise (Sinus Quadrat $\frac{\pi}{6}$) wird mitgeteilt und damit begründet, daß häufig Quadrate der Winkelfunktionen auftreten und durch diese Vereinbarung eine Vereinfachung der Schreibweise eintritt (die Klammern entfallen).

Übungen: $\tan^2 \frac{\pi}{4} = (\tan \frac{\pi}{4})^2 = 1^2 = 1$;
$\cos^2 \frac{\pi}{3} = (\cos \frac{\pi}{3})^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$;
$\sin^2 \frac{\pi}{3}$; $\tan^2 \frac{\pi}{3}$; $\cos^2 \frac{\pi}{3}$

Auf den Unterschied zwischen $\sin^2 \pi$ und $\sin \pi^2$ kann an Hand von Lb 28, Beispiel A 15, eingegangen werden.
Unter Verwendung der berechneten Quadrate werden Summen gebildet.

$$\sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$
$$\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

Es wird die Vermutung ausgesprochen, daß der Satz „Die Summe der Quadrate des Sinus und des Kosinus einer reellen Zahl ist gleich 1" nicht nur in diesen speziellen Fällen, sondern allgemein gilt. Es wird der zu beweisende Satz formuliert:
Für alle Zahlen $x (x \in P)$ gilt: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
Der Beweis wird in gemeinsamer Arbeit an der Tafel geführt; vgl. Lb 28.

Anschließend erarbeiten die Schüler den Beweis für die Gleichung $\tan x \cdot \cot x = 1$ selbständig mit Hilfe von Lb 29. Ein Schüler trägt ihn an der Tafel vor.

Hausaufgaben: Aufgaben zur Untersuchung des Nenners, z. B. Lb 105/67, 68.

Zu Beginn der 2. *Stunde* werden die Erkenntnisse der 1. Stunde kurz wiederholt, wobei besonders das inhaltliche Verständnis für die Allgemeingültigkeit der Gleichungen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\tan x \cdot \cot x = 1$ vertieft wird. Dazu kann der Lehrer die oben angeführten anderslautenden Formulierungen für den inhaltlich gleichen Sachverhalt verwenden.
Im weiteren Verlauf der Stunde müssen die Fertigkeiten im Umformen von Gleichungen weiterentwickelt werden. Dabei ist zu vermeiden, daß die Schüler lediglich formal eine Gleichung nach der anderen umformen. Vielmehr sollen auch diese Tätigkeiten dazu beitragen, die Erkenntnisse der Schüler über Zusammenhänge zwischen bestimmten mathematischen Begriffen zu vertiefen.
Beim Umformen von Gleichungen muß stets sorgfältig untersucht werden, ob eine Veränderung der Lösungsmenge eintritt.
Es wird gemeinsam die Aussage im Lb 29 durchgelesen, daß man mit Hilfe der beiden Gleichungen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\tan x \cdot \cot x = 1$ und der Definitionsgleichungen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ weitere Beziehungen herleiten kann.
Es wird herausgearbeitet, daß diese Beziehungen so beschaffen sind, daß man jede Winkelfunktion einzeln durch die Sinusfunktion oder die Kosinusfunktion ausdrücken kann.
An der Tafel werden die Umformungen von

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

in

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

vorgenommen.
Nun sind die zu Beginn der Ausführungen zu dieser Unterrichtseinheit dargestellten Betrachtungen anzustellen.
Die Gleichung $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ soll so umgeformt werden, daß links nicht $\sin^2 x$, sondern $\sin x$ selbst steht.

Im folgenden wird eine *Variante* für das weitere Vorgehen dargestellt, bei der Gedankengänge aufgegriffen werden, die bei der Erarbeitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen angewandt werden; vgl. Lb 9/122.

Der Lehrer erinnert an die Erarbeitung der Lösungsformel für die quadratische Gleichung und führt folgende Umformungen durch.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad (1)$$
$$\searrow \quad (\sin x)^2 = \left(\sqrt{1 - \cos^2 x}\right)^2$$
$$(\sin x)^2 - \left(\sqrt{1 - \cos^2 x}\right)^2 = 0$$
$$\left(\sin x + \sqrt{1 - \cos^2 x}\right) \cdot \left(\sin x - \sqrt{1 - \cos^2 x}\right) = 0$$

Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist.

$$\sin x + \sqrt{1 - \cos^2 x} = 0$$
$$\sin x - \sqrt{1 - \cos^2 x} = 0$$

Hieraus erhält man die folgenden zur Gleichung (1) äquivalenten Gleichungen

$$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$$
$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x},$$

durch die wieder die Menge aller reellen Zahlen als Lösungsmenge erfaßt ist. Betrachtungen darüber, welche Intervalle Lösungsmenge zu welcher der beiden Gleichungen sind, müssen sich anschließen; vgl. die Ausführungen zu Beginn dieser Unterrichtseinheit.
An diesem Beispiel wird den Schülern bewußt, daß eine Veränderung der Lösungsmenge eintritt, wenn man von einer Gleichung, in der die *Quadrate* der Winkelfunktionen auftreten, durch Radizieren auf beiden Seiten zu einer Gleichung übergeht, in der auf einer Seite der Funktionswert selbst (hier $\sin x$) und auf der anderen Seite eine Wurzel ohne negatives Vorzeichen (hier $\sqrt{1-\cos^2 x}$) steht.
Legt man keinen Wert auf Vollständigkeit und beschränkt sich, wie es im Beispiel auf Lp 39 geschieht, auf das Intervall $0<x<\frac{\pi}{2}$, dann vereinfacht sich die Umformung wesentlich. In diesem Falle sind die Zahlen $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ für alle x mit $0<x<\frac{\pi}{2}$ positiv. Auf Grund der Monotonie der Funktion $y=x^2$ für $x>0$ (d. h.: Für $a\geqq 0$ gilt $a<b$ genau dann, wenn $a^2<b^2$) kann man auf beiden Seiten der Gleichung radizieren, ohne daß sich die Lösungsmenge ändert.

Beispiel:

$$\tan^2 x=\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \qquad \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{\tan^2 x}=\sqrt{\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}}$$

$$\sqrt{\tan^2 x}=\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \qquad \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$

1.3.2. Komplementwinkelbeziehungen zwischen einer Winkelfunktion und ihrer Kofunktion (LE 13; 1 Std.)

Die *Komplementwinkelbeziehungen* für die Funktionen $y=\sin x$ und $y=\cos x$ einerseits sowie für die Funktionen $y=\tan x$ und $y=\cot x$ andererseits sind, bezogen auf die Definitionsbereiche dieser Funktionen, allgemeingültige Gleichungen. Wenn sie auch später beim Ermitteln von Winkelfunktionen mit Hilfe von Tafel oder Rechenstab nur auf Zahlen im Intervall $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ angewandt werden, sollte den Schülern dennoch in dieser Unterrichtseinheit die Allgemeingültigkeit bewußt gemacht werden. Ihnen muß auch mitgeteilt werden, daß ein Beweis für den allgemeinen Fall eigentlich erforderlich ist.
Die Komplementwinkelbeziehungen sowie später die Quadrantenbeziehungen sollten in enger Verbindung mit den Symmetrieeigenschaften der Graphen der Winkelfunktionen behandelt werden.
Zunächst werden die Komplementwinkelbeziehungen hergeleitet. Ausgangspunkt kann das Erarbeiten der Vermutung sein, daß der Graph der Kosinusfunktion im Intervall $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ symmetrisch zum Graph der Sinusfunktion bezüglich der Parallelen zur Ordinatenachse durch den Punkt $P\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ ist. Diese Vermutung kann gemeinsam an der Tafel erarbeitet werden, oder die Schüler können den Auftrag erhalten, die Graphen von $y=\sin x$ und $y=\cos x$ sowie die Graphen von $y=\tan x$ und $y=\cot x$ jeweils im Intervall $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ in ein und dasselbe Koordinatensystem zu zeichen. Eine solche Zeichung kann auch in den Hausaufgaben vorbereitet werden.
Anschließend wird das Ziel gestellt, die Symmetrieeigenschaft arithmetisch zu fassen, um einen Beweis führen zu können.

Aus der Zeichnung (Bild 79/1) gewinnt man die Beziehungen

$$\sin x_1 = \cos x_2; \tag{1}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Hieraus erhält man durch Umformen von Gleichung (2) und Einsetzen in Gleichung (1) folgende Aussagen.

1. Fall: $x_1 = \frac{\pi}{2} - x_2$

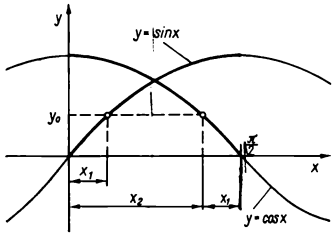
Für alle x_2 mit $0 \leqq x_2 \leqq \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right) = \cos x_2.$$

2. Fall: $x_2 = \frac{\pi}{2} - x_1$

Für alle x_1 mit $0 \leqq x_1 \leqq \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\sin x_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right).$$



79/1

Das sind die Komplementwinkelbeziehungen für $y = \sin x$ und $y = \cos x$, die bei Einführung der Variablen x an Stelle von x_1 bzw. x_2 die Formen annehmen, die im Lb 30, Satz A 10, angeführt sind.
Diese Gleichungen sind die arithmetische Fassung der Symmetrieeigenschaften, die als bestätigt angesehen werden können, wenn die Komplementwinkelbeziehungen bewiesen sind.
Dieser Beweis muß durch Zurückführen auf die Definitionen und einige behandelte Sätze erbracht werden; vgl. Lb 30f.
Der Beweis für $y = \tan x$ und $y = \cot x$ kann entsprechend Lb 31 als Hausaufgabe gestellt werden. Eine solche Hausaufgabe ist dann unbedingt im folgenden Unterricht zum Bestandteil von Leistungskontrollen zu machen.

Nunmehr wird der Begriff „Kofunktion" eingeführt. Die Kenntnisse über Komplementwinkelbeziehungen werden gefestigt.
Zum Begriff „Komplementwinkel":
In rechtwinkligen Dreiecken erfüllen die der Hypotenuse anliegenden Winkel α und β die Gleichung $\alpha + \beta = 90°$. Solche Winkel nennt man allgemein Komplementwinkel.
Da man die Elemente des Definitionsbereiches bei Winkelfunktionen selbst oft auch Winkel nennt, wird die Bezeichnung „Komplementwinkel" von Winkeln im rechtwinkligen Dreieck auf reelle Zahlen x_1, x_2 übertragen, deren Summe gleich $\frac{\pi}{2}$ ist.
Hierauf beruhen auch die Bezeichnungen „Komplementwinkelbeziehungen" und „Kofunktion".
Lb 107/79 bis 87 bietet vielfältiges Übungsmaterial zur Festigung des Begriffes „Komplementwinkel" und der Komplementwinkelbeziehungen.
In Lb 107/79, 80 wird durch Bilden der Summe die geforderte Entscheidung getroffen.

Beispiele:

79. a) $\{14°; 76°\}$

$14° + 76° = 90°$, also sind 14° und 76° die Maße von Komplementwinkeln.

79. c) $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\right\}$

$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \pi$, also sind $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{5}{6}\pi$ keine Komplementwinkel.

In Lb 107/83 bis 86 werden die Komplementwinkelbeziehungen angewendet.

Beispiele:

83. $\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6}$, denn es gilt $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

85. a) $\sin \frac{\pi}{5} = \cos x$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3}{10}\pi$$

85. c) $\tan \frac{2}{3} = \cot x$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3\pi - 4}{6}$$

85. e) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos x$

$$x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{6}\pi$$

In Lb 107/87 wird das Problem der arithmetischen Erfassung von Symmetrieeigenschaften behandelt. Diese Aufgabe kann auch zur Vorbereitung auf das Behandeln der Komplementwinkelbeziehungen verwendet werden.

1.3.3. Quadrantenbeziehungen (LE 14; 2 Std.)

Das Ziel der Behandlung der Quadrantenbeziehungen besteht darin, *Voraussetzungen zum Ermitteln von Funktionswerten* für Zahlen x mit $\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ zu schaffen und weitere Symmetrieeigenschaften der Graphen der Winkelfunktionen arithmetisch zu erfassen. Dabei ist klar, daß in diesen zwei Stunden keine Fertigkeiten im Anwenden der Quadrantenbeziehungen entwickelt werden können. Diese Fertigkeiten werden erst in den folgenden Stunden im Zusammenhang mit dem Ermitteln von Winkelfunktionswerten mit Hilfe von Rechenstab und Tafel erreicht.

Das Schwergewicht der *1. Stunde* liegt auf dem Erarbeiten der Problemstellung und dem Beweis einiger Quadrantenbeziehungen. In der *2. Stunde* erfolgen mit Hilfe eines Handlungsschemas Übungen im Ermitteln von Winkelfunktionswerten.

Zu Beginn der *1. Stunde* werden die Definitionen von $\sin x$ und $\cos x$ am Kreis mit beliebigem Radius und die Spezialisierung auf den Einheitskreis wiederholt. Dann zeichnen die Schüler den Graph der Sinusfunktion im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ mit der Koordinateneinheit 1 LE $\triangleq$ 2 cm auf der Ordinatenachse und π LE $\triangleq$ 6 cm auf der Abszissenachse in ihre Hefte, ein Schüler arbeitet an der Tafel. An Hand dieser Skizze werden die einleitenden Betrachtungen zu Lerneinheit A 14 im Lb 31 durchgeführt.
Das weitere Vorgehen erfolgt analog zum Erarbeiten der Komplementwinkelbeziehungen. Die aus der Zeichnung herausgelesenen, zunächst nur als Vermutung anzusehenden Symmetrieeigenschaften bedürfen eines Beweises. Zu diesem Zweck werden diese geometrischen Eigenschaften in Form von Gleichungen erfaßt, die dann bewiesen werden.
Mit Hilfe von Lb 32, Bild A 28, werden einige solche Symmetrieeigenschaften in Form von Gleichungen dargestellt, z. B.

$$\sin(\pi - x) = \sin x;$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x.$$

Entsprechend Lb 32 wird hierfür in gemeinsamer Arbeit an der Tafel der Beweis erbracht. Die Schüler beweisen selbständig weitere Quadrantenbeziehungen und tragen die Beweise vor.

Abschließend wird noch einmal darauf hingewiesen, daß nach dem Beweisen der Quadrantenbeziehungen die Symmetrieeigenschaften der Graphen der Winkelfunktionen bestätigt sind. Damit werden also bestimmte Eigenschaften der Funktionen auf geometrische Weise zum Ausdruck gebracht.

Als Hausaufgabe kann der Beweis der Quadrantenbeziehungen für die Tangensfunktion und die Kotangensfunktion verlangt werden. Im folgenden Unterricht haben die Schüler den Nachweis zu führen, daß sie diese Aufgabe bewältigt haben.

In der *2. Stunde* wird die Anwendung der Quadrantenbeziehungen beim Berechnen von Funktionswerten behandelt. Es wird die Frage aufgeworfen, für welche Intervalle eine detaillierte Tabelle der Winkelfunktionswerte aufgestellt werden müßte, mit deren Hilfe man alle anderen Funktionswerte, d. h. für alle Elemente des Definitionsbereiches, ermitteln kann.
Es wird herausgearbeitet, daß man das Ermitteln der Winkelfunktionswerte auf Grund der Periodizität der vier Winkelfunktionen erstens auf das Grundintervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ und unter Anwendung der Quadrantenbeziehungen zweitens auf das Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ zurückführen kann.
Für das Berechnen von Funktionswerten mit Hilfe der Quadrantenbeziehungen empfiehlt sich ein schrittweises Vorgehen in einer bestimmten Reihenfolge. Im Lb 33 ist hierzu ein Vorschlag dargestellt. Dieses Handlungsschema kann durch die Schüler selbständig durchgearbeitet und anschließend durch Schüler an der Tafel für weitere Beispiele vorgetragen werden.
Bevor weitere Funktionswerte ermittelt werden, ist das Üben einzelner Schritte des Handlungsschemas angebracht. Dazu können Aufgaben des Aufgabenteiles herangezogen werden.
Beim Lösen von Lb 107/88 bis Lb 108/91 entscheiden die Schüler, ob
1. sich der größere Winkel durch den kleineren Winkel x in einer der Formen $2\pi - x$, $\pi - x$, $\pi + x$ darstellen läßt,
2. das Vorzeichen dem Quadranten entspricht, in dem der größere Winkel liegt.

Beispiele:

88. a) sin 43°; sin 317°
   1. $317° = 360° - 43°$
   2. 317° liegt im 4. Quadranten, also ist $\sin 317° < 0$.
   Die zweite Bedingung ist nicht erfüllt.
   Ergebnis: $\sin 43° \neq \sin 317°$

88. b) cos 191°; −cos 11°
   1. $191° = 180° + 11°$
   2. 191° liegt im 3. Quadranten, also ist $\cos 191° < 0$.
   Ergebnis: $\cos 191° = -\cos 11°$

Beim Lösen von Lb 108/92, 93 dargestellt als Aufgaben zum Lösen von Gleichungen, führen die Schüler Zerlegungsübungen durch.

Beispiel:

92. a) $180° = 143° + x$
   $180° = 143° + 37°$
   $x = 37°$

Beim Lösen von Lb 108/94, 95 führen die Schüler ebenfalls Zerlegungsübungen durch.

Beispiel:

94. a) $125° = 180° - 55°$

Beim Lösen von Lb 108/98 bis 101, dargestellt als Aufgaben zum Lösen von Gleichungen, führen die Schüler Übungen durch
– zum Zerlegen des gegebenen Winkels;
– zum Ermitteln des Vorzeichens der Funktionswerte.

Beispiele:

98. a) $\sin 136° = a \cdot \sin x$

1. $136°$ liegt im 2. Quadranten, also ist
   $\sin 136° > 0$.
   $a = +1$
2. $136° = 180° - 44°$
   $x = 44°$

Ergebnis: Lösung der Gleichung $a = 1$; $x = 44°$
$\sin 136° = \sin 44°$

98. b) $\sin 227° = a \cdot \sin x$

1. $227°$ liegt im 3. Quadranten, also ist
   $\sin 227° < 0$
   $a = -1$
2. $227° = 180° + 47°$
   $x = 47°$

Ergebnis: Lösung der Gleichung $a = -1$; $x = 47°$
$\sin 227° = -\sin 47°$

Selbstverständlich ist nicht daran gedacht, daß sämtliche Aufgaben in diesen Stunden oder als Hausaufgaben zur nächsten Stunde gestellt werden sollen. In den folgenden Stunden, in denen Winkelfunktionswerte mit Hilfe von Rechenstab und Tafel ermittelt werden, sollten Aufgaben dieser Art immer wieder eingestreut werden.
Lb 108/96, 97 bringen Anwendungen der Quadrantenbeziehungen unter Verwendung der speziellen Funktionswerte für $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

1.3.4. Tafeln der Winkelfunktionswerte (LE 15 und 16; 3 Std.)

In den acht Stunden der Unterrichtseinheiten 1.3.4. bis 1.3.6. wird an neuem Stoff im wesentlichen das *Handhaben von Tafel und Rechenstab* beim Arbeiten mit Winkelfunktionen behandelt.

Die mathematischen Voraussetzungen zum Ermitteln von Funktionswerten beliebiger Winkel wurden in den vorangegangenen Unterrichtsstunden geschaffen. Es kommt nun darauf an, die Übungen zum Ermitteln von Funktionswerten zur umfassenden Wiederholung wichtiger Kenntnisse über Eigenschaften der Winkelfunktionen zu nutzen und die Fähigkeiten der Schüler zum Anwenden dieser Eigenschaften zu erhöhen. In diesem Zusammenhang werden die Schüler systematisch auf die Erfüllung der Lehrplananforderungen vorbereitet, die sich in der Kontroll-

arbeit widerspiegeln sollten. Deshalb ist es zweckmäßig, die Kontrollarbeit bereits zu Beginn dieser acht Stunden ausgearbeitet vorliegen zu haben.
Auf der Grundlage des Einblicks in die konkrete Klassensituation sollte für diese drei Unterrichtseinheiten festgelegt werden, was bis zur Kontrollarbeit wiederholt werden muß. Das sollte jedoch stets mit dem Blick auf die Lehrplanziele erfolgen.
Der Charakter der Wiederholung kommt in den Unterrichtseinheiten 1.3.4. und 1.3.6. stärker zum Ausdruck als in der Unterrichtseinheit 1.3.5. Letztere umfaßt zwei Stunden, die vollständig zum Erarbeiten der Skalen des Rechenstabes benötigt werden. Unterrichtseinheit 1.3.6. hat den Charakter einer Gesamtwiederholung ohne Einführung neuen Stoffes.

Die *Aufteilung des Stoffes* auf die drei Stunden der Unterrichtseinheit 1.3.4. könnte folgendermaßen erfolgen.

1. Stunde: Anwenden der Tafeln der Winkelfunktionswerte zum Ermitteln von Funktionswerten zu gegebenen Winkeln
2. Stunde: Anwenden der Tafeln der Winkelfunktionswerte zum Ermitteln von Winkeln bei gegebenem Funktionswert
3. Stunde: Anwenden der Tafeln der Winkelfunktionswerte unter besonderer Berücksichtigung von reellen Zahlen als Elemente des Definitionsbereiches

In der *1. Stunde* werden die Schüler an die beim Erarbeiten der Quadrantenbeziehungen gewonnene Erkenntnis erinnert, daß es für das Berechnen beliebiger Funktionswerte genügt, detaillierte Tafeln der Funktionswerte für das Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ aufzustellen. Zur Verdeutlichung dieses Gedankens sollte der Lehrer an der Tafel demonstrieren, wie diese Tabellen aufgebaut sein müßten.
In den folgenden Beispielen werden die Elemente x des Definitionsbereiches mit einer Genauigkeit von zwei Stellen hinter dem Komma angenommen.

x	0	0,01	0,02	...	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$
$\sin x$					

x	0	0,01	0,02	...	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$
$\cos x$					

x	0	0,01	0,02	...	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$
$\tan x$					

x	0	0,01	0,02	...	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$
$\cot x$					

Den Schülern wird nun die Aufgabe gestellt, zu überlegen, ob man durch das Ausnutzen weiterer gesetzmäßiger Zusammenhänge zwischen den Winkelfunktionen die Anzahl der Tabellen noch mehr verringern kann.
Es wird herausgearbeitet, daß man auf Grund der Komplementwinkelbeziehungen

für Sinus- und Kosinusfunktion bzw. für Tangens- und Kotangensfunktion jeweils nur eine Tabelle benötigt. Es folgt das Erläutern der Tafel der Funktion $y = \sin x$.

1. Die *Elemente des Definitionsbereiches* sind *hier Winkel im Gradmaß;* also ist für die Anwendung auf reelle Zahlen die Umwandlung der gegebenen reellen Zahl in Gradmaß erforderlich.
2. Die *Funktionswerte der Tafel sind in der Mehrzahl Näherungswerte.* Ausnahmen sind $\sin 0° = 0$; $\sin 30° = 0{,}5$; $\sin 90° = 1$.
   Dieser Sachverhalt wird am Beispiel sin 60° näher erläutert. Der exakte Funktionswert ist $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, in der Tafel findet man 0,8660. Daß 0,866 nicht gleich $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, schließen die Schüler daraus, daß $\sqrt{3}$ als irrationale Zahl durch einen nichtperiodischen unendlichen Dezimalbruch dargestellt wird, und folglich auch $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ durch einen unendlichen nichtperiodischen Dezimalbruch dargestellt wird.
   Durch das Bearbeiten von Lb 34, Auftrag A 49, werden die Schüler veranlaßt, sich mit der Tatsache, daß die Tafelwerte Näherungswerte sind, noch eingehender vertraut zu machen. Der in diesem Auftrag geforderte Vergleich kann durch Quadrieren unter Berücksichtigung der Monotonie der Funktion $y = x^2 (0 \leq x)$, d. h., $x_1 < x_2$ genau dann, wenn $x_1^2 < x_2^2$, vorgenommen werden.

$$\begin{array}{l} 0{,}866^2 = 0{,}749956 \\ \underline{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0{,}75} \\ 0{,}749956 < 0{,}75 \end{array}$$

   Also $0{,}866^2 < \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2$,

   also $0{,}866 < \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

   folglich $0{,}866 < \sin 60°$.

   Der Tafelwert ist folglich kleiner als der genaue Funktionswert sin 60°.
   Im Interesse einer Vereinfachung der Schreibweise wird vereinbart, bei Verwendung von Funktionswerten der Tafel (oder auch später des Rechenstabes) das Gleichheitszeichen zu setzen, obwohl z. B. $\sin 35° \approx 0{,}5736$ zu schreiben wäre.
3. *Ermitteln einiger Funktionswerte für* $y = \sin x$
   a) für Winkel mit ganzzahliger Maßzahl
   b) für Maßzahlen mit einer Stelle hinter dem Komma
   Den Schülern kann mitgeteilt werden, daß man mit Hilfe eines Verfahrens, genannt „Interpolation", Näherungswerte der Funktionswerte für Winkel, deren Maßzahlen zwei Stellen hinter dem Komma besitzen, ermitteln kann. Liegen Winkel vor, deren Maßzahlen mehr als zwei Stellen hinter dem Komma haben, muß ein umfangreicheres Tafelwerk herangezogen werden.
   Im folgenden Unterricht werden die Tafeln ohne Interpolation verwendet, also für Winkel mit Maßzahlen bis zu einer Stelle hinter dem Komma; vgl. Lp 42.
   Der Lehrer weist nochmals auf die Irrationalität der Funktionswerte hin und damit auf die Notwendigkeit des Rundens beim Arbeiten mit solchen Zahlen.
   Die Schüler sollen erkennen, daß letztlich die praktischen Bedürfnisse bestimmen, ab welcher Stelle zu runden ist.
   Der Verzicht auf das Interpolieren wird ihnen aus solchen Überlegungen heraus begreiflich erscheinen.
4. *Ermitteln einiger Funktionswerte für* $y = \cos x$
   a) für Winkel mit ganzzahliger Maßzahl
   b) für Maßzahlen mit einer Stelle hinter dem Komma

Nach Behandlung dieser vier Problemkreise kann man folgendermaßen fortfahren:
Die gleichen Betrachtungen wie unter den soeben erläuterten Punkten 1. bis 4. werden sofort an der Tafel für $y = \tan x$ ($y = \cot x$) durchgeführt.
Die bei $y = \sin x$ ($y = \cos x$) gewonnenen Erkenntnisse werden in einem neuen Zusammenhang angewandt und gefestigt. Dabei muß auf die Besonderheiten der Tafel für $y = \tan x$ gegenüber der Tafel für $y = \sin x$ eingegangen werden.
Da der Wertebereich von $y = \tan x$ im Intervall $0° \leqq x < 90°$ aus der Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen x besteht, sind in der Tafel die Übergänge zu beachten, z. B. von 4,959 zu 5,005 (Bedeutung des Zeichens * bei *005). Das trifft allerdings nur für die rechte Tafel zu, also für Winkel, die größer als 45° sind.

An einigen Beispielen wird anschließend der Gedanke wieder aufgegriffen, das Ermitteln der Funktionswerte zu beliebigen Winkeln auf die Winkel im 1. Quadranten zurückzuführen.
Entsprechend der bereits bekannten Handlungsvorschrift werden einige Berechnungen durchgeführt (die Schüler skizzieren aus dem Gedächtnis die Graphen der Sinus- und der Kosinusfunktion).

Beispiele:

1. $\sin 147° = \sin (180° - 33°)$
   $= \sin 33°$
   $= 0{,}5446$
2. $\tan 158° = \tan (180° - 22°)$
   $= -\tan 22°$
   $= -0{,}4040$

   Bereits bei diesem Beispiel sind die Schüler nachdrücklich darauf hinzuweisen, daß sie sich vor dem Aufsuchen der Funktionswerte immer überzeugen müssen, ob sie die richtige Tafel aufgeschlagen haben.
3. $\cos 215° = \cos (180° + 35°)$
   $= -\cos 35°$
   $= -0{,}8192$
4. $\sin 425° = \sin (360° + 65°)$
   $= \sin 65°$
   $= 0{,}9063$
5. $\tan 587° = \tan (360° + 227°)$
   $= \tan 227°$
   $= \tan (180° + 47°)$
   $= \tan 47°$
   $= 1{,}072$

In der *2. Stunde* wird beim Anwenden der Tafeln der Winkelfunktionswerte zum Ermitteln von Winkeln bei gegebenen Funktionswerten in zwei Schritten vorgegangen.

1. Die Elemente x des Definitionsbereiches gehören dem Intervall $0° \leqq x \leqq 90°$ an.
2. Die Elemente x des Definitionsbereiches sind beliebige Gradmaße.

Zu 1.:

Es wird die Aufgabe gestellt, die Gleichung $\sin x = 0{,}5150$ ($0° \leqq x \leqq 90°$) zu lösen, d. h. für x einen Näherungswert zu finden, für den $\sin x = 0{,}5150$ ist.
Ergebnis: $x = 31°$; $\sin 31° = 0{,}5150$
Liegt der gegebene Funktionswert zwischen zwei Werten der Tafel, wird derjenige zum Ermitteln des Winkels herangezogen, der dem gegebenen am nächsten liegt.

Beispiel: $\sin x = 0{,}5160$
Aus der Tafel entnimmt man folgende Angaben

x	31,0°	x_0	31,1°
$\sin x$	0,5150	0,5160	0,5165

0,5160 liegt näher an 0,5165, also x_0 näher an 31,1°.
Ergebnis: $x = 31{,}1°$

Bei der Anwendung des Verfahrens auf die Kofunktionen von $y = \sin x$ bzw. $y = \tan x$ ist zu berücksichtigen, daß diese monoton fallend sind.

Beispiel: $\cos x = 0{,}9030$
Aus der Tafel entnimmt man folgende Angaben.

x	25,4°	x_0	25,5°
$\cos x$	0,9033	0,9030	0,9026

Ergebnis: $x_0 = 25{,}4°$

Zu 2.:

An Hand von Lb 35ff, Beispiele A 22, A 23, A 24, kann erarbeitet werden, wie man vorgehen muß. Es bietet sich an, die Schüler eines dieser Beispiele selbständig durcharbeiten und anschließend an der Tafel ein analoges Beispiel vortragen zu lassen.

Die *3. Stunde* dient dem Festigen der Kenntnisse und Fähigkeiten, die die Schüler in der 1. und 2. Stunde erworben haben. Außerdem wird wieder ins Bewußtsein gerufen, daß die Winkelfunktionen die Menge der reellen Zahlen als Definitionsbereich besitzen. Die in der 1. und 2. Stunde dieser Unterrichtseinheit erarbeiteten Fähigkeiten erscheinen also jetzt als Vorbereitung auf die eigentlichen Übungen im Ermitteln der Funktionswerte der Winkelfunktionen. Dieser Gedanke kann mit Hilfe von Lb 34, Beispiel A 20, erläutert werden.

1.3.5. Die Skalen der Winkelfunktionen auf dem Rechenstab (LE 17; 2 Std.)

In vielen Fällen bietet die Verwendung der Skalen der Winkelfunktionen auf dem Rechenstab Vorteile gegenüber der Benutzung der Tafeln. Das gilt vor allen Dingen für die *Anwendung der Winkelfunktionen auf Dreiecksberechnungen.* Deshalb müssen die Schüler *sichere Fertigkeiten in der Handhabung sowohl der Tafeln als auch des Rechenstabes* besitzen. Es ist deshalb zweckmäßig, bereits vor weiteren Übungen in der Handhabung der Tafeln der Winkelfunktionen die Skalen der Winkelfunktionen auf dem Rechenstab einzuführen und anschließend in der Unterrichtseinheit 1.3.6. abwechselnd bzw. wahlweise die Tafel oder den Rechenstab zu benutzen.

Die Darstellungen im Lehrbuch beziehen sich auf den Rechenstab „Mono-Rietz", der zum verbindlichen Unterrichtsmittel erklärt wurde; vgl. Lb 37, Bild A 32. Einige Schüler sind möglicherweise auch noch mit anderen Rechenstäben ausgerüstet. Dieser Umstand besitzt für die bisher behandelten Unterrichtseinheiten bis einschließlich 1.3.4. keine Bedeutung. Nunmehr aber sind besondere methodische

Überlegungen notwendig, um beim Arbeiten mit unterschiedlichen Rechenstäben die Ziele des Lehrplanes zu erfüllen.
Schwierig ist es vor allem für die Schüler, deren Rechenstäbe die Skalen der Winkelfunktionen auf der Rückseite der Zunge und überdies keine Einteilung in Zehntelgrade, sondern in Grad und Minuten haben.
Der Lehrer sollte sich deshalb rechtzeitig einen Überblick über die Ausstattung der Schüler verschaffen, um seinen Unterricht entsprechend planen zu können. Eine Möglichkeit zur Umgehung der Schwierigkeiten ist die Anschaffung einer gewissen Anzahl von Rechenstäben „Mono-Rietz" durch die Schule, die wenigstens für die Zeit der Einführung an die Schüler ausgeliehen werden können. Aber auch dann sollte man den Schülern, die andere Rechenstäbe besitzen, erläutern, wie sie diese benutzen können. Auf die Skale ST sollte bei der Einführung nur hingewiesen werden.

Die *Aufteilung des Stoffes* auf die beiden Stunden könnte folgendermaßen erfolgen.

1. Stunde: Skale S ($\sin x$; $\cos x$) im Intervall
$5{,}73° \leqq x \leqq 90°$ bzw. $0° \leqq x \leqq 84{,}27°$
2. Stunde: Skale T ($\tan x$; $\cot x$) im Intervall
$5{,}73° \leqq x \leqq 45°$ bzw. $45° \leqq x \leqq 84{,}27°$
und in Verbindung mit CI im Intervall
$45° \leqq x \leqq 84{,}27°$ bzw. $5{,}73° \leqq x \leqq 45°$

Zu Beginn der *1. Stunde* werden wiederholend einige Umrechnungen von Gradmaß in Bogenmaß mit Hilfe der Proportionaleinstellung des Rechenstabes durchgeführt An der Tafel sind die nachstehenden Tabellen vorbereitet (die halbfett gedruckten Ziffern fehlen vorerst).

a_1

α	100°	142°	170°	180°	320°	573°
arc α	**1,75**	**2,48**	**2,97**	**3,14**	**5,58**	**10**

b_1

α	10°	16°	18°	35°	57,3°
arc α	**0,175**	**0,28**	**0,314**	**0,612**	**1**

a_2

α	57,3°	82°	93°	100°
arc α	**1**	**1,43**	**1,62**	**1,75**

b_2

α	5,73°	6,4°	8,7°	10°
arc α	**0,1**	**0,112**	**0,152**	**0,175**

Gemeinsam wird wiederholt, wie vorzugehen ist, und es werden die „Eckzahlen" der Tabellen a_1 und b_1 bestimmt. Es wird herausgearbeitet, daß man mit einer einzigen Einstellung eine ganze Klasse von Aufgaben lösen kann.
Nachdem die Schüler die Tabellen a_1 und b_1 in ihre Hefte übertragen und ausgefüllt haben, die Ergebnisse an der Tafel zum Vergleich angeschrieben sind, wird mit Hilfe der Tabellen a_2 und b_2 der Rückschlag wiederholt.
Nach der Darlegung des Ziels für die nächsten beiden Unterrichtsstunden folgt die

Behandlung von Lb 37, Beispiele A 25, A 26. Anschließend wird untersucht, für welche Winkel die Skale S verwendet werden kann. Die Ergebnisse der Überlegungen werden in Form von Tabellen folgender Art festgehalten.

Skale S mit D

x	5,73°	...	90°
$\sin x$	0,1	...	1

x	84,27°	...	0°
$\cos x$	0,1	...	1

Dann bearbeiten die Schüler Lb 38, Auftrag A 51, dessen Teilaufgaben so ausgewählt sind, daß die Schüler mit den unterschiedlichen Teilungen der Skalen in verschiedenen Intervallen vertraut werden.
In Analogie zur Arbeit mit der Tafel („Herausgehen aus der Tafel") werden nun Winkel zu vorgegebenen Funktionswerten ermittelt.
Hierzu kann Lb 38, Beispiel A 27, selbständig von den Schülern durchgearbeitet und anschließend vorgetragen werden. Anschließend bearbeiten die Schüler Lb 38, Auftrag A 52.
Zu Beginn der *2. Stunde* wird die Gleichung $\tan x \cdot \cot x = 1$ wiederholt und in der Form „Tangens und Kotangens des gleichen Winkels sind zueinander reziprok" formuliert. Es werden entsprechende Berechnungen durchgeführt.

Beispiel:

a) $\tan x = 2$; es ist $\cot x$ zu ermitteln.

$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{2}$

b) $\tan x = 0{,}43$; es ist $\cot x$ zu ermitteln.

$\cot x = \frac{1}{0{,}43} = \frac{10}{4{,}3} = 2{,}32$

Weitere Übungen werden in Form folgender Tabelle (vorerst ohne die halbfett gedruckten Ergebnisse) an die Tafel geschrieben.

$\tan x$	7,32	0,29	**0,294**	6,24	**1,27**	**14,3**
$\cot x$	**0,137**	**3,45**	3,41	**0,156**	0,79	0,07

Die reziproken Zahlen werden zunächst alle mit der gewöhnlichen Divisionseinstellung des Rechenstabes berechnet. Der Lehrplan sieht bis zu diesem Zeitpunkt nicht die Einführung der reziproken Skale vor. An dieser Stelle bietet ihre Anwendung jedoch große Vorteile. Ihre Einführung ist (bei Verzicht auf die theoretische Erklärung) ohne Schwierigkeiten möglich. Mit Hilfe der reziproken Skale CI werden die Werte der Tabelle durch die Schüler noch einmal überprüft.
Den Schülern wird nun gesagt, daß man auf Grund dieser Beziehungen zwischen $\tan x$ und $\cot x$ und unter Anwendung der Komplementwinkelbeziehung dasjenige Intervall, für das eine detaillierte Tabelle der Funktionswerte aufgestellt werden muß, noch mehr einschränken kann. Es genügt eine Tabelle für $y = \tan x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$.

Beispiel:

$\tan 58°$ *ist zu berechnen.*

$\tan 58° = \cot 32° = \frac{1}{\tan 32°}$

Dieser Umstand wird bei der Konstruktion einer Skale des Rechenstabes für die Tangensfunktion genutzt.

Skale T mit D

x	5,73°	...	45°
$\tan x$	0,1	...	1

x	45°	...	84,27°
$\cot x$	1	...	0,1

Skale T mit CI

x	45°	...	84,27°
$\tan x$	1	...	10

x	5,73°	...	45°
$\cot x$	10	...	1

Nachdem die Schüler auf diese Weise einen Einblick in die Anlage der Tangensskale auf dem Rechenstab gewonnen haben, eignen sie sich schrittweise entsprechend Lb 39, Beispiele A 30 bis A 32 und Aufträge A 53, A 54, die Fähigkeit zum Umgehen mit dieser Skale an. Auf die Skale ST sollte an dieser Stelle unter Verwendung von Lb 39, Beispiele A 30, A 31 kurz hingewiesen werden.

1.3.6. Übungen im Gebrauch von Tafeln und Rechenstab (LE 15 bis 17; 2 Std.)

Es wurde bereits in Uh 82 f. darauf hingewiesen, daß für die zwei Stunden dieser Unterrichtseinheit eine *umfassende Wiederholung* vorgesehen ist. Die Übungen sollten vor allem unter dem Gesichtspunkt ausgewählt werden, welche durch den Lehrplan geforderten grundlegenden Kenntnisse und Fertigkeiten gefestigt werden müssen und in der Kontrollarbeit überprüft werden sollen. Vielfältiges Material für Übungen steht im Lb 108ff/102 bis 128, zur Verfügung. Es ist zu diesem Zeitpunkt auch möglich, *physikalische Anwendungsaufgaben zum Thema „Schwingungen"* zu lösen.
In dieser Unterrichtseinheit werden sowohl die Skalen der Winkelfunktionen auf dem Rechenstab als auch die Tafeln der Winkelfunktionswerte benutzt. Es ist erforderlich, mit den Schülern einige Betrachtungen darüber anzustellen, unter welchen Bedingungen welches Rechenhilfsmittel angewandt werden kann.
Der Rechenstab bietet den Vorteil, daß man mit den Werten der Winkelfunktionen sofort Berechnungen ausführen kann. Dieser Vorteil wird aber erst bei Dreiecksberechnungen sichtbar, etwa bei Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck oder bei der Anwendung der Proportionaleinstellung des Rechenstabes beim Lösen solcher Aufgaben, die mit Hilfe des Sinussatzes gelöst werden. Vorerst kann das dem Schüler nur mitgeteilt werden.
Man kann diesen Sachverhalt aber auch an dieser Stelle am Beispiel von Lb 112/154 verdeutlichen.

154. Suchen Sie im Tafelwerk die Formeln für den schrägen Wurf auf!
a) Berechnen Sie die Steigzeit, die Steighöhe und die Wurfweite für eine Anfangsgeschwindigkeit

$v_0 = 100\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ *für die Abwurfwinkel* $\alpha = 0°, 10°, 20°, \ldots, 90°$!

Als *Beispiel* betrachten wir die Wurfweite s für einen Abwurfwinkel $\alpha = 10°$.

$$s = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

$$s(\alpha) = \frac{(100\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2 \cdot \sin 2\alpha}{9{,}81\ \text{ms}^{-2}}$$

$$s(\alpha) = \frac{10\,000\ \text{m}^2\text{s}^{-2} \cdot \sin 2\alpha}{9{,}81\ \text{ms}^{-2}}$$

$$s(\alpha) = \frac{10\,000 \cdot \sin 2\alpha}{9.81}\ \text{m}$$

$$s(10°) = \frac{10\,000 \cdot \sin 20°}{9{,}81}\ \text{m} \qquad \textit{Überschlag:}\ \frac{10\,000 \cdot \sin 30°}{10} = 1000 \cdot 0{,}5 = 500$$

$$s(10°) = 349\ \text{m}$$

Einstellung: (a) Läuferstrich über S 20
(b) C 981 unter Läuferstrich (Zunge verschieben)
(c) Läuferstrich über C 20
(d) Ablesen D 349

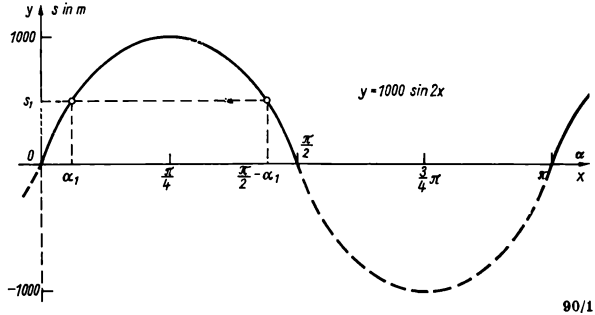
Natürlich kann sin 20° auch der Tafel entnommen und die Rechnung anschließend mit Hilfe des Rechenstabes zu Ende geführt werden (gemischtes Tafel-Stab-Rechnen).

$$s(10°) = \frac{10\,000 \cdot \sin 20°}{9{,}81}\ \text{m} \tag{1}$$

$$= \frac{10\,000 \cdot 0{,}3420}{9{,}81}\ \text{m} \tag{2}$$

$$= 349\ \text{m} \tag{3}$$

Man erkennt, daß beim durchgängigen Benutzen des Rechenstabes das Aufsuchen aus der Tafel und das Aufschreiben der Zeile (2) entfallen.
Es sei hier kurz erläutert, in welcher Weise im Zusammenhang mit dieser Aufgabe die Kenntnisse der Schüler aus dem Physikunterricht über Gesetzmäßigkeiten beim schrägen Wurf vertieft werden können. Im Physikunterricht der Klasse 9 (vgl. Lp Ph 9/14) wurden auf experimentellem Wege folgende Gesetzmäßigkeiten erarbeitet; vgl. Lb Ph 9/25.



90/1

1. Die Wurfweite hängt vom Abwurfwinkel ab. Die größte Wurfweite wird bei $\alpha = 45°$ erreicht.
2. Bei Abwurfwinkeln, die sich zu 90° ergänzen, erhält man gleiche Wurfweiten.

Für die Wurfweite ergibt sich im Falle $v_0 = 100\ \text{ms}^{-1}$ die Funktion

$$s = \frac{(100\text{ms}^{-1})^2}{g} \cdot \sin 2\alpha.$$

Wird für die Fallbeschleunigung g der Näherungswert $g \approx 10\ \text{ms}^{-2}$ gewählt, erhält man

$$s(\alpha) = (1000 \cdot \sin 2\alpha)\ \text{m}.$$

Aus einer Skizze des Graphen dieser Funktion können die genannten Gesetzmäßigkeiten herausgelesen werden; vgl. Bild 90/1.

Entsprechend den Bedingungen der gegebenen praktischen Problemstellung wird die Gesetzmäßigkeit der Abhängigkeit der Wurfweite vom Abwurfwinkel durch die Funktion $y = 1000 \sin 2x$ im Definitionsbereich $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ erfaßt.

In den vorangegangenen Unterrichtseinheiten wurde bereits auf Grenzen für die Anwendung des Rechenstabes hingewiesen.
Verzichtet man beispielsweise auf die Skale ST, muß man Funktionswerte der Sinus- und Tangensfunktion für Winkel $\alpha < 5{,}73°$ der Tafel entnehmen.
Darüber hinaus ist die Skale der Sinusfunktion im Bereich der Winkel von 70° bis 90° sehr grob geteilt, so daß bei entsprechenden Forderungen an die Genauigkeit auch die Tafel verwendet werden muß.
In den beiden letztgenannten Fällen wird man also das gemischte Tafel-Stab-Rechnen anwenden müssen.

Kontrollarbeit (2 Std.)

Lp 17 enthält Hinweise, in welcher Weise *Kontrollarbeiten* zu gestalten sind. Diese Hinweise liegen den folgenden Vorschlägen zugrunde. Ein Artikel von Hoffe [27] beschäftigt sich tiefer mit dem Problem der Kontrolle im Mathematikunterricht. Bei der Auswahl der Aufgaben orientieren wir uns an der Spalte „Festigung" des Stoffaufteilungsvorschlages in Uh 47ff.
Einige Vorschläge für Kurzkontrollen seien dem Vorschlag für die Klassenarbeit vorangestellt.

1. Als Abschluß der Unterrichtseinheit 1.2.2. „Eigenschaften der Kosinusfunktion" ist eine *Kurzkontrolle* möglich, durch die folgendes überprüft werden könnte.

   a) Fähigkeit zum Umrechnen von Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt
   Beispiel:
   Rechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes von Gradmaß in Bogenmaß um oder umgekehrt!
   a) $\alpha = 35°$; arc $\alpha = \ldots$
   b) arc $\alpha = 1{,}4$; $\alpha = \ldots$

   b) Skizzieren der Graphen der Sinus- oder Kosinusfunktion
   Beispiel:
   Skizzieren Sie den Graph der Sinusfunktion im Intervall $-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$ mit Hilfe der Schablone so, daß die folgenden Eigenschaften zum Ausdruck kommen: Periodizität, Wertebereich, Nullstellen der Funktion sowie höchste und tiefste Punkte des Graphen!

   c) Ermitteln des Vorzeichens der Funktionswerte mit Hilfe der Graphen
   Beispiel:
   Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Funktionswerte positiv, negativ oder gleich Null sind!

   a) $\sin \frac{5}{6}\pi$ b) $\cos \frac{\pi}{3}$

   c) $\sin 3\pi$ d) $\cos \frac{7}{6}\pi$

   d) Feststellen der Zugehörigkeit von geordneten Paaren zur Funktion
   Beispiel:
   Entscheiden Sie jeweils, ob das geordnete Paar zur danebenstehenden Funktion gehört oder nicht! Begründen Sie Ihre Entscheidungen!

   a) $\left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$; $y = \sin x$

   b) $[-\pi; 1]$; $y = \cos x$

   c) $\left[\frac{3}{2}\pi; -1\right]$; $y = \sin x$

2. Eine zweite *Kurzkontrolle* ist nach Behandlung der Unterrichtseinheit 1.2.6. „Graphen der Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$" möglich. Dabei könnte folgendes überprüft werden.

a) Skizzieren der Graphen der Tangensfunktion oder der Kotangensfunktion
Beispiel:
Skizzieren Sie den Graph der Tangensfunktion und andersfarbig den Graph der Kotangensfunktion im Intervall $0 \leq x \leq \pi$ *in ein und dasselbe Koordinatensystem! Markieren Sie die Schnittpunkte der Graphen! Geben Sie deren Koordinaten an!*

b) Gedächtnismäßiges Beherrschen der speziellen Funktionswerte
Beispiel:
Entscheiden Sie, ob folgende geordneten Paare reeller Zahlen Elemente der jeweiligen Funktion sind oder nicht! Begründen Sie Ihre Entscheidungen!

a) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right]$; $y = \sin x$

b) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]$; $y = \cot x$

c) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{1}{8}\sqrt{3}\right]$; $y = \tan x$

d) $[0; 0]$; $y = \cos x$

c) Ermitteln der Lösungsmengen von Gleichungen
Beispiel:
Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Gleichung
$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $(-2\pi \leq x \leq 2\pi)$!
Orientieren Sie sich am Graph der Sinusfunktion!

Der zweistündigen *Kontrollarbeit* wird der Stoff seit Beginn des Schuljahres zugrunde gelegt. Die Kontrollarbeit sollte, wie bereits erläutert, auch Aufgabentypen enthalten, die bereits Gegenstand von Kurzkontrollen waren. Eine quantitative Auswertung, etwa die Anzahl richtiger Lösungen in Prozent oder die Anzahl der erreichten Punkte in Prozent und die Gegenüberstellung der Ergebnisse bei den einzelnen Schülern, gibt Aufschluß über die Entwicklung der entsprechenden Kenntnisse und Fähigkeiten.
Folgende Stoffe könnten Gegenstand der Überprüfung sein.
Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es sich *nicht* um einen *Vorschlag für eine Kontrollarbeit*, **sondern** nur um **Vorschläge für Auswahl und Gestaltung der Thematik** handelt. Diese Kontrollarbeit muß vom Lehrer selber auf der Grundlage der Lehrplanziele verantwortungsbewußt zusammengestellt werden. Die folgenden Darlegungen sollen ihm dabei Hilfe und Anregung sein.

a) Graphisches Darstellen von $y = a \cdot \sin bx$
Beispiel:
Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $y = 1{,}5 \cdot \sin 2x$*! Skizzieren Sie den Graph dieser Funktion im Intervall* $-2\pi \leq x \leq 2\pi$!
Wählen Sie die Koordinateneinheiten auf den Achsen möglichst zweckmäßig!

b) Beweisen von Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten
Beispiel:
Beweisen Sie folgenden Satz: Für alle Zahlen $x \left(x \in P;\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in G\right)$ *gilt*
$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$!

c) Erkennen der Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten als Gleichungen
Beispiel:
Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Gleichung
$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ *im Intervall* $-2\pi \leq x \leq 2\pi$!

d) Lösen von Gleichungen; vgl. Kurzkontrolle 2. c) auf Uh 92

Beispiel:
Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ (-2\pi \leq x \leq 2\pi)$!

Orientieren Sie sich am Graph der Kosinusfunktion!

e) Feststellen der Zugehörigkeit von geordneten Paaren zur Funktion (Kenntnisse über spezielle Funktionswerte, Quadrantenbeziehungen)

Beispiel:
Entscheiden Sie, ob folgende geordneten Paare reeller Zahlen zur danebenstehenden Funktion gehören oder nicht! Begründen Sie Ihre Entscheidungen!

a) $[0; 1]$; $y = \cos x$ b) $\left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{3}\right]$; $y = \tan x$ c) $\left[\frac{\pi}{2}; -1\right]$; $y = \sin x$

d) $\left[\frac{7}{4}\pi; -1\right]$; $y = \cos x$ e) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; $y = \sin x$ f) $\left[\frac{7}{6}\pi; 3\right]$; $y = \cot x$

f) Ermitteln von Funktionswerten mit Hilfe von Tafel oder Rechenstab

Beispiel 1:
Lösen Sie folgende Gleichungen mit Hilfe des Rechenstabes oder im Kopf $(x \in P)$!

a) $\sin 48° = x$ b) $\tan 23° = x$ c) $\cos 127° = x$ d) $\tan 73° = x$

e) $\sin 2{,}1 = x$ f) $\sin \frac{\pi}{3} = x$ g) $\cot \frac{11}{6}\pi = x$ h) $\sin 156° = x$

Beispiel 2:
Ermitteln Sie mit Hilfe der Tafel folgende Funktionswerte, gegebenenfalls durch vorheriges Umrechnen von Bogenmaß in Gradmaß mit Hilfe des Rechenstabes!

a) sin 172° b) cos 154° c) tan 34,7°

d) cot 79,6° e) sin 1,5 f) cos 2,4

g) Ermitteln von Winkeln zu gegebenen Funktionswerten mit Hilfe von Tafel oder Rechenstab (Aufgaben zum Lösen von Gleichungen)

Beispiel:
Ermitteln Sie wahlweise mit Hilfe von Tafel oder Rechenstab alle Winkel im Intervall $0° \leq \alpha \leq 180°$, *die folgende Gleichungen erfüllen! Notieren Sie jeweils, welches Rechenhilfsmittel Sie benutzt haben (T: Tafel, St: Rechenstab)!*

a) $\sin \alpha = 0{,}32$ b) $\cos \alpha = -0{,}45$

c) $\tan \alpha = -0{,}43$ d) $\cot \alpha - 0{,}51$

1.4. Anwendung der Winkelfunktionen bei Dreiecksberechnungen

1.4.1. Trigonometrische Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck; Berechnungen (LE 18 bis 20; 5 Std.)

Die erste Unterrichtseinheit der Stoffeinheit 1.4. „Anwendung der Winkelfunktionen bei Dreiecksberechnungen" hat die Aufgabe, die Schüler mit *grundlegenden Denk- und Arbeitsweisen der ebenen Trigonometrie* bekannt zu machen und den Schülern mit den *Formeln für die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks und* mit den *Regeln für das Lösen trigonometrischer Aufgaben* ein Mittel in die Hand zu geben, verschiedenartige Aufgaben aus der Mathematik und ihren Anwendungsbereichen zu lösen. Von der Gestaltung dieser Unterrichtseinheit hängt es in hohem Maße ab, welchen Zugang die Schüler zu den Problemen der Trigonometrie und ihrer Anwendung in der Praxis finden.

Das wesentliche Ziel dieser Unterrichtseinheit, soweit es die *mathematische Grundlagenbildung* der Schüler betrifft, ist eine sichere Kenntnis der trigonometrischen Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck, verbunden mit der Fertigkeit, diese Be-

ziehungen anzuwenden, und mit der Fähigkeit, bei Aufgaben über rechtwinklige Dreiecke die Lösungsschritte – entsprechend den verschiedenen Fällen auf Grund der gegebenen Stücke der Dreiecke – festzulegen und auszuführen.
Diese Zielsetzung bedingt, daß im Unterricht neben der Vermittlung der mathematischen Zusammenhänge gleichberechtigt die Übung und die Befähigung der Schüler im Erkennen des Lösungsweges und im Ausführen der Lösung bei den verschiedenen Aufgaben stehen.
Nach dem Lösen formaler und einfacher eingekleideter Aufgaben sollte Anwendungsaufgaben, bei denen das mathematische Problem aus dem Sachverhalt abstrahiert werden muß, besonderes Augenmerk gewidmet werden. Bei diesen Anwendungsaufgaben handelt es sich vor allem um einfache Fälle von Messungen und Vermessungen sowie um Aufgaben aus Physik, Technik und Militärwesen, die auf Zusammensetzung oder Zerlegung von Kräften, Wegen, Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen führen.

Für die *ideologische Bildung und Erziehung* der Schüler ist bedeutsam, daß die Einsicht in den Wert mathematischer Methoden und Verfahren für die Praxis vertieft wird; die Schüler müssen ihre Erkenntnis festigen, daß die quantitative Erfassung eines Sachverhalts den Ausgangspunkt für eine rationelle Lösung technischer Probleme bietet. Dies kann sowohl durch Hinweise auf die Bedeutung der Trigonometrie für die Praxis als auch durch entsprechende Aufgaben aus Volkswirtschaft und Technik (vgl. z. B. Lb 113/152, 153; Lb 114f/170 bis 183) erfolgen. Auch aus dem sachlichen Inhalt vieler Anwendungsaufgaben ergeben sich Ansätze für die ideologische Bildung und Erziehung, z. B. für die Erziehung zum ökonomischen Denken und Handeln, für die sozialistische Wehrerziehung, für die Erziehung zum Stolz auf die Errungenschaften des sozialistischen Aufbaus.

Bei der *methodischen Gestaltung* dieser Unterrichtseinheit muß beachtet werden, daß von der *Sicherheit der Kenntnisse*, die die Schüler bei der Einführung in die Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks erwerben, in hohem Maße der Unterrichtserfolg in den anderen Unterrichtseinheiten der Stoffeinheit 1.4. „Anwendung der Winkelfunktionen bei Dreiecksberechnungen" abhängt.
Diese Sicherheit ist aber nicht durch mechanisches Einprägen und Üben allein zu erreichen; vielmehr kommt es auf das richtige logische Erfassen des Inhalts der trigonometrischen Beziehungen beim rechtwinkligen Dreieck an, auf das richtige „Sehen" des Problems. Hierfür ist ein besonders anschauliches Arbeiten im Unterricht, auch ein Arbeiten mit gewissen stereotypen Figuren, unerläßlich.
Ebenso ist für das Erreichen sicherer – und auch dauerhafter und anwendbarer – Kenntnisse die *Aktivität der Schüler* beim Aneignen des Stoffes entscheidend. Möglichkeiten dafür bieten sich bereits beim Erarbeiten der trigonometrischen Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck; z. B. können auf Grund der den Schülern bekannten Definitionen der Winkelfunktionen diese Beziehungen von den Schülern selber entwickelt (hergeleitet) werden, etwa im Rahmen eines heuristischen Unterrichtsgesprächs. Die Übungen im Lösen formaler, eingekleideter Aufgaben und von Anwendungsaufgaben verlangen von der Sache her ohnehin Aktivität und Selbständigkeit beim Arbeiten der Schüler.

Vor der Behandlung der trigonometrischen Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck empfiehlt sich eine *kurzgefaßte Wiederholung der Klassifizierung der Dreiecke und der wichtigsten Begriffe der Dreieckslehre* (vgl. Lb 40, Auftrag A 55). Die allgemeinen Sätze über das Dreieck – z. B. über die Summe der Innenwinkel oder die Sätze über die Beziehungen zwischen den Seiten und zwischen Seiten und Winkeln – werden zweckmäßigerweise erst in Zusammenhang mit der Berechnung beliebiger Dreiecke im Rahmen der Unterrichtseinheit 1.4.3. (Uh 98) wiederholt.

Zur *Herleitung der trigonometrischen Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck* muß, entsprechend der im Unterricht vermittelten Definition der Winkelfunktionen (Lp 39), von Beziehungen zwischen Koordinaten, d. h. (reellen) Zahlen, ausgegangen werden; da es in der Trigonometrie jedoch üblich ist, mit Größen, d. h. mit Produkten aus (reellen) Zahlen und Einheiten, zu operieren, ist ein sinnvoller Übergang von Zahlen zu Größen bei der Gewinnung der Sätze über die trigonometrischen Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck, die Grundlage und Ausgangspunkt für die Herleitung oder den Beweis der anderen, in den folgenden Unterrichtseinheiten zu behandelnden Sätze der ebenen Trigonometrie bilden, zu wählen. Einen möglichen Weg gibt Lb 40, Lerneinheit A 18, an.

Zur *Arbeit mit formalen und eingekleideten Aufgaben* bedarf es kaum einer besonderen methodischen Erläuterung; wichtig erscheint jedoch der Hinweis, daß die Schüler durch Übung befähigt werden müssen, auf Grund der Daten rasch und sicher den Lösungsansatz zu finden. Ob beim Ansatz stets von der Definition der Winkelfunktion (oder exakt: von der dieser Definition entsprechenden Beziehung zwischen Größen) ausgegangen werden soll, ist keine wesentliche Frage. Sind z. B. von einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse c und der Winkel α gegeben und die beiden Katheten a und b gesucht, so spricht vieles dafür, sofort

$$a = c \cdot \sin\alpha \quad \text{und} \quad b = c \cdot \cos\alpha$$

ansetzen und nicht erst diese Ansätze aus

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

entwickeln zu lassen.

Bereits beim Lösen von Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck sollten den Schülern Hinweise, ggf. auch Regeln vermittelt werden, die allgemein für die Trigonometrie gelten. Manche dieser Hinweise und Regeln werden die Schüler schon früher kennengelernt haben, da sich ihr Geltungsbereich auch über andere Gebiete des mathematischen Arbeitens erstreckt (in diesem Falle genügt natürlich eine Wiederholung).

Hierzu gehört z. B. der Hinweis, daß beim Lösen einer Aufgabe, nachdem der Lösungsansatz mit Hilfe geeigneter Variablen aufgestellt wurde, das Ergebnis zunächst durch diese Variablen ausgedrückt und auf die einfachste, für die numerische Berechnung rationellste Form gebracht wird. Ebenso ist hier die Regel zu nennen, das Endergebnis auf möglichst kurzem Wege zu erreichen und Rückgriffe auf Zwischenresultate, die durch Runden gewonnen wurden oder aus anderen Gründen als relativ ungenau angesehen werden müssen, möglichst zu vermeiden. Bei der Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks, des gleichschenkligen Dreiecks und des regelmäßigen Vielecks – allgemein stets dann, wenn es ohne Komplikationen ausführbar ist – sollten zur Berechnung eines gesuchten Stücks unmittelbar die gegebenen Stücke herangezogen werden.

Bei den rechentechnischen Schritten der Lösung, die zu Beginn mit Hilfe der Tafel der („natürlichen") Werte der Winkelfunktionen und später meist mit Hilfe des logarithmischen Rechenstabes (Winkelfunktionsskalen; vgl. Hinweise zu Stoffeinheit 1.3.5., Uh 86ff) ausgeführt werden, muß der Genauigkeitsgrad der Werte besonders beachtet werden. Die Grenze der Genauigkeit kann entweder durch die Genauigkeit der gegebenen Größen oder durch die Genauigkeit der Tafel bzw. der Rechenstabskalen bestimmt sein. Wohl am häufigsten werden – in Übereinstimmung mit der technisch bedingten Genauigkeit des Rechenstabes – drei gültige Dezimalstellen gegeben oder gefordert (auch die Anwendung der vierstelligen Tafel der Winkelfunktionswerte im Tafelwerk [80] führt ohne Interpolation im allgemeinen nur zu dreistellig genauen Resultaten).

Unter den Anwendungsaufgaben mit geometrischem Inhalt sollten auch Aufgaben gestellt werden, die schon zur Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks überleiten, sie aber nicht vorwegnehmen. Zu solchen Aufgaben gehört z. B. die Berechnung der Diagonalen eines Rhombus oder eines Rechtecks.

Bei den Sachaufgaben mit physikalischem Inhalt dürfte es notwendig sein, die physikalischen Kenntnisse der Schüler aus den betreffenden Bereichen zu reaktivieren (und vielleicht auch zu ergänzen). Im Physikunterricht wurde bei der Zusammensetzung von Kräften, Wegen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen das Parallelogramm als geometrische Figur herangezogen; Figuren wie das Kräftedreieck (bei zwei Komponenten) oder, allgemein, das Kräftepolygon oder der Kräftezug (bei zwei und mehr Komponenten) sind den Schülern noch nicht bekannt. Da das Lehrbuch schon beim ersten ausgeführten Beispiel für eine physikalisch-technische Anwendungsaufgabe zur Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks (Lb 44, Beispiel A 37) ein Kräftedreieck enthält, muß den Schülern eine diesbezügliche Erläuterung gegeben werden (Lb 44, Bild A 36, macht dabei das – in diesem Falle rechtwinklige – Parallelogramm der Kräfte deutlich).

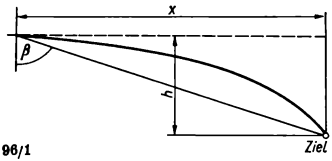
Als Beispiel für eine physikalisch-technische Anwendungsaufgabe bringt das Lehrbuch, wie bereits angedeutet, eine Aufgabe über die Zusammensetzung (bzw. Zerlegung) von Kräften. Wird für die Einführung im Unterricht jedoch ein *Beispiel* als günstiger erachtet, das die Zusammensetzung von Wegen zum Inhalt hat, so kann hierfür folgende Aufgabe dienen (nach LANGER und TRÄGER [48]).

Ein Flugzeug fliege in der Höhe $h = 1000$ m *mit einer Geschwindigkeit* $v = 800$ km h^{-1}, *ein Ziel an.*

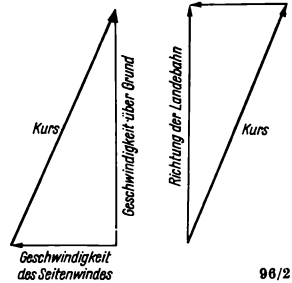
a) *In welchem Abstand* x *muß eine Bombe, die nach dem Gesetz des freien Falls fällt, ausgeklinkt werden, damit sie im Ziel auftrifft; vgl. Bild 96/1?*

b) *Ermitteln Sie durch Berechnung den Vorhaltewinkel* β*!*

Eine maßstäbliche Zeichnung kann der Ergebniskontrolle dienen.



96/1



96/2

Selbstverständlich sollte eine solche Aufgabe im Unterricht nicht als kommentarloses Beispiel dargeboten, sondern zur staatsbürgerlichen Erziehung der Schüler genutzt werden. Besonders kommt es dabei darauf an, den wehrpolitischen Aspekt durch entsprechende Erläuterungen herauszuarbeiten; vgl. hierzu [48], a. a. O., Seite 425.

Als ein – in seinem Aufbau noch einfacheres – *Beispiel* für die Zusammensetzung von Geschwindigkeiten kann die Kursbestimmung eines Bootes bei seitlicher

Strömung oder die Kursbestimmung bei der Landung eines Flugzeugs unter Einfluß von Seitenwind gewählt werden; vgl. Bild 96/2.

Bei den *Berechnungen mit Hilfe des logarithmischen Rechenstabes* ist zu beachten, daß die Schüler zwar die Winkelfunktionsskalen des Stabes kennengelernt und auch beim Aufsuchen von Werten der Winkelfunktionen sowie bei einfachen Rechnungen angewendet haben, aber noch keine genügend entwickelten und gesicherten Fertigkeiten im Gebrauch dieser Skalen besitzen. Deshalb werden, zumindest in den Unterrichtsstunden dieser Unterrichtseinheit, Kontrollen und individuelle Hilfen beim Rechnen ebenso notwendig sein wie eine wiederholende Zusammenfassung der Regeln für den Gebrauch der Skalen. Was für den Rechenstab gilt, trifft ähnlich auch für das Tafelwerk, speziell für die Tafeln der Werte der Winkelfunktionen zu. Der Anlage der Wertetafel im Tafelwerk [80] wegen ist besonders auf das richtige Aufsuchen der Werte der Kofunktionen und das Aufsuchen der Winkelwerte, wenn Werte ihrer Kofunktionen gegeben sind, zu achten.

Die *Aufteilung des Unterrichtsstoffes* für die Unterrichtseinheit auf die vorgesehenen fünf Unterrichtsstunden erscheint nicht problematisch. Notwendig ist, daß genügend Zeit für Übungen im Berechnen rechtwinkliger Dreiecke – mit Hilfe der Tafel der Winkelfunktionen und des logarithmischen Rechenstabes – vorgesehen wird und von dieser Zeit mindestens eine Stunde (oder die Zeit einer Unterrichtsstunde, verteilt auf mehrere Stunden) für die Arbeit an auch vom Sachinhalt her erzieherisch wertvollen Anwendungsaufgaben vorgesehen wird. Der logische und methodische Ablauf des Unterrichts kann im übrigen dem Weg folgen, den das Lehrbuch vorzeichnet.

1.4.2. Das gleichschenklige Dreieck und das regelmäßige Vieleck (LE 21 und 22; 5 Std.)

Dieser Unterrichtseinheit kommt vor allem die Aufgabe zu, die in der vorangegangenen Unterrichtseinheit erworbenen mathematischen Kenntnisse der Schüler bei der Lösung spezieller Aufgaben aus der Planimetrie anzuwenden und dadurch zu festigen. Dient die Unterrichtseinheit 1.4.1. vorzugsweise der Grundlegung der Trigonometrie, so hat die Unterrichtseinheit 1.4.2. hauptsächlich die Funktion der *Erweiterung und Sicherung des Gelernten*. Das trifft nicht nur für die Methoden der Berechnung rechtwinkliger Dreiecke zu, sondern auch für Stoff, der den Schülern im Unterricht der vorangegangenen Klassenstufen vermittelt wurde, z. B. für die Achsensymmetrie und ihre wesentlichen Eigenschaften.

Die *mathematische Grundlagenbildung* der Schüler bezieht sich in dieser Unterrichtseinheit besonders auf die Anwendung der Methoden, die der Berechnung rechtwinkliger Dreiecke dienen, bei der Berechnung gleichschenkliger Dreiecke, also auf das Zurückführen eines neuen Problems auf bereits gelöste Probleme. Diesem wesentlichen Element der wissenschaftlichen Heuristik wird auch in den weiteren Unterrichtseinheiten besonderes Augenmerk zuzuwenden sein.

Die *ideologische Bildung und Erziehung* wird in dieser Unterrichtseinheit vor allem mit Hilfe des sachlichen Inhalts der Anwendungsaufgaben verwirklicht; z. B. Lb 116f/196 bis 204; Lb 118/211 bis 214; vgl. Bemerkungen zur Unterrichtseinheit 1.4.1., Uh 93f. Hinzu kommt, daß trigonometrische Untersuchungen am regelmäßigen Vieleck und am Kreis gute Möglichkeiten für erziehungswirksame historische Rückblicke bieten.

Die *methodische Gestaltung* dieser Unterrichtseinheit dürfte kaum Schwierigkeiten bereiten; im Mittelpunkt sollten formale Aufgaben und Anwendungsaufgaben stehen, die von den Schülern weitgehend selbständig gelöst werden können. Um die Schüler zu veranlassen, den Weg der Lösung zu überdenken, können Kommentare zur Aufgabenlösung (in der Regel mündlich, in einigen Fällen aber auch in knapper schriftlicher Form) gefordert werden. Unterbleibt dies, so besteht die Gefahr, daß die Schüler die Lösungsschritte rein mechanisch ausführen und an mathematisch komplizierteren Aufgaben, z. B. bei Aufgaben über In- und Umkreise bei Vielecken, dann scheitern.
Die Aufgaben zur Berechnung gleichschenkliger Dreiecke sollten auch Aufgaben über den Kreis umfassen, vgl. Lb 116/196 bis 199, 202, 203. Das bietet Gelegenheit zur Wiederholung von Stoff, den sich die Schüler in Klasse 7 angeeignet haben. In die Aufgaben über den Kreis sollten auch Aufgaben zur Annäherung der Länge des Umfangs und des Flächeninhalts eines Kreises durch die entsprechenden Größen regelmäßiger (dem Kreis ein- oder umbeschriebener) Vielecke einbezogen werden. Solche Aufgaben höheren Schwierigkeitsgrades enthalten z. B. Lb 117 f/205 bis 208 und Lb 118 f/16, 17, 18. Das Arbeiten an diesen Aufgaben bereitet das Verständnis der Schüler für den Grenzwertbegriff vor, auch bietet es Gelegenheit zu historischen Betrachtungen („Rektifikation" und „Quadratur" von Linien bzw. Flächen). Weiterhin können die Schüler an diesem Gegenstand ihre Einsicht festigen, daß die Zahl π eine reelle Zahl ist, die weder rational ist noch sich als (irrationale) Wurzel einer algebraischen Gleichung ergibt (nähere Erläuterungen zur Transzendenz der Zahl π verbieten sich jedoch). Ebenso kann auf historische Näherungskonstruktionen, z. B. für die Seite eines regelmäßigen Vielecks, dessen Seiten nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind (z. B. das 7-Eck), hingewiesen werden.

Bei der *Aufteilung des Stoffes* auf die verfügbare Unterrichtszeit muß beachtet werden, daß das Hauptgewicht auf den Anwendungsaufgaben aus der Geometrie (Planimetrie und Stereometrie) liegen sollte; eine besondere Unterrichtsstunde zur Lösung von Anwendungsaufgaben aus Naturwissenschaften und Technik erscheint in diesem Stoffgebiet nicht notwendig, solche Aufgaben (hier bieten sich besonders Aufgaben aus dem Bauwesen, z. B. Dachkonstruktionen, an) sollten in die allgemeinen Übungen zur Berechnung gleichschenkliger Dreiecke einbezogen werden.

1.4.3. Sätze über das allgemeine Dreieck; Berechnungen (LE 23 bis 26; 8 Std.)

Diese Unterrichtseinheit nimmt bei der Behandlung der ebenen Trigonometrie eine zentrale Stellung ein; sie gründet sich auf die Erkenntnisse, die in den vorangegangenen Unterrichtseinheiten im Rahmen der Stoffeinheit 1.4. gewonnen wurden, und vermittelt Erkenntnisse, die für das Erfassen des Stoffes in den nachfolgenden Unterrichtseinheiten erforderlich sind. Ihre hauptsächliche Aufgabe besteht sowohl im *Anwenden früher erworbenen Wissens* als auch im *Schaffen von Grundlagen für den weiterführenden Unterricht.*
Gleichfalls werden in dieser Unterrichtseinheit *Kenntnisse aus der Planimetrie und der Trigonometrie systematisiert;* die Kongruenzsätze für das ebene Dreieck und die Dreieckskonstruktionen werden wiederholt, den Konstruktionen werden die Berechnungen gegenübergestellt, die verbindenden und übergreifenden Begriffe, Sätze, Methoden und Verfahren werden dabei herausgearbeitet.
Die *mathematische Grundlagenbildung* der Schüler erfährt in dieser Unterrichtseinheit eine wesentliche Erweiterung. Es werden die grundlegenden Sätze der ebenen

Trigonometrie (Sinussatz, Kosinussatz, Satz über den Flächeninhalt) erarbeitet und gefestigt. Das Arbeiten an den Beweisen oder an den Herleitungen der Sätze dient der Vertiefung der Einsicht in die Struktur mathematischer Beweise (eingeschlossen sind Beweise, bei denen Fallunterscheidungen notwendig sind).
Diese Unterrichtseinheit ist aber nicht nur für die mathematische Grundlagenbildung, sondern auch für die *ideologische Bildung und Erziehung* sehr bedeutsam, werden doch – sowohl beim Beweis der Sätze als auch bei ihrer Anwendung – Erkenntnisse über das Wesen der Mathematik und ihrer Methode vermittelt; besonders klar treten der Charakter der mathematischen Begriffe und Sätze sowie Folgerichtigkeit des mathematischen Arbeitens hervor. Im Anschluß an die Behandlung der verschiedenen Fälle der Dreiecksberechnung entsprechend den Kongruenzsätzen sind historische Rückblicke auf die Geschichte der Dreiecksberechnung angebracht (vgl. HERMANN [24]), ebenso Ausblicke auf die moderne rechentechnische Bearbeitung von Dreiecksaufgaben (in Anknüpfung an den Unterricht in Klasse 9, Stoffeinheit 5.2. „Rechenhilfsmittel").

Bei der *mathematischen Gestaltung* dieser Unterrichtseinheit sollte beachtet werden, daß die notwendige Übung im Berechnen von Dreiecken nur auf eine klare Einsicht in die mathematischen Zusammenhänge aufgebaut werden kann; anderenfalls besteht die Gefahr, daß das Rechnen in mechanische Tätigkeit ausartet. Häufige Fehler, die durch mangelnde Einsicht in die mathematischen Zusammenhänge entstehen, sind falsche Lösungsansätze und falsche Interpretationen der Lösung, z. B. bei Aufgaben, die keine Lösung oder die mehrere Lösungen haben.
Das Herleiten der Sätze für das allgemeine Dreieck (Sinussatz, Kosinussatz, Satz über den Flächeninhalt) bietet keine besonderen Schwierigkeiten. Motiviert wird die Herleitung am besten durch ein Beispiel, in dem gezeigt wird, daß die Berechnung eines schiefwinkligen Dreiecks durch Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke einen verhältnismäßig großen Aufwand, eine verhältnismäßig große Anzahl von Rechenschritten erfordert; vgl. z. B. Lb 48, Auftrag A 63.
Da bei der Herleitung (oder beim Beweis) der genannten Sätze jeweils drei Fälle (spitzer Winkel – rechter Winkel – stumpfer Winkel) unterschieden werden müssen, ist es möglich, daß beim Sinussatz und beim Kosinussatz nach einem vom Lehrer oder von einem beauftragten Schüler demonstrierten „Beispielfall" die weiteren Fälle von den Schülern individuell und selbständig erarbeitet werden können; beim Satz über den Flächeninhalt kann auf die Demonstration eines Beispiels überhaupt verzichtet werden.

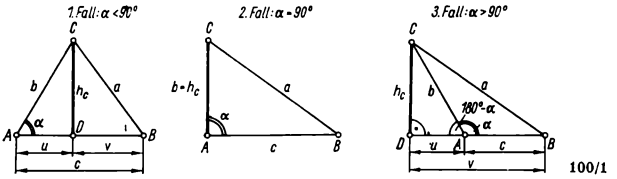
Für die Herleitung des Kosinussatzes wird von manchen Methodikern folgender vom Lehrbuch abweichende Weg für günstiger gehalten (gezeigt am Fall eines spitzwinkligen Dreiecks; $\alpha < 90°$).

Gegeben seien b, c, α; gesucht sei a; vgl. Bild 100/1.

(1) $h_c = b \sin \alpha$
$u = b \cos \alpha$

(2) $v = c - u$
$v = c - b \cos \alpha$

(3) $a^2 = h_c^2 + v^2$
$= b^2 \sin^2 \alpha + (c - b \cos \alpha)^2$
$= b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha$
$= b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$



100/1

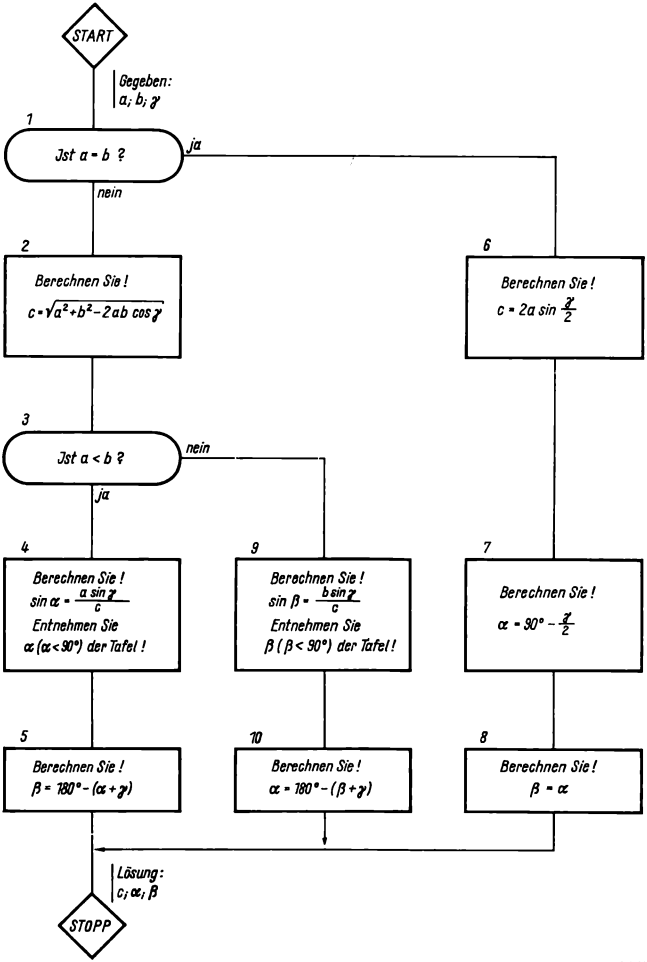
Es empfiehlt sich nicht, unmittelbar nach der Einführung des Sinus- und des Kosinussatzes von den Schülern schon „vollständige" Dreiecksberechnungen, d. h. die Berechnung aller fehlenden Stücke mit Hilfe mehrerer Teilrechnungen zu fordern. Damit würde man zu weit vorausgreifen und unter Umständen die Schüler zu einer unüberlegten, mathematisch ungenügend begründeten Verwendung der Formeln verleiten. Deshalb nennt das Lehrbuch in Zusammenhang mit der Einführung des Sinus- und des Kosinussatzes auch nur Aufgaben, bei denen jenes Stück des durch die Daten festgelegten Dreiecks gesucht ist, das unmittelbar mit Hilfe des betreffenden Satzes gewonnen werden kann; vgl. Lb 118/215 bis 220 und Lb 119/225 bis 234.

Der Anwendung der trigonometrischen Sätze für das allgemeine Dreieck sollte vielmehr noch eine Wiederholung der planimetrischen Sätze, die die Schüler im Mathematikunterricht der Klasse 6 erlernt haben, vorausgehen. Von diesen Sätzen sind nach dem Lehrplan für Klasse 6 – die Kongruenzsätze seien hier zunächst ausgenommen – nur der Satz über die Summe der Innenwinkel und der Außenwinkelsatz bewiesen worden. Lb 51f gibt auch zu den in Klasse 6 noch nicht bewiesenen Sätzen mögliche Beweismittel an; die Beweise selbst können – auf der Grundlage des Lehrbuchtextes – den Schülern zur Übung im Beweisen aufgetragen werden. Bei diesen Übungen erscheint es günstig, von den Schülern neben der wörtlichen Wiedergabe des Beweisganges auch Notierungen mit Hilfe der in der Planimetrie üblichen Symbole zu fordern; vgl. jedoch Bemerkungen auf Uh 45f.

Auch von den Kongruenzsätzen für das Dreieck sind in Klasse 6 nur die Sätze sws, wsw und sss bewiesen worden; diese Beweise sollten im Unterricht der Klasse 10 wiederholt werden, wenn möglich in selbständiger Arbeit von den Schülern unter Anleitung durch den Lehrer. Ein Beweis für den Kongruenzsatz ssw wird vom Lehrplan weder für Klasse 6 noch für Klasse 10 gefordert.

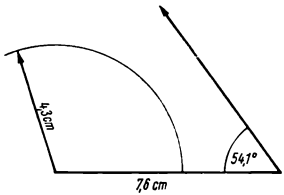
Es empfiehlt sich, den Schülern das Verfahren bei der Lösung trigonometrischer Aufgaben durch schematische Darstellungen von Lösungsvorschriften zu verdeutlichen; vgl. Uh 24. Sind die Schüler im Arbeiten mit algorithmischen Vorschriften und ihrer anschaulichen Darstellung vertraut, so können entsprechende Schemata oder Diagramme von den Schülern in selbständiger Arbeit entwickelt werden. Anderenfalls bietet sich nun im Unterricht die Möglichkeit, die Schüler in das Aufstellen und Abarbeiten von Algorithmen – an Hand anschaulicher Darstellungen – gründlicher einzuführen. Zum Beispiel kann für die einzelnen Fälle der Dreiecksberechnung, die den Kongruenzsätzen entsprechen, ein Schema – in der in Bild 101/1 gezeigten Form – entworfen werden. Wesentlich ist dabei, nicht nur die reinen Rechenoperationen algorithmisch festzulegen, sondern auch Sonderfälle, die auf einen einfacheren Rechenweg führen (z. B. Gleichschenkligkeit oder Rechtwinkligkeit des Dreiecks), zu berücksichtigen. Auch können Rechenkontrollen und Kontrollrechnungen in die Lösungsvorschrift einbezogen werden (in Bild 104/1 sind solche Schritte jedoch der Übersichtlichkeit halber weggelassen worden).

Das Lehrbuch gibt Beispiele zu den vier den Kongruenzsätzen entsprechenden


START
Gegeben:
a; b; γ
1
Ist a = b ?
ja
nein
2
Berechnen Sie !
$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$
6
Berechnen Sie !
$c = 2a \sin \frac{\gamma}{2}$
3
Ist a < b ?
nein
ja
4
Berechnen Sie !
$\sin\alpha = \frac{a \sin\gamma}{c}$
Entnehmen Sie
α (α < 90°) der Tafel !
9
Berechnen Sie !
$\sin\beta = \frac{b \sin\gamma}{c}$
Entnehmen Sie
β (β < 90°) der Tafel !
7
Berechnen Sie !
$\alpha = 90° - \frac{\gamma}{2}$
5
Berechnen Sie !
$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$
10
Berechnen Sie !
$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$
8
Berechnen Sie !
β = α
Lösung:
c; α; β
STOPP

101/1

Fällen der Berechnung beliebiger Dreiecke. Die in den Beispielen angegebenen Lösungen sind selbstverständlich als *mögliche* Wege aufzufassen, es empfiehlt sich, in die Diskussion um Lösungswege und Lösungen auch andere Wege einzubeziehen und deren Vorteile und Nachteile zu erörtern; dabei achte man besonders auf die Entscheidung über die Größe eines mit Hilfe des Sinussatzes bestimmten Winkels. Ein zweiter Lösungsweg eignet sich vielfach zur Kontrolle des Ergebnisses, manchmal sind sogar Lösungsgang und Kontrollgang vertauschbar.



102/1

Im Lehrbuch sind auch zwei Fälle dargestellt, bei denen zwei Dreiecksseiten und der der *kleineren* Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind und somit geprüft werden muß, ob die Aufgabe Lösungen hat. Das Beispiel für eine Aufgabe, die keine Lösung hat (Lb 56, Beispiel A 47), wird durch Lb 56, Auftrag A 73, ergänzt, der die Bestätigung der Unlösbarkeit durch einen Konstruktionsversuch fordert. Erfolgt dieser Konstruktionsversuch, wie es die Regel sein dürfte, in der in Bild 102/1 angegebenen Form, so bietet sich Gelegenheit zu prüfen, unter welchen Bedingungen – bei Verändern eines der gegebenen Stücke und Konstanthalten der zwei anderen – die Aufgabe lösbar ist. Der im Lehrbuch dargestellte rechnerische Lösungsversuch dieser Aufgabe entspricht dem Vorgehen bei der Berechnung eines Dreiecks, bei dem der gegebene Winkel der größeren der gegebenen Seiten gegenüberliegt. Da dieser Lösungsversuch sehr schnell zu einem Widerspruch (zwischen dem errechneten Wert für den Sinus eines Winkels und dem Wertebereich der Sinusfunktion) führt, könnte es geschehen, daß Schüler nach einer anderen Lösungsmöglichkeit suchen, etwa mit Hilfe des Kosinussatzes

(im Beispiel: Berechnung der Seite b aus $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$).

Man sollte einen solchen Versuch, der selbstverständlich auch einen Widerspruch ergibt (im Beispiel eine quadratische Gleichung ohne – reelle – Lösungen), nicht unterbinden, sondern erzieherisch nutzen. Die Diskussion von Aufgaben, die wie das genannte Beispiel nicht auf einen Kongruenzsatz zurückzuführen sind (vgl. Lb 120/238 b, 239 b) bietet Gelegenheit, den Schülern den Unterschied zwischen

. . . es gibt eine Lösung . . . (im Sinne: mindestens eine)

und

. . . es gibt *genau* eine Lösung . . . (im Sinne: eine und nur eine)

ins Gedächtnis zurückzurufen. Den Schülern ist dieser Unterschied bereits aus dem Unterricht der vorangegangenen Klassenstufen bekannt.

Bei den rechentechnischen Lösungsschritten müssen die Genauigkeitsforderungen streng beachtet werden, vgl. Uh 95. Da die gesuchten Stücke nicht immer – oder zumindest nicht immer auf rationellem Wege – direkt aus den gegebenen Stücken, ohne Rückgriff auf Zwischenergebnisse errechnet werden können, haben Fehlerbetrachtungen an Zwischen- und Teilresultaten ebenso wie Rechenkontrollen besondere Bedeutung.

Die Berechnungen auf Grund des Sinussatzes machen es oftmals notwendig, den gleichen Quotienten zweier Zahlen mit verschiedenen Faktoren zu multiplizieren. Wird dabei der Rechenstab benutzt, sollte auch die entsprechende Einstellung mittels des Läufers vorgenommen werden (das Lehrbuch macht das nicht deutlich,

die in den Beispielen gewählte Folge der Rechenschritte richtet sich bewußt nicht nach rechentechnischen Einzelheiten, sondern zeigt nur die Schrittfolge im großen). Für den Aufbau dieser Unterrichtseinheit gibt es vor allem zwei mögliche Wege.

1. Die Behandlung des Sinussatzes, des Satzes über den Flächeninhalt und des Kosinussatzes liegt vor der Wiederholung der Kongruenzsätze für das Dreieck und der Untersuchung der Lösungsmöglichkeiten in den verschiedenen Fällen.
2. Die Wiederholung der Kongruenzsätze liegt vor der Behandlung der trigonometrischen Sätze, wobei sich aus der Analyse der verschiedenen Fälle eine Motivation für das Aufsuchen allgemein für Dreiecke gültiger Beziehungen ergibt.

Bei beiden Wegen geht die Wiederholung der planimetrischen Sätze über das Dreieck der Wiederholung der Kongruenzsätze voraus.
Der erste Weg bringt mit sich, daß die trigonometrischen Sätze für das allgemeine Dreieck ohne besondere Motivation entwickelt (hergeleitet oder bewiesen) und „auf Vorrat" für die später folgenden Dreiecksberechnungen nach den Kongruenzsätzen gelernt werden müssen; er ist jedoch logisch einfach und überschaubar. Das Lehrbuch beschreitet diesen Weg.
Der zweite Weg ist in der Motivation zwingender; denn aus dem Problem, eine planimetrische Konstruktion sozusagen auf trigonometrischem Wege nachzuvollziehen, erwächst die Notwendigkeit, nach allgemeingültigen Beziehungen zwischen den Stücken eines Dreiecks zu suchen. Nach dem Kongruenzsatz, mit dem die Untersuchung begonnen wird, richtet sich die Reihenfolge der trigonometrischen Sätze (wird z. B. mit dem Kongruenzsatz sss oder sws begonnen, so steht der Kosinussatz an erster Stelle). Dieser Weg stellt etwas höhere Anforderungen als der andere an die geistigen Fähigkeiten der Schüler und auch an das methodische Geschick des Lehrers.

Die *Aufteilung des Stoffes* auf die verfügbare Unterrichtszeit könnte nach dem ersten Weg so erfolgen, daß für die Behandlung der vom Lehrplan geforderten trigonometrischen Sätze über das allgemeine Dreieck (im Lehrbuch Lerneinheiten A 23 bis A 25) drei Stunden, für die Wiederholung der planimetrischen Sätze eine Stunde und für die Dreiecksberechnungen nach den Kongruenzsätzen (im Lehrbuch Lerneinheit A 26) vier Stunden zur Verfügung stehen. Beim zweiten Weg würde es sich empfehlen, für die Wiederholung der planimetrischen Sätze insgesamt mindestens drei Stunden vorzusehen (je nach Umfang der notwendigen Wiederholungen planimetrischen Stoffes); die restliche Zeit kann der Anwendung der Sätze bei Dreiecksberechnungen und weiteren planimetrischen Aufgaben dienen. In beiden Fällen ist es möglich, im Rahmen einer Unterrichtsstunde zur Dreiecksberechnung eine kurze Kontrollarbeit schreiben zu lassen.

1.4.4. Sachaufgaben I (LE 27; 5 Std.)

Für die Arbeit an Sachaufgaben (Anwendungsaufgaben) zur ebenen Trigonometrie sind zwei Unterrichtseinheiten vorgesehen. In der ersten Unterrichtseinheit (1.4.4.) werden vorwiegend Aufgaben aus der Geometrie, der Physik und der Technik behandelt, die, mathematisch betrachtet, einfach lösbar sind und bei denen die Abstraktion des mathematisch Wesentlichen den Schwerpunkt bildet. Die zweite Unterrichtseinheit (1.4.5.) hat Vermessungsaufgaben zum Inhalt; bei diesen ist der mathematische Sachverhalt unmittelbar ersichtlich, aber die Lösung des mathematischen Problems ist meist anspruchsvoller und komplizierter. Außerdem werden später, im Rahmen des Stoffgebiets 2. „Körperdarstellung und Körper-

berechnung" weitere trigonometrische Aufgaben aus der Planimetrie und der Stereometrie in den Unterricht einbezogen; vgl. Lp 44 und Uh 153.
Die wichtigste allgemeine Aufgabe der zwei Unterrichtseinheiten, die im Rahmen der Behandlung der Trigonometrie Sachaufgaben zum Inhalt haben, besteht in der *Befähigung der Schüler, aus dem realen Sachverhalt der Aufgabe das mathematische Problem herauszufinden, es trigonometrisch zu lösen und* auf Grund der mathematischen Lösung *die Sachlösung der Aufgaben zu gewinnen.*

Ein wesentliches Ziel der *mathematischen Grundlagenbildung* der Schüler in der Unterrichtseinheit 1.4.4. ist die Entwicklung der Fähigkeit der Schüler, aus planimetrischen, stereometrischen, physikalischen und technischen Sachverhalten die trigonometrische Problemstellung herauszuarbeiten. Damit verbunden ist auch die Entwicklung der Fähigkeit, die richtigen Lösungsschritte und den rationellsten Lösungsweg einer trigonometrischen Aufgabe zu wählen, einen Lösungsplan oder eine Lösungsvorschrift aufzustellen und nach einer solchen Vorschrift zu arbeiten, ebenso die Vervollkommnung der Fertigkeit, die Lösungsschritte rechnerisch, mit Hilfe der Zahlentafel oder des logarithmischen Rechenstabes, in angemessener Zeit sicher auszuführen und die Rechenergebnisse – soweit möglich – durch Konstruktion zu überprüfen.

Für die *ideologische Bildung und Erziehung* der Schüler ist in dieser Unterrichtseinheit in erster Linie der sachliche Inhalt der Anwendungsaufgaben aus den verschiedenen Bereichen des sozialistischen Lebens, vor allem aus der Volkswirtschaft, der Technik und dem Militärwesen, bedeutsam. An diesen Aufgaben werden weitere Einsichten in die Bedeutung der Mathematik für die Gesellschaft und in das Wesen mathematischen Arbeitens gewonnen; vgl. z. B. Lb 123/272 bis 275.

Die *methodische Gestaltung* dieser Unterrichtseinheit richtet sich nach den allgemeinen Grundsätzen für das Arbeiten an Anwendungsaufgaben; vgl. Uh 26f. Im Unterricht ist zu einem Teil, bei einigen Aufgaben, auch eine Arbeitsteilung zwischen Schülergruppen möglich. Eine Gruppe stellt den Lösungsplan (das Lösungsschema) für eine Aufgabe auf, die andere arbeit korrekt nach diesem Schema, anschließend werden Richtigkeit und Zweckmäßigkeit des Planes (Schemas) und seiner Durchführung diskutiert. Bei der nächsten Aufgabe vertauschen die Gruppen die Rollen. Bei allen Arbeiten der Schüler sollten die Ausführungen der Lösungsskizzen bzw. der Kontrollkonstruktionen beachtet werden; man darf nicht zulassen, daß unvollständige und in ihrer Form unklare oder nachlässig entworfene Skizzen oder Konstruktionen angefertigt werden.

Besondere Hinweise zur *Aufteilung des Unterrichtsstoffes* auf die verfügbare Unterrichtszeit erübrigen sich; die einzelnen Unterrichtsstunden werden vorwiegend als Übungsstunden anzulegen sein. Es sollte darauf geachtet weren, daß die vom Lehrplan genannten Sachgebiete für die Aufgaben etwa in gleicher Weise berücksichtigt werden; vgl. Lp 13, 43. Die Aufgaben sollten auch so gewählt werden, daß Sacherläuterungen auf ein Mindestmaß beschränkt bleiben können; Schwerpunkt der Diskussion um den Sachtext sind Fragen der richtigen Abstraktion des mathematischen Inhalts und erzieherische Fragen.

1.4.5. Sachaufgaben II (Vermessungsaufgaben) (LE 28; 4 Std.)

Entsprechend der allgemeinen Aufgabe der zwei Unterrichtseinheiten, die Sachaufgaben zur Trigonometrie als Inhalt haben, bezieht sich in der Unterrichtseinheit 1.4.5. die *mathematische Grundlagenbildung* der Schüler vor allem auf das Kennen-

lernen und Anwenden von Methoden, mathematisch komplizierte Probleme trigonometrisch zu lösen; das erfordert ein höheres Niveau der Analyse des (mathematischen) Sachverhalts und stellt höhere Ansprüche an die Kombinationsfähigkeit und das schöpferische Denken als das Lösen einfacher Dreiecksaufgaben. Ebenso wird durch die Auswahl des Lösungsweges (bzw. die Entscheidung zwischen mehreren möglichen Lösungswegen) die Fähigkeit der Schüler, Lösungsmöglichkeiten kritisch einzuschätzen und unter ihnen zweckentsprechend zu wählen, weiterentwickelt.

Für die *ideologische Bildung und Erziehung* der Schüler in dieser Unterrichtseinheit gilt im allgemeinen das gleiche wie für die vorangegangene Unterrichtseinheit 1.4.4. Als besonderer Akzent kommt hinzu, daß viele der Aufgaben unmittelbar Bezug zu militärischen Fragen und somit auch zur Arbeit in der Gesellschaft für Sport und Technik (Orientierung im Gelände, Standortbestimmung, Artillerievermessung) haben und den Zugang zu weiteren politisch-moralischen und technischen Fragen der Landesverteidigung vermitteln; vgl. LANGER und TRÄGER [48]. Auch historisch Rückblicke auf die Entwicklung des Vermessungswesens können die Schüler zu weltanschaulich bedeutungsvollen Erkenntnissen über die Geschichte der Mathematik, die gesellschaftliche Bedeutung dieser Wissenschaft und über das Werk großer Mathematiker (z. B. GAUSS) führen.

Für die *methodische Gestaltung* dieser Unterrichtseinheit gelten die allgemeinen Grundsätze für das Lösen von Sachaufgaben; vgl. Uh 26f.
Bei den Aufgaben, die unmittelbare Beziehungen zur Landesvermessung und zur Artillerievermessung haben, ist zu beachten, daß in der Praxis, vor allem in der Praxis des Militärwesens, einfache Aufgaben der Orientierung im Gelände und des Feststellens von Entfernungen in der Mehrzahl ohne die Mittel der Trigonometrie gelöst werden; andererseits aber werden Aufgaben, deren Lösung genauere Messungen und die Anwendung trigonometrischer Verfahren erfordert, auf ein Koordinatensystem bezogen. Das bei topographischen Arbeiten gebräuchliche und auf topographischen Karten (z. B. den Meßtischblättern 1 : 25000) verzeichnete rechtwinklige Koordinatensystem (GAUSS – KRÜGER) ist nicht Gegenstand des Unterrichts in der allgemeinbildenden Schule. Deshalb sind die meisten Aufgaben, die das Lehrbuch zu dieser Unterrichtseinheit nennt, für den Unterricht adaptiert und, soweit es die Winkelangaben betrifft, auf die im Tafelwerk gewählte Unterteilung in Altgrad und dessen Dezimalen bezogen. Spezielle Aufgaben aus dem Militärwesen gibt die bereits genannte Arbeit von LANGER und TRÄGER [46] an; in dieser Arbeit wird auch vom rechtwinkligen Koordinatensystem der Landesvermessung ausgegangen.
Nähere Einzelheiten über die in der Vermessungspraxis üblichen Koordinatensysteme und Berechnungsverfahren entnehme der Leser der einschlägigen Fachliteratur; eine instruktive knappe und übersichtliche Darstellung findet sich in der Kleinen Enzyklopädie Mathematik [39], S. 310f.
Der Lehrplan fordert nicht, daß die Schüler praktische Vermessungsübungen im Gelände ausführen und Fertigkeiten im Umgang mit den Vermessungsgeräten erwerben; denn es hat sich erwiesen, daß solche Vermessungsübungen recht zeitaufwendig sind und ihr Bildungs- und Erziehungseffekt in Klasse 10 diesen Aufwand nicht rechtfertigt; vgl. [85]. Das schließt nicht aus, daß bei günstigen Bedingungen z. B. das Vorwärtseinschneiden zu einem „unzugänglichen" Punkt auf dem Schulhof oder einem Sportplatz mit Hilfe einiger Schüler der ganzen Klasse demonstriert wird; die Meßdaten können dann gemeinsam von allen Schülern – etwa als Hausaufgabe – ausgewertet werden. Das gleiche gilt für eine Höhenmessung, unter Umständen mit Hilfe einer Karte, wenn etwa die relative Höhe eines Berges oder die Höhe eines Baumes bestimmt werden sollen.
Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist durch die Beispiele im Lehrbuch (Lb 58)

charakterisiert; Aufgaben höheren Schwierigkeitsgrades, zu denen auch die im Aufgabenteil des Lehrbuches besonders gekennzeichneten Aufgaben (Lb 124f) gehören, eignen sich vor allem für Arbeitsgemeinschaften oder die individuelle Tätigkeit besonders interessierter Schüler. Zu diesen Aufgaben seien im folgenden einige Hinweise gegeben.

Da Systeme goniometrischer Gleichungen vom Typ

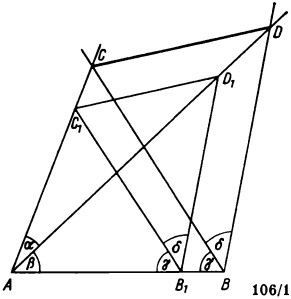
$$\text{(I)}\ \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=a \qquad\qquad \text{(II)}\ \varphi+\psi=\alpha$$

nicht Gegenstand des Unterrichts in Klasse 10 sind, müssen manche Aufgaben, z. B. Aufgaben über das *Rückwärtseinschneiden*, auf andere Weise gelöst werden.

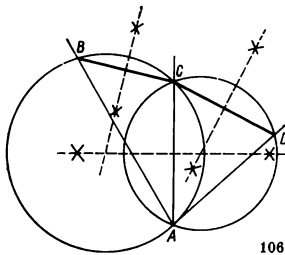
Bei der Hansenschen Aufgabe zum Ermitteln der Entfernung zwischen zwei Punkten, von denen aus jeweils der andere Punkt und zwei feste Punkte in der Umgebung anvisiert werden können (vgl. Bild 106/1 und Lb 124/27), kann man davon ausgehen, daß durch die vier meßbaren Winkel (im Bild $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) eine Schar ähnlicher Vierecke und damit auch das Verhältnis der bekannten Entfernung zwischen den Festpunkten in der Umgebung (im Bild $\overline{CD}$ zur unbekannten Entfernung zwischen den Ausgangspunkten (im Bild $\overline{AB}$) festgelegt sind. Es kann also zunächst an Stelle der gesuchten Entfernung (im Bild $\overline{AB}$) eine beliebige Strecke (im Bild $\overline{AB_1}$) angenommen und die Aufgabe wie eine Aufgabe über das *Vorwärtseinschneiden* zu zwei Punkten in Angriff genommen werden; vgl. Lb 124/26.

Durch Division der Länge der Strecke zwischen den Festpunkten der Umgebung (im Bild $\overline{CD}$) und der Länge der durch Vorwärtseinschneiden errechneten Strecke (im Bild $\overline{C_1D_1}$) ergibt sich der Faktor, mit dem die Länge der angenommenen „falschen" Basis multipliziert werden muß, um die Lösung der Aufgabe, die gesuchte Entfernung zwischen den Ausgangspunkten, zu erhalten. Weitere Einzelheiten über dieses auch in Vermessungspraxis übliche Verfahren vermittelt ein Aufsatz von Bienert [4]. Es ist ein instruktives Beispiel, wie ein Problem auf ein bereits gelöstes zurückgeführt werden kann.

Die Lösung der Pothenotschen Aufgabe, durch Anvisieren dreier fester Punkte der Umgebung von einem Punkt aus dessen Entfernung von jenen drei Punkten zu bestimmen, kann sich auf den planimetrischen Satz über den Zusammenhang von Peripherie- und Zentriwinkel, die der gleichen Sehne eines Kreises zugehören, stützen; die Radien der Kreise, die den Ausgangspunkt mit je zwei der drei festen Punkte verbinden, lassen sich mit Hilfe des Sinussatzes berechnen. Das Bild 106/2 weist auf planimetrische Zusammenhänge hin, auf die sich die trigonometrische Lösung stützen kann.

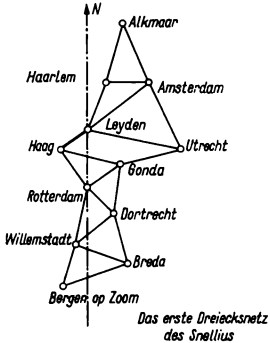


106/1



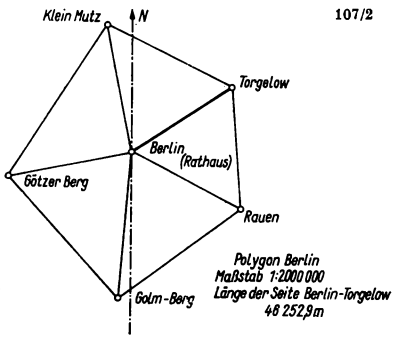
106/2

Bei der Behandlung von Aufgaben aus der Landesvermessung sollten Hinweise auf die Geschichte des Vermessungswesens und die Leistungen von C. F. Gauss nicht fehlen; in diesem Zusammenhang sei auch an Aufgaben mit „historischen" Daten



Das erste Dreiecksnetz des Snellius (1615 vollendet)

07/1



107/2

Polygon Berlin
Maßstab 1:2000 000
Länge der Seite Berlin-Torgelow
48 252,9 m

Winkeltabelle des „Polygons Berlin"

Standort	Ziel	Winkel
Berlin (Rathaus)	Torgelow Rauen Golm-Berg Götzer Berg Klein Mutz	61° 19′ 67° 40′ 74° 27′ 89° 43′
Torgelow	Rauen Berlin (Rath.) Klein Mutz	61° 3′ 59° 41′
Rauen	Golm-Berg Berlin (Rath.) Torgelow	62° 50′ 57° 38′
Golm-Berg	Götzer Berg Berlin (Rath.) Rauen	46° 18′ 49° 28′
Götzer Berg	Klein Mutz Berlin (Rath.) Golm-Berg	46° 38′ 59° 15′
Klein Mutz	Torgelow Berlin (Rath.) Götzer Berg	53° 29′ 43° 40′

gedacht, z. B. an das SNELLIUSsche Netz (Bild 107/1) oder an das „Polygon Berlin" (Bild 107/2), das der ersten Landesvermessung auf diesem Territorium zugrundegelegt wurde.

Wie für die vorangegangene Unterrichtseinheit 1.4.4. erübrigen sich für diese Unterrichtseinheit besondere Hinweise zur *Aufteilung des Stoffes* auf die einzelnen Unterrichtsstunden. Auch in dieser Unterrichtseinheit werden die einzelnen Stunden in der Hauptsache als Übungsstunden anzulegen sein.

1.4.6. Kontrollarbeit (3 Std.)

Für eine *zweistündige Kontrollarbeit* (die 3. Unterrichtsstunde dient der Auswertung dieser Arbeit) erscheinen Aufgaben folgenden Typs geeignet.

1. Planimetrische Aufgabe zur Anwendung der Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks, z. B.:
   Einem Kreis ($r = 3{,}5$ cm) *werde ein regelmäßiges Zehneck einbeschrieben. Welche Länge hat die Seite des Zehnecks? Um wieviel Prozent weicht*
   a) *die Länge des Umfangs,*
   b) *der Flächeninhalt*
   des Zehnecks von den entsprechenden Größen des Kreises ab?
2. Physikalisch-technische Aufgaben zur Anwendung der Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks, z. B.:
   Auf einer gleichmäßig ansteigenden Straße, für die in der Karte je 10 m *Höhendifferenz eine horizontale Entfernung von* 106 m *verzeichnet ist, fährt ein Lastkraftwagen von* 4,20 Mp *Gesamtgewicht mit gleichbleibender Geschwindigkeit bergan. Welche Zugkraft des Motors ist hierzu nötig, wenn die als konstant angenommene Reibungskraft* 110 kg *beträgt?*
3. Vermessungsaufgabe zur Anwendung der Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks mit maßstäblicher Konstruktion zur Kontrolle, z. B.:
   Von zwei Punkten A und B, deren Entfernung auf der Karte mit 432 m *angegeben ist, werde ein dritter, unzugänglicher Punkt C anvisiert. Es werden die Winkel* $BAC = 27{,}8°$ *und* $CBA = 114{,}3°$ *gemessen. Wie groß ist die horizontale Entfernung zwischen den Punkten A und C sowie B und C? Überprüfen Sie das errechnete Ergebnis durch eine maßstäbliche Konstruktion!*

2. Körperdarstellung und Körperberechnung

2.0. Vorbemerkungen

Das Stoffgebiet 2. „Körperdarstellung und Körperberechnung" vereinigt Themen aus zwei Teilgebieten der Mathematik: aus der *darstellenden Geometrie* und der *rechnerischen Stereometrie*. Dementsprechend sind für den Unterricht zwei Zielrichtungen bestimmend: erstens die *Festigung und Ergänzung* des Wissens und Könnens der Schüler in der Darstellung geometrischer Objekte in senkrechter Projektion und in schräger Parallelprojektion, zweitens die *Systematisierung und Erweiterung* des Wissens und Könnens der Schüler in der Oberflächen- und Rauminhaltsberechnung bei ausgewählten ebenflächig und krummflächig begrenzten geometrischen Körpern (Prisma, Pyramide, Kreiszylinder, Kreiskegel, Kugel sowie Stumpfkörper und zusammengesetzte Körper). Diese inhaltlich verschiedenen Zielrichtungen werden durch die *Anwendung allgemeiner, übergreifender Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik*, wie des Definierens, des Beweisens, des Arbeitens nach Formeln und Vorschriften (Algorithmen), zu einer Einheit zusammengefaßt. Somit hat der Unterricht eine zweifache Aufgabe: die *Vervollkommnung spezieller Kenntnisse und deren Einordnung in allgemeinere Zusammenhänge* (Lp 43). Die Stellung des Stoffgebiets „Körperdarstellung und Körperberechnung" am Ende des Lehrgangs, unmittelbar vor der Festigung, Systematisierung und Prüfungsvorbereitung am Schluß des Schuljahres in Klasse 10, weist auf die integrative Funktion dieses Stoffgebietes hin.

Das Stoffgebiet „Körperdarstellung und Körperberechnung" ist im Lehrplan von 1971 an die Stelle der Stoffgebiete „Darstellende Geometrie" (Klasse 9) und „Stereometrie" (Klasse 10) des früher gültigen präzisierten Lehrplanes getreten (auch im früher gültigen Lehrplan der Vorbereitungsklassen zum Besuch der Erweiterten Oberschule waren die Stoffgebiete, die die darstellende Geometrie und die rechnerische Stereometrie zum Inhalt hatten, getrennt). Es hat gegenüber diesen Stoffgebieten einen stark veränderten Inhalt. Diese Veränderung ist durch eine stärkere Betonung der mathematischen Grundlagenbildung gekennzeichnet, sie wird durch die günstigen Voraussetzungen im Wissen und Können der Schüler, die nach den Lehrplänen für die Klassen 6 bis 8 zu erwarten sind, praktisch ermöglicht. Dazu sei vor allem genannt (vgl. Weber [88] [89]):

- Nach den neuen Lehrplänen werden die Grundlagen der darstellenden Geometrie schon in Klasse 7 systematisch behandelt, so daß in Klasse 10 im wesentlichen nur eine Wiederholung notwendig erscheint. Im Oberschulunterricht der darstellenden Geometrie wird auf die Behandlung der Affinität und der Axonometrie verzichtet.
- Die rechnerische Stereometrie ist – mit Ausnahme der Körperstümpfe – nunmehr Gegenstand des Unterrichts in den Klassen 7 und 8. Auch bei der Körperberechnung in Klasse 10 handelt es sich somit in großem Umfang um Wiederholungen; nach dem neuen Lehrplan kommt es bei der Körperberechnung in Klasse 10 besonders darauf an, bestimmte elementare Techniken der geistigen Arbeit anzuwenden sowie gebräuchliche Hilfsmittel (Rechenstab, Tafelwerk, Kompendium) zu benutzen.
- Berechnung und Darstellung von Kugelteilen gehören nicht mehr zum Stoff.

Mit dem Hinweis auf die integrative Funktion, die der Unterricht im Rahmen dieses Stoffgebiets zu erfüllen hat, ist auch im wesentlichen gekennzeichnet, welche Bedeutung diesem Stoffgebiet bei der **mathematischen Grundlagenbildung** der Schüler zukommt.

Der Beitrag zur **allgemeinen geistigen Bildung** der Schüler, der – wie im Teil 0. in Uh 12ff angedeutet wurde – vor allem durch das *Erlernen und Gebrauchen fachspezifischer Denk- und Arbeitsmethoden* verwirklicht wird, besteht bei diesem Stoffgebiet in der Haupttsache in der Erweiterung und Vervollkommnung der Fähigkeiten der Schüler, eine Aufgabe zu analysieren, den rationellsten Weg zu ihrer Lösung zu suchen und die Mittel, die der Lösung dienen, richtig einzusetzen. Damit ist, von der Sache her, eine Erhöhung wesentlicher Verlaufsqualitäten geistiger Operationen (Analysieren, Synthetisieren, Abstrahieren, Konkretisieren, Verallgemeinern, Vergleichen, Klassifizieren, Gliedern u. a.) unmittelbar verbunden. Das Lösen mathematischer Aufgaben (rein mathematischer Aufgaben oder von Aufgaben aus den Anwendungsbereichen der Mathematik in der Produktion oder in anderen Wissenschaften) schließt das Arbeiten nach Vorschriften und das Aufstellen von Plänen ein.

In den Bereich der allgemeinen geistigen Bildung gehört auch die *Entwicklung* der *Raumvorstellungs- und der Raumdarstellungsfähigkeit*. Diese Fähigkeiten haben im Leben eine weit über den Bereich von Produktion und Technik hinausgehende Bedeutung. Im Mathematikunterricht der Klasse 10 muß auf diesem Gebiet ein Niveau angestrebt werden, das günstige Voraussetzungen für das technische Zeichnen und das Lesen technischer Zeichnungen bietet; vgl. Uh 21. Es ist in diesem Zusammenhang zu beachten, daß in den Einrichtungen, die zur Hochschulreife führen, keine weitere umfassende und systematische Behandlung der darstellenden Geometrie oder einer anderen Disziplin, die der Entwicklung der Raumvorstellungs- und der Raumdarstellungsfähigkeit dient, vorgesehen ist (Methoden der darstellenden Geometrie werden jedoch z. B. in der Erweiterten Oberschule bei der Behandlung der Kegelschnitte angewendet).

Auch im Hinblick auf die **ideologische Bildung und Erziehung** der Schüler hat der Unterricht im Stoffgebiet „Körperdarstellung und Körperberechnung" eine gewisse integrative Funktion. *Weltanschauliche Verallgemeinerungen*, vor allem die Einsicht in das Wesen der Mathematik, ihres Gegenstandes und ihrer Methoden, ergeben sich bei der Wiederholung der Definition (bzw. Erklärung) geometrischer Körper und bei der darstellend-geometrischen Abbildung geometrischer Objekte. So ist die Einsicht, daß geometrische Körper Idealisierungen darstellen, die sich auf Abstraktion bestimmter Eigenschaften materieller Objekte gründen, weltanschaulich sehr bedeutsam; vgl. Lp 44. Damit hängt auch die Erkenntnis zusammen, daß es möglich ist, die geometrischen Körper verschiedener Größe und Gestalt auf Grund bestimmter Merkmale zu Klassen zusammenzufassen.

Für die weltanschauliche und die politisch-moralische Erziehung der Schüler sind weiterhin *Anwendungsaufgaben aus Produktion und Technik*, besonders Aufgaben zur Körperberechnung mit Bezug zu ökonomischen Fragen des sozialistischen Aufbaus (z. B. Materialökonomie) bedeutsam.
Wie bei allen anderen Stoffgebieten, so können auch beim Stoffgebiet „Körperdarstellung und Körperberechnung" *historische Rückblicke* auf die Entwicklung der wissenschaftlichen Disziplin und auf das Leben und Wirken bedeutender Wissenschaftler die ideologische Bildung und Erziehung der Schüler wirkungsvoll unterstützen; vgl. Wussing und Arnold [96].

Wie bereits in Uh 20f angedeutet wurde, hat das Stoffgebiet „Körperdarstellung und Körperberechnung" spezielle Bedeutung für die **polytechnische Bildung** der Schüler. Das bezieht sich besonders auf die *Entwicklung der Raumvorstellungs- und der Raumdarstellungsfähigkeit* der Schüler, verbunden mit einer weiteren Entwicklung ihrer *Fertigkeiten im geometrischen Zeichnen und Konstruieren*, im Gebrauch der allgemein üblichen Zeichenhilfsmittel. Ebenso betrifft dies die Erweiterung des Wissens und Könnens im *Arbeiten mit Formeln*, im *numerischen Rechnen* (einschließlich des Überschlags- und Näherungsrechnens sowie des Rechnens mit abgetrennten Potenzen der Zahl 10), besonders in der *Handhabung des logarithmischen Rechenstabes*.

Übersichtlichkeit und Genauigkeit im geometrischen Zeichnen und Konstruieren sollten einen Grad erreichen, der durch

- sachlich richtige und ästhetisch ansprechende Aufteilung der Zeichenfläche,
- klares Hervorheben des Wesentlichen gegenüber dem Nebensächlichen, auch durch richtige Wahl der Linienart (dabei mindestens zwei deutlich unterscheidbare Linienstärken in der Zeichnung),
- hohe Zeichengenauigkeit

gekennzeichnet ist.
Beim Rechnen sollte unbedingt Sicherheit im Ermitteln der Größenordnung des Ergebnisses, Gewandtheit und Schnelligkeit bei Schätzungen und Überschlagsrechnungen sowie ein rasches und genaues Einstellen und Ablesen beim Arbeiten mit dem Rechenstab erreicht werden. Ebenfalls sollte Sicherheit beim Umgang mit Größen und im Umrechnen von Werten in andere Einheiten (im Rahmen des dekadischen Systems und des Kanons der Gesetzlichen Einheiten) das Ziel des Unterrichts in Klasse 10 sein.
Zeitnormative für die Durchführung von schriftlichen Rechnungen und Rechnungen mit dem Stab zu nennen, ist kaum möglich, zumal die diesbezüglichen Forschungen noch nicht abgeschlossen sind. Noch schwieriger erscheint die Festlegung von Genauigkeits- und Zeitnormen für geometrische Konstruktionen und Zeichnungen. Einen gewissen Anhalt können die Beispiele für Kontrollaufgaben im Rahmen einzelner Unterrichtseinheiten – 2.1.6. und 2.2.4. – geben.

Hinsichtlich der **methodischen Gestaltung** des Unterrichts im Stoffgebiet „Körperdarstellung und Körperberechnung" fordert der Lehrplan eine rationelle Behandlung beider inhaltlicher Teilbereiche, die deren Eigengesetzlichkeit achtet (Lp 44). Für den Aufbau des Lehrgangs unter diesem Aspekt bieten sich, wie am Schluß dieser einleitenden Bemerkungen zum Stoffgebiet noch näher ausgeführt wird, mehrere Varianten mit verschiedenem inhaltlichen und didaktischen Akzent an; vgl. Uh 124ff).

Allgemein betrachtet ist das Stoffgebiet „Körperdarstellung und Körperberechnung" ein Gebiet, dessen Behandlung wegen der Eigenart der zu erörternden geometrischen Objekte und Zusammenhänge die Anwendung verschiedenartiger Unterrichtsmittel, besonders die *Anwendung von Modellen geometrischer Körper*, erfordert oder zumindest nahelegt.
Zur Veranschaulichung der Form und Gestalt von geometrischen Körpern, der Lagebeziehungen seiner Elemente (Ecken, Kanten, Flächen) sowie von Schnitt- bzw. Durchdringungsfiguren gibt es verschiedene, didaktisch annähernd gleichwertige Modellarten. Zu nennen sind neben *massiven Modellen*, die auch zerlegbar sein können, *starre Kantenmodelle* (z. B. aus Behelfsmaterial; vgl. Luther [56]), *bewegliche Kantenmodelle*, *Fadenmodelle* (auch geeignet zur Darstellung von Mantellinien bei Zylindern und Kegeln; vgl. Glass [21]), *starre Flächenmodelle* sowie *klappbare*

Netz- und Abwicklungsmodelle. Einen größeren – aber im Unterricht der Oberschule kaum immer gerechtfertigten – technischen Aufwand erfordert die Anwendung des *Lichtebenenverfahrens* bei transparenten Modellen oder Rotationsmodellen; vgl. BOHNE [9], HOFMANN [27] und SCHRÖDER [74]. Von höherem Wert als die Arbeit mit fertigen Modellen ist im allgemeinen der *Selbstbau von Modellen* durch die Schüler; er erfordert aber, selbst wenn er sich in Grenzen hält, verhältnismäßig viel Zeit. Weniger aufwendig sind einfache Behelfsmodelle sowie Netz- und Abwicklungsmodelle aus Zeichenkarton.

Als spezielles Unterrichtsmittel zur Veranschaulichung des Abbildungsverfahrens und der Grundkonstruktionen der darstellenden Geometrie, besonders der Zweitafelprojektion, hat sich die *Maniperm-Klapptafel* gut bewährt (sie hat die Knetmassetafeln, in die Stäbchen eingesteckt wurden, abgelöst). Zum Gebrauch der Maniperm-Klapptafel sind mehrere Veröffentlichungen erschienen, z. B. die Arbeiten von GIMPEL [19] und HANKEL [23]. Andere Autoren empfehlen auch *Kantemodellen* für die Veranschaulichung der Grundaufgaben der darstellenden Geometrie (vgl. WILLM und SCHWABE [94]). Als Unterrichtsmittel, das besonders der Erarbeitung und Festigung der darstellend geometrischen *Konstruktionsverfahren* dienen kann, seien entsprechende *Folien zum Schreibprojektor* genannt. ADELT [1] hat ihren Wert für den Planimetrieunterricht in den Klassen 6 bis 8 nachgewiesen; die Ergebnisse dieser Untersuchung lassen sich auch in anderen Bereichen des geometrisch-konstruktiven Arbeitens nutzen.

Daß die gebräuchlichen *Rechenhilfsmittel* (Tafelwerk [80], logarithmischer Rechenstab) und *Zeichengeräte* (Lineal, zwei Zeichendreiecke, Zirkel) zu den notwendigen Unterrichtsmitteln gehören, sei der Vollständigkeit halber erwähnt. Zweckmäßig sind auch *Schablonen* für das Skizzieren von Ellipsen (mehrere Größen mit einem Achsenverhältnis $a : b = 2 : 1$, entsprechend der vom Lehrplan geforderten schrägen Parallelprojektion mit einem Verzerrungswinkel von 90° und einem Verkürzungsverhältnis von $\frac{1}{2}$; vgl. Lp 45) oder ein geeignetes Kurvenlineal (der übliche BURMEISTER-Satz ist nicht erforderlich).

Zur Verwendung des *Lehrbuches*, das auch bei der Behandlung von Körperdarstellung und Körperberechnung eines der entscheidenden Unterrichtsmittel ist, sei folgendes bemerkt: Der Lehrtext des Lehrbuches ist, um verschiedene methodische Wege zu ermöglichen, in jenen Abschnitten, die den Stoffeinheiten 2.1. und 2.2. des Lehrplans entsprechen, nach sachlogischem Aspekt in verhältnismäßig kleine Teile (Lerneinheiten) aufgegliedert; innerhalb der Lerneinheiten ist der Text logisch-systematisch aufgebaut. Die Lerneinheiten zu den einzelnen Arten (Klassen) der zu wiederholenden bzw. neu zu behandelnden geometrischen Körper beginnen in der Regel mit der Definition oder der Erklärung (deren Wortlaut mit den Definitionen oder Erklärungen, die in den Lehrbüchern für die Klassen 7 und 8 gegeben werden, im wesentlichen übereinstimmt). Es folgen Erläuterungen wichtiger Begriffe und informative oder illustrative verallgemeinernde Ausblicke; im Anschluß daran werden die Formeln für die Berechnung des Oberflächeninhalts und des Rauminhalts – ohne Beweis oder Herleitung; vgl. Lp 44 – aufgeführt. Auf die darstellend-geometrische Abbildung der betreffenden Körper (d. h. von Vertretern der zu behandelnden Arten bzw. Klassen) wird dann in besonderen Lerneinheiten eingegangen, und zwar im allgemeinen in der Reihenfolge: Darstellung in Zweitafelprojektion – Darstellung in schräger Parallelprojektion. Die Ausführungen zur Körperberechnung und zur Körperdarstellung werden durch Beispiele belegt.
Weiterhin sind im Lehrbuch besondere Lerneinheiten enthalten, deren Aufgabe es ist, den Schülern spezielle mathematische Methoden und Verfahren bewußtzuma-

chen und die Anwendung dieser Methoden und Verfahren an praktischen Beispielen zu zeigen. Das betrifft z. B. das Lösen von Aufgaben aus der Stereometrie, die Darstellung in schräger Parallelprojektion und die konstruktive Ermittlung der wahren Länge einer Strecke sowie der wahren Größe und Gestalt einer ebenen Figur.

Der Aufgabenteil des Lehrbuches entspricht in Aufbau und Reihenfolge der Gliederung des Lehrtextes in Lerneinheiten; im übrigen ist der Lehrteil des Lehrbuches so gestaltet, daß in den Text Beispiele, Fragen und Aufgaben einbezogen sind, die besonders der Aktivierung und der Selbstkontrolle der Schüler dienen. Damit wird eine bewährte Gestaltungsform von Mathematikbüchern für die Mittel- und die Oberstufe auch beim Lehrbuch für Klasse 10 verwirklicht.

Für die methodische Gestaltung des Unterrichts in der **Stereometrie** (Eigenschaften geometrischer Körper sowie Flächen- und Rauminhaltsberechnung) sind, entsprechend der Zielstellung des Lehrplans, vor allem die Aspekte der *Festigung, Systematisierung und Erweiterung* des Gelernten bestimmend; vgl. Lp 16, 43; Uh 21f. Nach den gültigen Lehrplänen haben die Schüler vor dem Eintritt in Klasse 10, insbesondere in den Klassen 7 und 8, folgende geometrischen Körper kennengelernt und Oberflächen- und Rauminhaltsberechnungen bei diesen Körpern ausgeführt:

- Prisma
- Kreiszylinder
- Pyramide
- Kreiskegel
- Kugel.

Prisma und Pyramide wurden definiert, Kreiszylinder (gerader), Kreiskegel (gerader) und Kugel als Rotationskörper erklärt. Die Zusammenhänge zwischen Prisma und Zylinder sowie zwischen Pyramide und Kegel wurden insbesondere bei der Herleitung der Formeln zur Berechnung des Volumens dieser Körper herausgearbeitet. Der Satz von CAVALIERI wurde den Schülern vermittelt, er diente der Begründung der Formeln zur Berechnung des Volumens schiefer Prismen und Pyramiden. Auf Kugelteile wurde nicht eingegangen.

Es muß beachtet werden, daß nicht die systematische, sondern die *rechnerische Stereometrie* Gegenstand des Mathematikunterrichts der Oberschule ist. Weil aber zum Verständnis gewisser Eigenschaften der zu behandelnden geometrischen Körper – ebenso wie gewisser Verfahren der darstellend-geometrischen Abbildung – auch die Kenntnis einiger Elemente der systematischen Stereometrie notwendig erscheint, müssen diese Elemente in Zusammenhang mit Problemen der Behandlung von Körpern, also an Ort und Stelle bei der Lösung bestimmter darstellend-geometrischer oder auch rechnerisch-stereometrischer Aufgaben, in der Regel auf anschaulicher Grundlage, den Schülern verständlich gemacht werden. Es handelt sich vor allem um

- Bestimmung einer Ebene (durch drei Punkte, durch einen Punkt und eine nicht diesen Punkt enthaltende Gerade, durch zwei einander schneidende Geraden, durch zwei parallele, aber nicht zusammenfallende Geraden),
- Orthogonalität von einer Geraden und einer Ebene (hinreichende Bedingung für die Orthogonalität),
- Orthogonalität zweier Ebenen,
- Parallelität von einer Geraden und einer Ebene,
- Parallelität zweier Ebenen,

– Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene (Zurückführung auf den Winkel zwischen zwei Geraden),
– Winkel zwischen zwei Ebenen (Zurückführung auf den Winkel zwischen zwei Geraden).

Stoff dieser Art tritt aber nicht als Inhalt des (überprüfbaren) Wissens in Erscheinung, vgl. Uh 29.

Im Unterricht der Stereometrie treten spezielle didaktisch-methodische Probleme in Erscheinung. Eines dieser Probleme betrifft das richtige *Verhältnis zwischen dem Beweisen (oder Herleiten) und dem Anwenden von Sätzen und Formeln.* Der Lehrplan formuliert eindeutig, daß es nicht Aufgabe des Unterrichts sein kann, alle benötigten Sätze und Formeln herzuleiten oder zu beweisen, und spricht das Primat dem Aufsuchen der Formeln im Tafelwerk und dem Anwenden der Sätze und Formeln bei praktischen Rechnungen zu; vgl. Lp 44. Dieser Hinweis darf jedoch nicht in dem Sinne mißverstanden werden, als ob auf das Beweisen und Herleiten mathematischer Sätze und Formeln überhaupt kein Wert zu legen sei; denn an anderer Stelle wird im Lehrplan auf die Notwendigkeit hingewiesen, auch im Mathematikunterricht der Klassen 9 und 10 die Fähigkeit der Schüler, Beweise zu führen, planmäßig weiterzuentwickeln; vgl. Lp 10. Als wichtiges Mittel hierfür nennt der Lehrplan Aufgaben, die der Anwendung der bekannten Sätze und Formeln auf Spezialfälle dienen; vgl. Lp 44. Als eine solche Aufgabe kann den Schülern z. B. die Herleitung (oder die Bestätigung) der Formeln für den Oberflächen- und Rauminhalt eines Kegelstumpfes aufgetragen werden (diese Aufgabe fördert z. B. auch die Sicherheit im Arbeiten mit Variablen und im Rechnen mit Proportionen und Potenzen). Ebenso ist es möglich, von den Schülern überprüfen zu lassen, daß die – aus einer Formelsammlung entnommene oder vom Lehrer gegebene – SIMPSONSCHE Formel die Formeln für Prismen (Zylinder), Pyramiden (Kegel) und die Kugel als Spezialfälle erfaßt. Selbstverständlich gehören der im ersten Beispiel genannte Herleitungsgang und die SIMPSONSCHE Formel nicht zum Übungsstoff oder zum abfragbaren Wissen; vgl. Uh 29.

Ein weiteres Problem betrifft den Inhalt und den Umfang des *Arbeitens nach algorithmischen Vorschriften* im Vergleich mit der Anwendung anderer Regeln. Grundsätzlich ist die Anwendung von Algorithmen sowohl bei der Berechnung als auch bei der Darstellung geometrischer Körper in vielfältiger Weise und in großem Umfang möglich. Bewußt herausgearbeitet werden sollten algorithmische Vorschriften jedoch vorzugsweise dann, wenn es sich in erster Linie um lineare Abläufe einfacher Operationen handelt, sondern wenn der Gang der Lösung wesentlich von *Entscheidungen* (die sich z. B. aus notwendigen Falluntersuchungen ergeben können) abhängt. Beim Rechnen nach Formeln trifft dies im allgemeinen seltener zu als beim darstellend-geometrischen Konstruieren; deshalb bietet der Unterricht in darstellender Geometrie auch günstige Gelgenheiten für das Arbeiten mit algorithmischen Vorschriften (Aufstellen und Abarbeiten von Algorithmen; vgl. Uh 145).

Schließlich gehört zu den genannten Problemen das richtige *Arbeiten mit Größen und ihren Einheiten bei der Flächen- und Rauminhaltsberechnung.* Erfahrungsgemäß ist – auch in den Klassen der Oberstufe – ein Großteil der Fehler bei Flächen- und Rauminhaltsberechnungen auf ein falsches Umwandeln von Maßangaben in eine andere Einheit sowie auf weitere Mängel, die sich in der Größenordnung des Resultats auswirken, zurückzuführen (dazu gehören z. B. Fehler beim Abtrennen der Potenzen der Zahl 10 sowohl beim schriftlichen Rechnen als auch beim Gebrauch des logarithmischen Rechenstabes). Demgegenüber sind Fehler, die die Ziffernfolge des Ergebnisses verändern, verhältnismäßig selten (wenn man von groben Ungenau-

igkeiten beim Einstellen und Ablesen am Rechenstab absieht). Auch ein nur formales Arbeiten mit dem Rechenstab läßt die Gefahr entstehen, daß Fehler in der Größenordnung des Ergebnisses auftreten. Aus diesem Grunde sollte bei allen Flächen- und Rauminhaltsberechnungen konsequent darauf geachtet werden, daß die Schüler durch Schätzen und Überschlagen entweder das gesuchte Resultat vorher näherungsweise ermitteln oder das Resultat nachher auf diese Weise überprüfen. Auch der richtigen Schreibweise sollte beim Rechnen mit Größen besonderes Augenmerk geschenkt werden, denn auch hierbei schleichen sich durch Nachlässigkeit leicht Fehler ein. Werden die Variablen in den Formeln bzw. Gleichungen der Flächen- und Rauminahltsberechnung als Zeichen für Größen aufgefaßt, so empfiehlt es sich, bei den Berechnungen auch mit Größen – Produkten aus Maßzahl und Einheit – zu operieren. Das entspricht den Gepflogenheiten der Praxis, und beim Notieren sollte man die in der Praxis allgemein übliche – und im Lehrbuch in Lerneinheit B 1 erklärte – Kurzform der Niederschrift wählen. Nebenrechnungen werden dabei nur mit den Maßzahlen ausgeführt, beim Stabrechnen muß ohnehin von den Einheiten abstrahiert werden. Wichtig ist, daß die Schüler klar zwischen Größen und Zahlen, zwischen Größen- und Maßzahlengleichungen (Zahlenwertgleichungen) unterscheiden können.

Die *technische Ausführung der Körperberechnungen* zeigt gegenüber anderen Berechnungen keine Besonderheiten. Da Rechenhilfsmittel Gegenstand des Unterrichts in Klasse 9 sind und auch bei der Behandlung trigonometrischer Aufgaben (im Rahmen der Stoffeinheit 1.4. „Anwendung der Winkelfunktionen bei Dreiecksberechnungen") das Rechnen mit Hilfe des Rechenstabes und der Zahlentafeln vielfach Anwendung fand, sollten gute Voraussetzungen bei den Schülern erwartet werden.

Die methodische Gestaltung des Unterrichts in der **darstellenden Geometrie** wird in der Hauptsache von den Aspekten der *Festigung und Ergänzung* des Gelernten sowie von der im Lehrplan angegebenen Zielsetzung bestimmt, daß „der Schwerpunkt auf der Entwicklung des Abstraktionsvermögens der Schüler, nicht aber auf dem Herausbilden von Zeichenfertigkeiten" liegt; vgl. Lp 44. Daraus erklären sich Auswahl und Aufbau des Stoffes und die Verteilung der Unterrichtszeit (darunter z. B. auch die Festlegung, daß krummflächig begrenzte geometrische Körper nur skizziert, nicht aber bis in die Einzelheiten konstruktiv-genau gezeichnet werden, und die verhältnismäßig geringe Stundenzahl für Übungen, die auf die Vervollkommnung der Zeichentechnik gerichtet sind). Von dieser Zielsetzung und diesen Aspekten wird auch die Wahl der Methoden und Mittel des Unterrichts im einzelnen determiniert, Nach dem gültigen Lehrplan haben die Schüler im Unterricht der Klasse 7, Stoffgebiet „Darstellende Geometrie", folgendes kennengelernt.

- Projektionsbegriff, Projektionsarten, Kavalierperspektive
  (Projektion als eindeutige Abbildung der Punkte des Raumes auf eine Ebene; Zentralprojektion, Parallelprojektion – senkrechte Projektion und schräge Parallelprojektion, Kavalierperspektive als Sonderfall der schrägen Parallelprojektion, Verkürzungsverhältnis, Verzerrungswinkel, Darstellung einfacher ebenflächig begrenzter Körper)
- Senkrechte Eintafelprojektion
  (Darstellung von Punkten, Strecken, Geraden, geradlinig begrenzten ebenen Figuren und Ebenen; Darstellung von ebenflächig begrenzten Körpern; Grundaufgaben und Grundkonstruktionen: wahre Länge einer Strecke, Neigungswinkel einer Geraden gegen die Bildebene, Neigungswinkel einer Ebene gegen die Bildebene, wahre Größe und Gestalt einer geradlinig begrenzten ebenen Figur)
- Senkrechte Zweitafelprojektion
  (Darstellung von Punkten, Strecken, Geraden, geradlinig begrenzten ebenen

Figuren und von Ebenen, die senkrecht auf der Aufrißebene stehen; Darstellung paralleler, einander schneidender und windschiefer Geraden; Darstellung ebenflächig begrenzter Körper; Schnitte eines geraden Prismas durch eine Ebene senkrecht zur Aufrißebene; Grundaufgaben und Grundkonstruktionen: wahre Länge einer Strecke, wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur bei einem ebenen Schnitt eines geraden Prismas)

Die Darstellung von Körpern wurde auch im Lehrgang „Technisches Zeichnen" im Rahmen des polytechnischen Unterrichts behandelt; der Lehrplan für diesen Lehrgang sieht in den Klassen 7 und 8 vor:

- Einführung in das technische Zeichnen
- Lesen von Zeichnungen, Skizzieren bzw. Zeichnen in verschiedenen Darstellungsarten des technischen Zeichnens (flache und prismatische Werkstücke bzw. technische Gegenstände nach TGL 9727 sowie in Kavalierperspektive; nur informatorisch: ISO-A-Verfahren)
- Lesen von Zeichnungen, Skizzieren bzw. Zeichnen von prismatischen Werkstücken und Gegenständen (Gegenstände mit Einschnitten, Bohrungen, Nuten u. ä. – einschließlich der Bemaßung; Oberflächenzeichen)
- Lesen von Zeichnungen, Skizzieren bzw. Zeichnen von zylindrischen und prismatischen Werkstücken und technischen Gegenständen (einfache und zusammengesetzte Gegenstände mit fluchtender Symmetrieachse, Bemaßung der Quadrat- und Kreisform, Bemaßung für Fasen, Winkel und Rundungen, Darstellung eines Bruches)
- Zeichnen von technischen Gegenständen in vergrößerter oder verkleinerter Darstellung (standardisierte Maßstäbe)
- Lesen und Skizzieren bzw. Zeichnen von Schnittdarstellungen (Voll- und Halbschnittdarstellungen, aufgebrochene Darstellungen – einschließlich Maßeintragung)
- Lesen und Skizzieren bzw. Zeichnen sinnbildlicher Darstellungen von Gewinden und Schraubverbindungen
- Lesen einfacher Gesamtzeichnungen (einschließlich Werkstoffkennzeichnung durch Schraffur)

Es ist zu beachten, daß nach der Stoffabfolge in den Lehrplänen das Zeichnen und Skizzieren einfacher Körper im Lehrgang „Technisches Zeichnen" (in 3 bzw. 6 Ansichten nach TGL 9727 und in Kavalierperspektive) dem Unterricht in darstellender Geometrie im Fach Mathematik zeitlich vorausgehen kann.

Zum Abschluß der Rückschau auf den in den vorangehenden Klassen behandelten Stoff sei noch bemerkt, daß der Lehrplan für Klasse 10 im Hinblick auf die Darstellung in senkrechter Projektion nur eine Festigung und Ergänzung der Kenntnisse und Fertigkeiten der Schüler in der Anwendung der Zweitafelprojektion fordert, obgleich in Klasse 7 mit der Einführung der Schüler in die Eintafelprojektion begonnen wurde und dieses Verfahren auch den Schwerpunkt im Unterricht der darstellenden Geometrie in dieser Klasse gebildet hatte (die darstellendgeometrischen Grundkonstruktionen wurden z. B. in diesem Verfahren begründet). Das ist zweifellos durch die umfassendere praktische Bedeutung des Zweitafelverfahrens gerechtfertigt; Grundlage des Fachzeichnens der meisten Berufe ist das Zweitafelverfahren, ergänzt durch weitere Aufrisse (von der Bedeutung des Eintafelverfahrens für topographische Darstellungen und Bereiche des Verkehrs- und Tiefbaus sei hier abgesehen).

Bei der Entwicklung der Raumvorstellungsfähigkeit und dem Erarbeiten der grundlegenden Verfahren der darstellenden Geometrie wird im Unterricht in der Regel *von einem gegenständlichen Objekt oder Modell ausgegangen und der Weg zur Rißdarstellung über eine anschauliche Zeichnung oder Skizze* (z. B. in schräger Parallelprojektion) *beschritten*. Da vorausgesetzt werden kann, daß die Schüler in Klasse 10 schon über einige Fähigkeiten der Raumvorstellung und der Abstraktion von der

dritten Dimension verfügen, sollte die Arbeit am gegenständlichen Objekt oder Modell nicht über das unbedingt Notwendige hinaus ausgedehnt werden; auch für die darstellende Geometrie – und gerade für diese Disziplin! – gilt das geflügelte Wort, daß (gegenständliche) Modelle dazu da seien, sich selbst überflüssig zu machen. Nicht alle Zusammenhänge und Konstruktionen der darstellenden Geometrie brauchen an gegenständlichen Modellen veranschaulicht zu werden, auch ist nicht immer eine anschauliche Zeichnung oder Skizze vonnöten. In Klasse 10 ist das Arbeiten mit anschaulichen Skizzen, die von den Schülern selbst entworfen oder ergänzt werden müssen, dem Arbeiten mit gegenständlichen Modellen vorzuziehen.

Im Unterricht der darstellenden Geometrie, vor allem bei der Behandlung der darstellend-geometrischen Grundzusammenhänge und Grundkonstruktionen, hat sich die Methode bewährt, der Abbildung bzw. der Konstruktion in senkrechter Projektion (Eintafel- oder Zweitafelprojektion) das entsprechende gegenständliche Modell oder die anschauliche Zeichnung gegenüberzustellen. Am Modell – oder an der anschaulichen Zeichnung – werden die geometrischen Zusammenhänge begründet und, beim Bearbeiten einer Konstruktionsaufgabe, die einzelnen Schritte ermittelt; umgekehrt wird der auf dem Zeichenblatt ausgeführte Konstruktionsschritt am Modell oder an der anschaulichen Zeichnung „im Raum" interpretiert. Das Lehrbuch ist für ein solches Vorgehen eingerichtet; im Lehrteil steht – bei den Beispielen für einige kompliziertere Konstruktionen – die anschauliche Darstellung neben der Konstruktion in Zweitafelprojektion, z. B. im Lb 89.

Das hauptsächliche methodische Verfahren des Unterrichts in darstellender Geometrie ist das Arbeiten an *darstellend-geometrischen Aufgaben*, die vom Lehrer den Schülern – entweder frontal der ganzen Klasse oder bestimmten Schülergruppen oder Einzelschülern – gestellt und von den Schülern in der Regel in individueller, vom Lehrer mehr oder weniger intensiv angeleitete selbständiger Arbeit (seltener in Gruppenarbeit) gelöst werden. Der Ziel- und Aufgabenstellung des Unterrichts in Klasse 10 entsprechend sind folgende Aufgabentypen besonders bedeutsam.

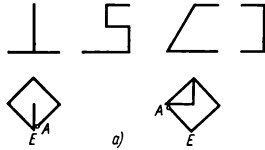
- Aufgaben zur Darstellung geometrischer Objekte nach Angaben über Art, Gestalt und Größe des Objekts;
- Aufgaben zur Darstellung geometrischer Objekte nach gegenständlichen Modellen;
- Aufgaben zum Lesen darstellend-geometrischer Zeichnungen;
- Aufgaben zum Übertragen einer darstellend-geometrischen Zeichnung in ein anderes Darstellungsverfahren;
- Aufgaben zur Ausführung darstellend-geometrischer Konstruktionen in einem festgelegten Darstellungsverfahren (Konstruktionsaufgaben im engeren Sinne);
- Aufgaben zur Lösung eines Problems mit Hilfe der Raumvorstellung

Komplexe Aufgaben können Teilaufgaben verschiedener Typen miteinander vereinigen.

Die *Aufgaben zur Darstellung geometrischer Objekte nach Angaben über Art, Gestalt und Größe des Objektes* beziehen sich im Unterricht der Klasse 10 in erster Linie auf die Darstellung einfacher Körper in einer Zeichnung oder Skizze (insbesondere Prismen, Pyramiden, gerade Kreiszylinder, gerade Kreiskegel, Stumpfkörper, einfach zusammengesetzte Körper). Diese Aufgaben sind in Zusammenhang mit der Definition und Klassifizierung geometrischer Körper zu sehen; denn die Aufgabenstellung zwingt vielfach die Schüler unmittelbar, sich der wesentlichen Merkmale der darzustellenden Objekte zu besinnen und auf Grund dieser Merkmale den Konstruktionsgang und eventuelle Zeichenkontrollen festzulegen. Es ist selbstverständlich, daß für Aufgaben dieser Art nur solche Körper gewählt werden kön-

nen, von denen die Merkmale, die für das Zeichnen als wesentlich angesehen werden müssen, den Schülern bekannt sind.
Bei der Aufgabenstellung ist zu berücksichtigen, daß die Schüler zwar mit kartesischen Koordinaten in der Ebene vertraut sind, aber räumliche kartesische Koordinaten nicht kennen; auch in Klasse 10 ist das räumliche kartesische Koordinatensystem nicht Unterrichtsgegenstand. Eine Angabe markanter Punkte, z. B. der Ecken eines ebenflächig begrenzten Körpers, durch Koordinaten ist also nicht möglich. Einheitlichkeit in den Daten kann man z. B. mit Hilfe von Arbeitsblättern, Lochschablonen oder durch genaue Beschreibung sowie durch Angabe der Abmessungen und der Lage des Körpers erreichen.

Auch die *Aufgaben zur Darstellung geometrischer Objekte nach gegenständlichen Modellen* betreffen hauptsächlich einfache geometrische Körper, allerdings ist bei den ebenflächig begrenzten Körpern eine Beschränkung auf die nach dem Lehrplan zu definierenden Körper nicht notwendig; vgl. Uh 29f. Wichtig ist nur, daß an den Modellen die wesentlichen Eigenschaften (z. B. Symmetrie, Parallelität oder Orthogonalität von ebenen Flächen oder geraden Linien) sowie eventuelle Achsen, von denen aus die darstellend-geometrische Abbildung „aufgebaut" werden kann, erkennbar sind und die für die Konstruktion notwendigen Strecken gemessen werden können. Einige Methodiker empfehlen auch das Darstellen einfacher Drahtmodelle, die in verschiedene Lagen gebracht werden können; vgl. Bild 118/1, nach WELSER und WEISENBERGER.



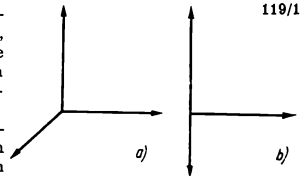
118/1 Drahtmodelle

Zur Darstellung geometrischer Objekte nach gegenständlichen Modellen können schließlich auch Aufgaben gezählt werden, bei denen ein Körpernetz gegeben ist und der Körper entweder in senkrechter Projektion oder in schräger Parallelprojektion abgebildet werden soll. Solche Aufgaben sind sehr instruktiv, allerdings sollte man den Schülern bei den ersten Beispielen dieser Art noch die Möglichkeit geben, als Hilfe die Netze zum Körper zu formen, und nicht sofort den großen Schritt vom Netz zur darstellend-geometrischen Abbildung verlangen.

Ebenso wie bei den Aufgaben zur Darstellung geometrischer Objekte nach Daten ist bei den Aufgaben zur Darstellung geometrischer Objekte nach Modellen zu fordern, daß nicht nur die Zeichenfläche richtig ausgenutzt, sondern auch das Objekt möglichst übersichtlich dargestellt wird; vgl. Lp. 12. Die Schüler müssen – falls nicht durch die Aufgabenstellung Festlegungen getroffen sind – die Anordnung des Körpers gegenüber der Bildebene und gegebenenfalls auch das darstellend-geometrische Abbildungsverfahren selbständig wählen. z. B. zwischen schräger Parallelprojektion mit einem Verzerrungswinkel von 45° oder 90°. Man darf zwar nicht erwarten, daß die Schüler ohne Anleitung, auf Anhieb die richtige Lage des Objekts oder die richtige Darstellungsform finden, aber man kann die Schüler soweit führen, daß sie am Ende des Oberschulbesuchs nach kurzer Überlegung, eventuell unterstützt durch Skizzen, in der Lage sind, eine den Anforderungen entsprechende Anordnung und Darstellungsweise zu finden und die Zeichnung danach zu gestalten.
Die *Aufgaben zum Lesen darstellend-geometrischer Zeichnungen* nehmen im Unter-

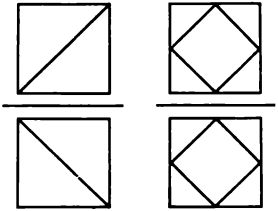
richt der Klasse 10 einen verhältnismäßig breiten Raum unter den Mitteln zur Entwicklung der Raumvorstellungsfähigkeit der Schüler ein. Sie betreffen vor allem das Lesen von Darstellungen in Zweitafelprojektion.

Das Lesen kann entweder dem Identifizieren und Beschreiben der dargestellten Objekte („qualitatives Lesen") oder der Maßentnahme („quantitatives Lesen") dienen; die Maßentnahme ist z. B. für das Entwerfen von Modellen, Körpernetzen oder Zeichnungen in einer anderen Darstellungsart von Bedeutung. Bei anschaulichen Darstellungen, z. B. in schräger Parallelprojektion, ist es zur eindeutigen Kennzeichnung der Maßverhältnisse erforderlich, bei der vorgelegten Zeichnung das Darstellungsverfahren und seine wesentlichen Daten – z. B. Verzerrungswinkel und Verkürzungsverhältnis – zu nennen; das läßt sich entweder durch eine Zahlenangabe in üblicher Weise oder durch die Abbildung eines rechtwinkligen Einheitsdreibeins (im Bild 119/1 in schräger Parallelprojektion a) $\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$ b) $\alpha = 90°$; $q = \frac{1}{2}$) tun. Als Übungsbeispiele für das Lesen darstellend-geometrischer Zeichnungen eignen sich auch Abbildungen, bei denen mehrere Deutungen möglich sind (vgl. Bild 119/2), oder Darstellungen von Körpern in besonderer Lage, die auf den ersten Blick andere Formen vortäuschen. Zu diesen gehören z. B. die Zwei- oder Dreitafeldarstellung eines regelmäßigen Tetraeders, das so auf einer Kante steht, daß die Risse Quadrate mit einer Diagonale sind, oder eines Rhombendodekaeders, dessen Achsen jeweils auf den Rißtafeln senkrecht stehen. Einige weitere, nicht im Lehrbuch enthaltene Beispiele zeigt Bild 119/3, sie stellen höhere Anforderungen an die Raumvorstellungsfähigkeit, zumal auch krummflächige Körperbegrenzungen auftreten.



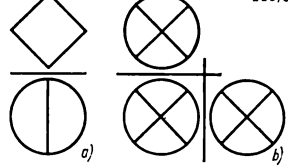
119/1

Zu den Aufgaben zum Lesen darstellend-geometrischer Zeichnungen lassen sich auch Aufgaben zählen, bei denen das Modellieren eines Objekts nach einer darstellend-geometrischen Zeichnung gefordert wird. Bei solchen Aufgaben kommen zu den Elementen des Lesens noch konstruktive Elemente hinzu, die Ansprüche an die Raumdarstellungsfähigkeit stellen und somit auch zur Entwicklung dieser Fähigkeit beitragen. Anstatt der Anfertigung gegenständlicher Modelle könnte z. B. auch die Konstruktion eines Netzes (bei geometrischen Körpern) gefordert werden. Eine einfache Modellierungsaufgabe ist auch das Biegen eines Drahtmodells nach gegebenen Rissen, die „Umkehraufgabe" zur Rißdarstellung eines Drahtmodells; vgl. Bild 118/1. Der Lehrplan für Klasse 10 fordert jedoch solche Aufgaben nicht.



119/2

„Mehrdeutige" Darstellungen



119/3

Die *Aufgaben zur Übertragung einer darstellend-geometrischen Zeichnung in ein anderes Darstellungsverfahren* sind komplexer Natur, sie vereinigen in sich die Elemente des Lesens einer Zeichnung mit Elementen der Darstellung geometrischer Objekte. Sie umfassen in der Hauptsache Fälle, bei denen ein Körper in Zweitafelprojektion dargestellt ist und eine Zeichnung in schräger Parallelprojektion gefordert wird und umgekehrt. Da die Eintafelprojektion nicht Wiederholungsgegenstand im Unterricht der Klasse 10 ist, sollte von Übertragungen aus der Zweitafelprojektion in die Eintafelprojektion abgesehen werden und Übungen, bei denen aus der Eintafeldarstellung die Zweitafeldarstellung zu entwickeln ist, sollten zwar nicht gänzlich vermieden, aber auf ein geringes Maß beschränkt werden. Diese Übertragung hat eine gewisse praktische Bedeutung, sie kann auch mit einer anschließenden Konstruktionsaufgabe in Zweitafelprojektion, z. B. mit der Konstruktion der wahren Größe und Gestalt eines Körperschnittes, kombiniert werden.
Die *Aufgaben zur Ausführung darstellend-geometrischer Konstruktionen* – die bei einem systematischen und relativ vollständigen Lehrgang der darstellenden Geometrie, der auch in hohem Maße zur Entwicklung von Zeichenfertigkeiten beitragen soll, in der Regel den Hauptteil aller Aufgaben bilden – beschränken sich nach dem Lehrplan für Klasse 10 im wesentlichen auf die darstellend-geometrischen Grundaufgaben in Zweitafelprojektion (Lp 45)

- Konstruieren der wahren Länge einer Strecke (aus gegebenem Grund- und Aufriß durch Umklappung);
- ebene Schnitte senkrecht zur Aufrißtafel durch gerade Prismen;
- Konstruieren der wahren Größe und Gestalt dieser Schnittfiguren (durch Umklappen);
- ebene Schnitte senkrecht zur Aufrißtafel durch gerade Kreiszylinder (Skizzieren der Schnittfiguren).

Weitere Konstruktionen, z. B. Körperdurchdringungen, sind nicht vorgesehen; auf Konstruktionen der genannten Art in Eintafelprojektion wird ebenso wie auf Konstruktionen in schräger Parallelprojektion verzichtet. In Übereinstimmung mit dem Lehrplan und aufbauend auf den Vorkenntnissen, die die Schüler aus dem Unterricht in Klasse 7 mitbringen, werden im Unterricht der Klasse 10 die Beispiele für die darstellend-geometrischen Konstruktionen so ausgewählt, daß die Bezugsebene für die Konstruktionen die Grundrißebene (oder eine Parallelebene zu dieser, d. h. eine Höhenebene) ist; darin spiegelt sich in gewisser Weise das Vorgehen in Klasse 7 wider, bei dem zunächst die Grundrißprojektion mit den entsprechenden Konstruktionen behandelt und die Grundriß-Aufriß-Projektion aus jener abgeleitet wird (Ersetzen des Höhenmaßstabes durch eine zweite Abbildung in senkrechter Projektion, den Aufriß). Eine völlige praktische „Gleichstellung" der mathematisch gleichwertigen Risse bei der Zweitafelprojektion wird weder in Klasse 7 noch in Klasse 10 angestrebt; vgl. z. B. die Beschränkung der Schnittebenen beim Schnitt prismatischer und zylindrischer Körper auf Schnittebenen, die zur Aufrißtafel senkrecht stehen (vgl. Lp 45).
Bei den *Aufgaben zur Lösung eines Problems mit Hilfe der Raumvorstellung* sollen die Schüler räumliche Zusammenhänge aus der Kenntnis stereometrischer Beziehungen ohne Anwendung von Modellen oder Konstruktionen ergründen; solche Aufgaben sind besonders wirksam, wenn sie ein Überraschungsmoment enthalten, wie etwa ein (vermeintliches) Paradoxon in der Aufgabenstellung oder eine verblüffend einfache Lösung. Als *Beispiel* sei genannt (nach GRAF):
„Ist es möglich, durch einen Würfel einen zweiten, kongruenten Würfel so hindurchzuschieben, daß der Zusammenhang der restlichen Teile des ersten Würfels voll erhalten bleibt?"; vgl. Bild 121/1.

Zu den Aufgaben, die sich im Unterricht der Klasse 10 zur Lösung mit Hilfe der Raumvorstellung eignen, gehören auch Aufgaben über Anzahl und Zusammenhang von Ecken, Kanten und Flächen geometrischer Körper, da der EULERsche Polyedersatz nicht Gegenstand des Mathematikunterrichts der Oberschule ist. Auch Aufgaben über verschiedene Netzvarianten bei ebenflächig begrenzten Körpern sind hier zu nennen, ebenso Aufgaben über die gegenseitige Lage geometrischer Grundgebilde, z. B.:

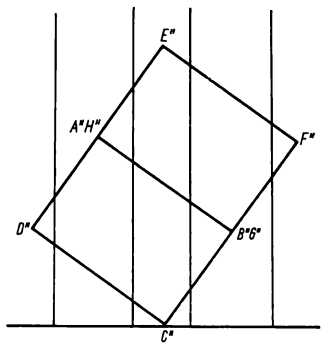
„Wie viele Ebenen werden von sechs Punkten, von denen nicht mehr als drei in der gleichen Ebene liegen, bestimmt?"

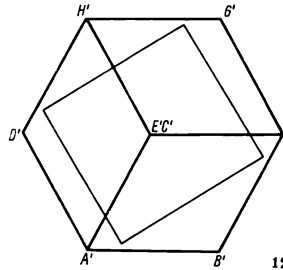
„Welche Fälle der gegenseitigen Lage von drei Ebenen sind möglich?"

Im allgemeinen sollen Aufgaben dieser Art auch ohne Zuhilfenahme von Zeichnungen gelöst werden; im Anfang und bei komplizierten oder „kniffligen" Aufgaben sollte man jedoch das Anfertigen einer Skizze (oder sogar eines Behelfsmodells, eines „Freihandmodells") durch die Schüler nicht verbieten. Die genannte Aufgabe über das Durchstoßen eines Würfels würde eine genaue Skizze sogar fordern; vgl. Bild 121/1.

Wirksam für Bildung und Erziehung ist eine Aufgabe erst dann, wenn sie vollständig – im Sinne der Aufgabenstellung – gelöst ist; zur vollständigen Lösung gehört, daß nicht nur die notwendigen Operationen ausgeführt worden sind, sondern daß auch eine der Aufgabenstellung in Form und Diktion entsprechende *Lösungsmitteilung*, bei Aufgabenstellungen in Frageform ein Antwortsatz beigegeben ist. Damit ist natürlich nicht gesagt, daß z. B. bei jeder Konstruktion von den Schülern eine ausführliche Konstruktionsbeschreibung abzuverlangen ist. Hier sei ein *Beispiel* für eine Lösungsniederschrift bei einer Aufgabe gegeben, in der die Identifizierung eines Körpers (qualitatives Lesen) gefordert wird; vgl. Bild 121/2.

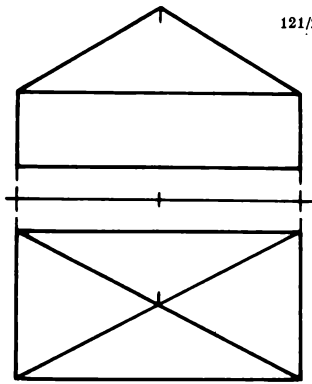
„Die gegebene Abbildung in Grund- und Aufriß stellt einen Quader mit verschieden langen Kanten dar, bei dem auf einer





121/1

121/2

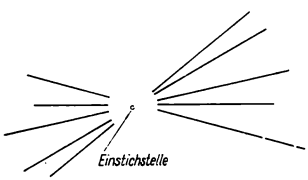


der zwei größten Seitenflächen eine gerade Pyramide aufgesetzt ist; die Höhe der Pyramide ist ungefähr gleich der kürzesten Kante des Quaders."

Beim Stellen von Aufgaben können *Dias, Folien zum Lichtschreibgerät* oder *Arbeitsblätter* nützlich sein. Sie sollten vor allem dann Verwendung finden, wenn die Vorgaben zeitraubende Zeichentätigkeit erfordern oder im Interesse einer raschen Kontrolle der Ergebnisse einheitlich für die ganze Klasse oder eine Schülergruppe sein sollen. Ebenso können Arbeitsblätter begonnene Konstruktionen enthalten, die von den Schülern zu Ende geführt werden sollen. Auch für das Arbeiten nach algorithmischen Vorschriften können Arbeitsblätter zweckmäßig sein (vgl. BRUCHHOLD [11] und WAHRENHOLZ [86]), notwendig sind sie bei einfacheren Aufgaben dieser Art aber nicht. Prinzip für den Gebrauch von Dias, Folien und Arbeitsblättern sei, sie nur dann zu verwenden, wenn ihr Einsatz eine spürbare Rationalisierung der Tätigkeit der Schüler und des Lehrers verspricht; vgl. HERZOG [26].

Die *darstellend-geometrischen Zeichnungen und Skizzen* werden grundsätzlich mit *Bleistift* ausgeführt; auf Übersichtlichkeit und Sauberkeit ist dabei besonders zu achten; vgl. Uh 20. Als Zeichengrund eignet sich am besten glatter, dünner Zeichenkarton oder glattes, festeres Zeichenpapier *ohne Lineatur oder Raster*. Als Format reicht für die meisten Darstellungen geometrischer Körper eine Seite A 5 (Hoch- oder Querformat, je nach Aufgabe) aus; für kompliziertere und umfangreichere Konstruktionen (z. B. für das Ermitteln der wahren Größe und Gestalt der Schnittfigur bei einem ebenen Schnitt eines Körpers) ist das Format A 4 zu empfehlen. Es können für die darstellend-geometrischen Zeichnungen auch entsprechende Vordrucke für das technische Zeichnen (mit Rand und Schriftfeld nach Standard) verwendet werden; zu fordern ist dies aber nicht.

In Klasse 10 sollten die Schüler daran gewöhnt werden, Strecken mit Hilfe eines Stechzirkels an- und abzutragen und die Einstichstelle bei markanten Punkten durch einen freihändig gezeichneten kleinen Kreis (Nullenkreis) zu kennzeichnen. Auch bei anderen Punkten, die nicht besonders gekennzeichnet werden, ist die Einstichstelle maßgebend. Die Bezeichnung von Punkten durch ein Kreuzchen, wie es z. B. im Planimetrieunterricht manchmal üblich ist, sollte im Unterricht der darstellenden Geometrie wegen ihrer geringen Genauigkeit vermieden werden. Laufen mehrere Linien in einem Punkt zusammen und besteht die Gefahr der Ungenauigkeit und Unübersichtlichkeit, so sollte die Umgebung des Punktes ausgespart werden; vgl. Bild 122/1. Da erfahrungsgemäß viele Ungenauigkeiten beim



122/1

Zeichnen auf ein falsches Anlegen des Zeichendreiecks oder des Lineals zurückzuführen sind, ist es ratsam, diesbezügliche Kontrollen bei den Schülern – zu Beginn des Unterrichts in darstellender Geometrie und später nochmals – durchzuführen. Ein Transversalmaßstab für die Längenmessung ist nicht notwendig, es genügt ein Lineal mit Millimeterteilung. Bruchteile eines Millimeters werden dabei geschätzt.

Bei der Zweitafelprojektion werden einander zugeordnete Risse markanter oder für die Konstruktion wesentlicher Punkte in der allgemein in der darstellenden Geo-

metrie üblichen Weise bezeichnet (z. B. A', A'', bei weiteren Aufrissen A''', A^{IV}). Bei Körperdarstellungen dürfen die Bezeichnungen entfallen, wenn Mißverständnisse ausgeschlossen erscheinen und die Übersichtlichkeit gewahrt bleibt. Übungen im Bezeichnen von Rissen, wenn der in Zweitafelprojektion abgebildete Körper durch ein Modell, eine anschauliche Darstellung oder eine Beschreibung charakterisiert wird, können für die Entwicklung der Raumvorstellungsfähigkeit der Schüler günstig sein.

Für die Bezeichnung von Umklappungen (Umlegungen) hat sich die Klammer eingebürgert (vor allem: runde Klammer bei Hilfsfiguren in projizierenden Ebenen, z. B. bei Stützdreiecken und -trapezen, anderenfalls eckige Klammer).

Ordnungslinien werden im allgemeinen als dünne Vollinien gezeichnet; sind sie für die Konstruktion nicht wesentlich oder kann durch eine Vielzahl von Linien Unübersichtlichkeit entstehen, genügt es, die Ordnungslinien „anzureißen"; vgl. Lb 133, Bilder b 20, b 21 und Uh 121, Bild 121/2. Der Schnitt mit der Rißachse dient ggf. der Kontrolle oder der Konstruktion eines zweiten Aufrisses.

Bei der Beschriftung der darstellend-geometrischen Zeichnung sind richtige Zuordnung, Lesbarkeit und Übersichtlichkeit erstes Gebot. Gleichartige Objekte werden mit Symbolen gleicher Schriftart und gleicher Schriftgröße bezeichnet (nach den in der Geometrie allgemein üblichen Regeln). Normschrift ist zwar nicht ausdrücklich gefordert, aber da sie den Schülern vom technischen Zeichnen her bekannt ist, sollte ihr gegenüber anderen Schriftarten, z. B. der Blockschrift, der Vorzug gegeben werden.

Ob für das darstellend-geometrische Zeichnen ein Reißbrett benutzt werden soll oder nicht, ist umstritten; einen ausdrücklichen Hinweis zur Benutzung dieses Hilfsmittels enthält der Lehrplan nicht. Wenn die Schüler aus dem polytechnischen Unterricht (Lehrgang „Technisches Zeichnen") über ein kleineres Reißbrett (Format A 3, mit Reißschiene) verfügen, dann ist seine Verwendung im Mathematikunterricht der Klasse 10 zu empfehlen. Die Arbeit auf dem Reißbrett kann Genauigkeit und Schnelligkeit im Zeichnen wesentlich steigern helfen.

Abschließend – im Rahmen der Hinweise zum Unterricht in darstellender Geometrie – sei auf ein spezielles Problem, das den Aufbau des Lehrgangs der Körperdarstellung betrifft, hingewiesen: Für die Darstellung krummflächig begrenzter geometrischer Körper – sie reduziert sich im wesentlichen auf die Darstellung gerader Kreiszylinder und gerader Kreiskegel – wird vom Lehrplan außer der Zweitafelprojektion die *schräge Parallelprojektion mit einem Verzerrungswinkel von 90° und dem Verkürzungsverhältnis* $\frac{1}{2}$ vorgeschrieben. Diese Darstellungsart, die nur beim Skizzieren angewendet wird, liefert im Vergleich mit der Kavalierperspektive weniger verzerrt erscheinende Bilder, vor allem gibt es keine „schiefen" Basisellipsen bei Abbildungen aufrechtstehender Kreiszylinder und Kreiskegel, außerdem ist der zeichentechnische Aufwand geringer.

Obgleich die Darstellung in schräger Parallelprojektion mit einem Verzerrungswinkel von 90° vom Lehrplan erst bei der Darstellung krummflächig begrenzter geometrischer Körper gefordert wird, erscheint es günstig, auf diese Darstellungsart schon früher hinzuweisen. Dadurch kann vermieden werden, daß sich bei der (skizzenmäßigen) Abbildung eines in der Grundebene liegenden Kreises in schräger Parallelprojektion Schwierigkeiten häufen; anderenfalls müßte nämlich nicht nur das neue Darstellungsverfahren, sondern auch die Abbildung gekrümmter Linien im Rahmen derselben Unterrichtseinheit erläutert werden. Die für das Skizzieren wesentlichen Eigenschaften der Ellipse sind den Schülern nur zu einem Teil bekannt, und zwar vor allem aus dem Astronomieunterricht (Bahnen von Himmelskörpern, KEPLERsche Gesetze).

Ein frühzeitiger Hinweis auf das Darstellungsverfahren mit einem Verzerrungswinke von 90° könnte ermöglichen, am Beispiel der Darstellung ebenflächig begrenzter Körper funktionale Betrachtungen anzustellen, wenn etwa bei der wiederholenden und systematisierenden Behandlung der Darstellungsarten in schräger Parallelprojektion die Parameter – der Verzerrungswinkel und das Verkürzungsverhältnis – variiert und die Ergebnisse, die verschiedenen Bilder des gleichen Körpers, miteinander verglichen werden. Allerdings ist dabei zu beachten, daß der Lehrplan keine besondere Erörterung der schrägen Parallelprojektion vorsieht und die Darstellung in schräger Parallelprojektion im wesentlichen als Mittel, anschauliche Bilder geometrischer Körper zu entwerfen, wertet. Das Lehrbuch zeigt einen möglichen Weg für die Behandlung der zwei genannten Darstellungsarten in schräger Parallelprojektion; vgl. Lb 76.

Für den **sachlich-logischen Aufbau des Unterrichts**, für die zeitliche Aufeinanderfolge der Stoff- und Unterrichtseinheiten, bestehen mehrere Möglichkeiten. Der Lehrplan gliedert das Stoffgebiet in zwei Stoffeinheiten, und zwar unter dem Gesichtspunkt zu behandelnder Objekte, d. h. geometrischer Körper.
Diese Gliederung bringt mit sich, daß *in der ersten Stoffeinheit* (2.1.) das Hauptgewicht auf *Wiederholung und Systematisierung* früher behandelten Stoffes, *in der zweiten Stoffeinheit* (2.2.) jedoch der Akzent auf *Einführung und Anwendung neuen Stoffes* liegt. Sie legt auch – in beiden Stoffeinheiten – eine enge Verzahnung von Körperdarstellung und Körperberechnung etwa im Sinne einer weitgehend fusionistischen Behandlung nahe; dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß die Eigengesetzlichkeit der beiden inhaltlich verschiedenen Stoffkomponenten gewahrt bleiben muß und die Fragen der rechnerischen Stereometrie ebenso wie die Fragen der darstellenden Geometrie gründlich und in ihrer eigenen Systematik behandelt werden müssen; vgl. Lp 44. Möglichkeiten einer Synthese der Komponenten bietet die Arbeit mit komplexen stereometrischen Aufgaben, in die auch Stoff aus anderen Teilgebieten der Mathematik, z. B. der ebenen Trigonometrie, einbezogen wird.
Innerhalb der Stoffeinheiten lassen sich die einzelnen Themen in verschiedener Reihenfolge behandeln; Prinzip sollte ein Fortschreiten vom Einfachen zum Komplizierten sein, bei dem jede Häufung von Schwierigkeiten vermieden wird.

Für die Stoffeinheit 2.1., die der Wiederholung und Systematisierung dient, bietet sich folgende Ordnung der Stoffe aus den beiden Hauptkomponenten des Stoffgebiets an.

1) Getrennte Behandlung der Stoffe aus der rechnerischen Stereometrie und der darstellenden Geometrie, im Anschluß daran Zusammenführung der Elemente durch das Lösen komplexer Aufgaben (*Varianten 1a* und *1b*)
2) Behandlung nach der Systematik der geometrischen Körper, bei jeder Klasse geometrischer Körper sowohl Fragen der rechnerischen Stereometrie als auch Fragen der darstellenden Geometrie (*Varianten 2a* und *2b*)
3) „Gemischte" Behandlung unter vorwiegend systematisierenden und integrativen Aspekten (*Variante 3*)

Bei den Varianten 1a und 2a wird jeweils von den Fragen der darstellenden Geometrie ausgegangen, und auch im weiteren Unterricht bildet diese Stoffkomponente den Schwerpunkt. Diese Varianten empfehlen sich also, falls die Schüler Lücken oder Schwächen in der Vorbildung auf diesem Gebiet erkennen lassen. Bei den Varianten 1b und 2b hingegen bildet die Körperberechnung den Schwerpunkt.
Die Variante 3 berücksichtigt beide Stoffkomponenten in gleichem Maße; sie bietet, didaktisch betrachtet, günstige Voraussetzungen für die Entwicklung des logischen Denkens und anderer geistiger Fähigkeiten der Schüler sowie für die Anwendung früher erworbenen Wissens und Könnens. Das *Lehrbuch – und die Unterrichtshilfen* – führen diese *Variante 3* näher aus. Da das Lehrbuch für diese Stoffeinheit

eine verhältnismäßig große Zahl kleinerer, in sich (relativ) abgeschlossener Lerneinheiten vorsieht, läßt es sich auch ohne besondere Schwierigkeiten beim Unterricht nach den anderen Varianten verwenden. Die folgenden Übersichten über die Varianten geben auch Hinweise zur Nutzung des Lehrbuches.

Für die Stoffeinheit 2.2., deren sachlichen Inhalt Stumpfkörper und zusammengesetzte Körper bilden, ist die Anzahl der empfehlenswerten Möglichkeiten des Aufbaus naturgemäß geringer. Es erscheinen günstig

1) Getrennte Behandlung von Körperdarstellung und Körperberechnung (*Varianten 1a* und *1b*)
2) Behandlung nach der Systematik der Körper, dabei jeweils sowohl Fragen der Oberflächen- und Rauminhaltsberechnung als auch Fragen der Körperdarstellung (*Variante 2*)

Die Varianten 1a und 1b sind ebenso unterschieden wie die *a*- und die b-Varianten zur Behandlung der Stoffeinheit 2.1. *Lehrbuch und Unterrichtshilfen* folgen der *Variante 2*, aber auch für diese Stoffeinheit gilt, daß beim Unterricht nach einer der Varianten 1 das Lehrbuch ohne Schwierigkeiten verwendet werden kann; vgl. Übersicht.
Es ist nicht notwendig, den Unterricht in der Stoffeinheit 2.2. nach dem gleichen logischen Schema wie in Stoffeinheit 2.1. aufzubauen, d. h. z. B., sich nach Wahl der Variante 1a für die Stoffeinheit 2.1. auch für die Variante 1a für die Stoffeinheit 2.2. zu entscheiden. Ein Wechsel des Vorgehens bedeutet auch einen Wechsel des Betrachtungsaspektes. Wird z. B. in Stoffeinheit 2.1. der Akzent auf die Körperdarstellung gelegt, so kann es nützlich sein, in Stoffeinheit 2.2. die Körperberechnung besonders zu betonen. Auch das Lehrbuch und die vorliegende Schrift gehen, logisch betrachtet, bei den Stoffeinheiten verschiedene Wege.

Übersicht über die Varianten für den Aufbau der Stoffeinheit 2.1.

Variante 1a

Lfd. Nr.	Thema der Unterrichtseinheit	Std.	Lerneinheiten des Lehrbuches
2.1.1.	Darstellend-geometrische Grundkonstruktionen	3	B 6 B 7
2.1.2.	Darstellung ebenflächig begrenzter Körper (einschließlich Schnittfiguren)	3	B 4 B 8
2.1.3.	Darstellung krummflächig begrenzter Körper (einschließlich Schnittfiguren)	2	B 9 B 10
2.1.4.	Oberflächen- und Rauminhaltsberechnung bei geometrischen Körpern	3	B 1 B 2 B 3
2.1.5.	Komplexe Aufgaben	2	B 5
2.1.6.	Kontrollarbeit	3	–

Variante 1b

Lfd. Nr.	Thema der Unterrichtseinheit	Std.	Lerneinheiten des Lehrbuches
2.1.1.	Berechnung einfacher geometrischer Körper (Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel)	4	B 1 B 2 B 3
2.1.2.	Darstellung ebenflächig begrenzter Körper, darstellend-geometrische Grundkonstruktionen (einschließlich Körperschnitte)	5	B 4 B 6 B 7 B 8
2.1.3.	Darstellung krummflächig begrenzter Körper (einschließlich Körperschnitte)	2	B 9 B 10
2.1.4.	Komplexe Aufgaben	2	B 5
2.1.5.	Kontrollarbeit	3	–

Variante 2a

Lfd. Nr.	Thema der Unterrichtseinheit	Std.	Lerneinheiten des Lehrbuches
2.1.1.	Darstellung und Berechnung ebenflächig begrenzter geometrischer Körper	3	B 4 B 1 B 2 (Teil: Prisma) B 3 (Teil: Pyramide)
2.1.2.	Darstellung und Berechnung krummflächig begrenzter geometrischer Körper	3	B 9 B 2 (Teil: Zylinder) B 3 (Teil: Kegel, Kugel)
2.1.3.	Darstellend-geometrische Grundkonstruktionen, Körperschnitte	4	B 6 B 7 B 8 B 10
2.1.4.	Komplexe Aufgaben	3	B 5
2.1.5.	Kontrollarbeit	3	–

Variante 2b

Lfd. Nr.	Thema der Unterrichtseinheit	Std.	Lerneinheiten des Lehrbuches
2.1.1.	Berechnung und Darstellung (in schräger Parallelprojektion) von Prisma und Zylinder	4	B 1, B 2 B 4 (Teil: schräge Parallelprojektion) B 9 (Teil: schräge Parallelprojektion)
2.1.2.	Berechnung von Pyramide, Kegel und Kugel; Darstellung (in schräger Parallelprojektion) von Pyramide und Kegel	4	B 3 B 4 (Teil: schräge Parallelprojektion) B 9 (Teil: schräge Parallelprojektion)
2.1.3.	Körperdarstellung und Konstruktionen in Zweitafelprojektion	4	B 4 (Teil: Zweitafelprojektion) B 6, B 7, B 8 B 9 (Teil: Zweitafelprojektion) B 10
2.1.4.	Komplexe Aufgaben	1	B 5
2.1.5.	Kontrollarbeit	3	–

Variante 3

Lfd. Nr.	Thema der Unterrichtseinheit	Std.	Lerneinheiten des Lehrbuches
2.1.1.	Berechnung einfacher geometrischer Körper	3	B 1 B 2 B 3
2.1.2.	Darstellung ebenflächig begrenzter geometrischer Körper	2	B 4
2.1.3.	Aufgaben zur Berechnung und Darstellung geometrischer Körper	2	B 5
2.1.4.	Darstellend-geometrische Grundkonstruktionen (einschließlich Körperschnitte)	4	B 6 B 7 B 8
2.1.5.	Darstellung krummflächig begrenzter geometrischer Körper (einschließlich Körperschnitte)	2	B 9 B 10
2.1.6.	Kontrollarbeit	3	–

Übersicht über die Varianten für den Aufbau der Stoffeinheit 2.2.

Variante 1a

Lfd. Nr.	Thema der Unterrichtseinheit	Std.	Lerneinheiten des Lehrbuches
2.2.1.	Einführung und Darstellung des Pyramiden- und des Kegelstumpfes	4	B 11 (Erklärung: Pyramidenstumpf) B 12 B 13 (Erklärung: Kreiskegelstumpf) B 14
2.2.2.	Berechnung des Pyramiden- und des Kegelstumpfes	3	B 11 (außer Definition) B 13 (außer Erklärung)
2.2.3.	Darstellung und Berechnung zusammengesetzter Körper	4	B 15
2.2.4.	Zusammenfassung, Kontrollarbeit	3	–

Variante 1b

Lfd. Nr.	Thema der Unterrichtseinheit	Std.	Lerneinheiten des Lehrbuches
2.2.1.	Einführung und Berechnung der Stumpfkörper	5	B 11 B 13
2.2.2.	Darstellung der Stumpfkörper	3	B 12 B 14
2.2.3.	Berechnung zusammengesetzter Körper	3	B 15
2.2.4.	Zusammenfassung, Kontrollarbeit	3	–

Bemerkung: Die Unterrichtseinheiten 2.2.2. und 2.2.3. können auch in ihrer Reihenfolge vertauscht werden.

Variante 2

Lfd. Nr.	Thema der Unterrichtseinheit	Std.	Lerneinheiten des Lehrbuches
2.2.1.	Der Pyramidenstumpf (Einführung und Darstellung)	3	B 11 B 12
2.2.2.	Der Kreiskegelstumpf (Einführung und Darstellung)	3	B 13 B 14
2.2.3.	Zusammengesetzte Körper	5	B 15
2.2.4.	Zusammenfassung, Kontrollarbeit	3	–

Übersicht zum Stoffgebiet 2. Körperdarstellung und Körperberechnung (80 Stunden – 15 Lerneinheiten)

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
2.1.1. Berechnung einfacher geometrischer Körper (LE 1 bis 3)	3	66	132	Begriffe: Geometrischer Körper, Prisma, Kreiszylinder, Pyramide, Kreiskegel, Kugel Begriffe: Oberfläche, Mantelfläche, Flächeninhalt, Rauminhalt (d. h. Volumen) Einheiten für die Flächeninhalts- und Rauminhaltsmessung Formeln zur Berechnung des Oberflächen- und Rauminhalts einfacher geometrischer Körper Schätzen, Überschlagen Rechnen mit dem logarithmischen Rechenstab, trigonometrische Berechnungen	Zusammenhänge zwischen den Größen bei der Berechnung an geometrischen Körpern Vergleiche zwischen den verschiedenen Klassen geometrischer Körper	Formeln zur Berechnung des Oberflächen- und des Rauminhalts von Prisma, Kreiszylinder, Pyramide, Kreiskegel und Kugel Grundaufgaben der Berechnung an geometrischen Körpern unter Anwendung von Tafelwerk und Rechenstab (einschließlich der Anwendung der Trigonometrie)
2.1.2. Darstellung ebenflächig begrenzter geometrischer Körper (LE 4)	2	72	135	Begriffe: Projektion, Parallelprojektion, senkrechte Projektion, Grundriß, Aufriß, Zweitafelprojektion, Kavalierperspektive Grundlegendes zur Darstellung geometrischer Körper und ihrer Elemente in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive Verschiebung	Vergleiche zwischen Darstellungsverfahren in Parallelprojektion	Darstellung ebenflächig begrenzter geometrischer Körper in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
2.1.3. Aufgaben zur Berechnung und Darstellung geometrischer Körper (LE 5)	2	77	138	Methoden und Verfahren für das Lösen von Rechen- und Konstruktionsaufgaben (allgemein) Aufstellen von Lösungsplänen Arbeiten mit dem Tafelwerk	Systematisierung der Schritte beim Lösen von Aufgaben	Methoden und Verfahren für das Lösen mathematischer Aufgaben im allgemeinen und stereometrischer Aufgaben (Berechnung und Darstellung) im besonderen
2.1.4. Darstellend-geometrische Grundkonstruktionen (LE 6 bis 8)	4	78	141	Begriffe: Wahre Länge einer Strecke, wahre Größe (und Gestalt) einer ebenen Figur Ebener Schnitt eines geometrischen Körpers Grundaufgaben der Zweitafelprojektion	Spezielle Anwendungsfälle und -beispiele für die darstellend-geometrischen Grundkonstruktionen aus der Stereometrie	Darstellend-geometrische Grundkonstruktionen (im gesamten in der Oberschule behandelten Umfang)
2.1.5. Darstellung krummflächig begrenzter geometrischer Körper (LE 9 und 10)	2	83	148	Begriffe: Tangente, Berührungspunkt (einer Kurve), Mittelpunkt eines Kreises, Achsensymmetrie, Symmetrieachse	Ellipse, Symmetrieeigenschaften der Ellipse Skizzieren von Ellipsen (mit Hilfe der Achsen und gegebenenfalls auch der Tangenten)	Darstellen von Kreiszylindern und Kreiskegeln in Zweitafelprojektion Skizzieren von Kreiszylindern und -kegeln in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°; q = \frac{1}{2}$)
2.1.6. Kontrollarbeit	3		151			
2.2.1. Der Pyramidenstumpf (LE 11 und 12)	3	87	152	Eigenschaften von Prisma und Pyramide Flächeninhalts- und Rauminhaltsberechnungen Arbeiten mit dem Tafelwerk Arbeiten mit dem Rechenstab Darstellen ebenflächig begrenzter Körper in Zweitafelprojektion und in schräger Parallelprojektion Zentrische Streckung	Begriff: Pyramidenstumpf Formeln für die Oberflächen- und Rauminhaltsberechnung von Pyramidenstümpfen Darstellen von Pyramidenstümpfen in Zweitafelprojektion und in schräger Parallelprojektion	Berechnungen an Pyramidenstümpfen mit Hilfe von Tafelwerk und Rechenstab Darstellen von Pyramidenstümpfen in Zweitafelprojektion und in schräger Parallelprojektion

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
2.2.2. Der Kreiskegelstumpf (LE 13 und 14)	3	90	154	Eigenschaften von Zylinder und Kegel (gerader Kreiszylinder und -kegel) Flächeninhalts- und Rauminhaltsberechnungen Arbeiten mit dem Tafelwerk Arbeiten mit dem logarithmischen Rechenstab	Begriff: Kegelstumpf Formeln für die Oberflächen- und Rauminhaltsberechnung von geraden Kreiskegelstümpfen Darstellen von Kreiskegelstümpfen in Zweitafelprojektion und in schräger Parallelprojektion	Berechnungen an Kreiskegelstümpfen mit Hilfe von Tafelwerk und Rechenstab Darstellen von Kreiskegelstümpfen in Zweitafelprojektion, Skizzieren dieser Körper in schräger Parallelprojektion $(\alpha = 90°\ ;\ q = \frac{1}{2})$
2.2.3. Zusammengesetzte Körper (LE 15)	5	94	155	Berechnen und Darstellen einfacher geometrischer Körper Ungleichungen zum Einschließen einer Zahl (Größe) in Schranken Schätzen und Überschlagen, Rechnen mit Näherungswerten Angenäherte Berechnungen (Anwenden von Näherungsformeln) aus anderen Bereichen des mathematischen Schulstoffes	Berechnen zusammengesetzter geometrischer Körper Berechnen mit Näherungsformeln für Oberflächen- und Rauminhalt bestimmter geometrischer Körper Darstellen (Skizzieren) zusammengesetzter geometrischer Körper (zur Information)	Berechnen zusammengesetzter geometrischer Körper Rechnen mit Näherungsformeln (Oberflächen- und Rauminhalt)
2.2.4. Zusammenfassung, Kontrollarbeit	3		158			

2.1. Wiederholung und Ergänzung

2.1.1. Berechnung einfacher geometrischer Körper (LE 1 bis 3; 3 Std.)

In dieser Unterrichtseinheit besteht die hauptsächliche allgemeine Aufgabe darin, *Wissen und Können* der Schüler, das besonders in den Klassen 7 und 8 gewonnen wurde, wiederzubeleben, unter zusammenfassenden Aspekten zu *systematisieren und* zu *ergänzen*. Das betrifft im besonderen

- die Begriffe: Prisma, Pyramide, Kreiszylinder, Kreiskegel, Kugel (Erklärungen bzw. Definitionen; wesentliche Merkmale des Begriffsinhalts, Begriffsumfang);
- die Formeln zur Berechnung des Oberflächen- und des Rauminhalts von Prisma (einschließlich Quader und Würfel als Sonderfälle), Pyramide, Kreiszylinder, Kreiskegel und Kugel;
- die Klassifikation geometrischer Körper (einschließlich der Einordnung von Sonderfällen).

Der Beitrag, der in dieser Unterrichtseinheit zur *mathematischen Grundlagenbildung* der Schüler geleistet wird, besteht hauptsächlich in der Wiederholung und Festigung grundlegenden Wissens aus der Stereometrie sowie in der Vervollkommnung der Fähigkeit, mit Formeln zu operieren und sich beim praktischen Rechnen der gebräuchlichen Hilfsmittel wie des Tafelwerkes und des logarithmischen Rechenstabes zu bedienen. Wesentliche neue Denk- und Arbeitsweisen werden den Schülern in dieser Unterrichtseinheit nicht vermittelt.

Die *ideologische Bildung und Erziehung* betrifft in dieser Unterrichtseinheit vor allem die Klärung weltanschaulicher Fragen, die mit dem Wesen der Mathematik und ihrer Methoden, mit den Beziehungen zwischen Mathematik und objektiver Realität zusammenhängen. In erster Linie müssen die Schüler erkennen, daß die mathematischen Körper Idealisierungen sind, die sich auf die Abstraktion bestimmter Eigenschaften der realen Objekte gründen (vgl. Lp 44), und daß die mathematische Untersuchung dieser Idealisierungen zu Erkenntnissen führt, die in der Praxis nutzbringend anwendbar sind. Weitere damit verbundene weltanschauliche Einsichten ergeben sich aus der philosophischen Betrachtung von Definitionen und Beweisen sowie anderer Elemente der mathematischen Methode.

Bei der *methodischen Gestaltung* dieser Unterrichtseinheit sollte vor allem beachtet werden, daß die *Wiederholung* des Stoffes aus dem Unterricht vorangegangener Klassenstufen kein zweites Durchlaufen jener Wege bedeuten kann, die bei der Einführung des Stoffes beschritten wurden, ebensowenig aber auch ein Darbieten einer nur knappen Zusammenfassung des Wesentlichen, etwa in Form des Vortragens eines Kompendiumstextes. Vielmehr muß – im Interesse des höheren Niveaus, das die Schüler in Klasse 10 erreichen sollen, und der Erkenntnis der „großen Linie" – sowohl an der *Definition* (bzw. Beschreibung) *und Klassifizierung der geometrischen Körper*, als auch an den *Methoden und Verfahren der Körperberechnung* sorgfältig unterrichtsmethodisch gearbeitet werden. Bei der methodischen Planung und Gestaltung dieser Wiederholung ist zu berücksichtigen, daß der Lehrbuchtext in den betreffenden Lerneinheiten (Lerneinheiten B 2 bis B 4) nach der Sachlogik des Stoffes aufgebaut ist; lediglich Zwischenfragen und Aufgaben deuten darauf hin, daß der Unterricht vorwiegend der Wiederholung und Systematisierung früher behandelten Stoffes dient. Anlage und Aufbau des Lehrbuches gehen von der Überlegung aus, daß Art und Umfang der notwendigen Wiederholungen im Unterricht vom konkreten Stand der Vorbildung der Schüler in der Klasse abhängig sind

und das Lehrbuch auch Schülern, die im Selbststudium Stoff nachholen müssen, einen fachsystematisch orientierten „Einstieg" in den Sachverhalt, frei von speziellen methodischen Besonderheiten, ermöglichen soll.

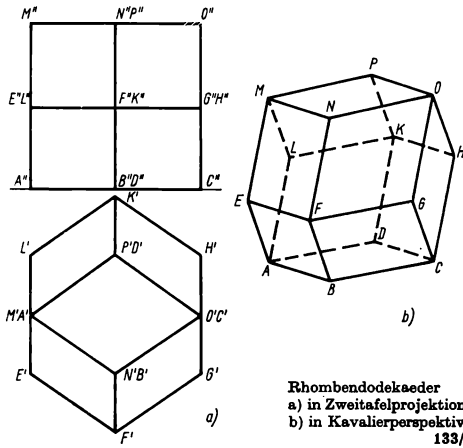
An den Anfang des Unterrichts im Rahmen des Stoffgebietes „Körperdarstellung und Körperberechnung" sollten weltanschaulich bedeutsame Überlegungen über das *Wesen geometrischer Körper* (als idealisierte Widerspiegelungen realer Objekte) und über die Möglichkeit, reale Körper durch einfache oder zusammengesetzte geometrische Körper – je nach den sachbedingten Erfordernissen gröber oder genauer – anzunähern, gestellt werden; vgl. Lb 66f, Lerneinheit B 1. Solche Gedanken werden im Unterricht später wieder aufgegriffen, vor allem in der abschließenden Unterrichtseinheit des Stoffgebietes; vgl. Uh 155ff.

Im Hinblick auf die Wiederholung und Systematisierung der stereometrischen Eigenschaften der behandelten geometrischen Körper muß beachtet werden, daß den Schülern aus dem Unterricht in den Klassen 7 und 8 nur die Definitionen des Prismas und der Pyramide bekannt sind; vgl. [G 2]. Zylinder (gerader Kreiszylinder), Kegel (gerader Kreiskegel) und Kugel sind als Rotationskörper eingeführt und nur beschrieben worden.

Im Unterricht der Klasse 10 können die *Definitionen* des Prismas und der Pyramide von den Schülern in selbständiger Arbeit wiederholt und erläutert werden; nicht zu empfehlen ist – an dieser Stelle – eine zusammenfassende Darlegung der Definitionsformulierungen in einem Lehrer- oder Schülervortrag, da diese Methode die Aktivität der Schüler voraussichtlich zu wenig anregen würde.

Im Lb 67, Definition B 1, und im Lb 70, Definition B 2, sind die – den Schülern bereits in diesem Wortlaut bekannten – Definitionen der genannten geometrischen Körper hervorgehoben.

Bei der Formulierung der Definition des Prismas durch die Schüler (vgl. Lb 67) achte man darauf, daß die Übereinstimmung zwischen der Seitenzahl der Vielecke,



Rhombendodekaeder
a) in Zweitafelprojektion
b) in Kavalierperspektive
133/1

die in parallelen Ebenen liegen (d. h. der Grund- und der Deckfläche) und der Anzahl der Parallelogramme (d. h. der Seitenflächen) zum Ausdruck kommt. Wird dies weggelassen, so gibt es auch noch andere geometrische Körper, die der (dann unterbestimmten) Definition genügen, z. B. das Rhombendodekaeder, ein sogenannter halbregelmäßiger Körper, der in der Natur als Kristallform vertreten ist; vgl. Bild 133/1. Bei der Definition der Pyramide (und später auch bei der Beschreibung des Pyramidenstumpfes) wäre gleichfalls auf Vollständigkeit der Aussage zu achten.

Definitionen geometrischer Körper bieten Gelegenheit, mit den Schülern nicht nur Fragen der Klassifizierung geometrischer Körper zu erörtern, sondern auch auf die wesentlichen Anforderungen an die Formulierung einer Definition einzugehen. So können die Schüler eine vorgegebene Definitionsformulierung dahingehend prüfen, ob sie unterbestimmt, richtig bestimmt oder überbestimmt ist. Dabei sind Vergleiche mit analogen Definitionsformulierungen aus der Planimetrie (z. B. Rechteck–Quader) möglich, man kann sogar von den einfacheren und den Schülern meist geläufigeren Definitionen ebener geometrischer Figuren ausgehen.

Bildungswirksam ist – wie bereits an der unterbestimmten Definitionsformulierung für das Prisma gezeigt wurde – das Aufsuchen von „Gegenbeispielen" bei unzulänglichen Definitionen (nicht immer werden die Schüler aber solche Gegenbeispiele selbst finden können).

Bei der Wiederholung der Klassifizierung geometrischer Körper erweisen sich auch Übungen im Definieren des gleichen Objekts als Art verschiedener Gattungen, d. h. im Bestimmen der spezifischen Merkmale des Objekts, als zweckmäßig.

Beispiel:

Welche spezifischen Merkmale kennzeichnen den Würfel
a) *als Sonderfall des Quaders*;
b) *als Sonderfall des Prismas*?
oder in anderer Formulierung: „*Definieren Sie den Würfel als Sonderfall . . .!*"

Für Kreiszylinder, Kreiskegel und Kugel werden vom Lehrplan auch in Klasse 10 keine Definitionen gefordert. Die Beschreibungen, die im Lehrbuch von diesen Körpern gegeben werden, sind selbst dann, wenn sie den formalen Anforderungen an eine Definition genügen oder zur Grundlage einer Definition gemacht werden können, im Unterricht nicht als Definitionen aufzufassen.

Wenn bei Zylinder und Kegel auf die Mantelflächen eingegangen wird, können die Schüler, falls es die Unterrichtssituation ermöglicht, darüber informiert werden, daß die Bezeichnungen „Zylinder" und „Kegel" in der Mathematik nicht nur für – allseitig von Flächen begrenzte – geometrische Körper, „sondern auch für die unbegrenzt gedachten Mantelflächen („Zylinderfläche", „Kegelfläche") verwendet werden. Auf die Unterscheidung zwischen Kugelfläche und Kugelkörper – ebenso wie zwischen Kreislinie und Kreisfläche – müssen die Schüler gleichfalls aufmerksam gemacht werden; vgl. Lb 66, Lerneinheit B 1.

Bei der *Berechnung* der geometrischen Körper (Inhalt einzelner Flächen, der gesamten Oberfläche, Rauminhalt) liegt das Hauptgewicht auf

– dem Anwenden von Formeln (unter Zuhilfenahme des Tafelwerkes);
– dem Aufstellen von Lösungsplänen;
– dem Anwenden von Rechenhilfsmitteln (einschließlich der Tafeln der Winkelfunktionswerte und der Winkelfunktionsskalen des Rechenstabes).

Zu Beginn der Wiederholung der Körperberechnung sollte – unter Umständen in einem besonderen Teil einer Unterrichtsstunde – den Schülern bewußt gemacht werden, daß die Formeln für die Oberflächen- und Rauminhaltsberechnung als

Gleichungen von Funktionen aufzufassen sind, bei denen jeweils eine Variable als unabhängig betrachtet wird; vgl. Lp 43. Das Lehrbuch enthält dafür ein geeignetes Beispiel; vgl. Lb 66f, Beispiel B 1. Zur Reaktivierung der für die Körperberechnung notwendigen Kenntnisse und Fertigkeiten sind besondere Übungen im Auflösen von Gleichungen nach einer vorgegebenen Variablen („Umstellen von Formeln") von großem Nutzen.
Über die methodischen Grundsätze, die beim Lösen von Aufgaben und beim Berechnen der Körper zu beachten sind; vgl. Uh 25f und Uh 114f.

Wird diese Unterrichtseinheit inhaltlich nach der Systematik der geometrischen Körper gegliedert, so ergibt sich als mögliche Aufeinanderfolge

entweder (A) – Prisma	oder (B) – Prisma
– Zylinder	– Pyramide
– Pyramide	– Zylinder
– Kegel	– Kegel
– Kugel	– Kugel

Im allgemeinen dürfte sich die auch im Lehrbuch getroffene Anordnung (B) als günstiger erweisen (die andere Anordnung – (A) – lag dem Unterricht in den Klassen 7 und 8 zugrunde). Bei der Behandlung der einzelnen geometrischen Körper ist dann der Weg: Definition (bzw. Beschreibung) – Berechnung des Rauminhaltes – Berechnung des Oberflächeninhaltes empfehlenswert. Es bedarf aber kaum eines besonderen Hinweises, daß nicht alle Unterrichtsstunden uniform aufgebaut und methodisch gestaltet sein sollen; da die im vorangegangenen Unterricht gewonnenen Erkenntnisse genutzt und Verbindungen zwischen Neuem und Bekanntem hergestellt werden, empfehlen sich Verschiebungen in den Akzenten und in der Wertigkeit der einzelnen Stundenelemente.

Es erschiene naheliegend, in der ersten Stunde dieser Unterrichtseinheit durch eine Kontrollarbeit die Vorkenntnisse der Schüler mit einem Schlage zu überprüfen. Erfahrungsgemäß gäbe aber eine solche Kontrolle kein exaktes Bild über die tatsächlichen, z. T. schlummernden und auf diese Weise nicht reaktivierten Kenntnisse und geistigen Potenzen der Schüler, ganz abgesehen von der erzieherisch nachteiligen Schockwirkung, die eine solche Kontrolle – und ihr wahrscheinlich nicht allzu gutes Ergebnis – bei den Schülern auslösen könnte. Besser ist es, die Ausgangsbedingungen für den Unterricht „immanent", im Prozeß einer systematischen, alle wesentlichen Inhalte erfassenden Wiederholung zu überprüfen und das erforderliche Niveau zu sichern – selbst wenn dies etwas mehr Zeit benötigen kann als ein anderes Verfahren.

2.1.2. Darstellung ebenflächiger begrenzter geometrischer Körper (LE 4; 2 Std.)

Die allgemeine Aufgabe dieser Unterrichtseinheit besteht vor allem darin, am Beispiel der Darstellung einfacher ebenflächig begrenzter Körper das *Wissen* der Schüler *über* das Grundlegende der darstellend-geometrischen Abbildung in der *Zweitafelprojektion und* in *schräger Parallelprojektion wiederzubeleben*, zu *erweitern und* zu *festigen*. Spezielle darstellend-geometrische Konstruktionen wie das Ermitteln der wahren Länge einer Strecke und der wahren Größe und Gestalt einer ebenen Figur sind Gegenstand des Unterrichts in einer weiteren Unterrichtseinheit (2.1.4.).
Die Festigung des Wissens über die grundlegenden Begriffe, Methoden, Regeln und Techniken der darstellend-geometrischen Abbildung in senkrechter Projektion und

schräger Parallelprojektion, die das Spezifische der *mathematischen Grundlagenbildung* in dieser Unterrichtseinheit ausmacht, steht dabei in engstem Zusammenhang mit der Entwicklung der Raumvorstellungsfähigkeit.

Für die *ideologische Bildung und Erziehung* bietet diese Unterrichtseinheit – wie auch die anderen Unterrichtseinheiten, die speziell Körperdarstellungen zum Inhalt haben – nur begrenzte Möglichkeiten. Diese liegen vor allem in der philosophischen Betrachtung der mathematischen Methode, hier der Methode der darstellenden Geometrie, und des Nutzens dieser mathematischen Disziplin für die Praxis. Wird das Problem der Widerspiegelung der objektiven Realität mit mathematischen Mitteln erörtert, so sollte nicht der Hinweis fehlen, daß Anschaulichkeit kein Kriterium für die Richtigkeit einer Widerspiegelung ist und manche „hochabstrakten", nicht durch anschauliche Hilfen zu stützenden Darstellungen das Wesentliche eines realen Sachverhalts besser wiederzugeben vermögen als eine anschauliche (oder auf den ersten Blick anschaulich erscheinende) Darstellung.

Den Bildungs- und Erziehungszielen dieser Unterrichtseinheit wird eine *methodische Gestaltung* des Unterrichts am besten gerecht, die sich in hohem Maße der Aufgaben

- zur Darstellung geometrischer Objekte nach Daten;
- zum Lesen darstellend-geometrischer Zeichnungen und
- zum Übertragen einer darstellend-geometrischen Zeichnung in ein anderes Darstellungsverfahren

bedient; vgl. Uh 117f.

Es ist anzustreben, daß die *Schüler* beim Lösen solcher Aufgaben *weitgehend selbständig arbeiten;* allerdings ist dabei zu beachten, daß zunächst – ebenso wie das Wissen aus der Stereometrie – auch die Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler auf dem Gebiet der darstellenden Geometrie reaktiviert werden müssen, zumal im Mathematikunterricht der Klasse 9 kein Stoffgebiet behandelt wurde, das Körperdarstellungen oder andere Anwendungen der darstellenden Geometrie fordert.
Es empfiehlt sich deshalb auch, an den Beginn dieser Unterrichtseinheit, welche die wiederholende, systematisierende und ergänzende Behandlung der darstellenden Geometrie in Klasse 10 einleitet, den Schülern die wichtigsten Konstruktions- und Zeichenregeln der darstellenden Geometrie ins Gedächtnis zurückzurufen. Das ist z. B. mit Hilfe einer Übersicht, wie sie im folgenden angegeben ist, möglich. Diese Übersicht kann später, bei der Behandlung der Darstellung krummflächig begrenzter Körper bzw. krummlinig begrenzter Figuren, um die Regeln für das Zeichnen gekrümmter Linien erweitert werden; vgl. Uh 149.

Allgemeine Zeichenregeln

Eine darstellend-geometrische Zeichnung wird auf glattem weißem Papier oder dünnem Zeichenkarton mit hartem Bleistift in dünnen Linien ausgeführt.

Punkte werden durch Einstechen mit der Zirkelspitze markiert.
Strecken werden nach Möglichkeit mit dem Stechzirkel in die Zeichnung übertragen und aus der Zeichnung abgegriffen.

Punkte, die in der Zeichnung *hervortreten sollen,* werden durch einen kleinen Kreis um die Einstichstelle (Nullenkreis) kenntlich gemacht. Die Linien, die durch einen so gekennzeichneten Punkt gezogen werden, sind an der Peripherie des Nullenkreises zu unterbrechen.

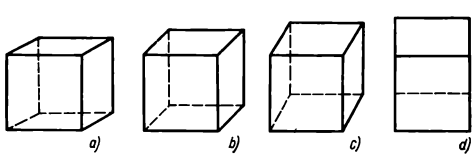
Beim Zeichnen sind *Schnitte von Linien unter kleinem Winkel* – sogenannte schleifende Schnitte – möglichst zu vermeiden, da sie kein genügend genaues Ermitteln des Schnittpunktes gestatten. Ebenso können Verbindungslinien zweier Punkte zu Ungenauigkeiten führen, wenn sie weit über die gegebenen Punkte hinaus verlängert werden.

Ist die Zeichnung entworfen, so werden die *Linien, die* in der Lösung *hervortreten sollen*, mit weicherem Bleistift nachgezogen.
Dabei ist die *„Sichtbarkeit"* der darzustellenden Gegenstände nach folgenden Regeln zu beachten.

- Bei kreuzenden Linien (z. B. bei windschiefen Geraden) wird die verdeckt erscheinende Linie an der Kreuzungsstelle unterbrochen.
- Linien, die von einer als undurchsichtig bzw. nur durchscheinend anzunehmenden Fläche verdeckt sind, werden als Strichlinien gezeichnet. Schneiden verdeckte Linien einander, so sind an der Stelle des Schnittes Striche – nicht Zwischenräume – zu setzen.
- Bei der Zweitafelprojektion entspricht die Sichtbarkeit des Grundrisses der Ansicht von oben, die Sichtbarkeit des Aufrisses der Ansicht von vorn.

Die Darstellung von Prismen in schräger Parallelprojektion (Kavalierperspektive) bietet Gelegenheit, den Begriff der Kongruenz, die Eigenschaften kongruenter ebener Figuren und die Eigenschaften der Verschiebung (Stoff der Klasse 6) zu wiederholen; die Abbildung durch Verschiebung dient beim Zeichnen der Körper entweder als Grundlage oder zur Kontrolle der Konstruktion: Die Bilder der Grund- und der Deckfläche eines Prismas sind kongruente Figuren, die durch Verschiebung auseinander hervorgehen.
Von der schrägen Parallelprojektion werden im Unterricht der Klasse 10 nur zwei Sonderfälle – die *Kavalierperspektive* $\left(\alpha = 45°;\ q = \frac{1}{2}\right)$ und – besonders bei der Darstellung von Kreiszylinder und Kreiskegel – die *Projektion mit den Parametern* $\alpha = 90°;\ q = \frac{1}{2}$ behandelt; vgl. Bild 137/1.

Würfel in schräger Parallelprojektion (verschiedene Darstellungsarten)



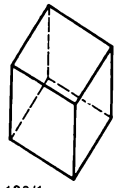
137/1

Zur Information des Lesers sei gesagt, daß es prinzipiell möglich ist, die Verzerrungswinkel und die Verkürzungsverhältnisse – mit gewissen Einschränkungen – beliebig zu wählen; denn es gilt der Satz von POHLKE:

Drei beliebig lange und unter beliebigen Winkeln von einem Punkt ausgehende Strecken können, sofern sie nicht alle ein und derselben Geraden angehören, stets als Parallelprojektion eines rechtwinkligen Dreibeins (d. h. eines Achsenkreuzes mit drei gleich langen Achsen) aufgefaßt werden.

Auf den – nicht einfachen – Beweis des Satzes sei hier verzichtet; vgl. z. B. KOMMERELL [41].
Allerdings ergeben nicht alle möglichen Kombinationen von Verzerrungswinkeln und Verkürzungsverhältnissen einigermaßen anschauliche Bilder. Neben den im Unterricht behandelten Darstellungsarten der schrägen Parallelprojektion, bei denen zur Aufrißebene parallele Figuren kongruent abgebildet werden, ist in der Praxis noch die Vogel- oder

Militärperspektive üblich. Bei dieser Darstellungsart werden Figuren, die parallel zur Grundrißebene sind, kongruent abgebildet; vgl. Bild 138/1. Sie eignet sich deshalb vorwiegend für Darstellungen, bei denen der Grundriß hervortreten soll, z. B. bei Bauskizzen.



138/1

Die *Aufteilung des Stoffes* dieser Unterrichtseinheit ist nach dem Darstellungsverfahren möglich.

1. Stunde: Zweitafelprojektion (nach einer wiederholenden Einführung in das darstellend-geometrische Zeichnen)
2. Stunde: Schräge Parallelprojektion (Kavalierperspektive)

2.1.3. Aufgaben zur Berechnung und Darstellung geometrischer Körper (LE 5; 2 Std.)

Diese Unterrichtseinheit hat die allgemeine Aufgabe, den Schülern die *Methoden und Techniken des Lösens einfacher und komplizierterer Berechnungs- und Darstellungsaufgaben* über geometrische Körper nahezubringen.

Der Hauptakzent der *mathematischen Grundlagenbildung* der Schüler in dieser Unterrichtseinheit liegt somit darin, die Kenntnisse der Schüler in den Methoden, den Regeln und Verfahren des Aufgabenlösens, einschließlich des Lösens von Sach- und Anwendungsaufgaben zu systematisieren und ihnen ein einfaches, praktikables Lösungsschema zu vermitteln; vgl. Uh 26.

Der Beitrag, den diese Unterrichtseinheit zur *ideologischen Bildung und Erziehung* der Schüler leistet, gründet sich vor allem auf die Erkenntnis des Wesens der mathematischen Methode und der Bedeutung der Mathematik für die Lösung praktischer Probleme des gesellschaftlichen Lebens. Hinzu kommt der sachliche Inhalt der Anwendungsaufgaben; allerdings tritt die Nutzung der erzieherischen Potenzen der Sachaufgaben in dieser Unterrichtseinheit etwas zurück, da nur wenige Aufgaben – als Beispiele – behandelt werden können.

Die *methodische Gestaltung* dieser Unterrichtseinheit wird von der Notwendigkeit bestimmt, eine Aufgabe (oder zwei Aufgaben verschiedener Art) vom *Aufgabentext* bis zur *Lösung* in allen Einzelheiten – sozusagen allseitig – zu *analysieren*. Unterrichtsgespräch und kommentierte selbständige Arbeit der Schüler bilden deshalb die Hauptformen der Unterrichtsarbeit. Lb 77f, Beispiel B 3, bezieht sich, wenn von der Abbildung eines Achsenschnitts eines Rotationskörpers abgesehen wird – nur auf die Körperberechnung. Dieses Beispiel kann, zumal seine Erörterung kaum eine Unterrichtsstunde ausfüllen dürfte, durch eine einfache Darstellungsaufgabe, bei der mehrere Lösungsschritte unterschieden werden müssen, ergänzt werden (z. B.: Darstellung in Zweitafelprojektion, geometrische Konstruktion der Länge einer unbekannten, für die darstellend-geometrische Abbildung aber notwendigen Strecke, Darstellung in schräger Parallelprojektion).

Ein höheres Anspruchsniveau bei einer komplexen Aufgabe wird durch das folgende, in Einzelheiten ausgeführte *Beispiel* gekennzeichnet. Es hat gegenüber manchen anderen Aufgaben den Vorteil, daß der rechnerische Teil besonders zwei Lösungsmöglichkeiten bietet, die im Aufwand – und in der „mathematischen Eleganz" – der Lösung verschieden sind und deren Diskussion zur Befähigung der Schüler beitragen kann, das für die Lösung einer mathematischen Aufgabe zweckmäßigste Verfahren selbst zu wählen; vgl. Lp 12. Allerdings empfiehlt sich die Arbeit an einem solchen Beispiel nur dann, wenn das höhere Anspruchsniveau bei *allen* Schülern vorausgesetzt werden kann.

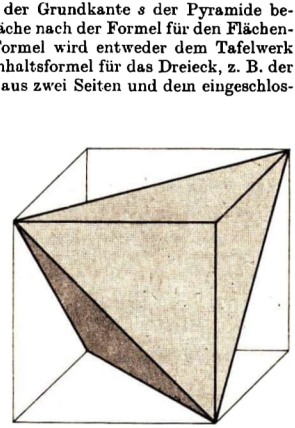
Werden von einem Eckpunkt eines Würfels aus auf den angrenzenden Seitenflächen die Diagonalen gezogen und die Endpunkte dieser Diagonalen miteinander verbunden, so bilden diese Strecken die Kanten eines ebenflächig begrenzten Körpers.
Stellen Sie diesen Körper in Kavalierperspektive dar!
Berechnen Sie, in welchem Verhältnis das Volumen dieses Körpers zum Volumen des Würfels steht!

1. *Analytischer Lösungsschritt der ersten Teilaufgabe, der Darstellung eines Körpers*
Mit Hilfe einer anschaulichen Skizze, gegebenenfalls auch mittels eines Würfelmodells, wird festgestellt, daß die Verbindungsstrecken der Endpunkte von den in der Aufgabenstellung genannten Diagonalen ebenfalls Flächendiagonalen des Würfels sind und daß es für einen Würfel genau zwei kongruente Körper der gesuchten Art gibt. Der Körper wird von vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt, er ist somit eine regelmäßige dreiseitige Pyramide, bei der die Seitenflächen zur Grundfläche kongruent sind (der Begriff „Tetraeder" ist den Schülern nicht bekannt).

2. *Synthetischer Lösungsschritt der ersten Teilaufgabe*
Bevor die Konstruktion in Kavalierperspektive ausgeführt wird, ist über die Darstellungsweise des Körpers zu entscheiden. Als gut anschaulich und das Wesentliche betonend erweist sich die Darstellung des Würfels als Kantenmodell und der einbeschriebenen dreiseitigen Pyramide als Flächenmodell; vgl. Bild 139/1. Die Zeichnung wird den allgemeinen Regeln gemäß entworfen; vgl. Uh 136f.

3. *Analytischer Lösungsschritt der zweiten Teilaufgabe, der Berechnung des Volumens des Körpers*
Das Volumen des Körpers kann unmittelbar nach der Formel für das Volumen einer Pyramide berechnet werden. Ist die Länge der Grundkante s der Pyramide bekannt, so ergibt sich der Inhalt ihrer Grundfläche nach der Formel für den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks (diese Formel wird entweder dem Tafelwerk entnommen oder als Sonderfall der Flächeninhaltsformel für das Dreieck, z. B. der Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, hergeleitet), es ist

$$A_G = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}.$$



139/1

Die Länge der Höhe der Pyramide läßt sich an Hand einer Hilfsfigur (Schnitt der Pyramide mit einer ihrer Symmetrieebenen) ermitteln; vgl. Bild 140/1. Es ergibt sich

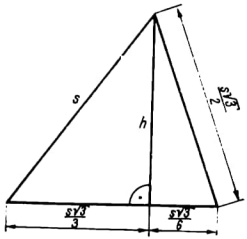
$$h = \frac{s}{3}\sqrt{6}.$$

4. Synthetischer Lösungsschritt der zweiten Teilaufgabe
Wird für die Länge s der Pyramidenkante die Länge der Flächendiagonale des Würfels – sie beträgt $a\sqrt{2}$, wenn a die Kantenlänge des Würfels ist – eingesetzt, so folgt für das Volumen der Pyramide

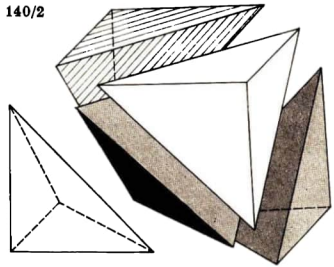
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{(a\sqrt{2})^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3}\sqrt{6};$$
$$V = \frac{a^3}{3}.$$

Bei der Lösung der zweiten Teilaufgabe ist auch ein anderer Weg als Variante möglich.

140/1



140/2



3a) Analytischer Lösungsschritt der zweiten Teilaufgabe
Die Berechnung des Volumens der Pyramide ist auch mittelbar auf Grund der Überlegung möglich, daß die Pyramide durch vier Restkörper zum Würfel ergänzt wird. Diese vier Restkörper sind kongruent, es sind dreiseitige (schiefe) Pyramiden, deren Grundfläche gleich der halben Seitenfläche des Würfels und deren Höhe gleich der Kante des Würfels ist; vgl. Bild 140/2.

4a) Synthetischer Lösungsschritt der zweiten Teilaufgabe
Nach den Formeln zur Berechnung eines Würfels und einer Pyramide ergibt sich für das Volumen V des gesuchten Körpers

$$V = V_{\text{Würfel}} - 4 \cdot V_{\text{Restkörper}}$$
$$= a^3 - 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a\right);$$
$$V = \frac{a^3}{3}.$$

Für die *Aufteilung des Stoffes* auf die zwei vorgesehenen Unterrichtsstunden bieten sich zwei Varianten an.

(A) *1. Stunde:* Bewußtmachen der Lösungsschritte beim Erarbeiten von Aufgabenlösungen durch die Schüler („induktives Vorgehen")
2. Stunde: Anwenden der erarbeiteten Prinzipien und Regeln

(B) *1. Stunde:* Darlegung der wichtigsten Schritte, Prinzipien und Regeln für das Aufgabenlösen (Systematisierung früher behandelten Stoffes durch den Lehrer), erste Anwendung an einem Beispiel („deduktives Vorgehen")
2. Stunde: Weitere Anwendungen

Nach der Variante (A) sollte vor allem dann vorgegangen werden, wenn damit gerechnet werden kann, daß die Schüler Regeln und Verfahren der Aufgabenlösung schon verhältnismäßig gut kennen und sie auch wiedergeben können. Unter diesen Umständen ist es die bildungswirksamere Variante. Sind jedoch die genannten Voraussetzungen vermutlich nicht vorhanden, empfiehlt sich die Variante (B).
Die Aufgaben, die in der zweiten Stunde bearbeitet werden, sollten sowohl nach dem Lösungsverfahren als auch nach der fachlichen Thematik die Aufgaben der ersten Stunde ergänzen; auf ein Beispiel für die Körperdarstellung sollte dabei nicht verzichtet werden.

2.1.4. Darstellend-geometrische Grundkonstruktionen (LE 6 bis 8; 4 Std.)

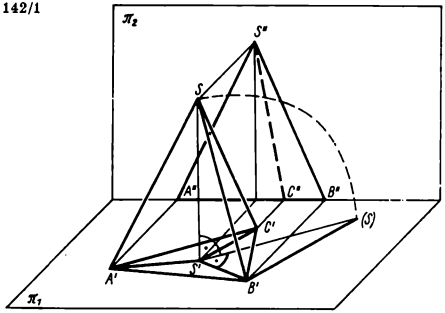
Die allgemeine Aufgabe dieser Unterrichtseinheit besteht hauptsächlich in der *Übung grundlegender Konstruktionen* und damit in der *Vervollkommnung geistiger Fähigkeiten und geistig-praktischer Fertigkeiten;* Elemente der fachlichen Systematisierung oder der Betrachtung eines Sachverhalts unter neuen Aspekten treten demgegenüber zurück.

Als spezielle Aufgaben dieser Unterrichtseinheit bei der *mathematischen Grundlagenbildung* der Schüler sind vor allem die Festigung und Sicherung der Kenntnisse der Schüler in den darstellend-geometrischen Grundkonstruktionen der Zweitafelprojektion, die weitere Entwicklung der Raumvorstellungs- und Raumdarstellungsfähigkeit sowie die Förderung zeichnerisch-konstruktiver Fertigkeiten zu nennen. Damit verbunden ist die tiefere Einsicht in die Methoden der Anwendung der Grundkonstruktionen auf geometrische Körper; ebenflächig begrenzte Körper bilden das Hauptanwendungsfeld für das Ermitteln der wahren Länge von Strecken und der wahren Größe und Gestalt ebener Figuren.

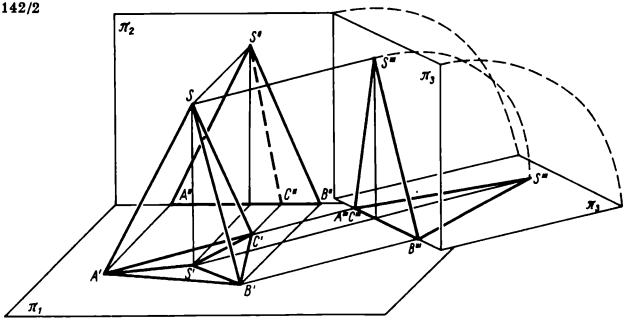
Im Hinblick auf die *ideologische Bildung und Erziehung* der Schüler gilt für diese Unterrichtseinheit grundsätzlich das Gleiche wie für die Unterrichtseinheit 2.1.2. Weitere Beiträge zu dieser übergreifenden Bildungs- und Erziehungsaufgabe folgen aus historischen Betrachtungen zur Entwicklung der darstellenden Geometrie und über ihre Bedeutung in der Praxis der Gegenwart, vor allem im Bauwesen; solche Betrachtungen können z. B. an die wiederholende Behandlung der darstellend-geometrischen Grundkonstruktionen zwanglos angeschlossen werden; vgl. STAMFORT [78].

Bei der *methodischen Gestaltung* dieser Unterrichtseinheit muß davon ausgegangen werden, daß nicht nur Fähigkeiten und Fertigkeiten im Ausführen darstellend-geometrischer Konstruktionen entwickelt werden müssen, sondern *auch die Raumvorstellungsfähigkeit und das Abstraktionsvermögen* zu *fördern* sind. Der Lehrplan kennzeichnet die Entwicklung der Abstraktionsfähigkeit sogar als vordringliche Aufgabe; vgl. Lp 44. Im Interesse dessen sollte somit im Unterricht das Prinzip verwirklicht werden, jede darstellend-geometrische Konstruktion durch anschauliche Skizzen zu erläutern; vgl. Uh 117. Das Arbeiten mit festen Modellen ist wahrscheinlich nicht erforderlich, dagegen kann die Maniperm-Klapptafel nützlich sein.
Da Lb 79, Bilder B 20, B 21, und Lb 81, Bilder B 22, B 23, nur die Konstruktionen der wahren Länge einer Strecke sowie der wahren Größe und Gestalt einer ebenen Figur in Zweitafelprojektion enthalten, seien in den Bildern 142/1 bis 143/2 die zugehörigen anschaulichen Darstellungen in Kavalierperspektive beigegeben. Entsprechendes gilt für den ebenen Schnitt eines geraden Prismas mit der Konstruk-

142/1



142/2

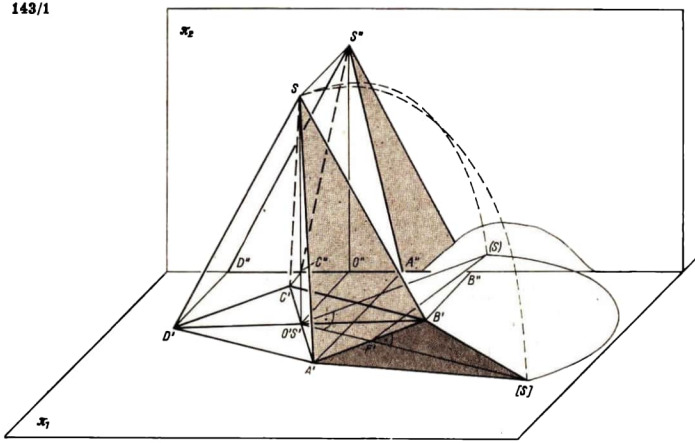


tion der wahren Größe und Gestalt der Schnittfigur; die Konstruktion im Lb 82, Bild B 24, wird durch die anschauliche Darstellung im Bild 144/1 ergänzt.

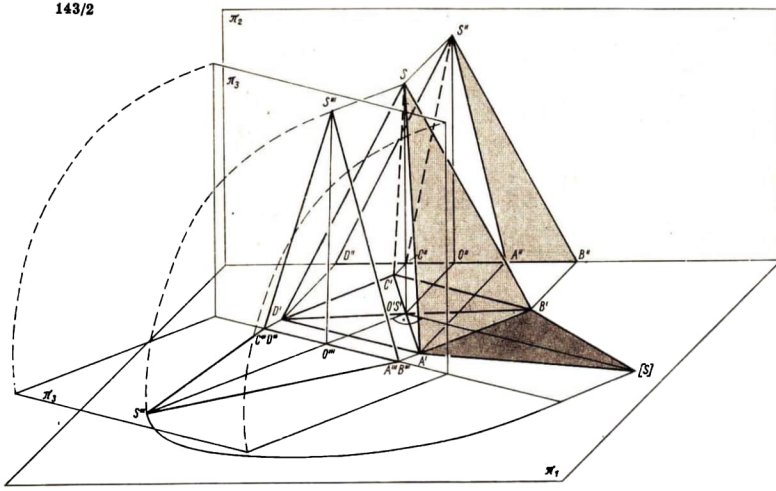
Das selbständige Arbeiten der Schüler an darstellend-geometrischen Konstruktionsaufgaben, das die Hauptform des Unterrichts in dieser Unterrichtseinheit bildet, bedarf einer gründlichen Anleitung und einer Kontrolle durch den Lehrer, die sich von der geometrischen Richtigkeit der Konstruktion bis zur Zeichentechnik und zur Sauberkeit der technischen Ausführung erstreckt.

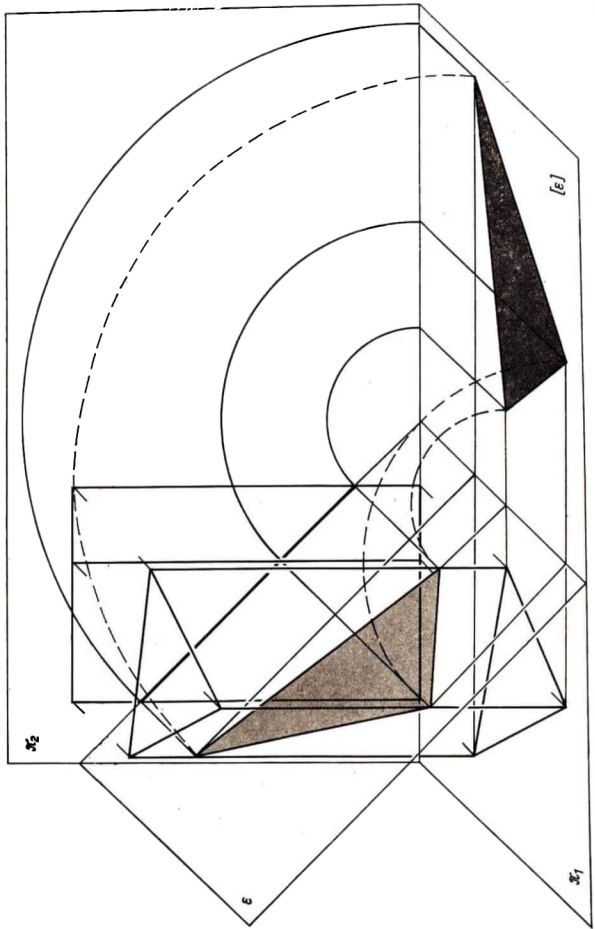
Bei der Wiederholung der darstellend-geometrischen Grundkonstruktionen ist zu beachten, daß diese Konstruktionen in Klasse 7 zunächst für die Eintafelprojektion eingeführt, erklärt und geübt wurden; die daran anschließende Behandlung für die Zweitafelprojektion stützte sich darauf, trat aber – auch in der Bemessung der Zeit für Übungen – etwas zurück. Auch blieb sie auf Konstruktionen in der Grundrißebene, im Prinzip also auf die Konstruktionen, die in Eintafelprojektion ausgeführt wurden, beschränkt (den Schülern wurde auch nicht besonders bewußt gemacht, daß die – mathematisch gleichartigen – Risse auch gleichermaßen Grundlage für Konstruktionen sein können und daß Umklappungen nicht nur in die Grundrißebene, sondern auch in die Aufrißebene möglich sind).

143/1


π_2
S''
S
D''
C''
0''
A''
(S)
B''
C'
B'
D'
0'S''
A'
[S]
π_1

143/2


π_2
π_3
S''
S
S'''
D''
C''
0''
A''
B''
C'
D'
0'S'
B'
C'''0'''
0'''
A'''B'''
A'
[S]
π_2
S
π_1

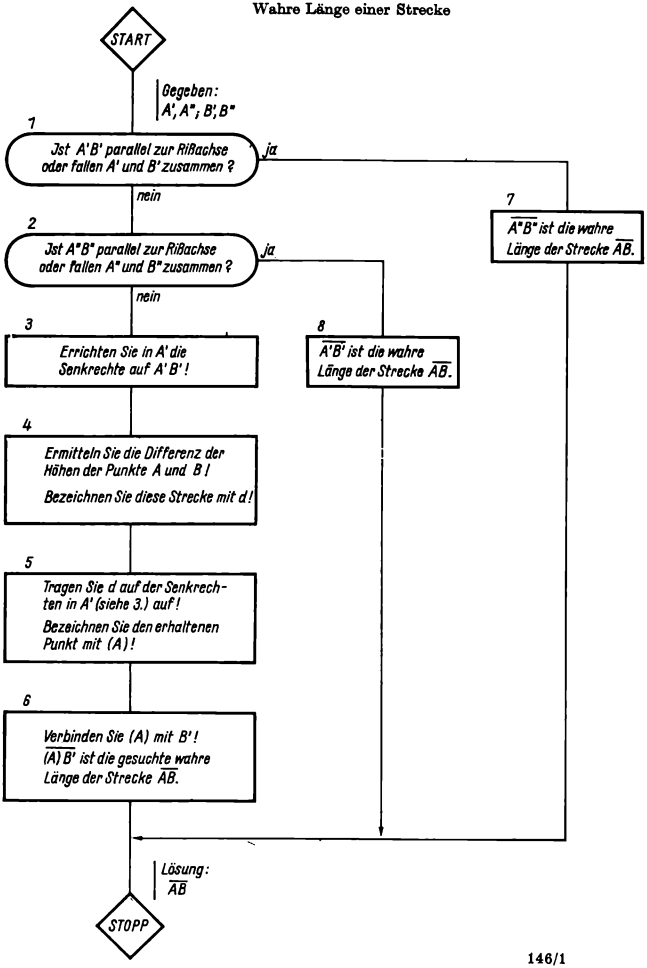

[ε]
π_2
ε
π_1

Als wesentliche Aspekte der Behandlung der darstellend-geometrischen Grundkonstruktionen, die ihrem mathematischen Gehalt nach den Schülern bereits bekannt sind, müssen in Klasse 10 das Bewußtmachen der einzelnen Schritte, die zur Lösung der gestellten Aufgabe führen, und das Suchen nach einem rationellen (sicheren, genauen) Lösungsweg betrachtet werden.
Diese Aspekte des Unterrichts können wirkungsvoll durch das *Aufstellen und Diskutieren algorithmischer* (oder diesen angenäherter) *Vorschriften für das Lösen der verschiedenen Konstruktionsaufgaben* betont werden. Es empfiehlt sich, hierbei graphische Darstellungen zu benutzen. Wählt man eine Form, die den Schülern schon vertraut ist, kann man sich auf den Inhalt konzentrieren und einer möglichen Häufung von Schwierigkeiten begegnen; vgl. Uh 23 und 100. Das Schema in Bild 146/1 zeigt eine Möglichkeit am Beispiel für das konstruktive Ermitteln der wahren Länge einer Strecke. Der dargestellte Lösungsalgorithmus kann selbstverständlich noch ergänzt und erweitert werden, etwa durch Zeichenkontrollen oder durch Übergang zu einem anderen Konstruktionsverfahren, falls das ursprünglich vorgesehene auf der verfügbaren Zeichenfläche nicht anwendbar ist.
Aus dem Schema in Bild 146/1 ist ersichtlich, daß schon verhältnismäßig einfache Konstruktionen in der darstellenden Geometrie umfangreiche Vorschriften erfordern, wenn sie bis in die Einzelheiten aufgegliedert werden. Deshalb ist es bei komplizierteren Konstruktionen zweckmäßig, mehrere Teilschritte zu einem „Block" zusammenzufassen, ein Beispiel dafür gibt das Schema in Bild 147/1. Ebenso muß berücksichtigt werden, daß im Unterricht der Klasse 7 zwar die Darstellung von Geraden und Ebenen (nicht nur von Strecken und ebenen Figuren) Gegenstand war, aber auf die Einführung von „Spurpunkt" (einer Geraden) und „Spur" (einer Ebene) verzichtet wurde. Es kann daher, da auch in Klasse 10 die Einführung von „Spurpunkt" und „Spur" nicht vorgesehen ist, nur vom Schnittpunkt einer Geraden und von der Schnittgeraden einer Ebene mit der Grundrißebene (bzw. der Aufrißebene, aber diese Fälle haben aus den genannten Gründen nur geringe Bedeutung) gesprochen werden. An Stelle von „Grundrißspur" ist auch „Höhenlinie (mit) der Höhe 0" möglich; denn der Begriff der Höhenlinie ist den Schülern bekannt (der Begriff der Frontlinie, d. h. der Parallelen zur Aufrißspur, jedoch nicht).

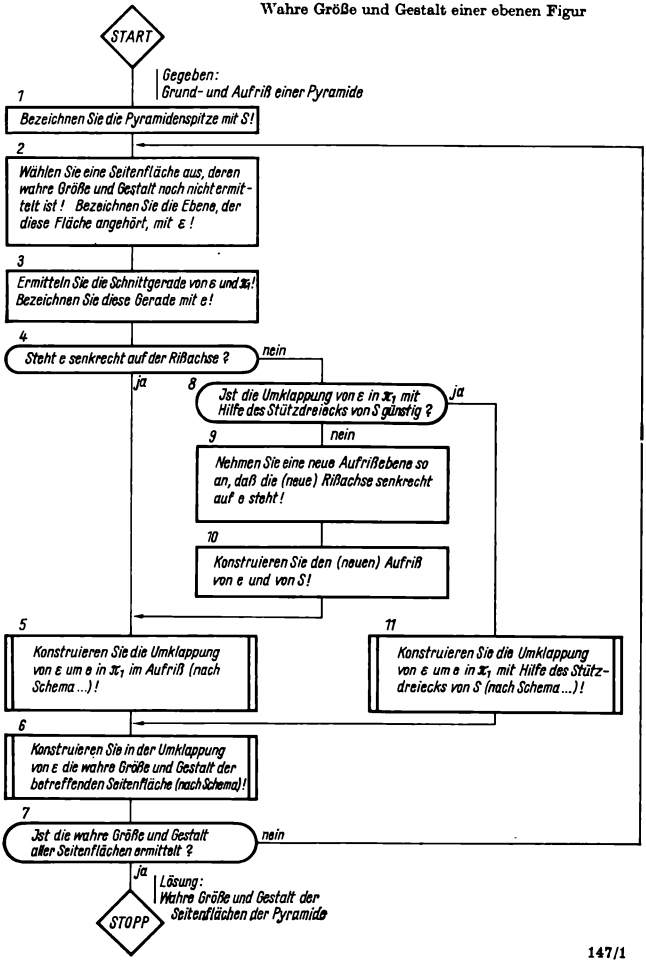
Zur darstellend-geometrischen Konstruktion der *wahren Länge einer Strecke* sowie der *wahren Größe und Gestalt einer ebene Figur* enthält das Lehrbuch nur verhältnismäßig wenige Aufgaben. Das Finden weiterer Aufgaben bereitet keine Schwierigkeiten; es ist ohne weiteres möglich, daß die Schüler die geometrischen Körper, an denen solche Konstruktionen ausgeführt werden sollen, selbst wählen und auch dazu selbst die Maße festlegen. Sollen für alle Schüler oder für eine größere Schülergruppe einheitliche Aufgaben gestellt werden, so empfiehlt sich das Anfertigen entsprechender Arbeitsblätter oder das Arbeiten mit Lochschablone. Werden die Aufgaben durch Beschreibung und Nennung der Daten (hinreichend für die eindeutige Kennzeichnung des Sachverhalts) gestellt, so kann das von den Schülern ermittelte Ergebnis durch eine auf Transparentpapier vorgezeichnete Lösungskonstruktion leicht kontrolliert werden. Im übrigen sollten die Schüler daran gewöhnt werden, selbständig Zeichenkontrollen auszuführen und eine darstellend-geometrische Konstruktionszeichnung erst aus der Hand zu geben, nachdem Richtigkeit und Genauigkeit ausreichend überprüft sind (analog der Probe bei Rechenaufgaben).

Folgende *Aufteilung des Stoffes* auf die verfügbare Unterrichtszeit wird vorgeschlagen.

1. Stunde: Konstruktion der wahren Länge einer Strecke (Beispiel und Übungen)


START
Gegeben:
A'; A"; B'; B"
1
Ist A'B' parallel zur Rißachse oder fallen A' und B' zusammen ?
ja
nein
7
A"B" ist die wahre Länge der Strecke AB.
2
Ist A"B" parallel zur Rißachse oder fallen A" und B" zusammen ?
ja
nein
3
Errichten Sie in A' die Senkrechte auf A'B' !
8
A'B' ist die wahre Länge der Strecke AB.
4
Ermitteln Sie die Differenz der Höhen der Punkte A und B !
Bezeichnen Sie diese Strecke mit d !
5
Tragen Sie d auf der Senkrechten in A' (siehe 3.) auf !
Bezeichnen Sie den erhaltenen Punkt mit (A) !
6
Verbinden Sie (A) mit B' !
(A)B' ist die gesuchte wahre Länge der Strecke AB.
Lösung:
AB
STOPP

146/1


START
Gegeben:
Grund- und Aufriß einer Pyramide
1
Bezeichnen Sie die Pyramidenspitze mit S!
2
Wählen Sie eine Seitenfläche aus, deren wahre Größe und Gestalt noch nicht ermittelt ist! Bezeichnen Sie die Ebene, der diese Fläche angehört, mit ε!
3
Ermitteln Sie die Schnittgerade von ε und $\mathfrak{x}_1$! Bezeichnen Sie diese Gerade mit e!
4
Steht e senkrecht auf der Rißachse ?
nein
ja
8
Ist die Umklappung von ε in $\mathfrak{x}_1$ mit Hilfe des Stützdreiecks von S günstig ?
ja
9
nein
Nehmen Sie eine neue Aufrißebene so an, daß die (neue) Rißachse senkrecht auf e steht!
10
Konstruieren Sie den (neuen) Aufriß von e und von S!
5
Konstruieren Sie die Umklappung von ε um e in $\mathfrak{x}_1$ im Aufriß (nach Schema ...)!
11
Konstruieren Sie die Umklappung von ε um e in $\mathfrak{x}_1$ mit Hilfe des Stützdreiecks von S (nach Schema ...)!
6
Konstruieren Sie in der Umklappung von ε die wahre Größe und Gestalt der betreffenden Seitenfläche (nach Schema)!
7
Ist die wahre Größe und Gestalt aller Seitenflächen ermittelt ?
nein
ja
STOPP
Lösung:
Wahre Größe und Gestalt der Seitenflächen der Pyramide

147/1

2. und
3. Stunde: Konstruktion der wahren Größe und Gestalt einer ebenen Figur (Beispiel und Übungen), ebener Schnitt (senkrecht zur Aufrißebene) durch einen ebenflächig begrenzten Körper (mit Ermitteln der wahren Größe und Gestalt der Schnittfigur, als weitere Übung im Ermitteln der wahren Größe und Gestalt einer ebenen Figur)
4. Stunde: Komplexe Aufgaben, die verschiedenartige Konstruktionen fordern

Die Konstruktion der wahren Größe und Gestalt einer ebenen Figur wird in einer weiteren Unterrichtseinheit beim Ermitteln der Figuren, die sich beim ebenen Schnitt gerader Kreiszylinder ergeben, wieder angewendet.

Die *Berechnung des Flächeninhalts von Schnittfiguren*, die vom Lehrplan als Stoff zur Information gefordert wird (vgl. Lp 45), kann in der 4. Stunde dieser Unterrichtseinheit erfolgen. Es ist aber auch möglich, sie in die Unterrichtseinheit 2.2.3. (vgl. Uh 159ff) einzubeziehen. Die im zugehörigen Beispiel des Lehrbuches (Lb 81ff, Beispiel B 8) entwickelte Formel sollte nicht nur zur Berechnung von Schnittflächen formal angewendet, sondern auch im Hinblick auf ihren Gültigkeitsbereich diskutiert werden.

2.1.5. Darstellung krummflächig begrenzter geometrischer Körper (LE 9 und 10; 2 Std.)

Diese Unterrichtseinheit hat die allgemeine Aufgabe, früher erworbenes Wissen in den Methoden der darstellend-geometrischen Abbildung in Zweitafelprojektion und in schräger Parallelprojektion auf einen neuen, den Schülern bisher nicht bekannten Sachverhalt anzuwenden; *neue Probleme werden* dabei *auf bereits gelöste Probleme zurückgeführt.*

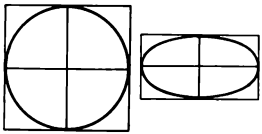
Das spezielle Ziel des Unterrichts bei der *mathematischen Grundlagenbildung* der Schüler ist vor allem in der weiteren Festigung der Kenntnisse in den Prinzipien der Darstellung in schräger Parallelprojektion und in der weiteren Entwicklung der Raumvorstellungsfähigkeit zu sehen. Aufbauend auf die Darstellung geradlinig begrenzter Figuren und ebenflächig begrenzter Körper lernen die Schüler bei der Abbildung von Kreisen Prinzipien kennen, die allgemein bei der Abbildung krummlinig begrenzter Figuren und krummflächig begrenzter Körper Anwendung finden können.

Die Ausführungen über die *ideologische Bildung und Erziehung* der Schüler, die zur Unterrichtseinheit über die Darstellung ebenflächig begrenzter Körper gemacht wurden (Unterrichtseinheit 2.1.2.), gelten auch für die Unterrichtseinheit 2.1.5.

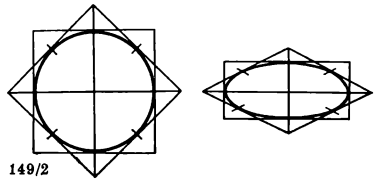
Die *methodische Gestaltung* dieser Unterrichtseinheit kann im Prinzip der Gestaltung der Unterrichtseinheit 2.1.2. ähneln. Eine Besonderheit ist lediglich die *Darstellung des Kreises.*
Bei der Darstellung von Kreiszylindern und Kreiskegeln in schräger Parallelprojektion ergeben sich als Bilder der kreisförmigen Flächen im allgemeinen *Ellipsen.* Wenn auch der Lehrplan ausdrücklich nur das *Skizzieren* und nicht eine genauere, z. B. punktweise Konstruktion dieser Figuren fordert (vgl. Lp 45), so erscheint es doch unumgänglich, die Schüler im Interesse eines geometrisch richtigen, möglichst einfachen und ästhetisch ansprechenden Skizzierens mit einigen wesentlichen Eigenschaften der Ellipse bekannt zu machen. Zu diesen Eigenschaften gehört vor allem die Symmetrie, ebenso der Kurvenverlauf an den Scheiteln.

Die Ellipse ist nach den neuen Lehrplänen nicht Gegenstand von Erörterungen im Mathematikunterricht. Im Astronomieunterricht, Klasse 10, wird – in Zusammenhang mit den KEPLERschen Gesetzen – auf die Ellipse und ihre Brennpunkteigenschaft hingewiesen; diese Eigenschaft ist jedoch für das Skizzieren der Kurven in der darstellenden Geometrie praktisch ohne Bedeutung.

Im Unterricht der darstellenden Geometrie hat sich bewährt, die Abbildung, zumindest die skizzenmäßige Abbildung krummlinig begrenzter Figuren aus der Abbildung ein- oder umbeschriebener geradlinig begrenzter Figuren zu entwickeln. Die darstellend-geometrische Abbildung geht hier im grundsätzlichen den gleichen Weg wie die Umfangs- und Flächeninhaltsberechnung. Es ist ohne weiteres möglich, das Bild eines Kreises aus dem Bild des ihm umbeschriebenen Quadrats zu gewinnen; vgl. Bild 149/1. Wird größere Genauigkeit gewünscht, so kann die in Bild 149/2 gezeigte Figur herangezogen werden. Umbeschriebene Figuren sind für das Zeichnen zweckmäßiger als einbeschriebene; denn mit Hilfe von Punkten und den zugehörigen Tangenten läßt sich im allgemeinen eine Kurve besser annähern als mit Hilfe von Punkten allein, auch wenn deren Anzahl größer ist. Selbst beim Skizzieren der Bilder krummlinig begrenzter Figuren ist es angebracht, die Bilder der geradlinig begrenzten Hilfsfiguren exakt zu konstruieren.

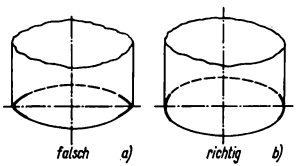


149/1

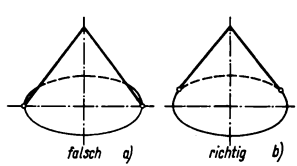


149/2

Ebenso wie bei der Darstellung von Prismen werden bei der Darstellung von Kreiszylindern die Prinzipien der *Abbildung durch Verschiebung* genutzt, vor allem beim Zeichnen der Achsen der Ellipsen oder der Hilfsfiguren für das Skizzieren.
Im übrigen sollte man sich beim Skizzieren nicht nur auf das Zeichnen aus freier Hand beschränken, sondern auch *Schablonen* oder ein *Kurvenlineal* benutzen. Das Arbeiten mit diesen Hilfsmitteln ist den Schülern nicht fremd; die Schüler haben bereits bei der Behandlung der Potenzfunktionen sowie der Exponential-, Logarithmus- und der Winkelfunktionen vor allem mit Schablonen gearbeitet.
Besonders achte man darauf, daß die Schüler keine „Spitzenellipsen" entwerfen (Bild 149/3) und beim Skizzieren von Kreiskegeln in schräger Parallelprojektion die begrenzenden Mantellinien richtig zeichnen (Bild 149/4).



149/3



149/4

Die wichtigsten *Regeln für das Zeichnen* (Skizzieren) *gekrümmter Linien* sollten sich die Schüler besonders notieren; es kann nunmehr die bereits früher in der Unterrichtseinheit 2.1.2. angelegte Übersicht über die Zeichenregeln der darstellenden Geometrie (vgl. Uh 136f) etwa so ergänzt werden, wie es die folgende Zusammenstellung zeigt.

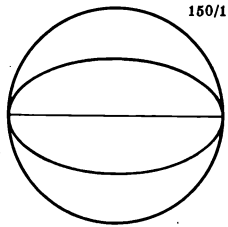
Gekrümmte Linien werden, soweit es nicht Kreisbögen sind, entweder freihändig oder mit Hilfe eines Kurvenlineals oder einer Schablone gezeichnet. Die Kurve wird entweder
a) durch Konstruktion einzelner Kurvenpunkte oder
b) durch Konstruktion einzelner Kurvenpunkte mit den zugehörigen Tangenten
so genau festgelegt, daß ihr Verlauf eindeutig erkennbar ist. Im allgemeinen muß an Stellen stärkerer Krümmung der Abstand der Punkte geringer sein als an Stellen schwächerer Krümmung.

Beim Zeichnen wird das *Kurvenlineal* so angelegt, daß es nach Möglichkeit vier benachbart gezeichnete Punkte verbindet; nachgezogen wird die Kurve nur zwischen dem zweiten und dem dritten Punkt. Dann wird das Kurvenlineal weitergerückt; falls die neue Lage nicht mehr dem Kurvenverlauf entspricht, muß eine andere Stelle des Lineals gesucht werden.

Es ist darauf zu achten, daß die *Kurve* beim Zeichnen oder Skizzieren keine ihrem Verlauf widersprechenden Knickstellen erhält. Sind Tangenten an die Kurve bekannt, dann muß beim Zeichnen das Kurvenlineal diese Tangenten auch berühren.

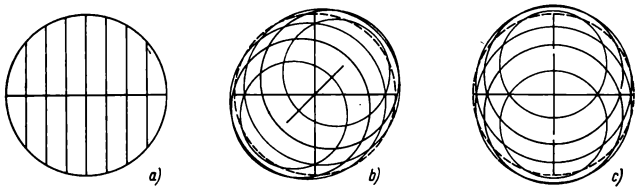
Obgleich die Darstellung der Kugel und ihrer Teile nicht zum Stoff gehört, der der Lehrplan für den Unterricht fordert, und aus diesem Grunde auch keine diesbezüglichen Aufgaben den Schülern zu stellen sind, kommen die Schüler doch mit Darstellungen der Kugel in Berührung; in vielen Lehrbüchern gibt es solche Bilder. Bei solchen Darstellungen ist der Umriß meist ein Kreis.

Zur Information des Lesers sei hier gesagt, daß eine Darstellung einer Kugel, bei der die Umrißlinie als Kreis erscheint und der horizontale Großkreis (der „Äquator") als Ellipse dargestellt ist (vgl. Bild 150/1), nicht nur als senkrechte Projektion einer Kugel gedeutet werden kann, sondern auch als schräge Parallelprojektion zweier Kreise in aufeinander senkrecht stehenden Ebenen (dem „Äquator" und einem „Meridian"); der (elliptische) Kugelumriß fehlt bei dieser Darstellung. Den Schülern sollte man informativ mitteilen, daß die Abbildung einer Kugel in senkrechter Projektion ein Kreis mit dem Kugelradius als Radius ist, die Abbildung einer Kugel in schräger Parallelprojektion jedoch eine Ellipse mit dem Kugelradius als kleiner Halbachse. Plausibel gemacht werden kann das durch Schattenwurf bei Sonnenlicht oder durch Darstellungen wie im Bild 151/1 (a) Kreuzriß b) $\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$ c) $\alpha = 90°$; $q = \frac{1}{2}$).



150/1

Da das praktische, konstruktiv-zeichnerische Arbeiten bei der Darstellung krummflächig begrenzter Körper auf ein relativ geringes Maß beschränkt ist, lassen sich die Darstellung in Zweitafelprojektion und die Darstellung in schräger Parallelprojektion zusammen in einer Unterrichtsstunde behandeln.



151/1

Folgende *Aufteilung des Stoffes* dieser Unterrichtseinheit auf die verfügbare Unterrichtszeit kann somit empfohlen werden.

1. Stunde: Darstellung von Kreiszylindern und Kreiskegeln (in Zweitafelprojektion und in schräger Parallelprojektion)

2. Stunde: Ebene Schnitte eines Kreiszylinders, wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur

2.1.6. Kontrollarbeit (3 Std.)

Für eine *zweistündige Kontrollarbeit* (die 3. Unterrichtsstunde dient der Auswertung dieser Arbeit) erscheinen Aufgaben folgenden Typs geeignet.

1. Darstellend-geometrische Aufgabe über den Schnitt eines Prismas, zusätzlich eventuell die Berechnung der Schnittfläche,
   Beispiel:
   Ein gerades vierseitiges Prisma mit der Grundfläche $ABCD$ ($\overline{AB}=3{,}8$ cm; $\overline{BC}=4{,}8$ cm, $\overline{CD}=4{,}5$ cm; $\sphericalangle CBA=75°$; $\sphericalangle DCB=57°$) werden von einer Ebene geschnitten, die gegen die Grundfläche 52,5° geneigt ist und zur Kante BC parallel liegt.
   Stellen Sie den Körper in Zweitafelprojektion dar!
   Konstruieren Sie die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur (Körperhöhe beliebig, jedoch so groß, daß die Deckfläche nicht von der Schnittebene getroffen wird)!
   Zusatzaufgabe: Berechnen Sie den Inhalt der Grundfläche und den Inhalt der Schnittfigur!
2. Anwendungsaufgabe zur Berechnung krummflächig begrenzter Körper, zusätzlich eventuell die skizzenmäßige Darstellung des Körpers in schräger Parallelprojektion.
   Beispiel:
   Aus einem kreisförmigen Stück Blech von 650 mm Radius werde ein Stück unter dem Zentriwinkel von 120° ausgeschnitten und zu einer kegelförmigen Haube geformt.
   Wie groß sind Durchmesser, Höhe und Volumen dieser Haube, wenn die Enden ohne Überlappung verschweißt werden?
   Zusatzaufgabe: Stellen Sie die Haube in Zweitafelprojektion dar! Fertigen Sie eine anschauliche Skizze in schräger Parallelprojektion an!

Wird auf die Zusatzaufgaben verzichtet, sollte noch eine weitere Aufgabe vorgesehen werden, z. B. eine Aufgabe zur Berechnung des Oberflächeninhalts eines ebenflächig begrenzten Körpers. In manchen Klassen kann es sich sogar empfehlen, diese Aufgabe an die Spitze zu stellen, um den Schülern den Zugang zu den Problemen zu erleichtern.

2.2. Pyramiden- und Kreiskegelstümpfe

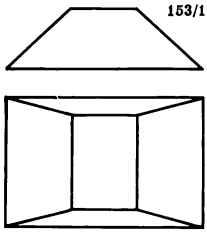
2.2.1. Der Pyramidenstumpf (LE 11 und 12; 3 Std.)

Als allgemeine Aufgabe dieser Unterrichtseinheit ist vor allem das Vertrautmachen der Schüler mit der *Beschreibung*, der *Berechnung und* der *Darstellung eines geometrischen Körpers* zu bezeichnen, *der* den Schülern zwar bisher nicht bekannt war, *sich* jedoch *auf bereits früher behandelte Körper zurückführen läßt.* Die Unterrichtseinheit baut auf die Definition, die Berechnung und die Darstellung der Pyramide auf, bereits früher (in der Unterrichtseinheit 2.1.1.) wurde gezeigt, daß Schnitte einer Pyramide parallel zur Grundfläche Figuren ergeben, die der Grundfigur ähnlich sind.

Die *mathematische Grundlagenbildung* der Schüler in der Unterrichtseinheit 2.2.1. bezieht sich nicht nur auf das Kennenlernen, Berechnen und Darstellen eines speziellen geometrischen Körpers, sondern auch auf die Vertiefung und Festigung von Sätzen aus der Ähnlichkeitslehre, auf die Weiterentwicklung der Fähigkeit, mathematische Sätze zu beweisen und auf die Vervollkommnung der Fertigkeiten im Gebrauch der Rechenhilfsmittel (Formelsammlung, Tafelwerk, Rechenstab) und der üblichen Zeichengeräte.

Die *ideologische Bildung und Erziehung* der Schüler in dieser Unterrichtseinheit stützt sich sowohl auf weltanschauliche Fragen, die das Wesen der Mathematik und die Beziehungen dieser Wissenschaft zur objektiven Realität betreffen, als auch – wenngleich in geringem Maße – auf den sachlichen Inhalt von Anwendungsaufgaben. Im Prinzip gelten auch für diese Unterrichtseinheit die Ausführungen zur ideologischen Bildung und Erziehung in der Unterrichtseinheit 2.1.1.

Die *methodische Gestaltung* der Unterrichtseinheit 2.2.1. muß davon ausgehen, daß zum Gegenstand des Unterrichts sowohl die Untersuchung der stereometrischen Eigenschaften eines geometrischen Körpers als auch Berechnung und Darstellung dieses Körpers gehören. Die einzelnen Unterrichtsschritte müssen logisch aufeinanderfolgen, sie müssen der Aktivität der Schüler Raum geben und die Schüler auch zu selbständiger Arbeit anregen. Da der Unterrichtsgegenstand nicht fordert, stoffliche Elemente einzuführen, die einer ausführlichen Erläuterung durch den Lehrer bedürfen, ist es möglich und geraten, auf umfangreiche Lehrervorträge und Demonstrationen zu verzichten und das heuristische Unterrichtsgespräch (bei der Erörterung der stereometrischen Eigenschaften des Pyramidenstumpfes) sowie die angeleitete und kontrollierte selbständige Arbeit der Schüler (besonders beim Lösen von Berechnungs- und Darstellungsaufgaben) zu bevorzugen.
Im Unterricht wird der *Pyramidenstumpf nicht durch Definition eingeführt.* Obgleich das Prisma und die Pyramide im Unterricht definiert wurden (Klasse 7 bzw. Klasse 8, die Definitionen sind auch im Lehrbuch für Klasse 10 wiedergegeben; vgl. Lb 67, 70), fordert der Lehrplan keine Definition des Pyramidenstumpfes. Die Beschreibung dieses Körpers im Lb 87 ist im übrigen als Definition nicht geeignet, sie ist unterbestimmt. Es gibt nämlich Körper mit ähnlichen, in parallelen Ebenen liegenden Figuren (als Grund- und als Deckfläche) und mit Trapezen (als Seitenflächen), die keine Pyramidenstümpfe sind, als Beispiel diene Bild 153/1. Es ist möglich, die Schüler solche Gegenbeispiele selbst finden zu lassen (vgl. Uh 134), ebenso wie die für Pyramidenstümpfe notwendige Bedingung, daß die in parallelen Ebenen liegenden ähnlichen Figuren sich in Ähnlichkeitslage befinden müssen (der Begriff der zentrischen Streckung, durch den die Ähnlichkeitslage definiert wird, ist den Schülern aus dem Unterricht der Klasse 8 bekannt). Bei der Darstellung von Pyramidenstümpfen wird auf diese Eigenschaft zurückgegriffen.



153/1

Bei der *Berechnung* des Inhalts einzelner Flächen sowie *des Gesamtoberflächen- und des Rauminhaltes von Pyramidenstümpfen* steht das Arbeiten mit dem Tafelwerk im Vordergrund; die Berechnungen werden in der Hauptsache mit Hilfe des logarithmischen Rechenstabes und unter Verwendung der Zahlentafeln des Tafelwerkes ausgeführt.

Bei Spezialfällen sollten die allgemeinen Formeln so umgeformt werden, daß die gegebenen Werte unmittelbar eingesetzt und die Nebenrechnungen vermieden werden können (vgl. Uh 22f); z. B. sollte bei der Berechnung des Volumens eines quadratischen Pyramidenstumpfes (Grundflächenkante a, Deckflächenkante b, Höhe h) die Gleichung

$$V = \frac{h}{3}\left(A_G + A_D + \sqrt{A_G A_D}\right)$$

zunächst umgewandelt werden in

$$V = \frac{h}{3}\left(a^2 + b^2 + ab\right).$$

Unter den Berechnungsaufgaben dürfen auch Aufgaben, die die Anwendung der Winkelfunktionen erfordern, nicht fehlen; z. B. Lb 137/115 bis 120.

Wenn auch der Lehrplan nicht fordert, daß die Schüler die Formeln für die Berechnung des Oberflächeninhalts und des Rauminhaltes der Stumpfkörper herleiten oder beweisen sollen, so können doch, wenn es die Klassensituation gestattet, mit den Schülern Überlegungen angestellt werden, wie diese Formeln gewonnen werden. Diese Überlegungen fordern eine Rückführung eines ungelösten Problems auf bereits gelöste Probleme, z. B. bei der Rauminhaltsberechnung die Rückführung auf die Rauminhaltsformel des Vollkörpers. Die für die Berechnung des Vollkörpers und des Ergänzungskörpers notwendigen Größen lassen sich, soweit sie nicht unmittelbar gegeben sind, mit Hilfe der Sätze der Ähnlichkeitslehre aus den gegebenen Größen ermitteln. Bei solchen Überlegungen sollte man sich im allgemeinen aber mit einem Lösungsansatz (oder mit der Beschreibung des Beweisganges) begnügen.

Bei der *Darstellung von Pyramidenstümpfen* in schräger Parallelprojektion (Kavalierperspektive) bieten sich günstige Gelegenheiten, den Begriff der Ähnlichkeit, die Eigenschaften ähnlicher ebener Figuren und die Eigenschaften der zentrischen Streckung (Stoff der Klasse 8) zu wiederholen; die Abbildung durch zentrische Streckung dient beim Zeichnen der Körper entweder als Grundlage oder zur Kontrolle der Konstruktion. Die Bilder der Grund- und der Deckfläche eines Pyramidenstumpfes sind ähnliche Figuren, die durch zentrische Streckung auseinander hervorgehen.

Folgende *Aufteilung des Stoffes* auf die Stunden dieser Unterrichtseinheit kann empfohlen werden.

1. Stunde: Erklärung des Pyramidenstumpfes, Kennenlernen und erstes Anwenden der Formeln zur Berechnung des Pyramidenstumpfes (formale Aufgaben) Übungen im Definieren und Beweisen (von Sonderfällen)

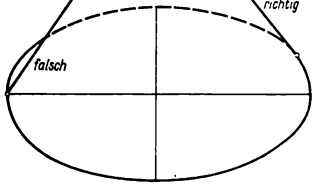
2. Stunde: Darstellung des Pyramidenstumpfes in Zweitafelprojektion und in schräger Parallelprojektion (Kavalierperspektive)

3. Stunde: Übungen in der Oberflächen- und Rauminhaltsberechnung (besonders Anwendungsaufgaben); Lösung komplexer Aufgaben, die sowohl Berechnung als auch Darstellung des Körpers verlangen

2.2.2. Der Kreiskegelstumpf (LE 13 und 14; 3 Std.)

Diese Unterrichtseinheit hat eine ähnliche Funktion wie die unmittelbar vorangegangene Unterrichtseinheit 2.2.1. Dementsprechend sind auch die hauptsächlichen Ziele der *mathematischen Grundlagenbildung* sowie der *ideologischen Bildung und Erziehung* der Schüler den Zielen jener Unterrichtseinheit analog.

Auch die *methodische Gestaltung* der Unterrichtseinheit 2.2.2. kann der Gestaltung der Unterrichtseinheit 2.2.1. entsprechen. Denn auch durch die methodische Anlage sollte die *Analogie der beiden Unterrichtseinheiten, die die Stumpfkörper zum Gegenstand haben*, deutlich werden. Bei der Behandlung des Kegelstumpfes werden dann zwanglos Rückgriffe auf Methoden und Resultate, die bei der Erarbeitung des Pyramidenstumpfes gewonnen wurden, möglich (und sie werden den Schülern auch unmittelbar bewußt); vieles kann von den Schülern in selbständiger Arbeit auf Grund der Analogien erschlossen werden.
Solche *Bezüge zum Pyramidenstumpf* empfehlen sich vor allem *bei der Berechnung des Kegelstumpfes* (bei der Rauminhaltsberechnung kann den Schülern – selbstverständlich mit der notwendigen Erläuterung – bewußt gemacht werden, daß die Anwendung der Formel für den Pyramidenstumpf zum gleichen Ergebnis führt wie die Subtraktion des Rauminhalts des Ergänzungskegels vom Rauminhalt des Vollkegels). Die Berechnung des Kreiskegelstumpfes bietet die Möglichkeit, das Lösen quadratischer Gleichungen zu wiederholen, z. B. wenn das Volumen, die Höhe und der Grundkreisradius gegeben sind. *Bezüge zum Pyramidenstumpf* bieten sich auch *bei der Darstellung gerader Kreiskegelstümpfe* in schräger Parallelprojektion an. Hierbei sollten z. B. – ebenso wie bei der Darstellung des Kreiszylinders – zum Skizzieren von Grund- und Deckfläche geradlinig begrenzte Hilfsfiguren herangezogen werden; vgl. Uh 149. Wie bei der Darstellung des Pyramidenstumpfes werden auch bei der Darstellung des Kegelstumpfes die Erkenntnisse über die Abbildung durch zentrische Streckung genutzt, und zwar beim Ermitteln der Achsen der zu skizzierenden Ellipsen oder beim Zeichnen von Hilfsfiguren für den Kurvenverlauf.
Zu beachten ist, daß beim Skizzieren von Kegelstümpfen wie beim Skizzieren von Kegeln in schräger Parallelprojektion die Umrißlinien des Körpers, die Tangenten an die Bildellipsen sind, richtig gezeichnet werden; Bild 154/1; vgl. Bild 149/4.



154/1

An dieser Stelle sei auf einen Druckfehler (Auslassung einer Zeile) im Lehrplan, S. 45, aufmerksam gemacht. Von Zeile 29 an muß es heißen

. . .
dabei Darstellen von geraden Pyramidenstümpfen in Kavalierperspektive und Zweitafelprojektion und von geraden Kreiskegelstümpfen in Zweitafelprojektion sowie Skizzieren von Kreiskegelstümpfen in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°$; $q = \frac{1}{2}$); . . .

Die *Aufteilung des Stoffes* auf die verfügbare Unterrichtszeit ist in der Unterrichtseinheit 2.2.2. in ähnlicher Weise wie in der Unterrichtseinheit 2.2.1. möglich.

1. Stunde: Erklärung des Kegelstumpfes, Übungen im Beweisen (von Sonderfällen), Kennenlernen und Anwenden der Formeln zur Berechnung des Kegelstumpfes (formale Aufgaben)

2. Stunde: Darstellung des Kegelstumpfes in Zweitafelprojektion, Skizzieren in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°$; $q = \frac{1}{2}$)

3. Stunde: Übungen im Berechnen von Kegelstümpfen (Aufgaben, die dem Vergleich zwischen Pyramidenstumpf und Kegelstumpf dienen, sowie Anwendungsaufgaben), Lösung komplexer Aufgaben, die sowohl Berechnung als auch Darstellung der Körper verlangen

2.2.3. Zusammengesetzte Körper (LE 15; 5 Std.)

Diese Unterrichtseinheit hat in erster Linie die Aufgabe, die Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler auf dem Gebiet der Körperberechnung und – in etwas eingeschränktem Maße – der Körperdarstellung zu systematisieren, zu festigen und anzuwenden. Es kommt in dieser Unterrichtseinheit, die unmittelbar der Gesamtwiederholung zum Abschluß des Mathematikunterrichts in der Oberschule vorausgeht, besonders darauf an, daß die Schüler die *Methoden, Verfahren und Regeln für das Lösen gewisser mathematischer Aufgaben rasch und sicher anzuwenden* lernen. Deshalb wird in dieser Unterrichtseinheit unmittelbar an die Erkenntnisse angeknüpft, die die Schüler bei der Erörterung von Lösungsmethoden und -verfahren früher (vor allem im Rahmen der Unterrichtseinheit 2.1.3.; vgl. Uh 138ff) erworben haben.
Bei den Aufgaben zur Berechnung (und Darstellung) zusammengesetzter Körper werden nunmehr

– das Aufstellen von Lösungsplänen;
– das Arbeiten mit einem Lösungsplan bzw. nach einer Vorschrift;
– das Anwenden der gebräuchlichen Rechen- und Zeichenhilfsmittel

entsprechend der Forderung von Lp 12 geübt.

Der Beitrag, den diese Unterrichtseinheit zur *mathematischen Grundlagenbildung* der Schüler leistet, besteht speziell in der Sicherung des Wissens auf dem Gebiet der Körperberechnung und in der Entwicklung der Fähigkeit, das Gelernte bei der Lösung komplizierterer Aufgaben anzuwenden; hinzu kommt die Vervollkommnung der Fertigkeit, sich der gebräuchlichen Hilfsmittel mathematischen Arbeitens rationell zu bedienen.

Wie bei der mathematischen Grundlagenbildung, so hat auch bei der *ideologischen Bildung und Erziehung* der Schüler diese Unterrichtseinheit eine zusammenfassende und vertiefende Funktion. Gegenstand der weltanschaulichen Betrachtungen sind sowohl Fragen des Wesens der Mathematik und ihrer Beziehungen zur objektiven Realität als auch der sachliche Inhalt der Anwendungsaufgaben. In dieser Unterrichtseinheit muß den Schülern vor Augen geführt werden, welche Bedeutung die Mathematik für die sozialistische Gesellschaft hat und welche Verantwortung der auf mathematischem Gebiet Tätige gegenüber der Gesellschaft trägt; die Schüler müssen – am Beispiel der Stereometrie – zu der Erkenntnis gelangen, daß sie in der Schule zwar nur einen geringen Teil der Mathematik kennengelernt, aber dabei den Schlüssel für ein weiteres Eindringen in diese Wissenschaft und ihre Anwendungsgebiete

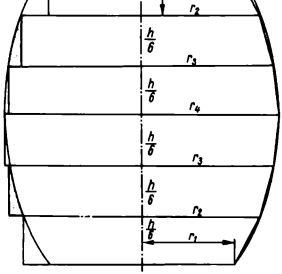
erhalten haben. Auch eingestreute historische Bemerkungen zur Körperberechnung, auch zur angenäherten Berechnung, können die ideologische Bildung und Erziehung wirkungsvoll ergänzen und unterstützen, geben sie doch einen Einblick in den – oft schwierigen, verworren erscheinenden und von Hindernissen erfüllten – Weg der menschlichen Erkenntnis; zur Geschichte der Flächen- und Körperberechnung vgl. z. B. JUNGK [35].

Im Hinblick auf die *methodische Gestaltung* dieser Unterrichtseinheit sei auf die Hinweise aufmerksam gemacht, die zur Unterrichtseinheit 2.1.3. (Uh 142ff) gegeben werden; denn auch dort steht das *Lösen komplexer Aufgaben* zur Berechnung und Darstellung geometrischer Körper im Mittelpunkt. Beim Lösen der Aufgaben dominiert die *selbständige Arbeit der Schüler*.

Bei der Berechnung des Oberflächen- und Rauminhaltes zusammengesetzter Körper muß gleichfalls der Grundsatz beachtet werden, daß das Hauptgewicht im Aufsuchen und Anwenden der Formeln beim praktischen Rechnen, nicht aber auf der Herleitung dieser Formeln liegt; vgl. Lp 44. Im allgemeinen beschränke man sich auf jene Formeln, die das Tafelwerk [80] oder der Wissensspeicher [5] enthält. Das Lehrbuch nennt auch – zur Illustration und als Beispiel für Anwendungsübungen – die SIMPSONsche Formel (ebenso eignet sich die KEPLERsche Faßformel).

Wichtig, auch für die weltanschauliche Bildung und Erziehung der Schüler, ist die Einsicht, daß – zum Zwecke der Berechnung – beliebig geformte Körper mit beliebiger Genauigkeit durch geometrische Körper (bzw. durch Kombinationen geometrischer Körper) angenähert werden können; hier wird an die Überlegungen angeknüpft, die in der einführenden Unterrichtseinheit 2.1.1. des Stoffgebietes „Körperdarstellung und Körperberechnung" zum Wesen eines geometrischen Körpers (idealisierte Widerspiegelung realer Körper) angestellt wurden. Auch sollte den Schülern nicht verborgen bleiben, daß es zur Berechnung von Körpern, die bestimmten Klassen bzw. Teilmengen geometrischer Körper angehören, außer den erlernten Formeln noch weitere „exakte" Formeln gibt.

Aufgaben, die auf eine Annäherung eines Körpers durch einfache geometrische Körper führen, werden vom Lehrplan nicht ausdrücklich gefordert. Das Lehrbuch geht auf die Möglichkeit, Körper durch einfacher berechenbare anzunähern oder zur Berechnung Näherungsformeln anzuwenden, nur kurz ein (Lb 95). Das Arbeiten an Aufgaben aus diesem Bereich, die in Stoff und Niveau den allgemeinen Forderungen des Lehrplans entsprechen, kann jedoch für die mathematische Bildung und für die Erziehung zu rationellem Arbeiten, Genauigkeit und Gewissenhaftigkeit sehr dienlich sein.



156/1

Im folgenden wird eine solche Aufgabe anspruchsvolleren Schwierigkeitsgrades gezeigt, ihre Anwendung als *Beispiel* im Unterricht ist aber nur dann sinnvoll, wenn vorausgesetzt werden kann, daß sie von *allen* Schülern verstanden wird (vgl. Uh 138ff).

Es ist das Volumen (Einheit: 1 l) eines Fasses zu ermitteln, dessen Längsschnitt im Bild 156/1 dargestellt ist. Die Höhe des Körpers betrage 42,0 cm, *die Längen der Radien seien*

$r_1 = 13{,}5$ cm; $r_2 = 16{,}0$ cm; $r_3 = 17{,}5$ cm; $r_4 = 18{,}0$ cm.

Zur Berechnung wird der Körper in Schichten zerlegt, jeder Schicht wird ein Zylinder eingeschrieben und umbeschrieben; vgl. Bild 156/1, links. Auf diese Weise entstehen ein Innen- und ein Außenkörper, die jeweils aus sechs Zylindern zusammengesetzt sind. Das Volumen V des Fasses liegt zwischen dem Volumen V_I des Innenkörpers und dem Volumen V_A des Außenkörpers. Es ist

$$V_\mathrm{I} < V < V_\mathrm{A}\,.$$

$$V_\mathrm{I} = 2\pi \cdot \frac{h}{6} \cdot r_1^2 + 2\pi \cdot \frac{h}{6} \cdot r_2^2 + 2\pi \cdot \frac{h}{6} \cdot r_3^2 = \frac{\pi h}{3}\,(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$$

$$= \frac{\pi \cdot 42{,}0\ \mathrm{cm}}{3} \cdot (13{,}5^2 + 16{,}0^2 + 17{,}5^2)\ \mathrm{cm}^2 = \pi \cdot 14{,}0 \cdot 744{,}5\ \mathrm{cm}^3$$

$$V_\mathrm{I} \approx 32800\ \mathrm{cm}^3 = 32{,}8\ \mathrm{l}$$

$$V_\mathrm{A} = 2\pi \cdot \frac{h}{6} \cdot r_2^2 + 2\pi \cdot \frac{h}{6} \cdot r_3^2 + 2\pi \cdot \frac{h}{6} \cdot r_4^2 = \frac{\pi h}{3}\,(r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)$$

$$= \frac{\pi \cdot 42{,}0\ \mathrm{cm}}{3} \cdot (16{,}0^2 + 17{,}5^2 + 18{,}0^2)\ \mathrm{cm}^2 = \pi \cdot 14{,}0 \cdot 886{,}5\ \mathrm{cm}^3$$

$$V_\mathrm{A} \approx 39000\ \mathrm{cm}^3 = 39\ \mathrm{l}$$

Als Abschätzung ergibt sich somit

$$32{,}8\ \mathrm{l} < V < 39{,}0\ \mathrm{l}.$$

Eine Annäherung, bei der allerdings nicht unmittelbar ersichtlich ist, ob sie größer oder kleiner als das wirkliche Volumen ist, erhält man durch Mitteln von V_I und V_A. Das arithmetische Mittel ergibt

$$\overline{V} \approx 35{,}9\ \mathrm{l}.$$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, jede Schicht durch einen eingeschriebenen Kegelstumpf anzunähern. Das Volumen V des Fasses ist dann größer als das Volumen V_K des aus Kegelstümpfen zusammengesetzten Innenkörpers.

$$V_\mathrm{K} < V$$

$$V_\mathrm{K} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot h}{3 \cdot 6}\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + 2 \cdot \frac{\pi \cdot h}{3 \cdot 6} \cdot (r_2^2 + r_2 r_3 + r_3^2) + 2 \cdot \frac{\pi \cdot h}{3 \cdot 6} \cdot (r_3^2 + r_3 r_4 + r_4^2)$$

$$= \frac{\pi \cdot h}{9} \cdot (r_1^2 + 2r_2^2 + 2r_3^2 + r_4^2 + r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_4)$$

$$= \frac{\pi \cdot 14{,}0\ \mathrm{cm} \cdot 2440\ \mathrm{cm}^2}{3}$$

$$V_\mathrm{K} = 35800\ \mathrm{cm}^3 = 35{,}8\ \mathrm{l}$$

Eine weitere Möglichkeit, die jedoch über den Stoff der Oberschule hinausgeht und nur zur Information für den Lehrer gedacht ist, besteht in der Anwendung der GULDINschen Formeln; dabei kann angenommen werden, daß die Meridiankurve des Rotationskörpers eine Parabel ist.

Die *Aufteilung des Stoffes* in dieser Unterrichtseinheit, die in besonderem Maße der Anwendung und Festigung des Gelernten dient, ist auf folgende Weise möglich.

1. Stunde: Lösen von Aufgaben über geometrische Körper, die aus einfachen Körpern zusammengesetzt sind (formale Aufgaben und Anwendungsaufgaben)

2. Stunde: Annäherung eines Körpers, für den die Schüler keine Berechnungsformel kennen, durch einfache Körper (Volumenberechnung)

3. Stunde: Übungen im Anwenden vorgegebener und aus dem Tafelwerk entnommener Formeln für die Körperberechnung, historische Rückblicke

4. und 5. Stunde: Lösen komplexer Aufgaben über zusammengesetzte Körper, auch Aufgaben, in denen einfache Körperdarstellungen gefordert werden

Für die 1. bis 3. Stunde sei noch eine *Variante* genannt.

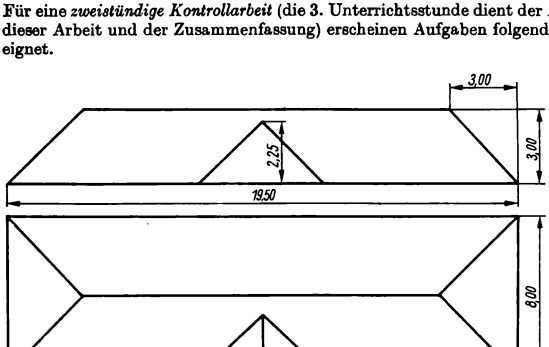
1. und 2. Stunde: Berechnung eines geometrischen Körpers, für den die Schüler die Berechnungsformeln nicht kennen, und zwar
a) durch Annäherung durch einfache Körper,
b) durch Anwendung von Näherungsformeln; historische Rückblicke

3. Stunde: Berechnung zusammengesetzter Körper mit Hilfe des Tafelwerkes

Beide Varianten erscheinen im wesentlichen didaktisch gleichwertig; die zweite Variante stellt allerdings etwas höhere Ansprüche an das allgemein-geistige und das mathematische Niveau der Schüler.

2.2.4. Zusammenfassung; Kontrollarbeit (3 Std.)

Für eine *zweistündige Kontrollarbeit* (die 3. Unterrichtsstunde dient der Auswertung dieser Arbeit und der Zusammenfassung) erscheinen Aufgaben folgenden Typs geeignet.



158/1

1. Berechnung und Darstellung eines aus ebenflächig begrenzten Körpern zusammengesetzten Körpers, Anwendungsaufgabe
   Beispiel:
   Stellen Sie das im Bild 158/1 *in Zweitafelprojektion gezeichnete Dach in Kavalierperspektive dar! Berechnen Sie den Inhalt der Dachfläche und den Inhalt des Dachraumes!*
2. Berechnung und Darstellung eines geraden Pyramidenstumpfes
   Beispiel:
   Bei einem regelmäßigen sechsseitigen Pyramidenstumpf sei die Länge einer Grundkante 3,0 cm, *seine Höhe sei* 3,0 cm, *der Winkel, den die Seitenkanten mit der Grundfläche einschließen, betrage* 60°.
   Stellen Sie den Körper in Zweitafelprojektion so dar, daß aus dem Aufriß der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche unmittelbar abgelesen werden kann!

Berechnen Sie Oberflächen- und Rauminhalt des Körpers!
Überprüfen Sie den aus der Darstellung abgelesenen Wert des Neigungswinkels der Seitenflächen durch Rechnung!

3. Berechnung und Skizze eines Kreiskegelstumpfes

Beispiel:
Ein gerader Kreiskegel ($r = 3{,}0$ cm; $h = 6{,}6$ cm) *werde durch einen Schnitt parallel zu seiner Grundfläche so geteilt, daß sich der Rauminhalt der Spitze zum Rauminhalt des Stumpfes wie* 1 : 7 *verhalten.*
Welchen Rauminhalt hat der Kegelstumpf?
In welchem Verhältnis stehen der Inhalt der Mantelfläche der Spitze zum Inhalt der Mantelfläche des Stumpfes?
Skizzieren Sie den Stumpf in schräger Parallelprojektion (*Maßstab* 1 : 1)!

3. Festigung und Systematisierung; Prüfungsvorbereitung

3.0. Vorbemerkungen

Der Lehrplan sieht für das Stoffgebiet 3. „Festigung und Systematisierung; Prüfungsvorbereitung" 20 Unterrichtsstunden vor; vgl. Lp 20. Da der Lehrplan keine Festlegungen darüber trifft, in welcher Weise diese 20 Stunden zu gestalten sind, gilt für die Nutzung der in diesem Teil der Unterrichtshilfen enthaltenen Darlegungen in noch stärkerem Maße, was grundsätzlich bei der Verwendung der Unterrichtshilfen beachtet werden muß: Es sind *Empfehlungen des Autors, die jeder Lehrer entsprechend der Zielstellung bei der Gestaltung des Unterrichts in seiner Klasse kritisch anwenden sollte.*

Obgleich der Lehrplan für Festigung, Systematisierung und Prüfungsvorbereitung einen besonderen Unterrichtsabschnitt am Ende des Schuljahres vorsieht, muß die *Festigung und Systematisierung* des Wissens und Könnens der Schüler *und* die *Vorbereitung auf die Abschlußprüfung Bestandteil des Unterrichts im gesamten Schuljahr* sein. Auf der Grundlage eines Wiederholungsplanes muß in Verbindung mit dem jeweiligen neuen Stoff oder auch in besonderen Unterrichtsstunden das grundlegende mathematische Wissen und Können der Schüler gefestigt werden. Hierzu sind Hinweise in den Teilen 0., 1. und 2. dieser Unterrichtshilfen zu finden.

Im Teil 3. der Unterrichtshilfen geht es um Anregungen für die *abschließende* Wiederholung und Systematisierung der in zehnjähriger Schulzeit erworbenen mathematischen Bildung. Dabei ist die Vorbereitung auf die Abschlußprüfung nicht als Selbstzweck und nicht isoliert von dem Bildungs- und Erziehungsziel der Oberschule zu sehen. In erster Linie ist anzustreben, das Abschlußniveau der Allgemeinbildung im Bereich der mathematischen Bildung zu erreichen. In der Prüfung ist von den Schülern dann zu beweisen, daß dieses Ziel erreicht wurde.
Es ist von großer Bedeutung für die weitere Entwicklung der Schüler, ihnen am Ende der zehnjährigen Schulzeit bewußt zu machen, welches Niveau ihre mathematische Bildung erreicht hat. Dabei sollten die Schüler erkennen, daß ihre Kenntnisse, Erkenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten ein System von Wissen und Können darstellen, daß sie sich einen bestimmten Bereich der Wissenschaft angeeignet haben, der für sie eine wichtige Voraussetzung für ihre weitere Entwicklung ist.

Neben dieser Aufgabe ist es erforderlich, die Schüler auf solche Anforderungen vorzubereiten, wie sie z. B. durch die Abschlußprüfung gestellt werden, insbesondere auf das *Schreiben einer mehrstündigen Prüfungsarbeit* und auf das *Ablegen einer mündlichen Prüfung.* Hierbei geht es im wesentlichen darum, den Schülern die Bedeutung der Prüfung als einer Rechenschaftslegung vor der Gesellschaft bewußt zu machen und sie auf diese spezifische Form einer Rechenschaftslegung einzustellen.

In den Teilen 3.1. bis 3.4. werden einige *Vorschläge für die Systematisierung und Wiederholung* unterbreitet, und es wird an ausgewählten Beispielen erläutert, wie die Systematisierung erfolgen kann. Bei der Auswahl wurden die im Lehrplan

formulierten Ziele, Aufgaben und Leitlinien des Mathematikunterrichts zugrunde gelegt.

Folgende Komplexe wurden ausgewählt.

1. Zahlenbereichserweiterungen
2. Abbildungen
3. Mathematische Aussagen und Beweise
4. Abstraktion und Fachsprache in der Mathematik (Vorschlag für eine Stunde zum Abschluß des Mathematikunterrichts)

Es sei darauf hingewiesen, daß in der Auswahl weder eine Rangreihe noch ein Vorschlag für die Reihenfolge der Behandlung zu sehen ist. Der Lehrer muß auf der Grundlage der Gesamtzielstellung des Lehrplans, seines bisherigen Unterrichts, seines Einblicks in den Entwicklungsstand des Wissens und Könnens seiner Schüler und der jährlich erscheinenden Hinweise des Ministeriums für Volksbildung zur Vorbereitung auf die Prüfung auswählen bzw. ergänzen.

Hinsichtlich der *didaktischen Gestaltung* der Systematisierungsstunden kommt es darauf an, den Schülern *Bekanntes und Gewohntes unter neuem Aspekt* bewußt zu machen und damit im Zusammenhang grundlegendes Wissen und Können zu festigen. Die Schüler müssen aktiv in die Gestaltung der Wiederholung einbezogen werden. Hierfür hat sich bewährt,

- einzelne Schüler vor der Klasse Vorträge halten zu lassen, den Schülern Aufträge zum Studieren von Übersichten und Zusammenfassungen zu erteilen, die dem Tafelwerk [80], den Lehrbüchern oder dem Wissensspeicher [5][1] entnommen werden,
- alle Schüler mit dem Durcharbeiten von Aufzeichnungen unter bestimmten Gesichtspunkten zu beauftragen,
- den Schülern konkrete Aufgaben beim Verfolgen eines Lehrervortrages zu erteilen.

In den Bemerkungen zur methodischen Gestaltung wird bei den einzelnen Komplexen auf solche Möglichkeiten an konkreten Beispielen hingewiesen.

Bei der *Vorbereitung auf die Abschlußprüfung* sollte weiterhin folgendes beachtet werden.

Die *schriftliche* Prüfung unterscheidet sich von Klassenarbeiten durch den größeren Zeitumfang und den umfangreicheren Themenkreis. Es empfiehlt sich, eine Übungsarbeit unter Prüfungsbedingungen schreiben zu lassen, damit sich die Schüler eine Vorstellung von der zur Verfügung stehenden Zeit und den Anforderungen verschaffen, die in dieser Zeitspanne zu erfüllen sind. Dabei sollten auch die Anforderungen an die Form gebührend beachtet werden; vgl. Uh 28.
In der *mündlichen* Prüfung sollen die Schüler Einzelleistungen unter besonderen Bedingungen vollbringen, die sich von den Bedingungen einer schriftlichen Arbeit unterscheiden. Sie sollen über ein vorgegebenes Thema, vor einem bestimmten Personenkreis, in einer begrenzten Zeit und im Zusammenhang sprechen.
Obwohl der gesamte Unterricht zu einer solchen Leistung befähigen soll, ist es zweckmäßig, in den Wochen unmittelbar vor der mündlichen Prüfung hierzu besondere Übungen durchzuführen.

[1] Es ist zu beachten, daß das „Kompendium der Mathematik" [42] keine Pflichtliteratur im Sinne eines Lehrbuches für die Schüler ist. Ab 1976 steht der Wissensspeicher „Mathematik in Übersichten" [5] jeder Schule als Klassensatz zur Verfügung.

Im Rahmen von Wiederholungen und Systematisierungen können Schüler zu bestimmten Fragen sprechen, auf die sie sich langfristig vorbereiten. Wenn feststeht, in welchen Fächern der einzelne Schüler mündlich geprüft wird, sollte er direkt vor Prüfungsbedingungen gestellt werden: Begrenzte Vorbereitungszeit, begrenzte Hilfsmittel, bestimmte Redezeit, Thema in der Art der Prüfungsfragen und die anderen Schüler als kritische Zuhörer.

Ein *Unterschied zwischen schriftlicher und mündlicher Prüfung* sollte auch in der unterschiedlichen Art der Aufgabenstellung bestehen. Während in der schriftlichen Prüfung verlangt wird, daß der Schüler in schriftlicher Form vorgegebene mathematische Probleme löst, sollte der Darstellung mathematischer Zusammenhänge und von Beziehungen zwischen der Mathematik und anderen Wissenschaften und der Praxis in der mündlichen Prüfung ein größerer Platz eingeräumt werden.

Die *Ausarbeitung der Prüfungsfragen* muß sehr verantwortungsbewußt durch jeden einzelnen Lehrer entsprechend den staatlichen Anweisungen und der Lage an der Schule und in der betreffenden Klasse nach Beratung mit anderen Fachlehrern im Fachzirkel erfolgen. Als Anregung können einzelne Kontrollfragen dienen, die im Teil 3. dieser Schrift den Wiederholungskomplexen zugeordnet wurden, wobei aber unbedingt beachtet werden muß, daß diese Kontrollfragen nicht mit den zu erarbeitenden Prüfungsfragen identisch sind. Es ist in jedem Fall erforderlich, die jährlich herausgegebenen Hinweise des Ministeriums für Volksbildung zur Durchführung der mündlichen Prüfung zugrunde zu legen.

Die Teile 3.1. bis 3.4. sind in sich nach Schwerpunkten untergliedert, die durch dreistellige Ziffern gekennzeichnet wurden. Die Abschnitte enthalten Aufträge für die Schüler, die durch den Lehrer in unterschiedlicher Weise eingesetzt werden können. Die Numerierung dieser Aufträge erfolgt durchlaufend.

3.1. Zahlenbereichserweiterungen

3.1.1.

Nach der schriftlichen Prüfung empfiehlt sich ein **Rückblick auf** die im Verlaufe der Schulzeit schrittweise vorgenommene **Erweiterung der Zahlenbereiche** bis zum Bereich der reellen Zahlen, mit dem die Schüler seit Beginn des Unterrichts in Klasse 9 arbeiten.

Folgende Frage könnte als Ausgangspunkt dienen:
„Welche Gründe führen in der Mathematik dazu, den jeweiligen Zahlenbereich zu erweitern

- *vom Bereich der natürlichen Zahlen (N) zum Bereich der gebrochenen Zahlen (R*);* Stoff der Klassen 5 und 6;
- *vom Bereich R* zum Bereich der rationalen Zahlen (R);* Stoff der Klasse 7;
- *vom Bereich R zum Bereich der reellen Zahlen (P);* Stoff der Klasse 9?".

Es wird an Beispielen die Erkenntnis vertieft, daß gewisse Probleme mit den Zahlen des jeweiligen Bereiches nicht mathematisch erfaßt und gelöst werden können, da in dem betreffenden Bereich bestimmte Rechenoperationen nicht uneingeschränkt ausführbar sind; Lp 6 bis 8/10.

Literatur: Lb 7/31 für die Einführung des Bereiches R; Lb 9/12 für die Einführung des Bereiches P

Es wird die Erkenntnis vertieft, daß die Zahlenbereichserweiterungen keinesfalls mathematischen „Selbstzweck" darstellen, sondern erforderlich sind, um das mathematische „Handwerkszeug" zu vervollständigen, um Hilfsmittel für das Lösen ganz bestimmter Aufgaben, die die Praxis stellt, zu schaffen; Lp 6 bis 8/10.

Beim Arbeiten mit Gleichungen der Form $x^2+a=0$ $(a>0)$ wird den Schülern noch einmal bewußt, daß auch im Bereich P nicht alle Aufgaben lösbar sind.

① *Begründen Sie, warum die Gleichung $x^2+2=0$ im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung hat!*
Veranschaulichen Sie diese Tatsache graphisch!

3.1.2.

Nach den einführenden Betrachtungen unter 3.1.1., die der Lehrer mit einem Hinweis darauf abschließen kann, daß die Mathematik durch die Anforderungen der Praxis Impulse für ihre Entwicklung erhält, kann wiederholend auf **Zusammenhänge der Zahlenbereiche untereinander** eingegangen werden.

Dazu muß allerdings zunächst der Bereich der ganzen Zahlen eingeordnet werden; Lp 7/52. Auch die Übersicht im Wissensspeicher [5], Seite 19, kann genutzt werden.

Literatur: Lb 6/29 für gebrochene Zahlen; Lb 7/34 für rationale Zahlen; Lb 7/52 für ganze Zahlen; Lb 9/21 für reelle Zahlen

3.1.3.

Zur Festigung der Kenntnisse über die **Zugehörigkeit vorgegebener Zahlen zu entsprechenden Zahlenbereichen** können folgende Aufträge bearbeitet werden.

② a) *Zu welchen Zahlenbereichen gehören die aufgeführten Zahlen?*
Kreuzen Sie die entsprechenden Felder an!

	N	R^*	R	G	P
$-\frac{2}{5}$					
$\sqrt{2}$					
-3					
$\frac{1}{3}$					
0					
$0,\overline{4}$					
π					

b) *Geben Sie für jede in der Tabelle enthaltene Zahl zwei Gleichungen an, die diese Zahl als Lösung besitzen!*

③ *In welchen Zahlenbereichen sind die in der folgenden Tabelle angegebenen Gleichungen lösbar und in welchen nicht?*
a und b seien vorgegebene Zahlen aus dem jeweiligen Zahlenbereich, der Grundbereich der Variablen x sei ebenfalls der jeweilige Zahlenbereich.

	$x+a=b$	$x \cdot a=b$	$x^2=a\ (a \geqq 0)$	$x^2=a\ (a<0)$
N				
R^*				
R				
G				
P				

④ *Stellen Sie Beziehungen zwischen den Mengen N, R*, R, G, P durch Mengendiagramme dar!*

Auftrag 4 eignet sich als vorbereiteter kurzer Schülervortrag.

Literatur: Lb 9/4; Lb 7/53; Lb 9/25; MiÜb 19

3.1.4.

Ein weiterer Aspekt in der Wiederholung könnte die **Ordnungsrelation** in den verschiedenen Zahlenbereichen sein.

⑤ *In welchem Zahlenbereich liegen die Zahlen bezüglich der Ordnungsrelation dicht und in welchem nicht?*

Literatur: Lb 7/47; Lb 9/11

⑥ *Erläutern Sie die Abbildungen der natürlichen Zahlen, der gebrochenen Zahlen, der ganzen Zahlen und der rationalen Zahlen auf Punkte des Zahlenstrahles bzw. der Zahlengeraden!*

3.2. Abbildungen

3.2.1.

Am Beispiel der Abbildungen kann den Schülern bewußt gemacht werden, wie durch die zweckmäßige Wahl einiger grundlegender Begriffe (hier: „Menge", „geordnetes Paar") **verschiedene Bereiche der Mathematik** (hier: Ähnlichkeitsabbildungen, Funktionen, senkrechte Eintafelprojektion) **auf gemeinsame Grundlagen** gestellt werden können (Integrationstendenz in der Wissenschaft).
Der Lehrer muß darauf hinweisen, daß dieses Vorgehen möglich ist, weil objektiv gesetzmäßige Zusammenhänge bestehen. Er kann ferner darauf hinweisen, daß der

Begriff der mathematischen Abbildung so allgemein ist, daß er auch auf Bereiche außerhalb der Mathematik angewandt werden kann, aber mit dem im Alltag verwendeten Abbildungsbegriff nicht verwechselt werden darf.

⑦ *Erläutern Sie den Begriff der Abbildung an Beispielen aus verschiedenen Bereichen innerhalb und außerhalb der Mathematik!*
Gehen Sie dabei auf Eindeutigkeit, Mehrdeutigkeit und Eineindeutigkeit von mathematischen Abbildungen ein!
Beziehen Sie in Ihre Beispiele Funktionen, Ähnlichkeitsabbildungen und senkrechte Eintafelprojektion ein!

Die Bearbeitung des Auftrages 7 sollte in gemeinsamer Arbeit unter Führung des Lehrers erfolgen. Es kommt hierbei nicht auf Vollständigkeit an, sondern darauf, ausreichend Beispielmaterial wiederholend zusammenzustellen, um die genannte Erkenntnis zu gewinnen. Es ist also jeweils festzustellen, woraus die Mengen bestehen, aus denen die Komponenten der geordneten Paare genommen werden, und es ist zu untersuchen ob Eindeutigkeit, Eineindeutigkeit oder Mehrdeutigkeit vorliegt. Im Falle der senkrechten Eintafelprojektion läßt sich mit Hilfe der Frage nach der Herstellung der Eineindeutigkeit auf Höhenmaßstab und Zweitafelprojektion überleiten.

Literatur: Lb 6/94 Geometrische Abbildungen;
Lb 7/90 Senkrechte Eintafelprojektion;
Lb 8/36 Ähnlichkeitsabbildungen;
Lb 8/61 Abbildungen und Funktionen;
Lb 9/84 bis 86 Abbildungen und Funktionen

3.2.2.

Ein weiterer Wiederholungskomplex kann sich auf **Ähnlichkeitsabbildungen** beziehen.

Um die verschiedenen Klassen von Ähnlichkeitsabbildungen zu wiederholen und um bewußt zu machen, daß die Abbildungsvorschrift im Falle der Ähnlichkeitsabbildungen durch eine Konstruktionsvorschrift gegeben sein kann, sollte folgender Auftrag bearbeitet werden.

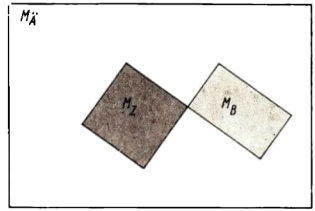
⑧ *Beschreiben Sie an Hand einer Zeichnung, wie man zu einem Punkt P den Bildpunkt P′ konstruktiv ermitteln kann, wenn folgende eineindeutige Abbildungen der Ebene auf sich gegeben sind!*
a) *Drehung der Ebene um einen Punkt $S (S \neq P)$ um einen Winkel von* 30° *in positivem Drehsinn*
b) *Verschiebung der Ebene in einer bestimmten Richtung mit einem bestimmten Richtungssinn mit der Verschiebungsweite* 3,0 cm
c) *Spiegelung der Ebene an einer Geraden, die nicht durch P geht*
d) *Zentrische Streckung der Ebene mit dem Streckungszentrum $Z (Z \neq P)$ und dem Streckungsfaktor $k = 2$*

Literatur: Lb 6/95 bis 101 Bewegungen;
Lb 8/29 bis 36 Zentrische Streckungen;
Lb 8/36 Ähnlichkeitsabbildungen;
MiÜb 154 bis 158 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal;
MiÜb 150 Eigenschaften von Bewegungen

Durch Zurückführen auf die Definitionen sollten mit Hilfe eines Mengendiagramms die Beziehungen zwischen den Klassen von Abbildungen veranschaulicht werden; vgl. Bild 166/1. Dieses Mengendiagramm kann in folgender Weise gelesen werden.

„Die Menge der Ähnlichkeitsabbildungen $M_{\text{Ä}}$ besteht aus der Menge der zentrischen Streckungen M_{Z}, der Menge der Bewegungen M_{B} und aus Abbildungen, die man erhält, wenn man endlich viele Bewegungen und zentrische Streckungen nacheinander ausführt"; vgl. Lb 8/36f.

„Die Mengen M_{Z} und M_{B} haben als Durchschnitt nur die identische Abbildung, d. h., die Diagramme von M_{Z} und M_{B} haben nur einen einzigen Punkt gemeinsam. Aus dem Mengendiagramm erkennt man anschaulich, daß Bewegungen und zentrische Streckungen Sonderfälle der Ähnlichkeitsabbildungen sind, aber die Menge der Ähnlichkeitsabbildungen nicht erschöpfen."



166/1

Eine weitere systematisierende Wiederholung könnte von der Frage nach den *Invarianten bei den Abbildungen* ausgehen; vgl. Lp 6 bis 8/10.

Für die Beantwortung dieser Frage sind die Beziehungen der Menge der Bewegungen M_{B} und der Menge der Ähnlichkeitsabbildungen $M_{\text{Ä}}$ bedeutsam: $M_{\text{B}} \subset M_{\text{Ä}}$. Invarianten von $M_{\text{Ä}}$ sind auch Invarianten von M_{B}, aber nicht umgekehrt, denn die Streckenlänge ist eine Invariante der Bewegungen, aber nicht der Ähnlichkeitsabbildungen.

Folgende Übersicht läßt sich gemeinsam anfertigen.

Invarianten von Ähnlichkeitsabbildungen	**Invarianten von Bewegungen**
Das Bild einer Geraden ist eine Gerade. —	→
Bildwinkel und Originalwinkel sind kongruent. $\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC$ —	→
Für beliebige Strecken ist das Verhältnis der Längen von Bild- und Originalstrecke stets gleich. $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$ (k: Ähnlichkeitsfaktor) —	$k = 1$ →
	↓
	Bild- und Originalstrecken sind kongruent. $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$

An dieser Stelle kann der Zusammenhang von Kongruenz und Ähnlichkeit wiederholt werden.

Die Definitionen für Ähnlichkeit und Kongruenz sollten so formuliert werden, daß bereits aus den Formulierungen ersichtlich ist, daß einander kongruente Figuren auch einander ähnlich sind.

Es empfiehlt sich eine *Gegenüberstellung von Kongruenz- und Ähnlichkeitskriterien* an der Tafel.

Literatur: Lb 8/30, 36 Kongruenz und Ähnlichkeit;
MiÜb 169ff. Kongruenzsätze für Dreiecke;
MiÜb 222f. Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

⑨ a) *Formulieren Sie den Kongruenzsatz, der folgendem Ähnlichkeitssatz entspricht!*
„Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn sie in einem Winkel übereinstimmen und wenn die Verhältnisse einander entsprechender anliegender Seiten gleich sind."

b) *Formulieren Sie den Ähnlichkeitssatz, der folgendem Kongruenzsatz entspricht!*
„Zwei Dreiecke sind einander kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren dieser beiden Seiten übereinstimmen".

Eine weitere Möglichkeit der Systematisierung könnte von der Frage nach den *Fixelementen bei Abbildungen* der Ebene auf sich ausgehen (ohne den Schülern das Wort „Fixelement" zu nennen).

Folgende Übersicht könnte an der Tafel entstehen.

Art der Abbildung	**Bei der Abbildung wird folgende Punktmenge auf sich abgebildet.**	**Bei der Abbildung geht folgende Punktmenge *punktweise* in sich über.**
Verschiebung	Alle Geraden, die parallel zur Verschiebungsrichtung verlaufen	kein Punkt
Drehung	Drehpunkt Alle Kreise, die zum Drehpunkt konzentrisch sind	Drehpunkt
Spiegelung (an einer Geraden)	Spiegelungsgerade Alle Geraden, die senkrecht zur Spiegelungsgeraden verlaufen	Spiegelungsgerade
Zentrische Streckung	Alle Geraden, die durch das Streckungszentrum verlaufen	Streckungszentrum

An dieser Stelle kann eine Beziehung zur graphischen Darstellung von Funktionen hergestellt werden, indem die Graphen der Funktionen $y = f(x)$ und $y = a \cdot f(x)$ gegenübergestellt werden und die Frage beantwortet wird, bei welchen Abbildungen der Ebene auf sich der Graph von $y = f(x)$ in den Graph von $y = a \cdot f(x)$ übergeht, aber die (metrische) Einteilung der Koordinatenachsen erhalten bleibt.
Die Analogie zur zentrischen Streckung ist offensichtlich. An die Stelle des Strekkungszentrums tritt die Abszissenachse.

Literatur: Lb 9/95 bis 98; Lb 10/14

Ein weiterer Schwerpunkt der Wiederholung könnte die **Anwendung der Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze für Dreiecke** sein.

Mit Hilfe des Auftrages 10 könnten die Fertigkeiten im Konstruieren von Dreiecken und die Diskussion der Lösungsmöglichkeiten wiederholt werden.
Dabei sind jeweils folgende Fälle zu unterscheiden.

1. Es *gibt* ein Dreieck.
   1.1. Es gibt *genau ein* Dreieck.
   1.2. Es gibt *mehr als ein* Dreieck.
2. Es gibt *kein* Dreieck.

⑩ *Es seien die folgenden Stücke von Dreiecken ABC gegeben. Dabei seien a, b, c die den Punkten A, B, C gegenüberliegenden Seiten und α, β, γ die den Seiten a, b, c gegenüberliegenden Winkel.*
Entscheiden Sie jeweils, ob es ein Dreieck dieser Art gibt oder nicht!
Untersuchen Sie für die Fälle, in denen das Dreieck nicht eindeutig bestimmt ist, welche Beziehungen zwischen den möglichen Dreiecken bestehen!
Führen Sie, falls möglich, die Konstruktionen aus!

a) $a = 3$ cm, $c = 5$ cm, $\beta = 30°$
b) $b = 5$ cm, $\alpha = 45°$, $a = 6$ cm
c) $a = 2$ cm, $b = 7$ cm, $c = 3$ cm
d) $\alpha = 17°$, $\beta = 25°$
e) $c = 3$ cm, $\alpha = 24°$, $\beta = 35°$
f) $\alpha = 34°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 89°$
g) $\alpha = 30°$, $a = 2$ cm, $c = 4$ cm
h) $\gamma = 30°$, $c = 3$ cm, $b = 5$ cm

Da ein Ziel der Bearbeitung dieses Auftrages darin bestehen soll, die Kongruenz- und Ähnlichkeitskriterien anzuwenden, muß großer Wert auf die Begründungen gelegt werden.
Im folgenden werden als Arbeitserleichterung für den Lehrer die Lösungen skizziert.

Lösungen des Auftrages 10

a) Es existiert *genau eine* Lösung; denn nach einem Kongruenzsatz für Dreiecke sind alle Dreiecke, die in zwei Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, kongruent, m. a. W., die Aufgabe ist bis auf Kongruenz eindeutig lösbar.
b) Es existiert *genau eine* Lösung (Winkel α liegt der größeren der beiden gegebenen Seiten gegenüber).
c) Es existiert *keine* Lösung (die notwendige Bedingung $a + c > b$ ist im vorliegenden Fall nicht erfüllt).
d) Es gibt *mehr als eine* Lösung. Auf Grund des Hauptähnlichkeitssatzes sind Dreiecke, die in zwei Winkeln übereinstimmen, einander ähnlich.
e) Es existiert *genau eine* Lösung (Kongruenzsatz wsw.).
f) Es existiert *keine* Lösung (die notwendige Bedingung $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ist in diesem Fall nicht erfüllt).
g) Es existiert *genau eine* Lösung.

Begründung: Mit Hilfe des Kongruenzkriteriums ssw (eines hinreichenden Kriteriums) ist die Entscheidung nicht zu treffen, da der Winkel der kleineren der gegebenen Seiten gegenüberliegt. In diesem Fall führt folgende Überlegung zum Ziel. Angenommen, es gäbe ein Dreieck, dann ließe sich γ mit Hilfe des Sinussatzes berechnen.

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{c}{a}$$

$$\sin\gamma=\frac{c}{a}\cdot\sin\alpha$$

$$\sin\gamma=\frac{4\text{ cm}}{2\text{ cm}}\cdot\sin 30°$$

$$\sin\gamma=\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\sin\gamma=1 \qquad (0°\leqq\gamma\leqq 180°)$$

Diese Gleichung hat im zulässigen Grundbereich der Variablen genau eine Lösung: $\gamma=90°$. Wenn es also ein Dreieck gäbe, dann muß für dieses Dreieck gelten: $\gamma=90°$. Solch ein Dreieck läßt sich eindeutig konstruieren; denn es ergibt sich $\beta=60°$ und nach dem Kongruenzsatz wsw $(\gamma;\alpha;\beta)$ gibt es bis auf Kongruenz genau ein derartiges Dreieck.

h) Es existieren *genau zwei* Lösungen.
Begründung: Mit Hilfe von Kongruenzkriterien ist die Entscheidung nicht zu treffen. Analog der Schlußweise bei Aufgabe g) gelangt man zu der Gleichung

$$\sin\beta=\frac{5}{6}\text{ mit }0°\leqq\beta\leqq 180°,$$

die im zulässigen Grundbereich der Variablen genau zwei Lösungen besitzt: β_1 und β_2. Zu jedem Winkel β_1 und β_2 gibt es genau ein Dreieck.

Zur Vorbereitung auf die schriftliche Prüfung sind *einfache Beweise* mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze angebracht.
In Vorbereitung auf die mündliche Prüfung sollte auch wiederholt werden, wie die Sätze der Satzgruppe des PYTHAGORAS mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze bewiesen werden können.

⑪ *Beweisen Sie den folgenden Satz mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze!*
„In einem rechtwinkligen Dreieck gilt für die Höhe h (Lot vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse) und die Hypotenusenabschnitte p und q: $h^2=p\cdot q$."

3.2.4.

Dieser Wiederholungsschwerpunkt und die beiden nächsten beziehen sich vor allem auf die den Schülern bekannten **elementaren Funktionen**, bei denen Definitionsbereich und Wertebereich aus reellen Zahlen bestehen.

Eine Möglichkeit der Systematisierung besteht darin, die verschiedenen Formen der *Abbildungsvorschrift* dieser elementaren Funktionen zu untersuchen, um hieraus Schlußfolgerungen auf die Anwendungsbereiche zu ziehen. Dabei kann auch auf Anwendungen in außermathematischen Bereichen Bezug genommen werden.

Zur Arbeitserleichterung für den Lehrer seien einige der den Schülern bekannten Formen von Abbildungsvorschriften hier kurz zusammengestellt.

a) Die Abbildungsvorschrift ist in Form einer *Gleichung* $y=f(x)$ gegeben. (Zu beachten ist hierbei, daß stillschweigend vorausgesetzt wird, daß y den Funktionswert und x das Element des Definitionsbereiches bezeichnet).
Bei theoretischen Überlegungen leichter zu handhaben als eine Wortvorschrift. (Hierin drückt sich der Vorteil der mathematischen Symbolik aus.)
(Grenzen: Wenn in konkreten Fällen Funktionswerte benötigt werden, müssen diese erst berechnet werden.)

Anwendung: – Zur Bezeichnung der Funktion;
– zu theoretischen Überlegungen;
– zur Berechnung von Funktionswerten

b) Die Abbildungsvorschrift ist in Form einer *Wertetabelle* gegeben.
In konkreten Fällen können Funktionswerte schnell angegeben, z. B. den Tafeln des Tafelwerkes entnommen oder von den Skalen des Rechenstabes abgelesen werden. (Grenzen: Eigenschaften der Funktion lassen sich aus einer Tabelle schwer erkennen. Man hat nur eine begrenzte Anzahl geordneter Paare der Funktion. Das bedeutet, daß man in konkreten Fällen an die gegebene Auswahl der Elemente des Definitionsbereiches gebunden ist (Genauigkeitsfragen).)

Anwendung: – Tafelwerk: Schnelles Entnehmen häufig benötigter Funktionswerte (z. B. ist auch πd, $\frac{\pi}{4} d^2$ tabuliert; vgl. [80], Seiten 8 bis 11)
– Im Zusammenhang mit den Skalen des Rechenstabes: Ausführen von Operationen mit den Funktionswerten, ohne diese aufsuchen zu müssen (z. B. Skalen der Winkelfunktionen)
– Wertetafel zur Anfertigung einer graphischen Darstellung von Funktionen

c) Die Abbildungsvorschrift ist in Form einer *graphischen Darstellung* gegeben.
Die geordneten Paare sind graphisch veranschaulicht.
Das ermöglicht (wenn man die Fähigkeit beherrscht, graphische Darstellungen lesen zu können) das Erkennen wesentlicher Eigenschaften der Funktionen; vgl. Teil 3.2.5. Näherungsweises Ermitteln von Funktionswerten bei gegebenem Element des Definitionsbereiches und von Elementen des Definitionsbereiches bei gegebenem Funktionswert mit Hilfe des Graphen ist schnell möglich.
(Grenzen: Genauigkeit der Werte ist durch den Maßstab und die Zeichengenauigkeit begrenzt.
Man kann die elementaren Funktionen nicht in ihrem größtmöglichen Definitionsbereich erfassen, sondern nur teilweise. Durch Veränderung des Maßstabes kann man diesen Teil lediglich vergrößern.)

Anwendung: – Zur Veranschaulichung von Eigenschaften der gegebenen Funktionen
– Als heuristisches Mittel, um auf weitere Eigenschaften der Funktionen aufmerksam zu werden; vgl. Komplementwinkelbeziehungen Lb 30f, Quadrantenbeziehungen Lb 31ff
– Zur näherungsweisen graphischen Ermittlung von Funktionswerten bzw. von Elementen des Definitionsbereiches bei gegebenem Funktionswert
– Gewinnung von Hinweisen auf die Gleichung einer Funktion, von der nur eine begrenzte Anzahl geordneter Paare ermittelt wurde (z. B. Darstellung einer physikalischen Gesetzmäßigkeit in Form einer Gleichung; vgl. Uh 174)

d) Die Abbildungsvorschrift ist in Form einer *Wortvorschrift* gegeben.
Man kann genau beschreiben, wie die geordneten Paare beschaffen sind, auch in Fällen, in denen keine Gleichung angegeben werden kann.
(Grenzen: Die Handhabung ist umständlich.)

Anwendung: Zur Definition von Funktionen (z. B. Sinusfunktion, Kosinusfunktion)

Es sei darauf hingewiesen, daß den Schülern außer den unter a) bis d) aufgeführten Formen von Abbildungsvorschriften noch einige weitere bekannt sind, z. B. die

Angabe von Mengen geordneter Paare in der Mengenschreibweise mit Hilfe von geschweiften und eckigen Klammern ($\{[a; b], [c; d], \ldots\}$) oder die Darstellung mit Hilfe von Mengendiagrammen in Verbindung mit Zuordnungspfeilen; vgl. Lb 8/59f.

⑫ *Erläutern Sie an Hand selbstgewählter Beispiele die Anwendung von Tabellen und Gleichungen als Abbildungsvorschriften für Funktionen!*

Literatur: Lb 10/5 Zusammenstellung von Funktionen;
Lb 10/10 Sinusfunktion; Lb 10/18 Kosinusfunktion;
Lb 10/21 Tangens- und Kotangensfunktion

3.2.5.

Einen gesonderten Schwerpunkt der Wiederholung sollte die **graphische Darstellung von Funktionen** bilden.

Hierbei kommt es zunächst darauf an zu wiederholen, daß bei der graphischen Darstellung einer Funktion in einem kartesischen Koordinatensystem eine *eineindeutige Zuordnung von geordneten Paaren* $[x; y]$ *der Funktion und Punkten* $P(x; y)$ *der Ebene* vorgenommen wird. Der Graph der Funktion besteht aus der Menge aller Punkte $P(x; y)$, die den geordneten Paaren $[x; y]$ der Funktion entsprechen.

Zur *Wiederholung der Begriffe und Sprechweisen* könnte folgende Übersicht dienen, von der jeweils nur eine Spalte ausgefüllt an der Tafel erscheint.

Gegenüberstellung der Begriffe und Sprechweisen

Funktion	**Graph der Funktion**
Menge geordneter Paare $[x; y]$	Menge der **Punkte** $(x; y)$
Funktionswert y **Element** x **des Definitionsbereiches**	**Ordinate** y **des Punktes** $P(x; y)$ **Abszisse** x **des Punktes** $P(x; y)$
Geordnetes Paar $[x_0; 0]$ **Nullstelle** x_0 der Funktion	**Schnittpunkt** $P(x_0; 0)$ des Graphen mit der Abszissenachse **Abszisse** x_0 des **Schnittpunktes** von Graph und Abszissenachse
Geordnetes Paar $[0; y_0]$	**Schnittpunkt** $P(0; y_0)$ des Graphen mit der Ordinatenachse

In diesem Zusammenhang kann den Schülern bewußt gemacht werden, wie durch exakte und zweckmäßige Bezeichnungs- und Sprechweisen der Zusammenhang zwischen mathematischen Begriffen zum Ausdruck gebracht wird, aber auch gesichert ist, daß die Unterschiede nicht verdeckt werden.

Ein weiterer Aspekt dieses Wiederholungsschwerpunktes könnte durch folgenden Auftrag eingeleitet werden.

⑬ *Skizzieren Sie die Graphen von* $y = \sin x$ *und* $y = \cos x$ *im Intervall* $0 \leq x \leq 2\pi$ *jeweils in anderer Farbe in ein und dasselbe Koordinatensystem!*
Skizzieren Sie anschließend den Graph von $y = \tan x$ *im Intervall* $0 \leq x \leq 2\pi$*! Orientieren Sie sich dabei an der zuerst angefertigten Zeichnung der Graphen von* $y = \sin x$ *und* $y = \cos x$*!*

Lesen Sie aus dieser Zeichnung Eigenschaften der Tangensfunktion ab: Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Monotonieverhalten, Periodizität, Vorzeichen der Funktionswerte!

Es geht bei diesem Aspekt der Wiederholung um die *Nutzung der graphischen Darstellung für das Erkennen charakteristischer Eigenschaften von Funktionen.*
Von diesem Gedanken ausgehend, läßt sich die Wiederholung auf verschiedene Stoffe ausdehnen, z. B. auf:

- Graphisches Lösen quadratischer Gleichungen
- Herausarbeiten gemeinsamer Eigenschaften von Klassen von Funktionen
  - · Lineare Funktionen $y = mx + n$; vgl. Lb 8/68ff
  - · Quadratische Funktionen $y = ax^2 + bx + c$; vgl. Lb 9/111ff
  - · Potenzfunktionen
    $y = x^n \quad (n \in G;\ n \geqq 2)$; vgl. Lb 9/87 bis 90
    $y = x^n \quad (n \in G;\ n \leqq 1)$; vgl. Lb 9/90 bis 92
    $y = x^n \quad \left(n = \frac{p}{q};\ p, q \in G;\ p \neq q;\ q > 0\right)$ vgl. Lb 9/92f
  - · Sinusfunktionen $y = a \cdot \sin bx \quad (a, b > 0;\ a, b \in P)$; vgl. Lb 10/14ff
- Größte bzw. kleinste Funktionswerte

Im Zusammenhang mit Betrachtungen zum Monotonieverhalten von Funktionen könnte der Lehrer andeuten, in welcher Weise mit Hilfe der Mathematik Optimierungsprobleme gelöst werden können.

Beispiel:
Bei welchem Winkel ist die Fläche eines Dreiecks ABC am größten:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha \quad (0° \leqq \alpha \leqq 180°;\ a, b \text{ konstant})?$$

Literatur: Lb 9/115 Steighöhe beim senkrechten Wurf nach oben;
Uh 174 Größte Wurfweite beim schrägen Wurf

Ein weiterer Problemkreis der Wiederholung könnte durch folgende Frage aufgeworfen werden:
„Wie können wir vorgehen, um die *Graphen* der uns bekannten elementaren Funktionen *schnell* zu *skizzieren*?"

Bei Kenntnis der charakteristischen Gestalt der Graphen genügt es, bestimmte „markante Punkte" zu ermitteln. Das können sein:

- Schnittpunkte mit der Abszissenachse
  (Das führt auf das Lösen der Gleichung $0 = f(x)$)
- Höchste und tiefste Punkte
- Zusätzliche Punkte $P_1(0; f(0))$ und $P_2(1; f(1))$, für die Abszissen $x = 0$ und $x = 1$, für die die Berechnung der zugehörigen Ordinaten $f(0)$ und $f(1)$ relativ einfach ist
- Zusätzliche Punkte für Abszissen, für die sich die Ordinaten leicht ermitteln lassen, z. B.:

$y = x^{-\frac{1}{2}}$; $x = 4$; $\sqrt{4} = 2$; $y = x^{\frac{1}{3}}$; $x = 8$; $\sqrt[3]{8} = 2$;
$y = \log_a x$; $x = a$; $\log_a a = 1$; $y = kx^{-1}$; $x = k$; $k \cdot \frac{1}{k} = 1$.

Zur Arbeitserleichterung für den Lehrer sei eine Zusammenstellung von markanten Punkten für einige wichtige den Schülern bekannte Funktionen gegeben.

a) *Lineare Funktionen* $y = mx + n \quad (x, m, n \in P)$
Da der Graph eine Gerade ist, genügen zwei Punkte $P_1(0; n)$ und $P_2(1; m + n)$, um die Gerade mit Hilfe eines Lineals zu zeichnen.

b) *Quadratische Funktionen* $y = x^2 + px + q \quad (x,\ p,\ q \in P)$

Da der Graph eine Normalparabel ist, genügt der Scheitelpunkt $S\left(-\frac{p}{2}; q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$, um den Graph mit Hilfe der Schablone der Normalparabel zu zeichnen.
Zusätzliche Punkte: Schnittpunkt mit Ordinatenachse $P(0;q)$;
falls die Funktion Nullstellen besitzt,
Schnittpunkte mit Abszissenachse $P_1(x_1; 0)$ und $P_2(x_2; 0)$

c) *Potenzfunktionen* $y = x^n \quad (n \in N;\ x \in P)$
Auf Grund der Symmetrieeigenschaften (n gerade: Achsensymmetrie; n ungerade: Punktsymmetrie) genügen die Punkte $P_1(0;0)$, $P_2(1;1)$, $P_3(-1;(-1)^n)$.
Um den Kurvenverlauf in der Umgebung des Koordinatenursprungs noch etwas genauer zu erfassen, eignet sich der zusätzliche Punkt $P_4\left(\frac{1}{2}; \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

$y = k \cdot x^{-1} \quad (x,\ k \in P;\ x \neq 0;\ k > 0)$

Der Graph besteht aus zwei Teilen. Zum Ermitteln der Lage des Teils im 1. Quadranten genügen die Punkte $P_1(1;k)$ und $P_2(k;1)$. Auf Grund der Punktsymmetrie lassen sich für die Skizzierung des Kurventeils im 3. Quadranten die Punkte $P_1'(-1;-k)$ und $P_2'(-k;-1)$ verwenden.

$y = x^{\frac{1}{2}} \quad (x \in P;\ x \geqq 0)$
$P_1(0;0),\ P_2(1;1),\ P_3(4;2)$

$y = x^{\frac{1}{3}} \quad (x \in P;\ x \geqq 0)$
$P_1(0;0),\ P_2(1;1),\ P_3(8;2)$

d) *Exponentialfunktionen* $y = a^x \quad (a,\ x \in P;\ a > 0)$

$y = a^x$	$P_1(0;1)$	$P_2(1;a)$	$P_3\left(-1;\frac{1}{a}\right)$	$P_4(2;a^2)$
$y = 2^x$	$P_1(0;1)$	$P_2(1;2)$	$P_3\left(-1,\frac{1}{2}\right)$	$P_4(2;4)$
$y = 10^x$	$P_1(0;1)$	$P_2(1;10)$	$P_3\left(-1;\frac{1}{10}\right)$	

e) *Logarithmusfunktionen* $y = \log_a x \quad (a,\ x \in P;\ a,\ x > 0;\ a \neq 1)$

$y = \log_a x$	$P_1(1;0)$	$P_2(a;1)$	$P_3\left(\frac{1}{a};-1\right)$	$P_4(a^2;2)$
$y = \log_2 x$	$P_1(1;0)$	$P_2(2;1)$	$P_3\left(\frac{1}{2};-1\right)$	$P_4(4;2)$
$y = \log_{10} x$	$P_1(1;0)$	$P_2(10;1)$	$P_3\left(\frac{1}{10};-1\right)$	

f) *Sinusfunktionen* $y = a \cdot \sin bx \quad (a,\ b \in P;\ a,\ b > 0)$
Den Schülern ist bekannt, daß man sich den Graph von $y = a \cdot \sin bx$ aus dem Graph von $y = \sin x$ durch geometrische Abbildungen der Ebene auf sich entstanden denken kann. Da die Symmetrieeigenschaften hierbei erhalten bleiben, genügt es zu wissen, an welchen Stellen die Schnittpunkte des Graphen mit den Abszissenachsen liegen. Das führt auf die Ermittlung der Nullstellen, d. h. auf das Lösen der Gleichung $0 = a \cdot \sin bx$.

⑭ *Skizzieren Sie den Graph der Funktion* $y = x^2 + 3x + \frac{13}{4}$ *mit Hilfe der Kurvenschablone für die Normalparabel in einem geeigneten Definitionsbereich! Verwenden Sie geeignete Formeln des Tafelwerkes!*

⑯ *Skizzieren Sie den Graph der Funktion $y=x^2-2$ im Intervall $-2 \leqq x \leqq 2$ mit Hilfe der Schablone für die Normalparabel!*
Lesen Sie aus der Zeichnung Wertebereich, Nullstellen und Monotonieverhalten der Funktion ab!

3.2.6.

Es sei ein weiterer Gesichtspunkt für die Wiederholung vorgeschlagen, der sich auf die **Anwendung der elementaren Funktionen auf außermathematische Bereiche** bezieht.

Auftrag 16 könnte in die Problematik einführen.

⑯ *Geben Sie mindestens zwei Gesetzmäßigkeiten aus außermathematischen Bereichen an, die durch folgende Funktionen dargestellt werden können!*

$y=mx$; $y=ax^2$; $y=\frac{a}{x}$; $y=a \cdot \sin bx$

Zur Bearbeitung dieses Auftrages können die Schüler das Tafelwerk benutzen.

Literatur: Lp 9/34; Lb 9/99 bis 101

Für $y=a \cdot \sin bx$ seien hier einige *Beispiele* zusammengestellt.

a) Zeitliche Änderung der Momentanwerte von Spannung u und Stromstärke i bei einem Wechselstrom

$u=u_{max} \cdot \sin \omega t$ ($\omega=2\pi f$; f: Frequenz des Wechselstromes)
$i=i_{max} \cdot \sin \omega t$

Literatur: Lp Ph 10/48; Tafelwerk, Seite 76

b) Zeitliche Änderung der Elongation bei einer mechanischen Schwingung

$y=y_{max} \cdot \sin \omega t$ (y: Elongation des schwingenden Körpers;
$\omega=\frac{2\pi}{T}$: Kreisfrequenz;
T: Schwingungsdauer)

Literatur: Lp Ph 10/46; Tafelwerk, Seite 74

c) Hangabtriebskraft, die auf einen Körper auf geneigter Ebene wirkt

$F_H=G \cdot \sin \alpha$ (G: Gewicht des Körpers;
α: Neigungswinkel)

Literatur: Lb 10/10; Tafelwerk, Seite 69

d) Wurfweite beim schrägen Wurf

$s=\frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$ (α: Abwurfwinkel;
v_0: Anfangsgeschwindigkeit;
g: Fallbeschleunigung)

Literatur: Uh 64ff; Tafelwerk, Seite 68

Um besser zu erkennen, worin das Gemeinsame der durch Gleichungen derselben Struktur zu beschreibenden Zusammenhänge liegt, empfiehlt sich folgendes.
Es wird die Frage gestellt:
„Wie ändert sich der Funktionswert y, wenn das Element x des Definitionsbereiches mit k ($k \in P$; $k>0$) vervielfacht wird?"

An *Beispielen* soll hier dargestellt werden, in welcher Weise diese Frage beantwortet werden kann.

a) *Lineare Funktionen* $y = mx$ $(x,\ m \in P;\ m > 0)$

$[x; y] \to [kx; ky]$

Bei Vervielfachung des Elementes x mit k vervielfacht sich auch der Funktionswert mit k; $y \sim x$ (y ist proportional zu x)

Beispiel: $U(d) = \pi \cdot d$

Wird der Durchmesser eines Kreises *verdoppelt*, so *verdoppelt* sich auch der Umfang des Kreises. Bei Halbierung des Durchmessers halbiert sich auch der Umfang, usw.

b) *Quadratische Funktionen* $y = a \cdot x^2$ $(a,\ x \in P;\ a > 0)$

$[x; y] \to [kx; k^2 y]$

Bei Vervielfachung des Elementes x mit k vervielfacht sich der Funktionswert mit k^2; $y \sim x^2$ (y ist proportional zu x^2).

Beispiel: $s(t) = \frac{g}{2} t^2$

Nach einer *doppelt* so großen Fallzeit ist die durchfallene Strecke *viermal* so groß.

Nach diesen einleitenden Übungen, die dem Schüler deutlich werden lassen, worum es gehen soll, können die folgenden Aufträge bearbeitet werden.

⑰ *Gegeben seien zwei Kugeln, von denen die eine einen doppelt so großen Radius hat wie die andere.*

a) *Vergleichen Sie die Oberflächeninhalte und die Volumen beider Kugeln!*

b) *Verallgemeinern Sie Ihre Aussage für den Fall, daß der Radius der einen Kugel k-mal so groß ist wie der Radius der anderen Kugel!*

c) *Wählen Sie einen speziellen Wert k mit* $0 < k < 1$ *und vergleichen Sie die Oberflächeninhalte und die Volumen beider Kugeln!*

⑱ *Für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Vakuum gilt:*

$300\,000 \text{ km s}^{-1} = \lambda \cdot f$ *(λ: Wellenlänge; f: Frequenz)*

Es seien elektromagnetische Wellen der Frequenzen f_1 *und* f_2 *gegeben, für die* $f_1 = 3 f_2$ *gelten möge.*

a) *Welche Aussage kann man für die zugehörigen Wellenlängen* λ_1 *und* λ_2 *treffen?*

b) *Wie läßt sich die Gesetzmäßigkeit der Ausbreitung mit der Redeweise „proportional" formulieren?*

⑲ *Für die Schwingungsdauer T eines Fadenpendels gilt:*

$T(l) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{l}$ *(l: Länge des Fadens; g: Fallbeschleunigung);* vgl. LpPh 10/46f

a) *Vergleichen Sie die Schwingungsdauer bei zwei Pendeln mit den Fadenlängen* $l_1 = 10$ cm *und* $l_2 = 20$ cm*!*

b) *In welcher Weise ändert sich die Schwingungsdauer eines Fadenpendels, wenn die Fadenlänge mit* $k (k \in P;\ k > 0)$ *vervielfacht wird?*

Zum Abschluß könnte den Schülern noch einmal bewußt gemacht werden, in welcher Weise die mathematischen Kenntnisse angewandt werden, wenn beispielsweise eine physikalische Gesetzmäßigkeit in Form einer Gleichung dargestellt werden soll. Hierzu könnte die Bearbeitung des Auftrages 20 dienen (eventuell als Schülervortrag).

⑳ *Um den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen Spannung U und Stromstärke I bei einem elektrischen Leiter zu ermitteln, wurde ein Experiment durchgeführt und dabei folgende Meßreihe aufgenommen.*

U in V	0	2	4	6
I in mA	0	240	490	710

a) *Stellen Sie die geordneten Paare* $[U; I]$ *als Punkte* $P(U; I)$ *in einem Koordinatensystem graphisch dar!*
Einheit auf der Abszissenachse: 1 cm ≙ 1 V
Einheit auf der Ordinatenachse: 1 mm ≙ 10 mA

b) *Ermitteln Sie die Gleichung einer Funktion, von der zu vermuten ist, daß sie den physikalischen Sachverhalt angenähert erfaßt!*
Verwenden Sie dazu die Variablen U und I!

c) *Erläutern Sie an Hand dieses Beispiels das Grundsätzliche des Vorgehens bei der mathematischen Beschreibung physikalischer Gesetzmäßigkeiten!*

Die Beantwortung der Frage c) dieses Auftrages könnte etwa in folgender Weise durch Schüler erfolgen.
Eine Aufgabe der Forschung besteht darin, Gesetzmäßigkeiten aufzudecken. Um diese Gesetzmäßigkeiten auf Probleme der Praxis anwenden zu können (z. B. um Vorausberechnungen für die Konstruktion von Anlagen anstellen zu können), muß man die Gesetzmäßigkeiten in mathematischer Form haben, z. B. in Form einer Gleichung.
Folgende Schritte können beim Bearbeiten des Auftrages 20 unterschieden werden.

1. Schritt: Es wird festgestellt, welche Größen in einem gesetzmäßigen Zusammenhang stehen (hier: angelegte Spannung und Stromstärke).

2. Schritt: Die beiden Größen werden gemessen (hierzu sind Einheiten und Zahlen erforderlich).

3. Schritt: Eine Meßreihe wird aufgenommen (das ist eine Menge von geordneten Paaren von Größen, für die die Eindeutigkeitsforderung erfüllt ist, also eine Funktion).

4. Schritt: Die geordneten Paare werden graphisch dargestellt.

5. Schritt: Es wird der Graph einer bekannten Funktion gezeichnet, von der angenommen wird, daß sie den physikalischen Sachverhalt angenähert erfaßt. Dazu wird eine Kurve gezeichnet, in deren Nähe die gezeichneten Punkte liegen (hier: eine Gerade, die Graph einer Funktion mit der Gleichung $y = mx$ bzw. $I = m \cdot U$ ist). Mit Hilfe einiger der Zeichnung entnommener Werte werden die Konstanten bestimmt (hier:

$$m = \frac{I_0}{U_0} = \frac{240\ \text{mA}}{2\ \text{V}} = 120\ \frac{\text{mA}}{\text{V}}) .$$

Ergebnis: $I = \left(120\ \frac{\text{mA}}{\text{V}}\right) \cdot U$

Durch den Lehrer könnte zum Abschluß dieser Betrachtungen folgender Gedanke kurz dargestellt werden.
Voraussetzung für die Anwendung dieser Vorschrift zur mathematischen Beschreibung von Gesetzmäßigkeiten sind das Vorhandensein eines „Vorrates" an Funktionen, deren Abbildungsvorschriften durch Gleichungen gegeben sind, und die Kenntnis der Graphen dieser Funktionen.
Hieraus wird deutlich, daß es zu den Aufgaben der mathematischen Wissenschaft gehört, solche mathematischen Hilfsmittel bereitzustellen, mit deren Hilfe man Probleme der Praxis erfassen kann.

3.3. Mathematische Aussagen und Beweise

3. 3. 1.

Als Vorbereitung auf die Wiederholung der beim Beweisen mathematischer Sätze anzuwendenden Grundsätze und Methoden ist die wiederholende Betrachtung der **Struktur mathematischer Sätze** zweckmäßig.

Wenn auch die sprachliche Formulierung der mathematischen Sätze eine große Vielfalt aufweist, so lassen sie sich doch auf einige Typen von Aussagen zurückführen, die einander in ihrer Struktur gleichen. Durch bestimmte *normierte Redeweisen* wird diese einheitliche Struktur zum Ausdruck gebracht; vgl. Lp 6 bis 8/11f; Lp 9 bis 10/11.

㉑ *Geben Sie Beispiele für folgende Arten mathematischer Aussagen!*
a) „*Es gibt . . ., so daß gilt . . .*"; vgl. Lp 6 bis 8/50
b) „*Für alle . . . gilt . . .*"; vgl. Lp 6 bis 8/50
c) „*Wenn . . ., dann . . .*"
d) „. . . *genau dann, wenn . . .*"; vgl. Lp 6 bis 8/54

㉒ *Veranschaulichen Sie folgende mathematische Aussagen mit Hilfe von Mengendiagrammen!*
a) *Wenn eine natürliche Zahl durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 2 teilbar.*
b) *Jede Bewegung ist auch eine Ähnlichkeitsabbildung.*

Literatur: Uh 166

Im Zusammenhang mit der Wiederholung der Struktur mathematischer Aussagen läßt sich auch das Problem der *Umkehrung von Sätzen* wiederholen.
Hierbei sollte der Lehrer vor allem an die Erkenntnis der Schüler anknüpfen, die sie sich im Unterricht der Klasse 6 (vgl. Lb 6/106) erarbeitet haben: „Die Umkehrung eines Satzes ist nicht immer auch ein Satz. Deshalb muß stets überprüft werden, ob die Umkehrung eines Satzes gilt."

㉓ *Untersuchen Sie, ob die Umkehrung des folgenden Satzes ebenfalls wahr ist!*
„Wenn eine natürliche Zahl durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar"!

㉔ *Formulieren Sie den Satz des PYTHAGORAS und seine Umkehrung!*
Vereinigen Sie beide Aussagen in einem Satz unter Anwendung der normierten Redeweise „. . . genau dann, wenn . . ."!

Literatur:

Lp 6/32f; Lb 6/106f	Umkehrung der Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen
Lp 7/46f; Lb 7/114f	Umkehrung des Satzes des Thales
Lp 8/51f; Lb 8/25f	Umkehrung der Strahlensätze
Lp 8/52f; Lb 8/51ff	Umkehrung der Sätze der Satzgruppe des PYTHAGORAS

Ein weiterer Aspekt, unter dem die Struktur von mathematischen Sätzen betrachtet werden kann, besteht in folgendem.
Um einen Satz beweisen zu können, muß man sich über seine Struktur im klaren sein. Das wird besonders deutlich am Beweis des Satzes C 2 auf Lb 8/65f: „Alle Punkte der graphischen Darstellung der Funktion $y = 2x$ liegen auf ein und derselben Geraden, die durch den Anfangspunkt 0 des Koordinatensystems verläuft."

Der zweite Schwerpunkt der Wiederholung kann sich auf einige **Beweishilfsmittel** und auf einige **Arten von Beweisen** beziehen, deren Beherrschung durch die Schüler an Hand von Beispielen gefestigt wird.

a) *Zum Zurückführen eines Problems auf ein bereits gelöstes Problem*

Es sollte die Erkenntnis gefestigt werden, daß man beim Beweisen einer Aussage deren Wahrheit durch logisches Schließen aus der Wahrheit bereits bewiesener Aussagen und unter Einbeziehung von Definitionen herleitet. Es sollte den Schülern auch bewußt werden, daß es sich hierbei um ein allgemeines Prinzip geistigen Arbeitens handelt.

Beispiele:

- Zurückführen des Satzes über die Winkelsumme im Viereck auf den Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck

  Literatur: Lp 6/34; Lb 6/129

- Zurückführen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck auf den Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen

  Literatur: Lp 6/33; Lb 6/109f

- Zurückführen der Formel für den Flächeninhalt von Parallelogramm, Dreieck und Trapez auf die Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks

  Literatur: Lp 6/34; Lb 6/139ff

- Zurückführen des Lösens von Systemen aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen auf das Lösen von linearen Gleichungen mit einer Variablen

  Literatur: Lp 9/27; Lb 9/63ff

- Zurückführen des Lösens quadratischer Gleichungen auf das Lösen linearer Gleichungen durch Zerlegen in Linearfaktoren

  Literatur: Lp 9/33; 35, 36; Lb 9/122f

- Zurückführen des Sinus- und des Kosinussatzes sowie der Flächeninhaltsformel $A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ auf Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck

  Literatur: Lp 10/43; Lb 10/47ff

(26) *Lösen Sie folgendes Gleichungssystem:*
Erläutern Sie dabei das Prinzip des Zurückführens von Problemen auf bereits gelöste Probleme!

$$3x + 4y = 10$$
$$2x - 3y = 1$$

b) *Zum Durchführen vollständiger Fallunterscheidungen*

Die Schüler haben an verschiedenen Stellen Fallunterscheidungen angewandt Hier soll die Erkenntnis gefestigt werden, daß man wahre Aussagen über *alle* Objekte einer gegebenen Menge M auch beweisen kann, indem man den Beweis für alle *Teilmengen* von M führt, deren Vereinigungsmenge die Menge M ist.

Beispiele:

- Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz

  Literatur: Lp 7/46f; Lb 7/120f

– Potenzgesetz $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für alle natürlichen Zahlen m und n
Literatur: Lb 9/73
– Sinussatz und Kosinussatz
Literatur: Lb 10/47ff

(26) *Erläutern Sie am Beispiel des Beweises der folgenden Aussage das Prinzip des Zurückführens auf andere Aussagen und das Verfahren der vollständigen Fallunterscheidung!*
„Für alle Dreiecke gilt: Das Verhältnis der Längen zweier beliebiger Seiten ist gleich dem Verhältnis der Sinus der den betreffenden Seiten gegenüberliegenden Winkel."

(27) *Beweisen Sie durch Fallunterscheidung den Satz:*
„Für alle reellen Zahlen x gilt: $x^2 \geqq 0$"!

c) *Zum Führen indirekter Beweise*

Da dieses Problem den Schülern erfahrungsgemäß große Schwierigkeiten bereitet, soll hier eine *Variante* der Darstellung des Beweisverfahrens gebracht werden. Bei dieser werden die allgemeinen Aussagen und deren Erläuterungen am Beispiel nebeneinandergestellt.

Darstellung des Allgemeinen	**Beispiel**
Um eine Aussage A_1 als wahr nachzuweisen, kann man folgendermaßen vorgehen.	Es ist zu beweisen: A_1: Es gibt *keine* rationale Zahl, für die $x^2 = 2$ gilt.
1. Man nimmt an, daß das *Gegenteil* der Aussage A_1 wahr sei.	1. Annahme: Es gibt *eine* rationale Zahl x, für die $x^2 = 2$ gilt.
2. Man leitet unter Einbeziehung dieses als wahr angenommenen Gegenteils von A_1 eine weitere *Aussage* A_2 her. Diese Aussage A_2 ist das Gegenteil einer bekannten wahren Aussage.	2. Herleitung einer Aussage A_2: Wenn es eine rationale Zahl x gibt, dann kann sie in der Form $\frac{p}{q}(p, q \in G;\ q \neq 0)$ dargestellt werden, und es gilt: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2;\ p^2 = 2q^2$. Beim Zerlegen von p^2 und $2q^2$ in Primfaktoren würde sich als *Aussage* A_2 ergeben. Es gibt eine Zahl, die zwei verschiedene Primfaktorenzerlegungen besitzt; vgl. Lb 9/13, Zeilen 4 bis 12. Die Aussage A_2 ist das Gegenteil des bekannten Satzes: Alle natürlichen Zahlen haben genau eine Primfaktorenzerlegung.
3. Auf Grund der Tatsache, daß nicht gleichzeitig eine Aussage und ihr Gegenteil wahr sein können (das wäre ein logischer Widerspruch), muß gefolgert werden, daß die unter 1. genannte Annahme nicht gültig sein kann.	3. Es kann nicht gleichzeitig gelten: Es gibt *eine* Zahl, die mehr als eine Primfaktorenzerlegung hat. Es gibt *keine* Zahl, die mehr als eine Primfaktorenzerlegung hat. Also kann die Annahme „Es gibt eine rationale Zahl x, für die $x^2 = 2$ gilt" nicht wahr sein.
4. Also ist A_1 wahr.	4. Also gilt: Es gibt keine rationale Zahl x, für die $x^2 = 2$ gilt.

㉘ *Erläutern Sie am Beweis der folgenden Aussage den Begriff des indirekten Beweises!*
„Es gibt keine rationale Zahl x, für die $10^x = 3$ gilt"!

d) *Zum Beweisen durch Angeben eines Gegenbeispiels*

Oft wendet der Lehrer den Beweis durch Angabe eines Gegenbeispieles an, um den Schülern deutlich zu machen, daß beispielsweise die Umformung eines Termes nicht allgemeingültig ist.
Häufig vergessen die Schüler z. B. bei der binomischen Formel die Angabe des doppelten Produktes und schreiben: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ $(a, b \in P)$. Diese Gleichung hat zwar Lösungen, gilt aber nicht für *alle* reellen Zahlen.
Der Lehrer beweist dann den Schülern:
Es gilt *nicht für alle* Zahlen a, $b (a, b \in P)$:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2.$$

Er formt den Satz in eine äquivalente wahre Aussage um, indem er folgert:
Wenn *nicht für alle* a, b gilt: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$,

dann muß gelten:
Es gibt ein Zahlenpaar, für das gilt: $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$.

Und umgekehrt kann man sagen: Wenn es ein Zahlenpaar gibt, für das $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ gilt, kann nicht für alle Zahlenpaare $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ gelten.
Indem solch ein Zahlenpaar angegeben wird, ist der Beweis erbracht, daß

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

nicht allgemeingültig ist.

Im Zusammenhang mit diesem Beispiel wird die Erkenntnis gefestigt, daß für den Beweis einer Aussage der Form „Für alle . . ." der Nachweis der Gültigkeit dieser Aussage an Hand von (auch noch so zahlreichen) Einzelfällen nicht ausreicht, aber für die Widerlegung der Gültigkeit einer Aussage „Für alle . . ." die Angabe eines sogenannten „Gegenbeispiels" genügt.

㉙ *Weisen Sie durch ein Gegenbeispiel nach, daß folgende Aussage nicht wahr ist!*
„Die Summe $x^2 + x + 11$ ist für jede natürliche Zahl x eine Primzahl".

Literatur: Lp 6/21; Lb 6/10

3.4. Abstraktion und Fachsprache in der Mathematik
(Vorschlag für eine Unterrichtsstunde)

In einer Unterrichtsstunde nach der schriftlichen Prüfung könnten den Schülern noch einmal im Sinne einer Zusammenfassung ihrer bisherigen Erkenntnisse einige spezifische Probleme der Mathematik bewußt gemacht werden.
Bei dem hier vorgelegten Stundenentwurf wird jeweils auf Material verwiesen, das im Anschluß an die methodischen Hinweise zusammengestellt ist.
Als Hausaufgabe kann zur Vorbereitung auf diese Stunde die Aufgabe des jungen LENIN gestellt werden; vgl. Uh 182, Auftrag 30.
Ferner kann man den Strahlensatz, die Ähnlichkeitsabbildungen und die Definition des Begriffes Funktion wiederholen lassen.

Es ist zweckmäßig, das auf Uh 181 vorgeschlagene Material 1. „Einige Merkmale der Mathematik" für jeden Schüler vorzubereiten. Der Lehrer entscheidet entsprechend seiner Konzeption für den Ablauf der Stunde über den Zeitpunkt des Einsatzes dieses Blattes während der Stunde.

Die Stunde könnte folgendermaßen ablaufen.

Die Lösung der Aufgabe des jungen LENIN wird durch Schüler vorgetragen. Wenn noch nicht bei der Erteilung der Aufgabe durch den Lehrer etwas mehr hierzu gesagt wurde, kann das jetzt nachgetragen werden. Man kann aber auch einem Schüler rechtzeitig den Auftrag übergeben, an dieser Stelle einen Kurzvortrag zu halten. Folgende Erkenntnis wird herausgearbeitet.
Mit Hilfe der *mathematischen Zeichensprache* kann man Zusammenhänge übersichtlich darstellen. Sie hilft beim Auffinden und Beweisen gesetzmäßiger Zusammenhänge. Es wird besonders herausgestellt, daß man mit Hilfe von Variablen Wesentliches herausheben (herausstellen, erfassen) kann.

Es schließt sich eine kurze Darlegung des Lehrers zur *Entwicklung der Fachsprache* an; vgl. Uh 182, Material 3. Die Darlegungen zum System der Zeichen in der Mathematik sollen an dieser Stelle sehr kurz gehalten werden.

Es folgen die Betrachtungen zum *Abstraktionsprozeß*. Hierzu kann Uh 183f, Material 4., in folgender Weise genutzt werden.
Hat man die technischen Voraussetzungen, läßt sich ein Arbeitsblatt herstellen, in dem nur die 1. Spalte ausgefüllt ist. Aber auch an der Tafel kann man so vorgehen und sollte es auch im Falle des Einsatzes eines Arbeitsblattes parallel dazu tun. Gemeinsam werden die Spalten 2 und 3 ausgefüllt. In folgender Weise kann an das im ersten Teil der Stunde Behandelte angeknüpft werden: „Wir haben gelernt: Die Fachsprache der Mathematik entwickelt sich zusammen mit der Mathematik, d. h. auch mit ihren Begriffen. Mit Hilfe von Variablen kann man Wesentliches herausheben. Wir wollen genauer untersuchen, wie das Abstrahieren vor sich geht."

Als Hausaufgabe kann gestellt werden, das LENIN-Zitat im Lb 9/1 zu durchdenken.
„Dadurch, daß das Denken vom Konkreten zum Abstrakten aufsteigt, entfernt es sich ... nicht *von* der Wahrheit, sondern es kommt ihr näher. Die Abstraktion der *Materie*, des Natur*gesetzes*, die Abstraktion des *Wertes* usw., mit einem Wort *alle* wissenschaftlichen ... Abstraktionen spiegeln die Natur tiefer, getreuer, *vollständiger* wider."
LENIN: Aus dem philosophischen Nachlaß

Materialzusammenstellung

1. Einige Merkmale der Mathematik

1. Zur Bedeutung der Mathematik

Die Mathematik mit ihren Begriffen, ihren Methoden und ihrer Fachsprache ist ein Instrument

- zum Erkennen der Gesetzmäßigkeiten in vielen Bereichen;
- zum Lösen von Aufgaben, die der Wissenschaft und der Technik durch die Gesellschaft gestellt werden.

2. *Zur Fachsprache der Mathematik*

- Das Abstrahieren wird durch Worte und Zeichen (die Sprache) unterstützt.
- Die Fachsprache der Mathematik enthält ein umfangreiches System von Zeichen. Diese mathematische Symbolsprache ist durch die Mathematiker im Laufe der Jahrhunderte sehr weit entwickelt worden, und sie wird ständig weiterentwickelt.
- Mit Hilfe der mathematischen Zeichensprache kann man Zusammenhänge in übersichtlicher und knapper Form darstellen, und sie hilft beim Auffinden und Beweisen gesetzmäßiger Zusammenhänge.

2. Eine Aufgabe des jungen LENIN

In der Familie ULJANOW war die Mathematik sehr beliebt. LENINS Mutter und Vater waren Lehrer und unterrichteten auch Mathematik. LENINS älterer Bruder Alexander und seine Schwester Anna trieben leidenschaftlich gerne Mathematik. Damals war der Mathematikunterricht an den Schulen noch zu wenig entwickelt, und der Vater förderte seine Kinder durch außerschulische Beschäftigung mit Mathematik. LENIN hatte im Abschlußzeugnis in Mathematik ein „Sehr gut". LENIN liebte es, seinen Schulkameraden etwas ausgefallene Aufgaben zu stellen. Er erfand sie selbst oder suchte sie aus Büchern seines Vaters zusammen. LENIN leitete auch einen Mathematikzirkel und half damit seinen Klassenkameraden, die Aufgaben der Reifeprüfung erfolgreich zu lösen.

LENINS Vetter WERETENNIKOW berichtet in seinen Erinnerungen an die gemeinsam mit LENIN verbrachte Jugendzeit:
„Wolodja wies ... darauf hin, wie man das Quadrieren einer auf 5 endenden Zahl vereinfachen kann. Er gab zwei Beispiele, überließ es aber mir selbst, diese Regel abzuleiten und allgemein zu beweisen.

$$65^2 = 6 \cdot 7 \cdot 100 + 25;\ 105^2 = 10 \cdot 11 \cdot 100 + 25"$$

30 a) *Berechnen Sie nach diesem Verfahren* 35^2, 75^2, 85^2 *im Kopf!*
b) *Formulieren Sie diese Gesetzmäßigkeit mit Hilfe von Variablen!*
c) *Beweisen Sie diese Gesetzmäßigkeit!*

Lösung des Auftrages 30

a) $35^2 = 3 \cdot 4 \cdot 100 + 25 = 1225$; $75^2 = 7 \cdot 8 \cdot 100 + 25 = 5625$;
$85^2 = 8 \cdot 9 \cdot 100 + 25 = 7225$

b) $(a \cdot 10 + 5)^2 = a(a+1) \cdot 100 + 25 \quad (a \in N)$

c) $100a^2 + 100a + 25 = 100a^2 + 100a + 25$

Die letzte Gleichung wird für jede natürliche Zahl a zu einer wahren Aussage, also ist die Ausgangsgleichung allgemeingültig.

3. Zur Entwicklung der mathematischen Symbolik

Die eigentliche Entwicklung der algebraischen Symbolik setzte in Europa im 15. Jahrhundert ein, als mit dem Übergang von der Warenwirtschaft zur Geldwirtschaft auch wesentlich mehr Rechenaufgaben gelöst werden mußten.

Beispiele:

Um 1480	$+, -$	
1524	$\sqrt{}$	ADAM RIES
1557	$=$	
1691	Variable	VIETA
Um 1600	$\sqrt{}$, a^2, a^3	DESCARTES
1631	$<, >$	

Die Entwicklung der Wirtschaft und des Handels erforderte eine ständige Weiterentwicklung der Mathematik und damit der Instrumente der Mathematik – ihrer Symbolik (m. a. W. ihrer Fachsprache und als deren Teil des Zeichensystems). Das gilt genau so heute und in Zukunft.
Hieran erkennt man auch, wie schnell die Entwicklung der Wissenschaft vor sich geht. Was vor etwa 400 Jahren neuester Stand der Wissenschaft war, lernen heute bei uns in der DDR die Kinder in der 1. Klasse (+, −, =, <, >, Variable).
Die Schüler der polytechnischen Oberschule lernen bis zur 10. Klasse Begriffe kennen, die in der heutigen Mathematik große Bedeutung haben, z. B. den Funktionsbegriff, den Abbildungsbegriff, den Mengenbegriff. Natürlich lernen sie damit nur einen ganz kleinen Teil des heutigen Wissens kennen. Hieran wird die allgemeine Entwicklungsgesetzmäßigkeit deutlich: Jede Generation eignet sich das Wissen der vorangegangenen Generation an und baut darauf auf.

4. Zum Abstraktionsprozeß

Vorschlag für ein Tafelbild oder Arbeitsblatt

Abstrahieren →

Sachverhalte, Objekte	Den Sachverhalten oder Objekten gemeinsam	Begriff
$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ $\frac{3}{2} \cdot 7 = 7 \cdot \frac{3}{2}$ $(-3) \cdot 5 = 5 \cdot (-3)$	$a \cdot b = b \cdot a$ $(a, b \in P)$	Kommutativität der Multiplikation reeller Zahlen
$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SB_1}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SB_2}}$ $\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2}$ (v_1, v_2 Geschwindigkeit; s_1, s_2 zurückgelegte Wegstrecken) $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$ (p_1, p_2 Drücke; T_1, T_2 absolute Temperaturen)	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	Verhältnisgleichung
Spiegelungen Drehungen Verschiebungen Zentrische Streckungen	Winkelkongruenz $\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC$ Streckenverhältnisse sind konstant $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$	Ähnlichkeitsabbildung
$s = v \cdot t$ ($s \sim t$) (s: Weg; t: Zeit) $I = \frac{1}{R} \cdot U$ ($I \sim U$) (I: Stromstärke; U: Spannung) $m_2 = k \cdot m_1$ ($m_2 \sim m_1$) (m_1, m_2: An einer chemischen Reaktion beteiligte Massen)	Direkte Proportionalität $y = m \cdot x$ ($y \sim x$)	Lineare Funktion

· Relative Luftfeuchtigkeit im Verlaufe eines Tages · Körperlänge in Abhängigkeit vom Lebensalter · Benzinverbrauch eines Kraftwagens · Fahrplan einer Eisenbahnstrecke · Jeder natürlichen Zahl außer Null und 1 wird ihr größter Primfaktor zugeordnet. · Jeder natürlichen Zahl wird auf Grund der Gleichung $y = 3x$ eine andere natürliche Zahl zugeordnet.	Existenz einer Menge A und einer Menge B Jedes Element von A wird auf genau ein Element von B abgebildet	Funktion

Literaturverzeichnis

Abkürzungen:

Päd Zeitschrift „Pädagogik", Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin
MSch Zeitschrift „Mathematik in der Schule", Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin
Eine Ziffer in Klammern hinter der Angabe der bibliographischen Daten – z. B. (1.4.) – bedeutet einen speziellen Beitrag für die Gestaltung des betreffenden Stoffgebietes bzw. der Stoffeinheit. Bei Titeln allgemeinen Charakters fehlt eine solche Angabe.

[G 1] Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem. Vom 25. Februar 1965
[G 2] Lehrplan für Mathematik, Klassen 6 bis 8. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968
[G 3] Lehrplan für Mathematik, Klassen 9 und 10. Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1969
[G 4] Bericht des Zentralkomitees der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands an den IX. Parteitag der SED. Dietz Verlag, Berlin 1976
[G 5] VIII. Pädagogischer Kongreß der Deutschen Demokratischen Republik vom 18. bis 20. Oktober 1978 – Protokoll. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1979

[1] Adelt, L.: Zur Verbesserung von Schülerleistungen im Planimetrieunterricht der Klassen 6 bis 8 mit Hilfe von Folien zum Schreibprojektor. Dissertation, Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR, Berlin 1970 – (2.)
[2] Allgemeinbildung – Lehrplanwerk – Unterricht. Ausgearbeitet von einem Autorenkollektiv unter Leitung von G. Neuner, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972
[3] Bauer, E.: Die Entwicklung der Fähigkeit zum Problemlösen mit programmierten Lehrbüchern im Mathematikunterricht, untersucht am Stoffgebiet „Trigonometrie" der 10. Klassen der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen. Dissertation, Deutsches Pädagogisches Zentralinstitut, Berlin 1968 – (1.4.)
[4] Bienert, K.: Ein Beitrag zur ebenen Trigonometrie. MSch Jg. 2 (1964), H. 10, S. 793 – (1.4.)
[5] Bittner, Ilse, Kubicek, Tietz: Mathematik in Übersichten – Wissensspeicher für die Klassen 8 bis 10. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973
[6] Bock, H.: Allgemeingültige Gleichungen im Stoffgebiet „Winkelfunktionen". MSch Jg. 4 (1966), H. 8, S. 609 – (1.)
[7] Bock, H.: Beschreibung algorithmischer Prozesse unter Verwendung von Zyklen – Beispiele aus dem mathematischen Schulstoff. MSch Jg. 8 (1970), H. 7, S. 492
[8] Bock, H., und W. Walsch: Zum logischen Denken im Mathematikunterricht. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1975
[9] Bohne, E.: Methoden zur Behandlung ebener Schintte an ebenflächig begrenzten Körpern. MSch Jg. 5 (1967), H. 3, S. 183 – (2.)
[10] Boltjanskij, V. G.: Zur Analyse beim Lösen von Aufgaben. MSch Jg. 13 (1975), H. 8, S. 443
[11] Bruchhold, H.: Vorschlag für einige Arbeitsblätter zum Stoffgebiet „2. Körperdarstellung und Körperberechnung", Klasse 10. MSch Jg. 9 (1971), H. 12, S. 745 – (2.)
[12] Buche, M.: Probleme des Aufbaus und der Nutzung algorithmischer Vorschriften im Mathematikunterricht der Oberschule. MSch Jg. 9 (1971), H. 4, S. 261
[13] Eichler, Ch.: Denkweisen des EDV im Mathematikunterricht – Lektion im Zentralen Mathematiklager des Bezirkes Dresden. MSch Jg. 8 (1970), H. 6, S. 461
[14] Fanghänel, G.: Zu einigen Fragen der ideologischen Erziehung im Mathematikunterricht. MSch Jg. 12 (1974), H. 10, S. 545
[15] Fanghänel, G.: Zu einigen Problemen der didaktisch-methodischen Gestaltung des Aufgabenlösens. MSch Jg. 13 (1975), H. 8, S. 443

[16] Frankiewicz, H.: Polytechnische Bildung – Aspekt oder Fach der Allgemeinbildung. Päd. Jg. 23 (1968), H. 4, S. 293
[17] Fregin, W.: Die Arbeit mit Übungstafeln, Grundwissensspeichern und Übersichten. MSch Jg. 6 (1968), H. 7, S. 530
[18] Gesamtbedarfsplan für Unterrichtsmittel im obligatorischen Unterricht der erweiterten allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule der DDR, ergänzt durch die Bedarfspläne der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule der DDR, Klassen 9 und 10. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972, Titel-Nr. 300536
[19] Gimpel, M.: Zur Methodik der darstellenden Geometrie im Mathematikunterricht der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule der DDR. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973 – (2.)
[20] Glaser, K.-H.: Wie kann nach der Behandlung des Stoffgebiets „Winkelfunktionen" ein Wiederholungsprogramm realisiert werden? MSch Jg. 10 (1972), H. 5, S. 278 –(1.)
[21] Glass, W.: Beschreibung und Hinweise zum Unterrichtsmittel „Fadenmodelle". MSch Jg. 8 (1970), H. 2, S. 107 – (2.)
[22] Gomm, E.: Die Vorbereitung auf die Unterrichtsstunde. Päd Jg. 23 (1968), H. 11, S. 986
[23] Hankel, W.: Ein Hinweis zur Verwendung der Maniperm-Klapptafel. MSch Jg. 3 (1965), H. 4, S. 314 – (2.)
[24] Herrmann, D. B.: Aus der Entwicklung der Trigonometrie im Altertum. MSch Jg. 6 (1968), H. 9, S. 641 – (1.)
[25] Herzog, H.: Die Durchführung der Probe im Mathematikunterricht. MSch Jg. 2 (1964), H. 5, S. 346
[26] Herzog, H.: Einige Gedanken zum Thema „Schülerarbeitsblätter" und Vorschläge für die inhaltliche Gestaltung und Verwendung solchen Blätter in Klasse 8. MSch Jg. 8 (1970), H. 8, S. 561
[27] Hofmann, R.: Über ein Gerät zur Darstellung der Entstehung von Rotationskörpern und Kegelschnitten. MSch Jg. 5 (1967), H. 3, S. 183 – (2.)
[28] Hoffe, A.: Einige Überlegungen zur Bedeutung und Stellung der Kontrolle und deren Verfahren im Mathematikunterricht. MSch Jg. 8 (1970), H. 5, S..356
[29] Ilgner, K.: Ein Versuch zur Behandlung des Funktionsbegriffs in Klasse 8. MSch Jg. 3 (1965), H. 8, S. 597 – (1.)
[30] Ilgner, K.: Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens von Klasse 1 bis 10. MSch Jg. 12 (1974), H. 12, S. 693 – (2.)
[31] Ilgner, K.: Zur Behandlung der Stereometrie in Klasse 10. MSch Jg. 13 (1975), H. 2, S. 100 – (2.)
[32] Jungk, W.: Die Behandlung der Flächeninhalte bei Hilbert. MSch Jg. 8 (1970), H. 7, S. 506 – (2.)
[33] Jungk, W.: Eine Möglichkeit der Behandlung von Flächen- und Rauminhalten im Mathematikunterricht der Oberschule. MSch Jg. 9 (1971), H. 6, S. 369 – (2.)
[34] Jungk, W.: Zur Herleitung von Volumenformeln im Stereometrieunterricht. MSch Jg. 6 (1968), H. 3, S. 192 – (2.)
[35] Jungk, W.: Zur Geschichte der Flächen- und Volumenmessung. MSch Jg. 8 (1970), H. 4, S. 251 – (2.)
[36] Kaiser, G.: Methodische Leitprinzipien für den Mathematikunterricht. – (3.) Systematische unterrichtliche Behandlung von Beweisaufgaben. MSch Jg. 6 (1968), H. 10, S. 738
[37] Kannegiesser, K.: Lenin über den Mathematikunterricht. MSch Jg. 8 (1970), H. 4, S. 242
[38] Kegel, O., und F. Neigenfind: Zu Problemen mündlicher Prüfungen im Mathematikunterricht. MSch Jg. 4 (1966), H. 4, S. 247 – (3.)
[39] Kleine Enzyklopädie Mathematik. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1967
[40] Knoche, H.: Anwendungsbereites mathematisches Grundwissen in Klasse 10 durch rationelle und intensive Gestaltung der Festigung und Vertiefung mittels eines Systems von Aufgabenkarten mit Auswahllösungen. MSch Jg. 6 (1968), H. 11, S. 843

[41] KOMMERELL, K.: Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. Koehler und Amelang, Leipzig 1949 – (2.)
[42] Kompendium der Mathematik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968
[43] KOSSE, E.: Einige Bemerkungen zum Lösen von eingekleideten Aufgaben. MSch Jg. 2 (1964), H. 4, S. 308
[44] KRAMER, W.: Darstellende Geometrie. Band I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959 – (2.)
[45] KUSCH, J.: Zur mengentheoretischen Einführung des Funktionsbegriffes. MSch Jg. 3 (1965), H. 11, S. 827 – (1.)
[46] KUSCHMANN, D.: Methodische Leitprinzipien für den Mathematikunterricht – (2.) Das Prinzip der heuristischen Schulung. MSch Jg. 6 (1968) H. 5, S. 339
[47] LANDA, L. N.: Algorithmierung im Unterricht. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969
[48] LANGER, O., und W. TRÄGER: Sozialistische Wehrerziehung auch im Mathematikunterricht und in mathematischen Arbeitsgemeinschaften. MSch Jg. 8 (1970), H. 6, S. 414
[49] LANGER, O., und W. TRÄGER: Sozialistische Wehrerziehung im Mathematikunterricht. MSch Jg. 10 (1972), H. 3, S. 152 (Teil 1), H. 4, S. 205 (Teil 2)
[50] LEGEL, J.: Die abschließende Wiederholung im Mathematikunterricht der Klasse 10 und ihre Stellung im Prozeß der Gesamtwiederholung. MSch Jg. 7 (1969), H. 4, S. 268 – (3.)
[51] LEGEL, J.: Methoden und Formen einer intensiven und systematischen Wiederholung im Mathematikunterricht der Klasse 10. MSch Jg. 5 (1967), H. 1, S. 29
[52] LEISSE, H.: Zur Planung des Mathematikunterrichts mit Unterrichtshilfen. MSch Jg. 11 (1973), H. 6, S. 342
[53] LEY, H., und K.-F. WESSEL (Hrsg.): Weltanschaulich-philosophische Bildung im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Beiträge). Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1972
[54] LOPOVOK, L. M.: Einige Aufgaben des logischen Denkens im Mathematikunterricht der Klassen 7 bis 10. MSch Jg. 10 (1972), H. 3, S. 161 (Teil 1), H. 4, S. 241 (Teil 2), H. 8/9, S. 496 (Teil 3)
[55] LORENZ, G.: Zur Terminologie und Symbolik im Mathematikunterricht und ihrer Bedeutung für dessen Wissenschaftlichkeit. MSch Jg. 8 (1970), H. 2, S. 81
[56] LUTHER, W.: Zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens. MSch Jg. 3 (1965), H. 6, S. 459 – (2.)
[57] MADER, O.: Zur logischen Gliederung des Bildungs- und Erziehungsziels. Päd Jg. 21 (1966), H. 3, S. 219
[58] MADER, O.: Gedanken und Thesen zur Lehrplantheorie. Pädagogische Forschung, Jg. 16 (1975), H. 2, S. 43, und H. 4, S. 78
[59] Methodik Mathematikunterricht. Ausgearbeitet von einem Autorenkollektiv, herausgegeben von der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1975
[60] NEUNER, G.: Zur Theorie der sozialistischen Allgemeinbildung. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973
[61] VII. Pädagogischer Kongreß der Deutschen Dmokratischen Republik vom 5. bis 7. Mai 1970. Protokoll. Herausgegeben vom Ministerium für Volksbildung. Staatsverlag der DDR, Berlin 1971
[62] POLLOK, H.-J.: Über schöpferische geistige Fähigkeiten beim Aufgabenlösen im Mathematikunterricht. MSch Jg. 6 (1968), H. 7, S. 496
[63] POLLOK, H.-J.: W. I. LENIN und Fragen des gesellschaftlichen und wissenschaftlichen Schöpfertums. MSch Jg. 8 (1970), H. 5, S. 321
[64] REDECKER, G.: Einheitlichkeit bei der Lösung von Aufgaben im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. MSch Jg. 7 (1969), H. 6, 461
[65] RENTNER, W.-D.: Über einige dem fachwissenschaftlichen Gegenstand des Mathematikunterrichts entsprechende Aspekte der ideologischen Bildung und Erziehung. MSch Jg. 10 (1972), H. 5, S. 257
[66] RICHTER, D.: Die Anwendung mathematischer Begriffe zur Widerspiegelung ge-

meinsamer Eigenschaften von unterschiedlichen Sachverhalten der Praxis. MSch Jg. 6 (1968). H. 1, S. 65
[67] Ritter, K.: Über einige wesentliche Gestaltungsmerkmale eines modernen Mathematikunterrichts. MSch Jg. 7 (1969), H. 8, S. 562
[68] Rösel, R.: Regelmäßige Übungen führen zu sicheren Kenntnissen. Mathematik und Physik in der Schule, Berlin. Jg. 9 (1962), H. 3, S. 184
[69] Rösel, R.: Beispiele zur Sicherung des Ausgangsniveaus im Mathematikunterricht. MSch Jg. 10 (1972), H. 1, S. 45
[70] Rossa, E.: Zur Einheit von Bildung und Erziehung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Päd. Jg. 24 (1969), H. 12, S. 1120
[71] Salkowski, E.: Darstellende Geometrie. Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig 1959 – (2.)
[72] Schauer, R.: Welche Vorstellungen verbinden unsere Schüler mit dem Begriff „Funktion"? MSch Jg. 2 (1964), H. 3, S. 215 – (1.)
[73] Schlosser, G.: Über den Einfluß der Aufgabenstellung auf die Entwicklung der Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler. MSch Jg. 8 (1970), H. 4, S. 263
[74] Schröder, E.: Ein geometrisches Modell und sein Einsatz in der Mathematikausbildung. MSch Jg. 5 (1967), H. 10, S. 757 – (2).
[75] Schroeter, A.: Darstellende Geometrie – Hinweise zum Unterricht in der Ein- und Zweitafelprojektion. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1961 – (2.).
[76] Schroeter, A.: Darstellende Geometrie – Projektion des Kreises und der Kugel Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1966 – (2.)
[77] Schulz, R.: Methodische Leitprinzipien für den Mathematikunterricht – (4.) Prinzipien zur Gestaltung von Übungsstunden. MSch Jg. 7 (1969), H. 11, S. 832
[78] Stahl, F., und E. Wenzel: Elektronische Datenverarbeitung. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1975
[79] Strech, K.: Weltanschauung und Mathematikunterricht – Ein Diskussionsbeitrag über den Anteil des Mathematikunterrichts an der weltanschaulichen Bildung und Erziehung. MSch Jg. 12 (1974), H. 7, S. 353
[80] Tabellen und Formeln – Mathematik, Physik, Chemie. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973
[81] Thrams, H.: Einige Gedanken zur Notwendigkeit erkenntnistheoretischer und wissenschaftshistorischer Betrachtungen im Mathematikunterricht der sozialistischen Schule – Ein Beitrag zur weltanschaulich-philosophischen Bildung und Erziehung im Mathematikunterricht. MSch Jg. 8 (1970), H. 9, S. 653
[82] Tietz, W.: Zur Definition des Funktionsbegriffes. MSch Jg. 1 (1963), H. 3, S. 161 – (1.)
[83] Tietz, W.: Beispiele zum Abbildungsbegriff. MSch Jg. 6 (1968), H. 1, S. 31, H. 2, S. 129
[84] Tietz, W.: Über sprachlich-logische Schulung im Mathematikunterricht. MSch Jg. 11 (1973), Teil 1 H. 10, S. 561, Teil 2 H. 11, S. 620, Jg. 12 (1974), Teil 3 H. 3, S. 152, Teil 4 H. 5/6, S. 268
[85] Vogel, R.: Einige Aspekte staatsbürgerlicher Erziehung im Mathematikunterricht. MSch Jg. 10 (1972), Teil 1 H. 10, S. 545, Jg. 11 (1973), Teil 2 H..1, S. 1
[86] Wahrenholz, R.: Über die Steigerung der Effektivität im Geometrieunterricht durch Einsatz von Lehrprogrammen und Algorithmen – Auswertung und Untersuchung bei der Behandlung des Stoffgebietes „Axiale Symmetrie" in Klasse 6. MSch Jg. 8 (1970), H. 8, S. 590
[87] Walsch, W.: Bemerkungen zur Einheit von sprachlicher und logischer Bildung im Mathematikunterricht. MSch Jg: 5 (1967), H. 7, S. 490
[88] Weber, K.: Neue Lehrpläne für den Mathematikunterricht der Klassen 6,7 und 8. MSch Jg. 7 (1969), H. 1, S. 1
[89] Weber, K.: Neue Lehrpläne für den Mathematikunterricht der Klassen 9 und 10. MSch Jg. 8 (1970), H. 5, S. 345 und H. 6, S. 439
[90] Weber, K.: Zur Realisierung des polytechnischen Prinzips im Mathematikunterricht. MSch Jg. 13 (1975), H. 10, S. 545
[91] Weber, W.: Ein Weg zur rechnerischen Lösung von Anwendungsaufgaben der ebenen Trigonometrie. MSch Jg. 4 (1966), H. 1, S. 41 – (1.4.)

[92] Wendt, L.: Programmierte Leistungskontrollen. MSch Jg. 5 (1967), H. 6, S. 481
[93] Wiesemann, H.: Methodische Leitprinzipien für den Mathematikunterricht – (1.) Prinzip der Aktivierung der Schüler. MSch Jg. 5 (1967), H. 8, S. 582
[94] Willm, E., und G. Schwabe: Kantenmodelle für die Grundaufgaben der Darstellenden Geometrie in Klasse 7. MSch Jg. 8 (1970), H. 4, S. 205 – (2.)
[95] Wolkow, G. N.: Mathematik in der Familie W. I. Lenins. MSch Jg. 8 (1970), H. 3, S. 162
[96] Wussing, H., und W. Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1975
[97] Zoll, S.: Rationelle Leistungskontrollen. MSch Jg. 6 (1968), H. 6, S. 434
[98] Brückner, H.: Anregungen zur Vorbereitung der mündlichen Abschlußprüfung. MSch Jg. 17 (1979), H. 2/3, S. 119 – (3.)
[99] Stoye, W.: Zu den Graphen der Funktionen sin und cos. MSch Jg. 17 (1979), H. 5, S. 235 – (1.1.; 1.2.)
[100] Zeitz, G.: Einige Erfahrungen zur Gestaltung von Prüfungsthemen für die Abschlußprüfung im Fach Mathematik. MSch Jg. 18 (1980), H. 4, S. 171 – (3.)

Kurzwort: 002166 UH MATHE 10. Kl.
DDR 6.50 M